



**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**UM ESTUDO COMPARATIVO ANALÍTICO-NUMÉRICO  
DE ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS EM CASCAS  
CILÍNDRICAS ABERTAS OU COM CONEXÕES DE  
BORDA**

**IURI AUGUSTO ALVES LUSTOSA**

**ORIENTADOR: LINEU JOSÉ PEDROSO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E  
CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.DM - 003A/11**

**BRASÍLIA/DF: MARÇO – 2011**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**UM ESTUDO COMPARATIVO ANALÍTICO-NUMÉRICO  
DE ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS EM CASCAS  
CILÍNDRICAS ABERTAS OU COM CONEXÕES DE  
BORDA**

**IURI AUGUSTO ALVES LUSTOSA**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:

---

**Prof. Lineu José Pedroso, Dr. Ing. (UnB)**  
(Orientador)

---

**Prof. Luciano Mendes Bezerra, PhD (UnB)**  
(Examinador Interno)

---

**Prof. Zenón José Guzmán Del Prado, DSc (UFG)**  
(Examinador Externo)

**BRASÍLIA/DF, 31 DE MARÇO DE 2011**

## FICHA CATALOGRÁFICA

LUSTOSA, IURI AUGUSTO ALVES

Um estudo comparativo analítico-numérico de esforços e deslocamentos em cascas cilíndricas abertas ou com conexões de borda [Distrito Federal] 2011. xxvi, 168p. 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2011).  
Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.  
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1.Cascas cilíndricas

3.Regime de membrana

I. ENC/FT/UnB

2.Cascas esféricas

4.Teoria flexional

II. Título (série)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

LUSTOSA, I. A. A. (2011). Um estudo comparativo analítico-numérico de esforços e deslocamentos em cascas cilíndricas abertas ou com conexões de borda. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-003A/11, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 164p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Iuri Augusto Alves Lustosa

TÍTULO: Um estudo comparativo analítico-numérico de esforços e deslocamentos em cascas cilíndricas abertas ou com conexões de borda

GRAU: Mestre

ANO: 2011

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Iuri Augusto Alves Lustosa  
UnB Colina, Bloco K – Apto.202,– AsaNorte.  
70.910-900 Brasília – DF – Brasil.  
e-mail: iuri@unb.br

## AGRADECIMENTOS

Inicialmente a Deus, pela vida.

Aos meus pais, Isabel e Lustosa, por o amor que têm por min.

Ao meu padrasto Josué, por sempre me dar todo apoio necessário para eu estar aqui hoje.

Aos meus irmãos Silas, Olga, Keila, Zé Renato, Anamaria, Ianna, Miriam, Tarsila e Tercio, por serem as pessoas que me deram força todo este período mesmo estando longe.

Aos meus avós, Maria Antônia e Augusto (*in memoriam*) por o incalculável e incondicional amor.

A minha madrinha pelo amor e carinho.

Ao amigo Ricardo de Fortaleza.

A minha Amiga Gabriela, por sua amizade verdadeira.

A meus tios, Antoninha e Elias, meus primos Dora, Cláudia e Emílio, por me receberem aqui em Brasília de braços abertos me dando apoio para iniciar e concluir esta etapa.

Ao professor Lineu Pedroso, pela amizade, atenção, paciência, dedicação e além das valorosas contribuições dadas ao longo desta dissertação de mestrado.

Ao professor Zenon pelas sugestões e contribuições dadas durante o desenvolvimento da dissertação.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC) da Universidade de Brasília (UnB) pelos ensinamentos transmitidos, e em especial ao professor Luciano por sugestões dadas ao trabalho.

Ao CNPq, pelo financiamento da bolsa de mestrado.

A Eva secretária do PECC por desempenhar bem suas atividades e contribuir de forma positiva para o programa.

Aos amigos conterrâneos Wallison, Junior e Renata, por todas as ajudas e companheirismo.

Aos meus amigos de pós-graduação, Ramon, Sebastião, Círio, Rogério, Marcus, Urubatan, Elaine, Henrique, Jorge, Abdala, Morgana, Fábio, Marcus, Alejandro, pelo companheirismo e auxílio durante o mestrado.

Dedicado este trabalho a minha mãe Isabel, minha avó Maria Antônia, e ao meu avô Augusto (*in memoriam*), pelo amor e carinho incondicional e por serem as pessoas quem sempre me inspiram na conquista dos meus sonhos.

## **RESUMO**

### **UM ESTUDO COMPARATIVO ANALÍTICO-NUMÉRICO DE ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS EM CASCAS CILÍNDRICAS ABERTAS OU COM CONEXÕES DE BORDA**

**Autor: Iuri Augusto Alves Lustosa**

**Orientador: Lineu José Pedroso, Dr. Ing.**

**Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, Março de 2011**

O estudo de cascas cada vez mais se torna relevante no meio científico. É importante o conhecimento do comportamento estrutural destas estruturas, principalmente quando esbeltas e expostas a grandes esforços. Neste trabalho é apresentada uma metodologia para o cálculo analítico e numérico de cascas cilíndricas e esféricas, comparando formulações clássicas disponíveis na literatura com os resultados numéricos obtidos no software ANSYS. Na modelagem das cascas foi utilizado o elemento SHELL63 da biblioteca do programa ANSYS. O estudo de caso se trata de um modelo de reservatório de água, com recipiente em casca cilíndrica e fundo em placa circular apoiada em solo rígido. Foi elaborada também uma metodologia para a modelagem do reservatório, onde a questão de simetria será abordada na análise. Foram geradas tabelas com equações para diversos casos de carregamentos aplicados em cascas cilíndricas e esféricas e também arquivos de textos (SCRIPTS) para alguns casos de cascas usando os programas Maple e ANSYS.

## **ABSTRACT**

### **A COMPARATIVE STUDY OF NUMERICAL-ANALYTICAL OF THE EFFORTS AND DISPLACEMENT IN OPEN CYLINDRICAL SHELLS OR WITH CONNECTIONS IN THE EDGE**

**Author: Iuri Augusto Alves Lustosa**

**Supervisor: Lineu José Pedroso, Dr. Ing.**

**Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, March of 2011**

The study of shells becomes more important in the scientific means. It is important to understand the structural behaviour of these structures because these are very slender and are exposed to great efforts. This work presents a methodology for analytical and numerical calculations of cylindrical and spherical shells, comparing traditional formulations presented in the literature with the numerical results obtained with the ANSYS software. In the modelling of the shell, element SHELL63 was used from ANSYS library. The case studied is a model of a water reservoir, with a container shaped as a cylindrical shell and bottom circular plate resting on hard ground. It was also elaborated a methodology for modelling the reservoir, where the symmetry issue will be addressed in the analysis. Tables were created containing equations for different cases of applied loads in cylindrical and spherical shells as well as text files (scripts) for some cases of shells using the Maple and ANSYS programs.



## SUMÁRIO

<b>1 – INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 – GENERALIDADES.....</b>	<b>1</b>
<b>1.2 – MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA.....</b>	<b>3</b>
<b>1.3 - COLOCAÇÃO DO PROBLEMA.....</b>	<b>3</b>
<b>1.4 – METODOLOGIA.....</b>	<b>4</b>
<b>1.5 – OBJETIVOS.....</b>	<b>5</b>
<b>1.5.1 – Objetivo geral.....</b>	<b>5</b>
<b>1.5.2 – Objetivos específicos.....</b>	<b>5</b>
<b>1.6 – ABRANGÊNCIA, LIMITAÇÕES E DIFICULDADES .....</b>	<b>5</b>
<b>1.7 – ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....</b>	<b>6</b>
<b>2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>8</b>
<b>2.1 – INTRODUÇÃO.....</b>	<b>8</b>
<b>2.2 – PRINCIPAIS ESTUDOS .....</b>	<b>8</b>
<b>3 – DESENVOLVIMENTO TEÓRICO – CASCAS DE REVOLUÇÃO COM CARREGAMENTO AXISSIMÉTRICO .....</b>	<b>13</b>
<b>3.1 – INTRODUÇÃO.....</b>	<b>13</b>
<b>3.1.1 – Hipóteses gerais.....</b>	<b>13</b>
<b>3.2 – REGIME DE MEMBRANA PARA CASCAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS AXISSIMÉTRICAS .....</b>	<b>14</b>
<b>3.2.1 – Introdução .....</b>	<b>14</b>
<b>3.2.2 – Desenvolvimento dos esforços e deslocamentos em regime de membrana</b>	<b>14</b>
<b>3.2.3 – Expressões para esforços e deslocamentos adaptados às estruturas em estudo .....</b>	<b>19</b>
<b>3.3 – TEORIA FLEXIONAL.....</b>	<b>30</b>
<b>3.3.1 – Introdução .....</b>	<b>30</b>
<b>3.3.2 – Casca cilíndrica.....</b>	<b>30</b>
<b>3.3.3 – Casca esférica .....</b>	<b>41</b>
<b>3.3.4 – Teoria flexional para placas circulares.....</b>	<b>49</b>
<b>3.3.5 – Teoria flexional para anel de borda.....</b>	<b>52</b>
<b>4 – MÉTODO DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO ACOPLAMENTO ENTRE A CASCA RECIPIENTE E OS ELEMENTOS DE FECHAMENTO .....</b>	<b>54</b>

4.1 – MÉTODO DAS FORÇAS.....	54
5 – MODELIZAÇÃO NUMÉRICA E ASPECTOS COMPUTACIONAIS.....	67
6 – RESULTADOS .....	74
6.1 - INTRODUÇÃO .....	74
6.2 – VALIDAÇÃO E QUALIFICAÇÃO DOS RESULTADOS.....	74
6.3 – ESTUDOS DE CASO .....	99
7 – CONCLUSÕES, SUGESTÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS.....	141
7.1 – SÍNTESE DA DISSERTAÇÃO, CONCLUSÃO E CONTRIBUIÇÕES.....	141
7.2 - PERSPECTIVA.....	144
8 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	145
APÊNDICE A1 – SCRIPT UTILIZADO PARA GERAÇÃO DA PAREDE CILÍNDRICA DE UM RESERVATÓRIO EM REGIME DE MEMBRANA COM CARREGAMENTO HIDROSTÁTICO APLICADO.....	149
APÊNDICE A2 – SCRIPT PARA O MAPLE UTILIZADO PARA ANÁLISE RESERVATÓRIO CONSIDERANDO A PAREDE ENGASTADA SOB AÇÃO DO CARREGAMENTO HIDROSTÁTICO .....	153
ANEXO A – CLASSIFICAÇÃO DA CURVATURA GAUSSIANA EM CASCAS. ....	157
A.1 – CLASSIFICAÇÃO DAS SUPERFÍCIES DE CASCAS .....	157
ANEXO B – UM BREVE DESENVOLVIMENTO DA TEORIA DE PLACAS.....	159
B.1 – CLASSIFICAÇÃO DAS SUPERFÍCIES DE CASCAS.....	159

## LISTA DE TABELAS

TABELA 3.1 – CASCA ESFÉRICA SOB AÇÃO DO PESO PRÓPRIO VARIANDO EM FUNÇÃO DE $\varphi$ .	21
TABELA 3.2 – CASCA ESFÉRICA SOB AÇÃO DE UM CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO .....	22
TABELA 3.3 – CASCA ESFÉRICA SOB AÇÃO DE UMA CARGA CONCENTRADA PONTUAL .....	23
TABELA 3.4 – ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS EM UMA CASCA CILÍNDRICA SOB AÇÃO DE UM CARREGAMENTO HIDROSTÁTICO.....	25
TABELA 3.5 – ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS EM UMA CASCA CILÍNDRICA COM PRESSÃO INTERNA CONSTANTE.....	26
TABELA 3.6 – ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS EM UMA CASCA CILÍNDRICA COM CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO AO LONGO DA BORDA SUPERIOR LIVRE .....	27
TABELA 3.7 – ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS EM UMA CASCA CILÍNDRICA SOB AÇÃO DO PESO PRÓPRIO.....	28
TABELA 3.8 – TENSÕES NA CHAPA CIRCULAR DE ESPESSURA “ $h$ ” DEVIDO A DEFORMAÇÃO APLICADA – MODIFICADO BAKER ET AL.(1972).....	29
TABELA 3.9 – DEFORMAÇÃO NA CHAPA CIRCULAR DE ESPESSURA “ $h$ ” DEVIDO A UMA FORÇA “ $T$ ” APLICADA – MODIFICADO BAKER ET AL.(1972).....	29
TABELA 3.10 – DESLOCAMENTO E ROTAÇÕES AO LONGO DA CASCA CILÍNDRICA PARA O MOMENTO UNITÁRIO APLICADO NA BORDA.....	35
TABELA 3.11 – DESLOCAMENTO E ROTAÇÕES AO LONGO DA CASCA CILÍNDRICA PARA O ESFORÇO CORTANTE UNITÁRIO APLICADO EM UMA BORDA.....	36
TABELA 3.12 – DESLOCAMENTOS DE MEMBRANA (A) E HIPERESTÁTICOS (B) PARA CILINDRO SOB PRESSÃO CONSTANTE.....	38
TABELA 3.13 – DESLOCAMENTOS DE MEMBRANA (A) E HIPERESTÁTICOS (B) PARA CILINDRO SOB PRESSÃO HIDROSTÁTICA .....	39
TABELA 3.14 – SOLUÇÃO GERAL PARA CASCA CILÍNDRICAS SOB PRESSÃO CONSTANTE .....	40
TABELA 3.15 – SOLUÇÃO GERAL PARA CASCA CILÍNDRICAS SOB PRESSÃO HIDROSTÁTICA... ..	41
TABELA 6.1 – CARREGAMENTOS, PROPRIEDADES FÍSICAS E GEOMÉTRICAS PARA CASCA CILÍNDRICA SIMPLEMENTE APOIADA (CCSP).....	75
TABELA 6.2 – ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS NO TOPO E NA BASE DA CCSP SOB AÇÃO DO PESO PRÓPRIO .....	77
TABELA 6.3 – ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS NO TOPO E NA BASE DA CCSP SOB PRESSÃO CONSTANTE .....	81

TABELA 6.4 – ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS NO TOPO E NA BASE DA CCSP SOB PRESSÃO HIDROSTÁTICA.....	84
TABELA 6.5 – ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS NO TOPO E NA BASE DA CCSP SOB AÇÃO DE UM CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO AO LONGO DA BORDA SUPERIOR LIVRE.....	88
TABELA 6.6 – PROPRIEDADES FÍSICAS, GEOMÉTRICAS E CARGA PARA A PLACA CIRCULAR (PC).....	92
TABELA 6.7 – DEFLEXÃO, ROTAÇÃO E MOMENTOS NOS PONTOS ESPECIFICADOS.....	93
TABELA 6.8 – CARACTERÍSTICAS FÍSICAS E GEOMÉTRICAS DO RESERVATÓRIO CILÍNDRICO.	99
TABELA 6.9 – COMPARATIVO ANALÍTICO-NUMÉRICO DOS ESFORÇOS E DESLOCAMENTO PARA A PAREDE DO RESERVATÓRIO CILÍNDRICO COM LIGAÇÃO DO TIPO PÉ DESLIZANTE.....	103
TABELA 6.10 – RESULTADOS ANALÍTICO E NUMÉRICO DOS DESLOCAMENTOS AO LONGO DA PAREDE DO RESERVATÓRIO CILÍNDRICO COM LIGAÇÃO PAREDE-FUNDO DO TIPO ENGASTE PERFEITO .....	109
TABELA 6.11 – RESULTADOS ANALÍTICO E NUMÉRICO DOS ESFORÇOS AO LONGO DA PAREDE DO RESERVATÓRIO CILÍNDRICO COM LIGAÇÃO PAREDE-FUNDO(FUNDAÇÃO) DO TIPO ENGASTE PERFEITO .....	110
TABELA 6.12 – CONSIDERAÇÕES PARA O CASO IIA3 .....	119
TABELA 6.13 – RESULTADOS ANALÍTICOS NUMÉRICOS DOS ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS AO LONGO DA PAREDE DO RESERVATÓRIO ENGASTADO COM LAJE DE FUNDO FLEXÍVEL .....	121
TABELA 6.14 – CONSIDERAÇÕES PARA O CASO IIA4 .....	124
TABELA 6.15 – RESULTADOS ANALÍTICOS NUMÉRICOS DOS ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS AO LONGO DA PAREDE DO RESERVATÓRIO COM LAJE DE FUNDO RÍGIDO AXIALMENTE.....	126
TABELA 6.16 – CONSIDERAÇÕES PARA O CASO IIA5 .....	129
TABELA 6.17 – RESULTADOS ANALÍTICOS NUMÉRICOS PARA O CASO IIA5 .....	131
TABELA 6.18 – RESULTADOS ANALÍTICOS NUMÉRICOS PARA O CASO IIA6.....	135

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1– A) MUSEU OSCAR NIEMEYER; B) MUSEU DE ARTE CONTEMPORÂNEA DE NITERÓI.....	2
FIGURA 1.2 – RESERVATÓRIO CILÍNDRICO COM CAPACIDADE DE ATÉ 1000 LITROS (FONTE: WWW.MFMURAL.COM.BR) .....	2
FIGURA 2.1 – VÍNCULOS DA PAREDE DE UM RESERVATÓRIO COM O FUNDO – VENTURINI (1977) .....	10
FIGURA 3.1– APOIOS MÓVEIS DESLOCÁVEIS NAS DIREÇÕES NORMAL A SUPERFÍCIE MÉDIA EM UMA CASCA ESFÉRICA – MODIFICADO GRAVINA (1957) .....	15
FIGURA 3.2– APOIOS MÓVEIS NA DIREÇÃO HORIZONTAL A REAÇÃO DE APOIO DA BORDA EM UMA CASCA ESFÉRICA – MODIFICADO GRAVINA (1957) .....	15
FIGURA 3.3 – DIREÇÃO DOS ESFORÇOS MERIDIONAIS $N_{\varphi}$ E O VALOR DE $r$ .....	16
FIGURA 3.4 – DEFORMAÇÕES DE MEMBRANA EM UM CÍRCULO PARALELO; MODIFICADO TIMOSHENKO (1959) .....	17
FIGURA 3.5 – DETALHE DO ESFORÇO MERIDIONAL, RAIOS E ÂNGULOS DA CASCA ESFÉRICA ..	20
FIGURA 3.6 – DIREÇÃO DOS ESFORÇOS, DESLOCAMENTO E GEOMETRIA DO CILINDRO .....	24
FIGURA 3.7 – EQUILÍBRIO DOS ESFORÇOS EM UM ELEMENTO INFINITESIMAL DE CASCA .....	31
FIGURA 3.8 – A) DIREÇÃO POSITIVA DOS ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS NO CILINDRO; B) APLICAÇÃO DO HIPERESTÁTICO $X_1$ ; C) APLICAÇÃO DO HIPERESTÁTICO $X_2$ .....	34
FIGURA 3.9 – ELEMENTO INFINITESIMAL DE CASCA ESFÉRICA SUJEITO A ESFORÇOS DE FLEXÃO – TIMOSHENKO (1959) .....	42
FIGURA 3.10 – CASCA ESFÉRICA COM ESFORÇOS CORTANTE $H$ E MOMENTO $M$ APLICADO – MODIFICADO – BILLIGTON (1965) .....	42
FIGURA 3.11 – MÉTODO DAS FORÇAS APLICADO A CASCA ESFÉRICA SOB AÇÃO DO PESO PRÓPRIO.....	46
FIGURA 3.12 – MÉTODO DAS FORÇAS APLICADO A CASCA ESFÉRICA SOB AÇÃO DE CARGA DISTRIBUÍDA .....	47
FIGURA 3.13 – MÉTODO DAS FORÇAS APLICADO A CASCA ESFÉRICA SOB AÇÃO DE CARGA PONTUAL .....	47
FIGURA 3.14 – A) SOLUÇÃO GERAL; B) SOLUÇÃO DE MEMBRANA; C) E D) SOLUÇÃO FLEXIONAL .....	50

FIGURA 3.15 – ESFORÇO HORIZONTAL $H$ DISTRIBUÍDO NO ANEL DE BORDO –MODIFICADO BILLIGTON, 1965 .....	52
FIGURA 3.16 – MOMENTO APLICADO AO LONGO DA BORDA – MODIFICADO BILLIGTON, 1965 .....	52
FIGURA 4.1 – SISTEMA COM CONEXÃO DE TAMPA E FUNDO .....	55
FIGURA 4.2 – RESERVATÓRIO CILÍNDRICO EM ESTUDO COM PLACA CIRCULAR COMO LAJE DE FUNDO E APLICAÇÃO DE SUPERPOSIÇÃO DOS EFEITOS PARA APLICAÇÃO DO MÉTODO .....	57
FIGURA 5.1 – GEOMETRIA DO ELEMENTO SHELL63 (BIBLIOTECA DO ANSYS).....	67
FIGURA 5.2 – TENSÕES DE SAÍDA DO ELEMENTO SHELL63 (BIBLIOTECA DO ANSYS). ....	68
FIGURA 5.3 – RESERVATÓRIO CILÍNDRICO UTILIZADO NA MODELAGEM NUMÉRICA. ....	68
FIGURA 5.4 – MODELOS UTILIZADOS PARA ANÁLISE NUMÉRICA NO ANSYS. ....	69
FIGURA 5.5 – CONDIÇÕES DE APOIOS PARA A PLACA CIRCULAR E CASCA CILÍNDRICA PARA REGIME DE MEMBRANA.....	70
FIGURA 5.6 – CONDIÇÕES DE APOIOS PARA A PLACA CIRCULAR E CASCA CILÍNDRICA PARA REGIME FLEXIONAL. ....	70
FIGURA 5.7 – SISTEMA DE COORDENADAS LOCAIS APLICADAS AOS ATRIBUTOS DO ELEMENTO .....	71
FIGURA 5.8 – ANALOGIA DE ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS DE MEMBRANA EM CASCAS CILÍNDRICAS, ANALÍTICO (A) PROGRAMA ANSYS (B).....	72
FIGURA 5.9 – ANALOGIA DE ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS NO ESTADO FLEXIONAL EM CASCAS CILÍNDRICAS, ANALÍTICO (A) PROGRAMA ANSYS (B). ....	72
FIGURA 6.1– CASCAS CILÍNDRICA SIMPLEMENTE APOIADA SOB DIVERSAS CONDIÇÕES DE CARREGAMENTO.....	75
FIGURA 6.2 - DISCRETIZAÇÃO DAS MALHAS EM ELEMENTOS FINITOS PARA CASCA CILÍNDRICA. ....	76
FIGURA 6.3 - LINHAS DE ANÁLISE DOS ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS DA CASCA CILÍNDRICA. .....	77
FIGURA 6.4 – CURVA DOS DESLOCAMENTO RADIAIS ( $\Delta_r$ ) AO LONGO DO COMPRIMENTO EM UMA CASCA CILÍNDRICA SOB AÇÃO DO PESO PRÓPRIO.....	78
FIGURA 6.5 – CURVA DAS ROTAÇÕES ( $\Delta_\alpha$ ) AO LONGO DO COMPRIMENTO EM UMA CASCA CILÍNDRICA SOB AÇÃO DO PESO PRÓPRIO. ....	78
FIGURA 6.6 – CURVA DOS ESFORÇOS TANGENCIAIS ( $N_\theta$ ) AO LONGO DO COMPRIMENTO EM UMA CASCA CILÍNDRICA SOB AÇÃO DO PESO PRÓPRIO.....	79

FIGURA 6.7 – CURVA DOS ESFORÇOS MERIDIONAIS ( $N_\phi$ ) AO LONGO DO COMPRIMENTO EM UMA CASCA CILÍNDRICA SOB AÇÃO DO PESO PRÓPRIO.....	79
FIGURA 6.8 – ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA PARA O VALOR DO DESLOCAMENTO RADIAL ( $\Delta_r$ ) EM UMA CASCA CILÍNDRICA SOB AÇÃO DO PESO PRÓPRIO, EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE ELEMENTOS. ....	80
FIGURA 6.9 – VALORES DOS DESLOCAMENTOS RADIAIS ( $\Delta_r$ ) AO LONGO DO COMPRIMENTO DA CCSP SOB AÇÃO DE UMA PRESSÃO CONSTANTE.....	81
FIGURA 6.10 – VALORES DAS ROTAÇÕES ( $\Delta_\alpha$ ) AO LONGO DO COMPRIMENTO DA CCSP SOB AÇÃO DE UMA PRESSÃO CONSTANTE.....	82
FIGURA 6.11 – VALORES DOS ESFORÇOS TANGENCIAIS ( $N_\theta$ ) AO LONGO DO COMPRIMENTO DA CCSP SOB AÇÃO DE UMA PRESSÃO CONSTANTE.....	82
FIGURA 6.12 – VALORES DOS ESFORÇOS MERIDIONAIS ( $N_\phi$ ) AO LONGO DO COMPRIMENTO DA CCSP SOB AÇÃO DE UMA PRESSÃO CONSTANTE.....	83
FIGURA 6.13 – ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA PARA O VALOR DO DESLOCAMENTO RADIAL ( $\Delta_r$ ) EM UMA CASCA CILÍNDRICA SOB AÇÃO DE UMA PRESSÃO CONSTANTE, EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE ELEMENTOS.....	84
FIGURA 6.14 – VALORES DO DESLOCAMENTO RADIAL ( $\Delta_r$ ) AO LONGO DO COMPRIMENTO DA CCSP SOB AÇÃO DE UMA PRESSÃO HIDROSTÁTICA.....	85
FIGURA 6.15 – VALORES DAS ROTAÇÕES ( $\Delta_\alpha$ ) AO LONGO DO COMPRIMENTO DA CCSP SOB AÇÃO DE UMA PRESSÃO HIDROSTÁTICA.....	85
FIGURA 6.16 – VALORES DOS ESFORÇOS TANGENCIAIS ( $N_\theta$ ) AO LONGO DO COMPRIMENTO DA CCSP SOB AÇÃO DE UMA PRESSÃO HIDROSTÁTICA.....	86
FIGURA 6.17 – VALORES DOS ESFORÇOS MERIDIONAIS ( $N_\phi$ ) AO LONGO DO COMPRIMENTO DA CCSP SOB AÇÃO DE UMA PRESSÃO HIDROSTÁTICA.....	86
FIGURA 6.18 – CONVERGÊNCIA DO DESLOCAMENTO RADIAL ( $\Delta_r$ ) EM UMA CASCA CILÍNDRICA SOB AÇÃO DA PRESSÃO HIDROSTÁTICA, EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE ELEMENTOS.....	87
FIGURA 6.19 – VALORES DO DESLOCAMENTO RADIAL ( $\Delta_r$ ) AO LONGO DO COMPRIMENTO DA CCSP SOB CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO AO LONGO DA BORDA SUPERIOR LIVRE.....	88
FIGURA 6.20 – VALORES DAS ROTAÇÕES ( $\Delta_\alpha$ ) AO LONGO DO COMPRIMENTO DA CCSP SOB CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO AO LONGO DA BORDA SUPERIOR LIVRE.....	89

FIGURA 6.21 – VALORES DOS ESFORÇOS TANGENCIAIS ( $N_{\theta}$ ) AO LONGO DO COMPRIMENTO DA CCSP SOB CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO AO LONGO DA BORDA SUPERIOR LIVRE.....	89
FIGURA 6.22 – VALORES DOS ESFORÇOS MERIDIONAIS ( $N_{\varphi}$ ) AO LONGO DO COMPRIMENTO DA CCSP SOB CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO AO LONGO DA BORDA SUPERIOR LIVRE.....	90
FIGURA 6.23 – CONVERGÊNCIA DO DESLOCAMENTO RADIAL ( $\Delta_r$ ) EM UMA CCSP SOB AÇÃO DE UM CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO AO LONGO DA BORDA SUPERIOR LIVRE, EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE ELEMENTOS .....	90
FIGURA 6.24 – PLACA CIRCULAR ENGASTADA COM CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO.....	91
FIGURA 6.25 – NÍVEIS DE DISCRETIZAÇÃO DAS MALHAS EM ELEMENTOS FINITOS PARA PLACA CIRCULAR .....	92
FIGURA 6.26 – LINHA DE ANÁLISE DOS ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS DA PLACA CIRCULAR	93
FIGURA 6.27 – DEFLEXÕES ( $w$ ) ANALÍTICAS E NUMÉRICAS PARA A PC .....	94
FIGURA 6.28 – ROTAÇÕES ( $dw/dr$ ) ANALÍTICAS E NUMÉRICAS PARA A PC.....	94
FIGURA 6.29 – MOMENTOS NA DIREÇÃO RADIAL ( $M_r$ ) ANALÍTICOS E NUMÉRICOS PARA A PC .....	95
FIGURA 6.30 – MOMENTOS NA DIREÇÃO TANGENCIAL ( $M_t$ ) ANALÍTICOS E NUMÉRICOS PARA A PC .....	95
FIGURA 6.31 – ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA PARA O VALOR DE DEFLEXÃO ( $w$ ) NO CENTRO DA PC .....	96
FIGURA 6.32 – DEFLEXÃO ( $w$ ) PARA O CASO IE MALHA NÍVEL 1.....	97
FIGURA 6.33 – ROTAÇÃO ( $dw/dr$ ) PARA O CASO IE MALHA NÍVEL 1 .....	97
FIGURA 6.34 – MOMENTO RADIAL ( $M_r$ ) PARA O CASO IE MALHA NÍVEL 1 .....	98
FIGURA 6.35 – MOMENTO TANGENCIAL ( $M_t$ ) PARA O CASO IE MALHA NÍVEL 1.....	98
FIGURA 6.36 – RESERVATÓRIO CILÍNDRICO COM LAJE DE FUNDO EM PLACA CIRCULAR. ....	100
FIGURA 6.37 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS TRIANGULARES USADAS PARA DISCRETIZAÇÃO DA PAREDE CILÍNDRICA DO RESERVATÓRIO. ....	101
FIGURA 6.38 – DIREÇÃO DOS ESFORÇOS E REAÇÕES DE APOIO NA PAREDE CILÍNDRICA. ....	102
FIGURA 6.39 – DESLOCAMENTO RADIAL ( $\Delta_r$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA DO RESERVATÓRIO COM LIGAÇÃO PÉ-DESLIZANTE .....	103
FIGURA 6.40 – ROTAÇÃO ( $\Delta\alpha$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA DO RESERVATÓRIO COM LIGAÇÃO PÉ-DESLIZANTE .....	104



FIGURA 6.41 – ESFORÇO MERIDIONAL ( $N_\varphi$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA DO RESERVATÓRIO COM LIGAÇÃO PÉ-DESLIZANTE .....	104
FIGURA 6.42 – ESFORÇO TANGENCIAL ( $N_\theta$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA DO RESERVATÓRIO COM LIGAÇÃO PÉ-DESLIZANTE .....	105
FIGURA 6.43 – DEFORMADA DA PAREDE CILÍNDRICA DO RESERVATÓRIO COM LIGAÇÃO PÉ-DESLIZANTE.....	105
FIGURA 6.44 – ESFORÇO MERIDIONAL ( $N_\varphi$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA DO RESERVATÓRIO COM LIGAÇÃO PÉ-DESLIZANTE .....	106
FIGURA 6.45 – ESFORÇO TANGENCIAL ( $N_\theta$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA DO RESERVATÓRIO COM LIGAÇÃO PÉ-DESLIZANTE .....	106
FIGURA 6.46 – DESLOCAMENTO RADIAL ( $\Delta r$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA DO RESERVATÓRIO COM LIGAÇÃO PÉ-DESLIZANTE .....	107
FIGURA 6.47 – ROTAÇÃO ( $\Delta\alpha$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA DO RESERVATÓRIO COM LIGAÇÃO PÉ-DESLIZANTE .....	107
FIGURA 6.48 – DEFORMADA DA PAREDE CILÍNDRICA DO RESERVATÓRIO ENGASTADA NA BASE .....	108
FIGURA 6.49 – DESLOCAMENTO RADIAL ( $\Delta r$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA ENGASTADA NA BASE.....	110
FIGURA 6.50 – ROTAÇÃO ( $\Delta\alpha$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA ENGASTADA NA BASE.....	111
FIGURA 6.51 – ESFORÇO MERIDIONAL ( $N_\varphi$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA ENGASTADA NA BASE.....	111
FIGURA 6.52 – ESFORÇOS TANGENCIAIS ( $N_\theta$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA ENGASTADA NA BASE.....	112
FIGURA 6.53 – MOMENTO MERIDIONAL ( $M_\varphi$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA ENGASTADA NA BASE.....	112
FIGURA 6.54 – MOMENTO TANGENCIAL ( $M_\theta$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA SEM O FUNDO COM BASE ENGASTADA.....	113
FIGURA 6.55 – DESLOCAMENTO RADIAL ( $\Delta r$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA SEM O FUNDO E COM A BASE ENGASTADA (PROGRAMA ANSYS).....	113
FIGURA 6.56 – ROTAÇÃO ( $\Delta\alpha$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA SEM O FUNDO E COM A BASE ENGASTADA (PROGRAMA ANSYS).....	114

FIGURA 6.57 – ESFORÇOS TANGENCIAIS ( $N_{\theta}$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA SEM O FUNDO E COM A BASE ENGASTADA (PROGRAMA ANSYS).....	114
FIGURA 6.58 – ESFORÇOS MERIDIONAIS ( $N_{\varphi}$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA SEM O FUNDO E COM A BASE ENGASTADA (PROGRAMA ANSYS).....	115
FIGURA 6.59 – MOMENTO TANGENCIAL ( $M_{\theta}$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA SEM O FUNDO E COM A BASE ENGASTADA (PROGRAMA ANSYS).....	115
FIGURA 6.60 – MOMENTO MERIDIONAL ( $M_{\varphi}$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA SEM O FUNDO E COM A BASE ENGASTADA (PROGRAMA ANSYS).....	116
FIGURA 6.61 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS TRIANGULARES USADAS PARA DISCRETIZAÇÃO DO RESERVATÓRIO.....	116
FIGURA 6.62 – DIREÇÕES POSITIVAS (NO PONTO A) PARA OS DESLOCAMENTOS DEVIDO AO DIVERSOS CARREGAMENTOS APLICADOS .....	117
FIGURA 6.63 – MÉTODO DAS FORÇAS APLICADO AO CASO IIA3 .....	119
FIGURA 6.64 – DEFORMADA DA PAREDE CILÍNDRICA E LAJE DE FUNDO (PROGRAMA ANSYS) PARA O CASO IIA3 .....	120
FIGURA 6.65 – DESLOCAMENTO RADIAL ( $\Delta r$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA PARA O CASO IIA3 .....	122
FIGURA 6.66 – ESFORÇOS TANGENCIAIS ( $N_{\theta}$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA PARA O CASO IIA3 .....	122
FIGURA 6.67 – MOMENTO MERIDIONAL ( $M_{\varphi}$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA PARA O CASO IIA3 .....	123
FIGURA 6.68 – MOMENTO TANGENCIAL ( $M_{\theta}$ ) AO LONGO DA ALTURA DA PAREDE CILÍNDRICA PARA O CASO IIA3 .....	123
FIGURA 6.69 – MÉTODO DAS FORÇAS APLICADO AO CASO IIA4 .....	124
FIGURA 6.70 – DEFORMADA DA PAREDE CILÍNDRICA E LAJE DE FUNDO (PROGRAMA ANSYS) PARA O CASO IIA4 .....	125
FIGURA 6.71 – DESLOCAMENTO RADIAL ( $\Delta r$ ) AO LONGO DA PAREDE DO RESERVATÓRIO PARA O CASO IIA4 .....	127
FIGURA 6.72 – ESFORÇOS TANGENCIAIS ( $N_{\theta}$ ) AO LONGO DA PAREDE DO RESERVATÓRIO PARA O CASO IIA4 .....	127
FIGURA 6.73 – MOMENTO MERIDIONAL ( $M_{\varphi}$ ) AO LONGO DA PAREDE DO RESERVATÓRIO PARA O CASO IIA4 .....	128

FIGURA 6.74 – MOMENTO TANGENCIAL ( $M_{\theta}$ ) AO LONGO DA PAREDE DO RESERVATÓRIO PARA O CASO IIA4 .....	128
FIGURA 6.75 – MÉTODO DAS FORÇAS APLICADO AO CASO IIA5 .....	129
FIGURA 6.76 – DEFORMADA DA PAREDE CILÍNDRICA E LAJE DE FUNDO PARA O CASO IIA5	130
FIGURA 6.77 – DESLOCAMENTO RADIAL ( $\Delta r$ ) AO LONGO DA PAREDE DO RESERVATÓRIO PARA O CASO IIA5 .....	132
FIGURA 6.78 – ESFORÇOS TANGENCIAIS ( $N_{\theta}$ ) AO LONGO DA PAREDE DO RESERVATÓRIO PARA O CASO IIA5 .....	132
FIGURA 6.79 – MOMENTO MERIDIONAL ( $M_{\varphi}$ ) AO LONGO DA PAREDE DO RESERVATÓRIO PARA O CASO IIA5 .....	133
FIGURA 6.80 – MOMENTO TANGENCIAL ( $M_{\theta}$ ) AO LONGO DA PAREDE DO RESERVATÓRIO PARA O CASO IIA5 .....	133
FIGURA 6.81 – CONDIÇÕES DE CONTORNO (MODELAGEM NO ANSYS) PARA O CASO IIA6	134
FIGURA 6.82 – DEFORMADA DA PAREDE CILÍNDRICA E LAJE DE FUNDO (PROGRAMA ANSYS) PARA O CASO IIA6 .....	134
FIGURA 6.83 – DESLOCAMENTO RADIAL ( $\Delta r$ ) AO LONGO DA PAREDE DO RESERVATÓRIO PARA O CASO IIA6 .....	135
FIGURA 6.84 – ESFORÇO MERIDIONAL ( $N_{\varphi}$ ) AO LONGO DA PAREDE DO RESERVATÓRIO PARA O CASO IIA6 .....	136
FIGURA 6.85 – ESFORÇOS TANGENCIAIS ( $N_{\theta}$ ) AO LONGO DA PAREDE DO RESERVATÓRIO PARA O CASO IIA6 .....	136
FIGURA 6.86 – MOMENTO MERIDIONAL ( $M_{\varphi}$ ) AO LONGO DA PAREDE DO RESERVATÓRIO PARA O CASO IIA6 .....	137
FIGURA 6.87 – MOMENTO TANGENCIAL ( $M_{\theta}$ ) AO LONGO DA PAREDE DO RESERVATÓRIO PARA O CASO IIA6 .....	137
FIGURA 6.88 – DESLOCAMENTO RADIAL ( $\Delta_r$ ) (PROGRAMA ANSYS) PARA O CASO IIA6...	138
FIGURA 6.89 – TENSÃO TANGENCIAL ( $N_{\theta}$ ) (PROGRAMA ANSYS) PARA O CASO IIA6.....	138
FIGURA 6.90 – TENSÃO MERIDIONAL ( $N_{\varphi}$ ) (PROGRAMA ANSYS) PARA O CASO IIA6.....	139
FIGURA 6.91 – MOMENTO ( $M_{\theta}$ ) (PROGRAMA ANSYS) PARA O CASO IIA6 .....	139
FIGURA 6.92 – MOMENTO ( $M_{\varphi}$ ) (PROGRAMA ANSYS) PARA O CASO IIA6 .....	140

# LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES

## Letras latinas

$a$	- Raio de curvatura da casca esférica
$A$	- Constante de integração ou Ponto específico da borda da casca cilíndrica
$A_1$	- Constante de integração
$A_2$	- Constante de integração
$b$	- Largura do anel de borda
$B$	- Ponto específico da borda da casca cilíndrica
$C$	- Constante de integração ou Ponto específico da borda da casca cilíndrica
$C_1$	- Constante de integração
$C_2$	- Constante de integração
$C_3$	- Constante de integração
$C_4$	- Constante de integração
$d$	- Altura do anel
$dv$	- Diferencial da componente do deslocamento na direção tangente ao meridiano
$dw$	- Diferencial da componente do deslocamento na direção normal a superfície média
$dy$	- Diferencial do comprimento do arco meridiano
$d\theta$	- Diferencial de comprimento do arco do paralelo
$d\varphi$	- Diferencial de comprimento do arco do meridiano
$D$	- Ponto específico da borda da casca cilíndrica ou Rigidez flexional de placas
$E$	- Módulo de elasticidade ou efeitos (esforços e deslocamentos) finais atuantes na estrutura hiperestática
$E_0$	- Efeitos (esforços e deslocamentos de membrana) na estrutura oriundos do carregamento externo
$E_{cs}$	- Módulo de elasticidade secante (fase elástica de projeto)

$E_i$	- Efeitos (esforços e deslocamentos de flexão) na estrutura oriundos do $i$ -ésimo hiperestático $X_i$
$f$	- Função arbitrária
$f_{ck}$	- Resistência característica à compressão do concreto
$g$	- Carga devido ao peso próprio
$h$	- Espessura da casca ou da placa
$H$	- Altura da casca cilíndrica ou do reservatório ou Forças horizontais por unidade de comprimento uniformemente distribuída no bordo da casca ou elevação da casca
$K_G$	- Índice de curvatura gaussiana
$l$	- Altura da parede cilíndrica do reservatório
$m_r$	- Momento radial na placa
$m_t$	- Momento tangencial na placa
$M$	- Momento fletor por unidade de comprimento uniformemente distribuído no bordo da casca ou elevação da casca
$M_0$	- Hiperestático equivalente ao momento unitário aplicado na borda do reservatório cilíndrico do estudo de caso
$M_x$	- Momento atuante na seção transversal do anel de borda
MX	- Momento fletor em torno do eixo X no elemento SHELL63
MX <sub>Y</sub>	- Momento fletor torsional em torno do eixo Y no elemento SHELL63
$M_y$	- Momento fletor por unidade de comprimento ao longo do círculo paralelo ou Momento aplicado na borda do reservatório cilíndrico do estudo de caso
MY	- Momento fletor em torno do eixo Y no elemento SHELL63
MY <sub>X</sub>	- Momento fletor em torsional em torno do eixo X no elemento SHELL63
$M_{y\theta}$	- Momento torsional ao longo do círculo meridiano
$M_\alpha$	- Momento aplicado ao longo do anel de borda
$M_{\theta y}$	- Momento torsional ao longo do círculo paralelo
$M_\theta$	- Momento fletor por unidade de comprimento ao longo do círculo meridiano
$\vec{n}$	- Vetor normal à superfície média
$N_y$	- Força normal por unidade de comprimento ao longo do meridiano

$N_{y\theta}$	- Força cisalhante por unidade de comprimento ao longo do paralelo
$N_{\theta y}$	- Força cisalhante por unidade de comprimento ao longo do meridiano
$N_{\theta}$	- Força normal por unidade de comprimento ao longo do paralelo
$N_{\varphi}$	- Força normal por unidade de comprimento ao longo do meridiano
$p$	- Pressão constante
$P$	- Ponto genérico situado na superfície média da casca pertencente ao elemento infinitesimal ou Carga pontual aplicado na casca esférica
$P'$	- Ponto genérico situado na superfície média da casca pertencente ao elemento infinitesimal
$q$	- Carga devido à sobrecarga uniformemente distribuída em planta
$q_0$	- Hiperestático equivalente ao cortante unitário aplicado em uma borda
$q_y$	- Cortante aplicado na borda do reservatório cilíndrico do estudo de caso
$Q$	- Ponto genérico situado na superfície média da casca pertencente ao elemento infinitesimal
$Q_y$	- Força cortante normal a direção $y$
$Q_{\phi}$	- Esforço cortante aplicado em um elemento infinitesimal de casca esférica
$r$	- Raio de curvatura da superfície média da casca, da placa circular ou do anel de bordo
$r_0$	- Raio de curvatura da superfície média da casca ou raio da placa circular
$r_1$	- Raio de curvatura do círculo meridiano
$r_2$	- Raio de curvatura do círculo paralelo
$r_{\theta}$	- Raio de curvatura do círculo paralelo
$r_{\varphi}$	- Raio de curvatura do círculo meridiano
$R$	- Resultante do carregamento externo aplicado na direção à normal a casca
$R_0$	- Raio da parede cilíndrica ou laje de fundo do reservatório
SX	- Tensões aplicadas na face X do elemento SHELL63
$T$	- Força aplicada à normal a superfície média da placa
$T$	- Esforço normal a seção transversal do anel de borda
TX	- Esforço normal ao longo da face do elemento SHELL63
TY	- Esforço normal ao longo da face do elemento SHELL63

UX	- Deslocamento em relação ao eixo X no elemento SHELL63
UY	- Deslocamento em relação ao eixo Y no elemento SHELL63
w	- Componente do deslocamento na direção normal a superfície média ou deflexão da placa
$w_0$	- Deslocamento radial no estado de membrana
$w_1$	- Constante obtida no estado flexional referente ao deslocamento radial oriundo do hiperestático $X_1$ aplicado
$w_2$	- Constante obtida no estado flexional referente ao deslocamento radial oriundo do hiperestático $X_2$ aplicado
$w_{ij}$	- Deslocamento relativo aos pontos A e B da casca cilíndrica no acoplamento
$\bar{w}_{ij}$	- Deslocamento relativo aos pontos A e B da casca esférica no acoplamento
$w'_{ij}$	- Deslocamento relativo aos pontos C e D da placa circular no acoplamento
x	- Eixo de coordenadas de um elemento infinitesimal de casca
X	- Eixo de coordenada local no elemento SHELL63
$X_1$	- Esforço cortante corretivo relativo ao hiperestático
$X_2$	- Esforço de momento fletor corretivo relativo ao hiperestático
$X_i$	- I-ésimo hiperestático
y	- Eixo relativo a altura da casca cilíndrica ou do reservatório
Y	- Eixo de coordenada local no elemento SHELL63
z	- Eixo de coordenadas de um elemento infinitesimal de casca
Z	- Eixo de coordenada local no elemento SHELL63 ou Resultante do carregamento externo relativo a coordenada z

## Letras gregas

$\alpha$	- Ângulo medido a partir do eixo de revolução à borda da casca
$\beta$	- Constante arbitrária
$\gamma$	- Peso específico do líquido ou do material utilizado na casca e na placa ou constante arbitrária de integração para solução da casca esférica
$\Delta_r$	- Deslocamento horizontal da casca na direção radial
$\Delta_\alpha$	- Rotação total do meridiano da casca esférica
$\Delta_\varphi$	- Rotação total do meridiano da casca cilíndrica
$\varepsilon_\theta$	- Deformação linear específica do paralelo
$\varepsilon_\varphi$	- Deformação linear específica do meridiano
$\eta$	- Deslocamento vertical
$\theta$	- Ângulo do círculo paralelo
$\lambda$	- Coeficiente de atenuação
$\nu$	- Componente do deslocamento na direção tangente ao meridiano
$\nu$	- Coeficiente de Poisson ou esforço normal relativo
$\xi$	- Deslocamento horizontal
$\varphi$	- Ângulo do círculo meridiano
$\phi$	- Ângulo medido a partir do eixo de revolução
$\psi$	- Ângulo medido a partir da borda da casca esférica
$\psi_0$	- Rotação no estado de membrana da parede do reservatório
$\psi_0$	- Rotação no estado de membrana
$\psi_0^q$	- Deslocamento no estado flexional da parede do reservatório para o cortante unitário aplicado;
$\psi_0^-$	- Rotação no estado de membrana da laje de fundo
$\psi_0^m$	- Rotação no estado flexional da laje de fundo para o momento aplicado
$\psi_0^{placa}$	- Rotação no estado de membrana da placa de fundo
$\psi_0^{casca}$	- Rotação no estado de membrana da casca cilíndrica



- $\psi_0^m$  - Deslocamento no estado flexional da parede do reservatório para o momento unitário aplicado;
- $\psi_1$  - Constantes referente a rotação obtidas no estado flexional de rotação radial oriundo do hiperestático  $X_1$  aplicado
- $\psi_2$  - Constantes referente a rotação obtidas no estado flexional de rotação radial oriundo do hiperestático  $X_2$  aplicado
- $\bar{\psi}_{ij}$  - Rotação relativa aos pontos A e B da casca esférica no acoplamento
- $\psi_{ij}$  - Rotação relativa aos pontos A e B da casca cilíndrica no acoplamento
- $\psi'_{ij}$  - Rotação relativa aos pontos C e D da placa circular no acoplamento
- $\psi_m^*$  - Deslocamento no estado flexional da parede do reservatório para o momento aplicado;
- $\psi_q^*$  - Deslocamento no estado flexional da parede do reservatório para o cortante unitário aplicado;
- $\bar{\omega}_0$  - Deslocamento no estado de membrana da parede do reservatório
- $\omega_0^m$  - Deslocamento no estado flexional da parede do reservatório para o momento unitário aplicado
- $\omega_0^q$  - Deslocamento no estado flexional da parede do reservatório para o cortante unitário aplicado
- $\omega_m^*$  - Deslocamento no estado flexional da parede do reservatório para o momento unitário aplicado
- $\omega_q^*$  - Deslocamento no estado flexional da parede do reservatório para o cortante unitário aplicado

# 1 – INTRODUÇÃO

## 1.1 – GENERALIDADES

A construção civil, a indústria naval, aeroespacial, indústria odontológica e tantas outras procuram inovar em tecnologia e técnicas construtivas avançadas para desenvolver seus produtos agregando mudanças arquitetônicas em suas formas. Uma das principais mudanças arquitetônicas e estruturais diz respeito à curvatura, sendo esta característica observada como inovação, apesar de que na história, antigos povos já vinham desenvolvendo a curvatura através de arcos e abóbodas em suas construções, como exemplo, pode-se citar: os etruscos, romanos, gregos e outros. Assim este grande legado cultural e científico esta sendo explorado substancialmente em estruturas modernas.

No Brasil e em todo o mundo é possível observar obras ousadas do ponto de vista arquitetônico. Elas apresentam características próprias com superfícies esbeltas e pequenas ou grandes curvaturas, dando assim um aspecto de leveza aos olhos de quem as presencia. O Brasil na década de 50 foi surpreendido por obras de Oscar Niemeyer que, utilizando uma arquitetura poética usou como tema principal a associação de volumes e curvas, fez com que a engenharia estrutural no Brasil tomasse um passo muito importante. O calculista Joaquim Cardozo tornou realidade o sonho arquitetônico de Niemeyer, calculando tais estruturas. Fora muitas vezes criticado por engenheiros estrangeiros na época por utilizar uma densa armadura nas peças de concreto armado que superavam valores normatizados. O impacto causado pela criação de um novo patrimônio cultural, Brasília, é muito satisfatório para a engenharia no seu âmbito geral tendo visto que também possibilitou métodos construtivos inovadores.

As cascas esbeltas têm mostrado importante valor cultural e social no meio cívico moderno. Como dito anteriormente estas estruturas em forma de cascas delgadas proporcionam um aspecto moderno e sofisticado que pode ser observado em algumas obras como: Na Figura 1.1 a) têm-se o Museu Oscar Niemeyer que se localiza no centro cívico de Curitiba-PR e na Figura 1.1 b) o Museu de arte contemporânea localizado em Niterói-RJ.



Figura 1.1– a) Museu Oscar Niemeyer; b) Museu de Arte Contemporânea de Niterói

Dentro desta tipologia de estruturas, se encontram também os reservatórios cilíndricos, utilizados desde simples armazenadores de líquidos em residências até suas grandes aplicações industriais. Estes são confeccionados em diversos materiais: madeira, aço, concreto, etc. A forma cilíndrica traz grandes vantagens estruturais por permitir capacidade múltiplas vezes maior do que outras formas geométricas, com esbeltez ainda menor.

Comumente existem reservatórios nas formas (em planta): circular e retangular. Os reservatórios na forma retangular apresentam esforços maiores do que aquelas na forma circular onde estes esforços são melhores distribuídos, por conta da simetria de revolução da superfície. Portanto, economicamente falando, os reservatórios na forma quadrada só são mais adequados para pequenos volumes, ao contrário dos reservatórios circulares. A Figura 1.2 ilustra um reservatório cilíndrico industrial.



Figura 1.2 – Reservatório cilíndrico com capacidade de até 1000 litros (Fonte: [www.mfmural.com.br](http://www.mfmural.com.br))

Portanto, os reservatórios cilíndricos confeccionados em concreto se constituirão na estrutura 3D objeto deste trabalho.

## **1.2 – MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA**

As cascas de concreto armado são estruturas hoje muito utilizadas em todo o mundo. Contudo, conceitos e formulações teóricas que permitem a estas estruturas garantir a sua estabilidade estrutural já vêm sendo desenvolvidas há muitos séculos. É importante em uma análise estrutural deste tipo de estrutura o entendimento e uma sensibilidade prévia do comportamento da estrutura e de como atuam os esforços, quando se tem um primeiro contato com o projeto arquitetônico, pois assim pode-se torná-la estáveis, seguras, bem projetadas e econômicas.

Dentre as estruturas em cascas, os reservatórios têm uma importância significativa por sua utilidade que varia desde recipientes de pequeno porte para o uso de caixa d'água para abastecimento doméstico, até os grandes sistemas estruturais destinados a silos, containers, vasos de pressão e outros recipientes utilizados na indústria. Existem ainda, reservatórios que são utilizados para transporte de produtos químicos, concreto usinado, líquidos, grãos, etc. Estes reservatórios são acoplados em caminhões formando um sistema caminhão-reservatório, normalmente constituídos por um invólucro em casca cilíndrica.

Assim, o conhecimento do comportamento dos esforços e deslocamentos que estas estruturas estão submetidas é de relevância para a concepção, cálculo e execução das mesmas. A demanda de utilização destas estruturas no dia a dia é muito grande.

Particularmente na indústria, e mesmo no caso corrente de prática da engenharia de construção civil, a possibilidade de se oferecer metodologias e ferramentas mais práticas de análises por profissionais, justificam por si só o desenvolvimento deste trabalho.

## **1.3 - COLOCAÇÃO DO PROBLEMA**

No projeto, construção e depois no acompanhamento do comportamento de reservatórios cilíndricos ao longo de sua vida útil, os projetistas/calculistas têm se deparado e observado uma série de problemas localizados na zona de conexão da casca cilíndrica recipiente com

os elementos de conexão (bordas) na tampa e no fundo. Estes efeitos são mais ou menos evidentes em função da natureza de conexão, da tipologia do elemento de vedação (outra casca, placa ou apoio com base rígida), elemento de reforço (anéis, aumento de rigidez, etc.), espécie de solicitação (cargas distribuídas, concentradas, ações térmicas, dinâmicas e etc.), além de recomendações práticas consagradas pela tradução e experiências de antigos profissionais que aprenderam ao longo de realizações desastrosas e de sucesso.

Portanto, a minimização dos efeitos observados na prática da engenharia viria mais de experiência consagrada de um profissional, do que de um conhecimento sistematizado e difundido numa literatura técnica de fácil acesso.

As dificuldades de se ter acesso a esta literatura e mesmo proporcionar um ponto mais de conhecimento aos engenheiros de “*Bureaux*” que nem sempre tem a possibilidade de acesso a literatura avançada, e/ou ao uso de ferramentas mais complexas de análise, é que coloca o foco principal da contribuição de nosso trabalho na construção de um conhecimento mais acessível neste domínio.

Assim o estudo do comportamento dos esforços e deslocamentos nesta zona de conexão entre o cilindro recipiente e o elemento de vedação (tampa e/ou fundo), através de um estudo comparativo entre formulações clássicas analíticas e o método dos elementos finitos com ajuda do programa ANSYS, caracteriza o “corpo” principal deste trabalho.

#### **1.4 – METODOLOGIA**

Propor um processo simplificado de análise e recomendações passíveis de serem adotados em escritórios de projetos.

- Estudo bibliográfico;
- Estudo teórico das formulações e leis que determinam as análises estáticas dos esforços em cascas de superfícies finas;
- Análise dos esforços e deformações propostos a partir de métodos analíticos;
- Modelagem do reservatório utilizando o software ANSYS;

- Validação dos resultados obtidos pelo código ANSYS com as formulações analíticas desenvolvidas para as cascas recipientes;
- Estudos de casos
- Reprodução de resultados, analíticos através de modelizações realizadas no programa ANSYS;
- Formulação da metodologia geral para o estudo da conexão.

## **1.5 – OBJETIVOS**

### **1.5.1 – Objetivo geral**

O objetivo geral deste trabalho é investigar e desenvolver uma metodologia para analisar o comportamento estático da conexão casca com elementos de vedação em reservatórios destinados ao armazenamento de líquidos, constituídos por recipientes em casca cilíndrica e cobertura-fundo em placas ou cascas esféricas. Conseqüentemente elaborar um material didático aplicado que permita uma iniciação neste campo de conhecimento com mais facilidade.

### **1.5.2 – Objetivos específicos**

- Estudar analiticamente o comportamento de cascas utilizando-se teorias clássicas e métodos tradicionais.
- Validar e comparar os resultados analíticos com o método numéricos utilizando o código ANSYS;
- Adquirir experiência no uso e modelização no ANSYS para estruturas de cascas e placas;
- Formular uma metodologia geral para análise do comportamento da junção do sistema casca-casca e casca com elementos especiais.

## **1.6 – ABRANGÊNCIA, LIMITAÇÕES E DIFICULDADES**

Este estudo envolve apenas cascas esbeltas e longas formadas por superfícies de revolução nas quais os carregamentos são axissimétricos. Assim a fundamentação apresentada se

baseia na teoria de cascas aproximada de 1ª ordem para carregamentos axissimétricos e cascas de revolução. O material é homogêneo, isotrópico e elástico linear.

O invólucro que forma o reservatório em estudo tem a forma cilíndrica e a tampa e fundo são compostos por placas ou cascas esféricas, podendo ou não ter um anel de borda como reforço.

## **1.7 – ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

O capítulo 2 efetua uma revisão bibliográfica sucinta das teorias clássicas e métodos tradicionais a respeito de cascas cilíndricas e esféricas, que foram publicados por diversos autores, assim como também teorias de aplicações em reservatórios destas estruturas também podem ser constatada. Alguns trabalhos a respeito do tema exposto são expostos

O capítulo 3 apresenta o desenvolvimento teórico das cascas de revolução em estudo, casca cilíndrica e esférica, sob o regime de membrana e flexional. Foram desenvolvidas tabelas com as principais expressões que regem os esforços e deslocamentos nestas estruturas. Além disso, um desenvolvimento analítico do estudo de placas circulares e anel de bordo também são mostrados.

O capítulo 4 apresenta o método de solução do problema, o método das forças, para o sistema composto por um reservatório acoplado, contendo uma casca cilíndrica, casca esférica e placa de fundo. Além disso, um estudo de caso de um reservatório que é formado por parede cilíndrica e uma laje de fundo apoiada sobre solo rígido é desenvolvido aplicando o método.

O capítulo 5 relata sobre a parte computacional aplicada no trabalho. O elemento utilizado para análise numérica, as dificuldades na modelagem, como é feita a interpretação de resultados e geração de malhas para discretização dos modelos.

O capítulo 6 apresenta os resultados gerais e discute os comparativos entre os cálculos analíticos (baseado na teoria desenvolvida no Capítulo 3) com os resultados numéricos obtidos no programa ANSYS. É desenvolvida também uma análise dos principais parâmetros que regem o comportamento dos elementos que forma o reservatório.

O capítulo 7 reporta as conclusões obtidas neste trabalho e sugestões para trabalhos futuros.



## **2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

### **2.1 – INTRODUÇÃO**

As teorias clássicas e métodos tradicionais a respeito de cascas cilíndricas e esféricas foram publicados por diversos autores, assim como também teorias e aplicações a reservatórios são apresentadas de forma sucinta e numa amostragem limitada neste capítulo. Esta seção do trabalho é constituída por algumas contribuições bibliográficas de base, dada na literatura a respeito do assunto tratado nesta dissertação.

### **2.2 – PRINCIPAIS ESTUDOS**

Os estudos das cascas cilíndricas se dividem em dois regimes (estados de comportamento): de membrana e flexional, sendo que o regime de membrana sobrepõe o flexional ao longo da casca. É importante se ter uma idéia, antes de iniciar o estudo, de como se dá o comportamento deste primeiro regime de comportamento, o de membrana.

De acordo com Gravina (1957) o estudo do regime de membrana tem uma importância no sentido que podemos admitir com grande aproximação que o mesmo se estabelece na maioria das cascas comumente utilizadas e assim simplificando-se os cálculos complexos dessas estruturas. Segundo o autor essa teoria de membrana supõe que a estrutura não possui rigidez à flexão e à torção, sendo assim os momentos fletores e de torção tem valor desprezível.

“O regime de membrana pode se estender por toda a casca desde que as reações de vínculo sejam compatíveis com o mesmo regime, isto é, sejam forças atuando nos planos tangentes à superfície média. Caso isto não se verifique haverá nas proximidades das bordas uma zona de perturbação do regime de membrana em que atuarão também momentos fletores e força cortantes, além de forças normais geradas pelos esforços perturbadores. Esta zona é muito pequena e verifica-se nas mesmas uma dissipação dos efeitos provocados pelas perturbações nas bordas” (Gravina, 1957). Por isso a importância de que os vínculos de conexão das bordas estejam de forma a permitir que o esforço seja perpendicular ao plano tangente da superfície média.

Gravina (1957), em sua obra no que diz respeito às cascas cilíndricas circulares e cascas esféricas com carregamento axissimétrico foi desenvolvida na forma analítica a teoria de membrana e utilizando as equações gerais de Meissner, a teoria flexional também é demonstrada para estas cascas de revolução.

Timoshenko (1959) desenvolveu um estudo de forma analítica, para a teoria geral de membrana e flexional, tanto para cascas esféricas como para cascas cilíndricas, onde alguns parâmetros, tais como o “amortecimento”, mostra como os esforços e deslocamentos, que surgem na teoria flexional, se dissipam ao longo da casca.

Billington (1965) fez uma abordagem bastante completa sobre o estudo analítico das formulações para diversos tipos de cascas inclusive um estudo analítico do acoplamento entre os elementos de casca. Um detalhamento de projetos de armação, também é desenvolvido pelo autor.

Flügger (1962) fez o desenvolvimento analítico das equações para determinação dos esforços de membrana e flexional, com demonstrações e figuras dos elementos bem claras para um bom entendimento dessas teorias.

As equações de equilíbrio de introdução a teoria das cascas são mostradas na obra de Baker et al. (1972). O referido autor também trata muito bem do método das forças utilizado para solução de múltiplas cascas conectadas entre si. Existem também diversas tabelas para cascas cilíndricas circulares e esféricas com equações de soluções primárias e secundárias das tensões e deformações atuantes nestes tipos de casca.

Loula (1973) fez um estudo analítico de cascas esféricas, cônicas e cilíndricas e elaborou um programa baseado no método dos deslocamentos em linguagem Fortran para estes tipos de cascas. O programa é limitado para dois tipos de forças de superfícies, o peso próprio e a pressão variando linearmente e cargas nodais.

Venturini (1977), mostra e analisa vários tipos de vínculos na parede de um reservatório com o fundo, que podem ser vistos na Figura 2.1 com seus respectivos detalhes.

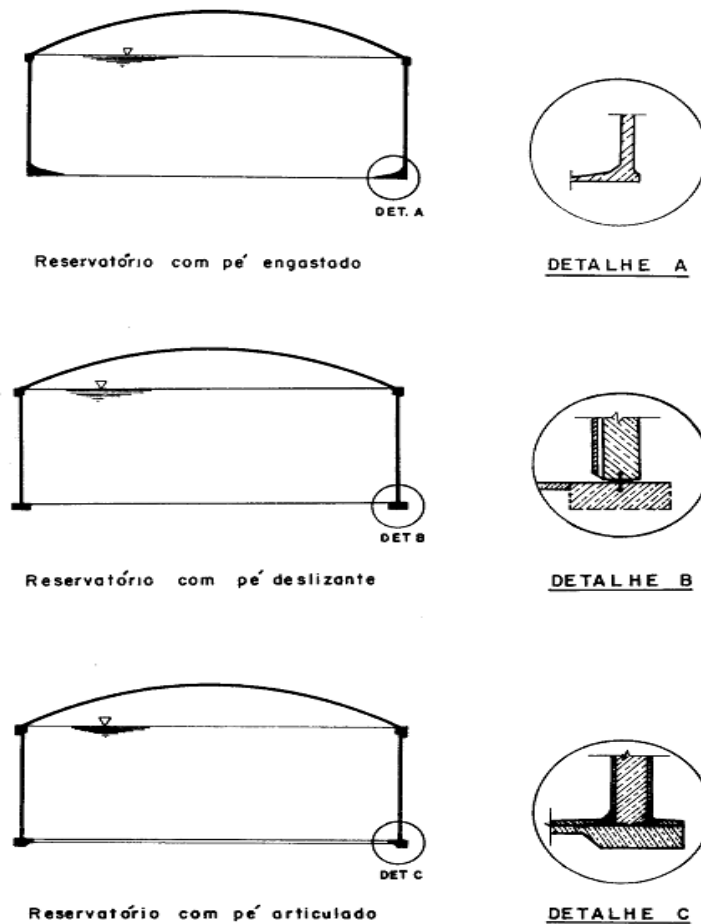


Figura 2.1 – Vínculos da parede de um reservatório com o fundo – Venturini (1977)

Jacob (1983) em seu trabalho apresenta um estudo sobre cascas de revolução com imperfeições localizadas, cujos casos aparecem em aplicações industriais e na área nuclear. Estas irregularidades são localizadas e trata-se de furos, bocais e etc. Foi adotado para solução do problema o elemento de casca axissimétrica isoparamétrico quadrático no sistema coordenado cilíndrica. É também desenvolvida uma teoria para a formulação dos campos de deslocamentos do elemento utilizado. O sistema utilizado o qual recebe o nome de CRILO é descrito em linguagem científica FORTRAN IV. O sistema é composto por 6 módulos com o objetivo de encontrar a tensões no nós do elementos. Para entendimento o sistema CRILO o autor define com conceitos a estrutura geral do sistema facilitando a descrição do modelo estrutural elaborado pelo engenheiro. Os resultados de três modelos estudados com o sistema CRILO, os quais são: o modelo tridimensional completo, o modelo bidimensional axissimétrico e o modelo quase-simétrico são validados utilizando equações analíticas clássicas. É apresentado um exemplo de aplicação para um cilindro sob a ação de momentos nas extremidades (modelo quasi-axissimétrico). Uma cúpula quase-

simétrica também é estudada. Por fim foi testada com êxito a eficiência do comportamento dos elementos derivados da formulação isoparamétrica para análise de cascas com geometria arbitrária.

Motiño (1983) fez um estudo dos recipientes de reservatórios constituídos por cascas cônicas e cobertura em laje. Em uma revisão bibliográfica o autor descreve as teorias clássicas de membrana e flexional com sua aplicação em cascas cônicas e cilíndricas

Pereira (1986) efetua um estudo introdutório das cascas de revolução com formulações analíticas, para cascas esféricas, cilíndricas e cônicas sob diversos carregamentos.

Guimarães (1995) apresentou um estudo de reservatório cilíndrico com indicações para projeto e também desenvolveu um estudo analítico dos esforços e deslocamentos assim como o acoplamento para vários tipos de ligação (pé-deslizante, articulação, engaste perfeito ou elástico) entre a parede cilíndrica e a laje de fundo. Os resultados de um exemplo aplicado foram gerados por um programa desenvolvido em Fortran pelo próprio autor.

Conforme Pedroso (1998) o nome de membrana é assim denominado por tratar de estruturas muito delgadas e não possuir rigidez alguma a flexão e torção, com isto resistem somente aos esforços contidos no plano da membrana. Sendo assim a teoria de membrana é bem mais simples que a teoria flexional, pois permite uma boa aproximação do comportamento estrutural das cascas reais desde que satisfaçam determinadas condições geométricas, de apoio e carga.

Pedroso (1998) apresentou o desenvolvimento analítico das formulações essenciais para a obtenção dos esforços e deslocamentos em cascas, assim como alguns casos de aplicação.

O aumento da espessura da casca soluciona situações de perturbação de regime de membrana, porém não é bem válido, pois aumentando a espessura da casca pode-se também aumentar a rigidez a flexão e assim originar momentos fletores com intensidades até maiores (Santos, 2009 appud Leonhardt e Möning, 1977).

Santos (2009) fez um estudo analítico sobre cascas esféricas e os esforços de torção no anel de borda, foram utilizadas formulações clássicas para desenvolver um roteiro de cálculo dos esforços nestas estruturas. Uma aplicação prática das formulações foi elaborada e em seguida um dimensionamento das estruturas.

Atualmente as pesquisas utilizando métodos numéricos aplicados a cascas cilíndricas são ainda objetos de estudos por muitos autores na literatura, entre os quais se destacam: Keyong-Hoon Jeong and Seong-Cheol Lee (1994), K. Y. Lam and C. T. Loy (1994), Tatiana Vodenitcharova and Peter Ansourian (1996), J. Arbocz (1999), Azam Tafreshi, M. El-Mously (2007), Renjie Mao, G. Lu (2002), Colin G. Bailey (2006), Rong-Tyai Wang, Zung-Xian Lin (2006), P.B. Gonçalves, F.M.A. Silva and Z.J.G.N. Del Prado (2007), Rajeev Kumar, B. K. Mishra, S. C. Jain (2008), Cengiz Polat, Yusuf Calayir (2010).

## **3 – DESENVOLVIMENTO TEÓRICO – CASCAS DE REVOLUÇÃO COM CARREGAMENTO AXISSIMÉTRICO**

### **3.1 – INTRODUÇÃO**

Uma apresentação simplificada das teorias e formulações para o estudo de cascas cilíndricas e esféricas será apresentada a seguir, conforme o desenvolvimento de diversos autores clássicos da literatura bem como as hipóteses e simplificações nas quais estas teorias e métodos são fundamentados.

As cascas estudadas neste trabalho são geradas por superfícies de revolução e carregamentos axissimétricos e as expressões que regem o problema serão separadas, para os estados de membrana e flexão, para a casca recipiente e seus elementos de vedação.

#### **3.1.1 – Hipóteses gerais**

Fundamentada na teoria da elasticidade as cascas estudadas obedecem as chamadas hipóteses de Kirchoff-Love:

- O material é homogêneo, isotrópico e obedece a lei de Hooke.
- A espessura é pequena em relação às dimensões e aos raios de curvatura da superfície média.
- As tensões normais à superfície média são desprezíveis em relação às demais tensões.
- Os pontos pertencentes antes da deformação a retas normais à superfície média encontram-se, após a deformação, sobre retas normais à superfície média deformada.
- Os deslocamentos são muito pequenos em relação a espessura  $h$ , sendo possível desprezar a influência dos mesmos no estudo das condições de equilíbrio do elemento de superfície.

## **3.2 – REGIME DE MEMBRANA PARA CASCAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS AXISSIMÉTRICAS**

### **3.2.1 – Introdução**

Esta seção trata do desenvolvimento da teoria geral de cascas com carregamentos axissimétrico. As equações a seguir apresentadas foram obtidas a partir da literatura clássica constituída por diversos autores tais como: Gravina (1957), Timoshenko (1959), Flugge (1962), Billigton (1965), Baker et al.(1972), e Pedroso (1998).

### **3.2.2 – Desenvolvimento dos esforços e deslocamentos em regime de membrana**

Considerando uma estrutura de superfície curva onde não há esforços de flexão e somente os esforços normais é possível fazer a determinação destes por meio do desenvolvimento da teoria de membrana.

#### **Hipóteses da teoria de membrana**

Para considerarmos que toda a estrutura trabalhe em regime de membrana é necessário estabelecer algumas hipóteses. Pedroso (1998) cita as condições geométricas e de carga para se admitir tal comportamento:

Condições de carga

A vinculação deve ser apoiada de forma a transmitir esforços normais a estrutura.

Carregamentos concentrados e variações bruscas de carregamentos distribuídos não devem existir.

Condições de geometria

- Se  $K_G \geq 0$ , ( $K_G$  é o índice de curvatura de Gauss), próximo aos apoios, nos pontos onde há carga concentrada ou variação de cargas distribuídas nestes casos aparecem zonas que existem momentos fletores e torçores, mas estas zonas são

pequenas e estes esforços desaparecem bruscamente. Desse modo toda estrutura pode ser estudada com a teoria de membrana com exceção das zonas perturbadas onde se aplica a teoria da flexão;

- Se  $K_G < 0$  as perturbações na região da membrana introduzidas pelos referidos fatores, se estendem por amplas zonas da estrutura, ou toda e neste caso a estrutura deve ser analisada pela teoria da flexão.

Algumas condições com relação aos vínculos já foram mencionadas anteriormente para que o regime de membrana esteja presente na casca. As Figura 3.1 e Figura 3.2 mostram respectivamente as condições de apoio móveis deslocáveis nas direções normais a superfície média, e na direção horizontal uma reação de apoio ( $H$ ) da borda para uma casca esférica, quando o apoio não está na direção normal as seção da borda.

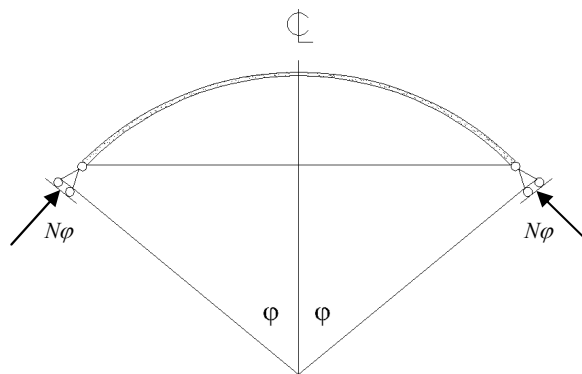


Figura 3.1– Apoios móveis deslocáveis nas direções normal a superfície média em uma casca esférica – modificado Gravina (1957)

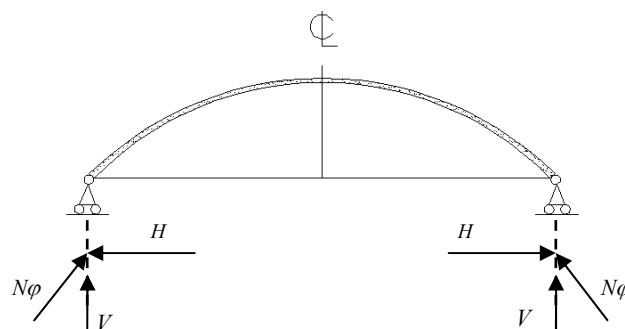


Figura 3.2– Apoios móveis na direção horizontal a reação de apoio da borda em uma casca esférica – modificado Gravina (1957)



Quando os esforços de flexão são desconsiderados nas cascas, a análise de tensões ganha grandes simplificações em relação às resultantes de cisalhamentos e momentos, assim tais esforços desaparecem. Deste modo considerando a simetria de carregamento e deformação, surgem nos lados do elemento forças por unidades de comprimento denotadas de  $N_\varphi$  e  $N_\theta$ .

Fazendo-se o equilíbrio de forças nas direções adequadas conforme o corte da Figura 3.3 e considerando  $R$  a resultante do carregamento na casca, obtém-se assim as equações gerais dos esforços de membrana:

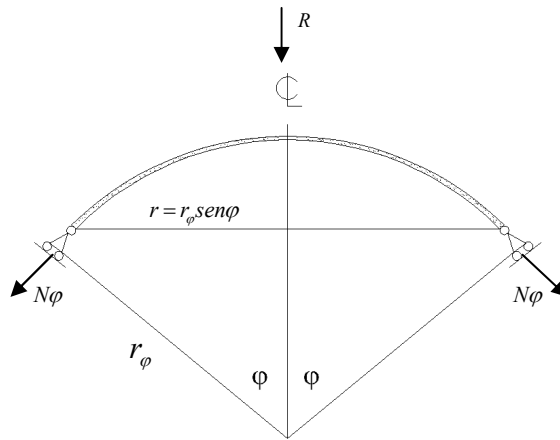


Figura 3.3 – Direção dos esforços meridionais  $N_\varphi$  e o valor de  $r$

$$2\pi r N_\varphi \text{sen}\varphi + R = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{N_\varphi}{r_\varphi} + \frac{N_\theta}{r_\theta} = -R \quad (3.2)$$

Deste modo, encontrando  $N_\varphi$  a partir das cargas é possível se resolver o sistema e encontrar o valor de  $N_\theta$ . Com  $N_\varphi$  e  $N_\theta$  os esforços de membrana são determinados.

### Deslocamento de membrana

Para deformações simétricas em cascas podemos resolver um pequeno deslocamento de um ponto em duas componentes:  $v$  na direção tangente ao meridiano e  $w$  na direção normal a superfície média. Considerando um elemento  $PQ$  do círculo paralelo (Figura

3.4), se percebe que o incremento do comprimento final do deslocamento tangencial  $v$  é igual a  $(dv/d\varphi)d\varphi$  sendo assim o deslocamento tangencial final igual  $v+(dv/d\varphi)d\varphi$ . Por conta do deslocamento radial  $w$  dos pontos  $P$  e  $Q$  do elemento aumenta uma quantidade  $w d\varphi$ . A mudança do comprimento do elemento devido à diferença do deslocamento radial dos pontos  $P$  e  $Q$  pode ser negligenciada assim como uma pequena quantidade de superior ordem. Logo a mudança total do comprimento do elemento  $PQ$  devido a deformação é:

$$\frac{dv}{d\varphi}d\varphi - wd\varphi \quad (3.3)$$

Dividindo a expressão anterior por o comprimento inicial  $r_\varphi d\varphi$  do elemento, tem-se a deformação da casca na direção do meridiano como sendo:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r_\varphi} \frac{dv}{d\varphi} - \frac{w}{r_\varphi} \quad (3.4)$$

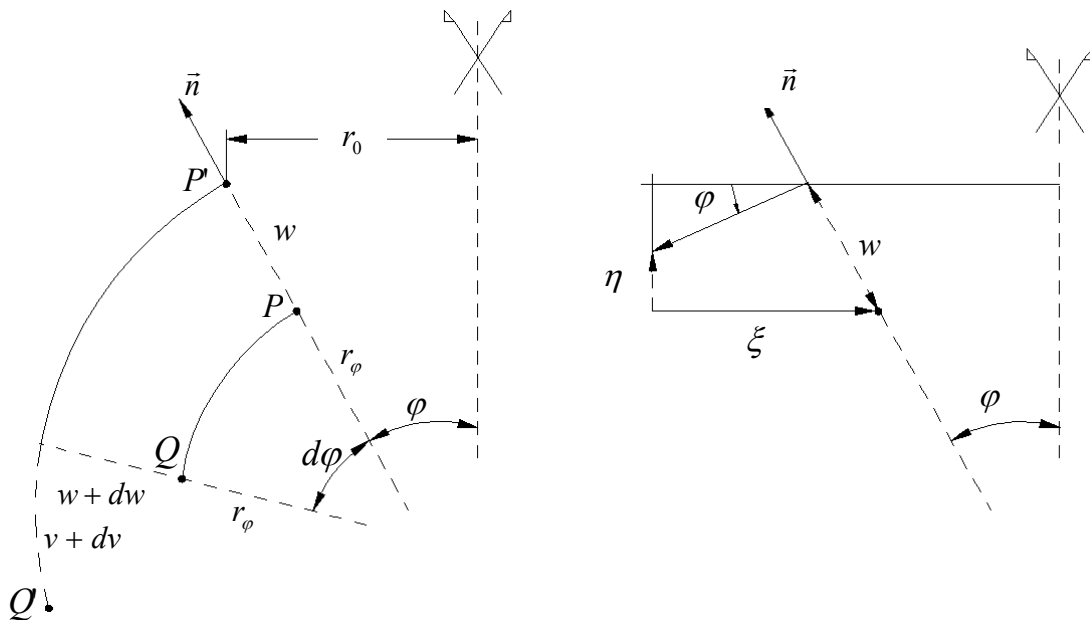


Figura 3.4 – Deformações de membrana em um círculo paralelo; modificado Timoshenko (1959)

Considerando um elemento do círculo paralelo que pode ser visto na Figura 3.4 que devido ao deslocamento  $v$  e  $w$  do raio do círculo aumenta de uma quantidade  $v \cos \varphi - w \sin \varphi$ .

A circunferência do círculo paralelo é aumentada da mesma proporção que o raio, assim tem-se:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{r}(v \cos \varphi - w \operatorname{sen} \varphi) \quad (3.5)$$

Se substituirmos  $r_0 = r_{\theta} \operatorname{sen} \varphi$ , encontra-se:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{v}{r_{\theta}} \cot \varphi - \frac{w}{r_{\theta}} \quad (3.6)$$

Eliminando o  $w$  das Equações 3.4 e 3.6, obtemos para  $v$  a equação diferencial 3.7.

$$\frac{dv}{d\varphi} - v \cot \varphi = r_{\varphi} \varepsilon_{\varphi} - r_{\theta} \varepsilon_{\theta} \quad (3.7)$$

As componentes de deformações  $\varepsilon_{\varphi}$  e  $\varepsilon_{\theta}$  podem ser expressas em termos de forças  $N_{\varphi}$  e  $N_{\theta}$  aplicando-se a lei de Hooke.

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{Eh}(N_{\varphi} - vN_{\theta}) \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{Eh}(N_{\theta} - vN_{\varphi}) \quad (3.9)$$

Substituindo as Equações 3.8 e 3.9 na Equação 3.7 obtém-se:

$$\frac{dv}{d\theta} - v \cot \varphi = \frac{1}{Eh} [N_{\varphi}(r_{\varphi} + vr_{\theta}) - N_{\theta}(r_{\theta} - vr_{\varphi})] \quad (3.10)$$

Para cada caso particular as forças  $N_{\varphi}$  e  $N_{\theta}$  podem ser encontradas a partir das condições de carregamento, e o deslocamento  $v$  será obtido por integração da Equação 3.10 Denominando o lado direito da equação por  $f(\varphi)$ , chega-se a::

$$\frac{dv}{d\theta} - v \cot \varphi = f(\varphi) \quad (3.11)$$

A solução geral desta equação é

$$v = \text{sen}\varphi \left[ \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{\text{sen}\varphi} d\varphi + C \right] \quad (3.12)$$

E o deslocamento  $w$  é dado por:

$$w = r_\varphi \varepsilon_\theta - \left[ \int \cot \varphi f(\varphi) d\varphi + C \right] \quad (3.13)$$

Onde  $C$  é uma constante de integração a ser determinada a partir das condições de contorno.

Com os valores dos deslocamentos  $v$  e  $w$ , os deslocamentos horizontais ( $\xi$ ) e verticais ( $\eta$ ) são dados por:

$$\xi = v \cos \varphi + w \text{sen} \varphi \quad (3.14)$$

$$\eta = v \text{sen} \varphi - w \cos \varphi \quad (3.15)$$

### 3.2.3 – Expressões para esforços e deslocamentos adaptados às estruturas em estudo

As equações encontradas no item anterior foram desenvolvidas de forma geral para serem aplicadas em quaisquer cascas com simetria de revolução e carregamento axissimétrico. A seguir será feita a aplicação destas equações para casca esférica sob ação dos seguintes carregamentos: peso próprio, carregamento distribuído e carga pontual. Para casca cilíndrica: peso próprio, carregamento distribuído ao longo da borda superior livre, pressão constante e pressão hidrostática.

Nesta seção também serão determinados os esforços em uma placa circular, onde estes esforços são orientados no sentido normal ao plano médio da seção da placa, fazendo assim que esta se comporte como chapa circular.

### Casca esférica

A casca esférica tem o raio do meridiano  $r_\varphi$  igual ao raio do paralelo  $r_\theta$ . A Figura 3.5 ilustra o sentido positivo dos esforços meridionais  $N_\varphi$  e o valor do raio  $r$ , serve como orientação para observar as expressões matemáticas correspondentes, que são dadas nas Tabelas 3.1 a 3.3.

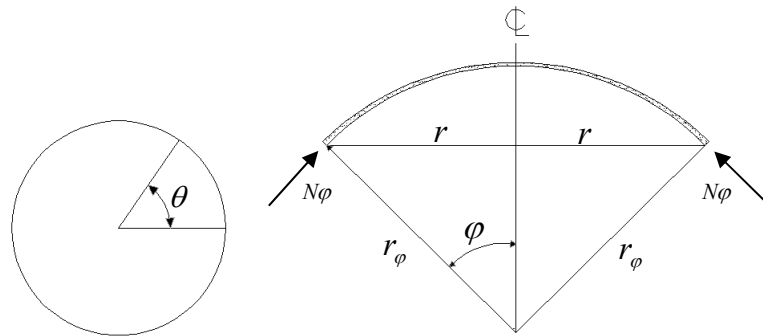


Figura 3.5 – Detalhe do Esforço meridional, raio e ângulos da casca esférica

As Tabelas 3.1 a 3.3 mostram as equações para os esforços e deslocamentos para casca esférica sob os diversos carregamentos variando em função de  $\varphi$  e quando  $\varphi = 90^\circ$  (posição de  $\varphi$  no meridiano da casca).

A simbologia utilizada para as tabelas 3.1 a 3.3 apresenta-se a seguir:

$N_\theta$  - Força normal por unidade de comprimento ao longo do paralelo

$N_\varphi$  - Força normal por unidade de comprimento ao longo do meridiano

$\Delta_r$  - Deslocamento horizontal da casca esférica na direção radial

$\Delta_\varphi$  - Rotação total do meridiano da casca esférica

Tabela 3.1 – Casca esférica sob ação do peso próprio variando em função de  $\varphi$

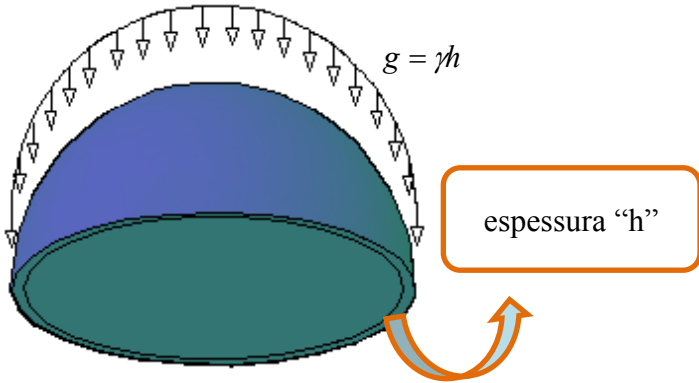
<b>AÇÃO PESO PRÓPRIO</b>	
	
<b>ESFORÇOS</b>	$N_{\varphi} = \frac{-rg}{1 + \cos \varphi}$
	$N_{\theta} = rg \left( \frac{1}{1 + \cos \varphi} - \cos \varphi \right)$
	$N_{\varphi}^{\varphi=90^{\circ}} = -rg$
	$N_{\theta}^{\varphi=90^{\circ}} = rg$
<b>DESLOCAMENTOS</b>	$\Delta_r = \frac{r^2 g}{Eh} \operatorname{sen} \varphi \left( \frac{1 + \nu}{1 + \cos \varphi} - \cos \varphi \right)$
	$\Delta_{\varphi} = \frac{-rg}{Eh} \operatorname{sen} \varphi (2 + \nu)$
	$\Delta_r^{\varphi=90^{\circ}} = \frac{r^2 g}{Eh} (1 + \nu)$
	$\Delta_{\varphi}^{\varphi=90^{\circ}} = \frac{-rg}{Eh} \operatorname{sen} \varphi (2 + \nu)$

Tabela 3.2 – Casca esférica sob ação de um carregamento distribuído

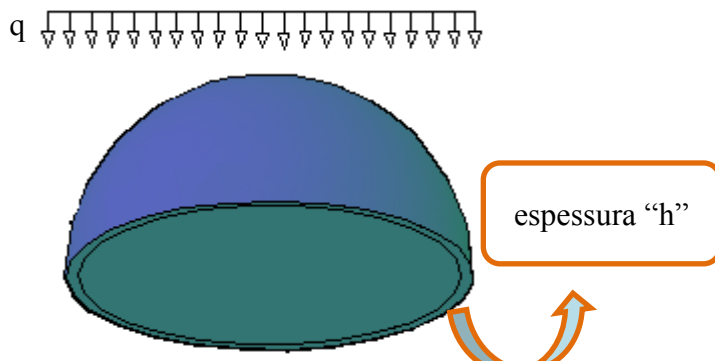
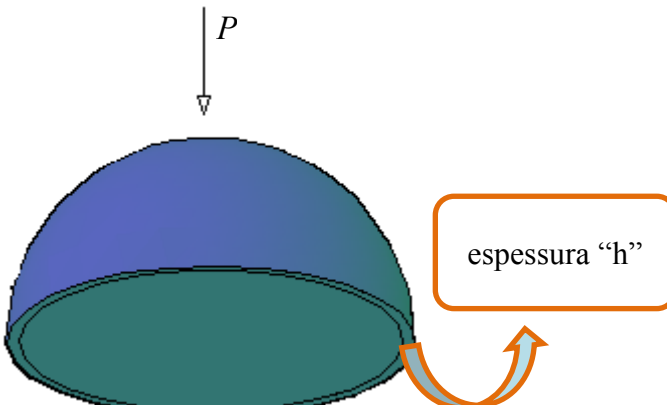
<b>AÇÃO CARGA DISTRIBUÍDA</b>	
	
<b>ESFORÇOS</b>	$N_{\varphi} = \frac{-rq}{2}$
	$N_{\theta} = \frac{-rq}{2} \cos 2\varphi$
	$N_{\varphi}^{\varphi=90^{\circ}} = \frac{-rq}{2}$
	$N_{\theta}^{\varphi=90^{\circ}} = \frac{rq}{2}$
<b>DESLOCAMENTOS</b>	$\Delta_r = \frac{r^2 q}{Eh} \operatorname{sen} \varphi \left( \frac{1+\nu}{2} - \cos^2 \varphi \right)$
	$\Delta_{\varphi} = \frac{-rq}{Eh} (3+\nu) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$
	$\Delta_r^{\varphi=90^{\circ}} = \frac{r^2 q}{Eh} \left( \frac{1+\nu}{2} \right)$
	$\Delta_{\varphi}^{\varphi=90^{\circ}} = 0$

Tabela 3.3 – Casca esférica sob ação de uma carga concentrada pontual

AÇÃO CARGA PONTUAL	
	
<b>ESFORÇOS</b>	$N_{\varphi} = \frac{-P}{2\text{sen}\varphi}$
	$N_{\theta} = \frac{-P(r-1)}{2\text{sen}\varphi}$
	$N_{\varphi}^{\varphi=90^{\circ}} = \frac{-P}{2}$
	$N_{\theta}^{\varphi=90^{\circ}} = \frac{-P(r-1)}{2}$
<b>DESLOCAMENTOS</b>	$\Delta_r = \frac{Pr}{2Eh} [(1+r) + \nu P]$
	$\Delta_{\varphi} = \frac{P \cos \varphi}{2Eh \text{sen}^2 \varphi} (1+\nu)(r-2)$
	$\Delta_r^{\varphi=90^{\circ}} = \frac{Pr}{2Eh} [(1+r) + \nu P]$
	$\Delta_{\varphi}^{\varphi=90^{\circ}} = 0$

Nas Tabelas 3.1 a 3.3 a espessura é considerada constante  $h$ , o raio de curvatura do círculo meridiano e do círculo paralelo tem o mesmo valor, são iguais a  $r$ ; o módulo de elasticidade  $E$ , o coeficiente de Poisson  $\nu$ , o peso próprio  $g = \gamma h$ , a carga distribuída uniformemente,  $q$  e a carga pontual  $P$  são outras grandezas físicas. Todos estes são parâmetros que podem ser explorados e se constituem nas expressões das tabelas para os esforços e deslocamento ao longo da casca esférica.



### Casca cilíndrica

As equações de membrana para determinação dos esforços para cascas cilíndricas podem ser obtidas a partir das Equações 3.1 e 3.2, substituindo o valor do carregamento aplicado e os raios de curvatura da casca cilíndrica. Assim, obtidos os esforços e substituindo estes nas Equações 3.8 e 3.9 é possível se determinar as deformações, e com estas, continua o desenvolvimento das equações encontram-se os deslocamentos.

A Figura 3.6 apresenta a geometria e os principais elementos característicos da casca cilíndrica.

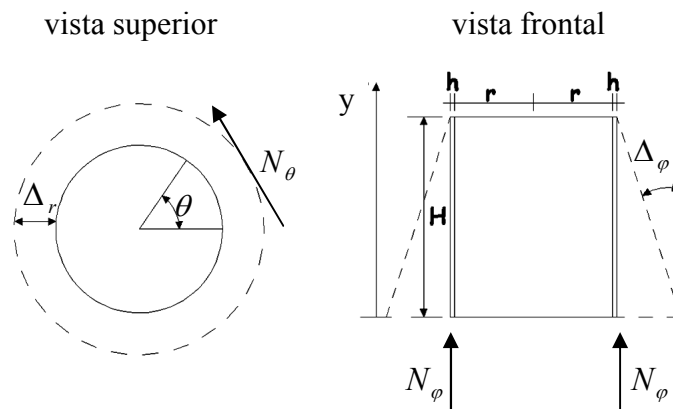


Figura 3.6 – Direção dos esforços, deslocamento e geometria do cilindro

As equações apresentadas nas Tabela 3.4 e Tabela 3.7 são determinadas em função da altura  $H$  em relação ao eixo  $y$  com origem na base da casca cilíndrica.

A simbologia utilizada para as Tabelas 3.4 a 3.7 apresenta-se a seguir:

$N_\theta$  - Força normal por unidade de comprimento ao longo do paralelo

$N_\varphi$  - Força normal por unidade de comprimento ao longo do meridiano

$\Delta_r$  - Deslocamento horizontal da casca cilíndrica na direção radial

$\Delta_\varphi$  - Rotação total do meridiano da casca cilíndrica

Tabela 3.4 – Esforços e deslocamentos em uma casca cilíndrica sob ação de um carregamento hidrostático

AÇÃO DO CARREGAMENTO HIDROSTÁTICO	
<b>ESFORÇOS</b>	$N_{\varphi} = 0$
	$N_{\theta} = r\gamma(H - y)$
	$N_{\varphi}^{y=0} = 0$
	$N_{\theta}^{y=0} = r\gamma H$
<b>DESLOCAMENTOS</b>	$\Delta_r = \frac{\gamma r^2}{Eh}(H - y)$
	$\Delta_{\varphi} = \frac{\gamma r^2}{Eh}$
	$\Delta_r^{y=0} = \frac{\gamma r^2}{Eh} H$
	$\Delta_{\varphi}^{y=0} = \frac{\gamma r^2}{Eh}$

Tabela 3.5 – Esforços e deslocamentos em uma casca cilíndrica com pressão interna constante

AÇÃO PRESSÃO CONSTANTE	
<b>ESFORÇOS</b>	$N_{\phi} = 0$
	$N_{\theta} = pr$
	$N_{\phi}^{y=H} = 0$
	$N_{\theta}^{y=H} = pr$
<b>DESLOCAMENTOS</b>	$\Delta_r = \frac{pr^2}{Eh}$
	$\Delta_{\phi} = 0$
	$\Delta_r^{y=H} = \frac{pr^2}{Eh}$
	$\Delta_{\phi}^{y=H} = 0$

Tabela 3.6 – Esforços e deslocamentos em uma casca cilíndrica com carregamento distribuído ao longo da borda superior livre

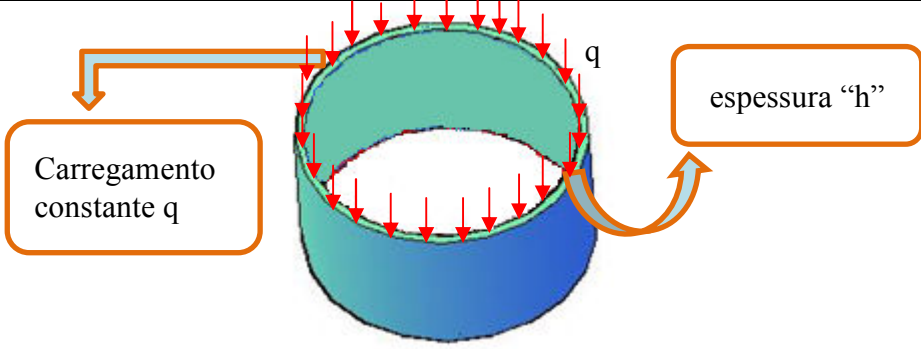
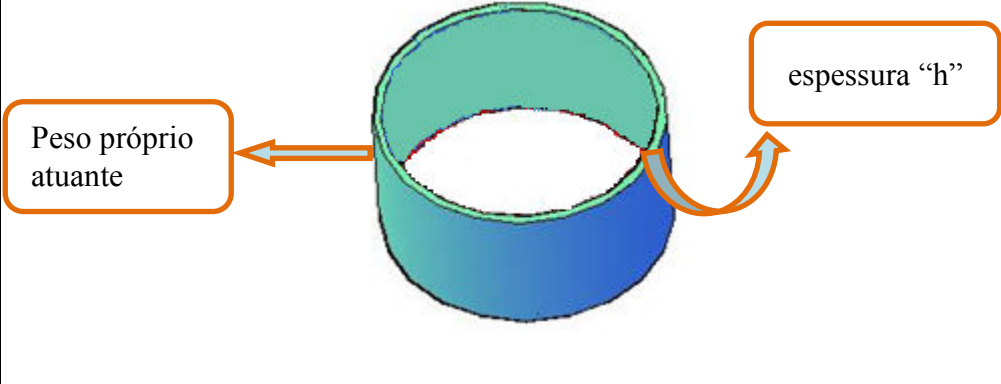
AÇÃO DO CARREGAMENTO CONSTANTE AO LONGO DA BORDA	
	
<b>ESFORÇOS</b>	$N_\phi = q$
	$N_\theta = 0$
	$N_\phi^{y=H} = q$
	$N_\theta^{y=H} = 0$
<b>DESLOCAMENTOS</b>	$\Delta_r = -\frac{qvr}{Eh}$
	$\Delta_\phi = 0$
	$\Delta_r^{y=H} = -\frac{qvr}{Eh}$
	$\Delta_\phi^{y=H} = 0$

Tabela 3.7 – Esforços e deslocamentos em uma casca cilíndrica sob ação do peso próprio

AÇÃO DO PESO PRÓPRIO	
	
<b>ESFORÇOS</b>	$N_\phi = \gamma h y$
	$N_\theta = 0$
	$N_\phi^{y=H} = \gamma h H$
	$N_\theta^{y=H} = 0$
<b>DESLOCAMENTOS</b>	$\Delta_r = \frac{-\gamma \nu y r}{E}$
	$\Delta_\phi = \frac{-\nu \gamma r}{E}$
	$\Delta_r^{y=H} = \frac{-\gamma \nu H r}{E}$
	$\Delta_\phi^{y=H} = \frac{-\nu \gamma r}{E}$

### Placas circulares (funcionando como chapa circular)

Seja a laje de fundo sob ação de forças normais a seção normal medial ao plano (estado plano de tensões). A laje de fundo do reservatório quando submetida a estes esforços normais tende a se comportar como uma chapa. Deste modo, lança-se mão de tabelas obtidas em Baker et al (1972) considerando apenas esforços num estado plano de tensão e os deslocamentos num estado de deformação triaxial.

Assim utilizando as Tabela 3.8 e Tabela 3.9 podemos obter os esforços e deformações em uma chapa.

Tabela 3.8 – Tensões na chapa circular de espessura “ $h$ ” devido a deformação aplicada – modificado Baker et al.(1972)

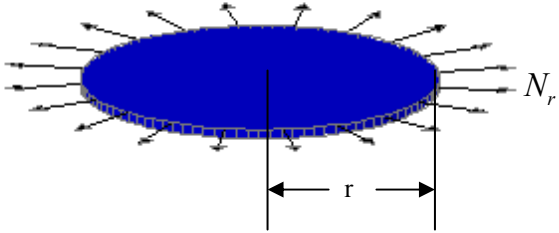
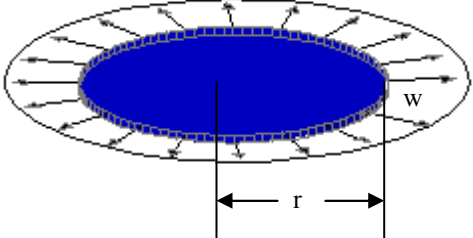
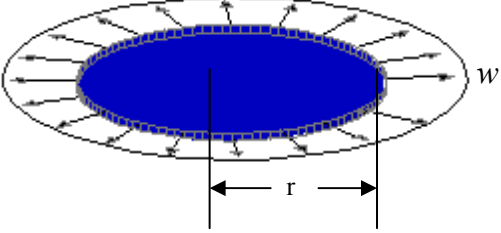
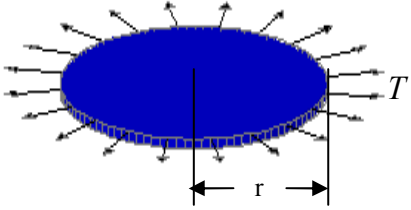
<p>Esforço</p> <p>Deformação</p>	
	$\frac{wEh}{r(1-\nu)}$

Tabela 3.9 – Deformação na chapa circular de espessura “ $h$ ” devido a uma força “ $T$ ” aplicada – modificado Baker et al.(1972)

<p>Esforço</p> <p>Deformação</p>	
	$\frac{Tr(1-\nu)}{Eh}$

Portanto na seção 3.2 foram apresentadas todas as expressões matemáticas pertinentes as estruturas em estudo para o regime de membrana.

### 3.3 – TEORIA FLEXIONAL

#### 3.3.1 – Introdução

Nesta seção serão abordados os efeitos de flexão (solução secundária) para as cascas em estudo neste trabalho.

Quando são considerados os efeitos oriundos de esforços cortantes e momentos fletores, aparecem na estrutura esforços de flexão e assim a teoria geral de cascas é denominada teoria flexional.

Tal como já foi feito na seção anterior, deixa-se de apresentar o desenvolvimento matemático passo-a-passo da teoria envolvida, já que o mesmo se encontra suficientemente explorado na literatura clássica.

A seguir são apresentadas equações que determinam os esforços e deslocamentos para a teoria flexional em cascas cilíndricas e cascas esféricas.

#### 3.3.2 – Casca cilíndrica

Na teoria flexional, considerando as condições de simetria e um carregamento axissimétrico, os esforços que variam em relação ao ângulo do paralelo são nulos, aspecto que simplifica as expressões matemáticas.

Neste desenvolvimento as seguintes notações serão utilizadas:

$M_y$  é o Momento fletor por unidade de comprimento ao longo do círculo paralelo

$Q_y$  é a Força cortante normal a direção  $y$

$M_\theta$  é o Momento fletor por unidade de comprimento ao longo do círculo meridiano

$N_y$  é a Força normal por unidade de comprimento ao longo do meridiano

$dy$  é a Diferencial do comprimento do arco meridiano

$M_{y\theta}$  é o Momento torsional ao longo do círculo meridiano

$M_{\theta}$  é o Momento torsional ao longo do círculo paralelo

$N_{y\theta}$  é o Força cisalhante por unidade de comprimento ao longo do paralelo

$N_{\theta y}$  é o Força cisalhante por unidade de comprimento ao longo do meridiano

$Z$  é a Força normal aplicada na área do elemento

A Figura 3.7 mostra os esforços presentes num elemento infinitesimal de casca em regime de flexão.

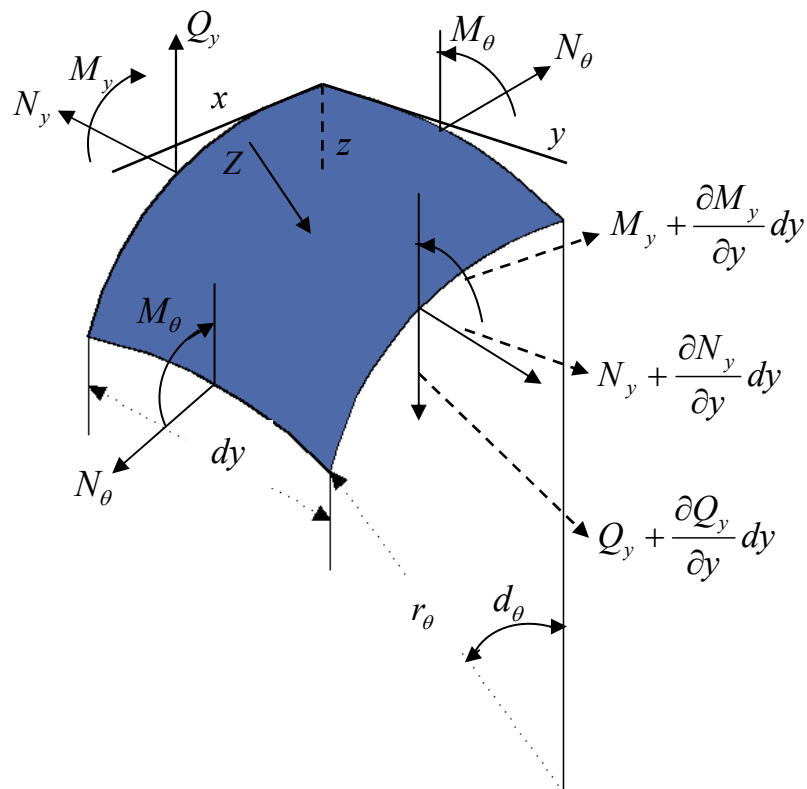


Figura 3.7 – Equilíbrio dos esforços em um elemento infinitesimal de casca

Simplificações dos esforços se operam ao se considerar as condições de simetria, a saber:

- Os esforços  $M_{y\theta}, M_{\theta y}, N_{y\theta}, N_{\theta y}$  que variam em relação ao ângulo  $\theta$  desaparecem;
- A componente  $v$  de deslocamento na direção do círculo paralelo desaparece.

Estas condições são estabelecidas e podem ser utilizadas, pois se trata de uma estrutura com simetria axial e carregamento axissimétrico aplicado.



A partir da Figura 3.7 e considerando as condições de simetria onde alguns esforços desaparecem e somente sob a ação da pressão normal à superfície como força externa atuante no elemento, se chega de forma similar a Timoshenko (1959) as seguintes Equações (3.16).

$$\begin{aligned} \frac{dN_y}{d_y} r_\theta dyd\theta &= 0 \\ \frac{dQ_y}{d_y} r_\theta dyd\theta + N_\theta dyd\theta + Zr_\theta dyd\theta &= 0 \\ \frac{dM_y}{d_y} r_\theta dyd\theta - Q_y r_\theta dyd\theta &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para os momentos de flexão, com a simetria é possível observar que não há mudança de curvatura na direção do paralelo; já na direção do meridiano, direção  $y$ , a curvatura é igual a  $-d^2w/dy^2$ .

Para determinação dos esforços de flexão, utilizam-se as equações de cascas cilíndricas apresentadas a seguir.

$$M_\theta = \nu M_y \quad (3.17)$$

$$M_y = -D \frac{d^2w}{dy^2} \quad (3.18)$$

Sendo  $D$  a rigidez a flexão dada por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.19)$$

Fazendo as devidas substituições na Equação 3.16 obtemos a seguinte equação diferencial:

$$D \frac{d^4w}{dy^4} + \frac{Eh}{r_\theta^2} w = Z \quad (3.20)$$

Chamando os valores constantes de um coeficiente  $\beta^4$  tem-se:

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4r_\theta^2 D} \quad (3.21)$$

Levando a Equação 3.21 na Equação diferencial 3.20, esta assume a seguinte forma:

$$\frac{d^4 w}{dy^4} + 4\beta^4 w = \frac{Z}{D} \quad (3.22)$$

A solução da Equação 3.22, é definida como a deflexão  $w$  da teoria flexional de cascas cilíndricas e está apresentada na Equação (3.23).

$$w = e^{\beta y} (C_1 \cos \beta y + C_2 \operatorname{sen} \beta y) + e^{-\beta y} (C_3 \cos \beta y + C_4 \operatorname{sen} \beta y) + f(y) \quad (3.23)$$

Onde  $f(y)$  é a solução particular que representa a ação do carregamento no estado de membrana. As constantes  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  podem ser encontradas a partir das condições de contorno.

Para cilindros longos o termo  $e^{\beta y} (C_1 \cos \beta y + C_2 \operatorname{sen} \beta y)$  da Equação 3.23 desaparece, pois há um amortecimento dos esforços e não um aumento deste como sugere o termo  $e^{\beta y}$  (não há sentido físico a presença deste termo na equação). Ao contrário de cilindros curtos onde os efeitos das bordas interferem mutuamente no comportamento dos esforços e deslocamentos ao longo da casca.

Todos os esforços e deslocamentos na casca cilíndrica podem ser obtidos em função de  $w$  e suas derivadas.

## EXPRESSÕES E FORMULÁRIO GERAL PARA CASCAS CILÍNDRICAS LONGAS

Para aplicação das equações de flexão de cascas cilíndricas é considerado a atuação dos hiperestáticos  $X_1$  e  $X_2$  aplicados em uma borda livre do cilindro. A Figura 3.8 mostra o sentido em que estes hiperestáticos são aplicados em uma das bordas do cilindro.

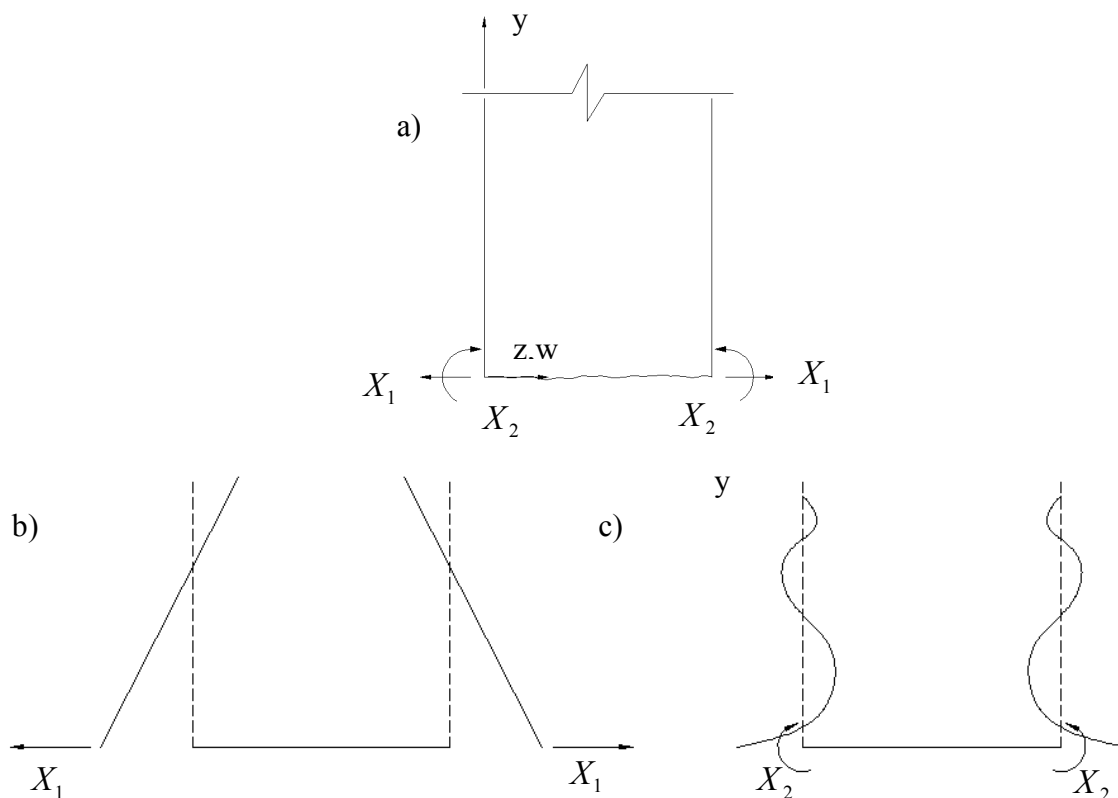


Figura 3.8 – a) Direção positiva dos esforços e deslocamentos no cilindro; b) Aplicação do hiperestático  $X_1$ ; c) Aplicação do hiperestático  $X_2$

Aplicando-se as condições de contorno, da borda onde os hiperestáticos são aplicados, na Equação 3.23 e resolvendo-a, logo depois substituindo os valores do hiperestático  $X_1$  (esforço cortante) e  $X_2$  (momento fletor) aplicado na borda inferior é possível encontrar os valores dos deslocamentos e rotações para cada hiperestático. As Tabela 3.10 e Tabela 3.11 a seguir são constituídas por 3 colunas e 12 linhas. Todas as próximas tabelas seguem o mesmo padrão determinado, a seguir, Tabela 3.10.

As linhas 1 até 4, representam equações das constantes para o regime flexional, as linhas 5 e 6 representam os valores dos hiperestáticos aplicados. A linha 7 apresenta a equação da deflexão, as linhas 8, 9 e 10 são suas derivadas, onde a linha 8 é dada pela expressão da rotação. As linhas 11 e 12 são respectivamente as expressões do momento fletor e cortante.

Tabela 3.10 – Deslocamento e rotações ao longo da casca cilíndrica para o momento unitário aplicado na borda

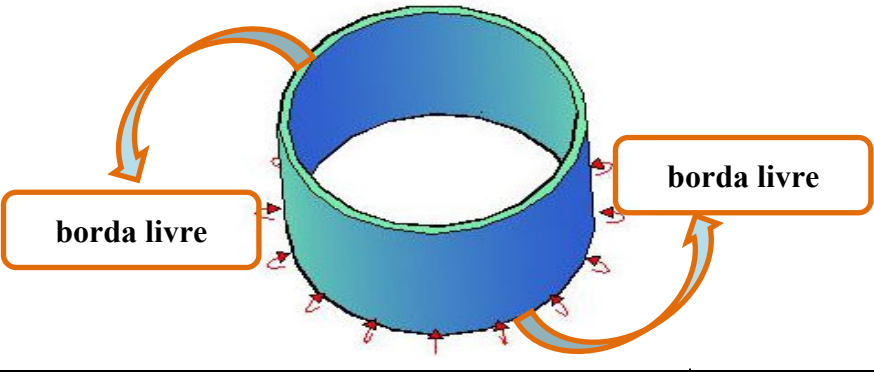
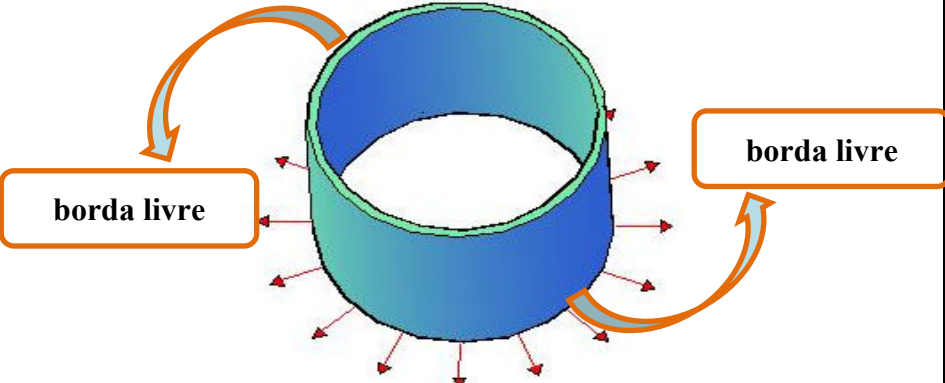
Solução			
Grandezas Físicas			
Quantidades no contorno	$w_1(0)$	$-\frac{1}{2\beta^2 D}$	Linha 1
	$\psi_1(0)$	$\frac{1}{\beta D}$	Linha 2
	$M(0)$	$(My)_{y=0} = -D \frac{d^2 w(0)}{dy^2}$	Linha 3
	$Q(0)$	—	Linha 4
	$X_1$	1	Linha 5
	$X_2$	0	Linha 6
Ao longo de x	$w(y)$	$\frac{-1}{2\beta^3 D} [\beta M_0 \psi(\beta y)]$	Linha 7
	$\frac{dw(y)}{dx}$	$\frac{1}{2\beta^2 D} [2\beta M_0 \theta(\beta y)]$	Linha 8
	$\frac{d^2 w(y)}{dy^2}$	$-\frac{1}{2\beta D} [2\beta M_0 \phi(\beta y)]$	Linha 9
	$\frac{d^3 w(y)}{dy^3}$	$\frac{1}{D} [2\beta M_0 \xi(\beta y)]$	Linha 10
	$M(y)$	$-D \frac{d^2 w(y)}{dy^2}$	Linha 11
	$Q(y)$	$-D \frac{d^3 w(y)}{dy^3}$	Linha 12

Tabela 3.11 – Deslocamento e rotações ao longo da casca cilíndrica para o esforço cortante unitário aplicado em uma borda

Solução			
Grandezas Físicas			
Quantidades no contorno	$w_2(0)$	$-\frac{1}{2\beta^3 D}$	Linha 1
	$\psi_2(0)$	$\frac{1}{2\beta^2 D}$	Linha 2
	$M(0)$	—	Linha 3
	$Q(0)$	$(Qy)_{y=0} = -D \frac{d^3 w(0)}{dy^3}$	Linha 4
	$X1$	0	Linha 5
	$X2$	1	Linha 6
Ao longo de x	$w(y)$	$\frac{-1}{2\beta^3 D} [Q_0 \theta(\beta y)]$	Linha 7
	$\frac{dw(y)}{dy}$	$\frac{1}{2\beta^2 D} [Q_0 \phi(\beta y)]$	Linha 8
	$\frac{d^2 w(y)}{dy^2}$	$-\frac{1}{2\beta D} [2Q_0 \xi(\beta y)]$	Linha 9
	$\frac{d^3 w(y)}{dy^3}$	$\frac{1}{D} [Q_0 \psi(\beta y)]$	Linha 10
	$M(y)$	$-D \frac{d^2 w(y)}{dy^2}$	Linha 11
	$Q(y)$	$-D \frac{d^3 w(y)}{dy^3}$	Linha 12

As equações em função de  $\beta y$  das linhas 7 a 10 são expressas a seguir:

$$\varphi(\beta y) = e^{-\beta y} (\cos \beta y + \operatorname{sen} \beta y) \quad (3.24)$$

$$\psi(\beta y) = e^{-\beta y} (\cos \beta y - \operatorname{sen} \beta y) \quad (3.25)$$

$$\theta(\beta y) = e^{-\beta y} \cos \beta y \quad (3.26)$$

$$\xi(\beta y) = e^{-\beta y} \operatorname{sen} \beta y \quad (3.27)$$

Considerando agora a situação em que há um engastamento perfeito no fundo do cilindro as equações de compatibilidade de deslocamentos são:

$$w_0 + w_1 X_1 + w_2 X_2 = 0 \quad (3.28)$$

$$\psi_0 + \psi_1 X_1 + \psi_2 X_2 = 0 \quad (3.29)$$

Onde  $w_0$  e  $\psi_0$  são respectivamente valores para teoria de membrana, de deflexão e rotação.

Resolvendo o sistema formado pelas Equações 3.28 e 3.29, para um cilindro sob pressão constante (Tabela 3.12) e sob pressão hidrostática (Tabela 3.13) é possível encontrar o valor dos hiperestáticos  $X_1$  e  $X_2$ , respectivamente nas linhas 5 e 6 das referidas tabelas.

Tabela 3.12 – Deslocamentos de membrana (A) e hiperestáticos (B) para cilindro sob pressão constante

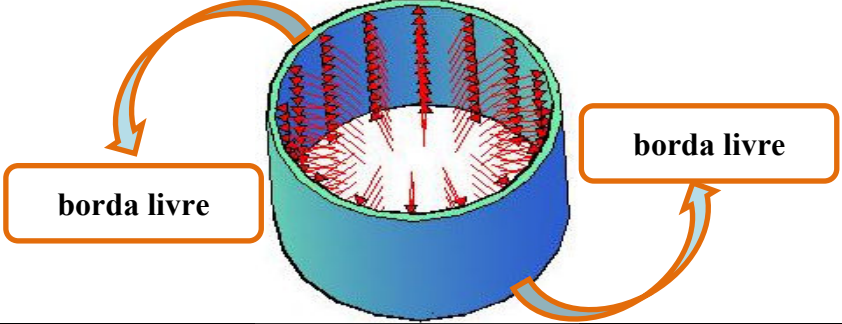
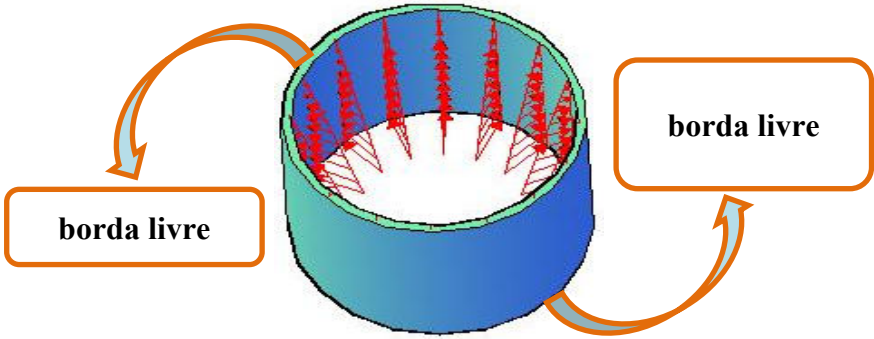
<b>Solução</b>			
<b>Grandezas Físicas</b>			
<b>(A) Quantidades na base</b>	$w(0)$	$\frac{pR^2}{Eh}$	Linha 1
	$\psi(0)$	0	Linha 2
	$M(0)$	—	Linha 3
	$Q(0)$	—	Linha 4
<b>(B) Hiperestáticos</b>	$X1$	$\frac{-2PR^2\beta^2D}{Eh}$	Linha 5
	$X2$	$\frac{4PR^2\beta^3D}{Eh}$	Linha 6

Tabela 3.13 – Deslocamentos de membrana (A) e hiperestáticos (B) para cilindro sob pressão hidrostática

<b>Solução</b>			
<b>Grandezas Físicas</b>			
<b>(A) Quantidades na base</b>	$w(0)$	$\frac{\gamma R^2 H}{Eh}$	Linha 1
	$\psi(0)$	$\frac{\gamma R^2}{Eh}$	Linha 2
	$M(0)$	—	Linha 3
	$Q(0)$	—	Linha 4
<b>(B) Hiperestáticos</b>	$X_1$	$\frac{-2\beta^2 D \gamma R^2 H - 2\beta D \gamma R^2}{Eh}$	Linha 5
	$X_2$	$\frac{4\beta^3 D \gamma R^2 H + 2\beta^2 D \gamma R^2}{Eh}$	Linha 6

Encontrados os hiperestáticos  $X_1$  e  $X_2$  dados nas Tabela 3.12 e Tabela 3.13 e substituindo-os na equação de deslocamento  $w$  representados (dados) nas Tabela 3.14 e Tabela 3.15 (Linha 1) e na primeira (Linha 2), segunda (Linha 3) e terceira derivadas (Linha 4) na Linha 5 e 6 a expressões finais, das grandezas de interesse, para momento e cortante respectivamente, obtêm-se as seguintes expressões para pressão constante e pressão hidrostática.



Tabela 3.14 – Solução geral para casca cilíndricas sob pressão constante

<b>Solução</b>			
<b>Grandezas Físicas</b>			
<b>Grandezas ao longo da casca</b>	$w(y)$	$\frac{1}{Eh} \{PR^2 + M_0 e^{-\beta y} [\cos(\beta y) - \text{sen}(\beta y)] PR^2 - 2Q_0 e^{-\beta y} \cos(\beta y) PR^2\}$	Linha 1
	$\frac{dw(y)}{dy}$	$\frac{1}{Eh} \{-2Pe^{-\beta y} \beta R^2 [(M_0 - Q_0) \cos(\beta y) - Q_0 \text{sen}(\beta y)]\}$	Linha 2
	$\frac{d^2w(y)}{dy^2}$	$\frac{1}{Eh} \{2Pe^{-\beta y} \beta^2 R^2 [(M_0 - 2Q_0) \text{sen}(\beta y) + M_0 \cos(\beta y)]\}$	Linha 3
	$\frac{d^3w(y)}{dy^3}$	$\frac{1}{Eh} \{-2Pe^{-\beta y} \beta^3 R^2 [(M_0 - 2Q_0) \text{sen}(\beta y) + M_0 \cos(\beta y)]\}$	Linha 4

Tabela 3.15 – Solução geral para casca cilíndricas sob pressão hidrostática

<b>Solução</b>		
<b>Grandezas Físicas</b>		
<b>Grandezas ao longo da casca</b>	$w(y)$	$\frac{\gamma_a R^2}{\beta E h} \left\{ \left[ \beta H (M_0 - 2Q_0) + M_0 - Q_0 \right] \cos(\beta y) - M_0 \sin(\beta y) (\beta H + 1) \right\} e^{-\beta y} + \beta (H - y)$
	$\frac{dw(y)}{dy}$	$-\frac{2\gamma_a R^2}{E h} \left\{ \frac{1}{2} + \left[ \left( M_0 - \beta H Q_0 - \frac{Q_0}{2} + \beta H M_0 \right) \cos(\beta y) - \left( \beta H + \frac{1}{2} \right) Q_0 \sin(\beta y) \right] e^{-\beta y} \right\}$
	$\frac{d^2w(y)}{dy^2}$	$\frac{2\gamma_a \beta R^2 e^{-\beta y}}{E h} \left\{ \left[ \beta H (-2Q_0 + M_0) + M_0 - Q_0 \right] \sin(\beta y) + \cos(\beta y) M_0 (1 + \beta H) \right\}$
	$\frac{d^3w(y)}{dy^3}$	$-\frac{4\gamma_a \beta^2 R^2 e^{-\beta y}}{E h} \left\{ \left[ \beta H (M_0 - Q_0) + M_0 - \frac{1}{2} Q_0 \right] \sin(\beta y) + \cos(\beta y) \left( \beta H + \frac{1}{2} \right) Q_0 \right\}$

### 3.3.3 – Casca esférica

Considerando o regime flexional de cascas esféricas os esforços atuantes em um elemento infinitesimal desta são ilustrados na Figura 3.9. Onde os raios dos planos meridianos e normal são respectivamente  $r_1$  e  $r_2$ . A seguir será apresentado um desenvolvimento teórico sucinto baseado em Timoshenko (1959) e Billigton (1965).

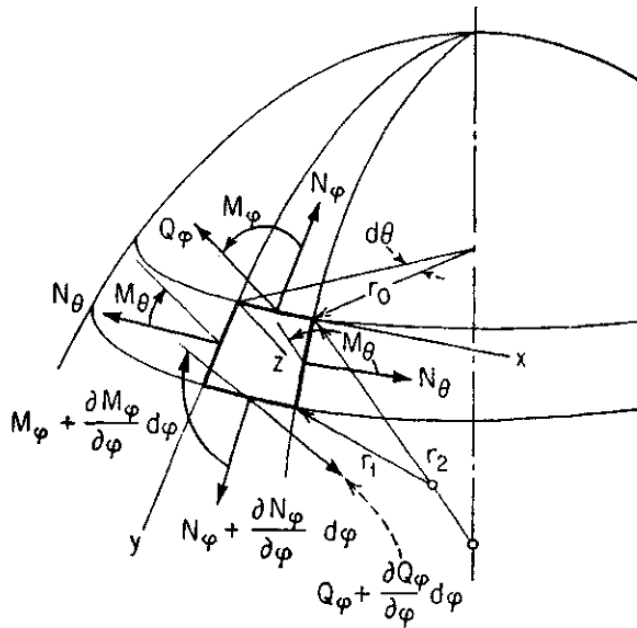


Figura 3.9 – Elemento infinitesimal de casca esférica sujeito a esforços de flexão – Timoshenko (1959)

Onde os ângulos estão cotados na Figura 3.10 e o raio tem o valor de  $a$ .

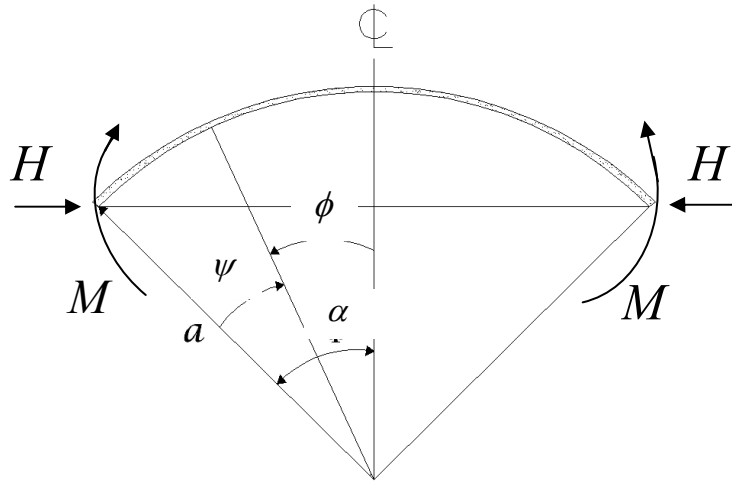


Figura 3.10 – Casca esférica com esforços cortante  $H$  e momento  $M$  aplicado – modificado – Billigton (1965)

Para o regime flexional numa casca esférica, é aplicado dois esforços em cada borda, um esforço horizontal  $H$  e um momento  $M$  conforme mostra a Figura 3.10. De maneira análoga ao que foi feito para o regime flexional de cascas cilíndricas, pelas equações de equilíbrio dos esforços, e após manipulações algébricas, chega-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^4 Q_\phi}{d\phi^4} + 4\lambda^4 Q_\phi = 0 \quad (3.30)$$

Onde:

$$\lambda^4 = 3(1 - \nu^2)(a/h)^2 \quad (3.31)$$

A solução da Equação 3.26 é dada por:

$$Q_\phi = C_1 e^{\lambda\phi} \cos \lambda\phi + C_2 e^{\lambda\phi} \operatorname{sen} \lambda\phi + C_3 e^{-\lambda\phi} \cos \lambda\phi + C_4 e^{-\lambda\phi} \operatorname{sen} \lambda\phi \quad (3.32)$$

Assim como para as cascas cilíndricas os efeitos das perturbações de bordas ( $H$  e  $M$ ) se atenuam rapidamente como traduz os termos da exponencial negativa

Logo, as constantes  $C_1$  e  $C_2$  assumem o valor zero por conta deste efeito de atenuação que não seria reproduzido pelos termos de exponencial positiva. Portanto, a Equação 3.32 se torna:

$$Q_\phi = C_3 e^{-\lambda\phi} \cos \lambda\phi + C_4 e^{-\lambda\phi} \operatorname{sen} \lambda\phi \quad (3.33)$$

As duas constantes  $C_3$  e  $C_4$  são determinadas para cada caso particular por suas condições de contorno localizado em  $\phi = \alpha$ . Para uma melhor compressão e análise das condições de contorno, é introduzida a relação  $\psi = \alpha - \phi$  e as constantes  $C$  e  $\gamma$ .

Substituindo  $\phi$  por  $\alpha - \psi$  e as constantes  $C$  e  $\gamma$  na Equação 3.33 a solução assume a seguinte forma:

$$Q_\phi = C e^{-\lambda\psi} \operatorname{sen}(\lambda\psi + \gamma) \quad (3.34)$$

A partir do equilíbrio de forças obtidos na Figura 3.9 e com o auxílio da Equação 3.34 encontra-se:

$$N_{\varphi} = -\cot(\alpha - \psi)Ce^{-\lambda\psi} \operatorname{sen}(\lambda\psi + \gamma) \quad (3.35)$$

$$N_{\theta} = -\lambda\sqrt{2}Ce^{-\lambda\psi} \operatorname{sen}\left(\lambda\psi + \gamma - \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.36)$$

As equações para rotação  $\Delta_{\alpha}$  e deslocamento horizontal  $\Delta_r$  são dados por:

$$\Delta_{\alpha} = -\frac{2\lambda^2}{Eh}Ce^{-\lambda\psi} \cos(\lambda\psi + \gamma) \quad (3.37)$$

$$\Delta_r = -\frac{a}{Eh} \operatorname{sen}(\alpha - \psi)\lambda\sqrt{2}Ce^{-\lambda\psi} \operatorname{sen}\left(\lambda\psi + \gamma - \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.38)$$

Para os momentos pode-se usar as expressões seguintes:

$$M_{\varphi} = \frac{a}{\lambda\sqrt{2}}Ce^{-\lambda\psi} \operatorname{sen}\left(\lambda\psi + \gamma + \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.39)$$

$$M_{\theta} = \nu M_{\varphi} \quad (3.40)$$

Para só o momento fletor atuando na borda da casca esférica, tem-se as seguintes condições de contorno:

$$1) (M_{\varphi})_{\varphi=\alpha} = M \quad 2) (N_{\varphi})_{\varphi=\alpha} = 0$$

Substituindo  $\psi = 0$  na Equação 3.35 é satisfeita a primeira condição de contorno. Para ser satisfeita a segundo condição de contorno adota-se também  $\gamma = 0$ . Fazendo as mesmas considerações anteriores para  $\psi = \gamma = 0$  na Equação 3.39 é possível encontrar a expressão da constante  $C$ , como sendo:

$$C = \frac{M2\lambda}{a}$$

De forma análoga a obtenção da constante  $C$  é determinada pelas equações de rotação  $\Delta_\alpha$  e deslocamento horizontal  $\Delta_r$  para  $\varphi = \alpha$ , como sendo:

$$(\Delta_\alpha)_{\psi=0} = -\frac{4\lambda^3 M}{Eah} \quad (3.41)$$

$$(\Delta_r)_{\psi=0} = \frac{2\lambda^2 \text{sen}\alpha}{Eh} M \quad (3.42)$$

Considerando agora apenas a aplicação do esforço cortante horizontal atuando na borda da casca esférica, tem-se as seguintes condições de contorno:

$$1) (M_\varphi)_{\varphi=\alpha} = 0 \quad 2) (N_\varphi)_{\varphi=\alpha} = -H \cos \alpha$$

A primeira condição de contorno é satisfeita, quando fazemos  $\gamma = -\frac{\pi}{4}$ , e a segunda condição é obtida pela igualdade dos esforços tomada na Equação 3.35, chegando-se a:

$$-H \cos \alpha = C(\cot \alpha) \left( \text{sen} \frac{\pi}{4} \right)$$

Assim, determina-se a constante  $C$ , como sendo:

$$C = -\frac{2H \text{sen}\alpha}{\sqrt{2}}$$

Substituindo-se os valores de  $\gamma = -\frac{\pi}{4}$  e da constante  $C$ , nas equações de rotação  $\Delta_\alpha$  e deslocamento horizontal  $\Delta_r$  para  $\varphi = \alpha$ , obtem-se:

$$(\Delta_\alpha)_{\psi=0} = \frac{2\lambda^2 \text{sen}\alpha}{Eh} H \quad (3.43)$$

$$(\Delta_r)_{\psi=0} = -\frac{2a\lambda \text{sen}^2 \alpha}{Eh} H \quad (3.44)$$

Com o desenvolvimento sucinto acima, apresenta-se as principais expressões matemáticas necessárias para a imposição das condições na conexão com a casca cilíndrica recipiente, mostrado mais adiante.

**EXPRESSÕES E FORMULÁRIO GERAL PARA OS CASOS PARTICULARES DE CASCA ESFÉRICA SOB AÇÃO DO PESO PRÓPRIO, AÇÃO DE CARGA DISTRIBUÍDA E CARGA PONTUAL**

Como a casca esférica (domo da tampa) poderá estar conectado ao cilindro recipiente, o estudo da teoria flexional para cascas esféricas é apresentado a seguir para o caso de uma vinculação engastada. Usando-se o método das forças é possível se determinar os hiperestáticos, que neste caso serão chamados  $M$  e  $H$ . Será considerada uma casca esférica engastada sob três situações de carregamento: ação do peso próprio, carga distribuída e uma carga pontual. As Figura 3.11, Figura 3.12 e Figura 3.13 ilustram os detalhes dos carregamentos e a divisão dos sistemas utilizando-se o método adotado.

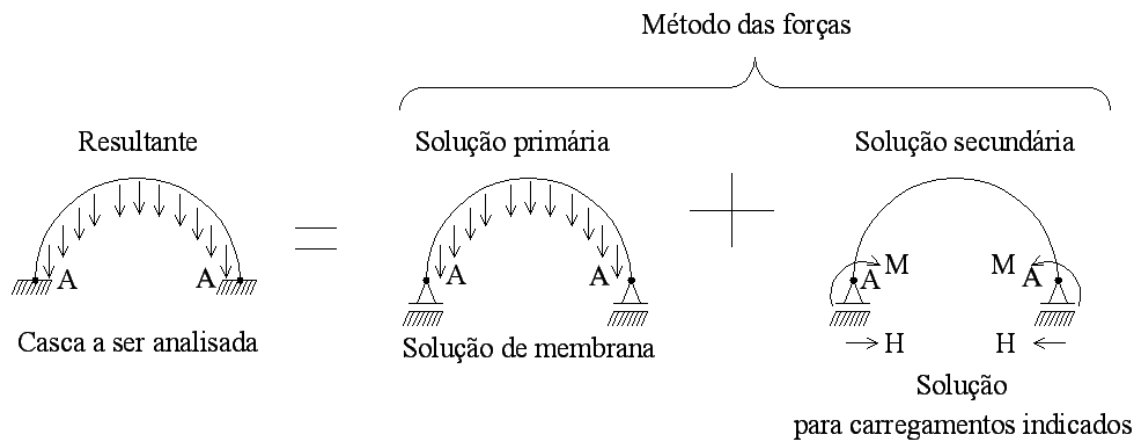


Figura 3.11 – Método das forças aplicado a casca esférica sob ação do peso próprio

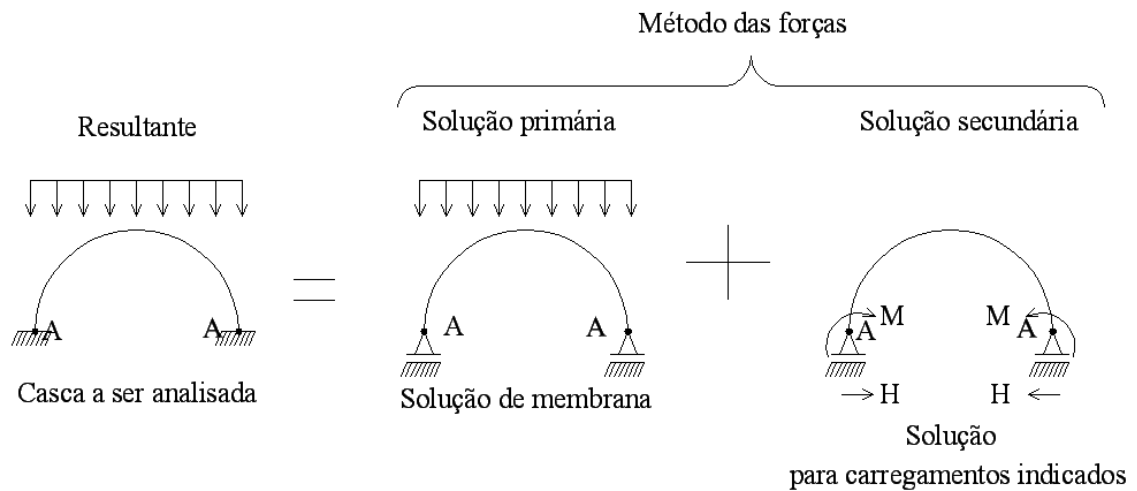


Figura 3.12 – Método das forças aplicado a casca esférica sob ação de carga distribuída

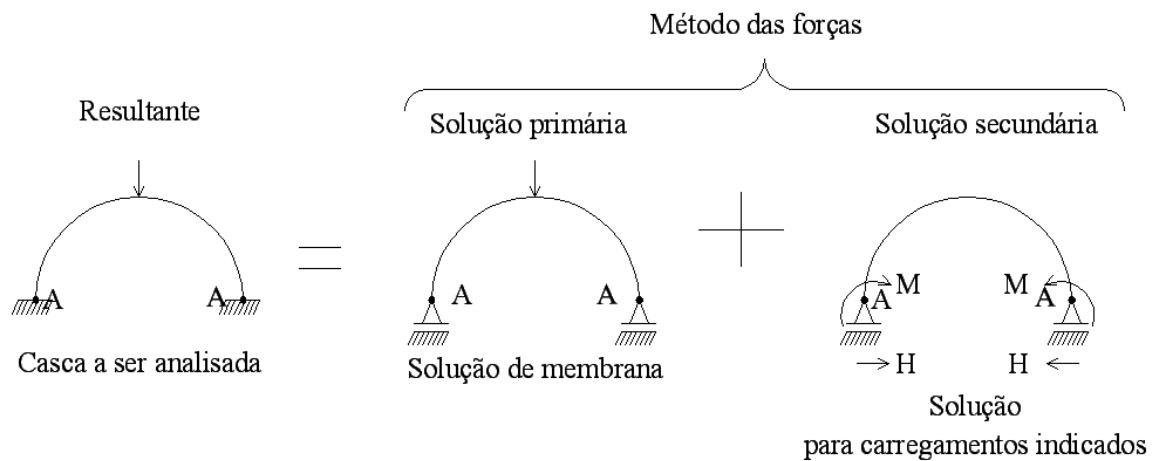


Figura 3.13 – Método das forças aplicado a casca esférica sob ação de carga pontual

Resumidamente tem-se a seguinte equação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sistema principal} \\ \text{com carregamento} \\ \text{externo e esforços} \\ \text{redundantes} \\ X_1 = H \text{ e} \\ X_2 = M \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sistema com} \\ \text{carregamento} \\ \text{externo} \end{array} \right\} + \sum_{i=1}^2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Sistema} \\ \text{principal com} \\ \text{esforços} \\ \text{redundantes} \\ X_i = 1 \end{array} \right\} X_i$$

Uma vez utilizado adequadamente o método, é possível se encontrar o valor dos hiperestáticos  $X_1$  e  $X_2$ . Estes hiperestáticos podem ser obtidos a partir do sistema formado pelas Equações 3.45 e 3.46.



$$w_0 + w_1 M + w_2 H = 0 \quad (3.45)$$

$$\psi_0 + \psi_1 M + \psi_2 H = 0 \quad (3.46)$$

Sendo  $w_0$  e  $\psi_0$  o deslocamento radial e a rotação, respectivamente, para cada caso específico de carregamento. As constantes  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $\psi_1$  e  $\psi_2$  foram obtidas no desenvolvimento (seção 3.3.3) feito a partir da Figura 3.10 considerando o valor de  $H$  e  $M$  como sendo unitários. Resolvendo o sistema formado pelas Equações 3.45 e 3.46, podemos encontrar finalmente os hiperestáticos que são fornecidos pelas Equações 3.47 e 3.48.

$$M = \frac{-\psi_0 - \psi_2 H}{\psi_1} \quad (3.47)$$

$$H = \frac{w_1 \psi_0 - w_2 \psi_1}{w_2 \psi_1 - w_1 \psi_2} \quad (3.48)$$

A seguir serão apresentadas as expressões literais finais para os hiperestáticos obtidos para cada situação de carregamento:

Peso próprio:

$$M = \frac{ag[2\text{sen}(\varphi) + 2\text{sen}(\varphi)\cos(\varphi) + \text{sen}(\varphi)v + \text{sen}(\varphi)\cos(\varphi)v + 2\lambda(1 + v - \cos(\varphi) - \cos^2(\varphi))]}{2(\lambda^2 \text{sen}(\varphi)(1 + \cos(\varphi)))} \quad (3.49)$$

$$H = \frac{a^2 g[2\text{sen}(\varphi) + 2\text{sen}(\varphi)\cos(\varphi) + \text{sen}(\varphi)v + \text{sen}(\varphi)\cos(\varphi)v + \lambda(1 + v - \cos(\varphi) - \cos^2(\varphi))]}{2[\lambda^3(1 + \cos(\varphi))]} \quad (3.50)$$

Carga distribuída:

$$M = -\frac{1}{2} \frac{aq [\text{sen}(\varphi) \cos(\varphi)(3 + \nu) + \lambda(1 + \nu - 2 \cos^2(\varphi))]}{\lambda^2 \text{sen}(\varphi)} \quad (3.51)$$

$$H = \frac{1}{4} \frac{a^2 q [\text{sen}(\varphi) \cos(\varphi)(6 + 2\nu) + \lambda(1 + \nu - 2 \cos^2(\varphi))]}{\lambda^3} \quad (3.52)$$

Carga pontual:

$$M = -\frac{1}{4} \frac{P [\cos(\varphi)(-a + 2 - a\nu + 2\nu) + 2\text{sen}(\varphi)(\lambda + a\lambda + \lambda\nu P)]}{\lambda^2 \text{sen}^3(\varphi)} \quad (3.53)$$

$$H = -\frac{1}{4} \frac{P [\cos(\varphi)(-a + 2 - a\nu + 2\nu) + \text{sen}(\varphi)(\lambda + a\lambda + \lambda\nu P)] a}{\lambda^3 \text{sen}^2(\varphi)} \quad (3.54)$$

Onde:

$M$  Momento aplicado na borda livre

$H$  Cortante aplicado na borda livre

$\nu$  Coeficiente de poisson

$\lambda$  Coeficiente de atenuação

$g$  Peso próprio

$q$  Carga distribuída

$P$  Carga pontual

### 3.3.4 – Teoria flexional para placas circulares

Considerando uma placa circular como elemento de vedação do fundo do reservatório onde a ligação é considerada, neste momento, como um engaste perfeito, conforme mostra a Figura 3.14 a). A partir das equações obtidas no ANEXO A e adaptadas para as condições de contorno de engastamento, é possível encontrar as expressões finais para os esforços e deslocamentos aplicando o método das forças.

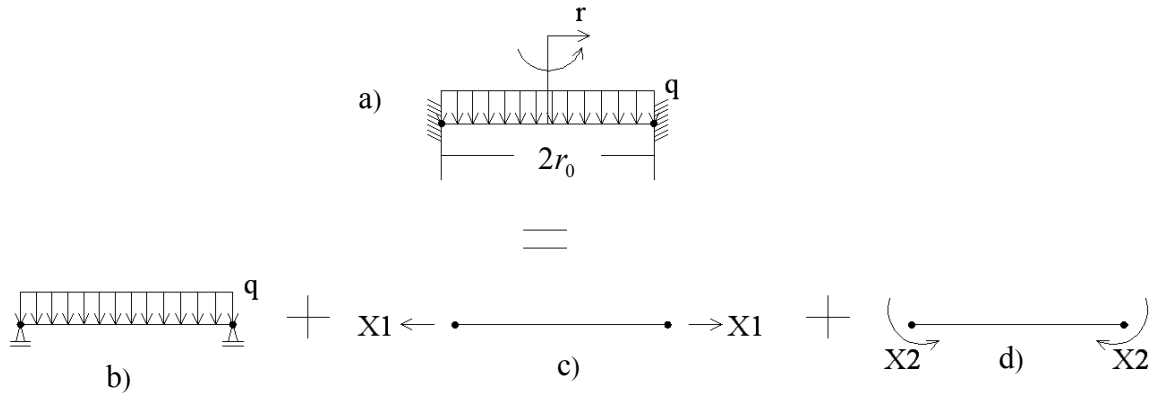


Figura 3.14 – a) solução geral; b) solução de membrana; c) e d) solução flexional

A seguir são apresentadas as expressões gerais para as situações a), b), e d) da Figura 3.14. Para a situação c), onde há um esforço normal, a expressão do deslocamento é obtida na Tabela 3.8.

Situação a):

$$w = \frac{q}{64D} (r_0^2 - r^2)^2 \quad (3.55)$$

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{qr}{16D} (r_0^2 - r^2) \quad (3.56)$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} = -\frac{q}{16D} (r_0^2 - 3r^2) \quad (3.57)$$

$$m_r = \frac{q}{16} [r_0^2(1+\nu) - r^2(3+\nu)] \quad (3.58)$$

$$m_t = \frac{q}{16} [r_0^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)] \quad (3.59)$$

Situação b):

$$w = \frac{qr_0^4}{64D(1+\nu)} \left[ 2(3+\nu) \left( 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right) - (1+\nu) \left( 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^4 \right) \right] \quad (3.60)$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{qr_0^4}{64D(1+\nu)} \left[ \frac{-4(3+\nu)r}{r_0^2} + \frac{4(1+\nu)r^3}{r_0^4} \right] \quad (3.61)$$

$$m_r = \frac{qr_0^2}{16}(3 + \nu) \left( 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right) \quad (3.62)$$

$$m_t = \frac{qr_0^2}{16} \left[ 2(1 - \nu) - (1 + 3\nu) \left( 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right) \right] \quad (3.63)$$

$$q_r = -\frac{qr}{2} \quad (3.64)$$

Situação d):

$$w = \frac{X_2 r_0^2}{2D(1 + \nu)} \left[ \left( 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right) \right] \quad (3.65)$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{r}{D(1 + \nu)} \quad (3.66)$$

$$m_r = X_2 \quad (3.67)$$

$$m_t = X_2 \quad (3.68)$$

$$q_r = 0 \quad (3.69)$$

Onde:

$r_0$  - Raio da placa

$r$  - Eixo de referência na direção do raio

$w$  - Deflexão da placa

$\frac{dw}{dr}$  - Rotação da placa

$m_r$  - Momento radial

$m_t$  - Momento tangencial

$q_r$  - Cortante ao longo da placa

$q$  - Carregamento distribuído por unidade de comprimento

$\nu$  - Coeficiente de poisson

$X_1$  - Esforço normal a seção transversal da placa

$X_2$  - Momento fletor aplicado ao longo da borda da placa

### 3.3.5 – Teoria flexional para anel de borda

O anel de borda que pode enrijecer a extremidade conectada de uma casca cilíndrica, ou uma casca esférica, e serve de elemento para absorção dos esforços horizontais e momentos que surgem na conexão entre estes elementos.

A Figura 3.15 mostra a direção da força horizontal distribuída  $H$  aplicada em um anel de borda.

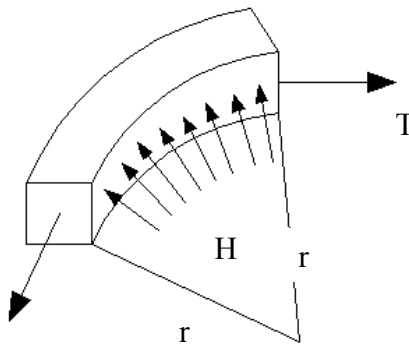


Figura 3.15 – Esforço horizontal  $H$  distribuído no anel de borda –Modificado Billigton, 1965

O esforço normal no anel  $T$  pode ser obtido através da Equação 3.56.

$$T = Hr \quad (3.70)$$

Além de esforços horizontais também surgem momentos aplicados ao longo do anel de borda, a Figura 3.16 ilustra estes esforços.

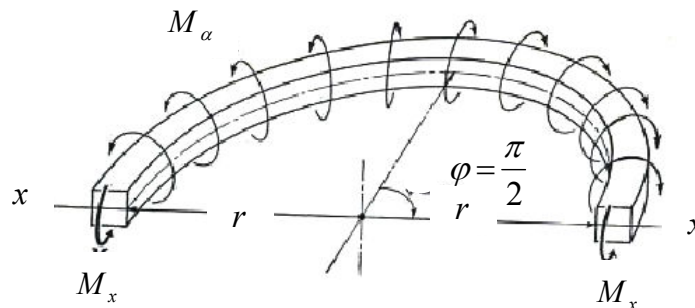


Figura 3.16 – Momento aplicado ao longo da borda – modificado Billigton, 1965

A seguir a Equação 3.57 determina o valor da resultante dos momentos aplicados na borda  $M_x$ .

$$M_x = M_\alpha r \quad (3.71)$$

Considerando um anel retangular e, observando as devidas condições de simetria assim como as relações constitutivas de deformações e as equações de compatibilidade, obtém-se os seguintes deslocamentos:

$$\Delta_r = \frac{r}{Ebd} H \quad (3.72)$$

$$\Delta_\alpha = \frac{12r^2}{Ebd^3} M_\alpha \quad (3.73)$$

Onde:

$\Delta_r$  é o deslocamento radial;

$\Delta_\alpha$  é a rotação.

## **4 – MÉTODO DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO ACOPLAMENTO ENTRE A CASCA RECIPIENTE E OS ELEMENTOS DE FECHAMENTO**

### **4.1 – MÉTODO DAS FORÇAS**

A formulação utilizada para solução do problema acoplado é o clássico método das forças. A solução completa é constituída pela solução primária (teoria de membrana) e a solução secundária (teoria flexional). A solução primária resulta da ação dos carregamentos aplicados no estado de membrana e a solução secundária é obtida a partir da aplicação dos hiperestáticos. A Figura 4.1 ilustra o esquema completo de solução.

O método consiste no seguinte procedimento:

A estrutura hiperestática da Figura 4.1 (considerando-se só a conexão da cobertura), tem uma quantidade de vínculos rompidos, sendo este número de vínculos substituído pelos esforços hiperestáticos ( $X_1$  e  $X_2$ ). A superposição dos efeitos é feita de tal forma que a solução resultante é dada por uma solução primária contendo apenas o carregamento aplicado no sistema principal (regime de membrana) e outra solução secundária que é a solução incluindo os esforços no contorno (hiperestático) que induzem flexão no sistema (teoria flexional). Os esforços hiperestáticos são as incógnitas do problema e, quando determinados, resultam na resolução da estrutura.

Para cada vínculo rompido na passagem da estrutura inicial (dada) para o sistema principal (“isostático”), uma deformação que não existe na estrutura original é liberada, de modo que deve ser imposta à estrutura do sistema principal, a condição de serem nulos os deslocamentos nas direções dos hiperestáticos, ou a compatibilidade de deformações com as estruturas auxiliares que originam estes hiperestáticos (chamado de equações de compatibilidade).

Assim em termos gerais, para cada incógnita  $X_i$ , temos uma equação na qual o deslocamento da direção de  $X_i$  é nulo ou conhecido. Logo, o problema de uma estrutura ‘ $n$ ’ vezes hiperestática recairá na solução de um sistema  $n \times n$ , onde cada equação terá a condição de ter o deslocamento nulo ou determinado na direção de cada um dos hiperestáticos.

Para manipular algebricamente o problema, emprega-se o princípio da superposição de efeitos, onde é separado o efeito do carregamento externo e o de cada um dos hiperestáticos. Por exemplo, para simplificar se arbitram valores unitários para estes hiperestáticos que devem ser multiplicados pelos fatores-escala  $X_1$  e  $X_2$  tais que façam com que os deslocamentos finais das direções dos hiperestáticos sejam nulos. Para um sistema de múltiplas partes (estruturas) a estrutura pode ser separada conforme mostra a Figura 4.1, com 4 hiperestáticos, todavia, como já dissemos, para ilustrar o processo só usaremos a conexão de cobertura do reservatório que contem os hiperestáticos  $X_1$  e  $X_2$ .

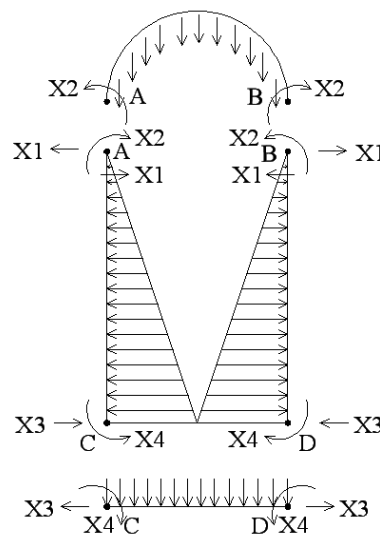


Figura 4.1 – Sistema com conexão de tampa e fundo

Sejam as equações de compatibilidade para os pontos A e B a igualdade entre Equação (4.1) e (4.2) para os deslocamentos horizontais e Equações (4.3) e (4.4) para as rotações.

Deslocamentos horizontais nos pontos A e B:

$$\bar{w}_{10} + \bar{w}_{11}X_1 + \bar{w}_{12}X_2 \quad (4.1)$$



$$w_{10} + w_{11}X_1 + w_{12}X_2 \quad (4.2)$$

Rotações nos pontos A e B:

$$\bar{\psi}_{20} + \bar{\psi}_{21}X_1 + \bar{\psi}_{22}X_2 \quad (4.3)$$

$$\psi_{20} + \psi_{21}X_1 + \psi_{22}X_2 \quad (4.4)$$

Onde:

$\bar{w}_{10}$  é o deslocamento radial na casca esférica devido ao carregamento no estado de membrana;

$\bar{w}_{11}$  é o deslocamento radial na casca esférica devido ao hiperestáticos  $X_1$  aplicado;

$\bar{w}_{12}$  é o deslocamento radial na casca esférica devido ao hiperestáticos  $X_2$  aplicado;

$w_{10}$  é o deslocamento radial na casca cilíndrica devido ao carregamento no estado de membrana;

$w_{11}$  é o deslocamento radial na casca cilíndrica devido ao hiperestáticos  $X_1$  aplicado;

$w_{12}$  é o deslocamento radial na casca cilíndrica devido ao hiperestáticos  $X_2$  aplicado;

$\bar{\psi}_{20}$  é a rotação na casca esférica devido ao carregamento no estado de membrana;

$\bar{\psi}_{21}$  é a rotação na casca esférica devido ao hiperestáticos  $X_1$  aplicado;

$\bar{\psi}_{22}$  é a rotação na casca esférica devido ao hiperestáticos  $X_2$  aplicado;

$\psi_{20}$  é a rotação na casca cilíndrica devido ao carregamento no estado de membrana;

$\psi_{21}$  é a rotação na casca cilíndrica devido ao hiperestáticos  $X_1$  aplicado;

$\psi_{22}$  é a rotação na casca cilíndrica devido ao hiperestáticos  $X_2$  aplicado;

Resolvendo-se o sistema, obtêm-se os  $X_i$ , e conseqüentemente, é possível se determinar os efeitos  $E$  (esforços e o deslocamentos) pelo princípio da superposição dos efeitos, conforme a equação (4.5) a seguir:

$$E = E_0 + \sum_{i=1}^4 E_i X_i \quad (4.5)$$

Onde:

$E$  Efeitos finais atuantes na estrutura hiperestática

$E_0$  Efeitos de membrana na estrutura oriundos do carregamento externo

$E_i$  Efeitos de flexão na estrutura oriundos do  $i$ -ésimo hiperestático  $X_i$

### Ilustração de aplicação do método:

Seja um reservatório cilíndrico aberto de altura “ $l$ ” (Figura 4.2), com uma placa de fundo apoiada sobre solo rígido em seu plano (impedimento das deformações radiais), submetida a pressão hidrostática de um líquido de peso específico ( $\gamma$ ). A obtenção das equações para determinação dos deslocamentos e esforços utilizando o método das forças é baseado no desenvolvimento apresentado por Pedroso (1998).

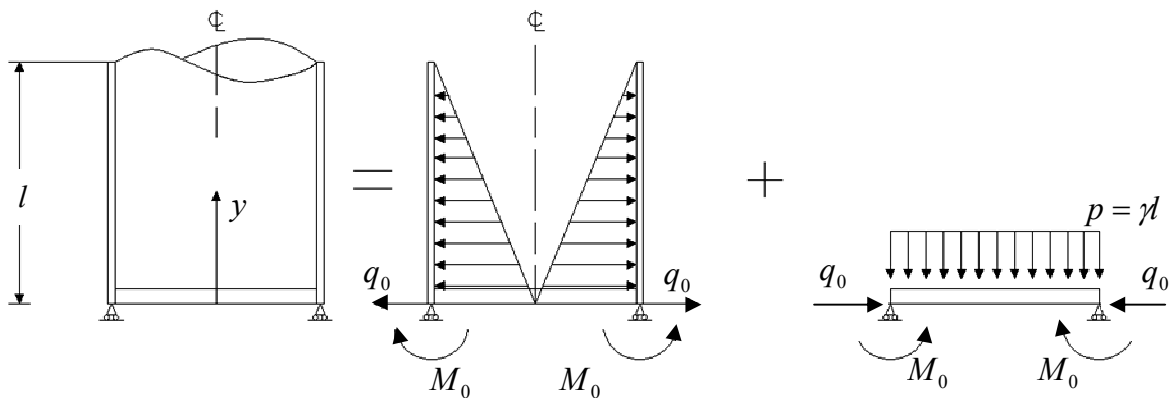


Figura 4.2 – Reservatório cilíndrico em estudo com placa circular como laje de fundo e aplicação de superposição dos efeitos para aplicação do método

A seguir é apresentada a resolução utilizando o método das forças aplicado ao reservatório em análise.

A seguinte nomenclatura será utilizada:

$M_0$  - Hiperestático correspondente ao momento aplicado;

$q_0$  - Hiperestático correspondente ao esforço cortante aplicado;

$\bar{\omega}_0$  - deslocamento no estado de membrana da parede do reservatório;

$\omega_0^m$  - deslocamento no estado flexional da parede do reservatório para o momento aplicado;

$\omega_0^q$  - deslocamento no estado flexional da parede do reservatório para o cortante aplicado;

$\psi_0^m$  - deslocamento no estado flexional da parede do reservatório para o momento aplicado;

$\psi_0^q$  - deslocamento no estado flexional da parede do reservatório para o cortante aplicado;

$\psi_0$  - rotação no estado de membrana da parede do reservatório;

$\bar{\psi}_0'$  - rotação no estado de membrana da laje de fundo;

$\psi_0'^m$  - rotação no estado flexional da laje de fundo para o momento aplicado

Como a parede do reservatório está ligada a laje de fundo solidariamente, deve-se considerar os deslocamentos para ambos com valores iguais nos pontos de ligação.

A rotação da placa pode ser expressa pela equação:

$$\psi_0^{placa} = \bar{\psi}_0' - \psi_0'^m M_0 \quad (4.6)$$

A equação da rotação da casca pode ser dado por:

$$\psi_0^{casca} = \bar{\psi}_0 + \psi_0^m M_0 + \psi_0^q q_0 \quad (4.7)$$

Fazendo a consideração de compatibilidade de rotação na placa e casca, podemos escrever:

$$\psi_0^{placa} = \psi_0^{casca} \quad (4.8)$$

Ou por (4.6) e (4.7), chega-se a:

$$\bar{\psi}_0' - \psi_0'^m M_0 = \bar{\psi}_0 + \psi_0^m M_0 + \psi_0^q q_0 \quad (4.9)$$

$$(\psi_0^m + \psi_0'^m) M_0 + (\bar{\psi}_0' - \bar{\psi}_0) + \psi_0^q q_0 = 0 \quad (4.10)$$

Sabendo que  $w_0^{casca} = w_0^{placa}$  e sendo  $w_0^{placa} = 0$ , tem-se:

$$\bar{\omega}_0 + \omega_0^m M_0 + \omega_0^q q_0 = 0 \quad (4.11)$$

Da Equação (4.11), obtem-se:

$$M_0 = \frac{-\bar{\omega}_0 - \omega_0^q q_0}{\omega_0^m} \quad (4.12)$$

De (4.10) pode ser também isolado  $M_0$ :

$$M_0 = \frac{-\left(\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_0'\right) - \psi_0^q q_0}{\left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right)} \quad (4.13)$$

Igualando-se  $M_0$  em (4.12) e (4.13) vem:

$$\frac{\bar{\omega}_0 + \omega_0^q q_0}{\omega_0^m} = \frac{\left(\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_0'\right) + \psi_0^q q_0}{\left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right)} \quad (4.14)$$

$$\left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right) \left(\bar{\omega}_0 + \omega_0^q q_0\right) = \left(\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_0'\right) \omega_0^m + \left(\psi_0^q q_0\right) \omega_0^m$$

$$\bar{\omega}_0 \left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right) + \omega_0^q q_0 \psi_0^m + \psi_0'^m \omega_0^q q_0 - \psi_0^q q_0 \omega_0^m = \left(\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_0'\right) \omega_0^m$$

$$\bar{\omega}_0 \left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right) + \left(\omega_0^q \psi_0^m + \psi_0'^m \omega_0^q - \psi_0^q \omega_0^m\right) q_0 = \left(\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_0'\right) \omega_0^m$$

$$q_0 = \frac{\left(\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_0'\right) \omega_0^m - \bar{\omega}_0 \left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right)}{\omega_0^q \left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right) - \psi_0^q \omega_0^m} \quad (4.15)$$

Substituindo-se (4.15) em (4.13), chega-se a:

$$\begin{aligned}
M_0 &= \frac{-\left(\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_0'\right)}{\left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right)} - \frac{\psi_0^q}{\left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right)} \left[ \frac{\left(\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_0'\right) \omega_0^m - \bar{\omega}_0 \left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right)}{\omega_0^q \left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right) - \psi_0^q \omega_0^m} \right] \\
M_0 &= \frac{-\left(\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_0'\right)}{\left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right)} - \frac{\psi_0^q \left[ \left(\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_0'\right) \omega_0^m - \bar{\omega}_0 \left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right) \right]}{\omega_0^q \left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right)^2 - \psi_0^q \omega_0^m \left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right)} \\
M_0 &= \frac{-\left(\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_0'\right) \left[ \left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right) \omega_0^q - \psi_0^q \omega_0^m \right] - \psi_0^q \left[ \left(\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_0'\right) \omega_0^m - \bar{\omega}_0 \left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right) \right]}{\left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right) \left[ \omega_0^q \left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right) - \psi_0^q \omega_0^m \right]} \\
M_0 &= \frac{-\left(\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_0'\right) \left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right) \omega_0^q + \psi_0^q \omega_0^m \left(\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_0'\right) - \psi_0^q \omega_0^m \left(\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_0'\right) + \left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right) \psi_0^q \bar{\omega}_0}{\left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right) \left[ \omega_0^q \left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right) - \psi_0^q \omega_0^m \right]} \\
M_0 &= \frac{\left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right) \left[ \psi_0^q \bar{\omega}_0 - \left(\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_0'\right) \omega_0^q \right]}{\left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right) \left[ \omega_0^q \left(\psi_0^m + \psi_0'^m\right) - \psi_0^q \omega_0^m \right]} \tag{4.16}
\end{aligned}$$

O deslocamento radial e a rotação na casca são obtidos pelas seguintes equações, já apresentadas no capítulo anterior:

$$w = \frac{\gamma R_0^2 y}{Eh} \tag{4.17}$$

$$\frac{dw}{dy} = \psi = \frac{\gamma R_0^2}{Eh} \tag{4.18}$$

Dessa forma temos como deformações para a base da casca no estado de membrana as seguintes expressões:

$$\bar{\omega}_0 = \frac{\gamma R_0^2 l}{Eh} \tag{4.19}$$

$$\bar{\psi}_0 = \frac{\gamma R_0^2}{Eh} \tag{4.20}$$

Nas Equações (4.7) e (4.11) aplicando-se nestas os valores unitários para os hiperestáticos  $M_0$  ou  $q_0$ , obtem-se as seguintes constantes elásticas:

$$\begin{aligned}\omega_0^m &= \omega_m^* = \frac{1}{2\beta^2 D} \\ \omega_0^q &= \omega_q^* = \frac{1}{2\beta^3 D} \\ \psi_0^m &= \psi_m^* = \frac{1}{\beta D} \\ \psi_0^q &= \psi_q^* = \frac{1}{2\beta^2 D}\end{aligned}\tag{4.21}$$

Pela teoria de placas, tem-se que a rotação é:

$$\psi_0' = \frac{pR_0^3}{8(1+\nu)D} = \frac{\gamma R_0^3}{8(1+\nu)D}\tag{4.22}$$

$$\psi_0'^m = -\frac{R_0}{D(1+\nu)}\tag{4.23}$$

Substituindo os valores das Equações (4.19) a (4.23), em (4.15) e (4.16), encontram-se o valor dos hiperestáticos dados por:

$$q_0 = \frac{\gamma R_0^2 \beta^2}{4Eh} \left[ \frac{8D(1+\nu)(1-2\beta l) + R_0 l (16\beta^2 D - Eh)}{1+\nu - 2\beta R_0} \right]\tag{4.24}$$

$$M_0 = \frac{\gamma R_0^2 \beta}{4Eh} \left[ \frac{8D(1+\nu)(\beta l - 1) + R_0 l Eh}{1+\nu - 2\beta R_0} \right]\tag{4.25}$$

Seja agora o cálculo do deslocamento  $\omega(y)$ :

$$\omega(y) = Ae^{-\beta y} \text{sen}(\beta y + \alpha)\tag{4.26}$$

Cujas constantes serão determinadas pelas condições de contorno do caso em análise, a saber:

$$(M_y)_{y=l} = 0 \quad (\text{i})$$

$$(q_y)_{y=0} = q_0 \quad (\text{ii})$$

$$(M_y)_{y=0} = M_0 \quad (\text{iii})$$

Preparando as expressões, temos para a primeira derivada (rotação):

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dy} &= A[e^{-\beta y} \cos(\beta y + \alpha)(\beta) + \text{sen}(\beta y + \alpha)e^{-\beta y}(-\beta)] \\ \frac{d\omega}{dy} &= A[\beta e^{-\beta y} \cos(\beta y + \alpha) - \beta e^{-\beta y} \text{sen}(\beta y + \alpha)] \\ \frac{d\omega}{dy} &= A\beta e^{-\beta y} [\cos(\beta y + \alpha) - \text{sen}(\beta y + \alpha)] \end{aligned} \quad (4.27)$$

Para a segunda derivada:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\omega}{dy^2} &= A\beta\{e^{-\beta y}[-\text{sen}(\beta y + \alpha)(\beta) - \cos(\beta y + \alpha)(\beta)] + [\cos(\beta y + \alpha) - \text{sen}(\beta y + \alpha)]e^{-\beta y}(-\beta)\} \\ \frac{d^2\omega}{dy^2} &= A\beta\{\beta e^{-\beta y}[-\text{sen}(\beta y + \alpha)(\beta) - \cos(\beta y + \alpha)] - \beta e^{-\beta y}[\cos(\beta y + \alpha) - \text{sen}(\beta y + \alpha)]\} \\ \frac{d^2\omega}{dy^2} &= A\beta^2 e^{-\beta y}[-\text{sen}(\beta y + \alpha) - \cos(\beta y + \alpha) - \cos(\beta y + \alpha) + \text{sen}(\beta y + \alpha)] \\ \frac{d^2\omega}{dy^2} &= -2A\beta^2 e^{-\beta y} \cos(\beta y + \alpha) \end{aligned} \quad (4.28)$$

E, para a terceira derivada:

$$\frac{d^3\omega}{dy^3} = -2A_1\beta^2 [-e^{-\beta y} \text{sen}(\beta y + \alpha)(\beta) + \cos(\beta y + \alpha)e^{-\beta y}(-\beta)]$$

$$\frac{d^3 \omega}{dy^3} = -2A_1 \beta^2 \left[ -\beta e^{-\beta y} \text{sen}(\beta y + \alpha) - \beta e^{-\beta y} \cos(\beta y + \alpha) \right]$$

$$\frac{d^3 \omega}{dy^3} = 2A_1 \beta^3 e^{-\beta y} [\text{sen}(\beta y + \alpha) + \cos(\beta y + \alpha)] \quad (4.29)$$

Sabendo-se que:

$$M_y = -D \frac{d^2 \omega}{dy^2} \quad (4.30)$$

$$M_y = 2AD\beta^2 e^{-\beta y} \cos(\beta y + \alpha) \quad (4.31)$$

Aplicando a 1ª condição de contorno (i), temos:

$$(M_y)_{y=l} = 0 \quad (4.32)$$

$$2AD\beta^2 e^{-\beta l} \cos(\beta l + \alpha) = 0 \quad (4.33)$$

Para que a Equação (4.33) seja verdadeira:

$$\cos(\beta l + \alpha) = 0$$

$$\beta l + \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Logo,

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta l \quad (4.34)$$

Como:

$$q_y = -D \frac{d^3 \omega}{dy^3} \quad (4.35)$$

$$q_y = -2A_1 D \beta^3 e^{-\beta y} [\text{sen}(\beta y + \alpha) + \cos(\beta y + \alpha)] \quad (4.36)$$



Aplicando a 2ª condição de contorno (ii), temos:

$$(q_y)_{y=0} = q_0 \quad (4.37)$$

$$-2A_1 D\beta^3 e^{-\beta \cdot 0} \left[ \text{sen}\left(\beta \cdot 0 + \frac{\pi}{2} - \beta l\right) + \cos\left(\beta \cdot 0 + \frac{\pi}{2} - \beta l\right) \right] = q_0 \quad (4.38)$$

$$2A_1 D\beta^3 \left[ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta l\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta l\right) \right] = -q_0 \quad (4.39)$$

$$2A_1 D\beta^3 \left[ \text{sen}\frac{\pi}{2} \cos(\beta l) - \cos\frac{\pi}{2} \text{sen}(\beta l) + \cos\frac{\pi}{2} \cos(\beta l) + \text{sen}\frac{\pi}{2} \text{sen}(\beta l) \right] = -q_0 \quad (4.40)$$

$$2A_1 D\beta^3 [\cos(\beta l) + \text{sen}(\beta l)] = -q_0 \quad (4.41)$$

$$A_1 = -\frac{q_0}{2D\beta^3 [\cos(\beta l) + \text{sen}(\beta l)]} \quad (4.42)$$

E, finalmente aplicando a 3ª condição de contorno (iii), temos:

$$(M_y)_{y=0} = M_0 \quad (4.43)$$

Logo,

$$2A_2 D\beta^2 e^{-\beta \cdot 0} \cos(\beta \cdot 0 + \alpha) = M_0 \quad (4.44)$$

$$2A_2 D\beta^2 \cos\alpha = M_0 \quad (4.45)$$

$$2A_2 D\beta^2 \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\beta l)\right] = M_0 \quad (4.46)$$

$$2A_2 D\beta^2 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\beta l) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{sen}(\beta l) \right] = M_0 \quad (4.47)$$

$$2A_2 D\beta^2 \text{sen}(\beta l) = M_0 \quad (4.48)$$

$$A_2 = \frac{M_0}{2D\beta^2 \text{sen}(\beta l)} \quad (4.49)$$

Assim,

$$A = A_1 + A_2 \quad (4.50)$$

$$A = -\frac{q_0}{2D\beta^3 [\cos(\beta l) + \text{sen}(\beta l)]} + \frac{M_0}{2D\beta^2 \text{sen}(\beta l)}$$

$$A = \frac{1}{2D\beta^2} \left[ -\frac{q_0}{\beta [\cos(\beta l) + \text{sen}(\beta l)]} + \frac{M_0}{\text{sen}(\beta l)} \right] \quad (4.51)$$

Deste modo substituindo as Equações (4.51) e (4.34) em (4.26), se obtém a equação do deslocamento  $\omega(y)$ :

$$\omega(y) = \frac{1}{2D\beta^2} \left[ -\frac{q_0}{\beta [\cos(\beta l) + \text{sen}(\beta l)]} + \frac{M_0}{\text{sen}(\beta l)} \right] e^{-\beta y} \text{sen} \left( \beta y + \frac{\pi}{2} - \beta l \right) \quad (4.52)$$

$$\omega(y) = \frac{1}{2D\beta^2} \left[ -\frac{q_0}{\beta [\cos(\beta l) + \text{sen}(\beta l)]} + \frac{M_0}{\text{sen}(\beta l)} \right] e^{-\beta y} \text{sen} \left[ \frac{\pi}{2} + \beta(y-l) \right]$$

$$\omega(y) = \frac{1}{2D\beta^2} \left[ -\frac{q_0}{\beta [\cos(\beta l) + \text{sen}(\beta l)]} + \frac{M_0}{\text{sen}(\beta l)} \right] e^{-\beta y} \left[ \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) \cos[\beta(y-l)] + \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) \text{sen}[\beta(y-l)] \right]$$

$$\omega(y) = \frac{1}{2D\beta^2} \left[ -\frac{q_0}{\beta [\cos(\beta l) + \text{sen}(\beta l)]} + \frac{M_0}{\text{sen}(\beta l)} \right] e^{-\beta y} \cos[\beta(y-l)] \quad (4.53)$$

Substituindo as Equações (4.34) e (4.51) em (4.27), a rotação pode ser dada pela expressão (4.54) abaixo:

$$\frac{d\omega}{dy} = \frac{1}{2D\beta^2} \left[ -\frac{q_0}{\beta [\cos(\beta l) + \text{sen}(\beta l)]} + \frac{M_0}{\text{sen}(\beta l)} \right] \beta e^{-\beta y} \left[ \cos \left( \beta y + \frac{\pi}{2} - \beta l \right) - \text{sen} \left( \beta y + \frac{\pi}{2} - \beta l \right) \right]$$

$$\frac{d\omega}{dy} = \frac{e^{-\beta y}}{2D\beta} \left[ -\frac{q_0}{\beta [\cos(\beta l) + \text{sen}(\beta l)]} + \frac{M_0}{\text{sen}(\beta l)} \right] \left[ \cos \left( \beta y + \frac{\pi}{2} - \beta l \right) - \text{sen} \left( \beta y + \frac{\pi}{2} - \beta l \right) \right] \quad (4.54)$$

Para o Momento  $M_y$  substitui-se as Equações (4.51) e (4.34) em (4.31), donde se tem:

$$M_y = 2 \left\{ \frac{1}{2D\beta^2} \left[ -\frac{q_0}{\beta[\cos(\beta l) + \text{sen}(\beta l)]} + \frac{M_0}{\text{sen}(\beta l)} \right] \right\} D\beta^2 e^{-\beta y} \cos\left(\beta y + \frac{\pi}{2} - \beta l\right) \quad (4.55)$$

$$M_y = \left[ -\frac{q_0}{\beta[\cos(\beta l) + \text{sen}(\beta l)]} + \frac{M_0}{\text{sen}(\beta l)} \right] e^{-\beta y} \cos\left[\frac{\pi}{2} + \beta(y-l)\right]$$

$$M_y = \left[ -\frac{q_0}{\beta[\cos(\beta l) + \text{sen}(\beta l)]} + \frac{M_0}{\text{sen}(\beta l)} \right] e^{-\beta y} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos[\beta(y-l)] - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{sen}\beta(y-l) \right]$$

$$M_y = \left[ -\frac{q_0}{\beta[\cos(\beta l) + \text{sen}(\beta l)]} + \frac{M_0}{\text{sen}(\beta l)} \right] e^{-\beta y} [-\text{sen}[\beta(y-l)]]$$

$$M_y = -\left[ -\frac{q_0}{\beta[\cos(\beta l) + \text{sen}(\beta l)]} + \frac{M_0}{\text{sen}(\beta l)} \right] e^{-\beta y} \text{sen}[\beta(y-l)] \quad (4.56)$$

A determinação da equação do esforço cortante  $q_y$  ao longo da parede do reservatório é obtida a substituição das Equações (4.51) e (4.34) em (4.36) que permite se chegar a expressão:

$$q_y = -2 \left\{ \frac{1}{2D\beta^2} \left[ -\frac{q_0}{\beta[\cos(\beta l) + \text{sen}(\beta l)]} + \frac{M_0}{\text{sen}(\beta l)} \right] \right\} D\beta^3 e^{-\beta y} \left[ \text{sen}\left[\frac{\pi}{2} + \beta(y-l)\right] + \cos\left(\beta y + \frac{\pi}{2} - \beta l\right) \right]$$

$$q_y = -\left[ -\frac{q_0}{\beta[\cos(\beta l) + \text{sen}(\beta l)]} + \frac{M_0}{\text{sen}(\beta l)} \right] \beta e^{-\beta y} \left\{ \text{sen}\left[\frac{\pi}{2} + \beta(y-l)\right] + \cos\left[\frac{\pi}{2} + \beta(y-l)\right] \right\}$$

$$q_y = -\left[ -\frac{q_0}{\beta[\cos(\beta l) + \text{sen}(\beta l)]} + \frac{M_0}{\text{sen}(\beta l)} \right] \beta e^{-\beta y} +$$

$$\left[ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos[\beta(y-l)] + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{sen}[\beta(y-l)] + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos[\beta(y-l)] - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{sen}[\beta(y-l)] \right]$$

$$q_y = -\left[ -\frac{q_0}{\beta[\cos(\beta l) + \text{sen}(\beta l)]} + \frac{M_0}{\text{sen}(\beta l)} \right] \beta e^{-\beta y} [\cos[\beta(y-l)] - \text{sen}[\beta(y-l)]] \quad (4.57)$$

Este exemplo serve para ilustrar analiticamente e passo-a-passo o procedimento que será utilizado posteriormente para o tratamento dos diversos casos que serão objetos de análise neste trabalho.

## 5 – MODELIZAÇÃO NUMÉRICA E ASPECTOS COMPUTACIONAIS

A modelagem numérica em elementos finitos do reservatório foi feita no software ANSYS que é baseado no método dos elementos finitos – MEF. Com uso do ANSYS será possível determinar os esforços e deslocamentos atuantes na estrutura e assim comparar estes resultados com os valores obtidos pelas formulações analíticas.

Para a modelagem será utilizado o elemento finito 3D de comportamento elástico denominado SHELL63, que está representado na Figura 5.1. O elemento SHELL63 foi escolhido, em razão de suas propriedades físicas e geométricas. Com uma boa malha ele produz boas respostas numéricas, além de permitir se aplicar esforços de flexão, e esforços normais perpendiculares à superfície, gerando saídas com valores de momentos, tensões normais e cisalhantes, necessárias às análises conforme pode ser visto na Figura 5.2.

O elemento SHELL63 tem capacidade de trabalhar em regime de membrana e de flexão. Ambos os carregamentos no plano e normal são permitidos. O elemento tem seis graus de liberdade em cada nó: translação na direção dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ ; rotação sobre o eixo  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

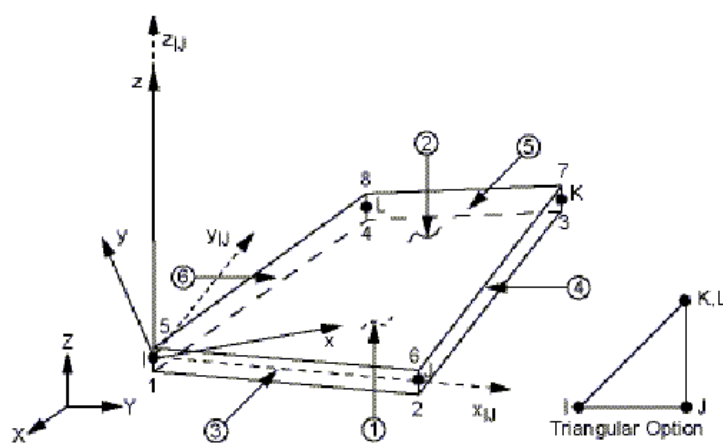


Figura 5.1 – Geometria do elemento SHELL63 (Biblioteca do ANSYS).

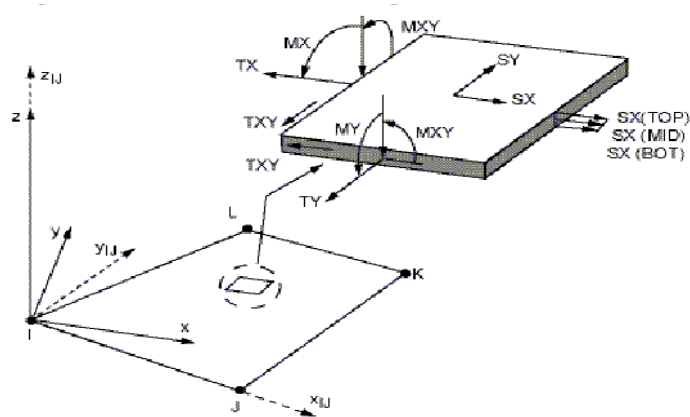


Figura 5.2 – Tensões de saída do elemento SHELL63 (Biblioteca do ANSYS).

O modelo de análise do reservatório recipiente está representado na Figura 5.3, e que será conectada a uma placa circular de fundo. Uma análise numérica do sistema completo (reservatório-fundo) será feita e comparada com valores analíticos de referência numa seção mais a frente.

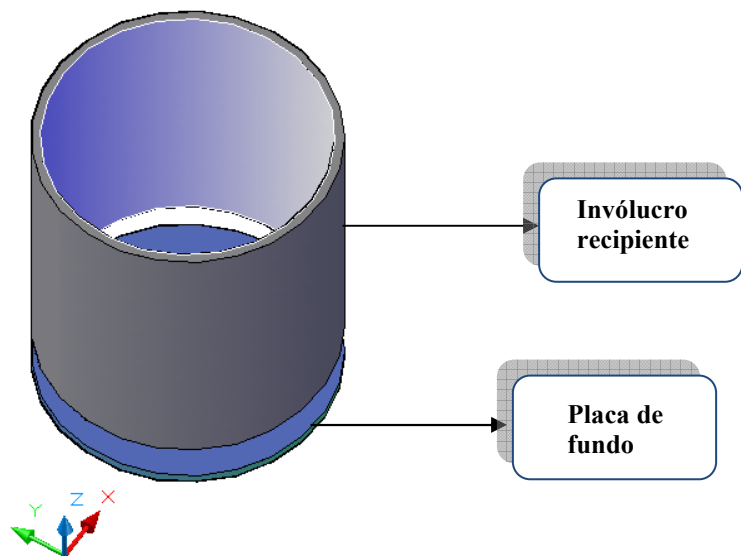


Figura 5.3 – Reservatório cilíndrico utilizado na modelagem numérica.

O modelo consiste em um reservatório cilíndrico, cuja altura  $H = 10,0$  m e raio da parede cilíndrica do reservatório  $r = 5,0$  m e espessura de  $h = 0,2$  m. Apoiado em uma placa circular com raio  $r_0 = 5,0$  m e espessura de  $h = 0,2$  m. Conforme sugere a Figura 5.3.

Ressalta-se que as constantes físicas adotadas no modelo e seus materiais são fictícios, pois o intuito principal é apenas uma análise comparativa entre soluções exatas e numéricas.

A geometria do modelo desacoplado tanto da placa como da casca cilíndrica esta representada na Figura 5.4, onde a placa circular foi considerada completa e a casca cilíndrica reduzida a 1/4 na modelagem. Isto se deve a estratégia de se tratar a casca de revolução com carregamentos axissimétricos, dentro dos recursos e limitações impostos pelo programa.

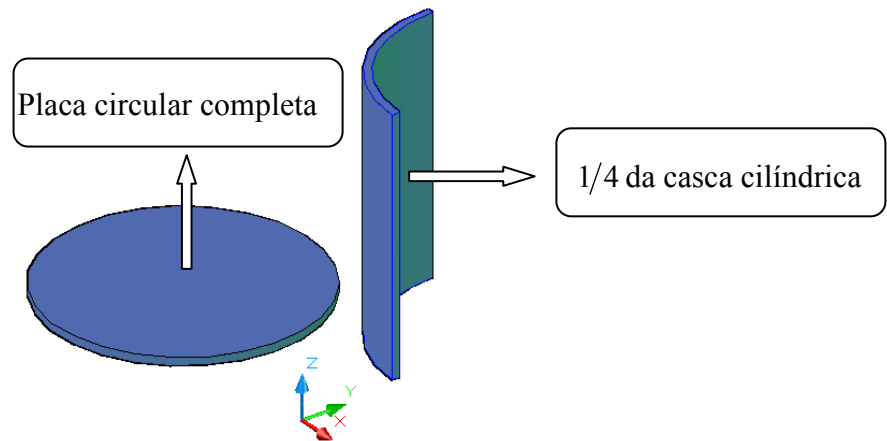


Figura 5.4 – Modelos utilizados para análise numérica no ANSYS.

As condições de contorno consideradas para a placa circular foram simplesmente apoiada e engastada. Dessa forma o comportamento da placa circular isolada ou vinculada rigidamente pode ser estudado.

Duas condições de contorno foram usadas na casca. A primeira diz respeito à condição para o regime de membrana, onde a casca trabalha apenas em regime de membrana; para isto os apoios devem ser colocados de tal forma que garanta este comportamento (Figura 5.5). A segunda condição é quando toda a base da casca cilíndrica fica engastada, e os esforços de flexão aparecem na casca em regime flexional (Figura 5.6).

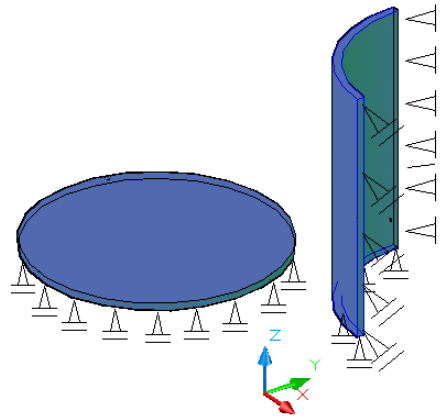


Figura 5.5 – Condições de apoios para a placa circular e casca cilíndrica para regime de membrana.

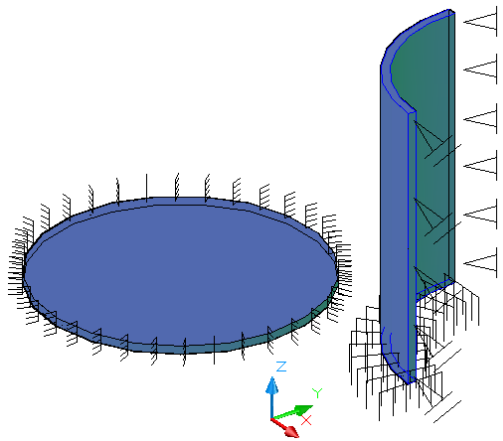


Figura 5.6 – Condições de apoios para a placa circular e casca cilíndrica para regime flexional.

Um aspecto importante que deve ser aqui ressaltado é a interpretação dos resultados da saída do ANSYS, que não são tão simples para um usuário iniciante. Fato que impôs o aprendizado e o desenvolvimento de uma metodologia de análise dos resultados, não óbvia ao entendimento através das simples saídas de resultados do programa. Em particular pelas operações de transformação de coordenadas cilíndricas, em cartesianas e vice-versa.

Para se perceber o que o programa mostra nos resultados, é necessário o entendimento de como o software ANSYS gera tais valores e também como a interface 3D de resultados pode ser interpretada para modelos que são representados por coordenadas cilíndricas, esféricas e cartesianas.

Para que os esforços e deslocamentos sejam gerados de acordo com as convenções coerentes com aquelas da teoria analítica de cascas, foi atribuído aos elementos finitos coordenadas locais cilíndricas, conforme visto na Figura 5.7.

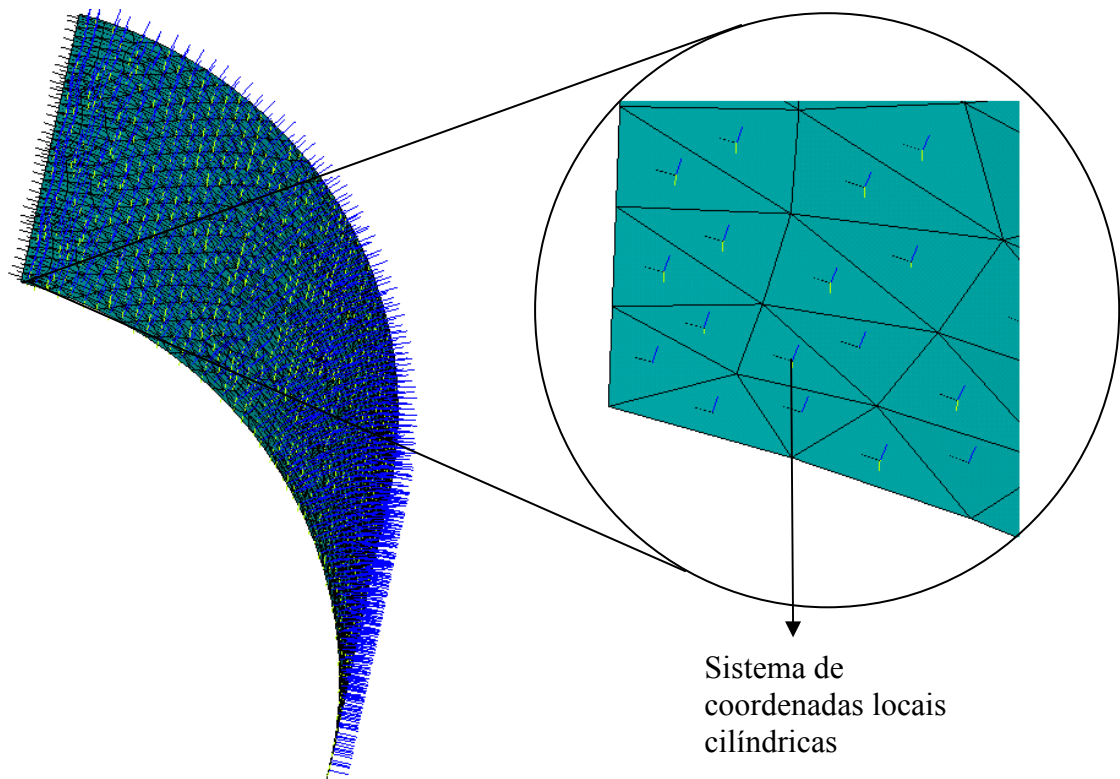


Figura 5.7 – Sistema de coordenadas locais aplicadas aos atributos do elemento

Os resultados gerados pelo programa ANSYS são sempre fornecidos em função das coordenadas cartesianas, mesmo quando se usa as coordenadas cilíndricas para descrever a geometria como é o caso desta análise.

A Figura 5.8 mostra a direção e o sentido dos deslocamentos e esforços de membrana em analogia à teoria analítica e o programa ANSYS.



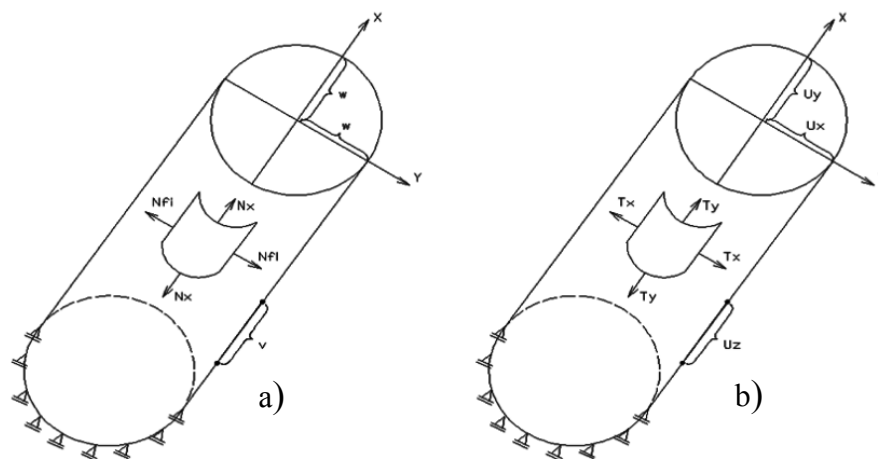


Figura 5.8 – Analogia de esforços e deslocamentos de membrana em cascas cilíndricas, Analítico (a) programa ANSYS (b).

Já a Figura 5.9 mostra a direção e o sentido dos deslocamentos e esforços de flexão em analogia entre a teoria analítica e o programa ANSYS.

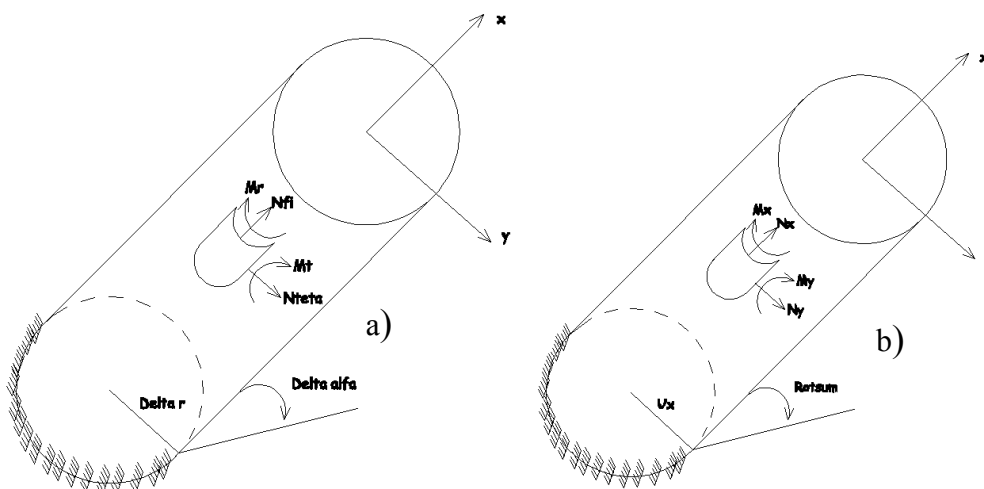


Figura 5.9 – Analogia de esforços e deslocamentos no estado flexional em cascas cilíndricas, Analítico (a) programa ANSYS (b).

Para simplificar o processo de entrada e saída de dados, foi desenvolvido um script para gerar a parede cilíndrica do reservatório com condições de apoio que permitam utilizar a estrutura só em regime de membrana através do elemento SHELL63. O script gerador do modelo contém definição de geometria, propriedades geométricas, condições de contorno, aplicação do carregamento. Para melhores detalhes o leitor poderá recorrer ao APÊNDICE A1.

O refinamento das malhas foi também um fator importante para acurácia dos resultados. A escolha de uma forma triangular ou quadrada para o elemento tem relevância na saída dos resultados. Na aplicação da teoria de membrana para os modelos numéricos do ANSYS foi utilizadas malhas com o formato triangular e também para a modelagem do reservatório.

Para as cascas em teoria de membrana foi utilizado o gerador automático de malhas do programas ANSYS que tem uma escala de refinamento de malhas em níveis de 1 a 10, cada nível representa em ordem decrescente um refinamento menor da malha de elementos finitos. Foram adotados quatro níveis de malha dessa escala: 1, 4, 7 e 10. Estes níveis foram renomeados em malhas níveis 1 (10), 2 (7), 3(4) e 4(1), sendo o nível 1 o nível mais refinado.

## **6 – RESULTADOS**

### **6.1 - INTRODUÇÃO**

Neste capítulo são apresentados os resultados gerais e comparativos entre os cálculos analíticos (baseado na teoria desenvolvida no Capítulo 3) com os resultados numéricos obtidos com o programa ANSYS. São efetuadas também análises envolvendo os principais parâmetros que regem o comportamento dos elementos estruturais que constituem o sistema reservatório-tampa/fundo.

### **6.2 – VALIDAÇÃO E QUALIFICAÇÃO DOS RESULTADOS**

Esta seção tem o intuito de validar o elemento finito SHELL63 a partir da teoria analítica de cascas e placas. Para validar o elemento na teoria de membrana se utiliza como exemplo um modelo de casca cilíndrica, e para validar o elemento na teoria flexional se utiliza um modelo de placa circular. Este estudo está dividido em 2 casos de validação e 1 estudo de caso conforme mostrados a seguir.

Para comparar os resultados analíticos com os numéricos, obtidos pelo programa ANSYS, tabelas e gráficos ilustrativos foram produzidos. Os resultados são apresentados em função de cada nível de refinamento e também dos diversos carregamentos aplicados.

#### ***Caso I – CASCA CILÍNDRICA SIMPLEMENTE APOIADA (CCSP) EM REGIME DE MEMBRANA***

A seguir são analisados exemplos de CCSP sob regime de membrana com diferentes carregamentos. As condições de apoio devem permitir apenas os esforços normais à superfície média da casca, deste modo o elemento SHELL63 é testado para as condições impostas pela teoria de membrana. O estudo analítico-numérico tem os valores analíticos obtidos a partir das equações apresentadas nas tabelas do Capítulo 3 e os resultados numéricos foram gerados a partir dos 4 níveis de malha mencionados no Capítulo 5.

Para este estudo quatro situações de carregamento são impostas à casca, conforme mostra a Figura 6.1. Inicialmente se estuda a ação do peso próprio, logo em seguida o efeito da pressão constante e depois a pressão hidrostática aplicada na parte interna da parede da casca, e por fim um carregamento distribuído ao longo da borda superior livre.

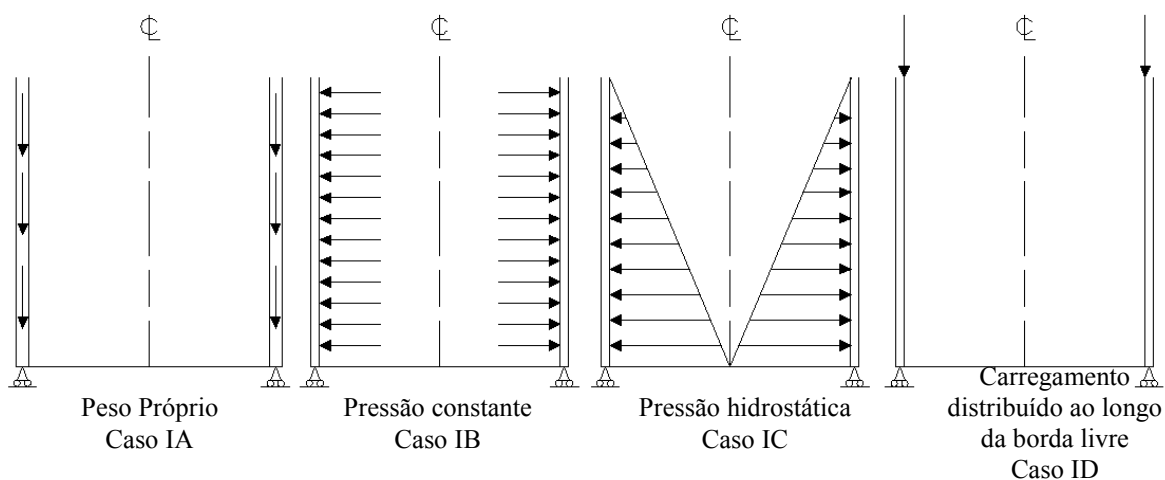


Figura 6.1– Cascas cilíndrica simplesmente apoiada sob diversas condições de carregamento

A Tabela 6.1 define o valor dos carregamentos aplicados e das propriedades geométricas e físicas para a CCSP.

Tabela 6.1 – Carregamentos, propriedades físicas e geométricas para casca cilíndrica simplesmente apoiada (CCSP).

	Raio $r(m)$	Espessura $h(m)$	Coefficiente de Poisson $\nu$	Mód. De Elasticidade $E(kN/m^2)$	Peso Específico do concreto $\gamma_c(kN/m^3)$	Peso Específico da água $\gamma_a(kN/m^3)$	Carga distribuída $q(kN/m)$	Pressão constante $p(kN)$	Casos
CCSP - Peso Próprio	5,0	0,3	0,2	2,61E+07	25,0	0	0	0	IA
CCSP - Pressão constante	5,0	0,3	0,2	2,61E+07	25,0	0	0	15	IB
CCSP - Pressão hidrostática	5,0	0,3	0,2	2,61E+07	25,0	10	0	0	IC
CCSP - Carregamento distribuído ao longo da borda superior	5,0	0,3	0,2	2,61E+07	25,0	0	50	0	ID

### *Estudo de convergência*

Para o desenvolvimento destes casos foram usadas 4 malhas com refinamentos diferentes contendo 32, 96, 448 e 1590 elementos, perfazendo um total de 16 testes foram realizados. As malhas utilizadas estão ilustradas na Figura 6.2.

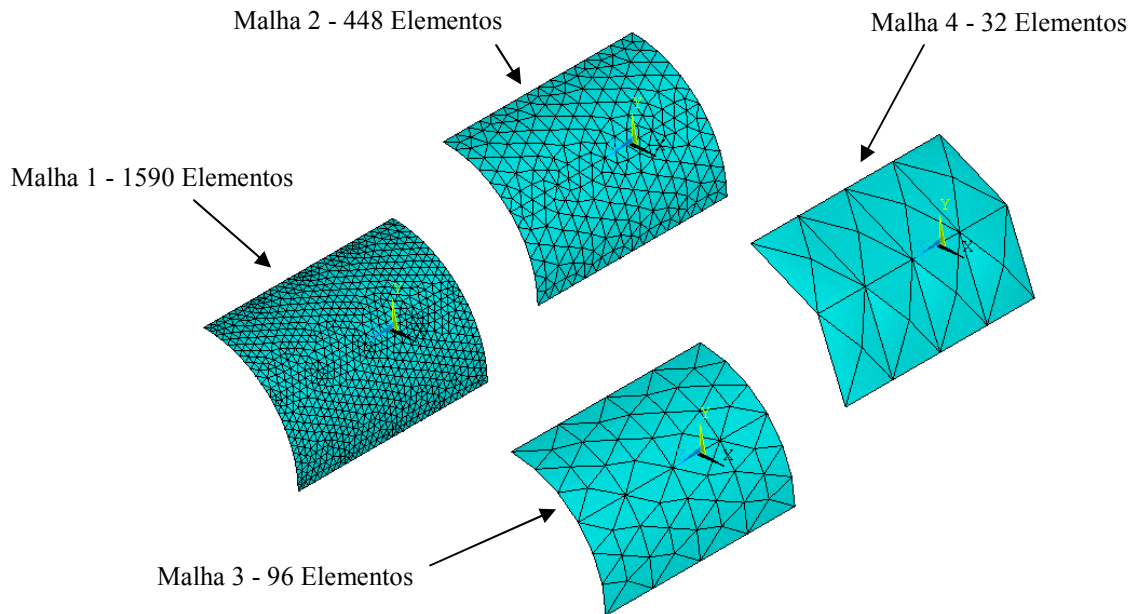


Figura 6.2 - Discretização das malhas em elementos finitos para casca cilíndrica.

Os valores dos esforços e deslocamentos são retirados em dois cortes (LINHA 1 e LINHA 2) mostrados na Figura 6.3. Dependendo da variável a ser analisada a linha escolhida será indicada posteriormente em cada estudo específico. A Linha 1 foi escolhida para análise dos deslocamentos radiais ( $\Delta r$ ) por se tratar de um corte onde os esforços e deslocamentos não apresentam regiões com discrepâncias de valores por conta da interpolação das malhas. Além disso, a saída de resultados do programa ANSYS para os deslocamentos é em função das direções x, y e z (coordenadas cartesianas).

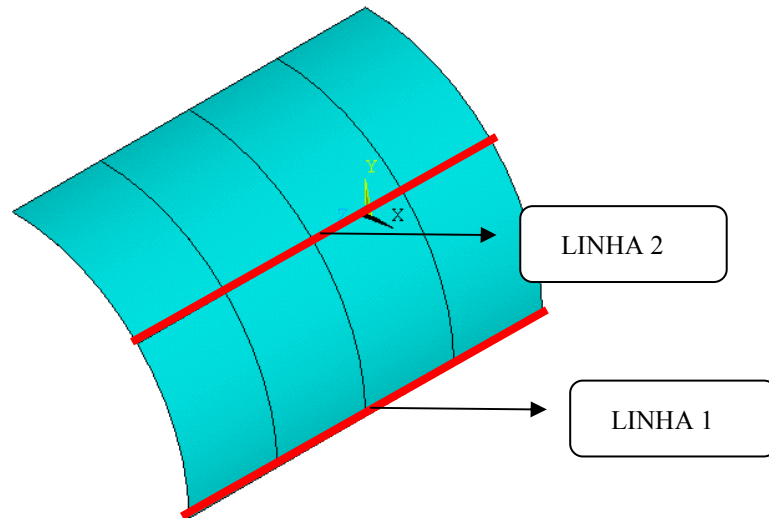


Figura 6.3 - Linhas de análise dos esforços e deslocamentos da casca cilíndrica.

### Caso IA – CCSP sob ação do peso próprio

Analisa-se neste caso uma CCSP sob ação do peso próprio com a geometria e condições de contorno de acordo com a teoria de membrana.

A Tabela 6.2 apresenta o valor do deslocamento radial ( $\Delta r$ ), rotações ( $\Delta\alpha$ ), esforços meridionais ( $N_\theta$ ) e esforços tangenciais ( $N_\varphi$ ) na base e no topo da casca cilíndrica e todos estes confrontados analítico-numericamente.

Tabela 6.2 – Esforços e deslocamentos no topo e na base da CCSP sob ação do peso próprio

Carga	Suporte	Malha	Numérico								
			$\Delta r$ (m)		$\Delta\alpha$ (rad)		$N_\theta$ (kN)		$N_\varphi$ (kN)		
			Topo	Base	Topo	Base	Topo	Base	Topo	Base	
Peso próprio Caso IA	Simplesmente apoiada	(Nível 4) 32 Elementos	1,18E-04	5,05E-04	6,59E-01	4,76E-01	15,47	-19,307	-68,685	-666,27	
		(Nível 3) 96 Elementos	1,71E-05	8,92E-05	1,60E-05	4,45E-05	-0,16019	-8,1879	-48,306	-698,82	
		(Nível 2) 448 Elementos	3,84E-06	9,60E-05	1,14E-05	1,69E-05	0,83233	-1,4593	-21,877	-726,69	
		(Nível 1) 1590 Elementos	-4,25E-07	9,34E-05	9,34E-06	1,22E-05	-0,53454	0,10679	-8,1279	-739,36	
		Analítico									
		$\Delta r$ (m)		$\Delta\alpha$ (rad)		$N_\theta$ (kN)		$N_\varphi$ (kN)			
		Topo	Base	Topo	Base	Topo	Base	Topo	Base		
		0,00E+00	9,59E-05	9,59E-06	9,59E-06	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	-750		

As Figura 6.4 a Figura 6.7 ilustram os valores obtidos, para as ordenadas, referentes ao deslocamento radial ( $\Delta_r$ ), rotação ( $\Delta_\alpha$ ), esforço tangencial ( $N_\theta$ ) e meridional ( $N_\varphi$ ) em forma de gráficos. Nas abscissas são mantidas para todas as figuras a altura da casca cilíndrica, onde o ponto de valor igual a zero corresponde a seu topo. Os valores plotados são relativos aos 4 níveis de malha, todos comparados com seu respectivos valores analíticos e pertencentes as linhas de análise da casca (LINHA 1 para deslocamento radial e LINHA 2 para os demais).

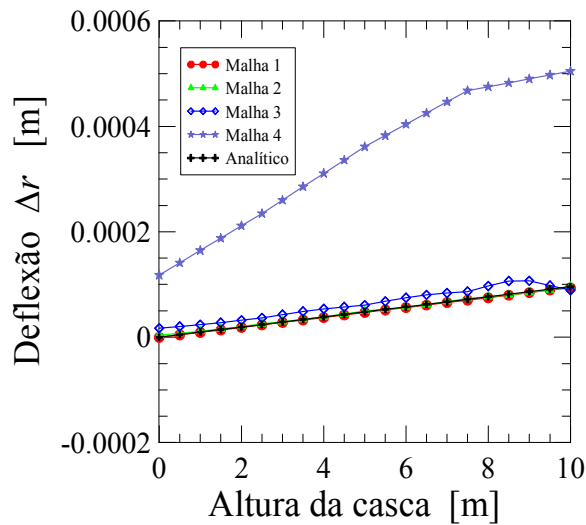


Figura 6.4 – Curva dos deslocamento radiais ( $\Delta_r$ ) ao longo do comprimento em uma casca cilíndrica sob ação do peso próprio.

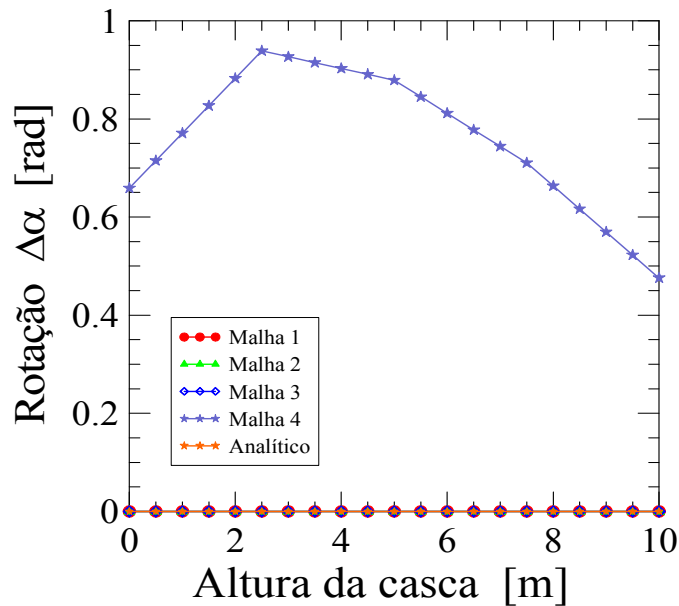


Figura 6.5 – Curva das rotações ( $\Delta_\alpha$ ) ao longo do comprimento em uma casca cilíndrica sob ação do peso próprio.

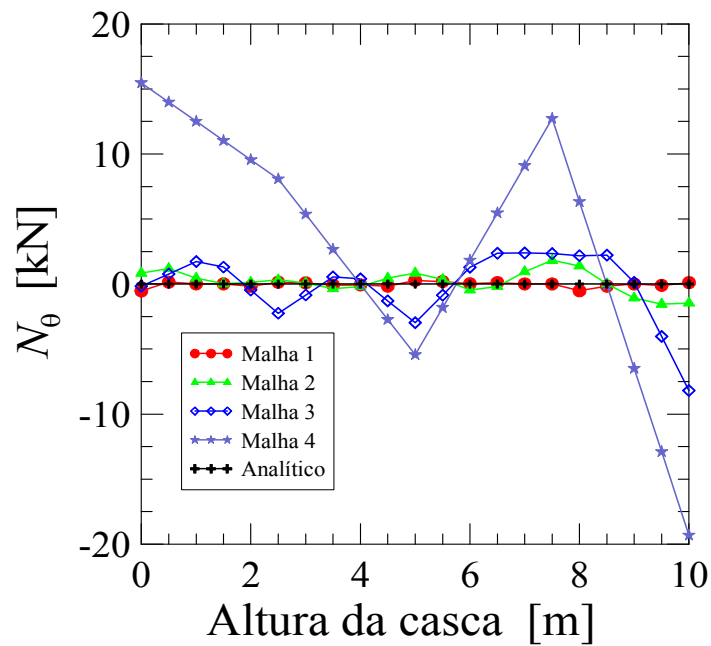


Figura 6.6 – Curva dos esforços tangenciais ( $N_\theta$ ) ao longo do comprimento em uma casca cilíndrica sob ação do peso próprio.

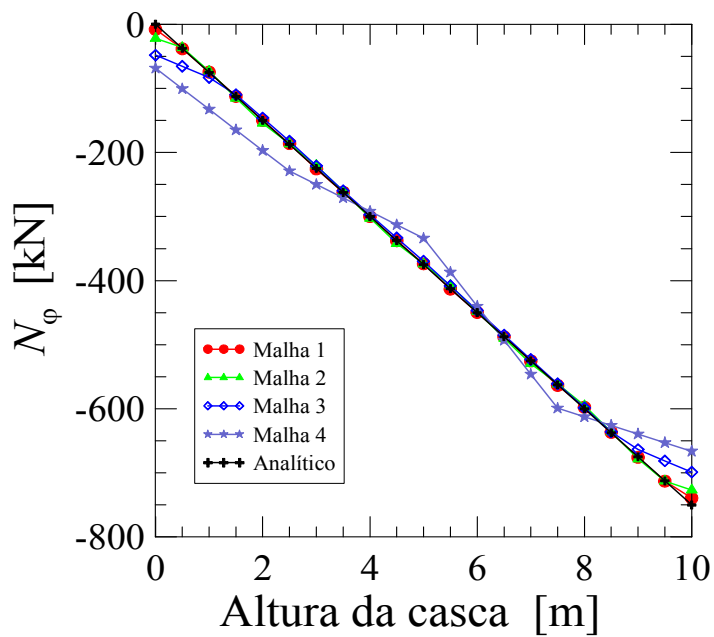


Figura 6.7 – Curva dos esforços meridionais ( $N_\phi$ ) ao longo do comprimento em uma casca cilíndrica sob ação do peso próprio.

O teste de convergência é ilustrado no gráfico da Figura 6.8 com abscissas referentes ao número de elementos para cada nível de refinamento da malha, e nas ordenadas os valores



de deslocamento radial ( $\Delta_r$ ) obtidos no meio da casca para cada uma das quatro malhas geradas. Observa-se a tendência de uma boa convergência a partir do 3º nível de malha onde se tem um valor muito próximo ao analítico. Verifica-se que a partir de 500 elementos há a tendência da curva em se tornar uma assíntota horizontal.

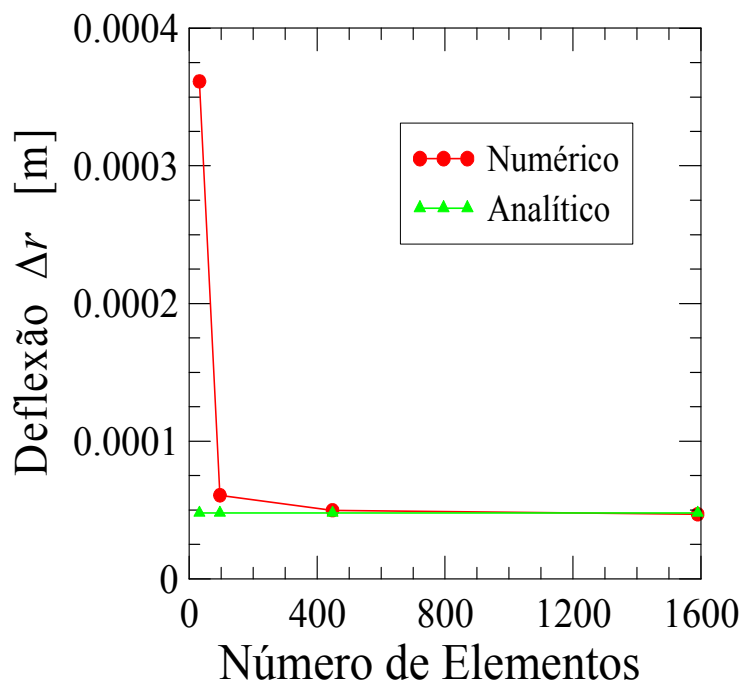


Figura 6.8 – Análise de convergência para o valor do deslocamento radial ( $\Delta_r$ ) em uma casca cilíndrica sob ação do peso próprio, em função do número de elementos.

### ***Caso IB – CCSP sob ação de pressão constante***

Analisa-se neste exemplo uma CCSP sob ação de pressão interna constante.

A Tabela 6.3 apresenta os valores dos deslocamentos radiais ( $\Delta_r$ ), rotações ( $\Delta\alpha$ ), esforços meridionais ( $N_\phi$ ) e esforços tangenciais ( $N_\theta$ ) no topo e na base da casca cilíndrica para valores analíticos e os numéricos considerando os 4 níveis de malha adotados.

Tabela 6.3 – Esforços e deslocamentos no topo e na base da CCSP sob pressão constante

Carga	Suporte	Malha	Numérico							
			$\Delta r$ (m)		$\Delta\alpha$ (rad)		$N_\theta$ (kN)		$N_\varphi$ (kN)	
			Topo	Base	Topo	Base	Topo	Base	Topo	Base
Pressão constante Caso IB	Simplesmente apoiada	(Nível 4) 32 Elementos	4,30E-04	4,27E-04	1,43E-04	1,44E-04	935,03	930,41	-5,3082	35,834
		(Nível 3) 96 Elementos	2,75E-04	3,04E-04	2,56E-04	2,31E-04	974,46	996,6	2,6084	3,0678
		(Nível 2) 448 Elementos	5,50E-04	5,48E-04	5,84E-05	6,27E-05	993,39	994,6	1,0059	0,37864
		(Nível 1) 1590 Elementos	6,27E-04	6,29E-04	2,29E-05	1,43E-05	995,77	996,23	0,27449	0,62084
			Analítico							
			$\Delta r$ (m)		$\Delta\alpha$ (rad)		$N_\theta$ (kN)		$N_\varphi$ (kN)	
			Topo	Base	Topo	Base	Topo	Base	Topo	Base
			6,39E-04	6,39E-04	0,00E+00	0,00E+00	1000	1000	0	0

Foram gerados os gráficos ilustrados nas Figura 6.9 a Figura 6.12 onde as ordenadas, se referem à deslocamento radial ( $\Delta_r$ ), rotação ( $\Delta_\alpha$ ), esforço tangencial ( $N_\theta$ ) e meridional ( $N_\varphi$ ), respectivamente. As abscissas se mantêm sendo a altura da casca cilíndrica em todas as figuras. Os valores plotados são relativos aos 4 níveis de malha, todos comparados com seus respectivos valores analíticos de referência e pertencentes as linhas de análise da casca (LINHA 1 para deslocamentos e LINHA 2 para demais ordenadas).

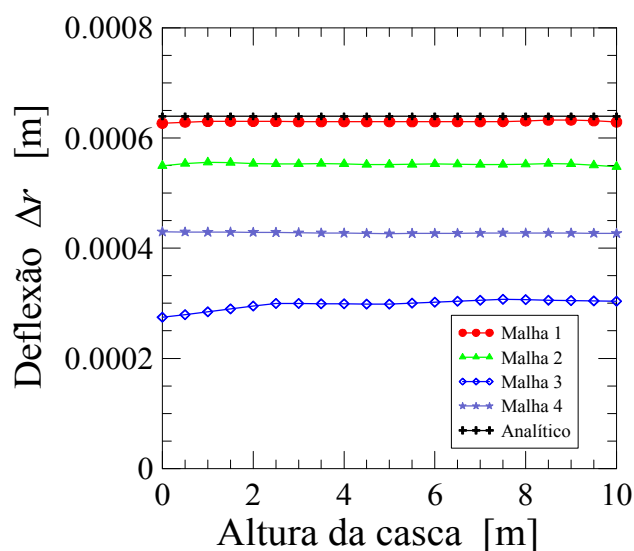


Figura 6.9 – Valores dos deslocamentos radiais ( $\Delta_r$ ) ao longo do comprimento da CCSP sob ação de uma pressão constante

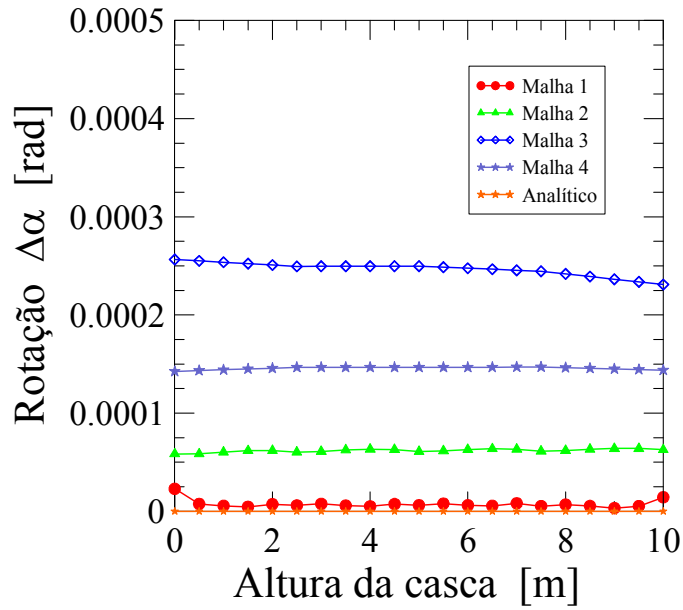


Figura 6.10 – Valores das rotações ( $\Delta\alpha$ ) ao longo do comprimento da CCSP sob ação de uma pressão constante

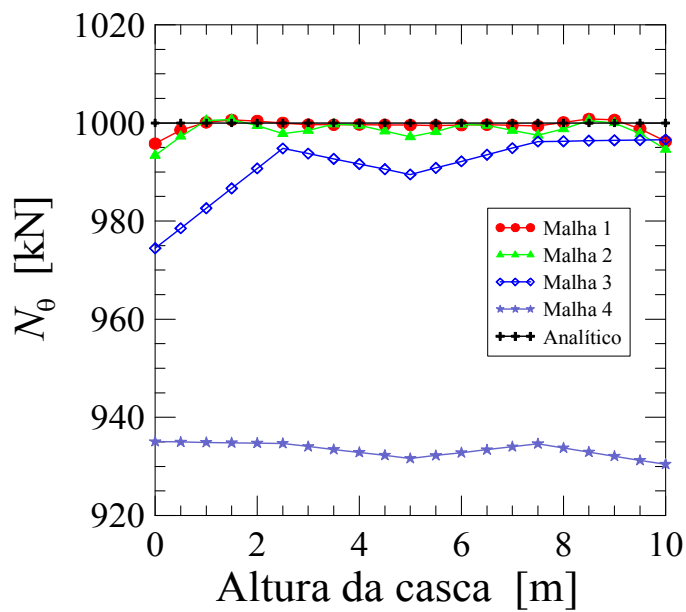


Figura 6.11 – Valores dos esforços tangenciais ( $N_\theta$ ) ao longo do comprimento da CCSP sob ação de uma pressão constante

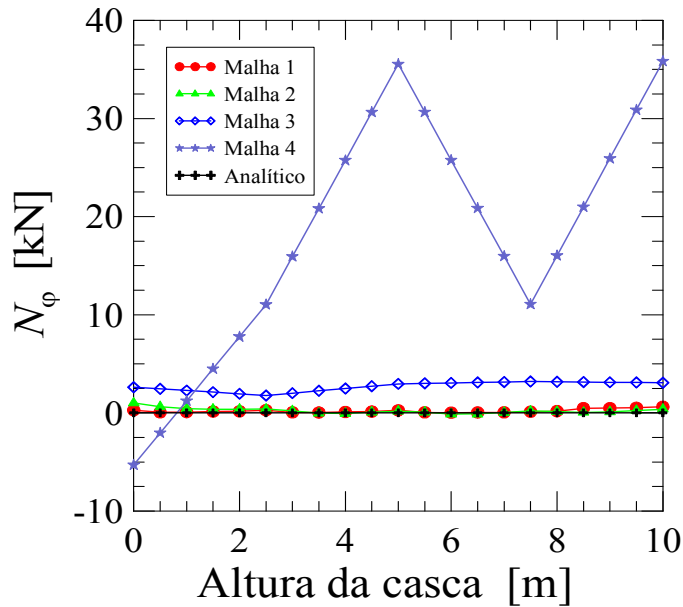


Figura 6.12 – Valores dos esforços meridionais ( $N_{\varphi}$ ) ao longo do comprimento da CCSP sob ação de uma pressão constante

A malha Nível 4 não apresentou um bom comportamento de convergência em relação aos resultados analíticos de referência. Já as malhas de Nível 1 e 2, demonstram uma melhor qualidade de resultados. E, entre estes dois níveis, a malha de Nível 1 se mostrou com grande acurácia para representar o regime de membrana.

O teste de convergência é o mesmo adotado no *caso IA*, a abscissa se refere a o número de elementos em cada nível de refinamento da malha. A curva numérica foi obtida plotando-se os valores de deslocamento radial ( $\Delta_r$ ) no meio da casca para cada uma das quatro malhas geradas. Neste caso é observada a tendência de uma boa convergência a partir do nível 1 de refinamento onde têm-se 1590 elementos, ver Figura 6.13.

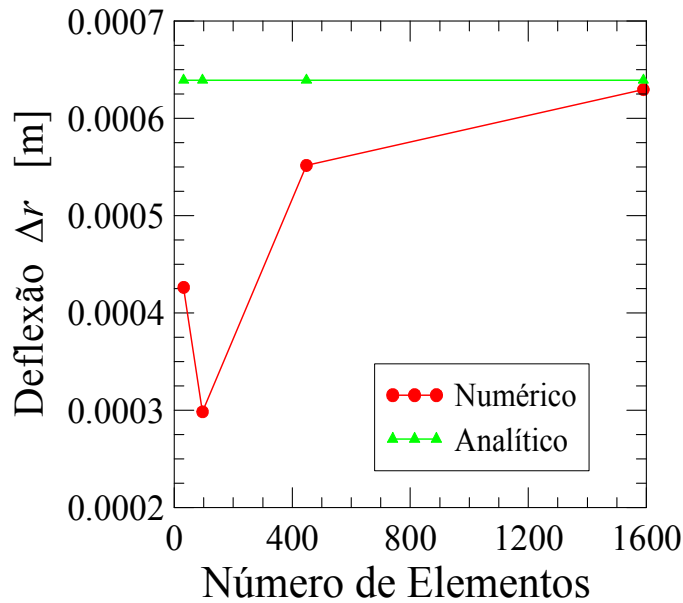


Figura 6.13 – Análise de convergência para o valor do deslocamento radial ( $\Delta_r$ ) em uma casca cilíndrica sob ação de uma pressão constante, em função do número de elementos

#### Caso IC – Pressão hidrostática

De forma similar aos casos IA e IB, procede-se analiticamente a análise e o teste de convergência, considerando agora uma CCSP sob ação da pressão hidrostática.

A Tabela 6.4 apresenta os valores de deflexões, rotações, esforços meridionais ( $N_\phi$ ) e esforços tangenciais ( $N_\theta$ ) no topo e na base da casca cilíndrica para os valores analíticos (obtidos pela tabela do Capítulo 3) e o numérico (programa ANSYS).

Tabela 6.4 – Esforços e deslocamentos no topo e na base da CCSP sob pressão hidrostática

Carga	Suporte	Malha	Numérico								
			$\Delta r$ (m)		$\Delta\alpha$ (rad)		$N_\theta$ (kN)		$N_\phi$ (kN)		
			Topo	Base	Topo	Base	Topo	Base	Topo	Base	
Pressão hidrostática Caso IC	Simplesmente apoiada	(Nível 4) 32 Elementos	5,86E-04	4,65E-03	4,34E-04	1,84E-04	1075,6	8221,6	142,12	4,30E-02	
		(Nível 3) 96 Elementos	6,19E-04	4,86E-03	5,47E-04	1,52E-04	730,23	9010,6	28,6	3,3317	
		(Nível 2) 448 Elementos	-1,73E-04	5,74E-03	5,93E-04	6,45E-04	248,91	9674,9	14,961	-24,494	
		(Nível 1) 1590 Elementos	-2,49E-05	6,31E-03	6,24E-04	5,78E-04	96,356	9846,2	9,3428	-2,0518	
		Analítico									
		$\Delta r$ (m)		$\Delta\alpha$ (rad)		$N_\theta$ (kN)		$N_\phi$ (kN)			
		Topo	Base	Topo	Base	Topo	Base	Topo	Base		
		0,00E+00	6,39E-03	6,39E-04	6,39E-04	0	10000	0	0		

As Figura 6.14 a Figura 6.17 ilustram os gráficos, cujo eixo das ordenadas são: deslocamento radial ( $\Delta_r$ ), rotação ( $\Delta_\alpha$ ), esforço tangencial ( $N_\theta$ ) e meridional ( $N_\varphi$ ) respectivamente. No eixo das abscissas, encontra-se a altura da casca cilíndrica. O valor das ordenas são encontrados nas ‘LINHA 1’ e ‘LINHA2’ de análise, definidas anteriormente.

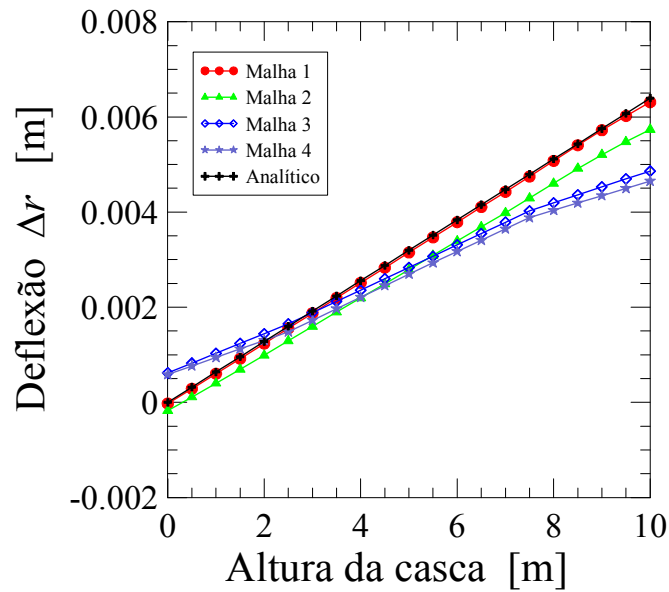


Figura 6.14 – Valores do deslocamento radial ( $\Delta_r$ ) ao longo do comprimento da CCSP sob ação de uma pressão hidrostática

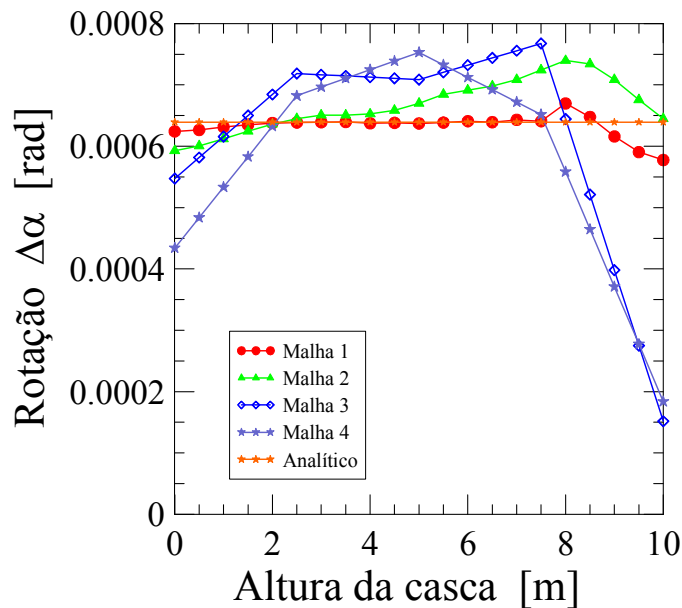


Figura 6.15 – Valores das rotações ( $\Delta_\alpha$ ) ao longo do comprimento da CCSP sob ação de uma pressão hidrostática

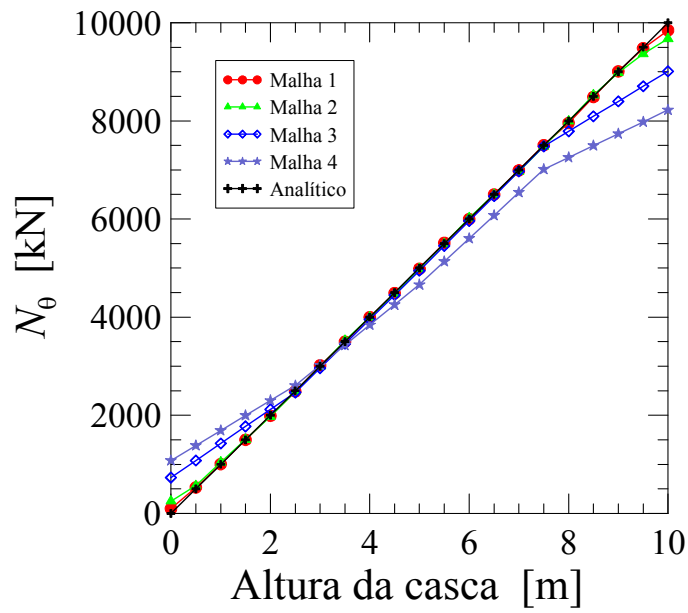


Figura 6.16 – Valores dos esforços tangenciais ( $N_{\theta}$ ) ao longo do comprimento da CCSP sob ação de uma pressão hidrostática

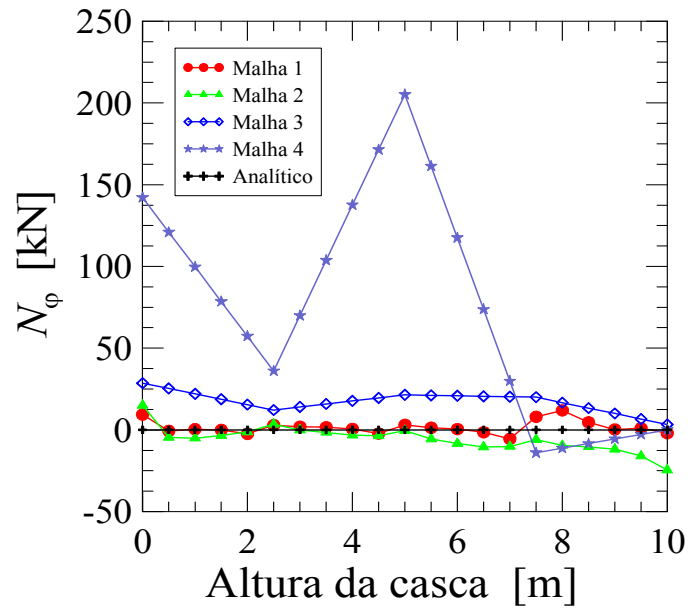


Figura 6.17 – Valores dos esforços meridionais ( $N_{\phi}$ ) ao longo do comprimento da CCSP sob ação de uma pressão hidrostática

Todas as malhas apresentam bons resultados para os esforços, com exceção do esforço meridional ( $N_{\phi}$ ), onde as discrepâncias foram grandes para a malha 4 (pouco refinada).

Este efeito já fora observado para o caso de pressão constante, valores que deveriam ser nulos oscilaram com ordens de grandeza significativas para esta malha.

A Figura 6.18 ilustra o mesmo teste de convergência destas malhas adotado nos *casos IA e IB*, considerando a CCSP sob a ação da pressão hidrostática.

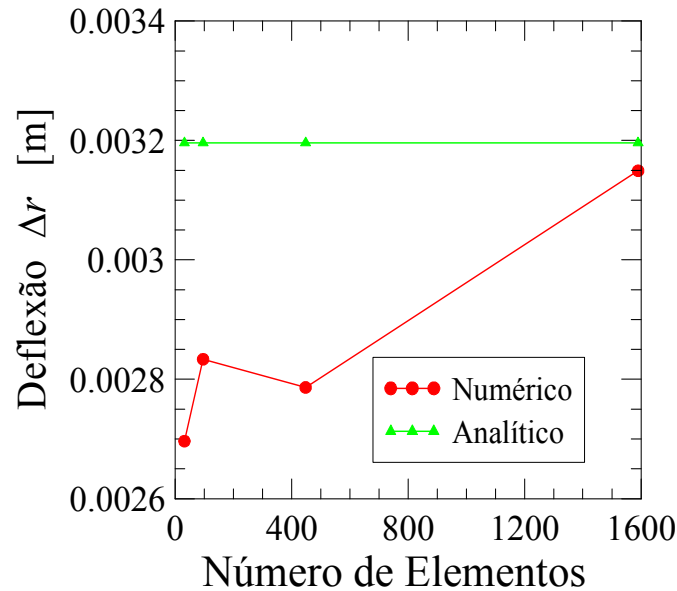


Figura 6.18 – Convergência do deslocamento radial ( $\Delta_r$ ) em uma casca cilíndrica sob ação da pressão hidrostática, em função do número de elementos

#### ***Caso ID – CCSP com carregamento distribuído ao longo da borda superior livre***

Seja uma CCSP com carregamento distribuído ao longo da borda superior livre onde um estudo da variação dos esforços e deslocamentos, assim como um teste de convergência será efetuado, verificando-se os resultados analíticos e numéricos, tal como foi feito nos casos anteriores. A Tabela 6.5 apresenta os valores de deslocamento ( $\Delta_r$ ), rotações ( $\Delta_\alpha$ ), esforços meridionais ( $N_\varphi$ ) e esforços tangenciais ( $N_\theta$ ) no topo e na base da casca cilíndrica para os valores analíticos e numéricos.



Tabela 6.5 – Esforços e deslocamentos no topo e na base da CCSP sob ação de um carregamento distribuído ao longo da borda superior livre

Carga	Suporte	Malha	Numérico							
			$\Delta_r$ (m)		$\Delta\alpha$ (rad)		$N_\theta$ (kN)		$N_\varphi$ (kN)	
			Topo	Base	Topo	Base	Topo	Base	Topo	Base
Carregamento distribuído ao longo da borda Caso ID	Simplesmente apoiada	(Nível 4) 32 Elementos	-9,63E-07	6,56E-05	2,56E-05	1,90E-05	3,8206	40,304	-51,04	-51,334
		(Nível 3) 96 Elementos	6,20E-06	1,25E-05	3,26E-06	2,09E-06	-0,66494	6,0056	-50,149	-49,989
		(Nível 2) 448 Elementos	6,92E-06	1,23E-05	9,07E-07	5,91E-06	-0,3138	8,1273	-49,913	-50,079
		(Nível 1) 1590 Elementos	7,21E-06	5,05E-06	4,32E-07	2,17E-06	-1,75E-02	3,7846	-49,374	-50,034
			Analítico							
			$\Delta_r$ (m)		$\Delta\alpha$ (rad)		$N_\theta$ (kN)		$N_\varphi$ (kN)	
			Topo	Base	Topo	Base	Topo	Base	Topo	Base
			6,39E-06	6,39E-06	0,00E+00	0,00E+00	0	0	-50	-50

As Figura 6.19 a Figura 6.22 ilustram gráficos com as ordenadas indicando: o deslocamento radial ( $\Delta_r$ ), rotação ( $\Delta_\alpha$ ), esforço tangencial ( $N_\theta$ ) e meridional ( $N_\varphi$ ), e abscissas representando a altura da casca, para as 4 malhas utilizadas.

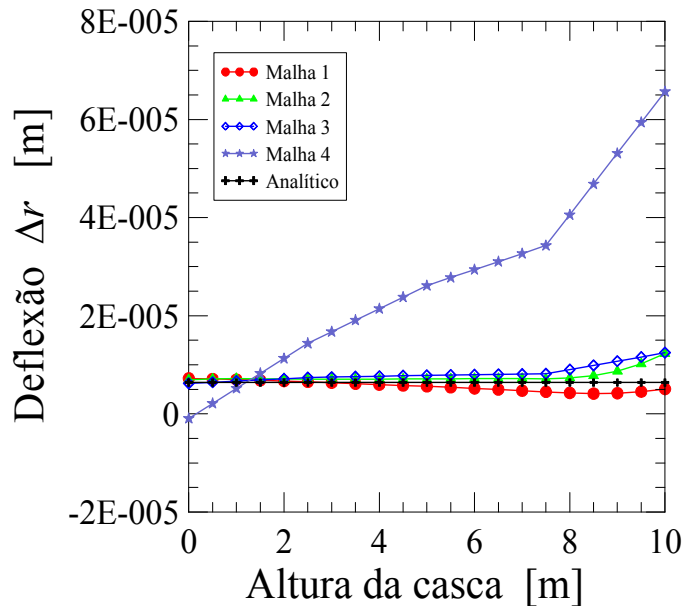


Figura 6.19 – Valores do deslocamento radial ( $\Delta_r$ ) ao longo do comprimento da CCSP sob carregamento distribuído ao longo da borda superior livre.

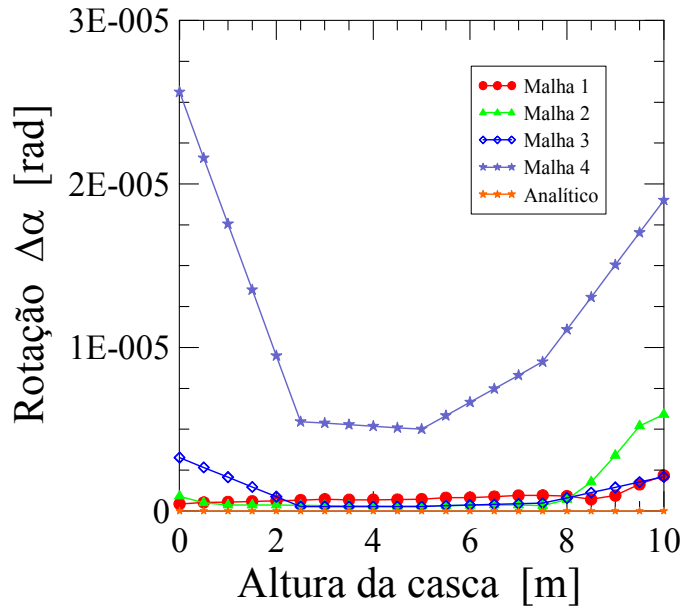


Figura 6.20 – Valores das rotações ( $\Delta_\alpha$ ) ao longo do comprimento da CCSP sob carregamento distribuído ao longo da borda superior livre.

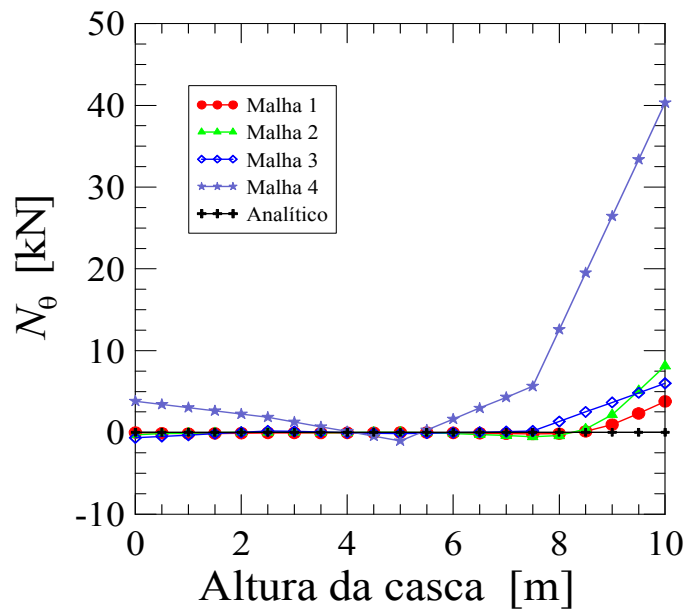


Figura 6.21 – Valores dos esforços tangenciais ( $N_\theta$ ) ao longo do comprimento da CCSP sob carregamento distribuído ao longo da borda superior livre.

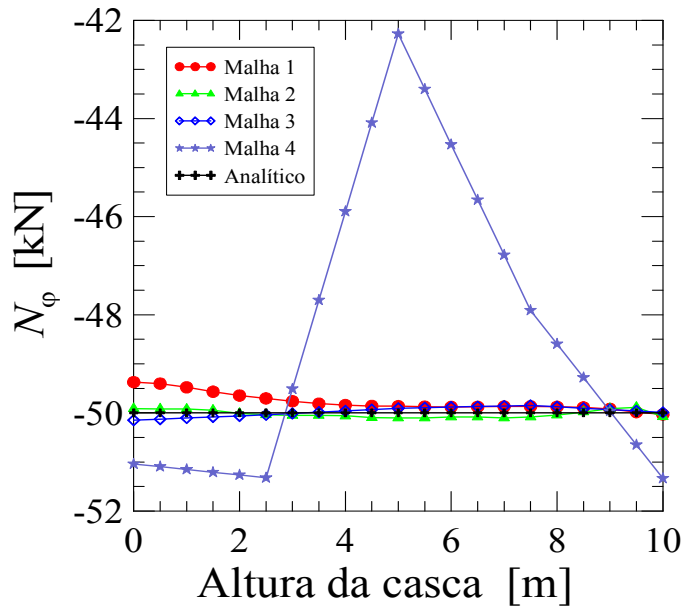


Figura 6.22 – Valores dos esforços meridionais ( $N_\phi$ ) ao longo do comprimento da CCSP sob carregamento distribuído ao longo da borda superior livre.

Sob ação deste carregamento, a malha 4 como já tinha sido constatado nos casos anteriores, também não apresenta bom resultados para todos os esforços e deslocamentos considerados. A Figura 6.23 mostra o teste de convergência para este caso onde nota-se que a partir de 250 elementos já é possível se ter resultados bem próximos do valor analítico.

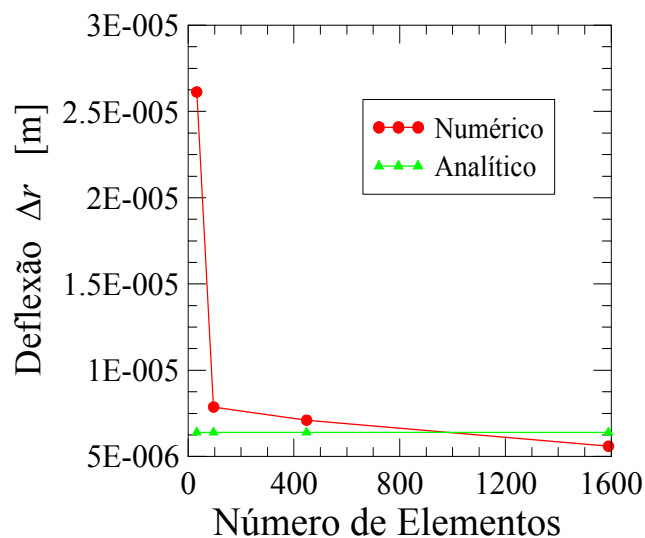


Figura 6.23 – Convergência do deslocamento radial ( $\Delta_r$ ) em uma CCSP sob ação de um carregamento distribuído ao longo da borda superior livre, em função do número de elementos

Para os casos estudados, em regime de membrana, a malha 4 (menos refinada) não apresenta bons resultados confiáveis, e deve ser descartada do processo de análise de resultados. Só foi deixada no texto para se mostrar a evolução da convergência dos resultados.

No entanto a malha 1 para todos os casos e a malha 2 para alguns dos casos, apresentaram resultados com pequenos erros, aspecto que as qualifica como referência para os estudos que estamos empreendendo.

Com a discretização da malha 1, podemos concluir que os resultados numéricos reproduziram com precisão os resultados analíticos, aspecto que qualifica o elemento finito utilizado para as análises em estado de membrana.

#### ***Caso IE – PLACA CIRCULAR (PC)***

Admite-se uma placa circular com borda engastada e sob carga uniformemente distribuída como ilustrado na Figura 6.24.

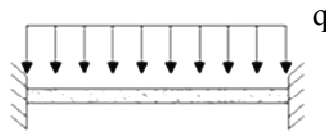


Figura 6.24 – Placa circular engastada com carregamento distribuído

A Tabela 6.6 a seguir define a ordenada de carga aplicada e as propriedades físicas e geométricas para a placa em estudo.

Tabela 6.6 – Propriedades físicas, geométricas e carga para a placa circular (PC)

	Raio	Espessura	Coefficiente de Poisson	Mód. De Elasticidade	Carga distribuída
	r(m)	h(m)	$\nu$	E(kN/m <sup>2</sup> )	q(kN/m)
<b>PC Engastada com carregamento distribuído</b>	5,0	0,3	0,2	2,61E+07	50

Para a verificação da convergência dos resultados foram utilizados 3 refinamentos, ou seja 3 níveis de malhas diferentes (59, 788 e 1416 elementos) para discretizar a placa circular completa. As malhas utilizadas estão ilustradas na Figura 6.25.

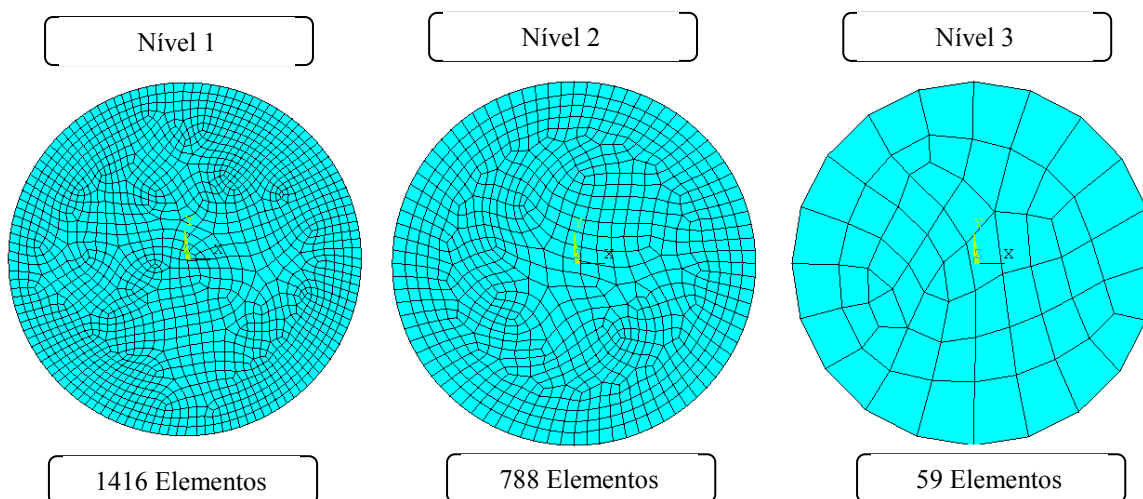


Figura 6.25 – Níveis de discretização das malhas em elementos finitos para placa circular

A seguir os resultados analíticos e numéricos assim como os testes de convergências das malhas utilizadas na discretização da placa serão apresentados.

Os valores foram obtidos em uma linha de corte que se orienta a partir do centro da placa estendendo-se a borda (Figura 6.26).

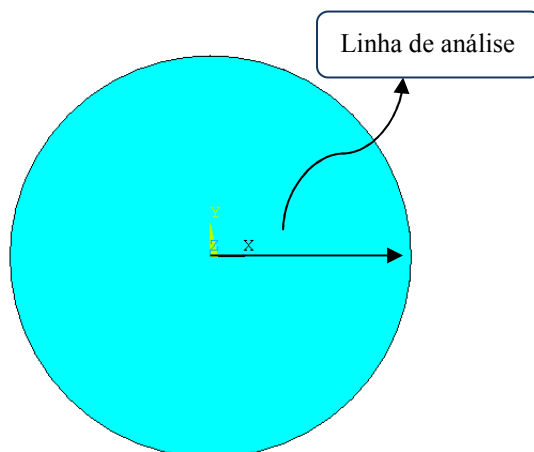


Figura 6.26 – Linha de análise dos esforços e deslocamentos da placa circular

Na Tabela 6.7 são mostrados os valores das deflexões ( $w$ ), rotações ( $dw/dr$ ), momentos radiais ( $M_r$ ) e momentos tangenciais ( $M_t$ ). Apresentam-se ainda os valores analíticos obtidos a partir das Equações (3.51), (3.52), (3.54) e (3.55).

Tabela 6.7 – Deflexão, rotação e momentos nos pontos especificados

Carga	Suporte	Malha	Numérico							
			Deflexão $w$ (m)		Rotação $dw/dr$ (rad)		$M_r$ (kN.m)		$M_t$ (kN.m)	
			Centro	Apoio	Centro	Apoio	Centro	Apoio	Centro	Apoio
Uniformemente distribuída	Engastado	(Nível 3) 59 Elementos	-7,43E-03	1,96E-14	8,61E-04	-2,34E-14	-89,858	94,184	-92,293	12,422
		(Nível 2) 788 Elementos	-7,52E-03	1,94E-16	3,40E-04	5,42E-04	-99,631	137,22	-99,549	37,497
		(Nível 1) 1416 Elementos	-7,57E-03	2,33E-18	1,49E-04	-1,81E-17	-101,04	138,72	-101,05	44,183
			Analítico							
			Deflexão (m)		Rotação(m)		$M_r$ (kN.m)		$M_t$ (kN.m)	
			Centro	Apoio	Centro	Apoio	Centro	Apoio	Centro	Apoio
			-7,60E-03	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	-101,563	156,25	-101,563	46,875

As Figura 6.27 a Figura 6.30 reproduzem os resultados apresentados na Tabela 6.7. A Figura 6.27 ilustra os valores numéricos das deflexões ( $w$ ) obtidos com os 3 níveis de malha, e estes são comparados com os valores analíticos de referência. Enquanto que a Figura 6.28 mostra esta mesma comparação para as rotações ( $dw/dr$ ). Do mesmo modo os momentos radiais ( $M_r$ ) e tangenciais ( $M_t$ ) têm seus valores comparativos plotados nos gráficos das Figura 6.29 e Figura 6.30. As abscissas dos gráficos são dadas pelos pontos da linha de análise que variam do meio da placa até a borda, e as ordenadas são constituídas pelos valores da variável analisada.

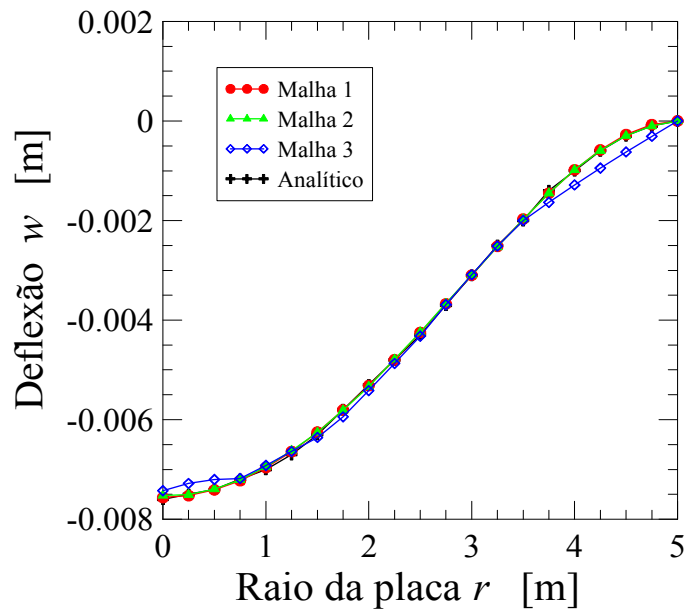


Figura 6.27 – Deflexões ( $w$ ) analíticas e numéricas para a PC

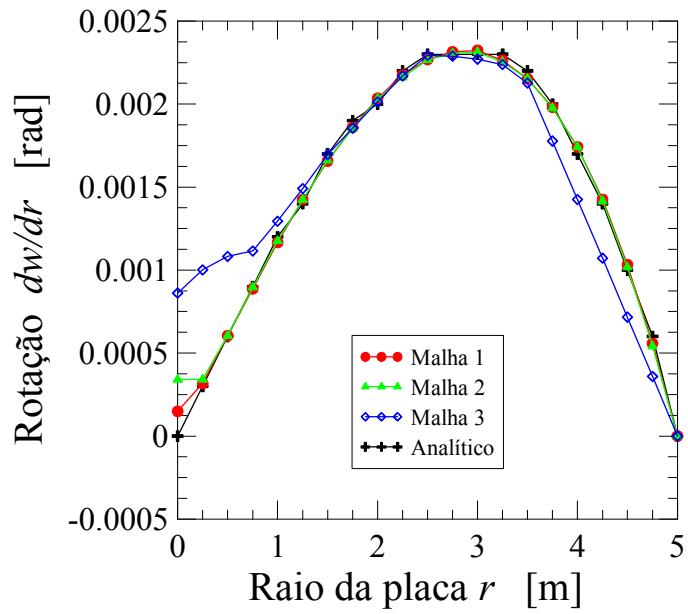


Figura 6.28 – Rotações ( $dw/dr$ ) analíticas e numéricas para a PC

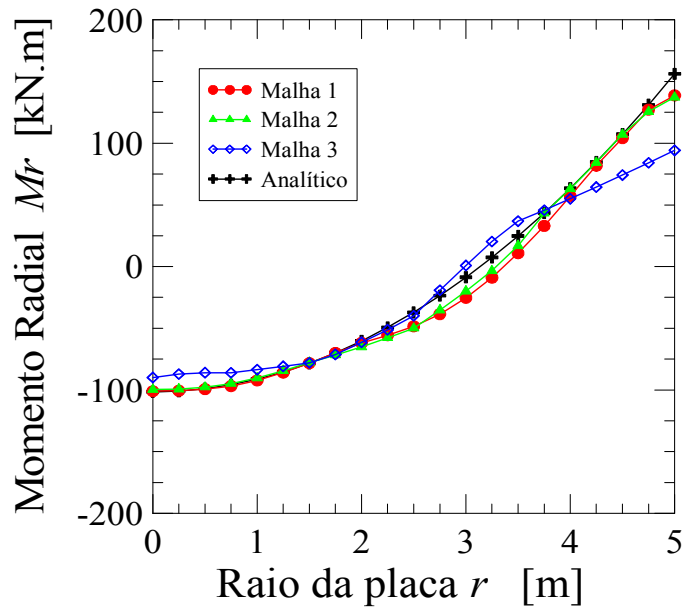


Figura 6.29 – Momentos na direção radial ( $M_r$ ) analíticos e numéricos para a PC

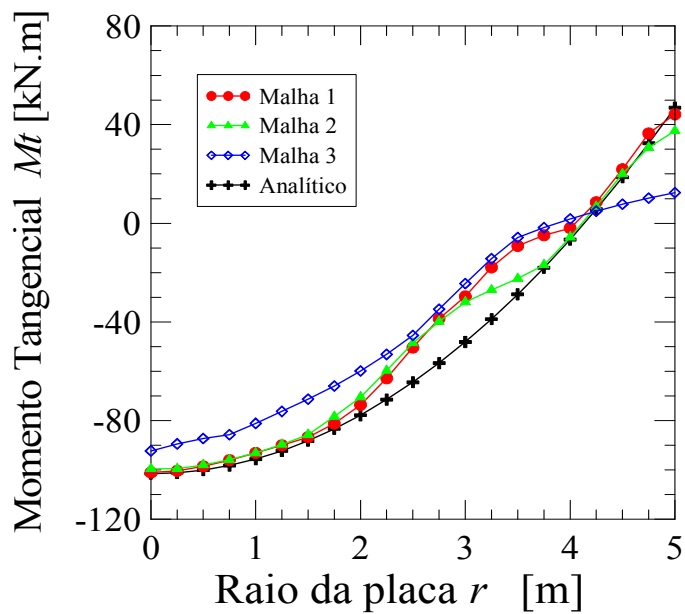


Figura 6.30 – Momentos na direção tangencial ( $M_t$ ) analíticos e numéricos para a PC

Em todos os casos verifica-se que a malha 3 (menos refinada) é a que apresenta maior discrepância em relação aos valores analíticos. Para as outras malhas, observa-se uma convergência boa para deflexão e rotação, no entanto, para os momentos fletores a convergência necessita de um maior refinamento da malha, pois as funções relativas a estes esforços estão associadas a derivadas de ordens superiores da função deslocamento ( $w$ ). A malha 1 teve a melhor convergência de resultados. As imagens 2D da placa são mostrada



nas Figura 6.32 a Figura 6.35 e apresentam gráficos em degradê de cores gerado pelo programa ANSYS para este nível de refinamento (malha 1).

A Figura 6.31 mostra o teste de convergência para os 3 refinamentos utilizados. Observa-se que a convergência neste ponto os resultados são bem próximos do valor analítico de referência.

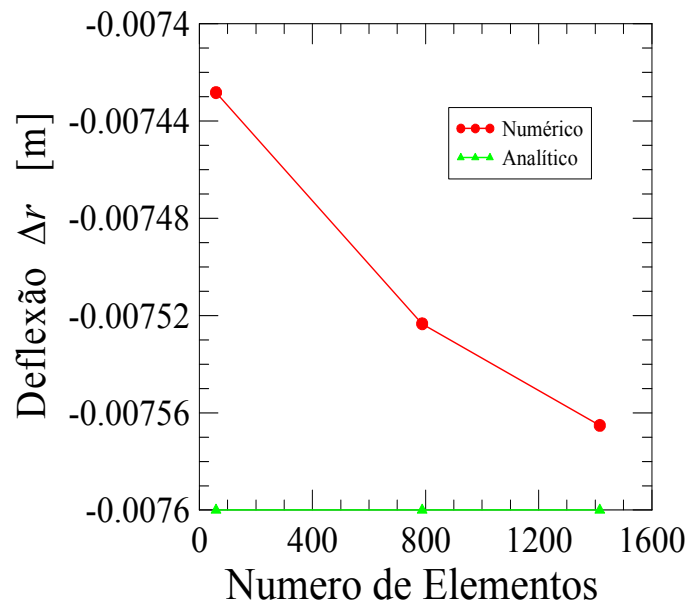


Figura 6.31 – Análise de convergência para o valor de deflexão ( $w$ ) no centro da PC

Na Figura 6.32 são apresentadas as deflexões para a placa circular engastada sob ação da carga uniformemente distribuída. As maiores deflexões estão localizadas no meio da placa, na região em azul, onde se tem o valor máximo da escala. A região em vermelho corresponde à borda engastada e o valor da deflexão nessa região é zero.

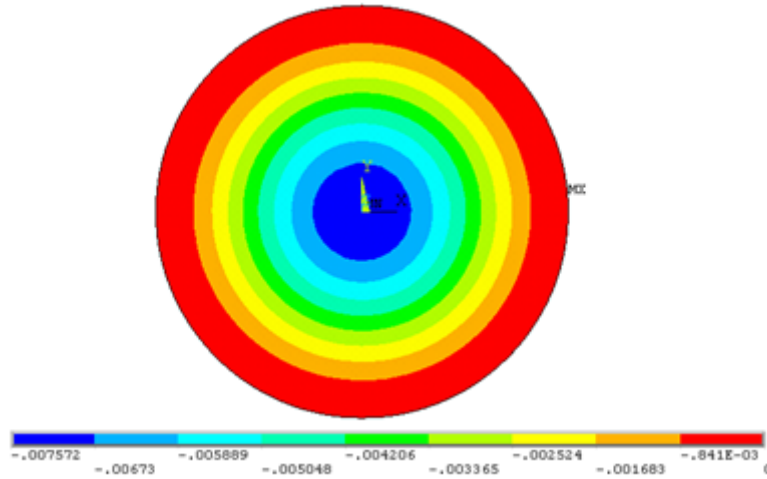


Figura 6.32 – Deflexão ( $w$ ) para o caso IE malha Nível 1.

A Figura 6.33 ilustra os valores das rotações ao longo da placa, com valor nulo no meio da placa e na região dos apoios.

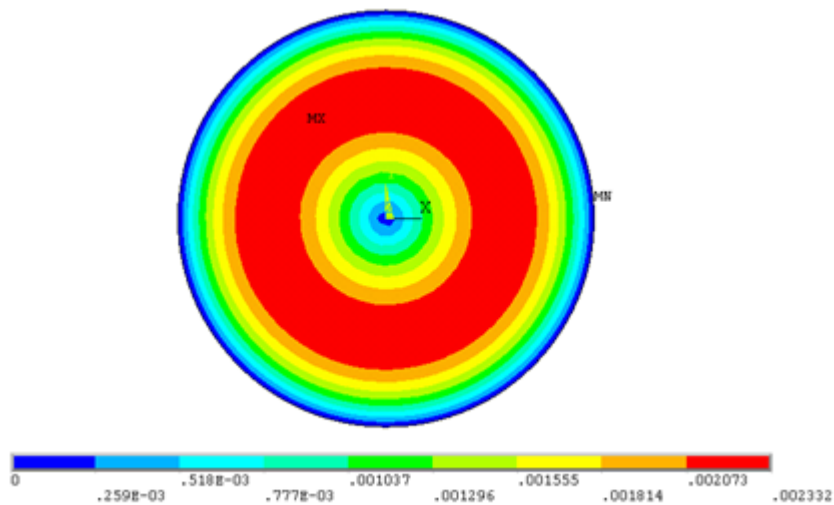


Figura 6.33 – Rotação ( $dw/dr$ ) para o caso IE malha Nível 1

As Figura 6.34 e Figura 6.35 mostram o comportamento dos momentos radiais ( $M_r$ ) e tangenciais ( $M_t$ ) ao longo da placa circular. Observa-se que o momento radial é simétrico em toda a placa. Para o momento tangencial o meio da placa apresenta uma boa regularidade dos valores, mas entre a borda e o centro da placa aparecem regiões onde há uma variação irregular nos resultados.

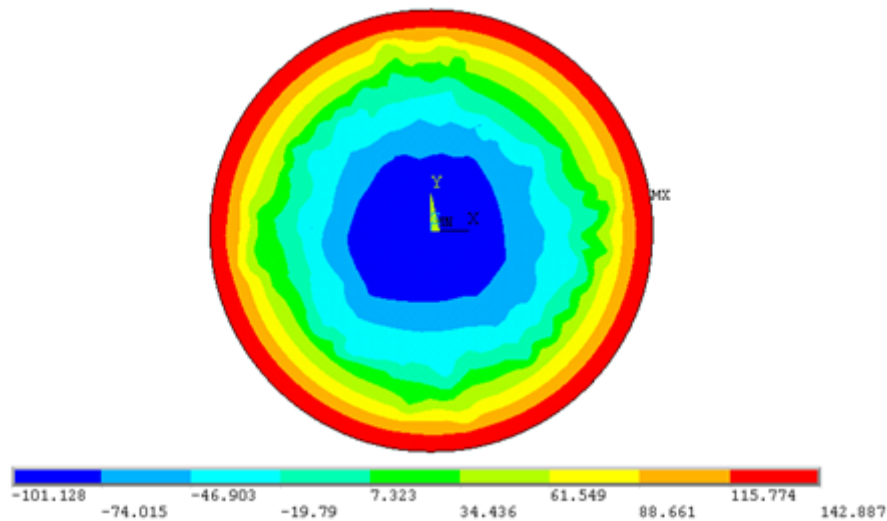


Figura 6.34 – Momento radial ( $M_r$ ) para o caso IE malha Nível 1

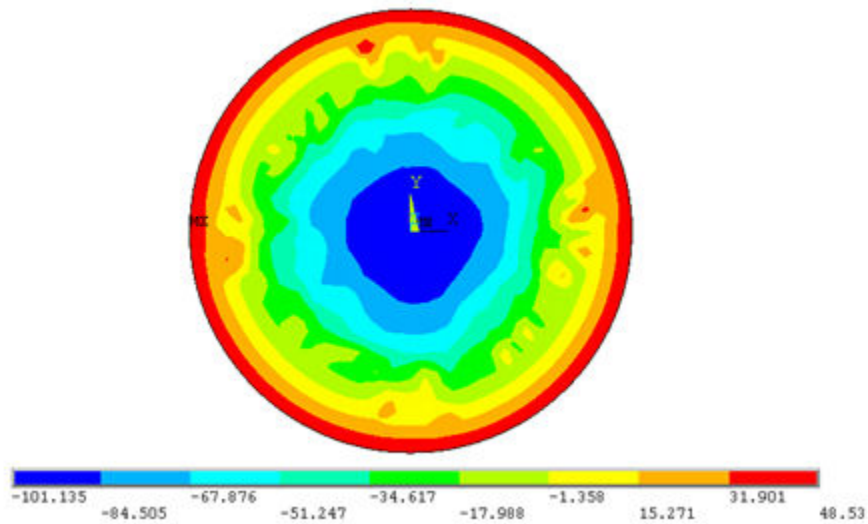


Figura 6.35 – Momento tangencial ( $M_t$ ) para o caso IE malha Nível 1

Como conclusão deste teste verificou-se que a malha Nível 1 em relação as demais se mostrou bem superior representando bem ao regime flexional, como pode ser visto nas curvas dos resultados.

### 6.3 – ESTUDOS DE CASO

Nesta seção serão analisados vários casos de um reservatório cilíndrico, com elementos de vedação no fundo, apresentando diversas formas de comportamento do mesmo, com as respectivas comparações analíticas-numéricas, ou seja, pretende-se aplicar as formulações analíticas desenvolvidas para as cascas cilíndricas e confrontá-las com a análise numérica dada pelo programa ANSYS.

Estes casos servem também como instrumento de validação de problemas mais complexos que são importantes nesta fase e em fases posteriores das análises

Todas as soluções analíticas utilizadas para a comparação destes casos foram construídas passo-a-passo de forma similar ao exemplo de aplicação do método que leva em consideração o acoplamento da casca com o fundo (Capítulo 4).

#### *Caso IIA – Reservatório cilíndrico com fundo em placa circular e carregamento hidrostático*

Esta aplicação trata do estudo de um reservatório cilíndrico em concreto armado (Figura 6.36), cujas dimensões e características físicas e geométricas estão estabelecidas na Tabela 6.8. A parede cilíndrica do reservatório será estudada considerando ligada ao fundo em três situações: pé deslizante (IIA1) e pé engastado (IIA2).

Tabela 6.8 – Características físicas e geométricas do reservatório cilíndrico.

Altura H(m)	Raio r(m)	Espessura da parede cilíndrica h(m)	Espessura da laje de fundo h(m)	Coefficiente de Poisson do concreto $\nu$	Mód. De Elasticidade E(kN/m <sup>2</sup> )	Peso Específico do concreto $\gamma_c$ (kN/m <sup>3</sup> )	Peso Específico da água $\gamma_a$ (kN/m <sup>3</sup> )
10,0	5,0	0,2	0,2	1/6	3,45E+07	25	10

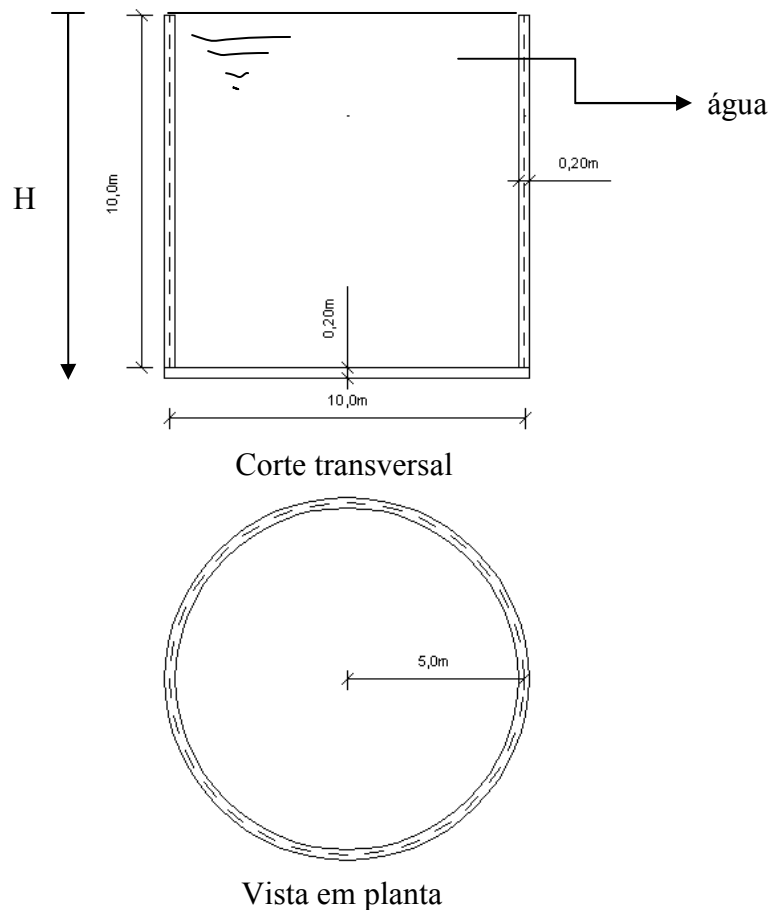


Figura 6.36 – Reservatório cilíndrico com laje de fundo em placa circular.

Verificação da esbeltez da parede cilíndrica do reservatório:

O índice de esbeltez é verificado a partir da relação (6.1) abaixo:

$$\frac{h}{r} = \frac{0,20}{5,00} = 0,04 < \frac{1}{20} = 0,05 \quad (6.1)$$

A relação foi verificada e assim a casca é considerada esbelta, logo todas as teorias analíticas para cascas finas podem ser aplicadas neste estudo.

### ***Caso IIA1 – Análise para ligação tipo pé-deslizante com carregamento hidrostático***

A parede cilíndrica do reservatório e a laje de fundo nesta análise estão funcionando como uma ligação do tipo pé deslizante, ou seja, apenas esforços de membrana serão considerados. Além disso, a modelagem foi feita sem a laje de fundo, pois os esforços e deslocamentos da laje de fundo não interferem na análise da parede cilíndrica. A malha Nível 1 utilizada contém 1590 elementos triangulares e 852 nós, a Figura 6.37 ilustra o detalhe da malha. Só será representado 1/4 da casca cilíndrica, através das condições de simetria do problema.

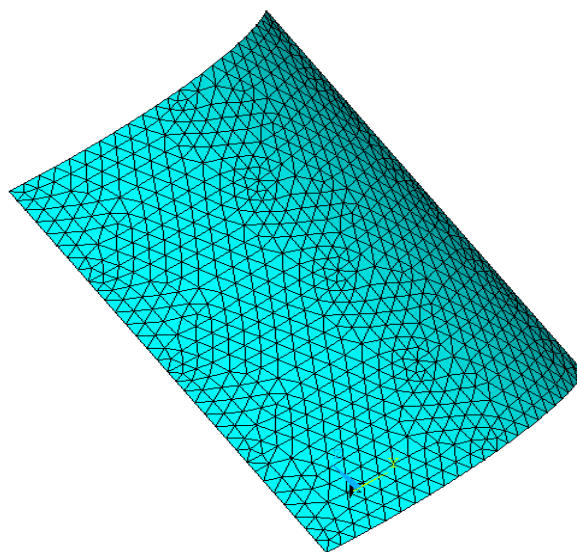


Figura 6.37 – Malha de elementos finitos triangulares usadas para discretização da parede cilíndrica do reservatório.

A malha usada na discretização da parede cilíndrica foi a Nível 1, pois foi a que apresentou nos testes de convergência os melhores resultados. Esta foi gerada usando o refinamento automático do ANSYS. E será doravante a malha utilizada para todos os casos numéricos.

A Figura 6.38, ilustra a pressão hidrostática aplicada, os apoios do 1º gênero que garantem o regime de membrana e a direção das reações de apoio. O degradê de cores mostra a intensidade dos esforços que atuam na superfície, seguindo o eixo de coordenadas locais (coordenadas cilíndrica).

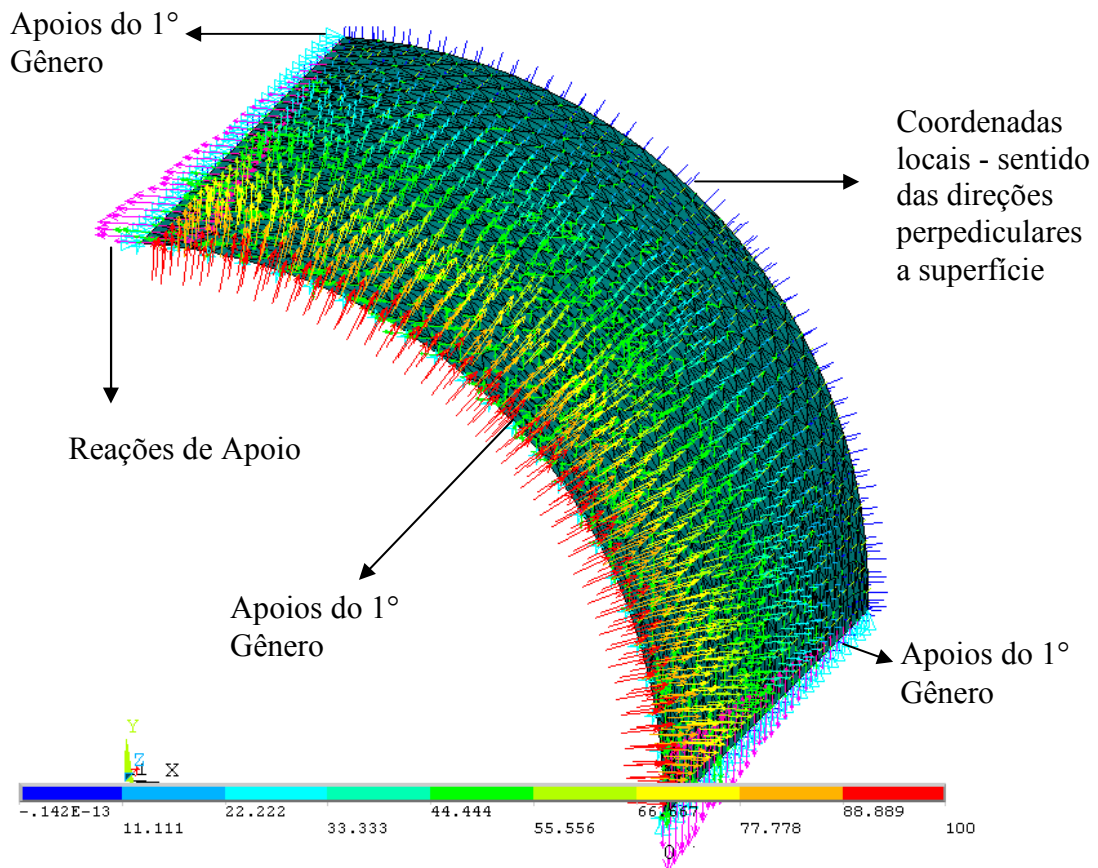


Figura 6.38 – Direção dos esforços e reações de apoio na parede cilíndrica.

A modelagem da parede cilíndrica foi considerada adequada, pois os valores obtidos têm boa aproximação dos resultados analíticos para as grandezas analisadas.

A Tabela 6.9 mostra uma comparação dos valores analíticos e numéricos, para os esforços e deslocamentos no reservatório cilíndrico considerando a ligação da parede com o fundo do tipo pé deslizante.

Tabela 6.9 – Comparativo analítico-numérico dos esforços e deslocamento para a parede do reservatório cilíndrico com ligação do tipo pé deslizante.

Altura	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico
H	$\Delta r$	$\Delta r$	$\Delta \alpha$	$\Delta \alpha$	$N_\phi$	$N_\phi$	$N_\theta$	$N_\theta$
(m)	(m)	(m)	(rad)	(rad)	(kN/m)	(kN/m)	(kN/m)	(kN/m)
10,00	3,48E-04	3,62E-04	3,30E-05	3,62E-05	-49,96	-50,00	491,79	500,00
9,50	3,32E-04	3,44E-04	3,43E-05	3,62E-05	-47,86	-47,50	474,07	475,00
9,00	3,16E-04	3,26E-04	3,58E-05	3,62E-05	-45,23	-45,00	450,77	450,00
8,50	2,98E-04	3,08E-04	3,87E-05	3,62E-05	-42,36	-42,50	424,49	425,00
8,00	2,78E-04	2,90E-04	4,15E-05	3,62E-05	-39,47	-40,00	397,58	400,00
7,50	2,59E-04	2,72E-04	3,78E-05	3,62E-05	-37,43	-37,50	374,72	375,00
7,00	2,41E-04	2,54E-04	3,71E-05	3,62E-05	-35,48	-35,00	349,36	350,00
6,50	2,24E-04	2,36E-04	3,71E-05	3,62E-05	-32,71	-32,50	325,12	325,00
6,00	2,06E-04	2,17E-04	3,78E-05	3,62E-05	-30,08	-30,00	300,07	300,00
5,50	1,88E-04	1,99E-04	3,79E-05	3,62E-05	-27,64	-27,50	275,71	275,00
5,00	1,69E-04	1,81E-04	3,71E-05	3,62E-05	-24,93	-25,00	249,11	250,00
4,50	1,52E-04	1,63E-04	3,64E-05	3,62E-05	-22,69	-22,50	224,40	225,00
4,00	1,34E-04	1,45E-04	3,65E-05	3,62E-05	-20,01	-20,00	200,03	200,00
3,50	1,16E-04	1,27E-04	3,70E-05	3,62E-05	-17,41	-17,50	175,05	175,00
3,00	9,82E-05	1,09E-04	3,71E-05	3,62E-05	-14,97	-15,00	150,80	150,00
2,50	8,01E-05	9,06E-05	3,68E-05	3,62E-05	-12,29	-12,50	124,25	125,00
2,00	6,22E-05	7,25E-05	3,64E-05	3,62E-05	-10,09	-10,00	99,40	100,00
1,50	4,44E-05	5,44E-05	3,64E-05	3,62E-05	-7,46	-7,50	74,93	75,00
1,00	2,65E-05	3,62E-05	3,63E-05	3,62E-05	-4,92	-5,00	50,17	50,00
0,50	8,67E-06	1,81E-05	3,59E-05	3,62E-05	-2,58	-2,50	26,41	25,00
0,00	-8,93E-06	0,00E+00	3,57E-05	3,62E-05	-0,04	0,00	4,99	0,00

Os resultados gerados pelo programa e apresentados na Tabela 6.9 são comparados com os valores de referência analíticos ilustrados nas Figura 6.39 a Figura 6.42.

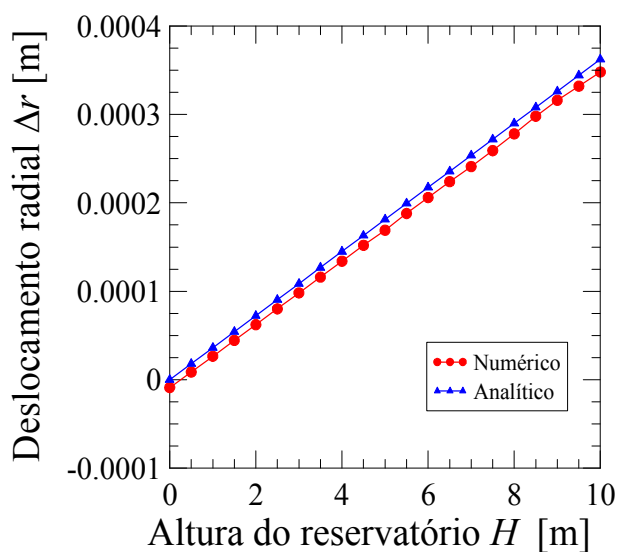


Figura 6.39 – Deslocamento radial ( $\Delta r$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica do reservatório com ligação pé-deslizante



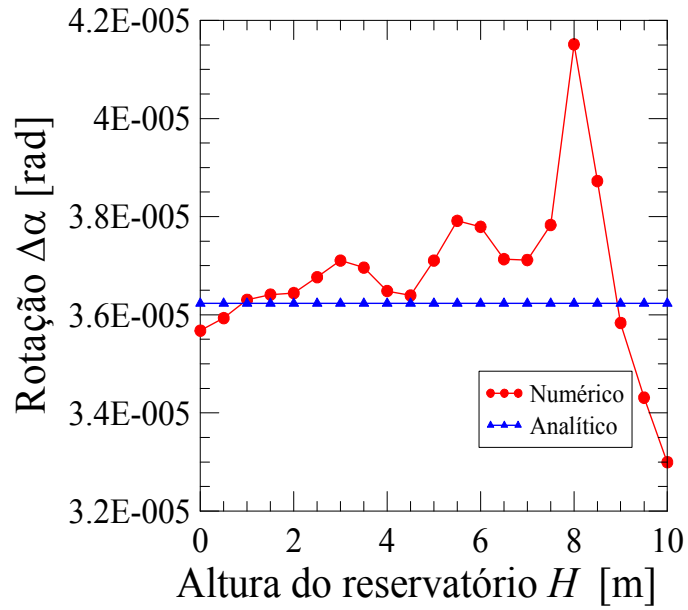


Figura 6.40 – Rotação ( $\Delta\alpha$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica do reservatório com ligação pé-deslizante

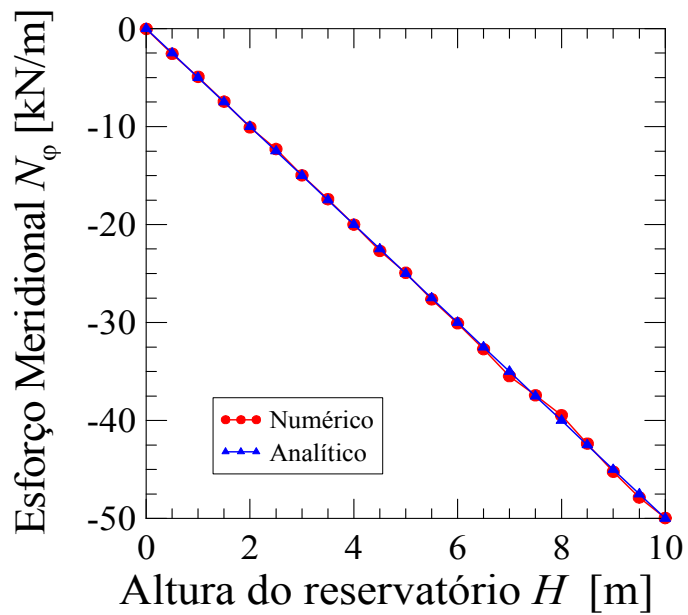


Figura 6.41 – Esforço meridional ( $N_\phi$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica do reservatório com ligação pé-deslizante

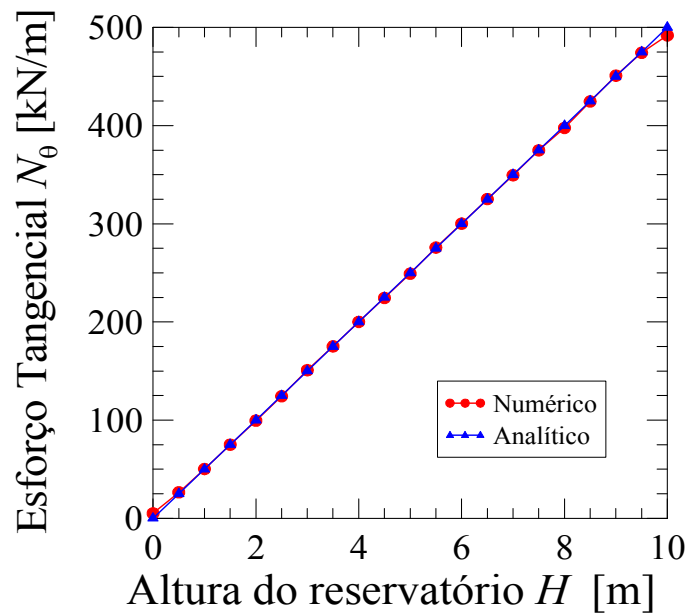


Figura 6.42 – Esforço tangencial ( $N_\theta$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica do reservatório com ligação pé-deslizante

A deformada 3D da parede cilíndrica é mostrada na Figura 6.43.

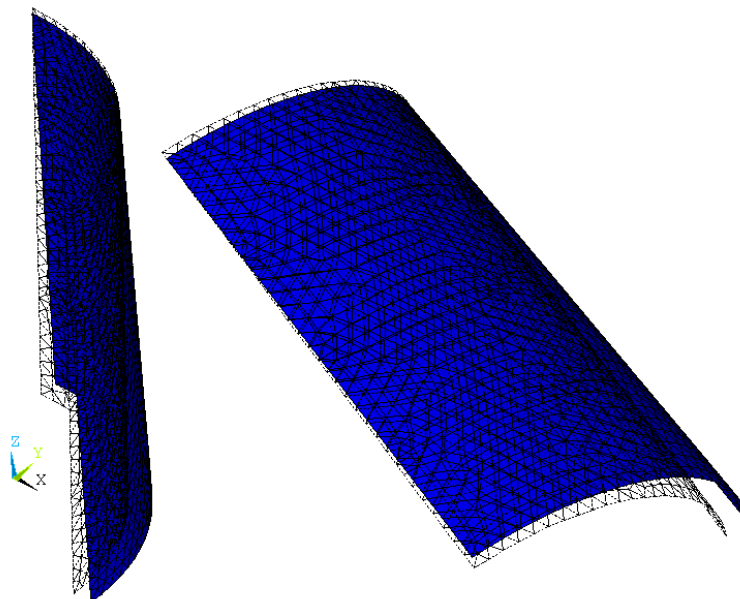


Figura 6.43 – Deformada da parede cilíndrica do reservatório com ligação pé-deslizante

Mostram-se a seguir imagens degradê de cores fornecidas pelo programas ANSYS, dadas nas Figura 6.44 a Figura 6.47, e que representam os valores numéricos dos esforços e deslocamentos obtidos ao longo da parede cilíndrica.

Estas imagens 3D, traduzem apenas aspectos qualitativos, para mostrar as tendência e evolução das grandezas físicas na casca, aspecto já “dissecado” no caso IC

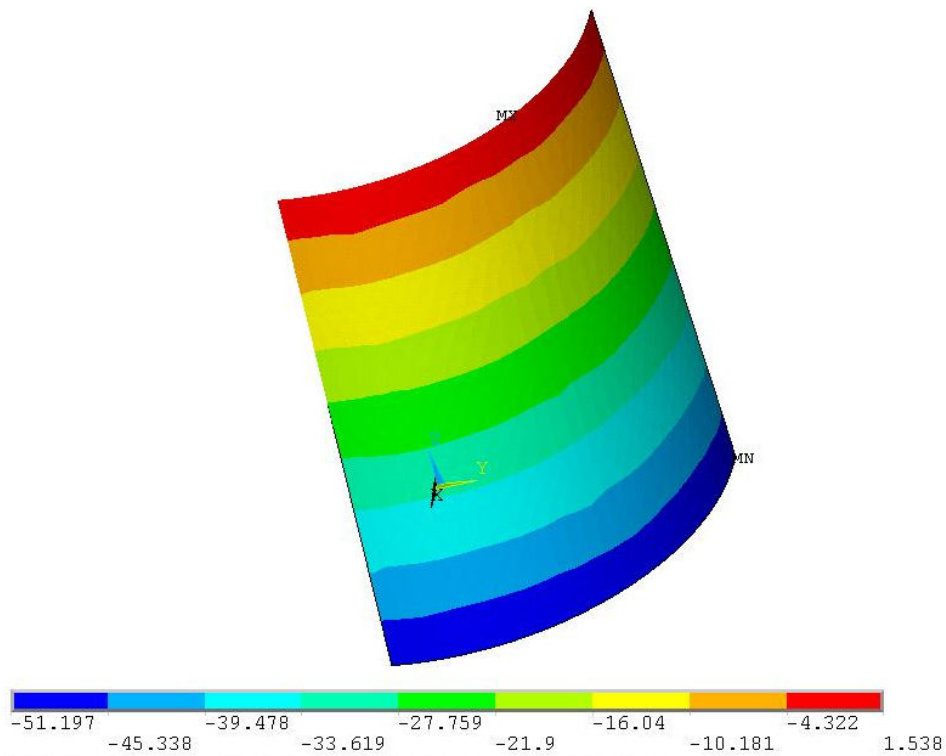


Figura 6.44 – Esforço meridional ( $N_\varphi$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica do reservatório com ligação pé-deslizante

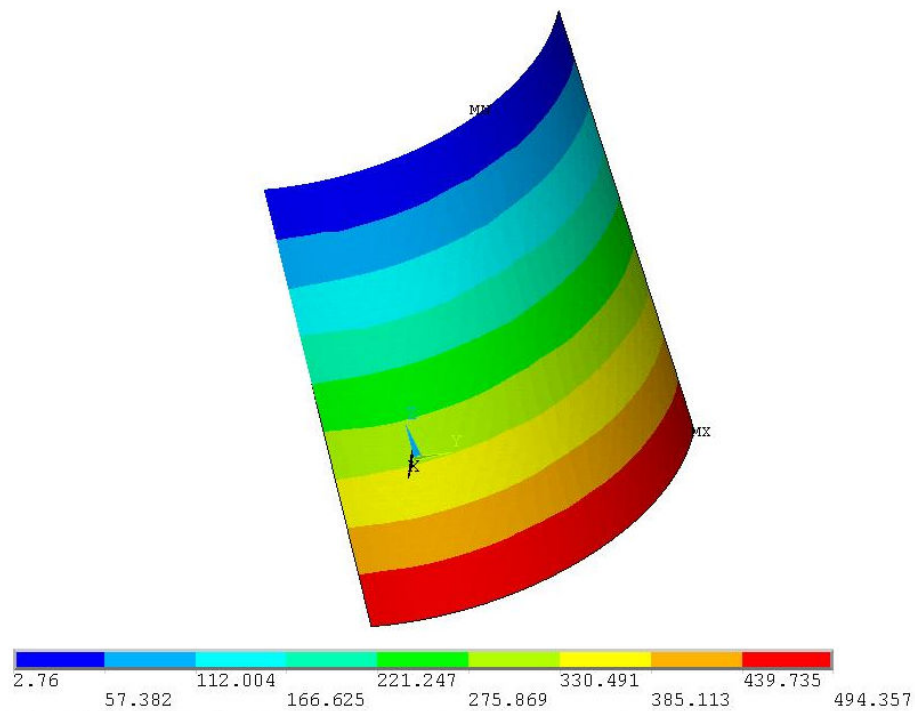


Figura 6.45 – Esforço tangencial ( $N_\theta$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica do reservatório com ligação pé-deslizante

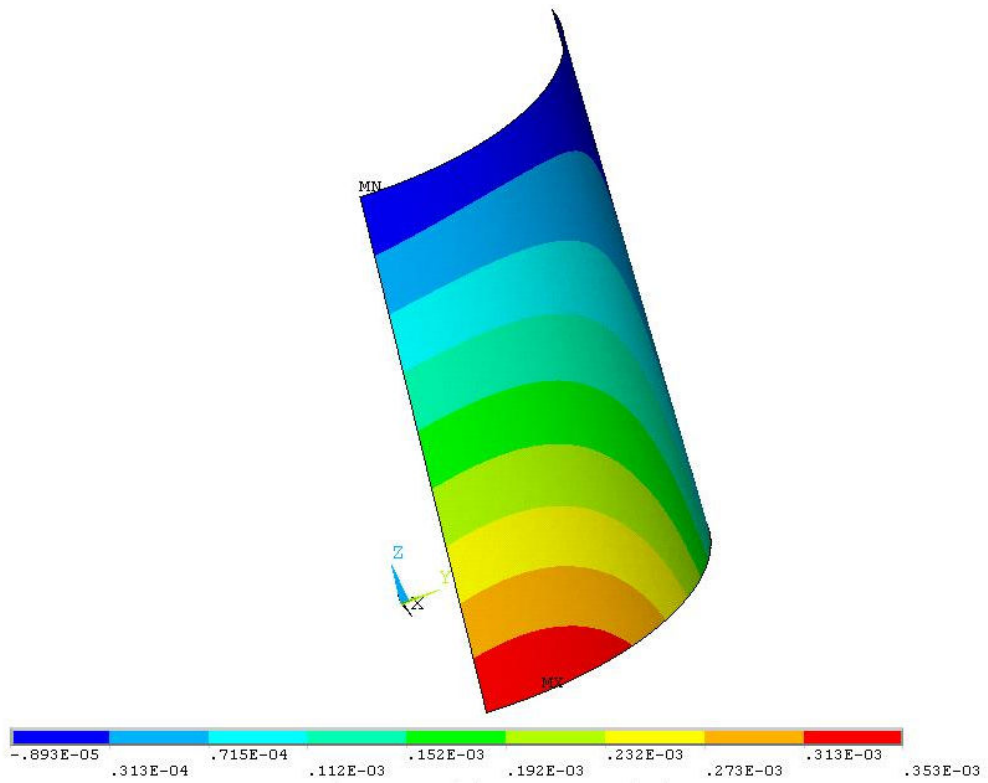


Figura 6.46 – Deslocamento radial ( $\Delta r$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica do reservatório com ligação pé-deslizante

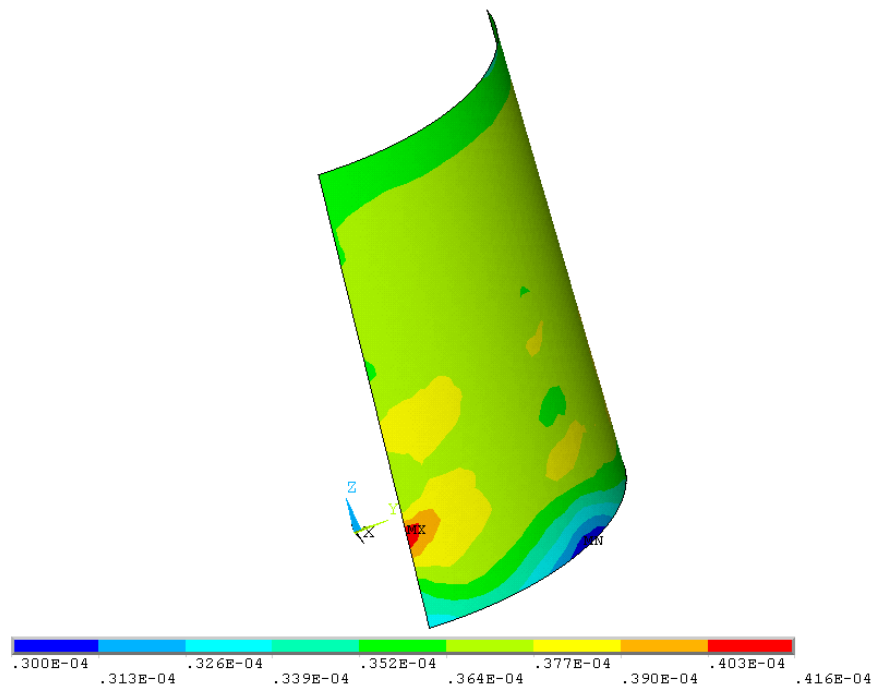


Figura 6.47 – Rotação ( $\Delta \alpha$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica do reservatório com ligação pé-deslizante

### ***Caso IIA2 – Análise para ligação do tipo engaste perfeito (sem laje de fundo)***

A parede cilíndrica do reservatório neste caso tem uma ligação do tipo engaste perfeito. Esforços e deslocamentos que durante o regime flexional aparecem se manifestam agora. A modelagem foi feita considerando o reservatório sem laje de fundo e com base engastada.

A malha adotada é a mesma utilizada na situação anterior, contendo 1590 elementos triangulares e 852 nós (rever Figura 6.37), assim como se reproduz de forma similar as condições daquele caso.

A deformada resultante da parede cilíndrica pode ser vista na Figura 6.48 abaixo.

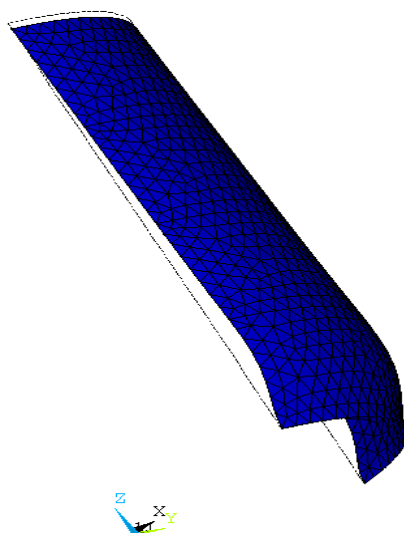


Figura 6.48 – Deformada da parede cilíndrica do reservatório engastada na base

A Tabela 6.10 apresenta uma comparação entre os valores analíticos e numéricos para os deslocamentos ao longo da parede cilíndrica do reservatório

Tabela 6.10 – Resultados analítico e numérico dos deslocamentos ao longo da parede do reservatório cilíndrico com ligação parede-fundo do tipo engaste perfeito

Altura	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico
H	$\Delta r$	$\Delta r$	$\Delta \alpha$	$\Delta \alpha$
(m)	(m)	(m)	(rad)	(rad)
10,00	0	-1,00E-13	0	7,25E-05
9,50	9,32E-05	-7,12E-05	2,52E-04	-2,60E-04
9,00	2,23E-04	-1,99E-04	2,07E-04	-2,18E-04
8,50	2,93E-04	-2,77E-04	8,29E-05	-9,38E-05
8,00	3,10E-04	-2,98E-04	6,73E-06	-2,35E-06
7,50	2,94E-04	-2,87E-04	4,25E-05	3,96E-05
7,00	2,68E-04	-2,64E-04	4,86E-05	4,94E-05
6,50	2,42E-04	-2,40E-04	4,55E-05	4,62E-05
6,00	2,20E-04	-2,18E-04	4,11E-05	4,09E-05
5,50	1,99E-04	-1,99E-04	3,83E-05	3,74E-05
5,00	1,80E-04	-1,81E-04	3,59E-05	3,59E-05
4,50	1,61E-04	-1,63E-04	3,52E-05	3,57E-05
4,00	1,43E-04	-1,45E-04	3,56E-05	3,58E-05
3,50	1,25E-04	-1,27E-04	3,63E-05	3,61E-05
3,00	1,06E-04	-1,09E-04	3,68E-05	3,62E-05
2,50	8,73E-05	-9,06E-05	3,64E-05	3,63E-05
2,00	6,88E-05	-7,25E-05	3,62E-05	3,63E-05
1,50	5,04E-05	-5,44E-05	3,61E-05	3,62E-05
1,00	3,20E-05	-3,62E-05	3,59E-05	3,62E-05
0,50	1,38E-05	-1,81E-05	3,54E-05	3,62E-05
0,00	-4,23E-06	1,07E-09	3,49E-05	3,62E-05

Os resultados obtidos pelo programa ANSYS mostraram uma boa concordância com os valores analíticos como pode ser observado pela comparação entre as colunas adjacentes.

A Tabela 6.11 por sua vez apresenta uma comparação entre os valores analíticos e numéricos para os deslocamentos ao longo da parede do reservatório cilíndrico (valores obtidos no corte da LINHA 2 de análise) considerando a ligação da parede com o fundo (fundação) do tipo engaste perfeito.

Tabela 6.11 – Resultados analítico e numérico dos esforços ao longo da parede do reservatório cilíndrico com ligação parede-fundo(fundação) do tipo engaste perfeito

Numérico	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico
$N_\varphi$	$N_\varphi$	$N_\theta$	$N_\theta$	$M_\varphi$	$M_\varphi$	$M_\theta$	$M_\theta$
(kN/m)	(kN/m)	(kN/m)	(kN/m)	(Kn.m)	(kN.m)	(kN.m)	(kN.m)
-48,14	-50,00	8,95	0,00	-18,7600	31,5170	-2,7231	5,2529
-46,91	-47,50	118,78	-98,22	-4,0981	3,7602	-0,9694	0,6267
-45,84	-45,00	285,27	-274,04	5,3626	-5,4243	0,8545	-0,9041
-43,84	-42,50	383,79	-381,61	5,1562	-5,4993	0,8406	-0,9166
-40,16	-40,00	412,42	-411,78	2,8136	-3,0752	0,3969	-0,5125
-37,32	-37,50	395,41	-396,48	0,8110	-1,0522	0,0903	-0,1754
-35,38	-35,00	363,58	-364,56	0,0228	-0,0369	-0,0569	-0,0062
-32,74	-32,50	330,85	-331,21	-0,2224	0,2543	-0,0776	0,0424
-29,98	-30,00	300,59	-301,19	-0,1814	0,2201	-0,0603	0,0367
-27,20	-27,50	273,45	-274,30	-0,1169	0,1130	-0,0825	0,0188
-24,90	-25,00	248,83	-249,10	-0,1148	0,0338	-0,0642	0,0056
-22,86	-22,50	224,53	-224,45	-0,0189	-0,0027	-0,0602	-0,0004
-20,19	-20,00	200,00	-199,79	0,0288	-0,0114	-0,0301	-0,0019
-17,40	-17,50	174,50	-174,97	0,0241	-0,0087	-0,0174	-0,0014
-14,54	-15,00	149,28	-150,04	-0,0002	-0,0041	-0,0333	-0,0007
-12,23	-12,50	124,84	-125,04	-0,0369	-0,0010	-0,0251	-0,0002
-10,23	-10,00	100,02	-100,02	-0,0112	0,0003	-0,0228	0,0000
-7,62	-7,50	75,04	-75,01	-0,0035	0,0005	-0,0093	0,0001
-4,90	-5,00	49,62	-50,00	-0,0197	0,0003	-0,0040	0,0001
-2,12	-2,50	24,94	-25,00	-0,0281	0,0001	-0,0052	0,0000
0,11	0,00	5,34	0,00	-0,0115	0,0000	-0,0041	0,0000

Os resultados apresentado nas Tabela 6.10 e Tabela 6.11 são ilustrados em forma de gráficos nas Figura 6.49 a Figura 6.54 mostradas na sequência abaixo.

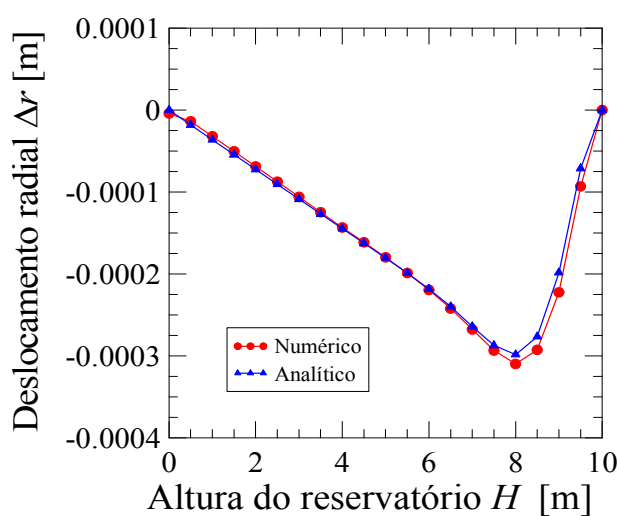


Figura 6.49 – Deslocamento radial ( $\Delta r$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica engastada na base

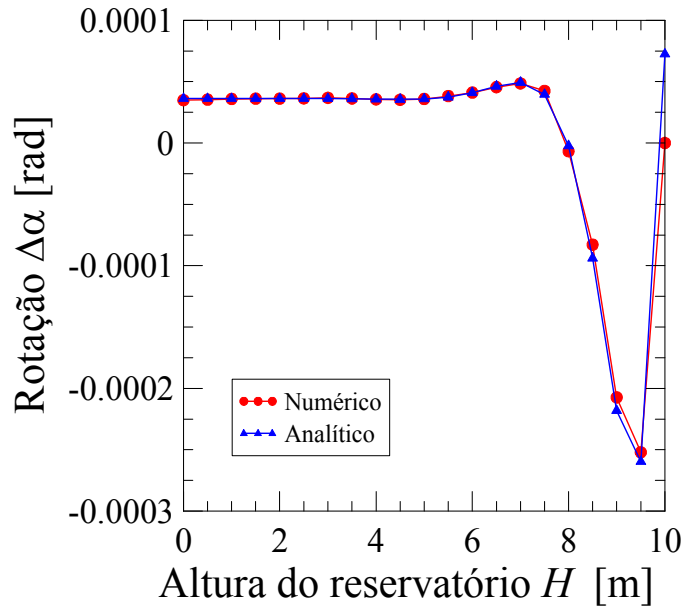


Figura 6.50 – Rotação ( $\Delta\alpha$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica engastada na base

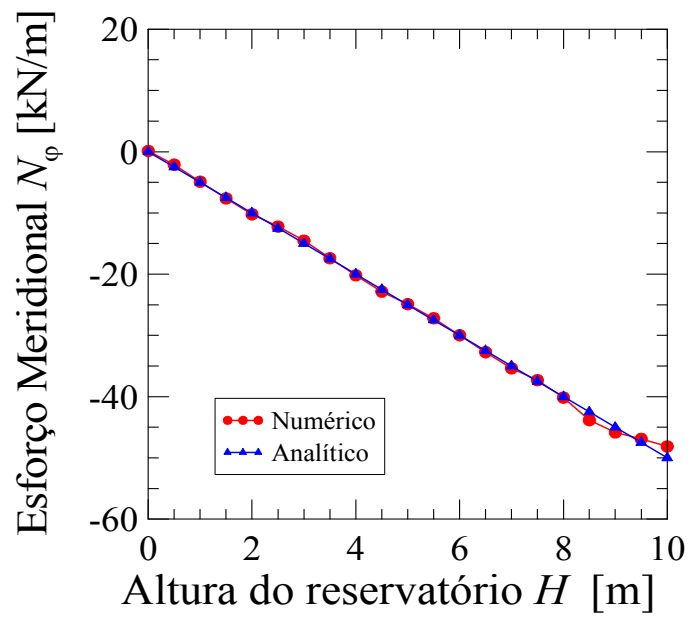


Figura 6.51 – Esforço meridional ( $N_\varphi$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica engastada na base



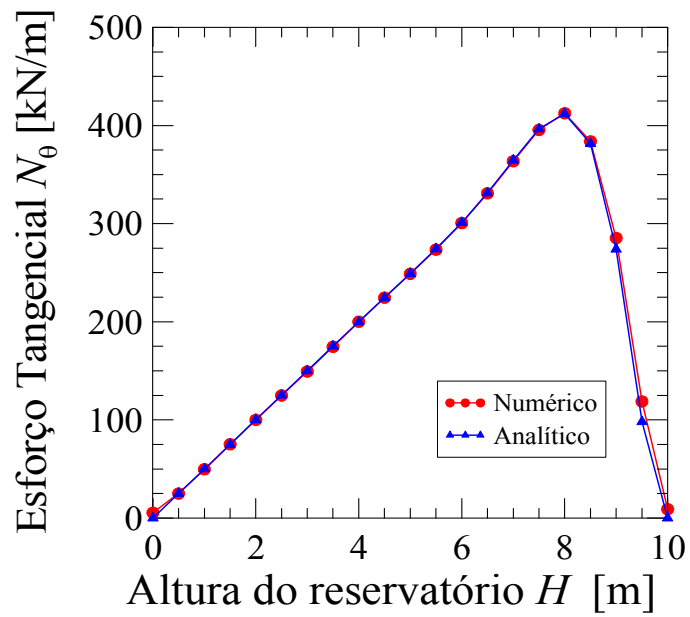


Figura 6.52 – Esforços tangenciais ( $N_\theta$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica engastada na base

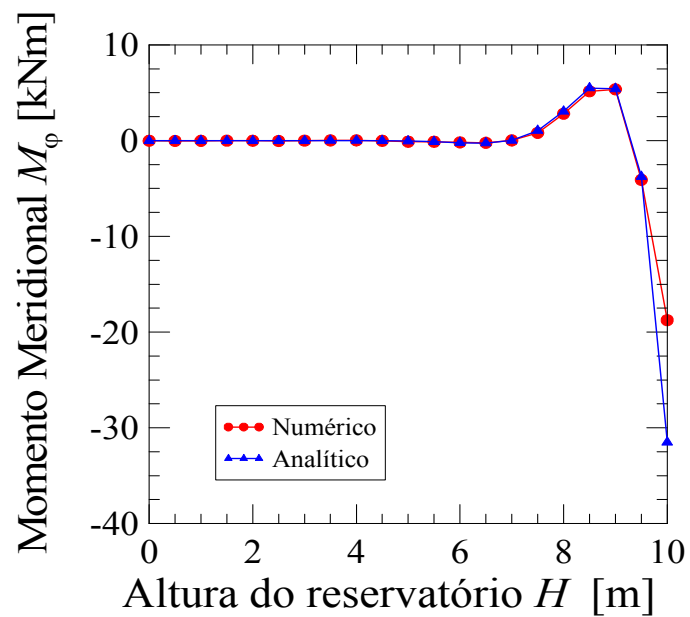


Figura 6.53 – Momento meridional ( $M_\phi$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica engastada na base

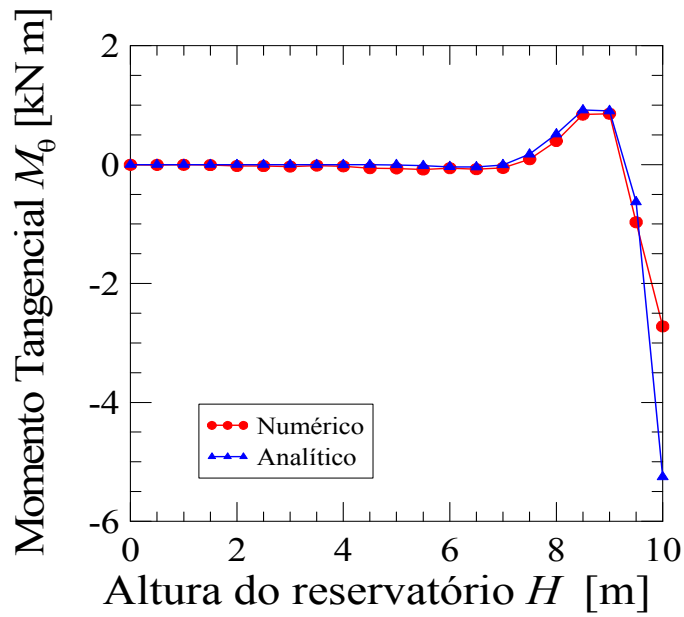


Figura 6.54 – Momento tangencial ( $M_\theta$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica sem o fundo com base engastada

As Figura 6.55 a Figura 6.60 mostram os resultados obtidos pelo programa ANSYS para os esforços e deslocamentos. Estas imagens 3D fornecem através de um degradê de cores a evolução destas grandezas ao longo da parede do reservatório sem laje de fundo e com a base engastada.

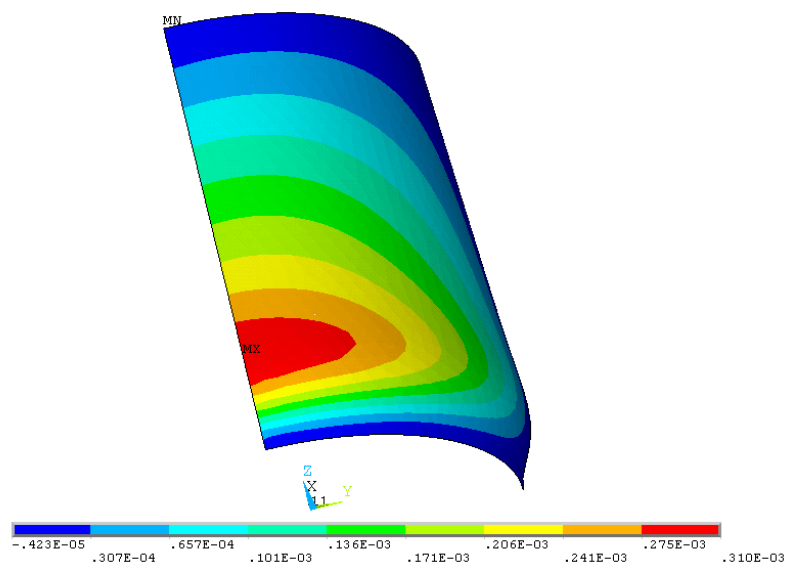


Figura 6.55 – Deslocamento radial ( $\Delta r$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica sem o fundo e com a base engastada (programa ANSYS)

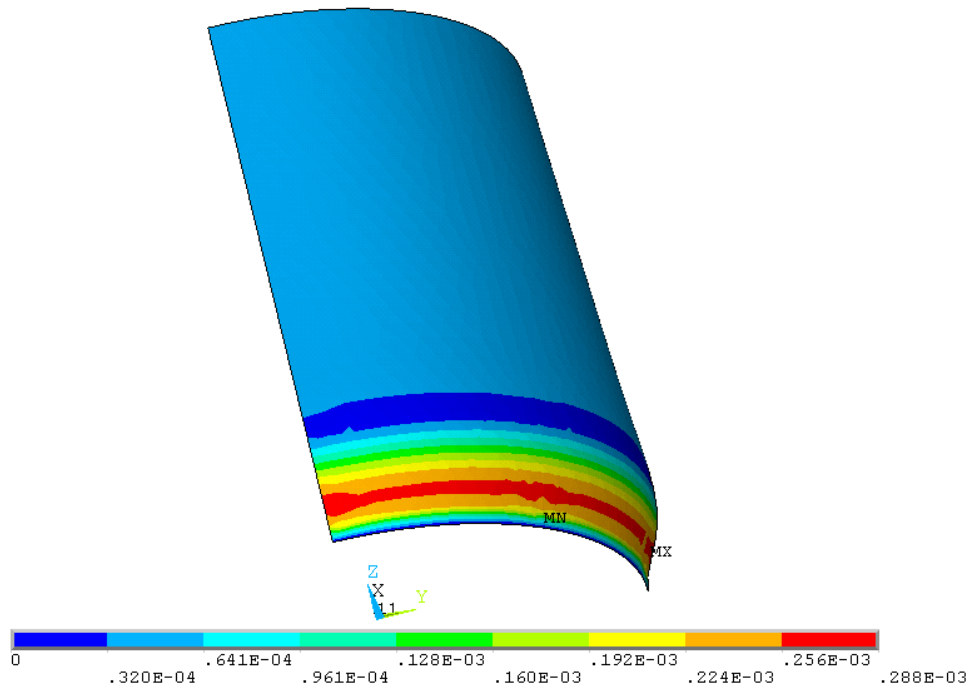


Figura 6.56 – Rotação ( $\Delta_{\alpha}$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica sem o fundo e com a base engastada (programa ANSYS)

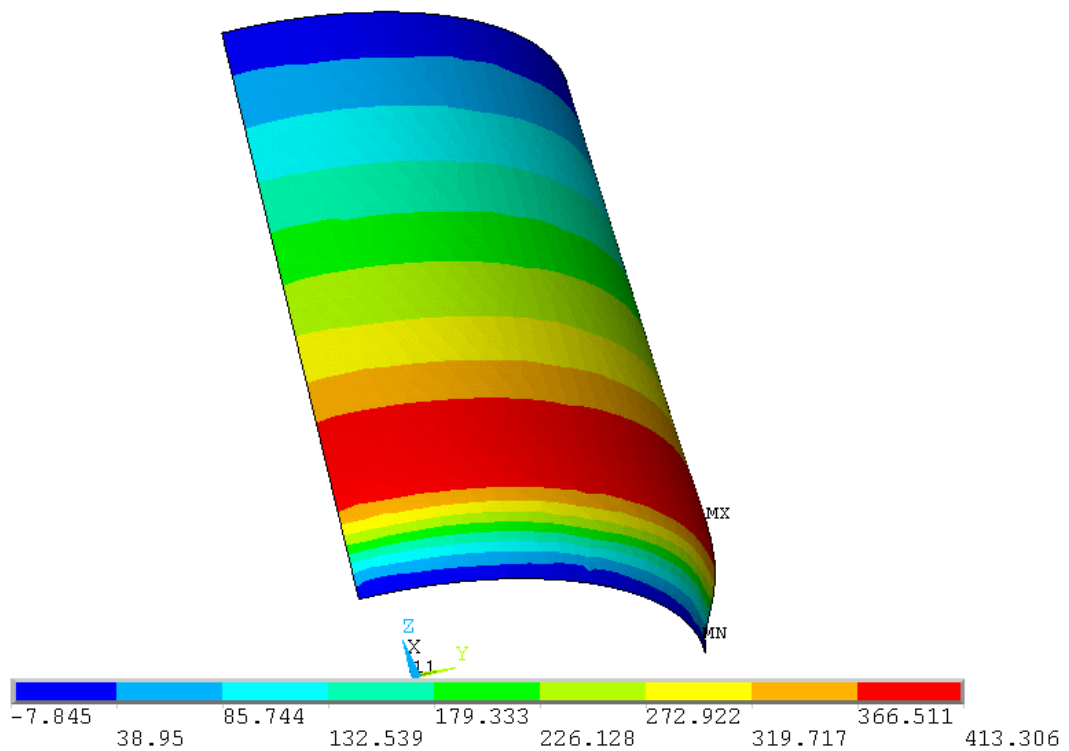


Figura 6.57 – Esforços tangenciais ( $N_{\theta}$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica sem o fundo e com a base engastada (programa ANSYS)

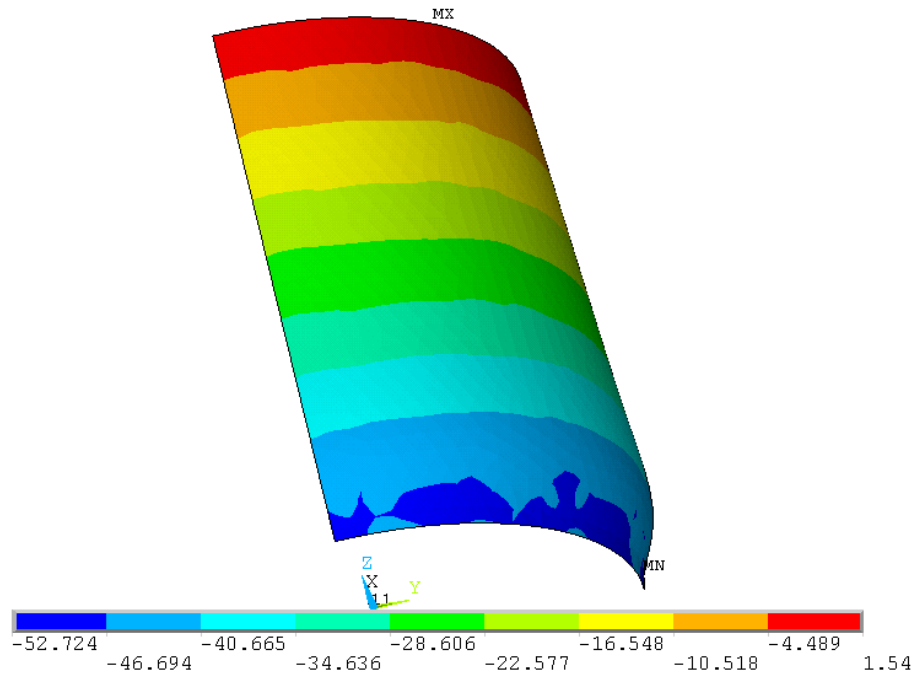


Figura 6.58 – Esforços meridianais ( $N_\phi$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica sem o fundo e com a base engastada (programa ANSYS)

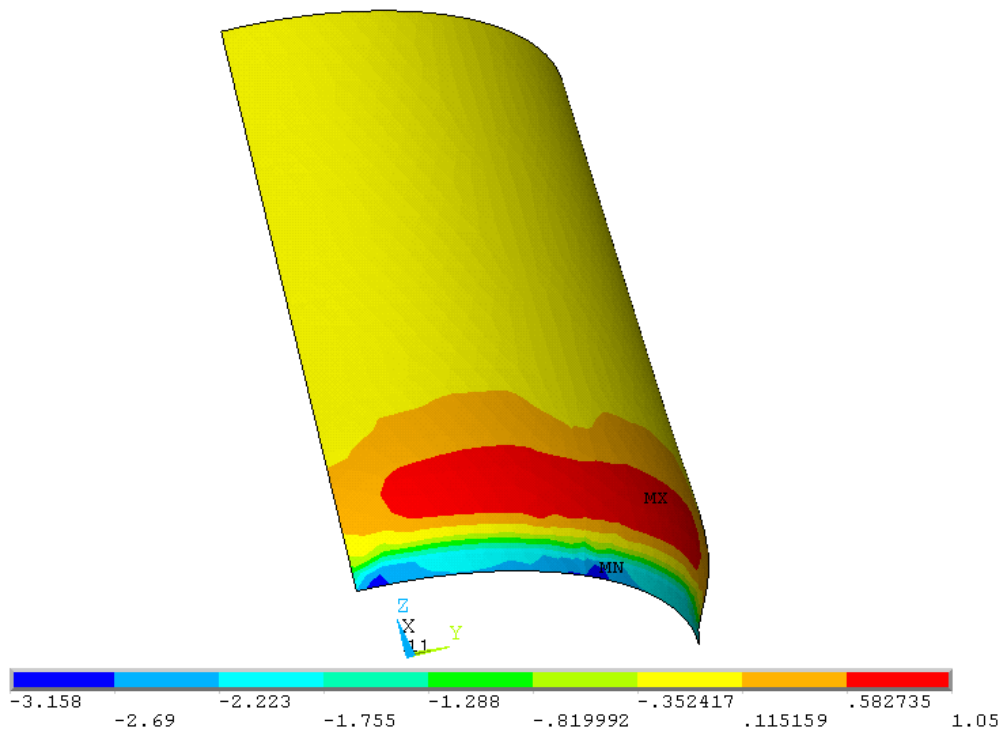


Figura 6.59 – Momento tangencial ( $M_\theta$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica sem o fundo e com a base engastada (programa ANSYS)

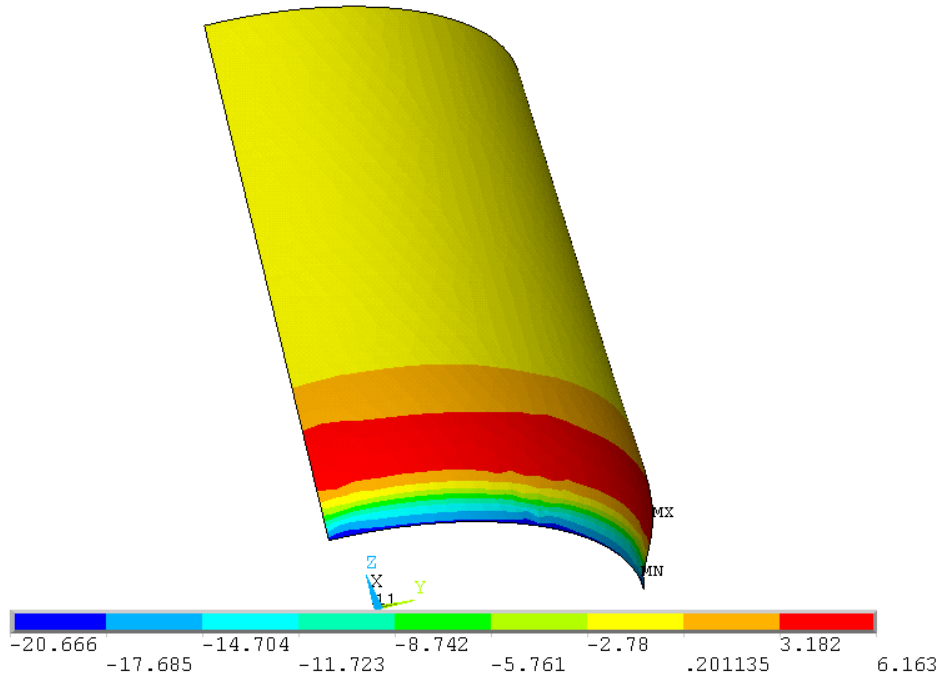


Figura 6.60 – Momento meridional ( $M_\phi$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica sem o fundo e com a base engastada (programa ANSYS)

As modelagens para os próximos casos a seguir foram feitas considerando a laje de fundo, onde os esforços e deslocamentos da laje de fundo interferem na análise da parede cilíndrica. A malha Nível 1 agora aplicada consta 1344 elementos triangulares e 718 nós, a Figura 6.61 ilustra o detalhe desta malha. Só será representado 1/4 do reservatório cilíndrico, através das condições de simetria do problema.

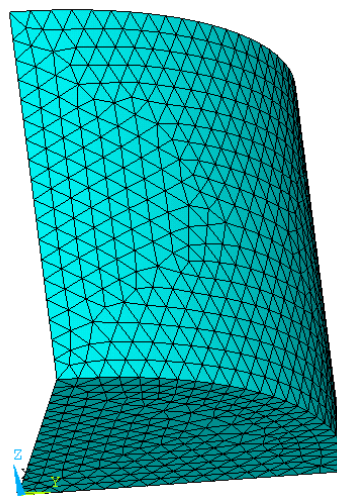


Figura 6.61 – Malha de elementos finitos triangulares usadas para discretização do reservatório.

A malha usada na discretização do reservatório foi a Nível I, a qual apresentou melhores resultados nos testes de convergência de validação. A malha foi gerada usando o refinamento automático do ANSYS, e será utilizada para todos os casos numéricos apresentados a seguir.

Foi estabelecida uma convenção (ver Figura 6.62) para determinação dos sentidos positivos para os deslocamentos (no ponto A) devido aos diversos carregamentos aplicados no reservatório e dependendo da ligação entre a parede do reservatório com o fundo.

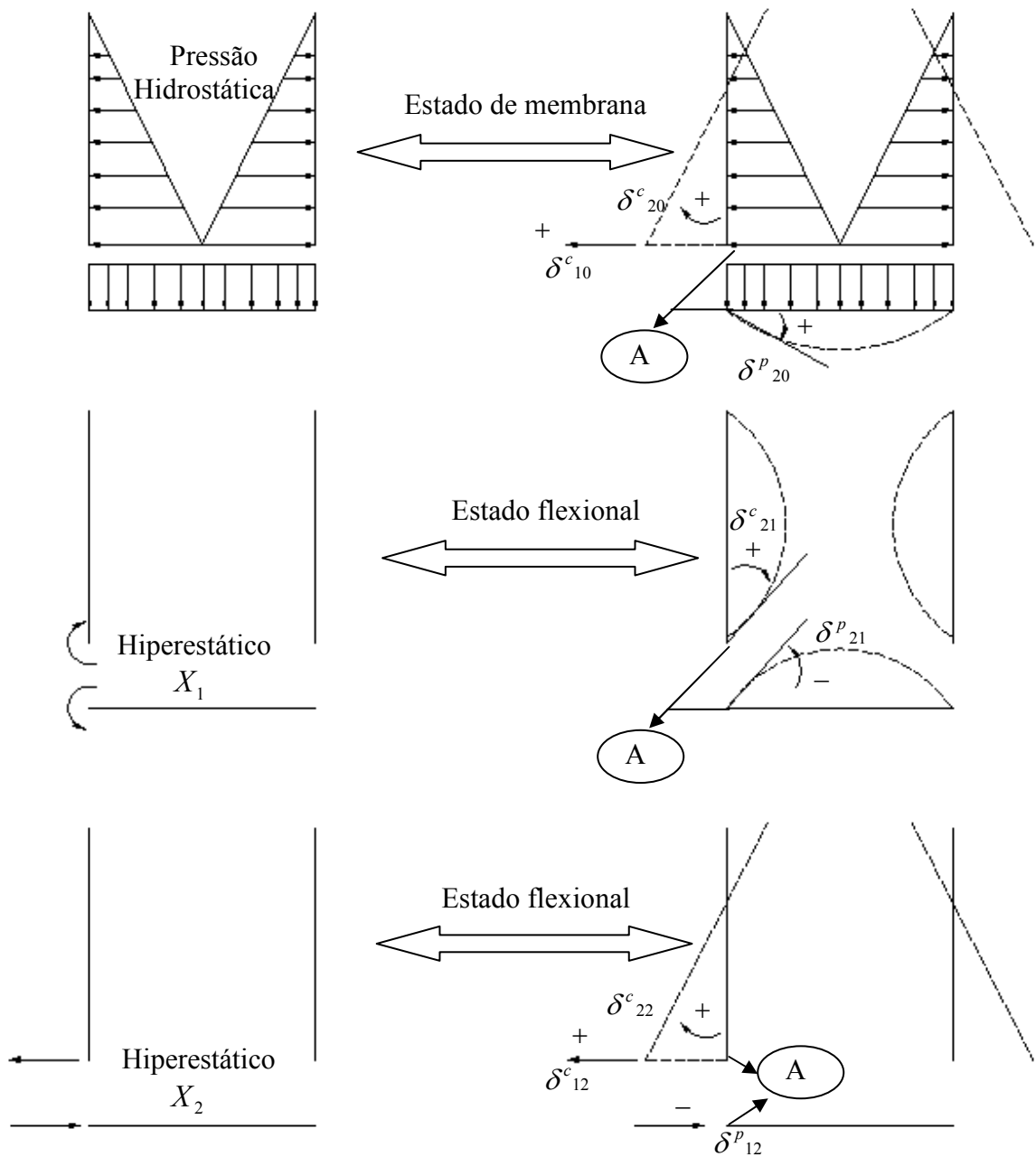


Figura 6.62 – Direções positivas (no ponto A) para os deslocamentos devido ao diversos carregamentos aplicados

Seguindo a convenção estabelecida na Figura 6.62 em cada caso particular é desenvolvido um sistema com as equações de compatibilidade para os deslocamentos no ponto A. Para solucionar o sistema deve-se ter o valor dos coeficientes, que são os valores para os deslocamentos na parede do reservatório e na laje de fundo. São determinados a partir das seguintes equações:

#### ESTADO DE MEMBRANA

$$\begin{aligned} \delta^c_{10} &= \frac{\gamma r^2}{Eh} (H - y) & \delta^p_{10} &= 0 \\ \delta^c_{20} &= \frac{\gamma r^2}{Eh} & \delta^p_{20} &= \frac{qr^3}{8D(1+\nu)} \end{aligned} \quad (6.2)$$

#### ESTADO FLEXIONAL

$$\begin{aligned} \delta^c_{11} &= \frac{1}{2\beta^3 D} & \delta^c_{12} &= \frac{1}{2\beta^2 D} \\ \delta^c_{21} &= \frac{1}{2\beta^2 D} & \delta^c_{22} &= \frac{1}{2\beta D} \\ \delta^p_{11} &= \frac{r(1-\nu)}{Eh} & \delta^p_{12} &= 0 \\ \delta^c_{21} &= 0 & \delta^c_{22} &= \frac{r}{D(1+\nu)} \end{aligned} \quad (6.3)$$

O sistema geral de equações de compatibilidade para deslocamento e rotação na ligação parede-fundo e que podem ser utilizado para qualquer caso de ligação é definido com as seguintes expressões:

$$\delta^c_{10} + X_1 \delta^c_{11} + X_2 \delta^c_{12} = \delta^p_{10} + X_1 \delta^p_{11} + X_2 \delta^p_{12} \quad (6.4)$$

$$\delta^c_{20} + X_1 \delta^c_{21} + X_2 \delta^c_{22} = \delta^p_{20} + X_1 \delta^p_{21} + X_2 \delta^p_{22}$$

A partir deste sistema de equações e fazendo as considerações pertinentes a cada caso particular de ligação, é possível encontrar os valor dos hiperestáticos e em seguida entrar

com esse valor na equação geral dos esforços e deslocamentos ao longo da parede do reservatório e/ou do fundo.

**Caso IIA3 – Análise para ligação do tipo engaste perfeito apenas nas bordas do fundo (fundo flexível)**

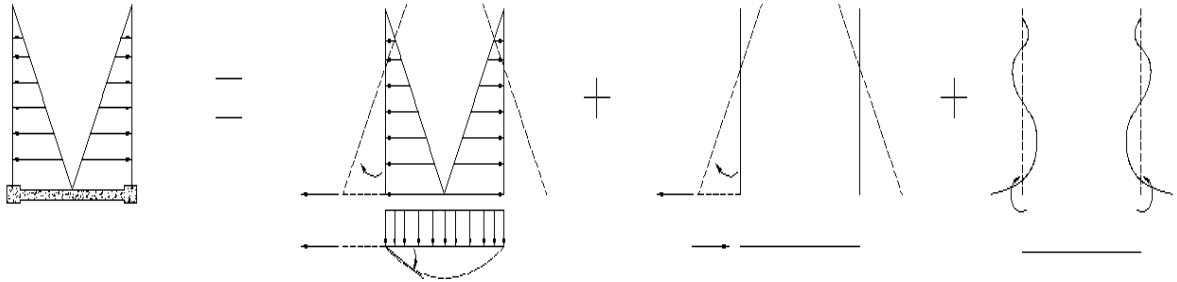


Figura 6.63 – Método das forças aplicado ao caso IIA3

Observando a Figura 6.63 e de acordo com a convenção estabelecida (Figura 6.62) a Tabela 6.12 apresenta o valor dos coeficientes que deve ser utilizado na equação geral de compatibilidade.

Tabela 6.12 – Considerações para o caso IIA3

Deslocamento relativo a casca	Rotação relativo a casca	Deslocamento relativo a placa	Rotação relativa a placa
$\delta^c_{10} \neq 0 e > 0$	$\delta^c_{20} \neq 0 e > 0$	$\delta^p_{10} = 0$	$\delta^p_{20} = 0$
$\delta^c_{11} \neq 0 e > 0$	$\delta^c_{21} \neq 0 e > 0$	$\delta^p_{11} \neq 0 e < 0$	$\delta^p_{21} = 0$
$\delta^c_{12} \neq 0 e > 0$	$\delta^c_{22} \neq 0 e > 0$	$\delta^p_{12} = 0$	$\delta^p_{22} = 0$

Aplicando o método das forças para este tipo de ligação, conforme a Figura 6.63 e fazendo as considerações apresentadas na Tabela 6.12 no sistema geral de equações de compatibilidade, tem-se o seguinte sistema:

$$\delta^c_{10} + X_1(\delta^c_{11} + \delta^p_{11}) + X_2\delta^c_{12} = 0 \tag{6.5}$$

$$\delta^c_{20} + X_1\delta^c_{21} + X_2\delta^c_{22} = 0$$



Seja a parede cilíndrica do reservatório, com ligação do tipo engaste perfeito ao longo da borda inferior da parede do reservatório e considerando a placa de fundo flexível, e utilizando a malha da situação anterior, contendo 1344 elementos triangulares e 718 nós (rever Figura 6.61), pretende-se reproduzir de forma similar as condições do mesmo.

A deformada resultante da parede cilíndrica com a laje de fundo pode ser vista na Figura 6.64 a seguir:

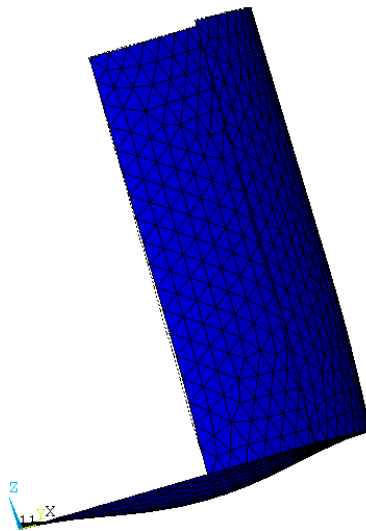


Figura 6.64 – Deformada da parede cilíndrica e laje de fundo (programa ANSYS) para o caso IIA3

A Tabela 6.13 apresenta uma comparação entre os valores analíticos e numéricos para os deslocamentos ao longo da parede cilíndrica do reservatório, onde o valor zero representa a base do reservatório cilíndrico e a altura H igual a 10 representando o topo.

Tabela 6.13 – Resultados analíticos numéricos dos esforços e deslocamentos ao longo da parede do reservatório engastado com laje de fundo flexível

Altura	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico
H	$\Delta r$	$\Delta r$	$N_{\theta}$	$N_{\theta}$	$M_{\varphi}$	$M_{\varphi}$
(m)	(m)	(m)	(kN/m)	(kN/m)	(Kn.m)	(kN.m)
0	3,92E-05	3,94E-05	69,93	54,39	-13,38	-23,85
0,5	1,19E-04	1,17E-04	156,71	162,09	-4,83	5,94
1	2,28E-04	2,26E-04	295,12	312,09	4,18	11,37
1,5	2,92E-04	2,87E-04	382,00	395,76	4,53	7,78
2	3,07E-04	2,99E-04	407,87	413,17	2,63	3,35
2,5	2,90E-04	2,85E-04	393,92	393,80	0,93	0,66
3	2,66E-04	2,62E-04	364,26	361,96	0,05	-0,36
3,5	2,41E-04	2,39E-04	332,49	329,80	-0,22	-0,48
4	2,19E-04	2,18E-04	302,28	300,72	-0,17	-0,30
4,5	1,99E-04	1,99E-04	274,50	274,30	-0,08	-0,12
5	1,80E-04	1,81E-04	249,03	249,23	-0,04	-0,02
5,5	1,62E-04	1,63E-04	224,69	224,55	-0,01	0,02
6	1,44E-04	1,45E-04	199,66	199,84	0,02	0,02
6,5	1,25E-04	1,27E-04	173,11	174,99	-0,01	0,01
7	1,07E-04	1,09E-04	147,49	150,03	-0,03	0,00
7,5	8,83E-05	9,06E-05	122,58	125,03	-0,02	0,00
8	6,97E-05	7,25E-05	97,72	100,02	-0,02	0,00
8,5	5,11E-05	5,44E-05	72,74	75,01	-0,03	0,00
9	3,28E-05	3,62E-05	48,10	50,00	-0,04	0,00
9,5	1,48E-05	1,81E-05	24,02	25,00	-0,04	0,00
10	-2,60E-06	-8,97E-10	7,87	0,00	-0,02	0,00

Observa-se bons resultados obtidos pelo programa ANSYS de modo que para os deslocamentos a diferença está pequena, já para o esforço tangencial ( $N_{\theta}$ ) os nós próximos à extremidade apresentaram maiores diferenças devido a perturbações no contorno, com exceção do momento meridional ( $M_{\varphi}$ ) apenas na borda tem-se valores analíticos que diferem pouco dos numéricos.

Os resultados apresentados na Tabela 6.13 são ilustrados agora em forma de gráfico nas Figura 6.65 a Figura 6.68 mostradas a seguir para melhor entendimento da evolução dos deslocamentos radiais, esforços tangenciais e meridionais.

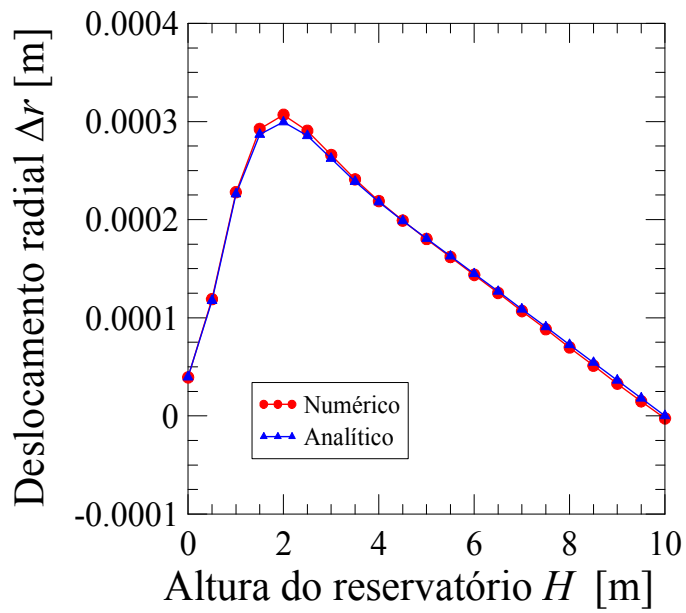


Figura 6.65 – Deslocamento radial ( $\Delta r$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica para o caso IIA3

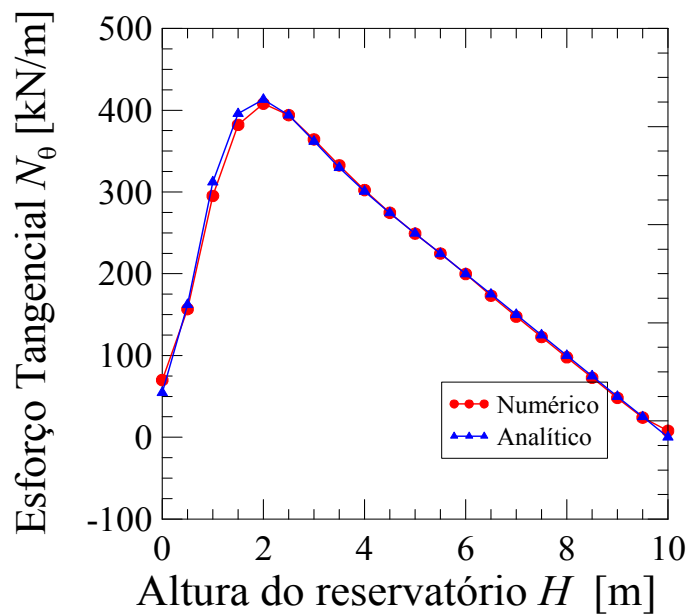


Figura 6.66 – Esforços tangenciais ( $N_\theta$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica para o caso IIA3

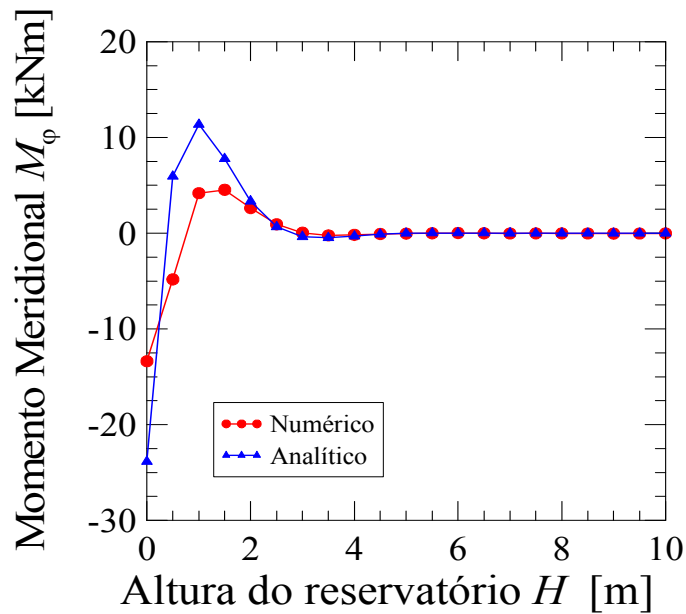


Figura 6.67 – Momento meridional ( $M_\phi$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica para o caso IIA3

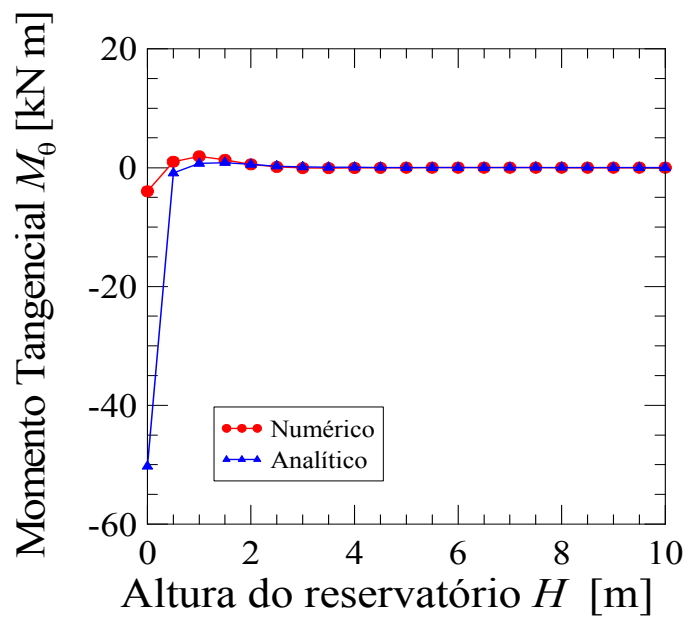


Figura 6.68 – Momento tangencial ( $M_\theta$ ) ao longo da altura da parede cilíndrica para o caso IIA3

A observação feita dos valores em discrepância dos momentos fletores nos gráficos mostra a influencia de considerar a laje circular nesta ligação, isto na borda inferior. Porém ao longo da parede do cilindro, esta modelagem representa de forma satisfatória o comportamento da estrutura.

Contudo, esta discretização se mostrou satisfatória, uma vez que se consegue representar em grande parte da estrutura, os seus deslocamentos com variação de ordem mínima. Já para o esforço tangencial ( $N_\theta$ ) e o momento meridional ( $M_\phi$ ) esta variação se mostrou maior.

**Caso IIA4 – Análise para ligação parede-fundo considerando o fundo como placa rígida axialmente com rotação livre)**

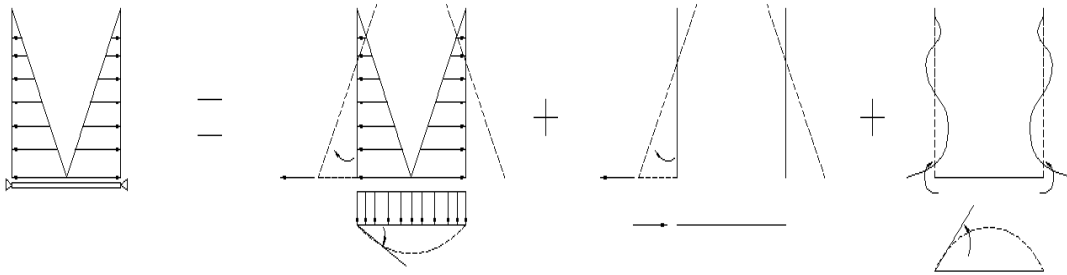


Figura 6.69 – Método das forças aplicado ao caso IIA4

Observando a Figura 6.69 e de acordo com a convenção estabelecida (Figura 6.62) a Tabela 6.14 apresenta o valor dos coeficientes que deve ser utilizado na equação geral de compatibilidade.

Tabela 6.14 – Considerações para o caso IIA4

Deslocamento relativo a casca	Rotação relativo a casca	Deslocamento relativo a placa	Rotação relativa a placa
$\delta^c_{10} \neq 0 e > 0$	$\delta^c_{20} \neq 0 e > 0$	$\delta^p_{10} = 0$	$\delta^p_{20} \neq 0 e > 0$
$\delta^c_{11} \neq 0 e > 0$	$\delta^c_{21} \neq 0 e > 0$	$\delta^p_{11} = 0$	$\delta^p_{21} = 0$
$\delta^c_{12} \neq 0 e > 0$	$\delta^c_{22} \neq 0 e > 0$	$\delta^p_{12} = 0$	$\delta^p_{22} \neq 0 e < 0$

Aplicando o método das forças para este tipo de ligação, conforme a Figura 6.69 e fazendo as considerações apresentadas na Tabela 6.14 no sistema geral de equações de compatibilidade, tem-se o seguinte sistema:

$$\delta^c_{10} + X_1 \delta^c_{11} + X_2 \delta^c_{12} = 0 \tag{6.6}$$

$$\delta^c_{20} + X_1 \delta^c_{21} + X_2 \delta^c_{22} = \delta^p_{20} - X_2 \delta^p_{22}$$

Nesse caso o fundo do reservatório tem uma ligação que permite rotação, porém o deslocamento radial ( $\Delta_r$ ) é restringido. A modelagem foi feita considerando apenas as restrições nas direções x e y na borda da parede do reservatório de modo que permitam que a laje de fundo tenha liberdade de rotação, e que não se deforme no sentido radial.

A malha utilizada contém 1344 elementos triangulares e 718 nós, de forma semelhante aos casos anteriores (rever Figura 6.61), isto permite reproduzir de forma similar as condições daquele caso.

A deformada resultante deste caso é ilustrada nas Figura 6.70 a seguir:

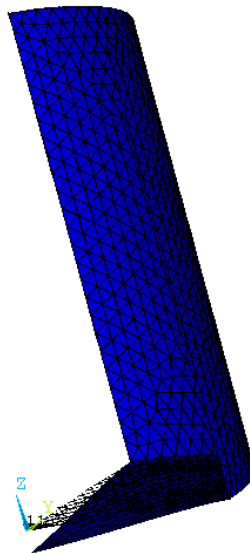


Figura 6.70 – Deformada da parede cilíndrica e laje de fundo (programa ANSYS) para o caso IIA4

A seguir, a Tabela 6.15 apresenta uma comparação entre os valores analíticos e numéricos para os deslocamentos ao longo da parede cilíndrica do reservatório, onde o valor zero representa a base do reservatório cilíndrico e a altura H igual a 10 representando o topo.

Tabela 6.15 – Resultados analíticos numéricos dos esforços e deslocamentos ao longo da parede do reservatório com laje de fundo rígido axialmente

Altura	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico
H	$\Delta r$	$\Delta r$	$N_{\theta}$	$N_{\theta}$	$M_{\phi}$	$M_{\phi}$
(m)	(m)	(m)	(kN/m)	(kN/m)	(Kn.m)	(kN.m)
0	0	-4,00E-13	-236,65	0,00	-139,18	-289,10
0,5	-1,75E-03	-9,37E-04	-1207,80	-1293,10	-152,21	-18,73
1	-1,50E-03	-6,34E-04	-1096,50	-875,45	-27,05	62,78
1,5	-8,15E-04	-1,39E-04	-381,62	-191,49	17,63	56,94
2	-3,10E-04	1,81E-04	159,44	249,43	22,98	30,05
2,5	-1,06E-04	3,03E-04	396,42	417,47	14,59	9,41
3	-6,09E-05	3,09E-04	430,90	425,84	6,17	-0,36
3,5	-8,07E-05	2,73E-04	388,36	376,17	1,20	-2,84
4	-1,11E-04	2,33E-04	327,60	321,74	-0,43	-2,25
4,5	-1,30E-04	2,02E-04	278,46	279,12	-0,46	-1,09
5	-1,40E-04	1,79E-04	244,14	247,51	-0,12	-0,29
5,5	-1,43E-04	1,61E-04	218,44	221,83	0,18	0,05
6	-1,45E-04	1,44E-04	194,64	198,06	0,33	0,12
6,5	-1,48E-04	1,26E-04	169,61	174,25	0,32	0,09
7	-1,52E-04	1,09E-04	144,78	149,91	0,27	0,04
7,5	-1,56E-04	9,07E-05	120,31	125,13	0,24	0,01
8	-1,63E-04	7,26E-05	95,49	100,13	0,19	0,00
8,5	-1,70E-04	5,44E-05	70,61	75,07	0,13	-0,01
9	-1,78E-04	3,63E-05	46,62	50,03	0,05	0,00
9,5	-1,87E-04	1,81E-05	24,79	25,00	-0,01	0,00
10	-1,96E-04	-4,30E-09	11,31	-0,01	-0,03	0,00

Os resultados obtidos numericamente apresentam semelhança em relação aos casos anteriores com os problemas de borda. Observou-se também que esta situação de laje de fundo rígida os esforços na borda inferior são bem maiores do que em relação aos obtidos considerando fundo rígido apenas nas bordas e flexível no meio da laje de fundo, isso se deve a rigidez imposta na direção radial na laje de fundo.

Os resultados apresentados na Tabela 6.15 são mostrados a seguir nas Figura 6.71 a Figura 6.74, em forma de gráficos, para que fique mais claro o comportamento destes valores ao longo da parede do reservatório.

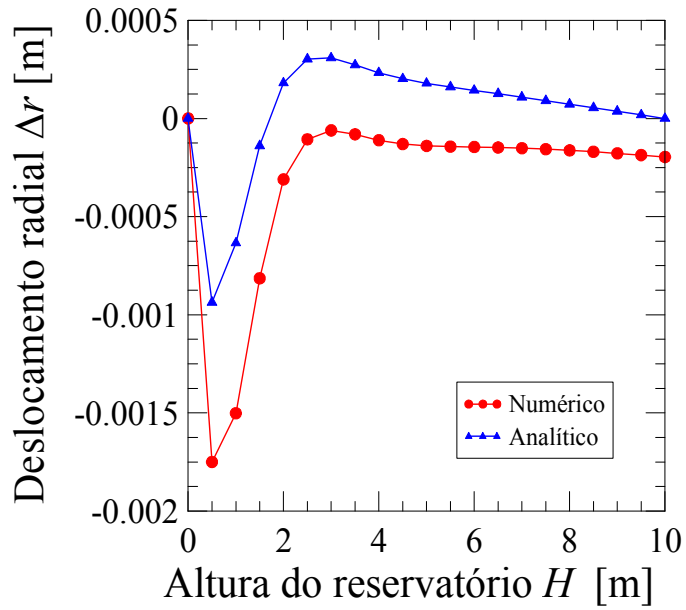


Figura 6.71 – Deslocamento radial ( $\Delta r$ ) ao longo da parede do reservatório para o caso IIA4

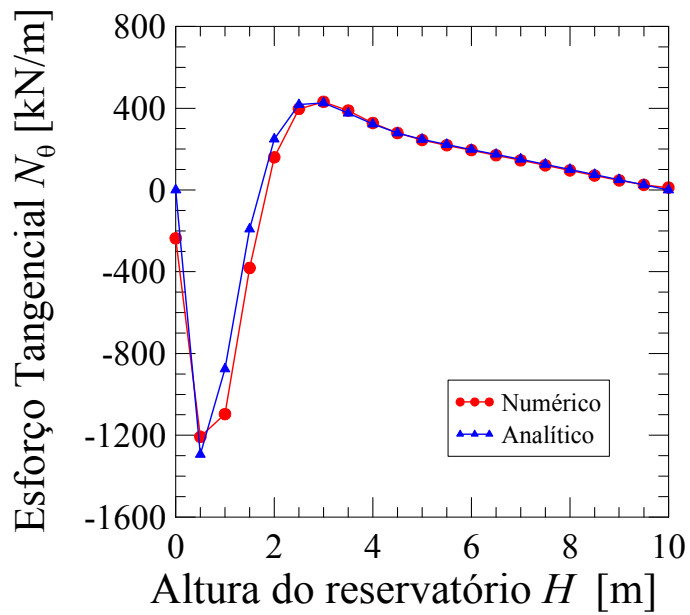


Figura 6.72 – Esforços tangenciais ( $N_\theta$ ) ao longo da parede do reservatório para o caso IIA4



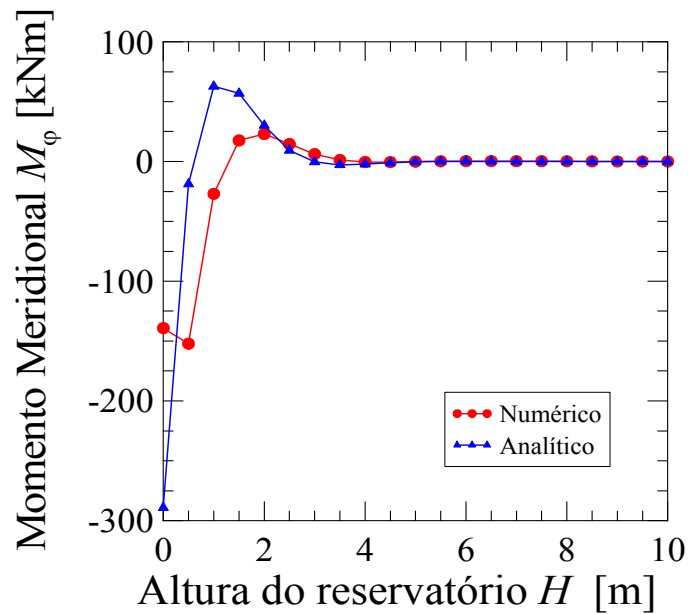


Figura 6.73 – Momento meridional ( $M_\phi$ ) ao longo da parede do reservatório para o caso

IIA4

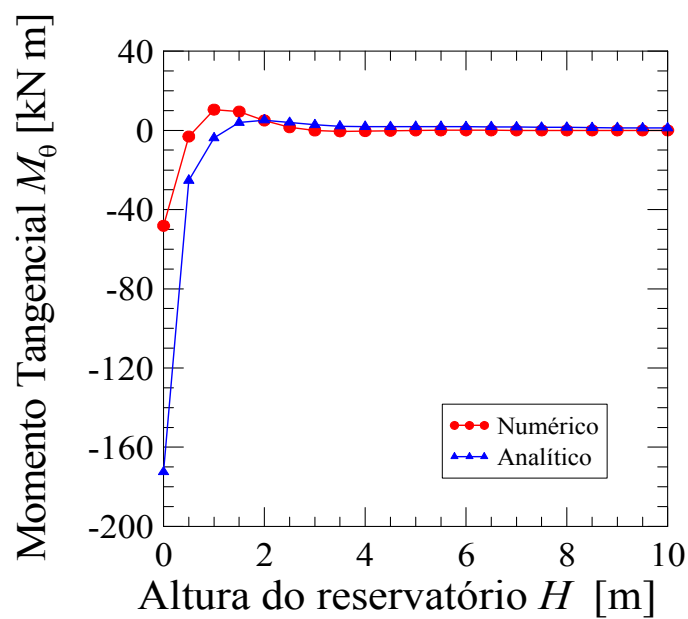


Figura 6.74 – Momento tangencial ( $M_\theta$ ) ao longo da parede do reservatório para o caso

IIA4

Neste caso os deslocamentos radiais numéricos apresentaram uma pequena defasagem em relação ao valor de referência analítico. Assim esta modelização não se mostrou tão eficiente como quando no caso anterior.

**Caso IIA5 – Análise para ligação parede-fundo considerando o fundo axialmente elástico sem base rígida (rotação livre sob ação do carregamento)**

Analisa-se neste caso o fundo do reservatório axialmente elástico sem base rígida, permitindo-se, portanto a rotação e deslocamento ao longo da placa, conforme ilustrado na Figura 6.75 a seguir.

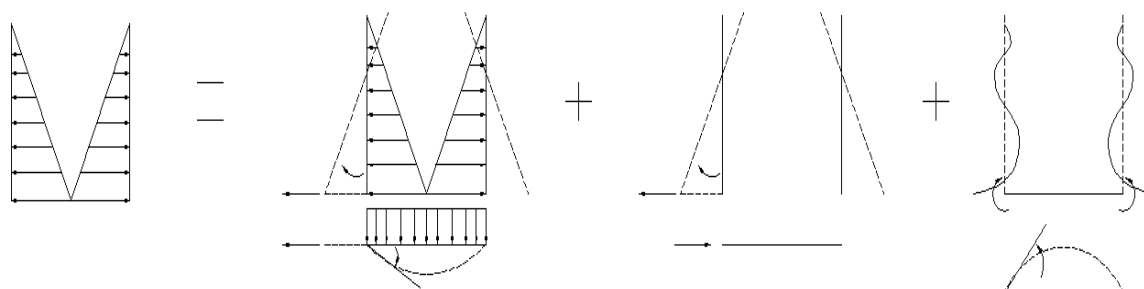


Figura 6.75 – Método das forças aplicado ao caso IIA5

Observando a Figura 6.75 e de acordo com a convenção estabelecida (Figura 6.62) a Tabela 6.16 apresenta o valor dos coeficientes que deve ser utilizado na equação geral de compatibilidade.

Tabela 6.16 – Considerações para o caso IIA5

Deslocamento relativo a casca	Rotação relativo a casca	Deslocamento relativo a placa	Rotação relativa a placa
$\delta^c_{10} \neq 0 e > 0$	$\delta^c_{20} \neq 0 e > 0$	$\delta^p_{10} = 0$	$\delta^p_{20} \neq 0 e > 0$
$\delta^c_{11} \neq 0 e > 0$	$\delta^c_{21} \neq 0 e > 0$	$\delta^p_{11} \neq 0 e < 0$	$\delta^p_{21} = 0$
$\delta^c_{12} \neq 0 e > 0$	$\delta^c_{22} \neq 0 e > 0$	$\delta^p_{12} = 0$	$\delta^p_{22} \neq 0 e < 0$

Aplicando o método das forças para este tipo de ligação, conforme a Figura 6.75 e fazendo as considerações apresentadas na Tabela 6.16 no sistema geral de equações de compatibilidade, tem-se o seguinte sistema:

$$\delta^c_{10} + X_1\delta^c_{11} + X_2\delta^c_{12} = -X_1\delta^p_{11} \quad (6.7)$$

$$\delta^c_{20} + X_1\delta^c_{21} + X_2\delta^c_{22} = \delta^p_{20} - X_2\delta^p_{22}$$

A malha utilizada contém 1344 elementos triangulares e 718 nós do mesmo modo que os casos anteriores (rever Figura 6.61), isto permite reproduzir de forma similar as condições deste caso.

A deformada resultante deste caso é ilustrada na Figura 6.76 a seguir:

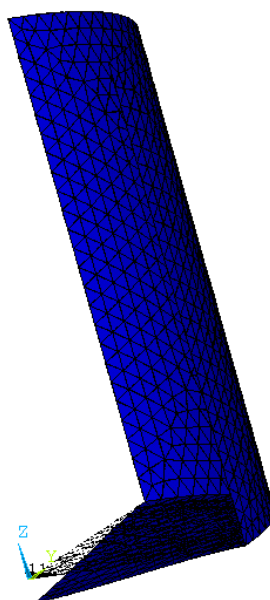


Figura 6.76 – Deformada da parede cilíndrica e laje de fundo para o caso IIA5

A seguir a Tabela 6.17 apresenta uma comparação entre os valores analíticos e numéricos para os deslocamentos ao longo da parede cilíndrica do reservatório, onde o valor zero representa a base do reservatório cilíndrico e a altura H igual a 10 representando o topo.

Tabela 6.17 – Resultados analíticos numéricos para o caso IIA5

Altura	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico
H	$\Delta r$	$\Delta r$	$N_{\theta}$	$N_{\theta}$	$M_{\phi}$	$M_{\phi}$	$M_{\theta}$	$M_{\theta}$
(m)	(m)	(m)	(kN/m)	(kN/m)	(Kn.m)	(kN.m)	(Kn.m)	(kN.m)
0	2,89E-04	2,35E-04	72,91	324,35	-140,28	-287,55	-173,59	-47,92
0,5	-1,69E-03	-8,34E-04	-1110,30	-1150,71	-156,41	-24,59	-25,65	-4,10
1	-1,58E-03	-6,13E-04	-1081,60	-845,60	-30,93	57,52	-3,83	9,59
1,5	-9,55E-04	-1,49E-04	-398,89	-205,37	15,63	54,18	4,48	9,03
2	-4,56E-04	1,67E-04	138,55	229,88	22,48	29,19	5,94	4,87
2,5	-2,37E-04	2,94E-04	382,81	405,07	14,80	9,45	4,85	1,58
3	-1,75E-04	3,05E-04	424,76	420,89	6,53	-0,09	3,59	-0,02
3,5	-1,81E-04	2,72E-04	386,85	375,43	1,50	-2,63	2,81	-0,44
4	-2,01E-04	2,34E-04	327,75	322,48	-0,26	-2,15	2,51	-0,36
4,5	-2,12E-04	2,03E-04	278,76	279,92	-0,38	-1,06	2,42	-0,18
5	-2,14E-04	1,80E-04	244,13	247,98	-0,07	-0,30	2,37	-0,05
5,5	-2,10E-04	1,61E-04	218,16	222,00	0,21	0,04	2,32	0,01
6	-2,06E-04	1,44E-04	194,26	198,07	0,35	0,12	2,23	0,02
6,5	-2,01E-04	1,26E-04	169,21	174,22	0,35	0,08	2,10	0,01
7	-1,99E-04	1,09E-04	144,41	149,88	0,29	0,04	1,96	0,01
7,5	-1,98E-04	9,07E-05	120,01	125,11	0,26	0,01	1,82	0,00
8	-1,98E-04	7,26E-05	95,25	100,12	0,21	0,00	1,69	0,00
8,5	-2,00E-04	5,44E-05	70,50	75,07	0,14	0,00	1,55	0,00
9	-2,04E-04	3,63E-05	46,82	50,03	0,04	0,00	1,40	0,00
9,5	-2,08E-04	1,81E-05	25,76	25,00	-0,03	0,00	1,28	0,00
10	-2,14E-04	3,85E-09	13,08	-0,01	-0,04	0,00	1,21	0,00

Os resultados obtidos numericamente para este caso apresentam, quando confrontados analítico-numéricamente um pouco mais de discrepância em relação a análise dos resultados obtidos nos casos anteriores, para os mesmos deslocamentos e esforços.

Os resultados apresentados na Tabela 6.17 ilustram em forma de gráficos nas Figura 6.77 a Figura 6.80 o comportamento dos deslocamentos e esforços deste caso.

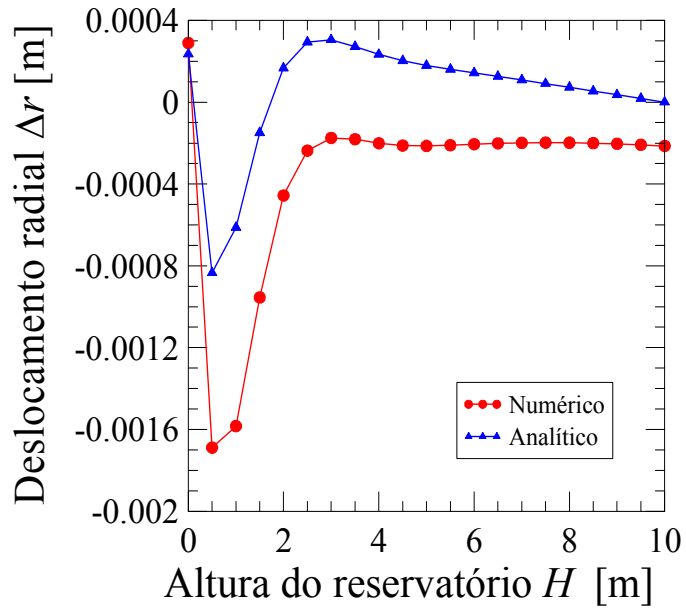


Figura 6.77 – Deslocamento radial ( $\Delta r$ ) ao longo da parede do reservatório para o caso IIA5

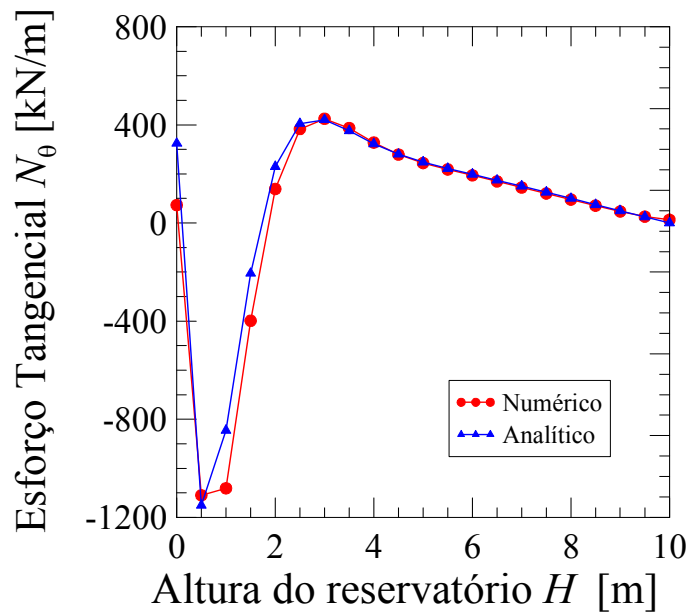


Figura 6.78 – Esforços tangenciais ( $N_\theta$ ) ao longo da parede do reservatório para o caso IIA5

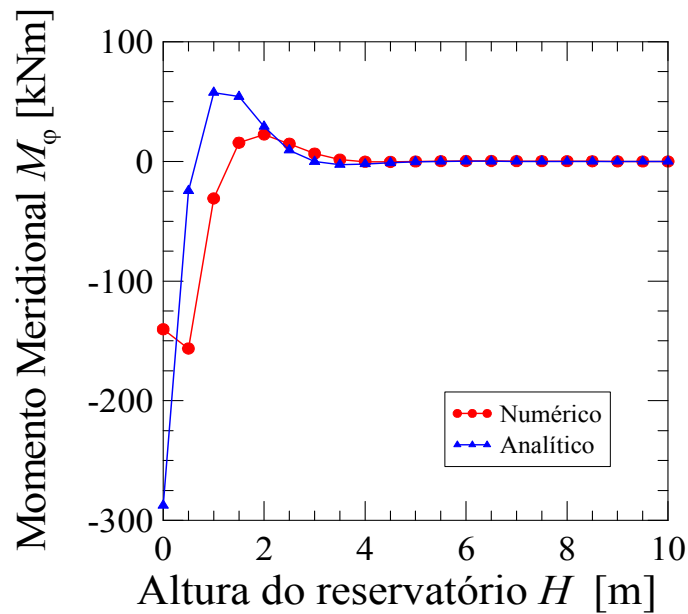


Figura 6.79 – Momento meridional ( $M_\phi$ ) ao longo da parede do reservatório para o caso

IIA5

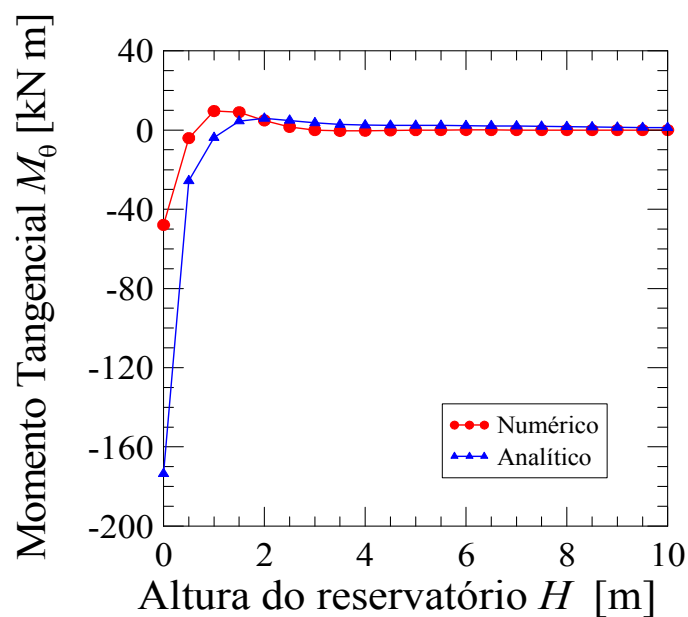


Figura 6.80 – Momento tangencial ( $M_\theta$ ) ao longo da parede do reservatório para o caso

IIA5

***Caso IIA6 – Análise para ligação elasticamente engastada***

Este caso é considerado uma ligação conforme citada em Guimarães (1995) apud Hangan et al (1959), onde o reservatório é considerado com a parede elasticamente engastada e ligada a laje de fundo.

Para a discretização do reservatório a malha utilizada contém 1344 elementos triangulares e 718 nós, mesma dos casos anteriores (rever Figura 6.61), As condições de contorno usadas na modelização no ANSYS para representar este caso é mostrada na Figura 6.81.

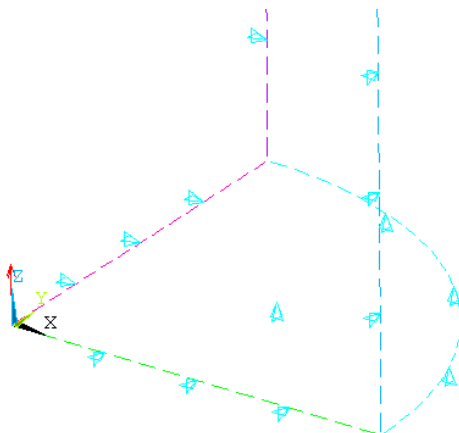


Figura 6.81 – Condições de contorno (modelagem no ANSYS) para o Caso IIA6

A deformada resultante deste caso é ilustrada na Figura 6.82 a seguir:

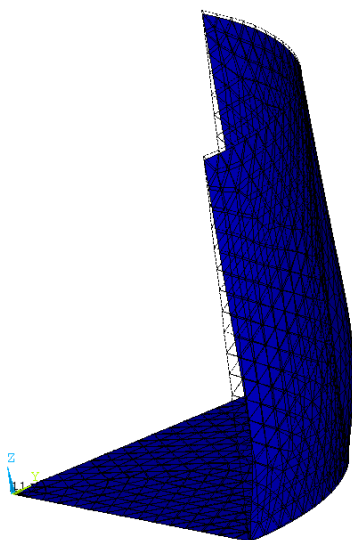


Figura 6.82 – Deformada da parede cilíndrica e laje de fundo (programa ANSYS) para o Caso IIA6

A seguir a Tabela 6.18 apresenta uma comparação entre os valores analíticos e numéricos para os deslocamentos ao longo da parede cilíndrica do reservatório, onde o valor zero representa a base do reservatório cilíndrico e a altura H igual a 10 representando no topo. Neste caso é incluso a consideração do peso próprio, assim o esforço meridional ( $N_{\varphi}$ ) foi também analisado.

Tabela 6.18 – Resultados analíticos numéricos para o Caso IIA6

Altura	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico
H	$\Delta r$	$\Delta r$	$N_{\theta}$	$N_{\theta}$	$N_{\varphi}$	$N_{\varphi}$	$M_{\varphi}$	$M_{\varphi}$	$M_{\theta}$	$M_{\theta}$
(m)	(m)	(m)	(kN/m)	(kN/m)	(kN/m)	(kN/m)	(Kn.m)	(kN.m)	(Kn.m)	(kN.m)
0	7,10E-06	7,11E-06	15,58	11,07	2,03	-15,00	-1,48	-4,22	-1,06	-0,70
0,5	3,85E-05	3,65E-05	52,61	56,88	-13,24	-13,13	0,41	2,03	0,07	0,34
1	6,14E-05	5,82E-05	88,35	90,53	-11,46	-11,25	1,00	1,63	0,18	0,27
1,5	5,99E-05	5,66E-05	87,93	88,08	-9,52	-9,38	0,40	0,46	0,08	0,08
2	4,76E-05	4,52E-05	70,36	70,31	-7,58	-7,50	0,02	-0,04	0,02	-0,01
2,5	3,45E-05	3,27E-05	50,08	50,91	-5,58	-5,63	-0,06	-0,09	0,00	-0,01
3	2,26E-05	2,13E-05	32,32	33,15	-3,68	-3,75	-0,04	-0,04	0,00	-0,01
3,5	1,16E-05	1,05E-05	15,82	16,41	-1,79	-1,88	-0,02	0,00	0,00	0,00
4	1,10E-06	-5,48E-08	2,70	-0,09	-0,20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Assim com em alguns dos casos anteriores apresentados a base do reservatório modelado numericamente apresenta uma pequena diferença por conta dos esforços da laje de fundo.

Os resultados apresentados na Tabela 6.18 são mostrados em forma de gráficos nas Figura 6.83 a Figura 6.87.

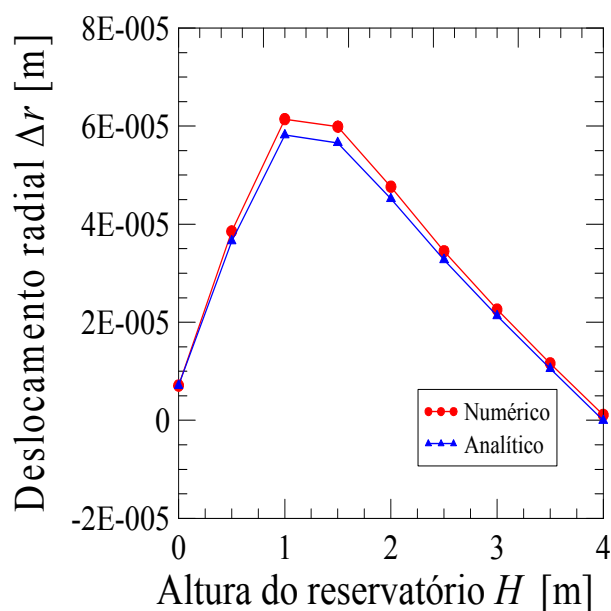


Figura 6.83 – Deslocamento radial ( $\Delta r$ ) ao longo da parede do reservatório para o caso IIA6



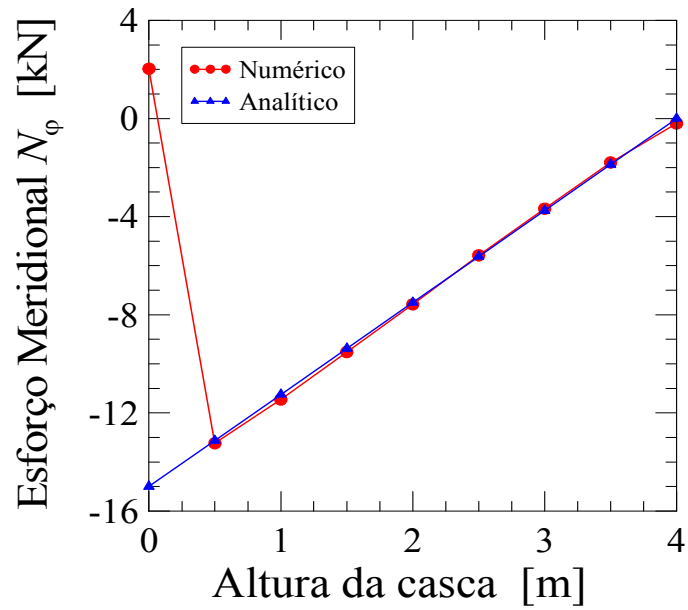


Figura 6.84 – Esforço meridional ( $N_\phi$ ) ao longo da parede do reservatório para o caso

IIA6

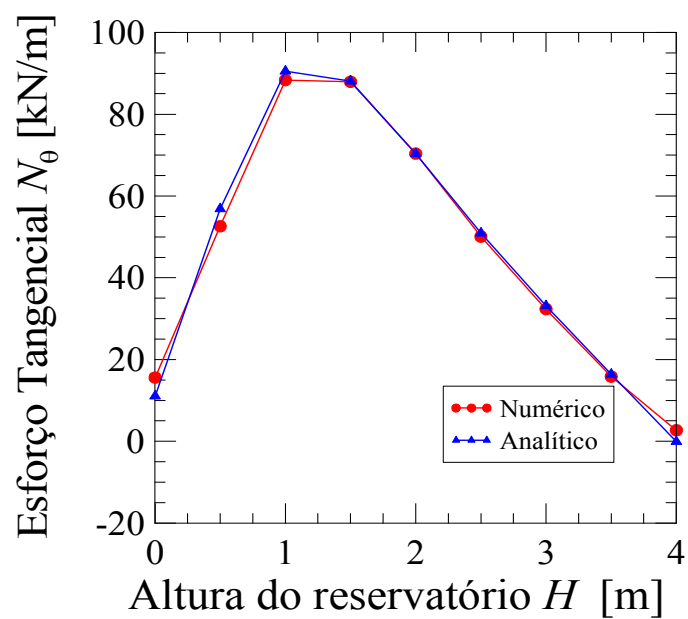


Figura 6.85 – Esforços tangenciais ( $N_\theta$ ) ao longo da parede do reservatório para o caso

IIA6

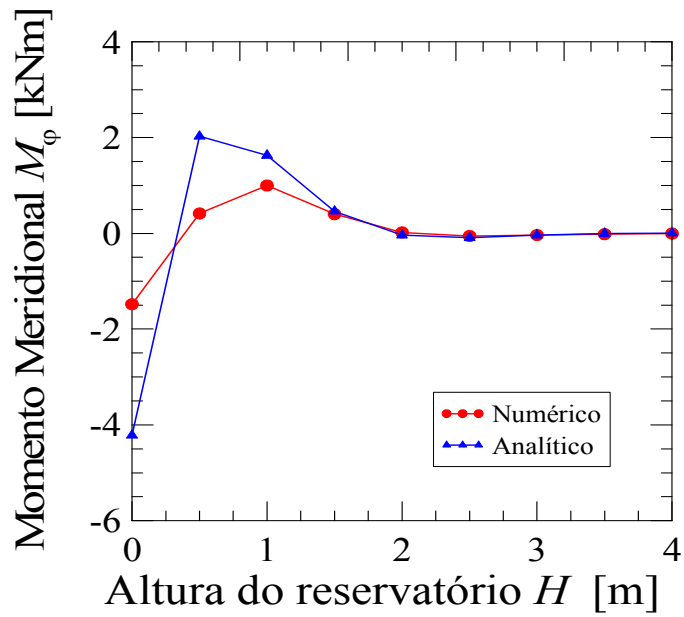


Figura 6.86 – Momento meridional ( $M_\phi$ ) ao longo da parede do reservatório para o caso

IIA6

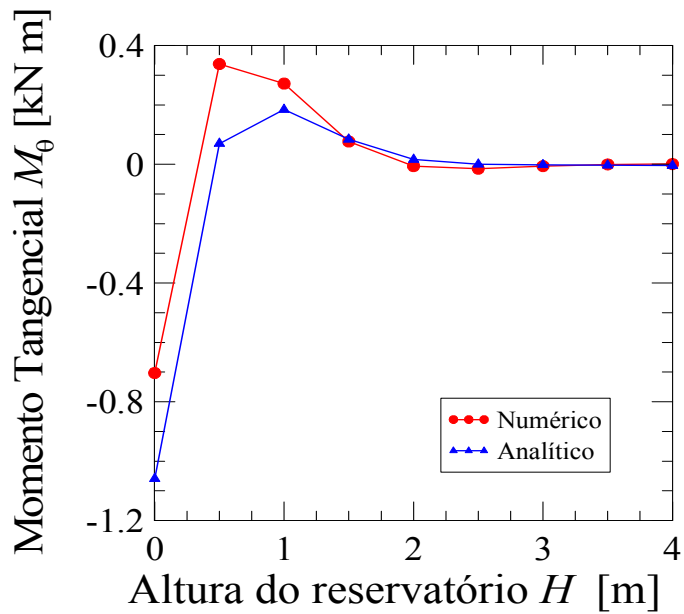


Figura 6.87 – Momento tangencial ( $M_\theta$ ) ao longo da parede do reservatório para o caso

IIA6

A seguir as Figura 6.88 a Figura 6.92 ilustram o degradê de cores gerados no programa ANSYS para o caso em estudo.

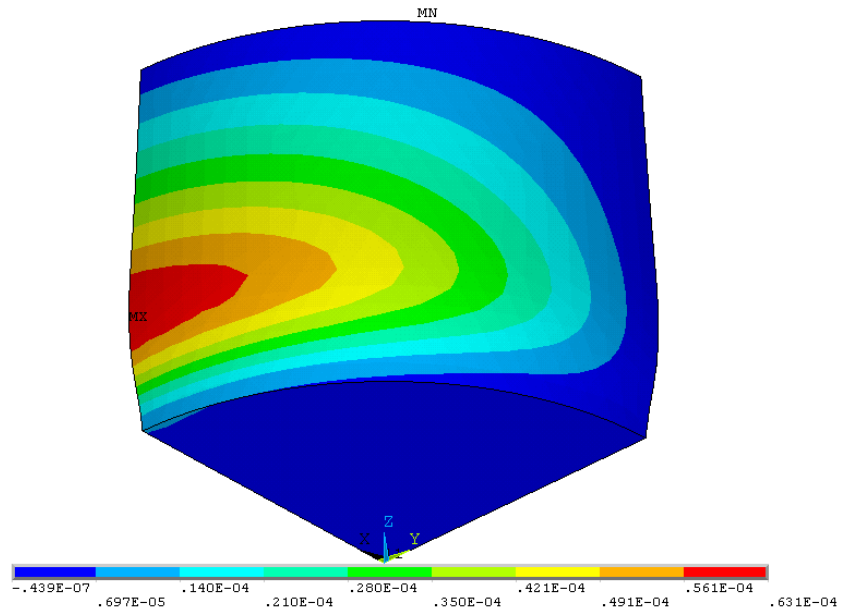


Figura 6.88 – Deslocamento radial ( $\Delta_r$ ) (programa ANSYS) para o caso IIA6

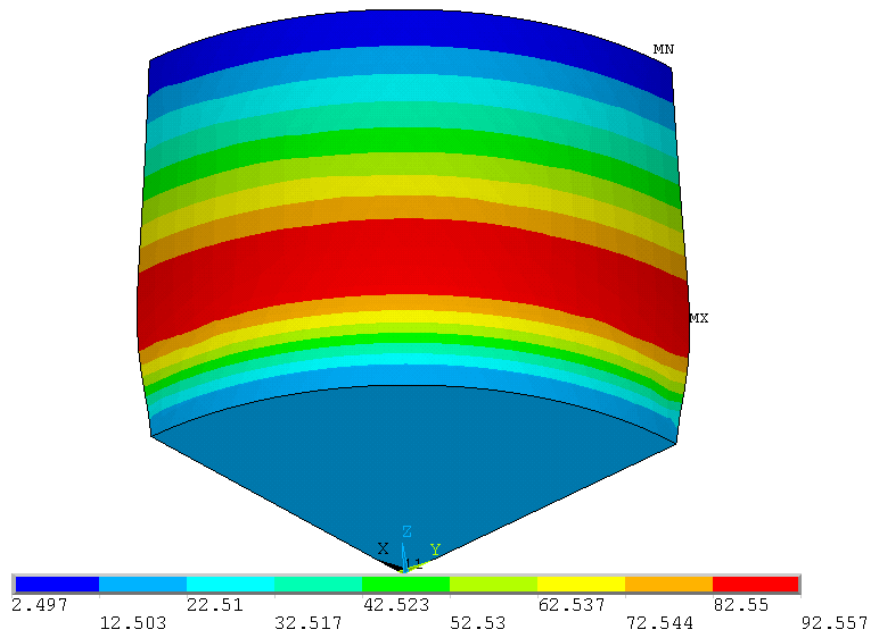


Figura 6.89 – Tensão tangencial ( $N_\theta$ ) (programa ANSYS) para o caso IIA6

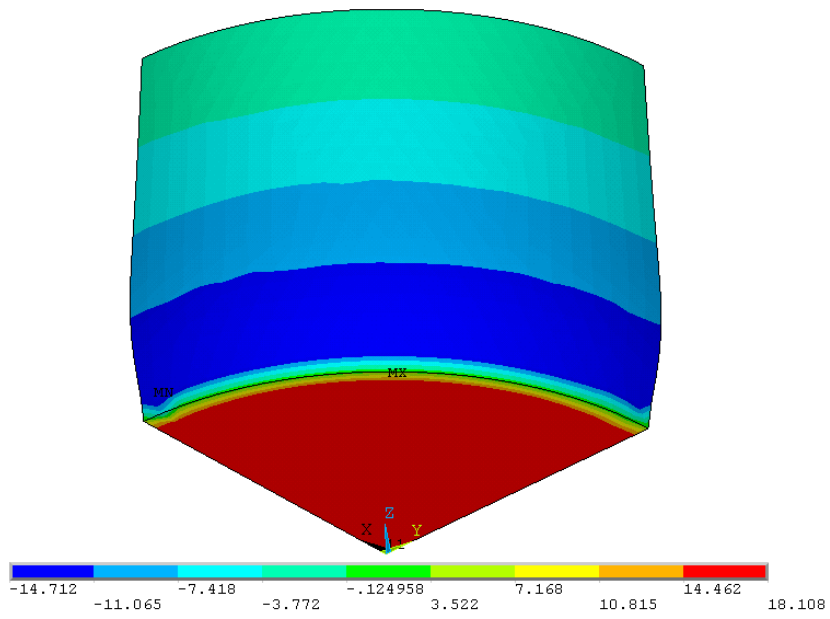


Figura 6.90 – Tensão meridional ( $N_\phi$ ) (programa ANSYS) para o caso IIA6

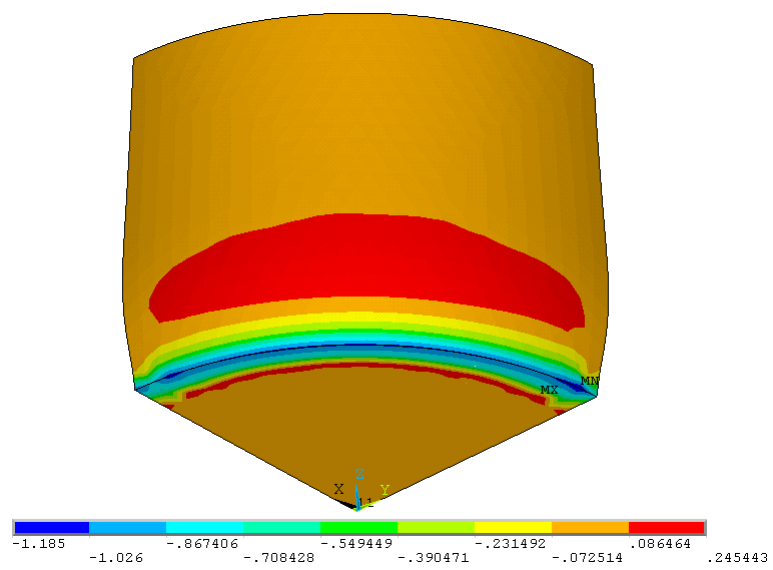


Figura 6.91 – Momento ( $M_\theta$ ) (programa ANSYS) para o caso IIA6

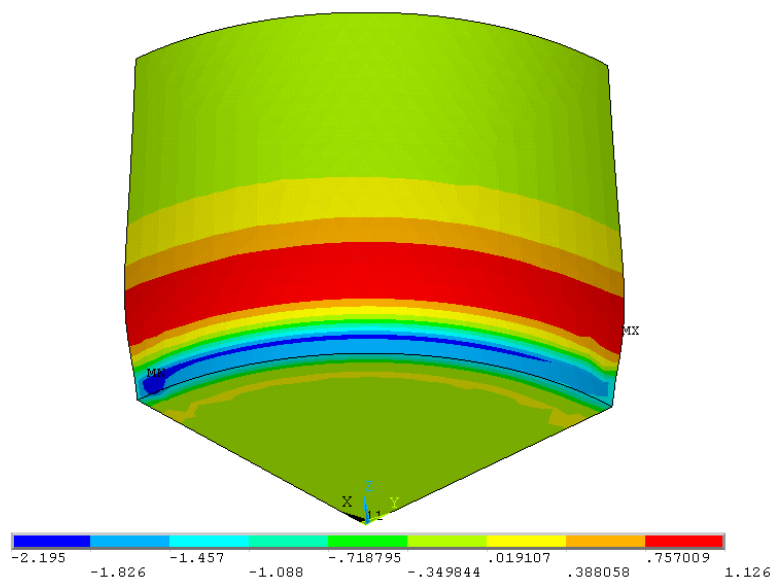


Figura 6.92 – Momento ( $M_{\varphi}$ ) (programa ANSYS) para o caso IIA6

Os esforços e deslocamentos analisados numericamente, de uma forma geral apresentaram um bom comportamento em relação aos resultados analíticos. Vale ressaltar que a região de ligação é uma região onde há grandes perturbações e estas somadas com o critério de escolha do nó para obtenção dos resultados na ligação pode explicar a discrepância de alguns resultados. O nó selecionado é um nó comum com a laje de fundo e a parede do reservatório, assim o calculo analítico foi considerado apenas para a parede, isso explica este comportamento para determinados valores de esforços e deslocamentos que apresentam pequenas discrepâncias de valores.

## **7 – CONCLUSÕES, SUGESTÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS**

Este capítulo destaca as principais conclusões, contribuições e sugestões futuras a respeito do tema.

### **7.1 – SÍNTESE DA DISSERTAÇÃO, CONCLUSÃO E CONTRIBUIÇÕES**

Foi desenvolvido neste trabalho um procedimento inicial para o estudo de cascas cilíndricas acopladas a placas a partir da teoria analítica clássica da literatura. Mostrou-se também a importância da existência de um método de cálculo analítico para estruturas acopladas, (casca cilíndrica-placa) baseado no método das forças, que proporcionou uma ferramenta importante de análise e previsão do comportamento das estruturas.

A partir das soluções analíticas independentes de casca cilíndrica, esféricas e placas utilizando-se o método das forças, foi possível obter o valor dos hiperestáticos necessários para resolução dos sistemas acoplados. Deste modo, como uma contribuição deste trabalho, têm-se as tabelas com expressões literais em função de parâmetros conhecidos que favorecem assim obtenção dos hiperestáticos envolvidos.

Para a simulação numérica foram vencidas diversas dificuldades relativas à modelização da geometria, vínculos e também as condições de simetria para que o modelo tivesse um comportamento adequado. O elemento SHELL63 da biblioteca do ANSYS foi validado com sucesso para o regime de membrana e flexional. Testes de convergência mostraram um bom desempenho deste elemento. Para compreensão dos resultados foi também desenvolvida uma metodologia de interpretação dos mesmos, facilitando a confiabilidade nos resultados gerados pelo programa ANSYS.

Foram também elaborados vários scripts para o programa ANSYS que facilitam a construção e aplicação das cargas nos modelos. (um exemplo simples é apresentado no APÊNDICE A2).

Observou-se nos estudos de casos realizados, a importância da consideração da ligação da parede do reservatório com a laje de fundo, e que elas influenciam os resultados finais de

esforços e deslocamento. Para esta verificação, na modelagem numérica do reservatório foram feitas diversas considerações no que diz respeito a rigidez e também condições de apoio, para que, assim a ligações desejadas fossem simuladas numericamente.

Por outro lado, em função das análises obtidas neste trabalho, através de uma comparação entre os resultados analíticos (construídos ou retirados da literatura) e numéricos, via MEF (programa ANSYS), uma serie de conclusões podem ser destacadas, a saber:

Os resultados analíticos e numéricos tiveram uma excelente correspondência entre si, e nos casos em que houve discrepâncias localizadas (zonas de perturbação das bordas, efeitos de influência dos vínculos nos modelos numéricos, carregamentos concentrados, descontinuidade do esforço cortante na conexão do apoio, etc.) a evolução de distribuição das grandezas analisadas seguiu as tendências previstas pelos modelos analíticos.

A representação de 1/4 da casca cilíndrica e a placa de fundo, com os respectivos vínculos nas seções de simetria, assim como os apoios representando as condições reais de suporte no modelo numérico elaborado permitiu, após alguns ajustes e testes, a obtenção de resultados confiáveis que reproduziram com precisão as condições determinadas pelos modelos analíticos.

O elemento finito SHELL63, teve um comportamento adequado na representação dos regimes flexional e de membrana, desde que o número de elementos adotados fosse suficiente dentro de um nível de convergência a priori testado com sucesso.

A correspondência entre os sistemas de representação das saídas das grandezas físicas de interesse no ANSYS, e nas formulações analíticas, representa um ponto crucial a ser controlado, uma vez que esta correspondência se da de forma complicada e não óbvia para a utilização de usuários iniciantes. Para superar esta problemática, tornou-se necessário a elaboração de uma metodologia adequada (“*mapping*”) entre as saídas do ANSYS e suas correspondências com os resultados analíticos.

Observou-se que as grandezas físicas dependentes de derivadas de ordem superior das deflexões, mostravam-se mais discrepante numericamente, a medida que o grau destas derivadas aumentava, aspecto já previsto pelo entendimento teórico da questão.

De forma geral os resultados isolados (para cada tipo de solicitação individual) para o regime de membrana, foram melhores do que aqueles do regime flexional. Neste último, havia a presença das perturbações das bordas, provocadas pelos esforços e as restrições vinculares.

Na análise das ações em regime de membrana, a solicitação de uma carga distribuída na borda superior, foi o caso em que houve uma maior dispersão dos resultados, exatamente nesta borda, devido ao efeito das cargas concentradas (Caso ID).

Os casos de cascas cilíndricas com carregamento hidrostático e pé-deslizante (condição prescrita para o regime de membrana – Caso IIA1) e o caso da casca engastada na borda inferior reproduziram perfeitamente os resultados analíticos e numéricos.

A introdução da placa de fundo flexível, mas com restrição ao giro na conexão parede-fundo (Caso IIA3) parece reduzir os esforços e deslocamentos nesta zona, em relação ao caso da placa com este giro permitido (Caso IIA4) ainda que se restrinja o deslocamento axial (neste último caso). Na verdade a placa com restrição axial ou não, tem resultados praticamente similares, já que por si só, uma placa circular solicitada axialmente no seu plano tem uma rigidez muito grande.

A presença da placa de fundo na modelização numérica, com rigidez infinita para simular o caso do engastamento perfeito, ou mesmo com rigidezes reais, introduz perturbações localizadas na zona de conexão (para determinados esforços), que provocam diferenças significativas nas amplitudes destas respostas (não na evolução do fenômeno), em relação as previsões analíticas. De qualquer forma como a casca cilíndrica é longa estas diferenças ficam confinadas a uma região limitada.

Foi observada também, que muito das discrepâncias mostradas nos gráficos, são conseqüências do processo de coleta dos resultados do ANSYS, e não resulta do fenômeno. Como a conexão entre a placa e a casca tem 20 cm de espessura, a zona de influência deste contato avança por uma largura maior do que aquela pontual onde os nós



estão conectados. Ao se fazer os cortes nas imagens 3D do programa ANSYS, corretamente, teria que se levar em consideração o gradiente de cores sugeridos pelas imagens, aspecto não efetuado nestes estudos.

## **7.2 - PERSPECTIVA**

São pesquisas futuras que podem ser feitas contribuindo para o avanço dos estudos iniciais feito neste trabalho:

- Variação da temperatura como carregamento aplicado na parede do reservatório e na laje de fundo;
- Análises numéricas utilizando outros elementos finitos;
- Estudo do efeito dinâmico aplicado no reservatório;
- Estudo do acoplamento do reservatório contendo além da laje de fundo acoplada, também uma cúpula esférica, anel de rigidez na borda superior;
- Dimensionamento e detalhamento da armadura do reservatório estudado;
- Comportamento estrutural do reservatório com o volume de líquido baixando ou aumentando;
- Análise não-linear do reservatório a partir de métodos numéricos;
- Análise do reservatório considerando enrijecedores e orifícios nos elementos.

## 8 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Concreto para fins estruturais - Classificação por grupos de resistência, NBR 8953, Rio de Janeiro, 1992.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto de estruturas de concreto - Procedimento, NBR 6118, Rio de Janeiro, 2003.

Azam, T., Colin, G. B. Instability of imperfect composite cylindrical shells under combined loading. *Composite Structures* 80 (2007) 49-64.

Baker, E. H., Kovalevsky, L.; Rish, F. L. (1972). *Structural Analysis of Shells*. California, United States, McGraw-Hill.

Billington, D. P. (1965). *Thin Shell Concrete Structures*. 1st.ed. Englewood Cliffs, United States (USA), McGraw-Hill.

Cengiz P., Yusuf C.. Nonlinear static and dynamic analysis of shells of revolution. *Mechanics Research Communications* 37 (2010) 205-209.

Flügge, W. (1962). *Stresses in Shells*. 4th.ed. New York: Springer-Verlag.

Gravina, P. B. J. (1957). *Teoria e Cálculo das Cascas: Cascas de Revolução*. 1.ed. São Paulo: Escolas Profissionais Salesianas.

Guimarães, A. E. P. (1995), *Indicações para projeto e execução de reservatórios cilíndricos em concreto armado*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

J., Arbocz. The effect of imperfect boundary conditions on the collapse behavior of anisotropic shells. *International Journal of Solids and structures* 37 (2000) 6891-6915.

Loula, A. F. D. (1973). Associação de cascas de revolução com carregamento axissimétrico. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Lam , K. Y., Loy , C. T. (1995). Effect of boundary conditions on frequencies of a multi-layered cylindrical shell. *Journal of Sound and Vibrations*, p. 363-384.

Jeong, K. H. and Lee, S. C. (1995). Fourier series expansion method for free vibration analysis of either a partially liquid-filled or a partially liquid-surrounded circular cylindrical. *Computers & Structures Vol. 58*, p. 937-946.

Paulo B. G., Frederico M. A. S., Zenón J. G. N. Del P. (2007). Global stability analysis of parametrically excited cylindrical shells through the evolution of basin boundaries. *Nonlinear Dyn*, Vol. 50, p. 121-145.

Pedroso, L. J. (1998). *Teoria de Placas e Cascas: uma abordagem analítica e numérica*. Brasília: Grupo de Dinâmica e de Fluido-estrutura.

Pedroso, L. J. (2009). *Manuscritos, esquemas e notas de sessões de orientação*. Brasília, UnB.

Pereira, A. J. do R. (1986). *Introdução ao Estudo das Cascas*. 1.ed. Recife: Universidade Federal de Pernambuco.

Santos, P. J. M.R. (2009). *Teoria Analítica de Cascas Delgadas e sua Aplicação a uma Cúpula Esférica de Concreto com Anel de Borda*. Monografia de Projeto final – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília.

Kumar, B. K. R. Mishra, S.C. Jain. (2008). Static and dynamic analysis of smart cylindrical shell. *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 45. p.13-24.

Renjie Mao., G. Lu. (2002). A study of elastic-plastic buckling of cylindrical shells under torsion. *Thin-Walled Structures*, Vol. 40. p. 1051-1071.

Rong-Tyai, W., Zung-Xian, L. (2006). Vibration analysis of ring-stiffened cross-ply laminated cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 295, p.964-987.

Szilard, R., (1973). *Theory and analysis of plates: classical and numerical methods* Prentice-Hall Englewood Cliffs,

Süssekind, J. C. (1973). *Curso de Análise Estrutural: Deformações em estruturas. Método das forças*. 11.ed. v.2. Rio de Janeiro: Editora Globo S.A.

Tatiana Vodenitcharova, P. A. (1996). Buckling of circular cylindrical shells subject to uniform lateral pressure. *Engineering Structures*, Vol. 18, p. 604-614.

Timoshenko, S., Woinowsky-krieger, S. (1959). *Theory of plates and shells*. 2.nd. United States, McGraw-Hill.

Venturini, W. S. (1977). *Contribuição ao dimensionamento de reservatórios cilíndricos protendidos*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

## **APÊNDICES**

# APÊNDICE A1 – SCRIPT UTILIZADO PARA GERAÇÃO DA PAREDE CILÍNDRICA DE UM RESERVATÓRIO EM REGIME DE MEMBRANA COM CARREGAMENTO HIDROSTÁTICO APLICADO

```
FINISH
/CLEAR
/BATCH
/TITLE, RESERVATORIO CILINDRICO RAI0 5 ALTURA 10 ESPESSURA 0.3
/input,menust,tmp, ",,,,,,,,,,,,,1
/GRA,POWER
/GST,ON
/PLO,INFO,3
/GRO,CURL,ON
/CPLANE,1
/REPLOT,RESIZE
WPSTYLE,,,,,,,,,0
/NOPR
/PMETH,OFF,0
!ESCOLHA DO TIPO DE ANALISE
KEYW,PR_SET,1
KEYW,PR_STRUC,1 !Tipo de analise estrutural
KEYW,PR_THERM,0
KEYW,PR_FLUID,0
KEYW,PR_ELMAG,0
KEYW,MAGNOD,0
KEYW,MAGEDG,0
KEYW,MAGHFE,0
KEYW,MAGELC,0
KEYW,PR_MULTI,0
KEYW,PR_CFD,0
/PREP7
```

## !ESCOLHA DO ELEMENTO

ET,1,SHELL63 !criação do tipo de elemento

R,1,0.20, , , , , !constante real shell63

RMORE, , , ,

RMORE

RMORE, ,

/REPLOT,RESIZE

MPTEMP,,,,,,,,

MPTEMP,1,0

MPDATA,EX,1,,3.45\*1000000 !propriedades do material 1

MPDATA,PRXY,1,,0.16666667

CSYS,1 !MUDANÇA PARA COORDENADAS CILINDRICAS

## !CRIANDO OS KEYPOINTS

K,1,5,0,,

K,2,5,45,,

K,3,5,90,,

## !COPIANDO OS KEYPOINTS

FLST,3,8,3,ORDE,2

FITEM,3,1

FITEM,3,-8

KGEN,5,P51X, , , , 2.5,3,0 ! COPIANDO OS 3 KP E TRANSLADANDO DE 2.5

/USER, 1

## !CRIANDO AS AREAS

A,2,3,6,5

A,5,6,9,8

A,8,9,12,11

A,11,12,15,14

A,1,2,5,4

A,4,5,8,7

A,7,8,11,10

A,10,11,14,13

## !APLICACAO DA CONDICAO DE CONTORNO

FLST,2,4,4,ORDE,4

FITEM,2,2

```

FITEM,2,5
FITEM,2,8
FITEM,2,11
/GO
DL,P51X, ,UX,
FLST,2,4,4,ORDE,4
FITEM,2,16
FITEM,2,18
FITEM,2,20
FITEM,2,22
/GO
DL,P51X, ,UY,
FLST,2,2,4,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,14
/GO
DL,P51X, ,UZ,
!GERANDO A MALHA
CSWPLA,11,0,1,1,!Mundando as coordenadas de sistema local para aplicar na malha
TYPE, 1
MAT, 1
REAL, 1
ESYS, 11
SECNUM,
!Gerando a malha
SMRT,1 !Definição do nivel da malha neste caso é o 1
MSHAPE,1,2D
MSHKEY,0
FLST,5,8,5,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,-8
CM,_Y,AREA
ASEL, , , ,P51X
CM,_Y1,AREA

```



```

CHKMSH,'AREA'
CMSEL,S,_Y
AMESH,_Y1
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CMDELE,_Y2
!APLICANDO CARREGAMENTO
/PREP7
ACEL,0,0,10,
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,,2.5
SFGRAD,PRES,11,Z,0,-10, !CONFIGURANDO O GRADIENTE DE PRESSAO
FLST,2,8,5,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-8
/GO
SFA,P51X,1,PRES,100 !VALOR DA PRESSAO NO FINAL 100
!RESOLUCAO DO MODELO
FINISH
/SOL
/STATUS,SOLU
SOLVE

```

## APÊNDICE A2 – SCRIPT PARA O MAPLE UTILIZADO PARA ANÁLISE RESERVATÓRIO CONSIDERANDO A PAREDE ENGASTADA SOB AÇÃO DO CARREGAMENTO HIDROSTÁTICO

restart: with(linalg): with(plots):

PROPIEDADES GEOMETRICAS E FÍSICAS

H:=10;r:=5.0;E:=3.45E7;gamaconcreto:=25;hw:=0.15;gama:=10;ni:=1/6;

10  
5.0  
7  
3.45 10  
25  
0.15  
10  
1  
-  
6

PARA TER RESULTADOS PONTUAIS EM CADA TRECHO DA CASCA INSERIR O VALOR DE "y" PARA O PONTO ESCOLHIDO, CASO QUEIRAMOS PLOTAR GRÁFICOS DEVE-SE COLOR O "#" NA FRENTE DE "y".

#y:=0;

DD:=(E\*hw^3)/(12\*(1-ni^2));

beta:=evalf(((E\*hw)/(4\*DD\*r^2))^(1/4));

By:=beta\*y;

1.509006352 y

CONSTANTES fi, psi, teta, csi

Fi:=exp(-By)\*(cos(By)+sin(By));

psi:=exp(-By)\*(cos(By)-sin(By));

teta:=exp(-By)\*cos(By);

csi:=exp(-By)\*sin(By);

## DEFLEXÃO

$$W:=(-1/(2*\beta^3*DD))*(\beta*X2*\psi+X1*\eta);$$

### 1ª DERIVADA DE W (DW)

$$DW:=(1/(2*\beta^2*DD))*(2*\beta*X2*\eta+X1*Fi);$$

### 2ª DERIVADA DE W (DDW)

$$DDW:=(-1/(2*\beta*DD))*(2*\beta*X2*\eta+2*X1*csi);$$

### 3ª DERIVADA DE W (DDDW)

$$DDDW:=(1/DD)*(2*\beta*X2*csi-X1*\psi);$$

## SISTEMA GERAL DE EQUAÇÕES CONSIDERANDO ENGASTE PERFEITO

### Coeficientes estado de membrana

$$w\delta_{10}:=(\gamma*r^2)/(E*hw)*(H-y);$$

$$w\delta_{20}:=(\gamma*r^2)/(E*hw);$$

### Coeficientes estado flexional

$$w\delta_{11}:=(1/(2*\beta^3*DD));$$

$$w\delta_{21}:=(1/(2*\beta^2*DD));$$

$$w\delta_{12}:=(1/(2*\beta^2*DD));$$

$$w\delta_{22}:=(1/(\beta*DD));$$

### Calculo dos hiperestáticos

$$\text{Sistema}:=\{w\delta_{10}+w\delta_{11}*X1+w\delta_{12}*X2=0,w\delta_{20}+w\delta_{21}*X1+w\delta_{22}*X2=0\};$$

### Solução do sistema

$$\text{Solução}:=\text{solve}(\text{Sistema},\{X1,X2\});$$

$$X1:=-64.07299817;$$

$$X2:=20.50263834;$$

Deslocamento radial é dado pela solução de membrana e o regime flexional para o conjunto completo, logo temos:

$$\Delta r = W - w_{\Delta 10};$$

Rotação é dado pela solução de membrana somando-se a flexional para o conjunto completo, logo temos:

$$\theta = DW + w_{\Delta 20};$$

Esforço tangencial

$$N_{\theta} = \frac{E h w}{r} \Delta r;$$

Momento meridional

$$M_y = -D \Delta^2 W;$$

Momento tangencial

$$M_{\theta} = n_i M_y;$$

Esforço cortante na casca

$$Q_y = -D \Delta^3 W;$$

## **ANEXOS**

## ANEXO A – CLASSIFICAÇÃO DA CURVATURA GAUSSIANA EM CASCAS

### A.1 – CLASSIFICAÇÃO DAS SUPERFÍCIES DE CASCAS

As cascas podem ser classificadas levando em conta a curvatura gaussiana onde seu valor é dado por:

$$K_G = \frac{1}{r_\phi r_\theta} \quad (\text{A.1})$$

Onde,

$K_G$  é a curvatura de Gauss.

$r_\phi$  e  $r_\theta$  são os raios de curvatura principais.

De acordo com os valores obtidos a partir da Equação (A.1) podemos classificar as superfícies conforme a seguir:

Valor positivo de  $K_G$  a superfície chama-se sinclástica;

Valor negativo de  $K_G$  a superfície chama-se anticlástica;

Valor nulo de  $K_G$  a superfície chama-se desenvolvível.

A Figura A.1 a seguir mostra alguns tipos de superfícies em função da curvatura gaussiana.

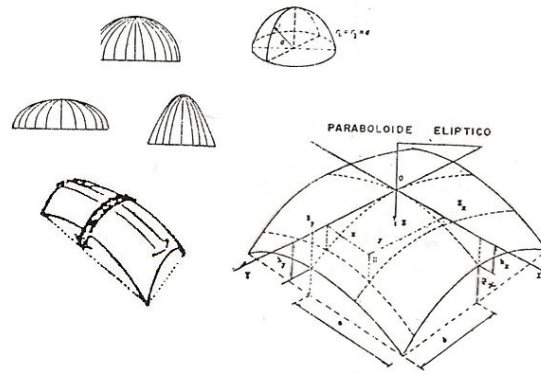


Figura A.1 – Figuras com curvatura Gaussiana positiva (Pedroso, 1998)

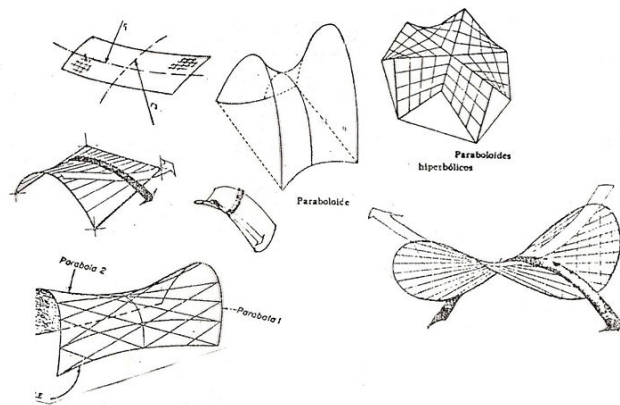


Figura A.2 – Figuras com curvatura Gaussiana negativa (Pedroso, 1998)

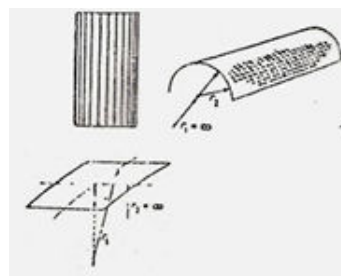


Figura A.3 – Figuras com curvatura Gaussiana nula (Pedroso, 1998)

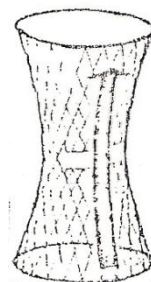


Figura A.4 – Figuras com curvatura Gaussiana no setor superior negativa e o setor inferior positiva (Pedroso, 1998)

## **ANEXO B – UM BREVE DESENVOLVIMENTO DA TEORIA DE PLACAS**

### **B.1 – CLASSIFICAÇÃO DAS SUPERFÍCIES DE CASCAS**

A teoria de placas é de fundamental importância também para análise de um dos elementos que compõem o reservatório. A laje de fundo do reservatório é composta por uma placa circular.

A placa circular que funciona como laje de fundo está submetida a dois carregamentos são eles: a pressão da água que atua como carregamento distribuído e os esforços na direção tangente a superfície que atua na borda.

A atuação dos diferentes carregamentos faz com que a laje de fundo do reservatório comporte-se em determinados momentos como placa e em outro como chapa. Este motivo deve-se ao fato de que quando um carregamento atua perpendicular a área de superfície temos uma chapa e quando este carregamento está atuando perpendicular a superfície média temos a placa.

Além do carregamento também é importante observar dois comportamentos os quais a laje circular permanece apoiada, são as condições de contorno as quais a laje fica sujeita. A abordagem dada trata de duas condições específicas, são elas: simplesmente apoiada e engastada.

Para obtermos os esforços e deslocamentos de placa e chapa da estrutura de fundo do reservatório, a seguir um desenvolvimento baseado em Szillard (1973).

As equações diferenciais de placas circulares são tratadas em coordenadas polares, a convenção de sinais é estabelecida na Figura B.1.



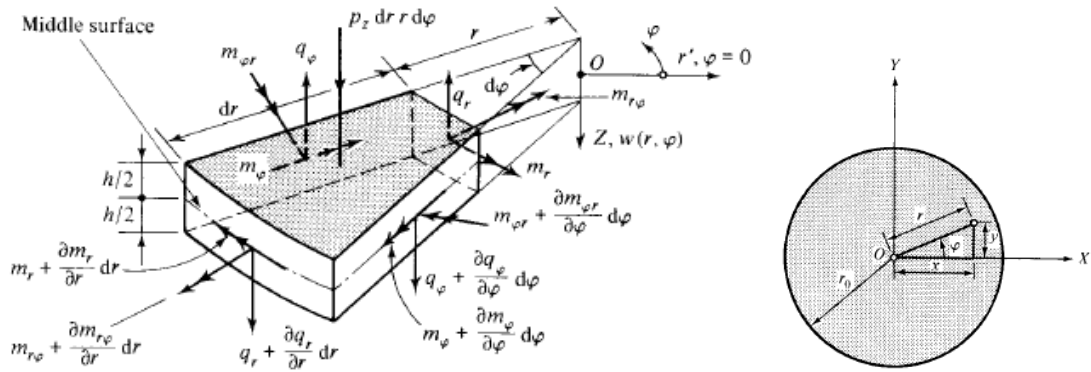


Figura B.1 – Equilíbrio de esforços em um elemento de placa circular – Szillard, 1973

A coordenadas cartesianas passam a serem tratadas de forma polares e ficam da seguinte forma:

$$x = r \cos \varphi \therefore \frac{x}{r} = \cos \varphi \quad (\text{B.1})$$

$$y = r \sin \varphi \therefore \frac{y}{r} = \sin \varphi \quad (\text{B.2})$$

Observando a Figura B.1 obtemos:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{B.3})$$

$$\varphi = \text{tg}^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \quad (\text{B.4})$$

Logo a deflexão por ser representada em função dos parâmetros  $\omega(r, \varphi)$ .

Deste modo aplicando a regra da cadeia para derivar  $\omega(r, \varphi)$  em relação ao  $x$  obtemos:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{B.5})$$

Derivando  $\frac{\partial r}{\partial x}$ , onde  $r$  pode ser obtido em B.3, temos:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right) \\
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} (2x) \\
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} \\
\frac{\partial r}{\partial x} &= \cos \varphi
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Derivando  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ , onde  $\varphi$  pode ser obtido em B.4, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \right) \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \left( \frac{y}{x} \right)^2} \left( -\frac{y}{x^2} \right) \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{1}{x^2 + y^2} \frac{y}{x^2} \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{y}{x^2} \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2 + y^2} \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{y}{r^2} \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{1}{r} \frac{y}{r} \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{1}{r} \operatorname{sen} \varphi
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Substituindo  $\frac{\partial r}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  na Equação (B.5) obtemos:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \quad (\text{B.8})$$

A partir da Equação (B.8) obtemos a segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( \cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = & \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left( \cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \\ & - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( -\frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Considerando

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi \partial r} \quad (\text{B.12})$$

Fazendo a consideração da Equação (B.12) e substituindo em (B.11) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = & \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} - \sin \varphi \cos \varphi \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \left( -\frac{1}{r^2} \right) \right) - \frac{1}{r} \sin \varphi \left( \cos \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial \omega}{\partial r} (-\sin \varphi) \right) \\ & + \frac{1}{r^2} \sin \varphi \left( \sin \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi}$$

$$+\frac{1}{r}\text{sen}^2\varphi\frac{\partial\omega}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\text{sen}^2\varphi\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2}\text{sen}\varphi\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} &= \cos^2\varphi\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\text{sen}^2\varphi\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\text{sen}^2\varphi\frac{\partial\omega}{\partial r}-\frac{1}{r}(2\text{sen}\varphi\cos\varphi)\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial\varphi} \\ &+ \frac{1}{r^2}(2\text{sen}\varphi\cos\varphi)\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Aplicando a trigonometria:

$$\text{sen}2\varphi=2\text{sen}\varphi\cos\varphi \quad (\text{B.16})$$

Substituindo a Equação (B.16) em (B.15) obtemos:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\cos^2\varphi\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\text{sen}^2\varphi\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\text{sen}^2\varphi\frac{\partial\omega}{\partial r}-\frac{1}{r}\text{sen}2\varphi\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\text{sen}2\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} \quad (\text{B.17})$$

Deste modo aplicando a regra da cadeia para derivar  $\omega(r,\varphi)$  em relação a  $y$  obtemos:

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad (\text{B.18})$$

Derivando  $\frac{\partial r}{\partial y}$ , onde  $r$  pode ser obtido em B.3, temos:

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left((x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(2y)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \text{sen } \varphi \tag{B.19}$$

Derivando  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ , onde  $\varphi$  pode ser obtido em B.4, temos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \text{tg}^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left( \frac{y}{x} \right)^2} \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{r^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{r} \cos \varphi \tag{B.20}$$

Substituindo  $\frac{\partial r}{\partial y}$  e  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$  na Equação (B.18) obtemos:

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \text{sen } \varphi \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \tag{B.21}$$

A partir da Equação (B.21) obtemos a segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \text{sen } \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left( \text{sen } \varphi \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \text{sen } \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \text{sen } \varphi \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \\ + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \text{sen}^2 \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \text{sen } \varphi \cos \varphi \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \left( -\frac{1}{r^2} \right) \right) + \frac{1}{r} \cos \varphi \left( \text{sen } \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \cos \varphi \right) \\ + \frac{1}{r^2} \cos \varphi \left( \cos \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 \varphi} + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} (-\text{sen } \varphi) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \text{sen}^2 \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \text{sen } \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \text{sen } \varphi \cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \text{sen } \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} \\ + \frac{1}{r} \cos^2 \varphi \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 \varphi} - \frac{1}{r^2} \text{sen } \varphi \cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \text{sen}^2 \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 \varphi} + \frac{1}{r} \cos^2 \varphi \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} (2 \text{sen } \varphi \cos \varphi) \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} \\ - \frac{1}{r^2} (2 \text{sen } \varphi \cos \varphi) \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \text{sen}^2 \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 \varphi} + \frac{1}{r} \cos^2 \varphi \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \text{sen } 2\varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \text{sen } 2\varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \quad (\text{B.25})$$

Considerando

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \quad (\text{B.26})$$

Fazendo a consideração da Equação (B.26) e substituindo em (B.25) temos:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \text{sen } \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( \text{sen } \varphi \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left( \text{sen } \varphi \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{r} \text{sen } \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \text{sen } \varphi \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)$$

$$-\frac{1}{r} \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = & \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \cos^2 \varphi \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \left( -\frac{1}{r^2} \right) \right) - \frac{1}{r} \operatorname{sen} \varphi \left( \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \cos \varphi \right) \\ & - \frac{1}{r^2} \operatorname{sen} \varphi \left( \cos \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} (-\operatorname{sen} \varphi) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = & \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \cos^2 \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \operatorname{sen}^2 \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial r} \\ & - \frac{1}{r^2} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \operatorname{sen}^2 \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = & \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} (\cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi) \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} \\ & - \frac{1}{r} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} (\cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi) \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Aplicando seguintes relações de trigonometria:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\varphi &= 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi \\ \cos 2\varphi &= \cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Substituindo as Equações trigonométricas de (B.32) em (B.31) obtemos:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \cos 2\varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} - \frac{1}{2r^2} \operatorname{sen} 2\varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{2r} \operatorname{sen} 2\varphi \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos 2\varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} \quad (\text{B.33})$$

Aplicando o operador de Laplace:

$$\nabla_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{B.34})$$

$$\begin{aligned} \nabla_r^2 = & \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \sin^2 \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin 2\varphi \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \sin 2\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} \\ & + \frac{1}{r^2} \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cos^2 \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \sin 2\varphi \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \sin 2\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

$$\nabla_r^2 = (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \frac{\partial}{\partial r} \quad (\text{B.36})$$

$$\nabla_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (\text{B.37})$$

Sabendo que:

$$\begin{aligned} \nabla_r^2 \nabla_r^2 \omega &= \frac{p(r, \varphi)}{D} \\ \nabla_r^4 \omega &= \frac{p(r, \varphi)}{D} \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

A partir da equações desenvolvidas anteriormente obtemos os seguintes esforços:

$$m_r = -D \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \right] \quad (\text{B.39})$$

$$m_\varphi = -D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} \right) \quad (\text{B.40})$$

$$m_{r\varphi} = m_{\varphi r} = -(1-\nu)D \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) = -(1-\nu)D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{B.41})$$



$$q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla_r^2 \omega \quad (\text{B.42})$$

$$q_\varphi = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla_r^2 \omega \quad (\text{B.43})$$

$$v_r = q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial m_{r\varphi}}{\partial \varphi} = -D \left[ \frac{\partial}{\partial r} \nabla_r^2 \omega + \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) \right] \quad (\text{B.44})$$

$$v_\varphi = q_\varphi + \frac{\partial m_{\varphi r}}{\partial r} = -D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla_r^2 \omega + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) \right] \quad (\text{B.45})$$