Marcos Thiago de Araújo Marcolino

Liquidez e Precificação de Ativos

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Economia da Universidade de Brasília como requisito à obtenção do título de Mestre em Ciências Econômicas.

Orientador: Joaquim Pinto de Andrade

Julho de 2011

Marcos Thiago de Araújo Marcolino

Liquidez e Precificação de Ativos

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Economia da Universidade de Brasília como requisito à obtenção do título de Mestre em Ciências Econômicas.

Banca Examinadora

Professor Joaquim Pinto de Andrade (orientador)

Professor Roberto Ellery Jr.

Professor José Ângelo Divino

Julho de 2011

Epígrafe

"A mente que se abre a uma nova idéia jamais voltará ao seu tamanho original"

Albert Einstein

Dedicatória

Aos meus amigos e à minha família, em especial, ao meu pai

Osvaldino José Marcolino, *in memorian*

Agradecimentos

Essa imensa tarefa, que por diversas vezes parecia inatingível, não seria possível sem a ajuda e apoio de diversas pessoas. Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para que ela se tornasse possível.

Primeiramente, à minha mãe, Vera, à minha irmã, Luciana e ao meu padrasto, Elias, que sempre me deram o apoio necessário durante todo o mestrado.

Ao professor Joaquim Andrade, pelos ensinamentos, dedicação e paciência durante a formulação deste trabalho, tornando-o possível. Ao professor Roberto Ellery, pelas críticas e discussões fundamentais para o estudo, e ao professor José Divino, pelas suas críticas à versão anterior.

À Daniela Viana Costa, minha eterna e amada companheira.

Agradeço também a todos os meus amigos, em especial aos do mestrado que me proporcionaram momentos de grande sabedoria e tornaram essa longa jornada mais prazerosa. Em especial, agradeço a Anderson Mutter, Daniela Costa, Guilherme Resende, Henrique Guelber, Iona Stevens, Luís Fernando, Mariana Fialho, Raquel Araújo e Vinícius Brandi.

Resumo

Este estudo realiza duas extensões analíticas do modelo de Kiyotaki e Moore (2008). Analisa-se o *equity premium* baseado no diferencial de liquidez entre ativos e títulos e deriva-se uma regra ótima de oferta de liquidez. O modelo não se mostrou capaz de resolver quantitativamente o *equity premium puzzle*. A oferta ótima de liquidez permite que a economia atinja níveis de *first-best* mesmo num contexto de restrição de liquidez e a dinâmica das variáveis se torna semelhante a do modelo de ciclos reais.

Palavras-chave: fricção financeira, liquidez, *equity premium* e taxa de juros.

Classificação JEL: E32, E44, G12

Abstract

This work derives two analytical extensions to the Kiyotaki and Moore (2008) model. It analyzes the equity premium based on the liquidity aspects of assets and bonds and it creates an optimal rule for the supply of liquidity. The model is not capable of solving quantitatively the equity premium puzzle. The optimal supply of liquidity makes the economy reach first-best results even in a context of liquidity frictions and the variables dynamics become similar to real business cycle models.

Keywords: financial frictions, liquidity, equity premium and interest rate.

JEL Classification: E32, E44, G12

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 Introdução

Este trabalho analisa as consequências da existência de fricções financeiras num *framework* de ciclos reais. A análise se baseia no modelo de Kiyotaki e Moore (2008)[1] que introduz restrições de investimento e de liquidez na economia. Este trabalho se propõe a realizar duas extensões analíticas ao modelo de KM e, para tanto, modifica-se o modelo original ao introduzir títulos públicos no lugar da moeda fiduciária. A primeira extensão pretende analisar o *equity premium*, espelcialmente o papel da liquidez. A segunda extensão determina uma regra ótima para a oferta de títulos, permitindo que a quantidade de liquidez existente na economia sobreponha as restrições, de tal forma que a economia opere eficientemente[2].

A abordagem do *equity premium* deste trabalho se relaciona com outros estudos que o analisam através dos diferenciais de liquidez existente entre ativos e títulos. Bansal e Coleman (1996) incorporam custos de transação dos ativos da economia, obtendo como resultado que os ativos com menores custos de transação são mais líquidos. Krishnamurthy e Vissing-Jorgensen (2010) argumentam que os títulos de curto prazo possuem como características básicas a plena liquidez, semelhante à moeda[3], e a segurança de um rendimento nominal[4]. Tais características ajudariam a explicar o baixo rendimento dos títulos comparado a outros ativos financeiros. Finalmente, os autores afirmam que a taxa de juros dos títulos não são a medida apropriada da remuneração de um ativo sem risco, pois os títulos também provêem o serviço de liquidez. Esta dissertação aborda essa questão ao explicitar no cálculo do *equity premium* um termo adicional relativo à (i)liquidez parcial dos ativos.

A segunda extensão determina uma regra ótima para a oferta de liquidez derivada como uma extensão à fronteira proposta por Bigio (2010). Tal regra permite que a economia atinja um nível eficiente em todos os períodos semelhante ao modelo de ciclos reais mesmo com a existência de fricções. Analisa-se o modelo sob condições distintas de oferta de liquidez, uma em que a quantidade de liquidez disponível é insuficiente e as restrições limitam o investimento e outra em que a oferta é ótima e a economia opera de forma eficiente. A comparação entre as duas situações demonstra como as restrições se propagam no modelo.

Este estudo se relaciona com uma série de outros que se baseiam no *framework* de KM e propõem realizar tanto simplificações quanto extensões ao modelo original com o objetivo de obter novas análises.

[1] Este trabalho será referenciado como KM no restante da dissertação.

[2] Define-se, neste trabalho, que a economia está num nível eficiente quando $q_t = 1$, em que q_t representa o q-Tobin.

[3] Apesar da plena liquidez, os títulos não possuem a característica de meio de troca.

[4] Krishnamurthy e Vissing-Jorgensen (2010) analisam o caso dos títulos de curto prazo americanos. Estas características podem não ser apropriadas para os títulos brasileiros.

Bigio (2010) simplifica o modelo original, permitindo que a única forma de levar riqueza para os períodos posteriores é através dos ativos apenas parcialmente líquidos. Em especial, o trabalho se propõe a analisar como choques temporários negativos de liquidez afetam a economia. O trabalho conclui que esses choques não são capazes de explicar longas e profundas recessões e que é necessário algum outro mecanismo de transmissão para analisar os fenômenos típicos de crises financeiras. Tal conclusão também é obtida por Del Negro et al. (2010). Este trabalho faz uma análise quantitativa da política monetária não-padrão realizada pelo *Federal Reserve* durante a atual crise[5]. Os autores afirmam que a política monetária do *Federal Reserve* evitou que a crise fosse mais intensa. Nezafat e Slavík (2009) simplificam o modelo de KM e consideram que as fricções financeiras se propagam na economia somente através da restrição ao investimento. Apesar de simplificado, os autores afirmam que a fricção considerada é capaz de explicar parte da volatilidade dos preços dos ativos nos Estados Unidos. Perez (2010) analisa como diferentes níveis da razão dívida/PIB afetam a dinâmica da economia em que, como neste trabalho, os títulos são os ativos líquidos. Salas (2009) compara os efeitos dos choques temporário e permanente de liquidez. O resultado é que apenas um choque permanente de liquidez é capaz de explicar os fenômenos financeiros recentes, em especial, o vôo para a liquidez. Assim, as conclusões dos trabalhos de Bigio e Salas se complementam para a análise da crise atual.

Este trabalho possui 5 capítulos. Além deste capítulo introdutório, o capítulo 2 apresenta o modelo com a incorporação de títulos ao invés de moeda. O capítulo 3 apresenta as extensões analíticas prospostas. Neste capítulo discute-se o *equity premium* e como o modelo modifica sua análise. Ainda no capítulo 3, deriva-se a oferta ótima de liquidez e seus efeitos sobre o modelo. O capítulo 4 discute os resultados da simulação do modelo sob condições distintas de liquidez. Consideram-se o caso em que há uma quantidade insuficiente de liquidez e o caso com uma oferta ótima. O capítulo 5 conclui o trabalho. Além destes capítulos, há um apêndice com as derivações matemáticas, as funções de impulso-resposta, o código para simulação utilizado, além de uma analogia entre os resultados encontrados pela oferta ótima de liquidez deste trabalho e o resultado que seria encontrado em KM.

[5] A política monetária padrão de *open-market* opera através da troca entre moeda e títulos. A política não-padrão opera através da troca entre moeda e ativos.

2 Modelo

Considere uma economia com um contínuo de empreendedores que consomem, mas não ofertam trabalho, cuja função-objetivo é dada por:

$$Max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(c_t) \tag{1}$$

em que $0 < \beta < 1$ é o fator de desconto intertemporal e c_t é o consumo dos empreendedores. Os empreendedores produzem um bem homogêneo num mercado em concorrência perfeita utilizando a mesma função de produção:

$$y_t = A_t k_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha} \tag{2}$$

em que k_t é a quantidade de capital possuída pelo empreendedor no início do período, l_t a quantidade de trabalho empregada para a produção e $A_t > 0$ um parâmetro de produtividade comum a todos os empreendedores.

Em todo período t, apenas uma parcela π dos empreendedores possui acesso a novos empreendimentos lucrativos. Assume-se para tanto que a chegada de novos projetos são idêntica e independentemente distribuídos (iid) através do tempo e entre os empreendedores. Assim, a acumulação de capital para o empreendedor possui a seguinte lei de movimento:

$$k_{t+1} = \begin{cases} (1-\delta)\,k_t + i_t \text{ , } com\ prob.\ \pi \\ (1-\delta)\,k_t \text{ , } com\ prob.\ 1-\pi \end{cases} \tag{3}$$

em que δ é a taxa de depreciação do capital e i_t representa o investimento que é realizado a partir de uma unidade do bem homogêneo. Além da rigidez proposta, considera-se que os empreendedores se deparam com uma rigidez nominal. Apenas uma parcela $0 < \theta < 1$ do novo investimento pode ser financiado através da venda de ativos para outros empreendedores, chamado de financiamento externo. O restante do investimento, $1 - \theta$, deve ser financiado internamente pelo próprio empreendedor com oportunidade de investimento. Este financiamento interno representa o *downpayment* necessário para a realização do investimento, em que o empreendedor indica a viabilidade deste novo empreendimento[6].

Os empreendedores podem possuir dois tipos de ativos: capital físico (ativo interno) e ativos de outras empresas (ativo externo). Define-se como k_t o capital do empreendedor no período t; e_t a

[6] Para uma racionalidade desta restrição, ver Hart e Moore (1994).

quantidade de ativos relativo ao capital de outros empreendedores possuída pelo empreendedor em questão e s_t a quantidade de ativos vendidos do capital próprio. Assim, o empreendedor é dono de uma quantidade líquida de ativos $n_t = k_t - s_t + e_t$. Tanto k_t quanto e_t depreciam à taxa δ e podem ser transacionados ao preço q_t.

Além dos ativos, os empreendedores podem demandar títulos. Outra hipótese do modelo é que os empreendedores não conseguem vender todos os ativos imediatamente, diferentemente dos títulos. Apenas uma parcela ϕ_t dos ativos podem ser vendidos no período enquanto todos os títulos podem ser liquidados, ou seja, os títulos são plenamente líquidos e os ativos são apenas parcialmente líquidos, sendo que esta liquidez é determinada por um parâmetro exógeno ao modelo[7].

A quantidade líquida de ativos do próximo período para o empreendedor é dada por:

$$n_{t+1} \geq (1-\theta)\, i_t + (1-\phi_t)\,(1-\delta)\, n_t \tag{5}$$

A equação (5) diz que a quantidade mínima de ativos mantida deve ser igual à parcela relativa ao *downpayment*, $(1-\theta)\, i_t$, mais a parcela não-depreciada e não-líquida dos ativos, $(1-\phi_t)\,(1-\delta)\, n_t$. Os empreendedores também podem adquirir títulos emitidos pelo governo, b_t, que possuem um período e pagam 1 na maturidade. Esses títulos são emitidos ao preço $Q_t = \dfrac{1}{1+r_t}$, em que r_t é a taxa de juros que rendem os títulos.

Como a oportunidade de investimento, π, é iid entre os empreendedores, essa parcela dos empreendedores é chamada de investidores. A parcela, $1-\pi$, dos empreendedores que não possuem acesso à tecnologia de investimento é formada por empreendedores chamado de poupadores. Caso o empreendedor poupador deseje transferir riqueza do período t para o período $t+1$, ele precisará demandar ativos financeiros, sendo estes os ativos referentes ao capital das empresas e os títulos públicos. O empreendedor poupador desejará demandar os ativos baseado na expectativa de seu preço futuro e pelo dividendo pago. Assim, os investidores querem vender seus ativos para financiar o *downpayment* enquanto os poupadores desejam demandar os ativos e os títulos. As rigidezes da economia podem restringir a oferta de ativos de modo que os preços desses ativos não igualem seu custo, ou seja, que o preço dos ativos seja superior a um.

A restrição orçamentária do empreendedor com uma quantidade dada de títulos e ativos, pode ser

[7] Ver Bigio (2010a) e Rocheteau (2009) para um framework em que esta restrição de liquidez é determinada endogenamente.

escrita como:

$$c_t + i_t + q_t n_{t+1} + Q_t b_t \leq r_t^k n_t + (1-\delta) q_t n_t + q_t i_t + b_{t-1} \tag{6}$$

O lado esquerdo da restrição orçamentária indica os gastos e o lado direito a riqueza. Primeiramente, resolveremos o problema do empreendedor investidor (denominado pelo sobrescrito i) que pode ser escrito como:

$$
\begin{aligned}
& Max\ E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log\left(c_t^i\right) && \text{(P.1)} \\
s.a. c_t^i + i_t + q_t n_{t+1}^i + Q_t b_t^i &\leq \left[r_t^k + (1-\delta) q_t\right] n_t + q_t i_t + b_{t-1} && \text{(R.O.)} \\
n_{t+1}^i &\geq (1-\theta) i_t + (1-\phi_t)(1-\delta) n_t && \text{(R.L.1)} \\
b_t^i &\geq 0 && \text{(R.L.2)}
\end{aligned}
$$

onde R.O. significa restrição orçamentária e R.L. restrição de liquidez. A R.L.2 apenas indica que o empreendedor investidor não pode possuir uma quantidade negativa de títulos. Dada a monotonicidade da preferência do empreendedor, a R.O. é válida com igualdade. O lagrangeano do problema acima pode ser escrito como:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \log\left(c_t^i\right) - \lambda_t \left\{c_t^i + i_t + q_t n_{t+1}^i + Q_t b_t^i - \left[r_t^k + (1-\delta) q_t\right] n_t - q_t i_t - b_{t-1}\right\} \\
&\quad + \eta_{1,t}\left[n_{t+1}^i - (1-\theta) i_t - (1-\phi_t)(1-\delta) n_t^i\right] + \eta_{2,t} b_t^i
\end{aligned}
$$

Resolvendo apenas em relação a i_t:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial i_t} &: \quad -\lambda_t + \lambda_t q_t - \eta_{1,t}(1-\theta) = 0 \\
& \quad\ \ \lambda_t (q_t - 1) = \eta_{1,t}(1-\theta)
\end{aligned}
$$

Como a restrição orçamentária é válida com igualdade, diz-se que a restrição é ativa e $\lambda_t > 0$. Se $q_t > 1$, tem-se que $\eta_{1,t} > 0$. A R.L.1 é válida com igualdade. Isso implica que o empreendedor investidor apenas manterá ativos que igualem o *downpayment* do investimento e a parte não-líquida dos ativos possuídos. Se $q_t = 1$, então $\eta_{1,t} = 0$ e o problema dos empreendedores investidor e poupador é o mesmo.

Proposição 1: Suponha que θ e ϕ *sejam tais que* $q_t > 1$, *um empreendedor com oportunidade de* *investimento não irá demandar títulos:* $b_t^i = 0$[8].

Dado que R.L.1 vale em igualdade e substituindo-a na R.O., o problema do empreendedor investidor pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} & Max\ E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log\left(c_t^i\right) && \text{(P.2)} \\ s.a. c_t^i + q_t^R n_{t+1}^i &= \left[r_t^k + (1-\delta)\left(\phi_t q_t + (1-\phi_t)\, q_t^R\right)\right] n_t + b_{t-1} \end{aligned}$$

em que $q_t^R = \dfrac{1-\theta q_t}{1-\theta}$ representa o custo efetivo de reposição do capital para o empreendedor investidor. É necessário financiar com recursos próprios $1-\theta q_t$ para obter $1-\theta$ de capital. Se $q_t > 1$, tem-se que $q_t^R < 1$ e o custo do capital produzido internamente é menor que o preço do ativo no mercado. Perceba também que o empreendedor investidor valoriza a parcela líquida dos ativos, ϕ, ao preço de mercado e a parcela ilíquida, $1-\phi$, ao custo efetivo de reposição.

As condições de otimalidade do empreendedor investidor são[9][10]:

$$c_t^i = (1-\beta)\left\{\left[r_t^k + (1-\delta)\left(\phi_t q_t + (1-\phi)\, q_t^R\right)\right] n_t + b_{t-1}\right\} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} (1-\theta q_t)\, i_t &= \beta\left\{\left[r_t^k + (1-\delta)\,\phi q_t\right] n_t + b_{t-1}\right\} \\ &\quad - (1-\beta)(1-\delta)(1-\phi)\, q_t^R n_t \end{aligned} \tag{8}$$

Agora pretende-se derivar o problema do empreendedor poupador (indicado pelo sobrescrito s):

$$\begin{aligned} Max\ E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log\left(c_t^s\right) & && \text{(P.3)} \\ s.a.\ c_t^s + q_t n_{t+1}^s + Q_t b_t^s &\leq \left[r_t^k + (1-\delta)\, q_t\right] n_t + b_{t-1} \\ n_{t+1}^s &\geq (1-\phi_t)(1-\delta)\, n_t \\ b_t^s &\geq 0 \end{aligned}$$

[8] Prova feita no Apêndice A.3.

[9] Dado que a preferência dos empreendedores é da forma logarítmica, o empreendedor consome $(1-\beta)$ de sua renda e poupa β. Ver Samuelson (1969).

[10] Para determinar a equação (8) basta substituir a equação (7) na restrição orçamentária.

As condições de otimalidade do empreendedor poupador são[11]:

$$c_t^s = (1-\beta)\left\{\left[r_t^k + (1-\delta)\, q_t\right] n_t + b_{t-1}\right\} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &(1-\pi)\, E_t \left\{ \frac{\dfrac{r_{t+1}^k + (1-\delta)\, q_{t+1}}{q_t} - \dfrac{1}{Q_t}}{\left[r_{t+1}^k + (1-\delta)\, q_{t+1}\right] n_{t+1}^s + b_t} \right\} \\ = \quad & \pi E_t \left\{ \frac{\dfrac{1}{Q_t} - \dfrac{r_{t+1}^k + (1-\delta)\left(\phi_{t+1} q_{t+1} + \left(1-\phi_{t+1}\right) q_{t+1}^R\right)}{q_t}}{\left[r_{t+1}^k + (1-\delta)\left(\phi_{t+1} q_{t+1} + \left(1-\phi_{t+1}\right) q_{t+1}^R\right)\right] n_{t+1}^s + b_t} \right\} \end{aligned} \tag{10}$$

Perceba que o consumo do empreendedor investidor é menor que o consumo do empreendedor poupador se ambos possuem a mesma quantidade de ativos e títulos no período, pois $\phi_t q_t + (1-\phi_t)\, q_t^R < q_t$ quando $q_t > 1$. A equação (10) representa a condição de arbitragem entre ativos e títulos para o empreendedor poupador. Caso seja investidor em $t+1$, o retorno dos títulos supera o dos ativos, pois a plena liquidez permite um maior investimento no próximo período. Caso o empreendedor seja poupador no próximo período, representado pelo lado esquerdo da equação, os ativos proporcionarão maior rendimento, pois a (i)liquidez parcial dos ativos não importa no período.

2.1 Trabalhadores

Pretende-se agora resolver o problema dos trabalhadores. Por hipótese, os trabalhadores não podem realizar investimento, nem demandar títulos ou ativos. O problema dos trabalhadores pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} &Max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[c_t' - \frac{\omega}{1+\eta}\left(l_t'\right)^{1+\eta}\right] \\ &s.a.\ c_t' \leq w_t l_t' - T_t \end{aligned}$$

em que c_t' representa o consumo dos trabalhadores, l_t' a oferta de trabalho e T_t os impostos cobrados na forma *lump-sum*. Dada a monotonicidade das preferências, a restrição orçamentária vale sob

[11] Ver apêndice A.1 com as candições de primeira ordem.

igualdade. A condição de otimalidade fica:

$$\frac{\partial}{\partial l_t'} : w_t - \omega \left(l_t'\right)^\eta = 0 \Rightarrow w_t = \omega \left(l_t'\right)^\eta$$

e a oferta de trabalho é dada por,

$$l_t' = \left(\frac{w_t}{\omega}\right)^{\frac{1}{\eta}} \tag{11}$$

e os trabalhadores consomem toda sua renda, $c_t' = w_t l_t' - T_t$. A demanda agregada por trabalho é determinada pela sua produtividade marginal:

$$w_t = (1-\alpha) A_t K_t^\alpha L_t^{-\alpha} \tag{12}$$

em que K_t representa a quantidade agregada de capital e L_t a de trabalho. Em equilíbrio, a demanda agregada por trabalho iguala a oferta agregada, $L_t = L_t'$. Substituindo a equação (11) na forma agregada na equação (12) é possível encontrar:

$$L_t = \left[\left(\frac{1-\alpha}{\omega}\right) A_t\right]^{\frac{1}{\eta+\alpha}} K_t^{\frac{\alpha}{\eta+\alpha}} \tag{13}$$

$$w_t = \left[(1-\alpha) A_t\right]^{\frac{\eta}{\eta+\alpha}} K_t^{\frac{\eta\alpha}{\eta+\alpha}} \omega^{\frac{\alpha}{\eta+\alpha}} \tag{14}$$

O retorno do capital, r_t^k, é dado por sua produtividade marginal:

$$\begin{aligned} r_t^k &= \alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} \\ r_t^k &= \alpha \left(\frac{1-\alpha}{\omega}\right)^{\frac{1-\alpha}{\eta+\alpha}} A_t^{\frac{1+\eta}{\eta+\alpha}} K_t^{\frac{\eta(\alpha-1)}{\eta+\alpha}} \end{aligned} \tag{15}$$

2.2 Governo

Neste trabalho o governo opera apenas através do mercado de títulos em que B_t representa a quantidade agregada de títulos emitida em t[12]. A quantidade tributada dos trabalhadores serve apenas para pagar o déficit gerado neste mercado. Assim:

$$B_{t-1} - Q_t B_t = T_t \tag{16}$$

[12] No modelo de KM, o governo opera de forma distinta, através de operações de *open-market* entre ativos e moeda.

2.3 Agregação

Como as funções que caracterizam c_t^i, c_t^s, i_t, n_{t+1} e b_{t+1} são todas lineares, a economia admite agregação. Dado que os trabalhadores não poupam, a quantidade agregada de capital K_t e de títulos B_t mantida pelos empreendedores iguala a quantidade total de capital e títulos da economia e, portanto, $N_t = K_t$. Como as oportunidades de investimento são iid, no início do período t, os empreendedores investidores possuem πN_t e πB_{t-1} dos ativos e dos títulos enquanto os poupadores possuem $(1-\pi) N_t$ e $(1-\pi) B_{t-1}$. As condições de otimalidade do empreendedor investidor, dadas pelas equações (7) e (8) podem ser reescritas na forma agregada como:

$$C_t^i = \pi (1-\beta) \left\{ \left[r_t^k + (1-\delta) \left(\phi_t q_t + (1-\phi_t) q_t^R \right) \right] N_t + B_{t-1} \right\} \tag{17}$$

$$(1-\theta q_t) I_t = \pi \left\{ \begin{array}{c} \beta \left[\left(r_t^k + (1-\delta) \phi_t q_t \right) N_t + B_{t-1} \right] \\ -(1-\beta)(1-\delta)(1-\phi_t) q_t^R N_t \end{array} \right\} \tag{18}$$

As condições de otimalidade do empreendedor poupador, equações (9) e (10), podem ser reescritas na forma agregada como:

$$C_t^s = (1-\pi)(1-\beta) \left\{ \left[r_t^k + (1-\delta) q_t \right] N_t + B_{t-1} \right\} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} & (1-\pi) E_t \left\{ \frac{ \dfrac{r_{t+1}^k + (1-\delta) q_{t+1}}{q_t} - \dfrac{1}{Q_t} }{ \left[r_{t+1}^k + (1-\delta) q_{t+1} \right] N_{t+1}^s + B_t } \right\} \\ = \quad & \pi E_t \left\{ \frac{ \dfrac{1}{Q_t} - \dfrac{r_{t+1}^k + (1-\delta) \left(\phi_{t+1} q_{t+1} + \left(1-\phi_{t+1}\right) q_{t+1}^R \right)}{q_t} }{ \left[r_{t+1}^k + (1-\delta) \left(\phi_{t+1} q_{t+1} + \left(1-\phi_{t+1}\right) q_{t+1}^R \right) \right] N_{t+1}^s + B_t } \right\} \end{aligned} \tag{20}$$

Pela condição de equilíbrio no mercado de bens, o produto total deve igualar à renda destinada aos trabalhadores e aos empreendedores. Logo, $r_t^k N_t$, deve igualar o investimento e o consumo dos empreendedores, dados pelas equações (16), (17) e (18), menos os impostos que foram pagos pelos trabalhadores[13].

[13] Perceba que o consumo dos trabalhadores é igual a $C_t' = w_t L_t - T_t$. Somando $r_t^k N_t + w_t L_t = I_t + C_t^i + C_t^s + C_t' = Y_t$.

3 Extensões

Neste capítulo são apresentadas extensões analíticas ao modelo de KM. A primeira discute como o *framework* desenvolvido por KM incorpora novos aspectos à discussão do *equity premium*[14] em que é derivada uma nova fórmula que capta a importância da liquidez parcial dos ativos para o diferencial de retorno entre os ativos e os títulos. A segunda extensão determina uma regra para a oferta de títulos que permite um nível eficiente de investimento.

3.1 Equity Premium no modelo CCAPM

Na literatura econômica, o retorno dos ativos acima do retorno dos títulos é conhecido como *equity premium*. O modelo desenvolvido em Lucas (1978), conhecido por Árvores de Lucas ou *Consumption Capital Asset Pricing Model* (CCAPM), permite a precificação de diferentes ativos num contexto de equilíbrio geral. Com o objetivo de analisar a magnitude do *equity premium*, Mehra e Prescott (1985) aplicam o modelo de Lucas à economia americana e não encontram resultados satisfatórios que expliquem o diferencial observado de retorno entre os ativos e os títulos dentro de intervalos considerados razoáveis para os parâmetros comportamentais. Enquanto os dados da economia americana refletem um excesso de retorno de 6,18%[15], o modelo só é capaz de gerar um excesso de 0,35%[16].

A lógica para compreender o *equity premium* deve se basear em escolhas marginais e intertemporais ótimas. O agente valoriza de forma desigual consumo em períodos distintos, ou seja, a mesma quantidade de consumo marginal resulta em diferentes graus de utilidade quando não consumidos no mesmo período. Consequentemente, ativos que rendem um alto retorno quando o consumo é alto (e a utilidade marginal é baixa) são menos valorizados que os ativos que provêem maior retorno quando o consumo é baixo (e a utilidade marginal é alta), e por isso são demandados mesmo propiciando um menor retorno. Assim, o incremento de consumo é valorizado de forma desigual nos períodos bons e ruins.

Baseando-se na apresentação derivada no apêndice (A.4.1), é possível encontrar a seguinte equação:

$$E_t\left(R_{t+1}^n\right) = R_t^B + \frac{cov\left[-u'\left(c_{t+1}\right), R_{t+1}^n\right]}{E_t\left[u'\left(c_{t+1}\right)\right]} \tag{A.4.1.1}$$

em que retorno do ativo é igual ao retorno dos títulos mais um prêmio de risco dado pela covariância

[14] Bigio (2010) também discute o *equity premium* no *framework* de KM.

[15] Mehra e Prescott (1985).

[16] Mehra e Prescott (1985). Na realidade o equity premium observado só é gerado caso se utilize uma parametrização não-usual considerada exagerada.

entre o consumo e o retorno dos ativos, dividido pela esperança da utilidade marginal do consumo. Como o retorno dos ativos e o retorno dos títulos se comportam de maneira semelhante sob as mesmas condições da economia, maior rendimento quando a economia está em crescimento e menor quando está em contração, eles deveriam possuir aproximadamente a mesma taxa de retorno. Com esse arcabouço, Mehra e Perscott não conseguiram reproduzir um *equity premium* de aproximadamente 6%.

A incapacidade dos modelos que consideram mercados completos, inexistência de custos de transação dentre outras hipóteses, estimulou o desenvimento de modelos que modificassem as hipóteses iniciais e incorporassem diversas restrições. Em especial, Bansal e Coleman (1996) introduzem a existência de custos de transação dos ativos, em que diferentes ativos possuem diferentes custos. Desta forma, os ativos com menores custos de transação são mais líquidos. Uma parcela dos ativos é demandada devido sua liquidez, especialmente como forma de se precaver contra possíveis choques idiossincráticos. Esse diferencial de liquidez afeta o retorno dos diferentes ativos e, como consequência, o *equity premium*. Dentre os diversos modelos que se propõem a analisar o *puzzle*, o modelo desta dissertação mais se assemelha ao de Bansal e Coleman devido a questão da liquidez. Mas, ao invés de supor diferentes custos de transação, neste trabalho é incorporado um parâmetro que representa a liquidez parcial dos ativos. Na próxima seção é derivada uma nova fórmula para analisar o *equity premium*.

3.2 Equity Premium no Modelo

No modelo, os ativos e os títulos públicos são demandados somente pelos empreendedores poupadores. Os poupadores adquirem os ativos ao preço q_t e os títulos ao preço Q_t. O rendimento do ativo adquirido pelo poupador depende se haverá oportunidade de investimento no próximo período. O rendimento bruto esperado da compra de um ativo em t pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} E_t\left[R_t^S\right] &= \pi E_t\left\{\frac{r_{t+1}^k+(1-\delta)\left[\phi_{t+1}q_{t+1}+\left(1-\phi_{t+1}\right)q_{t+1}^R\right]}{q_t}\right\} \\ &\quad +(1-\pi)\,E_t\left\{\frac{r_{t+1}^k+(1-\delta)\,q_{t+1}}{q_t}\right\} \end{aligned}$$

Rearranjando os termos, a equação anterior pode ser escrita como:

$$E_t\left[R_t^S\right]=E_t\left\{\frac{r_{t+1}^k+(1-\delta)\,q_{t+1}}{q_t}\right\}-\pi\,(1-\delta)\,E_t\left\{\left(1-\phi_{t+1}\right)\left(\frac{q_{t+1}-q_{t+1}^R}{q_t}\right)\right\} \qquad (22)$$

A equação (22) é composta por dois termos distintos. O primeiro representa o retorno bruto usual da compra de um ativo, após sua depreciação. O segundo termo representa o custo de possuir um ativo apenas parcialmente líquido quando há oportunidade de investimento em $t+1$. A parte não-líquida, $1-\phi_{t+1}$, valorizada ao preço q^R_{t+1} pelo empreendedor investidor, reduz o retorno do ativo pelo diferencial do preço de mercado e o preço interno do ativo, ou seja, em $q_{t+1}-q^R_{t+1}$. Este menor retorno ocorre exatamente quando a utilidade marginal do consumo é mais elevada, dado que $c^i_{t+1} < c^s_{t+1}$.

De forma análoga, o retorno da fabricação de um ativo interno pelo empreendedor investidor pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} E_t\left[R^I_t\right] &= \pi E_t\left\{\frac{r^k_{t+1}+(1-\delta)\left[\phi_{t+1}q_{t+1}+\left(1-\phi_{t+1}\right)q^R_{t+1}\right]}{q^R_t}\right\} \\ &\quad +(1-\pi)\,E_t\left\{\frac{r^k_{t+1}+(1-\delta)\,q_{t+1}}{q^R_t}\right\}\end{aligned}$$

Se $q^R_t < q_t$, o retorno da fabricação de um ativo é maior que o da compra. Como demonstrado no apêncidice (A.4.2), o retorno esperado do ativo em relação aos títulos pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} E_t\left[R^S_t\right] &= R^b_t+\frac{cov\left[-U_{t+1},\dfrac{r^k_{t+1}+(1-\delta)\,q_{t+1}}{q_t}\right]}{E_t\left(U_{t+1}\right)} \\ &\quad +\frac{\pi\,(1-\delta)\,cov\left[U_{t+1},\left(1-\phi_{t+1}\right)\left(\dfrac{q_{t+1}-q^R_{t+1}}{q_t}\right)\right]}{E_t\left(U_{t+1}\right)}\end{aligned} \tag{A.4.2.2}$$

em que $E_t\left(U_{t+1}\right)=E_t\left[\pi\dfrac{u'\left(c^i_{t+1}\right)}{u'\left(c^s_t\right)}+(1-\pi)\,\dfrac{u'\left(c^s_{t+1}\right)}{u'\left(c^s_t\right)}\right]$ representa o valor esperado da utilidade marginal do empreendedor poupador já ponderado pela probabilidade de oportunidade de investimento. Assim, o retorno esperado dos ativos é igual ao retorno do título mais um prêmio de risco usual em que relaciona seu retorno e o consumo agregado (risco agregado) e um prêmio de risco relacionado à (i)liquidez dos ativos. Esta segunda covariância capta o risco idiossincrático relativo à liquidez parcial de um ativo caso haja uma oportunidade de investimento.

Comparando as equações (A.4.1.1) e (A.4.2.2), observam-se duas diferenças. Em primeiro lugar, no modelo proposto o empreendedor poupador possui uma utilidade marginal esperada ponderada pela oportunidade de investimento, enquanto que no CCAPM a utilidade marginal esperada não depende dessa especificidade. Em segundo lugar, agora o *equity premium* depende de um termo que relaciona o retorno dos ativos e a liquidez. No modelo CCAPM, a remuneração dos ativos se diferencia dos títulos apenas pelo risco agregado. O risco idiossincrático aqui exposto pode ser relevante em alguns períodos, aumentando principalmente durante crises de liquidez[17].

Para melhor compreender a segunda covariância, considere o seguinte exemplo. Caso se espere que ϕ_{t+1} aumentará, $\left(1-\phi_{t+1}\right)\left(q_{t+1}-q_{t+1}^{R}\right)$ se reduz, tanto porque $1-\phi_{t+1}$ diminui quanto porque se espera menores restrições ao investimento no próximo período que permitirão uma maior oferta de ativos, fazendo com que a diferença entre q_{t+1} e q_{t+1}^{R} diminua. A menor restrição de liquidez leva a um aumento do consumo do empreendedor investidor e a uma queda do consumo do poupador. Mas o aumento de c_{t+1}^{i} é menor do que a queda de c_{t+1}^{s}, fazendo com que o efeito final seja de uma queda em $E_t\left(U_{t+1}\right)$. Assim, a covariância é positiva, enquanto houver restrição de liquidez.

3.3 Oferta Ótima de Liquidez

Nesta seção extende-se a fronteira de liquidez proposta por Bigio (2010), em que se determina o nível da liquidez ótima dos ativos para que seu preço iguale a um. Para tanto, considere a restrição orçamentária do empreendedor investidor dada no problema (P.2) e após substituir o consumo ótimo dado pela equação (7), é possível encontrar a seguinte equação na forma agregada:

$$q_t^R N_{t+1}^i = \beta\left\{\left[r_t^k + (1-\delta)\left(\phi_t q_t + (1-\phi_t)\, q_t^R\right)\right]\pi N_t + \pi B_{t-1}\right\} \tag{23}$$

Considere a restrição dada pela R.L.1 do problema (P.1.) na forma agregada:

$$N_{t+1}^i \geq (1-\theta)\, I_t + (1-\phi_t)(1-\delta)\,\pi N_t$$

Substituindo o valor de N_{t+1}^i dado pela equação (23), é possível encontrar:

$$\begin{aligned}(1-\theta)\, I_t \quad \leq \quad & \left\{\begin{array}{c}\beta\left[\dfrac{r_t^k + (1-\delta)\left(\phi_t q_t + (1-\phi_t)\, q_t^R\right)}{q_t^R}\right] \\ -(1-\phi_t)(1-\delta)\end{array}\right\}\pi N_t \\ & +\frac{\beta}{q_t^R}\pi B_{t-1}\end{aligned} \tag{24}$$

em que $(1-\theta)\, I_t$ representa a parcela máxima dos ativos do novo investimento que o empreendedor investidor pode possuir.

Seja agora a restrição orçamentária do empreendedor poupador dada por (P.3.). Após substituir o

[17] No caso em que são totalmente ilíquidos, $\phi_t = 0$, o prêmio de liquidez é máximo.

consumo dado por (9), é possível encontrar a seguinte equação na forma agregada:

$$q_t N_{t+1}^s + Q_t B_t = \beta \left\{ \left[r_t^k + (1-\delta) q_t \right] (1-\pi) N_t + (1-\pi) B_{t-1} \right\} \tag{25}$$

Como os empreendedores poupadores demandam todos os ativos ofertados da economia, tem-se que:

$$N_{t+1}^s = (1-\delta)(1-\pi) N_t + N_t^{ni}$$

em que N_t^{ni} representa a oferta de ativos pelos empreendedores investidores. Substituindo a equação (25) na anterior:

$$\beta \left[\frac{r_t^k + (1-\delta) q_t}{q_t} \right] (1-\pi) N_t + \frac{\beta}{q_t} (1-\pi) B_{t-1} - \frac{Q_t}{q_t} B_t = (1-\delta)(1-\pi) N_t + N_t^{ni}$$

dado que $N_t^{ni} \leq \phi_t (1-\delta) \pi N_t + \theta I_t$, é possível encontrar:

$$\begin{aligned} \theta I_t \quad \geq \quad & \left\{ \beta \frac{r_t^k + (1-\delta) q_t}{q_t} (1-\pi) - \phi_t (1-\delta) \pi - (1-\delta)(1-\pi) \right\} N_t \\ & + \frac{\beta (1-\pi)}{q_t} B_{t-1} - \frac{Q_t}{q_t} B_t \end{aligned} \tag{26}$$

em que θI_t representa a parcela dos ativos dos novos investimentos que o empreendedor poupador pode possuir. Perceba que:

$$I_t^i \geq (1-\theta) I_t \text{ e } I_t^s \leq \theta I_t$$

Assim,

$$\frac{1}{1-\theta} I_t^i \geq \frac{1}{\theta} I_t^s \Rightarrow I_t^i \geq \frac{1-\theta}{\theta} I_t^s \tag{27}$$

Quando $q_t = 1$, o investimento a nível individual não é determinado. A nível agregado as desigualdades podem ser consideradas como igualdades. Agora deriva-se o valor de ϕ que permite a alocação eficiente do investimento, ou seja, que iguale q_t a um. Para determinar o valor da fronteira de liquidez dada por ϕ_t^*, considera-se $q_t = 1$. Assim, encontram-se as seguintes equações:

$$
\begin{aligned}
I_t^i &= \left\{\beta\left[r_t^k + (1-\delta)\right] - (1-\phi_t^*)(1-\delta)\right\}\pi N_t + \beta\pi B_{t-1} && (28)\\
I_t^s &= \left\{\beta\left[r_t^k + (1-\delta)\right](1-\pi) - \phi_t^*(1-\delta)\pi - (1-\delta)(1-\pi)\right\} N_t && (29)\\
&\quad + \beta(1-\pi) B_{t-1} - Q_t B_t
\end{aligned}
$$

Substituindo as equações (28) e (29) na (27) sob igualdade, encontra-se ϕ_t^*[18]:

$$
\begin{aligned}
\phi_t^* &= \frac{(1-\theta)(1-\pi)-\theta\pi}{(1-\delta)\pi}\left[\beta\left(r_t^k + 1 - \delta\right) - (1-\delta)\right] && (30)\\
&\quad + \frac{\beta\left[(1-\theta)(1-\pi)-\theta\pi\right]}{(1-\delta)\pi}\frac{B_{t-1}}{N_t} - \frac{Q_t}{(1-\delta)\pi}\frac{B_t}{N_t}
\end{aligned}
$$

e a restrição de liquidez $n_{t+1}^i \geq (1-\phi_t)(1-\delta) n_t + (1-\theta) i_t$ é ativa caso $\phi_t < \phi_t^*$. A equação demonstra que para as variáveis de estado $(N_t,\, A_t,\, B_{t-1})$ e para a quantidade de títulos B_t, existe um valor de ϕ_t^* em que a restrição de liquidez se torna efetiva. Dado que $r_t^k = r^k(A_t, N_t)$ é função de variáveis de estado, a fronteira de liquidez depende dos choques que atingem a economia. Perceba que:

$$
\frac{\partial \phi_t^*}{\partial r_t^k} : \frac{(1-\theta)(1-\pi)-\theta\pi}{(1-\delta)\pi}\beta > 0
$$

Assim, ϕ_t^* é crescente em relação à produtividade e decrescente à acumulação de capital. Choques positivos de produtividade aumentam o retorno dos ativos que estimulam sua demanda e, portanto, deve haver uma maior oferta para que o seu preço se mantenha igual a um. Para melhor compreender o efeito dos títulos sobre ϕ_t^*, considere as seguintes derivadas:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_t^*}{\partial B_t} &: -\frac{Q_t}{(1-\delta)\pi}\frac{1}{N_t} < 0\\
\frac{\partial \phi_t^*}{\partial B_{t-1}} &: \frac{\beta\left[(1-\theta)(1-\pi)-\theta\pi\right]}{(1-\delta)\pi}\frac{1}{N_t} > 0
\end{aligned}
$$

Em t, o governo só é capaz de alterar a quantidade de B_t. Um aumento na emissão dos títulos retira recursos que seriam aplicados em ativos e essa menor demanda causa um efeito negativo sobre q_t, o que reduz a liquidez necessária para a economia operar eficientemente. Como os retornos na economia são decrescentes, a queda do estoque de ativos, N_t, leva a um aumento do seu retorno esperado no período

[18] Por hipótese, $\theta < 1-\pi$ que equivale a $\theta\pi < (1-\theta)(1-\pi)$.

seguinte. Os títulos são ativos líquidos apenas no período subsequente à sua emissão e a quantidade de liquidez proporcionada por eles no período t é determinada apenas pela quantidade de B_{t-1}. Uma maior emissão de títulos no período anterior aumenta ϕ_t^*, pois há uma maior demanda por ativos, já que houve um aumento em r_t^k. Essa maior demanda acaba sobrepondo os efeitos da maior liquidez geral na economia e ϕ_t^* aumenta.

A quantidade de ativos que os empreendedores investidores podem utilizar para financiar o *down-payment* é igual a $\phi_t(1-\delta)\pi N_t$. Assim, define-se o déficit de liquidez de ativos na economia como $(\phi_t^* - \phi_t)(1-\delta)\pi N_t$ e a política ótima para oferta de títulos ocorre quando o déficit é nulo, ou seja, $(\phi_t^* - \phi_t)(1-\delta)\pi N_t = 0$. A partir da equação (30) estabelece-se que a oferta ótima de títulos é determinada pela seguinte regra:

$$\begin{aligned} B_t \quad = \quad & \left\{ \frac{[(1-\theta)(1-\pi)-\theta\pi]\left[\beta\left(r_t^k+1-\delta\right)-(1-\delta)\right]}{(1-\theta)\,Q_t} - \frac{\phi_t\,(1-\delta)\,\pi}{(1-\theta)\,Q_t} \right\} N_t \\ & + \frac{\beta\,[(1-\theta)(1-\pi)-\theta\pi]}{(1-\theta)\,Q_t} B_{t-1} \end{aligned} \tag{31}$$

A oferta ótima de títulos é determinada a cada período de forma que o déficit de liquidez seja nulo. Ela opera com o objetivo de tornar ϕ_t^* igual a ϕ_t, ou seja, o valor do parâmetro de liquidez dos ativos que permite um nível eficiente de investimento é igual ao valor corrente. Quando há um déficit nulo, a economia alcança níveis de *first-best*. Isso ocorre porque as restrições de liquidez são sobrepostas pela quantidade de títulos e elas não mais afetam a alocação da economia. Perceba que B_t depende apenas de variáveis já determinadas em t, pois r_t^k, ϕ_t, N_t e B_{t-1} são todas variáveis observáveis.

4 Simulação

4.1 Parametrização

Com o objetivo de melhor compreender as propriedades do modelo, o *equity premium* e as consequências da oferta ótima de liquidez, será feita uma simulação com parâmetros para dados trimestrais próximos aos da literatura de ciclos reais para o Brasil ou que implementem o *framework* de KM. Perceba que esta simulação não caracteriza um exercício de calibração.

- **Preferências:** O fator de desconto intertemporal β utilizado para os empreendedores foi estabelecido em 0.98. O parâmetro da oferta de trabalho η foi determinado igual a 2 e o parâmetro ω igual a 1.

- **Tecnologia:** O parâmetro de participação do capital da função de produção Cobb-Douglas é igual a 0.36. A taxa de depreciação igual a 0.025.

- **Restrições:** O valor dos parâmetros de restrição do modelo, π e θ, foram determinados com base em Del Negro et al. (2010). O valor estabelecido para π foi 0.1 e para θ foi 0.15.

- **Produtividade:** Considerou-se que a produtividade segue um processo AR(1), $A_t = (1 - \rho_A)\,\mu_A + \rho_A A_{t-1} + \varepsilon_t^A$ em que $\varepsilon_t^A \sim N\left(0, \sigma_A^2\right)$. Os valores para o processo foram $\rho_A = 0.95$, $\mu_A = 1$ e $\sigma_A = 0.01$.

- **Liquidez:** Considerou-se que a dinâmica de um choque de liquidez parcial dos ativos também segue um processo AR(1), $\phi_t = \left(1 - \rho_\phi\right)\mu_\phi + \rho_\phi \phi_{t-1} + \varepsilon_t^\phi$ em que $\varepsilon_t^\phi \sim N\left(0, \sigma_\phi^2\right)$. Os valores para o processo foram $\rho_\phi = 0.5$, $\mu_\phi = 0.1$ e $\sigma_\phi = 0.01$.

Resumindo os valores dos parâmetros utilizados:

β	η	ω	α	δ	π	θ	ρ_A	μ_A	σ_A	ρ_ϕ	μ_ϕ	σ_ϕ
0.98	2	1	0.36	0.025	0.1	0.15	0.95	1	0.01	0.5	0.1	0.01

Tabela 1: Parametrização da Simulação

4.2 Estado Estacionário

Esta seção descreve os resultados quantitativos obtidos através da simulação do modelo. A simulação é realizada sob duas condições distintas de oferta de liquidez, sendo estas: com oferta fixa de liquidez a um nível arbitrariamente ineficiente, que será chamado de Modelo 1, e com oferta ótima de títulos definida pela equação (31), chamado de Modelo 2[19]. Os dois modelos serão submetidos a choques

[19] O valor ótimo de B_t determinado pela simulação utilizando a regra ótima, modelo 2, é 3.34155. Para o modelo 1 utilizou-se o valor arbitrário de 2.5.

de produtividade (A_t) e choques de liquidez (ϕ_t), enquanto o modelo 1 também será submetido a um choque exógeno na quantidade de títulos (B_t). Posteriormente, discutem-se e comparam-se os resultados destas simulações.

Os valores das variáveis em estado estacionário encontrados pela simulação foram[20]:

	Modelo1	**Modelo2**
N	32.8924	36.3858
Y	4.3823	4.5894
$\mathbf{r}^k$	0.0479	0.0454
q	1.0955	1
Q	0.9910	0.98
r	0.0090	0.0204
ϕ^*	0.2107	0.1
EP	0.0007	0
RN	0.0187	0.0204
PLN	0.0090	0
RLN	0.0097	0.0204
RLNi	0.1252	0.0204

Tabela 2: Valores em Estado Estacionário. N= total de ativos, Y=produto, rk= produtividade marginal do capital, q= preço dos ativos, Q= preço dos títulos, r= taxa de juros dos títulos, fi*= fronteira de liquidez, EP=equity premium, RN= taxa de retorno bruto dos ativos, PLN= perda da ililquidez parcial dos ativos, RLN= taxa de retorno líq. da compra de um ativo, RLNi= taxa de retorno líq. da fabricação de um ativo

Os resultados da tabela (2) mostram os valores das variáveis em estado estacionário e como a quantidade ofertada de liquidez afeta as variáveis da economia. Em especial, quando se segue a regra ótima para os títulos, as variáveis atingem os valores de *first-best* similares aos encontrados pelo modelo de ciclos reais. É possível observar que as restrições criam uma diferença entre o produto marginal líquido do capital e a taxa de retorno esperada dos ativos, além de manter a taxa de retorno dos ativos mais elevada que a taxa de retorno dos títulos. Contudo, os diferenciais de retorno desaparecem quando a oferta de liquidez é eficiente. No modelo 1, $r^k > \dfrac{1}{\beta} - 1 + \delta$ e $Q > \beta$, enquanto no modelo 2, $r^k = \dfrac{1}{\beta} - 1 + \delta$ e $Q = \beta$, de tal forma que o retorno dos ativos e dos títulos sejam iguais.

A maior quantidade de títulos diminui as restrições de liquidez que limitam o investimento e permite uma maior acumulação de capital, diminuindo tanto o produto marginal do capital, r_t^k, quanto o preço dos ativos, q_t. O q_t mais próximo de 1 representa uma menor diferença entre o custo de produção do capital pelo empreendedor investidor e o seu valor de mercado, ou seja, há um menor ganho na produção de ativos quando surge a oportunidade. Sob a política de oferta ótima de liquidez, q_t sempre

[20] Na derivação do modelo utilizou-se o retorno dos ativos. Apenas para facilitar a comparação, a tabela mostra as taxas de retorno.

iguala a 1 e este valor representa que a economia possui uma quantidade eficiente de capital em todos os períodos. Como consequência, tal política também permite que o produto atinja o nível mais elevado em estado estacionário.

O parâmetro que determina a fronteira de liquidez é alterado de acordo com a quantidade de títulos disponíveis, como pôde ser observado pela equação (30). No modelo 1, ϕ_t^* é maior que ϕ_t, explicitando que a economia necessita de mais liquidez para operar eficientemente. Quando a economia opera sob a regra de oferta ótima de títulos, ϕ_t^* iguala o valor de ϕ_t e a liquidez dos ativos que permite a alocação eficiente é exatamente a liquidez corrente.

As restrições do modelo também geram um diferencial de retorno entre os ativos e os títulos, *equity premium*, pois existe uma perda devido à liquidez parcial dos ativos. Como a função de utilidade é logarítmica, a discussão do *equity premium* no modelo não se baseia em aversão ao risco[21], como é usual na literatura econômica, mas na diferença de liquidez existente entre os ativos e os títulos. Note que o *equity premium* só existe enquanto houver uma oferta insuficiente de liquidez no modelo. No modelo 2, a perda devido à (i)liquidez parcial dos ativos presente na equação (22) desaparece. Deste modo, o prêmio de liquidez é igual a zero e o retorno dos títulos é igual ao retorno dos ativos, de tal forma que, no modelo 2, não exista *equity premium*. Mas mesmo no modelo 1, o *equity premium* apresenta um valor quantitativamente muito baixo, indicando que o diferencial de liquidez entre títulos e ativos, como desenvolvido nesse trabalho, não é capaz de resolver o *puzzle*.

4.3 Dinâmica

Para analisar a dinâmica do modelo serão discutidas nesta seção as funções de impulso-resposta e as correlações[22]. Serão considerados choques de produtividade e de liquidez dos ativos, e além destes choques, apenas no modelo 1 será incorporado um choque na quantidade de títulos da economia. Os choques de produtividade e liquidez não possuem qualquer correlação entre si, apesar da dependência existente entre produtividade e liquidez no contexto geral do modelo, pois uma alteração de liquidez possui um maior efeito se a produtividade for mais elevada, por exemplo.

O choque de produtividade aumenta o produto e o investimento em ambos os modelos, mas a dinâmica de resposta é bastante distinta, como pode ser vista pela figura 1[23]. Enquanto num primeiro momento, o investimento aumenta mais no modelo 1 que no 2, no modelo 2 o investimento aumenta

[21] A função de utilidade logarítmica possui o coeficiente de aversão ao risco igual a um. Afirmo apenas que a análise não será focada neste parâmetro, mas na liquidez.

[22] As funções de impulso-resposta estão apresentadas no apêndice A.6.

[23] O IRF apresentado na Figura 1 possui 50 períodos.

nos períodos subsequentes até começar uma trajetória de queda. Para compreender a razão dessa dinâmica é preciso analisar sua relação com as variáveis financeiras.

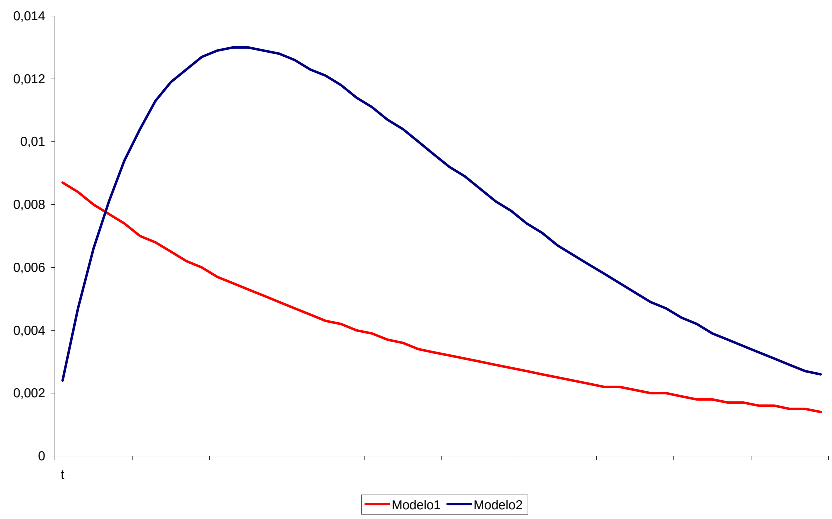

Figura 1: IRFs do investimento - choque de produtividade

Um choque positivo de produtividade aumenta a produtividade marginal do capital, r_t^k, e esse maior retorno do ativo eleva a demanda, fazendo com que o preço do capital, q_t, aumente. No modelo 1, em que há uma quantidade ineficiente de liquidez, os empreendedores poupadores passam a valorizar mais os títulos ao antecipar o maior retorno de um investimento futuro quando houver a possibilidade, o que gera uma queda na taxa de juros necessária para equilibrar seu portfólio. No modelo 2, em que a quantidade de títulos segue a regra dada pela equação (31), o choque de produtividade, ao aumentar r_t^k e q_t que estimulam o investimento, requer um aumento da oferta de títulos para desviar recursos do mercado de ativos e evitar o aumento de q_t. Para demandar os títulos ofertados no período, os empreendedores poupadores irão exigir um maior retorno para equilibrar seu portfólio. Ao utilizar tal regra, gera-se um efeito ambíguo sobre q_t, pois um choque positivo de produtividade aumenta a demanda pelos ativos que eleva seu preço, enquanto também estimula a oferta de títulos que aumenta a taxa de juros e reduz a demanda pelos ativos. A regra será eficiente caso consiga equilibrar o aumento e a queda da demanda de tal forma que q_t não varie.

É preciso notar que uma maior oferta de títulos hoje gera um aumento de liquidez apenas no próximo período, o que reduz a restrição de liquidez nos períodos subsequentes e permite o aumento do investimento, como pode ser visto pela figura 1. Ao comparar as respostas do investimento, percebe-se que, num primeiro momento, o aumento é maior no modelo 1 que no modelo 2. Isso ocorre porque, no modelo 1, tanto r_t^k quanto q_t aumentam e estimulam o investimento no próprio período, enquanto no modelo 2, o aumento do investimento se deve apenas ao efeito de r_t^k. Porém, a maior liquidez nos períodos posteriores permite um maior investimento até que a queda da produtividade se sobreponha a tal efeito e passe a desestimular o investimento.

Agora discute-se a dinâmica da economia diante de um choque temporário positivo de liquidez dos ativos, ϕ_t. Um choque positivo de liquidez aumenta a parcela de ativos que pode ser utilizada para financiar o *downpayment*. No modelo 1, em que a quantidade de títulos é menor do que a que permite um nível eficiente de capital, o aumento de ϕ_t diminui a restrição de liquidez do empreendedor investidor e permite um maior investimento. Esse aumento de liquidez aumenta tanto a oferta de ativos quanto a demanda por eles, já que os empreendedores poupadores irão antecipar menores restrições à venda dos ativos adquiridos. Mas como o choque é transitório, os poupadores também consideram que ϕ_t retornará ao nível de estado estacionário. Assim, a demanda não se eleva tanto e o efeito do aumento da oferta de ativos se sobrepõe ao da demanda, fazendo com que q_t diminua. Além dos efeitos citados, a maior liquidez reduz a demanda pelos títulos plenamente líquidos, e para reequilibrar o mercado, há uma queda de seu preço, ou seja, um aumento da taxa de juros.

No modelo 2, assim como no modelo 1, o aumento da liquidez dos ativos permite que uma maior parcela dos ativos seja utilizado como *downpayment*. Essa menor restrição de liquidez dos ativos reduz a quantidade necessária de títulos para que haja um nível ótimo de investimento[24]. Assim, no período t há uma queda na oferta de títulos que aumenta seu preço. A menor taxa de juros dos títulos estimula a demanda dos empreendedores poupadores por ativos o que aumenta o investimento. A maior oferta de ativos contrabalancea a demanda mais elevada de forma que q_t não se altere.

Apenas no modelo 1, incorpora-se um aumento temporário na quantidade de títulos[25]. Os efeitos de curto prazo do choque são distintos dos efeitos de médio e longo prazo. Uma maior oferta de títulos aumenta a taxa de juros, reduzindo a demanda por ativos. Essa menor demanda leva a uma queda de q_t que desincentiva o investimento, e como consequência, reduz o produto. Contudo, no período subsequente, há uma maior liquidez disponível que diminui as restrições do modelo, permitindo o aumento do investimento e do produto. Nota-se que o aumento da quantidade de títulos gera um efeito *crowding-out* num primeiro momento, mas há um efeito *crowding-in* em seguida. Como é feita a hipótese de que os trabalhadores pagam os impostos, também ocorre uma transferência de renda dos

[24] Essa relação pode ser claramente vista pela equação (31) em que $\frac{\partial B_t}{\partial \phi_t} = -\frac{(1-\delta)\pi}{(1-\theta)Q_t} N_t < 0$.

[25] O choque na quantidade de títulos considerado é AR(1) da forma $v_t^b = \rho_b v_{t-1}^b + \varepsilon_t^b$, com $\rho_b = 0.5$ e $\varepsilon_t^b = 0.1$. Novamente, os valores dos parâmetros não representam um exercício de calibração.

trabalhadores para os empreendedores.

Como discutido nos parágrafos anteriores, o comportamento da taxa de juros difere em relação ao choque de produtividade e de liquidez e de acordo com a quantidade de títulos ofertada. No caso de um choque positivo de produtividade, se houver uma quantidade ineficiente de liquidez, a taxa de juros apresenta um comportamento contra-cíclico, enquanto que se a quantidade ofertada for eficiente, a taxa de juros é pró-cíclica. No caso de um choque temporário positivo de liquidez, se a quantidade de liquidez for ineficiente, a taxa de juros aumenta, ou seja, apresenta um comportamento pró-cíclico. Por outro lado, se a oferta de liquidez for eficiente, a taxa de juros será contra-cíclica. Perceba também, que no modelo 1, a taxa de juros possui uma correlação negativa com o preço dos ativos, já que q_t aumenta com uma elevação da produtividade e diminui com o aumento da liquidez. As relações encontradas podem ser resumidas na tabela (3) a seguir:

	Modelo 1	**Modelo 2**
$\uparrow A_t$	$\uparrow q_t, \downarrow r_t$	$\uparrow r_t$
$\uparrow \phi_t$	$\downarrow q_t, \uparrow r_t$	$\downarrow r_t$

Tabela 3: Correlações da Economia Simulada

No modelo 1, o preço dos ativos, assim como a taxa de juros pode apresentar tanto um comportamento pró-cíclico como contra-cíclico. Diante de um choque de produtividade, q_t é pró-cíclico e de um choque de liquidez, é contra-cíclico. Assim, não há necessariamente uma correlação positiva entre investimento e q_t, esta correlação depende do choque que atinge a economia. Contudo, o preço dos ativos é sempre negativamente correlacionado com a taxa de juros. Essa correlação negativa demonstra que o *trade-off* do empreendedor poupador em sua condição de arbitragem independe do tipo de choque.

No modelo 2, a taxa de juros que remunera os títulos apresenta um comportamento típico do modelo de ciclos reais. Perceba que, se q_t for igual a 1 em todos os períodos, pela condição de arbitragem entre títulos e ativos dada pela equação (20), obtém-se que $r_t = E_t\left[r^k_{t+1} - \delta\right]$. A taxa de juros que remunera os títulos deve igualar a remuneração líquida esperada do retorno dos ativos. Caso ocorra um choque de produtividade, $E_t\left[r^k_{t+1}\right]$ aumenta, e para os empreendedores poupadores demandarem títulos, a taxa de juros dos títulos também deve aumentar. No caso do choque de liquidez, a queda da taxa de juros permite uma maior acumulação de capital na economia o que diminui $E_t\left[r^k_{t+1}\right]$. Como na economia proposta existem dois choques distintos, a taxa de juros não se comporta, necessariamente, de forma pró-cíclica. Porém, a taxa de juros se move de acordo com a produtividade marginal do capital que representa a taxa de juros no modelo de ciclos reais.

Como explicitado por Kanczuk (2002) para o Brasil e King e Watson (1996) para os Estados Unidos, os dados mostram que a taxa de juros real possui uma correlação negativa tanto com o produto do período como com o produto futuro. Esta correlação negativa com o produto futuro faz com que a taxa de juros real seja chamada de "*leading countercyclical indicator*"[26]. King e Watson (1996) afirmam que o modelo de ciclos reais não é capaz de explicar a característica de "*leading countercyclical indicator*" da taxa de juros real. Nos modelos 1 e 2, as correlações para o período também se mantém em relação ao produto futuro. Desta forma, ambos os modelos são capazes de apresentar uma correlação negativa com o produto, dependendo do choque que atinge a economia. Assim, a existência de diferenciais de liquidez entre os ativos e os títulos possibilita explicar determinados fenômenos da economia que não é incorporado pelo modelo de ciclos reais.

[26] Termo utilizado por King e Watson (1996). Boldrin et al. (2001) utilizam o termo "*inverted leading indicator*".

5 Conclusão

Este trabalho teve como objetivo realizar extensões analíticas ao modelo de KM. Analisa-se o *equity premium* com foco na importância da liquidez e estabelece-se uma regra de oferta ótima de liquidez.

A simulação do modelo foi realizada para duas condições distintas de oferta de liquidez. No modelo 1, com uma quantidade ineficiente, e no modelo 2, com uma quantidade eficiente. Os resultados das variáveis em estado estacionário indicam como a quantidade de liquidez afeta a acumulação de capital, o produto e o retorno dos ativos e dos títulos. Como o *equity premium* depende do diferencial de liquidez, no modelo 2 não há *equity premium*. No modelo 1, ele existe, mas o resultado encontrado foi quantitativamente baixo.

Cada modelo proporciona para algumas variáveis uma dinâmica bastante distinta, em especial, a taxa de juros. A taxa de juros possui um comportamento diferente diante de cada choque e entre os modelos. No modelo 1, é contra-cíclica na presença de um choque de produtividade e pró-cíclica na presença de um choque de liquidez. Ocorrendo o inverso no modelo 2, quando é pró-cíclica para um choque de produtividade e contra-cíclica para um choque de liquidez. Além disso, tanto o choque de produtividade quanto o de liquidez resultam que o comportamento da taxa de juros no modelo 1 é o inverso do modelo 2.

A oferta ótima de liquidez possibilita que a economia opere em condições de *first-best* em todos os períodos mesmo com a existência de fricções, pois essas fricções são sobrepostas pela quantidade de liquidez na economia. Ela indica que existe uma política de oferta de liquidez dependente apenas de variáveis de estado observáveis no período que possibilita que a economia opere sempre eficientemente. Apesar do comportamento semelhante ao modelo de ciclos reais, para que isto ocorra é necessária a adoção da regra de oferta de liquidez, ou seja, é necessária uma intervenção governamental em todos os períodos. Este resultado contrasta com a literatura de ciclos reais na qual o governo possui uma pequena (se alguma) capacidade de afetar a situação dos agentes através de intervenções durante o ciclo econômico.

Apesar das diversas restrições, elas afetam a economia através apenas na capacidade de investimento. Um próximo passo para modelos que incorporem fricções financeiras *à la* KM deve ser a capacidade de explicitar o comportamento da liquidez dos ativos de maneira endógena. Um outro passo nesta linha de pesquisa deveria relacionar, também de maneira endógena, as fricções financeiras à produtividade do capital, permitindo uma melhor compreensão dos mecanismos de transmissão entre a economia financeira e a real.

6 Referências Bibliográficas

Bansal, Ravi e Coleman, Wilbur. "A Monetary Explanation of the Equity Premium, Term Premium, and Risk-Free Rate Puzzles ". The Journal of Political Economy, Chicago, v. 104 (6), p. 1135-71, dezembro 1996.

Bigio, Saki. "Endogenous Liquidity and the Business Cycle ". mimeo, New York University. 2010a.

Bigio, Saki. "Liquidity Shocks and the Business Cycle ". working paper series, n. 2010-005, Banco Central de Reserva del Perú. 2010b.

Boldrin, Michele; Christiano, Lawrence e Fisher, Jonas. "Habit Persistence, Asset Returns and the Business Cycle ". The American Economic Review, v. 91 (1), p. 149-66. 2001.

Bonomo, Marco e Domingues, Gabriela. "Os Puzzles Invertidos no Mercado Brasileiro de Ativos " In: Marco Bonomo (Org.). Finanças Aplicadas ao Brasil. Rio de Janeiro: Editora FGV, 2004. p. 105-20.

Cole, Harold e Kocherlakota, Narayana."Zero Nominal Interest Rates: Why They're Good and How to Get Them". Federal Reserve Bank of Minneapolis Quaterly Review, v. 22 (2), p. 2-10. 1998.

Cysne, Rubens. "Equity Premium Puzzle: Evidence from Brazilian Data ". Economia Aplicada, São Paulo, v.10, n.2, p. 161-80, abril-junho 2006.

del Negro, Marco; Eggerston, Gauti; Ferrero, Andrea e Kiyotaki, Nobuhiro "The Great Escape? A Quantitative Evaluation of the Fed's Non-Standard Policies ". mimeo, Princeton University. 2010.

Epstein, Larry e Zin, Stanley (1989). "Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Return: A Theoretical Framework ". Econometrica, v. 57 (4), p. 937-69. 1989.

Hart, Oliver e Moore, John. "A Theory of Debt Based on the Inalienability of Human Capital ". Quaterly Journal of Economics, v. 109, p.841-79. 1994.

Hayashi, Fumio. "Tobin's Marginal q and Average q: A Neoclassical Interpretation". Econometrica, v. 50, n.1, p.213-24. 1982

Issler, João e Piqueira, Natália. "Aversão ao Risco, Taxa de Desconto Intertemporal e Substitutibilidade Intertemporal no Consumo no Brasil" In: Marco Bonomo (Org.). Finanças Aplicadas ao Brasil. Rio de Janeiro: Editora FGV, 2004. p. 163-88.

Kanczuk, Fábio. "Juros Reais e Ciclos Reais Brasileiros". Revista Brasileira de Economia, v. 56(2), p. 249-267. 2002.

King, Robert e Watson, Mark. "Money, Prices, Interest Rates and the Business Cycle". The

Review of Economics and Statistics, v. 78 (1), p. 35-53. 1996.

Kiyotaki, Nobuhiro e Moore, John. "Liquidity, Business Cycles and Monetary Policy ". mimeo, Princeton University. 2010.

Kiyotaki, Nobuhiro e Moore, John. "Inside Money and Liquidity ". mimeo, London School of Economics. 2000.

Kocherlakota, Narayana. "Money and Bonds: An Equivalence Theorem". Staff Report 393, Federal Reserve Bank of Minneapolis. 2007.

Krishnamurthy, Arvind e Vissing-Jorgensen, Annette. "The Aggregate Demand for Treasury Debt". mimeo, Northwestern University. 2010.

Ljungqvist, Lars e Sargent, Thomas. Recursive Macroeconomic Theory. 2ed. Cambridge: The MIT Press, 2004. 1082 p.

Lucas Jr., Robert. "Asset Prices in an Exchange Economy". Econometrica, v. 46, p. 1429-45. 1978.

Mehra, Rajnish e Prescott, Edward. "The Equity Premium: A Puzzle". Journal of Monetary Economics, v.15, p. 145-61, março 1985.

Mehra, Rajnish e Prescott, Edward. "The Equity Premium: ABCs " In: Rajnish Mehra (org.), The Handbook of the Equity Risk Premium, Elsevier, Amsterdam, p. 1-36. 2008. Disponível em: http://www.academicwebpages.com/preview/mehra/pdf/Ch01-N50899.pdf

Mehra, Rajnish e Prescott, Edward. "Non-Risk-based Explanations of the Equity Premium", In: Rajnish Mehra (org.), The Handbook of the Equity Risk Premium, Elsevier, Amsterdam, p. 1-36. 2008. Disponível em: http://www.academicwebpages.com/preview/mehra/pdf/Ch03-N50899.pdf

Nezafat, Pedram e Slavík, Ctirad. "Asset Prices and Business Cycles with Financial Frictions". mimeo, University of Minnesota. 2009.

Perez, Ander. "Agregate Liquidity, Financial Constraints and Investment". mimeo, Universitat Pompeu Fabra. 2010.

Rocheteau, Guillaume. "A Monetary Approach to Asset Liquidity ". mimeo, University of California, Irvine. 2009.

Salas, Sergio. "Liquidity and Monetary Policy". mimeo, University of Chicago. 2009.

Sampaio, Frederico. "Existe Equity Premium no Brasil? " In: Marco Bonomo (Org.). Finanças Aplicadas ao Brasil. Rio de Janeiro: Editora FGV, 2004. p. 87-104.

Samuelson, Paul. "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming ". The

Review of Economics and Statistics. v. 51 (3) ,p. 239-246. 1969.

Teixeira, Bruno. The Aiyagari Model with Liquidity Shock. 2010. 49 f. Dissertação (Mestrado em Economia) - Escola de Pós-Graduação em Economia, Fundação Getúlio Vargas, Rio de Janeiro.

Tobin, James. "A General Equilibrium Approach to Monetary Theory". Journal of Money, Credit and Banking. v. 1 (1), p. 15-29. 1969.

Woodford, Michael. "Public Debt as Private Liquidity ". The American Economic Review: Papers and Proceedings of the Hundred and Second Annual Meeting of the American Economic Association, v. 80 (2), p. 382-88. 1990.

A. Apêndice

A.1 Condições de Primeira Ordem

Considere o Lagrangeano para o empreendedor investidor relacionado com o problema 1:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & \log c_t^i - \lambda_t^i \left\{ \begin{array}{c} c_t^i + i_t + q_t n_{t+1}^i + Q_t b_t^i \\ - \left[r_t^k + (1-\delta) \left(\phi_t q_t + (1-\phi_t) q_t^R \right) \right] n_t - q_t i_t - b_{t-1} \end{array} \right\} \\
& + \eta_{1,t}^i \left[n_{t+1}^i - (1-\theta) i_t - (1-\phi_t)(1-\delta) n_t \right] + \eta_{2,t}^i b_t^i \\
& + \pi \beta E_t \left\{ \log c_{t+1}^i - \lambda_{t+1}^i \left[\begin{array}{c} c_{t+1}^i + i_{t+1} + q_{t+1} n_{t+2}^i + Q_{t+1} b_{t+1}^i \\ - \left[r_{t+1}^k + (1-\delta) \left(\phi_{t+1} q_{t+1} + \left(1-\phi_{t+1}\right) q_{t+1}^R \right) \right] n_{t+1}^i \\ - q_{t+1} i_{t+1} - b_t^i \end{array} \right] \right\} \\
& + (1-\pi) \beta E_t \left\{ \log c_{t+1}^s - \lambda_{t+1}^s \left[\begin{array}{c} c_{t+1}^s + q_{t+1} n_{t+2}^s + Q_{t+1} b_{t+1}^s \\ - \left[r_{t+1}^k + (1-\delta) q_{t+1} \right] n_{t+1}^i - b_t^i \end{array} \right] \right\}
\end{aligned}
$$

As condições de primeira ordem ficam:

$$\frac{\partial}{\partial c_t^i} : \frac{1}{c_t^i} = \lambda_t^i \tag{A.1.1}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial n_{t+1}^i} : \lambda_t^i q_t^R = \; & \pi \beta E_t \left\{ \lambda_{t+1}^i \left[r_{t+1}^k + (1-\delta) \left(\phi_{t+1} q_{t+1} + \left(1-\phi_{t+1}\right) q_{t+1}^R \right) \right] \right\} \\
& + (1-\pi) \beta E_t \left\{ \lambda_{t+1}^s \left[r_{t+1}^k + (1-\delta) q_{t+1} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{A.1.2}
$$

$$\frac{\partial}{\partial b_t^i} : \lambda_t^i Q_t - \eta_{2,t}^i = \pi \beta E_t \left\{ \lambda_{t+1}^i \right\} + (1-\pi) \beta E_t \left\{ \lambda_{t+1}^s \right\} \tag{A.1.3}$$

Seja agora o Lagrangeano para o empreendedor poupador, dado pelo problema 3:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \quad = \quad & \log c_t^s - \lambda_t^s \left[c_t^s + q_t n_{t+1}^s + Q_t b_t^s - \left[r_t^k + (1-\delta)\, q_t \right] n_t - b_{t-1} \right] \\
& + \eta_{1,t}^s \left[n_{t+1}^s - (1-\phi_t)(1-\delta)\, n_t \right] + \eta_{2,t}^s b_t^s \\
& + \pi \beta E_t \left\{ \log c_{t+1}^i - \lambda_{t+1}^i \left[\begin{array}{c} c_{t+1}^i + i_{t+1} + q_{t+1} n_{t+2}^i + Q_{t+1} b_{t+1}^i \\ - \left[r_{t+1}^k + (1-\delta) \left(\phi_{t+1} q_{t+1} + \left(1-\phi_{t+1}\right) q_{t+1}^R \right) \right] n_{t+1}^s \\ - q_{t+1} i_{t+1} - b_t^s \end{array} \right] \right\} \\
& + (1-\pi)\, \beta E_t \left\{ \log c_{t+1}^s - \lambda_{t+1}^s \left[\begin{array}{c} c_{t+1}^s + q_{t+1} n_{t+2}^s + Q_{t+1} b_{t+1}^s \\ - \left[r_{t+1}^k + (1-\delta)\, q_{t+1} \right] n_{t+1}^s - b_t^s \end{array} \right] \right\}
\end{aligned}$$

As condições de primeira ordem ficam:

$$\frac{\partial}{\partial c_t^s} : \frac{1}{c_t^s} = \lambda_t^s \tag{A.1.4}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial n_{t+1}^s} : \lambda_t^s q_t - \eta_{1,t} = \quad & \pi \beta E_t \left\{ \lambda_{t+1}^i \left[r_{t+1}^k + (1-\delta) \left(\phi_{t+1} q_{t+1} + \left(1-\phi_{t+1}\right) q_{t+1}^R \right) \right] \right\} \\
& + (1-\pi)\, \beta E_t \left\{ \lambda_{t+1}^s \left[r_{t+1}^k + (1-\delta)\, q_{t+1} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{A.1.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial b_t^s} : \lambda_t^s Q_t - \eta_{2,t}^s = \pi \beta E_t \left\{ \lambda_{t+1}^i \right\} + (1-\pi)\, \beta E_t \left\{ \lambda_{t+1}^s \right\} \tag{A.1.6}$$

Suponha que $n_{t+1}^s \neq 0$ e $b_t^s \neq 0$, os empreendedores poupadores irão demandar ativos e títulos. As restrições não ativas implicam que $\eta_{1,t}^s = 0$ e $\eta_{2,t}^s = 0$. Substituindo os valores dos $\lambda' s$ e igualando λ_t^s, é possível encontrar a condição de arbitragem entre títulos e ativos para o empreendedor poupador:

$$\begin{aligned}
& (1-\pi)\, E_t \left\{ \frac{ \dfrac{r_{t+1}^k + (1-\delta)\, q_{t+1}}{q_t} - \dfrac{1}{Q_t} }{ \left[r_{t+1}^k + (1-\delta)\, q_{t+1} \right] n_{t+1}^s + b_t^s } \right\} \\
= \quad & \pi E_t \left\{ \frac{ \dfrac{1}{Q_t} - \dfrac{r_{t+1}^k + (1-\delta) \left(\phi_{t+1} q_{t+1} + \left(1-\phi_{t+1}\right) q_{t+1}^R \right)}{q_t} }{ \left[r_{t+1}^k + (1-\delta) \left(\phi_{t+1} q_{t+1} + \left(1-\phi_{t+1}\right) q_{t+1}^R \right) \right] n_{t+1}^s + b_t^s } \right\}
\end{aligned} \tag{A.1.7}$$

A.2 Condição de Primeira Ordem

Nesta seção, pretende-se derivar as condições de otimalidade derivadas do problema 2. Seja o Lagrangeano em relação ao problema:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \log c_t^i - \lambda_t^i \left\{ \begin{array}{c} c_t^i + q_t^R n_{t+1}^i \\ -\left[r_t^k + (1-\delta)\left(\phi_t q_t + (1-\phi_t) q_t^R\right)\right] n_t - b_{t-1} \end{array} \right\} \\
&+ \pi\beta E_t \left\{ \log c_{t+1}^i - \lambda_{t+1}^i \left[\begin{array}{c} c_{t+1}^i + q_{t+1}^R n_{t+2}^i \\ -\left[r_{t+1}^k + (1-\delta)\left(\phi_{t+1} q_{t+1} + \left(1-\phi_{t+1}\right) q_{t+1}^R\right)\right] n_{t+1}^i - b_t^i \end{array} \right] \right\} \\
&+ (1-\pi)\beta E_t \left\{ \log c_{t+1}^s - \lambda_{t+1}^s \left[\begin{array}{c} c_{t+1}^s + q_{t+1}^R n_{t+2}^s \\ -\left[r_{t+1}^k + (1-\delta) q_{t+1}\right] n_{t+1}^i - b_t^i \end{array} \right] \right\}
\end{aligned}
$$

As condições de primeira ordem ficam:

$$
\frac{\partial}{\partial c_t^i} : \frac{1}{c_t^i} = \lambda_t^i \tag{A.2.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial n_{t+1}^i} : \lambda_t^i q_t^R = \quad & \pi\beta E_t \left\{ \lambda_{t+1}^i \left[r_{t+1}^k + (1-\delta)\left(\phi_{t+1} q_{t+1} + \left(1-\phi_{t+1}\right) q_{t+1}^R\right)\right]\right\} \\
& + (1-\pi)\beta E_t \left\{ \lambda_{t+1}^s \left[r_{t+1}^k + (1-\delta) q_{t+1}\right]\right\}
\end{aligned} \tag{A.2.2}
$$

A.3 Prova da Proposição

Suponha que θ e ϕ *sejam tais que* $q_t > 1$*, um empreendedor com oportunidade de investimento não irá demandar títulos:* $b_t^i = 0$.

Demonstração: Suponha que o empreendedor investidor demande títulos, $b_t^i \neq 0$, o que implica em $\eta_{2,t}^i = 0$ e a restrição não é ativa. Considerando também que o empreendedor poupador demande títulos, $b_t^s \neq 0$, o que implica em $\eta_{2,t}^s = 0$. Assim, as equações (A.1.3) e (A.1.6) ficam:

$$
\lambda_t^i Q_t = \pi\beta E_t \left\{\lambda_{t+1}^i\right\} + (1-\pi)\beta E_t \left\{\lambda_{t+1}^s\right\}
$$

$$
\lambda_t^s Q_t = \pi\beta E_t \left\{\lambda_{t+1}^i\right\} + (1-\pi)\beta E_t \left\{\lambda_{t+1}^s\right\}
$$

Dado que $\lambda_t^i = \frac{1}{c_t^i}$ e $\lambda_t^s = \frac{1}{c_t^s}$, e $c_t^i < c_t^s$, tem-se que $\lambda_t^i > \lambda_t^s$. Como as duas condições não podem valer ao mesmo tempo, perceba que o empreendedor investidor exige um menor valor de Q_t que o empreendedor poupador, ou seja, o empreendedor investidor exige um maior retorno. Assim, o empreendedor poupador demanda todos os títulos. Perceba que como está sendo avaliado o caso em que $q_t > 1 > q_t^R$, o retorno do ativo é maior para o empreendedor investidor, pois ele pode adquiri-lo por um valor menor que o poupador.

A.4 Precificação de Ativos

A.4.1 Precificação de Ativos 1

Nesta seção pretende-se apresentar a teoria de precificação de ativos baseada em Ljungqvist e Sargent (2004)[27]. Esta apresentação serve para comparar com a precificação do modelo proposto. Assim, considere que o agente representativo resolva o seguinte problema:

$$\begin{aligned} & Max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ s.a. \quad & c_t + Q_t B_t + q_t N_t = W_t \end{aligned}$$

em que W_t representa a riqueza do agente no período. A riqueza do próximo período é $W_{t+1} = B_t + (d_{t+1} + q_{t+1}) N_t$, em que d_{t+1} representa o dividendo do ativo. Resolvendo em relação aos títulos e aos ativos é possível encontrar as seguintes condições de otimalidade:

$$u'(c_t) Q_t = \beta E_t \{u'(c_{t+1})\}$$

$$u'(c_t) q_t = \beta E_t \{(d_{t+1} + q_{t+1}) u'(c_{t+1})\}$$

Igualando as duas equações é possível encontrar que:

$$E_t \left\{ \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \left[\left(\frac{d_{t+1} + q_{t+1}}{q_t} \right) - \frac{1}{Q_t} \right] \right\} = 0$$

[27] Foram feitas modificações na notação de Ljungqvist e Sargent para ficar de acordo com a da dissertação.

Considerando $\frac{d_{t+1}+q_{t+1}}{q_t} = R^n_{t+1}$, $\frac{1}{Q_t} = R^b_t$:

$$E_t \left\{ \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \left[R^n_{t+1} - R^b_t \right] \right\} = 0$$

Utilizando a propriedade $E_t(XY) = E_t(X) E_t(Y) + cov(X,Y)$:

$$E_t \left[u'(c_{t+1}) \right] E_t \left[R^n_{t+1} - R^b_t \right] = -cov \left\{ u'(c_{t+1}), R^n_{t+1} - R^b_t \right\}$$

Dado que R^b_t é determinístico em t+1:

$$E_t \left(R^n_{t+1} \right) - R^b_t = \frac{cov \left[-u'(c_{t+1}), R^n_{t+1} \right]}{E_t \left[u'(c_{t+1}) \right]} \tag{A.4.1.1}$$

em que $E_t \left(R^n_{t+1} \right) - R^b_t$ representa o equity premium.

A.4.2 Precificação de Ativos 2

Nesta seção deriva-se a precificação dos ativos no modelo. Considere as equações (A.1.5) e (A.1.6) que representam a condição de otimalidade do empreendedor poupador:

$$\lambda^s_t q_t = \pi\beta E_t \left\{ \lambda^i_{t+1} \left[r^k_{t+1} + (1-\delta) q^i_{t+1} \right] \right\} + (1-\pi)\beta E_t \left\{ \lambda^s_{t+1} \left[r^k_{t+1} + (1-\delta) q_{t+1} \right] \right\}$$

$$\lambda^s_t Q_t = \pi\beta E_t \left\{ \lambda^i_{t+1} \right\} + (1-\pi)\beta E_t \left\{ \lambda^s_{t+1} \right\}$$

Utilizando o fato de que $\lambda = u'(c)$, elas podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} 1 \quad = \quad & \pi\beta E_t \left\{ \frac{u'\left(c^i_{t+1}\right)}{u'\left(c^s_t\right)} \left[\frac{r^k_{t+1} + (1-\delta)\left(\phi_{t+1} q_{t+1} + \left(1-\phi_{t+1}\right) q^R_{t+1}\right)}{q_t} \right] \right\} \\ & + (1-\pi)\beta E_t \left\{ \frac{u'\left(c^s_{t+1}\right)}{u'\left(c^s_t\right)} \left[\frac{r^k_{t+1} + (1-\delta) q_{t+1}}{q_t} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$1 = \pi\beta E_t \left\{ \frac{u'\left(c^i_{t+1}\right)}{u'\left(c^s_t\right)} \frac{1}{Q_t} \right\} + (1-\pi)\beta E_t \left\{ \frac{u'\left(c^s_{t+1}\right)}{u'\left(c^s_t\right)} \frac{1}{Q_t} \right\}$$

Igualando as equações e rearranjando os termos:

$$\pi E_t \left\{ \frac{u'\left(c_{t+1}^{i}\right)}{u'\left(c_t^{s}\right)} \left[R_t^{i} - R_t^{b}\right] \right\} + (1-\pi) E_t \left\{ \frac{u'\left(c_{t+1}^{s}\right)}{u'\left(c_t^{s}\right)} \left[R_t^{s} - R_t^{b}\right] \right\} = 0$$

Dado que $E[X] + E[Y] = E[X+Y]$, a expressão acima pode ser reescrita como:

$$E_t \left\{ \pi \frac{u'\left(c_{t+1}^{i}\right)}{u'\left(c_t^{s}\right)} \left[R_t^{i} - R_t^{b}\right] + (1-\pi) \frac{u'\left(c_{t+1}^{s}\right)}{u'\left(c_t^{s}\right)} \left[R_t^{s} - R_t^{b}\right] \right\} = 0$$

Escrevendo como variável aleatória V:

$$V_{t+1} = \frac{u'\left(c_{t+1}^{\alpha}\right)}{u'\left(c_t^{s}\right)} \left[R_t^{\alpha} - R_t^{b}\right] \ ; \text{com} \begin{cases} \alpha = i, com\ prob.\pi \\ \alpha = s, com\ prob.(1-\pi) \end{cases}$$

Definindo agora as seguintes variáveis aleatórias U e W:

$$U_{t+1} = \frac{u'\left(c_{t+1}^{\alpha}\right)}{u'\left(c_t^{s}\right)} \ ; \text{com} \begin{cases} \alpha = i, com\ prob.\pi \\ \alpha = s, com\ prob.(1-\pi) \end{cases}$$

$$W_{t+1} = R_t^{\alpha} \ ; \text{com} \begin{cases} \alpha = i, com\ prob.\pi \\ \alpha = s, com\ prob.(1-\pi) \end{cases}$$

Resolvendo em relação a V:

$$E_t\left(V_{t+1}\right) = E_t\left[U_{t+1}\left(W_{t+1} - R_t^{b}\right)\right]$$

Utilizando a propriedade $E_t(XY) = E_t(X) E_t(Y) + cov(X,Y)$:

$$E_t\left(V_{t+1}\right) = E_t\left(U_{t+1}\right) E_t\left(W_{t+1} - R_t^{b}\right) + cov\left(U_{t+1}, W_{t+1} - R_t^{b}\right)$$

Dado que R_t^{b} é um valor determinístico em t+1, tem-se que $E_t\left(R_t^{b}\right) = R_t^{b}$ e $cov\left(U_{t+1}, -R_t^{b}\right) = 0$. Assim:

$$E_t\left(V_{t+1}\right) = E_t\left(U_{t+1}\right)\left[E_t\left(W_{t+1}\right) - R_t^{b}\right] + cov\left(U_{t+1}, W_{t+1}\right)$$

Mas dado que $E_t\left(V_{t+1}\right) = 0$ e $W_{t+1} = R_t^{\alpha}$, tem-se que:

$$E_t\left(U_{t+1}\right)\left[E_t\left(R_t^{\alpha}\right) - R_t^{b}\right] = -cov\left(U_{t+1}, R_t^{\alpha}\right) \tag{A.4.2.1}$$

R_t^α é variável aleatória e pode ser escrita como:

$$\pi R_t^i + (1-\pi) R_t^s = E_t\left(R_t^S\right)$$

onde $E_t\left(R_{t+1}^S\right)$ representa o retorno esperado da compra de um ativo pelo empreendedor poupador e é igual a:

$$R_t^S = \frac{r_{t+1}^k + (1-\delta) q_{t+1}}{q_t} - \pi (1-\delta)\left(1-\phi_{t+1}\right)\left(\frac{q_{t+1} - q_{t+1}^R}{q_t}\right)$$

Seja agora apenas $cov\left(-U_{t+1}, R_t^\alpha\right)$:

$$cov\left(-U_{t+1}, R_t^S\right) = cov\left[-U_{t+1}, \frac{r_{t+1}^k + (1-\delta) q_{t+1}}{q_t} - \pi (1-\delta)\left(1-\phi_{t+1}\right)\left(\frac{q_{t+1} - q_{t+1}^R}{q_t}\right)\right]$$

Dado que $cov(aX, bY + dW) = ab.cov(X,Y) + ad.cov(X,W)$:

$$\begin{aligned} cov\left(-U_{t+1}, R_t^S\right) &= cov\left[-U_{t+1}, \frac{r_{t+1}^k + (1-\delta) q_{t+1}}{q_t}\right] \\ &\quad + \pi (1-\delta)\, cov\left[U_{t+1}, \left(1-\phi_{t+1}\right)\left(\frac{q_{t+1} - q_{t+1}^R}{q_t}\right)\right] \end{aligned}$$

Assim, a equação (A.4.2.1) permite que o equity premium possa ser escrito como:

$$\begin{aligned} E_t\left(R_t^S\right) - R_t^b &= \frac{cov\left[-U_{t+1}, \frac{r_{t+1}^k + (1-\delta) q_{t+1}}{q_t}\right]}{E_t\left(U_{t+1}\right)} \\ &\quad + \frac{\pi (1-\delta)\, cov\left[U_{t+1}, \left(1-\phi_{t+1}\right)\left(\frac{q_{t+1} - q_{t+1}^R}{q_t}\right)\right]}{E_t\left(U_{t+1}\right)} \end{aligned} \tag{A.4.2.2}$$

onde $E_t\left(U_{t+1}\right) = E_t\left[\pi \frac{u'\left(c_{t+1}^i\right)}{u'\left(c_t^s\right)} + (1-\pi)\frac{u'\left(c_{t+1}^s\right)}{u'\left(c_t^s\right)}\right]$.

A.5 Oferta Ótima de Liquidez no Modelo de Kiyotaki e Moore

Segundo Kocherlakota (2007), existe uma equivalência entre os modelos em que os títulos ou a moeda são emitidos pelo governo. Para ser válida tal equivalência é necessário que o governo utilize o imposto na forma *lump-sum* e que a moeda não possua vantagens transacionais sobre os títulos. Caso se considere a forma original do modelo de KM com moeda fiduciária, mas com emissão monetária análoga ao déficit no mercado de títulos deste trabalho, ambos os modelos são equivalentes[28]. Assim, os agentes possuem as mesmas escolhas de equilíbrio. Perceba que o retorno da moeda é igual a $\frac{p_{t+1}}{p_t}$, em que p_t representa o preço da moeda em função do bem homogêneo em t. Fazendo uma equivalência entre o modelo de KM e o modelo 2, o retorno da moeda em estado estacionário é igual ao retorno dos títulos:

$$\frac{\bar{p}_{t+1}}{\bar{p}_t} = \frac{1}{\beta}$$

Mas como o preço da moeda é igual ao inverso do nível de preços, pode-se reescrever a relação acima como:

$$\frac{\bar{P}_t}{\bar{P}_{t+1}} = \frac{1}{\beta}$$

Na forma logarítmica:

$$\log \bar{P}_t - \log \bar{P}_{t+1} = \log 1 - \log \beta$$
$$\bar{\pi} = -\rho$$

em que ρ é a taxa de desconto intertemporal. A oferta ótima de liquidez determina uma deflação de estado estacionário igual à taxa de desconto intertemporal equivalente à regra de Friedman. Como exposto em Cole e Kocherlakota (1998), a taxa de deflação deve ser igual à taxa de juros real. Desta forma, o retorno do ativo líquido é igual ao retorno líquido dos ativos no modelo de KM.

[28] A emissão monetária seria $p_t M_t - p_t M_{t+1} = T_t$.

A.6 Impulso-Resposta[29]

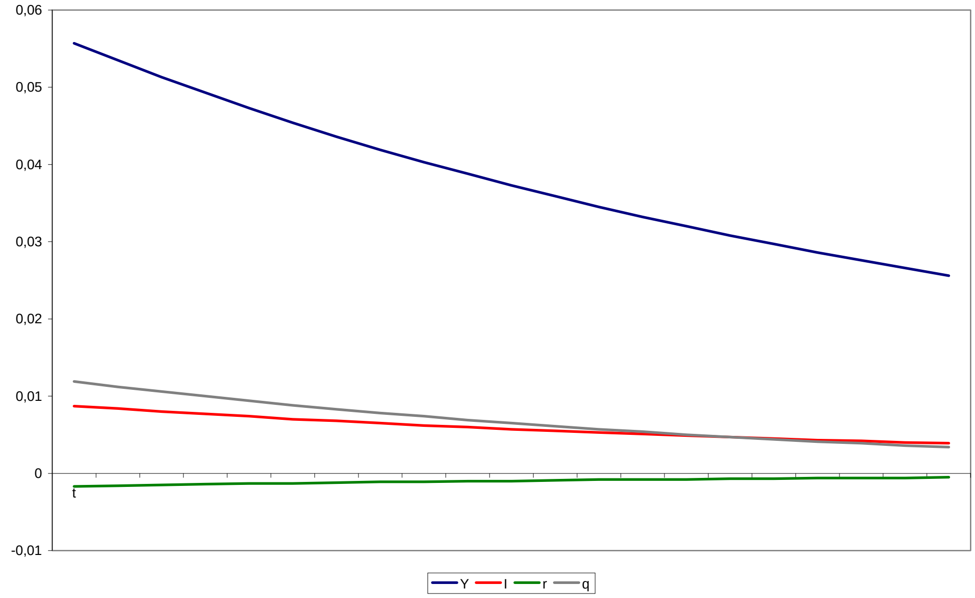

Figura 2: IRFs do Modelo 1 - Choque de Produtividade

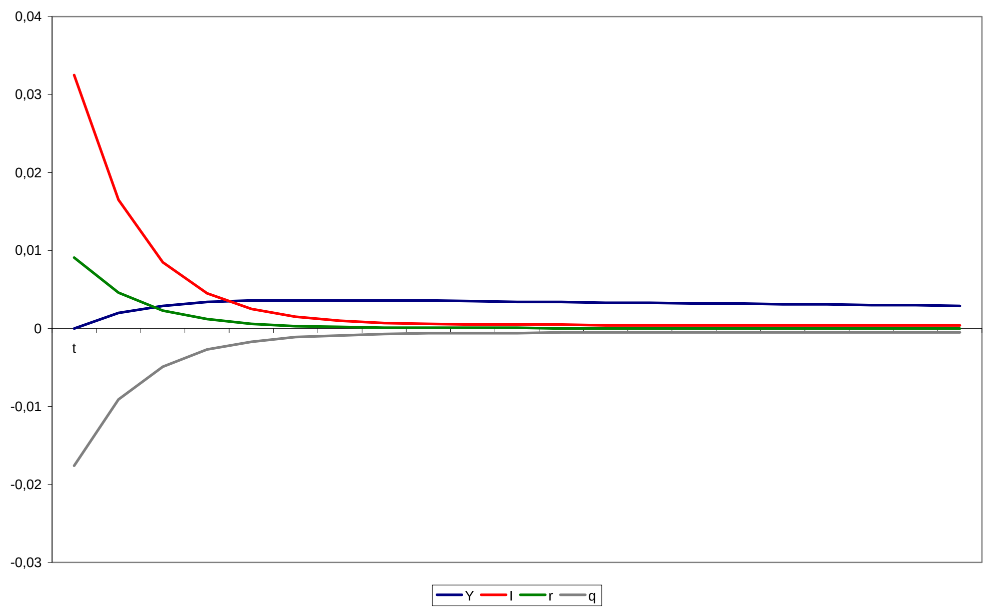

Figura 3: IRFs do Modelo 1 - Choque de Liquidez dos Ativos

[29] Os gráficos com impulso-resposta desta seção possuem 20 períodos.

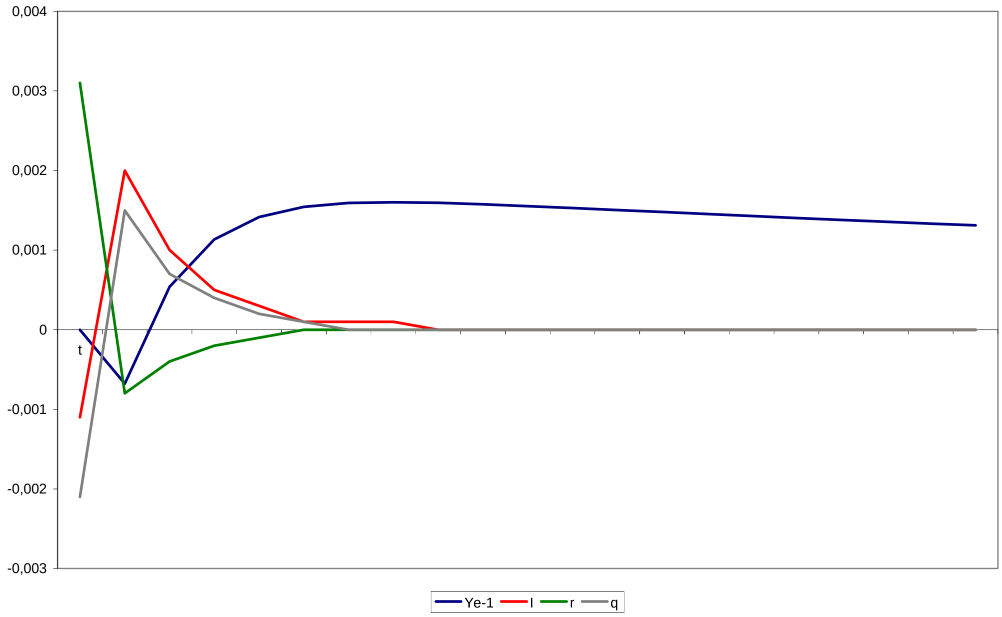

Figura 4: IRFs do Modelo 1 - Choque na Quantidade de Títulos

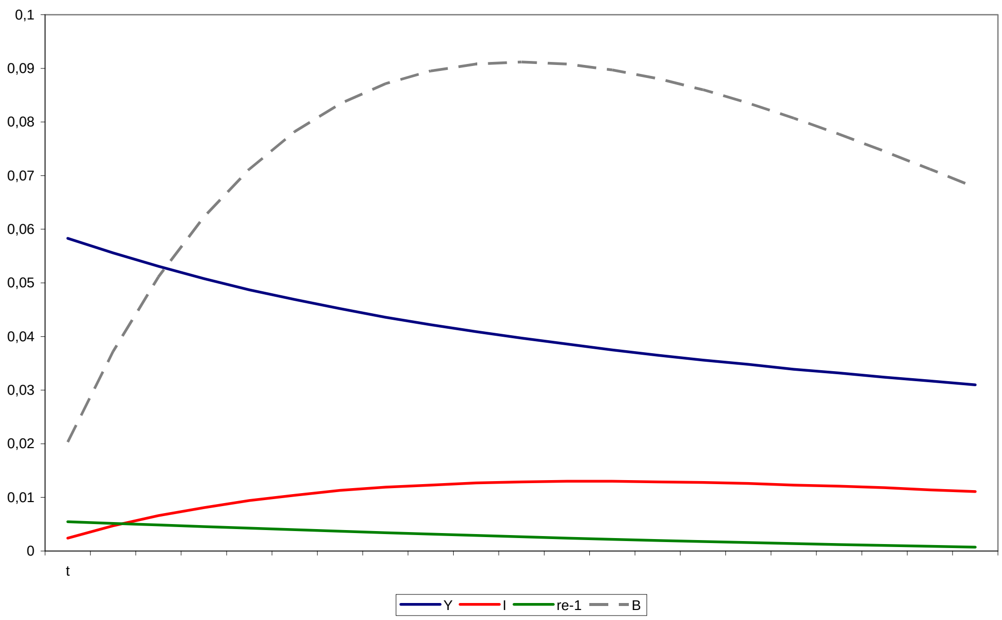

Figura 5: IRFs do Modelo 2 - Choque de Produtividade

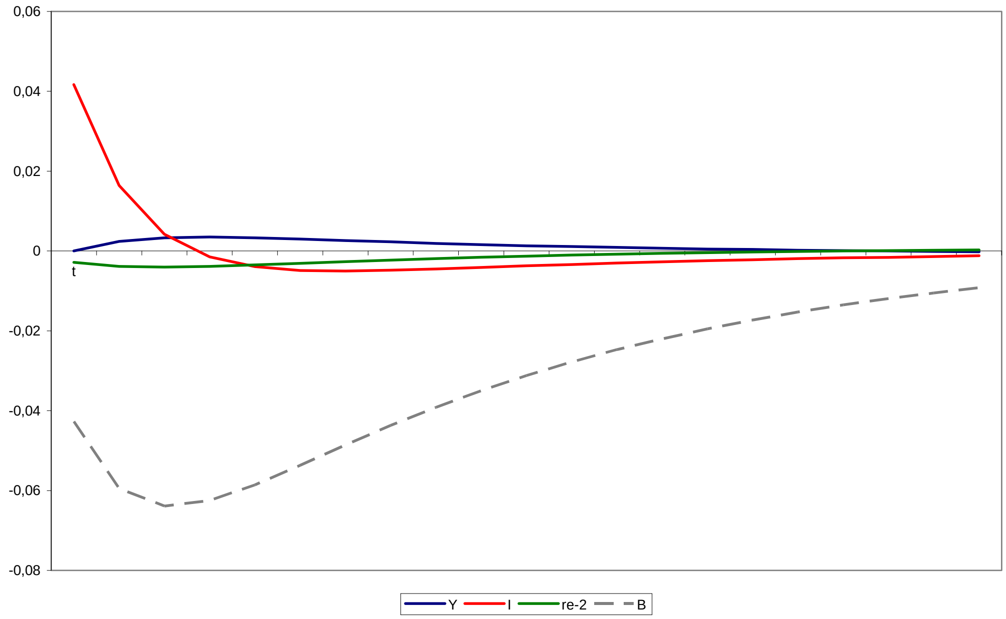

Figura 6: IRFs do Modelo 2 - Choque de Liquidez dos Ativos

7 Código

// Código Dynare 4.2.0

```
// OBS: Código do Modelo 1 ver no final para modificações necessárias para simular o Modelo 2
// Modelo da Dissertação com Restrição de Liquidez
// choque de produtividade e liquidez
periods 1000;
//————————————————-
// Variáveis
//————————————————-
var A Y w L rk q qr I Ns Ni N Ci Cs Cw C QT r T EP RN PLN RLN fi fi_f B vb RLNi;
varexo ea efi evb;
parameters eta alpha omega theta pi beta delta rhoA miA rhofi mifi rhovb;
predetermined_variables N Ni Ns;
//————————————————-
// Parametrização
//————————————————-
eta=2;
alpha=0.36;
omega=1;
theta=0.15;
pi=0.1;
beta=0.98;
delta=0.025;
rhoA=0.95;
miA=1;
rhofi=0.5;
mifi=0.1;
rhovb=0.5;
//————————————————-
// Modelo
//————————————————-
```

```
model;
// (1) taxa de juros (produtividade marginal do capital)
rk=(A^((1+eta)/(eta+alpha)))*alpha*(((1-alpha)/omega)^((1-alpha)/(eta+alpha)))
*(N^(eta*(alpha-1)/(eta+alpha)));

// (2) salário
w=(A^(eta/(eta+alpha)))*((1-alpha)^(eta/(eta+alpha)))*(omega^(alpha/(eta+alpha)))
*(N^(eta*alpha/(eta+alpha)));
// (3) trabalho agregado de equilíbrio
L=(((1-alpha)/omega)*A)^(1/(eta+alpha))*N^(alpha/(eta+alpha));
// (4) produto
Y=A*(N^alpha)*(L^(1-alpha));
// (5) custo real de reposição do capital para o empreendedor investidor
qr=(1-theta*q)/(1-theta);
// (6) consumo do empreendedor investidor
Ci=pi*(1-beta)*((rk+(1-delta)*(fi*q+(1-fi)*qr))*N+B(-1));
// (7) consumo do empreendedor poupador
Cs=(1-pi)*(1-beta)*((rk+(1-delta)*q)*N+B(-1));
// (8) consumo dos trabalhadores
Cw=w*L-T;
// (9) consumo total
C=Ci+Cs+Cw;
// (10) investimento
I=pi*(beta*((rk+fi*(1-delta)*q)*N+B(-1))-(1-beta)*(1-delta)*(1-fi)*qr*N)/(1-theta*q);
// (11) ativo do empreendedor poupador
Ns(+1)=theta*I+(1-pi+pi*fi)*(1-delta)*N;
// (12) ativo do empreendedor investidor
Ni(+1)=pi*(1-fi)*(1-delta)*N+(1-theta)*I;
// (13) movimento do capital
N(+1)=(1-delta)*N+I;
// (14) renda total dos empreendedores
rk*N=I+Ci+Cs-T;
```

```
// (15) taxa de juros dos títulos;
r=(1/QT)-1;
// (16) e (17) evolução dos títulos
B=2.5+vb;
B(-1)-QT*B=T;
// (18) choque na quantidade de títulos
vb=rhovb*vb(-1)+evb;
// (19) arbitragem entre títulos e ativos
(1-pi)*((((rk(+1)+(1-delta)*q(+1))/q)-(1/QT))/((rk(+1)+(1-delta)*q(+1))*Ns(+1)+B))
=pi*(((1/QT)-((rk(+1)+(1-delta)*(fi(+1)*q(+1)+(1-fi(+1))*qr(+1)))/q))/
((rk(+1)+(1-delta)*(fi(+1)*q(+1)+(1-fi(+1))*qr(+1)))*Ns(+1)+B));
// (20) choque de produtividade
A=(1-rhoA)*miA+rhoA*A(-1)+ea;
// (21) choque de liquidez
fi=(1-rhofi)*mifi+rhofi*fi(-1)+efi;
// (22) fronteira de liquidez
fi_f=(((1-theta)*(1-pi)-theta*pi)/((1-delta)*pi))*(beta*(rk+1-delta)-(1-delta))
+((beta*((1-theta)*(1-pi)-theta*pi)-(1-theta)*QT)/(1-delta)*pi)*(B/N);
// (24) retorno dos bruto ativos
RN=((rk(+1)+(1-delta)*q(+1))/q);
// (25) custo de liquidez (prêmio de liquidez)
PLN=pi*(1-delta)*(1-fi(+1))*((q(+1)-qr(+1))/q);
// (26) retorno efetivo dos ativos
RLN=RN-PLN;
// (27) equity premium
EP=RLN-(1/QT);
// (28) retorno de um ativo pelo empreendedor investidor
RLNi=((rk(+1)+(1-delta)*q(+1))/qr)-pi*(1-delta)*(1-fi(+1))*((q(+1)-qr(+1))/qr);
end;
//—————————-
// Simulação
```

```
//————————————-
initval;
q=1;
qi=1;
qr=(1-theta*q)/(1-theta);
N=5;
A=1;
B=0.07*N;
rk=alpha*(((1-alpha)/omega)^((1-alpha)/(eta+alpha)))*((N)^(eta*(alpha-1)/(eta+alpha)));
w=((1-alpha)^(eta/(eta+alpha)))*(omega^(alpha/(eta+alpha)))*((N)^(eta*alpha/(eta+alpha)));
L=(((1-alpha)/omega))^(1/(eta+alpha))*N^(alpha/(eta+alpha));
Y=(N^alpha)*(L^(1-alpha));
I=delta*N;
Ns=(1-pi)*N;
Ni=pi*N;
Cs=(1-pi)*(1-beta)*((rk+(1-delta)*q)*N+B);
Ci=pi*(1-beta)*((rk+(1-delta)*(fi*q+(1-fi)*qr))*N+B);
C=Ci+Cs+Cw;
EU=pi*(Cs/Ci)+(1-pi)*(Cs/Cs);
QT=beta;
r=(1/beta)-1;
fi=0.1;
fi_f=0.1;
end;
shocks;
var ea; stderr 0.01;
var efi; stderr 0.01;
var evb; stderr 0.01;
end;
resid;
steady;
```

```
check;

stoch_simul(order=1, irf=50, hp_filter=1600);

// Para simular o Modelo 2 deve-se substituir as equações (16) e (18)

// Lembrar de não declarar vb como variável endógena e evb como choque

// quantidade ótima de liquidez

B=(1/((1-theta)*QT))*((((1-theta)*(1-pi)-theta*pi)*(beta*(rk+1-delta)-(1-delta))-fi*(1-delta)*pi)*N
+beta*((1-theta)*(1-pi)-theta*pi)*B(-1));
```