

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

AVALIAÇÃO DA RIGIDEZ DE PÓRTICOS  
TRIDIMENSIONAIS DE CONCRETO ARMADO

JANES CLEITON ALVES DE OLIVEIRA

ORIENTADOR: GUILHERME SALES S. A. MELLO  
CO-ORIENTADOR: ELDON LONDE MELLO

TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E  
CONSTRUÇÃO CIVIL

PUBLICAÇÃO: PECC.TD – 001A / 09

BRASÍLIA/DF: MARÇO – 2009

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA

AVALIAÇÃO DA RIGIDEZ DE PÓRTICOS  
TRIDIMENSIONAIS DE CONCRETO ARMADO

JANES CLEITON ALVES DE OLIVEIRA

TESE SUMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:

---

Prof. Guilherme Sales S. de A. Melo, PhD (ENC – UnB)  
(Orientador)

---

Prof. Yosiaki Nagato, PhD (ENC – UnB)  
(Examinador Interno)

---

Prof. José Luiz Vital de Brito, DSc (ENC – UnB)  
(Examinador Interno)

---

Prof. Giuseppe Barbosa Guimarães, DSc (PUC – RIO)  
(Examinador Externo)

---

Prof. Dênio Raman de Carvalho, DSc (UFPa)  
(Examinador Externo)

Brasília-DF, 06 de Março de 2009

## FICHA CATALOGRÁFICA

OLIVEIRA, J.C.A. de

Avaliação da Rigidez de Pórticos Tridimensionais de Concreto Armado

[Distrito Federal] 2009.

xiv, 121p., 297mm (ENC/FT/UnB, Doutor, Estruturas e Construção Civil, 2009).

Tese de Doutorado – Universidade de Brasília – Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental

1.Rigidez

2.Concreto Armado

3.Método dos Elementos Finitos

4.Estabilidade

5.Dinâmica

6.Plasticidade

I.ENC/FT/UnB

II. Título (série)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

OLIVEIRA, J.C.A. de (2009). Avaliação da Rigidez de Pórticos Tridimensionais de Concreto Armado. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação PECC.TD – 001A/09, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 121p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Janes Cleiton Alves de Oliveira

TÍTULO: Avaliação da Rigidez de Pórticos Tridimensionais de Concreto Armado.

GRAU: Doutor

ANO: 2009

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente com propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa tese de doutorado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Janes Cleiton Alves de Oliveira

Rua SB-50 Qd.27 Lt.21 – Portal do Sol II

74884-660 - Goiânia – Goiás – Brasil

## DEDICATÓRIA

*Primeiramente ao Senhor Jesus,  
A Ele, toda honra e toda Glória.*

*A minha esposa, companheira e cúmplice, Luciana  
Ao meu Bebê, que Deus enviou aos meus cuidados, Rayana  
Aos Meus Queridos Pais.*

## AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores, Prof. Guilherme e Prof. Eldon, por toda atenção dispensada a este trabalho. Nunca esquecerei o que fizeram por mim e serei grato, por toda minha vida, pela oportunidade que me deram. Ao mestre Prof. Marcello da Cunha Moraes pelo incentivo nos estudos de Pós-graduação.

A minha querida esposa Luciana, fiel companheira em todas as etapas de minha vida. Receba, querida, este trabalho como uma prova de meu amor. Ao meu bebê, Rayana, sinônimo de orgulho e alegria em minha vida. Aos meus pais, Antônio e Maria, responsáveis pela minha educação e pelo meu caráter.

As minhas irmãs e cunhados, com muito carinho. Ao Padre João Dias, meu segundo Pai. Aos meus melhores amigos: André Luiz, Antônio Marques, Cida, Fernando Neves e Marcus Vinícius. Vocês são responsáveis diretos por todo este trabalho.

A todos os Professores do PECC-UnB, em especial: Prof. Teatini, Prof. Paul, Profa. Graziela, Prof. Brito, Profa. Dianne e Prof. Nagato. Responsáveis pela minha formação na Universidade de Brasília. À Universidade Católica de Goiás e a Universidade Estadual de Goiás, pelo incentivo durante os estudos de pós-graduação. Aos professores José Alves, Manoel Álvares, Alberto Chaer e Antonio Pasqualetto, pelo incentivo e amizade sincera.

## RESUMO

# AVALIAÇÃO DA RIGIDEZ DE PÓRTICOS TRIDIMENSIONAIS DE CONCRETO ARMADO

Autor: Janes Cleiton Alves de Oliveira

Orientador: Guilherme Sales S. de A. Melo

Co-Orientador: Eldon Londe Mello

Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, Março de 2009

A avaliação da rigidez de pórticos tridimensionais é importante para aferir a confiabilidade de projetos estruturais, principalmente os que envolvem edifícios altos, frente aos estados limites últimos e de utilização. Nos edifícios de concreto armado, esta avaliação é realizada através de uma análise da estabilidade global seja por processos aproximados, determinando o parâmetro de instabilidade  $\alpha$  e o coeficiente  $\gamma_z$  e/ou, por processos mais rigorosos, utilizando por exemplo o método P- $\Delta$  ou uma análise criteriosa de segunda ordem.

Este trabalho visa contribuir para a avaliação da rigidez de pórticos de concreto armado considerando alguns fatores que julgamos relevantes para a análise como: o aspecto tridimensional da estrutura, a interação conjunta dos elementos lajes – vigas – pilares, o fator de carga de colapso plástico, o fator de carga crítica de Euler e as frequências naturais, obtidas através de uma análise de vibrações livres.

Através de modelagens numéricas, baseadas no método dos elementos finitos (MEF), foram produzidos programas, em linguagem Fortran, que permitem avaliar o comportamento de pórticos em uma análise elastoplástica incremental, análise de instabilidade elástica e análise de frequências naturais sob vibrações livres. São apresentadas correlações entre todos os parâmetros envolvidos obtidos de forma simplificada (parâmetro  $\alpha$  e  $\gamma_z$ ) e através de processos rigorosos ( $\lambda_c$ ,  $\lambda_{cr}$  e  $\omega$ ), utilizando o MEF. Os programas desenvolvidos são utilizados em exemplos reais de estruturas de edifícios mostrando o grau de influência de cada parâmetro na rigidez do arranjo estrutural.

Palavras-Chave: Concreto Armado – Pórticos – MEF – Estabilidade – Vibrações Livres

## ABSTRACT

### EVALUATION OF STIFFNESS IN THREE-DIMENSIONAL FRAMES OF REINFORCED CONCRETE

Author: Janes Cleiton Alves de Oliveira

Advisor: Guilherme Sales S. de A. Melo

Co-Advisor: Eldon Londe Mello

Post-graduate Course in Structures and Civil Engineering

Brasília, March - 2009

An evaluation of stiffness in three-dimensional frames is important to ensure safety in structural projects, especially in tall buildings, where both ultimate limit state and serviceability limit state have to be considered. In reinforced concrete buildings, this evaluation is calculated through an analysis of global stability, either through approximate methods, determining the parameter of instability  $\alpha$  and  $\gamma_z$  parameters or by more demanding methods, for example, using the P- $\Delta$  analysis.

This work aims to contribute to an evaluation of strength in reinforced concrete frames. It considers a few factors which the author deems relevant to the analysis such as:

1. the tri-dimensional aspect of the structure.
2. the combined interaction of slabs, beams and columns.
3. the plastic collapse load factor.
4. the critical load factor.
5. natural frequencies.

Using numerical models based on the method of finite elements (FEM), software programs were developed in Fortran language. They allow an evaluation of the behavior of frames in an incremental elastoplastic analysis, in an elastic stability analysis and in one of natural frequencies under free vibrations. Correlations are presented among all of the involved parameters, which were obtained from the simplified methods ( $\alpha$  and  $\gamma_z$  parameters) and from the more rigorous methods ( $\lambda_c$ ,  $\lambda_{cr}$  e  $\omega$ ), using FEM. These software programs are used in actual building structures and show the degree of influence of each parameter which contributes to the stiffness of the structural framework.

**Key-words:** *reinforced concrete – frames – FEM – stability – free vibrations*

## SUMÁRIO

### 1 – INTRODUÇÃO

1.1 – APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA E MOTIVAÇÃO.....	01
1.2 – OBJETIVOS GERAIS E ESPECÍFICOS DO TRABALHO.....	02
1.3 – METODOLOGIA.....	03
1.4 – APRESENTAÇÃO DOS CAPÍTULOS.....	04

### 2 – FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 – HISTÓRICO SOBRE A AVALIAÇÃO DA RIGIDEZ DOS EDIFÍCIOS DE CONCRETO ARMADO.....	06
2.1.1 – O Parâmetro $\alpha$ .....	07
2.1.2 – O Coeficiente $\gamma_z$ .....	13
2.1.3 – O Método P- $\Delta$ .....	15
2.1.4 – Análise Rigorosa de Segunda Ordem.....	17
2.2 – SOBRE A EVOLUÇÃO DAS PESQUISAS NO CAMPO DA ESTABILIDADE GLOBAL.....	20
2.3 – CONSIDERAÇÕES SOBRE OS MODELOS DE CÁLCULO.....	22
2.4 – RELAÇÃO MOMENTO FLETOR x CURVATURA.....	24
2.5 – BASES TEÓRICAS SOBRE A ANÁLISE PLÁSTICA.....	26
2.5.1 – Critério de Plastificação – Lajes.....	31
2.5.2 – Critério de Plastificação – Vigas.....	34
2.5.3 – Critério de Plastificação – Pilares.....	36
2.6 – ANÁLISE DE INSTABILIDADE ELÁSTICA.....	38
2.7 – ANÁLISE DINÂMICA DE VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS.....	44
2.8 – O CRITÉRIO DE RANKINE-MERCHANT.....	50

### 3 – IMPLEMENTAÇÕES NUMÉRICAS

3.1 – INTRODUÇÃO.....	54
3.2 – O PROGRAMA DE ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA (ALEL).....	55
3.2.1 Considerações sobre o Elemento de Placa.....	55
3.2.2 O Modelo de Pórtico Espacial.....	66



3.2.3 A Acoplagem Pórtico - Placa.....	71
3.2.4 A Influência das Paredes Estruturais.....	73
3.2.5 Fluxograma do Programa ALEL.....	79
3.3 – O PROGRAMA DE ANÁLISE DE INSTABILIDADE ELÁSTICA (AIEL).....	79
3.3.1 – A Obtenção da Matriz de Rigidez Tangente ( $k_T$ ).....	80
3.3.2 – O Fluxograma do Programa AIEL.....	82
3.4 – O PROGRAMA DE ANÁLISE DE VIBRAÇÕES LIVRES (ADVL).....	82
3.4.1 – Fluxograma do Programa ADVL.....	84
3.5 – O PROGRAMA DE ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA INCREMENTAL – AEPI... 85	
3.6 – EXEMPLOS DE CALIBRAÇÃO E VALIDAÇÃO.....	86
3.6.1 – Calibração do Programa ALEL – Deslocamentos no Pórtico Espacial.....	86
3.6.2 – Calibração do Programa ALEL – Deslocamentos na Laje Isolada.....	87
3.6.3 – Calibração do Programa ALEL – Acoplamento Pórtico – Placa.....	88
3.6.4 – Calibração dos Programas AIEL e ADVL – Instabilidade e Dinâmica.....	90
3.6.5 – calibração do Programa AEPI – Análise Elastoplástica.....	91

#### **4 – APLICAÇÕES PRÁTICAS**

4.1 INTRODUÇÃO.....	92
4.2 EXEMPLO 1 – EDIFÍCIO COM 10 PAVIMENTOS TIPO E COBERTURA.....	93
4.3 EXEMPLO 2 – EDIFÍCIO DE 12 PAVIMENTOS TIPO E COBERTURA.....	97
4.4 EXEMPLO 3 – EDIFÍCIO DE 15 PAVIMENTOS TIPO E COBERTURA.....	101
4.5 EXEMPLO 4 – EDIFÍCIO COM 24 PAVIMENTOS TIPO E COBERTURA.....	105
4.6 ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS.....	108

#### **5 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

5.1 CONCLUSÕES.....	113
5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	115

#### **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Frequência Crítica para casos especiais de estruturas submetidas à vibração pela ação de pessoas (NBR 6118/2003) .....	47
Tabela 2.2 – Parâmetro para Determinação de Efeitos Dinâmicos (NBR6123/1988) ..	48
Tabela 2.3 - Considerações sobre a relação $\lambda_{CR} / \lambda_C$ .....	53
Tabela 3.1 – Deslocamentos Monitorados no Pórtico Espacial .....	87
Tabela 3.2 – Deslocamentos no centro da laje .....	88
Tabela 3.3 – Validação do Acoplamento .....	89
Tabela 4.1 – Efeitos de Segunda Ordem (Direções x e/ou y) – Edifício 1.....	95
Tabela 4.2 – Valores de $\lambda_{cr}$ , $\lambda_c$ , $\lambda_{cr}/\lambda_c$ e $\lambda_R$ – Exemplo 1.....	95
Tabela 4.3 – Valores de Períodos Fundamentais e Frequências Naturais - Exemplo 1	96
Tabela 4.4 - Efeitos de Segunda Ordem (Direção x ) – Edifício 2.....	99
Tabela 4.5 – Valores de $\lambda_{cr}$ , $\lambda_c$ , $\lambda_{cr}/\lambda_c$ e $\lambda_R$ – Exemplo 2.....	100
Tabela 4.6– Valores de Períodos Fundamentais e Frequências Naturais - Exemplo 2	100
Tabela 4.7 - Efeitos de Segunda Ordem (Direção x ) – Edifício 3.....	103
Tabela 4.8 – Valores de $\lambda_{cr}$ , $\lambda_c$ , $\lambda_{cr}/\lambda_c$ e $\lambda_R$ – Exemplo 3.....	104
Tabela 4.9– Valores de Períodos Fundamentais e Frequências Naturais - Exemplo 3	104
Tabela 4.10 - Efeitos de Segunda Ordem (Direção x ) – Edifício 4.....	107
Tabela 4.11 – Valores de $\lambda_{cr}$ , $\lambda_c$ , $\lambda_{cr}/\lambda_c$ e $\lambda_R$ – Exemplo 4.....	107
Tabela 4.12– Valores de Períodos Fundamentais e Frequências Naturais - Exemplo 4	108

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Edifícios Altos do Mundo .....	1
Figura 2.1 – Análise da Coluna Isolada ( Parâmetro $\alpha$ ) .....	8
Figura 2.2 - Valores de $\alpha_{\text{klim}}$ de acordo com o Contraventamento Utilizado .....	11
Figura 2.3 - Simplificação Adotada no Cálculo da Inércia Equivalente .....	12
Figura 2.4 - Cálculo das forças horizontais adicionais (“sway forces”) .....	15
Figura 2.5 – Atuação das <i>Sway Forces</i> em um Pórtico .....	16
Figura 2.6 – Elemento Indeformado e Deformado – Pórtico .....	17
Figura 2.7 – Principais Modelos de Cálculo Admitidos .....	23
Figura 2.8 – Relação Momento Fletor x Curvatura (Macgregor, 2005).....	25
Figura 2.9 – Características da Ductilidade de Seções Concreto Armado sob Flexão	26
Figura 2.10 - Modelo de Material Rígido-Plástico .....	27
Figura 2.11 - Teoremas da Análise Plástica (Mello, 1993).....	28
Figura 2.12 - Modelo de Material Elastoplástico .....	29
Figura 2.13 – Distribuição de Tensões em uma Seção de Aço .....	30
Figura 2.14 – Distribuição de Tensões em uma Seção de Concreto Armado .....	31
Figura 2.15 – Diagrama de Tensões e Deformações – Seção Retangular .....	32
Figura 2.16 – Domínios de Dimensionamento .....	32
Figura 2.17 – Barra Reta Carregada Axialmente .....	38
Figura 2.18 – Barra Reta Com Carregamento Excêntrico .....	39
Figura 2.19 – Problema de Ponto Limite .....	40
Figura 2.20 – Modos de Flambagem – Coluna Isolada .....	41
Figura 2.21 - Cálculo da Carga Crítica em Pórticos .....	42
Figura 2.22 – Esquema para Modelo Dinâmico Discreto (NBR 6123/1988) .....	49
Figura 2.23- Curva Carga versus Deflexão Linear e Não Linear Elástica .....	51
Figura 3.1 – Quadro Resumo das Implementações Numéricas .....	54
Figura.3.2 – Esquema da Placa Idealizada .....	55
Figura 3.3 – Plano Médio Indeformado e Deformado - Teoria de Reissner-Mindlin ..	57
Figura 3.4 – Convenção de Sinais para os Esforços Internos .....	59
Figura 3.5 – Distribuição das Tensões Cisalhantes no Elemento de Placa .....	60
Figura 3.6 – Condições de Contorno usuais para as Placas .....	62
Figura 3.7 – Elemento Finito Bilinear de 4 Nós .....	63
Figura 3.8 - Eixos locais, globais e de referência .....	66
Figura 3.9 - Sistema de Numeração Local .....	66
Figura 3.10 - Sistema de Numeração Global .....	66

Figura 3.11 - Rotação de um Membro de Pórtico Espacial em torno do eixo $X_m$ .....	67
Figura 3.12 - Representação dos Esforços Internos .....	68
Figura 3.13 - Matrizes de Rigidezes Elemento Desconexo de Pórtico Espacial .....	69
Figura 3.14 – Matriz de Rigidez Global Elemento Desconexo de Pórtico Espacial .....	70
Figura 3.15 – Graus de Liberdade para o Elemento de Pórtico e Placa .....	72
Figura 3.16- Especificação para Paredes Estruturais Segundo a NBR6118 /2003 .....	73
Figura 3.17 - Influência do Arranjo Estrutural na Análise com Paredes Estruturais ....	74
Figura 3.18 - Idealização das Colunas Rígidas .....	75
Figura 3.19 - Idealização das Paredes Estruturais com Furos - Mét. Colunas Rígidas	76
Figura 3.20 - Vigas com Extremidades Rígidas .....	77
Figura 3.21 – Translações/Rotações Unitárias-Vigas c/ Extremidades Rígidas .....	77
Figura 3.22 – Fluxograma do Programa ALEL .....	79
Figura 3.23 – Graus de Liberdade – Elemento de Pórtico Plano .....	80
Figura. 3.24 – Fluxograma do Programa AIEL .....	82
Figura. 3.25 – Fluxograma do Programa ADVL .....	84
Figura 3.26 – Fluxograma do Programa AEPI .....	85
Figura 3.27 – Portico Espacial (Harrison, 1972).....	86
Figura 3.28 – Laje Isolada (Timoshenko & Krieger, 1959).....	87
Figura 3.29 – Pórtico Acoplado à Placa .....	89
Figura 3.30 – Modos de Vibração – Pórtico Espacial.....	90
Figura 3.31 – Análise Elastoplástica – Pórtico Espacial.....	91
Figura 4.1 – Esquema do Edifício – Exemplo 1 .....	93
Figura 4.2 – Forma do Pavimento Tipo – Exemplo 1 .....	94
Figura 4.3 – Esquema do Edifício – Exemplo 2 .....	97
Figura 4.4 – Forma do Pavimento Tipo – Exemplo 2 .....	98
Figura 4.5 – Esquema do Edifício – Exemplo 3 .....	101
Figura 4.6 – Forma do Pavimento Tipo – Exemplo 3 .....	102
Figura 4.7 – Esquema do Edifício – Exemplo 4 .....	105
Figura 4.8 – Forma do Pavimento Tipo – Exemplo 4 .....	106
Figura 4.9 – Comparação de Valores – Parâmetro $\alpha$ .....	108
Figura 4.10 – Comparação de Valores – Parâmetro $\gamma$ .....	109
Figura 4.11 – Comparação de Valores – Parâmetro $\lambda_{cr}/\lambda_c$ .....	110
Figura 4.12 – Comparação de Valores – Parâmetro $\lambda_R$ .....	110
Figura 4.13 – Comparação de Valores – Freqüências Naturais – $f$ (Hz).....	111

## LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIações

### 1. ESCALARES

$P_k$	carga vertical atuante
$A_i$	área de influência correspondente à coordenada $i$
$A_s$	área de aço
$E$	módulo de elasticidade longitudinal
$f_{ck}$	resistência característica à compressão do concreto
$G$	módulo de elasticidade transversal
$H$	altura total da edificação
$M_{1d}$	momento de 1ª. Ordem
$M_{2d}$	momento de segunda ordem
$M_{d,tot}$	momento fletor total de cálculo
$M_p$	momento de plastificação
$M_y$	momento de início de escoamento
$N_d$	esforço normal de cálculo
$P_{crit}$	carga crítica de flambagem
$Q$	índice de estabilidade
$R_c$	resultante de forças no concreto
$R_s$	resultante de forças na armadura
$T$	período fundamental
$f$	freqüência natural de vibração
$V_d$	esforço cortante de cálculo
$Z$	braço de alavanca
$\lambda$	índice de esbeltez
$\alpha$	parâmetro de estabilidade
$\gamma_z$	coeficiente gama $z$
P- $\Delta$	método P-Delta
a/H	relação flecha altura

### 2. MATRIZES E VETORES

$A$	matriz de interpolação
$a$	vetor das proporções entre as cargas aplicadas à estrutura
$B$	matriz de deformação do elemento de placa
$B_c$	matriz de deformação de cisalhamento do elemento de placa
$B_f$	matriz de deformação de flexão do elemento de placa
$B_i$	matriz de deformação associada ao nó $i$ do elemento de placa
$D$	matriz que relaciona tensões e deformações
$D_f$	matriz que relaciona tensões de flexão e deformações de flexão
$J$	matriz do jacobiano
$K$	matriz de rigidez
$K_f$	matriz da contribuição de flexão para a rigidez do elemento de placa
$K_F$	matriz de rigidez de um elemento de pórtico espacial
$K_P$	matriz da contribuição de rigidez de elementos de placa
$K_{FP}$	matriz de rigidez da estrutura composta por pórtico e placa
$K_G$	matriz de rigidez geométrica
$K_T$	matriz de rigidez tangente

$L$	matriz de equilíbrio que relaciona esforços nodais e cargas nodais aplicadas
$M_P$	matriz de massa do elemento de placa
$M_F$	matriz de massa do elemento de pórtico
$M_{FP}$	matriz de massa associada ao nó $i$ da estrutura composto de pórtico e placa
$M$	matriz de massa
$N_u$	matriz das funções de forma para interpolação de deslocamentos
$u$	vetor de deslocamentos
$\varepsilon$	vetor de deformações
$\lambda$	vetor de cargas nodais
$\sigma$	vetor de tensões

### 3.ABREVIATURAS

<i>ACI</i>	American Concrete Institute
<i>NBR</i>	Norma Brasileira Registrada
<i>CEB</i>	Comité Européen Du Béton

# 1 – INTRODUÇÃO

## 1.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA E MOTIVAÇÃO

A presença de edifícios altos está cada vez mais freqüente nos grandes centros urbanos e desafiam a cada dia os projetistas de estruturas, na concepção de arranjos estruturais eficientes, capaz de suportar ações que lhes são impostas com deslocamentos admissíveis. Os avanços obtidos com a tecnologia dos materiais, projetos mais sofisticados de elevadores, o surgimento de computadores e softwares que permitam uma análise mais realista do comportamento das estruturas são alguns dos fatores que viabilizaram a construção de concepções cada vez mais altas e esbeltas.

As torres altas têm sido erguidas com estruturas formadas exclusivamente de concreto armado, arranjos estruturais predominantemente metálicos ou uma concepção denominada “mista”, utilizando pórticos metálicos aliados a núcleos rígidos de concreto. Em menos de 100 anos, de 1931 até os dias atuais, percebe-se um acréscimo significativo na altura e na esbeltez dos edifícios.

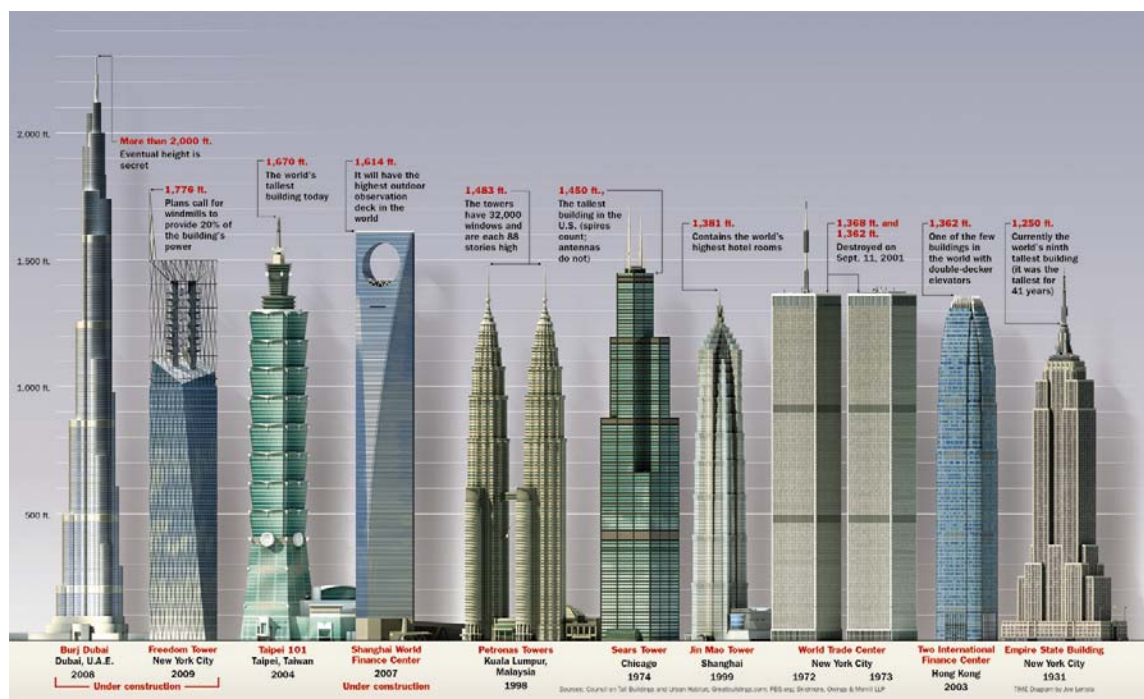


Figura 1.1 – Edifícios Altos do Mundo (fonte: Council on Tall Buildings and Urban Habitat)

Observando a figura 1.1, que apresenta uma comparação entre os dez edifícios mais altos do mundo, percebe-se que o edifício *Burj Dubai*, que está sendo construído atualmente nos Emirados Árabes, com uma altura total prevista para 610 metros, supera em muito o edifício *Empire State*, de 381 metros, inaugurado em 1931 na cidade de Nova York e considerado como grande representante dos edifícios altos no mundo.

Sabe-se que o projeto e execução de um edifício alto é uma tarefa extremamente laboriosa e que deve ser tratada com muita responsabilidade e planejamento. No que tange ao projeto estrutural, muitos fatores devem ser levados em consideração de forma a prever o comportamento destes edifícios frente a diversas ações que lhes são impostas. A avaliação da rigidez destas torres, sobretudo da estabilidade global, é de suma importância para viabilizá-las. Alguns fatores como os efeitos de segunda ordem, a consideração da ação do vento, efeitos de abalos sísmicos e a interação solo-estrutura que, normalmente, são negligenciados em projetos de menor porte, são itens essenciais no projeto e que possibilitarão a construção de um edifício alto de forma segura e econômica.

Uma avaliação da rigidez dos edifícios de concreto armado abordando os parâmetros de estabilidade previstos nos códigos normativos e a correlação com outros parâmetros como o fator de carga crítica de *Euler*, o fator de carga de colapso plástico e as frequências naturais obtidas em uma análise de vibrações livres constitui o foco principal deste trabalho e será pormenorizado nos capítulos seguintes.

## **1.2 OBJETIVOS GERAIS E ESPECÍFICOS DO TRABALHO**

Como objetivos gerais, este trabalho se propõe a contribuir na avaliação da estabilidade global de edifícios de concreto armado considerando o aspecto tridimensional dos pórticos, o lançamento estrutural e as ações atuantes. Será proposto um sistema computacional, em linguagem *FORTRAN*, baseado no método dos elementos finitos, capaz de analisar o comportamento de pórticos tridimensionais em uma análise elástica, elastoplástica, de instabilidade e das frequências naturais de vibração.

São estes os objetivos específicos deste trabalho:

1. Proceder à análise de instabilidade elástica de pórticos tridimensionais levando-se em consideração o comportamento conjunto de lajes, vigas e pilares e definindo o



fator de carga crítica de flambagem, denominada “*fator de carga de Euler*”, para os edifícios de concreto armado;

2. Através de uma análise elastoplástica incremental, considerando as seções transversais dos elementos estruturais e armaduras admitidas, definir o fator de carga de colapso plástico de pórticos tridimensionais;
3. Determinar as frequências naturais de pórticos tridimensionais através de uma análise de vibrações livres;
4. Correlacionar os resultados obtidos neste trabalho para o fator de carga crítica de flambagem, fator de carga de colapso plástico e frequências naturais com parâmetros e métodos utilizados pelos projetistas como o parâmetro  $\alpha$ , o coeficiente  $\gamma_z$  e o método P- $\Delta$ ;
5. Estabelecer algumas comparações com concepções estruturais publicadas na literatura e exemplos reais de edifícios projetados. Apresentar algumas conclusões sobre as correlações realizadas nos casos estudados.

### **1.3 METODOLOGIA**

A fim de atingir os objetivos propostos buscou-se inicialmente uma revisão bibliográfica sobre referências que tratavam de assuntos pertinentes a este trabalho como efeitos de segunda ordem em edifícios, parâmetros de instabilidade, modelagem numérica de pórticos tridimensionais, análise de instabilidade elástica, plasticidade e análise dinâmica.

As análises necessárias neste trabalho foram realizadas através de 4 programas, desenvolvidos pelo autor, utilizando a linguagem *FORTRAN*, possibilitando a análise elastoplástica, análise de instabilidade elástica e a análise de vibrações livres. Optou-se pelo desenvolvimento de programas próprios onde seria facilitada a implementação das hipóteses de cálculo e a possibilidade de fazer várias simulações, de uma maneira mais conveniente para o trabalho. No início do trabalho pensou-se em trabalhar com softwares

comerciais disponíveis no mercado e esta idéia logo foi descartada devido à dificuldade de implantação das sub-rotinas em pacotes fechados, principalmente as subrotinas utilizadas na análise elastoplástica.

Objetivando calibrar e validar os resultados dos programas desenvolvidos optou-se por exemplos já consagrados na literatura variando-se a discretização em cada modelo, monitorando esforços e deslocamentos e comparando os resultados com softwares conhecidos como o SAP2000 e o TQS. Nas análises realizadas são necessários como entrada de dados as características geométricas dos elementos estruturais, tipo de material (módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson) e a informação prévia das armaduras de pilares, vigas e lajes. Estas armaduras foram obtidas através de uma análise elástica inicial e para o dimensionamento das armaduras, utilizou-se o software TQS, com versão em conformidade com a NBR6118/2003.

## **1.4 APRESENTAÇÃO DOS CAPÍTULOS**

Uma vez exposto o problema a ser estudado e estabelecido uma metodologia de modo a dar indicações que servirão de base para que se alcancem os objetivos deste trabalho, no capítulo 2 serão descritos os fundamentos teóricos utilizados na montagem dos programas utilizados nas análises numéricas. São descritos os teoremas que regem a análise plástica, as bases teóricas utilizadas para a análise de instabilidade e de vibrações livres sendo tratada como um problema de autovalores e autovetores. São realizadas simulações utilizando uma estrutura bastante simples, a coluna de Euler. O comportamento de um edifício alto é assimilado neste trabalho ao de uma coluna esbelta e são monitoradas algumas informações como o fator de carga de colapso plástico, fator de carga crítica de Euler e as frequências naturais com os respectivos modos de vibração.

No capítulo 3 são pormenorizados os programas desenvolvidos neste trabalho. Basicamente foram confeccionados 4 programas denominados: ALEL (análise linear elástica), AEPI (análise elastoplástica incremental), AIEL (análise de instabilidade elástica) e ADVL (análise dinâmica sob vibrações livres). Nesta parte são apresentadas as hipóteses de cálculo, os fluxogramas, as subrotinas principais e exemplos utilizados para calibração e validação.

Os resultados obtidos com exemplos de estruturas reais são detalhados no quarto capítulo. Trabalhou-se com quatro exemplos de edifícios, com variação do número de andares e da tipologia estrutural. As respostas obtidas nestes exemplos são comparadas com índices sugeridos pela NBR6118/2003. No capítulo 5 são apresentadas as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

## **2 – FUNDAMENTOS TEÓRICOS**

### **2.1 HISTÓRICO SOBRE A AVALIAÇÃO DA RIGIDEZ DOS EDIFÍCIOS DE CONCRETO ARMADO**

Observando o processo construtivo no Brasil pode-se notar o quanto se evoluiu na concepção das estruturas dos edifícios de concreto armado. A Norma brasileira de 1960 sequer fazia menção sobre a necessidade de consideração dos efeitos do vento nas estruturas de concreto armado e a rigidez dos edifícios era garantida por concepções aporticadas, com pilares pouco espaçados e contraventados por alvenarias bastante espessas. Nesta época, a avaliação dos efeitos de segunda ordem nos pórticos era uma tarefa bastante difícil, para não dizer impossível, diante da impossibilidade de se contar com computadores e softwares que dispõe-se nos dias atuais. A sensibilidade dos projetistas e o monitoramento de estruturas já construídas serviam como base para futuros projetos, cada vez mais altos e esbeltos.

A Norma brasileira de 1978 (NB1/1978), menciona em seu item 3.1.1.3, aspectos referentes à obrigatoriedade da consideração do vento em estruturas onde esta ação possa produzir efeitos estáticos ou dinâmicos importantes e nas estruturas com nós deslocáveis, nas quais a altura seja maior que 4 vezes a largura menor, ou em que, numa dada direção, o número de filas de pilares seja inferior a 4. A grande questão era como medir a deslocabilidade da estrutura confiando apenas no número de pilares em filas ou em uma relação simples entre a altura e a largura da edificação. Muitos edifícios foram projetados a partir de 1978 apoiados neste critério mas sabe-se que os efeitos de segunda ordem podem ser significativos, independente do número de pilares ou de uma relação simples entre a altura e a largura.

Um critério importante na avaliação da rigidez dos edifícios foi proposto por Beck e König, em 1966. Por este critério, quando os efeitos de segunda ordem são inferiores a 10% dos correspondentes efeitos de primeira ordem, a estrutura é considerada de nós fixos. Segundo os mesmos pesquisadores, nestes 10% estão incluídas as incertezas das hipóteses de carregamento de vento. Nestas estruturas, os efeitos de segunda ordem podem ser desprezados na estrutura global restando apenas a verificação dos pilares isoladamente.

Mas se os efeitos de segunda ordem excederem a 10%, a estrutura é considerada de nós móveis e os mesmos não podem ser desprezados. Fica a cargo do projetista uma análise de segunda ordem do conjunto, levando em consideração a não linearidade geométrica e a não linearidade física (Franco, 1985).

Projetar um edifício alto sem avaliar a magnitude dos efeitos de segunda ordem é uma decisão muito arriscada pois as conseqüências podem variar desde simples patologias em elementos não estruturais (paredes de vedação, caixilhos, vidros, etc.) até o comprometimento da estabilidade global podendo ocasionar o colapso da estrutura. As patologias originadas pela concepção estrutural estão cada vez mais frequentes nas estruturas atuais. Fusco (1993) ressalta que o aumento significativo dos vãos de vigas e lajes, aumento das aberturas nas alvenarias, substituição das alvenarias maciças por outros materiais, inclusive materiais leves, a colocação de alvenarias sobre lajes sem estarem suportadas diretamente por vigas são alguns dos fatores que contribuem para redução da rigidez de edifícios altos.

No que se refere ao projeto de edifícios de concreto armado, a avaliação da rigidez é realizada através da adoção de métodos simplificados e/ou rigorosos. Nos métodos simplificados estão incluídos o parâmetro  $\alpha$ , o coeficiente  $\gamma_z$  e o método P- $\Delta$ . A consideração da não linearidade nestes métodos é feita de forma simplificada através da redução da rigidez dos elementos estruturais que compõe o arranjo estrutural. No método rigoroso destaca-se a análise de segunda ordem com a consideração da não linearidade levando-se em consideração aspectos intrínsecos do material concreto armado como a fissuração, deformação lenta, retração, etc. A seguir será feito um breve resumo de cada parâmetro que usualmente é utilizado nas análises de estabilidade global, em edifícios de concreto armado.

### **2.1.1 O Parâmetro $\alpha$**

Este parâmetro de estabilidade foi adotado pela norma alemã DIN (1978) e, posteriormente, pelo CEB, objetivando auxiliar o projetista de estruturas na avaliação da deslocabilidade dos edifícios. O parâmetro  $\alpha$  foi proposto em 1966, por Beck e König, após analisar pórticos rotulados, contraventados por parede atuante como viga vertical em balanço.

É calculado da seguinte forma:

$$\alpha = H \sqrt{\frac{P_k}{EI_k}} \quad (2.1)$$

onde :

$P_k$  = carga vertical atuante ;

$H$  = altura total da edificação ;

$E.I_k$  = rigidez flexional.

A relação 2.1 é originada a partir do estudo de uma barra fletida, articulada em suas extremidades e submetida a uma carga axial. Quando a carga  $P$  atinge um valor crítico,  $P = P_{crit}$ , a coluna alcança o chamado ponto de bifurcação de equilíbrio. Este ponto define um estado limite onde a barra pode tomar uma das seguintes formas: a forma reta, que caracteriza um equilíbrio instável ou, a forma fletida, com equilíbrio estável.

Para valores de  $P$  superiores a  $P_{crit}$  ( $P > P_{crit}$ ), qualquer perturbação na barra faz com que esta sofra flambagem e assuma a configuração deformada apresentada na figura 2.1.

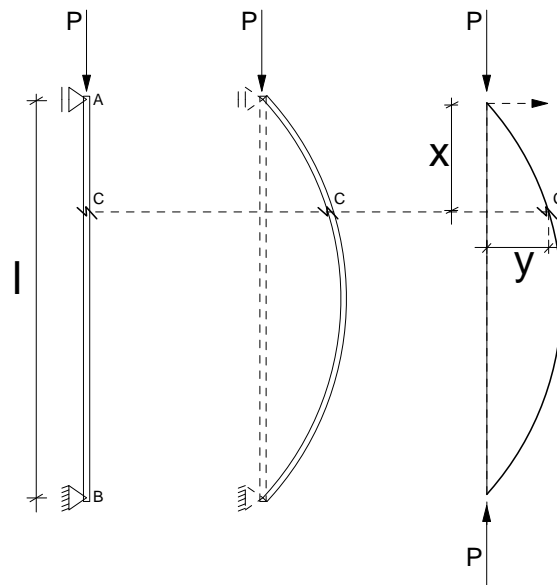


Figura 2.1 – Análise da Coluna Isolada ( Parâmetro  $\alpha$  )

Admitindo como sendo  $x$  a distância da extremidade “A” a um ponto genérico “C” da linha elástica e “ $y$ ”, a correspondente deflexão no mesmo ponto C, o respectivo momento fletor na seção vale:

$$M_c = -P \cdot y \quad (2.2)$$

A equação diferencial que rege a deformação da barra pode ser escrita da seguinte forma:

$$EI \cdot y'' = M_c \quad (2.3)$$

ou, numa forma mais detalhada:

$$y'' + \frac{P}{EI} \cdot y = 0 \quad (2.4)$$

Trabalhando com uma variável adimensional  $\xi = \frac{x}{\ell}$  para a abscissa, a expressão 2.4 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$y''(\xi) + \frac{P \cdot \ell^2}{EI} \cdot y(\xi) = 0 \quad (2.5)$$

Fazendo  $\alpha^2 = \frac{P \cdot \ell^2}{EI}$ , a expressão 2.5 fica assim representada:

$$y''(\xi) + \alpha^2 \cdot y(\xi) = 0 \quad (2.6)$$

A equação diferencial apresentada em 2.6 tem como solução geral:

$$y = A \cdot \text{sen} \alpha \xi + B \cdot \text{cos} \alpha \xi \quad (2.7)$$

As constantes A e B podem ser encontradas impondo as condições de contorno na barra fazendo  $x = 0$  e  $x = \ell$ , na expressão 2.7:

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ e } y = 0 &\rightarrow \xi = 0 \rightarrow B = 0 \\ x = \ell \text{ e } y = 0 &\rightarrow \xi = 1 \rightarrow A \cdot \text{sen}\alpha = 0 \end{aligned}$$

Para  $A = 0$ , a barra apresenta o eixo reto e para  $\text{sen}\alpha = 0$ , tem-se que  $\alpha = n \cdot \pi$ . O valor crítico corresponde ao menor valor para  $\alpha$  com  $n = 1$ . O valor de  $\alpha_{\text{crit}}$  será dado pela expressão 2.8 :

$$\alpha_{\text{crit}} = \ell \cdot \sqrt{\frac{P_{\text{crit}}}{EI}} = \pi \quad (2.8)$$

Beck e König (1966) apresentaram uma variação da equação diferencial 2.5, adaptando-a a um modelo submetido a um carregamento  $\omega$ , uniforme e distribuído. A expressão resultante é a seguinte:

$$y''''(\xi) + \alpha^2 \cdot [y'(\xi) \cdot \xi]' = \frac{\omega \cdot \ell^4}{EI} \quad (2.9)$$

Segundo Vasconcelos (1998), a resolução da equação diferencial 2.9 foi obtida empregando as funções de Bessel. A estrutura descontínua formada por pavimentos iguais e superposta foi transformada em uma estrutura contínua, tratada com recursos do cálculo diferencial. O valor de  $\alpha^2$  nesta situação é dado por:

$$\alpha^2 = \frac{(p + v) \cdot \ell^3}{EI} \quad (2.10)$$

Na expressão 2.10, o carregamento concentrado  $P$  foi substituído por duas cargas distribuídas,  $p$  e  $v$ , que representam, respectivamente, o carregamento distribuído na estrutura de contraventamento e contraventada. Foi adotado um número de pavimentos igual a 4 justificando assim a transformação do modelo descontínuo em contínuo. O valor crítico para o coeficiente  $\alpha$ , considerando  $n = 4$  pavimentos, corresponde a:



$$\alpha_{crit}^2 = \frac{(p+v) \cdot \ell^3}{EI} = 7,84 \quad \alpha_{crit} = 2,80 \quad (2.11)$$

Considerando que uma margem de segurança adequada ocorre quando os momentos de segunda ordem não superem em 10% os respectivos momentos de 1ª. ordem, o valor de  $\alpha_{crit}$  fica limitado a 0,6, para n igual ou superior a 4 pavimentos. Para n até 3 pavimentos, Beck e König (1966) sugeriram os limites:

$$\begin{aligned} n = 1 &\rightarrow \alpha_{crit} = 0,3 \\ n = 2 &\rightarrow \alpha_{crit} = 0,4 \\ n = 3 &\rightarrow \alpha_{crit} = 0,5 \end{aligned}$$

Outros limites para o parâmetro  $\alpha$ , de acordo com a forma da linha elástica do edifício, foram apresentados por Franco (1985) diferindo, de acordo com o tipo de contraventamento adotado (Figura 2.2).

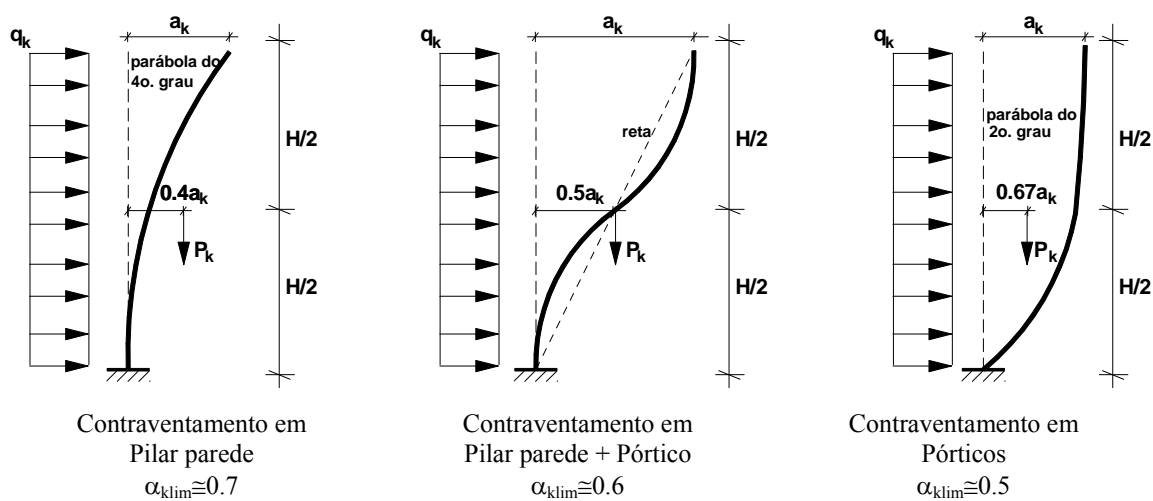


Figura 2.2 - Valores de  $\alpha_{klim}$  de acordo com o Contraventamento Utilizado

Para o cálculo da rigidez flexional da estrutura necessita-se saber qual a inércia equivalente do pórtico. Ela pode ser calculada assimilando-a como a inércia de um pilar isolado em balanço que apresente o mesmo deslocamento, no topo, para um mesmo carregamento lateral (Figura 2.3). Este carregamento lateral pode ser concentrado, aplicado no topo da estrutura, ou distribuído, ao longo da altura do mesmo. Os valores de  $E \cdot I_k$  podem ser encontrados pelas relações 2.12 e 2.13.

$$EI_k = \frac{p \cdot H^3}{3 \cdot a_k} \text{ sendo } p, \text{ a carga concentrada;} \quad (2.12)$$

$$EI_k = \frac{q \cdot H^4}{8 \cdot a_k} \text{ sendo } q, \text{ o carregamento distribuído.} \quad (2.13)$$

Segundo França (1985), a utilização da relação 2.13 parece ser um critério mais conveniente para a determinação da rigidez equivalente pois representa de forma mais realista o comportamento da elástica frente aos carregamentos horizontais que usualmente atuam nos edifícios como os provenientes da ação do vento (figura 2.3).

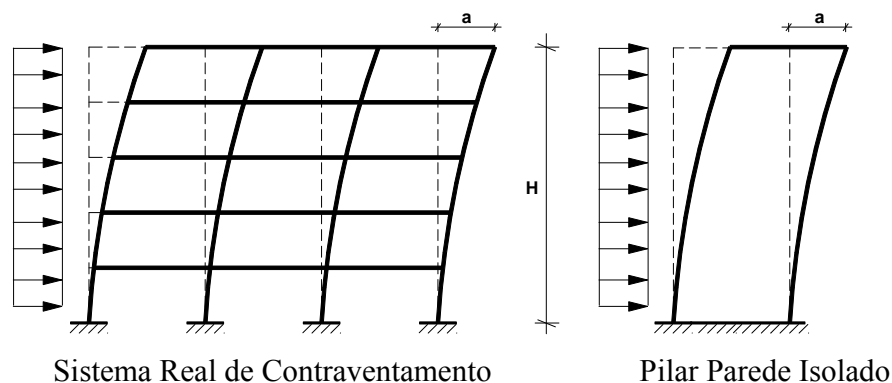


Figura 2.3 - Simplificação Adotada no Cálculo da Inércia Equivalente

O parâmetro  $\alpha$  constitui, por assim dizer, um termômetro na avaliação do estado de saúde da estrutura (Vasconcelos, 1985). Se este coeficiente for menor que certo valor limite, os efeitos de segunda ordem podem ser desprezados na estrutura global, restando à verificação dos pilares isoladamente. Se ultrapassar os limites estabelecidos, os efeitos de segunda ordem têm que ser considerados, realizando uma análise de segunda ordem da estrutura. Não se dispensa a consideração dos efeitos de segunda ordem nos pilares, isoladamente, mesmo que se tenha comprovado a indeslocabilidade da estrutura.

Pelos critérios da NBR6118/2003, em seu item 15.5.2, os limites estabelecidos para o parâmetro  $\alpha$  são os seguintes:

$$\alpha \leq 0.2 + 0.1n, \quad \text{para } n \leq 3 \text{ pavimentos;} \\ \alpha \leq 0.6, \quad \text{para } n \geq 4 \text{ pavimentos.}$$

O parâmetro  $\alpha$ , calculado de acordo com a relação 2.1 e com resultados válidos dentro do regime elástico, é muito útil para avaliação de estruturas concebidas em alvenaria estrutural ou constituídas de elementos pré-moldados. Para estruturas de nós rígidos, geralmente os valores de  $\alpha$  são elevados, não autorizando desprezar os efeitos de segunda ordem. Vasconcelos (1985) afirma que pode-se reduzir o valor de  $\alpha$  se a rigidez dos nós denominados “*monolíticos*”, for considerada na análise.

Outra observação é que os limites estabelecidos pelo CEB, para a estrutura de 1, 2 ou 3 andares, os valores de  $\alpha$  são também exagerados. Vasconcelos (1985) sugere que poderia ser substituído em dispensar a consideração dos efeitos de segunda ordem, quando o valor do coeficiente de instabilidade “ $\alpha$ ” for menor que 0,5 para pórticos de 1 pavimento, inferior a 0,55 para pórticos de 2 pavimentos e inferior a 0,75 para pórticos de 3 pavimentos.

O parâmetro  $\alpha$  é muito utilizado pelos projetistas de estruturas por oferecer uma resposta satisfatória acerca da rigidez da estrutura e por ser de fácil obtenção. A desvantagem do parâmetro  $\alpha$  é que, para estruturas de nós móveis, o projetista não tem nenhuma informação sobre a magnitude dos esforços de segunda ordem. Uma análise de segunda ordem mais criteriosa é obrigatória nestes casos.

### **2.1.2 O Coeficiente $\gamma_z$**

Outro grande avanço no campo da estabilidade global foi a adoção do coeficiente  $\gamma_z$ , em 1991, fruto de pesquisas realizadas pelos engenheiros brasileiros Mário Franco e Augusto Vasconcelos. A importância do coeficiente  $\gamma_z$  reside no fato de que ele permite prever, com boa aproximação, a magnitude dos efeitos de segunda ordem na estrutura. Ele pode ser utilizado como um fator amplificador, majorando os esforços globais e substituindo a verificação através de uma análise de segunda ordem criteriosa.

Desde o seu surgimento, o coeficiente  $\gamma_z$  vem sendo utilizado com sucesso nos projetos de estruturas de edifícios altos. O procedimento para o cálculo deste coeficiente é o seguinte:

- a) Primeiro faz-se uma análise de primeira ordem levando em consideração as cargas verticais e horizontais. Uma redução da rigidez da estrutura é realizada com o objetivo de considerar, de forma aproximada, a não linearidade física.

b) Calcula-se os acréscimos de momentos, através da relação :

$$\Delta M_d = R_d \cdot e_d \quad (2.14)$$

onde:

$\Delta M_d$  = acréscimos de momentos ;

$R_d$  = Valor de projeto da resultante de todas as cargas verticais ;

$e_d$  = deslocamento de primeira ordem do ponto de aplicação da resultante  $R_d$ .

c) O coeficiente  $\gamma_z$ , que faz uma relação entre os momentos de segunda ordem com os respectivos momentos de primeira ordem, é encontrado, para valores pequenos de  $\Delta M_d$ , da seguinte forma :

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_d}{M_{1d}}} \quad \text{onde :} \quad (2.15)$$

$\Delta M_d$  = acréscimos de momentos calculados na alínea b ;

$M_{1d}$  = Momento de primeira ordem, provocado pelas forças horizontais.

Se o valor de  $\gamma_z$  for menor ou igual a 1,1, a estrutura pode ser considerada como indeslocável. Acima deste limite, uma análise de segunda ordem é necessária, considerando a não linearidade na análise. Para valores de  $\gamma_z$  até 1,3, este pode ser utilizado como fator amplificador oferecendo resultados satisfatórios, dispensando assim uma análise de segunda ordem rigorosa.

Estudos apontam que o coeficiente  $\gamma_z$  se apresenta como um excelente coeficiente amplificador pois oferece ótimas estimativas da magnitude dos esforços de segunda ordem nas estruturas usuais de concreto armado (Carmo, 1995). A grande limitação deste coeficiente é que pode ser aplicado em estruturas com no mínimo 4 andares e, considerando respostas superiores a 1,3 ( $\gamma_z > 1,3$ ), os valores podem diferir muito dos resultados obtidos através de uma análise de segunda ordem mais rigorosa. Em geral trata-se de um coeficiente bem aceito pelos projetistas de estruturas e está incorporado nos principais softwares de cálculo estrutural em utilização no Brasil.

### 2.1.3 O Método P-Δ

Outro método simplificado que oferece estimativas satisfatórias dos efeitos de segunda ordem é o método “P-Δ” (também conhecido como “N-a”). Consiste em uma análise iterativa onde, no decorrer dos cálculos, o efeito dos deslocamentos sucessivos é transformado em forças horizontais equivalentes, conhecidas na literatura como “*sway forces*”, induzidas por momentos P-Δ. Estas forças horizontais consistem na soma dos esforços cortantes das colunas acima e abaixo de um determinado piso, conforme esquematizado na figura 2.4:

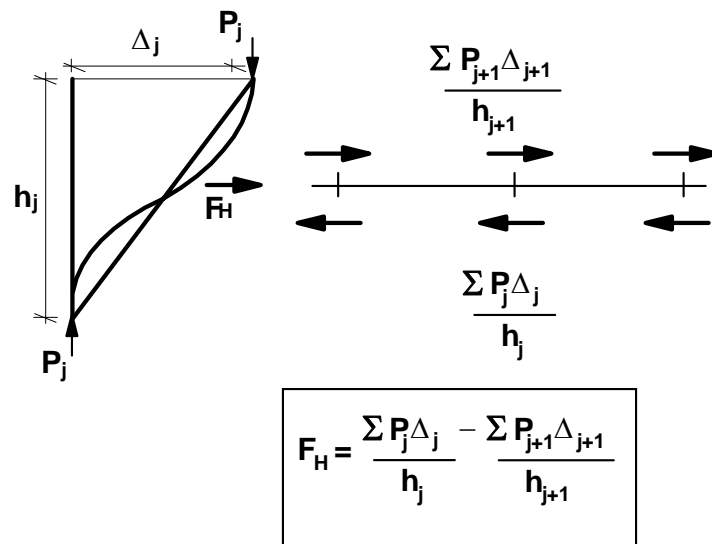


Figura 2.4 - Cálculo das forças horizontais adicionais (“*sway forces*”)

A figura 2.5 apresenta um esquema da interação das forças horizontais adicionais (“*sway forces*”) em cada nível. Estas forças horizontais são adicionadas às ações horizontais originais de cada pavimento e novos esforços e deslocamentos são computados em cada ciclo de iteração.

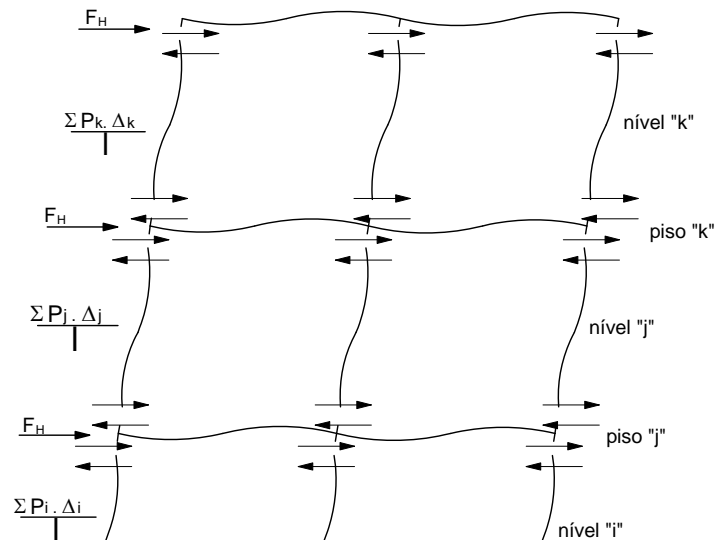


Figura 2.5 – Atuação das *Sway Forces* em um Pórtico

A consideração da não linearidade física pode ser feita, de maneira simplificada, através da redução da rigidez das vigas e pilares como sugere a NBR6118/2003. O número de iterações requeridas depende do grau de rigidez da estrutura sendo que o processo se repete até se obter convergência de deslocamentos, dentro de um limite especificado. Se os deslocamentos crescerem indefinidamente, fica constatada a instabilidade da estrutura.

O método P- $\Delta$  é utilizado em larga escala na avaliação dos esforços de segunda ordem em projetos de estruturas metálicas onde a esbeltez costuma ser mais evidente comparando-se com as estruturas de concreto armado. No *ACI*, está contemplado na seção 10.11.4.2, onde é definido pelo índice de estabilidade  $Q$  determinado pela relação 2.16:

$$Q = \frac{\Sigma P_u \Delta_o}{V_u \cdot \ell_c} \quad \text{onde :} \quad (2.16)$$

$\Sigma P_u$  : somatório das cargas axiais em todas as colunas do pavimento;

$\Delta_o$  : deslocamento de 1ª. ordem devido a atuação do esforço cortante  $V_u$ ;

$V_u$  : esforço cortante devido às forças horizontais;

$\ell_c$  : altura do pavimento.

A relação 2.16 pode ser analisada sob o ponto de vista matemático que define o método  $P-\Delta$  como uma série infinita onde a soma dos termos desta série fornece os deslocamentos de segunda ordem,  $\Delta$ . O deslocamento  $\Delta$  é calculado pela relação 2.17:

$$\Delta = \frac{\Delta_o}{1 - \gamma \cdot \frac{(\sum P_u) \cdot \Delta_o}{V_u \cdot \ell_c}} \quad (2.17)$$

O fator de majoração  $\gamma$  é denominado fator de flexibilidade e, segundo Macgregor (2005), assume um valor aproximado de 1,15 em aplicações com pórticos de concreto armado. Os momentos de segunda ordem,  $M_{2o}$ , são calculados pela expressão:

$$M_{2o} = \delta_s \cdot M_{1o} = \frac{M_o}{1 - \gamma \cdot \frac{(\sum P_u) \cdot \Delta_o}{V_u \cdot \ell_c}} \quad (2.18)$$

Duas observações devem ser destacadas acerca do método  $P-\Delta$ :

- o código americano *ACI*, seção 10.13.4.2, limita o valor de  $Q$  em 1/3, evitando-se trabalhar com efeitos de segunda ordem de grande magnitude;
- observando a relação 2.15, que determina o  $\gamma z$ , e comparando com a relação 2.18 verifica-se que o coeficiente  $\gamma z$  deriva do método  $P-\Delta$ , sendo o resultado da 1ª. iteração do método.

#### 2.1.4 Análise Rigorosa de Segunda Ordem

Numa análise de segunda ordem rigorosa são considerados os momentos devido ao produto  $P-\Delta$ , onde  $\Delta$  consiste na diferença entre a parte deformada e indeformada de cada elemento (Figura 2.6).

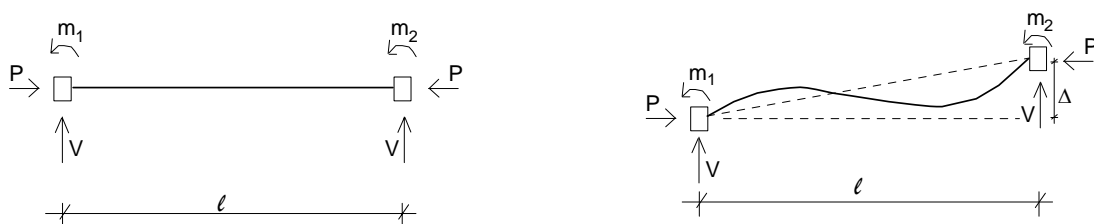


Figura 2.6 – Elemento Indeformado e Deformado - Pórtico

Primeiramente uma análise linear elástica é realizada, computando os esforços nas barras e os deslocamentos nodais . Para levar em consideração na análise os momentos P-Δ, em cada ciclo de iteração, a matriz de rigidez de cada elemento desconexo vai sendo modificada utilizando-se as funções de estabilidade desenvolvidas por Livesley & Chandler (1956)<sup>1</sup>. As funções de estabilidade assumem valores diferenciados de acordo com o esforço normal atuante na barra. De acordo com este trabalho de Livesley & Chandler, a matriz de rigidez do elemento desconexo fica definida como :

$$K_i = \begin{bmatrix} \phi_1 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_2 \frac{EI_z}{L} & \phi_3 \frac{EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_3 \frac{EI_z}{L} & \phi_2 \frac{EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_4 \frac{EI_y}{L} & \phi_5 \frac{EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_5 \frac{EI_y}{L} & \phi_4 \frac{EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

onde  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$ ,  $\phi_4$  e  $\phi_5$  assumem valores de acordo com o sinal do esforço axial no elemento. Por exemplo, para um elemento sob tração tem-se que :

$$Q_z = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}, \quad Q_y = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2}, \quad \mu L_z = \pi \sqrt{\frac{P}{Q_z}}, \quad \mu L_y = \pi \sqrt{\frac{P}{Q_y}}, \quad \omega_z = \frac{\mu L_z}{2} \text{ e } \omega_y = \frac{\mu L_y}{2}$$

$$\begin{aligned} \phi' M &= \mu L_z \cdot (M_{ABz}^2 + M_{BAz}^2) \cdot (\coth \mu L_z + \mu L_z \cdot \operatorname{cosech}^2 \mu L_z) \\ &\quad - 2 \cdot (M_{ABz} + M_{BAz})^2 + 2 \cdot \mu L_z \cdot \operatorname{cosech} \mu L_z \cdot M_{ABz} \cdot M_{BAz} \cdot (1 + \mu L_z \cdot \coth \mu L_z) \end{aligned}$$

$$\phi_1 = \frac{1}{\left[ 1 - \frac{EA}{4P^3 L^2} \cdot (\phi' M) \right]}$$

<sup>1</sup>LIVESLEY, R. K. & CHANDLER, D. B. - “*Stability Functions for Structural Frameworks*”, Manchester Univ. Press, Manchester, England (1956) ; *apud* HARRISON, H. B. - “*Computer Methods in Structural Analysis*”, Prentice Hall, INC., Englewood Cliffs, New Jersey (1973) .



$$\phi_2 = \frac{\omega_z \cdot (\omega_z - \coth \omega_z + \omega_z \coth^2 \omega_z)}{\omega_z \coth \omega_z - 1}, \phi_3 = \frac{\omega_z \cdot (\omega_z + \coth \omega_z - \omega_z \coth^2 \omega_z)}{\omega_z \coth \omega_z - 1}$$

$$\phi_4 = \frac{\omega_y \cdot (\omega_y - \coth \omega_y + \omega_y \coth^2 \omega_y)}{\omega_y \coth \omega_y - 1}, \phi_5 = \frac{\omega_y \cdot (\omega_y + \coth \omega_y - \omega_y \coth^2 \omega_y)}{\omega_y \coth \omega_y - 1}$$

Para um elemento sob compressão temos que :

$$Q_z = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}, Q_y = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2}, \mu L_z = \pi \sqrt{\frac{P}{Q_z}}, \mu L_y = \pi \sqrt{\frac{P}{Q_y}}, \omega_z = \frac{\mu L_z}{2} \text{ e } \omega_y = \frac{\mu L_y}{2}$$

$$\begin{aligned} \phi M &= \mu L_z \cdot (M_{ABz}^2 + M_{BAz}^2) \cdot (\cot \mu L_z + \mu L_z \cdot \operatorname{cosec} \mu L_z) \\ &\quad - 2 \cdot (M_{ABz} + M_{BAz})^2 + 2 \cdot \mu L_z \cdot \operatorname{cosec} \mu L_z \cdot M_{ABz} \cdot M_{BAz} \cdot (1 + \mu L_z \cdot \cot \mu L_z) \end{aligned}$$

$$\phi_1 = \frac{1}{\left[ 1 - \frac{EA}{4P^3 L^2} \cdot (\phi M) \right]}$$

$$\phi_2 = \frac{\omega_z \cdot (\omega_z + \cot \omega_z - \omega_z \cot^2 \omega_z)}{1 - \omega_z \cot \omega_z}, \phi_3 = \frac{\omega_z \cdot (\omega_z - \cot \omega_z + \omega_z \cot^2 \omega_z)}{1 - \omega_z \cot \omega_z}$$

$$\phi_4 = \frac{\omega_y \cdot (\omega_y + \cot \omega_y - \omega_y \cot^2 \omega_y)}{1 - \omega_y \cot \omega_y}, \phi_5 = \frac{\omega_y \cdot (\omega_y - \cot \omega_y + \omega_y \cot^2 \omega_y)}{1 - \omega_y \cot \omega_y}$$

Os coeficientes  $\phi_2$ ,  $\phi_3$ ,  $\phi_4$  e  $\phi_5$  mudam à medida que o valor do esforço axial muda e assumem valores 4, -2, 4 e -2, respectivamente, para esforço axial nulo . Da mesma forma, o coeficiente que altera a rigidez axial ,  $\phi_1$ , assume valor unitário para momentos fletores nulos . Observa-se, portanto, que a análise linear elástica é uma particularidade da análise não linear. Vale ressaltar que esta análise de segunda ordem é baseada na teoria dos deslocamentos finitos, podendo assim desprezar as pequenas diferenças nas relações de equilíbrio e compatibilidade devido às deformações (Harrison, 1973).

Em uma análise bem refinada leva-se em consideração as armaduras dos elementos estruturais e a não linearidade física e geométrica. Por exigir grande esforço computacional,

a análise de segunda ordem rigorosa não é muito utilizada. Franco (1995) adverte que, num futuro próximo, programas de cálculo já irão incluir tal análise em um formato mais acessível aos projetistas de estruturas.

## **2.2 SOBRE A EVOLUÇÃO DAS PESQUISAS NO CAMPO DA ESTABILIDADE GLOBAL**

À medida que os edifícios altos estavam sendo construídos, intensificaram os estudos para a investigação das condições de estabilidade e de previsão dos efeitos de segunda ordem nos edifícios de andares múltiplos. Todos os trabalhos possuem igual importância no desenvolvimento desta linha de pesquisa sobre o estudo da estabilidade global dos edifícios altos de concreto armado. Destacam-se abaixo algumas referências que, de alguma forma, contribuíram para a elaboração desta tese.

Carmo (1995) faz um amplo estudo dos parâmetros de instabilidade incluindo a relação  $a/H$ , o parâmetro  $\alpha$  e o coeficiente  $\gamma_z$ . São apresentados resultados obtidos de análises de edifícios reais, com a consideração da não linearidade física e geométrica. As conclusões apresentadas atestam que o coeficiente  $\gamma_z$  pode ser utilizado, com boa aproximação, na previsão dos efeitos de segunda ordem nos edifícios de concreto armado.

O comportamento de edifícios em alvenaria estrutural sob ação do vento foi estudado por Silva (1996), considerando a presença de paredes rígidas na análise do comportamento dos lintéis. Pereira (1997) investigou a eficiência dos núcleos rígidos de contraventamento através de modelagens numéricas de pórticos tridimensionais associados a núcleos rígidos.

A influência da flexibilidade das fundações no comportamento das estruturas usuais de contraventamento foi investigada por Matias Jr. (1997), através da elaboração de um programa, em linguagem Fortran, considerando o efeito da não linearidade, extremidades rígidas dos elementos estruturais e a flexibilidade das fundações no equilíbrio final do arranjo estrutural.

A contribuição da rigidez transversal à flexão das lajes na distribuição dos esforços em estruturas de edifícios de andares múltiplos foi investigada por Martins (1998). Utilizando um programa baseado no método dos elementos finitos, foram determinados

esforços e deslocamentos de estruturas tridimensionais, sujeitas às ações verticais e horizontais. A não linearidade geométrica é levada em consideração quando na verificação do equilíbrio de forças, na posição deformada.

Fiorin (1998) apresenta um estudo interessante sobre a importância do arranjo das armaduras no comportamento mecânico dos elementos estruturais. Este trabalho conclui que a disposição das armaduras é um item imprescindível na análise do comportamento das peças estruturais e que permite uma resposta mais realista dos elementos que compõem o sistema estrutural.

Zalka (2000) apresenta um estudo amplo sobre a estabilidade global de edifícios altos, utilizando-se de simplificações nas análises tridimensionais como a adoção de um pilar equivalente que simule o comportamento tridimensional do edifício, uma correlação entre as condições de instabilidade e as frequências naturais de vibração da estrutura. Resultados experimentais também são apresentados buscando estabelecer algumas correlações.

Uma análise não linear e tridimensional de edifícios de andares múltiplos com a presença de núcleos resistentes e considerando a rigidez a flexão das lajes foi abordado por Martins (2001), através de um algoritmo onde implementou-se a análise de segunda ordem. São apresentados exemplos reais de edifícios de andares múltiplos, com a avaliação dos parâmetros de instabilidade  $\alpha$  e  $\gamma_z$ .

Souza Jr. (2001) apresentou resultados sobre a interação de núcleos estruturais e lajes, em edifícios de múltiplos andares. São apresentadas características como o empenamento do elemento do núcleo, levando-se em consideração a teoria da flexo-torção em análise de 1ª. ordem.

Utilizando o método dos elementos de contorno e elementos finitos, Carmo (2001) avaliou a rigidez de edifícios de andares múltiplos implementando na modelagem técnicas avançadas de acoplamento entre os elementos e outros fatores importantes, como o efeito da excentricidade do eixo neutro das barras em relação à superfície neutra das placas.

Pinto (2002) estudou a análise não linear de estruturas de contraventamento em edifícios de concreto armado avaliando o comportamento de pórticos planos, submetidos a diferentes carregamentos e diferentes taxas de armadura. Os resultados obtidos permitem estimar, com razoável precisão, os efeitos da não linearidade em pórticos de concreto armado.

Sanches Jr. (2003) abordou vários tipos de modelos numéricos para análise de estruturas de pavimentos de edifícios, baseando-se no método dos elementos finitos.

Considerou-se a não linearidade física através de modelos que simulam o comportamento mecânico do concreto e do aço.

Fernandes (2003) utiliza o método dos elementos de contorno, baseando-se nas hipóteses de Kirchhoff, adaptadas a análise de estruturas de pavimentos de edifícios, considerando a interação entre os elementos de barra e de superfície. Na avaliação do comportamento mais realista das placas realizou-se uma análise elastoplástica.

O cálculo de deslocamentos levando-se em consideração o comportamento não linear do concreto armado foi abordado por Guarda (2005). Abordou-se fatores importantes como os efeitos da fissuração, da retração, da fluência, colaboração do concreto tracionado entre as fissuras na rigidez à flexão dos elementos.

Cicolin (2007) investigou algumas formas para avaliação da estabilidade de edifícios de andares múltiplos contendo pavimentos com lajes planas. Neste trabalho analisou-se a validade dos parâmetros  $\alpha$  e  $\gamma_z$ , comparando os resultados obtidos com outros provenientes de uma análise de segunda ordem, utilizando o método P- $\Delta$ .

## **2.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS MODELOS DE CÁLCULO**

Algumas questões desafiam os engenheiros estruturais a cada dia acerca do verdadeiro comportamento das estruturas. Questões como, por exemplo, o conhecimento da real capacidade resistente de um elemento estrutural ou, o valor exato das tensões atuantes e deformações em um determinado ponto da estrutura sob carregamento. O grau de precisão das respostas a estas questões vai depender do modelo de cálculo utilizado e das hipóteses admitidas. Os principais modelos utilizados para a relação tensão versus deformação do material constituinte da estrutura são: modelo elástico linear, o modelo não linear, o modelo rígido plástico e o modelo elastoplástico. Na figura 2.7 são resumidos os principais modelos admitidos.

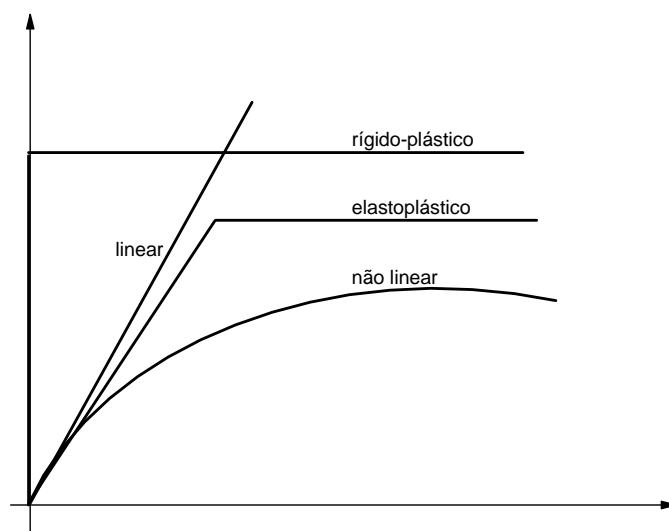


Figura 2.7 – Principais Modelos de Cálculo Admitidos

A escolha do modelo de cálculo vai depender do tipo de problema a ser analisado e dos recursos disponíveis para a avaliação estrutural. Quanto mais refinado o modelo, mais recursos são necessários como computadores mais modernos e softwares atualizados. O modelo linear elástico é o mais simples de todos os modelos e amplamente utilizado nos escritórios de cálculo. Este modelo admite como linear e homogênea à relação tensão versus deformação  $\epsilon$ , e, por conseqüência, a relação momento fletor versus curvatura. Por falar na relação momento fletor  $\times$  curvatura, este parâmetro será bem enfatizado neste trabalho, pois nos pórticos de concreto armado tem-se a predominância de esforços de flexão que influencia significativamente nesta relação  $\epsilon$ , e, por este motivo, é um item importante no estudo do comportamento global da estrutura.

Durante a análise linear elástica são mantidas constantes as características geométricas dos elementos estruturais considerando executados com um material homogêneo. No caso do concreto armado em que se considera a existência de armaduras, trabalha-se com o conceito de seção homogeneizada transformando a seção original numa seção equivalente, com base na relação entre os módulos de elasticidade do aço e concreto. Este modelo oferece respostas satisfatórias quando na análise dos estados limites de utilização para carregamentos iniciais e cargas de serviço. Ao se analisar os estados limites últimos, as respostas se afastam muito das condições reais de ruptura sendo os valores obtidos bem mais conservadores. Quando se trata de estado limite último, um modelo não linear é o mais indicado.

O modelo não linear difere do anterior pela consideração da não linearidade que se resume, na maioria dos casos, em duas: a não linearidade geométrica e a não linearidade

física. A consideração da não linearidade geométrica traduz as mudanças de geometria que ocorrem na estrutura deformada tornando-se um fator importante e primordial na análise de estruturas esbeltas. A não linearidade física está intimamente ligada às características inerentes do material estrutural sendo que o comportamento não linear do concreto armado, representado pela relação momento fletor versus curvatura, é uma consequência direta do comportamento não linear dos materiais constituintes: concreto e aço. Com a consideração da não linearidade, as rigidezes dos elementos estruturais se modificam para cada nível de carregamento.

No modelo rígido plástico, o comportamento elástico do material é desprezado e a seção transversal permanece rígida até que o momento fletor atuante se iguale ao momento de plastificação. Neste instante, forma-se na seção transversal uma rótula plástica que deve ter ductilidade suficiente para redistribuir os esforços internos. Se em uma estrutura formam-se rótulas plásticas suficientes de forma a caracterizar um mecanismo constata-se o colapso plástico da estrutura.

O modelo elastoplástico considera as seções transversais inicialmente em regime elástico com proporcionalidade entre tensão e deformação. A relação linear permanece até se atingir o momento de plastificação com as seções transversais passando a trabalhar em modelo plástico perfeito até que se forme um número suficiente de rótulas plásticas que transformam a estrutura em um mecanismo, caracterizando assim a ruptura. O modelo elastoplástico foi adotado neste trabalho para o cálculo do fator de carga de colapso plástico e será melhor abordado posteriormente.

## **2.4 A RELAÇÃO MOMENTO FLETOR x CURVATURA**

Devido à característica não linear do concreto armado, alguns parâmetros são imprescindíveis à análise e não podem ser negligenciados. Quando se trata do estudo da estabilidade global de pórticos, a relação momento fletor versus curvatura é um parâmetro de grande importância pois nos pórticos de concreto armado temos a predominância de esforços de flexão. A figura 2.8 é de autoria de Macgregor (2005) e caracteriza o diagrama momento fletor versus curvatura em uma seção transversal de uma viga de concreto armado, submetida à flexão pura e obtida em um ensaio experimental.

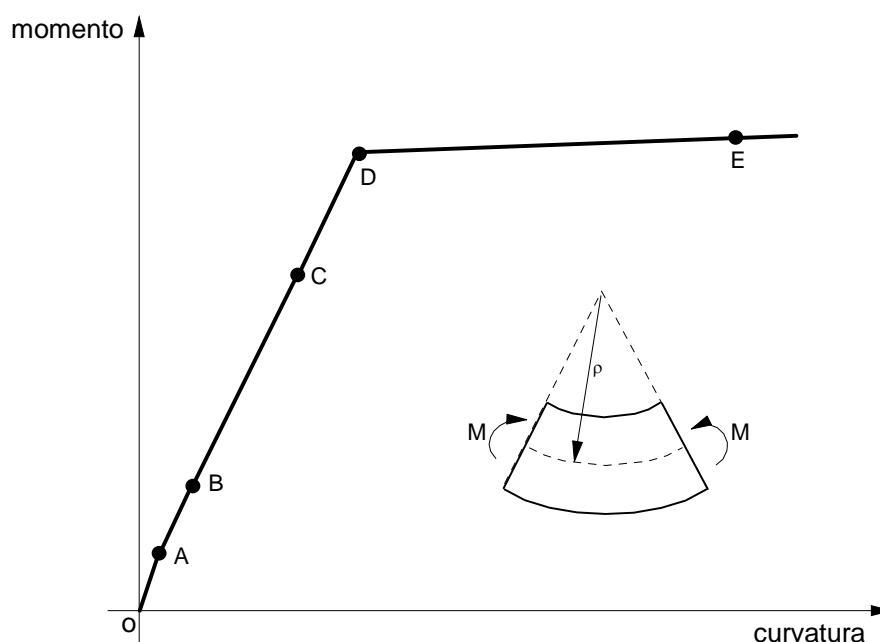


Figura 2.8 – Relação Momento Fletor versus Curvatura (Macgregor, 2005)

Analisando a figura 2.8 percebem-se alguns trechos e pontos importantes no entendimento do comportamento estrutural do material concreto armado. O trecho O-B é caracterizado pela inexistência de fissuração onde o material tem o comportamento praticamente linear. O ponto B identifica o início das primeiras fissuras na seção transversal, na região tracionada. O comportamento do trecho B-D é admitido linear onde se situam os carregamentos de serviço representados pelo ponto C no gráfico. O ponto D identifica o instante do escoamento do aço ou do esmagamento do concreto. A partir deste ponto, as curvaturas aumentam com pequenos acréscimos de momento. Temos no trecho D-E um patamar de escoamento que é finalizado com o colapso do material. Outro fato importante é que, desde o aparecimento das primeiras fissuras no ponto B até a ruptura do material, tem-se uma redução da seção efetiva de concreto diminuindo assim, a rigidez do elemento estrutural. Este fato é representado nos modelos de cálculo pela consideração da não linearidade física, já comentado anteriormente.

A relação momento fletor versus curvatura é extremamente útil na avaliação da ductilidade das peças de concreto armado. A diferenciação usual que é utilizada para as vigas classificando-as em seções subarmadas, normalmente armadas e superarmadas é baseada nesta relação. Observando o gráfico da figura 2.9, um diagrama idealizado sobre o

comportamento das seções em concreto armado, percebe-se que nas peças superarmadas não se verifica um patamar de escoamento, indicando a ruptura frágil nestas peças. Nas peças normalmente armadas e subarmadas, a ductilidade é evidente com a presença do patamar de escoamento. Observando as figuras 2.8 e 2.9 percebe-se que o modelo elastoplástico constitui um modelo satisfatório para a análise de elementos em concreto armado.

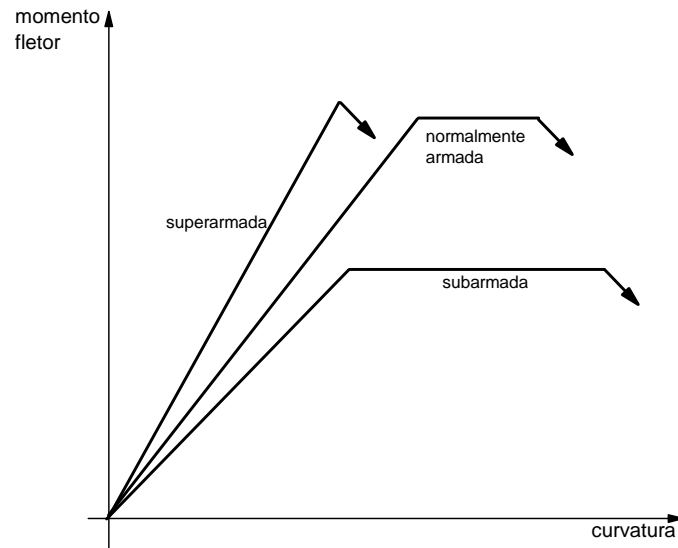


Figura 2.9 – Características da Ductilidade de Seções em Concreto Armado sob Flexão

## 2.5 BASES TEÓRICAS SOBRE A ANÁLISE PLÁSTICA

O fator de carga de colapso plástico de uma estrutura pode ser entendido como o fator de majoração de ações que conduz a estrutura a atingir o estado limite último. De maneira geral, a estrutura irá se transformar em um mecanismo de colapso plástico após a formação de um número suficiente de rótulas plásticas e nesse instante, têm-se a capacidade de carregamento máxima atingida e o fator de majoração de ações, nesta etapa, corresponderá ao fator de carga de colapso plástico. Admite-se, evidentemente, que não ocorrerá instabilidade anterior à formação do mecanismo, pois a flambagem também caracteriza um estado limite último. Nas peças em concreto armado admite-se como rótulas



plásticas determinadas seções transversais onde são verificadas grandes curvaturas sem um acréscimo significativo nos esforços.

Este fator de majoração, admitido como fator de carga de colapso plástico ( $\lambda_c$ ), pode ser encontrado com uma análise plástica limite, que utiliza o modelo rígido plástico ou com uma análise elastoplástica incremental. Antes, porém, de entrar em detalhes sobre os métodos para o cálculo do fator de carga de colapso plástico, é essencial o entendimento dos teoremas básicos que governam o colapso plástico: teorema estático, teorema cinemático e o teorema da unicidade. Estes teoremas referem-se às estruturas rígido-plásticas, ou seja, estruturas onde o comportamento elástico pode ser desprezado até que seja atingido o momento de plastificação. Na figura 2.10 é possível observar as características do modelo rígido-plástico sendo  $\sigma_e$ , a tensão de escoamento do material.

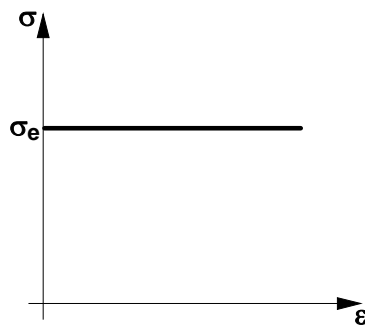


Figura 2.10 - Modelo de Material Rígido-Plástico

Segundo o teorema estático, “se, para um determinado fator de carga,  $\lambda$ , é possível encontrar uma distribuição de esforços em equilíbrio com o carregamento aplicado e que satisfaz as condições de resistência, este fator de carga,  $\lambda$ , é menor ou igual ao fator de carga de ruína”(Horne, 1979). Este teorema é também conhecido como o “teorema do limite inferior” ou “safe theorem” pois, o fator de carga determinado pelo teorema estático é denominado seguro ou estaticamente admissível.

Já o teorema cinemático rege que “se, para algum mecanismo plástico assumido, o trabalho externo realizado pelas cargas atuantes, correspondente a um fator de carga,  $\lambda$ , é igual ao trabalho plástico interno de deformação, o fator de carga,  $\lambda$ , neste estágio de carregamento, é maior ou igual ao fator de carga de ruína” (Horne, 1979). Este teorema

também é denominado de “teorema do limite superior” ou “*unsafe theorem*” pois, como a carga de colapso real da estrutura é sempre menor ou igual à carga atuante, conseqüentemente, os limites superiores são valores contrários à segurança.

O terceiro teorema, denominado teorema da unicidade, consiste na combinação do teorema estático e cinemático. “*Se um determinado fator de carga,  $\lambda$ , satisfaz o teorema estático e cinemático, conclui-se que este fator de carga,  $\lambda$ , é igual ao fator de carga de colapso plástico ( $\lambda = \lambda_c$ )*” (Horne, 1979).

Observando o esquema mostrado na figura 2.11, apresentado por Mello (1993), pode-se concluir, resumidamente, que se o fator de carga,  $\lambda_{inf}$ , corresponder a um mecanismo de colapso plástico então  $\lambda_{inf} = \lambda_c$ . Por outro lado, se o fator de carga,  $\lambda_{sup}$ , corresponder a uma distribuição estaticamente admissível então  $\lambda_{sup} = \lambda_c$ .

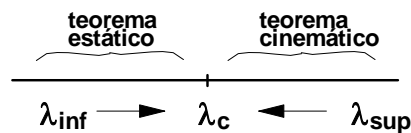


Figura 2.11 - Teoremas da Análise Plástica (Mello, 1993)

A análise plástica limite constitui uma maneira para se determinar o fator de carga de colapso plástico. Ela utiliza o modelo rígido-plástico, fundamentando-se na hipótese que uma seção, sujeita à flexão, permanece rígida até que o momento fletor atinja o momento de plastificação. Neste momento, forma-se uma rótula plástica na seção, que deve ter ductilidade suficiente para redistribuir os esforços internos. Pela análise plástica limite se ignora o histórico do carregamento e o fator de carga de colapso plástico pode ser encontrado tratando a análise como um problema de programação linear como sugerem alguns pesquisadores (Smith, 1990 ; Borkowski, 1990).

A análise elastoplástica incremental utiliza o modelo de mesmo nome, elastoplástico (figura 2.6), e consiste em variar o fator de majoração da estrutura até que o momento fletor, obtido em uma análise linear elástica, em uma determinada seção, se iguale ao momento de plastificação. Uma rótula plástica é inserida nesta seção e o processo continua com novos incrementos de carga e a formação de novas rótulas plásticas. Se a estrutura acumular um número de rótulas plásticas suficiente de tal forma que a transforme em um

mecanismo, o fator de carga correspondente a esta etapa será o fator de carga de colapso plástico.

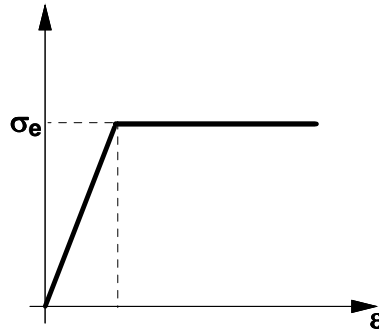


Figura 2.12 - Modelo de Material Elastoplástico

Ao contrário da análise plástica limite, a análise elastoplástica considera o histórico do carregamento e fornece a seqüência de formação e a própria localização das rótulas plásticas. Este modelo oferece resultados satisfatórios para o concreto armado e o engenheiro tem o completo domínio sobre o comportamento global da estrutura, em todos os estágios de carregamento. O conhecimento da localização das rótulas plásticas é de extrema importância numa análise dos efeitos locais de segunda ordem. Maiores detalhes sobre a análise plástica limite e a análise elastoplástica incremental podem ser encontrados em Harrison (1973), Neal (1977), Horne (1979), Smith (1990).

Neste trabalho optou-se pelo método incremental na análise numérica para o cálculo do fator de carga de colapso plástico. Os métodos incrementais em análises numéricas foram inicialmente utilizados por Wang (1963) e aperfeiçoados por Harrison (1973). São métodos que possibilitam reproduzir via computador as situações que geralmente encontram-se nos laboratórios. Em suma, a estrutura tridimensional é submetida a sucessivas análises elásticas e os esforços são computados e concentrados nos nós da estrutura. A cada incremento de carga, comparam-se os esforços atuantes e existentes. Se em algum nó ou elemento, os esforços resistentes forem ultrapassados se formará a primeira rótula plástica sendo que alterações devidas na matriz de rigidez do elemento plastificado são necessárias antes de se proceder uma nova análise. Repetem-se os procedimentos descritos acima até que se atinja o colapso da estrutura identificado através da singularidade da matriz de rigidez ou por deslocamentos excessivos na estrutura.

A análise elastoplástica é aplicada com mais frequência em projetos de estruturas metálicas onde, para cada perfil metálico, são conhecidos, “*a priori*”, os esforços de plastificação. Sobretudo, é importante neste instante diferenciar o momento de início de escoamento ( $M_y$ ) com o momento de plastificação ( $M_p$ ). O momento fletor  $M_y$  caracteriza o maior momento que uma seção consegue resistir ainda na fase elástica. No caso de uma seção de aço totalmente simétrica, a tensão de escoamento,  $\sigma_y$ , é atingida, ao mesmo tempo, nas fibras mais tracionadas e comprimidas da seção transversal. Com acréscimos de momentos fletores, a seção transversal começa a plastificar-se sendo que apresenta alguns trechos na fase elástica. Quando o momento fletor atinge um valor limite  $M_p$ , temos a completa plastificação da seção transversal. Estes estágios estão esquematizados na figura 2.13.

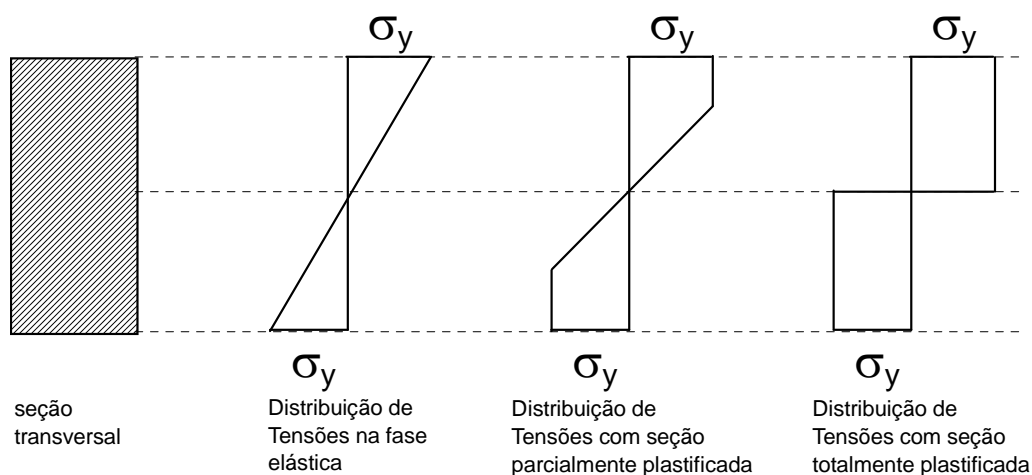


Figura 2.13 – Distribuição de Tensões em uma Seção de Aço

No caso de estruturas de concreto armado esta análise se torna mais difícil por causa da natureza do material (heterogeneidade). Não se conhece a princípio os valores limites de esforços de plastificação para cada elemento (lajes, vigas e pilares) que compõe o modelo tridimensional. Os diagramas de distribuição de tensões ficam em função de limites sugeridos pelas normas e baseados em ensaios experimentais. Segundo a NBR 6118/2003, o momento de plastificação no concreto é atingido na situação de  $\epsilon_s = 10 \%$  e  $\epsilon_c = 3,5 \%$ , na seção crítica. O diagrama de distribuição de tensões no concreto, nas diversas fases de carregamento, pode ser visualizado na figura 2.14.

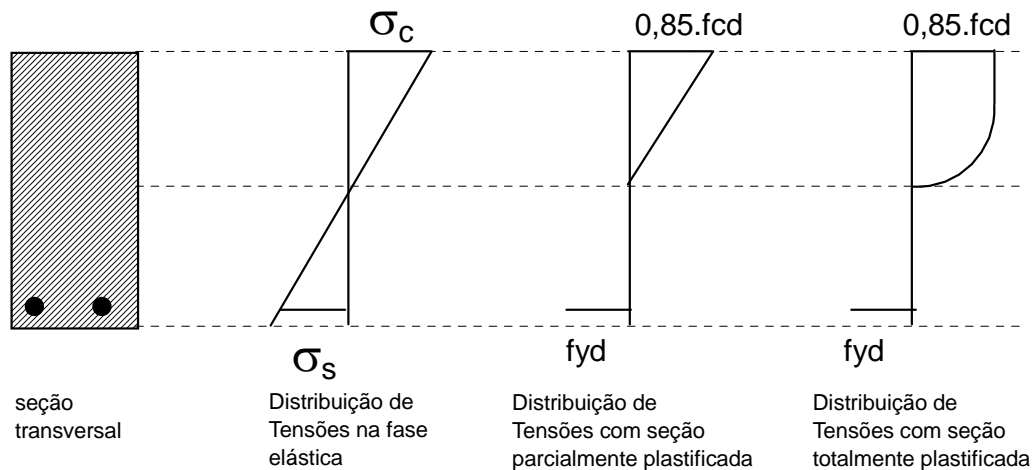


Figura 2.14 – Distribuição de Tensões em uma Seção de Concreto Armado

Para o concreto armado, a análise elastoplástica é possível mas regrada de algumas hipóteses que neste trabalho denominou-se critérios de plastificação. Em um arranjo tridimensional é necessário estabelecer de antemão os critérios de plastificação individualizados para as lajes, vigas e pilares. Estes critérios de plastificação terão como base todo o arranjo estrutural do edifício, com dimensões de seções transversais e armaduras previamente definidos. Uma análise elástica é necessária para se ter um dimensionamento prévio das armaduras e seções transversais.

### 2.5.1 Critério de Plastificação - Lajes

Especificamente nas lajes de concreto armado, admite-se que o colapso somente ocorra com a formação de um conjunto de linhas de plastificação, as quais a transformam em um sistema hipostático. As linhas de plastificação são geradas quando, numa determinada seção ou elemento, for atingido o momento de plastificação. Algumas hipóteses valem à pena ser ressaltadas quando na utilização deste critério:

- admite-se o comportamento rígido plástico para a laje;
- considera-se sobre a laje a atuação de carregamentos proporcionais admitindo como satisfatória a capacidade de rotação das charneiras plásticas, até o colapso final da laje;

- despreza-se a influência dos esforços cortantes, de forças normais, dos momentos fletores volventes e de possíveis efeitos recíprocos da ação conjunta de momentos fletores atuantes em duas direções ortogonais.

Segundo a norma brasileira NB1/2003, o cálculo de lajes no regime rígido plástico é permitido desde que as cargas atuem sempre no mesmo sentido e que as deformações das seções da laje estejam nos domínios de deformações 2 ou 3, conforme esquematizado nas figuras 2.15 e 2.16:

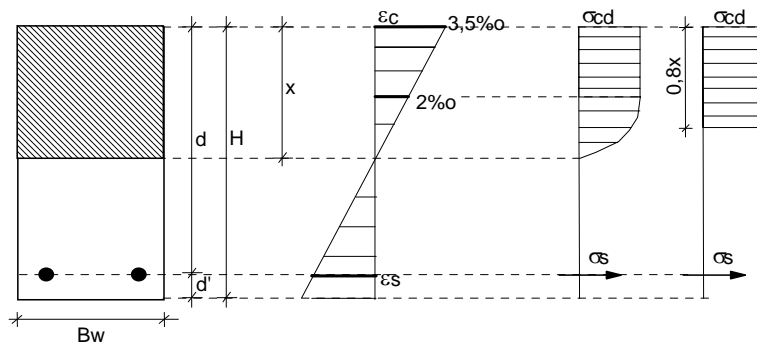


Figura 2.15 – Diagrama de Tensões e Deformações – Seção Retangular

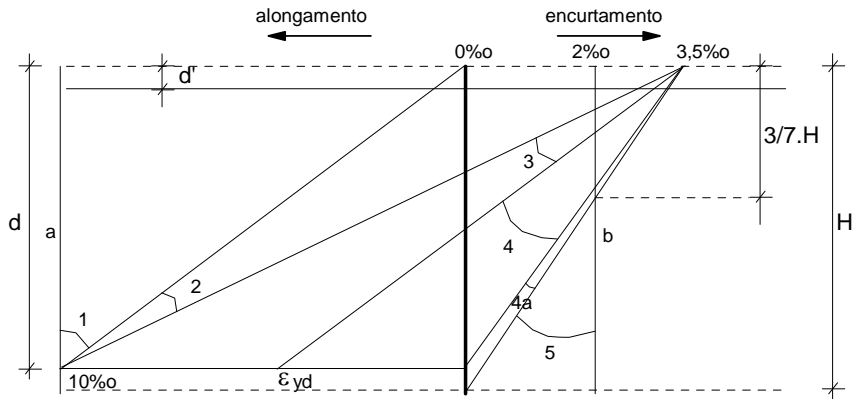


Figura 2.16 – Domínios de Dimensionamento

Considerando o dimensionamento à flexão simples, o momento de plastificação,  $M_p$ , é dado por:

$$M_p = R_c \cdot Z = R_s \cdot Z \quad (2.20)$$

onde:

- $M_p$  : momento de plastificação;
- $R_c$  : resultante de forças no concreto;
- $R_s$  : resultante de forças na armadura;
- $Z$  : braço de alavanca.

Portanto,  $R_c = R_s$ . Substituindo os valores de  $R_c$  e  $R_s$  tem-se:

$$0,85 f_{cd} b_w 0,8x = f_{yd} A_s \quad (2.21)$$

sendo:

- $f_{cd}$  : resistência de cálculo do concreto à compressão;
- $b_w$  : dimensão da base da seção transversal;
- $x$  : profundidade da linha neutra;
- $f_{yd}$  : tensão de escoamento da armadura;
- $A_s$  : área de aço utilizada.

Fazendo  $x = \frac{A_s f_{yd}}{0,68 f_{cd} b_w}$  e sendo  $M_p = R_s \cdot Z$ , temos:

$$M_p = A_s f_{yd} (d - 0,4x) \quad (2.22)$$

$$M_p = A_s f_{yd} \left[ d - 0,59 A_s \cdot \frac{f_{yd}}{(f_{cd} b_w)} \right] \quad (2.23)$$

Considerando  $a_s = \frac{As}{b_w}$  como sendo a armadura por metro linear, obtém-se o momento fletor de plastificação por metro de laje ( $m_{pl}$ ) representado pela relação 2.24:

$$m_{pl} = a_s \cdot f_{yd} \cdot \left( d - 0,59 \cdot a_s \cdot \frac{f_{yd}}{f_{cd}} \right) \quad (2.24)$$

A expressão 2.24 será utilizada neste trabalho para definir um momento de plastificação para os elementos de laje ( $m_{pl}$ ) considerando a armadura por metro,  $a_s$ , em cada direção.

## 2.5.2 Critério de Plastificação - Vigas

Para os elementos de vigas, foram admitidas neste trabalho algumas hipóteses simplificadoras objetivando diminuir o número de variáveis no problema sem comprometer, de forma significativa, os resultados finais. Exemplos de calibração e validação que serão apresentados no capítulo 3 demonstram que as hipóteses admitidas apresentam uma resposta satisfatória quando se trata do comportamento global da estrutura.

A cada incremento de carga, os elementos identificados como vigas são verificados à flexão simples, no estado limite último, e algumas hipóteses simplificadoras são admitidas:

- as seções transversais permanecem planas até a ruptura (hipótese de Bernoulli);
- para valores de encurtamento máximo do concreto,  $\varepsilon_c$ , admite-se o limite de 3,5 %;
- o alongamento máximo do aço a tração equivale a 10 %, evitando-se deformações plásticas excessivas na peça;
- despreza-se a resistência do concreto à tração;
- adotou-se a distribuição de tensões de compressão no concreto segundo o diagrama retangular simplificado com um valor de  $\sigma_{cd} = 0,85 \cdot f_{cd}$ .

Determinando-se os momentos fletores nas vigas, em cada iteração, determina-se a armadura longitudinal necessária através de um dimensionamento à flexão simples. Compara-se a armadura calculada, em cada passo de carga, com a armadura existente no projeto. Caso seja superior, é inserida uma rótula plástica na seção transversal admitindo-se rotações significativas nesta seção transversal específica para pequenos incrementos de carga. O momento de plastificação admitido para as vigas corresponde, portanto, ao



momento fletor correspondente à fronteira 3-4, dos domínios de dimensionamento estabelecidos pela NB1 / 2003. Não se admite neste trabalho, portanto, peças superarmadas (seções com armadura dupla).

Na fronteira 3-4, com  $\varepsilon_{cd} = 3,5\%$  e  $\varepsilon_s = \varepsilon_{yd}$ , para o aço CA50 tem-se  $k_x = 0,628$  e  $k_z = 0,749$ , sendo  $k_x$  a profundidade de linha neutra relativa e  $k_z$ , o braço de alavanca relativo. O momento fletor ( $m_{pv}$ ) na fronteira 3-4 que, neste trabalho específico será admitido como o momento de plastificação para as vigas vale:

$$m_{pv} = 0,32 \cdot b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd} \quad (2.25)$$

onde:

$m_{pv}$  : momento de plastificação considerado para as vigas;

$b_w$  : base da seção transversal;

$d$  : altura útil;

$f_{cd}$  : resistência de cálculo à compressão do concreto.

A verificação da seção com relação ao esforço cortante, no estado limite último, também se faz necessária. Admitiram-se neste trabalho as recomendações da NB1/2003 que define que a resistência do elemento estrutural, numa dada seção transversal, deve ser considerada satisfatória quando verificadas simultaneamente as seguintes condições:

$$V_{sd} \leq V_{Rd2} \quad (2.26)$$

$$V_{sd} \leq V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (2.27)$$

onde:

$V_{sd}$  : força cortante solicitante na seção;

$V_{Rd2}$  : força cortante resistente de cálculo, referente à ruína das diagonais comprimidas de concreto;

$V_{Rd3}$  : força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína por tração diagonal, sendo  $V_c$ , a parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça e  $V_{sw}$ , a parcela resistida pela armadura transversal.

Não sendo atendidas as relações 2.26 e 2.27, constata-se o estado limite último devido ao esforço cortante.

### 2.5.3 Critério de Plastificação - Pilares

Como critério de plastificação dos pilares optou-se pelo dimensionamento à flexão oblíqua, em cada iteração, utilizando o método do pilar padrão com curvatura aproximada na determinação dos esforços locais de segunda ordem, em conformidade com a NB1/2003. Este método pode ser empregado em pilares onde  $\lambda < 90$ , com seção transversal constante e armadura simétrica ao longo de seu eixo.

A não linearidade geométrica é considerada de forma aproximada supondo-se que a deformação da barra seja senoidal. A não linearidade física é considerada através de uma expressão aproximada da curvatura na seção crítica. O momento total máximo no pilar, considerando os efeitos de segunda ordem locais, é calculado pela expressão:

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \cdot \left(\frac{l_e^2}{10}\right) \cdot \frac{1}{r} \quad (2.28)$$

onde:

- $M_{d,tot}$  : momento fletor total de cálculo;
- $\alpha_b$  : parâmetro relacionado com as condições de contorno da coluna;
- $M_{1d,A}$  : momento de 1ª. ordem de cálculo;
- $N_d$  : esforço normal de cálculo;
- $l_e$  : comprimento de flambagem;
- $1/r$  : curvatura da seção crítica.

A curvatura na seção crítica é avaliada pela seguinte expressão aproximada:

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h \cdot (\nu + 0,5)} \leq \frac{0,005}{h} \quad (2.29)$$

sendo  $h$  equivalente à altura da seção transversal na direção considerada e  $v$ , a força normal adimensional ( $v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}}$ ).

Durante a análise incremental, são determinados os esforços nas colunas  $N_d$ ,  $M_{dx}$  e  $M_{dy}$ , em cada iteração. Faz-se o dimensionamento à flexão oblíqua para cada seção do pilar, determinando a armadura longitudinal compatível com os esforços solicitantes. Esta armadura será comparada com a especificada em projeto que foi determinada através de uma análise linear elástica inicial.

Caso a armadura dimensionada seja superior à considerada inicialmente em projeto, ocorre nesta fase uma inserção de uma rótula plástica na seção. Prossegue na análise incremental até que o número de rótulas inseridas transforme a estrutura original em um mecanismo. No que se refere aos limites estabelecidos para armaduras transversais, utilizou-se os mesmos critérios já discutidos para as vigas e que está em conformidade com a NB1/2003, item 18.4.3.

Nos projetos em que as paredes estruturais estejam presentes, estas podem ter os efeitos de segunda ordem considerados ou não, dependendo da esbeltez das lâminas que compõem o pilar-parede. Segundo a NB1/2003, os efeitos de segunda ordem podem ser negligenciados quando:

- a base e o topo de cada lâmina estiverem convenientemente fixados à laje do edifício, conferindo ao todo o efeito de diafragma horizontal;
- o índice de esbeltez de cada lâmina for inferior a 35.

Se a esbeltez de cada lâmina que forma o pilar-parede for superior a 35 e menor que 90, a NB1/2003 permite uma avaliação aproximada dos efeitos de segunda ordem tratando cada lâmina como se fosse um pilar isolado. Os esforços atuantes são proporcionais à largura de cada lâmina. A forma como são obtidos os esforços nas paredes estruturais do modelo numérico serão detalhados no capítulo 3.

## 2.6 ANÁLISE DE INSTABILIDADE ELÁSTICA

Ao se estudar a instabilidade elástica de pórticos deve-se ater a três problemas distintos e que são interrelacionados : problema de bifurcação de equilíbrio ou comumente chamado de flambagem, problema de segunda ordem e o problema de ponto limite. A diferenciação entre os 3 problemas, relacionados ao equilíbrio, é de suma importância para a compreensão do comportamento estrutural de pórticos, no que se refere à estabilidade.

A NBR6118/2003 enfatiza o tema, em seu item 15.2, onde caracteriza como os três tipos de instabilidade nas estruturas:

- perda de estabilidade por bifurcação do equilíbrio ou flambagem, fenômeno que ocorre em estruturas sem imperfeições geométricas iniciais;

- ponto limite com reversão que seria a perda de estabilidade sem que ocorra a bifurcação de equilíbrio, fenômeno que ocorre em situações particulares como nas estruturas abatidas;

- ponto limite sem reversão, ocorre em estruturas de material com comportamento não linear, com imperfeições geométricas iniciais que, ao aumentar a intensidade do carregamento observa-se que o aumento da capacidade resistente da estrutura passa ser menor do que o aumento da sollicitação.

Para uma melhor compreensão, os fenômenos acima citados serão retratados na análise de uma coluna constituída de barra reta, sem imperfeições geométricas, feita de material com comportamento elástico linear e submetida a um carregamento axial e concentrado  $P$ , estático e crescente (figura 2.17).

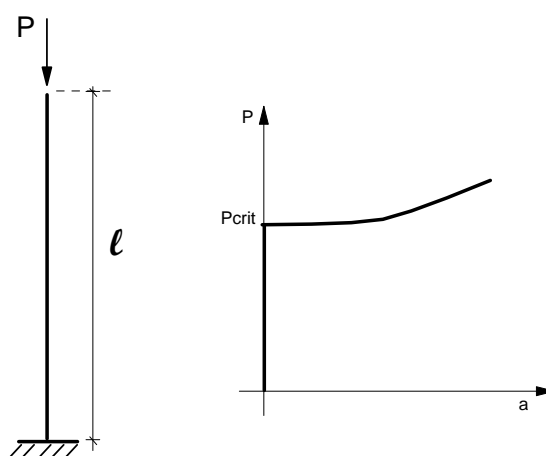


Figura 2.17 – Barra Reta Carregada Axialmente

A estrutura da figura 2.17 encontra-se em equilíbrio estável até o instante que a carga  $P$  atinge um valor considerado crítico ( $P_{crit}$ ). A partir deste instante, a barra pode tomar uma das seguintes formas:

- a forma reta, caracterizada como situação de equilíbrio instável;
- ou a forma curva, indicando um equilíbrio estável.

O ponto onde  $P = P_{crit}$  é denominado ponto de bifurcação de equilíbrio ou comumente denominado de flambagem. Percebe-se que, nesta situação, a forma reta é mantida para valores de  $P$  inferiores a  $P_{crit}$  ( $P < P_{crit}$ ).

Uma situação diferente ocorre quando a mesma barra, feita de material com comportamento elástico linear, é carregada com uma excentricidade inicial  $e_1$ . Para valores crescentes de  $P$ , a barra assume, desde o início a forma curva e haverá sempre uma situação de equilíbrio, a única possível para cada  $P$ , de equilíbrio estável (figura 2.18).

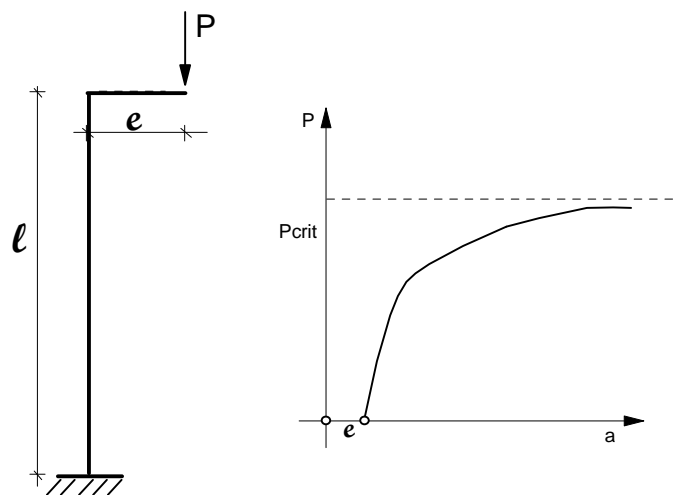


Figura 2.18 – Barra Reta Com Carregamento Excêntrico

Neste caso não ocorre bifurcação de equilíbrio. Enquanto o material permanecer no regime elástico, não haverá problema de instabilidade na flexão composta. A situação será de equilíbrio estável e a ruína será atingida somente por ruptura do material (Carmo, 1995). Este problema é caracterizado como um problema de segunda ordem.

Se a barra reta, excêntrica, for constituída de material de comportamento não-linear e esbelta, com aumentos crescentes da carga  $P$ , surgirá uma excentricidade de segunda ordem,  $e_2$ , de valor crescente até que  $P$  atinja um valor tal que, o momento externo provocado pela carga não pode ser equilibrado pelo momento interno na

seção mais solicitada, conduzindo assim a um caso de instabilidade na flexão composta, sem bifurcação de equilíbrio (figura 2.19).

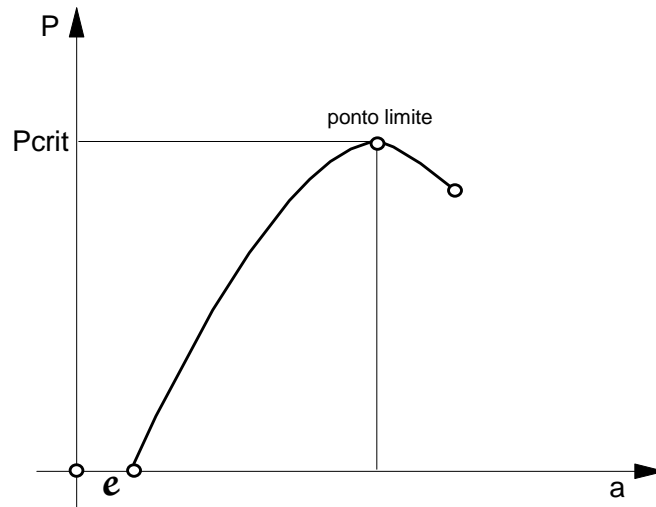


Figura 2.19 – Problema de Ponto Limite

Para valores de  $P$  inferiores a carga crítica, existem duas configurações de equilíbrio que correspondem à forma fletida. A primeira, equivalente a um menor deslocamento, é de equilíbrio estável e a segunda, de equilíbrio instável. Quando a carga  $P$  se aproxima de um determinado valor crítico, os valores de deslocamentos possíveis de existir se aproximam até se igualarem quando  $P=P_{crit}$ . Para valores superiores a  $P_{crit}$ , o equilíbrio é praticamente impossível. Nos edifícios altos onde ocorre a atuação simultânea de carregamentos verticais e horizontais, a instabilidade é provocada por um problema de ponto limite.

O estudo da flambagem se deve muito às pesquisas do matemático suíço *Leonhard Euler* (1707-1783) sendo que o fator de carga crítica é comumente denominado “fator de carga crítica de *Euler* “. Considerando a solução geral já comentada no item 2.7, *Euler* definiu como a carga de flambagem  $P$ , para uma coluna isolada, a relação:

$$P = \frac{n^2 EI}{\ell^2} \quad (2.30)$$

A figura 2.20 apresenta os 3 primeiros modos de flambagem para uma coluna em concreto armado, bi-rotulada, submetida a um carregamento axial, com seção transversal  $20 \times 20 \text{ cm}$ ,  $f_{ck} 20 \text{ MPa}$  e  $E = 25043,96 \text{ MPa}$  :

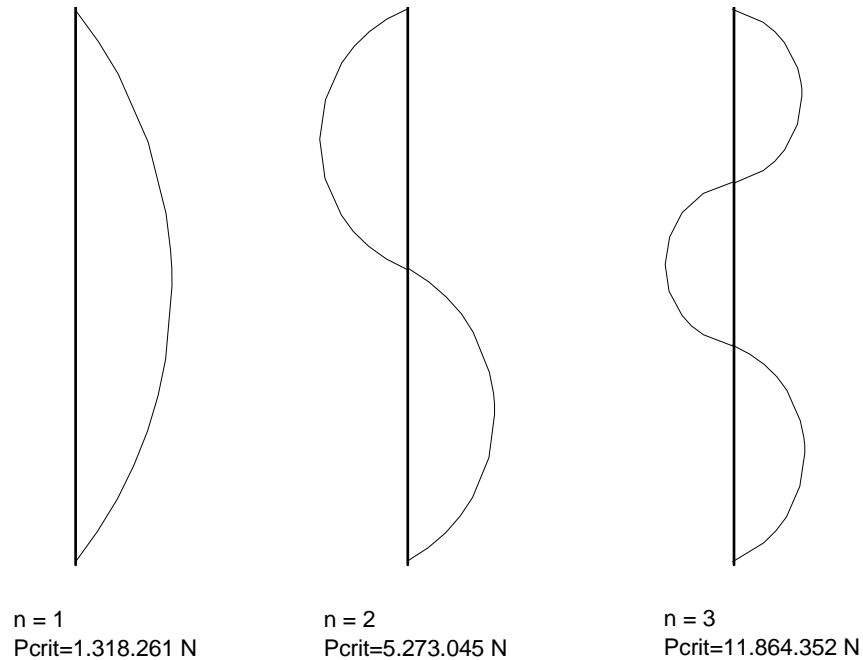


Figura 2.20 – Modos de Flambagem – Coluna Isolada

A carga crítica corresponde ao menor valor de  $P$  ( $P_{crit} = 1.318.261 \text{ N}$ ), correspondente a  $n = 1$ . Sob o ponto de vista matemático, o fenômeno da flambagem pode ser assimilado a um problema de autovalores e autovetores sendo que :

- os autovalores representam as cargas críticas de flambagem;
- os autovetores indicam os modos de flambagem correspondentes a cada autovalor.

O cálculo da carga crítica de flambagem de pórticos consiste em uma generalização do cálculo da carga crítica de uma coluna isolada. O fator de carga crítica de flambagem ( $\lambda_{cr}$ ) também conhecido como “*fator de carga crítica de Euler*”, consiste em um fator multiplicador do carregamento atuante a partir do qual a configuração de equilíbrio da estrutura não é única, sendo possível manter a estrutura em outra posição, envolvendo momentos fletores nos elementos, sem um acréscimo das cargas atuantes (Figura 2.21).

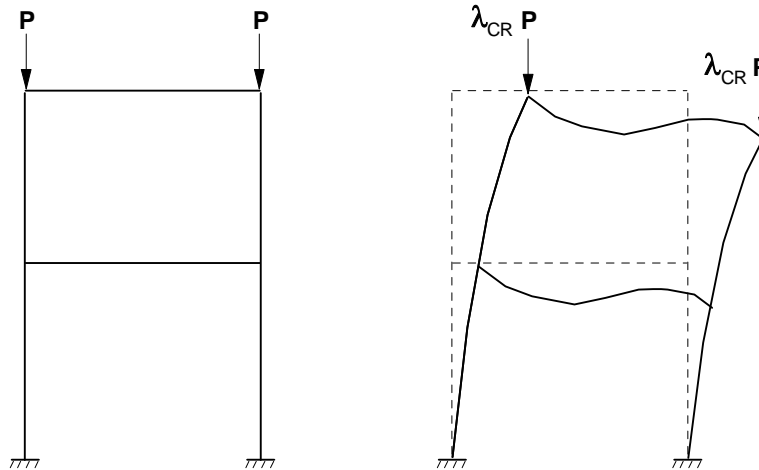


Figura 2.21 - Cálculo do Carga Crítica em Pórticos

Neste trabalho utilizou-se a análise de instabilidade elástica para a determinação do fator de carga crítica de flambagem de pórticos. Na formulação utilizada, define-se como a matriz de rigidez global do sistema, a matriz  $[K_T]$ , denominada matriz de rigidez tangente ou matriz de rigidez da teoria de 2ª ordem. Por sua vez, a matriz  $[K_T]$  é constituída de outras submatrizes como apresentada em 2.31.

$$[k_T] = [k_e] + [\Delta k_e] + [k_G] \quad (2.31)$$

A matriz de rigidez  $[K_e]$ , denominada matriz de rigidez elástica ou de 1ª ordem, é obtida atribuindo-se deslocamentos unitários nas direções das coordenadas adotadas e calculando-se às ações elásticas, segundo essas coordenadas, necessárias para manter o sistema em equilíbrio.

A parcela  $[\Delta K_e]$  consiste em uma correção da matriz de rigidez elástica, em função das coordenadas nodais. Nos pórticos, e sempre que se trate de problema de instabilidade nas proximidades da configuração inicial, a mesma pode ser desprezada (Franco, 1985). A relação 2.31 fica, portanto, assim resumida:

$$[K_T] = [K_e] + [K_G] \quad (2.32)$$

A matriz  $[K_G]$ , chamada de matriz de rigidez geométrica, é definida como a que contém as ações, segundo as coordenadas adotadas, na presença da força axial, quando se



atribuem deslocamentos unitários e se mantém a estrutura na posição deslocada, sem a interferência das resistências elásticas (Rachid, 1993).

Para o cálculo do  $\lambda_{CR}$ , assume-se que as deformações na estrutura sejam pequenas o suficiente para que a teoria da análise linear elástica possa ser aplicada na configuração inicial e que, durante a mudança de forma, não ocorram alterações nos valores das forças axiais (Livesley, 1986). Desta forma, com a aplicação de um fator de carga genérico,  $\lambda$ , à estrutura, têm-se que:

$$\lambda \cdot \{P\} = [K_T] \cdot \{u\} \quad (2.33)$$

onde :

$\{P\}$  = vetor correspondente às cargas nodais ;

$[K_T]$  = matriz de rigidez tangente ;

$\{u\}$  = vetor dos deslocamentos nodais .

A variação no valor das cargas,  $\{\delta P\}$ , implica em uma variação nos valores dos deslocamentos,  $\{\delta u\}$ . Assumindo que a variação  $\{\delta u\}$  não irá influenciar no valor dos esforços axiais durante a mudança de configuração, a matriz de rigidez tangente da estrutura,  $[K_T]$ , pode ser expressa como função apenas do fator de carga “ $\lambda$ ”, independente dos deslocamentos. Assim pode-se escrever:

$$\{\delta P\} = [K_T(\lambda)] \cdot \{\delta u\} \quad (2.34)$$

No instante em que  $\lambda$  atinge o valor crítico ( $\lambda = \lambda_{CR}$ ), têm-se, por definição, que  $\{\delta P\} = 0$ . Portanto :

$$[K_T(\lambda_{CR})] \cdot \{\delta u\} = 0 \quad (2.35)$$

onde, para se obter uma solução não trivial, o determinante da matriz  $[K_T(\lambda_{CR})]$  deverá ser nulo. Diante do exposto percebe-se que o valor crítico do carregamento atuante, no sistema estrutural, é alcançado quando a matriz de rigidez global,  $[K_T]$ , deixa de ser positiva definida ou torna-se singular:

$$\det / [K_T(\lambda_{CR})] / = 0 \quad (2.36)$$

Uma vez que o valor da carga axial é proporcional ao fator de carga crítico de flambagem,  $\lambda_{CR}$ , válido para toda a estrutura, conseqüentemente a matriz de rigidez geométrica também o será; assim pode-se escrever a equação 2.36, como função de  $\lambda_{CR}$ , da seguinte forma:

$$\det / [K_e] + \lambda_{CR} \cdot [K_G] / = 0 \quad (2.37)$$

Como acontece na coluna isolada, a solução recai em um problema típico de autovalores onde:

- os autovalores (ou valores característicos e/ou valores próprios), representam as raízes para a qual o determinante da matriz global se anule, constituindo assim, o conjunto dos fatores de carga crítica de flambagem para a estrutura;
- os autovetores (ou vetores característicos e/ou vetores próprios), representam os possíveis modos de flambagem.

No terceiro capítulo serão expostos mais detalhes utilizados na elaboração do programa AIEL, que realiza a análise de instabilidade elástica de pórticos espaciais.

## **2.7 ANÁLISE DINÂMICA DE VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS**

O comportamento dinâmico de uma estrutura com vários graus de liberdade pode ser resumido na seguinte relação:

$$[M] \cdot \{\ddot{U}\} + [C] \cdot \{\dot{U}\} + [k] \cdot \{U\} = \{F(t)\} \quad (2.38)$$

onde:

$[M]$  : matriz de massa;  $\{\ddot{U}\}$  : vetor de acelerações nodais;  
 $[C]$  : matriz de amortecimento;  $\{\dot{U}\}$  : vetor das velocidades nodais;  
 $[k]$  : matriz de rigidez;  $\{U\}$  : vetor dos deslocamentos nodais;  
 $\{F(t)\}$  : vetor de cargas nodais.

Desprezando a influência do amortecimento nos valores das frequências naturais e nos modos de vibração e que as forças externas são nulas, temos um problema de vibrações livres não amortecidas sendo a equação 2.38 simplificada na forma:

$$[M] \cdot \{\ddot{U}\} + [k] \cdot \{U\} = 0 \quad (2.39)$$

Quando a estrutura é afastada da sua posição de equilíbrio com a configuração deformada de um de seus modos naturais de vibração, ela vibra abandonada a si mesma com a configuração daquele modo e com uma frequência característica daquele modo de vibrar. A determinação dos modos de vibração e das frequências naturais de vibração constitui a análise modal da estrutura. Em pórticos com vários graus de liberdade, a equação 2.39, geralmente é resolvida através da superposição modal que consiste na combinação linear dos modos naturais de vibração da estrutura.

Representando, de forma compacta, todos os deslocamentos associados aos “n” graus de liberdade, bem como as amplitudes associadas aos movimentos dos “n” graus de liberdade, pode-se escrever:

$$\{U(t)\} = \{U_o\} \cdot \text{sen} \omega t \quad (2.40)$$

sendo:

$\{U(t)\}$  : vetor coluna que contém todos os componentes de deslocamentos associados aos “n” graus de liberdade da estrutura em um instante “t”;

$\{U_o\}$  : vetor coluna que contém todos os deslocamentos máximos associados aos “n” graus de liberdade (amplitudes);

A partir do vetor deslocamento pode-se encontrar o vetor velocidade e aceleração derivando a equação 2.41:

$$\{\dot{U}(t)\} = \{U_o\} \cdot \omega \cdot \cos \omega t \quad (2.41)$$

$$\{\ddot{U}(t)\} = -\{U_o\} \cdot \omega^2 \cdot \text{sen} \omega t \quad (2.42)$$

Substituindo as relações 2.41 e 2.42 na equação de movimento referente à vibrações livres (2.39) têm-se:

$$([k] - \omega^2 [M]) \cdot \{U_o\} = 0 \quad (2.43)$$

A relação 2.43 é conhecida como a equação de equilíbrio dinâmico do sistema vibrando harmonicamente. Através desta equação é possível determinar os modos de vibração e as correspondentes frequências naturais.

A solução trivial da equação 2.43 ocorre quando  $\{U_o\} = 0$  que corresponde à situação em que nenhuma deformação inicial é imposta à estrutura, não gerando vibrações livres. A solução não trivial ocorre para  $[k] - \omega^2 [M] = \{0\}$ . Esta operação matricial envolvendo a matriz de rigidez e a matriz de massa só será verificada para alguns valores de  $\omega$ , que são as frequências naturais. Essa relação só será possível quando o determinante da matriz  $[k] - \omega^2 [M]$  for nulo. Ou seja:

$$\det ([k] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (2.44)$$

A relação 2.25 representa a equação de frequência do sistema, considerando o caso de vibrações livres não amortecidas. A análise matemática desta equação sugere um problema de autovalores e autovetores do tipo  $\det ([k] - \lambda [M]) = 0$ , sendo  $\lambda = \omega^2$ . Os autovalores  $\lambda$  são as raízes do polinômio  $p(\lambda) = \det ([k] - \lambda [M])$ , denominado polinômio característico do sistema. Somente alguns valores de  $\lambda$  satisfazem à equação 2.25 e para cada autovalor,  $\lambda_i$ , tem-se um correspondente autovetor,  $\phi_i$ , que representa um modo natural de vibração.

A análise dinâmica de vibrações livres não amortecidas pode ser resumida pela montagem da matriz de rigidez e da matriz de massa da estrutura. Resolvendo o sistema de equações para os “n” graus de liberdade, tem-se a determinação dos autovalores, que

representam os quadrados das frequências naturais de vibração. Para cada autovalor está associado um autovetor que fornece a idéia dos modos naturais de vibração. No terceiro capítulo estes passos serão discriminados quando na montagem do programa ADVL.

Observando o item 23 da NBR6118/2003, ao abordar o tema “ações dinâmicas e fadiga”, a norma brasileira ressalta que as ações dinâmicas podem provocar estados limites de serviço e estados limites últimos por vibrações excessivas ou por fadiga dos materiais. A análise das vibrações pode ser feita em regime linear no caso de estruturas usuais.

A NBR6118/2003 ressalta ainda que, buscando-se assegurar um comportamento satisfatório das estruturas sujeitas a vibrações, deve-se afastar o máximo possível a frequência própria da estrutura ( $f$ ), da frequência crítica ( $f_{crit}$ ), que depende da destinação da respectiva edificação.

$$f > 1,2 \cdot f_{crit} \quad (2.45)$$

A norma brasileira NBR6118/2003 apresenta valores limites para a frequência crítica no caso de vibrações induzidas pela ação de pessoas (tabela 2.1). Estes valores devem ser adotados quando na falta de valores experimentais ou da não possibilidade de se fazer uma análise dinâmica mais acurada.

Tabela 2.1 – Frequência Crítica para casos especiais de estruturas submetidas a vibração pela ação de pessoas (NBR 6118)

<i>Caso</i>	$f_{crit}$ (Hz)
Ginásio de Esportes	8,0
Salas de dança ou de concerto sem cadeiras fixas	7,0
escritórios	3,0 a 4,0
Salas de concerto com cadeiras fixas	3,4
Passarelas de pedestres ou ciclistas	1,6 a 4,5

No caso de efeitos dinâmicos induzidos pelo vento, a norma brasileira NBR 6123/1988 sugere que a avaliação das características dinâmicas da estrutura deve ser investigada por um modelo contínuo ou discreto. Ressalta-se ainda que, no caso de modelos contínuos, pode-se utilizar um processo simplificado quando a edificação tiver seção constante e distribuição aproximadamente uniforme de massa.

O modelo contínuo simplificado é aplicável a estruturas apoiadas exclusivamente na base e de altura inferior a 150 metros, sendo considerada na resposta dinâmica destas unicamente a contribuição do modo fundamental. Admite-se que o primeiro modo de vibração pode ser representado com precisão pela equação 2.46:

$$x = (z/h)^\gamma \quad (2.46)$$

A tabela 2.2 apresenta valores aproximados de  $\gamma$  e equações aproximadas, que permitem o cálculo direto da frequência fundamental  $f_1$  (Hz), para vários tipos de edificações usuais. Nesta tabela também é especificado a razão de amortecimento crítico,  $\zeta$ , em função do tipo de estrutura.

Tabela 2.2 – Parâmetro para determinação de Efeitos Dinâmicos (NBR6123/1988)

<i>Tipo de Edificação</i>	$\gamma$	$\zeta$	$T_1 = 1/f_1$
Edifícios com estrutura aperturada em concreto, sem cortinas	1,2	0,020	$0,05 + 0,015 \cdot h$
Edifícios com estrutura de concreto, com cortinas para absorção de forças horizontais	1,6	0,015	$0,05 + 0,012 \cdot h$
Torres e chaminés de concreto, seção variável	2,7	0,015	$0,02 \cdot h$
Torres, mastros e chaminés de concreto, seção uniforme	1,7	0,010	$0,015 \cdot h$
Edifícios com estrutura de aço soldada	1,2	0,010	$0,29\sqrt{h} - 0,4$
Torres e chaminés de aço, seção uniforme	1,7	0,008	$0,29\sqrt{h} - 0,4$
Estruturas de madeira	--	0,030	

Observando a tabela 2.2 percebe-se que, à primeira vista, a variável mais importante no comportamento dinâmico da estrutura frente aos efeitos do vento é a altura da edificação. Não são consideradas nas relações outras variáveis como as dimensões em planta, tipo de ligações entre os elementos estruturais, o contraventamento do edifício, influência de alvenarias de vedação, etc.

Blesmann (1998) ressalta que são bastante difundidas fórmulas em que o único parâmetro geométrico é a altura total da construção. A justificativa para esta simplificação é a de que levantamentos estatísticos de períodos de vibração medidos em construções reais

mostram que, face à complexidade do fenômeno e a grande dispersão dos resultados, o modelo simplificado ficando em função somente da altura já oferece resultados satisfatórios. Após um monitoramento de 163 edifícios reais, os resultados mostraram que as frequências naturais obtidas pelas fórmulas do modelo simplificado estavam melhor correlacionadas com as frequências naturais obtidas de forma experimental (Jeary & Ellis, 1983).

Pelo modelo discreto e considerando um caso geral de uma edificação com propriedades variáveis com a altura, a NBR6123/1988 sugere o esquema apresentado pela figura 2.22:

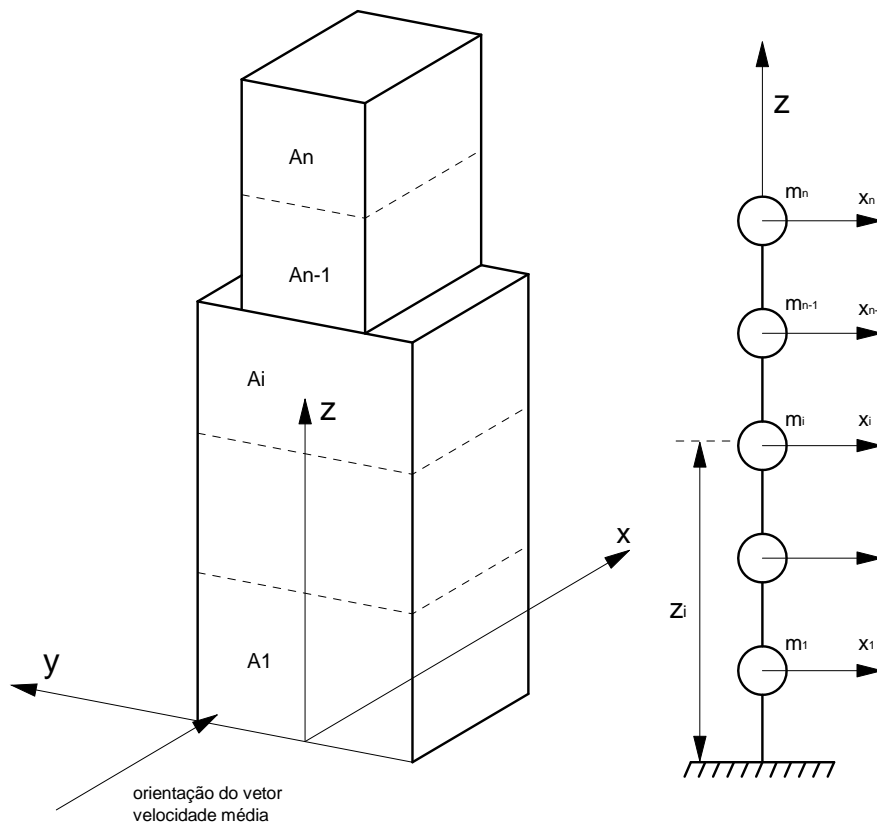


Figura 2.22 – Esquema para Modelo Dinâmico Discreto (NBR 6123/1988)

sendo:

- $x_i$  : deslocamento correspondente à coordenada  $i$ ;
- $A_i$  : área de influência correspondente à coordenada  $i$ ;
- $m_i$  : massa discreta correspondente à coordenada  $i$ ;
- $z_i$  : altura do elemento  $i$  sobre o nível do terreno;
- $n$  : número de graus de liberdade.

A NBR 6123/1988 sugere, em seu item 9.2.2.2, que um modelo discreto com  $n = 10$  é suficiente para se obter uma precisão adequada nos resultados e que a retenção de um único modo em estruturas usuais é usualmente suficiente na avaliação do comportamento dinâmico em estruturas induzido pelo vento. Em estruturas muito esbeltas e/ou com rigidez fortemente variável, a norma sugere a avaliação da contribuição dos demais modos permitindo assim uma resposta mais realista.

Os limites para a frequência ou período fundamental onde os efeitos do vento são bem significativos na estrutura não estão bem claros nas normas. Alguns autores como Blessman (1998) sugerem que, em edificações com período fundamental  $T_1$  igual ou inferior a  $1s$  ( $f > 1 \text{ Hz}$ ), a influência da resposta flutuante é pequena, sendo seus efeitos já considerados na determinação do intervalo de tempo adotado para o fator  $S_2$ . As edificações com período fundamental superior a  $1s$  ( $f < 1 \text{ Hz}$ ), em particular aquelas fracamente amortecidas, podem apresentar uma importante resposta flutuante na direção do vento médio.

Nos exemplos analisados no quarto capítulo, o limite de frequência equivalente a  $1 \text{ Hz}$  será utilizado na comparação dos resultados obtidos, via modelos numéricos, na avaliação da rigidez dos pórticos tridimensionais.

## 2.8 O CRITÉRIO RANKINE-MERCHANT

Bases teóricas objetivando fornecer uma estimativa prática da carga de ruína de pórticos metálicos foram apresentadas por W. Merchant<sup>1</sup>, em 1954, denominada equação de Rankine-Merchant. Este método busca prever a carga de colapso através da determinação do fator de carga de Rankine,  $\lambda_R$ , dado pôr:

$$\frac{1}{\lambda_R} = \frac{1}{\lambda_{CR}} + \frac{1}{\lambda_C} \quad (2.47)$$

ou

$$\lambda_R = \frac{\lambda_C}{1 + \frac{\lambda_C}{\lambda_{CR}}} \quad (2.48)$$

---

<sup>1</sup> MERCHANT, W. - “*The Failure Load of Rigid Jointed Frameworks as Influenced by Stability*”, The Structural Engineer, 32 (1954) . *apud* MAJID (1972) e HARRISON (1973) .



Esta carga de ruína fica portanto em função de dois parâmetros principais: o fator de carga crítica de flambagem,  $\lambda_{CR}$ , e o fator de carga de colapso plástico,  $\lambda_C$ . O método baseia-se em uma relação geométrica entre curvas carga versus deflexão, linear e não linear elástica (Figura 2.23).

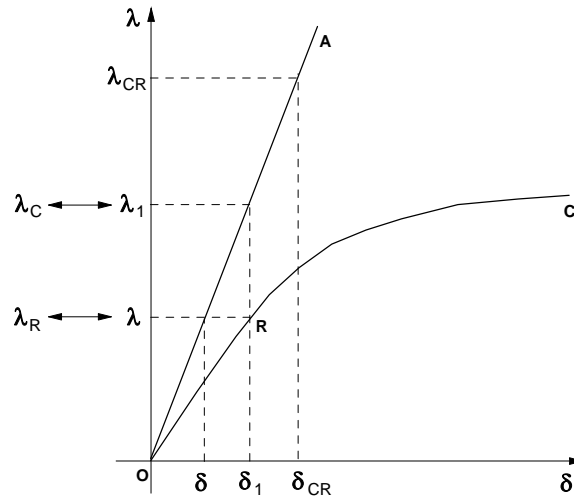


Figura 2.23 - Curva Carga versus Deflexão Linear e Não Linear Elástica

De acordo com a figura 2.23,  $\delta_{CR}$  representa o deslocamento correspondente ao fator de carga crítica de flambagem,  $\lambda_{CR}$ . Um deslocamento genérico,  $\delta$ , correspondente a um fator de carga também genérico,  $\lambda$ , no trecho linear, pode ser obtido pela expressão:

$$\delta = \delta_{CR} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_{CR}} \quad (2.49)$$

A relação entre a curva linear e a curva não linear pode ser feita, simplificada, através do fator de amplificação  $v^{-1}$ , sugerido por Majid (1972) e definido como:

$$v^{-1} = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{CR}}} \quad (2.50)$$

Portanto a partir dos deslocamentos obtidos em uma análise linear elástica pode-se prever os deslocamentos na análise não linear através da seguinte relação:

$$\delta_1 = \nu^{-1} \cdot \delta \quad (2.51)$$

Substituindo  $\delta$ , dada pela equação 2.51, na equação 2.50, encontra-se a relação 2.52:

$$\delta_1 = \frac{\lambda \cdot \delta_{CR}}{(\lambda_{CR} - \lambda)} \quad (2.52)$$

sendo  $\delta_1$ , o deslocamento correspondente a um fator de carga genérico,  $\lambda$ , sobre a curva não linear ORC. Um ponto particular R, sobre a curva não linear elástica, pode ser obtido se  $\lambda_1$  corresponder ao fator de carga de colapso plástico  $\lambda_c$  (Figura 2.22). Desta forma, pode-se estabelecer a seguinte relação entre  $\lambda_c$  e  $\lambda_{CR}$ :

$$\lambda_c = \delta_1 \cdot \frac{\lambda_{CR}}{\delta_{CR}} \quad (2.53)$$

Substituindo o valor de  $\delta_1$  (relação 2.52), em 2.53, encontra-se:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_{CR}} + \frac{1}{\lambda_c} \quad (2.54)$$

e fazendo-se  $\lambda = \lambda_R$  (Figura 2.23), define-se a relação de Rankine-Merchant, apresentada pela relação 2.47.

Outra informação que pode ser avaliada através da equação de Rankine-Merchant é a relação entre o fator de carga crítica de flambagem e o fator de carga de colapso plástico ( $\lambda_{CR} / \lambda_c$ ). Segundo Horne (1979), esta relação tem sido usada para recomendações da norma inglesa de aço (*British Code for Structural Steelwork de 1977-1978*).

Brozetti (1977) descreve também que a relação está prevista nas recomendações para construções metálicas na Europa (*European Recommendations fo Steel Construction, 1975*) e na França (*Recommandations pour le calcul en plasticité des constructions, 1975*).

De acordo com os dois últimos regulamentos, os valores da relação  $\lambda_{CR} / \lambda_C$ , adotados na diferenciação dos pórticos quanto à rigidez é a seguinte:

Tabela 2.3 - Considerações sobre a relação  $\lambda_{CR} / \lambda_C$   
*European Recommendations for Steel Construction*  
*Recommendations pour le calcul en plasticité des Constructions* (Brozzetti, 1977)

$\frac{\lambda_{CR}}{\lambda_C} > 10$	o pórtico pode ser analisado de acordo com a teoria de primeira ordem .
$4 \leq \frac{\lambda_{CR}}{\lambda_C} \leq 10$	considerações particulares devem ser tomadas para verificação da estabilidade .
$\frac{\lambda_{CR}}{\lambda_C} < 4$	uma análise elastoplástica de segunda ordem é requerida .

## 3 – IMPLEMENTAÇÕES NUMÉRICAS

### 3.1 INTRODUÇÃO

A fim de buscar um comportamento mais realista nos modelos numéricos montados neste trabalho, optou-se pela análise tridimensional onde o problema físico (representado pelos edifícios de concreto armado) é assimilado a um modelo numérico constituído por um pórtico espacial acoplado a elementos de placa. Todos os programas foram confeccionados em linguagem fortran tendo como base o método dos elementos finitos (MEF). Em cada programa estão embutidos as teorias e hipóteses de cada problema específico, já discutidos no segundo capítulo deste trabalho. O sistema completo pode ser resumido na figura 3.1:

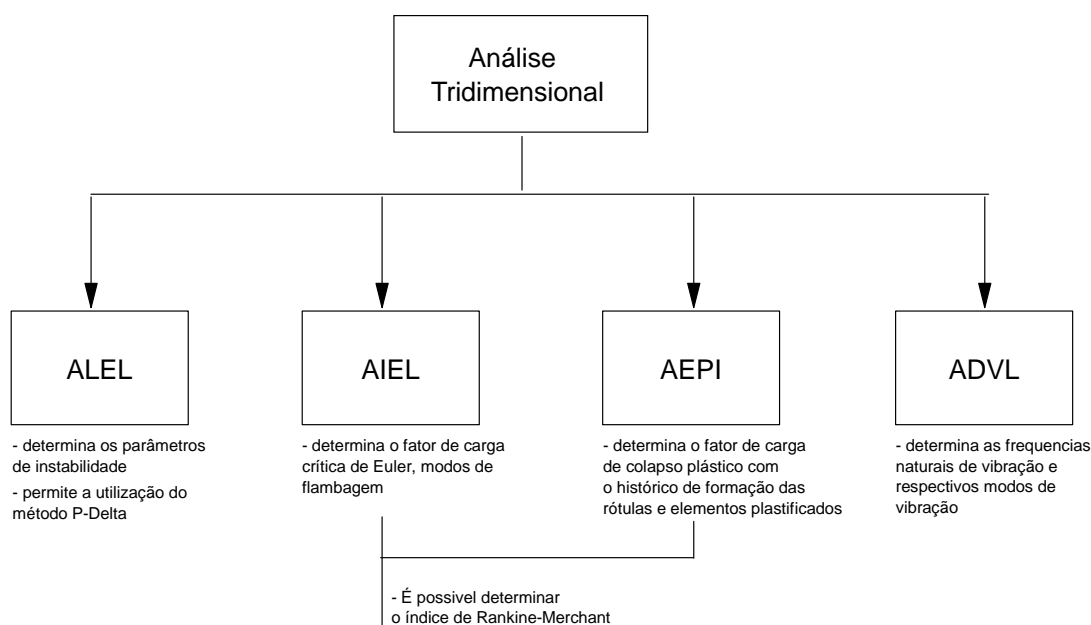


Figura 3.1 – Quadro Resumo das Implementações Numéricas

O programa ALEL (Análise Linear Elástica) é o programa base para todos os demais programas e nele foram implementadas subrotinas necessárias à análise de instabilidade, análise elastoplástica e de vibrações livres. Em linhas gerais é um programa de pórtico espacial com acoplagem de placas analisadas via teoria de Reissner-Mindlin.

Com adequações devidas no programa ALEL foram implementadas as subrotinas que originaram os demais programas denominados AIEL (Análise de Instabilidade Elástica), AEPI (Análise Elastoplástica Incremental) e ADVL (Análise Dinâmica de Vibrações Livres). Basicamente as alterações ocorreram na entrada de dados, matriz de rigidez local dos elementos, matriz de rigidez global da estrutura e na sub-rotina utilizada para resolução do sistema de equações.

### 3.2 O PROGRAMA DE ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA (ALEL)

O programa ALEL realiza a análise elástica de 1ª. ordem e é constituído de um modelo via MEF de pórtico espacial com placas acopladas. No presente trabalho, as condições de contorno são aplicadas apenas no pórtico espacial (elementos de barras), sendo os elementos de placa, simplesmente, apoiadas nos elementos do pórtico. Optou-se por utilizar um elemento finito de placa bilinear de 4 nós onde os conceitos gerais de flexão das placas foram introduzidos baseados na teoria de Reissner-Mindlin. Nos próximos itens são mostrados mais detalhes do presente modelo.

#### 3.2.1 Considerações Sobre o Elemento de Placa

Na análise dos elementos de placa optou-se por modelos bidimensionais considerando-se os carregamentos perpendiculares ao plano médio da mesma (Oñate, 1992) da mesma conforme está esquematizado na figura 3.2.

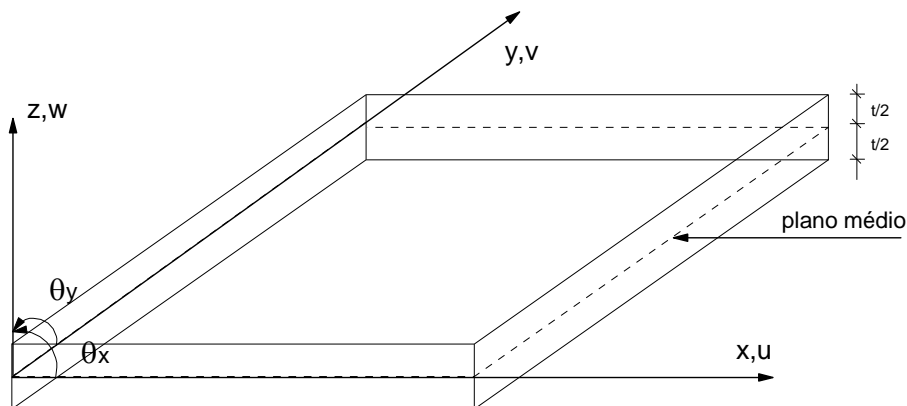


Figura 3.2 – Esquema da Placa Idealizada

Toda a análise de placas é feita em relação ao plano médio onde a origem das coordenadas é colocada de tal forma que a superfície superior se encontre na posição  $z = t/2$  e a superfície inferior,  $z = -t/2$ , sendo  $t$  a espessura da placa. O comportamento do plano médio da placa é avaliado pela deflexão  $w$ , na direção  $z$ , e pelas duas rotações,  $\theta_x$  e  $\theta_y$ , da normal ao plano médio, em cada direção. Estas três quantidades descrevem o campo de deslocamentos da placa.

A teoria básica para a análise de placas é a de Kirchhoff que se mostra adequada para a análise de placas esbeltas quando se negligencia as deformações por cisalhamento transversais. A teoria de Reissner-Mindlin leva em conta estas deformações sendo necessária uma formulação mais rigorosa oferecendo resultados mais realistas. Utilizando a teoria de Reissner-Mindlin, são acrescentadas rotações adicionais que se somam às deformações do plano médio da placa. São estas as hipóteses admitidas:

- seções normais ao plano médio da placa permanecem planas durante a deformação, só ocorrendo translações verticais:

$$u = v = 0 \quad \text{para} \quad z = 0$$

- todos os pontos contidos numa reta normal ao plano médio têm o mesmo deslocamento vertical:

$$w = f(x,y)$$

- a tensão normal  $\sigma_z$  é desprezível;

- os pontos que na placa indeformada estavam sobre uma reta normal ao plano médio da placa, após a deformação permanecem numa reta sem que esta seja necessariamente ortogonal ao plano médio deformado. Nas figuras 3.3 são apresentadas às características do elemento indeformado e deformado da placa.

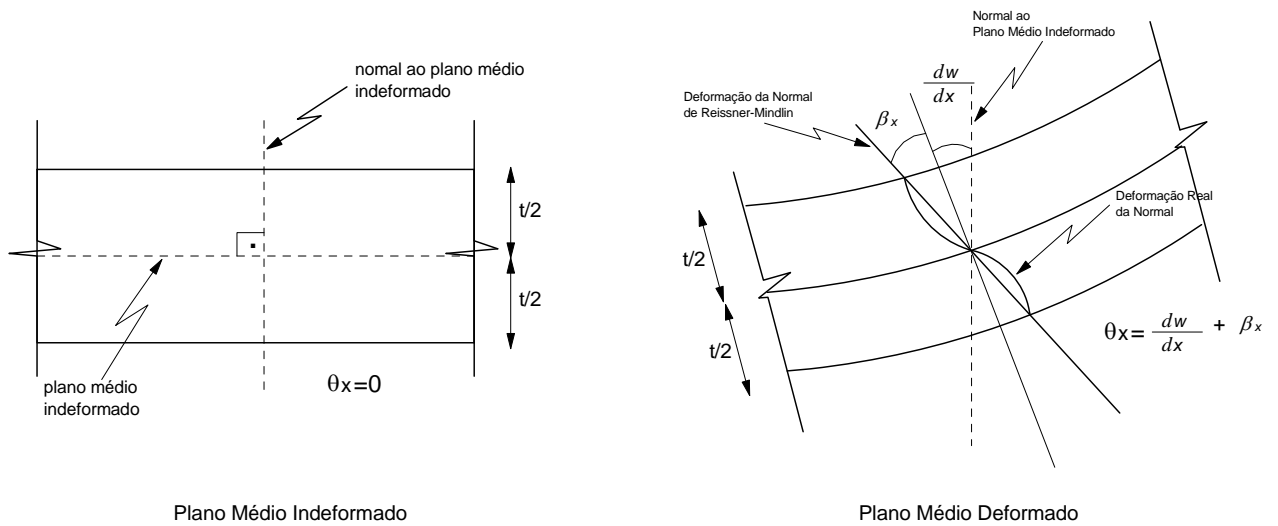


Figura 3.3 – Características da Placa Indeformada e Deformada de acordo com a Teoria de Reissner-Mindlin

Baseado nestas hipóteses, o campo de deslocamentos da placa é assim apresentado:

$$u(x, y, z) = -z \cdot \theta_x(x, y) \quad (3.1)$$

$$v(x, y, z) = -z \cdot \theta_y(x, y) \quad (3.2)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad (3.3)$$

onde:

$w$  : deslocamento vertical do plano médio da placa;

$\theta_x$  e  $\theta_y$  : ângulos de rotação da normal em relação ao plano médio.

O vetor deslocamento fica desta forma:

$$u = [w, \theta_x, \theta_y]^T \quad (3.4)$$

Com base na Teoria de Reissner-Mindlin, as rotações são definidas como segue:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \text{ e } \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \quad (3.5)$$

O campo de deformação da placa de Reissner-Mindlin é resumido nas expressões:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \cdot \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (3.9)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = -\beta_x \quad (3.10)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = -\beta_y \quad (3.11)$$

O que levam aos vetores de deformações de flexão ( $\varepsilon_f$ ) e de cortante ( $\varepsilon_c$ ), representados pelas expressões 3.12 e 3.13, respectivamente:

$$\varepsilon_f = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \cdot \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$



$$\varepsilon_c = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Integrando ao longo da espessura da placa, de  $-t/2$  a  $+t/2$ , tem-se o vetor de esforços  $\bar{\sigma}$  em ponto qualquer do plano médio da placa:

$$\bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{+t/2} \begin{Bmatrix} z\sigma_x \\ z\sigma_y \\ z\tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \partial z \quad (3.14)$$

Os esforços representados na relação 3.14 seguem a seguinte convenção de sinais:

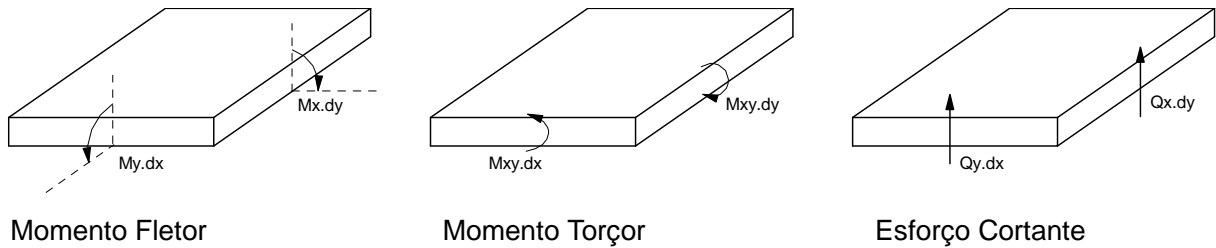


Figura 3.4 – Convenção de Sentidos Positivos para os Esforços Internos

Considerando um material isotrópico, as relações constitutivas do material podem ser desmembradas em duas matrizes representando a parcela referente à flexão ( $D_f$ ) e ao cisalhamento ( $D_c$ ):

$$\sigma = D \cdot \varepsilon = \begin{bmatrix} D_f & 0 \\ 0 & D_c \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_f \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

$$D_f = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$D_c = \begin{bmatrix} \alpha G & 0 \\ 0 & \alpha G \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

onde a matriz “ $D$ ” caracteriza a matriz constitutiva do material, “ $E$ ” o módulo de elasticidade longitudinal, “ $G$ ”, o módulo de elasticidade transversal, “ $\nu$ ”, o coeficiente de Poisson e a constante  $\alpha$  que assume o valor de  $5/6$ , tentando representar de forma mais exata a distribuição das tensões cisalhantes ao longo da espessura do elemento.

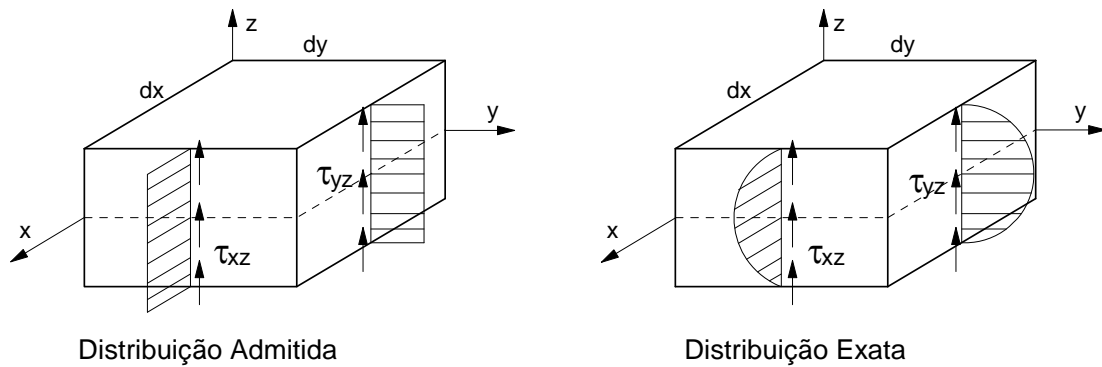


Figura 3.5 – Distribuição das Tensões Cisalhantes no Elemento de Placa

Trabalhando nas expressões de 3.12 a 3.17, encontra-se as tensões generalizadas de flexão ( $\bar{\sigma}_f$ ) e cisalhamento ( $\bar{\sigma}_c$ ) para a placa, segundo a teoria de Reissner-Mindlin e que são representadas neste trabalho pelas expressões 3.18 e 3.19:

$$\bar{\sigma}_f = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \end{array} \right\} \quad (3.18)$$

$$\bar{\sigma}_c = \frac{5Et}{12(1-\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{array} \right\} \quad (3.19)$$

A equação de equilíbrio pela teoria de Reissner-Mindlin fica em função de três quantidades do plano médio da placa: o deslocamento transversal  $w$ , e as rotações  $\theta_x$  e  $\theta_y$ , em relação ao plano médio. As equações de equilíbrio das forças verticais e momentos podem ser representados:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y = 0$$

Reescrevendo as relações para o campo de deformações tem-se o seguinte:

$$\varepsilon = -zL\theta \quad (3.22)$$

$$\gamma = -\theta + \nabla w$$

onde:

$$L = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Reescrevendo também as relações que definem as tensões generalizadas:

$$\bar{\sigma}_f = \hat{D}_f L\theta \quad (3.24)$$

$$\bar{\sigma}_c = \hat{D}_c(-\theta + \nabla w)$$

Substituindo as relações 3.22 a 3.24 nas equações de equilíbrio (3.20 e 3.21), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = L^T \bar{\sigma}_f + \bar{\sigma}_c = 0 \quad (3.25)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} + q = \nabla^T \bar{\sigma}_c + q = 0 \quad (3.26)$$

Substituindo as relações 3.24 na relação 3.25, temos:

$$L^T \hat{D}_f L \theta + \bar{\sigma}_c = 0 \quad (3.27)$$

Acrescentando as forças cortantes e rearranjando a equação acima, obtém-se:

$$L^T \hat{D}_f L \theta + \hat{D}_c (-\theta + \nabla w) = 0 \quad (3.28)$$

$$\nabla^T [\hat{D}_c (-\theta + \nabla w)] = -q$$

As relações 3.28 são conhecidas na literatura como a minimização da energia potencial total para a placa, transformada em um sistema irreduzível (Zienkiewicz & Taylor, 1995). As formulações acima devem vir complementadas com as condições de contorno das quais se destacam as mais usuais:

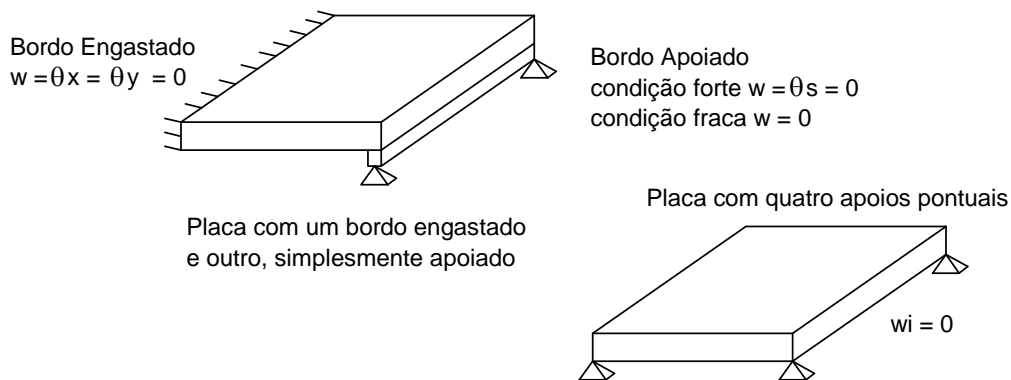


Figura 3.6 – Condições de Contorno usuais para as Placas

Utiliza-se no presente trabalho o elemento bilinear de 4 nós, incluindo as deformações por cisalhamento segundo a teoria de Reissner-Mindlin. Um esquema do elemento finito utilizado é mostrado na figura 3.7.

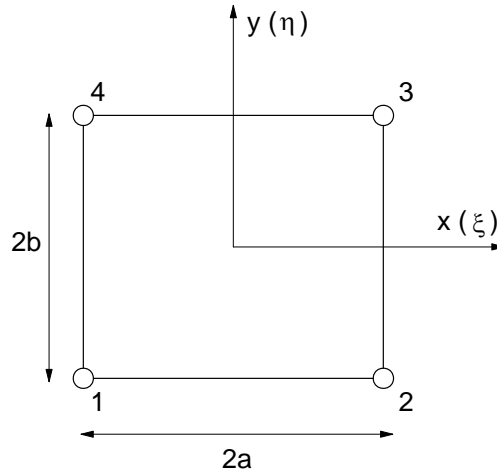


Figura 3.7 – Elemento Finito Bilinear de 4 Nós

O campo de deslocamentos  $u$ , de cada nó, interpolado pelas funções de forma pode ser escrito numa forma geral:

$$[\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_n \end{Bmatrix} = \phi_i u^{(e)} \quad (3.29)$$

onde:

$$\phi_i = \begin{Bmatrix} \phi_i & 0 & 0 \\ 0 & \phi_i & 0 \\ 0 & 0 & \phi_i \end{Bmatrix}; \quad u_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta x_i \\ \theta y_i \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

sendo  $\theta_i$  as funções de forma para o elemento e  $u_i^{(e)}$ , o vetor de deslocamentos de um nó  $i$ .

O vetor de deformações generalizado, para flexão e cisalhamento, com a inclusão das funções de forma fica na forma:

$$\bar{\varepsilon}_f = \sum_{i=1}^n B_{fi} \cdot u_i^{(e)} \quad \bar{\varepsilon}_c = \sum_{i=1}^n B_{ci} \cdot u_i^{(e)} \quad (3.31)$$

$$\text{onde } B_{fi} = \begin{Bmatrix} 0 & -\frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial \phi_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial \phi_i}{\partial y} & -\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \end{Bmatrix} \text{ e } B_{ci} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & -\phi_i & 0 \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} & 0 & -\phi_i \end{Bmatrix}, \text{ as matrizes de deformações}$$

generalizadas de flexão e cisalhamento associadas a um nó “i”.

Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais (PTV) no domínio da placa, igualando o trabalho virtual das deformações internas com o trabalho realizado das cargas aplicadas:

$$\iiint_V \delta \bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma} dV = \int_A \delta w q dA + \sum \delta w_i W_i \quad (3.32)$$

O PTV no domínio discretizado de um elemento:

$$\iint_{A^{(e)}} \delta \bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma} dA - \iint_{A^{(e)}} \delta w q dA = \sum_i \delta w_i W_i \quad (3.33)$$

como :  $\sigma = D \cdot \bar{\varepsilon}$ , onde D representa a matriz constitutiva da placa e  $\bar{\varepsilon}$ , a matriz do campo de deformações da placa, a equação 3.33 pode ser reescrita na forma:

$$\iint_{A^{(e)}} [B^T D B dA] u^{(e)} - \iint_{A^{(e)}} \phi q dA = q^{(e)} \quad (3.34)$$

ou  $K^{(e)} u^{(e)} - f^{(e)} = q^{(e)}$ , sendo:

$K^{(e)}$  : matriz de rigidez do elemento de placa;

$u^{(e)}$  : vetor de deformações;

$f^{(e)}$  : vetor de forças nodais equivalentes devido a carga distribuída;

$q^{(e)}$  : vetor de forças nodais aplicadas.

A parcela  $B^TDB$  corresponde à matriz de rigidez da placa que, após introduzir as características do material, se apresenta na forma:

$$B^TDB = \left\{ \begin{array}{ccc} D_c \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + D_c \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} & -D_c \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & -D_c \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \\ -D_c \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x} & D_c \phi_i \phi_j + D_f \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + MD_f \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} & MD_f \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + \nu D_f \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \\ -D_c \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial y} & MD_f \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + \nu D_f \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} & D_c \phi_i \phi_j + D_f \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + MD_f \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (3.35)$$

$$\text{onde: } D_c = \frac{5tE}{12(1+\nu)} \quad D_f = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad M = \frac{1-\nu}{2}$$

- $\nu$  : coeficiente de Poisson;
- $E$  : módulo de elasticidade do material;
- $D_f$  : rigidez a flexão da placa;
- $D_c$  : rigidez a cortante da placa;
- $M$  : parâmetro relacionado a matriz constitutiva;
- $\phi_i$  : funções de forma;

A matriz final é obtida integrando a matriz de rigidez 3.35 sobre o domínio da placa. O vetor de forças nodais equivalentes devido ao carregamento distribuído é obtido pela integração numérica sobre o domínio da carga aplicada conforme a expressão:

$$f_i^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi_i q |J| d\xi d\eta \quad (3.36)$$

onde:

- $q$  : valor nominal do carregamento distribuído;
- $d\xi d\eta$  : incremento de área nas coordenadas locais do elemento;
- $|J|$  : jacobiano para transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas locais ;

### 3.2.2 O Modelo de Pórtico Espacial

No modelo de pórtico espacial é importante a definição do sistema local e global admitido para as barras. O sistema de referência utilizado neste trabalho para o modelo de pórtico espacial está representado na figura 3.8:

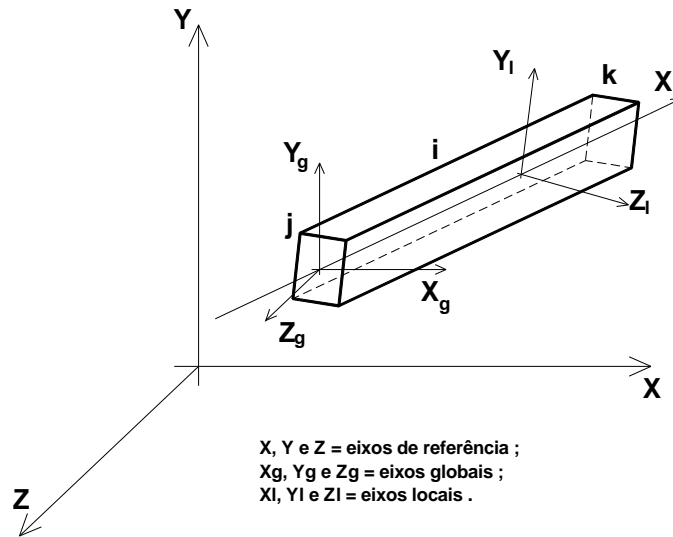


Figura 3.8 - Eixos locais, globais e de referência

Na figura 3.8 percebe-se um membro de pórtico “i”, no espaço, com conectividades denominadas “j” e “k”, rigidamente ligado aos nós, os quais não estão restringidos. São permitidos então seis deslocamentos sendo : três translações e três rotações. Nas figuras 3.9 e 3.10 são apresentados os sistemas de numeração adotados para estes deslocamentos :

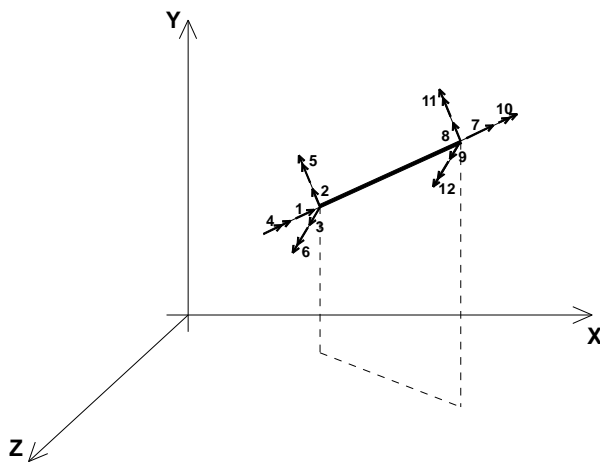


Figura 3.9 - Sistema de Numeração Local

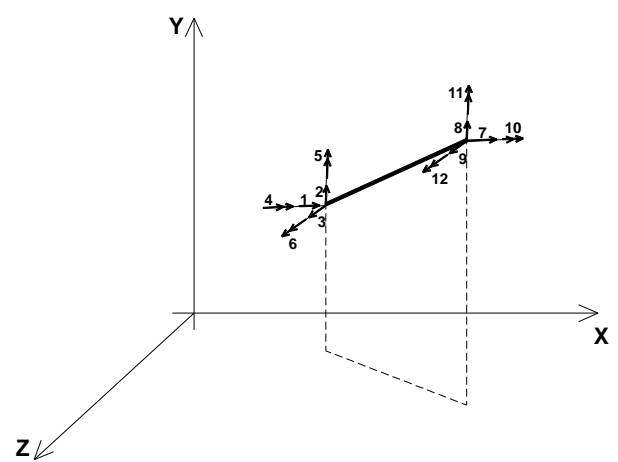


Figura 3.10 - Sistema de Numeração Global



A orientação de cada membro estrutural é realizada através do plano  $x_m - y_m$  e um ponto de referência arbitrário,  $p$ , que é fornecido pelo usuário . Assim, pode-se calcular o ângulo,  $\alpha$ , correspondente ao giro da seção transversal em relação a um sistema de referência  $x-y$  ( Figura 3.11) .

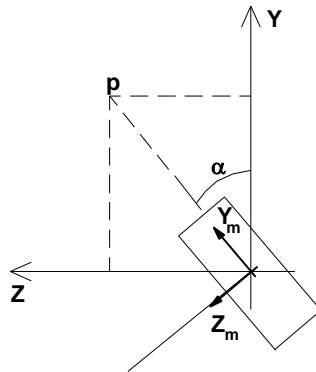


Figura 3.11 - Rotação de um Membro de Pórtico Espacial em torno do eixo  $X_m$

Procurando montar a matriz de rigidez global da estrutura, parte-se para a montagem da matriz de rigidez local, para cada elemento, que serão reagrupadas numa matriz geral. Este procedimento irá facilitar as análises de instabilidade, elastoplástica e de vibrações livres, que serão realizadas posteriormente. Da descrição nodal da estática, têm-se que :

$$\lambda = L . m \quad (3.37)$$

onde  $\lambda$ , vetor de carregamentos nodais;  $m$ , vetor dos esforços internos e  $L$ , matriz de equilíbrio que transforma os esforços internos em carregamentos nodais. Da mesma forma, utilizando a descrição nodal da cinemática, têm-se que :

$$\theta = L^T . \delta \quad (3.38)$$

onde  $\theta$ , vetor de deformações nodais;  $\delta$ , vetor de deslocamentos nodais e a matriz  $L^T$ , como sendo a matriz de equilíbrio entre os deslocamentos nodais e as deformações nodais . A relação 3.38 também é conhecida como relação de compatibilidade .

A relação entre os esforços internos,  $m$ , da estrutura com as deformações,  $\theta$ , é feita através da matriz de rigidez do elemento desconexo,  $K$ , ficando a mesma disposta desta forma :

$$m = K \cdot \theta \quad (3.39)$$

Esta matriz de rigidez varia de acordo com a condição de contorno do elemento desconexo. Assim para um membro de pórtico espacial, obtém-se quatro possíveis formas para a relação 3.39, de acordo com a orientação apresentada na figura 3.12:

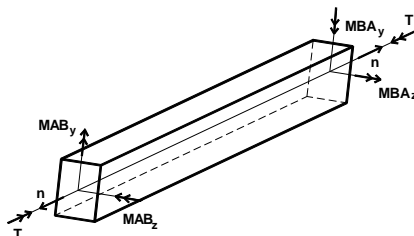
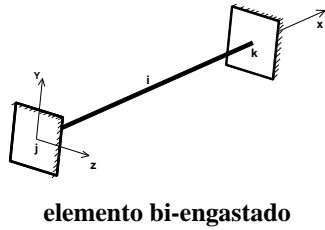
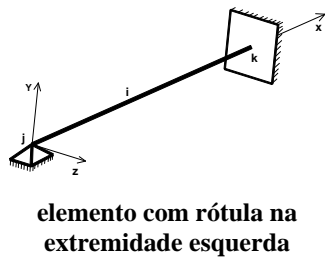


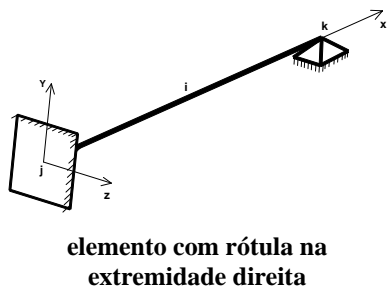
Figura 3.12 - Representação dos Esforços Internos



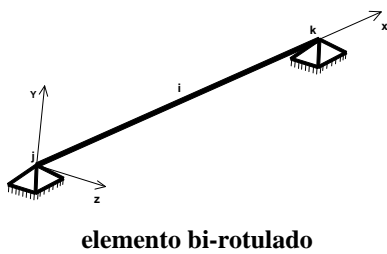
$$\begin{bmatrix} n \\ MAB_z \\ MBA_z \\ MAB_y \\ MBA_y \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_z}{L} & \frac{-2EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2EI_z}{L} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{L} & \frac{-2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2EI_y}{L} & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \phi AB_z \\ \phi AB_z \\ \phi AB_y \\ \phi AB_y \\ \theta \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} n \\ MAB_z \\ MBA_z \\ MAB_y \\ MBA_y \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \phi AB_z \\ \phi AB_z \\ \phi AB_y \\ \phi AB_y \\ \theta \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} n \\ MAB_z \\ MBA_z \\ MAB_y \\ MBA_y \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_y}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \phi AB_z \\ \phi AB_z \\ \phi AB_y \\ \phi AB_y \\ \theta \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} n \\ MAB_z \\ MBA_z \\ MAB_y \\ MBA_y \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \phi AB_z \\ \phi AB_z \\ \phi AB_y \\ \phi AB_y \\ \theta \end{bmatrix}$$

Figura 3.13 - Matrizes de Rigidezes  
Elemento Desconexo de Pórtico Espacial

Com base nas seguintes relações :

$$\text{relações de equilíbrio} \quad \Rightarrow \quad \lambda = L \cdot m \quad (3.40)$$

$$\text{relações de compatibilidade} \quad \Rightarrow \quad \theta = L^T \cdot \delta \quad (3.41)$$

$$\text{relações constitutivas do material} \quad \Rightarrow \quad m = K \cdot \theta \quad (3.42)$$

Substituindo (3.41) em (3.42), encontra-se :

$$\lambda = L \cdot K \cdot \theta \quad (3.43)$$

Substituindo (3.42) em (3.43), têm-se que :

$$\lambda = ( L \cdot K \cdot L^T ) \cdot \delta \quad (3.44)$$

O produto (  $L \cdot K \cdot L^T$  ) corresponde à matriz de rigidez de membro de pórtico espacial, mesma matriz apresentada por Gere & Weaver, 1987 (Figura 3.14) .

$$L \cdot K \cdot L^T = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

Figura 3.14 – Matriz de Rigidez Global  
Elemento Desconexo de Pórtico Espacial

A passagem do sistema local para o sistema global de referência é realizada através do produto  $K_i = R^T \cdot (L \cdot K \cdot L^T) \cdot R$ , sendo  $K_i$ , a matriz de rigidez do elemento desconexo, em relação ao sistema global e  $R$ , a matriz de rotação definida como (Gere & Weaver, 1987) :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{R}_i \end{bmatrix} \text{ sendo cada sub-matriz } \mathbf{R}_i \text{ dada por :}$$

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ \frac{-C_x \cdot C_y \cdot \cos \alpha - C_z \cdot \sin \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} \cdot \cos \alpha & \frac{-C_y \cdot C_z \cdot \cos \alpha + C_x \cdot \sin \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ \frac{C_x \cdot C_y \cdot \sin \alpha - C_z \cdot \cos \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & -\sqrt{C_x^2 + C_z^2} \cdot \sin \alpha & \frac{C_y \cdot C_z \cdot \sin \alpha - C_x \cdot \cos \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix}$$

onde :

$$C_x = \frac{X_k - X_j}{L}, C_y = \frac{Y_k - Y_j}{L}, C_z = \frac{Z_k - Z_j}{L} \text{ e } L = \sqrt{(X_k - X_j)^2 + (Y_k - Y_j)^2 + (Z_k - Z_j)^2}$$

Com as matrizes de rigidezes de todos os membros, monta-se a matriz de rigidez global de toda a estrutura que geralmente organizada em forma banda. Os deslocamentos nodais podem ser obtidos realizando a através da relação 3.45.

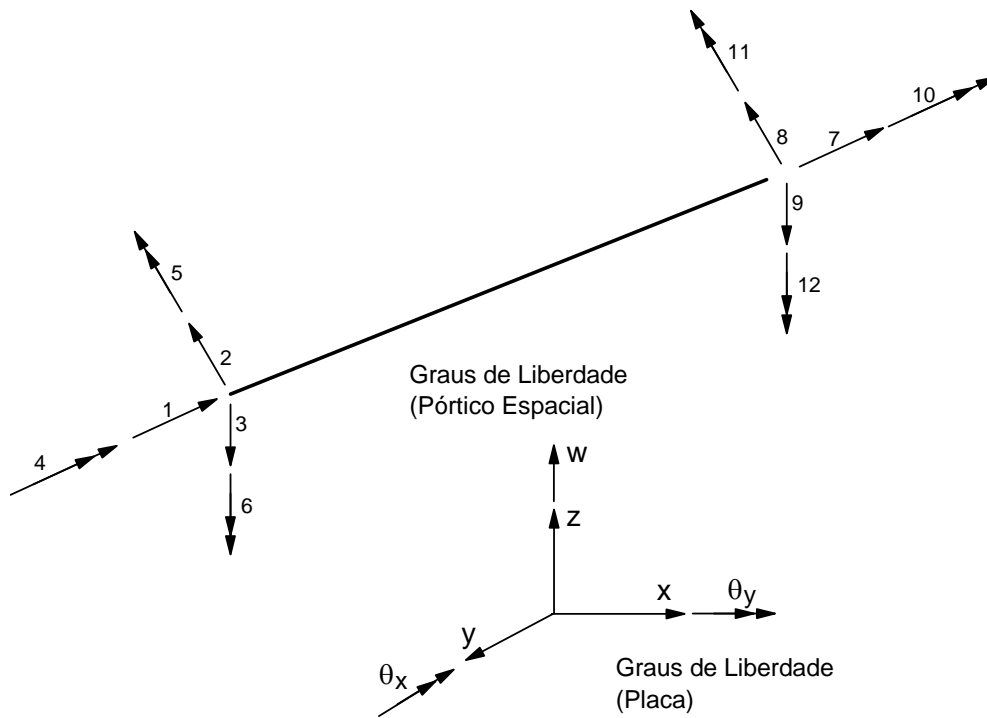
$$\delta = (L \cdot K \cdot L^T)^{-1} \cdot \lambda \quad (3.45)$$

### 3.2.3 A Acoplagem Pórtico - Placa

Segue agora os procedimentos que foram utilizados para a acoplagem pórtico-placa. Neste trabalho optou-se pela montagem de uma matriz de rigidez onde são somados as rigidezes dos elementos de barra e de placa, compatibilizando com os graus de liberdade adotados em cada estrutura.

A seguir será mostrada a matriz de rigidez para o elemento de pórtico e placa. Adotou-se uma convenção identificando os elementos de pórtico com a letra *F* (*frame*) e de placa com a letra *P*:

$$K^{(i) \text{ p\acute{o}rtico}} = \begin{bmatrix} k_{11}^F & k_{12}^F & k_{13}^F & k_{14}^F & k_{15}^F & k_{16}^F \\ k_{21}^F & k_{22}^F & k_{23}^F & k_{24}^F & k_{25}^F & k_{26}^F \\ k_{31}^F & k_{32}^F & k_{33}^F & k_{34}^F & k_{35}^F & k_{36}^F \\ k_{41}^F & k_{42}^F & k_{43}^F & k_{44}^F & k_{45}^F & k_{46}^F \\ k_{51}^F & k_{52}^F & k_{53}^F & k_{54}^F & k_{55}^F & k_{56}^F \\ k_{61}^F & k_{62}^F & k_{63}^F & k_{64}^F & k_{65}^F & k_{66}^F \end{bmatrix}$$



$$K^{(i) \text{ placa}} = \begin{bmatrix} k_{11}^P & k_{12}^P & k_{13}^P \\ k_{21}^P & k_{22}^P & k_{23}^P \\ k_{31}^P & k_{32}^P & k_{33}^P \end{bmatrix}$$

Figura 3.15 – Graus de Liberdade para o Elemento de Pórtico e Placa

A matriz de rigidez para um nó “i”, considerando o acoplamento pórtico-placa é apresentada em 3.46:

$$K_{acoplado}^{(i)} = \begin{Bmatrix} K_{11}^F & K_{12}^F & K_{13}^F & K_{14}^F & K_{15}^F & K_{16}^F \\ K_{21}^F & (K_{22}^F + K_{11}^P) & K_{23}^F & (K_{24}^F + K_{13}^P) & K_{25}^F & (K_{26}^F + K_{12}^P) \\ K_{31}^F & K_{32}^F & K_{33}^F & K_{34}^F & K_{35}^F & K_{36}^F \\ K_{41}^F & (K_{42}^F + K_{21}^P) & K_{43}^F & (K_{44}^F + K_{22}^P) & K_{45}^F & (K_{46}^F + K_{23}^P) \\ K_{51}^F & K_{52}^F & K_{53}^F & K_{54}^F & K_{55}^F & K_{56}^F \\ K_{61}^F & (K_{62}^F + K_{31}^P) & K_{63}^F & (K_{64}^F + K_{32}^P) & K_{65}^F & (K_{66}^F + K_{33}^P) \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

### 3.2.4 A Influência das Paredes Estruturais

A NBR6118/2003 caracteriza como paredes estruturais “as estruturas laminares planas verticais apoiadas de modo contínuo, em toda sua base, com o comprimento maior que cinco vezes a espessura” (figura 3.16). Permite-se que os pilares paredes sejam representados por um elemento linear, desde que se considere a deformação por cisalhamento e demais ajustes de sua rigidez à flexão para o comportamento real.

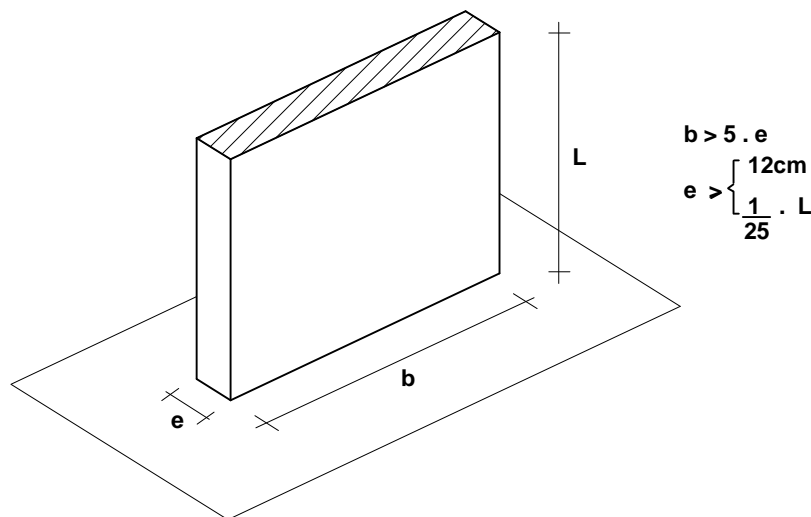


Figura 3.16- Especificação para Paredes Estruturais Segundo a NBR6118 /2003

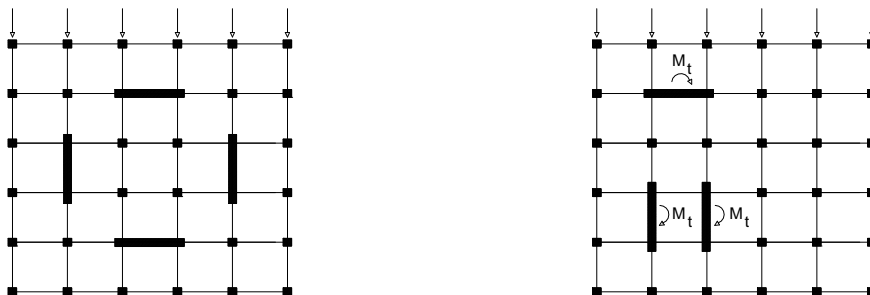
Estes elementos são considerados na concepção estrutural como elementos de contraventamento por resistirem a maior parte dos esforços provenientes de ações horizontais. Sabe-se de antemão que, os pórticos a eles acoplados também contribuem nesta resistência, e um problema complexo está em determinar qual a proporção de cargas externas para cada nível de piso que são distribuídas entre as colunas e as paredes estruturais.

Fusco (1994) sugere que, do ponto de vista prático, pareça mais razoável considerar a peça estrutural como parede, e não mais como pilar, quando a maior dimensão de sua seção horizontal for uma fração significativa de sua altura  $H$ . Em termos práticos, pode-se admitir como parede a peça que respeite a relação:

$$\frac{b}{L} \geq 0,5 \quad (3.47)$$

Em uma análise tridimensional, a consideração da rigidez real destes elementos torna-se uma tarefa não muito fácil e por este motivo algumas simplificações são utilizadas. A maior simplificação deste problema consiste em assumir que a estrutura tridimensional seja formada por conjuntos de pórticos planos equivalentes ou associação de pórticos planos e paredes estruturais, segundo as duas direções. Os resultados são bastante satisfatórios quando a estrutura possui um arranjo estrutural simétrico.

Em um arranjo assimétrico de paredes estruturais, ocorre o surgimento de rotações e translações nos diafragmas, sob ação de forças horizontais simétricas. As paredes estruturais, neste caso, estão sujeitas a momento torçores que não podem ser determinados se a análise é limitada a uma estrutura idealizada plana (Figura 3.17).



Arranjo Simétrico de Paredes Estruturais

Arranjo Assimétrico de Paredes Estruturais

Figura 3.17 - Influência do Arranjo Estrutural na Análise com Paredes Estruturais



No método das colunas rígidas, os pilares paredes são considerados na análise como uma coluna rígida, com propriedades concentradas em seu eixo centróide. As extremidades das vigas que se encontram embutidas dentro das paredes estruturais são também levadas em consideração através da idealização de zonas infinitamente rígidas à flexão (Figura 3.18). As colunas rígidas se diferem das colunas normais porque nas últimas são consideradas importantes somente as deformações por flexão.

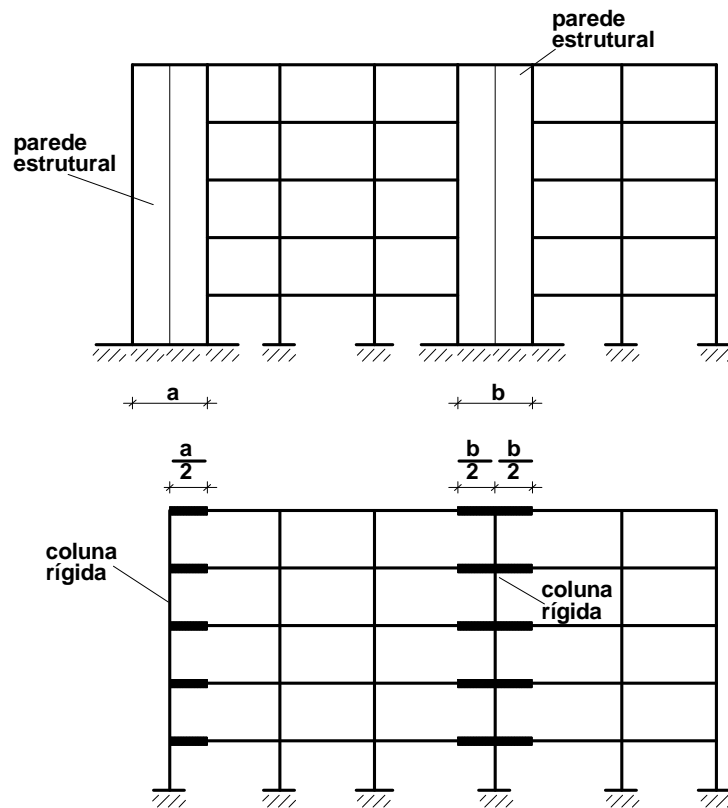


Figura 3.18 - Idealização das Colunas Rígidas

A grande vantagem deste método é que permite que se trabalhe com estruturas formadas por barras, introduzindo as deformações por cortante nas colunas e nas zonas rígidas das vigas, através de modificações devidas na matriz de rigidez. O método também é útil no caso da presença de furos nas paredes estruturais. Procedese da mesma forma, delineando o eixo centróide das paredes estruturais e o comprimento das zonas rígidas das vigas (Figura 3.19).

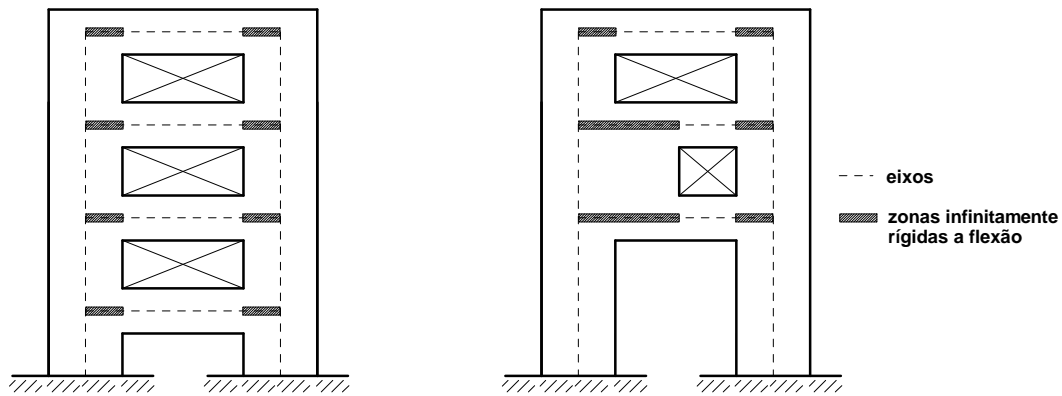


Figura 3.19 - Idealização das Paredes Estruturais com Furos  
Método das Colunas Rígidas

Segundo Ghali e Neville (1993), a matriz de rigidez de elemento desconexo para pórtico plano, representando uma coluna rígida e considerando as deformações por cortante, pode ser apresentada da seguinte forma:

$$[k_p] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{(1+\alpha)\cdot L^3} & \frac{6EI}{(1+\alpha)\cdot L^2} & 0 & \frac{-12EI}{(1+\alpha)\cdot L^3} & \frac{6EI}{(1+\alpha)\cdot L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)\cdot L^2} & \frac{(4+\alpha)EI}{(1+\alpha)\cdot L} & 0 & \frac{-6EI}{(1+\alpha)\cdot L^2} & \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)\cdot L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{(1+\alpha)\cdot L^3} & \frac{-6EI}{(1+\alpha)\cdot L^2} & 0 & \frac{12EI}{(1+\alpha)\cdot L^3} & \frac{-6EI}{(1+\alpha)\cdot L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)\cdot L^2} & \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)\cdot L} & 0 & \frac{-6EI}{(1+\alpha)\cdot L^2} & \frac{(4+\alpha)EI}{(1+\alpha)\cdot L} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

sendo  $\alpha = \frac{12EI}{L^2 \cdot G \cdot a_r}$ , parâmetro que introduz a influência das deformações por cortante na

matriz de rigidez e  $a_r$ , a área efetiva resistente ao cortante. Alterações devem ser realizadas na matriz de rigidez das vigas que estejam conectadas às paredes estruturais. Isto porque na extremidade ligada à parede estrutural existe um comprimento rígido que deve ser previsto na matriz de rigidez, incluindo inclusive as deformações por cortante. Considere por exemplo a viga AB da figura 3.20, interligando duas paredes estruturais. Observam-se as partes rígidas AA' e B'B.

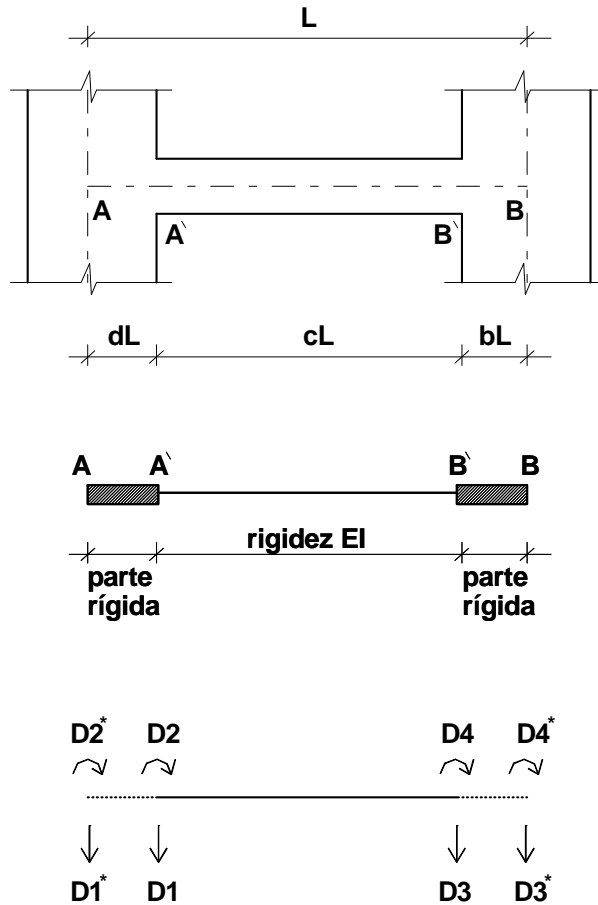


Figura 3.20 - Vigas com Extremidades Rígidas

A relação entre os deslocamentos dos pontos  $A$  e  $B$ , e os pontos  $A'$  e  $B'$ , pode ser feita aplicando translações e rotações unitárias como mostrado na figura 3.21.

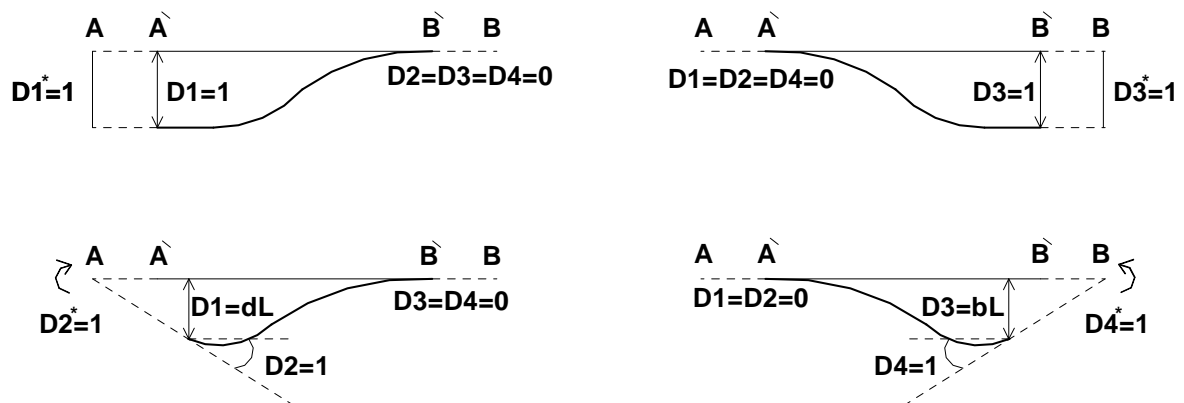


Figura 3.21 - Translações e Rotações Unitárias  
Deslocamentos em Vigas com Extremidades Rígidas

Relacionam-se os deslocamentos  $\{D^*\}$ , dos pontos A e B, com os deslocamentos  $\{D\}$ , em A' e B', por geometria, da seguinte forma:

$$\{D\} = [H] \cdot \{D^*\} \quad (3.49)$$

onde :

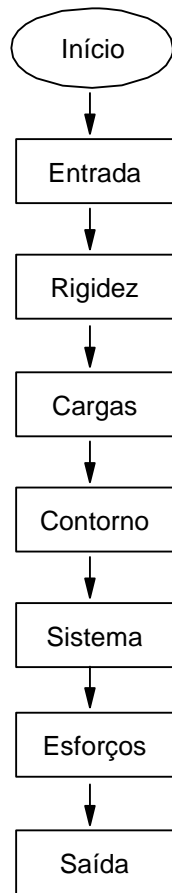
$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & dL & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -bL \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de rigidez  $[K_v]$ , correspondente à viga AB da figura 3.20, incluindo as deformações por cortante e a influência das extremidades rígidas é apresentada pela relação 3.50 (Ghali e Neville, 1993).

$$[k_v] = \frac{EI}{1+\alpha} \begin{bmatrix} \frac{12}{c^3L^3} & \frac{6}{c^2L^2} + \frac{12d}{c^3L^2} & \frac{-12}{c^3L^3} & \frac{6}{c^2L^2} + \frac{12b}{c^3L^2} \\ \frac{6}{c^2L^2} + \frac{12d}{c^3L^2} & \frac{4+\alpha}{cL} + \frac{12d}{c^2L} + \frac{12d^2}{c^3L} & \frac{-6}{c^2L^2} - \frac{12d}{c^3L^2} & \frac{2-\alpha}{cL} + \frac{6d+6b}{c^2L} + \frac{12db}{c^3L} \\ \frac{-12}{c^3L^3} & \frac{-6}{c^2L^2} - \frac{12d}{c^3L^2} & \frac{12}{c^3L^3} & \frac{-6}{c^2L^2} - \frac{12b}{c^3L^2} \\ \frac{6}{c^2L^2} + \frac{12b}{c^3L^2} & \frac{2-\alpha}{cL} + \frac{6d+6b}{c^2L} + \frac{12db}{c^3L} & \frac{-6}{c^2L^2} - \frac{12b}{c^3L^2} & \frac{4+\alpha}{cL} + \frac{12b}{c^2L} + \frac{12b^2}{c^3L} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

A matriz de rigidez definida em 3.50, corresponde a coordenadas  $\{D^*\}$  para uma barra prismática de comprimento “L”, com partes rígidas  $dL$  e  $bL$  nos extremos. Através do parâmetro  $\alpha$ , definido como  $\alpha = \frac{12EI}{c^2L^2 \cdot G \cdot a_r}$ , as deformações por cortante são incorporadas e  $a_r$ , sendo área efetiva resistente ao cortante.

### 3.2.5 Fluxograma do Programa ALEL



Na subrotina ENTRADA são incluídos todos os dados necessários à análise como número de nós, número de elementos da placa, conectividades, condições de contorno e propriedades dos materiais.

A matriz de rigidez local e global para para o conjunto pórtico-placa é montada na subrotina RIGIDEZ. Os carregamentos são organizados em vetores na subrotina CARGAS e as condições de contorno para a estrutura acoplada são impostas na subrotina CONTORNO.

O sistema de equações é resolvido na subrotina SISTEMA utilizando o processo de eliminação de gauss adaptado a matrizes tipo banda. Na subrotina ESFORÇOS são determinados os esforços em cada elemento assim como as reações de apoio para a estrutura global. Na subrotina SAIDA são apresentados todos os resultados de deslocamentos nodais, reações de apoio e esforços internos.

Os resultados obtidos neste programa são utilizados no cálculo do parâmetro  $\alpha$ , coeficiente  $\gamma z$  e na análise P- $\Delta$ .

Figura 3.22 – Fluxograma do Programa ALEL

### 3.3 O PROGRAMA DE ANÁLISE DE INSTABILIDADE ELÁSTICA (AIEL)

O programa AIEL, que realiza a análise de instabilidade elástica, permite a determinação do fator de carga crítica de flambagem,  $\lambda_{cr}$ , parâmetro útil na avaliação da rigidez de pórticos. Na elaboração deste programa utilizou-se como base o programa ALEL discutido no item anterior onde muitas subrotinas já foram explicitadas, como: a montagem do pórtico espacial, a acoplagem pórtico placa, a resolução do sistema de equações e a determinação dos deslocamentos resultantes de uma análise de 1ª. ordem. Acrescenta-se ao programa anterior, a obtenção da matriz de rigidez geométrica,  $[k_G]$ , a montagem da matriz de rigidez tangente,  $[k_T]$ , discutido no capítulo 2 e representado pela equação 2.32 além da resolução do problema de autovalores e autovetores.

### 3.3.1 A Obtenção da matriz de Rigidez Tangente $[k_T]$

A matriz de rigidez tangente fica em função da matriz de rigidez elástica,  $[k_E]$ , e da matriz de rigidez geométrica,  $[k_G]$ . A matriz de rigidez geométrica pode ser obtida dentre outros métodos, através da aplicação dos princípios de energia da função potencial total estacionária, abrangendo todos os elementos da estrutura (Iyengar, 1986).

A análise será mostrada através de um elemento simples de pórtico plano e depois será expandida para um elemento de pórtico espacial. Sendo assim, um elemento de barra deformado axialmente apresenta os seguintes graus de liberdade:

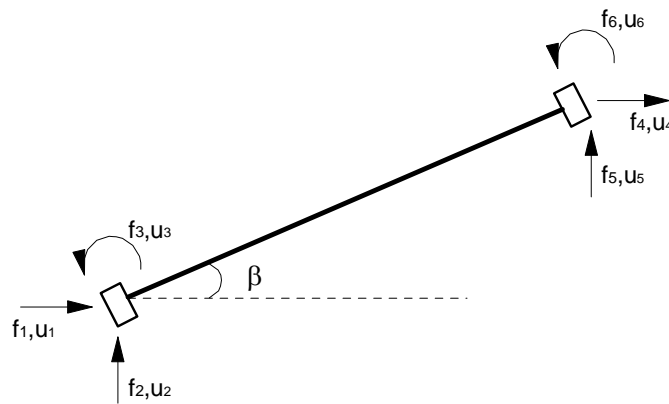


Figura 3.23 – Graus de Liberdade – Elemento de Pórtico Plano

O esforço axial ( $n$ ), no elemento esquematizado em 3.23, é dado em função dos deslocamentos nodais ( $u_i$ ), do módulo de elasticidade ( $E$ ), da área de seção transversal ( $A$ ) e do comprimento da barra ( $l$ ) e apresenta-se na forma:

$$n = \frac{EA}{l} \cdot [(u_4 - u_1) \cos \beta + (u_5 - u_2) \text{sen} \beta] \quad (3.51)$$

Onde  $n$  terá valor positivo para esforços normais de tração. Considerando o sistema de coordenadas globais, tem-se a matriz geométrica global, para elemento de pórtico plano:

$$k_G = \frac{n}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \text{sen}^2 \beta & -\frac{6}{5} \text{sen} \beta \cos \beta & -\frac{1}{10} \ell \text{sen} \beta & -\frac{6}{5} \text{sen}^2 \beta & \frac{6}{5} \text{sen} \beta \cos \beta & \frac{1}{10} \ell \text{sen} \beta \\ & & \frac{1}{10} \ell \cos \beta & \frac{6}{5} \text{sen} \beta \cos \beta & -\frac{6}{5} \cos^2 \beta & \frac{1}{10} \ell \cos \beta \\ & & \frac{2}{15} \ell^2 & \frac{1}{10} \ell \text{sen} \beta & -\frac{1}{10} \ell \cos \beta & -\frac{1}{30} \ell^2 \\ & & & \frac{6}{5} \text{sen}^2 \beta & -\frac{6}{5} \text{sen} \beta \cos \beta & \frac{1}{10} \ell \text{sen} \beta \\ & \text{simétrica} & & & \frac{6}{5} \cos^2 \beta & -\frac{1}{10} \ell \cos \beta \\ & & & & & \frac{1}{30} \ell^2 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Não foi considerada neste trabalho a possibilidade de flambagem nas lajes sendo que o fator de carga crítica de flambagem ficará em função da condição de instabilidade do pórtico. O próximo passo consiste em determinar os autovalores e autovetores que neste trabalho utilizou-se o solver Jacobi, apresentado por Brebbia & Ferrante, 1986. Este solver trabalha com a diagonalização da matriz de rigidez tangente [kT] onde os termos da diagonal desta matriz são os respectivos autovalores. O determinante desta matriz corresponde ao produto de seu autovalores como mostrado pela relação 3.53:

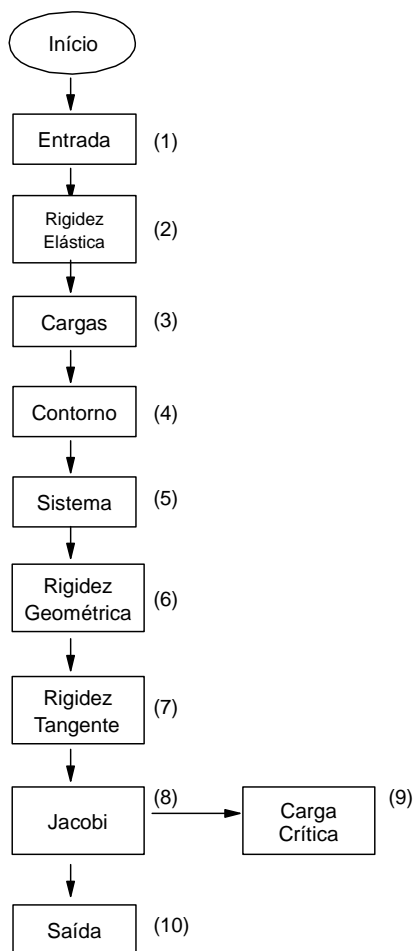
$$(\lambda_1) \cdot (\lambda_2) \cdot (\lambda_3) \cdot \dots \cdot (\lambda_n) = \det[k_T] \quad (3.53)$$

O valor crítico do carregamento atuante é encontrado quando se anula um dos autovalores de [k<sub>T</sub>]. Desta forma tem-se que:

$$\begin{array}{ll} \text{Quando } \lambda_1 = 0 & \rightarrow P_1 = P_{crit} \\ \text{Quando } \lambda_2 = 0 & \rightarrow P_2 = P_{crit} \\ \text{Quando } \lambda_3 = 0 & \rightarrow P_3 = P_{crit} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \text{Quando } \lambda_n = 0 & \rightarrow P_n = P_{crit} \end{array}$$

Como foi abordado no capítulo 2, no exemplo da coluna isolada sob carregamento axial, o valor crítico é aquele correspondente à menor raiz do sistema.

### 3.3.2 O Fluxograma do Programa AIEL



Na figura 3.24 são resumidas as sub-rotinas do programa AIEL. As etapas identificadas de (1) a (5) foram explicadas no item 3.2 quando na elaboração do programa ALEL. Neste programa são acrescentadas as subrotinas necessárias na montagem da rigidez tangente, etapas (6) e (7) e o solver Jacobi, necessário para a resolução do problema de autovalores e autovetores. A subrotina Carga crítica, etapa (9), pesquisa o menor autovalor que representa o fator de carga crítica de flambagem  $\lambda_{cr}$ . Na subrotina saída, etapa (10), são discriminados os autovetores, realiza-se a normalização dos deslocamentos obtidos para, enfim, determinar os modos de flambagem da estrutura.

figura. 3.24 – Fluxograma do Programa AIEL

### 3.4 O PROGRAMA DE ANÁLISE DE VIBRAÇÕES LIVRES (ADV L)

No programa que realiza a análise modal, denominado ADVL - análise dinâmica de vibrações livres, considerou-se o modelo de massa consistente nos elementos de placa e de pórtico, chegando a um problema de autovalores e autovetores semelhante ao que ocorre na instabilidade.

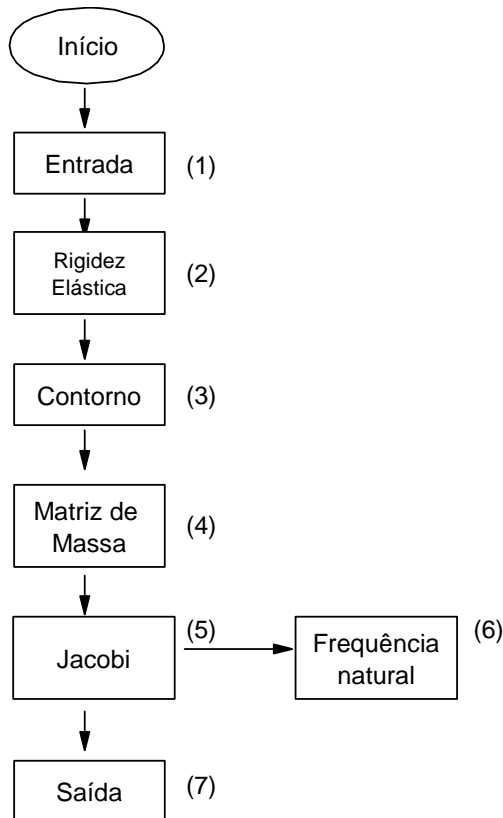
Neste trabalho optou-se por determinar a matriz de massa em separado para o elemento de placa e pórtico somando-se posteriormente a contribuição de cada elemento, na montagem da matriz de massa global do conjunto pórtico – placa. Para os elementos de





Com a matriz de rigidez elástica determinada conforme especificado no item 3.2, e a matriz de massa global apresentada em 3.56, utiliza-se a superposição modal chegando a um problema de autovalores e autovetores, associado à vibrações livres.

### 3.4.1 Fluxograma do Programa ADVL



Neste programa, a matriz de rigidez elástica é a mesma matriz definida no programa ALEL. Na etapa (4) são montadas a matriz de massa consistente para o elemento de placa, a matriz de massa consistente para o pórtico e a acoplagem placa-pórtico, somando-se as contribuições tomando o cuidado de compatibilizar os graus de liberdade da placa e pórtico.

Outro detalhe interessante é que a subrotina para resolução do problema de autovalores e autovetores, Jacobi, é a mesma abordada no problema de instabilidade elástica. Os resultados obtidos nestes programa são as frequências naturais de vibração e os modos de vibração.

Figura. 3.25 – Fluxograma do Programa ADVL

### 3.5. O PROGRAMA DE ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA INCREMENTAL - AEPI

O programa que realiza a análise elasto-plástica pode ser resumido no seguinte fluxograma:

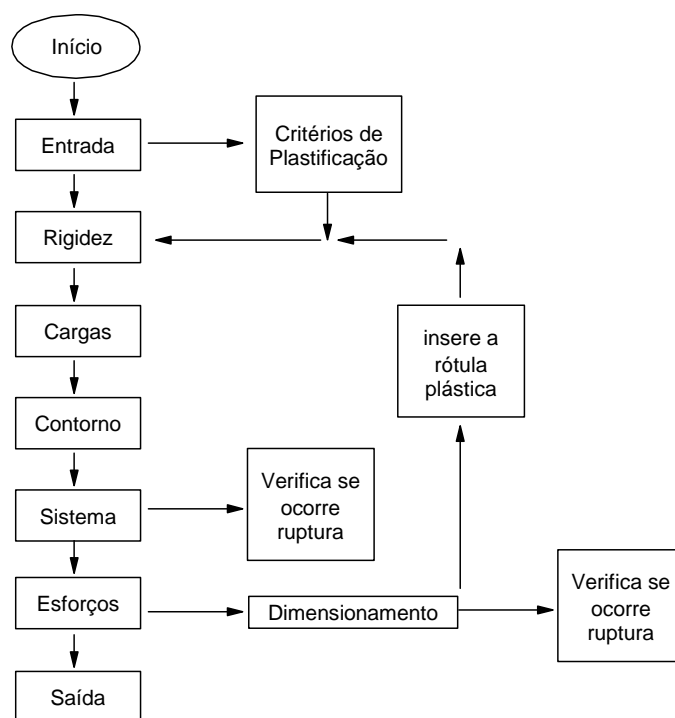


Figura 3.26 – Fluxograma do Programa AEPI

No início da análise, na subrotina entrada faz-se a leitura dos dados necessários à análise com informações sobre a armadura dos elementos estruturais. Na sub-rotina critérios de plastificação, são determinados os valores limites para o momento de plastificação de lajes e vigas e que serão utilizados em cada ciclo iterativo, orientando a sequência de formação das rótulas plásticas.

Em cada ciclo é feito um incremento de carga com a determinação dos esforços nos elementos estruturais e o dimensionamento. A verificação da ruptura é monitorada pelos valores dos deslocamentos ou pela singularidade da matriz de rigidez. Não foi considerada neste trabalho a possibilidade de descarga plástica na estrutura.

O dimensionamento dos elementos identificados como pilares é realizado a cada ciclo de iteração, como sugere a NB1/2003 e exposto no capítulo 2. São determinadas as taxas de armadura e comparadas com valores máximos estabelecidos pela NBR6118/2003.

### 3.6 EXEMPLOS DE CALIBRAÇÃO E VALIDAÇÃO

Antes de utilizar os programas discriminados em 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5 em exemplos de estruturas reais, foram realizados alguns testes de forma a aferir a precisão dos resultados obtidos. Os programas foram utilizados em modelos bastante simples que foram julgados significativos na avaliação das principais respostas. Em cada modelo será esclarecido o tipo de resposta esperada e os resultados serão comparados com outros autores.

#### 3.6.1 Calibração do programa ALEL – Deslocamentos no Pórtico Espacial

O pórtico espacial apresentado abaixo foi apresentado por Harrison (1972). Este exemplo é útil na avaliação dos deslocamentos gerados em uma análise linear elástica. Os resultados obtidos pelo programa ALEL serão comparados com os valores apresentados por Harrison (1972) e com resultados obtidos com o software SAP2000. Na figura 3.27 é esquematizado o pórtico espacial e as características dos elementos e material.

Observando os resultados discriminados na tabela 3.1, percebe-se que as respostas obtidas pelos 3 programas são as mesmas. Forma processados outros exemplos e verificados a mesma conclusão. Como o programa ALEL é o programa base para todos os demais, a garantia deste nível de precisão é importante nas análises subsequentes.

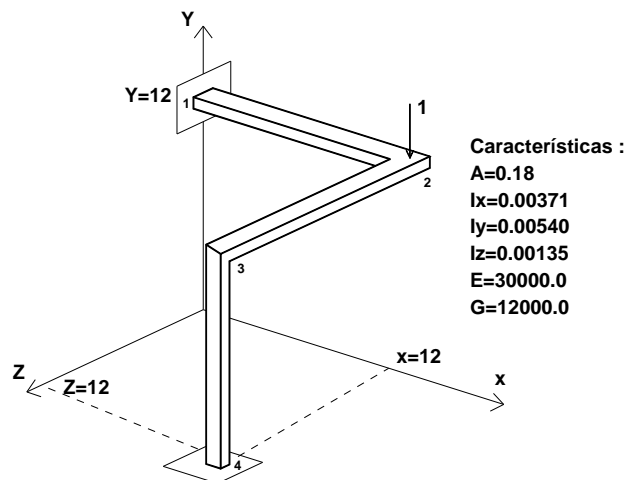


Figura 3.27 – Pórtico Espacial – Harrison (1972)

Tabela 3.1 – Deslocamentos Monitorados no Pórtico Espacial

Programa	Nó	Trans. X	Trans. Y	Trans. Z	Rot. X	Rot. Y	Rot. Z
SAP2000	1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	2	-0.00059	-5.875643	-0.784911	-0.457653	0.088085	-0.606305
	3	0.863621	-0.000824	-0.785552	-0.301860	0.059809	-0.139990
	4	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
HARRISON	1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	2	-0.00059	-5.875643	-0.784911	-0.457653	0.088085	-0.606305
	3	0.863621	-0.000824	-0.785552	-0.301860	0.059809	-0.139990
	4	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
ALEL	1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	2	-0.00059	-5.875643	-0.784911	-0.457653	0.088085	-0.606305
	3	0.863621	-0.000824	-0.785552	-0.301860	0.059809	-0.139990
	4	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

### 3.6.2 Calibração do programa ALEL – Deslocamentos na Laje isolada

A laje isolada apresentada na figura 3.27 é um exemplo proposto por Timoshenko & Krieger (1959). Trata-se de uma laje quadrada de lado igual a 10 e espessura 0,10. Sendo  $h/a$  equivalente a 0,01 tem-se uma placa caracterizada como esbelta. Neste trabalho é apresentada a solução analítica para o problema e monitorado o deslocamento no centro da laje. Os dados de entrada e o esquema da laje estão especificados na figura 3.28.

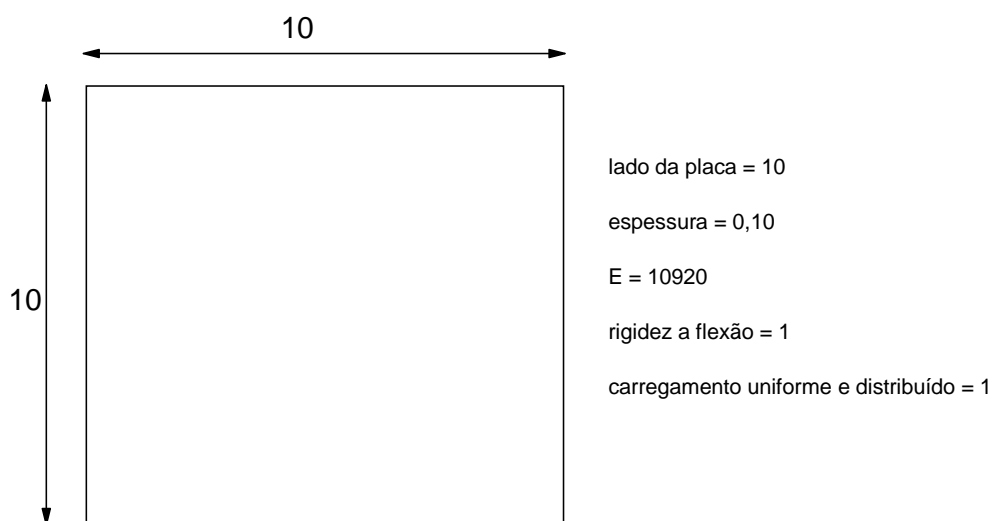


Figura 3.28 – Laje Isolada (Timoshenko & Krieger, 1959)

Na tabela 3.2 são apresentados os resultados analíticos obtidos por Timoshenko & Krieger (1959), valores obtidos utilizando o software SAP2000 e resultados encontrados utilizando o programa ALEL. Ressalta-se que os valores apresentados para o deslocamento no centro da laje ( $W_n$ ) estão na forma normalizada e variou-se a discretização nos modelos numéricos, trabalhando-se com modelos 2x2, 4x4, 6x6, 8x8 e 10x10. Os resultados obtidos indicam que o programa ALEL apresenta uma precisão satisfatória mesmo utilizando poucos elementos na discretização da laje.

Tabela 3.2 – Deslocamentos no centro da laje

$W_n = \frac{WD}{qa^4} (x10^5)$			
Discretização (elem. x elem.)	$W_n$ (Timoshenko & Krieger, 1959)	$W_n$ (Programa ALEL)	$W_n$ (SAP2000)
2x2	406,00	379,05	379,02
4x4	406,00	404,00	404,50
6x6	406,00	406,00	406,00
8x8	406,00	406,00	406,00
10x10	406,00	406,00	406,00

### 3.6.3 Calibração do programa ALEL – Acoplamento Pórtico - Placa

Este exemplo é devido a Buzar (1996) e consta de um pórtico simples formado por uma laje quadrada, de dimensões  $3m \times 3m$ , apoiadas em vigas e pilares com seções transversais constantes  $30 \times 30 \text{ cm}$ . A espessura da placa equivale a  $10 \text{ cm}$  e foi aplicado um carregamento distribuído  $q = 4,9 \text{ kN/m}^2$  e uma carga concentrada situada no nó central da placa equivalendo a  $P = 9,81 \text{ kN}$ . O objetivo deste exemplo é mostrar a eficiência da acoplagem pórtico – placa além de aferir a precisão do programa ALEL. Esquemas mostrando as demais características do pórtico e da discretização adotada são apresentados na figura 3.29.

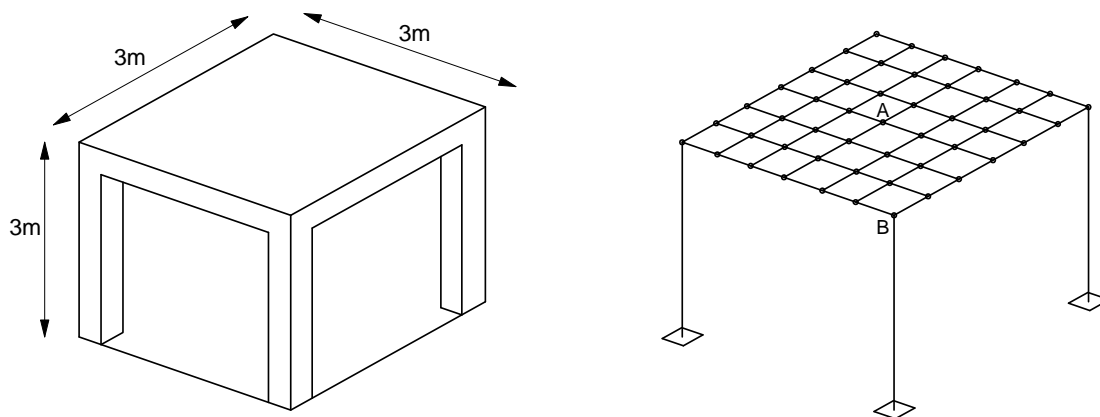


Figura 3.29 – Pórtico Acoplado à Placa

Monitorando os deslocamentos no meio da placa para o carregamento especificado, obteve-se os resultados via programa ALEL e pelo software SAP2000. Observa-se que os resultados obtidos pelos dois programas foram os mesmos.

Tabela 3.3 – Validação do Acoplamento

Monitoramento	Programa ALEL	SAP2000
Deslocamento devido ao carregamento concentrado (mm)	0,325	0,325
Deslocamento devido ao carregamento distribuído (mm)	0,541	0,541
Encurtamento dos pilares devido ao carregamento concentrado (mm)	0,003	0,003

Houve uma preocupação em manter um nível de precisão satisfatório para o programa ALEL porque ele é a base para todos os demais programas. Foram simulados outros exemplos com tipologia diferenciada e variação de carregamentos sendo que os resultados foram excelentes no que diz respeito à precisão. No quarto capítulo são apresentados exemplos com estruturas reais e determinados todos os parâmetros que influenciam direta ou indiretamente na rigidez dos pórticos tridimensionais em concreto armado.

### 3.6.4 Calibração dos programas AIEL e ADVL – Instabilidade e Dinâmica

Considerando novamente o exemplo anterior de autoria de Buzar (1996) pretende-se apresentar o fator de carga crítica de *Euler*, as frequências naturais e os modos de vibração, considerando um problema de vibrações livres não amortecidas. Utilizando o programa AIEL, o fator de carga crítica de Euler é equivalente a  $\lambda_{cr} = 76,37$  constatando que o pórtico em análise apresenta um grau de segurança alto no que se refere à flambagem. Com o auxílio do programa ADVL, tem-se as seguintes respostas dinâmicas:

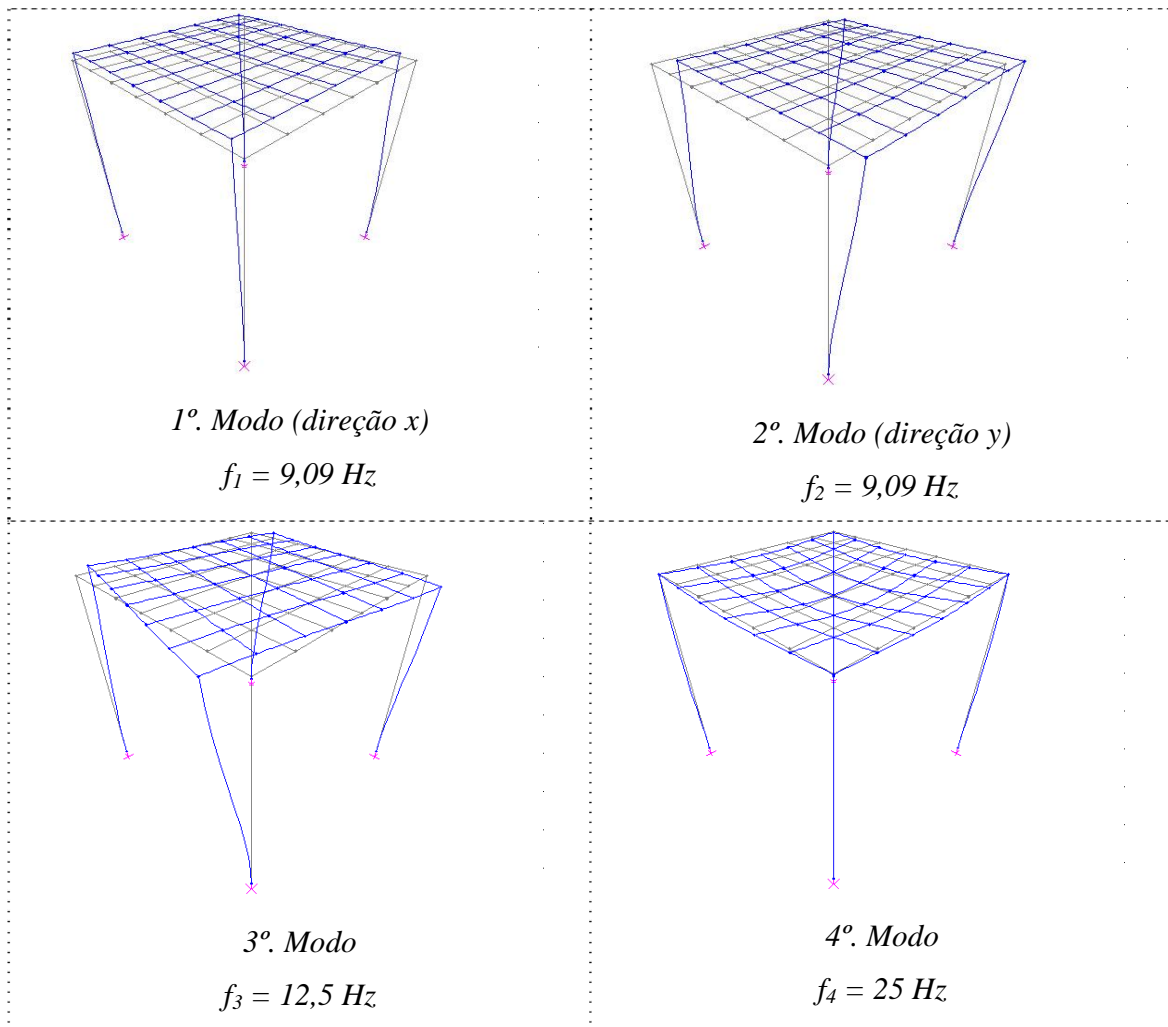


Figura 3.30 – Modos de Vibração – Pórtico Espacial

Os resultados para as frequências indicam valores bem superiores a 1 Hz, limite sugerido pela NBR6123/1988. Estas respostas são coerentes quando comparadas com resultados obtidos com outros softwares (exemplo: SAP2000).



### 3.6.5 Calibração dos programas AEPI – Análise Elastoplástica

O pórtico espacial esquematizado na figura 3.31 é composto de uma laje quadrada, de lado 5 m, com espessura 0,10m, vigas com seção transversal 0,15x0,50 m e pilares com seção transversal 0,20x0,20m. O carregamento sobre o pórtico se resume em uma carga distribuída na laje equivalente a 5 kN/m<sup>2</sup>. As armaduras dos elementos do pórtico, definidas em uma análise linear elástica, são as seguintes:

laje => armadura positiva nas duas direções  $A_{sx} = A_{sy} = 2,22 \text{ cm}^2/\text{m}$

vigas => armadura longitudinal  $A_{s_{inf}} = 4,0 \text{ cm}^2$   
 $A_{s_{sup}} = 0,624 \text{ cm}^2$

armadura transversal  $A_{s_e} = 2,4 \text{ cm}^2/\text{m}$

pilares => armadura longitudinal  $A_s = 5,0 \text{ cm}^2$

armadura transversal  $A_{s_e} = 2,4 \text{ cm}^2/\text{m}$

discretização da laje = 8x8

O histórico de plastificação, o fator de carga de colapso plástico e o monitoramento do deslocamento no centro da laje estão esquematizados na figura 3.31.

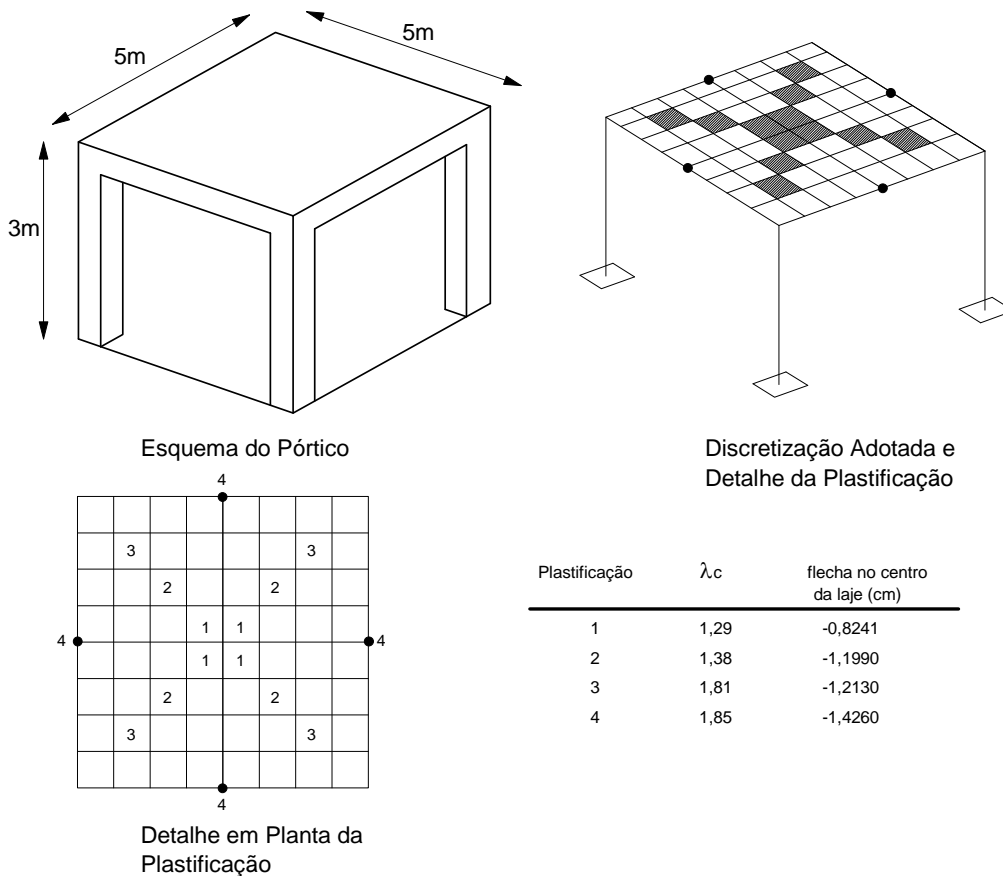


Figura 3.31 – Análise Elastoplástica – Pórtico Espacial

## 4. APLICAÇÕES PRÁTICAS

### 4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados os resultados de 4 análises de edifícios utilizando os programas desenvolvidos neste trabalho. São exemplos de estruturas reais com arranjos estruturais sendo formados por pórticos, exclusivamente, e pórticos associados a pilares paredes. São apresentados os resultados dos parâmetros de instabilidade,  $\alpha$  e  $\gamma_z$ , obtidos por processo simplificado, os esforços de segunda ordem via método  $P-\Delta$ , o fator de carga crítica de flambagem,  $\lambda_{cr}$ , o fator de carga de colapso plástico,  $\lambda_c$  e as frequências naturais considerando vibrações livres não amortecidas correspondentes aos 5 primeiros modos de vibração.

As características geométricas bem como a tipologia estrutural serão melhor detalhadas em cada exemplo. Para os carregamentos gravitacionais, adotou-se os mesmos valores para todos os exemplos:

- Carregamento distribuído sobre as lajes =  $2,5 \text{ kN/m}^2$  (exceto peso próprio);
- Carregamento distribuído sobre as vigas =  $0,5 \text{ kN/m}$  (exceto peso próprio). Neste trabalho utilizou-se o conceito de carregamento equivalente onde a carga distribuída é substituída por carregamentos nodais concentrados nos nós.

Para o carregamento de horizontal devido à ação do vento, utilizou-se como orientação as prescrições da NBR 6123/1988, considerando como velocidade básica  $V_o = 32 \text{ m/s}$ , fator topográfico  $S_T = 1,0$ , categoria referente a rugosidade igual a IV, a classe da edificação definida basicamente pela altura da edificação, fator estatístico equivalente a 1,0 e coeficientes de arrasto definidos de acordo com o ábaco da norma para edificações paralelepipedicas. As combinações de carregamentos e os coeficientes de majoração e minoração estão em pleno acordo com a NBR 6118/2003

## 4.2 EXEMPLO 1 – EDIFÍCIO COM 10 PAVIMENTOS TIPO E COBERTURA

Este exemplo apresenta um arranjo simétrico com seções transversais uniformes para vigas e pilares. Todas as lajes possuem espessura de 10 cm. A distância entre os pisos é constante e igual a 3m. Foram consideradas as fachadas frontal e lateral para incidência do vento conforme esquema apresentado na figura 4.1. A forma do pavimento tipo está esquematizada na figura 4.2

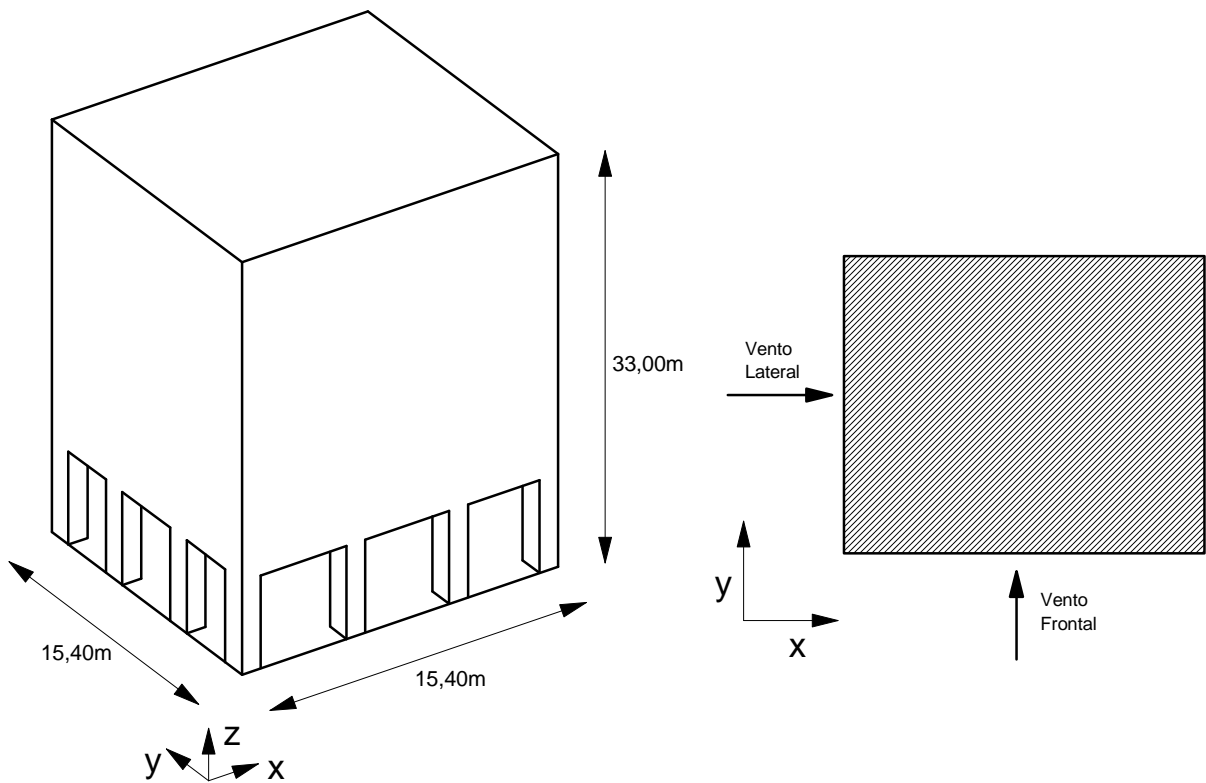


Figura 4.1 – Esquema do Edifício – Exemplo 1

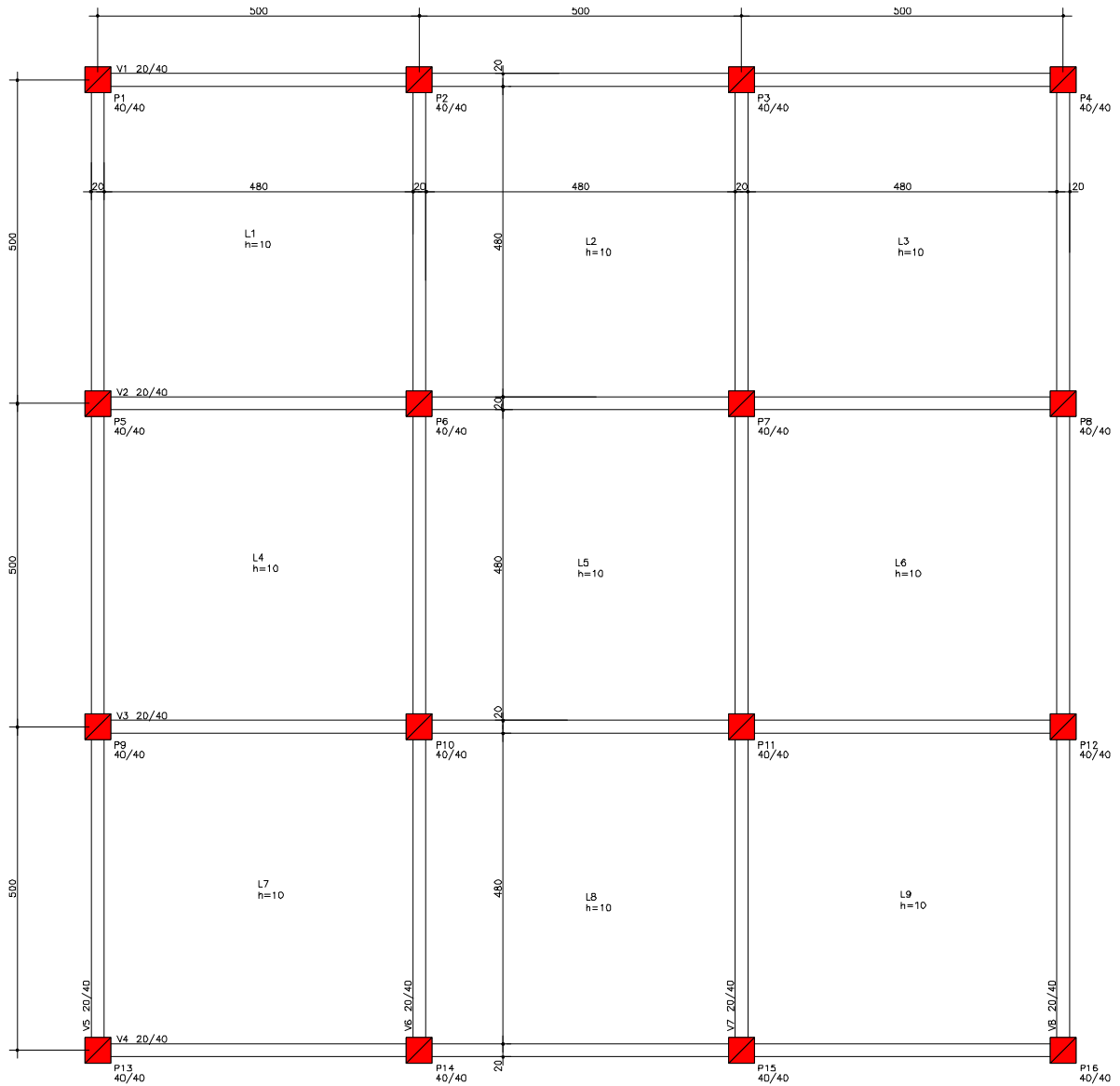


Figura 4.2 – Forma do Pavimento Tipo – Exemplo 1

Como já esperado, o arranjo estrutural apresenta a mesma resposta para as duas direções.

Para os parâmetros de instabilidade  $\alpha$  e  $\gamma z$  foram encontrados os valores:

Direção x:

$$\alpha = 0,68 > 0,6$$

$$\gamma z = 1,08 < 1,1$$

Direção y:

$$\alpha = 0,68 > 0,6$$

$$\gamma z = 1,08 < 1,1$$

Os resultados demonstram que existe uma discordância entre os parâmetros  $\alpha$  e  $\gamma_z$ . Pelo parâmetro  $\alpha$ , uma análise de segunda ordem é necessária pois os resultados para as duas direções superaram o valor limite 0,6, estabelecido pela NBR6118/2003. Caso admita os limite proposto por Franco (1985) e expostos na figura 1.3, a situação fica mais complicada pois o limite para arranjos compostos exclusivamente de pórticos equivale a 0,5. De acordo com o resultado do parâmetro  $\gamma_z$ , uma análise de segunda ordem pode ser desprezada pois os esforços de segunda ordem não excedem em 10%, os correspondentes efeitos de primeira ordem.

Ao realizar uma análise de segunda ordem através do método P- $\Delta$ , os resultados indicam que esta pode ser negligenciada numa análise global sendo o edifício considerado de nós fixos. Percebe-se que os efeitos de segunda ordem não excedem em 10% os correspondentes efeitos de 1ª. ordem. Foram monitorados 3 parâmetros apresentando os resultados numa análise de 1ª. e 2ª. ordem:

Tabela 4.1 – Efeitos de Segunda Ordem (Direções x e/ou y) – Edifício 1

Parâmetro	Análise de 1ª. Ordem	Análise de 2ª. Ordem	Diferença (%)
Deslocamento horizontal no topo (cm)	3,45	3,64	+ 5,5 %
Momento fletor na base do pilar P10 (tf.m)	5,83	6,03	+ 3,4 %
Esforço Normal no pilar P10, nível térreo (tf)	168,1	177,2	+ 5,4 %

Quando se avalia o fator de carga de flambagem, o fator de colapso plástico e o índice de Rankine-Merchant, o edifício se apresenta bem estável, com a relação  $\lambda_{cr}/\lambda_c$  próximo a 10. Os resultados são os seguintes:

Tabela 4.2 – Valores de  $\lambda_{cr}$ ,  $\lambda_c$ ,  $\lambda_{cr}/\lambda_c$  e  $\lambda_R$  – Exemplo 1

Direção x				Direção y			
$\lambda_{cr}$	$\lambda_c$	$\lambda_{cr}/\lambda_c$	$\lambda_R$	$\lambda_{cr}$	$\lambda_c$	$\lambda_{cr}/\lambda_c$	$\lambda_R$
24,17	2,44	9,90	2,21	24,17	2,44	9,90	2,21

De acordo com a tabela 4.2, os valores da relação  $\lambda_{cr}/\lambda_c = 9,9$  (aproximadamente 10) indica que o edifício em questão pode ser analisado apenas com a teoria de 1ª. ordem. Esta conclusão pode ser feita quando se compara com os limites utilizados em estruturas de aço e apresentados na tabela 2.3.

Na tabela 4.3 são apresentadas as respostas dinâmicas resultantes da análise modal. Os resultados para as frequências naturais no âmbito de vibrações livres sem amortecimento, para os 5 primeiros modos, são os seguintes:

Tabela 4.3 – Valores de Períodos Fundamentais e Frequências Naturais - Exemplo 1

<i>Modo</i>	<i>Período Fundamental T (s)</i>	<i>Frequência Natural f(Hz)</i>
1 (direção x)	1,31	0,76
2 (direção y)	1,31	0,76
3	1,12	0,89
4	0,42	2,38
5	0,42	2,38

Percebe-se que a frequência correspondente ao primeiro modo de vibração, direção x, equivalente a 0,76 Hz ( $f = 0,76 \text{ Hz}$ ) é inferior ao limite de 1 Hz, sugerido pela NBR 6123/1988. Outra observação é que, devido à simetria da estrutura, tem-se valores iguais de frequências para os primeiros e segundos modos (direções x e y). Utilizando as expressões simplificadas apresentadas na tabela 2.2 e sugeridas pela NBR 6123/1988, a frequência natural correspondente ao 1º modo é igual a 1,83 Hz ( $T = 0,54s$ ).

Alguns fatores podem contribuir para que ocorram diferenças entre os limites propostos pela NBR6123/1988 e o resultado via modelo numérico. A análise modal adotada neste trabalho considera o contexto de vibrações livres, sem amortecimento e não leva em consideração características relevantes como amortecimento, influência de elementos não estruturais como, por exemplo, as alvenarias. Ressalta-se também que a expressão apresentada na tabela 2.2 leva em consideração somente a altura da edificação não abordando o tipo de ligação entre os elementos estruturais, dimensões em planta da edificação e consideração mais rigorosa da atuação do vento.

### 4.3 EXEMPLO 2 – EDIFÍCIO COM 12 PAVIMENTOS TIPO E COBERTURA

Este exemplo foi apresentado pela 1ª. vez no colóquio sobre estabilidade global de estruturas de concreto armado em um trabalho de autoria do Prof. Ricardo Leopoldo França (1985). O edifício apresenta uma dimensão em planta predominante em relação à outra, sugerindo uma condição de esbeltez coincidente com a menor dimensão do edifício. A tipologia estrutural mostra o contrário pois os pórticos organizados em uma só direção, garantem a rigidez do edifício. O esquema básico do edifício é mostrado na figura 4.3 e a forma do pavimento tipo está esquematizada na figura 4.4. O pé-direito que representa a distância entre pavimentos é constante e igual a 2,9 m.

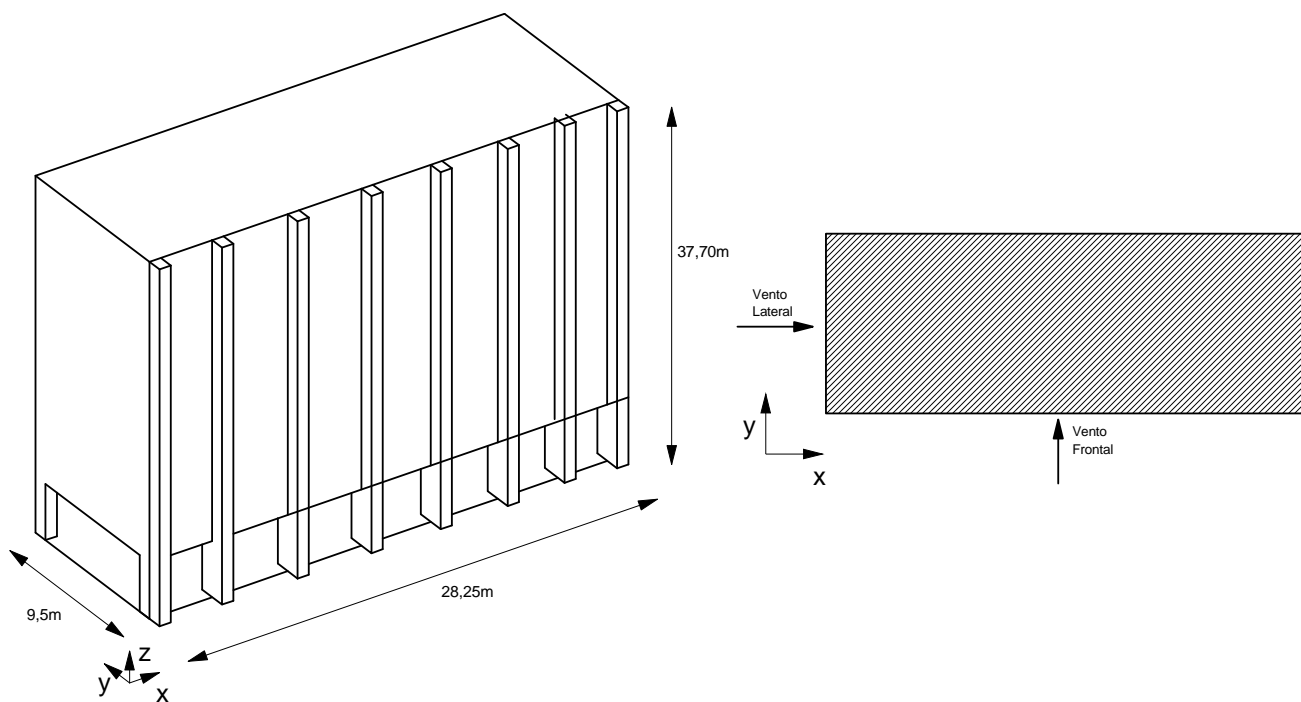


Figura 4.3 – Esquema do Edifício – Exemplo 2

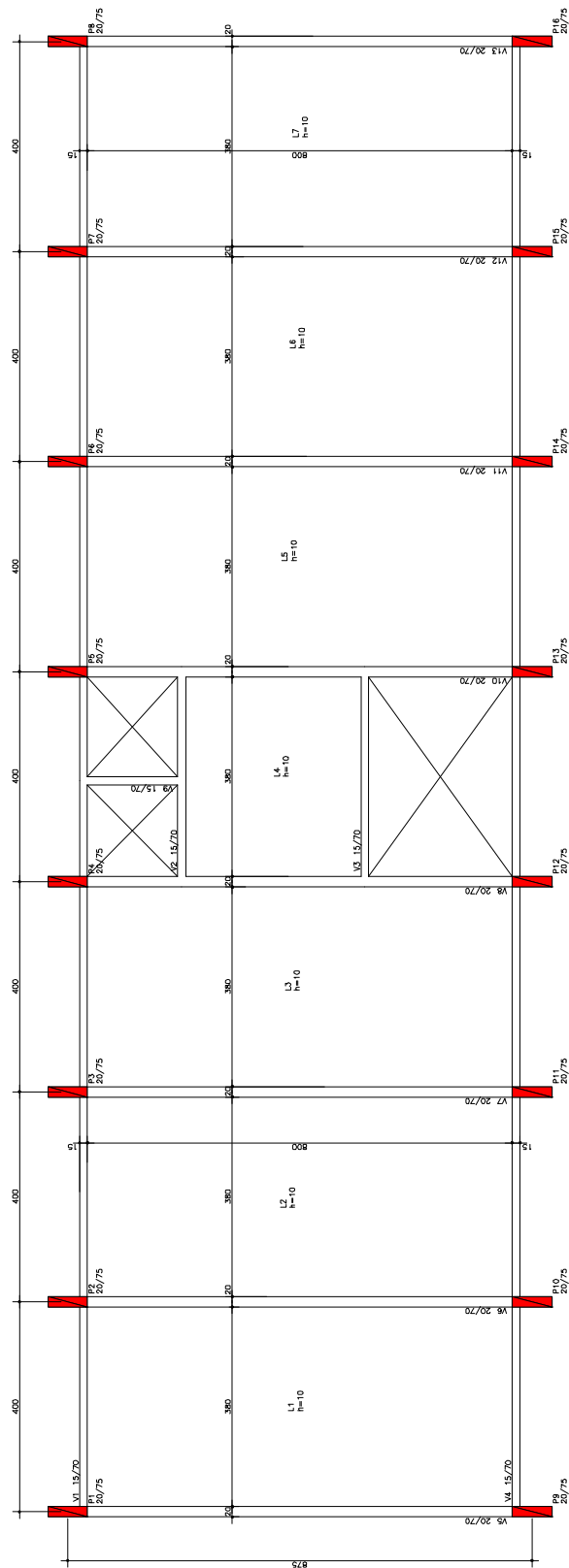


Figura 4.4 – Forma do Pavimento Tipo – Exemplo 2



Utilizando o método simplificado sugerido pela NBR 6118/2003, temos para os parâmetros de instabilidade  $\alpha$  e  $\gamma z$  os seguintes os valores:

Direção x:

$$\alpha = 1,46 > 0,6$$

$$\gamma z = 1,37 > 1,1$$

Direção y:

$$\alpha = 0,42 < 0,6$$

$$\gamma z = 1,02 < 1,1$$

De acordo com os dois parâmetros,  $\alpha$  e  $\gamma z$ , uma análise de segunda ordem é requerida para a direção x. Na direção y tem-se uma situação de rigidez bem evidente que é uma consequência direta do contraventamento, proporcionado pelos 8 pórticos nesta direção. Fazendo uma análise de segunda ordem considerando a atuação do vento na fachada lateral (direção x) e utilizando o método P- $\Delta$ , tem-se os seguintes resultados apresentados na tabela 4.4:

Tabela 4.4 - Efeitos de Segunda Ordem (Direção x) – Edifício 2

Parâmetro	Análise de 1ª. Ordem	Análise de 2ª. Ordem	Diferença (%)
Deslocamento horizontal no topo (cm)	6,43	8,10	+ 25,9 %
Momento fletor na base do pilar P4 (tf.m)	12,44	16,54	+ 32,9 %
Esforço Normal no pilar P4, nível térreo (tf)	222,6	288,49	+ 29,6 %

Este exemplo mostra que, a simples relação geométrica entre a altura do edifício e a dimensão em planta não constitui um bom parâmetro para avaliação da deslocabilidade do pórtico. Neste exemplo específico, o edifício possui uma dimensão em planta na direção x bem maior que a outra mas não possui um contraventamento suficiente que garanta a rigidez nesta direção. Nota-se que os resultados da análise de segunda ordem, utilizando o método P- $\Delta$ , corroboram com os valores encontrados pelo coeficiente  $\gamma z$ .

No que se refere ao fator de carga de flambagem, o fator de colapso plástico e o índice de Rankine-Merchant e tomando-se por base os índices utilizados para estruturas metálicas, tabela 2.3, o edifício pode ser considerado de nós fixos na direção y e de nós

móveis na direção x, seguindo as respostas encontradas para os parâmetros de instabilidade que utilizam o processo simplificado,  $\alpha$  e  $\gamma z$ . A tabela 4.5 indica que uma análise de segunda ordem é apropriada para a direção x pois a relação  $\lambda_{cr}/\lambda_c$  é inferior a 10.

Tabela 4.5 – Valores de  $\lambda_{cr}$ ,  $\lambda_c$ ,  $\lambda_{cr}/\lambda_c$  e  $\lambda_R$  – Exemplo 2

Direção x				Direção y			
$\lambda_{cr}$	$\lambda_c$	$\lambda_{cr}/\lambda_c$	$\lambda_R$	$\lambda_{cr}$	$\lambda_c$	$\lambda_{cr}/\lambda_c$	$\lambda_R$
13,61	1,73	7,86	1,53	54,87	2,90	18,92	2,75

Na tabela 4.6 são apresentados os resultados obtidos pela análise modal referente aos 5 primeiros modos de vibração. As frequências referentes ao 1º. e 2º. modos serão utilizados na comparação das respostas dinâmicas com os índices sugeridos pela NBR6123/1988.

Tabela 4.6– Valores de Períodos Fundamentais e Frequências Naturais - Exemplo 2

<i>Modo</i>	<i>Período Fundamental</i> <i>T (s)</i>	<i>Frequência Natural</i> <i>f(Hz)</i>
1 (direção x)	1,59	0,62
2 (direção y)	1,11	0,90
3	1,05	0,95
4	0,53	1,88
5	0,35	2,85

Como ocorreu no exemplo 1, a frequência correspondente ao primeiro modo ( $f = 0,62$  Hz) é inferior ao limite de 1 Hz, sugerido pela NBR 6123/1988. O que induz uma condição de esbeltez para o edifício, nesta direção. Na direção y, onde a estrutura se apresenta como mais rígida, a frequência natural se aproxima do limite 1 Hz. Utilizando o modelo simplificado da NBR 6123, tabela 2.2, a frequência natural correspondente ao 1º modo é igual a 1,62 Hz.

Observando o arranjo estrutural apresentado na figura 4.4 para o pavimento tipo do edifício, nota-se que existem pórticos na direção x, bem largos e formados por vários

pilares. Entretanto, a baixa inércia dos pilares e as ligações flexíveis com as vigas não são suficientes para garantir o contraventamento global e o enrijecimento do conjunto. Este problema é levantado por Kimura (2007) quando na avaliação de exemplos de pórticos de concreto armado. Para melhorar a rigidez na direção x é conveniente aumentar a inércia dos pilares nesta direção ou incluir pilares-paredes associados aos pórticos existentes.

#### 4.4 EXEMPLO 3 – EDIFÍCIO COM 15 PAVIMENTOS TIPO E COBERTURA

O exemplo 3 é devido a Fusco (1994) e trata-se de um conjunto de quatro edifícios idênticos, construídos simultaneamente, que apresentaram os mesmos danos estruturais quando ocupado. Estes problemas estruturais foram denominados por Fusco (1994) como “*patologias da concepção estrutural*”, relacionados à estabilidade global da estrutura. O edifício está esquematizado na figura 4.5 e a planta do pavimento tipo apresentada na figura 4.6. O edifício apresenta uma altura aproximada de 44 metros e após sua inauguração, teve que sofrer uma intervenção buscando-se evitar o colapso global da estrutura. Maiores detalhes sobre este caso pode ser encontrado em Cunha et al (1996).

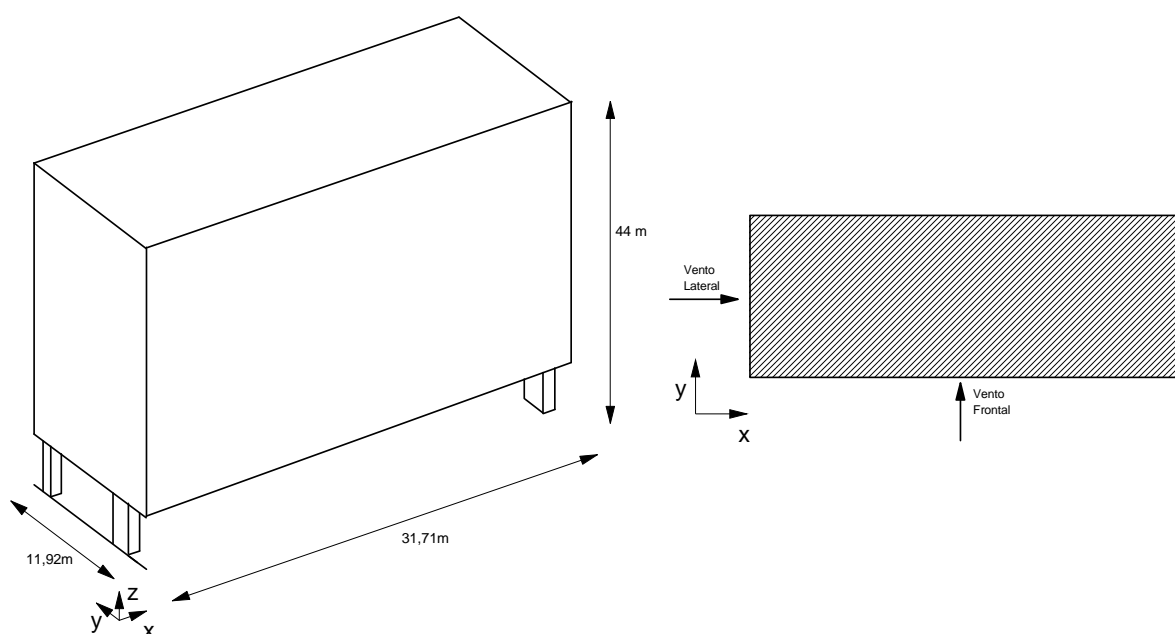


Figura 4.5 – Esquema do Edifício – Exemplo 3

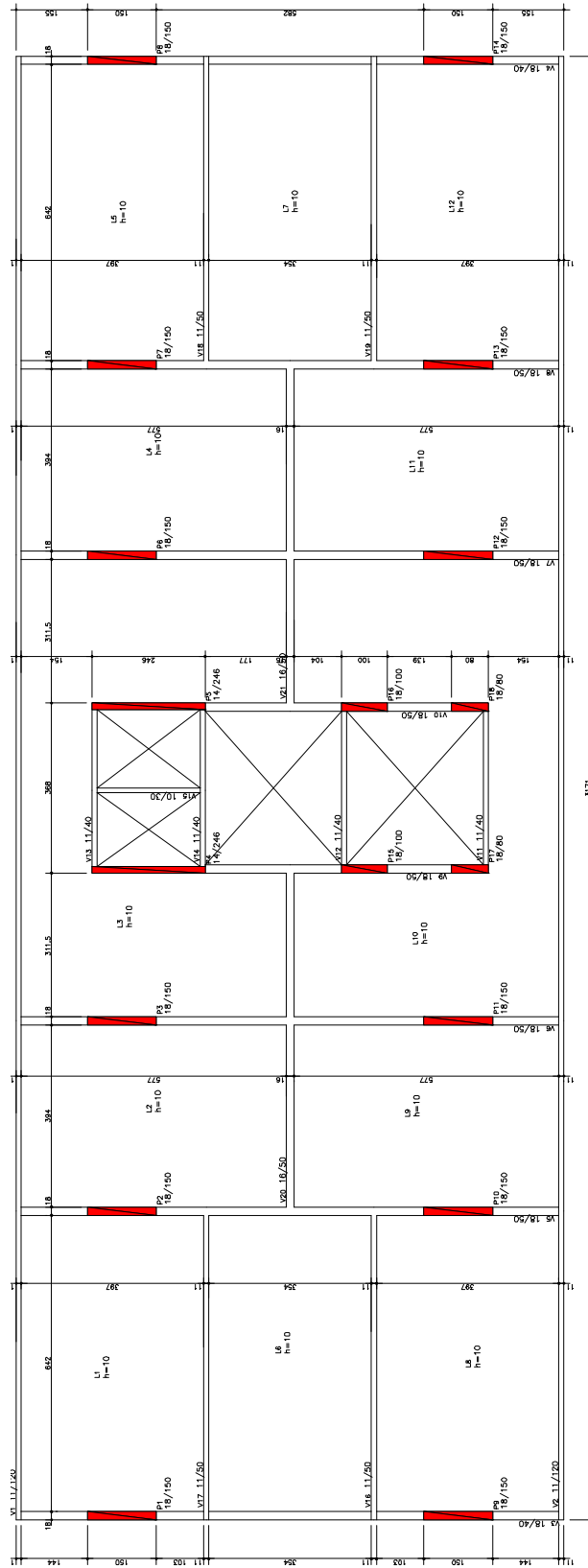


Figura 4.6 – Forma do Pavimento Tipo – Exemplo 3

Os resultados encontrados na direção x, com vento atuando na fachada lateral, para os parâmetros de instabilidade  $\alpha$  e  $\gamma z$ , indicam uma total condição de instabilidade nesta direção. Os valores encontrados se encontram bem superiores aos limites sugeridos pela NBR 6118/2003. Na direção y, situação de incidência de vento frontal, o edifício se encontra convenientemente contraventado consequência da atuação dos pilares paredes.

Direção x:

$$\alpha = 4,58 > 0,6$$

$$\gamma z = 1,54 > 1,1$$

Direção y:

$$\alpha = 0,58 < 0,6$$

$$\gamma z = 1,04 < 1,1$$

Com base nos dois parâmetros,  $\alpha$  e  $\gamma z$ , os problemas ocorridos no edifício são decorrentes de uma total condição de instabilidade na direção y. Nesta direção praticamente inexistem pórticos que poderiam proporcionar uma rigidez ao arranjo estrutural.

A condição de instabilidade também pode ser detectada pelo método P- $\Delta$ . Na tabela 4.7 são mostrados os resultados da análise de segunda ordem, por meio do método P- $\Delta$ , para a direção x (mais esbelta).

Tabela 4.7 - Efeitos de Segunda Ordem (Direção x) – Edifício 3

Parâmetro	Análise de 1ª. Ordem	Análise de 2ª. Ordem	Diferença (%)
Deslocamento horizontal no topo (cm)	14,33	Não convergiu	---
Momento fletor na base do pilar P4 (tf.m)	6,89	Não convergiu	---
Esforço Normal no pilar P4, nível térreo (tf)	273,17	Não convergiu	---

Percebe-se que não foi possível a convergência na análise de segunda ordem, por este método, com os deslocamentos crescendo infinitamente indicando uma situação de instabilidade global. Através de uma análise tridimensional e utilizando os programas AIEL e AEPI, desenvolvidos neste trabalho, temos uma condição de instabilidade evidente na direção x, fachada lateral. A relação  $\lambda_{cr}/\lambda_c$  é bem inferior a 10, indicando um

dimensionamento para os elementos estruturais com a consideração dos efeitos de segunda ordem. Os resultados são apresentados na tabela 4.8.

Tabela 4.8 – Valores de  $\lambda_{cr}$ ,  $\lambda_c$ ,  $\lambda_{cr}/\lambda_c$  e  $\lambda_R$  – Exemplo 3

Direção x				Direção y			
$\lambda_{cr}$	$\lambda_c$	$\lambda_{cr}/\lambda_c$	$\lambda_R$	$\lambda_{cr}$	$\lambda_c$	$\lambda_{cr}/\lambda_c$	$\lambda_R$
8,15	1,65	4,94	1,37	21,96	1,97	11,15	1,81

Na direção y, o arranjo estrutural se apresenta bem estável sendo que a relação  $\lambda_{cr}/\lambda_c$  é superior a 10. As frequências naturais de vibração e o período fundamental, correspondente aos 5 primeiros modos de vibração são apresentados na tabela 4.9.

Tabela 4.9– Valores de Períodos Fundamentais e Frequências Naturais - Exemplo 3

<i>Modo</i>	<i>Período Fundamental</i> $T (s)$	<i>Frequência Natural</i> $f(Hz)$
1 (direção x)	2,23	0,45
2 (direção y)	2,17	0,46
3	1,85	0,54
4	1,74	0,57
5	1,24	0,80

A frequência correspondente ao primeiro modo ( $f = 0,45 \text{ Hz}$ ) é inferior ao limite de 1 Hz, sugerido pela NBR 6123/1988. Pelo modelo simplificado, sugerido pela NBR 6123/1988, a frequência natural correspondente ao 1º modo é igual a 1,60 Hz. O que chama atenção neste exemplo, no que se refere às respostas dinâmicas, é que as frequências naturais correspondentes ao 1º. e 2º. modos, são bem próximas e indicando uma estrutura esbelta nas duas direções. Pelos parâmetros anteriormente discutidos, na direção y com incidência de vento frontal, o edifício se mostra rígido sendo que os efeitos de segunda ordem podem ser negligenciados.

Este exemplo demonstra que, a adoção de poucos parâmetros na avaliação da rigidez pode ser uma opção arriscada quando se trata de estabilidade global. A análise tridimensional deve levar em consideração todos os fatores que, de alguma forma, influenciam diretamente no problema.

#### 4.5 EXEMPLO 4 – EDIFÍCIO COM 24 PAVIMENTOS TIPO E COBERTURA

O exemplo 4 trata-se de um edifício construído na cidade de Goiânia e representa uma tendência atual da arquitetura moderna com edifícios mais altos e dimensões em planta bem mais reduzidas. Em se tratando de modelagem numérica, o modelo se assemelha à coluna clássica de *Euler*. As características geométricas assim como as faces de incidência do vento estão esquematizadas na figura 4.7. A distância entre pavimentos é constante e igual a 2,8 metros. A planta de formas do pavimento tipo está apresentada figura 4.8. O edifício possui um ano de utilização e está em perfeitas condições, não apresentando danos patológicos que depõe quanto a sua segurança.

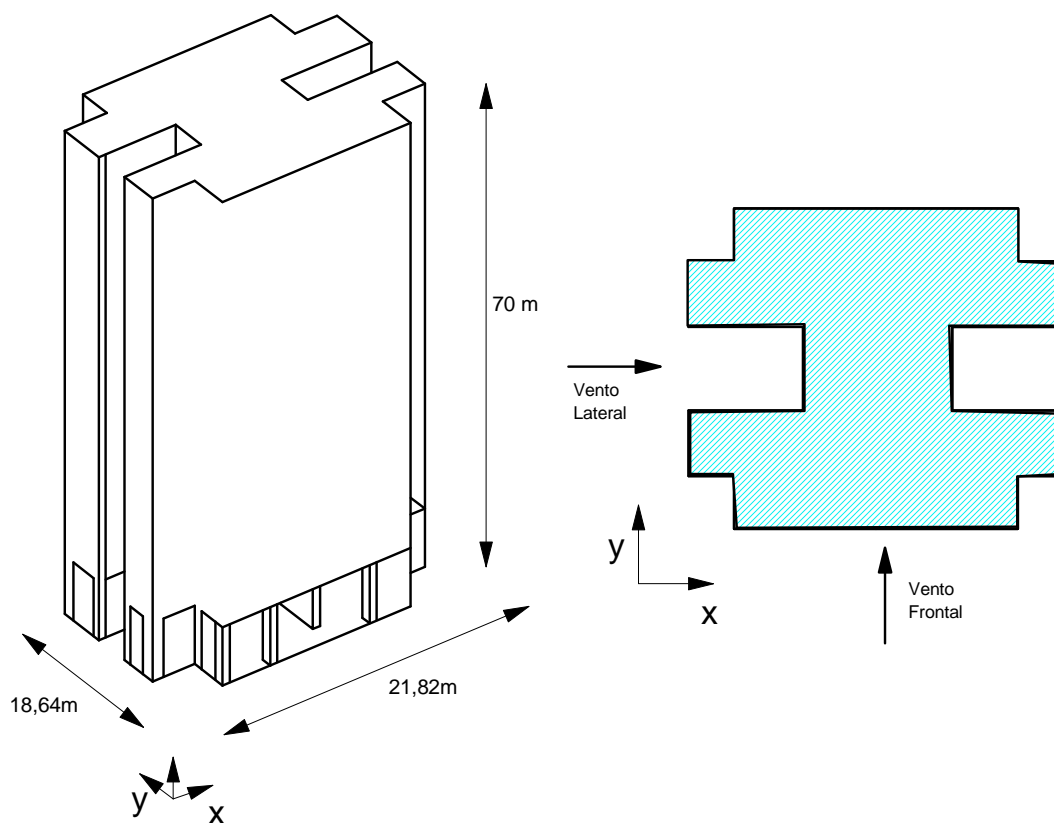


Figura 4.7 – Esquema do Edifício – Exemplo 4

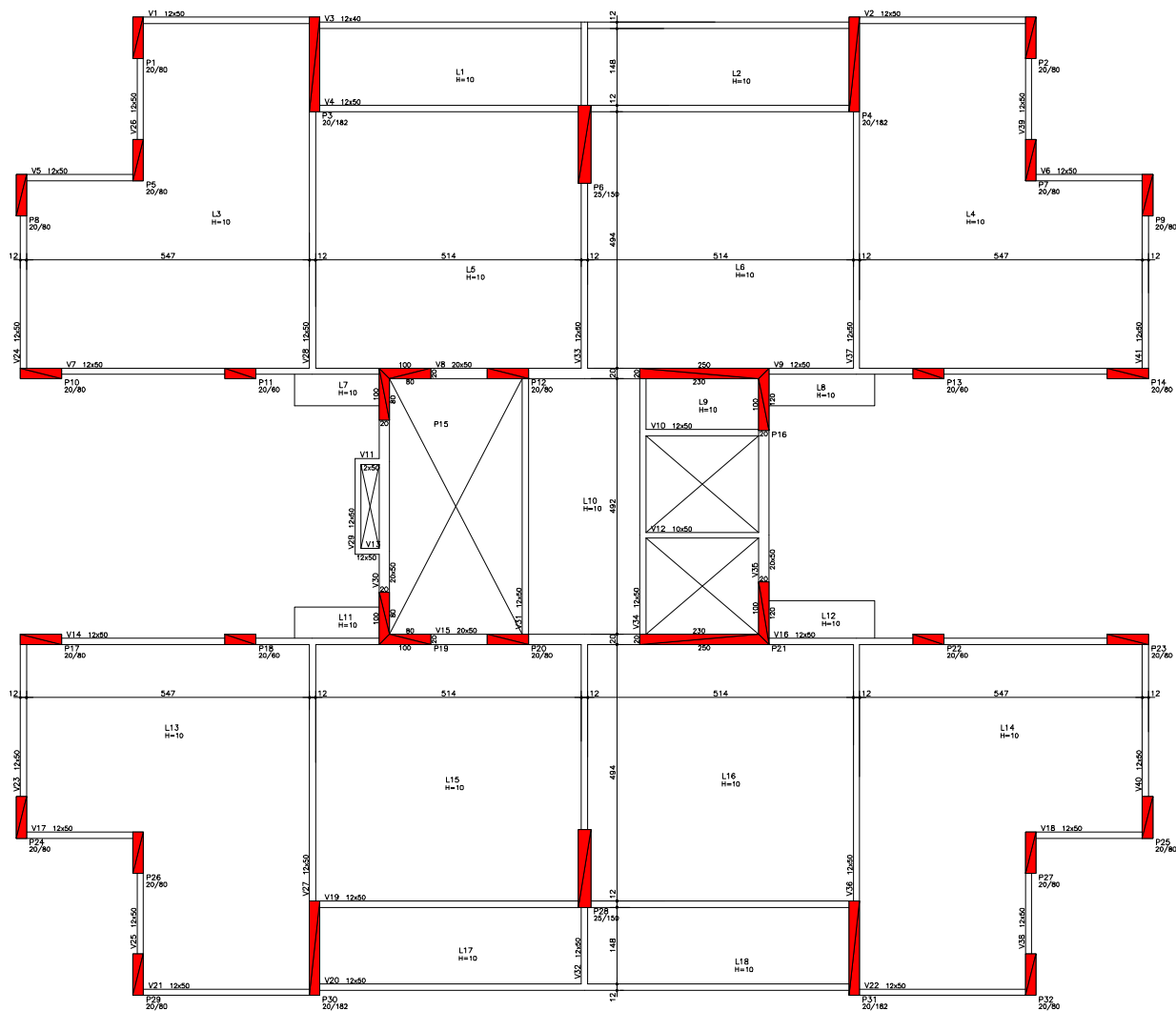


Figura 4.8 – Forma do Pavimento Tipo – Exemplo 4

Os resultados obtidos para os parâmetros de instabilidade  $\alpha$  e  $\gamma_z$ , para cada direção, indicam uma necessidade de uma análise criteriosa dos efeitos de segunda ordem pois os valores encontrados, nas duas direções, são superiores aos valores limites estabelecidos pela NBR 6118/2003.

Direção x:

$$\alpha = 0,95 > 0,6$$

$$\gamma_z = 1,25 > 1,1$$

Direção y:

$$\alpha = 0,86 > 0,6$$

$$\gamma_z = 1,16 > 1,1$$



Na tabela 4.10 são apresentados os resultados de uma análise de segunda ordem pelo método P- $\Delta$ , considerando a atuação do vento na fachada lateral (direção x) :

Tabela 4.10 - Efeitos de Segunda Ordem (Direção x ) – Edifício 4

Parâmetro	Análise de 1ª. Ordem	Análise de 2ª. Ordem	Diferença (%)
Deslocamento horizontal no topo (cm)	3,24	3,87	+ 19,4 %
Momento fletor na base do pilar P16 (tf.m)	41,33	51,24	+ 23,9 %
Esforço Normal no pilar P16, nível térreo (tf)	785,33	950,25	+ 21,0 %

Os resultados obtidos coincidem com os valores encontrados através do coeficiente  $\gamma z$  sendo que os esforços de segunda ordem excedem em 25 %, aproximadamente, os correspondentes esforços de 1ª. ordem. Através de uma análise tridimensional de instabilidade elástica e elastoplástica, percebe-se que na direção x o edifício se apresenta como esbelto pois a relação  $\lambda_{cr}/\lambda_c$  é inferior a 10. Na outra direção, a rigidez pode ser admitida por este critério. Os resultados para as duas direções são apresentados na tabela 4.11.

Tabela 4.11 – Valores de  $\lambda_{cr}$ ,  $\lambda_c$ ,  $\lambda_{cr}/\lambda_c$  e  $\lambda_R$  – Exemplo 4

Direção x				Direção y			
$\lambda_{cr}$	$\lambda_c$	$\lambda_{cr}/\lambda_c$	$\lambda_R$	$\lambda_{cr}$	$\lambda_c$	$\lambda_{cr}/\lambda_c$	$\lambda_R$
15,57	2,11	7,38	1,85	46,71	2,97	15,73	2,79

Os resultados da análise modal, via programa ADVL, são mostrados na tabela 4.12. Pelo modelo simplificado, proposto na NBR 6123 e apresentado na tabela 2.2, a frequência natural correspondente ao 1º modo é igual a 1,14 Hz. Se o limite de 1 Hz for determinante para a avaliação da rigidez, nas duas direções o edifício se apresenta com esbelto pois as frequências encontradas são inferiores a este valor.

Tabela 4.12– Valores de Períodos Fundamentais e Frequências Naturais - Exemplo 4

<i>Modo</i>	<i>Período Fundamental</i> <i>T (s)</i>	<i>Frequência Natural</i> <i>f(Hz)</i>
1 (direção x)	1,73	0,57
2 (direção y)	1,45	0,68
3	1,37	0,72
4	0,81	1,22
5	0,75	1,32

## 4.6 ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS

A figura 4.9 apresenta os resultados obtidos para o parâmetro  $\alpha$ , nos quatro exemplos processados. São especificados os valores de  $\alpha$ , para cada direção, e o valor limite de 0,6, sugerido pela NBR6118/2003.

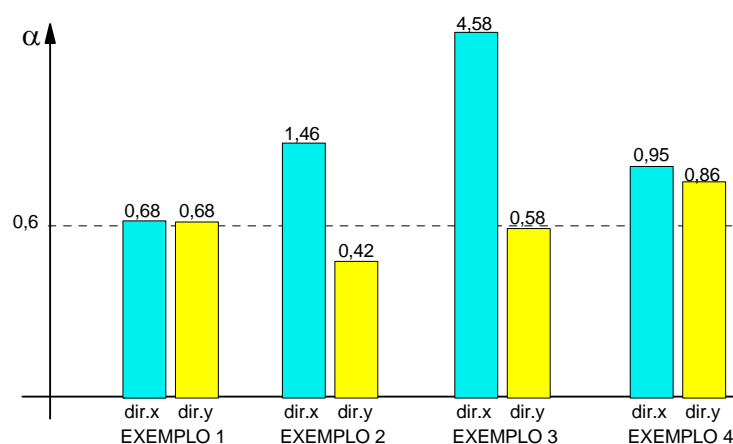


Figura 4.9 – Comparação de Valores – Parâmetro  $\alpha$

De acordo com o parâmetro  $\alpha$ , em todos os edifícios analisados, seria necessário à análise de segunda ordem pois foi superado o limite de norma em todos os exemplos. A situação mais crítica ocorreu no exemplo 3, direção x, o valor de  $\alpha$  superou em muito o valor limite. No exemplo 1, houve uma discordância entre o parâmetro  $\alpha$  e  $\gamma_z$ , sendo que pelo último critério, a análise de segunda ordem pode ser negligenciada neste exemplo.

Na figura 4.10 estão reunidos os resultados para o coeficiente  $\gamma_z$ , em todos os casos analisados:

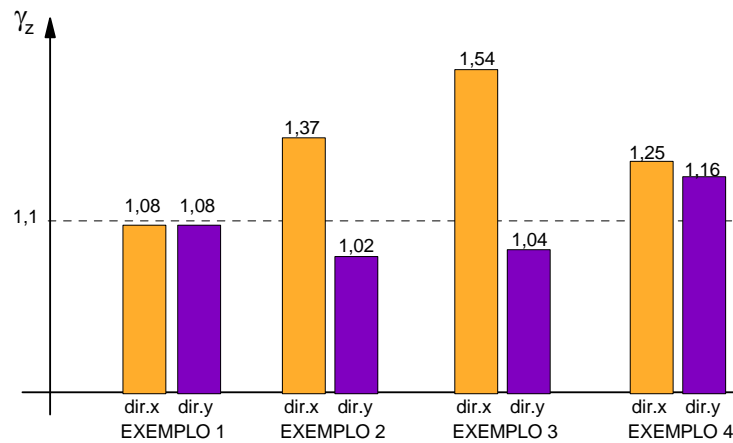


Figura 4.10 – Comparação de Valores – Parâmetro  $\gamma_z$

De acordo com o parâmetro  $\gamma_z$ , efeitos de segunda ordem significativos ocorrem no exemplo 2 (direção x), exemplo 3 (direção x) e exemplo 4, nas duas direções. Como o coeficiente  $\gamma_z$  funciona como fator de amplificação, percebe-se que o exemplo 3 se torna inexecutável para a direção x pois os esforços de 1ª. ordem teriam que ser majorados em 54%, para todos os elementos, de forma a incluir na análise os correspondentes efeitos de segunda ordem. A análise de segunda ordem utilizando o método P- $\Delta$ , confirmou esta situação e pode ser que os problemas ocasionados nesta estrutura poderiam ter sido evitados se uma avaliação do  $\gamma_z$  tivesse sido realizada.

Na figura 4.11 são apresentados os valores da relação  $\lambda_{cr}/\lambda_c$ , para todos os exemplos analisados, nas direções x e y. Este índice é muito utilizado na avaliação da rigidez de pórticos em estruturas metálicas e, conforme a tabela 2.3, o limite em que os efeitos de segunda ordem podem ser desprezados corresponde a valores superiores a 10 ( $\lambda_{cr}/\lambda_c > 10$ ).

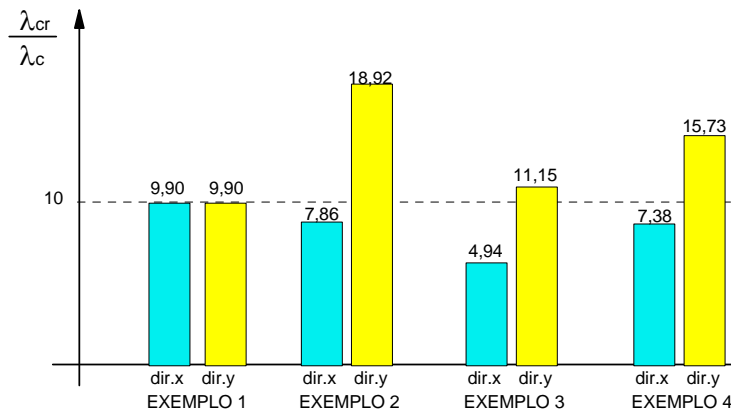


Figura 4.11 – Comparação de Valores – Parâmetro  $\lambda_{cr}/\lambda_c$

O exemplo 1 com a relação  $\lambda_{cr}/\lambda_c$  próximo a 10 pode ser considerado uma estrutura de nós fixos, nas duas direções avaliadas. Quanto menor este fator, a carga de colapso mais se aproxima da carga de flambagem induzindo uma condição de esbeltez para o pórtico. Dentre os exemplos analisados, o exemplo 3, principalmente na direção x, apresenta um valor muito baixo para a relação  $\lambda_{cr}/\lambda_c$  sendo que considerações particulares terão que ser adotadas de forma a assegurar a estabilidade do pórtico. O exemplo 4, direção y, apresenta-se como esbelto quando se analisa os parâmetros  $\alpha$  e  $\gamma_z$ . De acordo com este parâmetro, nesta direção específica, a estrutura é considerada de nós fixos.

O gráfico da figura 4.12 apresenta uma comparação entre valores de  $\lambda_R$ , denominado índice de Rankine-Merchant. Este índice tem sua importância pelo fato de considerar que a estabilidade dos pórticos é ditada pela interação entre o fator de carga crítica de flambagem e o fator de carga de colapso plástico.

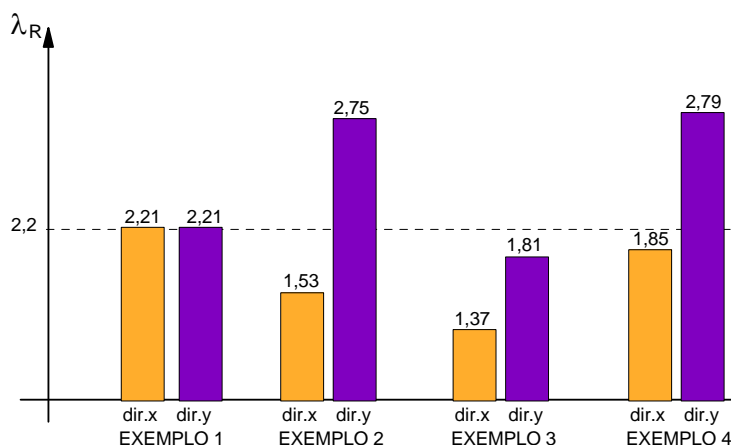


Figura 4.12 – Comparação de Valores – Parâmetro  $\lambda_R$

Para avaliar como funciona o índice de Rankine-Merchant, é oportuno utilizar como exemplo uma estrutura bastante simples: um corpo de prova de concreto. Um corpo de prova de concreto possui tais dimensões de forma que, durante o ensaio de compressão, a ruptura seja governada apenas pelo colapso do material. A flambagem neste caso não interfere no processo e o  $\lambda_{cr}$  tende ao infinito ( $\lambda_{crit} \rightarrow \infty$ ). Entrando com  $\lambda_{cr} = \infty$ , na relação 2.29 tem-se  $\lambda_R = \lambda_c$ . Ao aumentar a altura do corpo de prova, a flambagem passa a interferir no processo de ruptura sendo que esta será dada por uma interação entre o colapso plástico e a instabilidade por flambagem. Quanto menor o índice de Rankine-Merchant, mais esbelto será o pórtico. Nos exemplos analisados, a situação crítica fica novamente para os edifícios 2 e 3, na direção x. O exemplo 3 possui o menor índice de Rankine-Merchant e este resultado confirma a resposta encontrada pelos parâmetros já discutidos.

Considerando as respostas dinâmicas encontradas, a figura 4.13 agrupa os valores de frequências naturais para os cinco edifícios, nas duas principais direções consideradas, com o objetivo de se estabelecer comparações.

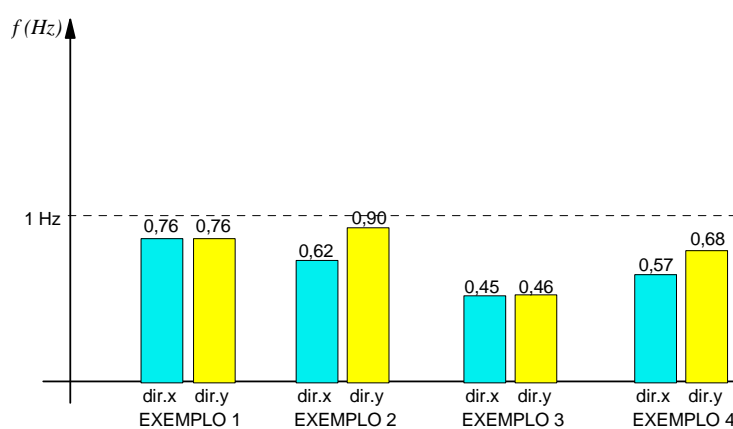


Figura 4.13 – Comparação de Valores – Frequências Naturais –  $f$  (Hz)

Dos exemplos analisados cabe destacar que, em todos os edifícios, nas duas principais direções, as frequências naturais foram inferiores a  $1 \text{ Hz}$ , limite sugerido pela NBR6123/1988, indicando uma tendência de esbeltez para os pórticos. O exemplo 3 apresentou os menores valores de frequência, considerando os primeiros modos de vibração. O interessante neste exemplo é que, mesmo o arranjo estrutural não apresentar simetria, as frequências naturais foram muito próximas, para o 1º. e 2º. modos.

Quando se compara com o limite sugerido pela norma percebe-se um conflito nos resultados e cabe enumerar alguns fatores que podem ter originado tais diferenças:

- a análise modal adotada neste trabalho considera um problema de vibrações livres sem amortecimento. Espera-se uma resposta diferente ao considerar o amortecimento na análise;

- o modelo simplificado sugerido pela NBR 6123/1988 baseia-se na consideração de massas concentradas e neste trabalho optou-se pelo modelo de massa consistente;

- as equações sugeridas pela norma brasileira NBR 6123/1988, presentes na tabela 2.2, permite estimar a frequência natural correspondente ao 1º. modo de vibração em estruturas reais. Estas expressões são simples e considera como principal fator que influencia nas respostas dinâmicas, apenas a altura da edificação. Lagomarsino (1993) comenta que estas expressões são resultados de estudos estatísticos, envolvendo o monitoramento de edifícios já construídos. Segundo este mesmo autor, a consideração de outras variáveis se faz complexa e existe uma grande dispersão de resultados. O modelo simplificado que é sugerido pela NBR 6123/1988 conduz a respostas satisfatórias das ações dinâmicas do vento segundo Blessmann (1998).

Cabe a conclusão que, a influência da resposta dinâmica na rigidez de pórticos de concreto armado se faz evidente mas deve-se investigar, com mais rigor, as interferências de outras variáveis no processo. Ocorreram diferenças significativas entre os resultados via modelo numérico e o parâmetro simplificado da norma brasileira. Quando se correlaciona com demais parâmetros utilizados na avaliação da estabilidade global, percebe-se que tais ajustes se fazem necessários pois mesmo em exemplos que se apresentaram como rígidos (por exemplo: edifício 1), a análise modal resultou em um período fundamental superior a  $1s$ , indicando que uma análise dinâmica criteriosa se faz necessária.

## **5.CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

### **5.1 CONCLUSÕES**

Diante dos resultados obtidos serão apresentados alguns comentários sobre os programas desenvolvidos e os resultados obtidos com as aplicações práticas, descritas no capítulo 4. Espera-se que os resultados obtidos e os comentários sobre os parâmetros utilizados na avaliação da rigidez de pórticos tridimensionais, forneçam subsídios aos projetistas estruturais quando na concepção dos edifícios altos de concreto armado.

Quanto aos programas desenvolvidos, os mesmos se mostraram eficientes na obtenção de parâmetros que auxiliem na avaliação da rigidez de pórticos espaciais. Ao optar pela análise tridimensional, o projetista deve saber que, por ser uma análise mais criteriosa, é necessário um maior tempo para avaliação dos resultados e recursos computacionais a altura, com computadores mais modernos e softwares mais evoluídos. Em contrapartida, um modelo bem elaborado e analisado, fornece resultados mais realistas, permitindo assim um dimensionamento mais seguro.

De todos os programas desenvolvidos, o programa AEPI é que exige maior esforço computacional. Isto se explica pelo fato de que deve-se fazer um dimensionamento dos elementos estruturais (lajes, vigas e pilares), em cada ciclo de iteração. O exemplo 4, o maior edifício processado neste trabalho, necessitou de um tempo equivalente a 6 horas para concluir toda a análise elastoplástica. A análise de instabilidade e de vibrações livres se mostrou bem acessível, gastando-se pouco esforço computacional e fornecendo resultados satisfatórios.

Há de se destacar a eficiência da acoplagem pórtico-placa, permitindo uma análise de todo o conjunto, evitando-se hipóteses simplificadoras quando o modelo tridimensional é substituído por vários pórticos planos. Quando se trata de um edifício alto, o projetista de estruturas deve reservar um tempo suficiente para a análise da estabilidade global, feita no início do projeto, de posse do lançamento prévio do arranjo estrutural.

A principal contribuição deste trabalho é que, a análise tridimensional de pórticos, considerando a atuação conjunta de todos os elementos estruturais, é possível e mais indicada para se ter respostas mais realistas, no que se refere à estabilidade global. Os parâmetros simplificados ( $\alpha$  e  $\gamma_z$ ) são úteis nesta avaliação, principalmente quando os efeitos de segunda ordem são de pequena magnitude (inferior a 20%). Acima deste valor, é importante observar parâmetros que são resultantes de uma análise mais rigorosa como a relação  $\lambda_{cr}/\lambda_c$ , o índice de Rankine-Merchant,  $\lambda_R$  e as respostas dinâmicas resultantes de uma análise modal.

Os parâmetros simplificados e sugeridos pela NBR 6123 são importantes para se ter uma idéia da deslocabilidade dos edifícios de concreto armado e através do coeficiente  $\gamma_z$ , é possível prever, com boa aproximação, a magnitude dos efeitos de segunda ordem no arranjo estrutural. No entanto, no caso de estruturas mais esbeltas onde os efeitos do vento são bem significativos, deve-se sofisticar a análise com a determinação de outros parâmetros como o índice de Rankine-Merchant e as frequências naturais de vibração, buscando um respaldo maior quando na definição da rigidez destas estruturas.

Com o aumento da altura dos edifícios tem-se notado a adoção de uma concepção estrutural mista, formada por pórticos metálicos contraventados por núcleos rígidos de concreto armado. É bem provável que os parâmetros simplificados não se aplicam nestes casos sendo que a análise plástica, de instabilidade e de vibrações livres, pode ser admitida, sem restrições, na avaliação da rigidez dos pórticos. No caso de estruturas que fogem das tradicionais, é prudente calibrar os resultados obtidos via implementação numérica com modelos experimentais (modelos reduzidos), com as respostas dinâmicas calibradas com ensaios em túneis de vento.



## 5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para continuação desta linha de pesquisa, são sugeridos, entre outros, os seguintes temas:

- Avaliar a influência das lajes na estabilidade global investigando principalmente a hipótese de diafragmas rígidos, comumente admitida para as lajes nas análises de estabilidade;
- Incluir na análise tridimensional a opção de pilares com seções especiais como, por exemplo, as seções circulares e principalmente pilares com seções poligonais, comuns em estruturas de edifícios altos;
- Estudar a influência da não linearidade, de forma mais criteriosa, considerando não apenas a presença da armadura mas o detalhamento utilizado no elemento estrutural;
- Incluir o amortecimento na análise dinâmica comparando-se as respostas obtidas com as razões de amortecimento sugeridas pela NBR 6123/1988;
- Levar em consideração a influência de elementos não estruturais na rigidez dos pórticos em especial a interferência das alvenarias na análise;
- Aplicar os parâmetros utilizados neste trabalho na avaliação da rigidez de estruturas mistas, composta de núcleos rígidos de concreto e pórticos metálicos. As associações de paredes estruturais de concreto e pórticos metálicos estão cada vez mais frequentes nos edifícios de grande altura.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

American Concrete Institute – ACI 435.3R-68 (1984) – *Alloable Deflections* – Committee 435;

Araujo, J. M. de (1993) – *Pilares Esbeltos de Concreto Armado* - Editora da Universidade do Rio Grande – Rio Grande (RS);

Araujo, J. M. de (1984) – *Dimensionamento de Pilares Esbeltos de Concreto Armado* – Tese de Mestrado apresentada a Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre (RS);

Associação Brasileira de Normas Técnicas (2003) – *Projeto de Estruturas de Concreto Armado* – NBR6118 – Rio de Janeiro;

Associação Brasileira de Normas Técnicas (1978) – *Cargas para o Cálculo de Estruturas de Edificações* – NBR6120 – Rio de Janeiro;

Associação Brasileira de Normas Técnicas (1988) – *Forças devidas ao Vento em Edificações* – NBR6123 – Rio de Janeiro;

Associação Brasileira de Normas Técnicas (2003) – *Ações e Segurança nas Estruturas* – NBR8681 – Rio de Janeiro;

Beck, H. & König, G. (1966) – *Restraining Forces in the Analysis of Tall Buildings* – Symposium on Tall Buildings, Proceedings, Pergamon Press, Oxford;

Blessmann, J. (1998) – *Introdução ao Estudo das Ações Dinâmicas do Vento* – Editora Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS;

Brebbia, C. A. & Ferrante, A. J. (1986) – *Computational Methods for the Solution of Engineering Problems* – Pentech Press, London;

Borkowski, A. (1990) – *Analysis of Skeletal Structural System in the Elastic and Elastic-Plastic Range* – Elsevier, Amsterdam;

Brozzetti, J. (1977) – *Code Based Structural Plasticity in Engineering Plasticity by Mathematical Programming* – Proceedings of the NATO Advanced Study Institute – ed. M. Z. Cohn & G. Maier – Pergamon Press, New York;

Buzar, M. A. R. (1996) – *Análise de Placas com o Método dos Elementos Finitos e de Contorno na Modelagem de um Edifício* – Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília-DF;

Carmo, R. M. S. (1995) – *Efeitos de Segunda Ordem em Edifícios Usuais de Concreto Armado* – Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, São Paulo;

Carmo, R. M. S. (2001) – *Determinação de Rigidez de Estruturas de Pavimentos Através dos Métodos de Elementos de Contorno e Finitos* – Tese de Doutorado – Escola de Engenharia de São Carlos, São Paulo;

Chajes, A. (1974) – *Principles of Structural Stability Theory* - Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey;

Cicolin, L. A . B. (2007) – *Estabilidade em Edifícios de Concreto Armado de Pavimentos em Lajes Planas* - Tese de Mestrado apresentada à Universidade Federal de São Carlos – UFSCar – São Carlos;

Clough, R. W. & Penzien, J. (1975) – *Dynamics of Structures* – MacGraw Hill, New York;

Comité Euro-Internacional do Béton (1990) – *CEB – FIP Model Code 1990*, Bulletin D'information No. 203;

Comité Euro-Internacional do Béton (1978) – *Manual of Buckling and Instability* – Lancaster, England The Construction Press, Bulletin D'information No. 123;

Cook, R. D. (1981) – *Concepts and Applications of Finite Element Analysis* – Second Edition, John Wiley & Sons, New York;

Craig Jr., R. R. (1981) – *Structural Dynamics, An Introduction to Computer Methods* – John Wiley and Sons, New York;

Cunha, A. J. P.; Lima, N. A. ; Souza, V. C. N. de (1996) – *Acidentes Estruturais na Construção Civil* – Volume 1 – Editora Pini, São Paulo – SP;

Deutsche Industrie Normen (1978) – *Beton und stahlbeton, bemessung und ausführung*. Beuth Verlag GMBH. DIN 1045/78. Berlin;

Dym, C. L. ; Willians, H. E. (2007) – *Estimating Fundamental Frequencies of Tall Buildings* – Journal of Structural Engineering – ASCE, October;

Farias, J. L. Q. (1995) – *Modelo Elasto-Plástico para Avaliação da Capacidade Resistente de Pórticos de Concreto Armado* – Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília, Brasília-DF;

Fernandes, G. R. (2003) – *Análise Não Linear de Estruturas de Pavimentos de Edifícios Através do Método de Elementos de Contorno* - Tese de Doutorado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos – EESC – USP – São Carlos;

Fiorin, E. (1998) – *Arranjos de Armaduras em Estruturas de Concreto Armado* - Tese de Mestrado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos – EESC – USP – São Carlos;

França, R. L. S. (1985) – *Exemplo de Cálculo do Esforço de Segunda Ordem Global em um Edifício de Concreto Armado* – Colóquio Sobre Estabilidade Global de Estruturas de Concreto Armado – IBRACON, São Paulo;

Franco, M. (1985) – *Problemas de Estabilidade nos Edifícios de Concreto Armado* – Colóquio Sobre Estabilidade Global de Estruturas de Concreto Armado – IBRACON, São Paulo;

Franco, M. (1995) – *Instabilidade Local e Global dos Edifícios Altos de Concreto Armado* – International Symposium 1995 da International Association for Shell and Spatial Structures, Milão;

Franco, M. (1985) – *O Parâmetro de Instabilidade dos Edifícios Altos* – Colóquio Sobre Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado – São Paulo;

Franco, M. & Vasconcelos, A. C. (1991) – *Practical Assessment of Second Order Effects in Tall Buildings* – Colloquium on the CEB-FIP MC90, Rio de Janeiro;

Filho, A. C (1982) – *Análise de Pilares de Concreto Armado Submetidos à Flexo-Compressão Oblíqua* – Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre;

Fusco, P. B (1993) – *Estruturas de Concreto - Solicitações Normais*, Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro;

Fusco, P.B. (1995) – *Técnicas de Armar as Estruturas de Concreto* , Editora Pini, São Paulo;

Galambos, T. V. (1968) – *Structural Members and Frames* – Prentice Hall , Toronto;

Gere, J. M. & Weaver Jr., W. (1987) – *Análise de Estruturas Reticuladas* – Editora Guanabara, Rio de Janeiro;

Ghali, A. & Neville, A. M. (1993) – *Structural Analysis : A Unified Classical and Matrix Approach* – Chapman and Hall, London;

Guarda, M. C. C. da (2005) – *Cálculo dos Deslocamentos em Pavimentos de Edifícios de Concreto Armado* - Tese de Doutorado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos – EESC – USP – São Carlos;

Harrison, H. B. (1973) – *Computer Methods in Structural Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey;

Harrison, H. B. (1980) – *Structural Analysis and Design* – Pergamon Press, Oxford;

Horne, M. R. (1979) – *Plastic Theory of Structures* – Pergamon Press, Oxford;

Horne, M. R. & Merchant, W. (1965) – *The Stability of Frames* – Pergamon Press, Oxford;

Iyengar, N. G. R. (1986) – *Structural Stability of Columns and Plates*, affiliated East-West Press Private Limited, New Delhi;

Jeary, A. P. & Ellis, B. R. (1983) – *On Predicting the Response of Tall Building to Wind Excitation* – Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics ;

Kimura, A. (2007) – *Informática Aplicada em Estruturas de Concreto Armado*, Editora Pini, São Paulo – SP;

- Lagomarsino, S. (1993) – *Forecast Model for Damping and Vibration Periods of Buildings*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics;
- Livesley, R. K. (1969) – *Matrix Methods of Structural Analysis* – Pergamon Press, Oxford;
- Macgregor, J. G. & Hage, S. E. (1978) – *Stability Analysis and Design of Concrete Frames* – Journal of the Structural Division;
- Macgregor, J. G. (2005) – *Reinforced Concrete Mechanics and Design* – Prentice Hall, New Jersey;
- Majid, K. I. & Anderson, D. (1969) – *Elastic-Plastic Design of Sway Frames by Computer*, Proceedings Institute Civil Eng.;
- Majid, K. I. (1972) – *An Evaluation of the Elastic Critical Load and the Rankine Load of Frames* – Proceedings Institute Civil Eng.;
- Martins, C. H. (2001) – *Análise Não Linear de Estruturas Tridimensionais de Edifícios de Andares Múltiplos com Núcleos Resistentes Considerando a Rigidez Transversal à Flexão das Lajes* - Tese de Doutorado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos – EESC – USP – São Carlos;
- Matias Jr., I. G. (1997) - *Análise Não Linear de Estruturas Tridimensionais de Edifícios Altos com Núcleos Resistentes sobre Fundações Flexíveis* - Tese de Mestrado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos – EESC – USP – São Carlos;
- Mello, E. L. & Sahlit, C. L. (1983) – *Análise Elástica e Elasto-Plástica de Estruturas* – Apostilas do Curso em Extensão em Engenharia Civil, Universidade de Brasília, Brasília;
- Mello, E. L. (1993) – *Flexão Normal Composta em Concreto Armado* – Curvas Analíticas de Interação  $\mu - \nu$ , Revista IBRACON, ano II, São Paulo;
- Merchant, W. (1954) – *The Failure Load of Rigid Jointed Frameworks as Influenced by Stability* - The Structural Engineer, No. 32;
- Neal, B. G. (1977) – *The Plastic Methods of Structural Analysis* – Chapman and Hall, London;
- Oliveira, J. C. A. (1998) – *Estimativa do Índice Global de Esbeltez dos Edifícios de Concreto Armado*, Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília;
- Oñate, E. (1992) – *Cálculo de Estructuras por El Método de Elementos Finitos , Analisis Elástico Lineal* – CIMNE, Barcelona;
- Park, R. & Gamble, W. L. (1980) – *Reinforced Concrete Slabs* – John Wiley & Sons, New York;

- Paula, V. F. & Mello, E. L. (1995) - *Índice Global de Esbeltez de Estruturas Metálicas* – XXVII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Tucuman – Argentina;
- Paz, M. (1985) – *Structural Dynamics – Theory and Computation* – Second Edition, Van Nostrand Reinhold Company, New York;
- Penner, E. & Fusco, P. B. (1997) – *A Estabilidade de Edifícios Altos* – Revista Técnica, São Paulo;
- Pereira, G. S. (1997) – *Contribuições à Análise de Estruturas de Contraventamento de Edifícios em Concreto Armado* - Tese de Mestrado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos – EESC – USP – São Carlos;
- Pinto, R. S. (2002) – *Análise Não Linear das Estruturas de Contraventamento de Edifícios em Concreto Armado* – Tese de Doutorado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos – EESC – USP – São Carlos;
- Rachid, M. ; Mori, D. (1993) – *Instabilidade: Flambagem de Barras de Seção Delgada por Torção e Flexão* – Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, USP;
- Sanches Jr., F. (2003) – *Desenvolvimento de Modelos Numéricos para a Análise de Estruturas de Pavimentos de Edifícios* - Tese de Doutorado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos – EESC – USP – São Carlos;
- Santos da Silva, L. (1997) – *Análise Elástica e Elastoplástica de Placas de Reissner-Mindlin Submetidas a Excitações Estáticas e Dinâmicas* – Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília;
- Shames, I. H. (1965) – *Mechanics of Deformable Solids* – Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey;
- Silva, I. M. (1996) – *Análise de Edifícios de Alvenaria Estrutural Sujeitos à Ação de Vento* – Tese de Mestrado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos – EESC – USP – São Carlos;
- Smith, D. L. (1990) – *Statics and Kinematics, mathematical Programming Methods in Structural Plasticity* – Ed. D. Lloyd Smith, Springer-Verlag, Vienna;
- Sousa Jr. (2001) – *Análise da Interação Núcleo Estrutural e Lajes em Edifícios Altos* – Tese de Doutorado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos – EESC – USP – São Carlos;
- Szilard, R. (1974) – *Theory and Analysis of Plates – Classical and Numerical Methods*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey;
- Timoshenko, S. & Woinowsky-Krieger, S. (1959) – *Theory of Plates and Shells* – MacGraw-Hill, New York;

Vasconcelos, A. C. (1985) - *Crêterios para Dispensa de Considera o dos Efeitos de 2<sup>a</sup>. Ordem* – Colóquio sobre Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado, IBRACON, São Paulo;

Vasconcelos, A. C. (1998) – *Origem dos Parâmetros de Estabilidade  $\alpha$  e  $\gamma$*  – Revista Engenharia, Escola Politécnica, São Paulo;

Wang, C.K. (1963) – *General Computer Program for Limit Analysis* – Proc. Am. Soc. Civil Engrs., J. Structural, Div., 89;

Zalka, K. A. (2000) – *Global Structural Analysis of Buildings* – E & FN Spon – Taylor & Francis Group – London;

Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. (1995) – *El Metodo de Los Elementos Finitos* – MacGraw Hill, Madrid;