



**Aprendizagem de Frações Equivalentes: Efeito do Ensino de  
Discriminações Condicionais Minimizando o Erro e da Possibilidade de  
Consulta a Dicas**

Luciana Verneque

Orientador: Profa. Dra. Elenice S. Hanna

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências do Comportamento, do Departamento de Processos Psicológicos Básicos, Instituto de Psicologia, Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências do Comportamento, na área de Concentração: Análise do Comportamento.

Brasília

2011

## **Banca Examinadora**

A Banca Examinadora foi composta por:

Profa. Dra. Elenice S. Hanna, Universidade de Brasília, como Presidente

Profa. Dra. Nilza Micheletto, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como membro externo

Prof. Dr. João dos Santos Carmo, Universidade Federal de São Carlos, como membro externo

Prof. Dr. Márcio Borges Moreira, Instituto de Ensino Superior de Brasília, como membro externo

Prof. Dr. Marcelo Frota Benvenuti, Universidade de Brasília, como membro interno

Profa. Dra. Raquel Melo, Universidade de Brasília, como membro suplente

*Aos meus amores, Bruno e Márcio*

## Agradecimentos

*Sem dúvida alguma, quero iniciar meus agradecimentos com minha orientadora, Elenice. Primeiro por me ter apresentado o trabalho com matemática. E por ter estado comigo durante essa caminhada. Obrigada. Espero agora que eu possa continuar a contar com sua amizade e seu abraço carinhoso. Sinto que me conhece como poucos. Obrigada!*

*Ao meu marido e filho tenho que, antes de agradecer, me desculpar. Por todas as vezes que não estive com eles, seja pela coleta de dados, seja por uma presença apenas física. Mas o agradecimento é ainda maior, pela força que me davam. Meu marido, afirmando meu potencial. Ao meu filho, devo agradecer por suas gargalhadas, por seu olhar alegre e braços abertos quando chegava da escola. Obrigada minha família querida.*

*À minha mãe (in memoriam), que não pôde estar comigo até este momento da minha caminhada acadêmica. Agradeço à energia com que sempre me direcionou à vida escolar, apontando em mim a vocação para os estudos e dispondo das condições que podia para meu desenvolvimento máximo.*

*Ao meu pai, Ademar, e à querida Josefina, agradeço por sempre reafirmarem o quanto torciam por mim. Quando eu precisei de ajuda, estenderam a mão de maneira carinhosa e imediata. Tomaram conta do meu filho que tanto amo. Obrigada!*

*À minha querida terapeuta devo agradecer pelo companheirismo. Com ela, pude chorar nos momentos de desesperança e sorrir nas pequenas vitórias do longo caminho do doutorado. Obrigada por me compreender mais do que ninguém, fazendo-me, dialeticamente, aceitar-me como sou e me reconhecer como alguém em transformação.*

*Devo agradecer aos meus amigos pelo apoio e compreensão. Hellen, me dando força sempre, atenciosa, carinhosa, presente: uma amigona! Jussara, sempre se disponibilizando para me ajudar e me incentivando a terminar logo essa jornada! Sua ajuda com a estatística foi demais! Alê, obrigada pela força e dicas!*

*Aos alunos que participaram do estudo, eu devo agradecer pelo tempo que se dedicaram, pelas brincadeiras que compartilhávamos, e vivências que me proporcionaram. Perceber suas melhoras me impulsionava durante de uma coleta extensa e intensa.*

*À Secretaria de Educação do Distrito Federal, especialmente ao Sr. João Roberto Vieira, pela permissão para entrar nas escolas. E às escolas, por terem se desdobrado para acolher o trabalho, providenciando espaço e materiais, sempre me incentivando na execução das atividades. Especialmente, agradeço às professoras Jane, Sílvia, Fátima, Lúcia, Heloísa, e Alessandra, Selma, Àurea, Cristina, Luciana e Thaís. Á equipe de dire-*

*ção, de segurança, à cada professor de diferentes disciplinas, a cada funcionário, devo agradecer a receptividade em seu ambiente de trabalho. Cada sorriso, compreensão sobre minha presença, tornou meu trabalho mais fácil e produtivo. Muito devo a vocês.*

*Aos participantes da banca examinadora, por terem aceitado o convite de estarem comigo, me ajudando a rever o meu trabalho, com um olhar acadêmico maduro e crítico, contribuindo para meu crescimento profissional.*

*Aos estatísticos João Vicente e Wanderley Akira, pelas dicas nos momentos de maior desespero. Ao prof. Timothy, que se disponibilizou com tanta presteza a me encontrar e analisar dados, e que me ajudou com desenvoltura a compreender um pouco mais sobre essa arte de analisar dados. Obrigada.*

*Ao PPG-CdC, que me deu condições de chegar até o dia de minha defesa, com compreensão e competência. À Joyce, por me acalmar e ajudar, com sua meiguice natural, sempre disponível e afiada com os procedimentos do programa. Às representantes dos alunos na Pós, Raquel e Louise, que me acolheram e apoiaram. Obrigada!*

*Aos meus colegas Flávia Brasil e Tiago Porto, que finalizaram o trabalho de coleta, de maneira séria, comprometida, criativa, com iniciativa e competência. Obrigada de coração. À Kamilla, pela ajuda na extração dos escores; seu cuidado foi exemplar. Aos meus alunos da UNIP Brasília, Alessandra, Denise, Mardon, Priscila e Évelyn, que me acompanharam durante parte da coleta de dados. Obrigada!*

*Ao apoio financeiro realizado pela CAPES e CNPq, que além do apoio financeiro pessoal, me permitiu beneficiar a instituição com material permanente.*

## Resumo

Verneque, L. (2011). *Aprendizagem de Frações Equivalentes: Efeito do Ensino de Discriminações Condicionais Minimizando o Erro e da Possibilidade de Consulta a Dicas*. Tese de doutorado, Universidade de Brasília, Brasília.

O ensino tradicional do conceito de frações equivalentes nos anos iniciais de escolarização têm indicado que o desempenho não alcança níveis adequados, sugerindo a importância de desenvolvimento de metodologias alternativas. O objetivo deste estudo foi verificar o efeito de dicas de proporcionalidade e de multiplicação, acessíveis por meio de comportamento precorrente auxiliar (consulta) inserido em tarefa de escolha de acordo com o modelo, no desempenho nos treinos, testes de emergência de relações, com novas formas pictóricas, com novos elementos equivalentes matematicamente e com novas frações. Sessenta alunos do 7º ano do Ensino Fundamental participaram de sessões que ensinaram relações condicionais entre frações pictóricas e numéricas. Testes verificaram a formação de classes de frações equivalentes, a expansão das classes com novas formas pictóricas e novos elementos matematicamente equivalentes e novas classes de frações não utilizadas durante o treino. O Grupo Controle realizou apenas pré e pós-testes. Os grupos experimentais mostraram aumentos significativamente maiores nos pós-testes do que o grupo controle. Consultas às dicas ocorreram apenas no início do treino de cada relação. Não houve efeito diferencial da dica sobre o desempenho nos treinos e testes. Ocorreu a formação de classes equivalentes e generalização para novas formas pictóricas com as frações treinadas. A acurácia do desempenho nos testes de novos elementos das classes formadas foi baixa para a maioria dos estudantes. O desempenho no teste de novas classes indicou a aprendizagem de repertório generalizado. Os resultados replicam achados de estudos anteriores sobre a efetividade do paradigma de equivalência no ensino de relações condicionais entre estímulos fracionários matemáticos e apontam a importância de estratégias de ensino que favoreçam os diferentes tipos de comportamentos novos envolvidos no conceito de frações equivalentes.

Palavras-chave: aprendizagem de frações equivalentes, escolha de acordo com o modelo, comportamento precorrente auxiliar, dica, equivalência de estímulos, estudantes do ensino fundamental.

## Abstract

Verneque, L. (2011). Learning Fraction Equivalents: Effect of the Teaching of Conditional Discriminations Minimizing of error and Possibility of Consultation Tips.

The traditional teaching of the concept of equivalent fractions in the initial years of schooling has indicated that performance does not reach adequate levels, which suggests the importance of developing alternative methodologies. The aim of this study was to investigate the effect of proportionality and multiplication tips accessible to consultation with auxiliary precurrent behavior during a matching-to-sample task inserted into the task of matching with the model, performance in training, testing emerging relationships with new pictorial forms, with new elements and new mathematically equivalent fractions. Sixty students from the 7th year of elementary school participated in sessions that taught conditional relations between pictorial and numerical fractions. Tests verified the formation of classes of equivalent fractions, the expansion of classes to new pictorial forms, to new mathematically equivalent elements, and new fractions, not used in training. The control group underwent only pre- and post-tests. Performance in the post-test was higher for the experimental groups compared to the control group. The consultation of the tips occurred only early in the training of each relation. The tips produced no differential effect on performance during training and testing. There equivalence stimulus class and generalization for new pictorial forms with trained fractions. The accuracy of performance in tests of new elements of formed classes was low for most students. The performance in the test of new classes indicated the formation of a generalized repertoire. The results replicate findings from previous studies on the effectiveness of equivalence paradigm in the teaching of conditional relations between fractional math stimuli and demonstrate the importance of teaching strategies that encourage the importance of teaching strategies that encourage different types of new behavior involved in the concept of equivalent fractions.

Key-words: learning equivalent fractions, matching-to-sample, auxiliary precurrent behavior, tip, stimulus equivalence, elementary school students.

## Índice

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>MÉTODO .....</b>	<b>22</b>
<i>Participantes.....</i>	<i>22</i>
<i>Local, material e Equipamento .....</i>	<i>24</i>
<i>Estímulos .....</i>	<i>24</i>
<i>Procedimento.....</i>	<i>25</i>
Pré-testes .....	26
Pré Treino e Treino de Relações Absolutas.....	28
Treino AC e BC e Treino Misto AC/BC.....	30
Teste das Relações CA e CB e AB e BA.....	33
Teste de relações com Novas Formas.....	34
Teste de relações com Novo Elemento .....	34
Teste de Novas Frações .....	34
<b>RESULTADOS.....</b>	<b>35</b>
<i>Pré e Pós Testes: com Lápis e Papel e no Computador.....</i>	<i>35</i>
<i>Relações de Treino.....</i>	<i>44</i>
<i>Relações emergentes.....</i>	<i>45</i>
<i>Teste com Novas Formas .....</i>	<i>47</i>
<i>Teste com Novo Elemento de Classe Treinada .....</i>	<i>49</i>
<i>Teste Novas Frações .....</i>	<i>50</i>
<b>DISCUSSÃO.....</b>	<b>55</b>
<i>Eficácia dos Treinos .....</i>	<i>55</i>
<i>Formação de Classes de Frações Equivalentes.....</i>	<i>57</i>
<i>Generalização para Novas Formas de Frações Pictóricas .....</i>	<i>59</i>
<i>Teste com Novo Elemento .....</i>	<i>60</i>
<i>Responder Generalizado.....</i>	<i>62</i>
<i>Pré e Pós-testes .....</i>	<i>64</i>
<i>Dicas .....</i>	<i>66</i>
<i>Comportamento Precorrente.....</i>	<i>68</i>
<i>Considerações finais.....</i>	<i>70</i>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>72</b>
<b>ANEXOS.....</b>	<b>78</b>

Anexo 1. Teste com Lápis e papel, contendo questões de multiplicação, divisão, relação absoluta e relativa entre frações. O Teste foi dividido em duas partes, realizadas em dois momentos diferentes. 78

- Anexo 2. Estrutura do Pré-teste no computador, parte 1, com Blocos, Tentativas, Modelos (M) e Comparações em cada Tentativa (T). A comparação em negrito indica a comparação S+. 90
- Anexo 3. Estrutura do Pré-teste no computador, parte 2, com Blocos, Tentativas, Modelos (M) e Comparações em cada Tentativa (T). A comparação em negrito indica a comparação S+. 91
- Anexo 4. Estrutura do Treino AC, com Blocos (B), Tentativas (T), Modelos (M) e Comparações em cada tentativa. A comparação em negrito indica a comparação S+. 92
- Anexo 5. Estrutura do Treino AC: tipo de tentativa, número de tentativa com mesma comparação, comparações S+, número de comparações S-, critério de aprendizagem para próximo bloco e número blocos 93
- Anexo 6. Estrutura do Treino BC, com Blocos, Tentativas, Modelos e Comparações em cada Tentativa. A comparação em negrito indica a comparação S+. 94
- Anexo 7. Estrutura do Treino BC: tipo de tentativa, número de tentativa com mesma comparação, comparações S+, número de comparações S-, critério de aprendizagem para próximo bloco e número blocos 95
- Anexo 8. Estrutura do Treino Misto AC/BC, com Blocos (B), Tentativas (T), Modelos (M) e Comparações em cada Tentativa. A comparação em negrito indica a comparação S+. 96
- Anexo 9. Composição das tentativas de cada relação treinada ou testada, com cada classe de estímulos matematicamente equivalentes, com S+ e S-'s utilizados. 97
- Anexo 10. Estrutura do teste das relações CA CB (Simetria), com Blocos (B), Tentativas (T), Modelos (M) e Comparações em cada Tentativa. A comparação em negrito indica a comparação S+. 98
- Anexo 11. Estrutura do teste das relações AB BA (Transitividade), com Blocos (B), Tentativas (T), Modelos (M) e Comparações em cada Tentativa. A comparação em negrito indica a comparação S+. 98
- Anexo 12. Estrutura de teste das relações AC, CA, AB e BA, utilizando nova forma pictórica, com Blocos (B), Tentativas (T), Modelos (M) e Comparações em cada Tentativa. A comparação em negrito indica a comparação S+. 99
- Anexo 13. Estrutura do teste das relações D-(ABC), com novo elemento matematicamente equivalente às frações, com Blocos (B), Tentativas (T), Modelos (M) e Comparações em cada Tentativa. A comparação em negrito indica a comparação S+. 100
- Anexo 14. Estrutura do teste das relações com novas frações EF, FE, EG, GE, FG e GF, com Blocos (B), Tentativas (T), Modelos (M) e Comparações em cada Tentativa. A comparação em negrito indica a comparação S+. 101
- Anexo 15. Porcentagem de acertos média ( $\bar{x}$ ) e desvio padrão (DP) nas relações fracionárias absolutas e relativas, nos Pré e Pós-testes, com lápis e papel e no computador, para os grupos experimentais (M, P, MP e SD) e Controle (CON), e com Dica (M, P e MP), Sem dica (SD) e Controle (CON). 102

Anexo 16. Porcentagem de acertos média ( $\bar{X}$ ) e desvio padrão ( $DP$ ) nas relações fracionárias absolutas e relativas, nos Pré e Pós-teste, com lápis e papel e no computador, dos grupos experimentais MP, M, P, SD e Controle (CON). 103

### Lista de figuras

- Figura 1. Médias de Proficiência em Matemática dos anos de 1995 a 2005 da 4ª e 8ª série do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio, escolas urbanas (exceto federais). No eixo x estão os anos de aplicação da ferramenta e no eixo y, que pode assumir valores de 0 a 500, as médias de proficiência em matemática. Cada curva apresenta as médias de cada série, 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental (E.F) e 3º ano do Ensino Médio. Figura reproduzida do relatório do SAEB (2005), disponível em [http://www.inep.gov.br/download/saeb/2005/SAEB1995\\_2005.pdf](http://www.inep.gov.br/download/saeb/2005/SAEB1995_2005.pdf) >..... 2
- Figura 2. Exemplo de diagrama esquemático da rede das principais relações condicionais envolvidas no *conceito de frações equivalentes*, incluindo relações arbitrárias e não arbitrárias. As setas contínuas indicam relações diretamente treinadas e as setas tracejadas indicam relações emergentes. Com asterisco indicam relações testadas com novas formas. As setas pontilhadas indicam relações novas não previstas diretamente pelas propriedades da Equivalência de Estímulos e nem por Generalização de Estímulos (ver no texto), tendo em vista que o conjunto D não foi treinado com nenhum dos conjuntos. As letras maiúsculas (i.e., A, B e C) indicam conjuntos de estímulos que podem possuir infinitos elementos. .... 10
- Figura 3. Exemplo de diagrama esquemático da rede de relações envolvidas no *conceito de frações equivalentes*. As setas pontilhadas indicam relações novas a partir de treino com outros exemplares de frações..... 11
- Figura 4. Molde disponível em livro didático para produção de material concreto sobre a proporção de frações equivalentes. Na figura, a área de  $\frac{1}{2}$ , corresponde à área de  $\frac{2}{4}$ .  
Figura reproduzida de GESTAR I (2007). .... 17
- Figura 5. Exemplos de estímulos fracionários pictóricos, numéricos, dicas de multiplicação e proporcionalidade, botão de ajuda e consequências para acerto e erro, utilizados nas condições experimentais. .... 25
- Figura 6. Conjuntos de Frações Numéricas e Pictóricas utilizados nas condições experimentais: Treinos (AC e BC), Testes de Emergência (CA, CB, AB e BA), Teste com Novas Formas (AC, CA, AB, BA), Teste de novo elemento da classe D-(ABC), Dicas Proporcionalidade (P) e Dicas Multiplicação (M). Houve três duplas de estímulos. .... 31
- Figura 7. Exemplos de telas do procedimento: instrução (painel a), apresentação do modelo (painel b), procedimento de minimização do erro, em que na primeira tentativa de treino com um modelo, aparecia apenas a comparação correta (painel c), com o aumento gradual do número de comparações S- (painéis d e e), botão de ajuda (painel f),

consequência para acertos e erros nos treinos (painéis <i>g</i> e <i>h</i> ), dica da proporcionalidade (painel <i>i</i> ) e dica da multiplicação (painel <i>j</i> ).....	31
Figura 8. Frações Pictóricas e Numéricas de cada classe utilizadas nos testes com novas frações. ....	35
Figura 9. Porcentagem média de acertos e desvio padrão nas relações fracionárias relativas (painel superior) e absolutas (painel inferior), nos Pré e Pós-testes, com lápis e papel e no computador, dos participantes MP, M, P, SD e Controle (C). Um asterisco indica diferença estatisticamente significativa entre a medida antes e depois do Grupo (Intra grupo). Dois asteriscos indicam diferença estatisticamente significativa entre a medida e a mesma medida dos outros Grupos. ....	38
Figura 10. Porcentagem de acertos nas relações fracionárias relativas, nos Pré e Pós-testes com lápis e papel (painel à esquerda) e no computador (painel à direita), dos participantes MP, M, P, SD e Controle (C).....	39
Figura 11. Frequência de Participantes em cada Intervalo de porcentagem de acertos nas relações fracionárias relativas, nos Pré e Pós-testes com lápis e papel e no Computador, dos Grupos MP, M, P, SD e C.....	41
Figura 12. Porcentagem de acertos nas relações fracionárias absolutas, nos Pré e Pós-testes, com lápis e papel (painel à esquerda) e no computador (painel à direita), dos participantes MP, M, P, SD e Controle (C).....	42
Figura 13. Frequência de Participantes em cada Intervalo de porcentagem de acertos nas relações fracionárias absolutas, nos Pré e Pós-testes, com lápis e papel e no Computador, dos Grupos MP, M, P, SD e C.....	43
Figura 14. Porcentagem de acertos nas relações fracionárias relativas AC e BC, no Pré-teste (P) e nos três ciclos de treinos (1, 2 e 3), para cada participante e a média de cada grupo MP, M, P e SD.....	45
Figura 15. Porcentagem de acertos nas relações fracionárias relativas CA e CB e nas relações fracionárias absolutas AB/BA, no Pré-teste (P) e nos três ciclos de testes (1, 2 e 3), para cada participante e a média de cada grupos MP, M, P e SD.....	47
Figura 16. Porcentagem de acertos nas relações fracionárias relativas CA e CB e nas relações fracionárias absolutas AB/BA, nos três ciclos de testes (1, 2 e 3), para cada participante e a média de cada grupo MP, M, P e SD, utilizando novas formas pictóricas. ....	48
Figura 17. Porcentagem de acertos nas relações fracionárias relativas D-(ABC), no Pré-teste (P) e nos três ciclos de testes (1, 2 e 3), para cada participante e a média de cada grupo MP, M, P e SD.....	49
Figura 18. Porcentagem de acertos nas relações fracionárias absolutas EF e FE e relativas EG, GE, FG e GF, no Pré-teste (P) e nos três ciclos de testes (1, 2 e 3), para cada participante e a média de cada grupo MP, M, P e SD, utilizando novas frações. ....	51
Figura 19. Número acumulado de acessos ao botão de ajuda, ao longo dos Treinos AC e Treinos Mistos (M), para cada participante do Grupo Dica da Proporcionalidade, ordenados pelo número de acessos. ....	52

- Figura 20. Número acumulado de acessos ao botão de ajuda, ao longo dos Treinos BC e Treinos Mistos (M), para cada participante do Grupo Dica da Multiplicação, ordenados pelo número de acessos. .... 53
- Figura 21. Número acumulado de acessos ao botão de ajuda, ao longo dos Treinos AC e Treinos Mistos (M), para cada participante do Grupo Dica da Proporcionalidade, ordenados pelo número de acessos. .... 54

### Lista de tabelas

- Tabela 1. Participantes (Par) divididos por Grupos Grupos Proporcionalidade e Multiplicação (MP), Multiplicação (M), Proporcionalidade (P), Sem Dica (D) e Controle (C), ordem de exposição às duplas de Classes de estímulos (O), escola de origem (E), sexo (S) e idade (I). Os Participantes Controle não possuem a informação *Ordem* por não terem passado pelas condições experimentais. Os participantes marcados por asterisco (\*) realizaram parte ou todo procedimento simultaneamente na sala com outro participante. .... 23
- Tabela 2. Sequência de condições de treinos e testes, descrição das tarefas\procedimentos, tipos de problemas e exemplos de operações e frações numéricas e pictóricas. .... 27
- Tabela 3. Estrutura do Treino de Linha de Base, com Blocos, Tentativas, Modelos e Comparações em cada tentativa. A comparação em negrito indica a comparação correta da tentativa, isto é, a comparação S+. A letra p ao lado da fração indica que trata-se de uma fração pictórica. .... 29
- Tabela 4. Estrutura do Treino de Relações Absolutas, com Blocos, Tentativas, Modelos e Comparações em cada Tentativa. A comparação em negrito indica a comparação S+. A letra p ao lado da fração indica que trata-se de uma Fração Pictórica. .... 30
- Tabela 5. Porcentagem de acertos média ( $\bar{X}$ ) nas questões de multiplicação (Mult) e divisão (Div), no Pré-teste com lápis e papel para cada grupo experimental. .... 36
- Tabela 6. Porcentagem de acertos média ( $\bar{X}$ ) e desvio padrão (dp) das relações absolutas e relativas, no Pré e Pós-testes com lápis e papel e no computador, considerando o sexo dos participantes, a escola de origem e a ordem de exposição aos conjuntos de frações. .... 37

A formação de conceitos matemáticos é um dos objetivos dos educadores infantis durante o ensino nos anos de escolarização. O Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), coordenado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP-MEC), avalia o desenvolvimento dos conceitos de Língua Portuguesa e Matemática dos alunos das 4ª e 8ª séries<sup>1</sup> do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio. Médias de Proficiência em Matemática produzidas pelo SAEB (2005) indicam valores abaixo do esperado para cada série avaliada (Prova Brasil, 2005).

Os baixos índices de aprendizagem indicam a necessidade de pesquisas sobre a formação de conceitos matemáticos. O número de estudos sobre ensino de conteúdos da matemática vem crescendo nos últimos anos na Análise do Comportamento (Del Rey, 2009). Uma parte significativa dos estudos no Brasil focalizou o conceito de número e o repertório de contagem (Carmo, 1997; Drachenberg, 1973; Kahhale, 1993; Leon, 1998; Monteiro e Medeiros, 2002; Prado, 1995). Há também estudos sobre soma e subtração (Donini, 2005) e sobre frações (dos Santos, Cameschi & Hanna, no prelo; Tulon, 2008).

Dentre os conceitos matemáticos em que as crianças apresentam maior dificuldade de aprendizagem, estão os conceitos de fração e de fração equivalente (Bezuk, 1988; Carraher e Schliemann, 1992; Merlini, 2005; Quintero, 1987). De acordo com dados do SAEB (2005), a média da amostra da população de alunos da 8ª série entre 1995 e 2005 não alcançou o nível de proficiência em matemática que inclui o conceito de frações equivalentes, embora esse conceito pertença à 5ª série (ou 6º ano). As médias do SAEB são apresentadas em escala de proficiência que varia de 0 a 500 e indicam graus de desenvolvimento de habilidades, competências e aquisição de conhecimentos pelos estudantes. Cada escore indica repertórios matemáticos que os alunos já dominam. Em geral, os alunos que alcançam o escore 300 possuem

---

<sup>1</sup> Correspondentes ao 5º e 9º ano da nova classificação (Lei nº 11.274/2006, de 06 de fevereiro de 2006, que determina a duração de 9 (nove) anos para o Ensino Fundamental.

a habilidade acadêmica matemática de “identificar mais de uma forma de representar numericamente uma mesma fração e reconhecer frações equivalentes” e como é um escore cumulativo, inclui as habilidades relacionadas aos escores menores. As médias de 1995 a 2005 indicam que, na média, os alunos da 8ª série não alcançavam o nível 300, indicando que não “sabiam” frações equivalentes (Figura 1). O desempenho deficiente indica que o desenvolvimento de metodologias de ensino da matemática e, mais especificamente, de ensino de frações é importante para reverter o quadro.

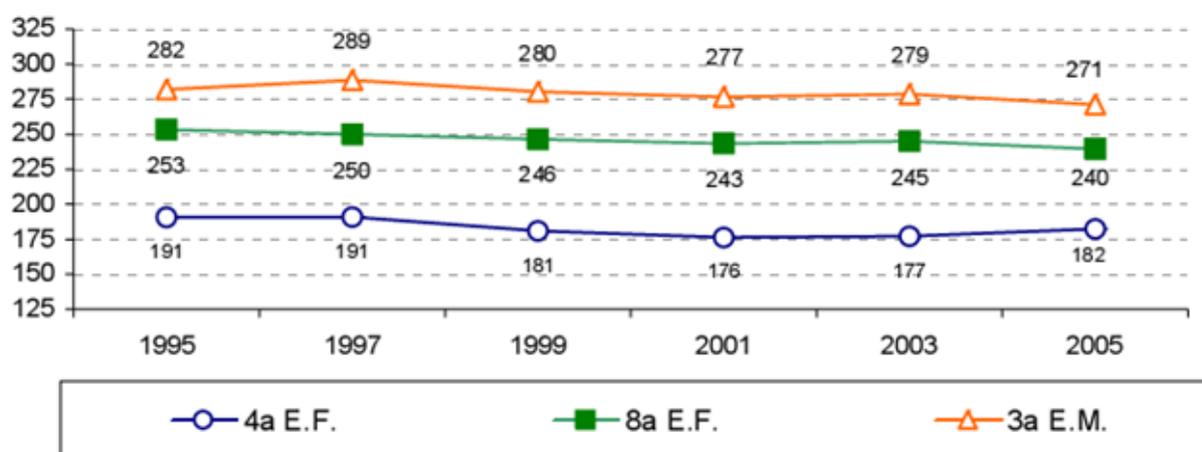


Figura 1. Médias de Proficiência em Matemática dos anos de 1995 a 2005 da 4ª e 8ª série do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio, escolas urbanas (exceto federais). No eixo x estão os anos de aplicação da ferramenta e no eixo y, que pode assumir valores de 0 a 500, as médias de proficiência em matemática. Cada curva apresenta as médias de cada série, 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental (E.F) e 3º ano do Ensino Médio. Figura reproduzida do relatório do SAEB (2005), disponível em <[http://www.inep.gov.br/download/saeb/2005/SAEB1995\\_2005.pdf](http://www.inep.gov.br/download/saeb/2005/SAEB1995_2005.pdf)>

Define-se matematicamente fração como a relação entre partes selecionadas e o total de partes em que um inteiro (a unidade) foi dividido (Quintero, 1987; Santos, 1996; Skypok, 1984). Um número fracionário consiste no quociente de dois números naturais onde o divisor é diferente de zero, sendo representado por  $\frac{a}{b}$ ,  $b \neq 0$ . O número acima do traço é chamado de numerador e o abaixo de denominador. Frações equivalentes são frações com apresenta-

ções diferentes e que indicam quantidades ou proporções idênticas (e.g.,  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{6}$ ). Quando o numerador e o denominador são primos entre si, isto é, números que possuem como único divisor comum o número 1, chamamos a fração de irredutível (e.g.,  $\frac{1}{3}$ ), não simplificável.

A relação entre duas frações pode ser caracterizada como absoluta ou relativa. Uma relação absoluta indica que há uma correspondência direta e absoluta entre o número de partes tomadas e o número do denominador e uma correspondência direta e absoluta entre o número de partes que o todo foi dividido com o numerador. Podemos afirmar assim que há uma relação absoluta entre a fração pictórica  e a fração numérica  $\frac{1}{3}$ . Por outro lado, uma relação relativa entre duas frações indica que as frações são equivalentes, isto é, duas frações se referem à mesma proporção. Nesse caso, a fração pictórica  ou numérica  $\frac{1}{3}$  possuem a mesma proporção que a fração numérica  $\frac{2}{6}$ , sendo possível estabelecer uma relação relativa entre elas.

Nunes e colaboradores<sup>2</sup>, citados por Moutinho (2005), identificaram cinco significados possíveis para o conceito de frações: número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo. Quando se refere à fração como número, identifica-se a possibilidade de localizar a fração em uma reta numérica, como quando utilizamos apresentações decimais para as frações (e.g.,  $\frac{1}{2}$  e 0,5). Quando se fala em parte-todo, descreve-se a propriedade que um todo é dividido em  $n$  partes iguais e qualquer parte pode ser representada como  $\frac{1}{n}$ . Nesse caso, uma dupla contagem é suficiente para se chegar a uma apresentação numérica da fração pic-

---

<sup>2</sup> Nunes, T.; Bryant, P.; Pretzlik, U. e Hurry, J. (2003). The effect of situations on children's understanding of fractions. Trabalho apresentado à British Society for Research on the Learning of mathematics, Oxford.

tórica. O uso de frações como medida, se refere ao número de determinados casos dentro de um universo de possibilidades (e.g., probabilidade de tirar cara em uma jogada de moeda). Nesse caso, a probabilidade pode ser apresentada por um número fracionário (i.e.,  $\frac{1}{2}$ ). Quando é necessária a divisão para solução de um problema (exemplo, dividir 30 bolinhas de gude igualmente para cinco crianças), fala-se da fração enquanto quociente. E finalmente, a fração como operador multiplicativo, trata-se de reconhecer o caráter transformativo da representação fracionária em quantidades (Moutinho, 2005, Silva e Lins, 2007).

A partir desses diferentes usos do conceito de fração e da verificação de livros didáticos, é possível identificar que o ensino do *conceito de fração* sugere o estabelecimento de uma série de comportamentos diferentes sob controle de diferentes propriedades físicas e relacionais dos estímulos.

Durante a aprendizagem de conceitos matemáticos, busca-se o desenvolvimento de Discriminação Simples, isto é, responder diferencial a condições de estímulos diferentes, a partir de disposição de diferentes conseqüências diante desses estímulos (Keller e Schoenfeld, 1950/1971; Matos, 1981; Terrace, 1966; Sério, Andery, Gioia e Micheletto, 2002). Dizemos que um aprendiz discrimina minimamente entre os números naturais 1 (um) e 3 (três) se diante do numeral 1 ele responde “*um*” e diante do numeral 3 ele responde “*três*”, a partir de um histórico de reforçamento diferencial.

Esse responder diferenciado diante dos números é resultado das diferentes reações dos educadores, considerando os procedimentos escolares genericamente. Quando a criança responde “*três*” diante de 1, a professora pode reagir como conseqüência, dizendo algo como “*não é assim, vamos ver como é?!*” e se responde “*três*” diante de 3, a professora pode dizer como conseqüência algo do tipo “*é isso aí, muito bom*”. As diferentes conseqüências disponibilizadas pelos educadores às respostas das crianças diante de diferentes condições de estímulos podem caracterizar um treino discriminativo (Keller e Schoenfeld, 1950/1971; Terra-

ce, 1966; Sério, Andery, Gioia e Micheletto, 2002). Dizer "três" na presença do número 1 não produz consequência reforçadora positiva (e.g., não produz reconhecimento do acerto e, até mesmo, pode produzir críticas sutis), caracterizando o número 1, nesse caso, de Estímulo Delta ( $S^{\Delta}$  ou  $S^{-}$ ). Dizer "três" na presença do número 3 produz consequências reforçadoras positivas (e.g., reconhecimento do acerto), caracterizando o número 3, nesse caso, de Estímulo Discriminativo ( $S^d$  ou  $S^{+}$ ).

No início da aprendizagem das frações, é importante que as respostas não fiquem sob controle apenas do um ou do três diante da apresentação " $\frac{1}{3}$ ". O aprendiz não deve dizer algo como "um e três" ou "treze". Há novas discriminações simples a serem estabelecidas, no caso, responder "um terço" ou "um sobre três". O domínio do conceito de frações inclui discriminar entre números racionais (números representados por uma razão entre dois números inteiros), como frações numéricas com apresentação " $\frac{1}{3}$ " (um terço), e números naturais como o número "13" (treze). Essas duas apresentações dos algarismos impressos 1 (um) e 3 (três) possuem diferenças na leitura e no tipo de relação numérica demonstrada. No caso do  $\frac{1}{3}$ , indica que uma das três partes de um todo foi tomada, e o "13" indica uma quantidade (e.g., 13 bananas). Esta talvez seja a primeira dificuldade que as crianças podem encontrar no ensino do conceito: responder de maneira diferente aos mesmos símbolos dispostos de maneira diferente.

Além do ensino de discriminações simples diante de diferentes apresentações numéricas, grande parte da matemática envolve relações entre símbolos, entre eventos e entre símbolos e eventos, sendo necessárias aprendizagens de discriminações condicionais. As discriminações condicionais consistem em responder a determinados estímulos condicionalmente à presença do estímulo chamado modelo ou Condicional ( $S^c$ ). Assim, responder ao estímulo 3 (três) e ter consequência reforçadora positiva pode depender se o estímulo condicional for

um ou três objetos. Nos procedimentos escolares, quando a criança seleciona “*um*” diante de 3 pássaros (três), a professora poderia dizer como conseqüência algo como “*não é assim, vamos ver como é?!*” e se seleciona “*um*” diante de 1 (um) pássaro, a professora poderia dizer como conseqüência “*é isso aí, muito bom*”. Na Discriminação Condicional, um determinado estímulo é  $S^d$  ou  $S^\Delta$ , dependendo do  $S^c$  presente, isto é, responder a um estímulo é correto ou incorreto dependendo de uma outra condição de estímulo, o estímulo condicional (Sidman, 1994; Sérgio e cols, 2002).

A aprendizagem do conceito de frações também envolve discriminações condicionais, utilizando-se o procedimento comumente chamado de Pareamento de Acordo com o Modelo. Selecionar  $\frac{1}{3}$ , por exemplo, possuirá conseqüências diferentes dependendo do tipo de fração pictórica apresentada, isto é, dependendo do Estímulo Condicional ou Modelo. Selecionar  $\frac{1}{3}$  será correto ( $S^d$ ) se o modelo for uma figura geométrica com uma parte tomada de três e será incorreto ( $S^\Delta$ ) caso o estímulo condicional seja uma figura geométrica com uma parte tomada de quatro<sup>3</sup>.

Durante o ensino, o professor espera que a posição que cada algarismo ocupa em relação ao traço (i.e., numerador e denominador) indique que os numerais são relacionados com características específicas da fração pictórica apresentada. Espera-se assim que o numerador se relacione com o número de partes selecionadas ou tomadas de um todo e que o denominador relacione-se com o número de partes em que o todo foi dividido. O estímulo fracionário pictórico não é o pedaço ou a fração, mas uma forma de representá-lo no plano bidimensional ao qual a criança deve aprender a responder “como se fosse” o pedaço. O “re-

---

<sup>3</sup> Responder ‘um terço diante de  $\frac{1}{3}$ ’, pode-se verificar um controle condicional. Se responder “um terço” diante dos numerais 1 e 3 é condicional à linha horizontal, pode-se verificar que a função da linha horizontal é de estímulo condicional ou modelo.

presentá-lo” aqui indica apenas que o aprendiz identifica a fração pictórica como *equivalente* à fração numérica. Frente a este estímulo, que pode ser a figura de um círculo ou retângulo dividido em partes iguais com algumas delas destacadas, o aluno deve tanto identificar as partes destacadas como partes tomadas, quanto que essas partes se somam às outras não destacadas para formar o todo. Grande parte das avaliações realizadas no ensino formal requer que o aluno demonstre que consegue relacionar partes de objetos com as representações pictóricas e numéricas, ou seja, que tais estímulos diferentes se tornaram equivalentes, formando conjuntos de estímulos que controlam respostas semelhantes. Estímulos como  $\frac{1}{3}$  ou  são considerados equivalentes e formam uma classe de estímulos se controlarem respostas semelhantes, como por exemplo, dizer “um terço” ou “um sobre três”.

“Controle de Estímulos refere-se à medida em que o valor de um estímulo antecedente determina a probabilidade de ocorrência de uma resposta condicionada”, de acordo com Terrace (1966). Após o estabelecimento das Discriminações Simples e\ou Condicionais das frações, testes podem determinar a força de controle de determinadas propriedades físicas (e.g., rotação de figuras) na ocorrência de respostas.

Características físicas específicas, tais como formas geométricas escolhidas, tamanho, cor e rotação das frações pictóricas, não devem ser relevantes no controle do comportamento pelo estímulo fracionário pictórico. Da mesma forma, características físicas, como o tipo e tamanho da fonte, o traço horizontal ou inclinado do estímulo fracionário numérico, são irrelevantes para o controle comportamental que deve ser estabelecido. Após o estabelecimento da relação de controle de estímulos entre o número de partes selecionadas de um todo e o número de partes total, é desejável que ocorra controle de estímulos pela propriedade relevante dos estímulos (i.e., número de partes do todo e número de partes tomadas), e não por características não desejadas, como a cor ou tamanho dos estímulos. A Generalização de Estímulos, não como processo, e sim como função empírica (Matos, 1981; Terrace, 1966), deve

ser favorecida por características do Treino Discriminativo. Medidas do responder diante de alterações nas propriedades físicas irrelevantes podem subsidiar afirmações sobre qual controle de estímulo foi estabelecido durante os treinos.

Para um ensino efetivo do *conceito de frações*, deve-se programar a ocorrência do controle de estímulos às características definidoras das frações, favorecendo a Generalização a propriedades físicas relevantes e não apenas esperar que aconteça, como se observa em alguns estudos (Stokes e Baer, 1977). Após o ensino de responder a  $\frac{1}{3}$  e , é desejável

que o responder ocorra também a  ou .

Além das relações baseadas em atributos físicos relevantes entre as apresentações gráficas para o estabelecimento do *conceito de fração*, é necessário o estabelecimento de relações arbitrárias entre estímulos, isto é, responder diante de diferentes estímulos que não possuem atributos físicos comuns. O procedimento de *Matching to Sample* ou Pareamento ao Modelo (MTS) é um método amplamente utilizado para o estabelecimento de relações não-arbitrárias entre estímulos (Sidman & Tailby, 1982).

Um conjunto A de estímulos fracionários pictóricos (e.g.,  e ) , um conjunto B de estímulos, formado por diferentes frações numéricas irredutíveis (e.g.,  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{4}$ ), e um conjunto C de estímulos fracionários numéricos redutíveis (e.g.,  $\frac{2}{6}$  e  $\frac{2}{8}$ ), podem ser relacionados a partir do procedimento de pareamento ao modelo. Dentre as comparações C1 (i.e.,  $\frac{2}{6}$ ) e C2 (i.e.,  $\frac{2}{8}$ ), por exemplo, a seleção de C1 na presença do modelo A1 (i.e., ) é reforçada e a seleção de C2 diante de A2 (e.g., ) é reforçada, caracterizando-se um Treino AC. Dentre as comparações C1 e C2, a seleção de C1 na presença do modelo B1 (e.g.,  $\frac{1}{3}$ )

é reforçada e a seleção de C2 diante de B2 (e.g.,  $\frac{1}{4}$ ) é reforçada, caracterizando-se um treino de relação BC.

A partir da definição de Equivalência de Estímulos proposta por Sidman & Tailby (1982), treinos condicionais entre estímulos podem gerar classes de estímulos, isto é, diferentes estímulos que controlam respostas semelhantes. Para verificar a formação das classes de estímulos, após o procedimento de pareamento ao modelo, testes de relações não treinadas são realizados. A partir do treino AC e BC descrito anteriormente, Simetria consiste na emergência das relações CA e CB, Transitividade consiste na emergência das relações AB e BA e Reflexividade, na emergência das relações AA, BB e CC.

A Figura 2 apresenta um diagrama de uma parte da rede de relações condicionais arbitrarias e não arbitrarias envolvidas no *conceito* de frações equivalentes. Considerando o ensino das relações AC e BC, apresentadas pelas setas contínuas, novas relações podem emergir. As relações com setas tracejadas são relações emergentes previstas pelo modelo de Equivalência de Estímulos (CA, CB, AB e BA) e as setas tracejadas com asterisco são relações (A'B, BA', A'C e CA') que podem surgir e estar sob controle das características físicas semelhantes dos estímulos A e A'. As setas pontilhadas indicam relações entre os estímulos utilizados no treino e a nova fração equivalente não utilizada no treino (AD, DA, BD, DB, CD, DC). Frisando que D não foi diretamente treinado com nenhum conjunto de estímulos.

As relações entre AC, BC, CA, CB, D-(ABC), incluindo as relações com as novas formas A, são relações relativas entre as frações, que apresentam proporções similares. As relações AB e BA, incluindo as relações com as novas formas, são relações absolutas entre as frações, que possuem correspondência direta entre o número de partes tomadas e o numerador, e entre o número que o todo foi dividido e o denominador.

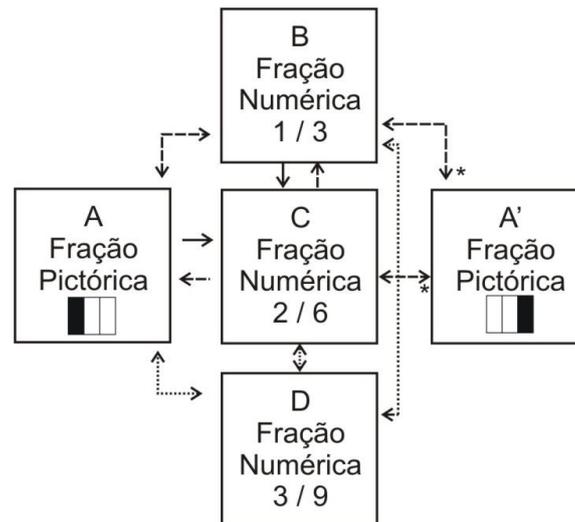


Figura 2. Exemplo de diagrama esquemático da rede das principais relações condicionais envolvidas no *conceito de frações equivalentes*, incluindo relações arbitrárias e não arbitrárias. As setas contínuas indicam relações diretamente treinadas e as setas tracejadas indicam relações emergentes. Com asterisco indicam relações testadas com novas formas. As setas pontilhadas indicam relações novas não previstas diretamente pelas propriedades da Equivalência de Estímulos e nem por Generalização de Estímulos (ver no texto), tendo em vista que o conjunto D não foi treinado com nenhum dos conjuntos. As letras maiúsculas (i.e., A, B e C) indicam conjuntos de estímulos que podem possuir infinitos elementos.

A *Formação do Conceito* de frações equivalentes, além dos repertórios discutidos, envolve identificar novas frações equivalentes, não equivalentes às utilizadas no treino. Assim, após o ensino da equivalência entre as frações  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{6}$ , e  $n$  outras frações, é desejável que diante de frações pictóricas e numéricas, não anteriormente utilizadas em treinos, um comportamento novo ocorra, como relacionar as frações  $\frac{1}{7}$  e  $\frac{2}{14}$  e outras, matematicamente equivalentes (ver Figura 3).

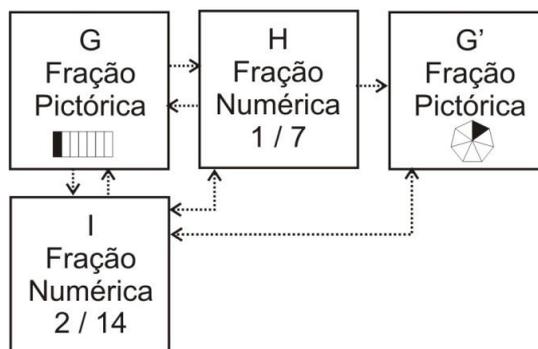


Figura 3. Exemplo de diagrama esquemático da rede de relações envolvidas no *conceito de frações equivalentes*. As setas pontilhadas indicam relações novas a partir de treino com outros exemplares de frações.

Abaixo, Skinner (2000/1974) dá pistas sobre experiências que devem ser investigadas para entender o surgimento de um tipo de comportamento novo:

As crianças que foram ensinadas a completar a expressão ‘3+6’ dizendo 9, apresenta-se a expressão ‘6+3’. ‘Uma criança se mostra desesperadamente confusa, a outra responde prontamente 9. Claro que os dois alunos aprenderam coisas diferentes: a primeira criança aprendeu uma resposta específica a uma pergunta específica; a segunda aprendeu um conceito aritmético’. Mas o que é que isso nos revela? Será que podemos ter a certeza de que não ensinaram em alguma outra ocasião a segunda criança a dizer 9 em face da expressão ‘6+3’? Terá ela talvez aprendido um grande número de casos tais como ‘1+2=2+1’ e ‘1+3=3+1’? Terá aprendido a formular a regra da comutação e a exemplificá-la? Se nos contentarmos em falar de um conceito aritmético, nunca descobriremos o que a criança realmente aprendeu (p. 95).

Utilizando-se estímulos fracionários, pode-se reescrever esse trecho assim: As crianças foram ensinadas a selecionar  $\frac{2}{6}$  diante de  $\frac{1}{3}$ . Ao apresentarmos  $\frac{1}{7}$ , verificamos se selecionam  $\frac{2}{14}$  ou  $\frac{2}{7}$ . Uma das crianças se mostra desesperadamente confusa, a outra seleciona  $\frac{2}{14}$ . Claro que os dois alunos aprenderam coisas diferentes: a primeira criança aprendeu selecionar um estímulo específico diante de um estímulo específico. A segunda aprendeu um conceito de fração equivalente. Mas o que isso nos revela? Será que podemos ter a certeza de que não ensinaram em alguma outra ocasião à segunda criança a selecionar  $\frac{2}{14}$  em face de

$\frac{1}{7}$ ? Terá ela talvez aprendido um grande número de casos tais como  $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$  e  $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ ? Terá aprendido a formular a regra de simplificação e a exemplificá-la? Se nos contentarmos em falar de um conceito fracionário, nunca descobriremos o que a criança realmente aprendeu, e acrescentando, nunca poderemos reproduzir a aprendizagem desejada com outras crianças (Medeiros, 2003).

Se após  $n$  experiências com frações equivalentes, ocorre a seleção adequada a um novo conjunto de frações, que tipo de aprendizagem ocorreu? Se não houve treino anterior entre as frações  $\frac{1}{7}$  e  $\frac{2}{14}$ , apenas a experiência com ' $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ ', ' $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ ', dentre outros exemplares similares, que tipo de aprendizagem ocorre?

Similarmente, se ensinamos a selecionar verde diante de verde, vermelho diante de vermelho e o pareamento de  $n$  cores, quando alguém seleciona amarelo diante de amarelo, que tipo de aprendizagem pode ter ocorrido? O comportamento de seleção pode não estar sob controle de propriedades físicas *de cada* estímulo (e.g., selecionar o que é verde) e sim de propriedades relacionais entre eles (e.g., identidade, *selecionar a cor igual*) (Catania, 1999). Nesse último caso, pode-se falar de um operante discriminado, com a propriedade discriminativa *similaridade* de dois estímulos.

Retomando as frações, no caso de  $n$  experiências com itens semelhantes a ' $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ ', ' $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ ', o acerto diante de  $\frac{1}{7}$  e  $\frac{2}{14}$ , pode indicar um repertório diante não apenas de  $\frac{1}{3}$  ou  $\frac{2}{6}$  mas também na relação de proporcionalidade entre os dois. A verificação da relação de proporcionalidade pode incluir repertórios suplementares, como multiplicar cada item por dois (e.g., a partir de  $\frac{a}{b}$ , multiplica-se "a" por dois e "b" por dois, encontrando-se  $\frac{a.2}{b.2}$ ).

Esse repertório, aplicável a um conjunto infinito de estímulos, pode envolver "classes

de comportamento de ordem superior”, no sentido que as classes são definidas, “não por estímulos ou por respostas particulares, mas por relações entre tais estímulos e respostas” (Cattania, 1999, p.163). Tal repertório também é denominado *Comportamento de ordem superior* ou *Overarching* (Barnes-Holmes & Barnes-Holmes, 2000). Assim, o tipo de aprendizagem com as frações pode indicar um Operante Discriminado, com a propriedade discriminativa *Proporcionalidade* entre os dois estímulos fracionários.

As estratégias que podem emergir durante o Procedimento de Pareamento ao Modelo com Frações Equivalentes podem funcionar como Comportamentos Precorrentes Auxiliares, que aumentam a chance de acerto e podem diminuir a ocorrência com o aumento de habilidade na tarefa (Oliveira-Castro e Campos, 2004; Skinner, 1953). O Comportamento Precorrente, nesse caso, pode ser a multiplicação de cada item da fração por um mesmo número (i.e., dois).

A busca pelo estabelecimento do *Conceito de Fração* a partir do estabelecimento de Discriminações Simples e Condicionais, sob controle de propriedades físicas e relacionais dos estímulos, responder a novas formas, e a ocorrência do comportamento diante de novas frações, vêm sendo buscados por pesquisadores nos últimos anos.

Tulon (2005), interessada no estabelecimento das relações absolutas entre frações, utilizou o Pareamento ao Modelo para ensinar a relação entre a fração falada (e.g., um terço) e a fração pictórica (e.g., ) e entre a fração pictórica (e.g., ) e a fração numérica impressa (e.g.,  $\frac{1}{3}$ ) a dois participantes com idade de 9 anos. Após o Treino AB/BC, foram testadas as relações emergentes AC e CB e a nomeação BD e CD. Também foram realizadas as avaliações do repertório de leitura de novas frações (CD') e da relação entre frações impressas e pictóricas não utilizadas durante o Treino (C'B'), chamadas pela autora de Testes de Generalização. As relações de treino e teste, inclusive com novas frações, demonstraram a efetividade do procedimento no ensino da leitura de frações e das relações absolutas entre

nomes das frações, frações numéricas e frações pictóricas.

Lynch e Cuvo (1995) utilizaram o Pareamento ao Modelo no estabelecimento de relações entre frações numéricas e decimais com sete crianças entre 11 e 13 anos de idade. Após atingir o critério de aprendizagem nos treinos AB (e.g., relação entre  $\frac{1}{4}$  e ) e BC (e.g., relação entre  e 0,25), os autores verificaram a emergência de relações simétricas e transitivas. Houve a formação de Classes de Equivalência para todos os participantes. Além dos testes de seleção (i.e., apontar para o estímulo comparação diante do estímulo modelo), houve também testes utilizando lápis e papel, que se assemelham às tarefas solicitadas nas atividades escolares cotidianas. Houve desempenho abaixo de 5% nesse teste para três dos sete participantes e resultados moderados para os demais (máximo de 63%). Em seguida, foi realizado o treino AD (e.g.,  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{4}{16}$ ) e, então, foi testada a ampliação da classe CD (e.g., relação entre 0,25 e  $\frac{4}{16}$ ). O desempenho no teste de Ampliação da Classe foi variável. Para verificar se a aprendizagem se estendeu para novas frações e decimais, os autores testaram novos pares XY e YX (e.g., relação entre  $\frac{14}{50}$  e 0,28). O desempenho novamente se mostrou variável, de 21% a 100% de acerto. Lynch e Cuvo (1995) nomearam os testes com desempenhos novos, como tarefa de lápis e papel, e aqueles com novas frações e decimais, como Testes de Generalização.

Leader e Barnes-Holmes (2001) também utilizaram um procedimento de treino para estabelecer Equivalência entre frações numéricas e decimais. Treinaram as relações entre fração numérica e fração pictórica e entre decimal e fração pictórica. Após os treinos AB (e.g., relação entre  $\frac{1}{4}$  e ) e CB (e.g., relação entre 0,25 e ), realizados através de emparelhamento, houve os testes de emergência das relações BA, BC, AC e CA. As 24 cri-

anças que participaram apresentaram a emergência da relação entre fração numérica e decimal (e.g.,  $\frac{1}{4}$  e 0,25). Os autores incluíram testes de Generalização de Estímulos. Houve apresentação de frações pictóricas com formas diferentes das utilizadas durante o treino diante de frações numéricas ou de decimais (e.g., , ,  e ). No Experimento 2, metade dos oito participantes apresentou erros quando a representação pictórica foi com partes tomadas não contínuas (e.g., ). A adição de uma representação pictórica com partes contínuas no Experimento 3 (e.g., ), implicou em 100% de acerto para as oito crianças, tanto com partes contínuas quanto na apresentação da fração não contínua. Os testes verificaram a emergência de relações previstas pelo Paradigma da Equivalência de Estímulos (i.e., Simetria e Transitividade) e a Generalização de Estímulos, através da alteração de características físicas dos estímulos pictóricos.

Dos Santos, Cameschi e Hanna (no prelo) utilizaram o Procedimento de Pareamento ao Modelo para ensinar e testar a formação de classes de estímulos equivalentes compostas por frações pictóricas e frações numéricas, com 20 participantes de 11 a 17 anos, da 5ª série do Ensino Fundamental. Os estudantes foram divididos em dois grupos experimentais e um grupo controle. No Grupo Experimental 1 (E1), as frações numéricas utilizadas durante o treino, como comparações, possuíam numeradores idênticos e no Grupo Experimental 2 (E2), os numeradores eram diferentes. Cada Grupo Experimental teve treinos com três frações (e.g.,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{5}$ ). O Grupo Controle não participou das condições de treino e testes ao longo do experimento, apenas da avaliação inicial e final realizadas com lápis e papel. Os dois grupos experimentais apresentaram aumento significativo na Avaliação Final em relação à Inicial, o que não ocorreu com o Grupo Controle, indicando a efetividade do procedimento. Os participantes aprenderam as relações de treino AB (escolha da fração numérica dada a

fração pictórica como modelo, e.g., relação  e  $\frac{1}{3}$ ) e BC (escolha da fração numérica dada outra fração numérica como modelo, e.g., relação  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{6}$ ) com número variado de blocos e número de erros. No geral, o Grupo com E1, com numeradores idênticos, teve menor número de blocos e erros nos treinos. Os testes de Simetria, Transitividade e Equivalência produziram alta porcentagem de acertos, para ambos os grupos experimentais, exceto para um participante do E2. Após os treinos AD, AE, AF, foram realizados Testes de Ampliação de Classe Testes D-(ABC), E-(ABCD), F-(ABCDE), respectivamente. Houve baixos escores, levando a treinos dessas relações. Em Testes com Novas Frações, realizados a cada nova verificação da Ampliação da Classe (e.g.,  $\frac{3}{9}$ ,  $\frac{4}{12}$ , e  $\frac{5}{15}$ ), o desempenho foi superior para o Grupo E1, cujos numeradores das comparações eram idênticos.

Características dos estudos de Lynch e Cuvo (1995), dos Santos, Cameschi e Hanna (no prelo), Leader e Barnes-Holmes (2001) e Tulon (2005) podem sintetizar diferentes tipos de controle de estímulos e repertórios novos que têm sido buscados para a *Formação de Conceito Matemático*: o estabelecimento de relações arbitrárias através do Pareamento ao Modelo, incluindo discriminações simples e condicionais, relações emergentes, a verificação da ocorrência do responder a novas formas, podendo caracterizar generalização de estímulos, a verificação da ampliação da classe, bem como o responder com novas frações não equivalentes às frações dos treinos.

Os resultados de estudos anteriores indicam que o estabelecimento de classes de estímulos a partir do procedimento de Pareamento ao Modelo favorece, além da emergência de relações não diretamente treinadas esperadas pelo Paradigma da Equivalência de Estímulos, comportamentos novos de Generalização de Estímulos (Leader e Barnes-Holmes, 2001) e comportamento adequado diante de novas frações não utilizadas durante os treinos (Lynch & Cuvo, 1995 e Dos Santos, Cameschi e Hanna, no prelo). Considerando a variabilidade nos

resultados de comportamento novo diante de novas frações, é importante a verificação de outras variáveis que influenciem o estabelecimento do conceito de frações equivalentes.

Livros didáticos sugerem, para o ensino do *conceito de frações equivalentes*, manipulação de materiais (e.g., SEED, 2005; Moyer, 2001), como figuras ou materiais recortados, que apresentem diferentes frações equivalentes, isto é, que indiquem proporções idênticas. Essa disposição espacial da semelhança das *áreas* das frações pictóricas tem como objetivo a emergência de uma das características do *conceito de frações equivalentes*, a proporcionalidade (GESTAR I, 2007) (Figura 4).

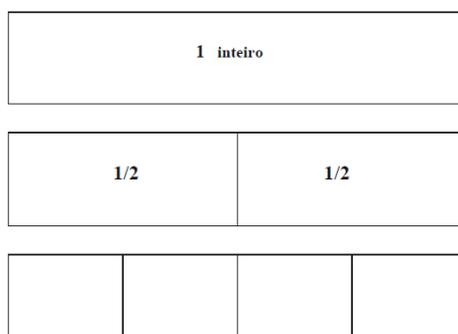


Figura 4. Molde disponível em livro didático para produção de material concreto sobre a proporção de frações equivalentes. Na figura, a área de  $\frac{1}{2}$ , corresponde à área de  $\frac{2}{4}$ . Figura reproduzida de GESTAR I (2007).

Além desse tipo de estratégia, existem materiais didáticos que descrevem operações matemáticas para o julgamento de equivalência entre frações. A simplificação das frações é uma delas: se o numerador e o denominador de uma fração A forem divididos por um mesmo número, e o resultado for igual à fração B, então as frações A e B são matematicamente equivalentes. O mesmo processo pode ser realizado pela multiplicação do numerador e denominador da fração B por um mesmo número para verificar se o resultado é igual à fração A, como vimos anteriormente. Uma terceira estratégia é multiplicar o denominador da fração A pelo numerador da fração B e verificar se o resultado é igual à multiplicação do numerador da fração A pelo denominador da fração B. Se os resultados forem iguais, as duas frações são

equivalentes (e.g., dado  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$ , se  $a \times d$  for igual a  $b \times c$ ,  $\frac{a}{b}$  é fração equivalente a  $\frac{c}{d}$ ).

Mesmo que a seleção de  $\frac{2}{6}$  diante de  $\frac{1}{3}$  seja imediata após o treino\aprendizagem, é possível que tais estratégias continuem sendo úteis com frações novas. Provavelmente, selecionar  $\frac{62}{186}$  diante de  $\frac{1}{3}$  deve exigir comportamento precorrente auxiliar, que em frações conhecidas através de treino, é suprimido, mas com frações diferentes, pode reaparecer.

Em diversas atividades diárias ou acadêmicas, pode haver comportamentos que aumentem a chance de sucesso, os chamados comportamentos precorrentes auxiliares. Quando, por exemplo, consulta-se o mapa antes de ir a algum lugar, procura-se com isso aumentar a probabilidade de chegar com sucesso ao destino. Em atividades acadêmicas matemáticas, pode-se realizar uma conta com os dedos, garantindo a execução passo a passo da tarefa, minimizando a possibilidade de erro. A consulta ao mapa, a conta nos dedos ou a aplicação de uma regra de simplificação, podem deixar de ocorrer com a experiência acumulada nas tarefas. Esses comportamentos precorrentes diminuem a ocorrência com a aprendizagem da tarefa e possuem o efeito de aumentar a chance de acerto (Oliveira-Castro e Campos, 2004). Skinner (1953; 1968) se refere a esse comportamento ao descrever respostas que aumentam a probabilidade de outras respostas ocorrerem e serem reforçadas. Estudos desenvolvidos por Oliveira-Castro e colaboradores (e.g., Oliveira-Castro, Coelho e Oliveira-Castro, 1999; Oliveira-Castro e Campos, 2004) mostraram que o tempo dedicado a respostas precorrente auxiliares diminui com o aumento das tentativas de treino, como uma função negativamente acelerada.

As operações matemáticas sugeridas como estratégias para a verificação de frações equivalentes e a verificação da proporcionalidade de áreas de frações equivalentes são comportamentos que aumentam a chance de sucesso e que, com a experiência, deixam de ser necessários. Durante a fase de aprendizagem de operações matemáticas, são observados e

ensinados esses comportamentos precorrentes.

A utilização de dicas sobre a proporcionalidade das frações pictóricas equivalentes e sobre a simplificação das frações numéricas equivalentes pode beneficiar o aprendizado com o Procedimento de Pareamento ao Modelo no estabelecimento do Conceito de Frações Equivalentes, possuindo função de estímulos discriminativos que aumentariam a probabilidade de ocorrência do comportamento correto. Comportamento precorrente que produza dicas ou estímulos discriminativos que aumentem a probabilidade de ocorrência de um comportamento de solução de um problema pode ocorrer durante tarefas que ainda não estejam bem estabelecidas. Tais comportamentos que produzam esses estímulos discriminativos podem diminuir de frequência durante a experiência da tarefa, indicando que o comportamento de solução do problema não precisa mais de estimulação suplementar para sua ocorrência.

Inicialmente, o aluno possivelmente pode escrever a operação matemática de multiplicar no papel junto à fração para verificar se duas frações são matematicamente equivalentes, ou consultar um conjunto de dicas de proporcionalidade e multiplicação. Posteriormente, pode começar a *fazer na cabeça* ou *pensar* na operação. Skinner (1972/1968) afirma

Algumas partes do nosso comportamento alteram e melhoram a eficiência de outras partes no que pode ser chamado de auto-governo intelectual. Deparando com uma situação para a qual não há comportamento eficiente disponível (na qual não podemos emitir uma resposta que seja provavelmente reforçada), comportamo-nos de maneiras que tornam possível o comportamento eficiente (melhoramos nossas chances de reforço). Ao fazê-lo, tecnicamente falando, executamos uma resposta “preliminar” que muda ou o ambiente ou a gente mesmo, de forma tal que o comportamento “consumatório” ocorra. (p. 113)

No caso da resolução de um problema sobre frações equivalentes, o número de consultas a uma tela que produz possíveis estímulos discriminativos para a emissão do comportamento certo pode ser mensurado para avaliar a aprendizagem de resolução do problema, bem como a diminuição da produção de estímulos discriminativos. A diminuição da frequência de consulta e o acerto nas tentativas pode indicar que o responder eficiente sobre

propriedades críticas do estímulo foi estabelecido.

No presente estudo, utilizou-se o Procedimento de Pareamento ao Modelo no ensino de Relações Condicionais entre frações pictóricas e frações numéricas, semelhante ao de Dos Santos, Cameschi e Hanna (no prelo). No estudo original, houve treino com três frações e sucessivos testes de ampliação de classe a partir de treino com um novo elemento e testes com novas frações não equivalentes às do treino. Cada uma das frações pictóricas foi treinada com três frações equivalentes (e.g.,  $\frac{3}{9}$ ,  $\frac{4}{12}$ , e  $\frac{5}{15}$ ). Houve a verificação se a expansão das classes poderia ter efeito sobre o desempenho a novas frações, matematicamente não equivalentes ao treino. No presente trabalho, houve o treino de seis frações, divididas em três ciclos de duas frações. A cada ciclo de treino com um par de frações, havia testes de emergência de simetria e transitividade, teste com nova forma, teste novo elemento equivalente matematicamente (sem treino) (e.g.,  $\frac{3}{9}$ ), e teste com nova fração não equivalente matematicamente às dos treinos. Verificou-se se o aumento do número de exemplares  $n$  poderia facilitar o desempenho nos testes, especialmente no teste com nova fração.

Adicionalmente, no presente trabalho, foram disponibilizadas dicas durante os treinos. O comportamento Precorrente de Consulta a Dicas sobre Multiplicação de frações e sobre a Proporcionalidade de frações foi medido e o efeito desses possíveis estímulos discriminativos na Formação do Conceito de Frações Equivalentes foi avaliado. Os testes avaliaram a aprendizagem de Discriminações Condicionais e Formação de Classes de Estímulos. A partir do Paradigma da Equivalência de Estímulos, foram verificadas as propriedades de Simetria e Transitividade, semelhante ao trabalho de Dos Santos, Cameschi e Hanna (no prelo). O responder a novas formas foi avaliado a partir de formas de frações pictóricas diferentes das utilizadas nas condições de treino. Houve a verificação de repertório novo diante de fração equivalente às frações utilizadas no treino a partir do teste de inclusão de novo membro,

embora esse novo membro não tenha sido treinado a nenhum conjunto de estímulos. Finalmente, o repertório generalizado diante de frações novas foi verificado também se utilizando de frações equivalentes diferentes das utilizadas nos treinos.

Assim, os objetivos do presente estudo foram: a) verificar a emergência de relações entre frações numéricas equivalentes (e.g.,  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{6}$ ); b) verificar o responder a novas formas, isto é, novas apresentações de figuras pictóricas de frações utilizadas durante o treino (e.g.,  e ); c) verificar a ocorrência de responder à nova fração numérica equivalente à fração utilizada durante o treino (e.g.,  $\frac{3}{9}$ ); d) verificar a ocorrência do responder à relações entre novas frações pictóricas e numéricas não utilizadas durante os treinos (e.g., ,  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{2}{4}$ ); e) verificar o efeito da utilização da dica sobre a proporcionalidade das frações equivalentes e sobre a simplificação sobre o desempenho durante os testes por meio de um procedimento de tela de auxílio e comportamento precorrente auxiliar.

## Método

### Participantes

Participaram 60 crianças e adolescentes, provenientes do Cruzeiro e Estrutural, cidades satélites do Distrito Federal. Os participantes tinham entre 10 e 14 anos de idade, sendo 32 do sexo masculino e 28 do sexo feminino. A média de idade foi 12,2, mediana e moda 12 anos. Os participantes estavam matriculados na 6ª série\7º ano do Ensino Fundamental em duas escolas públicas do Distrito Federal: 33 participantes da escola 1 e 27 da escola 2. A Tabela 1 resume as informações dos participantes. Os participantes do estudo foram selecionados a partir do Pré-teste com lápis e papel. O Teste foi aplicado em turmas da série e em grupos de alunos indicados pelas professoras das escolas como possuindo dificuldades em matemática.

O projeto foi submetido ao Comitê de Ética em Pesquisa do Instituto de Ciências Humanas da Universidade de Brasília com base nas Resoluções 196/96 do Conselho Nacional de Saúde, sendo aprovado com pendências. Os itens comestíveis disponíveis aos participantes, após as atividades, foram interpretados pelo comitê como pagamento de participantes. Considerando que este é um procedimento frequentemente utilizado em pesquisas com crianças, que não há relato de prejuízo para as crianças, que há possibilidade de ganhos para aprendizagem matemática, e que a interpretação do comitê é uma das possíveis interpretações, mas não a única, a pesquisa foi realizada com este procedimento.

Tabela 1.

Participantes (Par) divididos por Grupos Grupos Proporcionalidade e Multiplicação (MP), Multiplicação (M), Proporcionalidade (P), Sem Dica (D) e Controle (C), ordem de exposição às duplas de Classes de estímulos (O), escola de origem (E), sexo (S) e idade (I). Os Participantes Controle não possuem a informação *Ordem* por não terem passado pelas condições experimentais. Os participantes marcados por asterisco (\*) realizaram parte ou todo procedimento simultaneamente na sala com outro participante.

Proporcionalidade e																											
Multiplicação					Multiplicação					Proporcionalidade					Sem Dica					Controle							
Par	O	E	S	I	Par	O	E	S	I	Par	O	E	S	I	Par	O	E	S	I	Par	O	E	S	I			
MP1*	3	1	F	14	M1	1	1	F	11	P1*	3	1	M	12	SD1*	2	1	F	12	C1					2	F	13
MP2	1	1	M	12	M2	2	2	F	12	P2*	3	1	F	12	SD2	1	1	F	13	C2					2	F	13
MP3	1	2	F	12	M3*	3	2	F	13	P3	3	1	M	13	SD3	2	2	M	12	C3					1	M	12
MP4*	3	2	F	13	M4	1	2	M	12	P4	2	1	M	12	SD4	2	1	M	12	C4					1	F	12
MP5	1	2	F	12	M5*	3	2	M	12	P5	1	1	M	12	SD5*	3	1	F	13	C5					1	F	14
MP6*	2	1	M	13	M6	1	1	M	12	P6	1	2	F	12	SD6	1	2	F	12	C6					2	F	12
MP7	2	2	M	12	M7*	3	1	M	12	P7	1	2	F	10	SD7	1	1	M	13	C7					1	F	14
MP8*	2	1	M	13	M8	2	1	F	11	P8	1	1	F	11	SD8	1	2	M	12	C8					1	F	12
MP9*	3	1	M	13	M9*	3	1	F	12	P9*	3	2	M	12	SD9*	3	2	F	12	C9					1	F	12
MP10	1	1	F	12	M10*	2	2	M	12	P10	2	2	M	12	SD10*	3	1	F	12	C10					2	M	12
MP11*	3	1	M	14	M11	1	2	M	12	P11	2	1	F	11	SD11*	2	2	M	12	C11					2	F	12
MP12*	2	2	F	12	M12	2	1	F	12	P12*	2	2	F	11	SD12*	3	1	F	12	C12					2	M	13

### **Local, material e Equipamento**

A coleta de dados foi realizada na escola de origem e no turno de estudo da criança. Para a realização das tarefas automatizadas, foram utilizados dois notebooks com mouse, com sistema operacional Windows XP, e dois fones de ouvido. O programa Contingência Programada, versão 2.0, desenvolvido por Luiz Anísio Vieira Batitucci, Jassanã Lacerda Batitucci e Elenice S. Hanna, disponibilizou as contingências, apresentou os estímulos e registrou os dados. As atividades não automatizadas foram realizadas com lápis e papel, fornecidas pela experimentadora (Anexo 1).

Os equipamentos foram dispostos de maneira que um aluno não pudesse acompanhar o andamento de seu colega e os fones de ouvido serviam para reduzir a interferência do som do computador do outro participante. As salas utilizadas tinham cerca de 7,5 x 7,5 metros, possuíam iluminação artificial e janelas. As salas eram espaços físicos da escola, como sala de leitura e sala de aula, com materiais tipicamente escolares, como livros e quadro negro, que eram disponibilizados em horários que não possuíam atividades próprias da escola.

Guloseimas (e.g., doces, bolinhos), materiais escolares (e.g., apontadores, adesivos) e materiais diversos (e.g., prendedores de cabelo) ficavam acomodados na caixa de reforços na sala de coleta.

### **Estímulos**

Foram elaborados dois tipos de estímulos fracionários: pictóricos e numéricos. Os estímulos fracionários pictóricos eram figuras retangulares ou circulares, divididos em partes iguais, com uma ou mais partes sombreadas de preto, na apresentação contínua (Santos, 1996). Os estímulos fracionários numéricos eram compostos por dois números, um acima do outro, separados por uma linha horizontal (Figura 5).

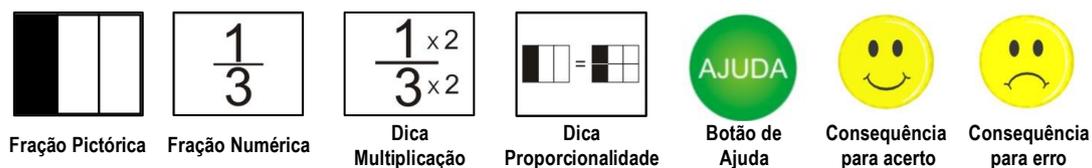


Figura 5. Exemplos de estímulos fracionários pictóricos, numéricos, dicas de multiplicação e proporcionalidade, botão de ajuda e consequências para acerto e erro, utilizados nas condições experimentais.

As Dicas de Multiplicação consistiam em estímulos fracionários numéricos com sinal de multiplicação e número a ser multiplicado ao lado do numerador e do denominador. As Dicas de Proporcionalidade consistiam em duas frações pictóricas, lado a lado, separadas por um sinal de igualdade. Os estímulos utilizados como consequências para o acerto foram os eventos sonoros *ótimo*, *muito bom*, *isso* e palmas e *smiles*, que foram designados aleatoriamente às tentativas (Figura 5).

## Procedimento

Os participantes, exceto do Grupo Controle, foram convidados a participar de sessões diárias, aproximadamente quatro dias na semana, por cerca de 18 encontros - o número de encontros variava de acordo com o desempenho nas atividades. A cada encontro, que durava por volta de 30 minutos, havia dois momentos: brincadeira lúdica, com jogos a escolha do participante, e atividade com frações no computador. Independente do desempenho nas tarefas, eles podiam escolher itens disponíveis na caixa de reforços. Na Tabela 1, os participantes marcados com asterisco (\*) realizaram parte ou todo procedimento simultaneamente na sala com outro participante.

Inicialmente houve a realização dos pré-testes com lápis e papel e no computador. Em seguida, realizavam o Treino de Linha de Base, e se necessário, eram expostos ao Treino de Absolutas. Em seguida se iniciavam três ciclos de treinos e testes. Cada ciclo possuía a seguinte sequência de condições: Treino AC, Treino BC, Treino Misto AC/BC, Teste de Simetria CA e CB, Teste de Transitividade e Equivalência AB e BA, Teste com Novas Formas

CA, AB e BA, Treino Misto AC/BC, Teste com Novo Elemento da Classe D-(ABC) e teste com Novas Frações EF, FE, EG, GE, FG e GF. A cada novo ciclo, houve duas novas classes de frações. Finalmente, os participantes concluíam com a realização dos pós-testes com lápis e papel e no computador (Tabela 2). Os Participantes Controle realizavam apenas os Pré e Pós-testes com lápis e papel.

### Pré-testes

O Pré-teste com lápis e papel, parcialmente adaptado de Santos (1996) e Carraher e Schliemann (1992), foi aplicado em turmas de 6<sup>a</sup> série e em grupos de alunos indicados pelas professoras de matemática das escolas. O Teste, com 140 questões de múltipla escolha com cinco alternativas, era composto por tarefas de identificação de frações (106), multiplicação (17) e divisão (17).

No Pré-teste, as tarefas de identificação de frações envolviam 27 questões com relações absolutas entre as frações (e.g.,  e  $\frac{1}{2}$ ) e 79 com relações relativas (e.g.,  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{2}{4}$ ). O teste foi dividido em duas partes e aplicado em dias distintos (Anexo 1). O pré-teste com lápis e papel permitia a seleção dos participantes com repertório em operações de multiplicação e divisão e com dificuldades com tarefas envolvendo relações entre frações relativas.

Os participantes que: a) acertaram pelo menos 82% das questões de multiplicação (14) e 82% de divisão (14) e; b) acertaram máximo de 20% das questões de relações relativas (16), foram divididos aleatoriamente em quatro grupos: Multiplicação e Proporcionalidade (MP), Multiplicação (M), Proporcionalidade (P) e Sem dica (SD). Não havia exigência de desempenho nas relações absolutas entre frações.

O Grupo Controle (C) foi formado por dois participantes com desempenho inferior a 82% de acertos nas questões de divisão, C02 e C03, respectivamente, apenas 17,6% e 70,6 % de acertos, e por apenas três participantes que acertaram menos que 80% das questões das relações relativas, C02, C03, C07.

Tabela 2.

Seqüência de condições de treinos e testes, descrição das tarefas\procedimentos, tipos de problemas e exemplos de operações e frações numéricas e pictóricas.

Etapas	Tarefa/Procedimento	Tipos de problemas	Exemplo
Pré-teste com Lápis e Papel	Questões de múltipla escolha com lápis e papel	Divisão, multiplicação, relações absolutas e relativas entre frações pictóricas e numéricas	9:3; 6x2  e $\frac{1}{4}$ ; $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{10}$
Pré-teste no computador	MTS em extinção	Relações absolutas e relativas entre frações pictóricas e numéricas	 e $\frac{1}{4}$ ; $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{10}$
Treino de Linha de Base\Treino absolutas	MTS em CRF	Relações absolutas entre frações pictóricas e numéricas	 e $\frac{2}{3}$
<b>Ciclos Experimentais repetidos três vezes com 2 frações diferentes</b>			
Treino AC	MTS em CRF com dica de proporcionalidade <sup>a</sup>	2 Relações relativas entre frações pictóricas e numéricas	 e $\frac{2}{6}$
Treino BC	MTS em CRF com dica de multiplicação <sup>b</sup>	2 Relações relativas entre frações numéricas	$\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$
Treino Misto AC/BC	MTS em CRF com dica <sup>a</sup> b	4 Relações dos treinos anteriores	
Teste de Simetria CA/CB	MTS em extinção	2 Relações relativas entre frações numéricas e pictóricas e 2 entre frações numéricas	$\frac{2}{6}$ e  ; $\frac{2}{6}$ e $\frac{1}{3}$
Teste de Transitividade e Equivalência AB/BA	MTS em extinção	4 Relações absolutas entre frações numéricas e pictóricas	$\frac{1}{3}$ e 
Teste com Novas Formas CA/AB/BA	MTS em extinção	2 Relações entre frações numéricas e pictóricas e 4 absolutas entre numéricas e pictóricas	$\frac{2}{6}$ e 
Treino Misto AC/BC	MTS em CRF	12 Relações dos treinos anteriores	
Teste de Novo Elemento [D-(ABC)]	MTS em extinção	8 Relações entre numéricas e 4 entre numéricas e pictóricas	$\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{9}$
Teste Novas Frações	MTS em extinção	8 Relações entre numéricas e pictóricas e 4 entre numéricas	$\frac{1}{9}$ e $\frac{2}{18}$
Pós-teste com Lápis e Papel	Questões de múltipla escolha com lápis e papel	Divisão, multiplicação, relações absolutas e relativas entre frações pictóricas e numéricas	
Pós-teste no computador	MTS em extinção	Relações absolutas e relativas entre frações pictóricas e numéricas	

As relações testadas no Pré-teste no computador foram similares ao Pré-teste com lápis e papel, mas foram programadas no computador e com apenas três comparações a cada tentativa (MTS). Não havia consequência diferencial durante a realização dos testes realizados durante o estudo. O Pré-teste com lápis e papel e no computador tiveram a função de registrar o desempenho com frações relativas e absolutas antes do início das condições experimentais, com função de Linha de Base, para comparação com medida semelhante do Pós-teste.

#### Pré Treino e Treino de Relações Absolutas

Antes de iniciar as condições no computador, os estudantes participaram de um treino da tarefa. Os participantes foram expostos ao procedimento de pareamento de acordo com o modelo, utilizando frações pictóricas e frações numéricas. A comparação correta guardava uma relação absoluta com o modelo (e.g.,  $\frac{1}{3}$  e ) (Tabela 3).

No Treino de Linha de Base havia três Blocos de nove tentativas cada. No primeiro e segundo bloco, a cada erro a tentativa era rerepresentada. Os critérios para encerramento do último bloco eram: 100% de acerto ou no máximo quatro repetições. O Treino AC era iniciado para os participantes com 100% de acerto no Treino de Linha de Base. O Treino de Absolutas era realizado caso o participante repetisse quatro vezes o último bloco do Treino de Linha de Base.

O Treino de Absolutas (

Tabela 4) foi similar ao Treino de Linha de Base. No primeiro bloco, a cada erro, a tentativa era rerepresentada. No Bloco 2, caso houvesse erro, o participante retornaria ao Bloco 1 e 100% de acerto levava ao Bloco 3. Cem por cento de acerto encerrava o Bloco 3 e erros levavam ao Bloco 2. Caso houvesse três repetições do Bloco 3, a tarefa era suspensa e repetida posteriormente. Nos blocos 1 e 2, as comparações possuíam: numeradores iguais, denominadores iguais ou inversão, procurando maximizar o controle pelas propriedades definidoras das relações absolutas (i.e., as comparações possuíam diferenças críticas). O Bloco 3 foi idêntico ao Bloco 3 do Treino de Linha de Base. A disposição dos estímulos na tela do computador, as consequências e as instruções foram similares às dos Treinos AC e BC.

Tabela 3.

Estrutura do Treino de Linha de Base, com Blocos, Tentativas, Modelos e Comparações em cada tentativa. A comparação em negrito indica a comparação correta da tentativa, isto é, a comparação S+. A letra p ao lado da fração indica que trata-se de uma fração pictórica.

Bloco	Tentativa	Modelo	Comparações		
			1	2	3
1	1	1/3p	3/1	1/2	<b>1/3</b>
	2	2/10p	<b>2/10</b>	1/10	2/5
	3	1/4p	<b>1/4</b>	4/1	3/1
	4	1/9p	9/1	<b>1/9</b>	1/8
	5	2/3p	<b>2/3</b>	2/1	3/1
	6	1/2p	2/2	2/1	<b>1/2</b>
	7	2/14p	2/7	<b>2/14</b>	1/14
	8	2/6p	6/2	2/4	<b>2/6</b>
	9	3/5p	2/3	<b>3/5</b>	3/1
2	1	1/4p	4/1	<b>1/4</b>	3/1
	2	3/5p	2/3	3/1	<b>3/5</b>
	3	2/3p	3/1	2/1	<b>2/3</b>
	4	1/9p	<b>1/9</b>	9/1	1/8
	5	1/3p	3/1	<b>1/3</b>	1/2
	6	2/10p	<b>2/10</b>	1/10	2/5
	7	2/6p	6/2	2/4	<b>2/6</b>
	8	2/14p	2/7	<b>2/14</b>	1/14
	9	1/2p	<b>1/2</b>	2/1	2/3
3	1	1/3p	3/1	<b>1/3</b>	1/2
	2	2/14p	2/7	1/14	<b>2/14</b>
	3	2/3p	3/1	2/1	<b>2/3</b>
	4	1/2p	<b>1/2</b>	2/1	2/2

5	1/9p	9/1	1/8	<b>1/9</b>
6	2/6p	6/2	<b>2/6</b>	2/4
7	1/4p	<b>1/4</b>	4/1	3/1
8	3/5p	2/3	<b>3/5</b>	3/1
9	2/10p	<b>2/10</b>	1/10	2/5

---

Tabela 4.

Estrutura do Treino de Relações Absolutas, com Blocos, Tentativas, Modelos e Comparações em cada Tentativa. A comparação em negrito indica a comparação S+. A letra p ao lado da fração indica que trata-se de uma Fração Pictórica.

Bloco	Tentativa	Modelo	Comparações		
			1	2	3
1	1	3/6	3/4p	<b>3/6p</b>	3/5p
	2	1/6	<b>1/6p</b>	2/6p	3/6p
	3	1/5p	1/3	1/4	<b>1/5</b>
	4	1/2p	3/2	2/2	<b>1/2</b>
	5	4/5p	2/5	<b>4/5</b>	5/4
2	1	2/3	<b>2/3p</b>	3/3p	1/3p
	2	1/2p	<b>1/2</b>	1/3	1/4
	3	1/3	1/4p	<b>1/3p</b>	1/2p
	4	1/4p	1/1	<b>1/4</b>	4/1
	5	2/4p	3/4	1/4	<b>2/4</b>
3	1	1/3p	3/1	1/2	<b>1/3</b>
	2	2/14p	2/7	1/14	<b>2/14</b>
	3	2/3p	3/1	<b>2/3</b>	2/1
	4	1/2p	<b>1/2</b>	2/1	2/3
	5	1/9p	9/1	1/8	<b>1/9</b>
	6	2/6p	6/2	<b>2/6</b>	2/4
	7	1/4p	<b>1/4</b>	4/1	3/1
	8	3/5p	2/3	<b>3/5</b>	3/1
	9	2/10p	<b>2/10</b>	1/10	2/5

#### Treino AC e BC e Treino Misto AC/BC

Todos os participantes, exceto do grupo controle, foram expostos a treinos de Pareamento ao Modelo, entre frações pictóricas (e.g., ) e numéricas redutíveis (e.g.,  $\frac{2}{6}$ ) e entre frações numéricas irredutíveis (e.g.,  $\frac{1}{3}$ ) e numéricas redutíveis (e.g.,  $\frac{2}{6}$ ), AC e BC. Houve três ciclos de treinos e testes para cada participante, utilizando-se duas novas classes de estímulos fracionários para cada ciclo. A Figura 6 apresenta cada classe de frações matematicamente equivalentes, os estímulos utilizados durante os treinos, teste com novo elemento da classe treinada (i.e., D), as dicas utilizadas e as frações pictóricas utilizadas nos testes com novas formas.

Duplas	Classe	A	Treinos		Teste D	Dicas		Teste Novas Formas
			B	C		P	M	
1	1		$1/3$	$2/6$	$3/9$		$\frac{1 \times 2}{3 \times 2}$	
	2		$1/6$	$2/12$	$3/18$		$\frac{1 \times 2}{6 \times 2}$	
2	3		$1/4$	$2/8$	$3/12$		$\frac{1 \times 2}{4 \times 2}$	
	4		$1/7$	$2/14$	$3/21$		$\frac{1 \times 2}{7 \times 2}$	
3	5		$1/5$	$2/10$	$3/15$		$\frac{1 \times 2}{5 \times 2}$	
	6		$1/8$	$2/16$	$3/24$		$\frac{1 \times 2}{8 \times 2}$	

Figura 6. Conjuntos de Frações Numéricas e Pictóricas utilizados nas condições experimentais: Treinos (AC e BC), Testes de Emergência (CA, CB, AB e BA), Teste com Novas Formas (AC, CA, AB, BA), Teste de novo elemento da classe D-(ABC), Dicas Proporcionalidade (P) e Dicas Multiplicação (M). Houve três duplas de estímulos.

A criança foi convidada a sentar-se à frente do computador e na tela aparecia a seguinte instrução que foi lida pela experimentadora (painel *a* da Figura 7): “*Olhe com atenção, clique na fração para ver as opções. Escolha a fração equivalente*”.

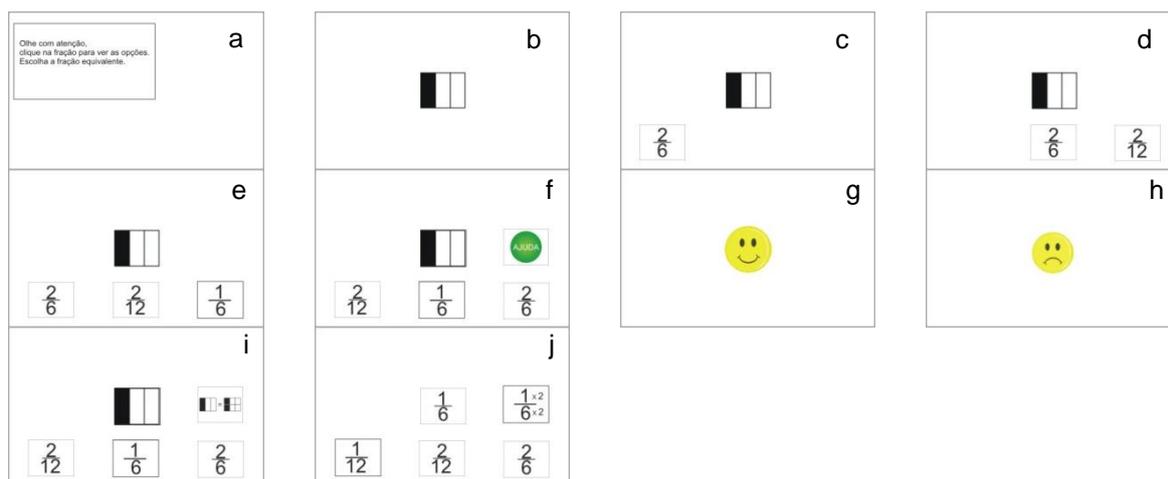


Figura 7. Exemplos de telas do procedimento: instrução (painel *a*), apresentação do modelo (painel *b*), procedimento de minimização do erro, em que na primeira tentativa de treino com um modelo, aparecia apenas a comparação correta (painel *c*), com o aumento gradual do número de comparações S- (painéis *d* e *e*), botão de ajuda (painel *f*), consequência para acertos

e erros nos treinos (painéis *g* e *h*), dica da proporcionalidade (painel *i*) e dica da multiplicação (painel *j*).

Em cada tentativa foi apresentado o estímulo modelo na janela central de uma matriz 3 x 3. Resposta sobre o estímulo modelo produzia três estímulos comparações em janelas inferiores da tela. A cada tentativa, os estímulos comparações ocupavam posições aleatórias da matriz (painel *e* da Figura 7). Resposta na comparação correta produzia diferentes *smiles* e *sons* (painel *g* da Figura 7) a cada tentativa, enquanto resposta na comparação incorreta produzia um desenho com expressão de tristeza (painel *h* da Figura 7). Entre as tentativas houve um intervalo de 1,5 s com tela cinza, após a apresentação da consequência para erro ou acerto.

Na primeira tentativa, após o clique na janela central, aparecia apenas a comparação correta (painel *c* da Figura 7). Na segunda e terceira tentativas havia a comparação correta e uma comparação incorreta (painel *d* da Figura 7), variando as posições, caracterizando um procedimento de minimização de erro. Apenas a partir da quarta tentativa apareciam as três comparações. Essa apresentação gradual das comparações incorretas, que visava a minimização de erros, foi repetida a cada nova aparição de um modelo durante os treinos.

Foram realizados três blocos de seis tentativas durante o Treino das relações AC (Anexo 4 e Anexo 5). Quando nenhum erro ocorria no último bloco de tentativa do treino, era iniciado o Treino das relações BC com a mesma estrutura do treino anterior (Anexo 6 e Anexo 7). Uma vez atingido o critério de 100% de acerto no último bloco, o participante passava para o Treino Misto. No Treino Misto AC e BC, havia três blocos de 4 tentativas, 6 AC e 6 BC e foi encerrado quando 100% de acerto era obtido no último bloco (Anexo 8). Caso o critério não fosse atingido, o Treino Misto era repetido na sessão subsequente.

Dependendo do grupo do participante, na tela era exibido um botão de ajuda, ao lado do estímulo modelo (painel *f* da Figura 7). Clicar no botão de ajuda produzia uma dica visual

por 3 segundos. Caso o participante clicasse novamente no botão, a dica era reapresentada. Os participantes MP tinham o botão de ajuda disponível durante o Treino AC e BC. Os Participantes P tinham o botão de ajuda disponível durante o Treino AC. Para os Participantes M, o botão de ajuda ficava disponível durante o Treino BC. O botão de ajuda não ocorreu para os Participantes SD. Os participantes Controle C não participaram das condições experimentais.

A Dica da Proporcionalidade consistia em apresentar as duas frações pictóricas equivalentes na área do botão de ajuda com o sinal de igualdade entre elas (painel *i* da Figura 7). A Dica da Multiplicação consistia em apresentar a fração modelo com o sinal de multiplicação e o número a ser multiplicado, para encontrar o resultado referente à fração equivalente presente nas comparações (painel *j* da Figura 7). As dicas utilizadas para cada classe matemática estão apresentadas na Figura 6. Na primeira tentativa de cada treino em que havia o botão de ajuda, a experimentadora sugeria que o participante clicasse no botão de ajuda. Caso a criança não clicasse, a experimentadora nada fazia.

Houve três ciclos de treinos e testes, cada um com duas classes diferentes de frações numéricas e pictóricas equivalentes (Figura 6). A sequência de duplas utilizadas foi balanceada entre os ciclos. A Ordem 1 consistia na sequência de duplas 1, 2 e 3. A Ordem 2 na sequência de duplas 2, 3 e 1 e a Ordem 3, duplas 3, 1 e 2 (Figura 6). Houve 16 participantes em cada ordem, e um mesmo número de participantes de cada grupo em cada ordem (Tabela 1). Foram criados estímulos S- para compor as tentativas com três comparações (Anexo 9). Durante os treinos AC e BC, a tentativa de treino foi composta por um S+, pelo S- equivalente à outra fração treinada no ciclo e a um S- criado, que possuía o numerador idêntico ao numerador do modelo (i.e., um) e o denominador igual ao denominador do S+.

#### Teste das Relações CA e CB e AB e BA

Após o treino, houve o Teste das relações CA e CB (Teste de Simetria) e das relações

AB e BA (Testes de Transitividade e Equivalência) para verificar a formação das duas classes de estímulos fracionários com três membros cada. Os testes das relações CA e CB consistiram em 3 blocos de 4 tentativas (Anexo 10), assim como os testes das relações AB e BA (Anexo 11). Os testes foram semelhantes ao treino, porém, não houve consequência diferencial para acertos e erros e nem o botão de ajuda. A seguinte instrução foi lida pela experimentadora antes de cada teste:

*“Olhe com atenção, clique na fração para ver as opções. Escolha a fração equivalente. O computador não mostrará se acertou ou errou”.*

#### Teste de relações com Novas Formas

Durante o Teste com Novas Formas, foi verificado se as relações entre as frações equivalentes se mantiveram quando novas frações pictóricas equivalentes foram utilizadas. O Teste foi baseado nas propriedades físicas dos estímulos fracionários, variando-se a posição da parte tomada do todo e a forma da figura geométrica utilizada. Foram realizados nesse teste, três blocos de oito tentativas da relação AB, BA, AC e CA, com três novas apresentações gráficas das frações pictóricas utilizadas durante o treino (Figura 6 e Tabela 2).

#### Teste de relações com Novo Elemento

No Teste Novo Elemento, foi verificado o repertório de responder a uma nova fração numérica (D) matematicamente equivalente às frações utilizadas durante o treino. O Teste avaliou o desenvolvimento das relações condicionais com fração numérica equivalente nova D-(ABC), sendo composto por dois blocos de 12 tentativas (Anexo 13).

#### Teste de Novas Frações

No Teste de Novas Frações, foi verificado se o responder a frações equivalentes se estendeu a frações não equivalentes às utilizadas durante o treino (Figura 8). Foram realizados testes com novas frações dos conjuntos E, F e G (Figura 8). As relações EF, FE, EG, GE, FG e GF foram avaliadas em dois blocos de 12 tentativas (Anexo 14).

Duplas	Classes	E	F	G
<u>1</u>	1		1/2	2/4
	2		1/9	2/18
<u>2</u>	3		1/10	2/20
	4		1/12	2/24
<u>3</u>	5		2/3	4/6
	6		3/5	6/10

Figura 8. Frações Pictóricas e Numéricas de cada classe utilizadas nos testes com novas frações.

## RESULTADOS

A duração total da coleta de dados foi 9 meses, de fevereiro a outubro de 2010, ocorrendo no turno matutino e vespertino. Foram necessários pelo menos 18 encontros com cada participante, cada encontro durando cerca de 30 minutos.

Serão apresentadas primeiramente as análises de grupo e individuais dos desempenhos nas avaliações iniciais e finais. Em seguida, serão apresentados os resultados dos treinos e testes para cada indivíduo de cada grupo. Finalmente, serão apresentados os resultados referentes às respostas de consulta nos botões que disponibilizavam as dicas para a escolha da alternativa correta.

### Pré e Pós Testes: com Lápis e Papel e no Computador

A média da porcentagem de acerto nas questões de multiplicação e divisão no Pré-teste com lápis e papel, para cada grupo, está apresentada na Tabela 5 (17 questões em cada). O critério para participar foi o mínimo de 80% de acerto em cada operação. Dois participan-

tes do Grupo Controle, C02 e C03, tiveram, respectivamente, apenas 17,6% e 70,6 % de acertos na operação de divisão, abaixo do mínimo necessário para participação. Foram incluídos para compor o número de participantes do grupo.

Tabela 5.

Porcentagem de acertos média ( $\bar{x}$ ) nas questões de multiplicação (Mult) e divisão (Div), no Pré-teste com lápis e papel para cada grupo experimental.

Grupo	Operação	
	MULT	DIV
DMP	96,1	92,2
DM	98,5	93,6
DP	96,1	97,5
SD	97,1	91,7
C	95,6	82,4

Os participantes foram divididos de acordo com gênero (feminino e masculino), escola (1 e 2) e ordem de exposição aos conjuntos de estímulos (1, 2 e 3) para analisar possíveis efeitos dessas variáveis. Testes de diferenças entre os desempenhos médios nas avaliações iniciais e finais de cada grupo foram realizados. Não foram encontradas diferenças significativas de gênero, escola e ordem de exposição aos estímulos fracionários. A

Tabela 6 mostra a porcentagem de acertos, média ( $\bar{X}$ ), o desvio padrão ( $DP$ ) e o tamanho da amostra ( $n$ ), nas relações absolutas e relativas, nos Pré e Pós-testes, considerando o gênero, escola de origem e ordem de exposição aos estímulos fracionários. O número de participantes ( $n$ ) que realizam os testes com lápis e papel e no computador é diferente, tendo em vista que o Grupo Controle realizou apenas a tarefa com lápis e papel.

Tabela 6.

Porcentagem de acertos média ( $\bar{X}$ ) e desvio padrão (dp) das relações absolutas e relativas, no Pré e Pós-testes com lápis e papel e no computador, considerando o sexo dos participantes, a escola de origem e a ordem de exposição aos conjuntos de frações.

Fator de Comparação	Níveis	Absolutas					Relativas			
		$n^a$	Pré		Pós		Pré		Pós	
			$\bar{X}$	DP	$\bar{X}$	DP	$\bar{X}$	DP	$\bar{X}$	DP
Teste com lápis e papel										
Sexo	M	28	77,8	21,1	67,8	23,7	12,3	8,5	53,8	25,6
	F	32	68,1	26,7	74,4	19,3	11,5	7,5	48,6	31,5
Escola	1	33	71,5	23,7	68,1	25,6	10,6	7,8	47,5	28,7
	2	27	74,1	25,6	75,2	15,2	13,4	7,8	55,3	28,9
Ordem	1	16	82,2	15,6	63,7	20	9,6	5,6	52,4	23,3
	2	16	71,9	27,4	65,2	20	8,4	5,2	61,6	33,7
	3	16	68,9	26,3	75,2	19,6	9,6	5,3	56,8	23,7
Teste MTS no computador										
Sexo	M	23	79,6	16,3	87,8	12,2	23,3	15,8	60	20,3
	F	25	82,6	14,4	81,1	15,9	21,1	13,8	59,4	24,6
Escola	1	27	81,5	14,1	82,6	15,9	20,8	14,2	56,6	22,9
	2	21	80,7	16,7	86,7	12,2	23,8	15,6	63,5	21,5
Ordem	1	16	82,2	15,9	87,8	13	20,6	17,1	52,4	19,4
	2	16	80,7	15,2	85,2	15,9	21,4	14,6	64,9	27,6
	3	16	80,7	15,6	80	14,1	24,3	12,7	61,8	18,4

<sup>a</sup> O  $n$  em cada tipo de teste foi diferente, por que os participantes do grupo controle só participaram do Pré e Pós-teste com lápis e papel.

A Figura 9 apresenta a porcentagem média de acertos e desvio padrão (barras verticais) de cada grupo, nas relações fracionárias relativas (gráficos na parte superior da figura) e absolutas (parte inferior da figura), nos testes antes e depois dos treinos. O dois asteriscos acima da barra indicam diferença estatisticamente significativa ( $p \leq 0,05$ ) entre a porcentagem de acertos do Grupo Controle em relação aos grupos experimentais. Um asterisco acima de uma das barras indica diferença significativa entre pré e pós-teste do mesmo grupo. Os gráficos à esquerda apresentam os resultados dos testes com lápis e papel e os gráficos à di-

reita apresentam os resultados dos testes com computador. Nos problemas que envolviam relações absolutas não houve diferença significativa entre os desempenhos no pré e no pós-testes dos grupos experimentais, mas sim para o Grupo Controle. O Grupo Controle mostrou aumento no desempenho na avaliação final. Para as relações fracionárias relativas houve um aumento no desempenho após os treinos (pós-teste) quando comparado com o desempenho antes dos treinos (pré-testes), para todos os grupos experimentais, mas não para o Grupo Controle. Os grupos experimentais (M, P, MP e SD) mostraram desempenho significativamente menor do que o do Grupo Controle no Pré-teste e significativamente maior no Pós-teste nas relações relativas. Não houve diferenças significativas entre os desempenhos dos grupos experimentais no pré e pós-testes. Resultados similares foram observados para os testes com lápis e papel e no computador.

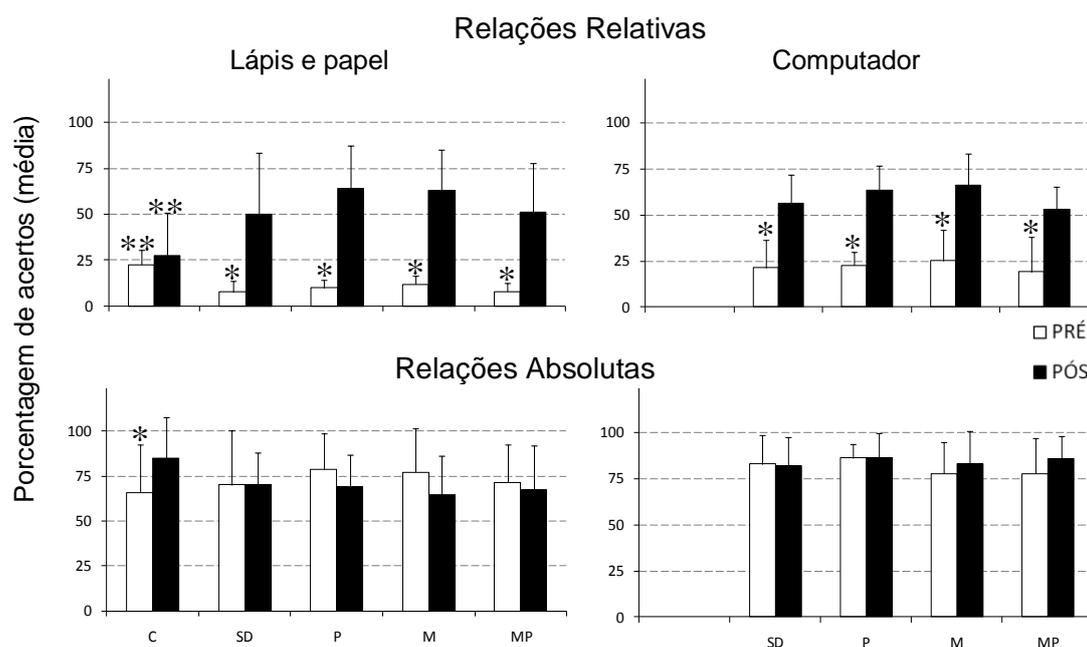


Figura 9. Porcentagem média de acertos e desvio padrão nas relações fracionárias relativas (painel superior) e absolutas (painel inferior), nos Pré e Pós-testes, com lápis e papel e no computador, dos participantes MP, M, P, SD e Controle (C). Um asterisco indica diferença estatisticamente significativa entre a medida antes e depois do Grupo (Intra grupo). Dois asteriscos indicam diferença estatisticamente significativa entre a medida e a mesma medida dos outros Grupos.

Na Figura 10, apresenta-se a porcentagem de acertos nas relações fracionárias relativas nos Pré e Pós-testes, para cada participante de cada grupo (MP, M, P, SD e C). No painel

da esquerda são apresentados os dados da Avaliação lápis e papel e da direita, o Teste no Computador.

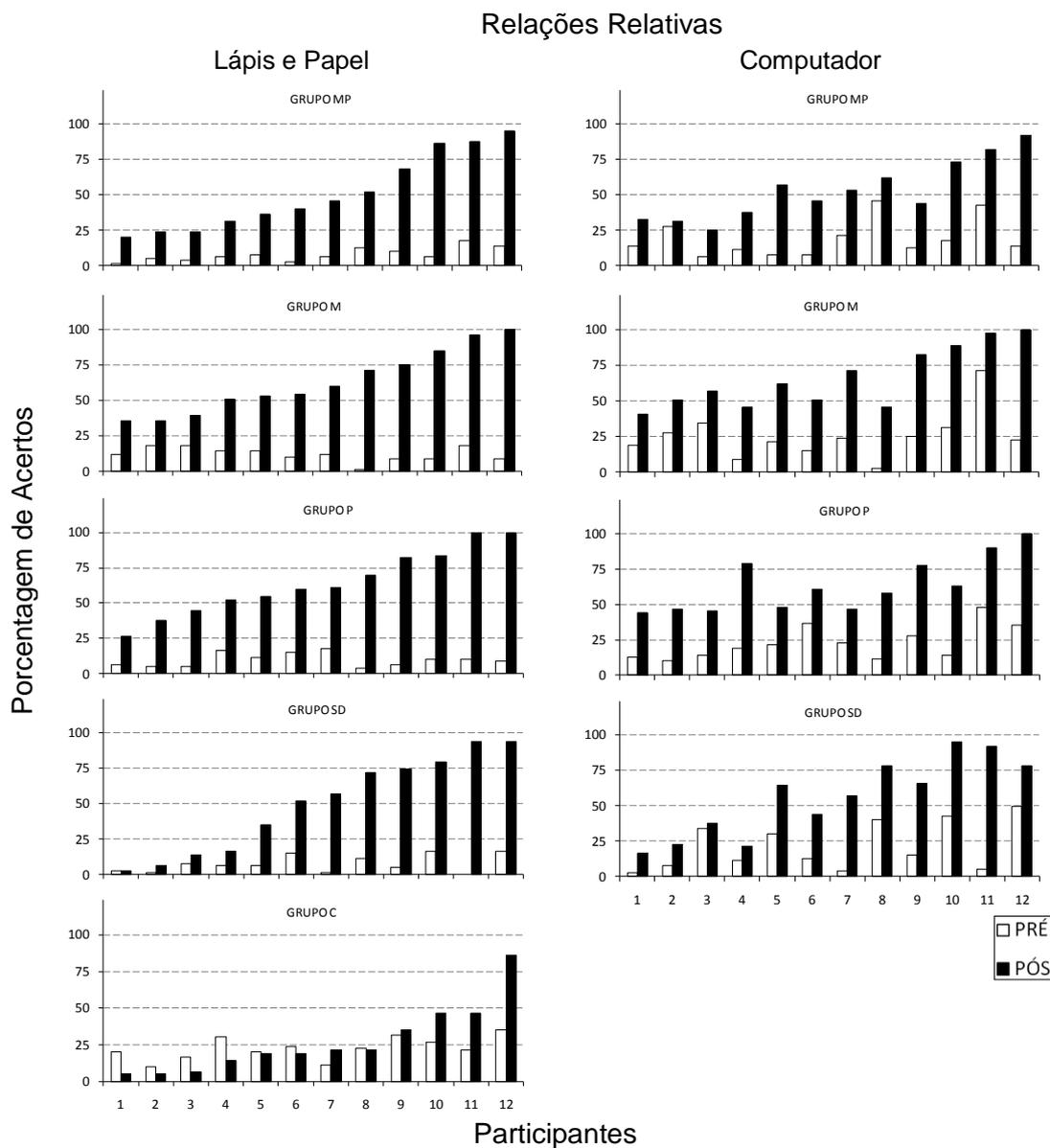


Figura 10. Porcentagem de acertos nas relações fracionárias relativas, nos Pré e Pós-testes com lápis e papel (painel à esquerda) e no computador (painel à direita), dos participantes MP, M, P, SD e Controle (C).

No Pré-teste com lápis e papel, os participantes, independente do Grupo, apresentaram Porcentagens de Acertos abaixo de 25% (exceto quatro participantes do Grupo Controle). Há um aumento no Pós-Teste, em relação ao Pré-teste, para todos os participantes dos Grupos MP, M e P, para onze participantes do Grupo SD e para cinco do Grupo Controle.

Comparando-se a dimensão do aumento no Pós-teste em relação ao Pré, os aumentos foram menores e menos freqüentes para o Grupo Controle. Nos Testes no Computador, há a mesma tendência descrita para os Testes com lápis e papel, aumento no Pós em relação ao Pré, para cada participante, com maior número de participantes abaixo de 25% de porcentagem de acertos no Pós, do Grupo Sem Dica.

Na Figura 11, encontra-se a distribuição de freqüência de participantes em faixas de porcentagem de acertos das relações fracionárias relativas. No painel à esquerda, estão os Testes com lápis e papel e no painel direito, Teste no Computador. Nos Pré-testes, a maioria dos participantes obteve porcentagem de acertos entre 0 e 20%. Nos Pós-testes, houve um aumento no número de participantes ao longo de porcentagens mais altas, exceto para o grupo controle. Todos os participantes dos grupos com dica mostraram desempenho maior que 20% nos Pós-testes.

Na Figura 12, apresenta-se a porcentagem de acertos nas relações fracionárias absolutas nos Pré e Pós-testes, para cada participante de cada grupo (MP, M, P, SD e C). No painel da esquerda são apresentados os dados da Avaliação lápis e papel e da direita, o Teste no Computador. No geral, a porcentagem nos pré-testes foi alta, se comparada com as Relações Relativas. Houve um grande número de participantes que apresentou desempenho mais baixo no Pós-teste em relação ao Pré-teste. O Grupo que menos apresentou participantes com desempenho menor no Pós Teste em relação ao Pré Teste foi o Grupo Controle, três participantes. Nos Grupos MP, M, P e SD, houve cinco, oito, oito e seis casos de redução dos escores no Pós-teste, respectivamente. No Teste no Computador, houve um menor número de participantes com desempenho inferior no Pós-teste, MP quatro, M cinco, P três e SD quatro.

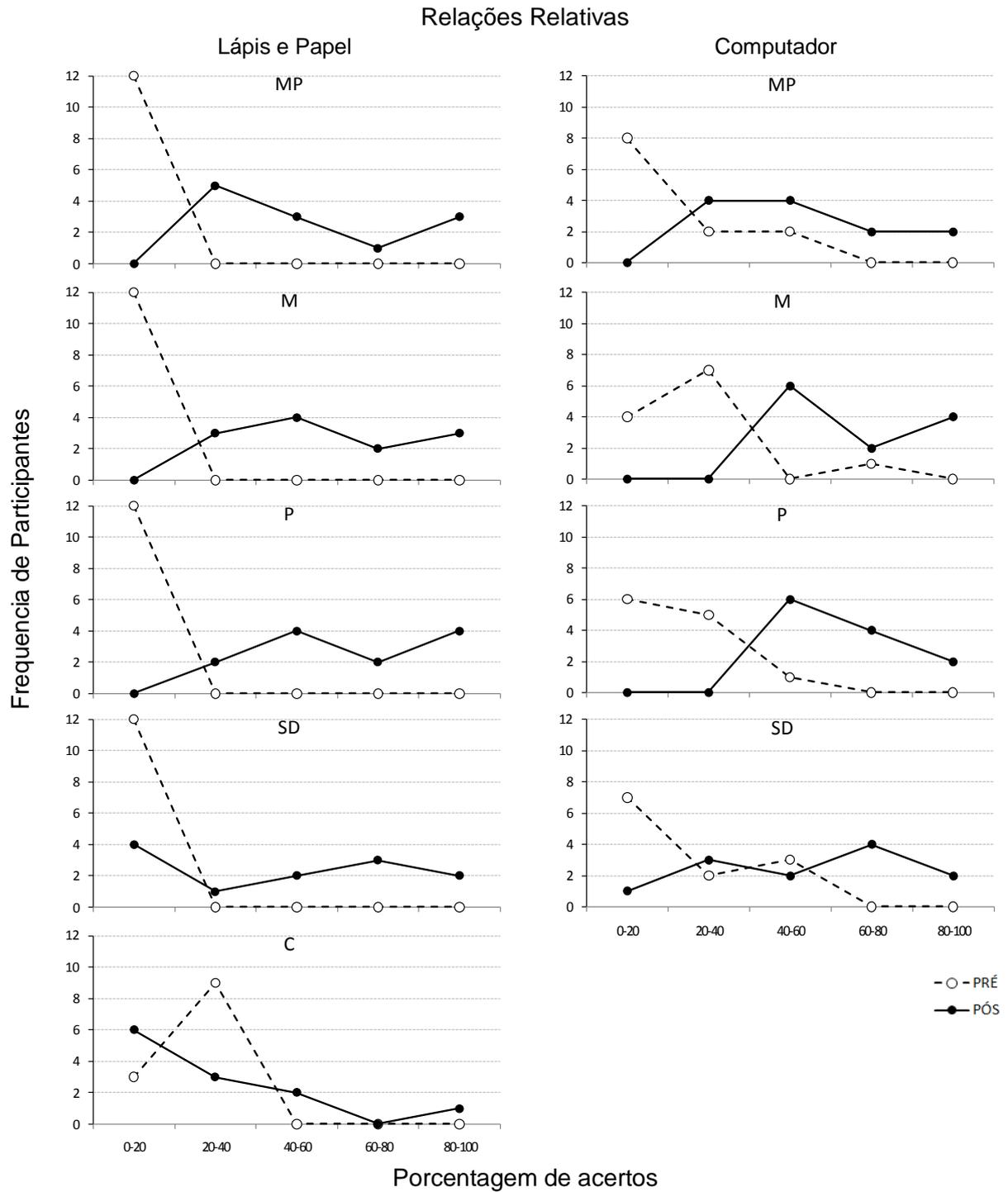


Figura 11. Frequência de Participantes em cada Intervalo de porcentagem de acertos nas relações fracionárias relativas, nos Pré e Pós-testes com lápis e papel e no Computador, dos Grupos MP, M, P, SD e C.

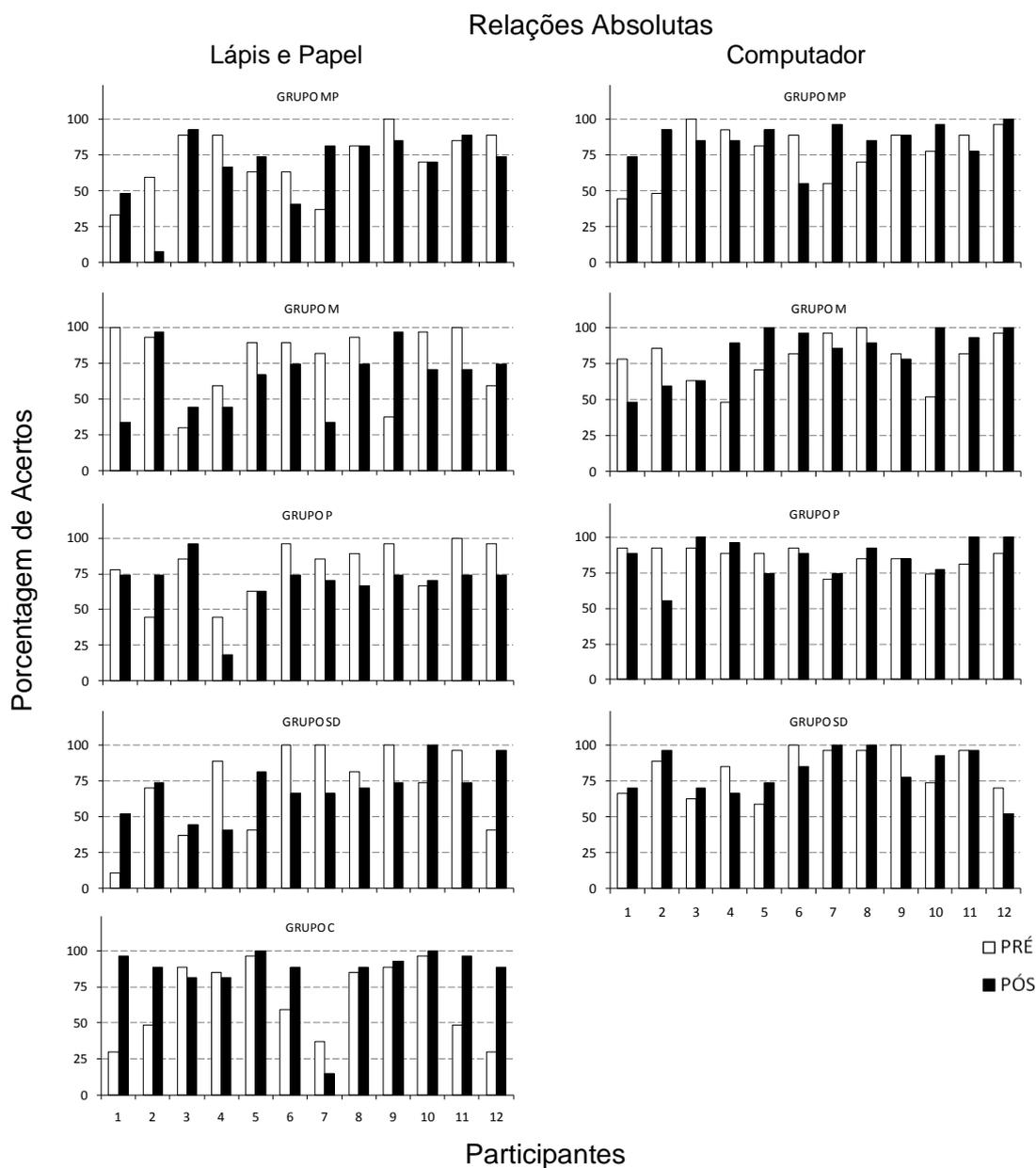


Figura 12. Porcentagem de acertos nas relações fracionárias absolutas, nos Pré e Pós-testes, com lápis e papel (painel à esquerda) e no computador (painel à direita), dos participantes MP, M, P, SD e Controle (C).

Na Figura 13, encontra-se a distribuição de frequência de participantes em faixas de porcentagem de acertos das relações fracionárias absolutas no Pré-teste (linha tracejada) e no Pós-teste (linha contínua). No painel à esquerda, estão os Testes com lápis e papel e no painel direito, Teste no Computador.

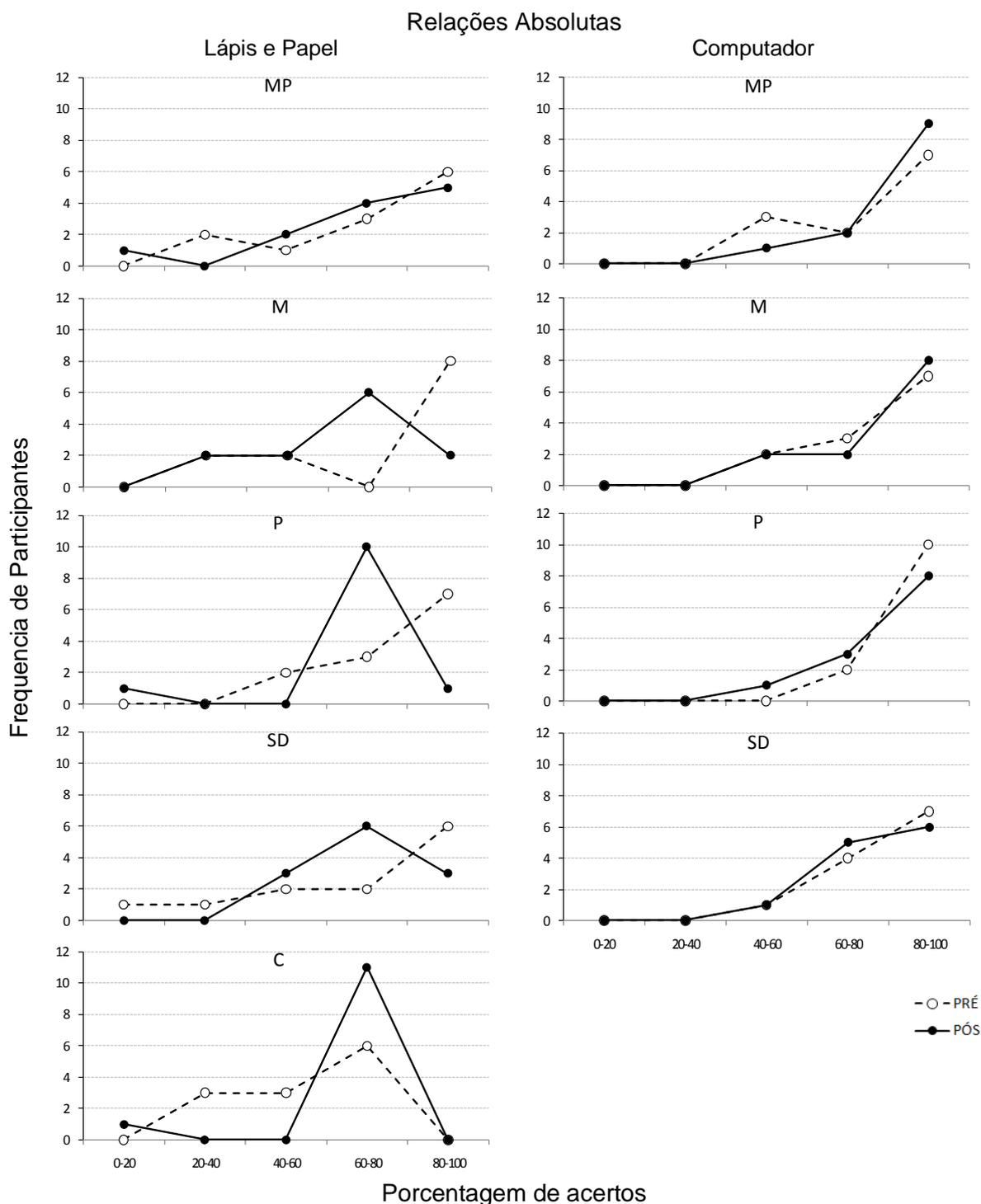


Figura 13. Frequência de Participantes em cada Intervalo de porcentagem de acertos nas relações fracionárias absolutas, nos Pré e Pós-testes, com lápis e papel e no Computador, dos Grupos MP, M, P, SD e C.

Nos Pré-testes, a maioria dos participantes dos grupos experimentais obteve porcentagem de acertos entre 80 e 100% nas duas modalidades de teste. Todos os participantes obtiveram escores acima de 40% de acerto nos testes realizados no computador. Houve um des-

locamento da distribuição dos participantes experimentais para porcentagens entre 60 e 80% nos testes com lápis e papel, mas as distribuições nos testes com computador foram semelhantes nos pré e pós-testes.

### Relações de Treino

O Pré-teste no computador possuía tentativas de teste das relações AC (e.g.,  e  $\frac{1}{3}$ ) e BC (e.g.,  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{6}$ ). Após o início das condições experimentais, as relações AC e BC foram diretamente treinadas. A Figura 14 apresenta a porcentagem de acertos em tentativas AC e BC no Pré-teste no computador e nos treinos dos três ciclos para cada participante e para o grupo. O Treino da relação AC sempre precedeu o Treino da relação BC. Para todos os grupos as porcentagens de acertos no Pré-teste foram baixas, exceto para MP11, M 11, P11 e SD 8. A partir da primeira exposição ao treino, a porcentagem de acerto aumentou para todos os participantes, acima de 75%, exceto para dois participantes (MP11 e SD01). A porcentagem permaneceu alta nos ciclos subsequentes, exceto para os participantes SD09 e SD10, apenas para a relação AC. A média de cada grupo, apresentada na extremidade direita da figura reproduz o padrão descrito, baixa porcentagem de acerto no Pré-Teste, aumento acentuado nos treinos ao longo dos ciclos. Não houve diferença sistemática entre os Grupos MP, M, P e SD.

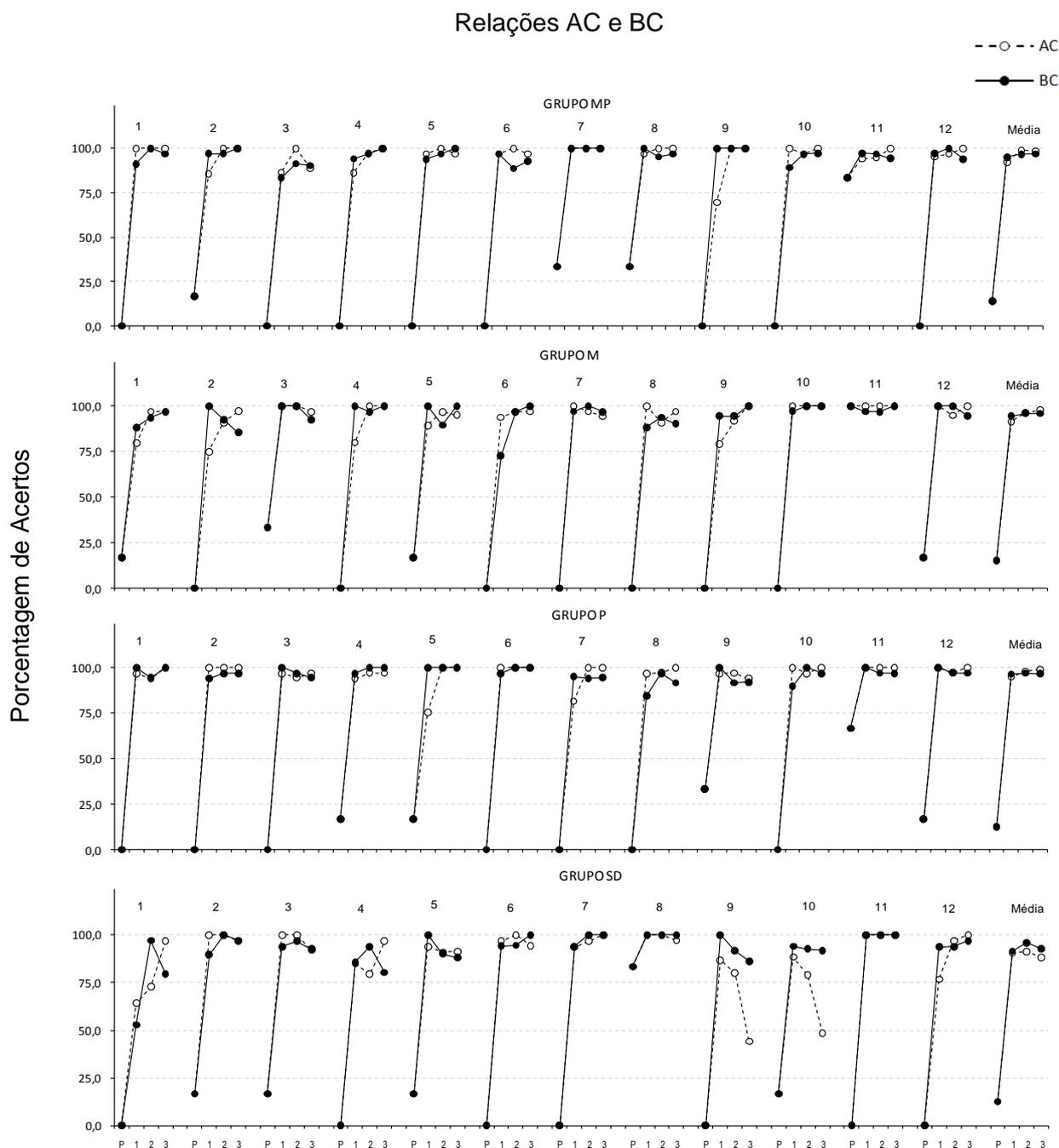


Figura 14. Porcentagem de acertos nas relações fracionárias relativas AC e BC, no Pré-teste (P) e nos três ciclos de treinos (1, 2 e 3), para cada participante e a média de cada grupo MP, M, P e SD.

### Relações emergentes

O Pré-teste no computador possuía tentativas de teste das relações CA (e.g.,  $\frac{2}{6}$  e  $\blacksquare$ ) e CB (e.g.,  $\frac{2}{6}$  e  $\frac{1}{3}$ ). Após o início das condições experimentais, as relações CA e CB, consis-

tindo nas relações simétricas dos treinos. A Figura 15 apresenta a porcentagem de acertos em tentativas CA e CB no Pré-teste no computador e nos testes dos três ciclos para cada participante e para o grupo. A linha contínua apresenta os dados dos testes das relações CA e CB. A tracejada das relações AB e BA, descritas mais a frente.

Comparados aos dados dos treinos, anteriormente apresentados, há uma maior variabilidade. A maioria dos participantes (31 dos 48) obteve porcentagem de acertos nas tentativas CA e CB durante o Pré-Teste abaixo de 25%. Houve um aumento já no primeiro Teste CA/CB, realizado após o primeiro Treino AC e BC, para a maioria dos participantes (exceto SD01), embora o aumento não tenha sido tão acentuado como na análise das relações treinadas. As médias dos grupos apresentam um padrão semelhante, baixa porcentagem no Pré-teste, aumento já no primeiro teste e valores a partir do primeiro teste superiores a 75%. Não há diferença sistemática entre os Grupos MP, M, P e SD.

Após cada Treino AC e BC e cada teste CA/CB, foi realizado o Teste AB/BA (e.g.,   $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{3}$  ) , caracterizando um Teste de Relação Absoluta. Na Figura 15, com linha tracejada, são apresentados os dados referentes às tentativas das relações AB e BA do Pré-Teste e dos três testes realizados após cada treino.

A porcentagem de acertos nas tentativas AB/BA do Pré-Teste para 36 participantes está acima de 75%. Muitos participantes possuíam o repertório de Relação Absoluta já no início. Não foi a porcentagem baixa de acertos dessa relação o critério de participação no estudo, e sim o desempenho insuficiente nesse tipo de tentativa durante o Treino de linha de base, produziu ensino direto dessa relação. Todos os participantes alcançaram porcentagens acima de 75% ao longo das sucessivas exposições aos Testes. Não há diferença sistemática entre os Grupos MP, M, P e SD.

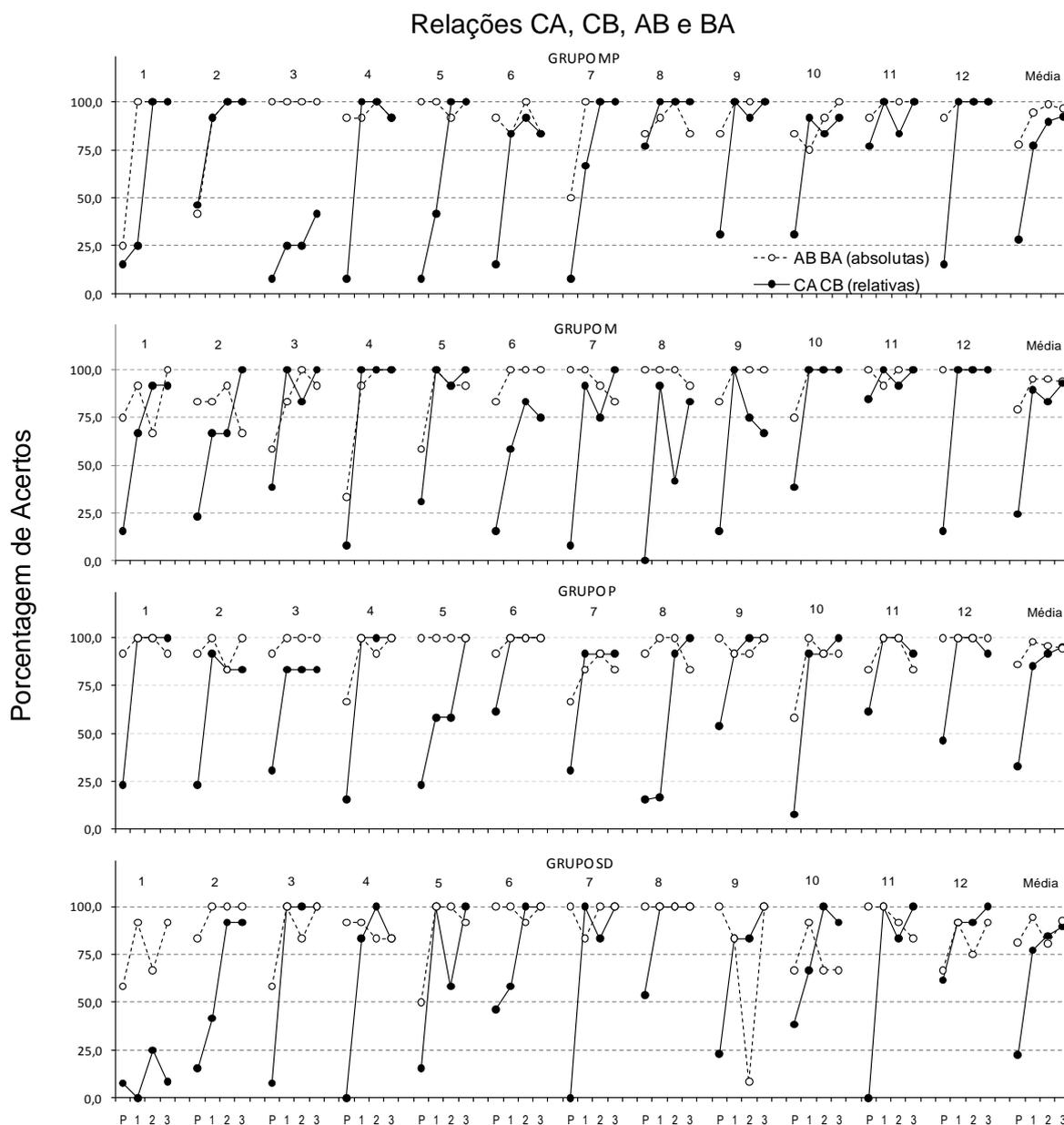


Figura 15. Porcentagem de acertos nas relações fracionárias relativas CA e CB e nas relações fracionárias absolutas AB/BA, no Pré-teste (P) e nos três ciclos de testes (1, 2 e 3), para cada participante e a média de cada grupos MP, M, P e SD.

### Teste com Novas Formas

Após a realização de cada Treino AC e BC, cada Teste CA e BC e AB/BA, havia o testes das relações CA e das relações AB/BA (e.g.,  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{3}$ ), utilizando novas formas pictográficas das frações (e.g.,  $\frac{1}{3}$  ou  $\frac{1}{3}$ ).

Na Figura 16, a linha contínua, corresponde a porcentagem de acertos dos três testes

das relações CA, realizados após cada Treino AC e BC. Não houve tentativas dessas relações com essas apresentações pictográficas durante o Pré-Teste.

A maioria dos participantes alcançou em algum momento porcentagens superiores a 75% de acerto, exceto para MP03, M02, SD01 e SD04. Não há diferença sistemática entre os Grupos MP, M, P e SD. A linha tracejada na Figura 16, apresenta a porcentagem de acertos dos testes das relações AB e BA, utilizando novas formas pictográficas. A relação AB e BA, trata-se de uma relação absoluta entre Frações, que foi treinada durante o Treino de Linha de Base e Treino de Absolutas, antes do início das condições experimentais.

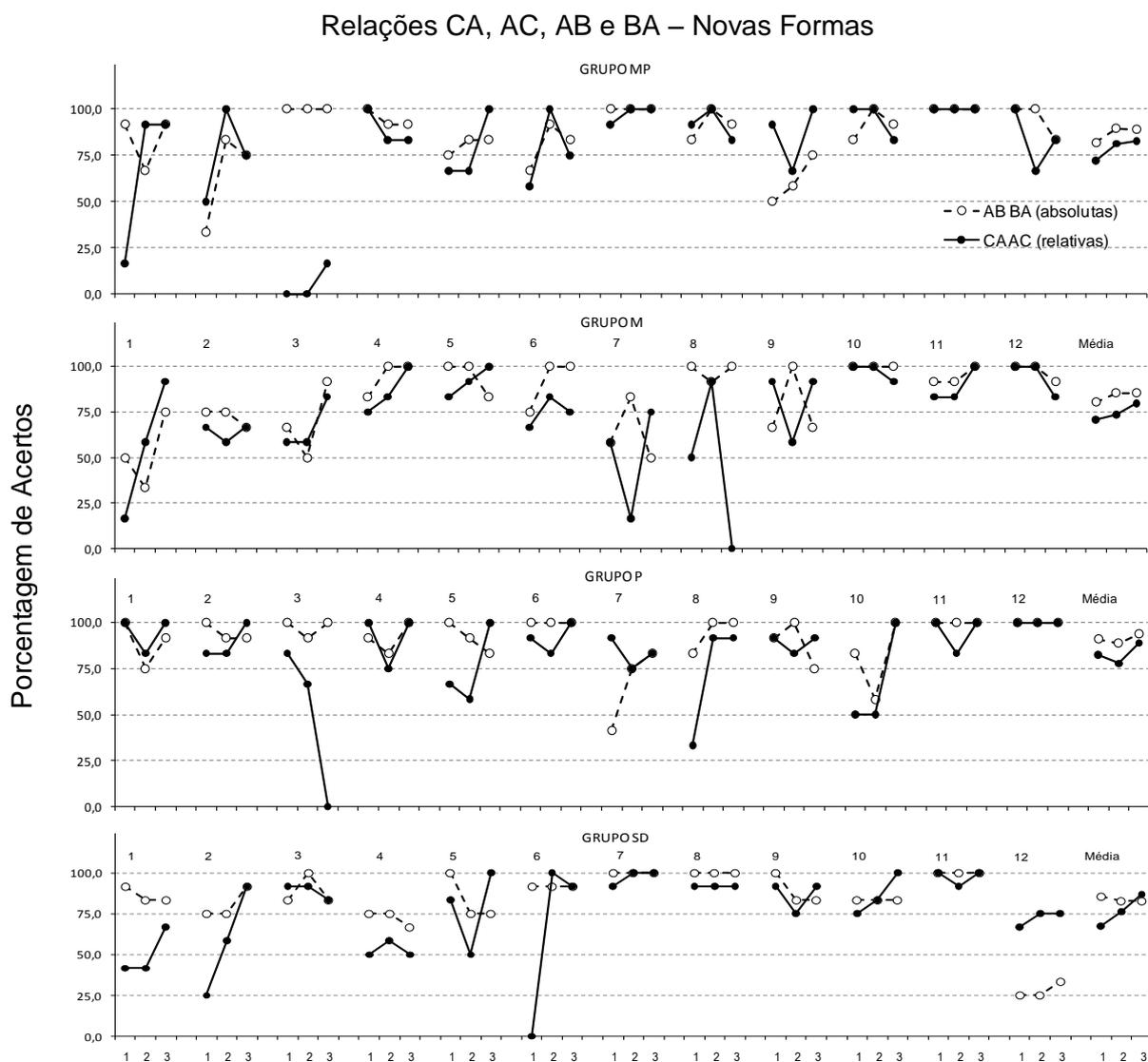


Figura 16. Porcentagem de acertos nas relações fracionárias relativas CA e CB e nas relações fracionárias absolutas AB/BA, nos três ciclos de testes (1, 2 e 3), para cada participante e a média de cada grupo MP, M, P e SD, utilizando novas formas pictóricas.

Não houve tentativas durante o Pré-Teste das relações AB e BA utilizando as Formas pictográficas utilizadas no presente Teste com Novas Formas. A porcentagem de acertos desde a primeira exposição ao Teste ficou acima de 75% para a maioria dos participantes, exceto para os participantes MP02, MP06 e MP09; M01, M02, M03 e M09; P07 e SD12. As médias foram altas, não houve diferença sistemática entre os Grupos MP, M, P e SD.

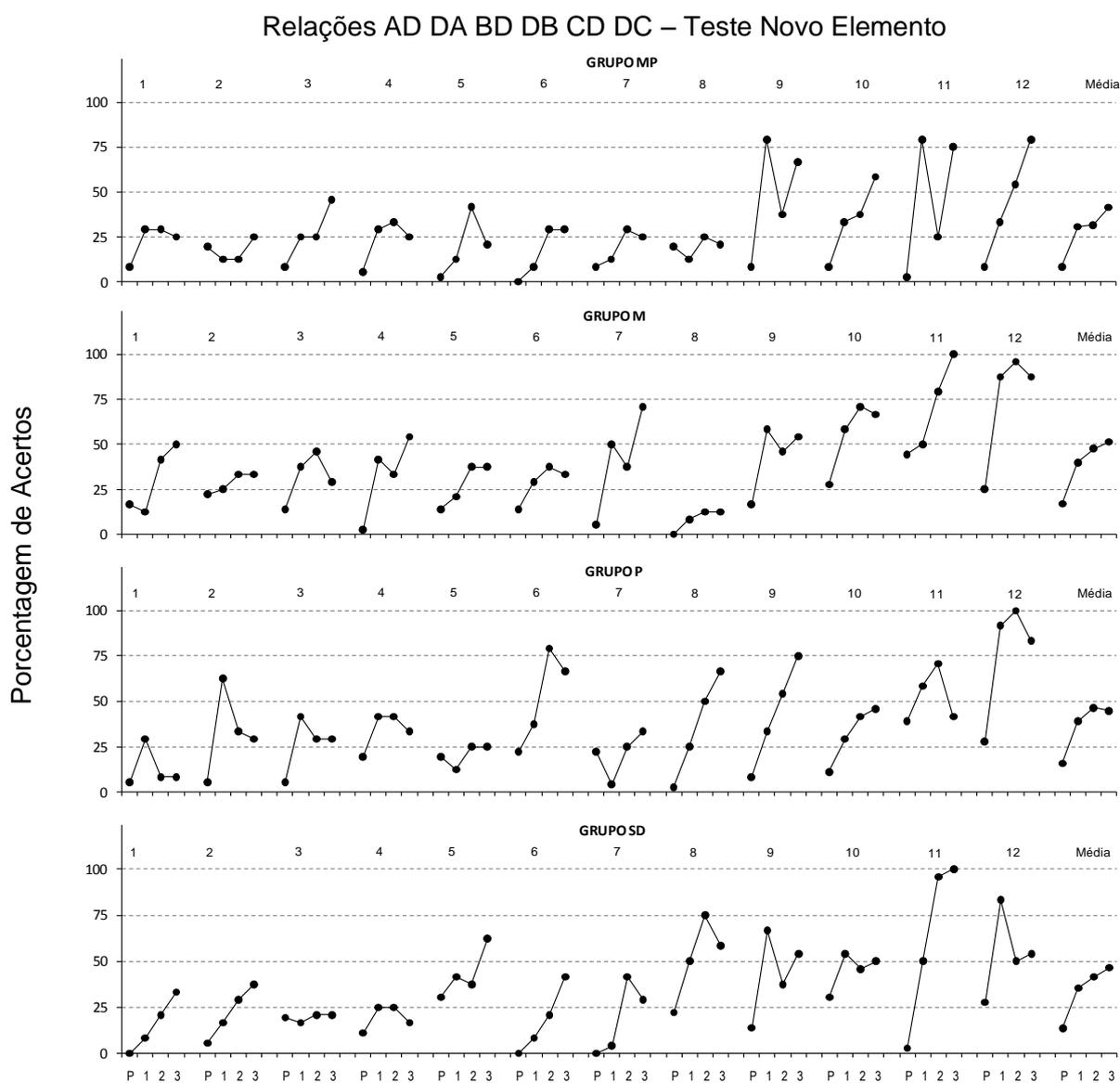


Figura 17. Porcentagem de acertos nas relações fracionárias relativas D-(ABC), no Pré-teste (P) e nos três ciclos de testes (1, 2 e 3), para cada participante e a média de cada grupo MP, M, P e SD.

### Teste com Novo Elemento de Classe Treinada

Após a realização de cada um dos três treinos, houve um teste para verificar se um

novo elemento matematicamente equivalente aos estímulos fracionários utilizados nos treinos (e.g.,  $\frac{3}{9}$ ), também controlaria o comportamento de seleção dos participantes (Figura 17).

As relações AD, DA, BD, DB, CD e DC foram verificadas. A porcentagem de acertos das tentativas com essas relações que ocorreram durante o Pré-teste, e ao longo dos três ciclos de testes, está apresentada na Figura 17. A maioria dos participantes tem porcentagem de acertos menor que 25% no Pré-Teste (P). Houve aumento da porcentagem, logo na primeira exposição ao teste durante o procedimento, exceto para seis participantes, MP2, MP8, M1, P5, P7 e SD3, mas esse aumento é pequeno para a maioria dos alunos. Apenas 11 participantes alcançaram porcentagem de acertos maiores que 75%: MP9, MP11, MP12, M11, M12, P6, P9, P12, SD8, SD11 e SD12.

### Teste Novas Frações

Foi realizado um Teste com novas classes de estímulos, isto é, frações matematicamente não equivalentes às utilizadas durante os treinos (e.g.,  $E = \frac{1}{18}$ ,  $F = \frac{1}{9}$  e  $G = \frac{2}{18}$ ). As classes utilizadas no Teste com Novas Frações estão apresentadas na Figura 8. A porcentagem de acertos em tentativas EF, FE, EG, GE, FG e GF no Pré-teste no computador (P) e nos testes dos três ciclos para cada participante e para o grupo está apresentada na Figura 18.

A linha contínua da Figura 18 apresenta os dados das relações relativas EG, GE, FG e GF. A porcentagem de acertos no Pré-teste é baixa para a maioria dos participantes, acima de 50% apenas para sete alunos: MP8, MP11, M11, P6, P11, SD8 e SD10. Metade dos participantes, 24, teve porcentagens abaixo de 25% no Pré-Teste (P): MP3, MP4, MP5, PM6, MP9, M1, M3, M4, M6, M7, M8, M12, P2, P3, P7, P8, P10, SD1, SD2, SD4, SD6, SD7, SD9 e SD11. Houve aumento da Porcentagem ao longo dos três testes dessas relações durante o procedimento, mas há variabilidade entre os participantes. Dos participantes, 36 alcançaram

em algum momento dos três ciclos, a porcentagem de 75%.

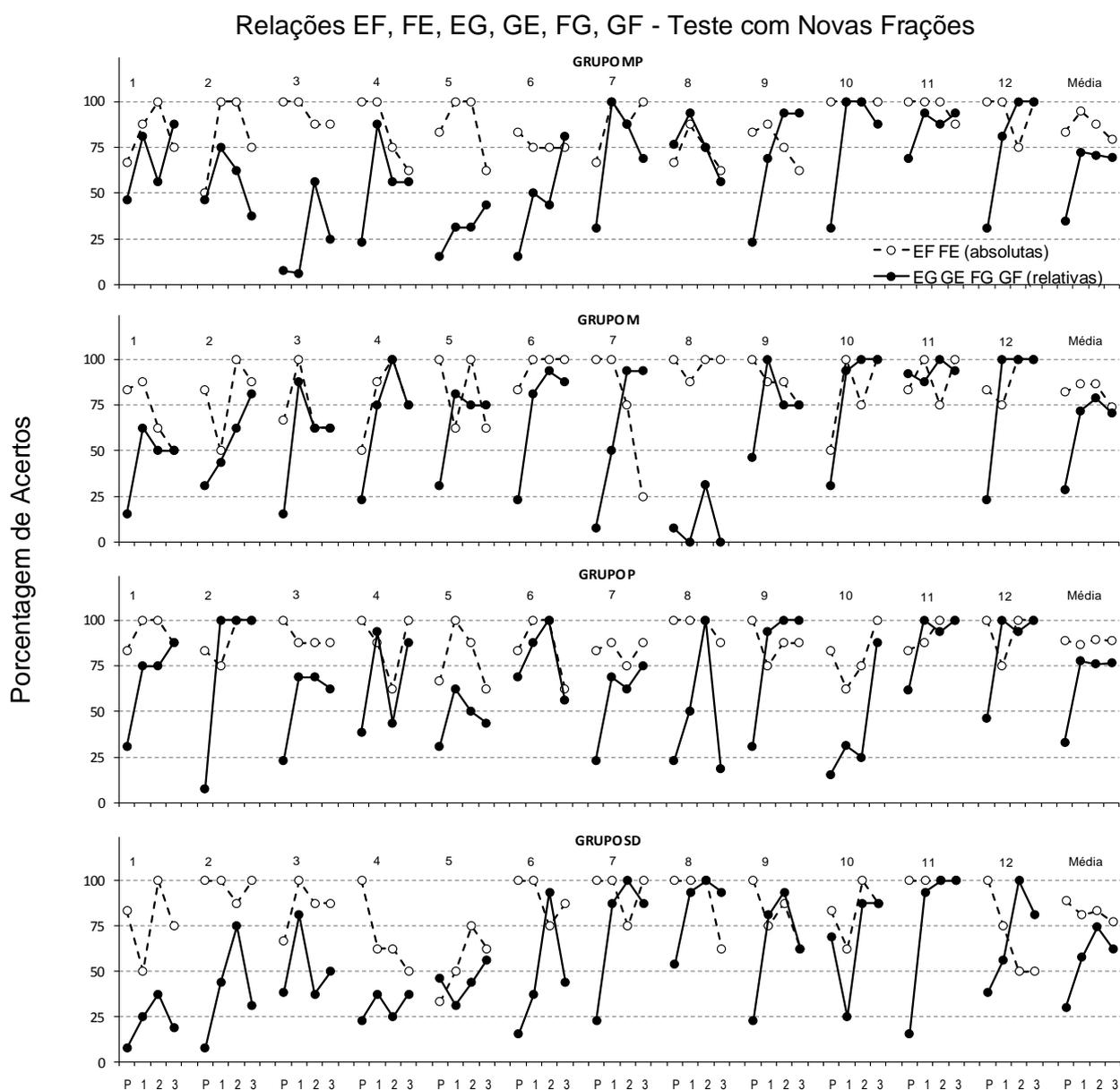


Figura 18. Porcentagem de acertos nas relações fracionárias absolutas EF e FE e relativas EG, GE, FG e GF, no Pré-teste (P) e nos três ciclos de testes (1, 2 e 3), para cada participante e a média de cada grupo MP, M, P e SD, utilizando novas frações.

Os participantes foram divididos aleatoriamente em Grupo Multiplicação e Proporcionalidade, Grupo Multiplicação, Grupo Proporcionalidade e Grupo Sem Dica. Durante as tentativas do Treino AC e/ou BC, havia um botão de ajuda, para os Participantes dos grupos com dica. Caso o botão fosse clicado, havia uma dica para a solução da tarefa (e.g.,



e/ou  $\frac{1 \times 2}{3 \times 2}$ ). O número de acessos acumulado no botão de ajuda, ao longo dos Treinos AC e/ou BC e dos Treinos Mistos, a cada ciclo, estão apresentados nas Figuras 19, 20 e

21, para os participantes com dica de proporcionalidade, multiplicação e ambas, respectivamente.

O Grupo P teve acesso à dica de proporcionalidade durante o Treino AC. Nove dos 12 participantes desse grupo não tiveram mais do que 20 acessos à dica da proporcionalidade durante as exposições aos treinos. No geral, houve maior número de consultas no treino do primeiro ciclo. Houve um decréscimo no número de consultas ao longo de cada nova exposição ao treino para 8 participantes.

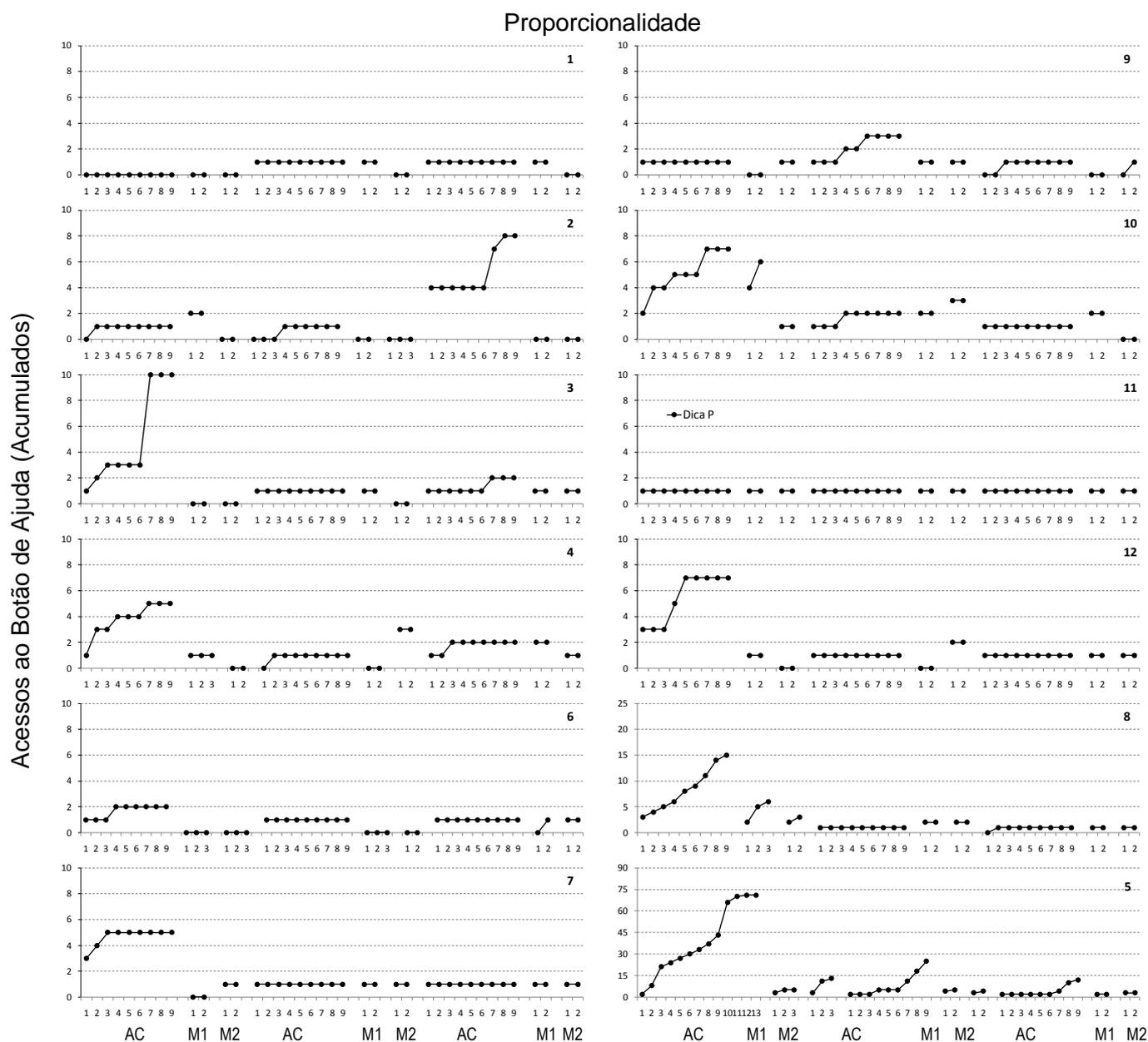


Figura 19. Número acumulado de acessos ao botão de ajuda, ao longo dos Treinos AC e Treinos Mistos (M), para cada participante do Grupo Dica da Proporcionalidade, ordenados

pelo número de acessos.

O Grupo M teve acesso à dica de multiplicação durante o Treino BC. Para o Grupo M, dez dos 12 participantes não tiveram mais que 20 acessos à dica da multiplicação durante a exposição aos treinos. No geral, houve maior número de consultas no primeiro ciclo. Houve decréscimo no número de consultas ao longo de novas exposições ao treino para 9 participantes.

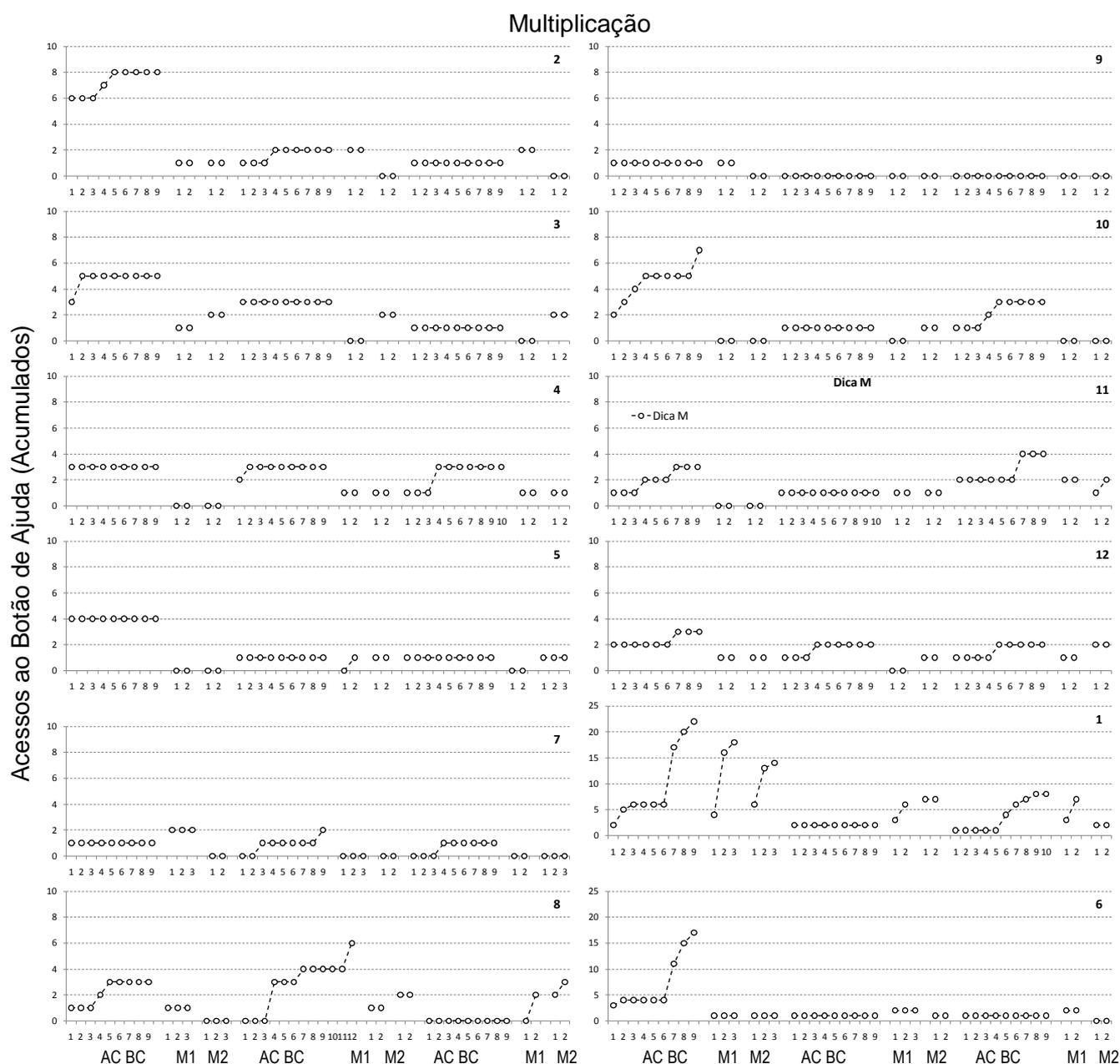


Figura 20. Número acumulado de acessos ao botão de ajuda, ao longo dos Treinos BC e Treinos Mistos (M), para cada participante do Grupo Dica da Multiplicação, ordenados pelo número de acessos.

Para os participantes MP (Multiplicação e Proporcionalidade), o Treino AC, com a dica da Proporcionalidade, ocorria antes do treino BC. Nota-se um maior número de acessos à Dica P, em relação à Dica M, que ocorria durante o Treino BC. Há uma diminuição do número de consultas ao longo das sucessivas exposições aos treinos, semelhante à encontrada com os outros dois grupos.

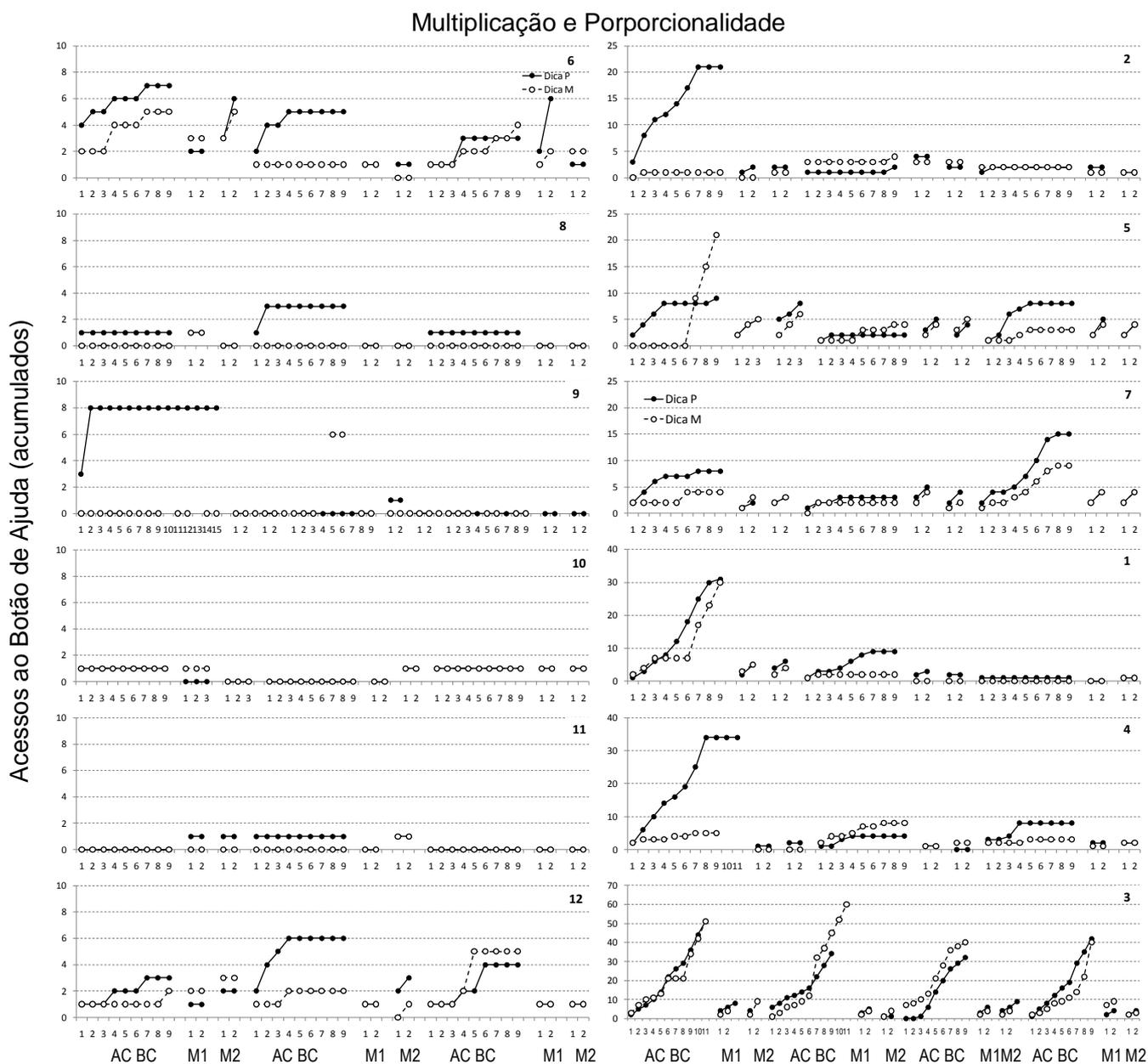


Figura 21. Número acumulado de acessos ao botão de ajuda, ao longo dos Treinos AC e

Treinos Mistos (M), para cada participante do Grupo Dica da Proporcionalidade, ordenados pelo número de acessos.

## DISCUSSÃO

O presente estudo utilizou o procedimento de pareamento ao modelo no ensino de relações condicionais entre frações pictóricas e frações numéricas. Foi investigado o efeito de dicas acessíveis através de comportamento precorrente auxiliar sobre o desempenho nas relações fracionárias nos treinos e testes.

Observou-se, para a maioria dos participantes: (1) o estabelecimento das relações de treino; (2) a formação de classes equivalentes entre frações pictóricas e frações numéricas e pictóricas; (3) a generalização do responder quando novas frações pictóricas foram utilizadas; (4) resultados moderados e variabilidade em avaliação com novo elemento matematicamente equivalente à classe treinada; (5) responder generalizado a novas frações não utilizadas durante os treinos; (6) comportamento de consulta ao botão de ajuda no início do procedimento de ensino e a cada exposição a novas classes de frações; (7) diferença significativa entre os grupos experimentais e controle na aprendizagem de relações relativas; (8) ausência de efeito diferencial do tipo de dica nos treinos e testes; e (9) semelhança de desempenhos envolvendo tarefas com lápis e papel e no computador.

### Eficácia dos Treinos

O procedimento de pareamento ao modelo foi utilizado durante os Treinos AC e BC para estabelecer relações condicionais entre frações pictóricas (e.g., ) e frações numéricas redutíveis (e.g.,  $\frac{2}{6}$ ) e entre frações numéricas não redutíveis (e.g.,  $\frac{1}{3}$ ) e frações numéricas (e.g.,  $\frac{2}{6}$ ). Os Treinos das relações AC e BC foram eficientes em estabelecer relações condicionais entre frações matematicamente equivalentes. Poucas repetições de sessões de treino, baixo número de tentativas e poucos erros foram encontrados para a maioria dos participantes. Resultados semelhantes foram encontrados por Dos Santos, Cameschi e Hanna

(no prelo) e Lynch e Cuvo (1995).

No estudo de dos Santos, Cameschi e Hanna (no prelo), houve menor quantidade de erros e número de blocos, para alcançar o critério de aprendizagem dos treinos, quando os numeradores das tentativas de treino foram constantes (e.g., modelo  $\frac{1}{3}p$ , comparações  $\frac{2}{6}$ ,  $\frac{2}{8}$  e  $\frac{2}{10}$ ), do que quando os numeradores foram variados (e.g., modelo  $\frac{3}{9}p$   $\frac{4}{12}$ ,  $\frac{5}{20}$  e  $\frac{3}{5}$ ).

No presente estudo, as tentativas de treino foram similares à condição de numeradores constantes de dos Santos, Cameschi e Hanna (no prelo) (e.g., modelo  $\frac{1}{3}$ , comparações  $\frac{2}{6}$ ,  $\frac{2}{8}$  e  $\frac{1}{5}$ ), não apenas na variação menor dos numeradores, mas nas relações entre as frações. No

treino AC da condição numeradores iguais de dos Santos, Cameschi e Hanna (no prelo), uma mesma relação era requerida dos participantes, independente da classe treinada:  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{6}$ ,  $\frac{1}{4}$  e

$\frac{2}{8}$ ,  $\frac{1}{5}$  e  $\frac{2}{10}$ , como no presente estudo. O repertório de “multiplicar por dois o numerador e o

denominador” ajudava na resolução da tarefa. Na condição numeradores diferentes, cada classe matemática exigia uma operação diferente:  $\frac{3}{9}$  e  $\frac{4}{12}$ ,  $\frac{2}{8}$  e  $\frac{5}{20}$ ,  $\frac{1}{5}$  e  $\frac{3}{15}$ . Os resultados

encontrados nos treinos do presente estudo replicam os dados encontrados na condição de numeradores iguais de dos Santos, Cameschi e Hanna (no prelo).

As porcentagens de acertos próximas a 100% a partir da primeira exposição ao Treino de relações AC BC e a manutenção de valores altos indicam efetividade, especialmente se comparado com desempenho nos Pré-Testes dessas relações. O procedimento de pareamento ao modelo associado com o procedimento de minimização de erros foi eficiente no estabelecimento das respostas sob controle dos estímulos, desde o início do contato com os treinos. A minimização de erro consistiu no surgimento gradual das comparações e o aumento gradual

de comparações incorretas a cada tentativa. A cada aparição de um novo modelo, na primeira tentativa, havia apenas a disponibilidade da comparação correta. Na segunda e terceira tentativa, havia disponíveis uma comparação correta e apenas uma incorreta, em posições diferentes. Apenas após a quarta tentativa as três comparações, uma correta e duas incorretas, ficavam disponíveis. Quando a alternativa incorreta era selecionada, a tentativa era repetida. Esse procedimento pode ter favorecido a efetividade do treino. Outros estudos têm relatado sucesso semelhante com a utilização desse procedimento para iniciar o Treino Discriminativo (e.g., Melo, Jesus & Hanna, 2005; Hanna, Albuquerque, Quinteiro & Kohlsdorf, 2004).

O presente estudo foi baseado em estudos anteriores, que utilizaram o método experimental para verificar o efeito de variáveis sobre a aprendizagem (e.g., minimização de erro). Estudos empíricos sobre processos de aprendizagem geram tecnologias de ensino eficientes. O planejamento do treino baseado no conhecimento científico sobre aprendizagem, especificamente sobre procedimentos de ensino eficientes, foi importante para os resultados positivos. Esse conhecimento, embora parcialmente disponível, não tem sido utilizado por educadores com frequência, inclusive nos chamados gargalos da educação formal (e.g., frações equivalentes).

### **Formação de Classes de Frações Equivalentes**

O desempenho nas relações simétricas CA e CB, realizadas após os treinos AC e BC, indica formação de classes de estímulos equivalentes. A comparação entre o desempenho dessas relações testadas durante o Pré-teste e no primeiro ciclo após os Treinos AC e BC, mostra aumento para todos os participantes, exceto o participante SD1, que não teve acesso à dicas. Esses dados corroboram dos Santos, Cameschi e Hanna (no prelo) e Lynch e Cuvo (1995).

Os resultados do presente estudo replicam estudos anteriores com frações (Tulon, 2005; dos Santos, Cameschi & Hanna, no prelo) e com frações e decimais (Leader e Barnes-

Holmes, 2001; Lynch e Cuvo, 1995), que demonstraram a formação de classes de estímulos equivalentes entre estímulos matemáticos, treinando-se apenas algumas relações diretamente. Nos estudos houve a emergência de classes, o que sugere que o treino condicional foi uma forma eficiente e econômica de formar classes de estímulos fracionários, matematicamente equivalentes.

A porcentagem de acertos nas tentativas das relações AB/BA foi alta para a maioria dos participantes, exceto SD9 e SD10. Treinos condicionais com procedimento de pareamento ao modelo podem formar classes de estímulos, emergindo relações não treinadas entre estímulos (Sidman & Tailby, 1982). A afirmação sobre a formação de classes depende da verificação de relações simétricas e transitivas entre os estímulos, sem treino direto. A partir do treino AC/BC, CA/CB são relações simétricas e AB/BA são transitivas. No presente estudo, que teve como foco o ensino de relações fracionárias relativas, as relações absolutas AB/BA foram treinadas no início do procedimento. Vários participantes já possuíam tal responder relacional, mesmo antes de ingressarem nas tarefas experimentais, não sendo, portanto, relações emergentes. De fato, o desempenho nas relações AB/BA foi superior ao desempenho nas relações CA/CB, indicando possivelmente efeito de história (i.e., treino na escola e durante treino de linha de base). As altas porcentagens de acerto nas relações absolutas AB/BA durante os testes impedem a afirmação sobre a emergência de classes de estímulos equivalentes sem treino direto. Não apenas os treinos condicionais entre AC/BC podem explicar o desempenho nas relações absolutas AB/BA. O repertório pode ser resultado do treino com  $n$  exemplares durante os treinos iniciais, sugerindo um repertório generalizado de *relacionar* o numerador com o número de partes tomadas e o denominador com o número de partes iguais em que o todo foi dividido. No trabalho de dos Santos, Cameschi e Hanna (no prelo), a relação absoluta é estabelecida durante o treino. No trabalho de Tulon (2005), o estabelecimento das relações absolutas entre o nome da fração, a fração numérica e a fração

pictórica é o objetivo do estudo. Os dados sobre a efetividade do Treino de Linha de Base e Treino de Absolutas, que estabeleceram o responder a relações absolutas entre estímulos, replicam os resultados dos treinos absolutos de dos Santos, Cameschi e Hanna (no prelo) (i.e., AB) e de Tulon (2005) entre frações numéricas e pictóricas (i.e., BC).

### **Generalização para Novas Formas de Frações Pictóricas**

Houve generalização do responder para novas formas para a maioria dos participantes, indicando efetividade do procedimento de ensino. As relações simétricas CA e relações AC, realizadas com novas formas, mostrou resultados inferiores aos encontrados nas relações CA e AC, com figuras originais. A diminuição não foi acentuada para a maioria dos participantes. A diminuição pode indicar que o controle do comportamento estabelecido durante os treinos incluiu propriedades irrelevantes dos estímulos fracionários, tais como forma escolhida. Tal suposição pode ser testada em estudos futuros, variando gradativamente propriedades físicas de estímulos fracionários e medindo-se as respostas, para verificar gradientes de generalização (Terrace, 1966). Apenas a partir de testes cuidadosos é possível afirmar sobre propriedades críticas para a manutenção do responder, e tais propriedades críticas podem ser discrepantes das planejadas inicialmente pelo experimentador ou educador, indicando discrepantes Topografias de Controle de Estímulos (McIlvane, 1998; Dube e McIlvane, 1996). No estudo atual, durante os treinos, foi utilizada apenas uma forma pictográfica (i.e., retângulo). Durante o ensino, pode ser efetiva a utilização de alguns diferentes exemplares de formas (e.g., retângulo e cilindro), para garantir a generalização para novas formas (e.g., círculo e losango).

Os participantes mostraram desempenho inferior nas relações absolutas AB e BA, com novas formas, em relação às formas originais. A ausência dos escores dessas tentativas durante os Pré-testes impede uma análise mais minuciosa do efeito do procedimento. Porém, o desempenho com novas formas é acima de 75% para a maioria dos participantes. No estu-

do de Leader e Barnes-Holmes (2001), o responder foi 100% quando as frações pictóricas tinham partes tomadas contínuas, maximizando a semelhança entre o estímulo de treino e de teste. No presente estudo, a semelhança dos estímulos pictóricos de treino e teste de novas formas foi alta, replicando os achados de Leader e Barnes-Holmes (2001). Porém, no presente estudo, as frações pictóricas novas sempre possuíram uma parte tomada. Novos estudos devem ser desenvolvidos para verificar o grau de generalização a novas formas quando há diferentes números de partes do todo tomadas.

### **Teste com Novo Elemento**

Os resultados nos testes com Novo Elemento matematicamente equivalente à classe treinada foram baixos para a maioria dos participantes. No geral, as porcentagens de acertos foram menores do que as encontradas por dos Santos, Cameschi e Hanna (no prelo) e Lynch e Cuvo (1995).

Dos Santos, Cameschi e Hanna (no prelo), após o estabelecimento dos treinos AB e BC, treinaram A em relação a um novo conjunto (i.e., D, E e F), testando o desempenho que sugere a ampliação da classe e controle pela manutenção da proporcionalidade. No presente estudo, não houve o treino de um novo conjunto (e.g., D) a um dos conjuntos das relações treinadas (i.e., A, B e C), apenas a verificação das relações D-(ABC). A comparação do desempenho nos dois estudos fica prejudicada. No estudo de dos Santos, Cameschi e Hanna, a verificação que não houve a emergência das relações D-(ABC), E-(ABC) e F-(ABC), exigiu o treino direto dessas relações. Isso pode ter tornado o procedimento repetitivo e cansativo aos participantes. No estudo original, houve o Treino AB/AC com três estímulos fracionários, e três testes de ampliação da classe: D-(ABC), E-(ABC) e F-(ABC). Apenas D, E e F foram novas frações, mas A, B e C, a cada teste e treino, eram as mesmas. No presente estudo, cada ciclo de treino e testes ocorria com novos pares de estímulos fracionários. A cada teste D-(ABC), que ocorria em um ciclo diferente, as frações para teste dessas relações foram

diferentes (Figura 6). A execução de ciclos com novos exemplares pode minimizar repetições da tarefa, aumentando a motivação dos participantes. O número de classes matemáticas treinadas no estudo de dos Santos, Cameschi e Hanna foi três para cada participante. No presente trabalho, o número de frações foi seis. O efeito do número de exemplares ensinados na ocorrência de relações emergentes, com novas frações e sobre a motivação dos participantes deve ser investigado em estudos futuros.

Durante os treinos, os alunos estavam sendo expostos, através das dicas ou mesmo pelo contato direto com as frações, à algumas propriedades relacionais entre os estímulos.

Durante as tentativas com as frações  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{6}$ , a dica da proporcionalidade indicava que o número

de partes tomadas e o número de partes em que o todo foi dividido na fração  era

o dobro em relação à fração . Durante essas mesmas tentativas, a dica da multiplicação

indicava que o numerador e denominador deveriam ser multiplicados por dois (e.g.,  $\frac{1 \times 2}{3 \times 2}$ ).

Durante o Teste com novo elemento D-(ABC), a relação de proporcionalidade exigida foi diferente da apresentada durante os treinos. Nessa nova condição de teste, o participante

deveria julgar se  $\frac{1}{3}$  ou  $\frac{2}{6}$  era matematicamente equivalente a  $\frac{3}{9}$ . Note, que uma possível

estratégia emergente durante os treinos não funcionava nessa nova condição, em que multi-

plicar cada elemento de  $\frac{1}{3}$  por dois, não o ajudava a encontrar  $\frac{3}{9}$ . Embora no estudo de dos

Santos, Cameschi e Hanna (no prelo), dicas de multiplicação ou proporcionalidade não te-

nham sido apresentadas, similarmente ao presente estudo, a condição de treino e testes de

ampliação da classe também foram diferentes. Deve-se destacar, porém, que os autores trei-

naram diretamente o novo conjunto a um dos conjuntos da classe e mesmo esse treino não foi

suficiente para emergir as relações testadas. Estudos futuros que busquem o estabelecimento

do *conceito de frações equivalentes*, podem verificar o efeito do treino de diferentes repertó-

rios (e.g., ora multiplicar por dois, ora por três, etc) nos testes de ampliação da classe com novas frações.

No estudo de Lynch e Cuvo (1995), após o estabelecimento da classe de estímulos entre frações numéricas (e.g.,  $\frac{1}{5}$ ), frações pictóricas (e.g.,  $\frac{1}{5}p$ ) e decimais (e.g., 0,20), os autores treinam nova fração numérica equivalente (e.g.,  $\frac{4}{20}$ ), e testaram a ampliação da classe verificando a relação entre a nova fração equivalente (e.g.,  $\frac{4}{20}$ ) ao decimal correspondente (e.g., 0,20). Embora nomeiem essa avaliação de teste de generalização, pode-se caracterizar o teste como um teste de ampliação da classe. A utilização do termo teste de generalização para diferentes ocorrências de comportamento novos pode misturar diferentes tipos de controle de estímulos, e o prejuízo para a identificação de variáveis críticas determinantes para a ocorrência de cada tipo de controle de estímulo desejável.

### **Responder Generalizado**

Houve responder generalizado a novas frações equivalentes, indicando que o responder não ficou sob controle apenas das frações utilizadas, mas sob controle da propriedade relacional entre as frações equivalentes. Os resultados para a maioria dos participantes foram superiores aos dos testes semelhantes no estudo de Lynch e Cuvo (1995) e replicam os resultados positivos de dos Santos, Cameschi e Hanna (no prelo). Mas a variabilidade entre participantes indica que as relações de treino não foram suficientes para o estabelecimento do controle de estímulos necessário para o responder generalizado para todos os participantes.

Ao longo dos três ciclos, novas classes de frações serviram para o teste com novas frações não equivalentes aos treinos (Figura 8). A relação de proporcionalidade entre as frações dos treinos e as frações dos Testes com novas frações foi semelhante. O participante

deveria, por exemplo, selecionar  $\frac{2}{18}$  diante de  $\frac{1}{9}$ . Essa tarefa pode se beneficiar dos treinos e dicas disponibilizadas. Houve similaridade entre o repertório requerido e reforçado durante os treinos e o exigido no teste com novas frações. Por exemplo, o repertório de *multiplicar o numerador e o denominador por dois* selecionado durante o contato com  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{6}$  é aplicável durante o teste com  $\frac{1}{9}$  e  $\frac{2}{18}$ .

A cada ciclo, houve duas novas classes de estímulos matemáticos no teste com novas frações:  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{9}$ ;  $\frac{1}{10}$  e  $\frac{1}{12}$ ; e  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{3}{5}$ . Não houve balanceamento, indicando que todos os participantes tiveram a mesma sequência de pares de frações. A ausência de balanceamento impede verificar efeito de ordem de estímulos e o efeito dos treinos acumulados, impedindo afirmações, por exemplo, de frações com graus diferentes de dificuldade. Futuros estudos semelhantes, devem garantir o balanceamento não apenas dos estímulos de treinos, mas também dos estímulos novos. A utilização da fração  $\frac{1}{2}$  também pode ter facilitado o desempenho dos alunos, tendo em vista a frequência com que materiais didáticos utilizam essa fração. As frações pictóricas de  $\frac{1}{10}$  e  $\frac{1}{12}$  usadas no segundo ciclo são bastante similares, podendo gerar contagem errada e sugerindo de forma equivocada a ausência de aprendizagem das classes de frações equivalentes.

O desempenho nos testes com novas frações foi superior ao desempenho nos testes com novo elemento da classe, confirmando os achados de dos Santos, Cameschi e Hanna (no prelo). Como visto anteriormente, o repertório exigido na relação entre  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{3}{9}$  durante os testes com novo elemento da classe (e.g., *multiplicar o numerador e denominador por 3*) é diferente do repertório estabelecido durante os treinos  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{6}$  (e.g.,  $\frac{1 \times 2}{3 \times 2}$ ) ou verificado no

teste com novas frações, em que a estratégia do treino se aplica (e.g., entre  $\frac{1}{9}$  e  $\frac{2}{18}$ ).

### **Pré e Pós-testes**

O desempenho nas relações condicionais envolvendo frações equivalentes relativas (e.g.,  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{6}$ ), dos participantes que passaram pelo procedimento de pareamento ao modelo, foi superior ao Grupo Controle, que não passaram por qualquer tipo de procedimento de ensino, além das atividades habituais da escola. Similarmente, a diferença de desempenho entre antes e depois do procedimento foi estatisticamente significativa, diferentemente da diferença do Grupo Controle. O procedimento utilizado foi efetivo na melhoria do desempenho tanto nas tarefas com lápis e papel quanto nas realizadas no computador. Esse achado corrobora estudos anteriores que utilizaram procedimento de pareamento ao modelo para estabelecer classes de estímulos matemáticos (e.g., dos Santos, Cameschi & Hanna, no prelo, Lynch e Cuvo, 1995). Dos Santos, Cameschi e Hanna tiveram efeitos semelhantes do treino sobre avaliações nos Pós-testes, indicando efetividade dos procedimentos de ensino.

A baixa porcentagem de acertos nos pré-testes confirma os dados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), que sugerem desempenhos abaixo do esperado para as crianças do Ensino Fundamental com frações. Houve identificação de alunos que não alcançaram o critério de acerto mínimo com operações de multiplicação e divisão simples. A ausência de operações aritméticas simples em alunos da 6ª série\7º ano pode significar déficits em outras habilidades simples, como compreensão de situações-problema. Estas habilidades simples podem ser pré-requisitos para o desenvolvimento do conceito de frações e\ou interferir no desempenho durante a situação de aprendizagem. A verificação de repertórios de entrada antes da realização de procedimentos de ensino pode ajudar na minimização da variabilidade entre os participantes, na interpretação dos resultados gerados ou no desenvolvimento de procedimentos que partam dos repertórios presentes na criança (Donini,

2005).

Um Treino Condicional entre Frações com Relações Absolutas (e.g.,  e  $\frac{1}{3}$ ) foi realizado no treino de linha de base para todos os participantes. Quando o critério de acerto não foi alcançado, o participante foi exposto a um Treino de Relações Absolutas, utilizando como comparações, estímulos com diferenças críticas (e.g., Allen e Fucqua, 1985; Verneque, 2006), buscando maximizar o controle pelos elementos críticos dos estímulos fracionários. Os resultados dos Pré-testes confirmam o desempenho superior das crianças nas tarefas envolvendo relações absolutas em relação às relações relativas, coerentemente com a literatura (e. g., Carraher e Schlieman, 1992; Santos, 1999).

Os resultados utilizando lápis e papel e computador foram semelhantes. Esse dado replica os achados de dos Santos (1996). Os resultados superiores nas tarefas com lápis e papel no presente estudo, comparados aos resultados nas tarefas com lápis e papel de Lynch e Cuvo (1995), podem ser pela presença de opções a serem marcadas (i.e., tarefa de múltipla escolha). No trabalho de Lynch e Cuvo, os participantes não possuíam as opções, apenas deviam apresentar a resposta. Embora os resultados nas tarefas no computador e lápis e papel tenham sido semelhantes, o desempenho superior para alguns participantes no computador pode indicar que essa tarefa seja mais atrativa para os participantes. Mas deve-se considerar também o menor número de comparações nas tentativas no computador, sugerindo menor chance de erro.

Foram realizadas análises estatísticas baseadas em sexo e escola de origem e ordem de exposição com objetivo de verificar se possíveis diferenças entre os grupos não seriam por variáveis estranhas às variáveis independentes manipuladas. A ausência de diferenças significativas baseadas nessas características sugere que os grupos foram homogêneos, permitindo a verificação do efeito das dicas.

## Dicas

O efeito de dicas acessíveis através de comportamento precorrente auxiliar sobre a formação do conceito de frações equivalentes foi avaliado no presente trabalho, através do procedimento de pareamento ao modelo no ensino de relações condicionais entre frações pictóricas e numéricas. O desempenho dos participantes que tinham a disponibilidade de Dicas foi superior ao do Grupo Controle, nos Pós-testes, indicando efetividade das Dicas na aprendizagem de relações condicionais, envolvendo frações equivalentes relativas. Porém, a diferença entre o Grupo Sem Dica e com Dica não foi estatisticamente significativa, sugerindo que o papel do procedimento de pareamento ao modelo pode ter sobressaído em relação ao papel das dicas na melhora do desempenho. Houve similaridade entre o desempenho dos participantes que passaram pelo procedimento de pareamento ao modelo, independentemente do tipo de dica ou se havia dica. A inspeção visual dos dados individuais, indica um aumento menos acentuado de alguns participantes do Grupo Sem Dica, em relação aos outros grupos com Dica, mas há variabilidade nos resultados e as diferenças não foram estatisticamente significativas ( $p \leq 0,05$ ).

A diminuição da porcentagem de acertos nas relações absolutas entre frações para os grupos experimentais é curiosa e muito frequente para ser um resultado acidental. Para alguns participantes, o aumento da porcentagem nas relações relativas foi acompanhada por uma diminuição nas absolutas. Durante a realização dos Pré e Pós Testes, as tentativas com relativas e absolutas foram misturadas, podendo sugerir baixa discriminação do tipo de tarefa exigida. Quando os participantes sabiam apenas as relações absolutas, que no geral, foi o perfil selecionado, havia acerto nas tentativas com absolutas e erros nas com relativas, durante os Pré-testes. Após o estabelecimento de classes de relações fracionárias relativas, os Pós-testes podem ter se tornado tarefas mais complexas, se compararmos com os Pré-testes. Em uma tentativa que tivesse como modelo a fração , sem o exame das comparações, não

era possível avaliar se era uma tentativa de relação absoluta ou relativa. Caso as comparações fossem as frações  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{1}{5}$  e  $\frac{5}{1}$ , tratava-se de uma tentativa de relação absoluta. Caso as comparações fossem as frações  $\frac{2}{10}$ ,  $\frac{1}{10}$  e  $\frac{5}{1}$ , tratava-se de uma tentativa de relação relativa. Em uma tentativa de relação absoluta formada pelas comparações  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{1}{5}$  e  $\frac{5}{1}$ , a seleção da comparação  $\frac{2}{5}$  pode ocorrer sob controle do numerador 2. Isso poderia indicar que o comportamento estava sob controle de apenas parte do estímulo fracionário (no caso, sob controle do número 2 do numerador). Nos Pré-testes, quando os alunos sabiam apenas as relações absolutas, eles simplesmente buscavam selecionar a correspondência entre o número de partes tomadas de um todo dividido e o numerador e denominador. Após o reforçamento da seleção de  $\frac{2}{10}$  diante de  $\frac{1}{5}$ , não é suficiente uma simples contagem, mas é também necessário a identificação da tentativa como relação absoluta ou relativa.

Adicionalmente, em todas as etapas de ensino de cada ciclo, a seleção de relações relativas entre frações foi amplamente reforçada, tornando a busca por frações com relação relativa mais provável. Durante a construção das tentativas dos Pré e Pós-testes, buscou-se evitar controle espúrio através de tentativas com comparações com diferenças críticas (Allen e Fucqua, 1985), mas apenas através de testes pode-se afirmar com segurança qual o controle desenvolvido nesses casos. Os participantes do Grupo Controle tiveram um aumento no Pós-teste em relação ao Pré-teste com relações absolutas (e.g.,  e  $\frac{1}{3}$ ), inverso do ocorrido com os Grupos Experimentais. Estudos futuros que busquem verificar o possível efeito do aumento da complexidade da tarefa pelo aumento do número de repertórios presentes diante de um mesmo estímulo modelo, podem manipular estímulos contextuais que maximizem a

discriminação no início do procedimento das relações absolutas e relativas, com gradual esvanecimento do estímulo contextual, para garantir o controle pelas propriedades desejadas.

### **Comportamento Precorrente**

O comportamento precorrente auxiliar se caracterizava por uma resposta que produzia estímulos úteis, mas não necessária para a escolha correta. O comportamento precorrente foi mensurado pelo número de acessos ao botão de ajuda, que dava acesso às dicas de Multiplicação e Proporcionalidade. Os dados corroboram estudos que indicam que há uma supressão do responder precorrente no decorrer da aprendizagem de uma tarefa (e.g., Coelho e Oliveira-Castro, 2005; Oliveira-Castro e Campos, 2004). Houve um maior número de acessos na primeira exposição ao treino e no início de novos treinos.

O comportamento precorrente auxiliar mensurado foi o acesso ao botão de ajuda com as dicas. Estratégias desenvolvidas durante o ensino tradicional da escola e estratégias desenvolvidas durante o contato com os treinos e dicas podem ter ocorrido durante as tentativas, de maneira encoberta, mesmo quando não havia o responder ao botão de ajuda. Essas respostas encobertas ou privadas não foram verificadas. Estudos futuros podem investigar estratégias utilizadas antes, durante e após o contato a treinos e dicas, que podem funcionar como comportamentos precorrentes auxiliares não diretamente manipulados pelo experimentador.

O baixo número de acessos ao botão de ajuda por alguns participantes pode indicar que o procedimento de pareamento ao modelo associado com o procedimento de minimização de erros tenha sido eficiente no estabelecimento das respostas sob controle dos estímulos, tornando dispensável o acesso a possíveis dicas. Havia o aumento gradual no número de comparações, disponibilizando apenas o S+ na primeira tentativa, a cada nova aparição de um modelo e a alternância de modelos apenas após 100% de acerto no bloco. O comportamento precorrente auxiliar é caracterizado por não ser requerido ou exigido. Estudos futuros, que busquem verificar exclusivamente o papel de dicas, devem buscar tornar os estímulos

gerados pelo comportamento precorrente úteis para a realização da tarefa, suplantando a utilização de mecanismos que maximizem a resposta correta.

O presente estudo encontrou resultados positivos em relação a comportamentos novos: formação de classes equivalentes entre frações numéricas e pictóricas, generalização do responder quando novas formas foram utilizadas e responder generalizado a novas frações equivalentes. A utilização do treino com procedimento de pareamento ao modelo com minimização de erros, a disponibilização de dicas, a realização de diferentes ciclos com novas frações a cada ciclo, aumentando o número de exemplares, podem ter contribuído para os resultados positivos. Houve resultados modestos de alguns participantes. O insucesso no teste de novas formas pôde ser eliminado por Leader e Barnes-Holmes (2001), tornando as diferenças entre treino e testes mais graduais. Estudos futuros podem verificar a generalização a novas formas, incluindo gradações entre os estímulos de teste, incluindo frações com apresentações bastante diferenciadas, como frações na apresentação discreta (e.g.,  $\frac{1}{3}$  e ). As apresentações contínuas, que foram utilizadas no presente trabalho, têm sido descritas como mais facilmente aprendidas, embora dos Santos, Cameschi e Hanna (no prelo) não tenham encontrado diferença significativa.

Nos estudos de Lynch e Cuvo (1995) e dos Santos, Cameschi e Hanna (no prelo), testou-se o repertório diante novos elementos não utilizados durante o treino, caracterizando um operante de ordem superior. Leader e Barnes-Holmes (2001) testaram apenas a utilização de novas formas pictóricas de frações utilizadas durante o procedimento, um repertório novo, mas diferente de Lynch e Cuvo (1995) e de dos Santos, Cameschi e Hanna (no prelo). Embora Tulon (2005) ensinado relações absolutas entre frações faladas, pictóricas e numéricas, busca testar não apenas a leitura de frações utilizadas nos treinos, mas a leitura a novas frações. Esse repertório pode ser entendido como um comportamento novo, fruto de recombinação de repertórios treinados em diferentes situações (Serejo e cols, 2007). A utilização do

termo generalização para diferentes controle de estímulos presentes em comportamentos novos pode ser um problema teórico\conceitual, com implicações metodológicas e tecnológicas.

O termo generalização de estímulos é apropriado quando há testes com manipulação ao longo de determinadas propriedades físicas. Lynch e Cuvo (1995) chamam de generalização o responder observado na ampliação de classe e com novas frações e decimais. A utilização do termo generalização pareceu mais bem aplicada no estudo de Leader e Barnes-Holmes (2001), por terem manipulado a diferenciação dos estímulos durante os testes. Quando o responder é testado com novas frações, e que o responder é baseado não na similaridade física entre os estímulos, mas sim, na relação entre diferentes propriedades relacionais entre os estímulos (e.g., proporção entre numerador e denominador), o termo responder generalizado ou operante generalizado é mais preciso que generalização.

### **Considerações finais**

Pode-se concluir que, com pouco treino, foi possível melhorar consideravelmente o desempenho de crianças da 6ª série\7º ano em problemas que envolvem frações equivalentes. O intercâmbio entre psicologia e educação contribui para o desenvolvimento de procedimentos de ensino eficientes e que minimizam ou eliminam déficits comportamentais na escola, que podem gerar problemas como fracasso e evasão escolar. Mas esse intercâmbio ainda é insuficiente e precisa ser estimulado e ampliado.

A ausência do efeito do tipo de dica sobre o desempenho nos treinos e testes pode ter ocorrido devido às características do treino utilizado. As características do treino normalmente não são encontradas durante o ensino tradicional: aumento da probabilidade de acerto, com a disponibilidade apenas do estímulo correto, aumento gradual dos S-, aumentando gradualmente a dificuldade, avanço nas condições de aprendizagem apenas após domínio pelo aluno (e.g., critério de 100% de acerto para progressão). Essas medidas dependem do desempenho

individual, e no ensino tradicional, o ensino visa o grupo, não o indivíduo. O ensino visando o grupo, aumenta a dificuldade de corrigir erros durante o processo, diminuindo a efetividade do ensino. Portanto, novos estudos são necessários para revelar o possível papel de dicas sobre o responder. Em situações menos favoráveis de ensino, as dicas podem se mostrar importantes.

O repertório matemático de frações equivalentes é complexo e envolve diferentes controles de estímulos e comportamentos. A avaliação sobre procedimentos de ensino deve considerar a abrangência do conceito de frações equivalentes, incluindo os diferentes controles de estímulos a serem estabelecidos. O presente estudo contribuiu na descrição comportamental do conceito de frações equivalentes, descrevendo, estabelecendo e testando diferentes repertórios envolvidos.

### Referências Bibliográficas

Allen, K.D., & Fuqua, R.W. (1985). Eliminating selective stimulus control: a comparison of two procedures for teaching mentally retarded children to respond to compound stimuli. *Journal of Experimental Child Psychology*, 39, 55-71.

Barnes-Holmes, D., & Barnes-Holmes, Y. (2000). Explaining complex behavior: two perspectives on the concept of generalized operant classes. *The Psychological Record*, 50, 251-265.

Bezuk, N. S. (1988). Fractions in the early childhood mathematics curriculum. *Arithmetic Teacher*, 35, 56-60.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1992). A compreensão de frações como magnitudes relativas. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 8, 67-78.

Catania, A. C. (1999). *Aprendizagem: comportamento, linguagem e cognição*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Coelho, D. S., & Oliveira-Castro, J. M. (2005). Efeitos de complexidade de tarefas sobre o comportamento precorrente auxiliar no treino e recombinação. *Revista Brasileira de Análise do Comportamento*, 1, p. 61-69.

Carmo, J. S. (1997). *Aquisição do conceito de número em crianças pré-escolares através do ensino de relações condicionais e generalização*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Pará, Belém.

Del Rey, D. (2009). *Análise do comportamento no Brasil: o que foi pesquisado até 2005 em relação aos comportamentos matemáticos*. Dissertação de Mestrado. PUC-SP, São

Paulo.

Donini, R. (2005). *Identificando comportamentos pré-requisitos para o ensino da adição e da subtração*. Dissertação de Mestrado. PUC-SP, São Paulo.

Drachenberg, H. B. (1973). Programação das etapas que levam à modificação gradual no controle de certos aspectos de um estímulo para outro (fading) na situação "escolha de acordo com o modelo". *Ciência e Cultura*, 25, 44-53.

Dos Santos, A. C., Cameschi, C. E. & Hanna, E. S. (no prelo). Ensino de frações baseado no paradigma de equivalência de estímulos.

Dube, W.V., & McIlvane, W.J. (1996). Some Implications of a Stimulus Control Topography Analysis for Emergent Behavior and Stimulus Classes. Em: T.R. Zentall & P.M Smeets (Eds). *Stimulus Class Formation in Humans and Animals*. Amsterdam: NH Elsevier.

GESTAR I (2007). Programa de gestão da aprendizagem escolar. Matemática. AAA: Atividades de apoio à aprendizagem 5: Números racionais: conceito e representação. Brasília, MEC, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, disponível em <[http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/gestar/aaamatematica/mat\\_aaa5.pdf](http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/gestar/aaamatematica/mat_aaa5.pdf)>

Hanna, E. S., Albuquerque, A. R., Quinteiro, R. S., & Kohlsdorf, M. . Sistema simbólico em miniatura e aprendizagem de leitura com crianças e adultos. In: X Simpósio de Pesquisa e Intercâmbio Científico, 2004, Aracruz - ES. Anais do X Simpósio de Pesquisa e Intercâmbio Científico, 2004. 1. p. 26-27.

Kahhale, E. M. S. P. (1993). *Comportamento matemático: formação e ampliação do conceito de quantidade e relações de equivalência*. Tese de doutorado não-publicada, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Keller, F. S., & Schoenfeld, W. N. (1950/1971). *Princípios de Psicologia*. São Paulo: Editora Herder.

Leader, G., & Barnes-Holmes, D. (2001). A comparison of match-to-sample and respondent-type training of equivalence classes. *The Psychological Record*, 51, 151-165.

Leon, N. P. A. (1998). *Aquisição de habilidades básicas de matemática através da formação de equivalência em crianças pré-escolares*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos.

Lynch, D. C., & Cuvo, A. J. (1995). Stimulus equivalence instruction of fraction-decimal relations. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 28, 115-126.

Matos, M. A. (1981). O controle de estímulos sobre o comportamento. *Psicologia*, 7, 1-15.

McIlvane, W.J. (1998). Teoria da coerência da topografia de controle de estímulos: uma breve introdução. *Temas em Psicologia*, 6, 185-189.

Medeiros, C. A. (2003). *Análise de protocolo de relato verbal aplicada à tarefa de formação de classes de equivalência entre estímulos posicionais*. Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, Brasília.

Melo, R. M., Jesus, P. S., & Hanna, E. S. (2005). Discriminação simples e comportamento conceitual de posição: influência de diferentes tipos de treino. *Revista Brasileira de Análise do Comportamento*, 1, 231 - 252.

Merlini, V. L. (2005). *O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5a. e 6a. séries do ensino fundamental*. Dissertação de Mestrado, PUC-SP, São Paulo.

Moutinho, L. V. (2005). *Fração e seus diferentes significados: um estudo com alunos das 4a. e 8a. séries do ensino fundamental*. Dissertação de Mestrado, PUC-SP, São Paulo.

Monteiro, G., & Medeiros, J. G. (2002). A contagem oral como pré-requisito para a aquisição do conceito de número com crianças pré-escolares. *Estudos de Psicologia*, 7, 73-90.

Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational studies in mathematics*, 47, 175-197.

Oliveira-Castro, J. M., & Campos, A. P. M. (2004). Comportamento precorrente auxiliar: Efeitos do número de dimensões discriminativas da tarefa. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 20, 191-199.

Prado, P. S. T. (1995). *O conceito de número: uma análise com base no paradigma de rede de relações*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de São Carlos.

Prova Brasil. (2005). Descrição dos níveis das escalas de Matemática , disponível em <[http://www.inep.gov.br/salas/download/prova\\_brasil/](http://www.inep.gov.br/salas/download/prova_brasil/)>.

Quintero, A. H. (1987). Helping children understand ratios. *Arithmetic Teacher*, 34, 17-21.

SAEB (2005). Médias de desempenho do SAEB/2005 em perspectiva comparada. Ministério da Educação. Retirado em 04/04/2008, do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), <[http://www.inep.gov.br/download/saeb/2005/SAEB1995\\_2005.pdf](http://www.inep.gov.br/download/saeb/2005/SAEB1995_2005.pdf)>

Santos, A. C. G. (1999). Equivalência de frações: como anda a compreensão dos alunos? *Estudos: Revista da Universidade Católica de Goiás*, 26, 233-249.

Santos, A. C. G. (1996). *Aprendizagem de conceito de proporção e o paradigma de equivalência de estímulos*. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília, Brasília.

SEED. (2005). Orientações pedagógicas, matemática: sala de apoio à aprendizagem. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. Departamento de Ensino Fundamental. Curitiba: SEED.  
<<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000014231.pdf>>

Serejo, P., Hanna, S. E., Souza, D. G., & de Rose, J. C. C. (2007). Leitura e repertório recombinaivo: efeito da quantidade de treino e da composição dos estímulos. *Revista brasileira de análise do comportamento*, 3, 191-215.

Sério, T. M. A. P., Andery, M. A., Gioia, P. S., & Micheletto, N. (2002). Os conceitos de discriminação e generalização. In: T. M. A. P. Sério, M. A. Andery, P. S. Gioia e N. Micheletto (orgs). *Controle de Estímulos e Comportamento Operante: Uma Introdução*. EDUC: São Paulo.

Sidman, M. (1994). *Equivalence relations and behavior: a research story*. Boston: Authors Cooperative.

Sidman, M., & Tailby, W. (1982). Conditional discrimination vs. matching to sample: an expansion of the testing paradigm. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 43, 21-42.

Silva, E. J., & Lins, A. F. (2007). *A intervenção docente na construção do conhecimento de frações de alunos EJA: Um estudo de caso*. In: IX ENEM Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. Diálogos entre a Pesquisa e a Prática Educativa, 2007. v. 1. p. 174-174. Acessado em 29/11/2010 [[http://www.sbem.com.br/files/ix\\_enem/Poster/Trabalhos/PO29885017852T.doc](http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Poster/Trabalhos/PO29885017852T.doc)]

Skinner, B. F. (2000/1974). *Sobre o Behaviorismo*. São Paulo: Cultrix.

Skinner, B. F. (1972/1968). *Tecnologia de Ensino*. São Paulo: EPU.

Skinner, B. F. (1953). *Ciência e Comportamento Humano*. São Paulo: Martins Fontes.

Skypek, D. H. B. (1984). Special characteristics of rational numbers. *Arithmetic teacher*, 31, 10-12.

Stokes, T. F., & Baer, D. M. (1977). An implicit technology of generalization. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 10, 349-367.

Terrace, H. S. (1966). *Stimulus Control* Em W. K. Honig (Ed) *Operant Behavior: Areas of Research and Application*. New York: Meredith Corporation.

Tulon, A. S. (2008). *Ensino de frações e equivalência de estímulos: um estudo com uso de software educativo*. Dissertação de Mestrado, PUC-SP, São Paulo.

Verneque, L. (2006). *Superseletividade: efeito do requisito de resposta e do tempo de exposição ao estímulo*. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília, Brasília

## Anexos

### Anexo 1.

Teste com Lápis e papel, contendo questões de multiplicação, divisão, relação absoluta e relativa entre frações. O Teste foi dividido em duas partes, realizadas em dois momentos diferentes.

#### PARTE 1

Nome: \_\_\_\_\_ Idade: \_\_\_\_\_ Escola: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

**Resolva as operações da coluna da esquerda e marque a alternativa que contém o resultado correto:**

		<i>Marque o correto</i>					
	<b>Resolva</b>	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Rascunho
	Exemplo: <b>1+1</b>	4 ( )	1 ( )	2 (X)	11 ( )	3 ( )	
1.	<b>5 x 2</b>	7 ( )	10 ( )	3 ( )	12 ( )	15 ( )	
2.	<b>2 x 3</b>	1 ( )	4 ( )	5 ( )	6 ( )	9 ( )	
3.	<b>8 x 2</b>	16 ( )	14 ( )	12 ( )	10 ( )	6 ( )	
4.	<b>12 : 3</b>	15 ( )	9 ( )	6 ( )	4 ( )	3 ( )	
5.	<b>2 x 1</b>	0 ( )	1 ( )	2 ( )	3 ( )	4 ( )	
6.	<b>6 x 2</b>	4 ( )	6 ( )	8 ( )	10 ( )	12 ( )	
7.	<b>3 x 6</b>	21 ( )	18 ( )	12 ( )	9 ( )	3 ( )	
8.	<b>2 x 2</b>	1 ( )	2 ( )	3 ( )	4 ( )	5 ( )	
9.	<b>8 : 2</b>	6 ( )	4 ( )	10 ( )	16 ( )	15 ( )	
10.	<b>2 x 10</b>	20 ( )	12 ( )	10 ( )	8 ( )	2 ( )	
11.	<b>7 x 2</b>	5	9	14	16	21	

Marque o correto

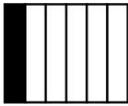
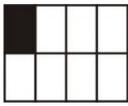
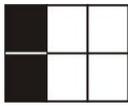
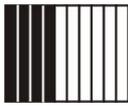
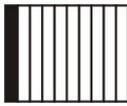
	<b>Resolva</b>	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Rascunho
		( )	( )	( )	( )	( )	
12.	<b>2 x 9</b>	7 ( )	11 ( )	14 ( )	16 ( )	18 ( )	
13.	<b>15 : 3</b>	18 ( )	12 ( )	10 ( )	7 ( )	5 ( )	
14.	<b>4 x 2</b>	16 ( )	8 ( )	6 ( )	4 ( )	2 ( )	
15.	<b>5 x 3</b>	5 ( )	8 ( )	15 ( )	16 ( )	18 ( )	
16.	<b>1 x 3</b>	0 ( )	1 ( )	2 ( )	3 ( )	4 ( )	
17.	<b>24 : 3</b>	8 ( )	9 ( )	12 ( )	21 ( )	27 ( )	
18.	<b>3 x 7</b>	24 ( )	21 ( )	14 ( )	10 ( )	4 ( )	
19.	<b>4 x 3</b>	12 ( )	10 ( )	8 ( )	7 ( )	1 ( )	
20.	<b>3 x 3</b>	0 ( )	6 ( )	7 ( )	8 ( )	9 ( )	
21.	<b>20 : 2</b>	2 ( )	5 ( )	10 ( )	18 ( )	22 ( )	
22.	<b>8 x 3</b>	5 ( )	11 ( )	16 ( )	24 ( )	27 ( )	
23.	<b>12 : 2</b>	5 ( )	7 ( )	6 ( )	10 ( )	14 ( )	
24.	<b>14 : 2</b>	7 ( )	12 ( )	16 ( )	6 ( )	8 ( )	
25.	<b>18 : 2</b>	16 ( )	9 ( )	7 ( )	8 ( )	20 ( )	
26.	<b>16 : 2</b>	9 ( )	7 ( )	8 ( )	14 ( )	18 ( )	
27.	<b>9 : 3</b>	6 ( )	12 ( )	4 ( )	2 ( )	3 ( )	

Marque o correto

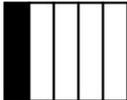
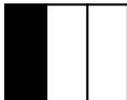
	Resolva	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Rascunho
28.	<b>18 : 3</b>	8 ( )	6 ( )	7 ( )	15 ( )	21 ( )	
29.	<b>21 : 3</b>	24 ( )	18 ( )	6 ( )	7 ( )	8 ( )	
30.	<b>3 : 3</b>	1 ( )	2 ( )	3 ( )	0 ( )	9 ( )	
31.	<b>6 : 2</b>	4 ( )	8 ( )	12 ( )	2 ( )	3 ( )	
32.	<b>2 : 2</b>	0 ( )	4 ( )	1 ( )	2 ( )	3 ( )	
33.	<b>10 : 2</b>	12 ( )	8 ( )	4 ( )	5 ( )	6 ( )	
34.	<b>4 : 2</b>	4 ( )	2 ( )	6 ( )	8 ( )	9 ( )	

Marque a opção que vai com:

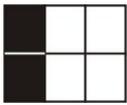
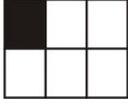
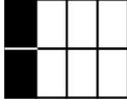
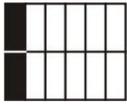
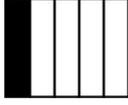
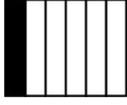
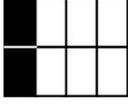
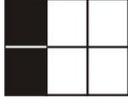
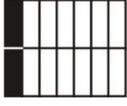
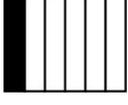
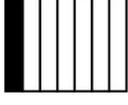
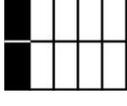
Marque o correto

	Esse vai com...	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Rascunho
1.	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$ ( )	$\frac{1}{16}$ ( )	$\frac{8}{1}$ ( )	$\frac{8}{16}$ ( )	$\frac{2}{16}$ ( )	
2.	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{12}$ ( )	$\frac{2}{18}$ ( )	$\frac{3}{6}$ ( )	$\frac{1}{18}$ ( )	$\frac{3}{18}$ ( )	
3.	$\frac{3}{18}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
4.	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{6}$ ( )	$\frac{1}{12}$ ( )	$\frac{1}{6}$ ( )	$\frac{3}{12}$ ( )	$\frac{6}{1}$ ( )	
5.	$\frac{2}{20}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	

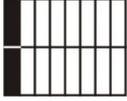
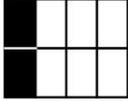
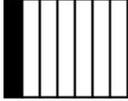
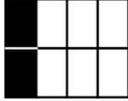
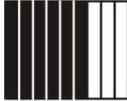
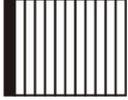
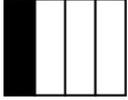
Marque o correto

	Esse vai com...	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Rascunho
6.	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18} ( )$	$\frac{2}{12} ( )$	$\frac{3}{12} ( )$	$\frac{18}{3} ( )$	$\frac{1}{12} ( )$	
7.	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{18} ( )$	$\frac{1}{12} ( )$	$\frac{2}{18} ( )$	$\frac{3}{12} ( )$	$\frac{12}{2} ( )$	
8.	$\frac{2}{4}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
9.	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{4} ( )$	$\frac{3}{8} ( )$	$\frac{2}{12} ( )$	$\frac{2}{8} ( )$	$\frac{2}{18} ( )$	
10.	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{14} ( )$	$\frac{2}{21} ( )$	$\frac{2}{14} ( )$	$\frac{3}{7} ( )$	$\frac{1}{14} ( )$	
11.		$\frac{1}{15} ( )$	$\frac{3}{5} ( )$	$\frac{3}{15} ( )$	$\frac{5}{15} ( )$	$\frac{3}{20} ( )$	
12.	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{15} ( )$	$\frac{2}{15} ( )$	$\frac{3}{10} ( )$	$\frac{10}{2} ( )$	$\frac{15}{3} ( )$	
13.	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{24} ( )$	$\frac{3}{16} ( )$	$\frac{1}{16} ( )$	$\frac{4}{24} ( )$	$\frac{3}{24} ( )$	
14.		$\frac{3}{6} ( )$	$\frac{3}{8} ( )$	$\frac{1}{12} ( )$	$\frac{3}{12} ( )$	$\frac{2}{12} ( )$	
15.	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{3} ( )$	$\frac{1}{9} ( )$	$\frac{2}{3} ( )$	$\frac{1}{3} ( )$	$\frac{9}{3} ( )$	
16.	$\frac{3}{18}$	$\frac{3}{6} ( )$	$\frac{1}{6} ( )$	$\frac{1}{18} ( )$	$\frac{6}{18} ( )$	$\frac{6}{1} ( )$	
17.	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} ( )$	$\frac{1}{12} ( )$	$\frac{3}{12} ( )$	$\frac{4}{12} ( )$	$\frac{4}{1} ( )$	
18.	$\frac{2}{6}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	

## Marque o correto

	Esse vai com...	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Rascunho
19.	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{21}$ ( )	$\frac{7}{1}$ ( )	$\frac{3}{7}$ ( )	$\frac{1}{21}$ ( )	$\frac{21}{7}$ ( )	
20.	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{5}$ ( )	$\frac{1}{15}$ ( )	$\frac{1}{5}$ ( )	$\frac{5}{15}$ ( )	$\frac{2}{5}$ ( )	
21.	$\frac{3}{24}$	$\frac{3}{8}$ ( )	$\frac{1}{24}$ ( )	$\frac{1}{12}$ ( )	$\frac{1}{8}$ ( )	$\frac{8}{12}$ ( )	
22.		 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
23.	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{5}$ ( )	$\frac{2}{5}$ ( )	$\frac{1}{10}$ ( )	$\frac{5}{10}$ ( )	$\frac{1}{12}$ ( )	
24.		 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
25.	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$ ( )	$\frac{2}{4}$ ( )	$\frac{1}{4}$ ( )	$\frac{3}{4}$ ( )	$\frac{2}{6}$ ( )	
26.		 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
27.	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$ ( )	$\frac{1}{14}$ ( )	$\frac{3}{14}$ ( )	$\frac{2}{14}$ ( )	$\frac{3}{7}$ ( )	
28.		 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
29.	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$ ( )	$\frac{3}{9}$ ( )	$\frac{2}{12}$ ( )	$\frac{3}{6}$ ( )	$\frac{9}{3}$ ( )	
30.		 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	

## Marque o correto

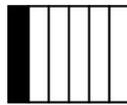
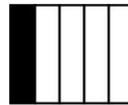
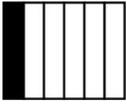
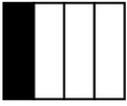
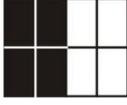
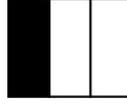
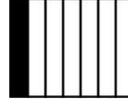
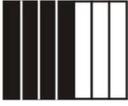
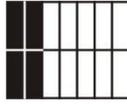
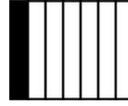
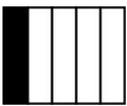
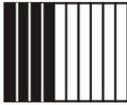
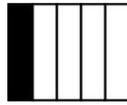
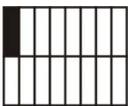
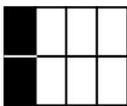
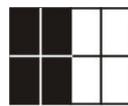
	Esse vai com...	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Rascunho
31.	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{20}$ ( )	$\frac{2}{10}$ ( )	$\frac{1}{20}$ ( )	$\frac{20}{2}$ ( )	$\frac{1}{9}$ ( )	
32.		 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
33.	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{6}$ ( )	$\frac{3}{3}$ ( )	$\frac{1}{6}$ ( )	$\frac{2}{3}$ ( )	$\frac{2}{6}$ ( )	
34.		$\frac{2}{3}$ ( )	$\frac{2}{6}$ ( )	$\frac{1}{6}$ ( )	$\frac{2}{9}$ ( )	$\frac{3}{6}$ ( )	
35.	$\frac{3}{9}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
36.	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$ ( )	$\frac{2}{4}$ ( )	$\frac{1}{4}$ ( )	$\frac{2}{1}$ ( )	$\frac{1}{6}$ ( )	
37.	$\frac{3}{12}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
38.	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$ ( )	$\frac{2}{6}$ ( )	$\frac{2}{12}$ ( )	$\frac{3}{6}$ ( )	$\frac{6}{1}$ ( )	
39.	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{1}$ ( )	$\frac{2}{3}$ ( )	$\frac{1}{9}$ ( )	$\frac{3}{3}$ ( )	$\frac{3}{9}$ ( )	
40.	$\frac{2}{14}$	$\frac{2}{7}$ ( )	$\frac{1}{7}$ ( )	$\frac{1}{14}$ ( )	$\frac{7}{1}$ ( )	$\frac{3}{7}$ ( )	
41.		$\frac{2}{2}$ ( )	$\frac{2}{1}$ ( )	$\frac{2}{4}$ ( )	$\frac{4}{2}$ ( )	$\frac{4}{10}$ ( )	
42.	$\frac{2}{18}$	$\frac{2}{16}$ ( )	$\frac{3}{18}$ ( )	$\frac{1}{18}$ ( )	$\frac{1}{9}$ ( )	$\frac{2}{9}$ ( )	

Nome: \_\_\_\_\_ Idade: \_\_\_\_\_

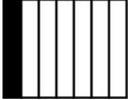
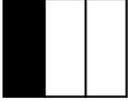
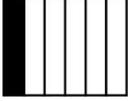
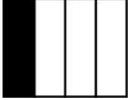
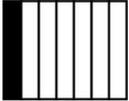
**PARTE 2**

Marque a opção que vai com:

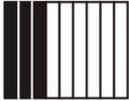
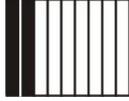
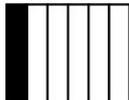
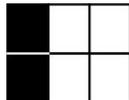
*Marque o correto*

	Esse vai com...	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Rascunho
43.	$\frac{2}{12}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
44.		$\frac{2}{5}$ ( )	$\frac{1}{5}$ ( )	$\frac{1}{18}$ ( )	$\frac{3}{6}$ ( )	$\frac{3}{18}$ ( )	
45.	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{4}$ ( )	$\frac{1}{12}$ ( )	$\frac{1}{4}$ ( )	$\frac{2}{4}$ ( )	$\frac{1}{8}$ ( )	
46.		$\frac{2}{4}$ ( )	$\frac{1}{8}$ ( )	$\frac{2}{8}$ ( )	$\frac{1}{3}$ ( )	$\frac{3}{1}$ ( )	
47.	$\frac{3}{21}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
48.	$\frac{3}{21}$	$\frac{1}{14}$ ( )	$\frac{2}{21}$ ( )	$\frac{3}{7}$ ( )	$\frac{1}{7}$ ( )	$\frac{1}{21}$ ( )	
49.	$\frac{2}{14}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
50.		$\frac{2}{5}$ ( )	$\frac{2}{10}$ ( )	$\frac{1}{10}$ ( )	$\frac{1}{8}$ ( )	$\frac{2}{8}$ ( )	
51.	$\frac{3}{15}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
52.		$\frac{1}{7}$ ( )	$\frac{8}{24}$ ( )	$\frac{1}{24}$ ( )	$\frac{3}{8}$ ( )	$\frac{3}{24}$ ( )	
53.	$\frac{2}{16}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	

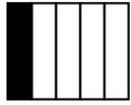
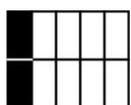
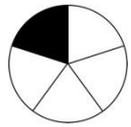
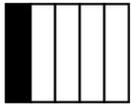
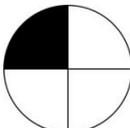
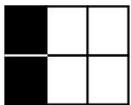
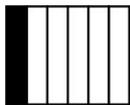
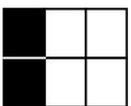
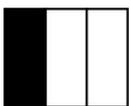
## Marque o correto

	Esse vai com...	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Rascunho
54.	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{3}$ ( )	$\frac{2}{3}$ ( )	$\frac{1}{6}$ ( )	$\frac{3}{1}$ ( )	$\frac{3}{6}$ ( )	
55.	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$ ( )	$\frac{2}{8}$ ( )	$\frac{2}{4}$ ( )	$\frac{4}{1}$ ( )	$\frac{3}{8}$ ( )	
56.	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$ ( )	$\frac{5}{1}$ ( )	$\frac{2}{5}$ ( )	$\frac{2}{10}$ ( )	$\frac{1}{10}$ ( )	
57.		$\frac{3}{21}$ ( )	$\frac{3}{7}$ ( )	$\frac{1}{21}$ ( )	$\frac{3}{6}$ ( )	$\frac{1}{18}$ ( )	
58.	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$ ( )	$\frac{8}{1}$ ( )	$\frac{2}{14}$ ( )	$\frac{2}{8}$ ( )	$\frac{1}{8}$ ( )	
59.	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{6}$ ( )	$\frac{3}{6}$ ( )	$\frac{2}{9}$ ( )	$\frac{9}{3}$ ( )	$\frac{6}{2}$ ( )	
60.		$\frac{3}{3}$ ( )	$\frac{1}{9}$ ( )	$\frac{1}{2}$ ( )	$\frac{3}{9}$ ( )	$\frac{9}{9}$ ( )	
61.		$\frac{1}{12}$ ( )	$\frac{2}{6}$ ( )	$\frac{2}{12}$ ( )	$\frac{2}{10}$ ( )	$\frac{2}{8}$ ( )	
62.	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{12}$ ( )	( )	( )	( )	( )	
63.	$\frac{2}{8}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
64.		$\frac{2}{14}$ ( )	$\frac{2}{7}$ ( )	$\frac{1}{14}$ ( )	$\frac{2}{15}$ ( )	$\frac{2}{16}$ ( )	
65.	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$ ( )	$\frac{2}{21}$ ( )	$\frac{3}{18}$ ( )	$\frac{4}{21}$ ( )	$\frac{3}{21}$ ( )	
66.	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$ ( )	$\frac{3}{15}$ ( )	$\frac{3}{5}$ ( )	$\frac{1}{10}$ ( )	$\frac{3}{12}$ ( )	

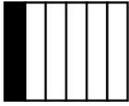
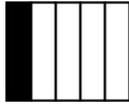
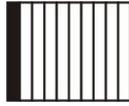
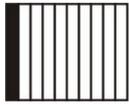
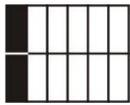
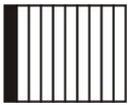
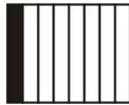
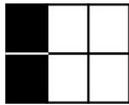
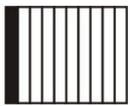
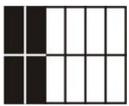
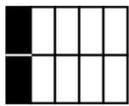
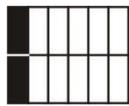
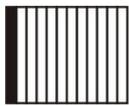
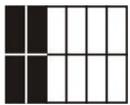
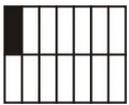
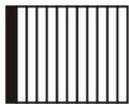
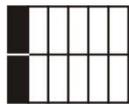
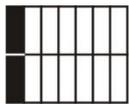
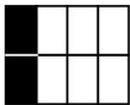
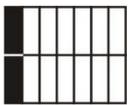
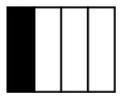
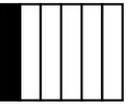
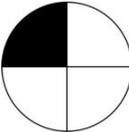
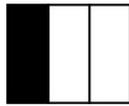
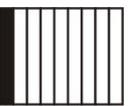
Marque o correto

	Esse vai com...	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Rascunho
67.	$\frac{2}{10}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
68.	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$ ( )	$\frac{1}{8}$ ( )	$\frac{2}{5}$ ( )	$\frac{1}{10}$ ( )	$\frac{2}{10}$ ( )	
69.		$\frac{1}{16}$ ( )	$\frac{2}{8}$ ( )	$\frac{3}{16}$ ( )	$\frac{2}{16}$ ( )	$\frac{4}{16}$ ( )	
70.	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$ ( )	$\frac{3}{24}$ ( )	$\frac{3}{12}$ ( )	$\frac{2}{24}$ ( )	$\frac{3}{27}$ ( )	
71.	$\frac{3}{24}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
72.	$\frac{3}{24}$	$\frac{3}{16}$ ( )	$\frac{2}{16}$ ( )	$\frac{2}{12}$ ( )	$\frac{2}{18}$ ( )	$\frac{1}{16}$ ( )	
73.	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$ ( )	$\frac{2}{2}$ ( )	$\frac{2}{1}$ ( )	$\frac{1}{8}$ ( )	$\frac{4}{2}$ ( )	
74.		$\frac{1}{18}$ ( )	$\frac{2}{9}$ ( )	$\frac{3}{9}$ ( )	$\frac{4}{18}$ ( )	$\frac{2}{18}$ ( )	
75.	$\frac{2}{18}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
76.	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$ ( )	$\frac{1}{18}$ ( )	$\frac{2}{18}$ ( )	$\frac{2}{16}$ ( )	$\frac{1}{16}$ ( )	
77.		$\frac{1}{20}$ ( )	$\frac{2}{20}$ ( )	$\frac{2}{10}$ ( )	$\frac{2}{18}$ ( )	$\frac{2}{9}$ ( )	
78.	$\frac{1}{7}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	

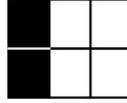
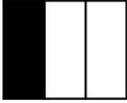
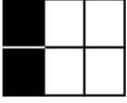
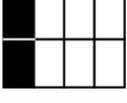
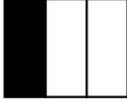
Marque o correto

	Esse vai com...	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Rascunho
79.	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$ ( )	$\frac{2}{9}$ ( )	$\frac{2}{10}$ ( )	$\frac{1}{10}$ ( )	$\frac{1}{8}$ ( )	
80.		$\frac{1}{4}$ ( )	$\frac{3}{5}$ ( )	$\frac{1}{5}$ ( )	$\frac{4}{1}$ ( )	$\frac{5}{1}$ ( )	
81.		$\frac{1}{7}$ ( )	$\frac{7}{1}$ ( )	$\frac{1}{6}$ ( )	$\frac{6}{1}$ ( )	$\frac{2}{6}$ ( )	
82.		$\frac{1}{8}$ ( )	$\frac{2}{10}$ ( )	$\frac{2}{8}$ ( )	$\frac{2}{5}$ ( )	$\frac{2}{12}$ ( )	
83.		 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
84.	$\frac{1}{3}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
85.	$\frac{1}{8}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
86.	$\frac{1}{2}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
87.	$\frac{1}{6}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
88.	$\frac{1}{4}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	

Marque o correto

	Esse vai com...	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Rascunho
89.	$\frac{1}{5}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
90.	$\frac{1}{9}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
91.	$\frac{1}{10}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
92.	$\frac{2}{12}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
93.	$\frac{2}{14}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
94.	$\frac{2}{16}$	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
95.		$\frac{1}{3}$ ( )	$\frac{1}{4}$ ( )	$\frac{3}{1}$ ( )	$\frac{4}{1}$ ( )	$\frac{3}{5}$ ( )	
96.		$\frac{1}{12}$ ( )	$\frac{2}{6}$ ( )	$\frac{6}{1}$ ( )	$\frac{1}{6}$ ( )	$\frac{3}{6}$ ( )	
97.		 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
98.		$\frac{1}{9}$ ( )	$\frac{9}{1}$ ( )	$\frac{1}{10}$ ( )	$\frac{1}{8}$ ( )	$\frac{2}{9}$ ( )	

Marque o correto

	Esse vai com...	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Rascunho
99.		 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	
100.		$\frac{2}{1}$ ( )	$\frac{2}{3}$ ( )	$\frac{1}{4}$ ( )	$\frac{1}{3}$ ( )	$\frac{1}{2}$ ( )	
101.		$\frac{2}{1}$ ( )	$\frac{1}{2}$ ( )	$\frac{1}{3}$ ( )	$\frac{3}{1}$ ( )	$\frac{2}{4}$ ( )	
102.		$\frac{4}{2}$ ( )	$\frac{2}{4}$ ( )	$\frac{6}{1}$ ( )	$\frac{6}{2}$ ( )	$\frac{2}{6}$ ( )	
103.		$\frac{1}{5}$ ( )	$\frac{10}{1}$ ( )	$\frac{2}{8}$ ( )	$\frac{1}{9}$ ( )	$\frac{1}{10}$ ( )	
104.		$\frac{1}{7}$ ( )	$\frac{1}{8}$ ( )	$\frac{1}{9}$ ( )	$\frac{9}{1}$ ( )	$\frac{5}{8}$ ( )	
105.		$\frac{2}{8}$ ( )	$\frac{8}{2}$ ( )	$\frac{2}{6}$ ( )	$\frac{6}{2}$ ( )	$\frac{1}{8}$ ( )	
106.		 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	 ( )	

## Anexo 2.

Estrutura do Pré-teste no computador, parte 1, com Blocos, Tentativas, Modelos (M) e Comparações em cada Tentativa (T). A comparação em negrito indica a comparação S+.

T	M	Comparações			T	M	Comparações		
		1	2	3			1	2	3
1	1/8	2/8	<b>2/16</b>	1/16	31	2/14p	2/7p	1/4p	<b>1/7p</b>
2	1/5p	<b>1/5</b>	5/1	1/4	32	2/6	<b>3/9</b>	2/9	3/6
3	1/6	<b>3/18</b>	3/6	1/18	33	1/5p	2/5p	1/4p	<b>2/10p</b>
4	3/18	1/9p	2/6p	<b>1/6p</b>	34	1/10	1/5	<b>2/20</b>	20/2
5	1/7p	6/1	<b>1/7</b>	7/1	35	2/16p	<b>1/8p</b>	2/8p	3/6p
6	2/12	2/6	1/12	<b>1/6</b>	36	2/10p	1/3	2/5	<b>2/10</b>
7	2/20	<b>1/10p</b>	1/4p	2/5p	37	1/3	2/3	<b>2/6</b>	3/6
8	3/18	3/12	2/18	<b>2/12</b>	38	1/3p	<b>2/6</b>	1/6	2/9
9	2/12	<b>3/18</b>	1/12	2/18	39	3/9	3/3p	3/6p	<b>1/3p</b>
10	2/4	2/3p	<b>1/2p</b>	1/4p	40	1/2	2/1	1/4	<b>2/4</b>
11	3/12	2/12	<b>2/8</b>	3/8	41	1/3pG	<b>1/3p</b>	1/2p	1/4p
12	3/21	2/21	3/14	<b>2/14</b>	42	2/18	1/18	<b>1/9</b>	2/9
13	1/5p	2/5	<b>3/15</b>	3/5	43	2/12	1/4p	2/6p	<b>1/6p</b>
14	2/10	<b>3/15</b>	2/15	3/10	44	1/6p	<b>3/18</b>	3/6	2/5
15	2/16	2/24	1/16	<b>3/24</b>	45	3/12	3/4	<b>1/4</b>	1/12
16	1/4p	1/12	3/6	<b>3/12</b>	46	1/4p	1/8	<b>2/8</b>	2/4
17	3/9	<b>1/3</b>	1/9	3/3	47	3/21	3/6p	1/3p	<b>1/7p</b>
18	1/5p	2/5p	<b>1/5p</b>	1/4p	48	1/10p	<b>1/10</b>	10/1	1/5
19	3/18	<b>1/6</b>	1/18	3/6	49	1/8p	2/8	<b>1/8</b>	9/1
20	1/4	4/12	1/12	<b>3/12</b>	50	2/8p	<b>2/8</b>	2/6	6/2
21	2/6	1/4p	<b>1/3p</b>	2/3p	51	3/21	3/7	1/21	<b>1/7</b>
22	1/7	1/21	21/7	<b>3/21</b>	52	2/6p	2/4	<b>2/6</b>	1/6
23	3/15	<b>1/5</b>	1/15	3/5	53	3/12	3/5p	2/4p	<b>1/4p</b>
24	3/24	3/8	<b>1/8</b>	1/24	54	1/3p	<b>1/3</b>	3/1	1/2
25	2/6p	1/4p	<b>1/3p</b>	3/6p	55	2/14	<b>1/7p</b>	4/7p	2/8p
26	2/10	1/10	2/5	<b>1/5</b>	56	1/7p	1/21	3/7	<b>3/21</b>
27	2/12p	2/6p	<b>1/6p</b>	3/6p	57	1/2p	1/4	<b>1/2</b>	2/1
28	2/8	<b>1/4</b>	1/8	2/6	58	1/5p	1/10	2/5	<b>2/10</b>
29	1/4p	<b>2/8p</b>	2/6p	2/4p	59	3/15	<b>1/5p</b>	3/5p	2/5p
30	1/7	2/7	<b>2/14</b>	1/14	60	1/8p	1/24	<b>3/24</b>	3/8

## Anexo 3.

Estrutura do Pré-teste no computador, parte 2, com Blocos, Tentativas, Modelos (M) e Comparações em cada Tentativa (T). A comparação em negrito indica a comparação S+.

T	M	Comparações		
		1	2	3
1	2/16	2/8p	2/10p	<b>1/8p</b>
2	1/4p	<b>1/4</b>	1/3	4/1
3	1/6p	6/1	1/5	<b>1/6</b>
4	1/2p	<b>2/4p</b>	1/3p	1/4p
5	1/9p	9/1	<b>1/9</b>	2/9
6	2/6p	3/6p	<b>2/6p</b>	1/6p
7	2/6	<b>1/3</b>	1/6	2/3
8	1/6	1/12	2/6	<b>2/12</b>
9	2/16	1/16p	<b>2/16p</b>	2/8p
10	1/4	2/4	1/8	<b>2/8</b>
11	2/14	<b>2/14p</b>	2/7p	2/7p
12	2/14	1/14	<b>1/7</b>	2/7
13	2/12	<b>2/12p</b>	2/8p	1/12p
14	1/5	2/5	1/10	<b>2/10</b>
15	2/16	1/16	<b>1/8</b>	2/8
16	1/10	<b>1/10p</b>	1/5p	2/5p
17	3/9	2/9	3/6	<b>2/6</b>
18	1/9	2/9p	<b>1/9p</b>	7/8p
19	1/3	<b>3/9</b>	1/9	3/3
20	1/3p	1/9	3/3	<b>3/9</b>
21	1/6p	1/12	<b>2/12</b>	2/6
22	1/5	2/5p	5/6p	<b>1/5p</b>
23	2/8	<b>3/12</b>	2/12	3/8
24	2/8	<b>1/8p</b>	1/4p	2/4p

T	M	Comparações		
		1	2	3
25	1/7p	2/7	<b>2/14</b>	1/14
26	2/14	<b>3/21</b>	2/21	3/14
27	1/4	2/3p	1/3p	<b>1/4p</b>
28	1/5	1/15	3/5	<b>3/15</b>
29	2/10	<b>1/5p</b>	2/5p	1/10p
30	1/6	1/5p	<b>1/6p</b>	2/6p
31	3/15	15/3	<b>2/10</b>	2/15
32	1/8p	8/1	1/16	<b>2/16</b>
33	1/2	<b>1/2p</b>	2/3p	2/2p
34	1/8	3/8	2/8	<b>3/24</b>
35	3/24	2/8p	<b>1/8p</b>	3/8p
36	3/24	<b>2/16</b>	3/16	2/24
37	1/8	2/6p	<b>1/8p</b>	2/8p
38	2/4	<b>1/2</b>	3/4	2/2
39	1/2p	1/3	1/4	<b>2/4</b>
40	1/3	1/4p	<b>1/3p</b>	2/3p
41	1/9p	2/9	9/1	<b>2/18</b>
42	2/18	<b>1/9p</b>	2/9p	1/18p
43	1/9	2/9	3/9	<b>2/18</b>
44	1/10p	<b>2/20</b>	2/10	2/5
45	1/7	2/7p	<b>1/7p</b>	3/14p
46	2/20	2/5	20/2	<b>1/10</b>

## Anexo 4.

Estrutura do Treino AC, com Blocos (B), Tentativas (T), Modelos (M) e Comparações em cada tentativa. A comparação em negrito indica a comparação S+.

B	T	M	Comparação		
			1	2	3
1	1	A1		<b>C1</b>	
2	1	A1	<b>C1</b>		C2
	2	A1		C2	<b>C1</b>
3	1	A1	X3	<b>C1</b>	C2
	2	A1	C2	X3	<b>C1</b>
	3	A1	<b>C1</b>	C2	X3
4	1	A2		<b>C2</b>	
5	1	A2	C1		<b>C2</b>
	2	A2	<b>C2</b>		C1
6	1	A2	C1	<b>C2</b>	X3
	2	A2	<b>C2</b>	X3	C1
	3	A2	X3	C1	<b>C2</b>
7	1	A2	<b>C2</b>	C1	X3
	2	A2	C1	X3	<b>C2</b>
	3	A1	C2	<b>C1</b>	X3
	4	A1	X3	C2	<b>C1</b>
	5	A2	X3	<b>C2</b>	C1
	6	A1	<b>C1</b>	X3	C2
8	1	A2	X3	<b>C2</b>	C1
	2	A1	<b>C1</b>	X3	C2
	3	A2	<b>C2</b>	C1	X3
	4	A1	X3	C2	<b>C1</b>
	5	A2	C1	X3	<b>C2</b>
	6	A1	C2	<b>C1</b>	X3
9	1	A2	X3	C1	<b>C2</b>
	2	A2	C1	C2	X3
	3	A1	X3	C1	C2
	4	A2	C2	X3	C1
	5	A1	C2	X3	C1
	6	A1	C1	C2	X3

## Anexo 5.

Estrutura do Treino AC: tipo de tentativa, número de tentativa com mesma comparação, comparações S+, número de comparações S-, critério de aprendizagem para próximo bloco e número blocos

Bloco	Tipo	Tentativas	Modelo	S+	Número S-
1	AC	1	A1	C1	-
2	AC	2	A1	C1	1
3	AC	3	A1	C1	2
4	AC	1	A2	C2	-
5	AC	2	A2	C2	1
6	AC	3	A2	C2	2
7	AC	3	A1	C1	2
8	AC	3	A2	C2	2
		3	A1	C1	2
		3	A2	C2	2
9	AC	3	A1	C1	2
		3	A2	C2	2

## Anexo 6.

Estrutura do Treino BC, com Blocos, Tentativas, Modelos e Comparações em cada Tentativa. A comparação em negrito indica a comparação S+.

B	T	M	Comparações		
			1	2	3
1	1	B1		<b>C1</b>	
2	1	B1	<b>C1</b>		C2
	2	B1		C2	<b>C1</b>
3	1	B1	<b>C1</b>	X3	C2
	2	B1	C2	X3	<b>C1</b>
	3	B1	X3	<b>C1</b>	C2
4	1	B2	<b>C2</b>		
5	1	B2	C1		<b>C2</b>
	2	B2		<b>C2</b>	C1
6	1	B2	C1	X3	<b>C2</b>
	2	B2	<b>C2</b>	X3	C1
	3	B2	X3	<b>C2</b>	C1
7	1	B1	C2	X3	<b>C1</b>
	2	B2	<b>C2</b>	C1	X3
	3	B1	<b>C1</b>	C2	X3
	4	B1	X3	<b>C1</b>	C2
	5	B2	C1	X3	<b>C2</b>
	6	B2	X3	<b>C2</b>	C1
8	1	B2	C1	X3	<b>C2</b>
	2	B1	<b>C1</b>	C2	X3
	3	B2	X3	<b>C2</b>	C1
	4	B1	X3	<b>C1</b>	C2
	5	B2	<b>C2</b>	C1	X3
	6	B1	C2	X3	<b>C1</b>
9	1	B2	<b>C2</b>	X3	C1
	2	B2	C1	<b>C2</b>	X3
	3	B1	X3	<b>C1</b>	C2
	4	B2	X3	C1	<b>C2</b>
	5	B1	C2	X3	<b>C1</b>
	6	B1	<b>C1</b>	C2	X3

## Anexo 7.

Estrutura do Treino BC: tipo de tentativa, número de tentativa com mesma comparação, comparações S+, número de comparações S-, critério de aprendizagem para próximo bloco e número blocos

Bloco	Tipo	Tentativas	Modelo	S+	Número S-
1	BC	1	B1	C1	-
2	BC	2	B1	C1	1
3	BC	3	B1	C1	2
4	BC	1	B2	C2	-
5	BC	2	B2	C2	1
6	BC	3	B2	C2	2
7	BC	3	B1	C1	2
8	BC	3	B2	C2	2
		3	B1	C1	2
		3	B2	C2	2
9	BC	3	B1	C1	2
		3	B2	C2	2

## Anexo 8.

Estrutura do Treino Misto AC/BC, com Blocos (B), Tentativas (T), Modelos (M) e Comparações em cada Tentativa. A comparação em negrito indica a comparação S+.

B	T	M	Comparações		
			1	2	3
1	1	A1	<b>C1</b>	C2	X3
	2	B1	X3	<b>C1</b>	C2
	3	B2	<b>C2</b>	X3	C1
	4	A2	X3	C1	<b>C2</b>
2	1	A2	C1	<b>C2</b>	X3
	2	B1	<b>C1</b>	C2	X3
	3	A1	C2	X3	<b>C1</b>
	4	B2	X3	<b>C2</b>	C1
3	1	B2	<b>C2</b>	C1	X3
	2	B1	C2	X3	<b>C1</b>
	3	A2	C1	X3	<b>C2</b>
	4	A1	X3	<b>C1</b>	C2

Anexo 9.

Composição das tentativas de cada relação treinada ou testada, com cada classe de estímulos matematicamente equivalentes, com S+ e S-'s utilizados.

Relações	Classes											
	1		2		3		4		5		6	
	S+	S-'s	S+	S-'s	S+	S-'s	S+	S-'s	S+	S-'s	S+	S-'s
AC	$\frac{1}{3}p$	$\frac{2}{6} \frac{2}{12} \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}p$	$\frac{2}{12} \frac{2}{6} \frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}p$	$\frac{2}{8} \frac{2}{14} \frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}p$	$\frac{2}{14} \frac{2}{8} \frac{1}{14}$	$\frac{1}{5}p$	$\frac{2}{10} \frac{2}{16} \frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}p$	$\frac{2}{16} \frac{2}{10} \frac{1}{16}$
BC	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{6} \frac{2}{12} \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{12} \frac{2}{6} \frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8} \frac{2}{14} \frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}p$	$\frac{2}{14} \frac{2}{8} \frac{1}{14}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{10} \frac{2}{16} \frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{16} \frac{2}{10} \frac{1}{16}$
CA	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{3}p \frac{1}{6}p \frac{3}{6}p$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{6}p \frac{1}{3}p \frac{1}{12}p$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{4}p \frac{1}{7}p \frac{1}{8}p$	$\frac{2}{14}$	$\frac{1}{7}p \frac{1}{4}p \frac{1}{14}p$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{5}p \frac{1}{8}p \frac{1}{10}p$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{8}p \frac{1}{5}p \frac{1}{16}p$
CB	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{3}p \frac{1}{6}p \frac{3}{6}p$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{6}p \frac{1}{3}p \frac{1}{12}p$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{4}p \frac{1}{7}p \frac{1}{8}p$	$\frac{2}{14}$	$\frac{1}{7}p \frac{1}{4}p \frac{1}{14}p$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{5}p \frac{1}{8}p \frac{1}{10}p$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{8}p \frac{1}{5}p \frac{1}{16}p$
AB	$\frac{1}{3}p$	$\frac{1}{3} \frac{1}{6} \frac{1}{1}$	$\frac{1}{6}p$	$\frac{1}{6} \frac{1}{3} \frac{1}{1}$	$\frac{1}{4}p$	$\frac{1}{4} \frac{1}{7} \frac{1}{1}$	$\frac{1}{7}p$	$\frac{1}{7} \frac{1}{4} \frac{1}{1}$	$\frac{1}{5}p$	$\frac{1}{5} \frac{1}{8} \frac{1}{1}$	$\frac{1}{8}p$	$\frac{1}{8} \frac{1}{5} \frac{1}{1}$
BA	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}p \frac{1}{6}p \frac{1}{4}p$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}p \frac{1}{3}p \frac{1}{7}p$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}p \frac{1}{7}p \frac{1}{5}p$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}p \frac{1}{4}p \frac{1}{8}p$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}p \frac{1}{8}p \frac{1}{6}p$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}p \frac{1}{5}p \frac{1}{9}p$
CA	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{3}p \frac{1}{6}p \frac{3}{6}p$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{6}p \frac{1}{3}p \frac{1}{12}p$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{4}p \frac{1}{7}p \frac{1}{8}p$	$\frac{2}{14}$	$\frac{1}{7}p \frac{1}{4}p \frac{1}{14}p$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{5}p \frac{1}{8}p \frac{1}{10}p$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{8}p \frac{1}{5}p \frac{1}{16}p$
AB	$\frac{1}{3}p$	$\frac{1}{3} \frac{1}{6} \frac{1}{1}$	$\frac{1}{6}p$	$\frac{1}{6} \frac{1}{3} \frac{1}{1}$	$\frac{1}{4}p$	$\frac{1}{4} \frac{1}{7} \frac{1}{1}$	$\frac{1}{7}p$	$\frac{1}{7} \frac{1}{4} \frac{1}{1}$	$\frac{1}{5}p$	$\frac{1}{5} \frac{1}{8} \frac{1}{1}$	$\frac{1}{8}p$	$\frac{1}{8} \frac{1}{5} \frac{1}{1}$
BA	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}p \frac{1}{6}p \frac{1}{4}p$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}p \frac{1}{3}p \frac{1}{7}p$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}p \frac{1}{7}p \frac{1}{5}p$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}p \frac{1}{4}p \frac{1}{8}p$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}p \frac{1}{8}p \frac{1}{6}p$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}p \frac{1}{5}p \frac{1}{9}p$
AC	$\frac{1}{3}p$	$\frac{2}{6} \frac{2}{12} \frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}p$	$\frac{2}{12} \frac{2}{6} \frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}p$	$\frac{2}{8} \frac{2}{14} \frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}p$	$\frac{2}{14} \frac{2}{8} \frac{1}{14}$	$\frac{1}{3}p$	$\frac{2}{10} \frac{2}{16} \frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}p$	$\frac{2}{16} \frac{2}{10} \frac{1}{16}$
AD	$\frac{1}{3}p$	$\frac{3}{9} \frac{3}{18} \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}p$	$\frac{3}{18} \frac{3}{9} \frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}p$	$\frac{3}{12} \frac{3}{21} \frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}p$	$\frac{3}{21} \frac{3}{12} \frac{1}{14}$	$\frac{1}{5}p$	$\frac{3}{15} \frac{3}{24} \frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}p$	$\frac{3}{24} \frac{3}{15} \frac{1}{16}$
DA	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{3}p \frac{1}{6}p \frac{1}{9}p$	$\frac{3}{18}$	$\frac{1}{6}p \frac{1}{3}p \frac{1}{12}p$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{4}p \frac{1}{7}p \frac{1}{8}p$	$\frac{3}{21}$	$\frac{1}{7}p \frac{1}{4}p \frac{1}{14}p$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{5}p \frac{1}{8}p \frac{1}{10}p$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{8}p \frac{1}{5}p \frac{1}{16}p$
DB	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{3}p \frac{1}{6}p \frac{1}{9}p$	$\frac{3}{18}$	$\frac{1}{6}p \frac{1}{3}p \frac{1}{12}p$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{4}p \frac{1}{7}p \frac{1}{8}p$	$\frac{3}{21}$	$\frac{1}{7}p \frac{1}{4}p \frac{1}{14}p$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{5}p \frac{1}{8}p \frac{1}{10}p$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{8}p \frac{1}{5}p \frac{1}{16}p$
BD	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{9} \frac{3}{18} \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{18} \frac{3}{9} \frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{12} \frac{3}{21} \frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{21} \frac{3}{12} \frac{1}{14}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{15} \frac{3}{24} \frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{24} \frac{3}{15} \frac{1}{16}$
DC	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{6} \frac{2}{12} \frac{1}{9}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{12} \frac{2}{6} \frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{8} \frac{2}{14} \frac{1}{8}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{2}{14} \frac{2}{8} \frac{1}{14}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{10} \frac{2}{16} \frac{1}{10}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{16} \frac{2}{10} \frac{1}{16}$
CD	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{9} \frac{3}{18} \frac{1}{6}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{18} \frac{3}{9} \frac{1}{12}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{12} \frac{3}{21} \frac{1}{8}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{21} \frac{3}{12} \frac{1}{14}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{15} \frac{3}{24} \frac{1}{10}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{24} \frac{3}{15} \frac{1}{16}$
EF	$\frac{1}{2}p$	$\frac{1}{2} \frac{1}{9} \frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}p$	$\frac{1}{9} \frac{1}{2} \frac{1}{18}$	$\frac{1}{10}p$	$\frac{1}{10} \frac{1}{12} \frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}p$	$\frac{1}{12} \frac{1}{10} \frac{1}{18}$	$\frac{2}{3}p$	$\frac{2}{3} \frac{3}{5} \frac{1}{6}$	$\frac{3}{5}p$	$\frac{3}{5} \frac{2}{3} \frac{1}{5}$
FE	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}p \frac{1}{9}p \frac{1}{12}p$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}p \frac{1}{2}p \frac{1}{12}p$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}p \frac{1}{12}p \frac{1}{12}p$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}p \frac{1}{10}p \frac{1}{10}p$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}p \frac{3}{5}p \frac{1}{5}p$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}p \frac{2}{3}p \frac{1}{5}p$
EG	$\frac{1}{2}p$	$\frac{2}{4} \frac{2}{18} \frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}p$	$\frac{2}{18} \frac{2}{4} \frac{1}{18}$	$\frac{1}{10}p$	$\frac{2}{20} \frac{2}{24} \frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}p$	$\frac{2}{24} \frac{2}{20} \frac{1}{18}$	$\frac{2}{3}p$	$\frac{4}{6} \frac{6}{10} \frac{1}{6}$	$\frac{3}{5}p$	$\frac{6}{10} \frac{4}{6} \frac{1}{5}$
GE	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}p \frac{1}{9}p \frac{1}{4}p$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{9}p \frac{1}{2}p \frac{1}{18}p$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{10}p \frac{1}{12}p \frac{1}{4}p$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{12}p \frac{1}{10}p \frac{1}{18}p$	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{3}p \frac{3}{5}p \frac{1}{6}p$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{5}p \frac{2}{3}p \frac{1}{5}p$
FG	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4} \frac{2}{18} \frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{18} \frac{2}{4} \frac{1}{18}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{20} \frac{2}{24} \frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{24} \frac{2}{20} \frac{1}{18}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{6} \frac{6}{10} \frac{1}{6}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{10} \frac{4}{6} \frac{1}{5}$
GF	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{9} \frac{1}{4}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{9} \frac{1}{2} \frac{1}{18}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{10} \frac{1}{12} \frac{1}{4}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{12} \frac{1}{10} \frac{1}{18}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{3} \frac{3}{5} \frac{1}{6}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{5} \frac{2}{3} \frac{1}{5}$

## Anexo 10.

Estrutura do teste das relações CA CB (Simetria), com Blocos (B), Tentativas (T), Modelos (M) e Comparações em cada Tentativa. A comparação em negrito indica a comparação S+.

B	T	M	Comparações		
			1	2	3
1	1	C2	B1	<b>B2</b>	X3
	2	C1	<b>A1</b>	A2	X3
	3	C1	B2	X3	<b>B1</b>
	4	C2	<b>A2</b>	X3	A1
2	1	C1	<b>B1</b>	B2	X3
	2	C2	X3	B1	<b>B2</b>
	3	C1	A2	X3	<b>A1</b>
	4	C2	A1	<b>A2</b>	X3
3	1	C1	X3	<b>B1</b>	B2
	2	C2	X3	A1	<b>A2</b>
	3	C2	<b>B2</b>	X3	B1
	4	C1	X3	<b>A1</b>	A2

## Anexo 11.

Estrutura do teste das relações AB BA (Transitividade), com Blocos (B), Tentativas (T), Modelos (M) e Comparações em cada Tentativa. A comparação em negrito indica a comparação S+.

B	T	M	Comparações		
			1	2	3
1	1	A2	B1	<b>B2</b>	X3
	2	A1	B2	X3	<b>B1</b>
	3	B1	X3	<b>A1</b>	A2
	4	B2	<b>A2</b>	X3	A1
2	5	B1	<b>A1</b>	A2	X3
	6	A2	X3	B1	<b>B2</b>
	7	A1	<b>B1</b>	B2	X3
	8	B2	A1	<b>A2</b>	X3
3	9	A1	X3	<b>B1</b>	B2
	10	B1	A2	X3	<b>A1</b>
	11	B2	X3	A1	<b>A2</b>
	12	A2	<b>B2</b>	X3	B1

## Anexo 12.

Estrutura de teste das relações AC, CA, AB e BA, utilizando nova forma pictórica, com Blocos (B), Tentativas (T), Modelos (M) e Comparações em cada Tentativa. A comparação em negrito indica a comparação S+.

B	T	M	Comparações			Forma
			1	2	3	
1	1	A2	B1	<b>B2</b>	X3	1
	2	A1	<b>C1</b>	C2	X3	3
	3	A2	X3	<b>C2</b>	C1	2
	4	B2	<b>A2</b>	X3	A1	1
	5	C2	A1	X3	<b>A2</b>	2
	6	B1	X3	<b>A1</b>	A2	2
	7	C1	A2	X3	<b>A1</b>	1
	8	A1	<b>B1</b>	X3	B2	3
2	1	A1	C2	<b>C1</b>	X3	2
	2	B2	X3	<b>A2</b>	A1	2
	3	B1	X3	A2	<b>A1</b>	3
	4	C2	<b>A2</b>	X3	A1	1
	5	A1	B2	X3	<b>B1</b>	1
	6	A2	X3	C1	<b>C2</b>	3
	7	A2	<b>B2</b>	B1	X3	2
	8	C1	A2	<b>A1</b>	X3	2
3	1	A1	<b>B1</b>	X3	B2	2
	2	C1	A2	<b>A1</b>	X3	3
	3	A2	B1	X3	<b>B2</b>	3
	4	A1	X3	C2	<b>C1</b>	1
	5	B2	<b>A2</b>	X3	A1	3
	6	A2	X3	<b>C2</b>	C1	1
	7	C2	A1	X3	<b>A2</b>	3
	8	B1	<b>A1</b>	X3	A2	1

## Anexo 13.

Estrutura do teste das relações D-(ABC), com novo elemento matematicamente equivalente às frações, com Blocos (B), Tentativas (T), Modelos (M) e Comparações em cada Tentativa. A comparação em negrito indica a comparação S+.

B	T	M	Comparações		
			1	2	3
1	1	A1	D2	<b>D1</b>	X1
	2	C2	<b>D2</b>	D1	X2
	3	B1	D2	X1	<b>D1</b>
	4	B2	<b>D2</b>	X2	D1
	5	D1	A2	<b>A1</b>	X3
	6	D2	X2	C1	<b>C2</b>
	7	D1	<b>B1</b>	X5	B2
	8	A2	D1	X2	<b>D2</b>
	9	D1	X1	<b>C1</b>	C2
	10	D2	X3	A1	<b>A2</b>
	11	C1	<b>D1</b>	D2	X2
	12	D2	X5	<b>B2</b>	B1
2	1	D2	<b>B2</b>	B1	X5
	2	C2	X2	<b>D2</b>	D1
	3	D1	A2	X3	<b>A1</b>
	4	B2	<b>D2</b>	D1	X2
	5	D2	X2	<b>C2</b>	C1
	6	A2	X2	<b>D2</b>	D1
	7	D1	<b>B1</b>	X5	B2
	8	D1	X1	C2	<b>C1</b>
	9	D2	<b>A2</b>	X3	A1
	10	C1	X2	D2	<b>D1</b>
	11	B1	D2	<b>D1</b>	X1
	12	A1	<b>D1</b>	X1	D2

## Anexo 14.

Estrutura do teste das relações com novas frações EF, FE, EG, GE, FG e GF, com Blocos (B), Tentativas (T), Modelos (M) e Comparações em cada Tentativa. A comparação em negrito indica a comparação S+.

B	T	M	Comparações		
			1	2	3
1	1	G1	F2	<b>F1</b>	X10
	2	E2	<b>F2</b>	X11	F1
	3	F2	X11	G1	<b>G2</b>
	4	G1	<b>E1</b>	E2	X12
	5	F2	X4	<b>E2</b>	E1
	6	F1	G2	X10	<b>G1</b>
	7	E2	<b>G2</b>	G1	X11
	8	F1	X4	<b>E1</b>	E2
	9	G2	E1	<b>E2</b>	X13
	10	E1	F2	X10	<b>F1</b>
	11	E1	<b>G1</b>	G2	X10
	12	G2	F1	X11	<b>F2</b>
2	1	F2	X11	<b>G2</b>	G1
	2	E2	X11	F1	<b>F2</b>
	3	E1	<b>G1</b>	X10	G2
	4	G2	X13	E1	<b>E2</b>
	5	F2	X4	<b>E2</b>	E1
	6	E2	G1	<b>G2</b>	X11
	7	F1	<b>E1</b>	X4	E2
	8	F1	G2	X10	<b>G1</b>
	9	E1	F2	<b>F1</b>	X10
	10	G1	<b>E1</b>	E2	X12
	11	G2	<b>F2</b>	X11	F1
	12	G1	X10	F2	<b>F1</b>

## Anexo 15.

Porcentagem de acertos média ( $\bar{x}$ ) e desvio padrão ( $DP$ ) nas relações fracionárias absolutas e relativas, nos Pré e Pós-testes, com lápis e papel e no computador, para os grupos experimentais (M, P, MP e SD) e Controle (CON), e com Dica (M, P e MP), Sem dica (SD) e Controle (CON).

Fator de Comparação	Níveis	$n^a$	Absolutas				Relativas			
			Pré		Pós		Pré		Pós	
			$DP$	$DP$	$DP$	$DP$	$DP$	$DP$		
Teste com lápis e papel										
Grupos	EXP	48	74,4	23,7	67,8	20,0	9,2	5,3	57,0	27,1
	CON	12	65,9	26,7	84,8	23,0	22,5	7,7	27,2	23,5
Grupos	Dica	36	75,9	21,5	67,0	21,1	9,7	4,9	59,4	24,4
	SD	12	70,0	30,4	70,0	18,1	7,5	6,1	49,7	33,9
	CON	12	65,9	26,7	84,8	23,0	22,5	7,7	27,2	23,5
Teste MTS no computador										
Grupos	EXP	48	81,1	15,2	84,4	14,4	22,2	14,7	59,6	22,4
	CON									
Grupos	Dica	36	80,7	15,2	85,2	14,4	22,4	14,1	60,8	20,6
	SD	12	83,0	15,6	81,9	15,6	21,3	17,1	56,2	27,6
	CON									

<sup>a</sup> O  $n$  em cada tipo de teste foi diferente, por que os participantes do grupo controle só participaram do Pré e Pós-teste com lápis e papel.

## Anexo 16.

Porcentagem de acertos média ( $\bar{x}$ ) e desvio padrão ( $DP$ ) nas relações fracionárias absolutas e relativas, nos Pré e Pós-teste, com lápis e papel e no computador, dos grupos experimentais MP, M, P, SD e Controle (CON).

Fator de Comparação	Níveis	Absolutas					Relativas			
		$n^a$	Pré		Pós		Pré		Pós	
			$DP$	$DP$	$DP$	$DP$	$DP$	$DP$		
Teste com lápis e papel										
Tipo de Dica	MP	12	71,6	21,2	67,6	24,5	7,8	4,9	50,9	26,8
	M	12	77,2	24,7	64,8	21,6	11,8	4,8	62,9	22,5
	P	12	78,7	19,8	69,1	17,8	9,7	4,7	64,2	23,5
	SD	12	70,0	30,4	70,0	18,1	7,5	6,1	49,7	33,9
	CON	12	65,9	26,7	84,8	23,0	22,5	7,7	27,2	23,5
Teste MTS no computador										
Tipo de Dica	MP	12	77,8	19,0	85,8	12,2	19,1	13,3	53,2	21,1
	M	12	77,8	16,8	83,3	17,6	25,3	16,9	65,9	21,3
	P	12	86,1	7,4	86,1	13,6	22,8	12,0	63,3	19,0
	SD	12	83,0	15,6	81,9	15,6	21,3	17,1	56,2	27,6
	CON									

<sup>a</sup> O  $n$  em cada tipo de teste foi diferente, por que os participantes do grupo controle só participaram do Pré e Pós-teste com lápis e papel.