

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE COMPARATIVA DE MÉTODOS DE CÁLCULO  
DE RAMPAS HELICOIDAIS AUTOPORTANTES**

**ALBER HERBERT RODRIGUES VASCONCELOS**

**ORIENTADOR: LINEU JOSÉ PEDROSO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO  
EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.DM – 006A/10  
BRASÍLIA/DF: OUTUBRO – 2010**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE COMPARATIVA DE MÉTODOS DE CÁLCULO DE  
RAMPAS HELICOIDAIS AUTOPORTANTES**

**ALBER HERBERT RODRIGUES VASCONCELOS**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE  
ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE  
TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE  
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU  
DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.**

**APROVADA POR:**

---

**Prof. Lineu José Pedroso, Dr. (ENC-UnB)  
(Orientador)**

---

**Prof. Yosiaki Nagato, DSc (ENC-UnB)  
(Examinador Interno)**

---

**Prof. Zenón José Guzmán Nuñez Del Prado, DSc (UFG)  
(Examinador Externo)**

**BRASÍLIA/DF, 07 DE OUTUBRO DE 2010.**

## FICHA CATALOGRÁFICA

VASCONCELOS, ALBER HERBERT RODRIGUES

Análise Comparativa de Métodos de Cálculo de Rampas Helicoidais Autoportantes  
[Distrito Federal] 2010.

xvii, 152 p., 297mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2010).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Rampas Helicoidais Autoportantes

2. Estruturas

3. Análise Estrutural

4. Métodos de Cálculo

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

VASCONCELOS, A. H. R. (2010). Análise Comparativa de Métodos de Cálculo de Rampas Helicoidais Autoportantes. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-006A/10, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 152p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Alber Herbert Rodrigues Vasconcelos.

TÍTULO: Análise Comparativa de Métodos de Cálculo de Rampas Helicoidais Autoportantes.

GRAU: Mestre ANO: 2010

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

Alber Herbert Rodrigues Vasconcelos

QE 19 conjunto L casa 21 – Guará II

71050-123 – Brasília/DF – Brasil

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida que me foi dada e por tudo de bom que me foi permitido conquistar.

Agradeço ao professor Lineu por toda a paciência e dedicação para que eu pudesse apresentar um bom trabalho. Toda a cobrança teve um propósito maior. Ele me abriu os olhos e ajudou a amadurecer cada etapa deste trabalho.

Agradeço à minha família e amigos, que souberam compreender minhas ausências e meu cansaço ao longo do período de estudos e principalmente por todo apoio recebido.

Agradeço especialmente aos amigos Giselle, Hileana e João Paulo, companheiros de estudos no dia-a-dia. Foram grandes incentivadores. Nossos momentos juntos serão inesquecíveis.

Em especial à minha noiva Lidiane, que sempre esteve ao meu lado em minhas decisões. Nunca me deixou desanimar e acreditou no meu sucesso.

## **RESUMO**

### **ANÁLISE COMPARATIVA DE MÉTODOS DE CÁLCULO DE RAMPAS HELICOIDAIS AUTOPORTANTES**

**Autor: Alber Herbert Rodrigues Vasconcelos**

**Orientador: Lineu José Pedroso**

**Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil  
Brasília, outubro de 2010**

Rampas helicoidais são estruturas muito apreciadas na arquitetura. Devido à grande procura por estruturas deste tipo os engenheiros devem analisá-las de forma cuidadosa, avaliando corretamente o desenvolvimento dos esforços envolvidos e as deformações que podem ocorrer.

Neste trabalho as rampas de formato helicoidal foram analisadas por meio de diferentes métodos, de forma a avaliá-los e entender as suas diferenças quando submetidas a cargas estáticas. Foram utilizados os métodos propostos por Fuchssteiner, Scordelis, Bergman e Prudon. Também foram desenvolvidos modelos em elementos finitos de barras e de cascas por meio do programa SAP 2000. Para tal objetivo foram desenvolvidos os cálculos dos esforços internos de oito rampas idealizadas. Foram feitos também comentários a respeito do comportamento de cada esforço nas estruturas analisadas.

Constatou-se por meio dos resultados que os métodos de Bergman e Prudon distanciaram-se bastante dos demais por não considerarem todos os efeitos da interação dos esforços internos que ocorrem em uma estrutura helicoidal. Os métodos propostos por Fuchssteiner e Scordelis apresentam resultados muito semelhantes aos obtidos pelo programa SAP 2000 simulando elementos de barras. Os modelos de cascas desenvolvidos também apresentaram resultados coerentes com os obtidos pelos métodos citados.

## **ABSTRACT**

### **COMPARATIVE ANALYSIS OF METHODS FOR CALCULATION OF FREE-STANDING HELICAL RAMPS**

**Author: Alber Herbert Rodrigues Vasconcelos**

**Supervisor: Lineu José Pedroso**

**Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, October of 2010**

Helical ramps are structures highly prized in architecture. Due to the high demand for such structures engineers must analyze them carefully, measuring correctly the forces involved and strains that can occur.

In this paper helical ramps were analyzed by different methods in order to evaluate them and understand their differences. The methods proposed by Fuchssteiner, Scordelis, Bergman and Prudon were used. Models were also developed in finite element bars and shells using the program SAP 2000. For this purpose were developed the calculations of the internal forces of eight idealized ramps. There were made comments about the behavior of each individual force in the analyzed structures.

It was verified by the results for the methods of Bergman and Prudon distanced themselves enough from the others because they do not consider rightly the effects of the interaction of the internal forces that occur in a helical structure. The proposed methods by Fuchssteiner Scordelis show very similar results to those obtained by SAP 2000 program simulating bar elements. The models developed with shells finite elements also showed results consistent with those obtained by the previous methods cited.

# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>12</b>
<b>1.1 JUSTIFICATIVA .....</b>	<b>13</b>
<b>1.2 OBJETIVOS .....</b>	<b>13</b>
1.2.1 Objetivo geral.....	13
1.2.2 Objetivos específicos .....	13
<b>1.3 METODOLOGIA.....</b>	<b>14</b>
<b>1.4 ABRANGÊNCIA E LIMITAÇÕES .....</b>	<b>14</b>
<b>1.5 ORGANIZAÇÃO DOS CAPÍTULOS .....</b>	<b>15</b>
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>16</b>
<b>2.1 GENERALIDADES SOBRE RAMPAS .....</b>	<b>16</b>
2.1.1 Aspectos Fundamentais .....	16
2.1.2 Rampas Autoportantes .....	17
2.1.3 Rampas Autoportantes Helicoidais .....	17
<b>2.2 REFERÊNCIAS PESQUISADAS SOBRE O TEMA.....</b>	<b>21</b>
<b>3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO.....</b>	<b>28</b>
<b>3.1 A FORMA HELICOIDAL .....</b>	<b>28</b>
<b>3.2 SEÇÃO DE SIMETRIA.....</b>	<b>31</b>
<b>3.3 CARREGAMENTOS DISTRIBUÍDOS .....</b>	<b>32</b>
<b>3.4 ESFORÇOS NA ESTRUTURA HELICOIDAL .....</b>	<b>33</b>
3.4.1 Esforço Axial $N$ .....	35
3.4.2 Esforço Cortante $Q_y$ .....	36
3.4.3 Esforço Cortante $Q_x$ .....	37
3.4.4 Momento Torçor $M_t$ .....	38
3.4.5 Momento Fletor $M_y$ .....	38
3.4.6 Momento Fletor $M_x$ .....	39
<b>3.5 DEFLEXÕES NA ESTRUTURA HELICOIDAL .....</b>	<b>40</b>
3.5.1 Deflexões laterais.....	40
3.5.2 Deflexões verticais .....	41
<b>3.6 PARÂMETROS E VARIÁVEIS DE UMA ESTRUTURA HELICOIDAL.....</b>	<b>41</b>
<b>3.7 MÉTODOS DE CÁLCULO UTILIZADOS .....</b>	<b>42</b>
3.7.1 Formulação de Fuchssteiner (1954).....	43

3.7.2	Formulação de Scordelis (1960).....	55
3.7.3	Formulação de Bergman (1956).....	62
3.7.4	Formulação de Prudon (1955) .....	63
3.7.5	Modelos de elementos finitos.....	65
<b>4.</b>	<b>RESULTADOS .....</b>	<b>70</b>
4.1	INTRODUÇÃO .....	70
4.2	CASO 1: RAMPA 1.....	72
4.3	CASO 2: RAMPA 2.....	75
4.4	CASO 3: RAMPA 3.....	77
4.5	CASO 4: RAMPA 4.....	80
4.6	CASO 5: RAMPA 5.....	83
4.7	CASO 6: RAMPA 6.....	85
4.8	CASO 7: RAMPA 7.....	88
4.9	CASO 8: RAMPA 8.....	90
4.10	COMENTÁRIOS GERAIS E INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS .....	93
4.10.1	Comentários sobre o esforço $N$ : .....	93
4.10.2	Comentários sobre o esforço $Q_y$ :.....	96
4.10.3	Comentários sobre o esforço $Q_x$ :.....	99
4.10.4	Comentários sobre o momento torçor $M_t$ : .....	102
4.10.5	Comentários sobre o momento fletor $M_x$ : .....	105
4.10.6	Comentários sobre o momento fletor $M_y$ : .....	109
4.10.7	Comentários sobre a variação da inclinação .....	111
4.10.8	Comentários sobre a variação do raio.....	116
4.10.9	Comentários sobre a variação de $\phi$ .....	121
4.10.10	Demais verificações .....	123
4.10.11	Comentários sobre os modelos de cascas .....	126
<b>5.</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>128</b>
5.1	CONCLUSÕES GERAIS.....	128
5.2	CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	129
5.3	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	130
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	131
	APÊNDICE – A HISTÓRIA DAS ESCADAS.....	138



<b>APÊNDICE – B ASPECTOS DE PROJETO DE RAMPAS E ESCADAS.....</b>	<b>141</b>
<b>APÊNDICE – C ESTUDOS DA VIGA BALCÃO CIRCULAR.....</b>	<b>147</b>

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Esforços em uma estrutura helicoidal.....	34
Tabela 3.2 – Identificação dos hiperestáticos (incógnitas) de referência.....	34
Tabela 3.3 – Hiperestáticos identificados no método de Fuchssteiner.....	48
Tabela 3.4 – Comparação de valores intermediários no método de Fuchssteiner.....	55
Tabela 3.5 – Comparação de valores dos esforços no método de Fuchssteiner.....	55
Tabela 3.6 – Verificação da reformulação do método de Scordelis.....	61
Tabela 4.1 – Nomenclatura dos esforços.....	71
Tabela 4.2 – Resumo dos casos estudados.....	71
Tabela 4.3 – Esforços no apoio superior da rampa 1.....	72
Tabela 4.4 – Esforços no meio do vão da rampa 1.....	73
Tabela 4.5 – Esforços no apoio superior da rampa 2.....	75
Tabela 4.6 – Esforços no meio do vão da rampa 2.....	76
Tabela 4.7 – Esforços no apoio superior da rampa 3.....	78
Tabela 4.8 – Esforços no meio do vão da rampa 3.....	78
Tabela 4.9 – Esforços no apoio superior da rampa 4.....	81
Tabela 4.10 – Esforços no meio do vão da rampa 4.....	81
Tabela 4.11 – Esforços no apoio superior da rampa 5.....	83
Tabela 4.12 – Esforços no meio do vão da rampa 5.....	84
Tabela 4.13 – Esforços no apoio superior da rampa 6.....	86

Tabela 4.14 – Esforços no meio do vão da rampa 6.....	86
Tabela 4.15 – Esforços no apoio superior da rampa 7.....	88
Tabela 4.16 – Esforços no meio do vão da rampa 7.....	89
Tabela 4.17 – Esforços no apoio superior da rampa 8.....	91
Tabela 4.18 – Esforços no meio do vão da rampa 8.....	91

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Exemplos de escadas autoportantes (a) do Park Shopping em Brasília; (b) do Aeroporto de Recife. (Disponível em: < <a href="http://www.skyscrapercity.com/showthread.php?t=863756&amp;page=3">http://www.skyscrapercity.com/showthread.php?t=863756&amp;page=3</a> >) .....	17
Figura 2.2 – Exemplos de rampas autoportantes helicoidais (a) Gerada no SAP 2000; (b) Escada helicoidal de concreto (Disponível em: < <a href="http://vanishingstl.blogspot.com/2010_08_01_archive.html">http://vanishingstl.blogspot.com/2010_08_01_archive.html</a> >).....	18
Figura 2.3 – Exemplo de escada helicoidal com patamar intermediário. (Disponível em: < <a href="http://www.stairporn.org/2010/04/23/jean-d%E2%80%99arcel-cosmetiques-in-kehlgermany/">http://www.stairporn.org/2010/04/23/jean-d%E2%80%99arcel-cosmetiques-in-kehlgermany/</a> >). .....	19
Figura 2.4 – Escada do Palácio do Itamaraty. ....	19
Figura 2.5 – Rampa Externa do Museu da República. ....	20
Figura 2.6 – Rampa do ICC UnB. ....	20
Figura 2.7 – Rampa do anexo do Tribunal de Justiça do Distrito Federal e Territórios (TJDFT). .....	20
Figura 2.8 – Rampa do Palácio do Planalto. ....	21
(Disponível em: <a href="http://fotografia.folha.com.br/galerias/298-reforma-palacio-do-planalto">http://fotografia.folha.com.br/galerias/298-reforma-palacio-do-planalto</a> )21	
Figura 2.9 – Modelos: de Fuchssteiner (a); Cusens (b); Guerrin (c) (Knijnik et al., 1977).23	
Figura 2.10 – Modelos estruturais estudados por Siev: (a) treliça espacial; (b) placas engastadas (1962). .....	23
Figura 3.1 – Representação do gráfico tridimensional da forma helicoidal. (Disponível em <a href="http://www.mspc.eng.br/">http://www.mspc.eng.br/</a> .....	29
matm/curv_sup02.shtml) .....	29

Figura 3.2 – Gráfico de uma função helicoidal gerada por meio de equações paramétricas. .....	29
Figura 3.3 – Superfície helicoidal formada pela variação da variável $u$ . (Disponível em <a href="http://www.mspc.eng.br/matm/curv_sup02.shtml">http://www.mspc.eng.br/matm/curv_sup02.shtml</a> ) .....	30
Figura 3.4 – Superfície helicoidal formada pela variação da variável $u > 0$ . (Disponível em <a href="http://www.mspc.eng.br/matm/curv_sup02.shtml">http://www.mspc.eng.br/matm/curv_sup02.shtml</a> ) .....	31
Figura 3.5 – Seção de simetria exemplificada: vista tridimensional (a); em planta (b). ....	32
Figura 3.6 – Representação de carregamento distribuído (adaptado: Gimena, et al., 2008). .....	33
Figura 3.7 – Representação dos esforços na estrutura helicoidal (Adaptado: Fardis et al., 1987). .....	33
Figura 3.8 – Hiperestáticos a determinar em uma estrutura helicoidal: em vista lateral (a); em vista superior (b) (adaptado: Alghamdi, 1992). .....	34
Figura 3.9 – Esforços na estrutura helicoidal: em relação a uma posição qualquer (a); em relação aos planos de orientação global (b) (adaptado: Fuchssteiner, 1954). ....	35
Figura 3.11 – Representação do esforço $Q_y$ . .....	37
Figura 3.12 – Representação do esforço $Q_x$ . .....	37
Figura 3.13 – Representação do esforço $M_t$ . .....	38
Figura 3.14 – Representação do esforço $M_y$ . .....	39
Figura 3.15 – Representação do esforço $M_x$ . .....	39
Figura 3.16 – Exemplo de tensões e deformações laterais (Adaptado de Holmes, 1957)...	40
Figura 3.17 – Exemplo de deformação vertical (Holmes, 1957).....	41
Figura 3.18 – Variáveis que caracterizam uma rampa helicoidal.....	42

Figura 3.19 – Esforços conforme método de Fuchssteiner: relação a uma posição qualquer (a); em relação aos planos de orientação global (b) (adaptado: Fuchssteiner, 1954).....	44
Figura 3.20 – Equilíbrio na seção de referência: vista lateral (a); vista superior (b).....	46
Figura 3.21 – Posição dos hiperestáticos no método de Fuchssteiner.....	48
Figura 3.22 – Direções dos momentos $M_{ij}$ . ....	51
Figura 3.23 – Geometria da rampa helicoidal. ....	56
Figura 3.24 – direções positivas dos hiperestáticos.....	56
Figura 3.25 – Idealização de uma estrutura helicoidal pelo método proposto por Bergman (Adaptado: Bergman, 1956). ....	62
Figura 3.26 – Grandezas e esforços no método de Prudon. ....	64
Figura 3.27 – Modelo de rampa em elemento finito linear no SAP 2000.....	66
Figura 3.28 – Visualização tridimensional dos esforços em uma rampa em modelo de barras do SAP 2000. ....	67
Figura 3.29 – Representação dos apoios usados no modelo de casca no SAP 2000.....	68
Figura 3.30 – Rampa helicoidal em modelo de casca. ....	68
Figura 3.31 – Esforço $M_x$ em rampa com modelo de casca. ....	69
Figura 4.1 – Representação da rampa 1: vista lateral (a); vista superior (b). ....	72
Figura 4.2 – Gráficos da rampa 1. ....	74
Figura 4.3 – Representação da rampa 2: vista lateral (a); vista superior (b). ....	75
Figura 4.4 – Gráficos da rampa 2. ....	77
Figura 4.5 – Representação da rampa 3: vista lateral (a); vista superior (b). ....	78
Figura 4.6 – Gráficos da rampa 3. ....	79

Figura 4.7 – Representação da rampa 4: vista lateral (a); vista superior (b). .....	80
Figura 4.8 – Gráficos da rampa 4. ....	82
Figura 4.9 – Representação da rampa 5: vista lateral (a); vista superior (b). ....	83
Figura 4.10 – Gráficos da rampa 5. ....	85
Figura 4.11 – Representação da rampa 6: vista lateral (a); vista superior (b). ....	86
Figura 4.12 – Gráficos da rampa 6. ....	87
Figura 4.13 – Representação da rampa 7: vista lateral (a); vista superior (b). ....	88
Figura 4.14 – Gráficos da rampa 7. ....	90
Figura 4.15 – Representação da rampa 8: vista lateral (a); vista superior (b). ....	91
Figura 4.16 – Gráficos da rampa 8. ....	92
Figura 4.17 – Gráficos de N para as rampas estudadas. ....	95
Figura 4.18 – Valores de N para todas as rampas. ....	95
Figura 4.19 – Gráfico do esforço $Q_y$ . ....	97
Figura 4.20 – Gráficos do esforço $Q_y$ . ....	98
Figura 4.21 – Valores de $Q_y$ para todas as rampas. ....	99
Figura 4.22 – Gráficos do esforço $Q_x$ . ....	101
Figura 4.23 – Valores de $Q_x$ para todas as rampas. ....	102
Figura 4.24 – Gráfico do esforço $M_t$ . ....	103
Figura 4.25 – Gráficos de $M_t$ . ....	104
Figura 4.26 – Valores de $M_t$ para todas as rampas. ....	105
Figura 4.27 – Gráfico do esforço $M_x$ . ....	106

Figura 4.28 – Gráficos de $M_x$ .	108
Figura 4.29 – Valores de $M_x$ para todas as rampas.	108
Figura 4.30 – Gráficos de $M_y$ .	110
Figura 4.31 – Valores de $M_y$ para todas as rampas.	111
Figura 4.32 – Esforços das rampas em função de $\alpha$ .	115
Figura 4.33 – Esforços das rampas em função de $r$ .	120
Esforços das rampas com raio = 4,0m em função de $\phi$ .	122
Esforços das rampas com raio = 1,5 m em função de $\phi$ .	122
Figura 4.34 – Esforços das rampas em função de $\phi$ .	122
Figura 4.35 – Esforços das rampas com variações de $b/d$ e $\alpha$ .	126



## LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIações

$b$	- Largura da seção transversal no método de Fuchssteiner
$b$	- Parâmetro de equação do helicóide no espaço
$d$	- Altura da seção transversal no método de Fuchssteiner
$h$	- Desnível entre os apoios da estrutura
$h$	- Altura de um período completo no helicóide no espaço
$\alpha$	- Inclinação da rampa no método de Fuchssteiner
$\alpha$	- Ângulo que define um ponto ao longo da estrutura no método de Bergman
$\alpha$	- Semi-ângulo de abertura de uma estrutura helicoidal no método de Prudon
$q$	- Carga distribuída por unidade de comprimento nos métodos de Fuchssteiner e Prudon
$r$	- Raio médio da estrutura helicoidal nos métodos de Fuchssteiner e Scordelis
$\phi$	- Semi-ângulo de abertura da estrutura helicoidal no método de Scordelis
$\theta$	- Ângulo que define um ponto ao longo da estrutura
$\theta$	- Função em coordenadas cilíndricas que define um helicóide no espaço
$\theta$	- Semi-ângulo de abertura no método de Bergman
$\theta$	- Inclinação da rampa no método de Prudon
$u$	- Variável de raio no helicóide
$v$	- Variável de frequência angular no helicóide
$v$	- Parâmetro que define uma superfície helicoidal no espaço
$M_0$	- Momento fletor na direção x no método de Prudon
$M_{t0}$	- Momento torçor no método de Prudon
$M_r$	- Momento fletor na direção x no método de Scordelis
$M_\delta$	- Momento fletor na direção y no método de Scordelis
$M_t$	- Momento torçor no método de Scordelis
$M_c$	- Momento fletor no meio do vão no método de Bergman
$M_a$	- Momento fletor na direção x no método de Bergman
$M_x$	- Momento fletor na direção x
$M_y$	- Momento fletor na direção y

$M_t$	- Momento torçor
$Q_x$	- Esforço cortante na direção x
$Q_y$	- Esforço cortante na direção y
$Q_x$	- Esforço cortante na direção y no método de Fuchssteiner
$Q_y$	- Esforço cortante na direção x no método de Fuchssteiner
$N$	- Esforço axial
$M_{xsap}$	- Momento fletor na direção x em modelo de barras do SAP 2000
$M_{ysap}$	- Momento fletor na direção y em modelo de barras do SAP 2000
$M_{Isap}$	- Momento torçor em modelo de barras do SAP 2000
$Q_{xsap}$	- Esforço cortante na direção x em modelo de barras do SAP 2000
$Q_{ysap}$	- Esforço cortante na direção y em modelo de barras do SAP 2000
$N_{sap}$	- Esforço axial em modelo de barras do SAP 2000
$T_a$	- Momento torçor no método de Bergman
$V$	- Esforço cortante na direção y no método de Bergman
$X_1$	- Hiperestático: Força na direção axial
$X_2$	- Hiperestático: Força na direção vertical
$X_3$	- Hiperestático: Força na direção radial
$X_4$	- Hiperestático: Momento torçor
$X_5$	- Hiperestático: Momento fletor na direção vertical
$X_6$	- Hiperestático: Momento fletor na direção radial
$X_1$	- Hiperestático: Força na direção vertical no método de Fuchssteiner
$X_2$	- Hiperestático: Momento fletor na direção vertical no método de Fuchssteiner
$X_3$	- Hiperestático: Força na direção axial no método de Fuchssteiner
$X_4$	- Hiperestático: Momento torçor no método de Fuchssteiner
$X_5$	- Hiperestático: Força na direção radial no método de Fuchssteiner
$X_6$	- Hiperestático: Momento fletor na direção radial no método de Fuchssteiner
$\bar{N}$	- Esforço axial paralelo ao eixo global de orientação
$\bar{Q}_x$	- Esforço cortante na direção x paralelo ao eixo global
$\bar{Q}_y$	- Esforço cortante na direção y paralelo ao eixo global

$\overline{Q_x}$	- Esforço cortante na direção y paralelo ao eixo global no método de Fuchssteiner
$\overline{Q_y}$	- Esforço cortante na direção x paralelo ao eixo global no método de Fuchssteiner
$\overline{M_t}$	- Momento torçor paralelo ao eixo global de orientação
$\overline{M_y}$	- Momento fletor na direção y paralelo ao eixo global de orientação
$\overline{M_x}$	- Momento fletor na direção x paralelo ao eixo global de orientação
$\Delta_{z0}$	- Deflexão vertical em uma estrutura helicoidal
$\varphi_0$	-Semi-ângulo de abertura de uma estrutura helicoidal no método de Fuchssteiner
$\varphi$	- Ângulo de um ponto ao longo da estrutura no método de Fuchssteiner
$f(\varphi)$	- Incremento de esforço devido à excentricidade, no método de Fuchssteiner
$\sigma_i$	-Tensão normal que compõe os deslocamentos virtuais no método de Fuchssteiner
$\sigma_k$	-Tensão normal que compõe os deslocamentos virtuais no método de Fuchssteiner
$F$	- Unidade infinitesimal de volume no método de Fuchssteiner;
$\tau_i$	- Tensão cisalhante que compõe os deslocamentos virtuais no método de Fuchssteiner
$\tau_k$	- Tensão cisalhante que compõe os deslocamentos virtuais no método de Fuchssteiner
$S$	- Unidade infinitesimal de deslocamento no método de Fuchssteiner
$M_{ij}$	- Momentos do método de Fuchssteiner
$E$	- Módulo de elasticidade
$I_x$	- Inércia da seção transversal em relação ao eixo x
$I_y$	- Inércia da seção transversal em relação ao eixo y
$I_r$	- Inércia da seção transversal em relação ao eixo x no método de Scordelis
$I_\delta$	- Inércia da seção transversal em relação ao eixo y no método de Scordelis
$I_t$	- Inércia torcional no método de Scordelis

$J_x$	- Inércia da seção transversal em relação ao eixo x segundo Fuchssteiner
$J_y$	- Inércia da seção transversal em relação ao eixo y segundo Fuchssteiner
$G$	- Módulo de elasticidade torcional nos métodos de Fuchssteiner e Scordelis
$\Theta$	- Inércia torcional no método de Fuchssteiner
$c$	- Parâmetro geométrico do método de Fuchssteiner
$a$	- Razão entre as inércias $I_x$ e $I_y$ no método de Fuchssteiner
$a$	- Representação do raio nas equações paramétricas do helicóide
$e$	- Excentricidade entre eixo axial e carregamento no método de Fuchssteiner
$f_{ck}$	- Resistência característica do concreto
$x$	- Função que define um helicóide no espaço
$x$	- Ângulo que define um ponto ao longo da estrutura no método de Prudon
$y$	- Função que define um helicóide no espaço
$Z$	- Eixo de referência no espaço tridimensional
$z$	- Função que define um helicóide no espaço
$t$	- Parâmetro que define um helicóide no espaço
$\omega$	- Velocidade angular no desenvolvimento de um helicóide
$X$	- eixo de referência no espaço
$Y$	- Eixo de referência no espaço
$u$	- Variável que define a superfície helicoidal no espaço
$X_x$	- Hiperestático: Força na direção radial no método de Scordelis
$X_r$	- Hiperestático: Momento fletor na direção radial no método de Scordelis
$\delta_{ij}$	- Deslocamento virtual nos métodos de Fuchssteiner e Scordelis
$m_{ij}$	- Momentos do método de Scordelis
$K$	- Razão entre a rigidez a flexão e rigidez a torção no método de Bergman
$K'$	- Coeficiente que leva em consideração a inclinação da rampa e sua relação com o desenvolvimento da estrutura no método de Prudon
$w$	- Carga distribuída nos métodos de Scordelis e Bergman
$\rho$	- Raio médio da estrutura helicoidal no método de Prudon
$R$	- Raio médio da estrutura helicoidal no método de Bergman
CAPES	- Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
COMUT	- Comutação Bibliográfica

## **1. INTRODUÇÃO**

Há milhares de anos atrás o ser humano começou uma longa jornada, enfrentando muitas dificuldades que poderiam prejudicar a sobrevivência da espécie. Acredita-se que um dos recursos que o ser humano usava para fugir dos perigos mortais era atingir lugares mais altos, como os montes e montanhas. Foi quando se começou a adequar os acessos, nos quais superfícies inclinadas foram sendo adaptadas para a posição horizontal, em tamanhos compatíveis com o passo de um ser humano. Surgiram assim as primeiras escadas. Desta forma muitos caminhos que eram inicialmente trilhas foram melhorados para a nova solução.

As populações humanas cresceram e se organizaram. Com a necessidade de melhor aproveitamento dos espaços urbanos, as edificações precisaram se desenvolver verticalmente. Este novo desafio, de possibilitar o acesso a pavimentos superiores, exigiu novas soluções. Diante desta necessidade surgiram as escadas e rampas como conhecemos hoje. Rampas e escadas tornaram-se estruturas essenciais em nosso cotidiano. Mesmo com o progresso e o advento da tecnologia esse tipo de estrutura continua sendo de grande importância, não somente sob o ponto de vista da acessibilidade, como também dentro de aspectos arquitetônicos.

Como em outras áreas do conhecimento, o ser humano fez grande uso de sua capacidade de inovar. Apenas escadas retas jamais seriam o suficiente para saciar a criatividade humana e suas exigências artísticas. Dentro dos diversos tipos de escadas e rampas que surgiram, as de formato helicoidal se enquadram como um tipo especial de estrutura. Com poucos apoios e um desenvolvimento elegante, as escadas helicoidais conquistaram o gosto dos projetistas.

## **1.1 JUSTIFICATIVA**

Este trabalho foi desenvolvido com a intenção de contribuir com um texto nacional acessível a respeito da análise estrutural de rampas helicoidais. Estruturas deste tipo são bastante usadas e precisam ser bem entendidas pelos profissionais que lidarão com elas.

Os textos existentes sobre o tema são bastante diferentes em seus métodos de análise. Os textos expõem as considerações teóricas de maneira muito simplificada, dificultando o entendimento. Assim se faz necessário entender melhor estes métodos e validá-los para que se tenha maior segurança a respeito das possibilidades de utilização na prática da engenharia.

A complexidade do assunto também é um fator motivador e de atração para que trabalhos como este sejam realizados de forma a esclarecer melhor a adequação e usos dos métodos de cálculo disponíveis na engenharia de estruturas.

## **1.2 OBJETIVOS**

### **1.2.1 Objetivo geral**

Esta dissertação tem por objetivo o estudo de métodos de análise para estruturas especiais de engenharia, conhecidas como rampas helicoidais autoportantes, e a aplicação seletiva e sistematizada destes métodos, para fins de análise estrutural.

### **1.2.2 Objetivos específicos**

- Desenvolver a análise estática de vários modelos de rampas, por diferentes métodos de cálculo, e comparar os resultados obtidos.
- Apontar os pontos positivos, negativos e campo de validade dos métodos de cálculo apresentados;
- Comparar os métodos analíticos com os resultados obtidos por processos computacionais de cálculo;
- Comprovar a validade de métodos de cálculo estudados;

### **1.3 METODOLOGIA**

A metodologia adotada consistiu em estudar e selecionar diferentes métodos de cálculos de rampas helicoidais para posterior comparação entre eles, de forma a viabilizar uma análise crítica dos resultados emitidos pelos métodos e a qualidade dos mesmos. Este trabalho, porém, só foi possível com a busca do entendimento de como funcionam os diferentes métodos para que sua aplicabilidade nesta dissertação pudesse ser avaliada.

Dentre os diversos métodos propostos pelos autores foram selecionados alguns dos mais interessantes de se estudar, devido às suas particularidades distintas. Estes métodos foram detalhadamente explicados, desde as formulações iniciais até as deduções finais. Após as explicações foram propostos vários exemplos padrão de rampas helicoidais para aplicação dos métodos de cálculo. Assim, foi possível fazer comentários e comparar os métodos utilizados, evidenciando-se se eles são adequados para a análise destas estruturas helicoidais.

Muitas das fontes foram descobertas dentro das referências bibliográficas dos pioneiros sobre o assunto. Outras foram encontradas em sítios especializados em pesquisa acadêmica, como o Cirrus e o Portal da CAPES. Alguns textos só foram adquiridos com a contribuição de outras instituições de ensino, com mediação da busca feita pela Biblioteca Central da Universidade de Brasília, dentro de seu serviço de troca de informações denominado COMUT.

Sempre que possível buscou-se as fontes primárias de informações, embora nem sempre tenha sido possível conseguir, principalmente alguns textos anteriores à década de 1950 e outros produzidos em instituições de ensino de outros países, como Bangladesh.

### **1.4 ABRANGÊNCIA E LIMITAÇÕES**

Este trabalho trata de estudos de estruturas de rampas que se desenvolvem na forma helicoidal autoportante e são engastadas nas duas extremidades. Para todos os casos o material constitutivo considerado é o concreto armado. Apesar de certas aplicações de protensão neste tipo de estrutura, estes efeitos não são tratados neste trabalho.

Os métodos estudados foram desenvolvidos com base na teoria linear de estruturas, portanto, não serão abordados problemas relativos a não-linearidades. Os materiais são considerados isotrópicos e em regime de pequenos deslocamentos.

Em todos os modelos a seção transversal estudada é constante ao longo de seu desenvolvimento. Foram estudados os casos específicos de ângulos de abertura: 180°, 270°, 360° e 450°, para dois raios de projeção em planta ( $r = 4\text{m}$  e  $r = 1,5\text{m}$ ). Em todos os casos as rampas são consideradas estruturas simétricas.

## **1.5 ORGANIZAÇÃO DOS CAPÍTULOS**

Este capítulo inicial contém uma breve introdução ao tema, definição do trabalho, a motivação para a concretização do mesmo, seus objetivos e sua estrutura.

O capítulo 2 contém a revisão bibliográfica do tema, onde são apresentadas as generalidades sobre rampas. São também descritos os diversos trabalhos pesquisados e suas finalidades e conclusões para entendimento do estágio atual da linha de pesquisa.

O capítulo 3 trata do desenvolvimento teórico, apresentando os conceitos fundamentais utilizados no trabalho. São as grandezas e variáveis, esforços, considerações simplificadoras e outros aspectos. Contém também os métodos de cálculo escolhidos para o uso neste trabalho. São mostrados os desenvolvimentos das formulações e suas expressões finais prontas para utilização.

O capítulo 4 apresenta os resultados encontrados para os métodos de cálculo utilizados, em tabelas e gráficos, com posteriores comentários de interpretação dos resultados. São também comparados alguns casos e feitos comentários sobre cada tipo de esforço individualmente.

O capítulo 5 apresenta as conclusões, gerais e específicas, obtidas a partir dos resultados encontrados. São feitos os comentários finais e as sugestões para trabalhos futuros.



## **2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

O capítulo começa com as generalidades sobre rampas onde estas, em especial as autoportantes helicoidais, são definidas e caracterizadas. Também é apresentado todo o conteúdo da pesquisa bibliográfica realizada a respeito do tema, de forma a ser possível situar o presente trabalho dentro deste contexto.

### **2.1 GENERALIDADES SOBRE RAMPAS**

Nesta seção serão apresentadas as informações básicas sobre as rampas, mais especificamente as autoportantes de formato helicoidal. Há em seguida uma breve explicação matemática a respeito do formato helicoidal. Por fim, são mostradas as grandezas e variáveis que caracterizam as estruturas helicoidais dentro do contexto da análise estrutural.

#### **2.1.1 Aspectos Fundamentais**

Rampas são elementos construtivos capazes de permitir a locomoção entre pontos de diferentes altitudes. São essenciais para transferir pessoas de um nível a outro (Ghoneim *et al.*, 2008). Em geral, ligam pavimentos adjacentes de uma edificação. Quando uma rampa possui degraus é chamada de escada. Escadas e rampas são parte essencial de edifícios residenciais e comerciais (Amanat e Ahmad, 2001). Este tipo de estrutura é um dos mais importantes elementos funcionais de uma edificação (Wadud *et al.*, 2006). Para Ahmed *et al.*, (1996), as escadas são elementos chave de cada edificação.

As rampas, assim como as estruturas em que estão inseridas, devem ser duráveis e não deixar dúvidas quanto à sua segurança. Elas devem também ser fabricadas em material resistente a ação de fogo (Souza e Cunha, 1994), pois elas são o caminho preferencial a ser seguido no caso de incêndio em um edifício. As rampas podem ser feitas sobre o solo, esculpidas em rocha ou apoiadas na superfície. Na engenharia moderna, porém, as rampas são feitas vencendo vãos e liberando espaços abaixo delas nos interiores das edificações. Este avanço surgiu principalmente com o advento do concreto armado e estruturas

metálicas. Em geral as escadas ou rampas apóiam-se em alvenarias portantes, em vigas ou em paredes de concreto armado.

### 2.1.2 Rampas Autoportantes

Rampas e escadas são chamadas autoportantes quando caracterizam-se pela mudança de direção sem o uso de apoios além das extremidades. Não necessitam de estruturas auxiliares para sustentação, o que pode trazer vantagens em termos de funcionalidade e estética. As vantagens chamadas funcionais provêm da interferência da escada somente nos pavimentos onde se faz necessário. Para Knijnik (1977) as escadas autoportantes proporcionam leveza estrutural e “constituem-se de elementos plásticos valiosos na definição de volumes”. A Figura 2.1 apresenta exemplos de escadas autoportantes, onde se observa que as mudanças de direção ocorrem sem apoios suplementares nos patamares.

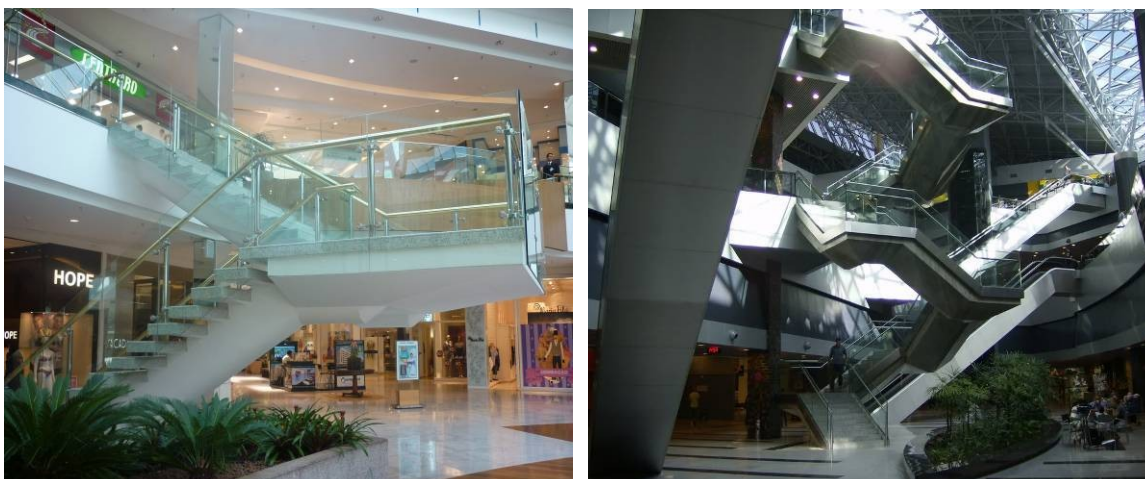


Figura 2.1 – Exemplos de escadas autoportantes (a) do Park Shopping em Brasília; (b) do Aeroporto de Recife. (Disponível em: <http://www.skyscrapercity.com/showthread.php?t=863756&page=3>)

### 2.1.3 Rampas Autoportantes Helicoidais

Um tipo especial de escada autoportante é a de formato helicoidal (Figura 2.2). Trata-se de uma solução para circulação vertical muito usada na arquitetura moderna (Azambuja, 1962). Portanto, escadas helicoidais tornaram-se bastante populares entre os arquitetos por razões estéticas e sua aparência elegante (Wadud e Ahmad, 2006). Amanat e Ahmad

(2001) lembram ainda que do ponto de vista arquitetônico os formatos helicoidais são mais atrativos que os tipos simples de escadas.

Segundo Azambuja (1962), as rampas helicoidais bi-engastadas oferecem a vantagem de proporcionar o efeito de casca e por conseqüência uma ótima capacidade de distribuição dos esforços. Significa que, assim como nas cascas, em virtude da curvatura, os esforços de flexão são melhor distribuídos (ocorrendo flexão, além de torção e esforços normais à seção transversal) do que em estruturas planas horizontais ou de inclinação constante. A figura 2.2 mostra exemplos de rampas helicoidais.

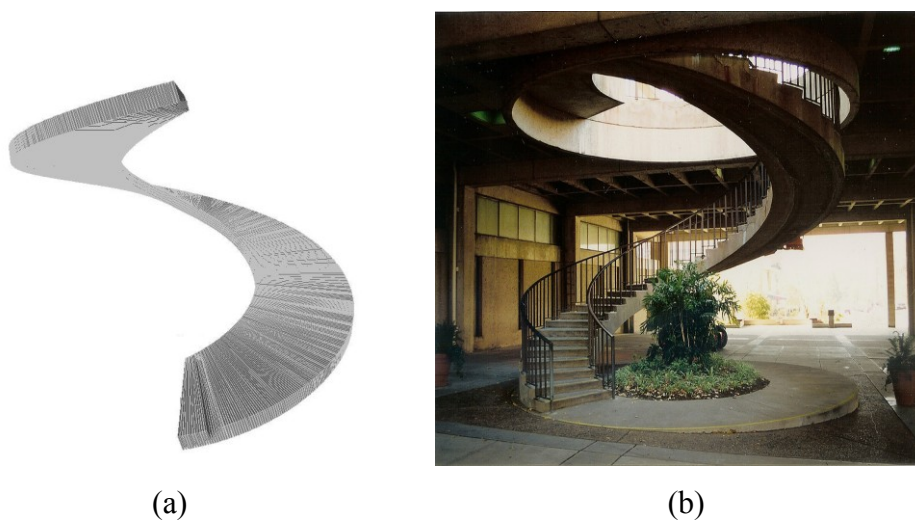


Figura 2.2 – Exemplos de rampas autoportantes helicoidais (a) Gerada no *SAP 2000*; (b) Escada helicoidal de concreto (Disponível em: [http://vanishingstl.blogspot.com/2010\\_08\\_01\\_archive.html](http://vanishingstl.blogspot.com/2010_08_01_archive.html))

Porém, se por um lado as razões estéticas para o uso deste tipo de estrutura são boas, por outro a solução estrutural pode apresentar um nível de complexidade importante com a qual os engenheiros se deparam. Outros fatores podem tornar o problema ainda mais complexo, quando, por exemplo, tem-se um patamar intermediário na escada helicoidal. Estudos de estrutura deste tipo foram feitos por Wadud e Ahmad, (2006). A figura 2.3 exemplifica este tipo de estrutura.

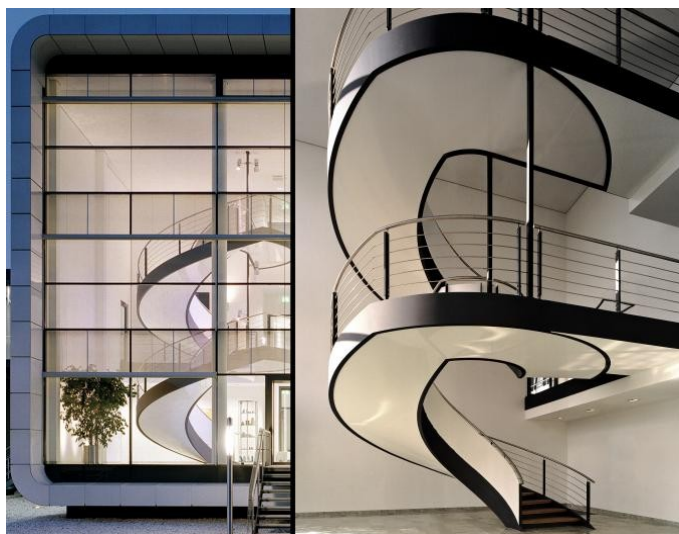


Figura 2.3 – Exemplo de escada helicoidal com patamar intermediário. (Disponível em: <http://www.stairporn.org/2010/04/23/jean-d%E2%80%99arcel-cosmetiques-in-kehlgermany/>)

As Figuras 2.4 a 2.8 mostram alguns exemplos de rampas helicoidais construídas na cidade de Brasília. A cidade, que se tornou referência em arquitetura no século XX principalmente devido aos trabalhos de Oscar Niemeyer, possui algumas obras com escadas helicoidais. Embora este trabalho não se proponha a fazer um levantamento de todas as estruturas helicoidais de Brasília, algumas estão exemplificadas a seguir.



.Figura 2.4 – Escada do Palácio do Itamaraty.



Figura 2.5 – Rampa Externa do Museu da República.



Figura 2.6 – Rampa do ICC UnB.

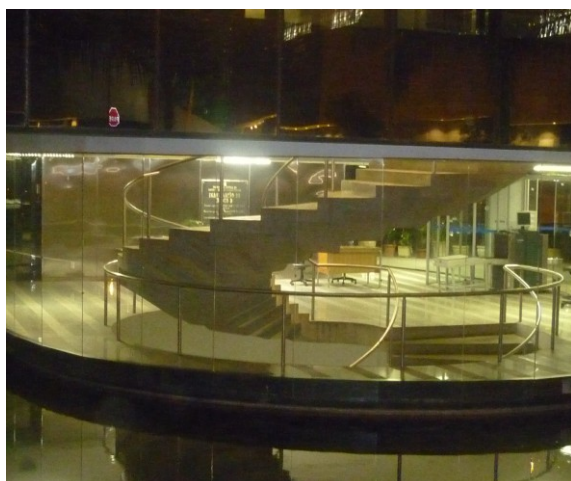


Figura 2.7 – Rampa do anexo do Tribunal de Justiça do Distrito Federal e Territórios (TJDFT).

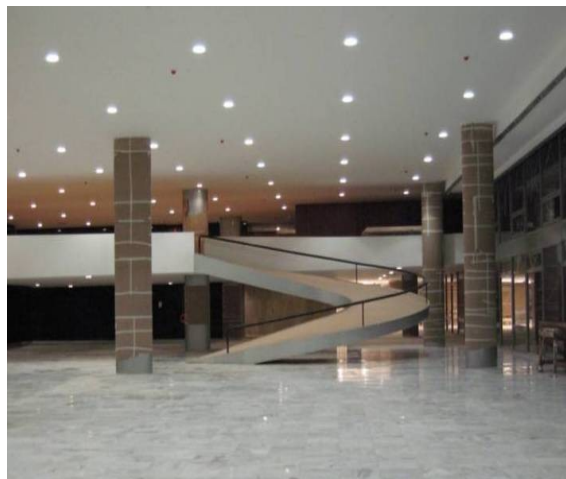


Figura 2.8 – Rampa do Palácio do Planalto.

(Disponível em: <http://fotografia.folha.com.br/galerias/298-reforma-palacio-do-planalto>)

## 2.2 REFERÊNCIAS PESQUISADAS SOBRE O TEMA

O tema de escadas é tratado historicamente no sítio *Eleve Stairs*, com breve descrição de como surgiu inicialmente a necessidade do uso de escadas. Fala que provavelmente as primeiras escadas surgiram próximo do ano 6000 aC. Segundo o texto, as primeiras escadas eram feitas estrategicamente, por questão de sobrevivência. Ao longo das eras, os materiais e funcionalidades mudaram. Na Idade Média, as escadas dos castelos tinham função estratégica de defesa.

O sítio *Arqhys* lembra que o surgimento das escadas remonta as primeiras construções do homem, mesmo quando se usavam apenas cabanas. Atendiam a um objetivo específico, de ascender a um pavimento superior, mas também eram usadas com um sentido sagrado, como que para subir em direção à divindade.

Desde o século XV até o século XIX tornou-se um meio preferido para expressar a grandiosidade das construções e também como símbolo de poder (*Encyclopaedia Universalis*). Durante o Renascimento e no Iluminismo, um pouco mais distante do sentido religioso, as arquiteturas das escadas se alteraram quanto à concepção arquitetônica (*Arqhys*). Nos últimos séculos as escadas têm sido muito valorizadas pela arquitetura. Construtores como Peter Nicholson e Eva Jiricna se destacaram nos séculos XIX e XX, respectivamente (*Elevestairs*).

Ainda sob o ponto de vista da arquitetura, vários autores se propuseram a resgatar o valor histórico das escadas. Chastel *et al.* (1984) publicou sobre a arquitetura das escadas no período da Renascença. Mielke (1966) resgatou a história das escadas da Alemanha. Pérouse de Montclos (1983) publicou seu trabalho sobre a arquitetura francesa nos séculos XVI, XVII e XVIII. O sítio Finest-Stair-Parts fala sobre diversos tipos de escadas no contexto de vários períodos arquitetônicos. Templer (1995) publicou dois livros com material histórico e científico sobre escadas. O primeiro volume conta a história das escadas e sua influência nas artes e arquitetura. O segundo volume trata dos perigos envolvidos com escadas, desde acidentes no uso a situações de incêndio.

Dada a importância de um bom projeto de escadas e rampas, os engenheiros estudaram o tema de forma a ampliar os conhecimentos sobre este tipo de estrutura, especialmente no que se refere a escadas helicoidais. Inicialmente os autores analisavam escadas por meio de aproximações, com modelos de barras espaciais. Nessa linha está Fuchssteiner (1954), que fez um modelo para escadas retas ou helicoidais. Prudon (1956) apresentou um cálculo aproximado considerando cada patamar separadamente (publicado por Guerrin e Lavour, 2002). Outros estudos semelhantes foram desenvolvidos por Cusens *et al.* (1966), Gould (1963), Sauter (1964) e Taleb (1964). Knijnik *et al.* (1977) reproduziu o trabalho de Cusens *et al.* (1966) transformando a formulação em um conjunto de tabelas para facilitar a obtenção dos resultados.

A Figura 2.9 mostra alguns exemplos desses estudos. Fuchssteiner simplificou a escada como duas barras inclinadas unidas por uma barra circular (a); Cusens e Kuang propuseram uma aproximação por meio de duas barras inclinadas unidas por uma barra reta no encontro dos lances com o patamar (b); Guerrin propôs que as barras inclinadas sejam articuladas nos encontros com o patamar, e este seja rígido o suficiente para evitar deformação horizontal (c).

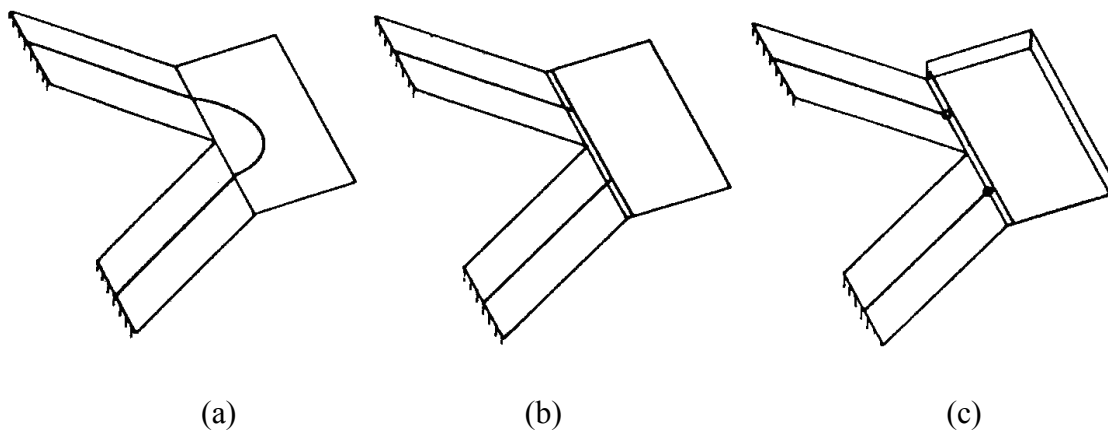


Figura 2.9 – Modelos: de Fuchssteiner (a); Cusens (b); Guerrin (c) (Knijnik *et al.*, 1977).

Alguns autores trataram o problema de outra forma, utilizando o modelo estrutural de laje espacial, mediante certas simplificações, como fizeram Liebenberg (1960) e Siev (1962). O primeiro considerou os esforços de torção desprezíveis. Siev tratou estes esforços como de segunda ordem, apenas necessários numa análise mais rigorosa. Este último fez também uma análise comparativa entre a modelagem como treliça espacial e o modelo de placas engastadas, como mostrados na figura 2.10. De acordo com Amanat *et al.* (2001) tais simplificações comprometem a avaliação da rigidez estrutural global resultante.

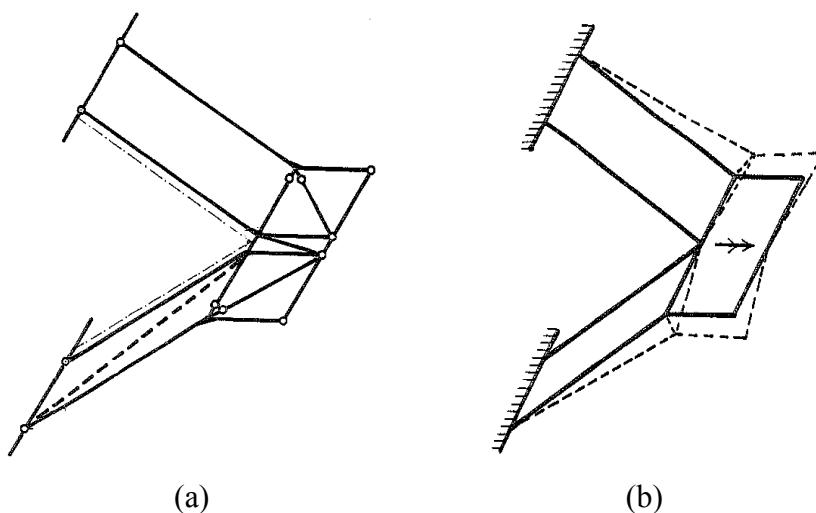


Figura 2.10 – Modelos estruturais estudados por Siev: (a) treliça espacial; (b) placas engastadas (1962).



Outros autores como Ahmed *et al.* (1996), Alghamdi *et al.* (1998) , Smith (1980) e Amanat e Ahmad (2001) desenvolveram estudos de escadas autoportantes por meio do Método dos Elementos Finitos. Foi demonstrado que, comparando os resultados de alguns métodos aproximados com a modelagem de elementos finitos, as tensões em uma seção variam de maneira não-uniforme, o que não pode ser analisado pelos métodos analíticos propostos.

Alghamdi *et al.* (1998) estudou a dinâmica de vibrações livres de uma barra circular helicoidal por dois métodos distintos: o Método dos Elementos Finitos e o Método da Matriz Dinâmica de Transporte. O estudo se restringiu a casos de elasticidade linear sem amortecimento. Foi feita uma avaliação da imprecisão das simplificações de cálculo usuais. É feito também uma avaliação de comparação dos resultados.

Muitos trabalhos foram publicados com a intenção de resolver a estrutura curva. Os trabalhos não necessariamente abordaram o problema específico de rampas helicoidais, pois muitas vezes o foco eram as vigas em formatos diferenciados. Contudo, suas idéias podem ser adaptadas para a particularização do problema das rampas. Petrolo e Casciaro (2004) analisaram o problema da viga tridimensional a partir da Teoria das Hastes, de Saint Venant. Seguem linhas semelhantes de formulação Haktanir (1995) e Just (1982).

Morgan (1960) propôs dois métodos para análise de rampas helicoidais. Um deles, adaptado de Mattock (1957), considera os extremos da estrutura simplesmente apoiados, enquanto o outro, deduzido a partir de teorias baseadas na energia de deformação de Timoshenko, trabalha com a hipótese de engaste nas extremidades. Os métodos propostos foram aplicados no estudo de caso de uma escadaria escolhida como exemplo.

Holmes (1957) apresentou uma proposta de equações gerais que solucionam a estrutura helicoidal engastada nas extremidades, com carregamento simétrico e uniforme. O método proposto faz uso da seção de simetria da estrutura, de forma a simplificar as equações. Seu método permite o cálculo dos esforços e das deformações na estrutura helicoidal.

Bergman (1956) propôs uma abordagem diferente da análise de elementos helicoidais, com base nos estudos de Oesterblom (1932). Devido às dificuldades de cálculo da época, o

autor sugeriu que a rampa fosse analisada simplificando a análise por meio da seção de simetria da estrutura e pela sua projeção horizontal no plano, como visto da figura 2.11, sem considerar a inclinação da rampa, mas apenas a abertura total da rampa ( $2\theta$ ) e o ângulo. Os extremos da rampa são engastados e o carregamento uniformemente distribuído é aplicado na direção normal ao seu plano de curvatura.

Os trabalhos apresentados por Fuchssteiner (1954), Scordelis (1960), Azambuja (1962) e Lee (1969) tratam da resolução do problema da estrutura helicoidal com base no Método das Forças, ou Método da Matriz de Flexibilidade. A estrutura bi-engastada proporciona o surgimento de seis hiperestáticos, que pelas condições de simetria das estruturas podem ser reduzidos a apenas dois hiperestáticos. Os dois hiperestáticos são calculados pelo Método das Forças. Apesar da similaridade, há diferenças entre as considerações e simplificações propostas por cada autor. Isso faz com que os resultados, embora próximos, não sejam exatamente iguais. Estes métodos serão explorados em detalhes no capítulo 3.

Alguns autores preferiram desenvolver métodos de análise de estruturas helicoidais a partir de equações diferenciais. São os casos de Cohen (1955) e Alghamdi (1992).

Em estudos mais recentes, os autores desenvolveram métodos de análise baseados em métodos numéricos que se utilizam de matriz de transferência. São utilizadas também as equações de Frenet-Serret e as transformações pelos cossenos diretores. Alghamdi (1992) ressalta que o interesse por esses métodos cresceu com o advento dos computadores, capazes de resolver complexos sistemas de equações. Por isso, se antigamente as condições de contorno e carregamento eram muito restritas, com as novas formulações tornou-se possível considerar quaisquer variações de carregamento e contorno. Sugerem métodos deste tipo Morris (1968), Fardis *et al.* (1987), Alghamdi (1992), Haktanir (1995), Busool e Eisenberger (2001) e Gimena *et al.* (2008).

Bangash e Bangash. (1999) escreveram o livro “Staircases, Structural Analysis and Design”, consolidando alguns dos principais trabalhos desenvolvidos sobre o tema. O livro apresenta os métodos de Gould (1963), Taleb (1964), Liebenberg (1960), Siev (1962), Morgan (1960) e Cohen (1955). Há um capítulo dedicado à análise de rampas por meio de

elementos finitos. Um capítulo foi dedicado para comparação dos resultados de modelos elaborados por Cohen (1955), Bergman (1956), Holmes (1957), Morgan (1960), Scordelis (1960) e o modelo de elementos finitos de Bangash (1989). O autor demonstrou resultados bastante próximos entre os métodos, com exceção da formulação de Bergman (1956). O texto possui similaridades com a proposta deste trabalho. Contudo, não compara os métodos de cálculo com profundidade, além de não apresentar de forma clara o uso da teoria de placas e cascas na abordagem de escadas helicoidais.

Diversos autores escreveram sobre os aspectos de projeto referentes a escadas e rampas. Muitas informações foram dadas a respeito da análise estrutural e detalhamentos. Entre alguns autores brasileiros lista-se: Souza e Cunha (1994) e Rocha (1987). Outras publicações semelhantes são as de Guerrin *et al.* (2002), Macginley *et al.* (1990), Ghoneim *et al.* (2008) e Mosley *et al.* (1987). Há apostilas de exercícios, como de Melges *et al.* (1997), Filho (2008), Moraes (1982).

Outros estudos importantes a respeito de escadas helicoidais foram apresentados por Guerrin e Lavour (2002) e Rutenberg (1975) nos quais a estrutura da escada é suportada por um pilar central. Guerrin e Lavour apresentaram uma formulação simplificada para a obtenção dos momentos de flexão do pilar. O modelo proposto por Rutenberg é mais aprofundado e detalhado. São dadas as equações para os casos de escada simplesmente apoiada e engastada no pilar, desenvolvidas pela aproximação ao caso da análise de vigas contínuas. Os momentos máximos são obtidos por aproximações sucessivas e também por cálculo analítico. O autor apresenta tabelas práticas para o dimensionamento dos casos mais comuns encontrados, além de apresentar um exemplo de cálculo. Como mencionado no capítulo introdutório, este tipo de estrutura não será analisada neste trabalho.

No Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da Universidade de Brasília, nas disciplinas de Teoria das Estruturas (graduação e pós-graduação), os alunos têm sido estimulados ao estudo de estruturas curvas, inclusive com a proposta de problemas-desafio. Contudo, o entusiasmo e a resposta dos discentes têm sido limitados devido à complexidade do tema. Assim, este trabalho se caracteriza pela primeira pesquisa sistemática e com resultados significativos sobre o assunto na UnB.

As normas pouco falam, de maneira especial, sobre este tipo de estrutura. Como lembra Ahmed *et al.* (1996), as escadas não tem recebido a atenção especial dos códigos de construção. O Bangladesh National Building Code (BNBC) foi atualizado em 1993 com recomendações explícitas sobre aspectos de projeto. Ahmed também menciona que os códigos do American Concrete Institute (ACI), Indian Standard (ISI) e o British Standards Institute (BSI) tratam do assunto, ainda que de maneira incompleta, pois não fazem recomendações para alguns dos tipos usuais de escadas. O CEB não possui indicações específicas para o tema. No Brasil não há normas específicas para o projeto de escadas e rampas, sendo adotadas as considerações da NBR 6118, quando se trata de estruturas de concreto.

### 3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

O capítulo do desenvolvimento teórico apresenta inicialmente considerações matemáticas sobre a função, o plano e a superfície helicoidais. Outros temas são de grande importância, pois definem os parâmetros e variáveis usados na definição de uma rampa helicoidal. Por fim são apresentados os métodos de cálculo de Fuchssteiner (1954), Scordelis (1960), Prudon e Bergman (1956) e as construções de modelos de elementos finitos de barras e de cascas, utilizados no capítulo 4.

#### 3.1 A FORMA HELICOIDAL

A forma helicoidal é matematicamente determinada em um espaço tridimensional. O formato é dado por um movimento de rotação e outro de translação, ambos referentes a um determinado ponto. A figura 3.1 apresenta esta situação, na qual a hélice é formada na superfície de um cilindro de raio  $a$ , gerado pela rotação da reta vertical  $V$  em torno do eixo  $Z$ . A equação 3.1 descreve as equações paramétricas de uma forma helicoidal:

$$\begin{aligned}x &= a \cos(t) \\y &= a \operatorname{sen}(t) \\z &= bt\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde a altura  $h$  é aqui definida como a distância vertical percorrida para uma rotação completa. A velocidade angular é:  $\omega = 1$  (pois  $\omega t = t$ ). O período vale  $2\pi / \omega = 2\pi$ . O deslocamento vertical é dado por:  $h = z = b t = b 2\pi$ . Então  $b = h / 2\pi$ .

$$b = \frac{h}{2\pi}\tag{3.2}$$

Em coordenadas polares as equações assumem a forma:

$$\begin{aligned}x &= \cos(t) \\y &= \operatorname{sen}(t) \\z &= t\end{aligned}\tag{3.3}$$

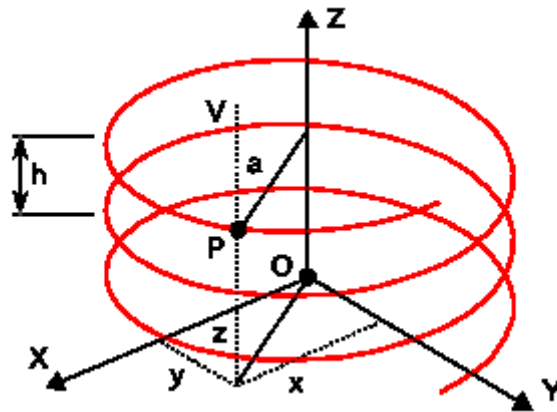


Figura 3.1 – Representação do gráfico tridimensional da forma helicoidal. (Disponível em [http://www.mspc.eng.br/madm/curv\\_sup02.shtml](http://www.mspc.eng.br/madm/curv_sup02.shtml))

Em coordenadas cilíndricas muda-se as grandezas para  $r, \theta, h$ :

$$\begin{aligned} r &= 1 \\ \theta &= t \\ h &= t \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ao se gerar o gráfico com as equações paramétricas encontra-se o formato mostrado na figura 3.2.

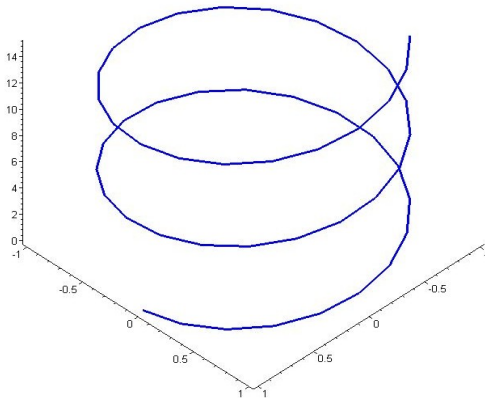


Figura 3.2 – Gráfico de uma função helicoidal gerada por meio de equações paramétricas.

Para a geração de uma superfície helicoidal, sejam as equações paramétricas da hélice conforme visto na equação 3.1 (substituindo a variável  $t$  por  $v$ ):

$$\begin{aligned}
 x &= a \cos v \\
 y &= a \sin v \\
 z &= bv
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Se o raio  $a$  é substituído por uma variável  $u$ , tem-se então uma superfície formada por uma infinita seqüência de hélices de mesmo passo, ou seja, as equações paramétricas da helicóide:

$$\begin{aligned}
 x &= u \cos v \\
 y &= u \sin v \\
 z &= bv
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

A constante  $b$  continua na forma:

$$b = \frac{h}{2\pi}
 \tag{3.7}$$

A variável  $u$ , definindo um intervalo de valores, possibilita a formação de uma superfície helicoidal, semelhante à mostrada na figura 3.3.

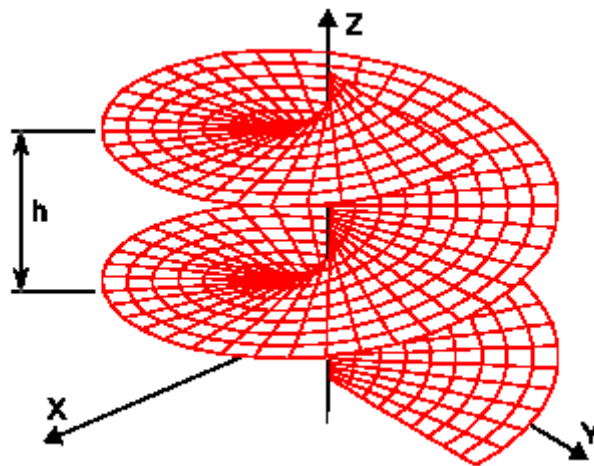


Figura 3.3 – Superfície helicoidal formada pela variação da variável  $u$ . (Disponível em [http://www.mspc.eng.br/matm/curv\\_sup02.shtml](http://www.mspc.eng.br/matm/curv_sup02.shtml))

Analisando os limites das variáveis, observa-se que para  $u=0$  a superfície formada toca o eixo central, formando um helicóide sem abertura no centro. Caso seja  $u>0$ , então a

superfície formada apresenta a abertura central, como mostrado na figura 3.4, com grandes semelhanças em relação aos modelos de rampa que serão estudados.

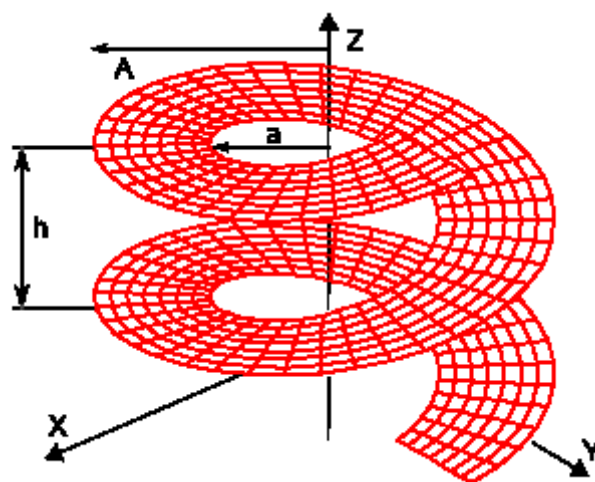


Figura 3.4 – Superfície helicoidal formada pela variação da variável  $u > 0$ . (Disponível em [http://www.mspc.eng.br/matm/curv\\_sup02.shtml](http://www.mspc.eng.br/matm/curv_sup02.shtml))

### 3.2 SEÇÃO DE SIMETRIA

Uma estrutura helicoidal pode ser considerada simétrica. Autores como Scordelis (1960), Fuchssteiner (1954), Morgan (1960), Holmes (1957) e Bergman (1956) utilizaram desta consideração para desenvolver seus métodos. Ocorre que não há um eixo real de simetria da estrutura helicoidal. Contudo, os esforços se desenvolvem tal como se a estrutura fosse simétrica. A simetria deste tipo de estrutura não é óbvia de imediato, mas pode ser aceita visto que ao longo das duas metades da estrutura a curvatura vista em planta desenvolve-se em um único sentido, assim como a inclinação da rampa.

O ponto de simetria da estrutura helicoidal é a posição média do desenvolvimento da rampa, ou o ponto à meia altura da mesma. Ao dividir no meio do comprimento separa-se a rampa em sua parte superior e parte inferior, que podem ser analisadas separadamente, caso seja necessário. Em geral, nos métodos de cálculo, os autores consideram este ponto como a referência, com ângulo de abertura igual a zero. Portanto, o ângulo de desenvolvimento das rampas é dado, positivo ou negativo, partindo da seção de simetria. A figura 3.5 mostra mais claramente, em vista tridimensional e em planta, onde se posiciona a seção de simetria de uma estrutura helicoidal.



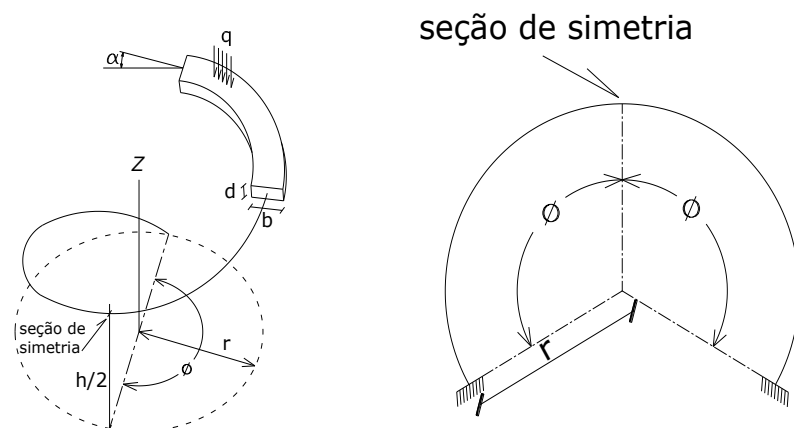


Figura 3.5 – Seção de simetria exemplificada: vista tridimensional (a); em planta (b).

Os resultados dos exemplos analisados evidenciam justamente que os esforços no pé e no topo da rampa devem ser iguais em valores absolutos, mudando apenas o sinal no caso dos esforços anti-simétricos. Segue-se o entendimento convencional de que quando há um carregamento simétrico (neste caso, ao longo da estrutura helicoidal) alguns esforços são anti-simétricos e outros simétricos.

Os esforços que são anti-simétricos se anulam na seção média do desenvolvimento da estrutura. Para o modelo de rampa engastada nas duas extremidades têm-se seis hiperestáticos a determinar. Porém, justamente na seção de simetria apenas dois desses hiperestáticos são diferentes de zero. Esta simplificação facilita muito o trabalho de cálculo dos hiperestáticos quando se utiliza o Método das Forças. Nas equações de equilíbrio será montado um sistema de apenas duas incógnitas.

### 3.3 CARREGAMENTOS DISTRIBUÍDOS

O carregamento distribuído é uma idealização típica de modelos estruturais usados na previsão de esforços máximos nas estruturas. Em geral representa o peso próprio de uma estrutura, mas, em muitos casos, é usado também para as sobrecargas de utilização. Esta atribuição de carregamentos distribuídos às sobrecargas de utilização é uma simplificação plausível para estruturas autoportantes, visto que se têm apenas os apoios das extremidades, então o carregamento distribuído desta forma é a configuração que

proporciona os maiores esforços na estrutura. Neste trabalho os carregamentos distribuídos serão identificados de maneira geral pela letra “ $q$ ”. A representação usual do carregamento distribuído é mostrada na figura 3.6.

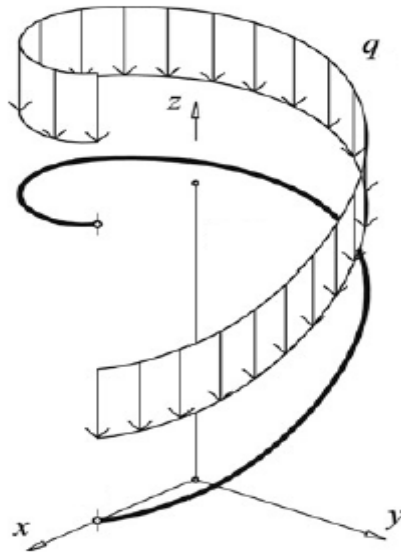


Figura 3.6 – Representação de carregamento distribuído (adaptado: Gimena, *et al.*, 2008).

### 3.4 ESFORÇOS NA ESTRUTURA HELICOIDAL

Na figura 3.7 são mostrados os esforços verificados em qualquer ponto ao longo da estrutura helicoidal. Nos tópicos seguintes foram mantidos os nomes propostos em cada método. Contudo, a nomenclatura mostrada a seguir será a referência utilizada no momento em que for necessário compatibilizar as diferentes denominações dadas pelos autores.

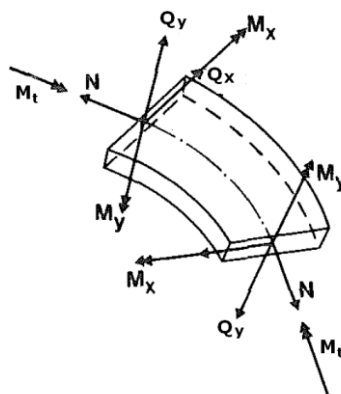


Figura 3.7 – Representação dos esforços na estrutura helicoidal (Adaptado: Fardis *et al.*, 1987).

Tabela 3.1 – Esforços em uma estrutura helicoidal.

<b>Esforço</b>	<b>Comportamento</b>
$N$	Força na direção axial
$Q_y$	Força na direção vertical
$Q_x$	Força na direção radial
$M_t$	Momento torçor
$M_y$	Momento fletor vertical
$M_x$	Momento fletor radial

Uma estrutura helicoidal apresenta seis graus de hiperstaticidade, mostrados na figura 3.8, pois existem seis reações desconhecidas em um primeiro momento. São seis as equações de equilíbrio de uma estrutura helicoidal, que equivalem aos esforços descritos na tabela 3.1. Estas equações foram escritas de formas diferentes pelos autores estudados, dependendo dos critérios e simplificações adotados, como será visto adiante.

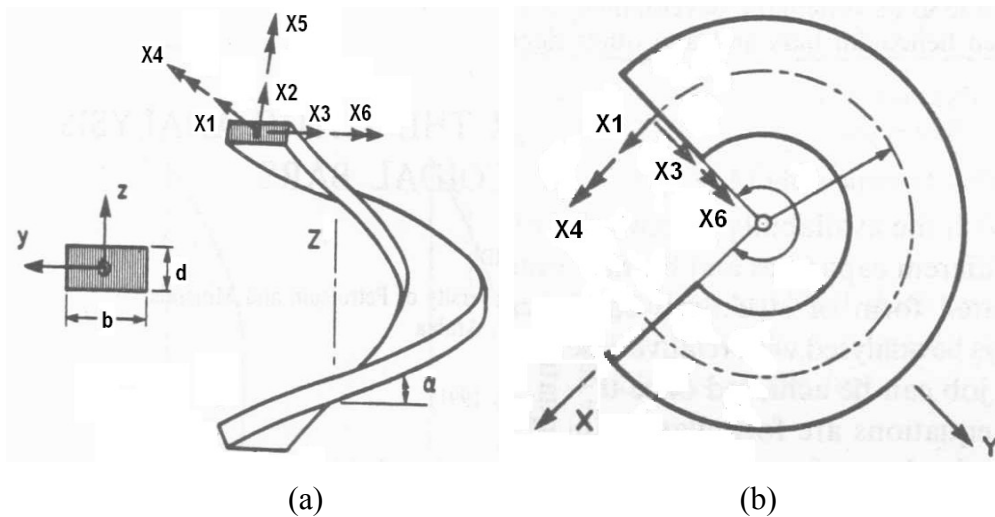


Figura 3.8 – Hiperestáticos a determinar em uma estrutura helicoidal: em vista lateral (a); em vista superior (b) (adaptado: Alghamdi, 1992).

Tabela 3.2 – Identificação dos hiperestáticos (incógnitas) de referência

<b>Hiperestático</b>	<b>Comportamento</b>
$X_1$	Força na direção axial
$X_2$	Força na direção vertical
$X_3$	Força na direção radial
$X_4$	Momento torçor
$X_5$	Momento fletor na direção vertical
$X_6$	Momento fletor na direção radial

Os textos de escadas e rampas usuais utilizam duas opções distintas que podem ser consideradas no dimensionamento. Ou consideram as projeções horizontais dos carregamentos e das dimensões, ou fazem uso dos valores corrigidos pela inclinação da estrutura. Em geral, os autores consideram as componentes dos esforços com direções que não coincidem com os eixos globais da estrutura. Os esforços são obtidos conforme a inclinação da rampa (e da seção transversal, conseqüentemente). São os casos de Holmes (1957), Scordelis (1960) e Fuchssteiner (1954), por exemplo.

Para esclarecer melhor visualmente como os esforços se comportam e como se relacionam, são representados na Figura 3.9 cada tipo de esforço. Os autores pesquisados não se preocuparam em definir com detalhes cada um dos esforços, portanto, os itens 3.4.1 a 3.4.6 têm a finalidade de caracterizá-los e dar subsídios para os capítulos seguintes.

Os esforços  $\bar{N}$ ,  $\bar{Q}_x$ ,  $\bar{Q}_y$ ,  $\bar{M}_t$ ,  $\bar{M}_y$  e  $\bar{M}_x$  são aqueles que ocorrem paralelos aos eixos globais de orientação. Os demais valores, sem a “barra” são os esforços corrigidos pela posição da estrutura helicoidal no espaço tridimensional. Observam-se os casos particulares em que  $\bar{M}_x$  e  $\bar{Q}_x$  coincidem com  $M_x$  e  $Q_x$ , respectivamente.

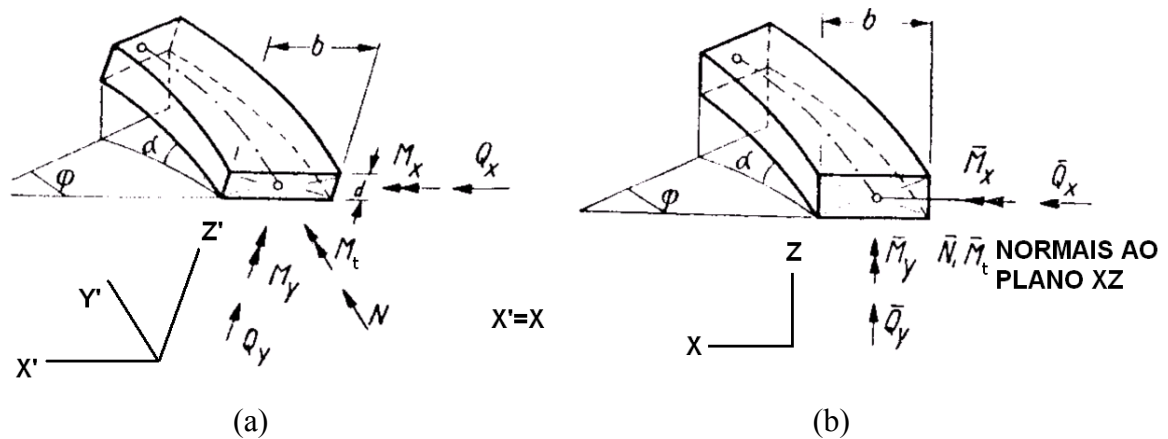


Figura 3.9 – Esforços na estrutura helicoidal: em relação a uma posição qualquer (a); em relação aos planos de orientação global (b) (adaptado: Fuchssteiner, 1954).

### 3.4.1 Esforço Axial $N$

O esforço  $N$  é uma força que ocorre tangente ao eixo do elemento helicoidal inclinado. Pode ser decomposto em sua componente horizontal  $\bar{N}$ , na direção horizontal.

Dependendo do sinal este se comporta como um esforço de tração ou compressão. Ao longo de um elemento helicoidal este comportamento se altera. Como será visto nos exemplos calculados, o esforço  $N$  varia entre compressão e tração na forma de uma função senoidal. Este esforço passa a existir ao longo do comprimento da estrutura helicoidal (considerando carregamentos verticais) quando a inclinação da rampa for diferente de zero, ou seja, quando existe um desnível ou diferença de altura em relação ao eixo  $Z$  entre as duas extremidades. A existência do esforço  $N$  depende diretamente do carregamento distribuído na estrutura. A presença do esforço  $Q_y$  também altera o esforço  $N$ . As afirmações acima ficarão visíveis a partir das explicações dos métodos e exposição dos resultados. Será demonstrado posteriormente que este esforço é fortemente influenciado pela inclinação  $\alpha$  da rampa.

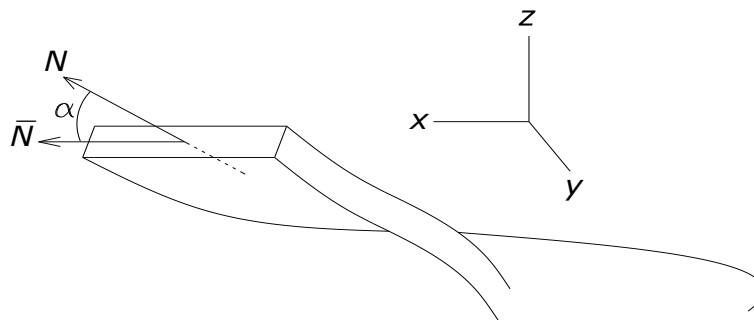


Figura 3.10 – Representação do esforço  $N$ .

### 3.4.2 Esforço Cortante $Q_y$

O esforço cortante  $Q_y$  (Figura 3.11) é uma força que atua na direção vertical, paralela à seção transversal inclinada. Pode ser decomposto em sua componente vertical  $\overline{Q}_y$ , na direção vertical paralela ao eixo  $Z$ .

Em estruturas retas este esforço é facilmente calculado multiplicando o carregamento distribuído pelo comprimento desenvolvido. Contudo, em estruturas helicoidais, isso não ocorre simplesmente dessa forma, pois o esforço  $Q_y$  é influenciado também pela existência do esforço axial  $N$ . Com esta influência o esforço deixa de variar de maneira linear para

assumir um comportamento senoidal ao longo do comprimento da estrutura. Esta interação e os seus efeitos serão demonstrados e melhor analisados no capítulo 4.

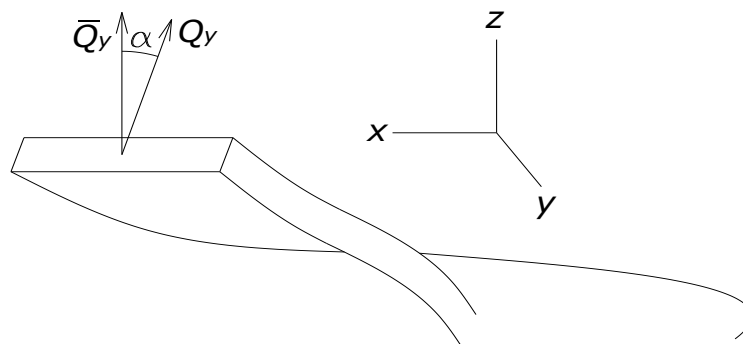


Figura 3.11 – Representação do esforço  $Q_y$ .

### 3.4.3 Esforço Cortante $Q_x$

O esforço  $Q_x$  (Figura 3.12) é uma força horizontal, na direção radial, ou seja, paralela à seção transversal. Por este motivo vale a igualdade  $\bar{Q}_x = Q_x$ . Os esforços  $Q_x$  e  $Q_y$  são ortogonais e formam um plano paralelo à seção transversal inclinada da estrutura.  $Q_x$  não depende do carregamento, pois está na direção ortogonal a este, portanto sua variação ocorre em função do ângulo de abertura da rampa. Pode ser verificado adiante, com a explicação dos métodos, que este esforço só existe quando a estrutura não é plana, ou seja, quando há o desnível entre os apoios.

Como também será mostrado adiante, este esforço tem comportamento que varia de forma senoidal ao longo do desenvolvimento da estrutura, inclusive com mudanças de sinal.

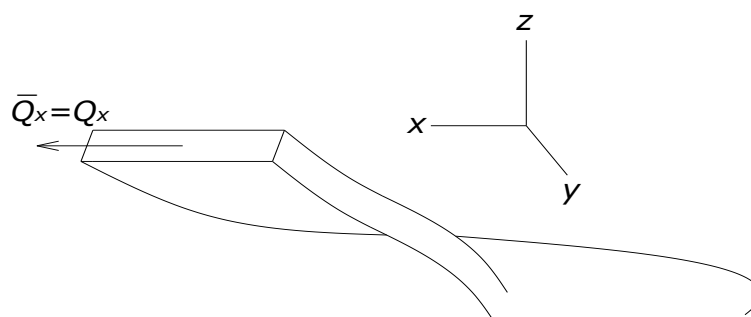


Figura 3.12 – Representação do esforço  $Q_x$ .

### 3.4.4 Momento Torçor $M_t$

O momento torçor (Figura 3.13) ocorre tangente à linha que representa o eixo da estrutura helicoidal inclinada, paralelo ao esforço  $N$ . A torção é um esforço que ao longo da estrutura possui comportamento anti-simétrico com valor nulo na seção de simetria da estrutura e variações de sinal ao longo do comprimento da rampa. Este esforço independe da inclinação da rampa, portanto, ocorre na estrutura mesmo quando esta é apenas um elemento curvo plano, com carregamento vertical, sem elevação e desnível entre os apoios. Em todos os casos o valor permanece nulo na seção de simetria.

O momento torçor  $M_t$  possui uma componente que depende do momento  $M_y$ . O comportamento da variação do esforço é de formato senoidal ao longo do comprimento da estrutura, como será visto adiante.

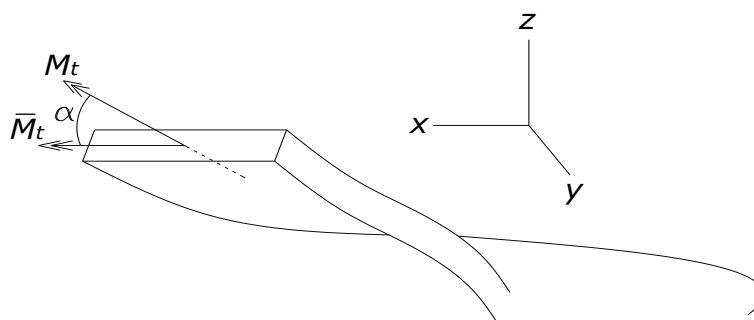


Figura 3.13 – Representação do esforço  $M_t$ .

### 3.4.5 Momento Fletor $M_y$

Este esforço trata-se de um momento fletor que ocorre na direção vertical, paralelo à seção transversal inclinada (Figura 3.14). Pode ser decomposto em sua componente vertical  $\overline{M}_y$ , na direção vertical paralela ao eixo  $Z$ .

É um esforço anti-simétrico, com valor nulo na seção de simetria. Na prática, este esforço causa efeitos de tração ou compressão nas bordas laterais de uma rampa helicoidal. A distinção entre tração ou compressão depende do sinal do esforço ao longo do comprimento da estrutura.

Este esforço, como será visto adiante, possui uma componente que depende do momento torçor  $M_t$ . Ele depende essencialmente da inclinação da rampa, sendo nulo para estruturas curvas planas com carregamento vertical.

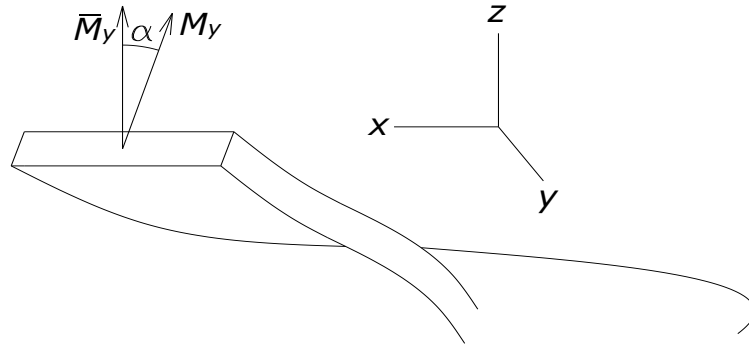


Figura 3.14 – Representação do esforço  $M_y$ .

### 3.4.6 Momento Fletor $M_x$

O momento  $M_x$  (Figura 3.15) ocorre na direção horizontal, paralelo ao plano da seção transversal inclinada e ao esforço  $Q_x$ . Por este motivo vale a igualdade  $\overline{M_x} = M_x$ . Os esforços  $M_x$  e  $M_y$  são ortogonais e formam um plano paralelo à seção transversal inclinada da estrutura. Este momento fletor é influenciado principalmente pelo hiperestático  $X_6$ , que ocorre na estrutura mesmo que não haja inclinação. Dependendo de seu sinal, este esforço traciona as fibras inferiores ou superiores da estrutura, sendo de grande importância a análise de seus valores mínimos e máximos.

Como também será mostrado adiante, este esforço tem comportamento que varia de forma senoidal ao longo do desenvolvimento da estrutura, inclusive com mudanças de sinal.

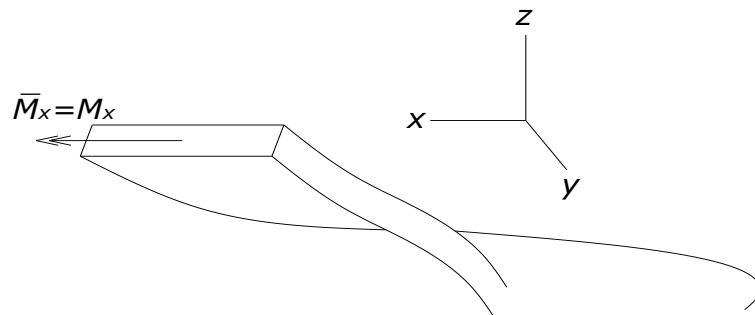


Figura 3.15 – Representação do esforço  $M_x$ .



### 3.5 DEFLEXÕES NA ESTRUTURA HELICOIDAL

As deflexões mostradas a seguir se originam devido à forma como surgem os esforços ao longo da estrutura helicoidal. Forças produzem momentos, momentos causam rotações e rotações originam deflexões, em termos do carregamento aplicado (Gimena *et al.*, 2008). Holmes (1957) sugere as deformações mostradas a seguir. Em uma estrutura com carregamento simétrico e distribuído pode-se saber quais faces da seção estão sendo tracionadas e quais estão sob compressão.

Outros autores como Gimena *et al.*(2008), Busool e Eisenberger (2001) e Alghamdi (1992) também se propuseram a fornecer meios de obtenção das deflexões. Contudo, tais resultados não serão abordados nesta dissertação, que tem por objetivo a análise dos esforços internos da estrutura.

#### 3.5.1 Deflexões laterais

Uma das formas de deflexão na estrutura helicoidal ocorre nas faces laterais da seção transversal. Será visto no capítulo 4 que algumas rampas terão tensões de tração na face lateral interna em toda a metade superior delas, enquanto em outras a tração se desenvolve até certo ponto, invertendo-se para compressão na lateral interna, nas proximidades do apoio superior. Esta tensão é causada principalmente pelo esforço  $M_y$  que causa na estrutura uma torção em torno do eixo vertical. A Figura 3.16 exemplifica as regiões de deformações laterais, com tensão na face interna, que ocorre geralmente na metade superior e de tensão na face externa, que freqüentemente ocorre na metade inferior de uma estrutura helicoidal.

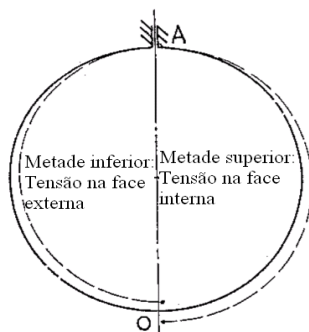


Figura 3.16 – Exemplo de tensões e deformações laterais (Adaptado de Holmes, 1957).

### 3.5.2 Deflexões verticais

As deflexões verticais ocorrem devido à ação dos esforços que causam a rotação da estrutura em torno do eixo horizontal. O principal esforço que contribui desta maneira é o  $M_x$ , que causa diretamente a mencionada rotação. Como será visto nos gráficos apresentados no capítulo 4, este esforço muda de sentido ao longo da estrutura, tracionando ou as fibras inferiores ou as fibras superiores da seção transversal. O efeito global é a deflexão vertical no ponto de simetria da estrutura, como sugerido na figura 3.17.

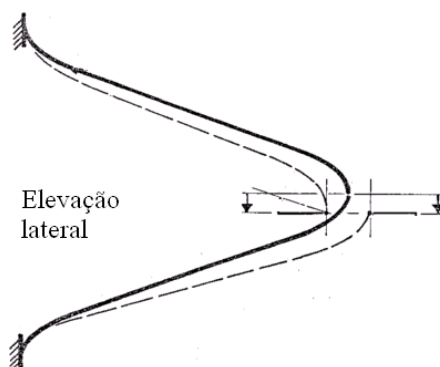


Figura 3.17 – Exemplo de deformação vertical (Holmes, 1957).

### 3.6 PARÂMETROS E VARIÁVEIS DE UMA ESTRUTURA HELICOIDAL

A caracterização apresentada a seguir demonstra quais são as grandezas relevantes para se identificar por completo uma estrutura helicoidal. Estas variáveis, esquematizadas na figura 3.18, são as informações necessárias para a aplicação da análise pelos métodos estudados. Apesar da nomenclatura sugerida abaixo não significa que todos os autores estudados compartilham dos mesmos símbolos, porém, quando for necessário padronizar as nomenclaturas estes serão os nomes e símbolos utilizados neste trabalho.

Grandezas consideradas:

Altura ( $h$ ): desnível total medido entre os dois pontos de engaste da estrutura, medido em linha reta, ao longo do eixo vertical  $Z$ .

Raio ( $r$ ): raio do círculo formado pela visão da rampa em planta. Formado pela projeção da estrutura helicoidal em um plano na horizontal.

Carregamento distribuído ( $q$ ): carga distribuída por unidade de comprimento. Medido ao longo da superfície inclinada da estrutura.

Inclinação da rampa ( $\alpha$ ): valor correspondente à razão entre a altura  $h$  e o comprimento total da rampa, projetado em um plano na horizontal. Medido em radianos.

Semi-ângulo de abertura da rampa ( $\phi$ ): ângulo que representa a metade do ângulo de abertura total desenvolvida pela estrutura, observado em um plano na horizontal. Medido em radianos.

Largura ( $b$ ): valor da largura da seção transversal da rampa.

Altura da seção ( $d$ ): referente à seção transversal da rampa.

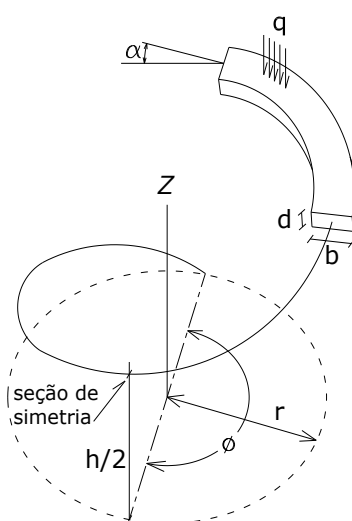


Figura 3.18 – Variáveis que caracterizam uma rampa helicoidal.

### 3.7 MÉTODOS DE CÁLCULO UTILIZADOS

Os métodos mostrados a seguir foram desenvolvidos a partir das equações de equilíbrio de uma estrutura espacial. O Método das Forças foi usado na dedução das equações finais que permitem resolver os hiperestáticos do problema. Dentre as aproximações usadas na resolução está a consideração da estrutura como uma barra helicoidal. Para os métodos deste tipo os carregamentos serão distribuídos uniformemente por unidade de comprimento.

As extremidades das estruturas são consideradas engastadas nos métodos aqui apresentados. Desta forma, o problema se baseia na determinação de seis hiperestáticos, de  $X_1$  a  $X_6$ , como apresentado anteriormente. Porém, verifica-se que os esforços analisados

desenvolvem-se de forma simétrica ou anti-simétrica, conforme será visto adiante. A partir desta verificação de simetria do problema, simplifica-se a resolução para apenas dois hiperestáticos no meio do desenvolvimento da rampa ( $X_3$  e  $X_6$ ).

Os métodos aqui apresentados foram escolhidos dentre as diversas pesquisas publicadas sobre o tema. Não faz parte dos objetivos o estudo de todos os métodos encontrados, mas apenas aqueles que foram selecionados. Na apresentação de cada método optou-se por preservar as notações e simbologias originais adotadas pelos autores.

Diante disso, são expostos a seguir, os métodos propostos por Fuchssteiner (1954), Bergman (1956), Scordelis (1960) e Prudon (1955). Por fim, são descritos os modelos elaborados em elementos finitos usando o programa *SAP 2000* versão 12 na construção dos mesmos modelos de rampa estudados.

As expressões matemáticas obtidas a partir das formulações foram escritas no programa de cálculo *Mathcad* versão 14, devido à praticidade de obtenção dos resultados e visualização dos mesmos. Cada um dos modelos pôde ser verificado e validado, em comparação com os exemplos propostos nos respectivos textos e, como será feito no capítulo seguinte, por meio da comparação entre os resultados dos diferentes métodos. É importante lembrar que alguns dos artigos são bem antigos e os cálculos foram feitos, na época, por métodos menos precisos, portanto, pode ser esta uma das fontes de discrepâncias dos resultados encontrados.

Observa-se que nos diferentes métodos quando a inclinação da rampa é igualada a zero têm-se as equações determinantes dos esforços para o caso de uma viga balcão circular, como pode ser visto no anexo III.

### **3.7.1 Formulação de Fuchssteiner (1954)**

O trabalho de Fuchssteiner (1954) é uma das mais importantes referências sobre o estudo de rampas helicoidais. O método se baseia nas considerações de equilíbrio de um setor infinitesimal de uma rampa. Fazendo uso das simplificações na seção de simetria da rampa

o problema seis vezes hiperestático resume-se na resolução de apenas dois. Por meio do método das forças os referidos hiperestáticos são resolvidos e, por fim, se se encontra os esforços do equilíbrio da seção: o esforço normal  $N$ , os cortantes  $Q_x$  e  $Q_y$ , o momento torçor  $M_t$  e os momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$ . A figura 3.19 mostra como estão posicionados estes esforços, seguindo a mesma nomenclatura original do método.

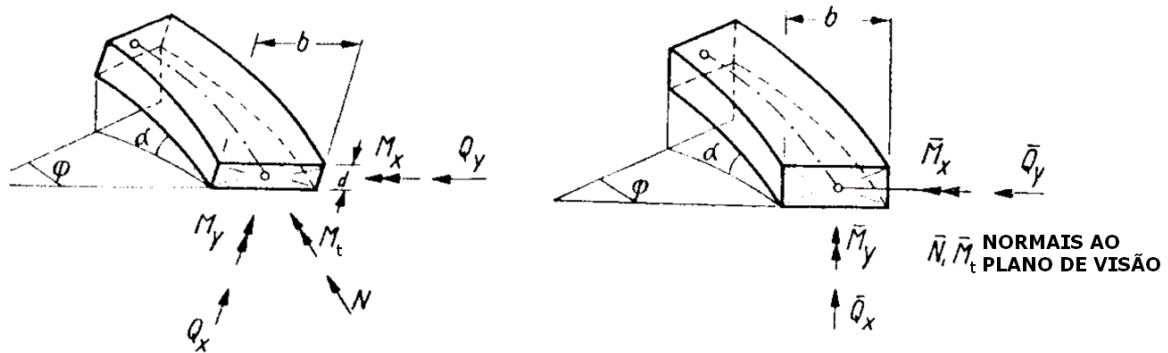


Figura 3.19 – Esforços conforme método de Fuchssteiner: relação a uma posição qualquer (a); em relação aos planos de orientação global (b) (adaptado: Fuchssteiner, 1954).

Esforços nas direções dos eixos globais  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  (figura 3.19b):

$$\begin{aligned}
 \bar{N} &= N \cos \alpha - Q_x \operatorname{sen} \alpha \\
 \bar{Q}_x &= N \operatorname{sen} \alpha + Q_x \cos \alpha \\
 \bar{Q}_y &= Q_y \\
 \bar{M}_t &= M_t \cos \alpha - M_y \operatorname{sen} \alpha \\
 \bar{M}_x &= M_x \\
 \bar{M}_y &= M_t \operatorname{sen} \alpha + M_y \cos \alpha
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

Esforços em uma direção qualquer (figura 3.19a):

$$\begin{aligned}
N &= \bar{Q}_x \operatorname{sen} \alpha + \bar{N} \operatorname{cos} \alpha \\
Q_x &= \bar{Q}_x \operatorname{cos} \alpha - \bar{N} \operatorname{sen} \alpha \\
Q_y &= \bar{Q}_y \\
M_t &= \bar{M}_y \operatorname{sen} \alpha + \bar{M}_t \operatorname{cos} \alpha \\
M_x &= \bar{M}_x \\
M_y &= \bar{M}_y \operatorname{cos} \alpha - \bar{M}_t \operatorname{sen} \alpha
\end{aligned}
\tag{3.9}$$

Sendo estes valores positivos quando:

- $N$  produzir compressão;
- $Q_x$  se dirigir para cima;
- $Q_y$  se dirigir para o centro;
- $M_t$  girar no mesmo sentido da hélice;
- $M_x$  tracionar o bordo inferior;
- $M_y$  tracionar o bordo interno.

As variáveis e esforços envolvidos no método são os seguintes:

$M_x$ : momento fletor na direção  $x$ ;

$M_y$ : momento fletor na direção  $y$ ;

$M_t$ : momento de torção;

$Q_x$ : esforço cortante na direção  $y$ ;

$Q_y$ : esforço cortante na direção  $x$ ;

$N$ : esforço axial;

$\varphi_0$ : semi-ângulo de abertura de uma estrutura helicoidal;

$\varphi$ : ângulo de uma posição específica ao longo de uma estrutura helicoidal;

$e$ : excentricidade entre eixo axial e carregamento;

$q$ : carga distribuída por unidade de comprimento;

$r$ : raio médio da estrutura helicoidal;

$\alpha$ : inclinação da rampa;

$G$ : módulo de elasticidade torcional;

$\Theta$ : inércia torcional;

$c$ : parâmetro geométrico;

$M_{ij}$  : momentos do método de Fuchssteiner;

$\delta_{ij}$  : deslocamento virtual de um esforço  $i$  na direção  $j$ ;

$J_x$ : inércia da seção transversal em relação ao eixo  $x$ ;

$J_y$ : inércia da seção transversal em relação ao eixo  $y$ .

Nas expressões que virão a seguir o ângulo  $\varphi$  é igual a zero na seção de simetria e seu sentido positivo é descendo em direção ao pé da rampa. A figura 3.20 abaixo mostra como os esforços se equilibram na seção de referência:

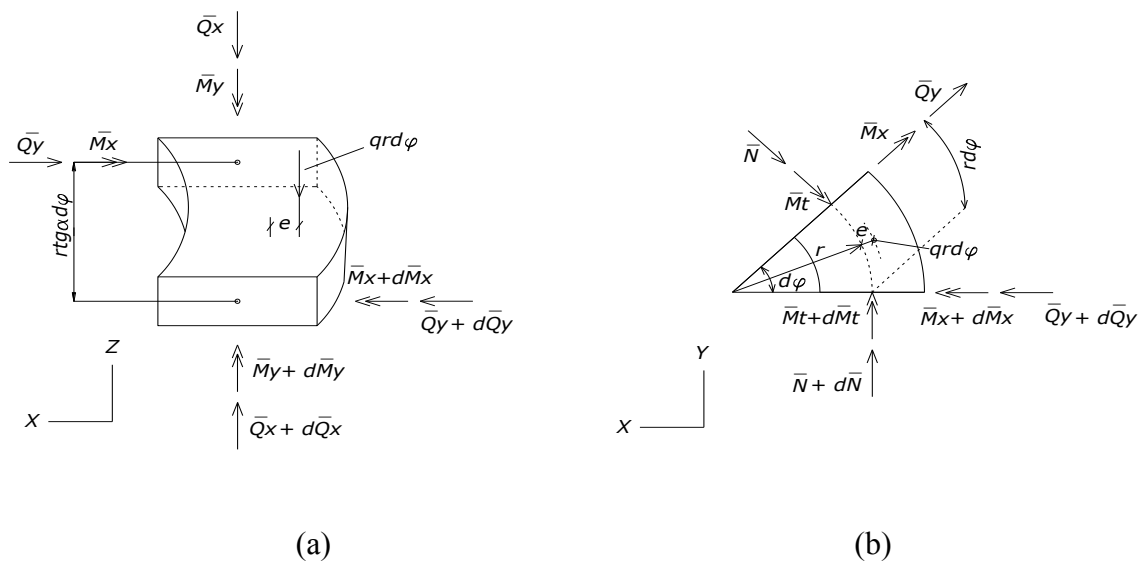


Figura 3.20 – Equilíbrio na seção de referência: vista lateral (a); vista superior (b).

Do equilíbrio do elemento têm-se as seguintes equações:

Direção radial:

$$\bar{N} - \frac{d\bar{Q}_y}{d\varphi} = 0 \quad (3.10)$$

Direção tangencial:

$$\frac{d\bar{N}}{d\varphi} + \bar{Q}_y = 0 \quad (3.11)$$

Direção vertical:

$$qr - \frac{d\bar{Q}_x}{d\varphi} = 0 \quad (3.12)$$

Momento radial:

$$qre + rtg\alpha \bar{Q}_y + \frac{d\bar{M}_t}{d\varphi} + \bar{M}_x = 0 \quad (3.13)$$

Momento tangencial:

$$r\bar{Q}_x - rtg\alpha \bar{N} - \bar{M}_t + \frac{d\bar{M}_x}{d\varphi} = 0 \quad (3.14)$$

Momento vertical:

$$r\bar{Q}_y - \frac{d\bar{M}_y}{d\varphi} = 0 \quad (3.15)$$

Desta maneira, ao se resolver as seis equações diferenciais para os seis esforços, pode-se particularizar as equações algébricas de cada um deles, nas quais os valores  $X_1$  a  $X_6$  são as constantes que surgem na resolução.

$$\bar{N} = -\frac{1}{r}(X_5 \text{sen}\varphi - X_3 \text{cos}\varphi) \quad (3.16)$$

$$\bar{Q}_x = r \int_0^\varphi q d\varphi + \frac{1}{r} X_1 \text{sen}\alpha \quad (3.17)$$

$$\bar{Q}_y = \frac{1}{r}(X_5 \text{cos}\varphi + X_3 \text{sen}\varphi) \quad (3.18)$$

$$\bar{M}_x = f(\varphi) + X_4 \text{sen}\varphi + X_6 \text{cos}\varphi + tg\alpha(X_3\varphi \text{cos}\varphi - X_5\varphi \text{sen}\varphi) \quad (3.19)$$

$$\bar{M}_y = -\text{cos}\alpha(X_1 + X_2) + X_5 \text{sen}\varphi - X_3 \text{cos}\varphi \quad (3.20)$$

$$\bar{M}_t = f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi + X_4 \text{cos}\varphi - X_6 \text{sen}\varphi + \text{sen}\alpha X_1 - tg\alpha(X_3\varphi \text{sen}\varphi + X_5\varphi \text{cos}\varphi) \quad (3.21)$$

A função  $f(\varphi)$ , que surge na expressão de  $\bar{M}_x$  funciona como incremento do esforço devido à excentricidade entre o eixo da estrutura e o carregamento, conforme a relação abaixo:

$$f(\varphi) = -qr(r + e) \quad (3.22)$$

Os valores  $X_1$  a  $X_6$ , no contexto da análise de esforços de uma estrutura, representam os hiperestáticos que devem ser conhecidos para completar a análise. Fuchssteiner não se preocupou em dar sentido físico a estes valores, porém, analisando criteriosamente a forma como se relacionam com os esforços na estrutura, chegou-se ao entendimento dos hiperestáticos neste método, listados na tabela 3.3 e representados na Figura 3.21:



Tabela 3.3 – Hiperestáticos identificados no método de Fuchssteiner.

Hiperestático	Comportamento
$X_1$	Força na direção vertical
$X_2$	Momento fletor na direção vertical
$X_3$	Força na direção axial
$X_4$	Momento torçor
$X_5$	Força na direção radial
$X_6$	Momento fletor na direção radial

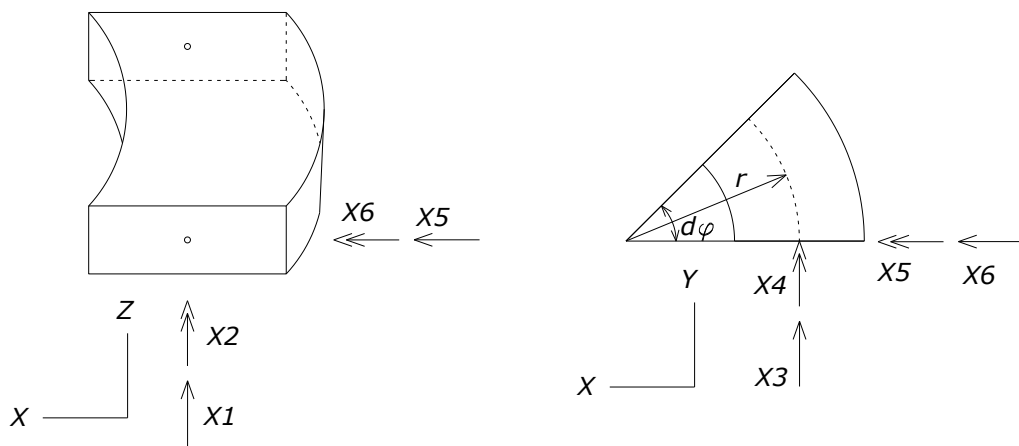


Figura 3.21 – Posição dos hiperestáticos no método de Fuchssteiner.

Uma forma de visualizar estes hiperestáticos e descobrir seus significados é mostrada abaixo. Aqui cada hiperestático influencia sozinho um dos esforços considerados (exceto no caso de  $\bar{M}_y$ ). Caso os esforços sejam analisados na seção de simetria ( $\varphi=0$ ), as equações assumem a seguinte forma:

$$\bar{N}(0) = \frac{1}{r} X_3 \quad (3.23)$$

$$\bar{Q}_x(0) = \frac{1}{r} \text{sen} \alpha X_1 \quad (3.24)$$

$$\bar{Q}_y(0) = \frac{1}{r} X_5 \quad (3.25)$$

$$\bar{M}_x(0) = f(0) + X_6 \quad (3.26)$$

$$\bar{M}_y(0) = -\cos \alpha (X_1 + X_2) - X_3 \quad (3.27)$$

$$\overline{Mt}(0) = f'(0) + X_4 \quad (3.28)$$

Substituindo as equações para uma posição qualquer:

$$N = r \operatorname{sen} \alpha \int_0^\varphi q d\varphi + \frac{1}{r} \operatorname{sen}^2 \alpha X_1 - \frac{1}{r} \cos \alpha (X_5 \operatorname{sen} \varphi - X_3 \cos \varphi) \quad (3.29)$$

$$Q_x = r \cos \alpha \int_0^\varphi q d\varphi + \frac{1}{r} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha X_1 + \frac{1}{r} \operatorname{sen} \alpha (X_5 \operatorname{sen} \varphi - X_3 \cos \varphi) \quad (3.30)$$

$$Q_y = \frac{1}{r} (X_5 \cos \varphi + X_3 \operatorname{sen} \varphi) \quad (3.31)$$

$$M_x = f(\varphi) + X_4 \operatorname{sen} \varphi + X_6 \cos \varphi + \operatorname{tg} \alpha (X_3 \varphi \cos \varphi - X_5 \varphi \operatorname{sen} \varphi) \quad (3.32)$$

$$M_y = -\operatorname{sen} \alpha \left[ f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi + X_4 \cos \varphi - X_6 \operatorname{sen} \varphi - \tan \alpha (X_3 \varphi \operatorname{sen} \varphi + X_5 \varphi \cos \varphi) \right] + \quad (3.33)$$

$$+ \cos \alpha (X_5 \operatorname{sen} \varphi - X_3 \cos \varphi) - X_1 - \cos^2 \alpha X_2$$

$$Mt = \cos \alpha \left( f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi - \operatorname{sen} \alpha X_2 + X_4 \cos \varphi - X_6 \operatorname{sen} \varphi \right) - \quad (3.34)$$

$$- \operatorname{sen} \alpha (X_3 \varphi \operatorname{sen} \varphi + X_5 \varphi \cos \varphi + X_3 \cos \varphi - X_5 \operatorname{sen} \varphi)$$

O caso típico que será estudado é o modelo em que as duas extremidades da rampa estão engastadas. Outros casos são possíveis de serem considerados, como com as extremidades simplesmente apoiadas ou a extremidade superior livre e a inferior engastada. Porém, são mais raros de se encontrar na prática. Segundo Fuchssteiner a escada bi-engastada possui maior rigidez e maior capacidade resistente.

Os deslocamentos virtuais devido aos esforços são dados por:

$$\delta'_{ik} = \iint_{F_s} (\sigma_i \cdot \sigma_k + \tau_i \cdot \tau_k) dF \cdot ds \quad (3.35)$$

São consideradas desprezíveis as deformações normais e laterais. A forma da expressão conforme o teorema dos trabalhos virtuais será:

$$\delta'_{ik} = \int_s \left( \frac{M_{xi} \cdot M_{xk}}{EJ_x} + \frac{M_{yi} \cdot M_{yk}}{EJ_y} + \frac{M_{\tau i} \cdot M_{\tau k}}{G\Theta} \right) ds \quad (3.36)$$

A rigidez torcional é dada por:

$$G\Theta = \frac{2EJ_x J_y}{(J_x + J_y)} \quad (3.37)$$

É feita também a seguinte substituição, considerando o desenvolvimento angular e a inclinação da rampa:

$$ds = \frac{rd\varphi}{\cos\alpha} \quad (3.38)$$

sendo:

$\sigma_i$  : tensão normal que compõe os deslocamentos virtuais;

$\sigma_k$  : tensão normal que compõe os deslocamentos virtuais;

$\tau_i$  : tensão cisalhante que compõe os deslocamentos virtuais;

$\tau_k$  : tensão cisalhante que compõe os deslocamentos virtuais;

$F$  : unidade infinitesimal de volume;

$S$  : unidade infinitesimal de deslocamento.

Usando também a relação:

$$\delta_{ik} = \frac{\cos\alpha \cdot EJ_x \cdot \delta'_{ik}}{r} \quad (3.39)$$

$$\delta_{ik} = \int_s \left[ M_{xi} \cdot M_{xk} + \frac{J_x}{J_y} M_{yi} \cdot M_{yk} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{J_x}{J_y} \right) M_{Ti} \cdot M_{Tk} \right] d\varphi \quad (3.40)$$

Os valores dos momentos  $M$  são apresentados a seguir:

$$\begin{aligned} M_{x0} &= f(\varphi) \\ M_{y0} &= -\text{sen}\alpha \left[ f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi \right] \\ M_{T0} &= \text{cos}\alpha \left[ f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi \right] \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} M_{x1} &= 0 \\ M_{y1} &= -1 \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$M_{T1} = 0$$

$$\begin{aligned} M_{x2} &= 0 \\ M_{y2} &= -\cos^2 \alpha \\ M_{T2} &= -\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} M_{x3} &= \operatorname{tg} \alpha \cdot \varphi \cos \varphi \\ M_{y3} &= \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \varphi \operatorname{sen} \varphi - \cos \alpha \cdot \cos \varphi \\ M_{T3} &= -\operatorname{sen} \alpha (\varphi \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi) \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} M_{x4} &= \operatorname{sen} \varphi \\ M_{y4} &= -\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \varphi \\ M_{T4} &= \cos \alpha \cdot \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} M_{x5} &= -\operatorname{tg} \alpha \cdot \varphi \operatorname{sen} \varphi \\ M_{y5} &= \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \varphi \cos \varphi + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \varphi \\ M_{T5} &= -\operatorname{sen} \alpha (\varphi \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi) \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} M_{x6} &= \cos \varphi \\ M_{y6} &= \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \varphi \\ M_{T6} &= -\cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \varphi \end{aligned} \quad (3.47)$$

Assim podem ser representados os momentos acima: os valores  $M_{ij}$  indicam um momento na direção  $i$  devido a um esforço unitário  $j$  (cada um dos hiperestáticos). A figura 3.22 abaixo indica as direções consideradas:

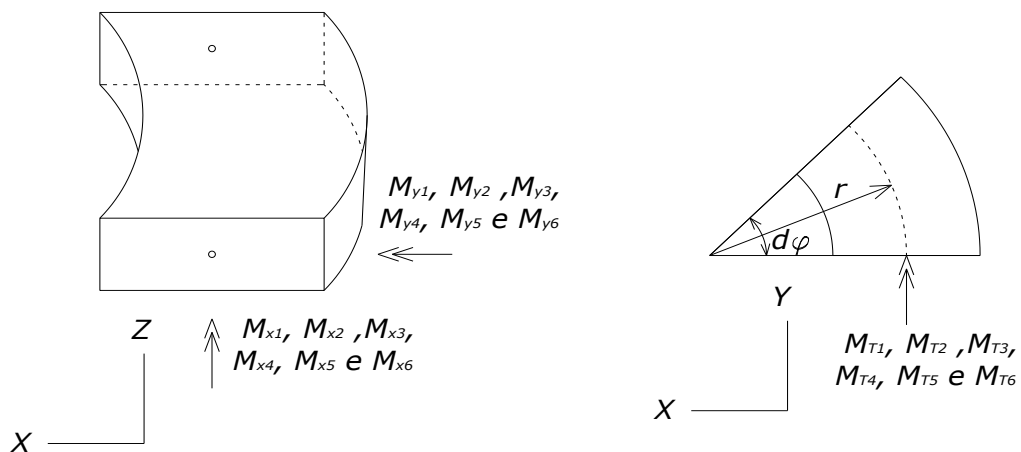


Figura 3.22 – Direções dos momentos  $M_{ij}$ .

A integração é feita de  $-\varphi$  a  $+\varphi$ , sendo o ponto inicial na seção de simetria. Substituindo os valores de  $M_{ij}$  têm-se os resultados das integrações de acordo com a equação 3.40:

$$\begin{aligned}
\delta_{11} &= 2a \cdot \varphi_0 \\
\delta_{12} &= 2a \cos^2 \alpha \cdot \varphi_0 \\
\delta_{13} &= 2a [\cos \alpha \cdot \text{sen} \varphi_0 + \text{sen} \alpha \cdot \text{tg} \alpha (\varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 - \text{sen} \varphi_0)] \\
\delta_{14} &= 2a \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \varphi_0 \\
\delta_{15} &= \delta_{16} = 0 \\
\delta_{22} &= \cos^2 \alpha (2c - 1 + 3a) \cdot \varphi_0 \\
\delta_{23} &= \cos \alpha [(2c - 1 + 2a)(2 \text{sen} \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0) + a \varphi_0 \cos \varphi_0] \\
\delta_{24} &= -\text{sen} \alpha \cdot \cos^2 \alpha (1 - a) \text{sen} \varphi_0 \\
\delta_{25} &= \delta_{26} = 0 \\
\delta_{33} &= \text{tg}^2 \alpha \left[ \frac{1}{3} (2 - c) \cdot \varphi_0^3 + \frac{1}{2} c \cdot \varphi_0^2 \text{sen} 2\varphi_0 + \frac{1}{4} (2 - 3c - 2a) (\text{sen} 2\varphi_0 - 2\varphi_0 \cos 2\varphi_0) \right] + \\
&+ \frac{1}{4} (2c - 1 + 3a) (2\varphi_0 + \text{sen} 2\varphi_0) \\
\delta_{56} &= -\frac{1}{4} \text{tg} \alpha [2(1 - c - a)(2\varphi_0 - \text{sen} \varphi_0) + c(\text{sen} 2\varphi_0 - 2\varphi_0 \cos 2\varphi_0)] \\
\delta_{66} &= (2 - c) \varphi_0 + \frac{1}{2} c \text{sen} 2\varphi_0 \\
\delta_{55} &= \text{tg}^2 \alpha \left[ \frac{1}{3} (2 - c) \varphi_0^3 - \frac{1}{2} c \varphi_0^2 \text{sen} 2\varphi_0 - \frac{1}{4} (2 - 3c - 2a) (\text{sen} 2\varphi_0 - 2\varphi_0 \cos 2\varphi_0) \right] + \\
&+ \frac{1}{4} (2c - 1 + 3a) (2\varphi_0 - \text{sen} 2\varphi_0)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Sendo:

$$a = \frac{J_x}{J_y} \tag{3.49}$$

$$c = \left( 1 - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \right) (1 - a) \tag{3.50}$$

As expressões de cálculo surgem a partir do cálculo dos esforços  $N$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_t$ ,  $M_x$  e  $M_y$ . Em cada equação há uma grandeza estaticamente indeterminada  $X_n$ . Nos cálculos, como se trata de uma estrutura simétrica, tanto de geometria como de carregamento, os valores  $\delta_{01}$  a  $\delta_{04}$  da equação 3.48 tornam-se nulos na integração de  $-\varphi$  a  $+\varphi$  e conseqüentemente também  $X_1$  a  $X_4$ , que são os esforços anti-simétricos da estrutura helicoidal.

Somente são diferentes de zero os valores de  $\delta_{05}$ ,  $\delta_{06}$ ,  $\delta_{55}$ ,  $\delta_{56}$  e  $\delta_{66}$ , que possibilitam calcular  $X_5$  e  $X_6$ .

$$\delta_{0k} = \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left[ M_{x0}M_{xk} + aM_{y0}M_{yk} + \frac{1}{2}(1+a)M_{T0}M_{Tk} \right] \cdot d\varphi \quad (3.51)$$

Substituindo os valores de  $M$  na equação 3.51:

$$\delta_{05} = \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left[ \begin{aligned} & f(\varphi) \cdot (-\operatorname{tg}\alpha \cdot \varphi \operatorname{sen}\varphi) + a \left\{ -\operatorname{sen}\alpha \left[ f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi \right] \right\} \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \varphi \cos\varphi + \\ & + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{2}(1+a) \cdot \cos\alpha \left[ f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi \right] \cdot [-\operatorname{sen}\alpha(\varphi \cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi)] \end{aligned} \right] \cdot d\varphi \quad (3.52)$$

$$\delta_{06} = \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left[ \begin{aligned} & f(\varphi) \cdot \cos\varphi + a \left\{ -\operatorname{sen}\alpha \left[ f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi \right] \right\} \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\varphi + \\ & \frac{1}{2}(1+a) \cos\alpha \left[ f'(\varphi) + r^2 \int_0^\varphi q d\varphi \right] \cdot (-\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\varphi) \end{aligned} \right] \cdot d\varphi \quad (3.53)$$

Integrando os termos acima têm-se as expressões:

$$\delta_{05} = 2qr^2 \tan\alpha \left[ \left( 4 - 3c - a + \frac{e}{r} \right) (\operatorname{sen}\varphi_0 - \varphi_0 \cos\varphi_0) - (1-c)\varphi_0^2 \operatorname{sen}\varphi_0 \right] \quad (3.54)$$

$$\delta_{06} = 2qr^2 \left[ (1-c)\varphi_0 \cos\varphi_0 - \left( 2 - c + \frac{e}{r} \right) \operatorname{sen}\varphi_0 \right] \quad (3.55)$$

A excentricidade ( $e$ ) é dada por:

$$e = \frac{b^2}{12r} \quad (3.56)$$

Os hiperestáticos  $X_5$  e  $X_6$  relacionam-se da seguinte maneira:

$$X_5 = -\frac{(\delta_{66} \cdot \delta_{05} - \delta_{56} \cdot \delta_{06})}{(\delta_{55} \cdot \delta_{66} - \delta_{56}^2)} \quad (3.57)$$

$$X_6 = -\frac{(\delta_{55} \cdot \delta_{06} - \delta_{56} \cdot \delta_{05})}{(\delta_{55} \cdot \delta_{66} - \delta_{56}^2)} \quad (3.58)$$

Com os demais hiperestáticos nulos têm-se as seguintes equações finais:

$$N = qr\varphi \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{r} X_5 \operatorname{sen} \varphi \cos \alpha \quad (3.59)$$

$$Q_x = qr\varphi \cos \alpha + \frac{1}{r} X_5 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha \quad (3.60)$$

$$Q_y = \frac{1}{r} X_5 \cos \varphi \quad (3.61)$$

$$M_t = qr^2 \varphi \cos \alpha - X_6 \operatorname{sen} \varphi \cos \alpha - X_5 \varphi \cos \varphi \operatorname{sen} \alpha + X_5 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha \quad (3.62)$$

$$M_x = f(\varphi) - X_5 \varphi \operatorname{sen} \varphi \tan \alpha + X_6 \cos \varphi$$

$$M_y = -qr^2 \varphi \operatorname{sen} \alpha + X_6 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha + X_5 \varphi \cos \varphi \tan \alpha \operatorname{sen} \alpha + X_5 \operatorname{sen} \varphi \cos \alpha \quad (3.63)$$

Nas equações acima,  $\varphi$  varia de  $-\varphi_0$  (topo) a  $+\varphi_0$  (pé).

Com isso têm-se as equações dos seis esforços a serem analisados ao longo de um elemento helicoidal. Esta formulação apresentada é a mais abrangente de todas as formulações analíticas apresentadas ao longo deste trabalho, pois apresenta os valores para todos os seis esforços que ocorrem em uma estrutura espacial.

No método acima apresentado não está prevista a variação de seção ao longo do desenvolvimento da estrutura. Portanto, caso haja esta variação na estrutura real a aplicação deste método está condicionada às devidas simplificações de carregamento que se fizerem necessárias. Pode-se, por exemplo, adotar para toda a rampa a maior seção presente em todo o desenvolvimento. Contudo, além de gerar resultados conservadores, deve-se ter o bom senso de verificar se as seções não variam de tal forma a tornar esta aproximação equivocada. Pode-se talvez dividir a rampa em trechos com seções variadas para evitar erros grosseiros.

Para validação da reformulação do método, segue um exemplo extraído do texto original de Fuchssteiner. Seus resultados são comparados com aqueles obtidos pelo cálculo realizado no *Mathcad*. Esta etapa é importante para verificar se os cálculos feitos para este trabalho estão reproduzindo os resultados apresentados pelo autor.

Dados:  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\tan \alpha = 0,40$ ,  $b = 1,50\text{m}$ ,  $d = 0,15\text{m}$  e  $r = 1,50\text{m}$

Tabela 3.4 – Comparação de valores intermediários no método de Fuchssteiner.

COMPARAÇÃO: VALORES INTERMEDIÁRIOS							
	$\delta_{05}$	$\delta_{06}$	$\delta_{55}$	$\delta_{56}$	$\delta_{66}$	$X_5$	$X_6$
<b>Fuchssteiner</b>	1,042qr <sup>2</sup>	3,033qr <sup>2</sup>	0,384	0,360	2,257	-1,713qr <sup>2</sup>	1,071qr <sup>2</sup>
<b>Cálculo</b>	1,044qr <sup>2</sup>	3,041qr <sup>2</sup>	0,383	0,359	2,257	-1.720qr <sup>2</sup>	1.073qr <sup>2</sup>

Tabela 3.5 – Comparação de valores dos esforços no método de Fuchssteiner.

COMPARAÇÃO: ESFORÇOS NOS APOIOS ( $\varphi = \pm\varphi_0$ )						
	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_t$ (kN.m)	N (kN)	$Q_x$ (kN)	$Q_y$ (kN)
<b>Fuchssteiner</b>	0,0038qr <sup>2</sup>	1,78qr <sup>2</sup>	0,172qr <sup>2</sup>	2,17qr	0,82 qr	0
<b>Cálculo</b>	0,0043qr <sup>2</sup>	1,78qr <sup>2</sup>	0,176qr <sup>2</sup>	2,18qr	0,82qr	0

Verifica-se que os resultados estão próximos o suficiente para se considerar validados os cálculos deste trabalho, em relação aos resultados apresentados no exemplo proposto por Fuchssteiner.

### 3.7.2 Formulação de Scordelis (1960)

Em seu texto, Scordelis demonstra as equações gerais para a obtenção dos esforços hiperestáticos que resolvem o problema de análise de um elemento linear helicoidal, sujeito a um carregamento vertical uniformemente distribuído e com seção transversal retangular. Este elemento é considerado engastado nas duas extremidades. Foi apresentada uma série de tabelas, com 510 variedades de casos, variando o ângulo de abertura, ângulo de inclinação e a seção transversal.

O método trata da análise dos esforços internos do elemento tridimensional helicoidal, evoluindo tanto no sentido horário como anti-horário. O estudo termina com diversos comentários a respeito da influência das grandezas geométricas nos resultados dos hiperestáticos e nos esforços calculados. A representação geométrica básica é mostrada na Figura 3.23.

O carregamento é considerado uniformemente distribuído na projeção horizontal do eixo da estrutura. A estrutura possui dois vínculos engastados, o que leva à existência de seis hiperestáticos para serem determinados. Contudo, tirando proveito da geometria simétrica



da estrutura, somente dois hiperestáticos serão diferentes de zero na seção de simetria. Estes são: a força horizontal  $X_x$ , na direção do eixo  $x$  e o momento  $X_r$  em torno do eixo  $x$ . Ambos estão na seção de simetria da estrutura, conforme visto na Figura 3.24. O desenvolvimento da rampa pode ser tanto no sentido horário como anti-horário.

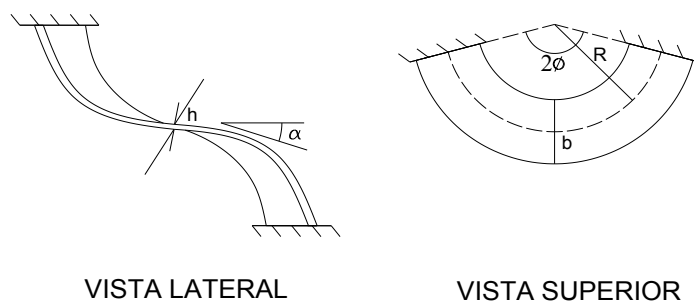


Figura 3.23 – Geometria da rampa helicoidal.

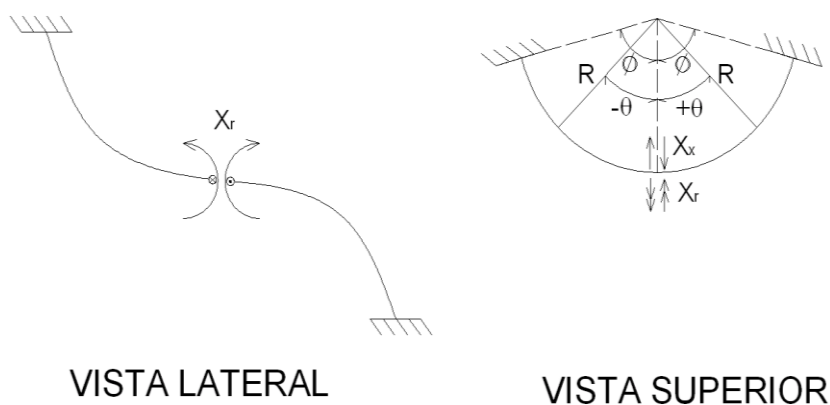


Figura 3.24 – direções positivas dos hiperestáticos.

As variáveis e os esforços do método são os seguintes:

$M_r$  : momento fletor na direção  $x$ ;

$M_\delta$  : momento fletor na direção  $y$ ;

$M_t$  : momento torçor;

$\delta_{ij}$  : deslocamento virtual;

$X_x$ : hiperestático: Força na direção radial;

$X_r$ : hiperestático: Momento fletor na direção radial;

$E$ : módulo de elasticidade;

$I_r$ : inércia da seção transversal em relação ao eixo  $x$ ;

$I_\delta$ : inércia da seção transversal em relação ao eixo  $y$ ;

$I_t$ : inércia torcional;

$G$ : módulo de elasticidade torcional;

$\phi$ : semi-ângulo de abertura de uma estrutura helicoidal;

$\theta$ : ângulo associado a um ponto qualquer;

$w$ : carga distribuída por unidade de comprimento;

$r$ : raio médio da estrutura helicoidal;

$m_{ij}$ : momentos que compõem as equações de deslocamento.

$c$ : braço de alavanca

Pelo princípio da superposição dos deslocamentos as equações de compatibilidade do problema são as seguintes:

$$\begin{aligned}\delta_{xw} + Xx\delta_{xx} + Xr\delta_{xr} &= 0 \\ \delta_{rw} + Xx\delta_{rx} + Xr\delta_{rr} &= 0\end{aligned}\quad (3.64)$$

Pelo método dos trabalhos virtuais:

$$\begin{aligned}\delta_{xw} &= \frac{1}{EI_r} \int_{-\phi}^{+\phi} m_{rx} m_{rw} \cdot rd\phi + \frac{1}{EI_\delta} \int_{-\phi}^{+\phi} m_{\delta x} m_{\delta w} \cdot rd\phi + \frac{1}{GJ_t} \int_{-\phi}^{+\phi} m_{tx} m_{tw} \cdot rd\phi \\ \delta_{rw} &= \frac{1}{EI_r} \int_{-\phi}^{+\phi} m_{rx} m_{rw} \cdot rd\phi + \frac{1}{EI_\delta} \int_{-\phi}^{+\phi} m_{\delta r} m_{\delta w} \cdot rd\phi + \frac{1}{GJ_t} \int_{-\phi}^{+\phi} m_{tr} m_{tw} \cdot rd\phi \\ \delta_{xr} = \delta_{rx} &= \frac{1}{EI_r} \int_{-\phi}^{+\phi} m_{rx} m_{rr} \cdot rd\phi + \frac{1}{EI_\delta} \int_{-\phi}^{+\phi} m_{\delta x} m_{\delta r} \cdot rd\phi + \frac{1}{GJ_t} \int_{-\phi}^{+\phi} m_{tx} m_{tr} \cdot rd\phi \\ \delta_{xx} &= \frac{1}{EI_r} \int_{-\phi}^{+\phi} m_{rx} m_{rx} \cdot rd\phi + \frac{1}{EI_\delta} \int_{-\phi}^{+\phi} m_{\delta x} m_{\delta x} \cdot rd\phi + \frac{1}{GJ_t} \int_{-\phi}^{+\phi} m_{tx} m_{tx} \cdot rd\phi \\ \delta_{rr} &= \frac{1}{EI_r} \int_{-\phi}^{+\phi} m_{rx} m_{rr} \cdot rd\phi + \frac{1}{EI_\delta} \int_{-\phi}^{+\phi} m_{\delta r} m_{\delta r} \cdot rd\phi + \frac{1}{GJ_t} \int_{-\phi}^{+\phi} m_{tr} m_{tr} \cdot rd\phi\end{aligned}\quad (3.65)$$

Momentos fletores e torçores devido a  $q = 1$ :

sendo:

$$m_{rw} = -qr\phi \cdot c \cdot \text{sen} \frac{\phi}{2} = -2qr^2 \text{sen}^2 \frac{\phi}{2} \quad (3.66)$$

O braço de alavanca  $c$  é dado por:

$$c = \frac{2r}{\phi} \cdot \text{sen} \frac{\phi}{2} \quad (3.67)$$

fazendo  $q=1$  e  $\text{sen}^2 \frac{\phi}{2} = \frac{1 - \cos \phi}{2}$ :

$$m_{rw} = -r^2(1 - \cos \theta) \quad (3.68)$$

sendo

$$N = qr\phi \text{sen} \alpha \quad (3.69)$$

O braço de alavanca é dado por  $r-x$ , sendo  $x$ :

$$x = \cos \frac{\phi}{2} \cdot \frac{2r \text{sen} \frac{\phi}{2}}{\phi} \quad (3.70)$$

$$m_{sw} = r\phi \text{sen} \alpha \left( r - \frac{2r \text{sen} \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}}{\phi} \right) \quad (3.71)$$

Desenvolvendo, chega-se à forma:

$$m_{sw} = -r^2(\theta - \text{sen} \theta) \text{sen} \alpha \quad (3.72)$$

$$N = qr\phi \cos \alpha \quad (3.73)$$

$$\text{alavanca} \cdot r - \frac{2r \text{sen} \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}}{\phi} \quad (3.74)$$

$$m_{tw} = -r^2(\theta - \text{sen} \theta) \cos \alpha \quad (3.75)$$

Momentos fletores e torçores devido a  $X_x = 1$ :

$$\begin{aligned} m_{rx} &= -r(\theta \text{sen} \theta) \tan \alpha \\ m_{\alpha x} &= r(\text{sen} \theta) \cos \alpha + r(\theta \cos \theta) \text{sen} \alpha \tan \alpha \\ m_{tx} &= -r(\text{sen} \theta) \text{sen} \alpha + r(\theta \cos \theta) \text{sen} \alpha \end{aligned} \quad (3.76)$$

Momentos fletores e torçores devido a  $X_r = 1$ :

$$\begin{aligned} m_{rr} &= \cos \theta \\ m_{\delta r} &= \text{sen } \theta \text{sen } \alpha \\ m_{r'} &= \text{sen } \theta \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.77)$$

Integrando, tem-se os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \delta_{xw} &= \frac{r^4 \tan \alpha \sec \alpha}{EI_r} \left[ \text{sen } \phi - \phi \cos \phi - \frac{1}{8} (\text{sen } 2\phi - 2\phi \cos 2\phi) \right] + \\ &+ \frac{r^4 \sec \alpha \text{sen } \alpha}{EI_\delta} \left\{ \left[ \frac{\phi}{2} - \text{sen } \phi + \phi \cos \phi - \frac{\text{sen } 2\phi}{4} \right] \cos \alpha - \right. \\ &\left. - \left[ 2\phi \cos \phi + (\phi^2 - 2) \text{sen } \phi - \frac{1}{8} (\text{sen } 2\phi - 2\phi \cos 2\phi) \right] \tan \alpha \text{sen } \alpha \right\} \\ &+ \frac{r^4 \text{sen } \alpha}{GJ_t} \left[ (3 - \phi^2) \text{sen } \phi - 3\phi \cos \phi - \frac{\phi}{2} + \frac{3}{8} \text{sen } 2\phi - \frac{\phi \cos 2\phi}{4} \right] \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} \delta_{rw} &= \frac{r^3 \sec \alpha}{EI_r} \left[ \frac{\phi}{2} - \text{sen } \phi + \frac{\text{sen } 2\phi}{4} \right] + \frac{r^3 \text{sen}^2 \alpha \sec \alpha}{EI_\delta} \left[ \frac{\phi}{2} - \text{sen } \phi - \frac{\text{sen } 2\phi}{4} + \phi \cos \phi \right] + \\ &+ \frac{r^3 \cos \alpha}{GI_t} \left[ \frac{\phi}{2} - \text{sen } \phi - \frac{\text{sen } 2\phi}{4} + \phi \cos \phi \right] \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} \delta_{xx} &= \frac{r^3 \sec \alpha \tan^2 \alpha}{EI_r} \left[ \frac{\phi^3}{6} - \left( \frac{\phi^3}{4} - \frac{1}{8} \right) \text{sen } 2\phi - \frac{\phi \cos 2\phi}{4} \right] + \\ &+ \frac{r^3 \sec \alpha}{EI_\delta} \left\{ \left[ \frac{\phi}{2} - \frac{\text{sen } 2\phi}{4} \right] \cos^2 \alpha + \frac{1}{4} [\text{sen } 2\phi - 2\phi \cos 2\phi] \text{sen}^2 \alpha + \right. \\ &\left. + \left[ \frac{\phi^3}{6} + \left( \frac{\phi^3}{4} - \frac{1}{8} \right) \text{sen } 2\phi + \frac{\phi \cos 2\phi}{4} \right] \tan^2 \alpha \text{sen}^2 \alpha \right\} + \\ &+ \frac{r^3 \sec \alpha \text{sen}^2 \alpha}{GI_t} \left\{ \left[ \frac{\phi}{2} - \frac{\text{sen } 2\phi}{4} \right] - \frac{1}{4} [\text{sen } 2\phi - 2\phi \cos 2\phi] + \right. \\ &\left. \left[ \frac{\phi^3}{6} + \left( \frac{\phi^3}{4} - \frac{1}{8} \right) \text{sen } 2\phi + \frac{\phi \cos 2\phi}{4} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\delta_{rr} = \frac{r \sec \alpha}{EI_r} \left[ \frac{\phi}{2} + \frac{\text{sen } 2\phi}{4} \right] + \frac{r \sec \alpha \text{sen}^2 \alpha}{EI_\delta} \left[ \frac{\phi}{2} - \frac{\text{sen } 2\phi}{4} \right] + \frac{r \cos \alpha}{GI_t} \left[ \frac{\phi}{2} - \frac{\text{sen } 2\phi}{4} \right] \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned}
\delta_{rx} = \delta_{xr} = & -\frac{r^2 \sec\alpha \tan\alpha}{EI_r} \left[ \frac{1}{8} (\text{sen}2\phi - 2\phi \cos 2\phi) \right] + \\
& + \frac{r^2 \text{sen}\alpha \sec\alpha}{EI_\delta} \left[ \left( \frac{\phi}{2} - \frac{\text{sen}2\phi}{4} \right) \cos\alpha + \frac{1}{8} (\text{sen}2\phi - 2\phi \cos 2\phi) \tan\alpha \text{sen}\alpha \right] + \\
& + \frac{r^2 \text{sen}\alpha}{GI_t} \left[ -\left( \frac{\phi}{2} - \frac{\text{sen}2\phi}{4} \right) + \frac{1}{8} (\text{sen}2\phi - 2\phi \cos 2\phi) \right]
\end{aligned} \quad (3.82)$$

Após as integrações acima, os valores de  $X_x$  e  $X_r$  são obtidos. Os momentos finais podem, então, serem calculados pela soma das componentes mostradas abaixo (como previsto no Método das Forças):

$$\begin{aligned}
M_r &= m_{rw} + X_x m_{rx} + X_r m_{rr} \\
M_\delta &= m_{\delta w} + X_x m_{\delta x} + X_r m_{\delta r} \\
M_t &= m_{tw} + X_x m_{tx} + X_r m_{tr}
\end{aligned} \quad (3.83)$$

Observa-se que, diferentemente do estudo apresentado por Fuchssteiner, este método de cálculo não leva em consideração a excentricidade entre a linha do eixo da estrutura e a linha de aplicação do carregamento distribuído, sendo esta uma simplificação aceitável, visto os pequenos valores da referida excentricidade.

Nota-se também que as equações e os resultados apresentados pelo autor referem-se a um carregamento uniforme de  $1lb/ft$ . Isso exige um ajuste para compor os resultados finais para um carregamento qualquer. Para adequar os resultados é preciso acrescentar o carregamento distribuído  $w$  nas expressões, como mostrado a seguir:

$$m_{rw} = -w \cdot r^2 (1 - \cos\theta) \quad (3.84)$$

$$m_{\delta w} = -w \cdot r^2 (\theta - \text{sen}\theta) \text{sen}\alpha \quad (3.85)$$

$$m_{tw} = -w \cdot r^2 (\theta - \text{sen}\theta) \cos\alpha' \quad (3.86)$$

$$\delta_{xw} = w \cdot \left( \begin{aligned} & \frac{r^4 \tan \alpha \sec \alpha}{EI_r} \left[ \text{sen} \phi - \phi \cos \phi - \frac{1}{8} (\text{sen} 2\phi - 2\phi \cos 2\phi) \right] + \\ & + \frac{r^4 \sec \alpha \text{sen} \alpha}{EI_\delta} \left\{ \left[ \frac{\phi}{2} - \text{sen} \phi + \phi \cos \phi - \frac{\text{sen} 2\phi}{4} \right] \cos \alpha - \right. \\ & \left. - \left[ 2\phi \cos \phi + (\phi^2 - 2) \text{sen} \phi - \frac{1}{8} (\text{sen} 2\phi - 2\phi \cos 2\phi) \right] \tan \alpha \text{sen} \alpha \right\} \\ & + \frac{r^4 \text{sen} \alpha}{GJ_t} \left[ (3 - \phi^2) \text{sen} \phi - 3\phi \cos \phi - \frac{\phi}{2} + \frac{3}{8} \text{sen} 2\phi - \frac{\phi \cos 2\phi}{4} \right] \end{aligned} \right) \quad (3.87)$$

$$\delta_{rw} = w \cdot \left( \begin{aligned} & \frac{r^3 \sec \alpha}{EI_r} \left[ \frac{\phi}{2} - \text{sen} \phi + \frac{\text{sen} 2\phi}{4} \right] + \frac{r^3 \text{sen}^2 \alpha \sec \alpha}{EI_\delta} \left[ \frac{\phi}{2} - \text{sen} \phi - \frac{\text{sen} 2\phi}{4} + \phi \cos \phi \right] + \\ & + \frac{r^3 \cos \alpha}{GI_t} \left[ \frac{\phi}{2} - \text{sen} \phi - \frac{\text{sen} 2\phi}{4} + \phi \cos \phi \right] \end{aligned} \right) \quad (3.88)$$

#### Verificação e validação dos resultados

Comparando os resultados dos hiperestáticos tabelados por Scordelis com aqueles obtidos por meio do programa de cálculo, temos os resultados para o exemplo mostrado a seguir.

Dados:  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\alpha = 20,0^\circ$ ,  $b = 1,50\text{m}$ ,  $d = 0,15\text{m}$  e  $r = 1,50\text{m}$

Tabela 3.6 – Verificação da reformulação do método de Scordelis.

	$X_r$	$X_x$
Scordelis	0,031	-2,182
Cálculo	0,031	-2,177

Observando os resultados, observa-se que, mesmo com precisão diferente, os resultados são valores suficientemente próximos para se assegurar a validade dos resultados calculados pelo presente trabalho.

A adequação final que o método necessita é adaptá-lo para que possam ser considerados quaisquer valores para o carregamento uniforme (equações 4.67, 4.68 e 4.69), pois a opção de carregamento unitário não é suficiente para um modelo adequado na maioria dos casos.

### 3.7.3 Formulação de Bergman (1956)

No trabalho de Bergman, embora o autor reconheça a existência de esforços torcionais importantes de forma mais complexa que numa escada reta, o método por ele apresentado considera a rampa apenas em sua projeção horizontal, ou seja, sem levar em conta o fato de ser uma estrutura inclinada. O problema resume-se, portanto, à resolução de uma viga plana curva e engastada em seus extremos com um carregamento uniformemente distribuído ao longo do eixo da peça e normal ao seu plano de curvatura. Um exemplo deste modelo é mostrado na Figura 3.25.

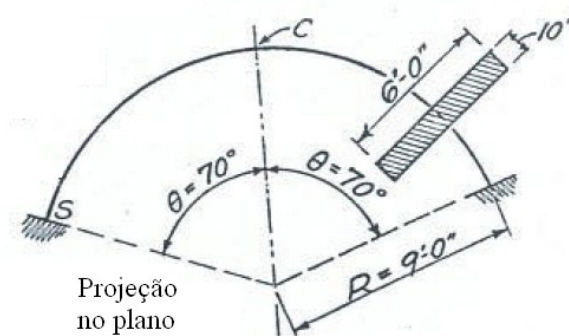


Figura 3.25 – Idealização de uma estrutura helicoidal pelo método proposto por Bergman (Adaptado: Bergman, 1956).

O autor também considera que as simetrias da estrutura e do carregamento podem ser exploradas por se concluir que o momento de torção e o cisalhamento vertical são nulos na metade do comprimento da rampa. Como a consideração é a de uma estrutura plana, o problema consiste na resolução do hiperestático que é o momento de flexão na seção média. Para tanto, é apresentada a seguinte expressão:

$$M_c = wR^2 \left[ \frac{2(K+1)\text{sen}\theta - 2K\theta \cos\theta}{(K+1)\theta - (K-1)\text{sen}\theta \cos\theta} - 1 \right] \quad (3.89)$$

onde:

$M_c$  = momento fletor no meio do vão, ou hiperestático a determinar;

$\theta$  = semi-ângulo de abertura;

$K = \frac{EI}{GI_t}$  = razão entre a rigidez a flexão e rigidez a torção;

$w$  = carga total por unidade de comprimento, aplicado na linha central da projeção do plano;

$R$  = raio médio da estrutura helicoidal.

Para um ponto qualquer na rampa a expressão assume a seguinte forma:

$$M_A = wR^2 \left[ \frac{2(K+1)\text{sen}\theta - 2K\theta\cos\theta}{(K+1)\theta - (K-1)\text{sen}\theta\cos\theta} \cos\alpha - 1 \right] \quad (3.90)$$

sendo:

$M_A$  = momento fletor em uma posição qualquer;

$\alpha$  = ângulo de abertura referente ao ponto considerado para a obtenção dos esforços.

Da mesma forma, tem se o momento torçor e o esforço cortante vertical:

$$T_A = wR^2 \left[ \frac{2(K+1)\text{sen}\theta - 2K\theta\cos\theta}{(K+1)\theta - (K-1)\text{sen}\theta\cos\theta} \text{sen}\alpha - \alpha \right] \quad (3.91)$$

$$V = wR\theta \quad (3.92)$$

Trata-se, portanto, de um método simplificado, com limitações importantes, como será visto no capítulo 5. As verificações referentes às funcionalidades do método serão discutidas na ocasião da obtenção de resultados para diversos casos de rampas.

### 3.7.4 Formulação de Prudon (1955)

Em sua publicação, *Tratado de Concreto Armado – Vol. 4*, Guerrin e Lavaur (2002) apresentam o método de Prudon (1955) para a análise de rampas helicoidais. Não foi possível obter a publicação original para melhores esclarecimentos a respeito do desenvolvimento da formulação. Trata-se de um método simplificado, como o apresentado por Bergman, com a diferença de levar em consideração as influências devido à inclinação da rampa.

O método proporciona o cálculo apenas dos momentos fletor e torçor da peça helicoidal. Os dados de entrada são o raio da rampa ( $r$ ), altura total, o semi-ângulo de abertura, a



inclinação da rampa e o carregamento uniformemente distribuído ( $q$ ). A Figura 3.26 exemplifica com vista em planta as grandezas utilizadas no método. A simplicidade do método é uma vantagem, pois permite rapidamente a obtenção de resultados, ainda que para fins comparativos.

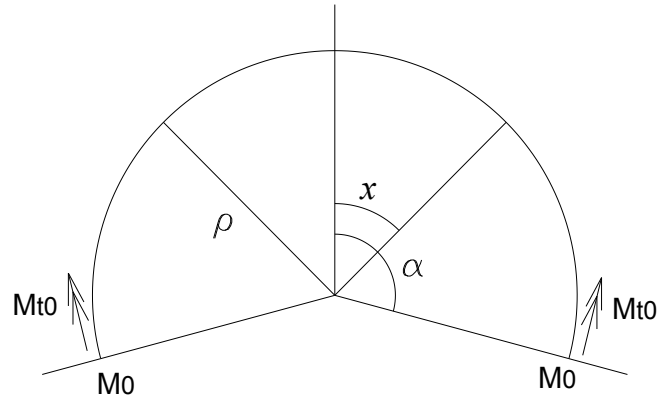


Figura 3.26 – Grandezas e esforços no método de Prudon.

As formulações que solucionam os esforços são apresentadas a seguir:

$$M_0 = qr^2[1 - (1 + K')\cos\alpha] \quad (3.93)$$

$$M_{t_0} = qr^2[\alpha - (1 + K')\text{sen}\alpha]\cos\theta \quad (3.94)$$

sendo:

$M_0$  = momento fletor na direção  $x$  no método de Prudon;

$M_{t_0}$  = momento torçor no método de Prudon;

$\rho$  = raio médio da estrutura;

$q$  = carregamento total uniformemente distribuído;

$x$  = ângulo de abertura que define o ponto da estrutura a ser analisado;

$\alpha$  = Semi-ângulo de abertura de uma estrutura helicoidal no método de Prudon;

$\theta$  = inclinação da rampa;

$K'$  = coeficiente que leva em consideração a inclinação da rampa e sua relação com o desenvolvimento da estrutura.

O valor de  $1 + K'$  é dado por:

$$(1 + K') = \frac{\left[ \left( \frac{\sin \theta}{\theta} \right) \cdot (2 + \tan^2 \alpha) - \cos \theta \right]}{1 + \frac{\tan^2 \alpha}{2 \left( 1 + \frac{\sin 2\theta}{\theta} \right)}} \quad (3.95)$$

Para os esforços em um ponto qualquer, basta substituir  $\alpha$  pelo ângulo correspondente.

### 3.7.5 Modelos de elementos finitos

Como mostrado a seguir, dois tipos de análise foram feitas utilizando elementos finitos. A primeira utiliza elementos finitos de barra. A estrutura é dividida em diversos trechos lineares. No segundo modelo a rampa é tratada como uma casca, na qual é possível analisar de forma mais aprofundada a distribuição dos esforços e tensões.

#### 3.7.5.1 Elemento finito de barra

Neste caso a rampa helicoidal foi representada por um traço linear contínuo. O programa escolhido foi o *SAP 2000*, versão 12. O modelo foi construído utilizando o elemento *frame* disponível no programa. Para usar o elemento *frame* a estrutura linear deve ser dividida em vários trechos menores. Todos os modelos de rampas construídos foram divididos em 63 frames, por facilidade, pois é a divisão que ocorre automaticamente na etapa de desenho do modelo tridimensional de um helicóide, realizada no programa Autocad versão 2010.

A estrutura foi programada com a mesma seção transversal usada nos outros métodos, e o mesmo carregamento distribuído. A análise deste tipo de estrutura modelada pode ser comparada diretamente com os resultados obtidos pelos outros métodos de cálculo propostos, pois todos os resultados são emitidos em relação a eixos locais de orientação, já considerando os efeitos da inclinação da rampa. A Figura 3.27 mostra como a estrutura é visualizada no programa *SAP 2000*. Na Figura 3.28 são mostrados os esforços em sua representação na tela do programa. A visualização do desenvolvimento dos esforços ao longo da estrutura tridimensional ajuda a entender melhor a evolução destes esforços. Os modelos das referidas figuras são de uma rampa com altura  $h=3,0\text{m}$ ,  $2\phi=360^\circ$ , raio  $r=1,5\text{m}$  e seção transversal  $b \times d=1,20 \times 0,15\text{m}$ .

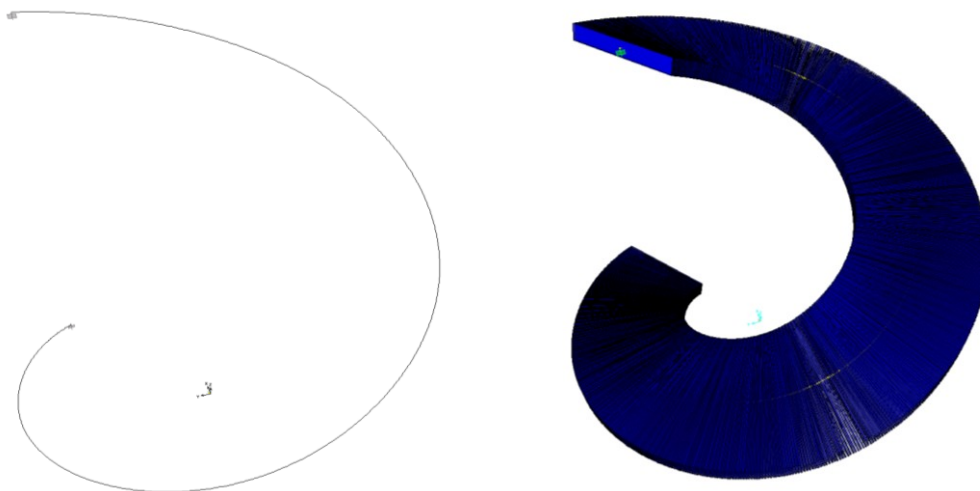
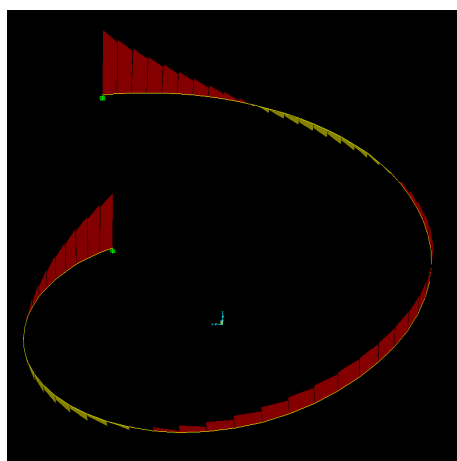
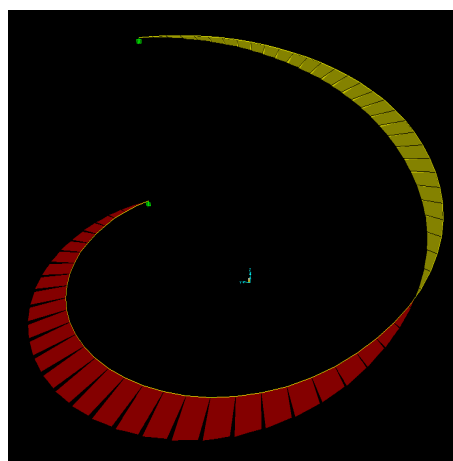


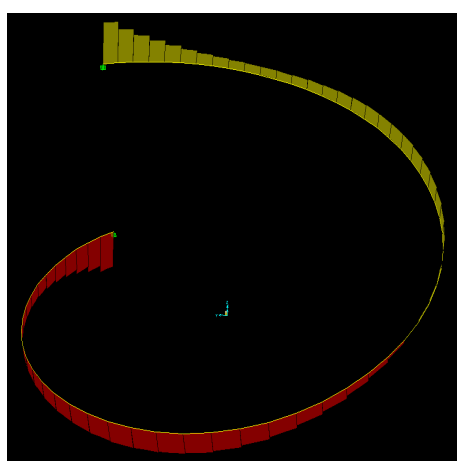
Figura 3.27 – Modelo de rampa em elemento finito linear no *SAP 2000*.



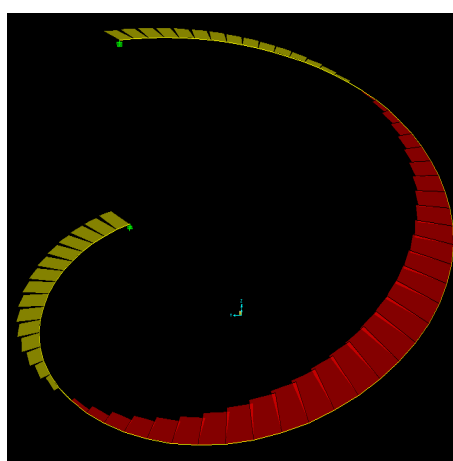
(a) Esforço  $M_x$ .



(b) Esforço  $M_y$ .



(c) Esforço  $M_t$



(d) Esforço  $Q_x$

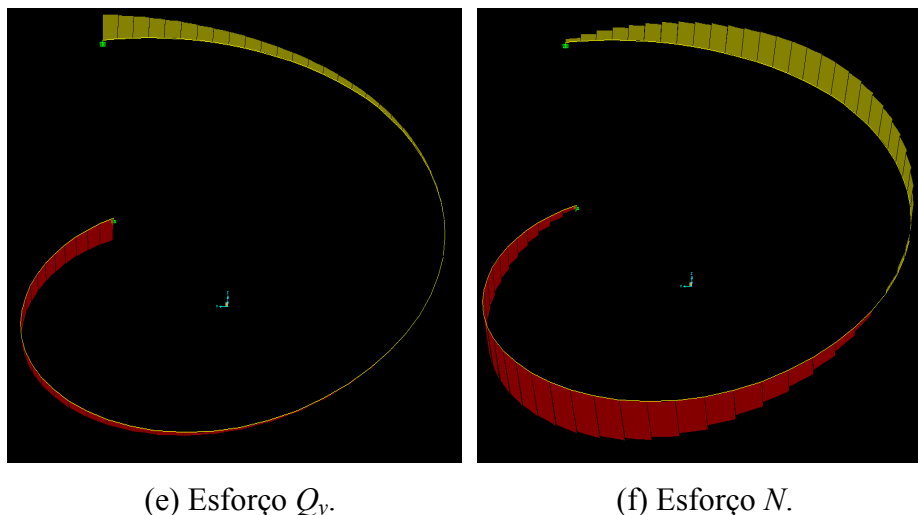


Figura 3.28 – Visualização tridimensional dos esforços em uma rampa em modelo de barras do *SAP 2000*.

#### 3.7.5.2 Elemento finito de casca

Até aqui todos os casos consideraram a estrutura do elemento helicoidal como sendo linear, ou seja, representada pelo desenho do helicóide formado pelo eixo da seção da estrutura. Assim a análise apropria-se de todas as considerações referentes a uma barra helicoidal, como se a estrutura real assim fosse.

Uma rampa helicoidal pode ser interpretada como uma casca, porém, como na maioria dos casos a relação comprimento/largura é muito elevada os modelos de barra apresentam bons resultados. A problemática pode ocorrer quando esta relação comprimento/largura é reduzida. Não há uma determinação que indique os limites da relação para que se faça uso da consideração do modelo de barra. Outro fator importante é que os modelos analíticos não possibilitam, de uma maneira geral, uma análise adequada da distribuição das tensões nas seções de uma rampa (Khan *et al.*, 2001).

O elemento de casca utilizado em estruturas como as das rampas estudadas possuem seis graus de liberdade em cada nó, sendo três translações e três rotações. No programa *SAP 2000* este tipo de elemento é identificado como *shell*. Ele foi definido com espessura constante em toda a rampa. Todos os elementos são engastados entre si. Os apoios foram

definidos como engaste perfeito nos nós. Estes nós e suas restrições são representados no programa como mostrado na Figura 3.29.

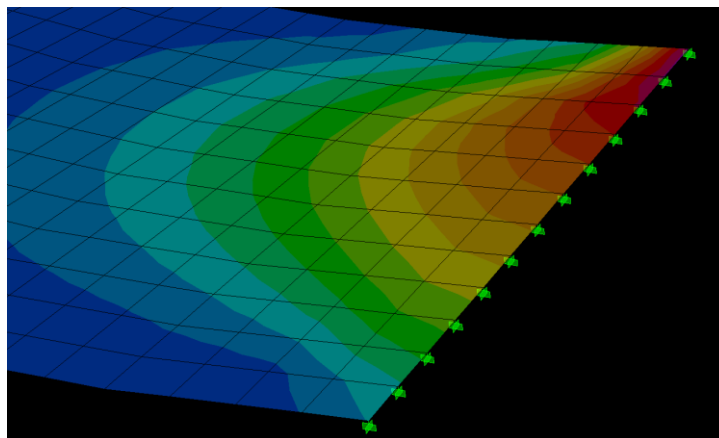


Figura 3.29 – Representação dos apoios usados no modelo de casca no *SAP 2000*.

A largura da rampa foi dividida em 12 elementos em formato quadrático. Esta divisão favorece a obtenção dos momentos  $M_y$ , pois assim é possível definir melhor as regiões de tração ou compressão no plano da superfície modelada. A divisão da estrutura é mostrada na Figura 3.30.

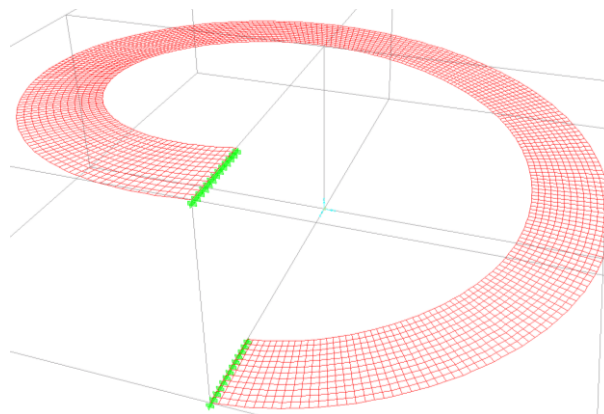


Figura 3.30 – Rampa helicoidal em modelo de casca.

Os resultados emitidos pelo *SAP 2000* referem-se aos valores dos esforços nos nós. Todos correspondem a grandezas divididas por unidade de comprimento. Para uma análise dos resultados de forma a comparar com os demais métodos optou-se por fazer a média dos valores entre os dois nós da face de cada elemento, multiplicar pelo comprimento, que é, neste caso, a largura dos elementos e depois somar todos os valores dos elementos.

A figura 3.31 exemplifica como os esforços são representados graficamente na tela do programa. A visualização desta forma ajuda na análise preliminar da estrutura. Os resultados, contudo, são melhor avaliados com ajuda da lista de resultados emitidos.

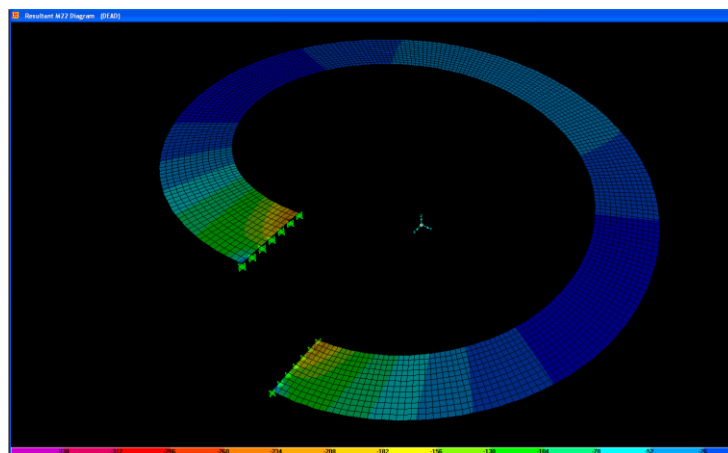


Figura 3.31 – Esforço  $M_x$  em rampa com modelo de casca.

## 4. RESULTADOS

### 4.1 INTRODUÇÃO

Os casos que serão mostrados a seguir foram propostos para que os diferentes métodos de análise apresentados sejam comparados e discutidos. São rampas com abertura total de  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $360^\circ$  e  $450^\circ$ . Dois raios diferentes foram usados: 4,0m e 1,5m. São valores bastante distintos de forma a deixar mais visível as diferenças entre os resultados das rampas. Não foi alterado o desnível de 3,0m pelo fato de que variar o raio e o ângulo de abertura já causa a alteração na inclinação da rampa.

O carregamento de  $7,84kN/m$  foi obtido calculando-se aproximadamente a carga de peso próprio junto com uma sobrecarga de utilização de  $3,0kN/m^2$ , como sugere a NBR 6120: 1980 – Cargas para o cálculo de estruturas de edificações. O peso específico adotado para o concreto foi de  $23,56kN/m^3$  (valor de referência do programa *SAP 2000*). Não foi aplicado qualquer coeficiente sobre estes valores, pois não faz parte do escopo deste trabalho tratar do dimensionamento dos elementos de concreto.

Os pontos escolhidos para terem seus valores de esforços tabelados foram os apoios superiores e as seções de simetria das rampas. Em complemento aos resultados tabelados foram elaborados os gráficos dos esforços considerados em função do ângulo de desenvolvimento das rampas. Os gráficos mostram simultaneamente os resultados dos diferentes métodos para cada esforço, conforme a possibilidade de cálculo de cada método.

Nos gráficos é possível também verificar os valores mínimos e máximos de cada esforço. Verifica-se que os máximos e mínimos não estão necessariamente nos apoios ou no meio das rampas. Isso significa que há outros pontos ao longo da estrutura que precisam ser bem conhecidos para o adequado cumprimento de uma etapa de projeto.

Os resultados apresentados nas tabelas foram extraídos diretamente dos métodos estudados. Os sinais foram retirados em todos os resultados, apresentando apenas os valores relativos, de forma a evitar diferenças em relação ao sistema de sinais adotado por cada autor. Na apresentação dos resultados gráficos, foram feitos os ajustes necessários nos

sinais para que a visualização não ficasse prejudicada, com o mesmo objetivo de comparação entre os métodos. Nos comentários sobre os esforços os hiperestáticos utilizados nas explicações seguem as orientações de nomenclatura da tabela 3.2.

Cada linha de um gráfico representa um método de cálculo, conforme a existência de formulação para um determinado esforço. Os métodos foram identificados pela última letra de cada termo do eixo das coordenadas dos gráficos. Por exemplo, no momento torçor, o método de Fuchssteiner está identificado como  $M_{tf}$ . Já os resultados obtidos no *SAP* com modelos de barras são representados pela curva  $M_{tsap}$ . A tabela 4.1 indica a nomenclatura completa, embora nem todos os métodos calculem todos os seis esforços. Os resultados e comentários referentes aos modelos de cascas são identificados como tal, separadamente. Estes casos apresentam unicamente resultados nos apoios das rampas.

Tabela 4.1 – Nomenclatura dos esforços.

Método	$Q_x$	$Q_y$	$N$	$M_t$	$M_x$	$M_y$
Fuchssteiner	$Q_{xf}$	$Q_{yf}$	$N_f$	$M_{tf}$	$M_{xf}$	$M_{yf}$
SAP (Barra)	$Q_{xsap}$	$Q_{ysap}$	$N_{sap}$	$M_{tsap}$	$M_{xsap}$	$M_{ysap}$
Scordelis	$Q_{xs}$	$Q_{ys}$	$N_s$	$M_{ts}$	$M_{xs}$	$M_{ys}$
Prudon	$Q_{xp}$	$Q_{yp}$	$N_p$	$M_{tp}$	$M_{xp}$	$M_{yp}$
Bergman	$Q_{xb}$	$Q_{yb}$	$N_b$	$M_{tb}$	$M_{xb}$	$M_{yb}$

Tabela 4.2 – Resumo dos casos estudados.

Modelo	Raio (m)	$2\phi$ (°)	$h$ (m)	Seção (cm)	Carga (kN/m)	Inclinação (rad)
Rampa 1	4,00	180°	3,00	15x120	7,84	0,2344
Rampa 2	4,00	270°	3,00	15x120	7,84	0,1578
Rampa 3	4,00	360°	3,00	15x120	7,84	0,1188
Rampa 4	4,00	450°	3,00	15x120	7,84	0,0952
Rampa 5	1,50	180°	3,00	15x120	7,84	0,5669
Rampa 6	1,50	270°	3,00	15x120	7,84	0,4014
Rampa 7	1,50	360°	3,00	15x120	7,84	0,3082
Rampa 8	1,50	450°	3,00	15x120	7,84	0,2494



## 4.2 CASO 1: RAMPA 1

Rampa 1:

Raio: 4,0m

Desnível: 3,0m

Seção: 1,20x0,15m

Carregamento distribuído: 7,84kN/m

Ângulo total desenvolvido: 180°

Inclinação: 0,2344rad

A figura 4.1 mostra a representação da rampa 1 em vista lateral e superior.

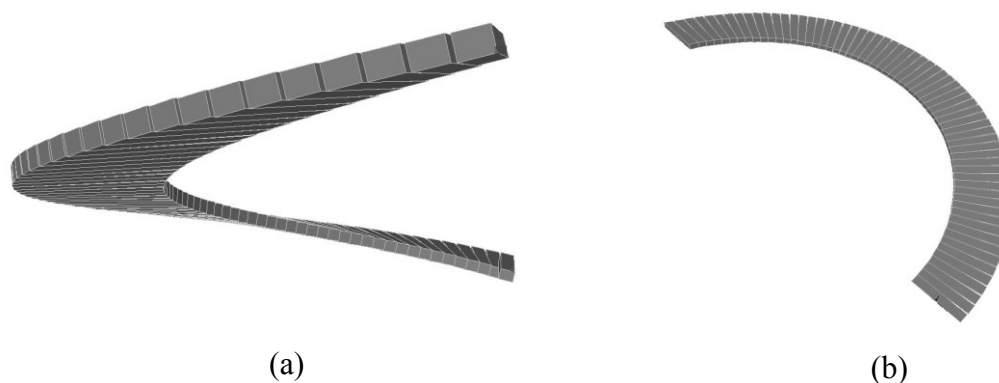


Figura 4.1 – Representação da rampa 1: vista lateral (a); vista superior (b).

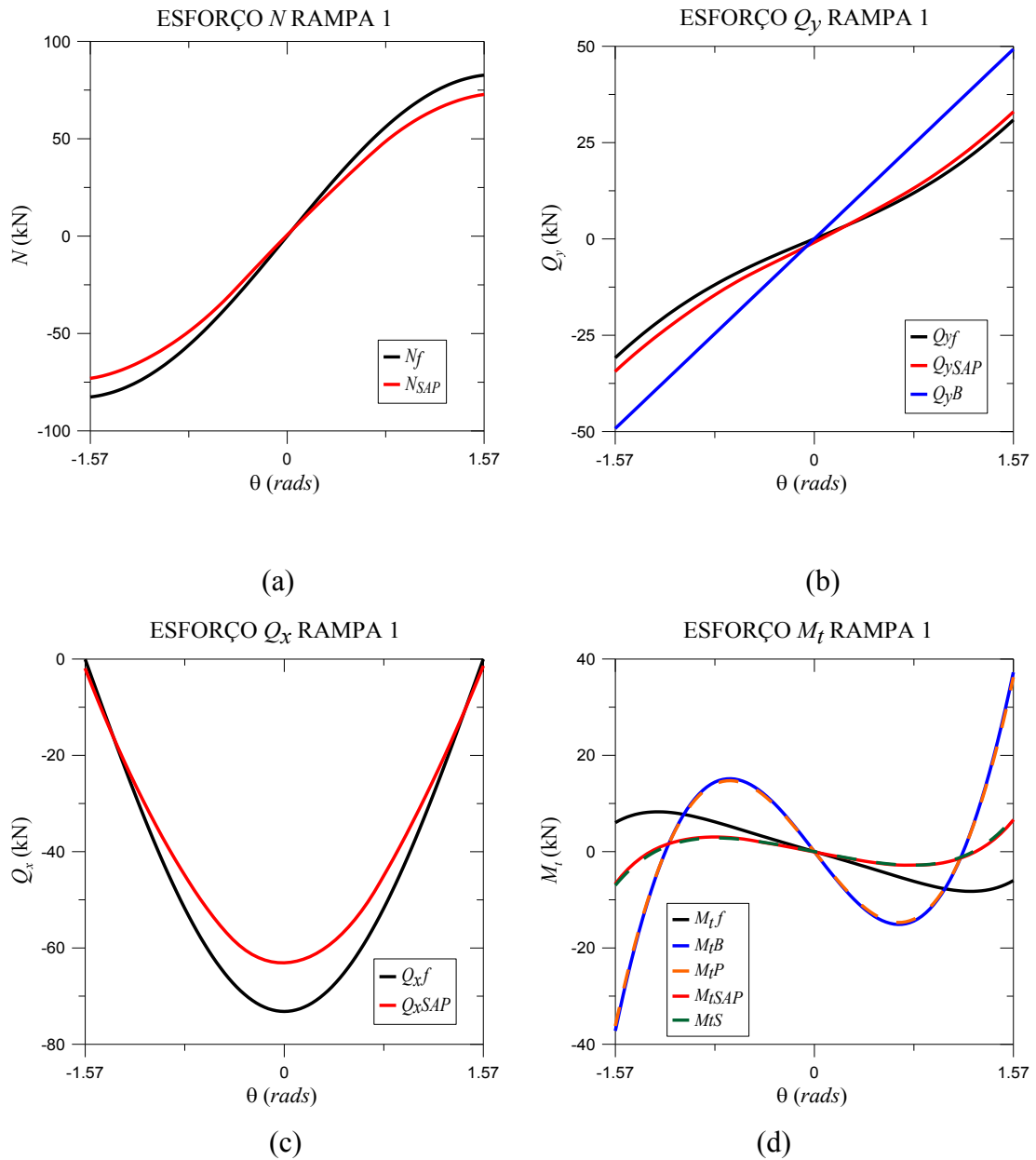
Tabela 4.3 – Esforços no apoio superior da rampa 1.

MÉTODO	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_t$ (kN.m)	$N$ (kN)	$Q_x$ (kN)	$Q_y$ (kN)
Fuchssteiner	16,56	299,59	6,01	82,64	0,02	30,92
SAP (Barra)	35,35	261,63	6,73	73,08	1,94	34,43
Scordelis	32,68	255,94	7,03	-	-	-
Prudon	125,43	-	36,30	-	-	-
Bergman	125,43	-	37,32	-	-	49,26
SAP (Casca)	49,18	301,15	0,01	70,87	0,31	71,9

Tabela 4.4 – Esforços no meio do vão da rampa 1.

MÉTODO	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_t$ (kN.m)	$N$ (kN)	$Q_x$ (kN)	$Q_y$ (kN)
Fuchssteiner	6,92	0	0	0	73,20	0
SAP (Barra)	5,68	0	0	0	63,1	0
Scordelis	5,32	0	0	-	-	-
Prudon	34,27	-	0	-	-	-
Bergman	34,27	-	0	-	-	0

A figura 4.2 abaixo mostra os gráficos dos seis esforços estudados na rampa 1.



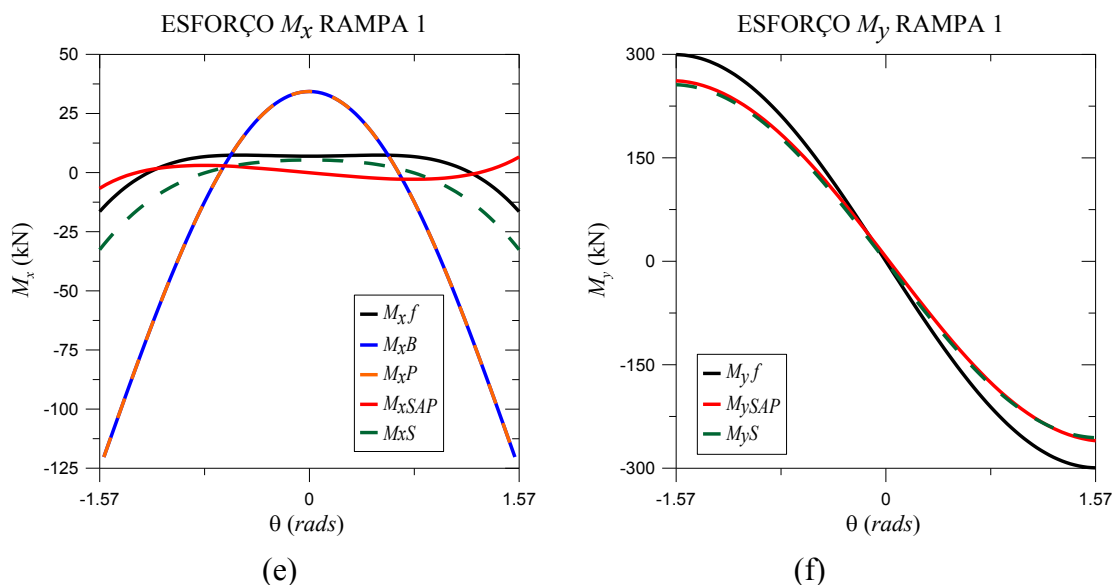


Figura 4.2 – Gráficos da rampa 1.

Os cálculos de  $Q_y$  para os métodos de Fuchssteiner e Bergman são bem diferentes. Os resultados de Bergman são sempre lineares, enquanto Fuchssteiner considera outros fatores que dão ao gráfico um formato não linear. Esta discussão será retomada na análise dos resultados.

Nesta primeira rampa percebe-se que os métodos de Fuchssteiner, *SAP* e Scordelis apresentaram resultados próximos, enquanto os métodos de Prudon e de Bergman se comportaram de forma praticamente idêntica, porém, distante dos demais.

No caso do momento torçor a discrepância de valores foi bem evidente nos apoios. Para o esforço  $M_x$  houve um grande distanciamento dos resultados nos extremos e no meio do vão. Neste caso os resultados não possuem qualquer semelhança. O item 4.10.5 avalia em detalhes as causas destas diferenças nos resultados.

As curvas dos esforços obtidas no *SAP* ficaram bem próximas daquelas que representam os resultados dos métodos de Fuchssteiner e Scordelis, com algumas pequenas variações. Esta proximidade proporciona mais confiança nos resultados desses métodos, já que os resultados dos outros dois (de Bergman e Prudon) se distanciaram dos demais.

### 4.3 CASO 2: RAMPA 2

Raio: 4,0m

Desnível: 3,0m

Seção: 1,20x0,15m

Carregamento distribuído: 7,84kN/m

Ângulo total desenvolvido: 270°

Inclinação: 0,1578rad

A figura 4.3 mostra a representação da rampa 2 em vista lateral e superior.

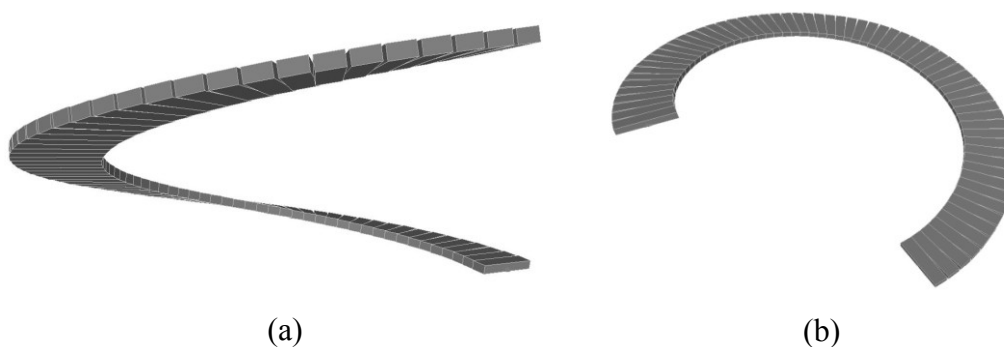


Figura 4.3 – Representação da rampa 2: vista lateral (a); vista superior (b).

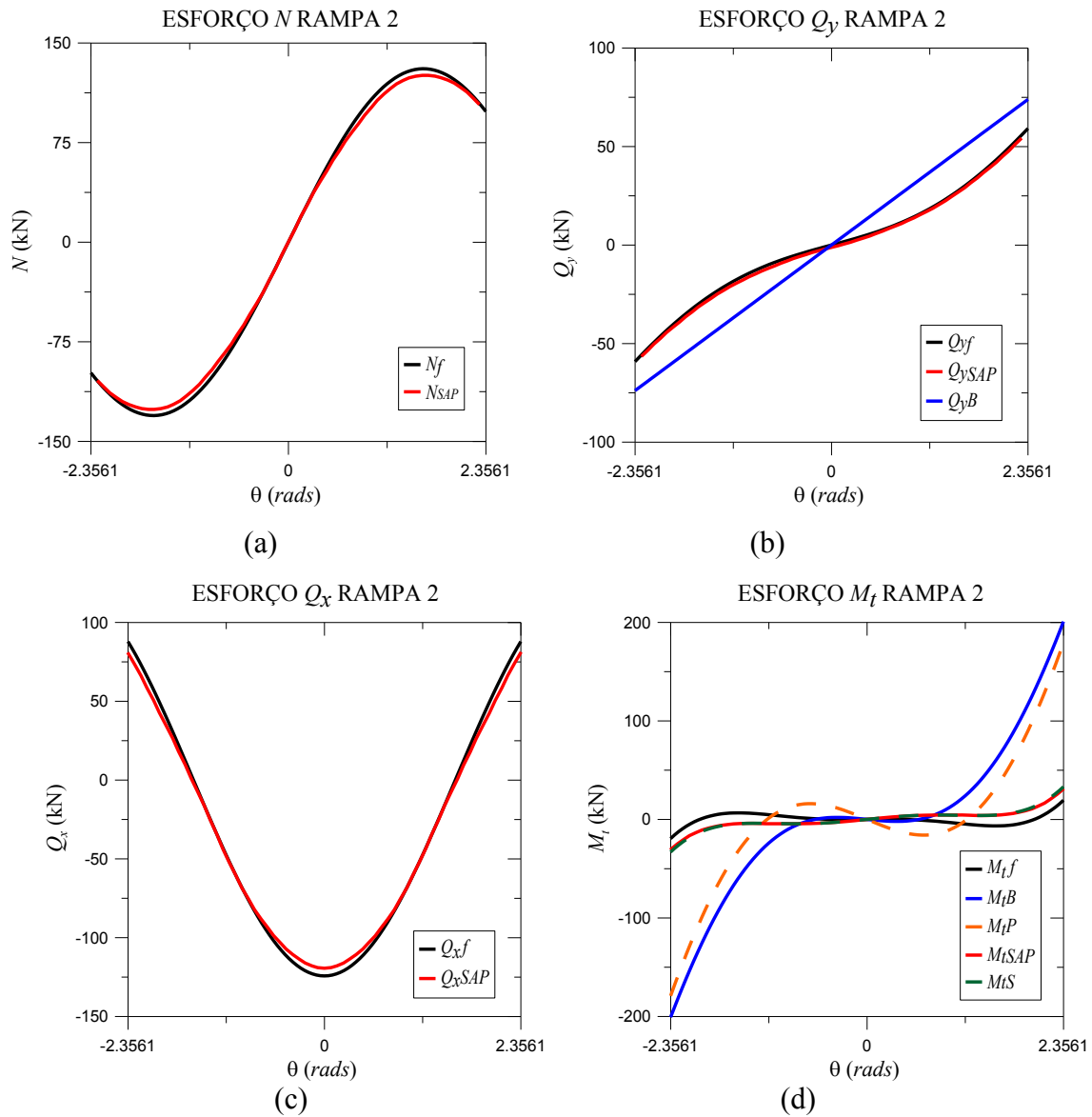
Tabela 4.5 – Esforços no apoio superior da rampa 2.

MÉTODO	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_t$ (kN.m)	$N$ (kN)	$Q_x$ (kN)	$Q_y$ (kN)
Fuchssteiner	82,68	359,11	19,44	98,42	87,88	59,16
SAP (Barra)	86,34	346,97	30,96	98,47	80,95	59,87
Scordelis	82,08	345,44	33,15	-	-	-
Prudon	241,22	-	177,52	-	-	-
Bergman	233,34	-	188,95	-	-	74,01
SAP (Casca)	130,65	387,59	12,64	133,93	131,19	116,15

Tabela 4.6 – Esforços no meio do vão da rampa 2.

MÉTODO	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_t$ (kN.m)	$N$ (kN)	$Q_x$ (kN)	$Q_y$ (kN)
Fuchssteiner	1,75	0	0	0	124,29	0
SAP (Barra)	8,71	0	0	0	119,43	0
Scordelis	8,63	0	0	-	-	-
Prudon	38,31	-	0	-	-	-
Bergman	26,58	-	0	-	-	0

A figura 4.4 abaixo mostra os gráficos dos seis esforços estudados na rampa 2.



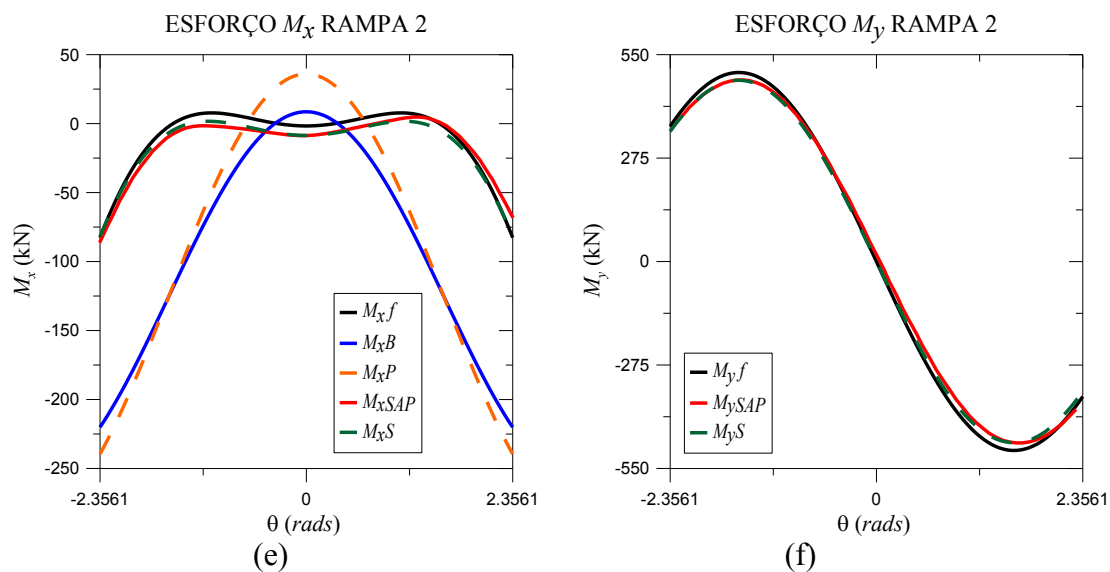


Figura 4.4 – Gráficos da rampa 2.

Como pode ser observado nos gráficos, o momento torçor tem boa proximidade dos resultados até a abertura de  $1rad$ . Após este ponto, os métodos de Bergman e Prudon divergem dos demais à medida que se aproxima dos apoios. O mesmo acontece para  $M_x$ .

Os métodos de Fuchssteiner e Prudon se desenvolvem com resultados notadamente próximos, especialmente para  $M_y$ . Como observado anteriormente, os resultados do *SAP* ficaram muito próximos dos métodos de Fuchssteiner e Scordelis.

#### 4.4 CASO 3: RAMPA 3

Raio:  $4,0m$

Desnível:  $3,0m$

Seção:  $1,20 \times 0,15m$

Carregamento distribuído:  $7,84kN/m$

Ângulo total desenvolvido:  $360^\circ$

Inclinação:  $0,1188rad$

A figura 4.5 mostra a representação da rampa 3 em vista lateral e superior.

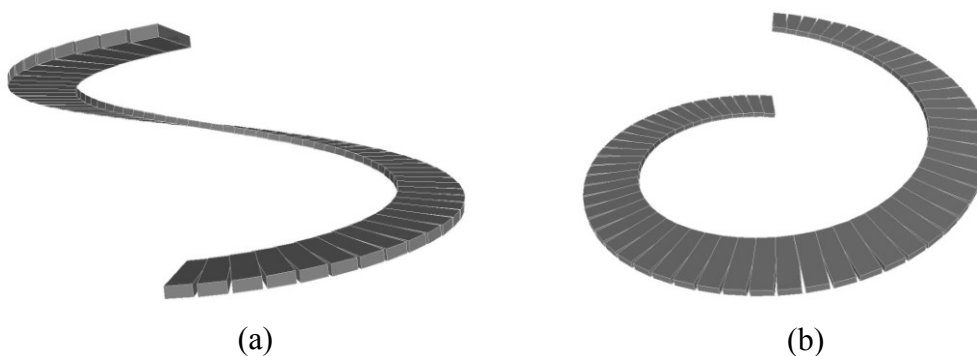


Figura 4.5 – Representação da rampa 3: vista lateral (a); vista superior (b).

Tabela 4.7 – Esforços no apoio superior da rampa 3.

MÉTODO	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_t$ (kN.m)	$N$ (kN)	$Q_x$ (kN)	$Q_y$ (kN)
Fuchssteiner	195,92	13,19	109,87	11,69	188,95	97,82
SAP (Barra)	197,53	10,52	92,18	21,28	186,07	93,83
Scordelis	198,43	12,48	103,94	-	-	-
Prudon	250,00	-	391,28	-	-	-
Bergman	224,28	-	394,08	-	-	98,52
SAP (Casca)	196,12	16,9	91,21	18,88	186,78	98,58

Tabela 4.8 – Esforços no meio do vão da rampa 3.

MÉTODO	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_t$ (kN.m)	$N$ (kN)	$Q_x$ (kN)	$Q_y$ (kN)
Fuchssteiner	56,81	0	0	0	188,95	0
SAP (Barra)	50,83	0	0	0	186,32	0
Scordelis	52,43	0	0	-	-	-
Prudon	0,88	-	0	-	-	-
Bergman	26,6	-	0	-	-	0

A figura 4.6 abaixo mostra os gráficos dos seis esforços estudados na rampa 3.

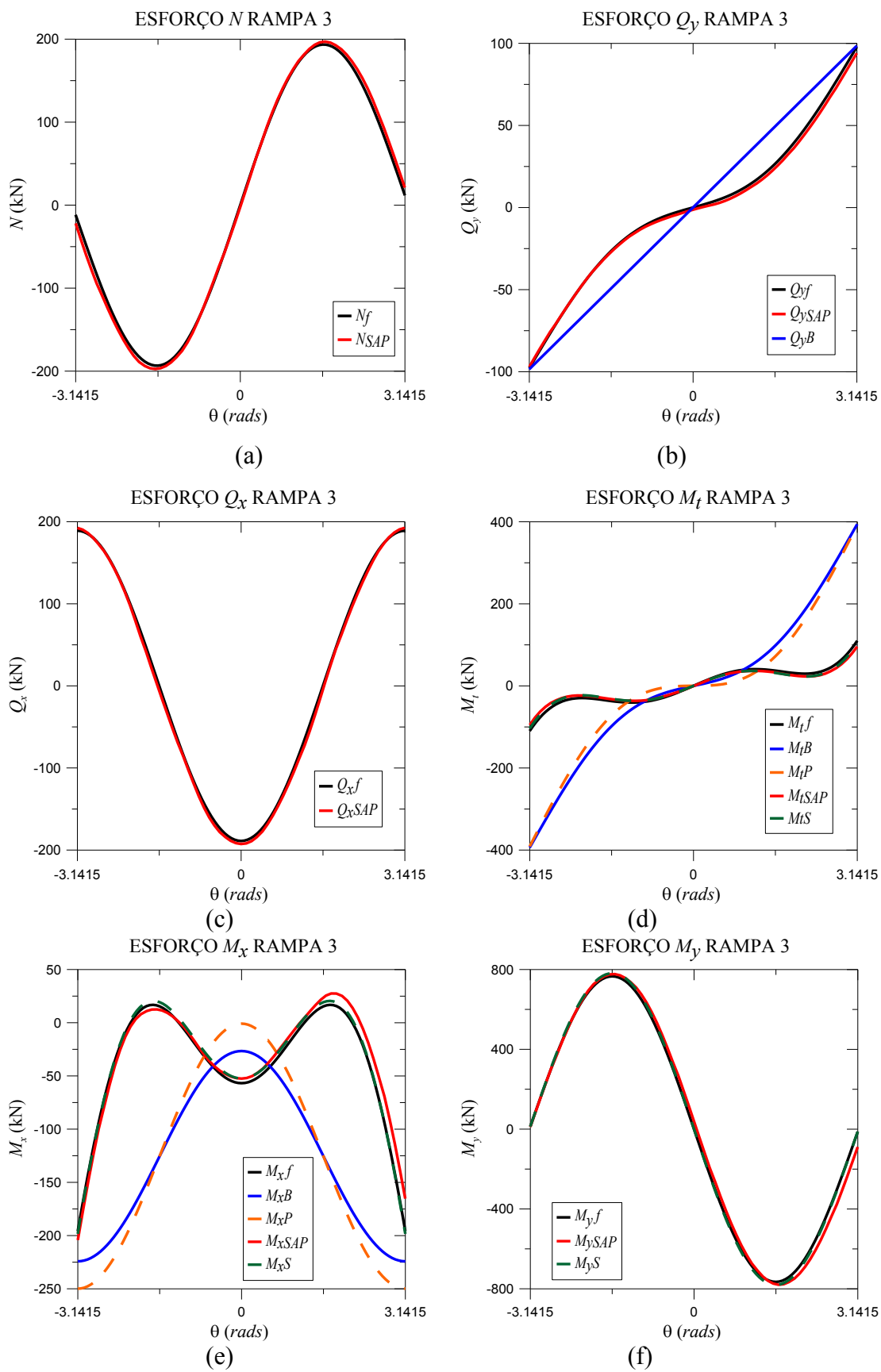


Figura 4.6 – Gráficos da rampa 3.



O esforço  $Q_y$ , medido pelos diferentes métodos, apresenta as mesmas características observadas nos casos anteriores. Novamente é observada uma proximidade muito grande entre os métodos de Fuchssteiner e Scordelis.

Para o momento de torção o comportamento é semelhante ao visto nos casos anteriores, com distanciamento nas extremidades para os métodos de Bergman e Prudon. Para os valores de  $M_y$ , o próprio comportamento dos gráficos é diferente nestes dois métodos em relação aos de Fuchssteiner e Scordelis. Significa que as considerações teóricas para estes esforços estão muito distantes.

#### 4.5 CASO 4: RAMPA 4

Raio:  $4,0m$

Desnível:  $3,0m$

Seção:  $1,20 \times 0,15m$

Carregamento distribuído:  $7,84kN/m$

Ângulo total desenvolvido:  $450^\circ$

Inclinação:  $0,0952rad$

A figura 4.7 mostra a representação da rampa 4 em vista lateral e superior.

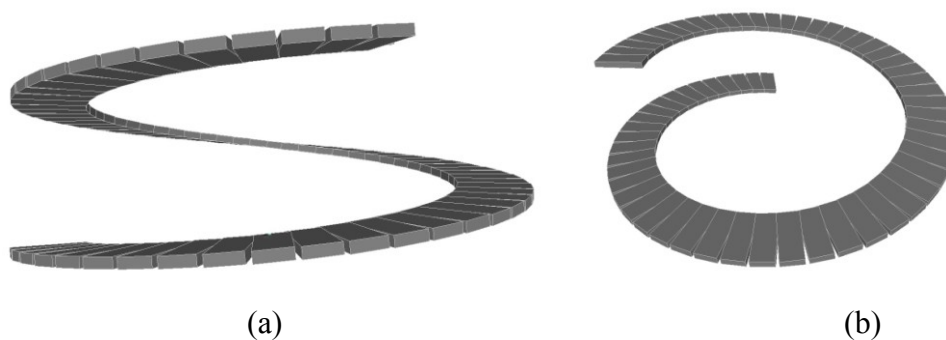


Figura 4.7 – Representação da rampa 4: vista lateral (a); vista superior (b).

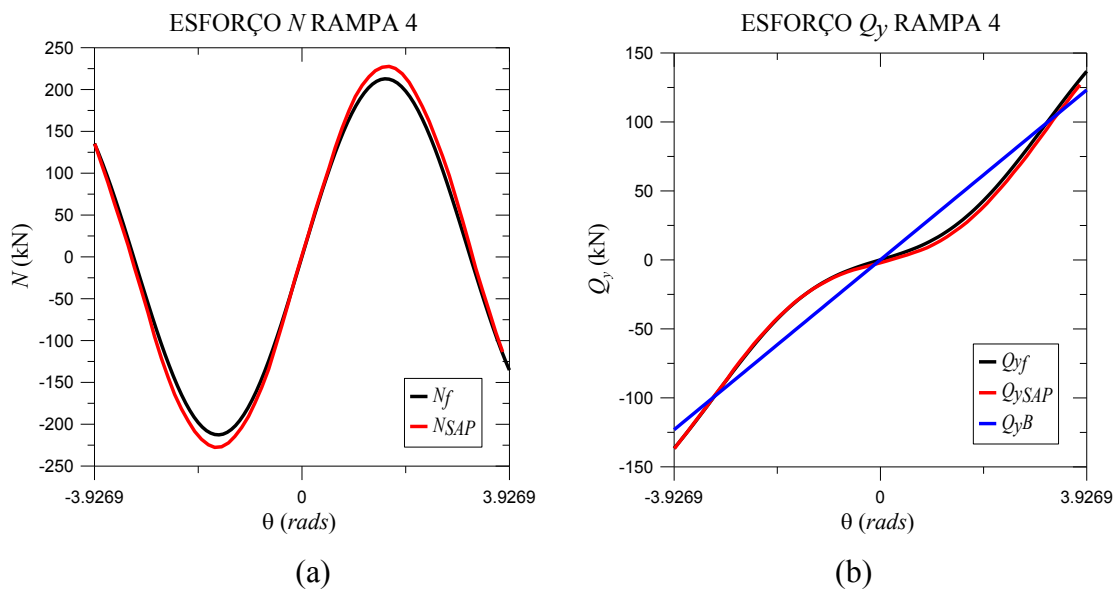
Tabela 4.9 – Esforços no apoio superior da rampa 4.

MÉTODO	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_t$ (kN.m)	$N$ (kN)	$Q_x$ (kN)	$Q_y$ (kN)
<b>Fuchssteiner</b>	337,27	563,8	315,09	135,42	147,83	136,64
<b>SAP (Barra)</b>	375,27	609,68	286,82	135,09	168,66	136,86
<b>Scordelis</b>	360,60	610,59	309,27	-	-	-
<b>Prudon</b>	155,91	-	520,68	-	-	-
<b>Bergman</b>	142,46	-	509,61	-	-	123,15
<b>SAP (Casca)</b>	347,71	437,10	345,91	148,77	148,79	122,80

Tabela 4.10 – Esforços no meio do vão da rampa 4.

MÉTODO	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_t$ (kN.m)	$N$ (kN)	$Q_x$ (kN)	$Q_y$ (kN)
<b>Fuchssteiner</b>	141,65	0	0	0	209,04	0
<b>SAP (Barra)</b>	130,74	0	0	0	224,07	0
<b>Scordelis</b>	130,79	0	0	-	-	-
<b>Prudon</b>	82,35	-	0	-	-	-
<b>Bergman</b>	101,37	-	0	-	-	0

A figura 4.8 abaixo mostra os gráficos dos seis esforços estudados na rampa 4.



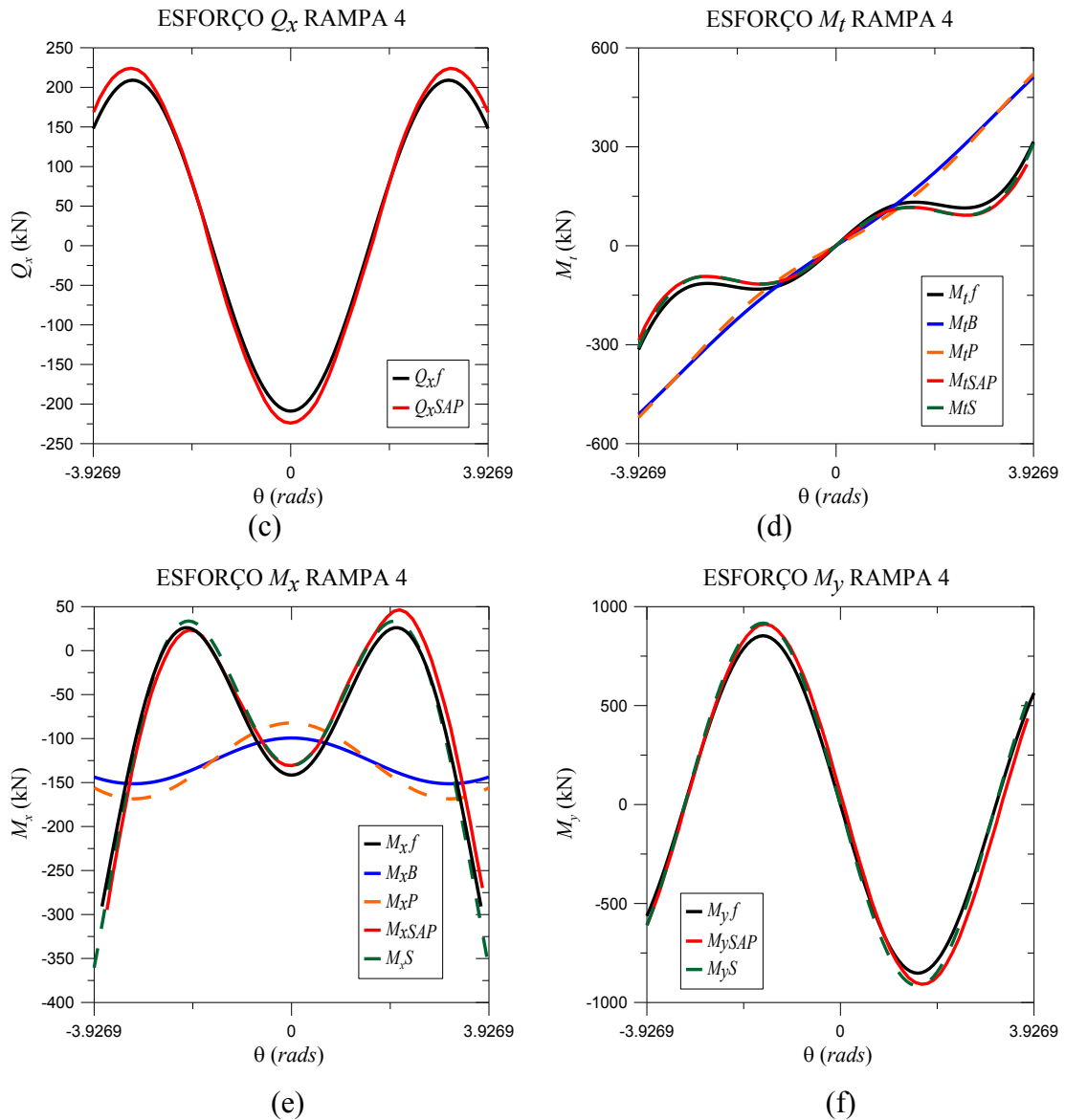


Figura 4.8 – Gráficos da rampa 4.

Os métodos de Bergman e Fuchssteiner continuam com resultados bem próximos para o esforço  $Q_y$ , embora seus gráficos tenham comportamentos diferentes, sendo um linear e o outro senoidal. O momento torçor apresenta uma variação considerável dos métodos de Bergman e Prudon em comparação com os demais. A proximidade entre os métodos permanece boa perto do meio da rampa.

Os gráficos desses dois grupos de resultados variam de forma importante para  $M_x$ , com desenvolvimentos completamente diferentes, de forma que se deve verificar com muita cautela quais métodos devem ser descartados num eventual uso para fins de projeto. Isto

porque os valores máximos e mínimos ficaram bastante discrepantes, de forma que o dimensionamento estrutural da rampa seria completamente diferente dependendo do método utilizado.

Os métodos de Fuchssteiner e Scordelis também neste exemplo se comportam de maneira bem próxima para os esforços analisados em comum.

#### 4.6 CASO 5: RAMPA 5

Raio: 1,5m

Desnível: 3,0m

Seção: 1,20x0,15m

Carregamento distribuído: 7,84kN/m

Ângulo total desenvolvido: 180°

Inclinação: 0,5669rad

A figura 4.9 mostra a representação da rampa 5 em vista lateral e superior.

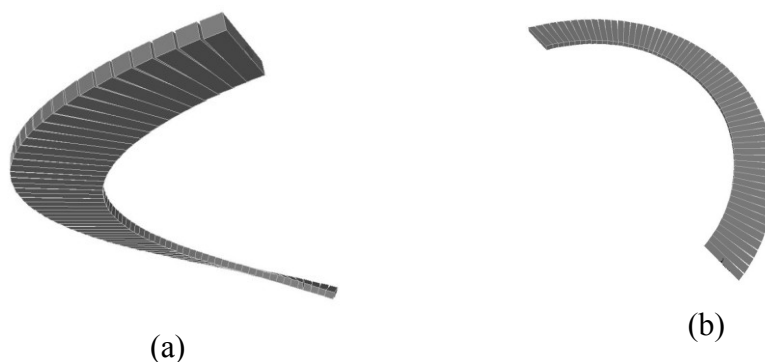


Figura 4.9 – Representação da rampa 5: vista lateral (a); vista superior (b).

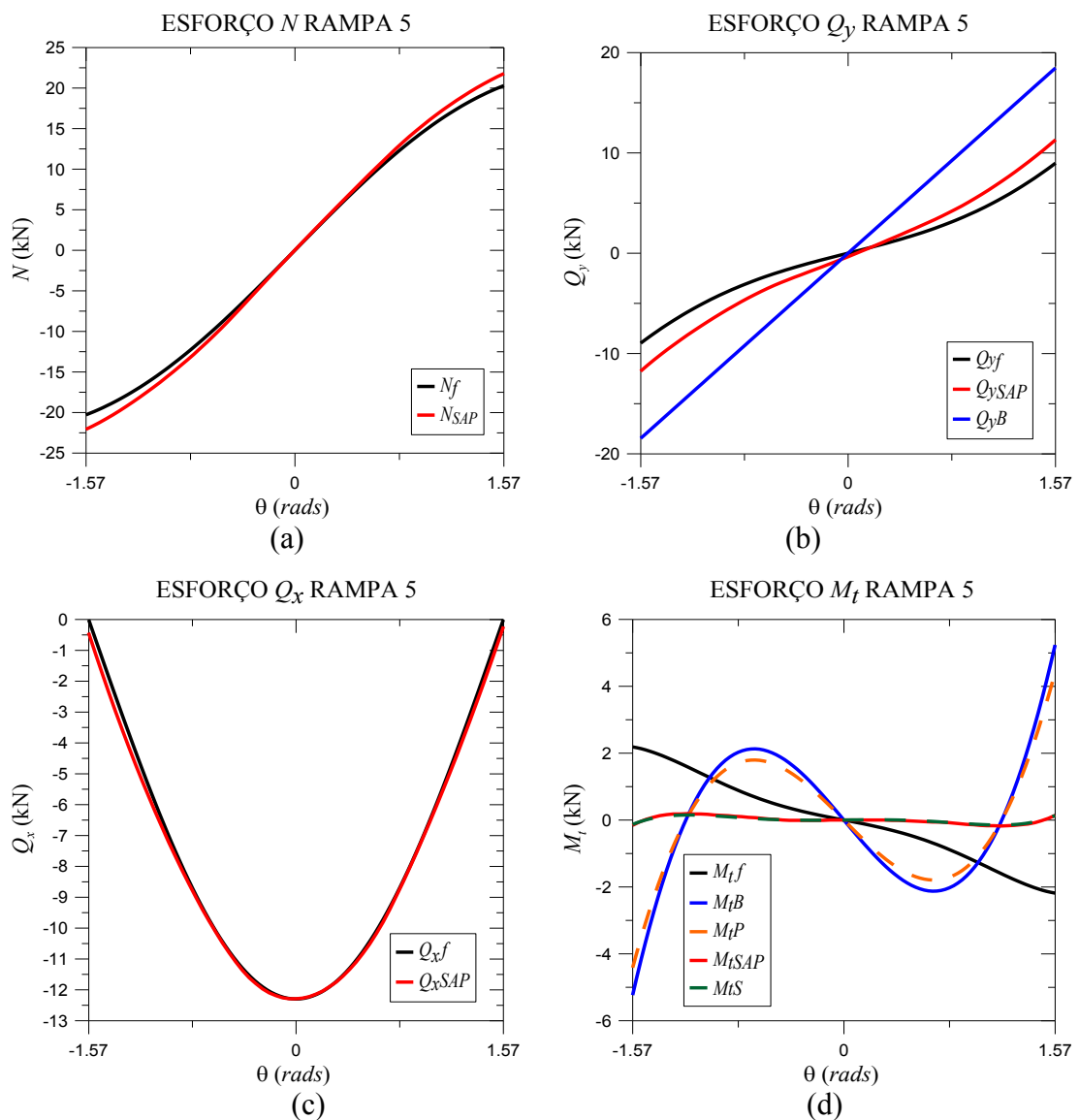
Tabela 4.11 – Esforços no apoio superior da rampa 5.

MÉTODO	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_t$ (kN.m)	$N$ (kN)	$Q_x$ (kN)	$Q_y$ (kN)
Fuchssteiner	0,13	20,48	2,19	20,29	$\approx 0,00$	8,98
SAP (Barra)	2,65	22,05	0,16	22,08	0,43	11,77
Scordelis	1,97	18,66	0,13	-	-	-
Prudon	17,64	-	4,43	-	-	-
Bergman	17,64	-	5,25	-	-	18,47
SAP (Casca)	2,51	25,25	0,04	12,75	0,02	21,92

Tabela 4.12 – Esforços no meio do vão da rampa 5.

MÉTODO	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_t$ (kN.m)	$N$ (kN)	$Q_x$ (kN)	$Q_y$ (kN)
Fuchssteiner	0,02	0	0	0	12,30	0
SAP (Barra)	0,05	0	0	0	12,29	0
Scordelis	0,06	0	0	-	-	-
Prudon	4,82	-	0	-	-	-
Bergman	3,74	-	0	-	-	0

A figura 4.10 abaixo mostra os gráficos dos seis esforços estudados na rampa 5.



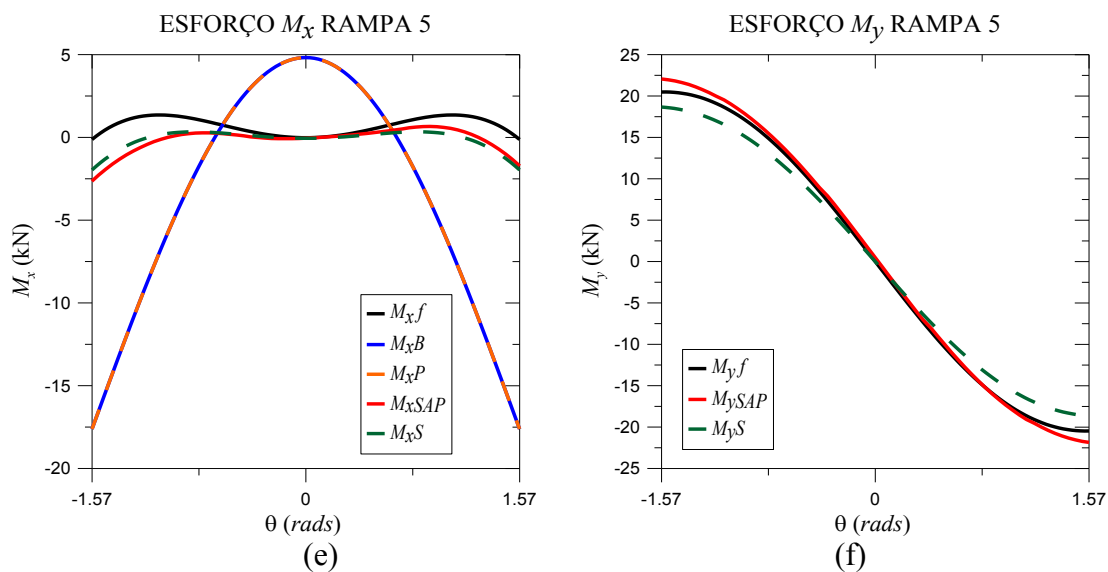


Figura 4.10 – Gráficos da rampa 5.

Com a inclinação maior já se observa um distanciamento importante entre os métodos de Fuchssteiner e Bergman para o esforço  $Q_y$ . Esta distância deve ser cuidadosamente avaliada pelo projetista, caso queira optar por um método simplificado, como o de Bergman.

Como nos casos anteriores de raio maior, o momento torçor apresenta divergência considerável entre os dois grupos de métodos nas extremidades da rampa. Esta diferença é significativa também para  $M_x$ . A proximidade entre os resultados de Fuchssteiner e Scordelis continua bastante adequada.

O método de Scordelis e os resultados do *SAP* ficaram especialmente próximos, como para  $M_t$ , onde as curvas ficaram praticamente sobrepostas. O método de Fuchssteiner também apresentou resultados bem próximos dos resultados destes dois métodos.

#### 4.7 CASO 6: RAMPA 6

Raio: 1,5m

Desnível: 3,0m

Seção: 1,20x0,15m

Carregamento distribuído: 7,84kN/m

Ângulo total desenvolvido: 270°

Inclinação: 0,4014rad

A figura 4.11 mostra a representação da rampa 6 em vista lateral e superior.

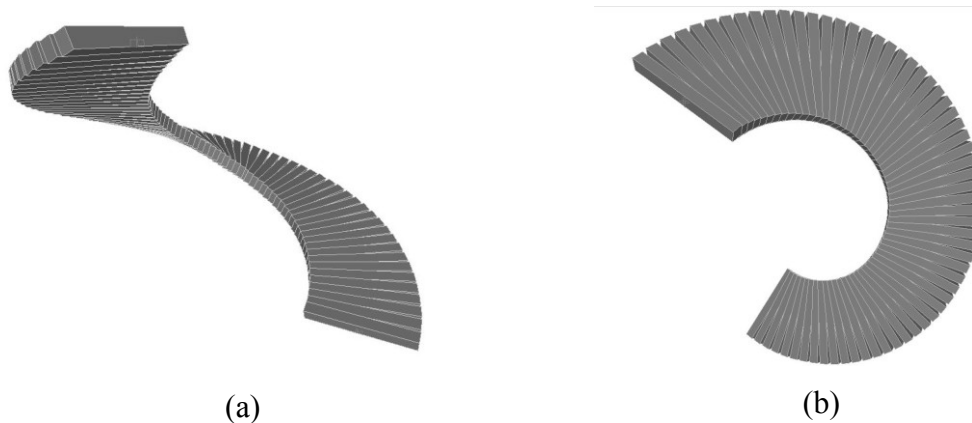


Figura 4.11 – Representação da rampa 6: vista lateral (a); vista superior (b).

Tabela 4.13 – Esforços no apoio superior da rampa 6.

MÉTODO	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_t$ (kN.m)	$N$ (kN)	$Q_x$ (kN)	$Q_y$ (kN)
Fuchssteiner	8,68	23,18	1,93	24,38	14,73	19,75
SAP (Barra)	9,35	24,49	1,11	25,86	14,13	21,64
Scordelis	8,19	22,78	1,19	-	-	-
Prudon	33,78	-	23,4	-	-	-
Bergman	32,76	-	26,44	-	-	27,71
SAP (Casca)	9,16	23,39	9,17	14,82	14,82	30,04

Tabela 4.14 – Esforços no meio do vão da rampa 6.

MÉTODO	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_t$ (kN.m)	$N$ (kN)	$Q_x$ (kN)	$Q_y$ (kN)
Fuchssteiner	1,34	0	0	0	20,83	0
SAP (Barra)	2,16	0	0	0	20,85	0
Scordelis	2,00	0	0	-	-	-
Prudon	5,19	-	0	-	-	-
Bergman	3,74	-	0	-	-	0

A figura 4.12 abaixo mostra os gráficos dos seis esforços estudados na rampa 6.

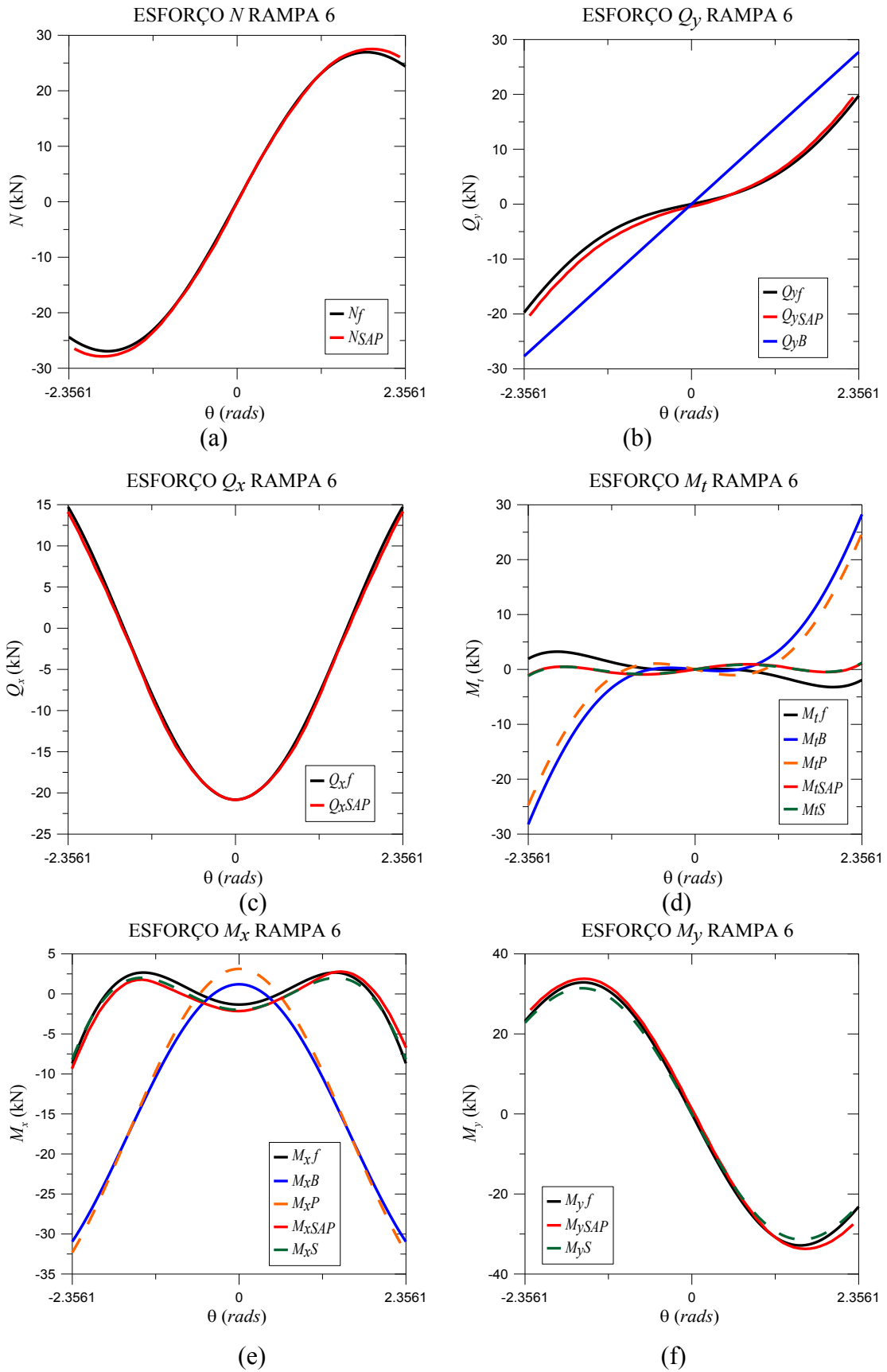


Figura 4.12 – Gráficos da rampa 6.



O momento  $M_t$  apresenta grandes variações entre os dois grupos de métodos, para os resultados nas extremidades e grande proximidade para ângulos de até  $1rad$ . O momento  $M_x$  também mostra grande variação entre os dois grupos de métodos, embora os resultados no meio do gráfico pareçam mais próximos. Mais uma vez os métodos de Fuchssteiner e Scordelis desenvolveram resultados bastante próximos.

#### 4.8 CASO 7: RAMPA 7

Raio:  $1,5m$

Desnível:  $3,0m$

Seção:  $1,20 \times 0,15m$

Carregamento distribuído:  $7,84kN/m$

Ângulo total desenvolvido:  $360^\circ$

Inclinação:  $0,3082rad$

A figura 4.13 mostra a representação da rampa 7 em vista lateral e superior.

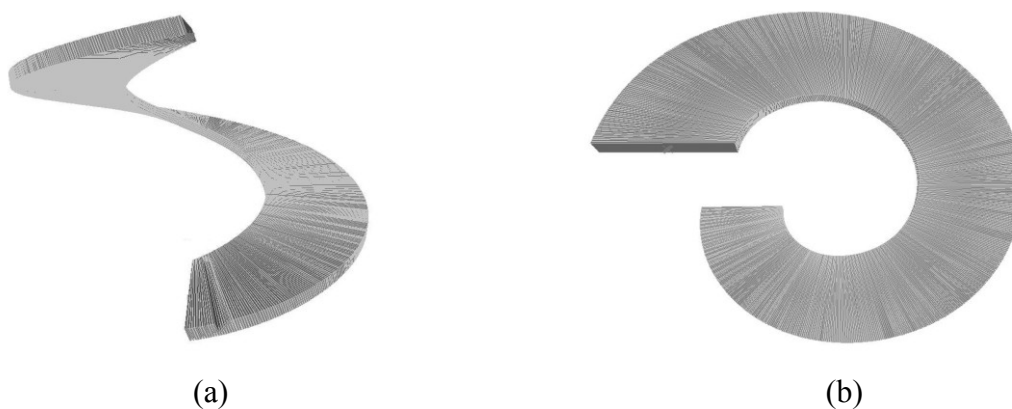


Figura 4.13 – Representação da rampa 7: vista lateral (a); vista superior (b).

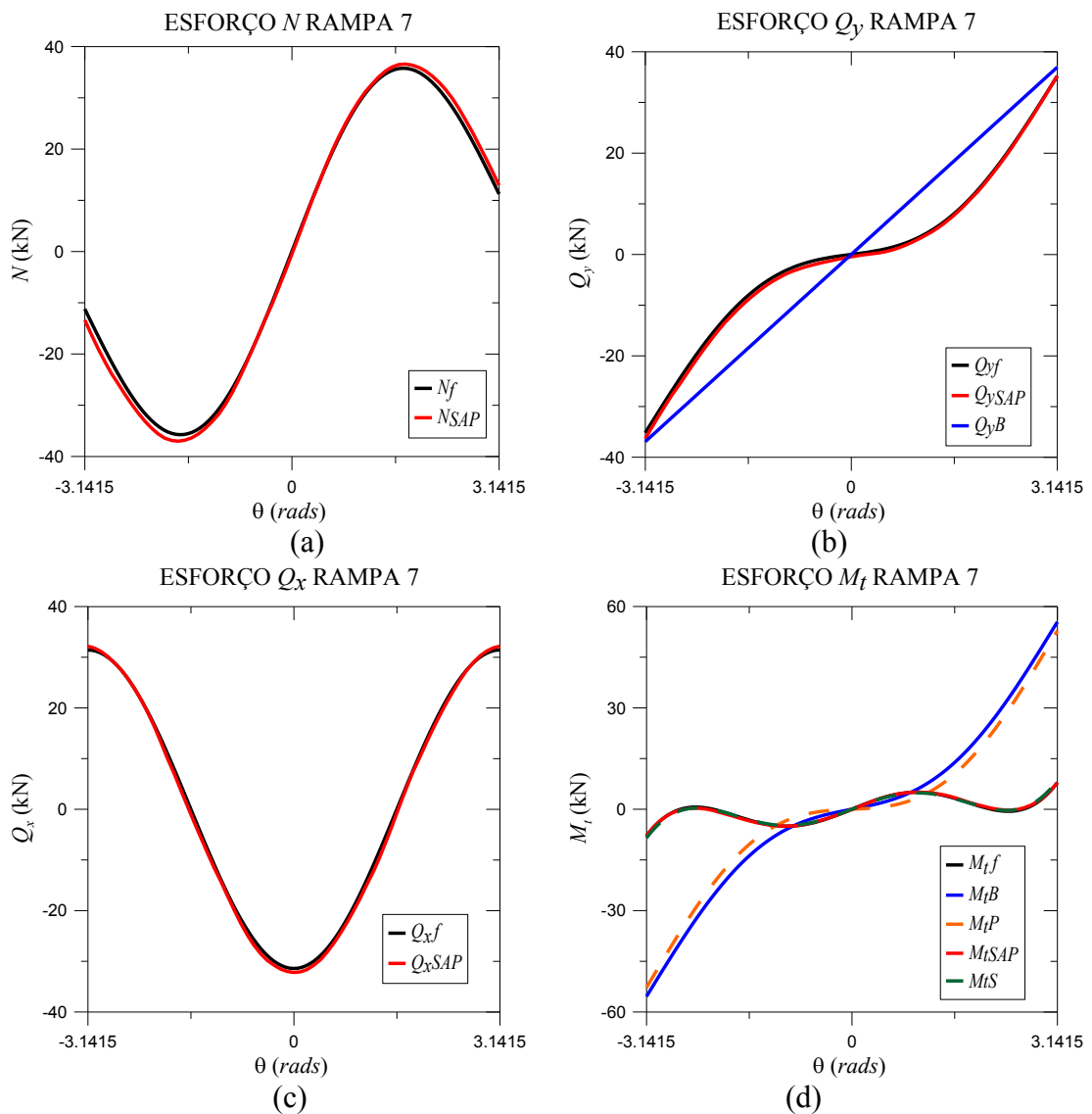
Tabela 4.15 – Esforços no apoio superior da rampa 7.

MÉTODO	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_t$ (kN.m)	$N$ (kN)	$Q_x$ (kN)	$Q_y$ (kN)
Fuchssteiner	27,91	2,51	7,88	11,21	31,43	35,20
SAP (Barra)	28,99	2,33	7,78	13,39	32,16	36,3
Scordelis	27,30	2,72	8,52	-	-	-
Prudon	34,43	-	52,8	-	-	-
Bergman	31,54	-	55,41	-	-	36,94
SAP (Casca)	28,12	6,76	$\approx 0,00$	$\approx 0,00$	30,51	38,62

Tabela 4.16 – Esforços no meio do vão da rampa 7.

MÉTODO	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_t$ (kN.m)	$N$ (kN)	$Q_x$ (kN)	$Q_y$ (kN)
Fuchssteiner	9,25	0	0	0	31,43	0
SAP (Barra)	8,33	0	0	0	32,89	0
Scordelis	7,98	0	0	-	-	-
Prudon	0,85	-	0	-	-	-
Bergman	3,74	-	0	-	-	0

A figura 4.14 abaixo mostra os gráficos dos seis esforços estudados na rampa 7.



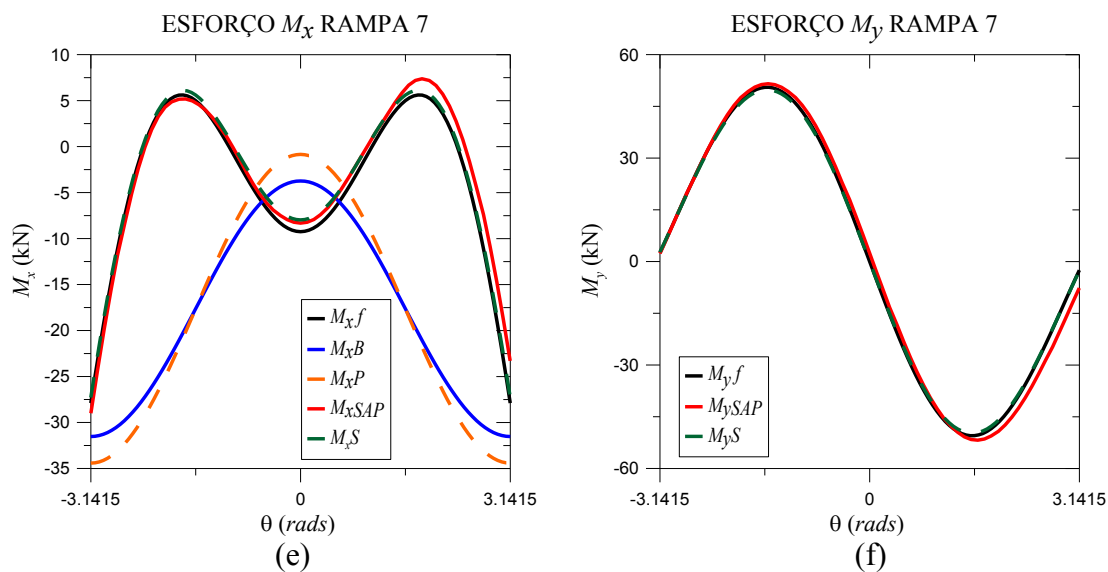


Figura 4.14 – Gráficos da rampa 7.

Os valores de  $Q_y$ , obtidos pelos métodos de Fuchssteiner e Bergman apresentam resultados mais próximos, principalmente nas extremidades, à medida que se trabalha com rampas com inclinação menor. Contudo ainda há diferenças importantes no desenvolvimento do esforço  $Q_y$  ao longo desta rampa. Esta diferença entre os métodos é explicada em detalhes no item 4.10.2.

Os resultados de  $M_y$  são praticamente idênticos pelos métodos de Fuchssteiner e Bergman, e inegavelmente próximos para os demais esforços. Para  $M_t$  e  $M_x$  as mesmas considerações da rampa 6 podem ser feitas aqui.

#### 4.9 CASO 8: RAMPA 8

Raio: 1,5m

Desnível: 3,0m

Seção: 1,20x0,15m

Carregamento distribuído: 7,84kN/m

Ângulo total desenvolvido: 450°

Inclinação: 0,2494rad

A figura 4.15 mostra a representação da rampa 8 em vista lateral e superior.

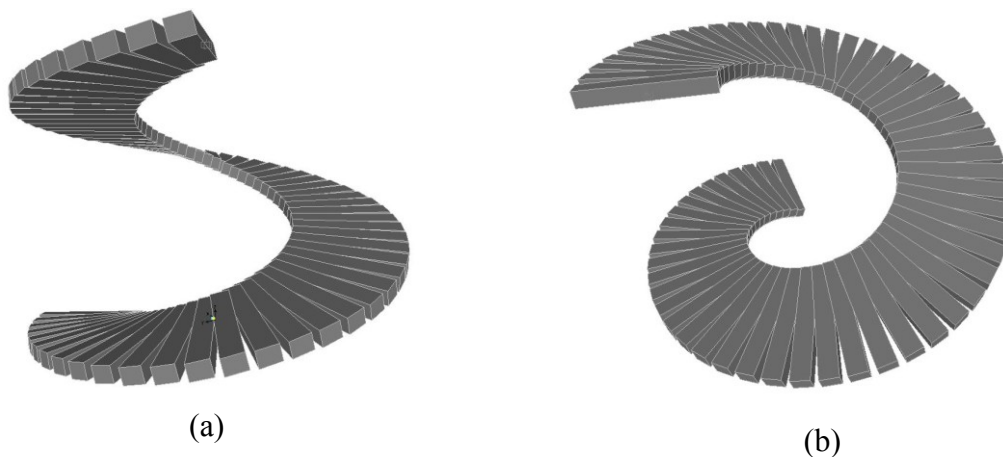


Figura 4.15 – Representação da rampa 8: vista lateral (a); vista superior (b).

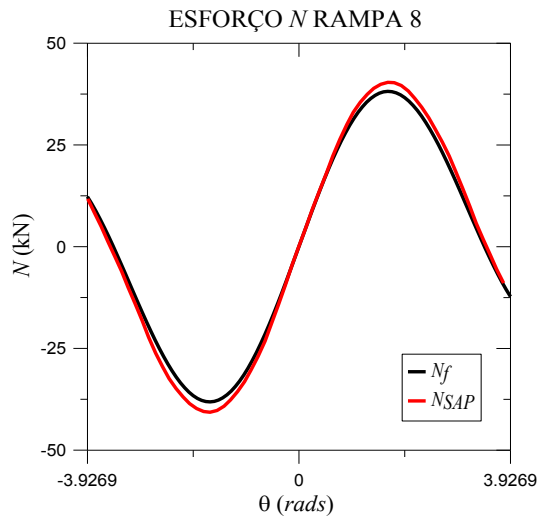
Tabela 4.17 – Esforços no apoio superior da rampa 8.

<b>MÉTODO</b>	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_t$ (kN.m)	$N$ (kN)	$Q_x$ (kN)	$Q_y$ (kN)
<b>Fuchssteiner</b>	52,98	27,99	38,49	12,27	24,42	50,78
<b>SAP (Barra)</b>	58,08	31,23	36,11	11,75	27,75	52,04
<b>Scordelis</b>	54,91	29,76	38,41	-	-	-
<b>Prudon</b>	21,66	-	71,02	-	-	-
<b>Bergman</b>	20,03	-	71,66	-	-	46,18
<b>SAP (Casca)</b>	51,04	10,96	50,81	22,05	22,06	47,39

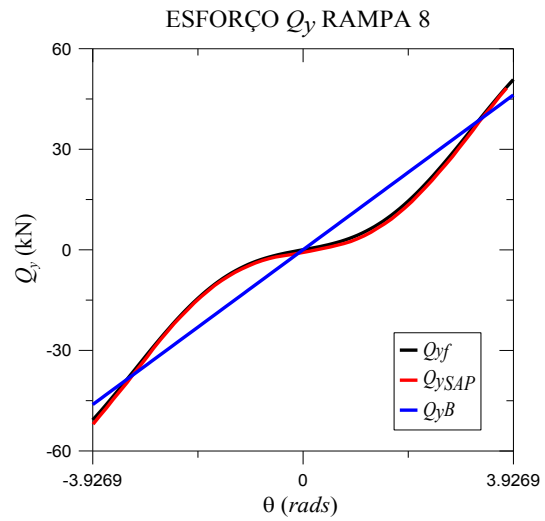
Tabela 4.18 – Esforços no meio do vão da rampa 8.

<b>MÉTODO</b>	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_t$ (kN.m)	$N$ (kN)	$Q_x$ (kN)	$Q_y$ (kN)
<b>Fuchssteiner</b>	21,75	0	0	0	34,54	0
<b>SAP (Barra)</b>	19,66	0	0	0	36,86	0
<b>Scordelis</b>	19,14	0	0	-	-	-
<b>Prudon</b>	11,95	-	0	-	-	-
<b>Bergman</b>	14,25	-	0	-	-	0

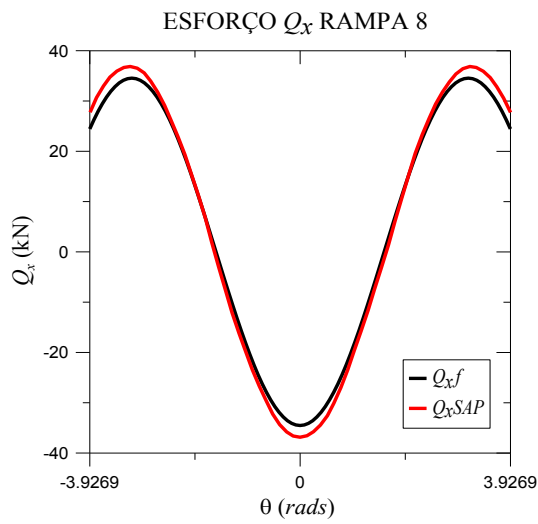
A figura 4.16 abaixo mostra os gráficos dos seis esforços estudados na rampa 8.



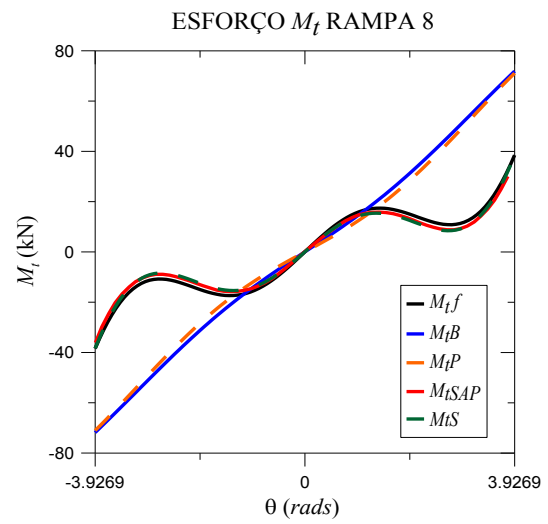
(a)



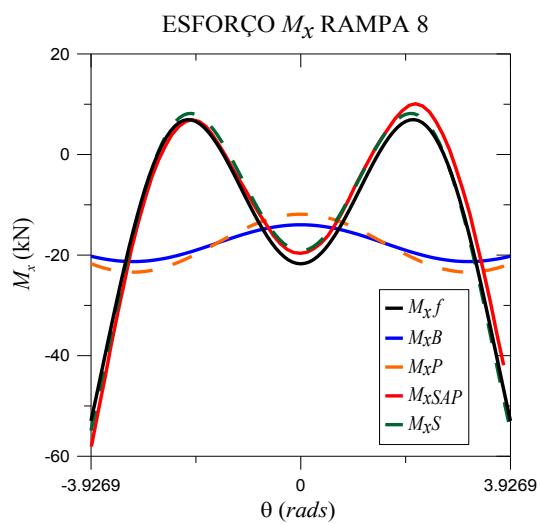
(b)



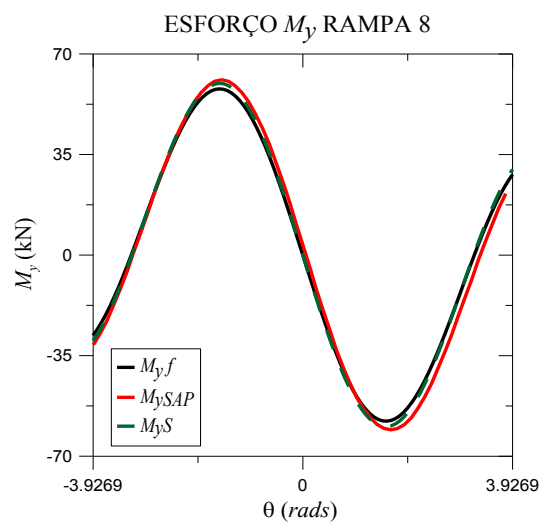
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 4.16 – Gráficos da rampa 8.

Esta última rampa confirma novamente as constatações anteriormente verificadas para  $Q_y$ . As mesmas observações para  $M_t$  e  $M_x$  e  $M_y$ . Visivelmente os resultados dos métodos de Fuchssteiner e Scordelis continuaram bem próximos.

## 4.10 COMENTÁRIOS GERAIS E INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

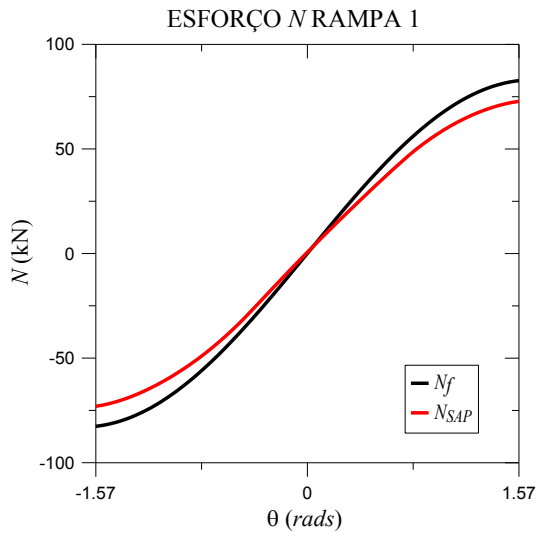
### 4.10.1 Comentários sobre o esforço $N$ :

O esforço normal é o exemplo de esforço cujos valores máximos e mínimos ocorrem em pontos distintos das extremidades e do ponto médio. A exceção ocorre apenas para as rampas de  $180^\circ$  onde os valores extremos se encontram nos apoios da rampa. Essas rampas são curtas demais para o desenvolvimento do esforço como nos demais modelos de rampa, das quais os gráficos de  $N$  são semelhantes a um período completo de uma função senoidal.

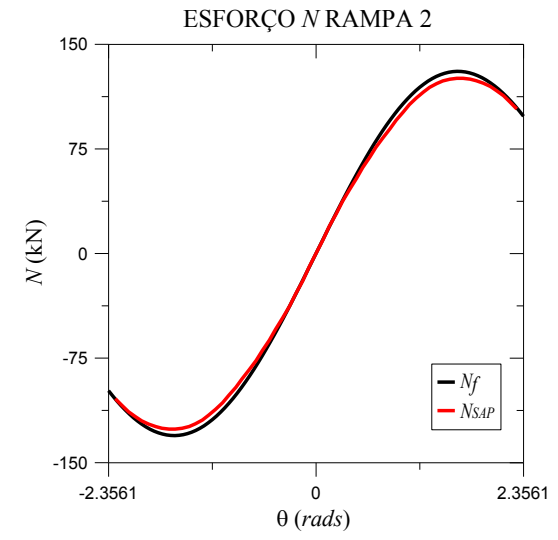
Somente analisando o gráfico do esforço é possível obter seus valores mais importantes. Sabe-se que uma função qualquer pode ser derivada e igualada a zero para se obter os pontos de inversão do gráfico. Esta solução matemática permite a obtenção dos valores de esforços importantes para uma futura etapa de projeto, que são os máximos e mínimos.

De maneira geral os resultados do método de Fuchssteiner se aproximaram muito daqueles obtidos pelo *SAP 2000* em modelo de barras. Pode ser observado que em quase todos os casos as duas curvas praticamente se sobrepõem nas proximidades do meio do gráfico, enquanto se distanciam mais em direção às extremidades. Acredita-se, contudo, que este comportamento pode ser considerado satisfatório, sem prejuízo para uma análise de qualidade, pois os gráficos comportam-se de maneira semelhante e as diferenças entre os resultados são pequenas.

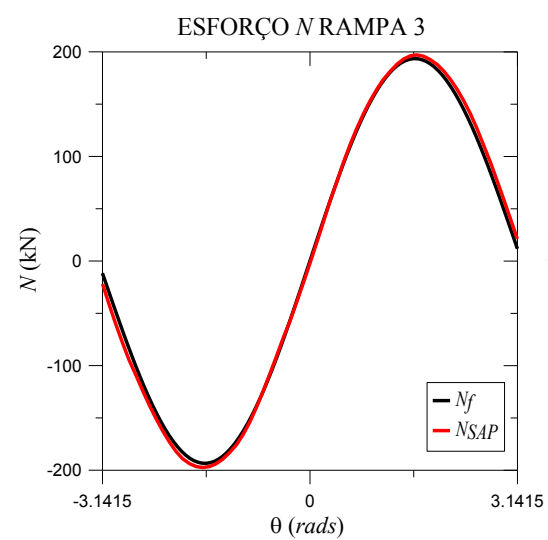
Abaixo, a figura 4.17 consolida os gráficos de  $N$  das oito rampas estudadas.



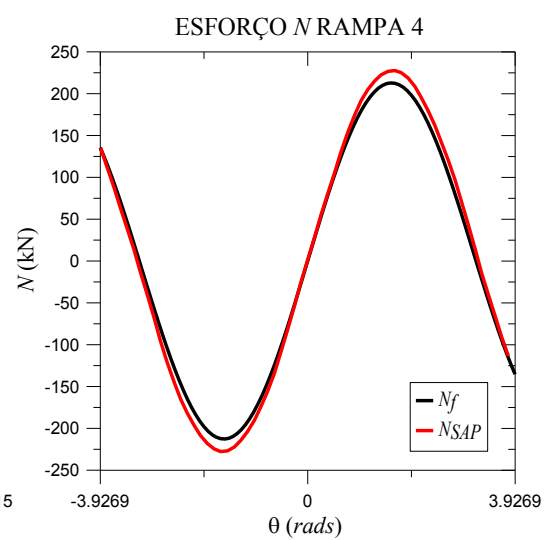
(a)



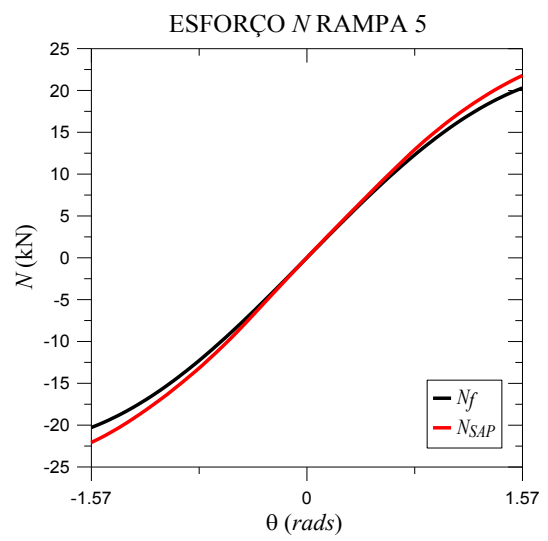
(b)



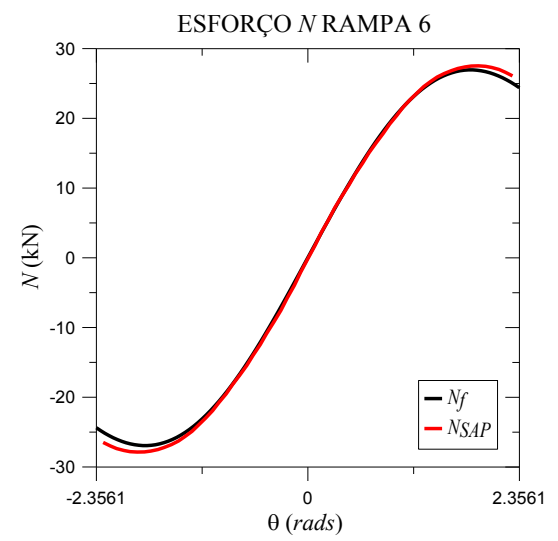
(c)



(d)



(e)



(f)

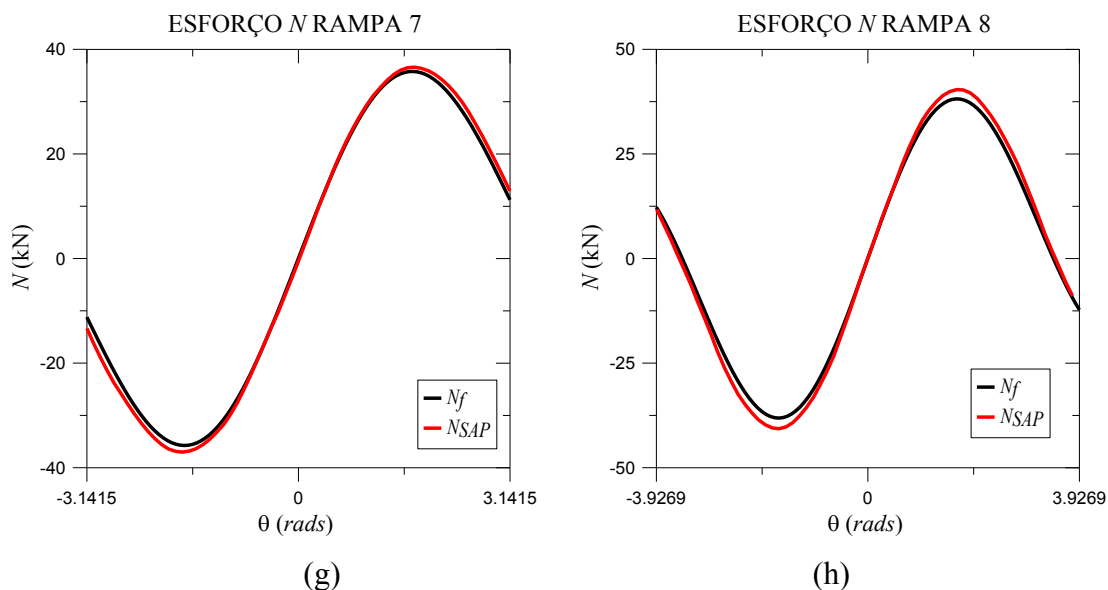


Figura 4.17 – Gráficos de  $N$  para as rampas estudadas.

Com exceção dos gráficos de  $2\phi = 180^\circ$ , todos os demais possuem duas concavidades em sentidos diferentes. Estas mudanças de inclinação dos gráficos representam os valores máximos para o esforço e ocorrem para  $\theta \approx 1,62rad$ . Tal verificação facilita os cálculos de dimensionamento em um caso real, pela possibilidade de se poder checar se está coerente o local onde ocorre o valor máximo do esforço.

Abaixo se têm os valores de  $N$  para cada rampa, no apoio superior. Observa-se que de uma maneira geral o valor de  $N$  cresce com o aumento do comprimento desenvolvido representado por  $\phi$ .

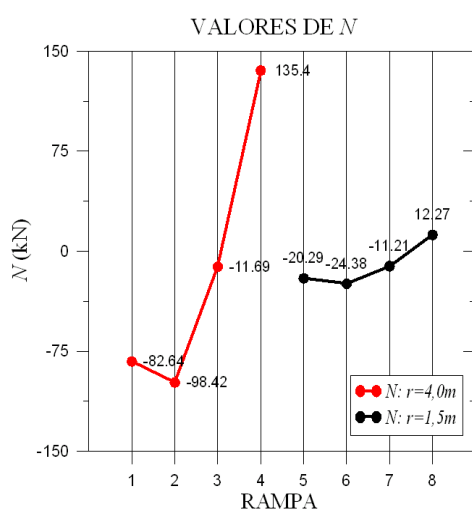


Figura 4.18 – Valores de  $N$  para todas as rampas.



#### 4.10.2 Comentários sobre o esforço $Q_y$ :

Os métodos de Fuchssteiner, Bergman e *SAP2000* são os únicos que apresentam resultados para este esforço. Como visto na análise dos gráficos, seus resultados são bem próximos. Ao longo do comprimento da rampa há diferenças importantes de valores dos resultados dos métodos analíticos, pois, como mostrado abaixo as equações dos métodos são distintas.

Do método de Fuchssteiner:

$$Q_y = qr\phi \cos \alpha + \frac{1}{r} X_5 \text{sen}\phi \text{sen}\alpha \quad (5.2)$$

Do método de Bergman:

$$V = wR\phi \quad (5.3)$$

Ou seja: ambos consideram a parcela referente ao carregamento distribuído uniformemente ao longo da rampa. Contudo, Fuchssteiner vai além, incluindo também a influência de uma componente do hiperestático  $X_5$ .

$$\frac{1}{r} X_5 \text{sen}\phi \text{sen}\alpha \quad (5.4)$$

Esta parcela depende ainda da inclinação  $\alpha$ , também desconsiderada por Bergman. Com estas diferenças é praticamente impossível obter resultados idênticos dos dois métodos. A proposta de Bergman foi tornar o problema das rampas helicoidais mais simples de ser analisado, porém, para usar seu método devem-se considerar adequadamente a limitação da formulação que modela uma rampa helicoidal pela projeção horizontal da mesma. Na prática significa que o método não oferece boa precisão para muitos dos casos de rampas.

Abaixo na figura 4.19 é mostrado como exemplo o gráfico de  $Q_y$  para a rampa 5 caso fosse excluída da equação de Fuchssteiner a parcela de influência de  $X_5$  (hiperestático na forma de força aplicada na direção radial).

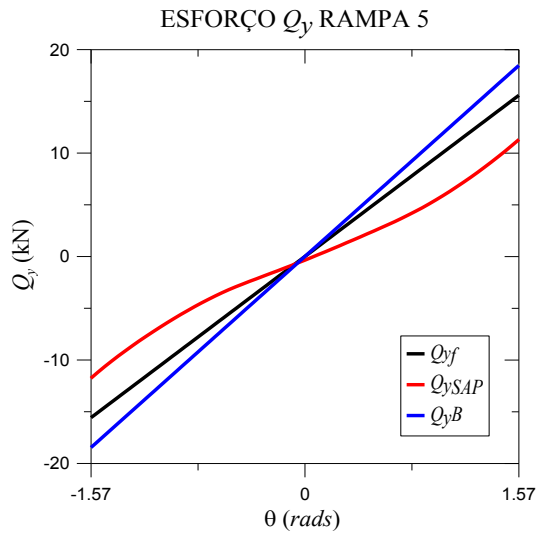
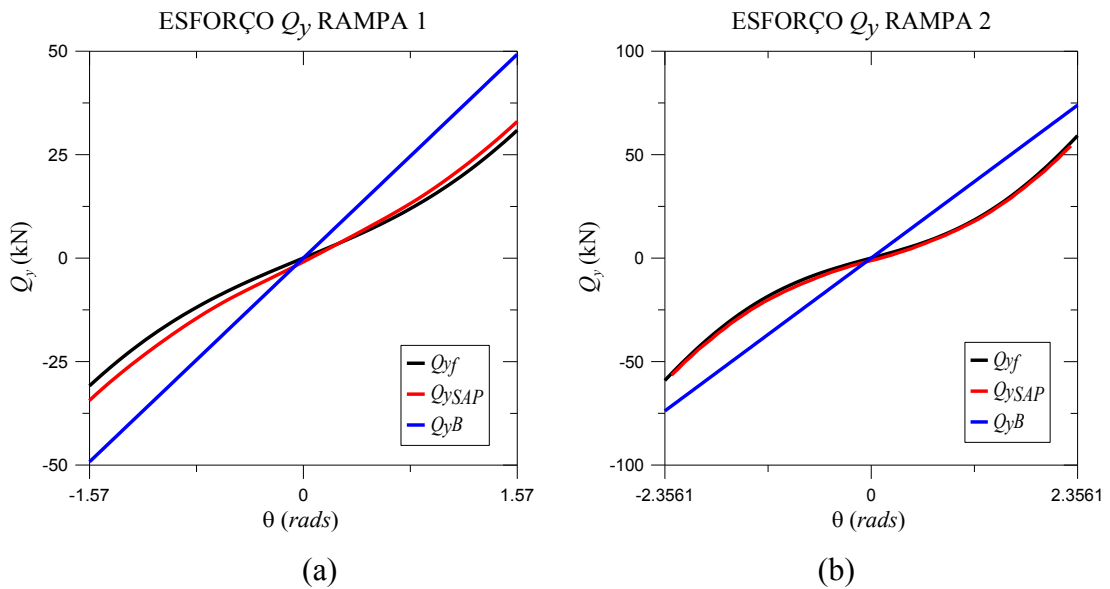
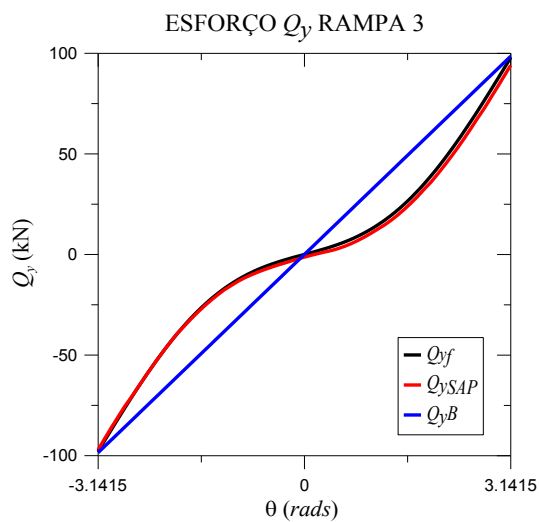


Figura 4.19 – Gráfico do esforço  $Q_y$ .

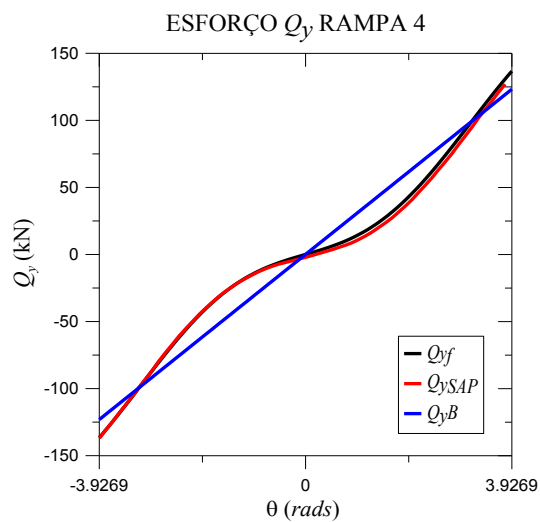
Observa-se o comportamento linear quase igual ao do método de Bergman, perdendo a característica de desenvolvimento senoidal. Significa que Bergman desenvolveu uma formulação que não leva em consideração a influência de  $X_5$ , assim como a inclinação  $\alpha$ .

Abaixo, a figura 4.20 consolida os gráficos de  $Q_y$  das oito rampas estudadas.

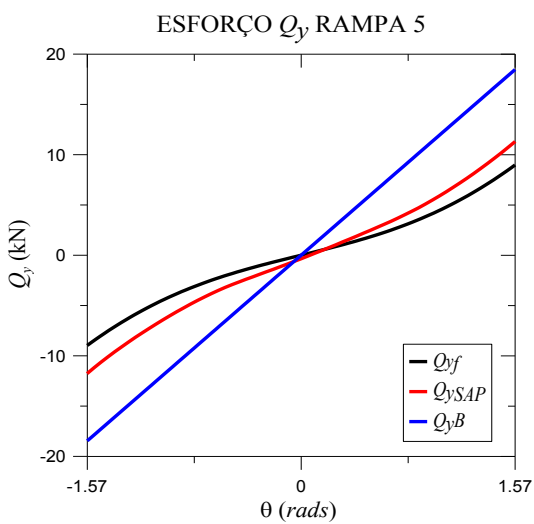




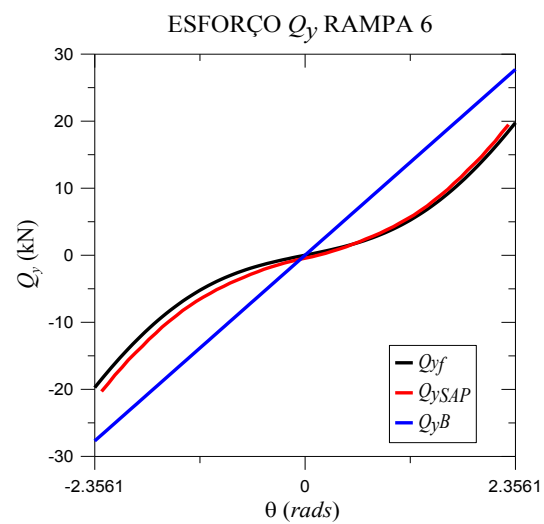
(c)



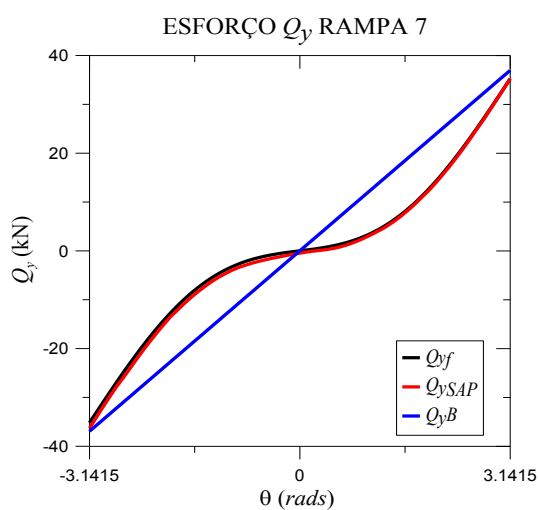
(d)



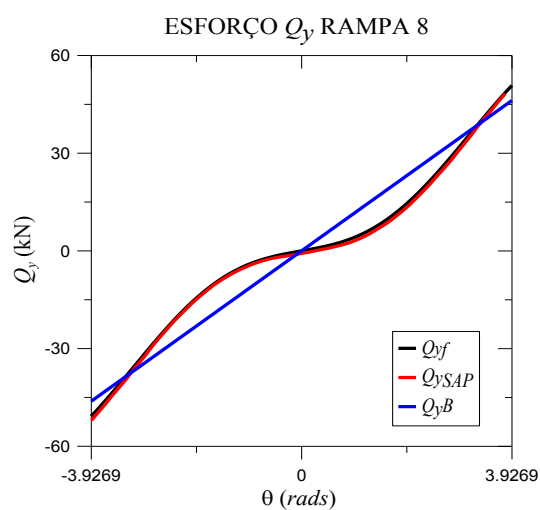
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 4.20 – Gráficos do esforço  $Q_y$ .

Os oito gráficos apresentados de  $Q_y$  são todos similares em seus formatos. Os valores obtidos nos apoios pelo método de Fuchssteiner e pelos modelos de elementos de barra do *SAP 2000* se aproximam mais dos valores obtidos pelo método de Bergman à medida que  $\phi$  aumenta. Observando os gráficos percebe-se que as curvas são mais suaves conforme  $\phi$  cresce. A tendência da curva se aproximar da linha reta reflete o fato de que à medida que o comprimento desenvolvido da rampa aumenta prevalece a influência das forças verticais expressas por  $qr\phi \cos \alpha$ , em detrimento das demais componentes.

Abaixo se têm os valores de  $Q_y$  para cada rampa, no apoio superior. Observa-se que, a partir das oito rampas estudadas, conforme aumenta o valor de  $\phi$  das rampas, menor é o valor do esforço  $Q_y$ . Cada um dos dois grupos de rampa formados possui um mesmo valor de raio entre si.

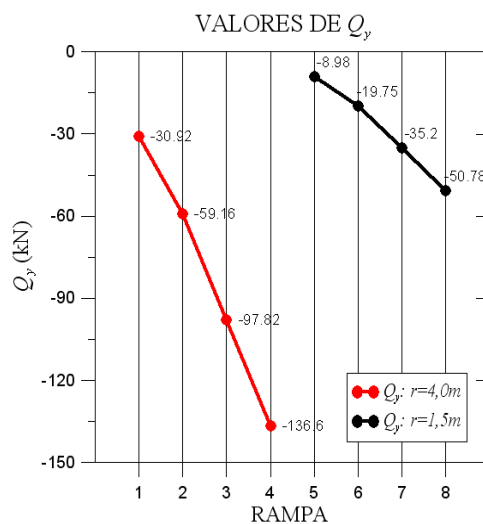


Figura 4.21 – Valores de  $Q_y$  para todas as rampas.

#### 4.10.3 Comentários sobre o esforço $Q_x$ :

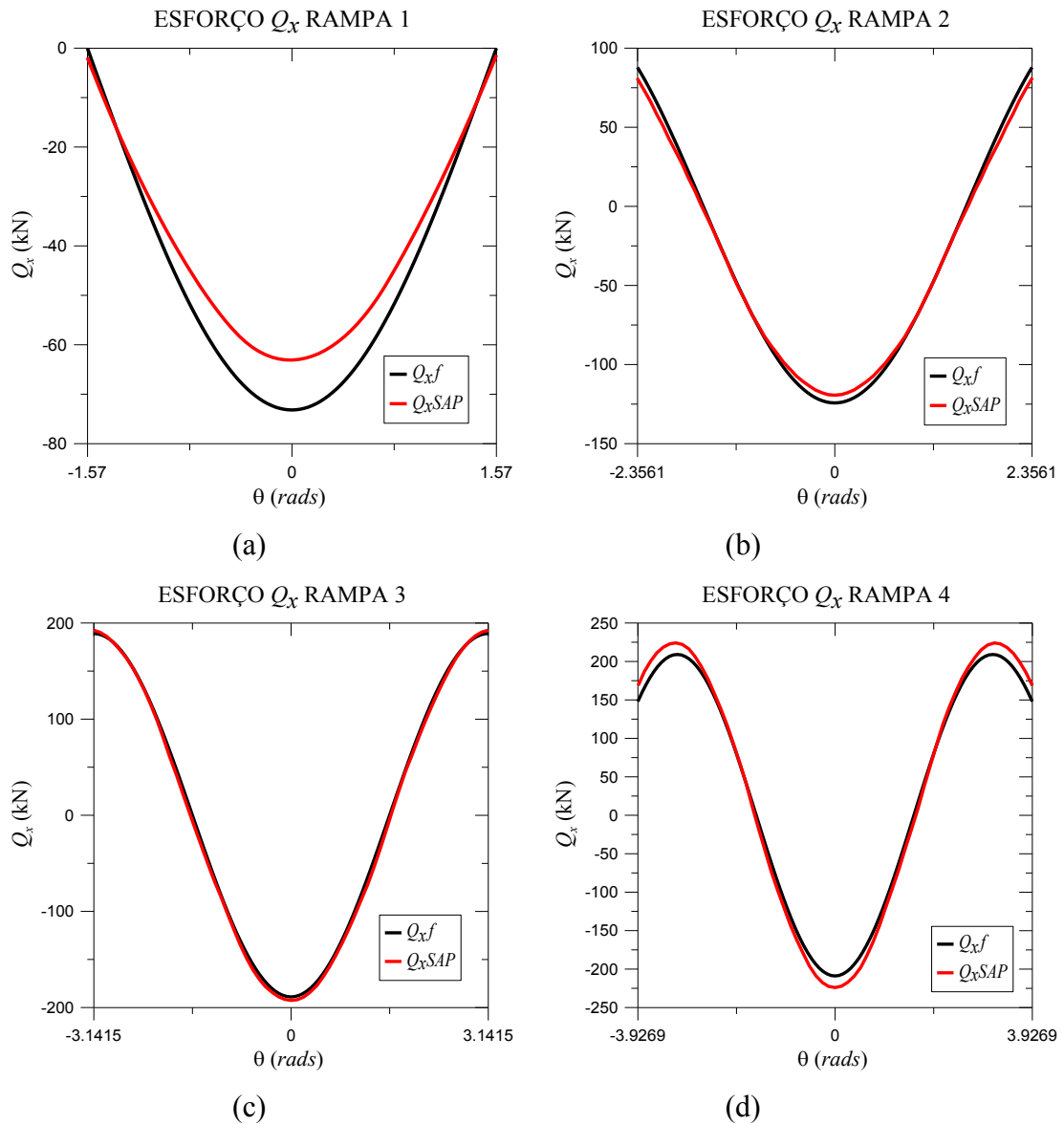
O esforço horizontal  $Q_x$  só foi apresentado por Fuchssteiner e pela simulação no *SAP*. O comportamento varia em função do cosseno do ângulo de abertura considerado, como mostrado na equação abaixo, do método de Fuchssteiner.

$$Q_x = \frac{1}{r} X_3 \cos \phi \quad (5.5)$$

Por isso os valores máximos e mínimos irão ocorrer para  $\theta = \pm k\pi$ . Em todas as rampas observa-se que na seção de simetria o valor do esforço é negativo. Assim são os resultados por influência do hiperestático  $X_3$ , que é negativo para todos os casos.

Os dois métodos apresentaram resultados bastante próximos para as diferentes rampas. As discrepâncias são mais significativas nas proximidades dos apoios e em alguns casos no meio do comprimento das rampas.

Abaixo, a figura 4.22 consolida os gráficos de  $Q_x$  das oito rampas estudadas.



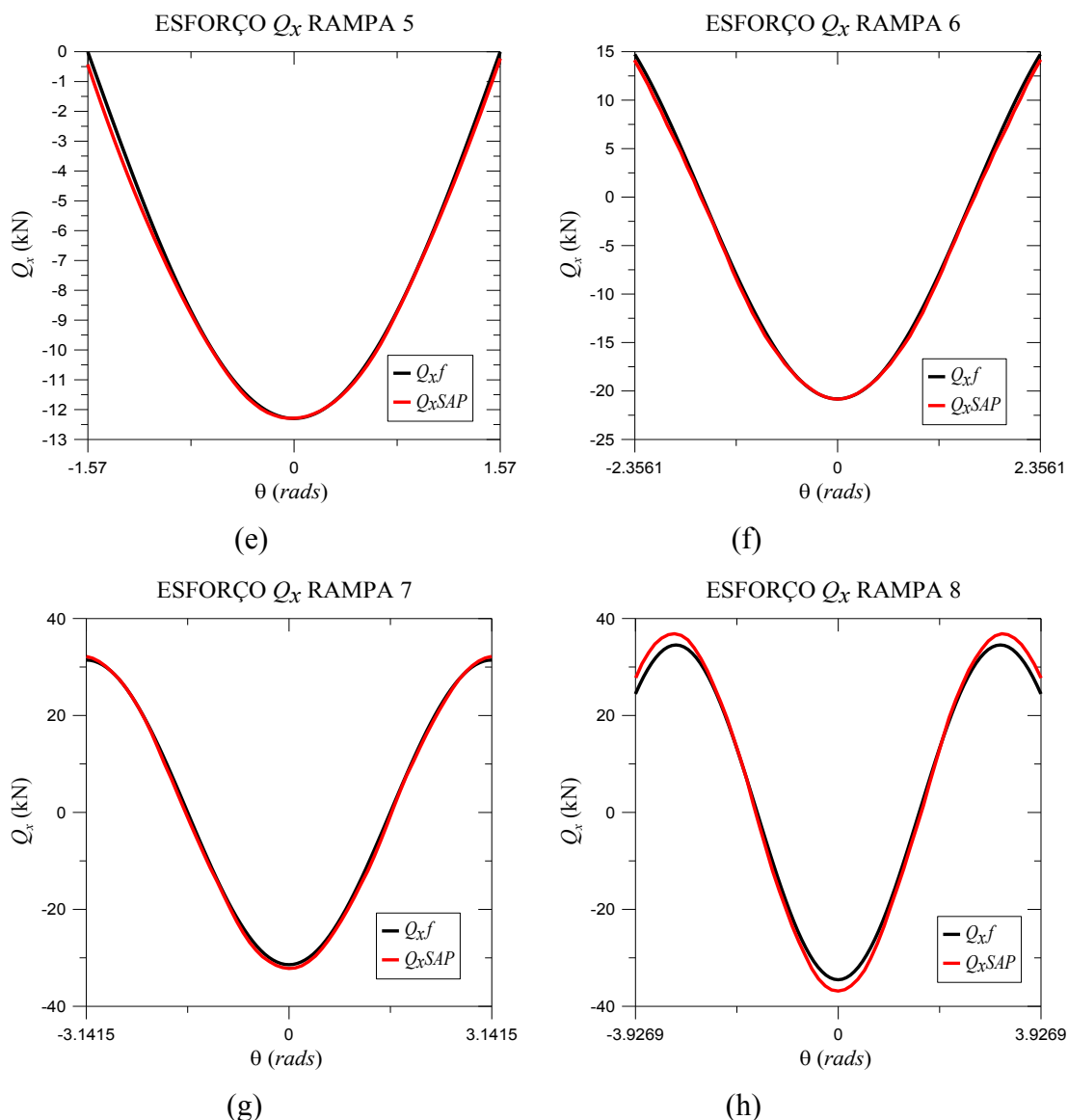


Figura 4.22 – Gráficos do esforço  $Q_x$ .

Todos os gráficos possuem uma concavidade voltada para cima na posição  $\theta = 0^\circ$ . Para as rampas de maior comprimento formam-se também duas concavidades voltadas para baixo próximo às extremidades. Estas últimas só aparecem nos casos de  $2\phi = 450^\circ$ , com poucas evidências sobre seu comportamento, mas representam uma redução dos esforços nos apoios em relação às rampas de  $2\phi = 360^\circ$ .

Abaixo se têm os valores de  $Q_x$  para cada rampa. Os gráficos do esforço nos apoios e no meio do vão são semelhantes. Para as rampas 3 e 7, que possuem  $2\phi = 360^\circ$  os valores

absolutos de  $Q_x$  nos apoios e no meio do vão são exatamente iguais (com sinais opostos), podendo esta verificação facilitar a análise de uma estrutura deste tipo.

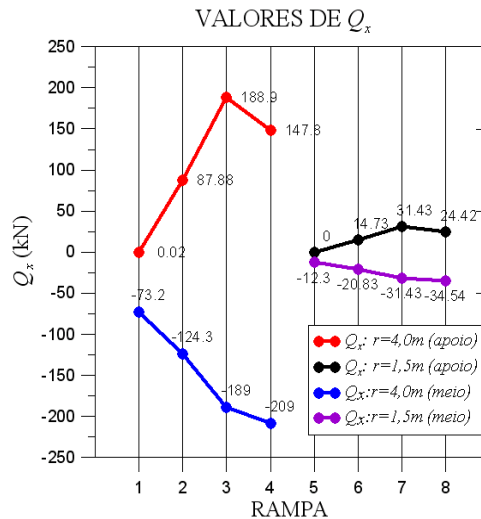


Figura 4.23 – Valores de  $Q_x$  para todas as rampas.

#### 4.10.4 Comentários sobre o momento torçor $M_t$ :

Os métodos de Fuchssteiner, Scordelis e *SAP* apresentaram resultados próximos entre si. Porém, nas rampas menores, de  $180^\circ$  e  $270^\circ$ , os resultados do método de Fuchssteiner ficaram mais distantes nas extremidades. A aderência melhorou conforme se analisou rampas de desenvolvimento maior. Enquanto isso, os resultados de Scordelis e do *SAP* sempre ficaram praticamente sobrepostos.

Os métodos de Bergman e Prudon apresentam resultados bastante distanciados daqueles apresentados pelos demais métodos, inclusive com curvas de comportamentos bem diferentes, mas próximos entre si, com resultados praticamente sobrepostos um ao outro. Seus resultados destes dois últimos métodos serão desconsiderados, de forma que em uma análise mais apurada de uma rampa não se recomenda o uso deles.

A função de variação do esforço tem comportamento senoidal, como mostrado na equação do método de Fuchssteiner:

$$M_t = qr^2\varphi\cos\alpha - X_6\text{sen}\varphi\cos\alpha - X_3\varphi\cos\varphi\text{sen}\alpha + X_3\text{sen}\varphi\text{sen}\alpha \quad (5.6)$$

O gráfico abaixo, do momento torçor da rampa 4, mostra o que acontece quando se retira os componentes dos métodos de Fuchssteiner e Scordelis referentes ao hiperestático  $X_3$ . Visivelmente os resultados se aproximam daqueles apresentados pelo método de Bergman e Prudon, evidenciando que estes métodos não consideram adequadamente a influência do hiperestático  $X_3$ .

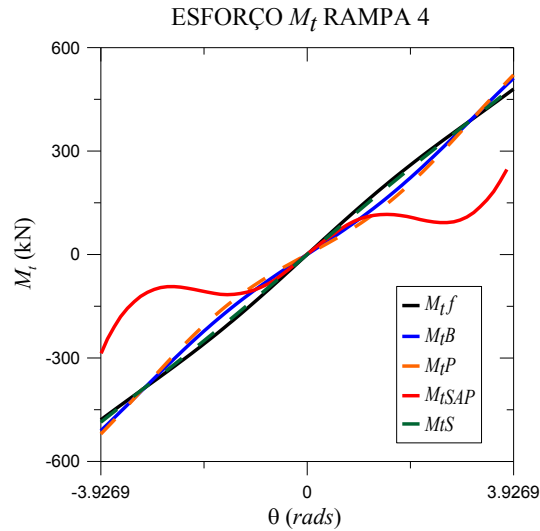
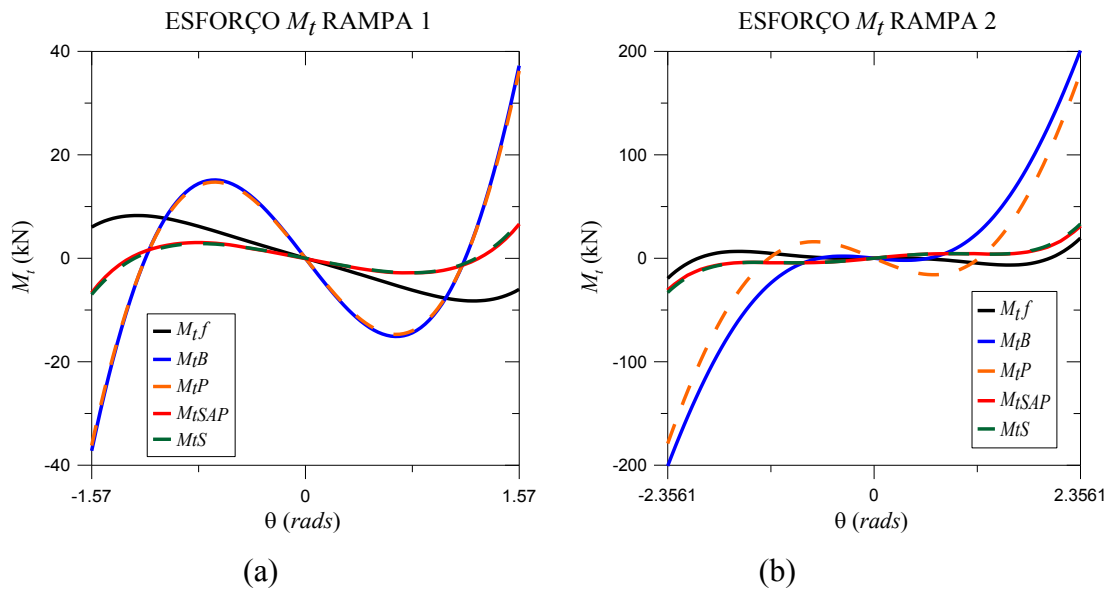
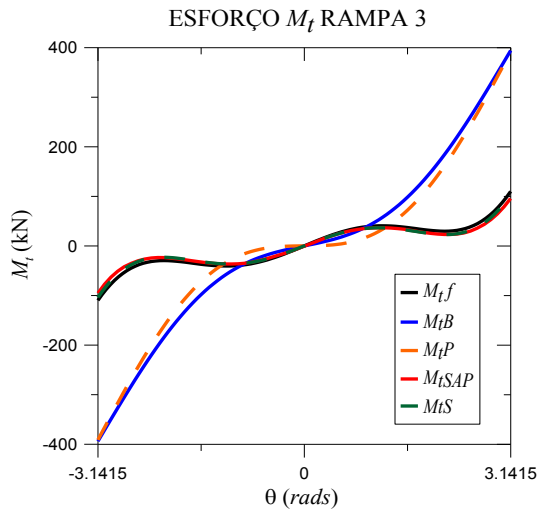


Figura 4.24 – Gráfico do esforço  $M_t$ .

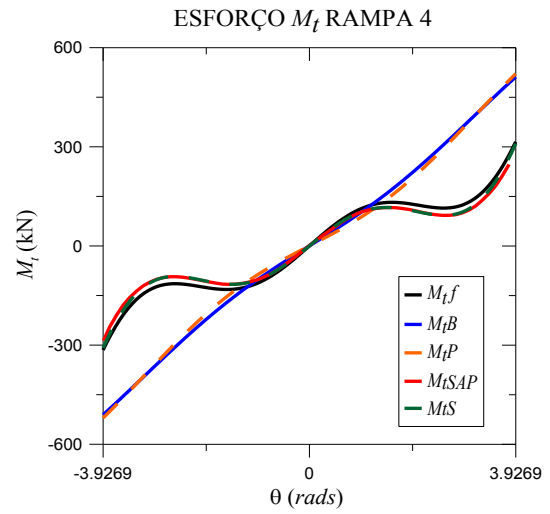
Abaixo, a figura 4.25 consolida os gráficos de  $M_t$  das oito rampas estudadas.



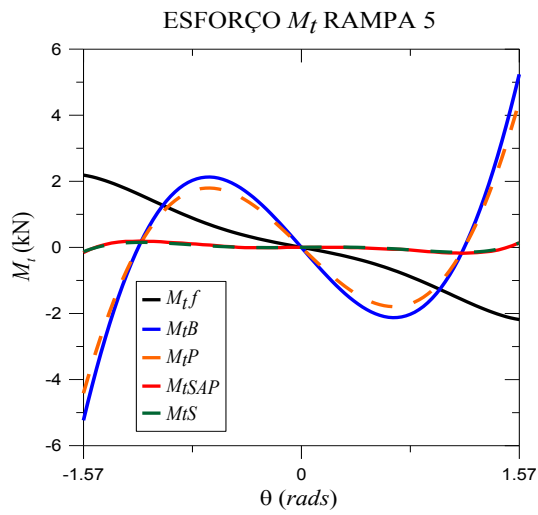




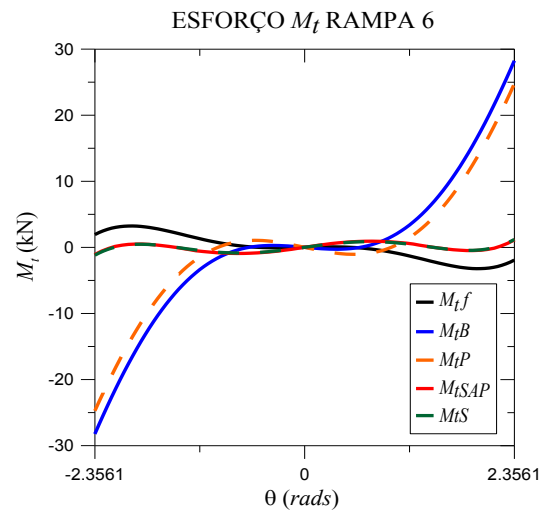
(c)



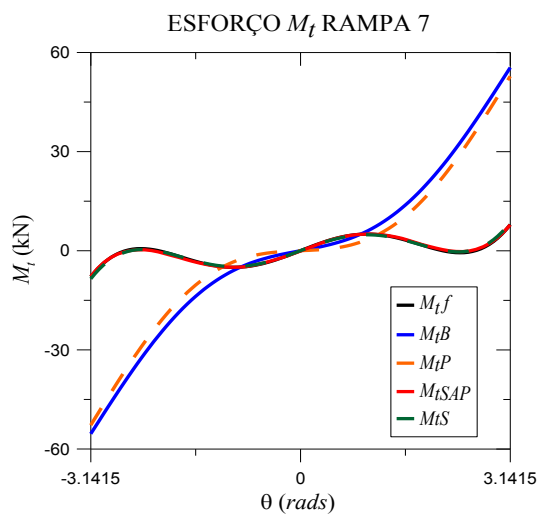
(d)



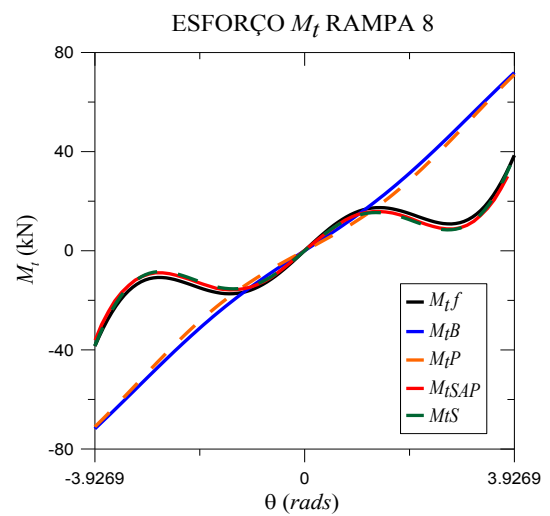
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 4.25 – Gráficos de  $M_t$ .

Os gráficos das rampas de  $2\phi = 180^\circ$  se diferenciam dos outros quanto ao formato. Os gráficos das demais rampas mostram que nas proximidades do meio do vão os valores obtidos por todos os métodos são muito próximos dentro do intervalo  $-0,4\phi \leq \theta \leq 0,4\phi$ , localizado entre as mudanças de inclinação dos gráficos, ou seja, dentro deste intervalo apresentam resultados muito parecidos.

Abaixo se têm os valores de  $M_t$  para cada rampa, no apoio superior. Observa-se que, a partir das oito rampas estudadas, conforme aumenta o valor de  $\phi$  das rampas, menor é o valor do esforço  $M_t$ .

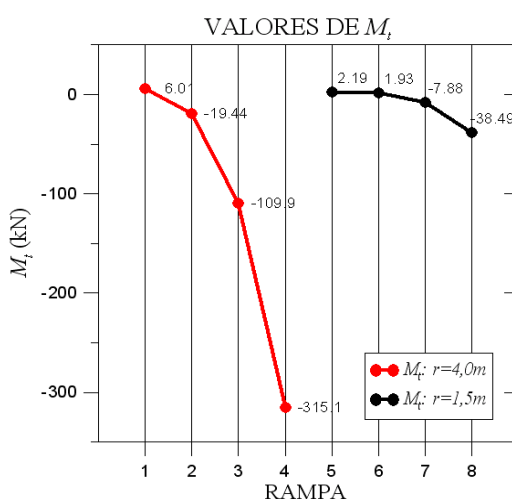


Figura 4.26 – Valores de  $M_t$  para todas as rampas.

#### 4.10.5 Comentários sobre o momento fletor $M_x$ :

Todos os métodos apresentam resultados para este esforço. Os resultados dos métodos de Fuchssteiner, Scordelis e *SAP* ficaram bem próximos, e em alguns casos praticamente sobrepostos. Apenas nas rampas de  $180^\circ$  o método de Fuchssteiner emitiu resultados mais distantes na região dos apoios.

Observa-se que, ao contrário dos demais métodos, que apresentam gráficos perfeitamente simétricos, os resultados do *SAP* não se comportaram desta maneira. Em algumas rampas a primeira metade do gráfico possui resultados mais próximos dos outros dois métodos e na segunda metade resultados mais distantes.

Os métodos de Bergman e Prudon se desenvolveram praticamente iguais e isolados dos demais métodos. Mais uma vez acredita-se que estes métodos não são os mais adequados para análise do esforço  $M_x$ .

Da mesma forma como mostrado anteriormente para  $M_t$ , retirou-se a influência de  $X_3$  dos métodos de Fuchssteiner e Scordelis. Novamente os resultados se aproximam daqueles mostrados pelos métodos de Bergman e Prudon. Mais uma vez observa-se que estes últimos não consideram a influência do hiperestático  $X_3$  em seus métodos. O gráfico abaixo, usado como exemplo, é referente à rampa 5.

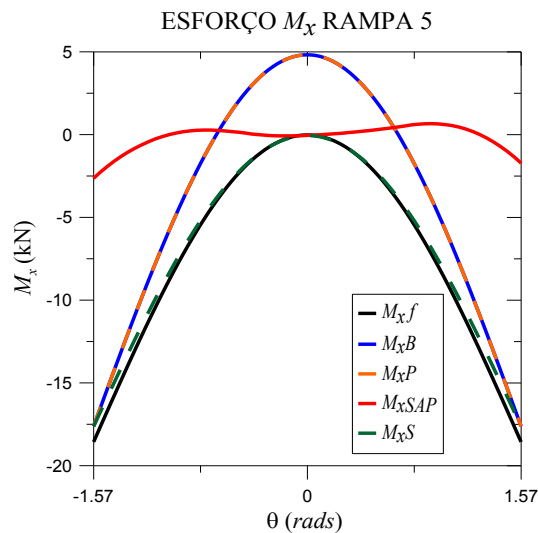
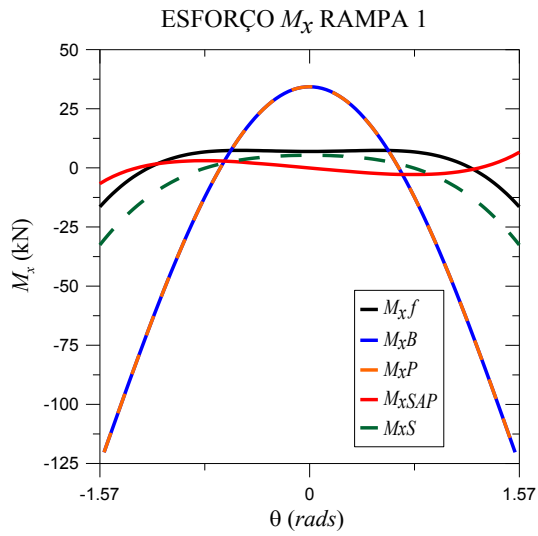
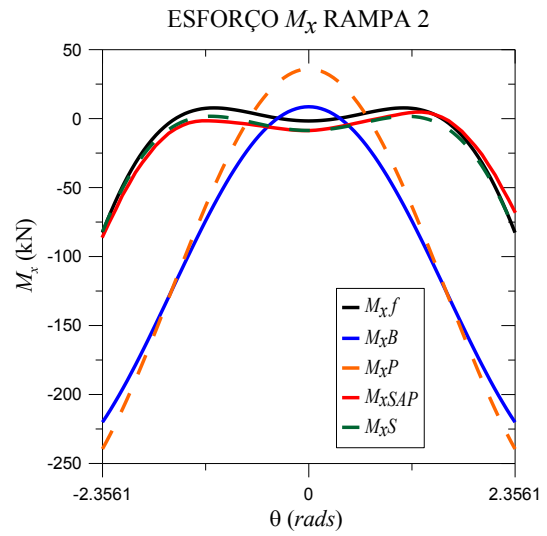


Figura 4.27 – Gráfico do esforço  $M_x$ .

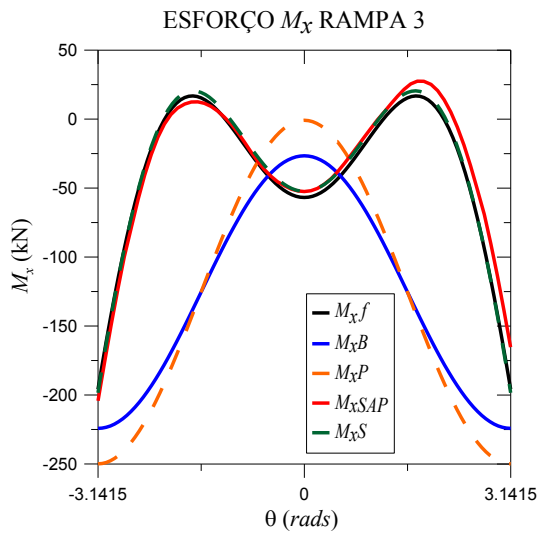
Abaixo, a figura 4.28 consolida os gráficos de  $M_x$  das oito rampas estudadas.



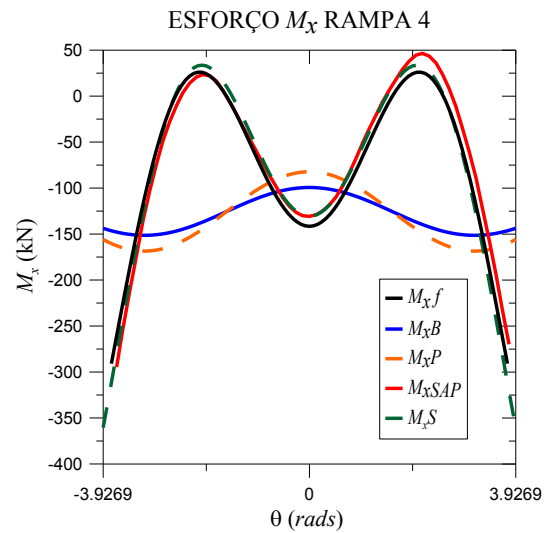
(a)



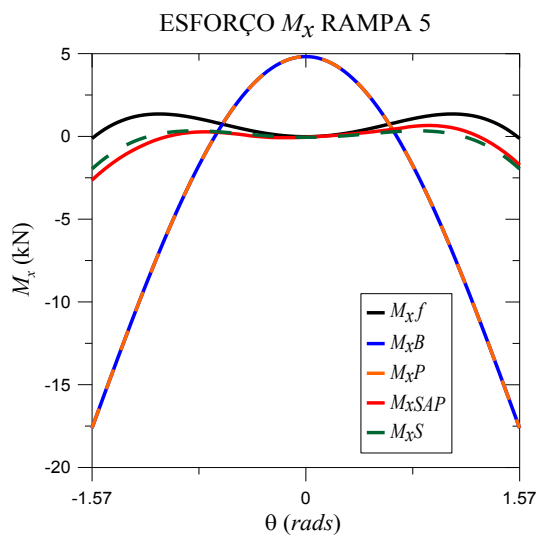
(b)



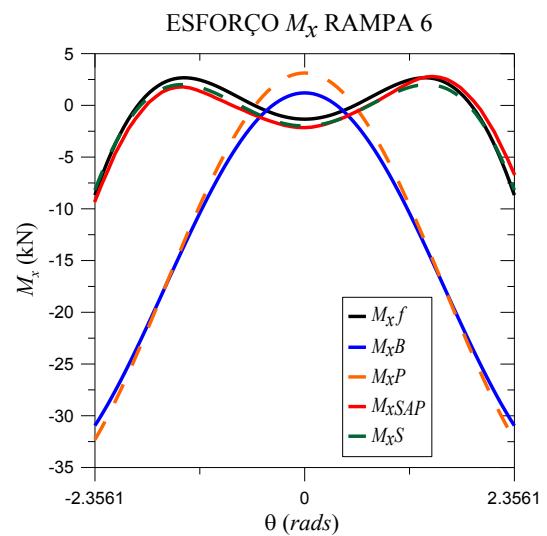
(c)



(d)



(e)



(f)

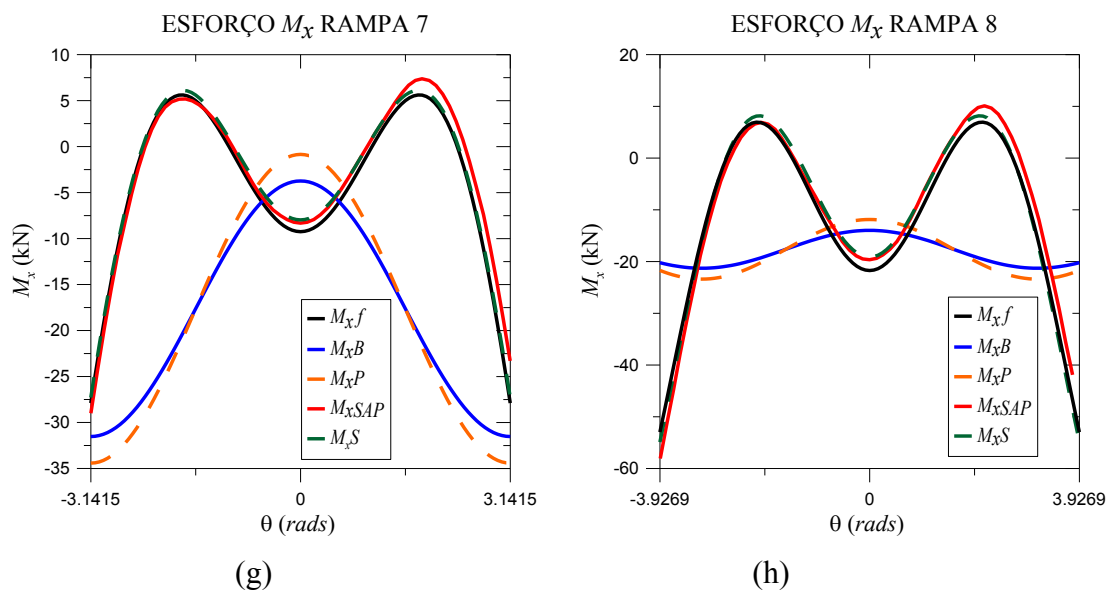


Figura 4.28 – Gráficos de  $M_x$ .

Após cálculos dos valores máximos conclui-se que, com exceção das rampas de abertura de  $2\phi = 180^\circ$ , todas as demais apresentam o valor máximo de  $M_x$  na posição  $\theta = \phi/2$ . Como referência foram usados os resultados dos modelos de barras do *SAP* e desconsiderados os resultados obtidos pelos métodos de Bergman e Prudon. As rampas de  $2\phi = 180^\circ$  apresentaram os maiores valores positivos de  $M_x$  aproximadamente no meio do vão.

Abaixo têm-se os valores de  $M_x$  para cada rampa. Observa-se que de uma maneira geral o valor de  $M_x$  decresce com o aumento de  $\phi$  em todos os casos.

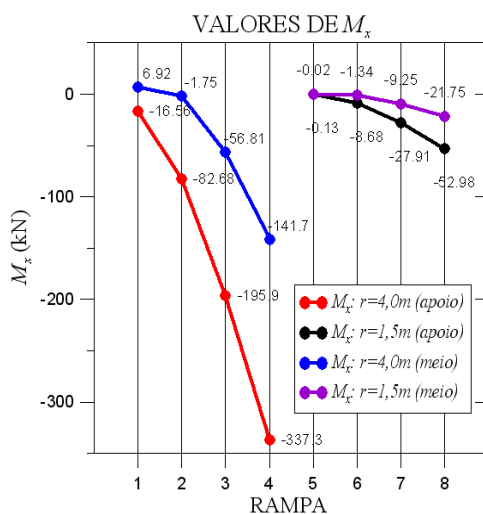
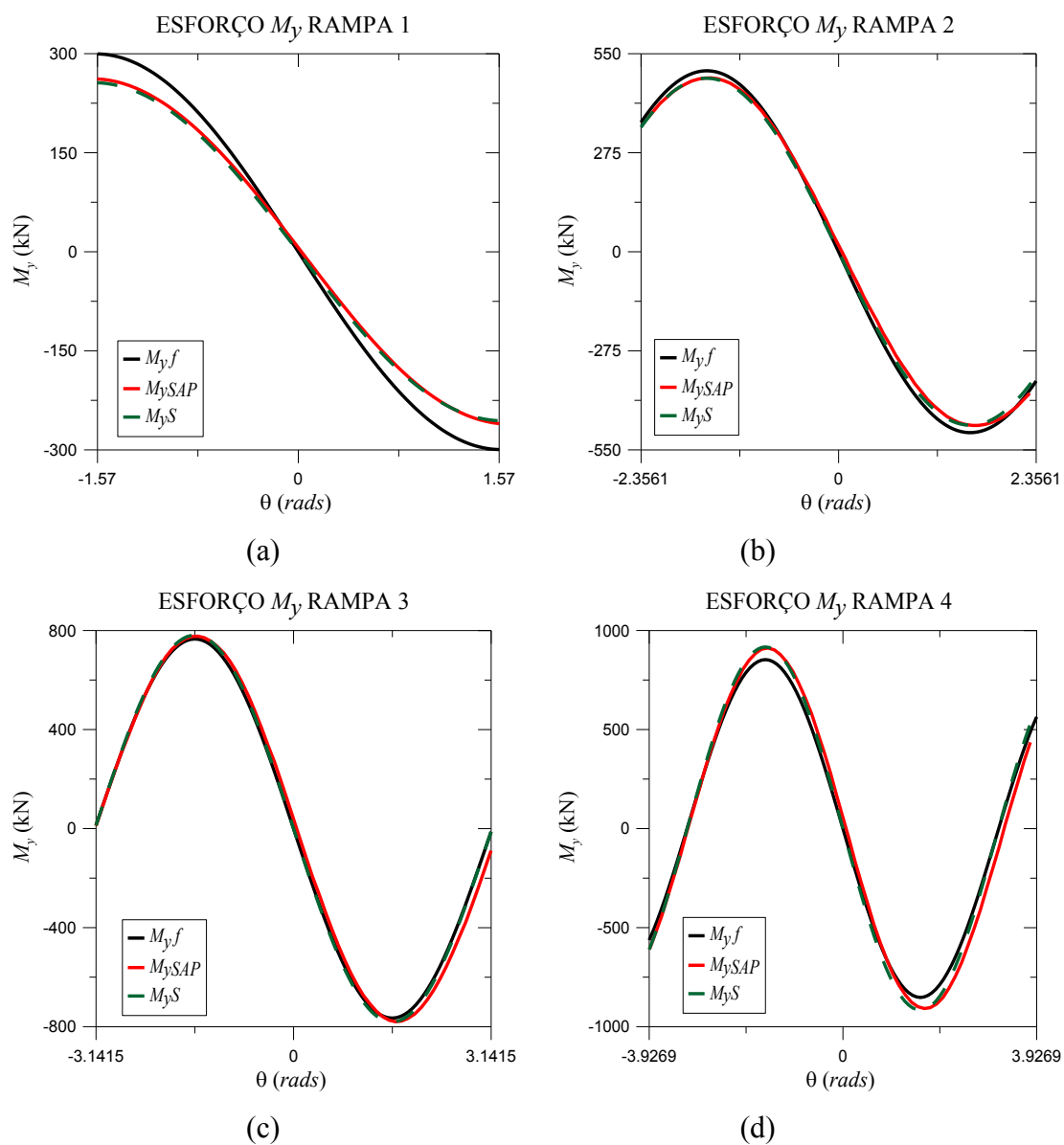


Figura 4.29 – Valores de  $M_x$  para todas as rampas.

#### 4.10.6 Comentários sobre o momento fletor $M_y$ :

Somente os métodos de Fuchssteiner, Scordelis e o *SAP* forneceram resultados para este esforço. Não se observou nenhuma tendência específica, exceto a proximidade entre os métodos que foi muito boa, e em muitos casos as curvas estão praticamente sobrepostas.

Abaixo, a figura 4.30 consolida os gráficos de  $M_y$ , das oito rampas estudadas.



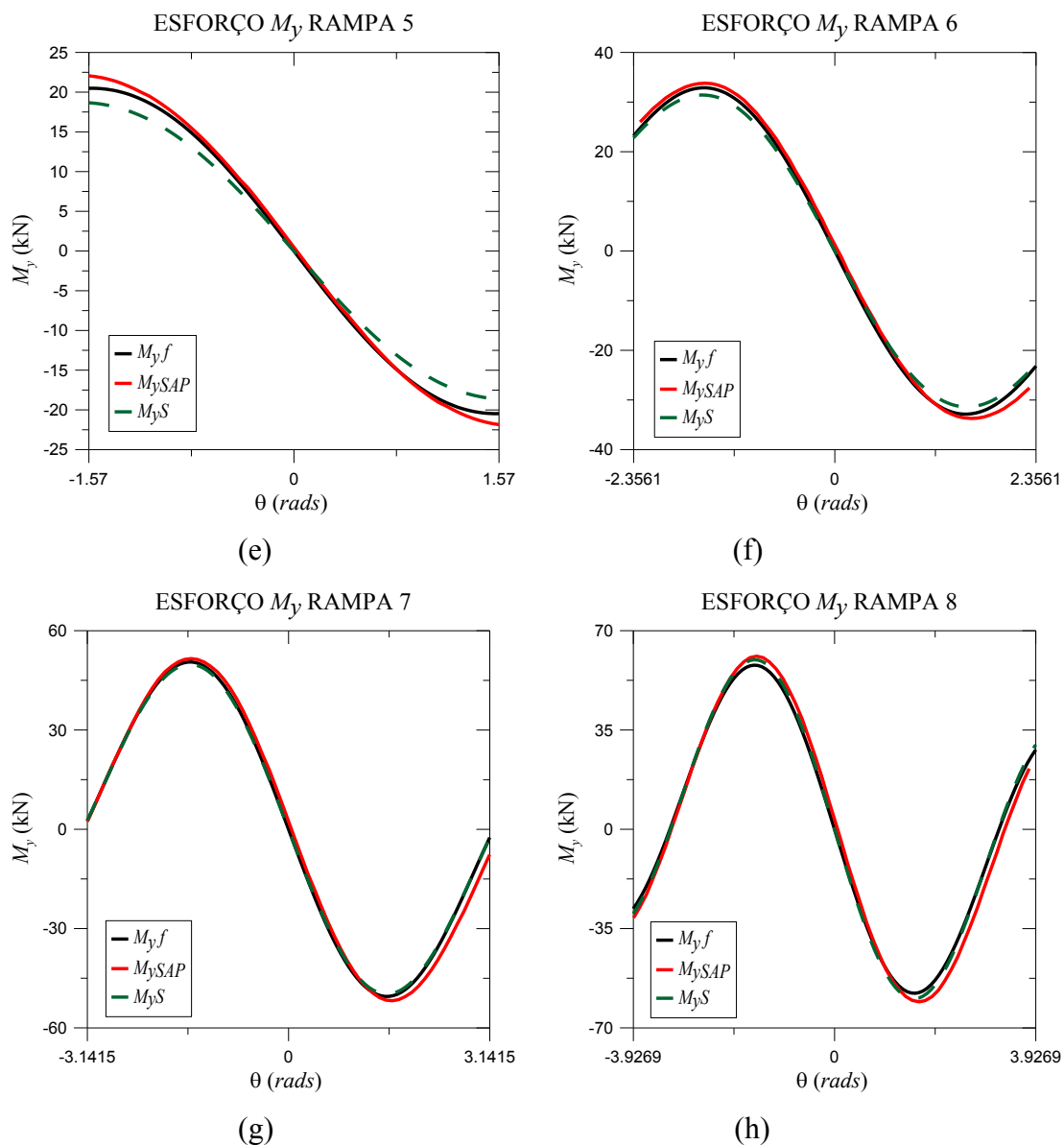


Figura 4.30 – Gráficos de  $M_y$ .

Observa-se primeiramente que as rampas de  $2\phi = 180^\circ$  possuem valores máximos em suas extremidades. Contudo isto muda nas demais. Os cálculos mostraram que os valores máximos de  $M_y$  vão ocorrer sempre para  $\theta = 1,52rad$ . Esta conclusão pode ser de grande valor para projetos deste tipo de estrutura.

Abaixo se têm os valores de  $M_y$  para cada rampa, nos apoios superiores. Observa-se que de uma maneira geral o valor de  $M_y$  decrescem com o aumento de  $\phi$ .

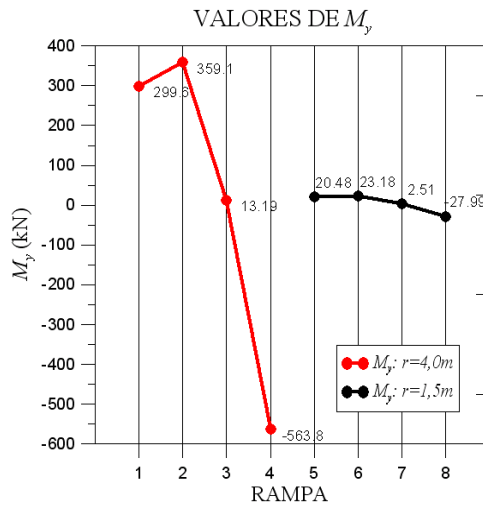
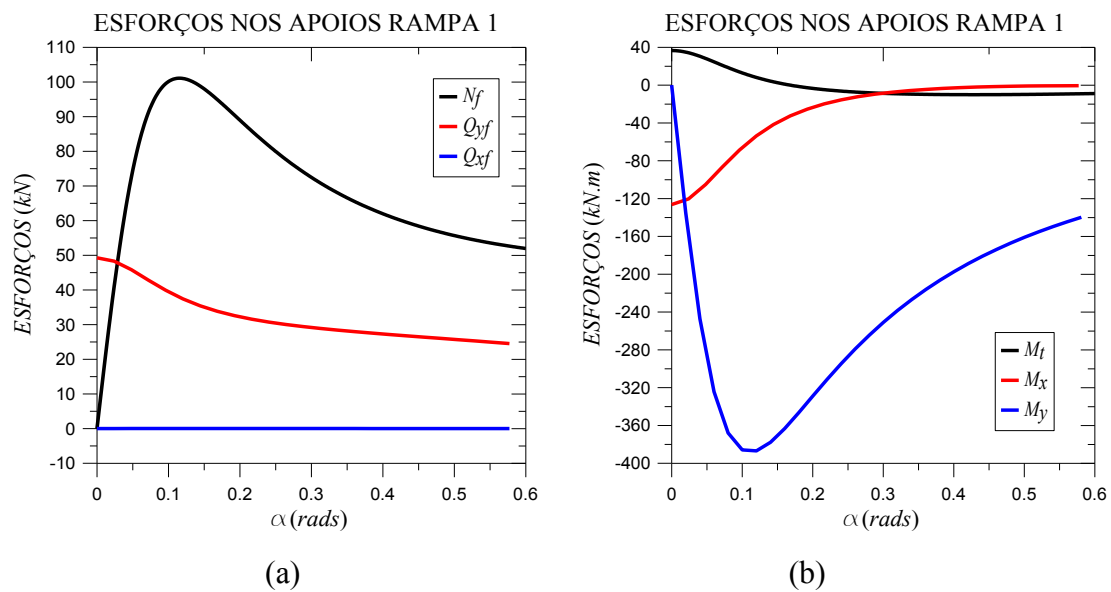


Figura 4.31 – Valores de  $M_y$  para todas as rampas.

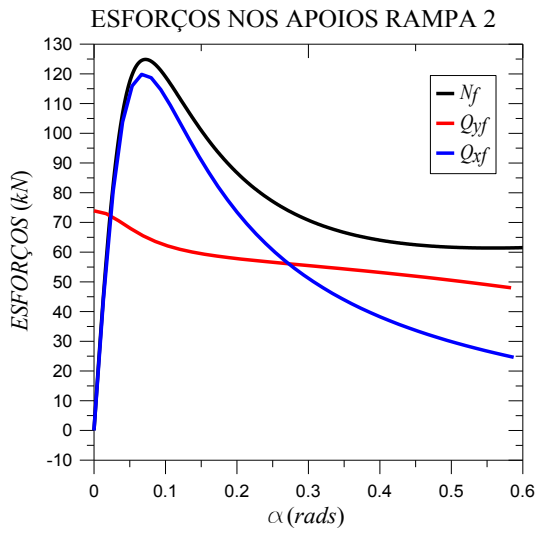
#### 4.10.7 Comentários sobre a variação da inclinação

Abaixo são mostrados os gráficos dos esforços em função da variação de inclinação. Julgou-se oportuno trabalhar dentro do intervalo de  $0 \leq \alpha \leq 0,6$ , para se abranger a grande maioria dos casos práticos. Todos os gráficos foram gerados pelo método de Fuchssteiner, na região do apoio superior de cada rampa. A inclinação foi alterada para valores constantes de  $r$  e  $\phi$  de cada rampa.

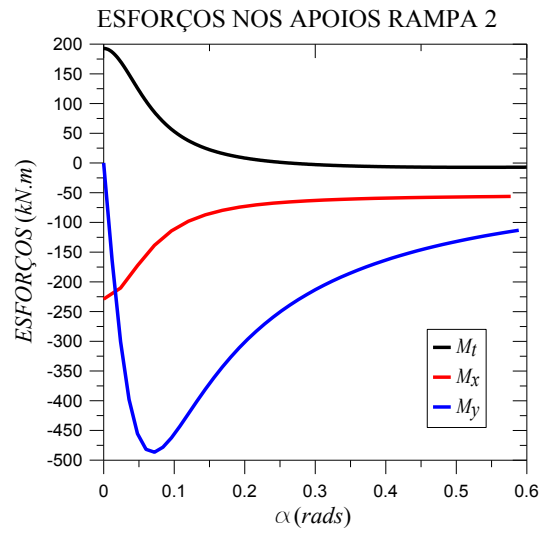


Esforços da rampa 1 em função de  $\alpha$ .



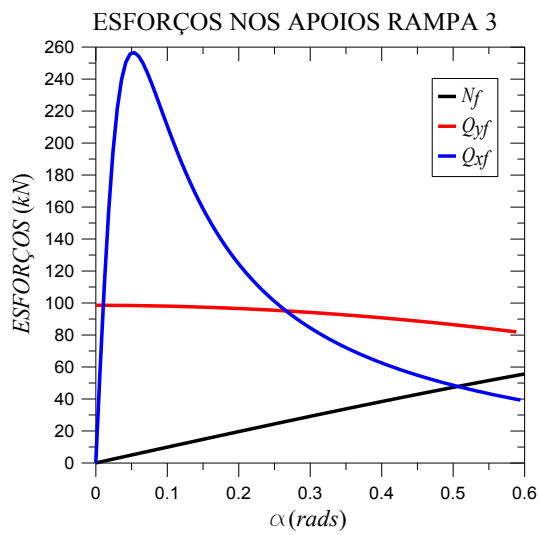


(c)

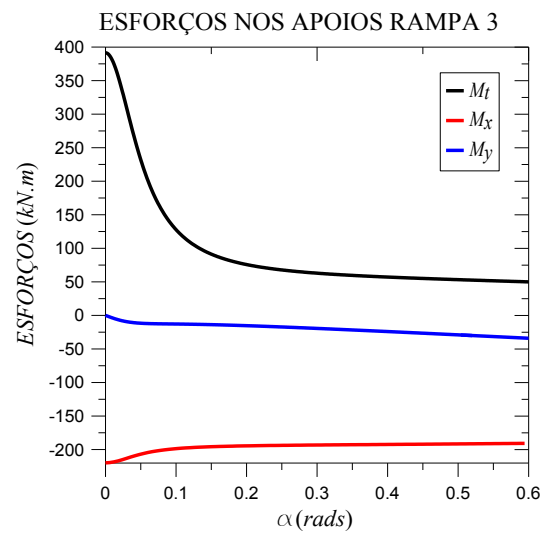


(d)

Esforços da rampa 2 em função de  $\alpha$ .

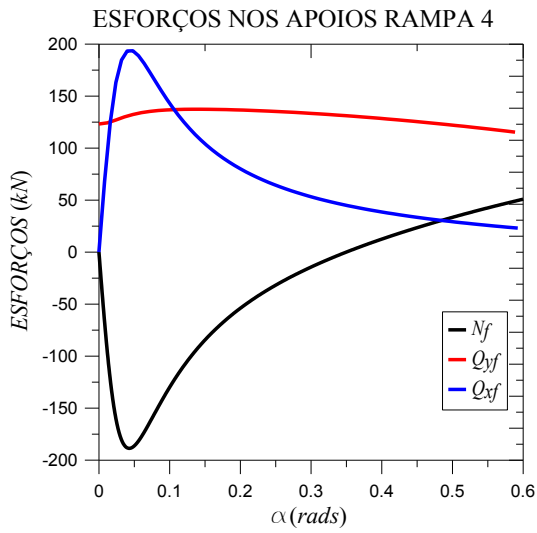


(e)

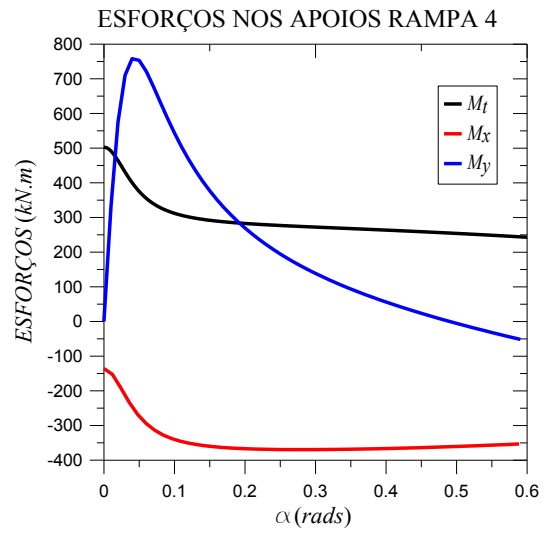


(f)

Esforços da rampa 3 em função de  $\alpha$ .

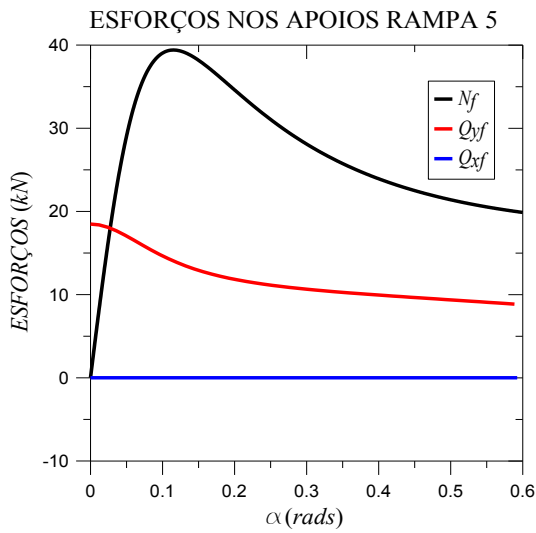


(g)

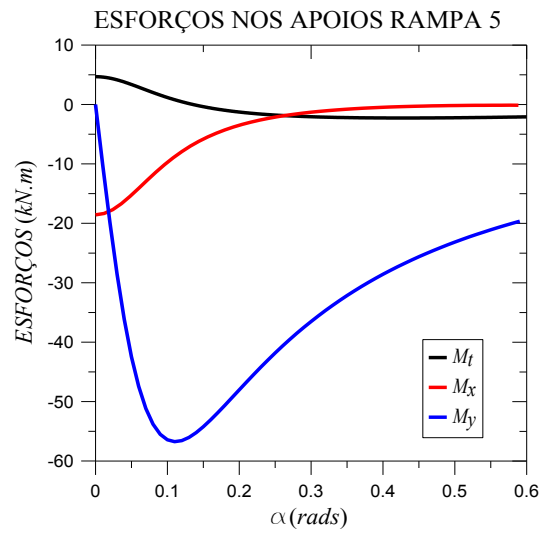


(h)

Esforços da rampa 4 em função de  $\alpha$  .

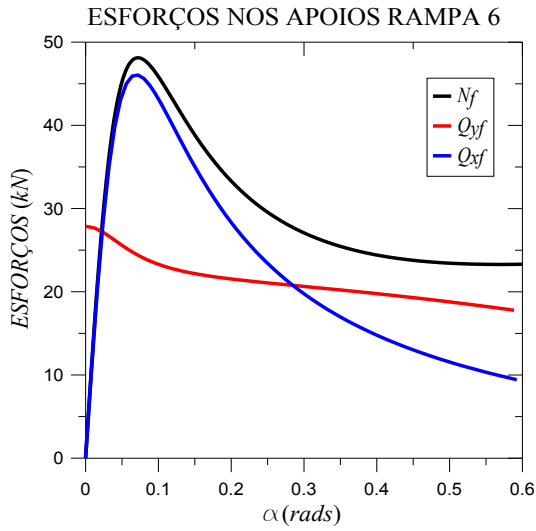


(i)

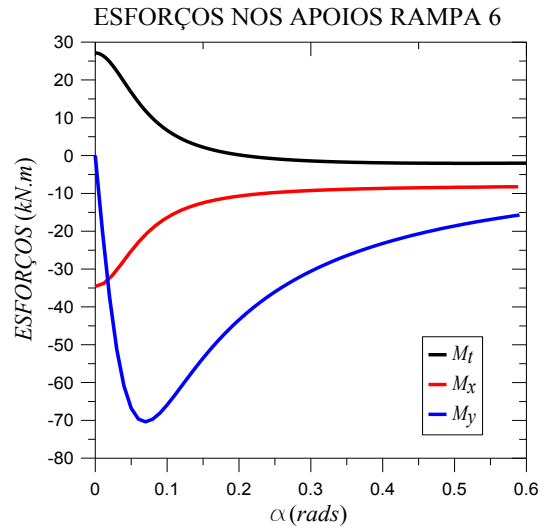


(j)

Esforços da rampa 5 em função de  $\alpha$  .

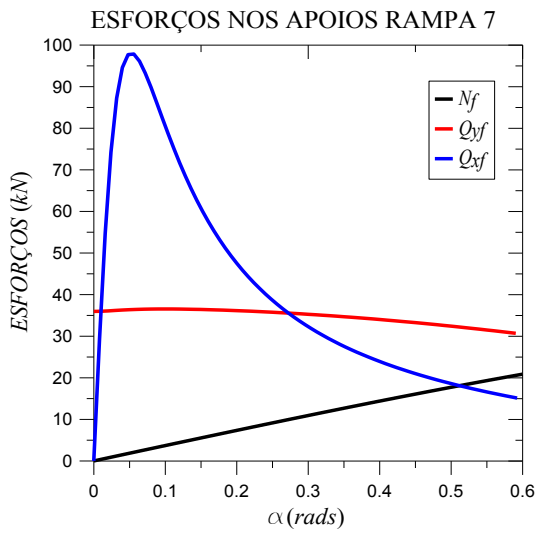


(k)

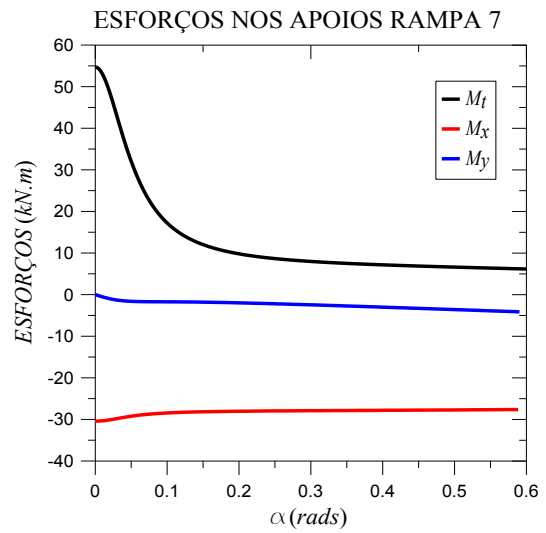


(l)

Esforços da rampa 6 em função de  $\alpha$  .

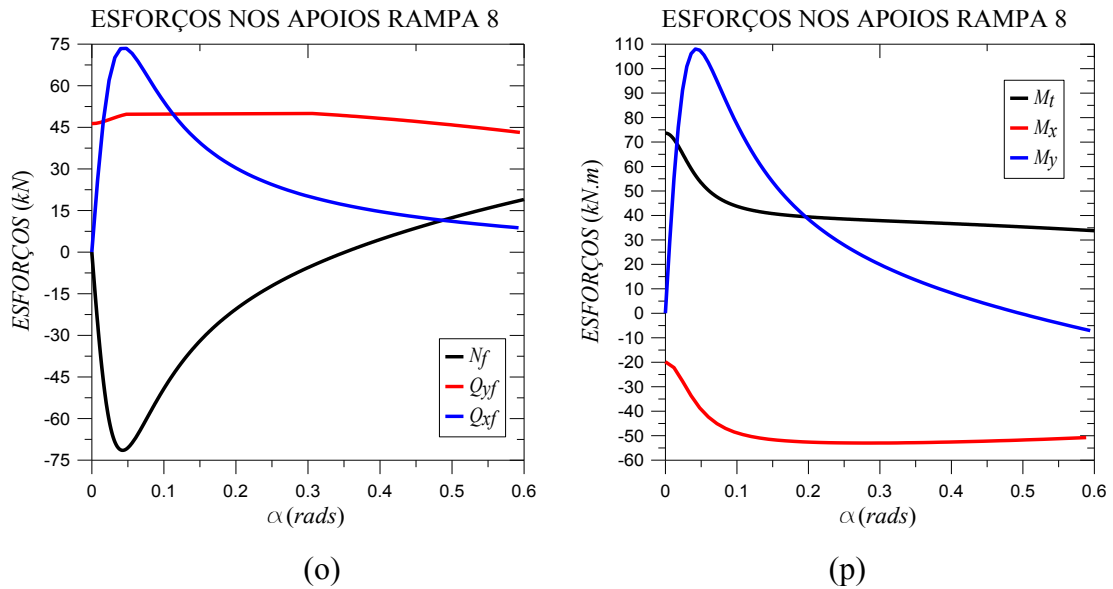


(m)



(n)

Esforços da rampa 7 em função de  $\alpha$  .



Esforços da rampa 8 em função de  $\alpha$ .

Figura 4.32 – Esforços das rampas em função de  $\alpha$ .

Nos gráficos dos esforços em função de  $\alpha$  observa-se alguns comportamentos que se repetem, como o esforço  $Q_y$ , que decresce com o aumento da inclinação. Para  $Q_x$  a variação é pouco perceptível nos casos de  $2\phi = 180^\circ$ . Nos demais casos há um brusco aumento do esforço, com diminuição em seguida para  $\theta \approx 3\phi/4$ .

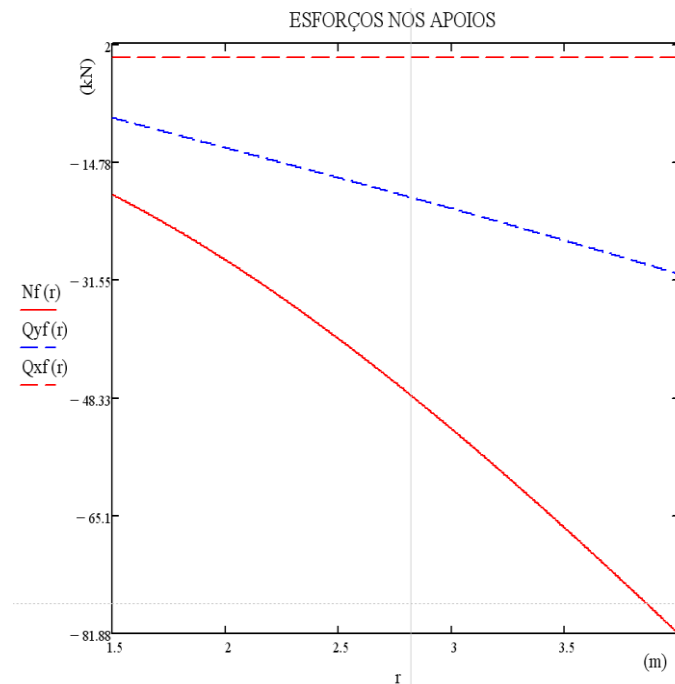
O esforço  $N$  cresce rapidamente nas rampas de  $2\phi = 180^\circ$  e  $2\phi = 270^\circ$ , com valor máximo em  $\theta \approx 3\phi/4$ , quando decresce novamente. Nas rampas de  $2\phi = 360^\circ$  o esforço cresce aproximadamente de forma linear. Para rampas de  $2\phi = 450^\circ$ , ao contrário dos demais, o esforço decresce rapidamente no início, com mínimo em  $\theta \approx 3\phi/4$ , aumentando novamente a partir desse ponto.

Nas rampas de  $2\phi = 450^\circ$  os esforços  $Q_x$  e  $Q_y$  se assemelham, contudo, com sinais contrários. Os resultados, em valores absolutos não são necessariamente próximos entre si, mas a semelhança entre os gráficos dos esforços pode ser conclusiva, visto que ocorreu nas duas rampas estudadas, apesar de suas diferenças

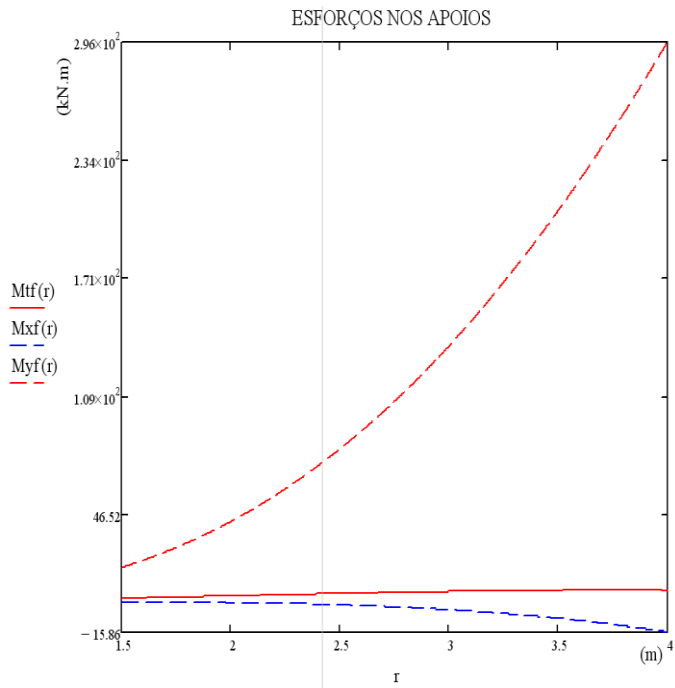
O esforço  $M_t$  apresenta decréscimo em todos os casos com o aumento de  $\alpha$ . O esforço  $M_x$  tende a aumentar na primeira metade dos gráficos, porém este aumento se suaviza sempre antes do meio do vão da rampa. Nos casos de  $2\phi = 450^\circ$  o efeito é contrário, ocorrendo queda do valor. Para  $M_y$  percebe-se que há uma variação brusca na região de  $\theta > 3\phi/4$ , sendo de inclinação negativa para  $2\phi = 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$  e positiva para  $2\phi = 450^\circ$ .

#### 4.10.8 Comentários sobre a variação do raio

Na figura 4.33 abaixo cada um dos gráficos mostra seis esforços nos apoios superiores das mesmas rampas estudadas, porém, neste caso analisa-se o comportamento dos esforços pela variação do raio. O raio varia no intervalo  $1,5 \leq r \leq 4,0$ , sendo que os valores extremos representam os mesmos resultados para as oito rampas, com a vantagem de se observar o comportamento dos esforços para qualquer raio dentro do referido intervalo. Manteve-se o desnível  $h = 3,0\text{m}$ . Assim a inclinação  $\alpha$  varia em função do raio.

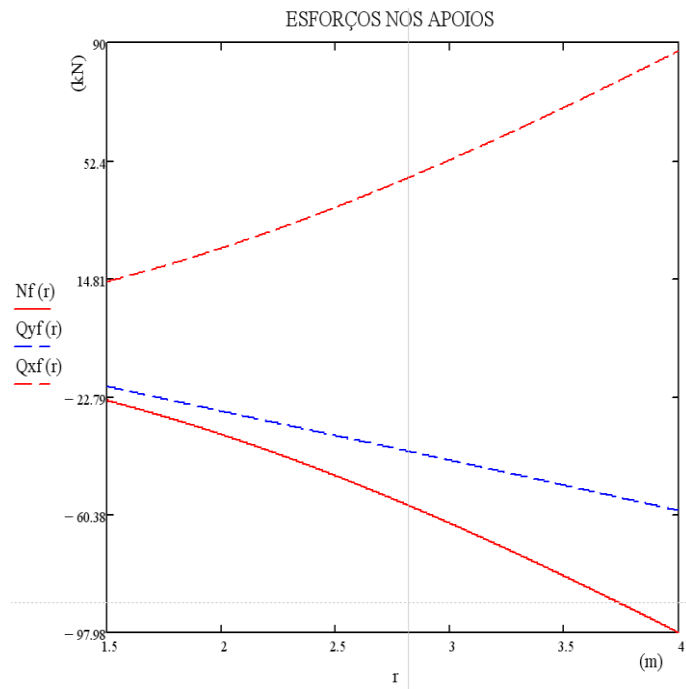


(a)

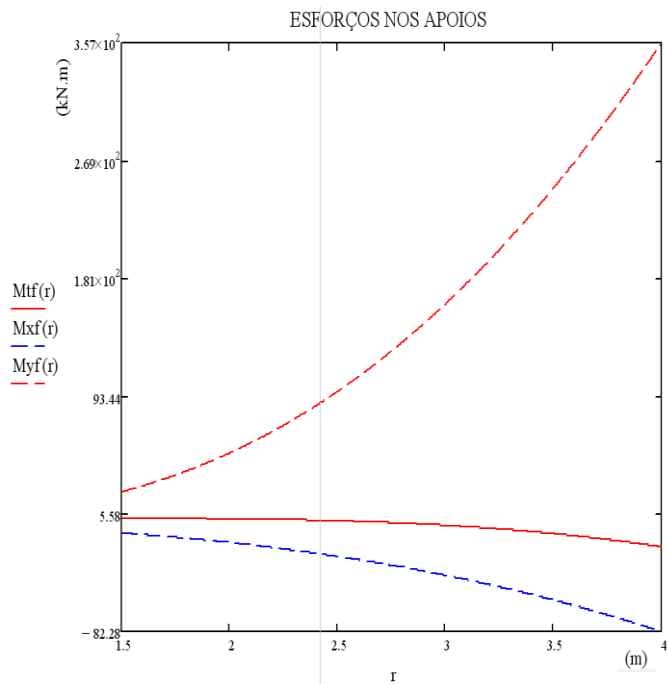


(b)

Rampas com  $2\phi = 180^\circ$

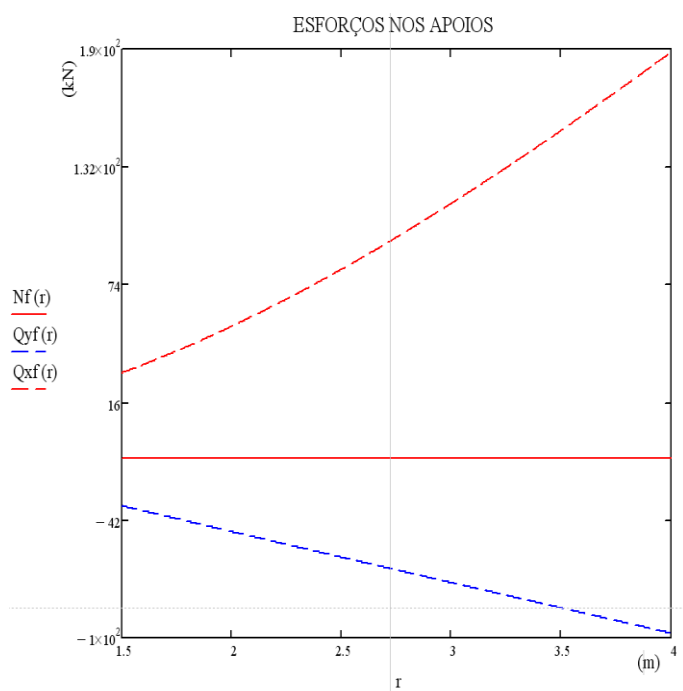


(c)

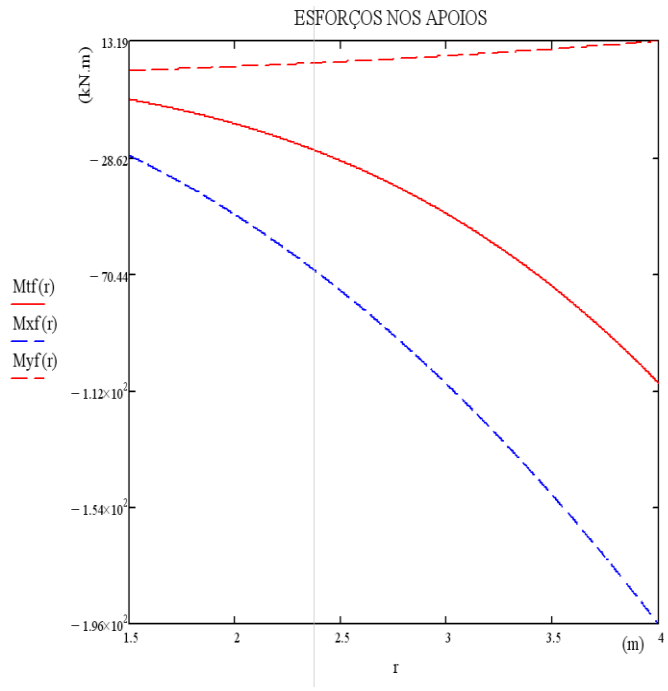


(d)

Rampas com  $2\phi = 270^\circ$

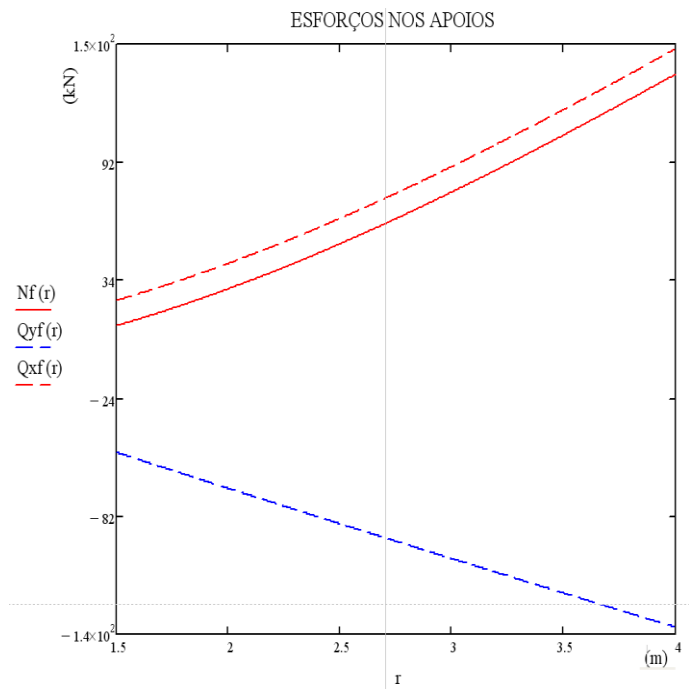


(e)



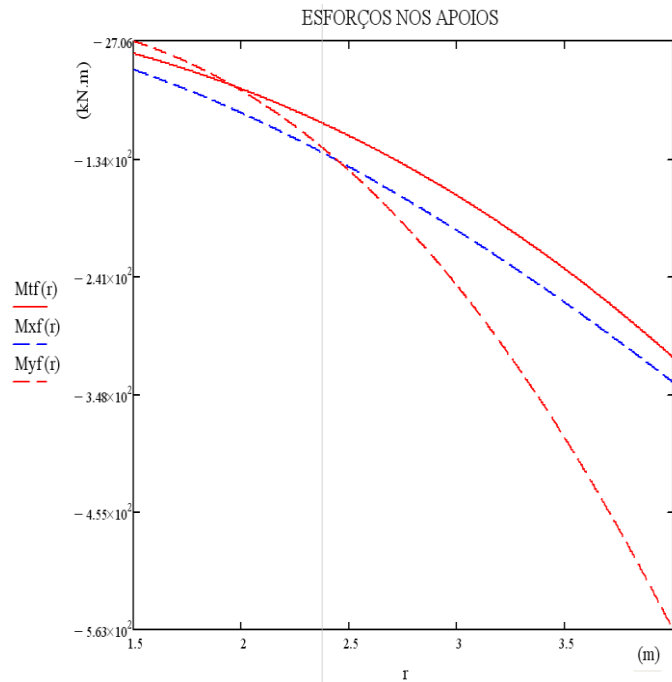
(f)

Rampas com  $2\phi = 360^\circ$



(g)





(h)

Rampas com  $2\phi = 450^\circ$

Figura 4.33 – Esforços das rampas em função de  $r$ .

Para as rampas com  $2\phi = 180^\circ$  observa-se que os esforços  $N$ ,  $Q_y$  e  $M_x$  diminuem com o aumento do raio e  $Q_x$ ,  $M_t$  e  $M_y$  crescem com o aumento do raio.

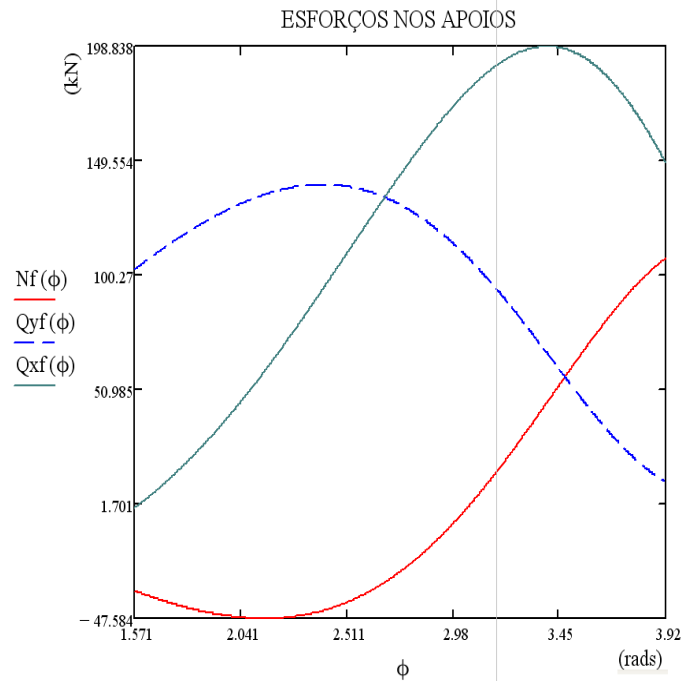
O esforço  $N$  tende a decrescer nas rampas de  $2\phi = 180^\circ, 270^\circ$ , é praticamente estável para  $2\phi = 360^\circ$  e decresce para rampas maiores com  $2\phi = 450^\circ$ . O esforço  $Q_y$  decresce com o aumento do raio para todas as.  $Q_x$  é praticamente estável para  $2\phi = 180^\circ$  e crescente com o aumento do raio nos demais casos.

O momento  $M_t$  diminui com o crescimento do raio em todos os casos. O mesmo ocorre com  $M_x$ . Estas observações são importantes por se constatar que aumentando o raio da rampa estes dois esforços decrescem, de forma que este comportamento pode favorecer um dimensionamento mais econômico da estrutura de concreto. Para o esforço  $M_y$  ocorre acréscimo com o aumento do raio em todos os casos, exceto para  $2\phi = 450^\circ$ , onde o comportamento é decrescente.

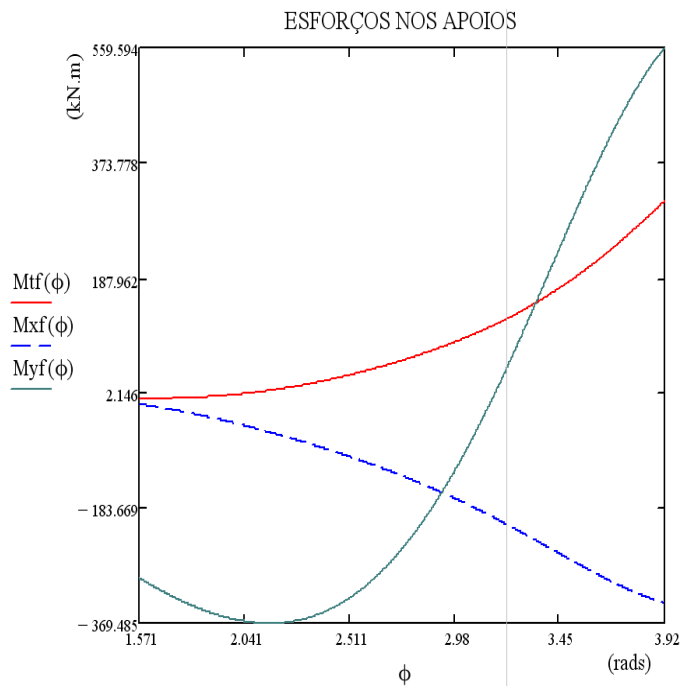
#### 4.10.9 Comentários sobre a variação de $\phi$

Os gráficos a seguir mostram como se comportam os esforços conforme varia  $\phi$ , pelo método de Fuchssteiner, nos apoios superiores. Os valores estão dentro do intervalo

$\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{5\pi}{4}$ , que são o menor e o maior valor de  $\phi$  usados neste trabalho.

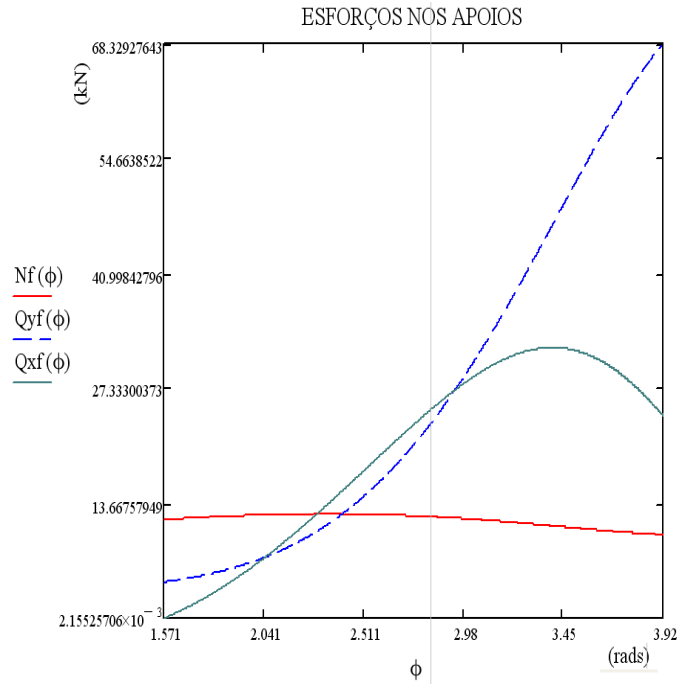


(a)

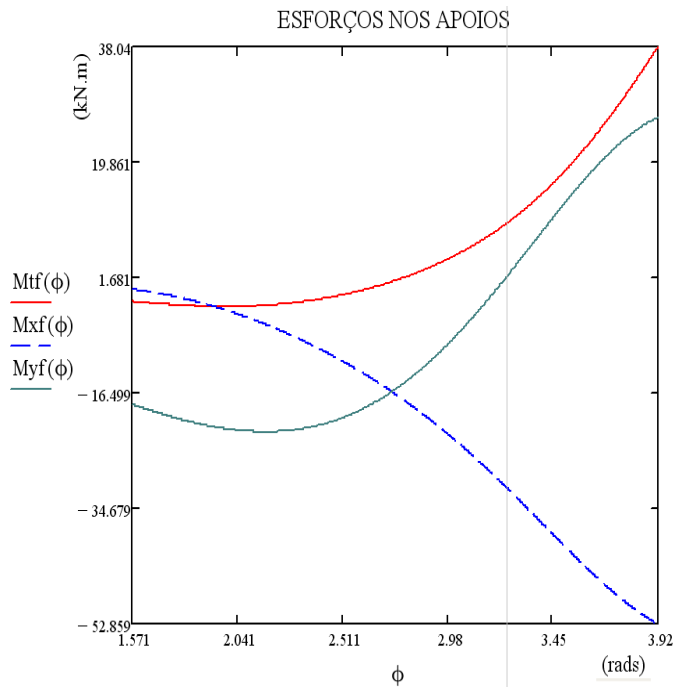


(b)

Esforços das rampas com raio = 4,0m em função de  $\phi$ .



(c)



(d)

Esforços das rampas com raio = 1,5 m em função de  $\phi$ .

Figura 4.34 – Esforços das rampas em função de  $\phi$ .

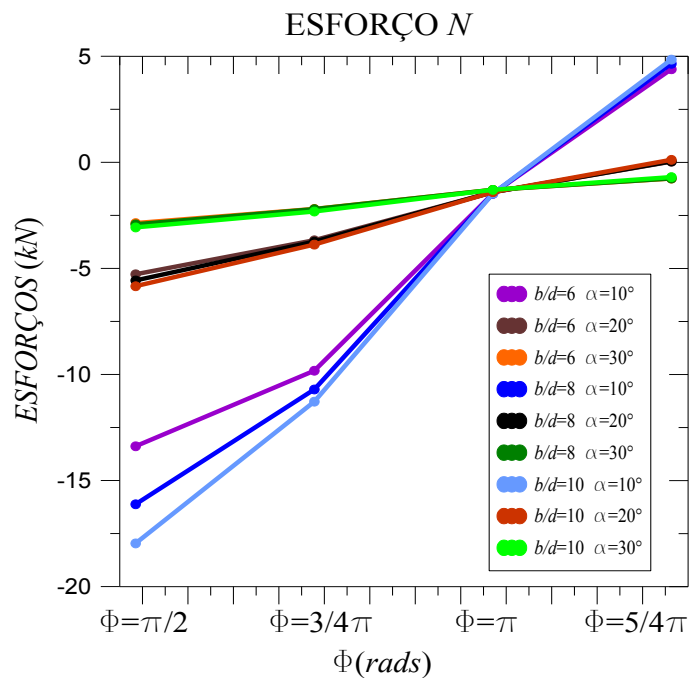
Observa-se nos gráficos acima que em com o aumento de  $\phi$ ,  $M_t$  e  $M_y$  apresentam tendência predominante crescente, enquanto  $M_x$  é em geral decrescente.  $M_y$  passa a ter inclinação positiva próximo a  $\phi = 2,1rad$ . Os esforços  $N$  e  $Q_y$  não apresentaram tendência definida, enquanto  $Q_x$  é em geral crescente, mas muda de inclinação em  $\phi \approx 3,45rad$ .

#### 4.10.10 Demais verificações

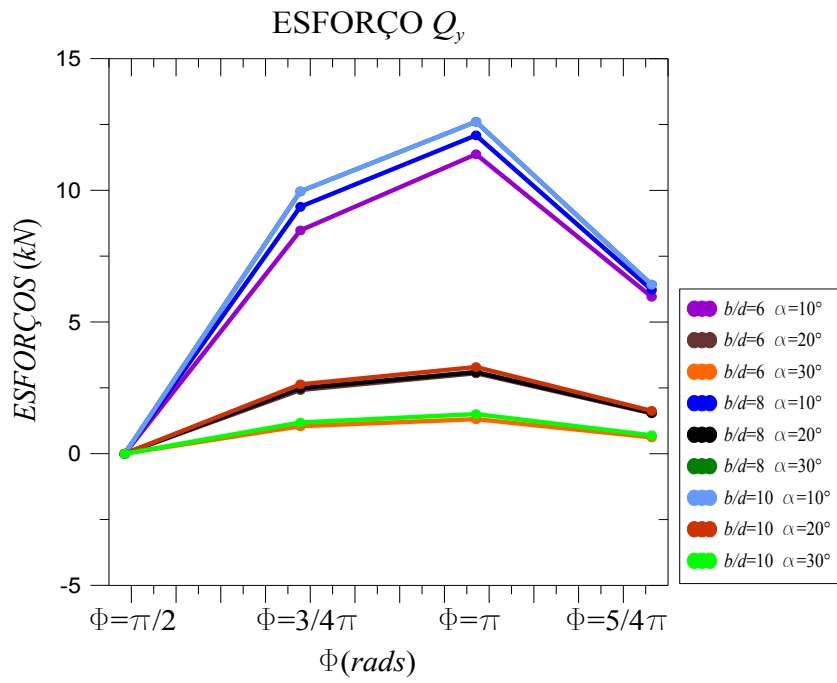
Outras variações podem ser estudadas de forma a se aprofundar no estudo do comportamento dos esforços. Os gráficos mostrados a seguir propõem as variações:

- Na seção transversal, pela razão  $b/d$  igual a 6, 8 e 10;
- Na inclinação  $\alpha$  para  $10^\circ$ ,  $20^\circ$  e  $30^\circ$ ;
- Nos valores de  $\phi$  para  $90^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $180^\circ$  e  $225^\circ$  (já anteriormente usados) apresentados nos gráficos em radianos.

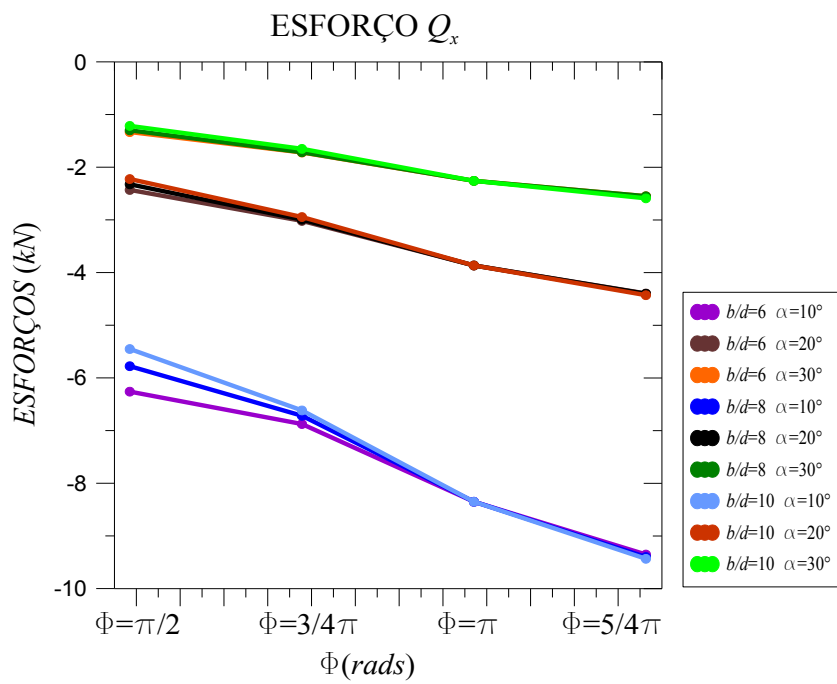
O gráfico de cada esforço apresenta nove curvas formadas por quatro pontos cada uma (cada valor de  $\phi$ ). Foi utilizado carregamento unitário nesta etapa. A figura 4.35 abaixo evidencia estes resultados.



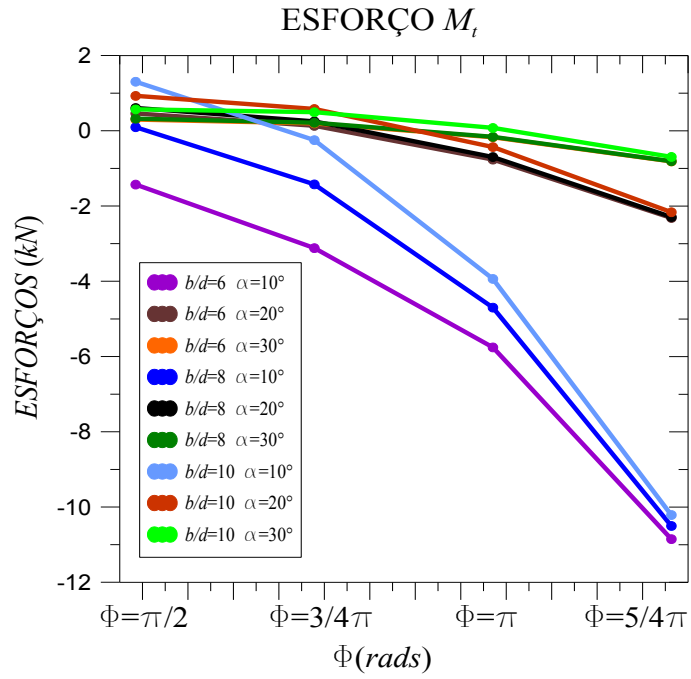
(a)



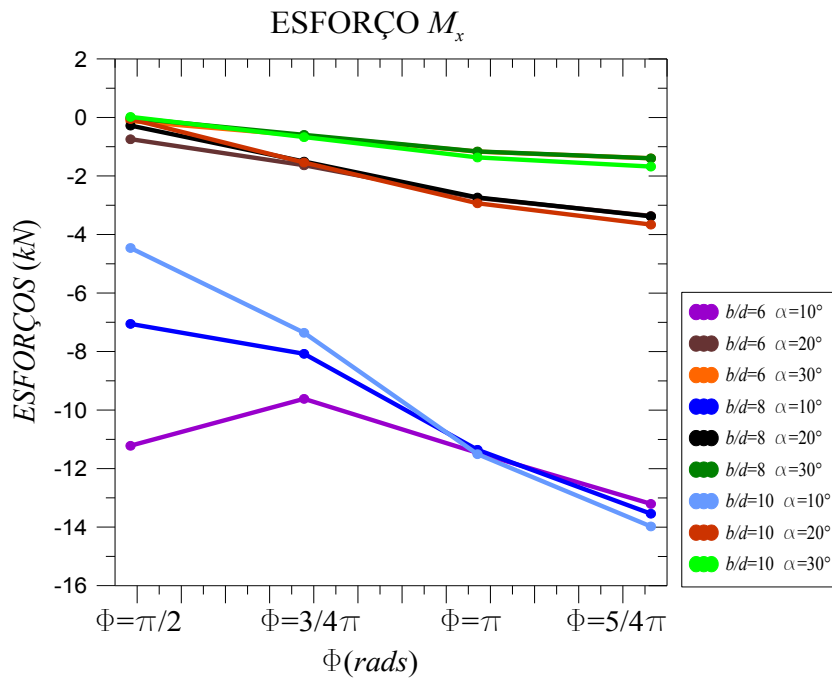
(b)



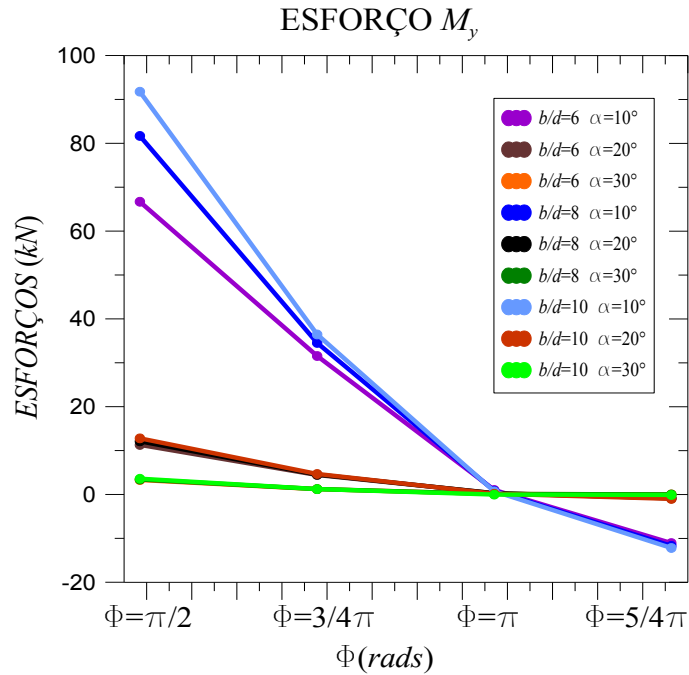
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 4.35 – Esforços das rampas com variações de  $b/d$  e  $\alpha$ .

Observa-se que em todos os esforços os pontos com a mesma inclinação  $\alpha$  formam trios de curvas semelhantes, com resultados que ficam mais próximos conforme aumenta o valor de  $\phi$ . Significa que para valores maiores de  $\phi$  as diferentes relações  $b/d$  são menos relevantes para os resultados. Portanto, o fator mais importante de diferenciação das curvas acima e conseqüentemente nas variações dos esforços é a inclinação  $\alpha$ .

#### 4.10.11 Comentários sobre os modelos de cascas

Os modelos de cascas apresentaram resultados próximos aos dos demais métodos, porém, nunca tão próximos quanto os outros resultados entre si. Como os valores encontrados e aqui apresentados tratam-se de médias representativas em cada esforço, que ocorre nos nós dos elementos da casca ao longo da largura da rampa, pode-se inferir que parte da própria diferença entre estes e os demais modelos é provocada pelo processo de obtenção dos valores representativos em cada seção.

Ainda sobre a diferença entre os modelos de cascas e os métodos analíticos, entende-se também que estes últimos, ao tratarem as rampas como elementos lineares, não

possibilitam análises mais apuradas, como as que podem ser realizadas em relação a pontos ao longo da largura do apoio. Ao apresentarem um resultado representativo para o esforço ao longo de todo o apoio, os métodos analíticos estudados propõem um valor equivalente ou médio, em detrimento de outras variações ao longo do mesmo apoio.

Os resultados ficaram especialmente próximos dos métodos de Fuchssteiner e Scordelis para as rampas 3, 4, 6, 7 e 8. Embora não seja possível dizer de forma decisiva que os modelos de cascas apresentaram os melhores resultados, estes possuem a vantagem de possibilitarem uma análise adequada das distribuições de esforços e tensões ao longo das seções das rampas.



## 5. CONCLUSÕES

Neste capítulo são apresentadas as conclusões gerais, as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

### 5.1 CONCLUSÕES GERAIS

Os métodos estudados apresentaram resultados bastante próximos entre si, em especial os métodos de Fuchssteiner (1954), Scordelis (1960) e os modelos de barras desenvolvidos no programa *SAP 2000*. O método de Scordelis forneceu resultados satisfatórios, contudo, há limitações no método que o tornam incompleto para uma análise completa, pois apenas três dos seis esforços estudados são obtidos pela formulação proposta.

Os métodos de Bergman (1956) e Prudon distanciaram-se dos demais. Em suas formulações observa-se que algumas interações entre os esforços não são consideradas, de forma que estes métodos não refletem adequadamente os comportamentos dos referidos esforços. Entende-se que estes métodos foram superados pelos desenvolvimentos de outros autores, de forma que não se recomenda o uso destas formulações.

O método de cálculo proposto por Fuchssteiner apresentou resultados que podem ser considerados bastante satisfatórios, pois se aproximaram dos resultados do método de Scordelis e dos modelos do *SAP 2000*. Este é o único método analítico que resolve os seis esforços estudados nas estruturas helicoidais. É o método mais indicado, dentre os que resolvem o problema utilizando-se da matriz de flexibilidade.

Os modelos de barras desenvolvidos no *SAP 2000* apresentaram resultados bastante parecidos com aqueles dos métodos de Scordelis e Fuchssteiner. Pode-se dizer que este método representa muito bem o problema, e até mesmo substitui os métodos analíticos, não só pela qualidade dos resultados, como pela praticidade na construção dos modelos e o curto tempo de processamento computacional. Supera os métodos analíticos estudados também porque pode ser programado para a análise de outros efeitos desconsiderados neste trabalho, como dilatação térmica e deformações.

Oito modelos de rampas foram propostos para estudos do comportamento dos esforços e comparações diversas. Pode-se entender melhor como se comportam cada um dos esforços, de forma a se fazer previsões e considerações práticas para projetos reais.

Foi possível analisar separadamente a influência de cada variável no desenvolvimento dos esforços. Constatou-se também que os esforços possuem diversas características que se mantêm constantes, como pontos de máximo valor, que podem auxiliar os projetistas de estruturas helicoidais. A variável que mais diferencia os esforços nas rampas é a inclinação  $\alpha$ . As diversas relações de  $b/d$  da seção transversal influenciam menos os esforços. Mesmo para rampas distintas, quando possuem a mesma inclinação os esforços tendem a serem mais próximos conforme aumenta-se o ângulo  $\phi$  desenvolvido da rampa.

Os modelos construídos em elementos finitos de cascas apresentaram resultados próximos dos demais modelos em grande parte dos casos. Contudo, construir modelos de rampa tridimensional em elementos finitos de casca é de fundamental importância para uma análise mais apurada das distribuições dos esforços, ao longo da largura e do comprimento das rampas. A possibilidade de se analisar as tensões na estrutura também dispõe mais opções de análise. Estas vantagens são especialmente importantes quando se trata de uma estrutura de maior responsabilidade.

## **5.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

O método de Fuchssteiner foi considerado a melhor solução analítica para resolução das estruturas helicoidais. Apenas deve ser complementado por uma análise das deformações, como proposto por Holmes e outros autores.

Devido ao acesso facilitado a programas de modelagem em elementos finitos, pode-se concluir que as melhores opções de análise são os modelos computacionais, pois há qualidade nos resultados e são possíveis análises de casos mais complexos.

Acredita-se que o problema foi adequadamente apresentado e desenvolvido, de forma a contribuir com o entendimento para os profissionais que se depararem com este tipo e

estrutura. Os métodos de cálculo foram minuciosamente detalhados e os interessados em se aprofundar nos estudos de rampas helicoidais encontrarão neste trabalho uma forma prática de se analisar estruturas tão complexas.

### **5.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

Seguem abaixo algumas sugestões de pesquisas de temas que não puderam ser abordados nesta dissertação:

- Análise de casos com carregamento dinâmico em estruturas helicoidais;
- Análise não-linear das estruturas helicoidais;
- Comportamento de estruturas helicoidais submetidas a forças de protensão;
- Análise de estruturas helicoidais com geometria, condições de contorno e carregamentos variados;
- Validação e uso de outros tipos de elementos finitos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Associação Brasileira de Normas Técnicas, ABNT (2003). *Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. NBR 6118*. Rio de Janeiro, RJ.

Associação Brasileira de Normas Técnicas, ABNT (1980). *Cargas para o cálculo de estruturas de edificações. NBR 6120*. Rio de Janeiro, RJ.

Ahmed, I., Muqtadir, A. e Ahmad, S. (1996). “Design provisions for stair slabs in the Bangladesh Building Code”. In: *Journal of Structural Engineering*, 122(3), 227-347.

Alghamdi, S.A. (1992). “A computer algorithm for the static analysis of circular helicoidal bars”. In: *Computers & Structures*, 43(1), 151-157.

Alghamdi, S.A., Mohiuddin, M.A. e Al-Ghamedy, H.N. (1998). “Analysis of free vibrations of helicoidal beams”. In: *Engineering Computations*, 15(1), 89-102.

Amanat, K. M. e Ahmad, S. (2001). “A new design basis for free-standing stairs”. In: *Journal of Civil Engineering*, 29(1), 17-31.

Arqhys Architects Site (2009). “Historia de las Escaleras”. Disponível em: <<http://www.arqhys.com/articulos/escaleras-historia.html>> Acesso em: 10 de junho de 2010.

Arqhys Architects Site (2009). “Información sobre Escaleras”. Disponível em: <<http://www.arqhys.com/articulos/escaleras-historia.html>> Acesso em: 10 de junho de 2010.

Azambuja, P. (1962). “Peças helicoidais biengastadas”. In: *Estrutura*, 46, 67-83.

Bangash, M. Y. H. e Bangash, T. (1999). “*Staircases.*”. Rotterdam: A.A.Balkema, 1 ed.

Béguin, H.G. (2007). “A helicoidal concrete ramp: A graceful prestressed structure an asymmetrical section built in four stages”. Disponível em: <[http://findarticles.com/p/articles/mi\\_qa5363/is\\_200707/ai\\_n21290635/?tag=content;coll1](http://findarticles.com/p/articles/mi_qa5363/is_200707/ai_n21290635/?tag=content;coll1)> Acesso em: 10 de junho de 2009.

Bergman, V. (1956). “Helicoidal staircases of reinforced concrete”. In: *Journal of American Concrete Institute*, 28, 403-412.

Busool, W. e Eisenberger, M. (2001). “Exact static analysis of helicoidal structures of arbitrary shape and variable cross section”. In: *Journal of Structural Engineering*, 127(11), 1266-1275.

Carvalho, A.W.B. e Reis, L.F. (2004). “*Circulação Vertical nos Edifícios*”. Viçosa: UFV, 20 ed.

Chastel, A.; Guillaume, J. *L'Escalier dans l'architecture de la Renaissance*. 1984. Paris.

Clímaco, J. C. T. de S. (2005). “*Estruturas de Concreto Armado*”. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília. Notas de aula.

Cohen, J.S. (1955). “Design of helical staircases”. In: *Concrete and Constructional Engineering*, 50(5), 181-194.

Cohen, J.S. (1959). “Design of helical staircases – 2”. In: *Concrete and Constructional Engineering*, 54(7), 249-256.

Cusens, A.R. e Kuang, J.G. (1966). “Experimental study of a free-standing staircase”. In: *Journal of the American Concrete Institute*, 63(5), 587-604.

Eleve Stairs (2009). “Stairs History”. Disponível em: <<http://www.elevestairs.com/stairs-history.php>> Acesso em: 15 de abril de 2009.

Encyclopaedia Universalis (2009). “Escalier”. Disponível em: <<http://www.universalis.fr/encyclopedie/escalier/>> Acesso em: 10 de junho de 2009.

Encyclopedia Britannica (2009). “Staircase”. Disponível em: <[http://encyclopedia.jrank.org/SOU\\_STE/STAIRCASE.html](http://encyclopedia.jrank.org/SOU_STE/STAIRCASE.html)> Acesso em: 10 de junho de 2009.

Fardis, M.N., Skouteropoulou, A.M.O. e Bousias, S.N. (1987). “Stiffness matrix of free-standing helical stairs”. In: *Journal of Structural Engineering*, 113(1), 74-87.

Filho, A. C. (2008). “*Projeto de escadas de concreto armado*”. Apostila de exercícios.

Finest-Stair-Parts (2009). “History of Staircases”. Disponível em: <<http://www.finest-stair-parts.com/history/index.htm>> Acesso em: 20 de junho de 2009.

Fuchssteiner, W. (1954). “Die freitragende wendeltreppe”. In: *Beton und Stahlbetonbau*, 49(11), 252-259.

Ghoneim, M.A. e El-Mihilmy, M.T. (2008). “*Design of Reinforced Concrete Structures*”. Cairo: Cairo University, 2 ed.

Gimena, L., Gimena, F.N. e Gonzaga, P. (2008). “Structural analysis of a curved beam element defined in global coordinates”. In: *Engineering Structures*, 30, 3355-3364.

Gould, P.L. (1963). “Analysis and design of cantilever staircase”. In: *American Concrete Institute Journal*, 60(7), 881-899.

Guerrin, A. e Lavour, R. C. (2002). “*Tratado de Concreto Armado*”. São Paulo: Hemus, v. 1, 1 ed.

- Haktanir, V. (1995). “The complementary functions method for the element stiffness matrix of arbitrary spatial bars of helicoidal axes”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, 1031–1056.
- Holmes, A.M.C. (1957). “Analysis of helical beams under symmetrical loading”. In: *Journal of the Structural Division*, 83, 1437-1 – 1437-37.
- Klemens, T. (1999). “The art of concrete stairs”. In: *Concrete Construction*, 53(4), 37-42.
- Knijnik, A. e Tavares, J.J.A. (1977). “Escada autoportante sem apoio no patamar”. In: *Estrutura*, 81, 109-126.
- Lee, H.P. (1969). “Generalized stiffness matrix of a curved-beam element”. In: *AIAA*, 7, 2042-2045.
- Liebemberg, A.C. (1960). “The design of slab type reinforced concrete stairways”. In: *The Structural Engineer*, 38(5), 156-164.
- Macginley, T.J. (1990). “*Reinforced Concrete: design theory and examples*”. Londres: Spon Press, 1 ed.
- Mattock, A.H. (1957). “Design and construction of a helical staircase”. In: *Concrete and Constructional Engineering*.
- Melges, J.L.P., Pinheiro, L.M. e Giongo, J.S. (1997). “*Concreto Armado: Escadas*”. Apostila de exercícios.
- Mielke, F. *Die Geschichte der Deutschen Treppen*. 1966. Berlim.
- Moraes, M. da C. (1982). “Concreto Armado. Caderno nº 4: Escadas”. Brasília: Universidade de Brasília – UnB. Notas de Aula.

Morgan, V.A. (1960). “Comparison of analyses of helical stairs”. In: *Concrete and Constructional Engineering*, 55(3), 127-132.

Morris, D.L. (1968). “Curved beam stiffness coefficients”. In: *Journal of the Structural Division*, 94, 1165-1178.

Mosley, W. H. e Bungey, J. H. (1987). “Reinforced Concrete Design”. Londres: Macmillan Education LTD, 3 ed.

MSPC – Informações Técnicas (2009). “Algumas Curvas e Superfícies II”. Disponível em: < [http://www.mspc.eng.br/matm/curv\\_sup02.shtml](http://www.mspc.eng.br/matm/curv_sup02.shtml) > Acesso em: 02 de abril de 2010.

Oesterblom, I. (1932). “ Bending and torsion in horizontally curved beams”. In: *Journal of American Concrete Institute*, 28, 597-606.

Pedroso, L. J. (2009). “Teoria das Estruturas Laminares”. Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil - PECC, Universidade de Brasília, Brasília. Notas de aula.

Pérouse de Montclos, J.M. L'Architecture à la française, XVI<sup>e</sup>-XVII<sup>e</sup>-XVIII<sup>e</sup> siècles. 1983. Picard. p. 167-178.

Petrolo, A.S. e Casciaro, R. (2004). “3D beam element based on Saint Venant's rod theory”. In: *Computers & Structures*, 82, 2471-2481.

Polillo, A. (1960). “Estruturas com hastes inclinadas resolvidas pelo método dos deslocamentos”. In: *Estrutura*, 18, 61-78.

Reinaldo, L. H. P. “Viga balcão circular”. Apostila de exercício.

Reinhart, E.C. “Metodologia do Trabalho Científico. Diretrizes para Elaboração de Projetos de Pesquisa, Monografias, Dissertações, Teses”. Disponível em: < [http://ideias1000.files.wordpress.com/2010/03/metodologia\\_do\\_trabalho.ppt#256,1,1](http://ideias1000.files.wordpress.com/2010/03/metodologia_do_trabalho.ppt#256,1,1), Metodologia do Trabalho Científico > Acessado em: 31 de maio de 2010.



Rocha, A. M. (1987). “*Curso Prático de Concreto Armado*”. São Paulo: Científica, v.3, 3 ed.

Rutenberg, A. (1975). “Analysis of Spiral Stairs Supported on a Central Column”. In: *Building Science*, 10, 37-42.

Sauter, F. (1964). “Free standing stairs”. In: *American Concrete Institute Journal*, 61(7), 847-870.

Scordelis, A.C. (1960). “Internal forces in uniformly loaded helicoidal girders”. In: *Journal of American Concrete Institute*, 31, 1013-1026.

Siev, A. (1962). “Analysis of free straight multiflight staircases”. In: *Journal of the Structural Division*, 88(3), 207-232.

Silva, E.L. e Menezes, E.M. (2001). “Metodologia da Pesquisa e Elaboração de Dissertação”. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 3 ed. Disponível em: < <http://projetos.inf.ufsc.br/arquivos/Metodologia%20da%20Pesquisa%203a%20edicao.pdf> > Acesso em: 31 de maio de 2010.

Smith, E. A. (1980). “Restrained warping in free-standing staircase”. In: *Journal of the Structural Division*, 106(3), 734-738.

Souza, V.C.M. e Cunha, A.J.P. (1994). “*Lajes em Concreto Armado e Protendido*”. Niterói: EDUFF, 1 ed.

Stefanou, G. D. (1984). “Simplified discrete method for the design of helical rectangular beams of very large width”. In: *Computers & Structures*, 18(5), 861-874.

Süssekind, J.C. (1979). “*Curso de Análise Estrutural. Deformações em Estruturas. Método das Forças*”. Porto Alegre: Editora Globo, 2 v., 3 ed.

Taleb, N. J. (1964). “The analysis of stairs with unsupported intermediate landings”. In: *Concrete and Constructional Engineering*, 59(9), 315-320.

Templer, J. (1995). “*The Staircase: Studies of Hazards, Falls, and Safer Design*”. Massachusetts: The MIT Press, 1 ed.

Templer, J. (1995). “*The Staircase: History and Theories*”. Massachusetts: The MIT Press, 1 ed.

The Institution of Structural Engineers (1985). “*Manual for the Design of Reinforced Concrete Building Structures*”. Londres: IStructE/ICE, 1 ed.

Time Life – Editores (1993). “*História em Revista. A Aurora da Humanidade*”. Rio de Janeiro: Abril Livros, 1 ed.

Timoshenko, S. e Krieger, S. W. (1987). “*Theory of Plates and Shells*”. New York: McGRAW-HILL, 2 ed.

Vieira, I.A. “*Escadas Especiais. Apostila de Exercícios. Método dos Elementos Finitos Aplicado a Placas e Cascas em Flexão*”. CESEC – Centro de Estudos de Engenharia Civil, Curitiba. Notas de aula.

Wadud, Z. e Ahmad, S. (2006). “Design charts for helicoidal stair slabs with landing at midspan”. In: *Journal of Structural Engineering*, 132(2), 312-320.

## APÊNDICE – A HISTÓRIA DAS ESCADAS

### História das Escadas

As civilizações humanas têm utilizado, há milhares de anos, uma grande diversidade de tipos de rampas e escadas. Acredita-se que a humanidade começou o uso de escadas em edificações por volta de 6000 A.C.(*elevestairs*). Podem-se perceber ao longo das eras as diferentes tendências arquitetônicas, além de características específicas de determinadas culturas. O uso das rampas sempre foi prioritário na criação de meios de locomoção entre pavimentos diferentes, ou simplesmente entre pontos em níveis diferenciados.

Segundo o site *elevestairs*, as primeiras escadas eram troncos de madeira sobrepostos ou montados juntos. Em épocas remotas o uso de escadas era um diferencial em termos de sobrevivência. O objetivo, portanto, era percorrer um trajeto o mais rápido possível, principalmente superando as dificuldades de locomoção em terrenos acidentados ou muito íngremes.

As civilizações antigas faziam suas rampas com o uso de blocos cortados sobrepostos, ou mesmo esculpindo diretamente na rocha o formato final, muito comumente com degraus. O exemplo a seguir é da antiga cidade de Petra, na Jordânia. Esta cidade foi fundada no século IV a.C.

As escadas e rampas sempre estiveram presentes em templos religiosos, nos acessos principais, talvez sugerindo uma simbologia, como se a subida representasse uma caminhada em direção à divindade.

Em castelos dos períodos medievais foram muito comuns as escadas espirais, fixas em um apoio central e livre do outro lado. Esse tipo de escada permitia certa vantagem estratégica para os soldados que defendiam os castelos, pois aqueles podiam empunhar suas espadas livremente com a mão direita, enquanto os adversários, em um nível abaixo, tinham pouca mobilidade com a mesma mão, pois o movimento da espada era dificultado pela parede. O oponente poderia ainda ser jogado do alto das escadas.



Exemplo de escada medieval (disponível em: <<http://www.elevestairs.com/stairs-history.php>>)

O final do século XIX foi considerado a era de ouro da construção de escadas. Peter Nicholson desenvolveu um sistema matemático para escadas e parapeitos, aproximando a arte das escadas dos trabalhos em metal e madeira. Por volta de 1980, Eva Jiricna, em Londres, começou a projetar escadas em vidro e metal inoxidável, dando às escadas um visual luxuoso e futurístico.

Atualmente as escadas cumprem também a função de segurança em uma edificação. Com a existência de escadas de emergência, geralmente externas aos edifícios. No Brasil muitos edifício não possuem este tipo de escadas, mas as novas construções estão sujeitas a este tipo de exigência.

### No Brasil

A arquitetura brasileira possui grandes trabalhos com qualidade reconhecida internacionalmente. Os arquitetos do país desenvolveram excelentes projetos, cujas rampas e escadarias são verdadeiros diferenciais de destaque. Cidades como Brasília e São Paulo são bons exemplos de onde há belas obras de rampas e escadas, devido à existência de muitas edificações comemorativas, para fins culturais e monumentos.

Uma das obras mais importantes do Brasil em termos de utilização de rampas é o pavilhão Ciccillo Matarazzo, no Parque Ibirapuera em São Paulo, também conhecido como prédio da Bienal. O projeto é de autoria de Oscar Niemeyer junto com Hélio Uchôa (Wikipedia). Possui mais de trinta mil metros quadrados de área construída e sedia a Bienal de São Paulo desde 1957.



Interior do prédio da Bienal.

O Memorial da América Latina, localizado na Barra Funda, em São Paulo, possui 84.480m<sup>2</sup> e abriga mais uma interessante rampa projetada por Niemeyer. Mais um trabalho de grande importância estética e que demonstra bem as possibilidades de formas conseguidas com o uso do concreto armado.



Rampa do Memorial da América Latina.

Outro exemplo de obra de grande importância histórica é o Congresso Nacional, em Brasília. A obra assinada por Niemeyer foi inaugurada em 1960, após a transferência da sede do governo federal para a cidade. O edifício possui uma grande rampa frontal, sem curvaturas e revestida em mármore branco.



Rampa do palácio do planalto.

## APÊNDICE – B ASPECTOS DE PROJETO DE RAMPAS E ESCADAS

Uma rampa em laje precisa ser armada longitudinalmente, para resistir aos esforços de flexão, e transversalmente, como armadura de distribuição. Portanto, funciona como uma laje calculada em uma direção, nos casos mais comuns. Isto, porém, não se aplica para rampas muito largas.

### Fundamentos de projeto

O patamar de escada é o elemento horizontal que separa dois lances de escada. Também chamado de patamar de descanso, este deve ser usado a cada conjunto de dezesseis degraus. O patamar é usado principalmente nos casos em que há mudança de direção da escada.

O degrau de escada é um elemento que possui duas faces. A horizontal é chamada piso, e a vertical é conhecida como espelho ( Souza, Cunha).

A diferença de níveis a ser vencida  $H$  determina o número de degraus necessário para a escada. O espelho  $e$  varia de 15 a 20cm. Determina-se o número de degraus pela expressão:

$$n = \frac{H}{e}$$

O piso dos degraus pode ser determinado pela expressão, chamada *relação de Blondel*:

$$g + 2e = m$$

sendo  $g$  o piso do degrau, e  $m$  um parâmetro de referência, variando de 0,59 a 0,66. Em geral adota-se 0,64.

A largura de uma escada pode ser aproximadamente 1,20m. esta dimensão permite a passagem simultânea de duas pessoas. Para escadas de maior movimento, para três pessoas, por exemplo, pode-se usar 1,90m. em escadas privativas, são comuns larguras entre 0,60m e 1,00m.

De acordo com Hool, cada 0,30m de largura de escada é capaz de permitir a passagem de 13 pessoas por minuto. Todas as pessoas de um andar deveriam conseguir esvaziá-lo em dois minutos. Estes valores de referência são usados para previsão de fuga da edificação em casos de incêndio.

O peitoril de escada tem valor aproximado de 0,90m. Os degraus devem ter cerca de 2,20m de altura livre acima deles.

Um patamar de escada deve ter largura de pelo menos três vezes o piso do degrau. Caso haja mudança de direção, a escada e o patamar devem ter a mesma largura.

#### Cargas atuantes

As cargas que devem ser consideradas são o peso próprio, sobrecarga, revestimentos e alvenarias e/ou peitoris. Para o caso de escadas, os degraus não são armados, mas entram no cálculo do peso próprio da estrutura.

O peso próprio por metro quadrado é dado a partir da espessura média:

$$g = h_{méd} \cdot \gamma_c = \left( h + \frac{e}{2} \right) \cdot \gamma_c$$

Para o revestimento utiliza-se o peso de 1kN/m<sup>2</sup>.

Parapeitos e alvenarias são considerados cargas distribuídas ao longo da(s) borda(s) da escada.

A NBR 6120:1980 define as sobrecargas de: 3,0kN/m<sup>2</sup> caso haja acesso ao público, e 2,0kN/m<sup>2</sup> quando não há acesso ao público.

O item 2.2.1.5 dessa norma estabelece que deve ser considerada uma carga horizontal de 0,8kN/m ao longo de parapeitos e balcões, na altura do corrimão, e a carga vertical mínima de 2,0kN/m.

O item 2.2.1.7 diz ainda que quando a escada é constituída de degraus isolados, estes devem ser calculados para suportarem uma carga concentrada de 2,5kN, na posição mais desfavorável. O item instrui que esta carga adicional não deve ser considerada para as vigas que sustentam a escada.

#### Escadas retas

#### Escadas armadas em uma direção

Neste caso as escadas são armadas na direção transversal ao seu desenvolvimento. Elas são apoiadas ao longo do comprimento, seja por vigas, ou paredes portantes. O cálculo é feito em apenas uma direção porque a razão do comprimento em relação à largura é superior a 2.

Os esforços são obtidos por análise estrutural, usando modelos em 2-D, de barras. O cálculo da armadura é feito pela espessura média do concreto. A armadura secundária é obtida pelo método usado para lajes, da NBR 6118:2003, tabela 19.1.

#### Escadas armadas em duas direções

Ocorre quando se tem ao menos três bordos apoiados. A análise dos esforços é feita pelos mesmos critérios usados no cálculo de lajes em duas direções, utilizando, por exemplo, o Método de Marcus para lajes retangulares. Souza e Cunha indicam ainda o método das linhas de ruptura como forma alternativa para o cálculo de escadas.

#### Escada em que o fundo acompanha a superfície superior

Para este tipo de escada é interessante a armação na direção transversal por causa de limitações geométricas. O dimensionamento é feito para cada vigota retangular. O piso do degrau é calculado como laje apoiada em vigotas.

#### Escada engastada em um dos lados

Para este tipo de estrutura, o momento transmitido devido ao engaste com a viga é decomposto nas componentes: flexão transversal e torção.

#### Escadas armadas longitudinalmente

Este tipo de estrutura ocorre quando não há apoios laterais, ao longo do comprimento. Significa que a escada se apóia apenas nos extremos do lance de escada, ou ainda tendo apoios laterais, quando estes são distantes, de forma que a relação entre vão seja superior a 2.



Os esforços atuantes são os seguintes:

$$M_{máx} = \frac{p \cdot l^2}{8} \qquad V_{máx} = \frac{p \cdot l}{2}$$

O cálculo dos esforços pode ser feito com a carga atuante por metro quadrado horizontal e com a projeção horizontal do vão.

No cálculo das armaduras deve-se considerar a espessura  $H$  mínima da laje. Isto representa uma desvantagem em relação à escada armada transversalmente.

desenho

### Cálculo de patamares

Normalmente não há alteração no método de cálculo. Contudo, especial atenção deve ser dada nas mudanças de direção, devido ao efeito de empuxo ao vazio.

Nos casos em que os apoios são indeslocáveis, o comportamento é semelhante ao de pórtico, com solução facilmente obtida por análise estrutural. Este efeito de pórtico geralmente é desconsiderado nos cálculos convencionais.

### Demais critérios de projeto

Toda a teoria vista até aqui trata de casos ideais, sem compromisso com a prática de casos reais de projeto. Contudo, para fazer esta compatibilização com a prática deve-se verificar as particularidades de uma situação real.

### Cálculo de deformações e fissurações

Uma vez obtidos os esforços que atuam em qualquer posição ao longo da estrutura helicoidal, pode-se obter as deformações referentes a estes esforços. De acordo com a NBR 6118:2003 a flecha elástica imediata para vigas e lajes calculadas em uma direção pode ser dada por:

$$f_i = \alpha \frac{Ml^2}{(EI)_{eq}}$$

## Inércia da seção fissurada

Para as análises de esforços ao longo da estrutura, sabe-se que a inércia da seção transversal não varia. Porém, para o cálculo das deformações do concreto deve-se levar em consideração o fato deste material trabalhar fissurado nas regiões de tração (considerando um dimensionamento no estado limite de utilização). A fissuração que ocorre deve ser interpretada como uma correção no valor da inércia da seção.

A NBR 6118:2003 adota a inércia fissurada para o Estádio II como:

$$I_{II} = \left( \frac{E_s}{E_c} \right) A_s z (d - x)$$

Onde:

$A_s$ : área da armadura tracionada.

$z$ : braço de alavanca das resultantes de tração e compressão.

$x$ : profundidade da linha neutra na seção.

Pelo método da norma esta inércia deve ser usada no cálculo da rigidez equivalente  $(EI)_{eq}$ , dado por:

$$(EI)_{eq} = E_{cs} \left\{ \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 I_0 + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] I_{II} \right\} \leq E_{cs} I_0$$

Sendo:

$E_{cs}$ : módulo de elasticidade secante do concreto.

$E_s$ : módulo de elasticidade do aço.

$M_a$ : momento fletor na seção crítica do vão considerado.

$M_r$ : momento de fissuração do elemento estrutural.

$I_0$ : momento de inércia da seção bruta de concreto.

$I_{II}$ : momento de inércia da seção fissurada no estágio II.

## Torção

Diversos autores estudaram e explicaram o tema dos efeitos da torção em um elemento de concreto armado. Sabe-se que a torção pura, sem a atuação simultânea de esforços cortantes, fletores ou normais existem raramente na prática (Leonhardt, *et al*). A torção

causa o empenamento da seção transversal e quando este empenamento é impedido (devido à armadura metálica) surgem tensões longitudinais.

O dimensionamento à torção deve levar em consideração que devido a torção surgem tensões de tração e compressão, o concreto deverá resistir apenas à compressão e os esforços de tração devem ser resistidos pela armadura.

Como mostrado por Leonhardt, as tensões de tração e compressão ocorrem aproximadamente a 45° e 135° respectivamente, em relação ao eixo do elemento linear. A tração ocorre na direção da rotação e a compressão no sentido contrário. As tensões ocorrem numa trajetória helicoidal em torno do elemento.

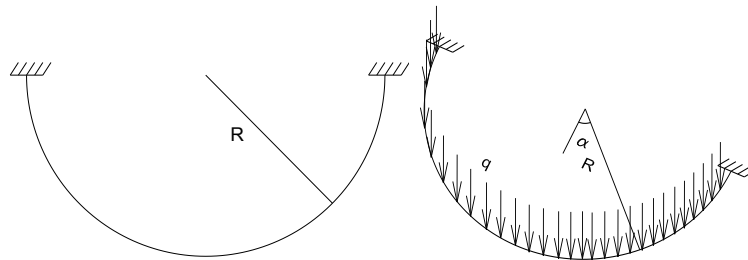
Para combater os esforços de torção usa-se geralmente a armação longitudinal combinada com estribos verticais. A norma brasileira NBR 6118:2003 pressupõe um modelo de treliça espacial, definida por um elemento de seção vazada, equilátera ao elemento que deve ser dimensionado. A diagonal da treliça é considerada com a inclinação  $30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ . Segundo Leonhardt, a diferença desta consideração inclinada e o uso de estribos verticais ocasiona o dobro da tensão de compressão no concreto, em relação à posição de 45° da treliça. A norma fixa também o uso de estribos na posição vertical e armadura longitudinal combinadas. São definidos os limites que verificam a suficiência das armaduras transversais e longitudinais. Não são citadas armaduras especiais de combate à torção.

A torção verificada em rampas helicoidais é chamada de *equilíbrio*, ou seja, não pode ser desprezada, como no caso da torção de *compatibilidade*. Considera-se portanto o desenvolvimento dos esforços de torção ao longo do desenvolvimento da estrutura com a finalidade de se encontrar os valores extremos.

## APÊNDICE – C ESTUDOS DA VIGA BALCÃO CIRCULAR

### Solução analítica

A primeira análise a ser feita provém da teoria das estruturas, no estudo de vigas balcão de formato circular. Foi usado o método das forças para esta resolução.



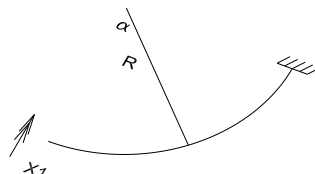
Viga balcão circular.

Uma viga balcão é um tipo específico de grelha. Uma grelha é um tipo de estrutura plana submetida a um carregamento perpendicular ao seu plano (Sussekind, 1973). Se, por exemplo, a grelha está no plano  $xy$ , perpendicular ao eixo  $z$ , ela será regida pelas três equações da estática:

$$\sum z = 0 \quad \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0$$

O modelo, construído com base no texto de Sússekind, trata-se de uma viga balcão curva, de raio constante e centro geométrico definido. Os dois bordos são engastados. Com isso têm-se seis esforços e as três equações de equilíbrio mencionadas anteriormente.

A simetria da estrutura será aproveitada, pois sendo a estrutura simétrica e os carregamentos uniformes, os diagramas serão simétricos ou anti-simétricos, como será visto adiante. Pode-se dividi-la para usar apenas uma das metades, conforme mostrado abaixo. Com isso a resolução do problema hiperestático limita-se ao cálculo de um valor desconhecido denominado  $X_1$ .



Hiperestático a ser calculado.

O método das forças consiste na resolução da equação de equilíbrio:

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

Sendo:

$\delta_{10}$ : deslocamento virtual na direção do hiperestático devido à ação do carregamento.

$\delta_{11}$ : deslocamento virtual na direção do hiperestático devido à ação do hiperestático.

$M_0$ : momento devido ao carregamento.

$M_1$ : momento devido ao hiperestático  $X_1 = 1\text{kN.m}$

$T_0$ : momento de torção devido ao carregamento.

$T_1$ : momento de torção devido ao hiperestático  $X_1=1\text{kN.m}$

$\alpha$ : ângulo de abertura do arco.

Para a obtenção do valor do esforço em qualquer posição do arco, faz-se:

$$E = E_0 + E_1 \cdot X_1$$

Sendo  $E$  o esforço a ser obtido.

$G$  é dado por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$I_t$  é dado por:

$$I_t = \beta b h^3$$

Onde:

$$\beta = \frac{1}{3} - (0,21 \frac{b}{h})(1 - \frac{h^4}{12b^4})$$

$$EI\delta_{10} = \int M_0 M_1 ds + \frac{EI}{GJ_p} \int T_0 T_1 ds$$

$$EI\delta_{11} = \int M_1 M_1 ds + \frac{EI}{GJ_p} \int T_1 T_1 ds$$

$$EI\delta_{10} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2qr^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \cdot r d\alpha - \frac{EI}{GJ_p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} qr^2 (\alpha - \sin \alpha) \sin \alpha \cdot r d\alpha$$

$$\frac{EI}{GJ_t} = 0,65$$

$$M_0 = 2qR^2 \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$T_0 = qR^2 (\alpha - \text{sen}\alpha)$$

$$\delta_{10} = \int \frac{M_0 \cdot M_1}{EI} ds + \int \frac{T_0 \cdot T_1}{GI_t} ds$$

$$EI\delta_{10} = 2qr^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2(\alpha/2) \cos(\alpha) d\alpha + \frac{EI}{GI_t} \cdot qr^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\alpha - \text{sen}\alpha) \text{sen}\alpha d\alpha$$

$$EI\delta_{10} = 2qr^3 \cdot 0,1073 + \frac{EI}{GI_t} \cdot qr^3 \cdot 0,2146$$

$$EI\delta_{10} = 0,2146qr^3(1 + 0,65)$$

$$EI\delta_{10} = 0,35409qr^3$$

$$M_1 = \cos \alpha$$

$$T_1 = \text{sen}\alpha$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} ds + \int \frac{T_1 \cdot T_1}{GI_t} ds$$

$$EI\delta_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\alpha) r d\alpha + \frac{EI}{GI_t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2(\alpha) r d\alpha$$

$$EI\delta_{11} = \frac{r}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2\alpha)) d\alpha + \frac{0,65r}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2\alpha)) d\alpha$$

$$EI\delta_{11} = \frac{r}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{0,65r}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 0,4125\pi r$$

Equação de compatibilidade:

$$EI\delta_{10} + EI\delta_{11} \cdot X1 = 0$$

$$-0,35409qr^3 + 0,4125\pi r \cdot X1 = 0$$

$$X1 = 0,2732qr^2$$

Momento nos apoios:

$$X_{10} + X_{11} \cdot X1 = 2qr^2 \text{sen}^2(\alpha/2) + \cos(\alpha) \cdot X1$$

Momento no meio do vão:

$$X_{10} + X_{11} \cdot X1 = 2qr^2 \text{sen}^2(0^\circ/2) + \cos(0^\circ) \cdot X1$$

Torção nos apoios:

$$X_{10} + X_{11} \cdot X_1 = qr^2(\alpha - \text{sen}(\alpha)) - \text{sen}(\alpha) \cdot X_1$$

Substituindo nas expressões acima os dados da viga balcão a ser analisada encontram-se os resultados dos momentos fletores e torçores. Complementando a análise, o esforço cortante é dado para um ângulo  $\alpha$  a partir dos apoios:

$$V = qr\alpha$$

Análise numérica da viga balcão

Feito o modelo de viga balcão e, uma vez obtidos os resultados pelo método das forças, será usado agora um programa de computador capaz de realizar a análise de esforços. O programa escolhido foi o *SAP 2000* versão 8. O desenho base foi construído na plataforma *cad*, em formato *dxf*, e posteriormente importado no *SAP*.

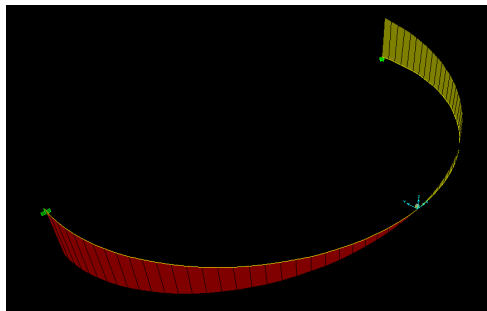


Figura. Exemplo de diagrama de momentos torçores em viga balcão.

Viga balcão calculada pelos métodos estudados

Tabela: Dados da viga balcão

Dados do modelo:	
Raio ( $r$ ):	4
Base da seção ( $b$ ):	1,20m
Altura da seção ( $h$ ):	0,15m
Ângulo total:	180°
Carregamento:	7,84kN/m

Tabela : Esforços nos apoios da viga balcão.

ESFORÇOS NOS APOIOS – VIGA BALCÃO (SI)						
	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$T$ (kN.m)	$N$ (kN)	$Q_x$ (kN)	$Q_y$ (kN)
<b>Fuchssteiner</b>	-126,25	0,00	36,43	0,00	0,00	49,24
<b>SAP 12</b>	-126,33	0,00	34,05	0,00	0,00	49,25
<b>Scordelis</b>	-125,44	0,00	37,32	-	-	-
<b>Prudon</b>	125,43	-	37,32	-	-	-
<b>Bergman</b>	-125,43	-	37,32	-	-	-
<b>Analítico</b>	-125,44	-	37,30	-	-	-

Tabela: Esforços no meio do vão da viga balcão.

ESFORÇOS NO MEIO DO VÃO – VIGA BALCÃO (SI)						
	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$T$ (kN.m)	$N$ (kN)	$Q_x$ (kN)	$Q_y$ (kN)
<b>Fuchssteiner</b>	34,13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
<b>SAP 12</b>	34,26	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
<b>Scordelis</b>	34,28	0,00	0,00	-	-	-
<b>Prudon</b>	-34,27	-	0,00	-	-	-
<b>Bergman</b>	34,27	-	0,00	-	-	-
<b>Analítico</b>	34,30	-	0,00	-	-	-

Observa-se que nesta etapa os resultados dos métodos são muito próximos. Isso se deve não só a simplicidade da solução da viga balcão, como também devido a ausência dos demais esforços, de valores nulos, que poderiam influenciar os valores obtidos. Esta proximidade entre os resultados não é verificada tão claramente a partir da consideração da inclinação.