UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UM PARALELO ENTRE O ELETROMAGNETISMO E O EQUIVALENTE TELEPARALELO DA RG

EDNARDO PAULO SPANIOL

Brasília, 22 de agosto de 2007

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UM PARALELO ENTRE O ELETROMAGNETISMO E O EQUIVALENTE TELEPARALELO DA RG

EDNARDO PAULO SPANIOL

ORIENTADORA:

VANESSA CARVALHO DE ANDRADE

Brasília, 22 de agosto de 2007

Na Terra Como No Céu

Não viemos por teu pranto
Nem viemos pra chorar
Viemos ao teu encontro
E estamos no teu altar
Vou seguir nosso caminho
Que é também teu caminhar
Na força do teu carinho
Esperamos nos salvar
Na terra como no céu
No sertão como no mar
Nas serras ou nas planuras
Esperamos nos salvar
Estando sempre altura
Nos teus caminhos lutar
Reparte entre nós senhor
Diante do seu altar
A justiça e a riqueza
Que fizemos por ganhar
Não deixa a gente passar
Pela fome em tua mesa
Não viemos por teu pranto
Nem viemos pra chorar.

Geraldo Vandré

Agradecimentos

A Deus.

À minha orientadora Vanessa Carvalho de Andrade pela paciência e imenso apoio que tornaram possível a realização desse trabalho.

Ao professor José Wadih Maluf pelas discussões esclarecedoras.

Ao meu pai Décio, à minha mãe Edna, e aos meus irmãos Helder e Ana Maria pelo amor incondicional, além dos recursos financeiros, né pai?

Aos meus amigos Pedro Ivo (Guinú), Murilo (Gurilão), Joel, Valdir, Bruno, Marcel, Josa, Ronnie, Marlos, Erivalter, Murilo, Nino, Emilio, Itarumã, Marcus, Thiago, Adoniel, Fábio, Maíra, Álvaro, Jonathan, Guilherme, Brunno, Gustavo, Hozana, Gabi, Leonardo, Stella, Marina, Daniel, Graciella, Naila, Clarissa, Anderson, Nanderson, Leandro, Andrei, Ronni, Ítalo, Abraão, Christian, Rodrigo, Rafael, Aaron, Luiz, Marcelo, Nelson, Camila, Alessandra, Alexander, Marianne e em especial ao Pedro Henrique pela ajuda com o tex, ao Wiliam e à Daniela pela revisão do texto e ao Sérgio pelas inúmeras conversas que tanto me ajudaram.

Ao CNPq por financiar o desenvolvimento desse trabalho.

Resumo

A suposição de que cargas e correntes de matéria poderiam gerar campos chamados, em analogia ao eletromagnetismo clássico, gravito-elétrico e gravito-magnético origina-se nos primórdios da Relatividade Geral (RG). Por outro lado, o Equivalente Teleparalelo da RG (ETRG), como teoria de gauge, parece-nos o cenário ideal para a definição destes campos que corresponderiam, exatamente como o eletromagnetismo, às componentes do tensor intensidade do campo de gauge. Esta é a proposta deste trabalho: investigar a natureza dos campos gravitacionais elétrico e magnético no contexto do ETRG, analisar as equações que conduzem suas dinâmicas e estudar o comportamento destes campos sob algumas aplicações específicas, tais como a geometria de Schwarzschild e a casca massiva girante.

Abstract

The assumption that matter charges and currents could generate fields, called by analogy to eletromagnetism, gravito-eletric and gravito-magnetic, comes from the origin of General Relativity (RG). Besides, the Equivalente Teleparallel of GR (ETGR), as a gauge theory, seems to be the ideal scenario to define these fields, based on the gauge field strength components. This is the purpose of this work: to investigate the nature of the gravitational electric and magnetic fields in the context of ETGR, to analyze the equations that lead its dynamics and to study the behavior of these fields under some specific applications, such as the Schwarzschild geometry and the rotating mass shell.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Gravidade Teleparalela e Teorias de Gauge

A teoria da Relatividade Geral (RG) desenvolvida por Einstein em 1916 ainda é considerada uma das teorias mais bem sucedidas do ponto de vista clássico. Tal teoria passou pelos testes aos quais foi submetida, como por exemplo, a elucidação do problema do periélio de Mercúrio e o desvio gravitacional para o vermelho dentre outros [1].

Entretanto, a abordagem geométrica na RG apresenta inúmeros problemas conceituais tais como a definição de energia para o campo gravitacional e o problema da unificação entre Gravitação e a Mecânica Quântica, pois sabe-se que não há uma versão quântica satisfatória da RG. Essas são algumas das dificuldades que motivam a abordagem da gravitação sob um outro ponto de vista.

Tendo isso em mente, a teoria que melhor se adapta a essa visão é o Equivalente Teleparalelo à Relatividade Geral (ETRG), uma teoria que, como o próprio nome diz, é equivalente à RG, pelo menos macroscopicamente. Isso é importante pois devemos resgatar os bons resultados obtidos pela RG. Nessa teoria, as quantidades dinâmicas são as tetradas. Elas são um conjunto de vetores linearmente independentes que descrevem o espaço-tempo físico.

Em 1979, Hayashi e Shirafuji [2], em um artigo intitulado "Nova Relatividade Geral", propuseram uma teoria de gravitação em que a torção substiuía a curvatura Reimaniana numa formulação de tetrada para o espaço-tempo de Weitzenbök. Na abordagem métrica ocorre o contrário: o tensor de torção é nulo e a curvatura fornece a dinâmica do sistema.

Em 1961, Moller [3] procurou abordar o problema da localização da energia do campo gravitacional baseando-se nas idéias do teleparalelismo. Esse problema conceitual advém da má interpretação do Princípio da Equivalência. Posteriormente Pellegrini e Plebansky [4] mostraram uma formulação lagrangeana do paralelismo absoluto.

Inspirado no sucesso da Relatividade Geral em sua abordagem métrica, em 1918 H. Weyl [5] tentou aplicar os seus conceitos ao eletromagnetismo em uma tentativa frustrada de unificar as duas teorias. Entretanto seu trabalho é considerado a semente das atuais teorias de gauge.

Em 1967, Hayashi e Nakano [6] formularam uma teoria de gauge para o grupo das translações que se mostrou intimamente ligada ao teleparalelismo.

Construir uma teoria de gauge para a gravitação é importante quando se leva em consideração o sucesso conseguido pela teoria de Yang Mills [7] na descrição de três das quatro interações fundamentais; a saber: a força fraca, forte e eletromagnética. Sendo assim, se quisermos resolver o problema da unificação entre Relatividade Geral e Mecânica Quântica, temos que saber se a gravitação se enquadra em uma teoria de gauge e qual é o seu grupo de simetria.

1.2 Gravito-eletromagnetismo no contexto da RG

A analogia entre o Eletromagnetismo e a Gravitação possui uma longa história [8], o que faz sentido quando comparamos a lei de Newton da gravitação e a lei de Coulomb. Essa similaridade faz com que investiguemos, por exemplo, se o movimento da carga gravitacional (massa) poderia gerar o equivalente ao campo magnético do eletromagnetismo.

Maxwell [9], em um dos seus trabalhos fundamentais, voltou sua atenção para a possibilidade de formular uma teoria da gravitação de forma correspondente às equações do eletromagnetismo. Na segunda metade do século XIX, Holzmüller [10] e Tisserand [11] postularam que a força gravitacional exercida pelo Sol sobre os planetas do sistema solar possui uma componente "magnética"adicional. Essa força extra poderia ser ajustada de forma a considerar o problema do periélio de Mercúrio. Entretanto, como sabemos, alguns anos depois a RG de Einstein resolveria este problema.

De fato, de acordo com a RG, matéria em movimento produziria uma contribuição para o campo gravitacional semelhante ao campo magnético de uma carga em movimento ou de um dipolo magnético. Esse campo se manifestaria por meio de vários efeitos, tais como a precessão de Lense-Thirring, o atraso do tempo gravitacional (time delay), mudança de fase de ondas eletromagnéticas e outros [12]. Infelizmente, a contribuição gravitomagnética encontrada para o movimento anômalo do periélio de Mercúrio é muito pequena; experimentalmente, ainda não é possível mensurar a correção da precessão de órbita planetária de Lense-Thirring. Mas existem experimentos como LAGEOS E LAGEOS II, além do GP-B da NASA tentando medir efeitos gravitomagnéticos.

No contexto da RG, [8] Mashhoon obtém equações análogas às equações de Maxwell numa aproximação linear, ou seja, o tensor métrico é escrito como $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, com $\eta_{\mu\nu}$ a métrica de Minkowski e $h_{\mu\nu}$ uma pertubação de primeira ordem. Nesse artigo ele define o potencial gravito-elétrico e o potencial vetor gravito-magnético em termos das componentes da pertubação. Esses por sua vez definem os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

Mashhoon também utiliza coordenadas de Fermi para escrever os campos gravito-elétrico e gravito-magnético em termos de componentes do tensor de curvatura. Essas coordenadas, de acordo com Synge, são no conceito Newtoniano de sistema de referência, a correta generalização relativística.

1.3 Em busca de E e B gravitacional

O Equivalente Teleparalelo da RG, por ter seus fundamentos baseados numa teoria de gauge abeliana, da mesma forma que o Eletromagnetismo, nos parece o cenário ideal para compreender a natureza de campos gravito-elétrico e gravito-magnéticos. Essa é a proposta desta dissertação: investigar a possibilidade de paralelo do ponto de vista teórico. É possível identificar componentes do tensor intensidade de campo $F^a{}_{\mu\nu}$, da teoria de gauge gravitacional baseada no grupo das translações, e relacionado à torção do espaço-tempo no teleparalelismo, com $\vec{E}$ e $\vec{B}$? Trata-se de uma nova abordagem, diferente das definições baseadas na RG que levam ao gravitomagnetismo [13].

1.4 Estrutura da dissertação

A dissertação está dividida na seguinte forma: no presente capítulo encontra-se uma revisão bibliográfica sobre o desenvolvimento do Equivalente Teleparalelo da RG bem como apresenta a questão do Gravitomagnetismo do ponto de vista da RG. O capítulo 2 é dedicado a discutir os principais conceitos envolvidos no Teleparalelismo, desde sua formulação de gauge, até sua dinâmica como teoria para o campo gravitacional. No capítulo 3 são propostas duas definições diferentes, baseadas no Teleparalelismo, para os campos gravito-elétrico e gravito-magnético. Ainda nesse capítulo as equações de campo serão discutidas para cada modelo. No capítulo 4 apresentamos a força de Lorentz gravitacional dentro desse contexto e finalmente partimos para duas aplicações: no capítulo 5 discutimos os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ e sua dinâmica para a solução de Schwarzschild e no capítulo 6 obtemos o campo gravito-magnético para a casca esférica massiva girante. No capítulo 7 traçamos as principais conclusões da dissertação.

Notação: para índices de espaço-tempo usaremos o alfabeto grego ($\mu, \nu, \sigma, ...$ $= 0, 1, 2, 3$), o início do alfabeto latino ($a, b, c.. = 0, 1, 2, 3$) designaremos para o espaço-tangente e o meio do alfabeto latino $(i, j, k...)$ assumem os valores de 1,2 e 3. Índices entre parênteses também estão relacionados ao espaço-tangente. Adotaremos a velocidade da luz igual a um $(c = 1)$.

Capítulo 2

Descrição do Equivalente teleparalelo da RG

2.1 Fundamentos do Teleparalelismo

O teleparalelismo surge de uma teoria de gauge para o grupo das translações, construída a partir de um espaço-tempo plano (Minkowski), com a métrica

$$\eta_{ab} = (+1, -1, -1, -1), \tag{2.1}$$

onde a cada ponto está associado um espaço tangente. É neste espaço tangente, ou interno, onde os potenciais de gauge $A^a{}_\mu$ serão definidos. A transformação de gauge será uma translação local nas coordenadas da fibra (espaço interno)

$$x'^a = x^a + a^a(x^\mu) , \tag{2.2}$$

e a derivada covariante será definida na forma usual das teorias de gauge

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + A^a{}_\mu \, P_a \, \Phi \tag{2.3}$$

onde P_a são os geradores das translações que atuam sob um campo qualquer Φ. Além disso, podemos definir o tensor intensidade de campo na forma também usual

$$F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu , \tag{2.4}$$

que satisfaz a relação

$$[D_\mu, D_\nu]\Phi = F^a{}_{\mu\nu} P_a \, \Phi. \tag{2.5}$$

O campo de tetradas surge da própria definição de derivada covariante. De fato, podemos escrever (2.3) como

$$D_\mu \, \Phi = h^a{}_\mu \, \partial_a \, \Phi \, , \tag{2.6}$$

onde a tetrada é dada por

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + A^a{}_\mu \equiv D_\mu \, x^a \, . \tag{2.7}$$

Esta é uma tetrada não trivial e a gravitação, na forma do potencial de gauge, representa esta não trivialidade. Se os dois espaços (tangente e físico) descrevem o espaço-tempo de Minkowski, então as tetradas são determinadas por

$$h^a{}_\mu = \frac{\partial q^a}{\partial x^\mu}. \tag{2.8}$$

Assim a transformação $dq^a = h^a{}_\mu(x) dx^\mu$ poderá ser integrada globalmente e a transformação será chamada de holonômica. Neste caso temos uma tetrada trivial.

Da covariância de $D_\mu \Phi$ determinamos a lei de transformação dos potenciais de gauge:

$$A^{a'}{}_\mu = A^a{}_\mu - \partial_\mu \delta\alpha^a \, . \tag{2.9}$$

A presença da tetrada no espaço-tempo induz a existência de estruturas adicionais no mesmo. Assim, o campo de tetradas define de forma natural uma métrica Riemanniana

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} \, h^a{}_\mu \, h^b{}_\nu \, , \tag{2.10}$$

em termos da qual a conexão de Levi–Civita

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^\sigma{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left[\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right] \tag{2.11}$$

pode ser introduzida. Tal conexão dará origem à uma curvatura no espaço-tempo, cenário onde se desenvolve a RG de Einstein, em que a interação gravitacional é representada por uma geometrização deste espaço.

Por outro lado, o campo de tetradas pode também ser usado para definir a conexão

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = h_a{}^{\sigma} \partial_\nu h^a{}_\mu \ , \tag{2.12}$$

chamada conexão de Cartan, cuja peculiaridade é transportar pararalelamente a tetrada (daí o nome teleparalelismo, ou paralelismo absoluto):

$$\nabla_\nu h^a{}_\mu \equiv \partial_\nu h^a{}_\mu - \Gamma^{\theta}{}_{\mu\nu} h^a{}_\theta = 0 \ . \tag{2.13}$$

Tal conexão gera, por sua vez, uma torção no espaço resultante da não simetria de seus últimos índices

$$T^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\mu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} \ . \tag{2.14}$$

Uma importante propriedade da teoria é o fato de o tensor intensidade de campo $F^a{}_{\mu\nu}$ corresponder exatamente à torção escrita na base tetrada:

$$F^a{}_{\mu\nu} = \ h^a{}_\rho \, T^{\rho}{}_{\mu\nu} \ . \tag{2.15}$$

Consideremos novamente a conexão de Cartan. Calculando sua curvatura, vemos que ela se anula identicamente, ou seja:

$$R^{\theta}{}_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\theta}{}_{\rho\nu} + \Gamma^{\theta}{}_{\sigma\mu} \, \Gamma^{\sigma}{}_{\rho\nu} - (\mu \leftrightarrow \nu) \equiv 0 \ . \tag{2.16}$$

Assim, a conexão de Cartan caracteriza um espaço onde há torção somente para a descrição da interação gravitacional. Tal espaço é chamado de Weitzenböck [16] e esse é o palco para a descrição teleparalela da gravitação.

É importante ressaltar que as conexões de Levi-Civita e Cartan estão definidas no mesmo espaço e, portanto, o mesmo é munido de duas estruturas simultâneas: uma Riemanniana e uma teleparalela. Nesse espaço, os índices locais de Lorentz são abaixados e levantados com a métrica de Lorentz η^{ab} e os índices tensoriais são abaixados e levantados com a métrica Riemanniana $g^{\mu\nu}$. Entretanto, a descrição da gravitação requer apenas uma das estruturas geométricas dadas acima. Podemos facilmente passar de um formalismo ao outro por meio da relação entre as conexões

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu} + K^{\sigma}{}_{\mu\nu} \ , \tag{2.17}$$

com

$$K^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[T_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu} + T_{\nu}{}^{\sigma}{}_{\mu} - T^{\sigma}{}_{\mu\nu}\right], \tag{2.18}$$

o tensor de contorção. Podemos ainda encontrar uma relação entre as curvaturas das conexões de Cartan e Levi-Civita utilizando a relação (2.17):

$$R^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} = \overset{\circ}{R}{}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} + Q^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} \equiv 0\ , \tag{2.19}$$

sendo $\overset{\circ}{R}{}^{\theta}{}_{\rho\mu\nu}$ a curvatura da conexão de Levi–Civita e

$$Q^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} = D_{\mu}K^{\rho}{}_{\theta\nu} - D_{\nu}K^{\rho}{}_{\theta\mu} + K^{\sigma}{}_{\theta\nu}\, K^{\rho}{}_{\sigma\mu} - K^{\sigma}{}_{\theta\mu}\, K^{\rho}{}_{\sigma\nu}. \tag{2.20}$$

Surge neste ponto o conceito de derivada covariante teleparalela, denotada por D_{μ}. Ela corresponde exatamente à derivada covariante de Levi–Civita reescrita em termos das grandezas do espaço de Weitzenböck.

2.2 Lagrangeana e equações de campo: Equivalência com a RG

Consideremos agora a dinâmica dos campos de gauge. Ela será dada pela lagrangeana

$$\mathcal{L}_G = \frac{h}{16\pi G}\, S^{\rho\mu\nu}\, T_{\rho\mu\nu}\ , \tag{2.21}$$

com $h = \det(h^{a}{}_{\mu})$ e

$$S^{\rho\mu\nu} = -S^{\rho\nu\mu} \equiv \frac{1}{2}\left[K^{\mu\nu\rho} - g^{\rho\nu}\, T^{\theta\mu}{}_{\theta} + g^{\rho\mu}\, T^{\theta\nu}{}_{\theta}\right]. \tag{2.22}$$

Como nas teorias de gauge usuais, essa lagrangeana é quadrática no tensor intensidade de campo. Considerando a relação (2.17), podemos reescrevê-la em termos da conexão de Levi-Civita somente. A menos de uma divergência total, ela corresponde exatamente à lagrangeana de Hilbert–Einstein da RG

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi G}\,\sqrt{-g}\,\overset{\circ}{R}, \tag{2.23}$$

considerando a identificação $h = \sqrt{-g}$.

Além disso, as equações de campo que surgem dessa lagrangeana

$$\partial_\sigma (h S_a{}^{\sigma\rho}) - 4\pi G (h j_a{}^\rho) = 0 \; , \tag{2.24}$$

com

$$j_a{}^\rho \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^a{}_\rho} = \frac{h_a{}^\lambda}{4\pi G} (F^c{}_{\mu\lambda} S_c{}^{\mu\rho} - \frac{1}{4} \delta_\lambda{}^\rho F^c{}_{\mu\nu} S_c{}^{\mu\nu}) \tag{2.25}$$

se mostram totalmente equivalentes às equações de Einstein. Esta é a corrente energia-momento de gauge, no contexto da teoria de gauge para o grupo das translações. (para uma discussão mais detalhada, ver [14]). Vamos escrever agora a versão teleparalela do pseudo-tensor do campo gravitacional

$$h t_\lambda{}^\rho = \frac{h}{4\pi G} \left(\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \, S_\mu{}^{\rho\nu} - \frac{1}{4} \, \delta_\lambda{}^\rho \, T^\theta{}_{\mu\nu} \, S_\theta{}^{\mu\nu} \right) . \tag{2.26}$$

Podemos escrever o $t_\lambda{}^\rho$ em termos da corrente de gauge $j_a{}^\rho$ como

$$t_\lambda{}^\rho = h^a{}_\lambda j_a{}^\rho + \frac{1}{4\pi G} \, \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \, S_\mu{}^{\rho\nu} . \tag{2.27}$$

Vemos claramente a origem do termo de conexão que transforma a corrente de gauge $j_a{}^\rho$ em um pseudo-tensor $t_\lambda{}^\rho$.

2.3 Teleparalelismo e Simetria de Dualidade

Quando uma teoria possui simetria de dualidade, a equação de campo desta teoria é dada pela indentidade de Bianchi escrita para o tensor intensidade de campo dual. Por outro lado, a gravitação, como descrita pela Relatividade Geral, não apresenta propriedade semelhante, já que as equações geométricas escritas para o tensor de curvatura dual não reproduzem as equações de Einstein. Nesse sentido, é usual afirmar que teorias de gauge são fundamentalmente geométricas, pois as equações de campo na ausência de fonte são relacionadas por dualidade com as identidades de Bianchi com origem puramente na geometria [15].

Primeiramente, definiremos a torção dual generalizada da seguinte forma

$$^{*}T^{\alpha}{}_{\rho\sigma} = \tfrac{1}{2}\, \epsilon_{\theta\lambda\rho\sigma}\, S^{\alpha\theta\lambda}, \tag{2.28}$$

com $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ o tensor totalmente anti- simétrico de Levi-Civita. Note que a definição (2.28) leva em consideração todas as possíveis contrações de índices e pode ser considerada como uma generalização da operação dual para *soldered bundles.*

A definição (2.28) apresenta todas as propriedades para ser considerada uma definição dual sólida. Por exemplo, aplicada duas vezes nas componentes da torção, recuperamos, a menos de um sinal, a própria torção. Ou seja:

$$^{**}T^{\alpha}{}_{\rho\sigma} \equiv \tfrac{1}{2}\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, {}^{*}S^{\alpha\mu\nu} = -T^{\alpha}{}_{\rho\sigma}. \tag{2.29}$$

Dessa forma, a ação teleparalela

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4k^2} \int h\; T_{\rho\mu\nu}\, S^{\rho\mu\nu} d^4x \tag{2.30}$$

pode ser reescrita como

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4k^2} \int T_{\alpha\mu\nu}\; {}^{*}T^{\alpha}{}_{\rho\sigma}\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\; h\, d^4x, \tag{2.31}$$

que é uma generalização da lagrangeana quadrática no tensor intensidade de campo da teoria de gauge.

Vamos considerar a identidade de Bianchi da gravidade teleparalela, que possui a forma [16]

$$\partial_\rho F^{a}{}_{\mu\nu} + \partial_\nu F^{a}{}_{\rho\mu} + \partial_\mu F^{a}{}_{\nu\rho} = 0 \tag{2.32}$$

e que pode ser escrita para o tensor dual como

$$\epsilon^{\lambda\rho\mu\nu}\; \partial_\rho({}^{*}F^{a}{}_{\mu\nu}) = 0. \tag{2.33}$$

Sendo

$$^{*}F^{a}{}_{\mu\nu} = h^{a}{}_{\rho}\; {}^{*}T^{\rho}{}_{\mu\nu}. \tag{2.34}$$

e usando o fato de que

$$\partial_\rho(h\epsilon^{\lambda\rho\mu\nu}) = 0, \tag{2.35}$$

podemos reescrever (2.33) da seguinte forma:

$$\partial_\sigma(h S_a{}^{\rho\sigma}) = 0. \tag{2.36}$$

Ou seja, vemos que a identidade de Bianchi escrita para a torção dual produz uma corrente tensorial de energia-momento nula

$$j_a{}^\rho = 0. \tag{2.37}$$

Utilizando a definição da conexão de Cartan (2.12) e a relação $S_a{}^{\rho\sigma} = h_a{}^\lambda S_\lambda{}^{\rho\sigma}$, podemos reescrever (2.36) como:

$$\partial_\sigma(h S_\lambda{}^{\rho\sigma}) - h\, \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\, S_\mu{}^{\rho\nu} + h\, T^\mu{}_{\nu\lambda}\, S_\mu{}^{\nu\rho} = 0, \tag{2.38}$$

que pode ser escrita como a equação de campo

$$\partial_\sigma(h S_\lambda{}^{\rho\sigma}) - k^2 (h t_\lambda{}^\rho) = 0, \tag{2.39}$$

com

$$h t_\lambda{}^\rho = \frac{h}{k^2}\left(\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\, S_\mu{}^{\rho\nu} - T^\mu{}_{\nu\lambda}\, S_\mu{}^{\nu\rho}\right). \tag{2.40}$$

Confrontando expressão acima com o pseudo-tensor energia-momento do campo gravitacional (2.26), vemos que a teoria teleparalela só apresenta simetria de dualidade se

$$T^\mu{}_{\nu\lambda}\, S_\mu{}^{\nu\rho} = \tfrac{1}{4}\, \delta_\lambda{}^\rho\, T^\mu{}_{\nu\theta}\, S_\mu{}^{\nu\theta}. \tag{2.41}$$

Esta é uma condição que torna a gravidade teleparalela simetricamente dual, perdendo, porém, sua generalidade. Para maiores detalhes ver [15].

Capítulo 3

Equações de Maxwell Gravitacionais

3.1 Os modelos propostos

O Equivalente teleparalelo da RG, como bem apresentado na seção anterior, é uma teoria para a interação gravitacional que surge de uma teoria de gauge abeliana da mesma forma que o Eletromagnetismo tendo entretanto, um outro grupo de simetria por trás, o grupo das translações, em oposição ao grupo U(1) da teoria eletromagnética. A proposta deste trabalho é investigar as semelhanças entre esses dois cenários para essas duas interações fundamentais da natureza. O paralelo entre ambas será conduzido ao limite possível e as diferenças que se revelarem serão, espera-se, devidamente comentadas. Nossa idéia será criar ou pelo menos sugerir as versões de campo gravito-elétrico e gravito-magnético, em analogia aos campos elétrico e magnético do Eletromagnetismo. Esses campos serão sugeridos a partir da teoria de gauge em questão e, portanto, serão conceitualmente completamente diferentes das versões gravito-elétrica/magnética introduzidas no cenário da RG (ver seção 1.2). Conduziremos o paralelo a partir de duas definições diferentes, ambas motivadas pelo formalismo de gauge. Porém, como se verá, partindo de compreensões diferentes sobre a gravitação como teoria efetiva de um modelo de gauge.

3.1.1 Definição D1

A consideração primeira para a construção dessa definição será partir da analogia direta entre os tensores intensidade de campo das duas teorias, a lembrar:

$$\begin{aligned} \text{Eletromagnetismo:} \qquad F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \\ \text{Teleparalelismo:} \qquad F^a{}_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu. \end{aligned}$$

Obviamente, o grupo de gauge de cada teoria difere e o potencial de gauge gravitacional carrega um índice interno com quatro dimensões enquanto o potencial eletromagnético possui índice com apenas uma dimensão, relativo ao grupo U(1), omitido na representação usual. Respeitando as características próprias de cada teoria e inspirados no Eletromagnetismo, propomos construir os campos elétrico e magnético gravitacionais como as componentes diretas do tensor intensidade de campo:

$$\begin{aligned} F^a{}_{0i} &= E^a{}_i; \\ F^a{}_{ij} &= -\epsilon_{ijk} B^a{}_k. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Usamos aqui a notação usual para o índice de permutação tri-dimensional ϵ_{ijk}, que difere da notação de Einstein, mas que mantém a forma semelhante ao adotado no eletromagnetismo sem perda de generalidade [17]. Essas definições serão testadas nas equações de campo e aplicações diretas para distribuições de matéria particulares, como veremos adiante.

3.1.2 Definição D2

A possibilidade da mistura e contração entre índices internos (de álgebra) e índices externos (de espaço-tempo) é uma propriedade típica de teorias de gauge para a gravitação. Tecnicamente, isso ocorre devido à presença de uma forma soldadora que corresponde ao campo de tetradas. Essa propriedade provoca profundas mudanças com relação às teorias usuais internas. No teleparalelismo, esse efeito já foi observado, por exemplo, na construção da lagrangeana teleparalela. Somente para ilustrar essa idéia vamos rever sua construção. O ponto de partida é atribuir à lagrangeana o valor do termo de acoplamento usual das teorias de gauge:

$$\mathcal{L} = \frac{h}{16\pi G}[\frac{1}{4} F^a{}_{\mu\nu} F_a{}^{\mu\nu}] \tag{3.2}$$

ou ainda

$$\mathcal{L} = \frac{h}{16\pi G}\left[\frac{1}{4} F^a{}_{\mu\nu}\, F^b{}_{\theta\rho}\, g^{\mu\theta} N_{ab}{}^{\nu\rho}\right] , \tag{3.3}$$

com

$$N_{ab}{}^{\nu\rho} = \eta_{ab} g^{\nu\rho} \equiv \eta_{ab} h_c{}^\nu h^{c\rho}. \tag{3.4}$$

Entretanto, a tetrada sugere uma generalização nas contrações de índices, realizada com a inclusão de permutações cíclicas em $N_{ab}{}^{\nu\rho}$

$$N_{ab}{}^{\nu\rho} = \eta_{ab}\, h_c{}^\nu\, h^{c\rho} + 2\, h_a{}^\rho\, h_b{}^\nu - 4\, h_a{}^\nu\, h_b{}^\rho\, . \tag{3.5}$$

A substituição na lagrangeana de gauge resulta em

$$\mathcal{L} = \frac{h}{16\pi G} F^a{}_{\mu\nu}\, F^b{}_{\theta\rho}\, g^{\mu\theta}\left[\frac{1}{4}\, h_d{}^\nu\, h^{d\rho}\, \eta_{ab} + \frac{1}{2}\, h_a{}^\rho\, h_b{}^\nu - h_a{}^\nu\, h_b{}^\rho\right] , \tag{3.6}$$

que pode ser escrita, usando a identificação da Eq.(2.15) como

$$\mathcal{L} = \frac{h}{16\pi G}\left[\frac{1}{4}\, T^\rho{}_{\mu\nu}\, T_\rho{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\, T^\rho{}_{\mu\nu}\, T^{\nu\mu}{}_\rho - T_{\rho\mu}{}^\rho\, T^{\nu\mu}{}_\nu\right] . \tag{3.7}$$

Esta é a lagrangeana teleparalela equivalente (a menos de divergências) à lagrangeana da RG.

Essa generalização para a obtenção da lagrangeana como variável dinâmica também irá se refletir em outras grandezas da teoria, como por exemplo, na definição da generalização da torção dual (ver a discussão na seção 2.4). De maneira análoga, iremos argumentar aqui que nas equações de campo, a grandeza que desempenha o papel do tensor intensidade de campo análogo das teorias de Yang-Mills não será $F^a{}_{\mu\nu}$, mas sim sua generalização dado pelo superpotencial $S^a{}_{\mu\nu}$, definido em (2.22)

$$S^{a\mu\nu} = h^a{}_\rho S^{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[K^{\mu\nu\rho} - g^{\rho\nu}\, T^{\theta\mu}{}_\theta + g^{\rho\mu}\, T^{\theta\nu}{}_\theta\right] . \tag{3.8}$$

É natural, portanto, considerar que os campos gravito-elétrico e gravito-magnético sejam componentes deste tensor intensidade de campo generalizado, ou seja,

$$S_a{}^{0i} = E_a{}^i; \tag{3.9}$$

$$S_a{}^{ij} = \epsilon^{ijk} B_a{}^k. \tag{3.10}$$

Conduziremos ao longo desta seção os cálculos relativos às equações de campos, tentando obter o análogo às equações de Maxwell teleparalelas e faremos uma discussão no contexto do modelo Teleparalelo Dual. Realizaremos finalmente, nos capítulos 5 e 6 aplicações a geometrias particulares. Como será visto adiante, em certos momentos a não linearidade da gravitação tornará o trabalho extremamente árduo e realizaremos as discussões através de aproximações simplicadoras. Confrontaremos as duas abordagens apontando as respectivas vantagens (ou desvantagens) de cada uma.

3.2 Primeiro par das equações de campo

Consideremos a versão teleparalela para as equações do campo gravitacional. Optamos por trabalhar ao longo de todo o desenvolvimento da dissertação com as equações sem fontes, já que nas aplicações cruciais para os testes dos modelos consideraremos sempre as conhecidas soluções de vácuo. Além disso, a discussão do modelo de gravitação dual também pressupõe essa condição. A equação é dada por (2.24):

$$\partial_\sigma (h S_a{}^{\sigma\rho}) - 4\pi G (h j_a{}^\rho) = 0.$$

Sendo essas as equações dinâmicas da teoria, esperamos obter o análogo ao primeiro par das equações de Maxwell do Eletromagnetismo. Portanto, para $\rho = 0$ devemos encontrar a equação equivalente a Lei de Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \tag{3.11}$$

ou equivalentemente

$$\partial_i E^i = 0, \tag{3.12}$$

e para $\rho = i$, esperamos obter o análogo da Lei de Ampére com correções de Maxwell,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{3.13}$$

que pode ser escrita ainda como

$$\epsilon_{ijk}\partial_j B_k = \frac{\partial E_i}{\partial t}. \tag{3.14}$$

A seguir, aplicaremos cada uma das definições sugeridas pela teoria de gauge gravitacional e estudaremos suas implicações.

3.2.1 Aplicando a definição D1

Em nossa primeira definição, as componentes do tensor intensidade de campo serão identificadas com os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Devemos, portanto, reescrever a equação (2.24) em termos de torções, que são por sua vez relacionadas ao tensor $F^a{}_{\mu\nu}$ através de (2.15). Obtemos assim para $\rho = 0$

$$\begin{aligned}
& \partial_k[\frac{h}{2}(g^{0k}h_a{}^iT^0{}_{0i} + g^{jk}h_a{}^0T^0{}_{0j} - g^{jk}h_a{}^iT^0{}_{ij} + g^{0j}h_a{}^0T^k{}_{0j} + g^{0j}h_a{}^iT^k{}_{ij} \\
- \;& g^{00}h_a{}^iT^k{}_{0i} - \eta_{ab}g^{kj}g^{00}T^b{}_{0j} + \eta_{ab}g^{0k}g^{0i}T^b{}_{0i} - \eta_{ab}g^{kj}g^{0i}T^b{}_{ij}) \\
+ \;& h(-g^{0k}h_a{}^0T^i{}_{0i} - g^{ik}h_a{}^0T^j{}_{ij} + g^{00}h_a{}^kT^i{}_{0i} - g^{0i}h_a{}^kT^0{}_{0i} \\
+ \;& g^{0i}h_a{}^kT^j{}_{ij})] + 4\pi G j_a{}^0 = 0.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Substituindo a definição D1 encontramos

$$\begin{aligned}
& \partial_k[h(\frac{1}{2}[g^{0k}h_a{}^ih_d{}^0 + g^{ik}h_a{}^0h_d{}^0 + g^{0i}h_a{}^0h_d{}^k - g^{00}h_a{}^ih_d{}^k + g^{0k}g^{0i}\eta_{ad} \\
- \;& g^{ki}g^{00}\eta_{ad}]E^d{}_i + \frac{1}{2}[g^{jk}h_a{}^ih_d{}^0 - g^{0j}h_a{}^ih_d{}^k + g^{kj}g^{0i}\eta_{ad}]\epsilon_{ijm}B^d{}_m) \\
+ \;& (-g^{0k}h_a{}^0h_d{}^i + g^{00}h_a{}^kh_d{}^i - g^{0i}h_a{}^kh_d{}^0)E^d{}_i \\
+ \;& (g^{ik}h_a{}^0h_d{}^j - g^{0i}h_a{}^kh_d{}^j)\epsilon_{ijm}B^d{}_m] + 4\pi G j_a{}^0 = 0.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Podemos interpretar ${j_a}^0$ como fonte da equação, o que reflete evidentemente o caráter não-linear da gravitação: o próprio campo é fonte de campo. A equação pode ainda ser escrita alternativamente como uma equação de campos no vácuo. Porém trata-se de uma expressão extremamente complexa (não escrita explicitamente) pois existem vários tipos de acoplamento entre as componentes de $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Notamos que diferentemente das equações de Maxwell, esse conjunto de equações apresenta novos termos envolvendo o operador ∇. O paralelo direto com as equações do Eletromagnetismo mostra-se, portanto, prejudicado no presente cenário.

As equações para $\rho = q$ não serão exibidas aqui por não trazerem nenhuma nova informação, por serem excessivamente longas e finalmente devemos adiantar que o modelo D1, por não reproduzir a fenomenologia desejada, pelo menos em princípio, não terá o mesmo enfoque ao longo da dissertação. Porém será melhor investigado posteriormente. Pelo mesmo motivo não escrevemos explicitamente os termos provenientes do ${j_a}^q$ e ${j_a}^0$.

3.2.2 Aplicando a definição D2

A equação de campo para $\rho = 0$ após a aplicação da definição D2 assume a forma geral:

$$\partial_i(h{E_a}^i) = 4\pi G(h{j_a}^0). \tag{3.17}$$

Observamos que a escolha do superpotencial ${S_a}^{\sigma\rho}$, como sendo o tensor generalizado ao tensor intensidade de campo gravitacional, permitiu que surgisse naturalmente na equação o análogo do divergente de $\vec{E}$ a menos de um fator multiplicativo dado pelo determinante da tetrada. Escrita nesta forma, vemos a interpretação direta de $h{j_a}^0$ como fonte de campo gravitacional na equação, totalmente análoga à Lei de Gauss. Temos explicitamente que "gravitação gera gravitação".

Alternativamente, podemos manter o caráter de equação de vácuo, e evidenciar a não-linearidade da gravitação na forma que se segue:

$$\partial_i(h{E_a}^i) \quad - \quad \frac{4\pi G}{c^4}\, h[{\mathcal{H}^{bc}}_{aij}{E_b}^i{E_c}^j + {\mathcal{I}^{bc}}_{anij}\epsilon^{jnk}{E_c}^i{B_b}^k$$

$$+ \quad g_{ri}h^c{}_j\epsilon^{jrk}(E_c{}^iB_a{}^k - 1/2E_a{}^iB_c{}^k)$$

$$+ \quad \mathcal{J}^c{}_{ij}E_c{}^iE_a{}^j + \mathcal{K}^{bc}{}_{arijn}\epsilon^{ijk}\epsilon^{nrt}B_c{}^kB_b{}^t] = 0 \tag{3.18}$$

com

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{bc}{}_{aij} = &- \frac{1}{2}g_{00}h_a{}^0h^b{}_ih^c{}_j + \frac{1}{2}h_a{}^0g_{0j}h^b{}_ih^c{}_0 - \frac{1}{4}h_a{}^0g_{ij}h^b{}_0h^c{}_0 \\
&+ \frac{1}{2}h_a{}^0g_{0i}h^b{}_0h^c{}_j + \frac{1}{4}h_a{}^0g_{00}h^c{}_ih^b{}_j - \frac{1}{4}h_a{}^0g_{0j}h^c{}_ih^b{}_0 \\
&- \frac{1}{4}h_a{}^0g_{0i}h^c{}_0h^b{}_j + \frac{1}{2}h_{aj}h^c{}_ih^b{}_0 - h_{aj}h^b{}_ih^c{}_0 + h_{a0}h^b{}_ih^c{}_j \\
&- \frac{1}{2}h_{a0}h^c{}_ih^b{}_j; \\
\mathcal{I}^{bc}{}_{anij} = &\; h_a{}^0g_{0n}h^b{}_ih^c{}_j - h_a{}^0g_{ni}h^b{}_0h^c{}_j - \frac{1}{2}h_a{}^0g_{0n}h^c{}_ih^b{}_j \\
&+ \frac{1}{2}h_a{}^0g_{ni}h^c{}_0h^b{}_j + \frac{1}{2}h_{an}h^c{}_ih^b{}_j - h_{an}h^b{}_ih^c{}_j; \\
\mathcal{J}^c{}_{ij} = &\; \frac{1}{2}g_{ij}h^c{}_0 - g_{0i}h^c{}_j + \frac{1}{2}g_{0j}h^c{}_i; \\
\mathcal{K}^{bc}{}_{arijn} = &\; \frac{1}{2}h_a{}^0g_{ri}h^b{}_jh^c{}_n + \frac{1}{2}h_a{}^0g_{ni}h^c{}_jh^b{}_r.
\end{aligned}$$

Consideremos agora a componente espacial da equação de campo $\rho = q$. Após a aplicação da definição D2 obtemos a forma compacta

$$\epsilon^{qjk}\partial_j(hB_a{}^k) - \partial_0(hE_a{}^q) = 4\pi G(hj_a{}^q). \tag{3.19}$$

Novamente, aqui, se considerarmos $hj_a{}^q$ como fonte das equações, encontramos algo muito similar à lei de Àmpere corrigida do eletromagnetismo. Se, ao contrário, quisermos manter o caráter de equação de vácuo com a corrente transformada em termos de acoplamento entre as componentes dos campo gravito-elétrico e magnéticos, obteremos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
&\epsilon^{qjk}\partial_j(hB_a{}^k) - \partial_0(hE_a{}^q) = 4\pi G\, h[\mathcal{P}^{bc}{}_{ai}E_b{}^iE_c{}^q + \mathcal{Q}^{bc}{}_{aij}\epsilon^{qik}E_b{}^jB_c{}^k \\
+ &\quad \mathcal{M}^{bc}{}_{ijar}\epsilon^{rjk}\epsilon^{qit}B_b{}^kB_c{}^t + g_{ri}h^c{}_j\epsilon^{jrk}\epsilon^{qit}B_a{}^kB_c{}^t - \frac{1}{2}g_{ri}h^b{}_j\epsilon^{jrk}\epsilon^{qit}B_b{}^kB_a{}^t \\
+ &\quad \mathcal{U}^{bc}{}_ih_{aj}E_c{}^q\epsilon^{ijk}B_b{}^k + \mathcal{V}^b{}_{ij}E_b{}^j\epsilon^{qik}B_a{}^k + \mathcal{W}^c{}_{ij}E_a{}^j\epsilon^{qik}B_c{}^k \\
- &\quad g_{0j}h^c{}_i\epsilon^{ijk}(E_c{}^qB_a{}^k - E_a{}^qB_c{}^k) + \mathcal{X}^c{}_iE_a{}^iE_c{}^q + \frac{1}{2}\mathcal{Z}^b{}_iE_b{}^iE_a{}^q]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad 4\pi G h h_a{}^q [\mathcal{A}^{bc}{}_{ij} E_c{}^i E_b{}^j + \mathcal{N}^{bc}{}_{nij} \epsilon^{jnk} E_c{}^i B_b{}^k + \mathcal{C}^{bc}{}_{nij} \epsilon^{ijk} E_b{}^n B_c{}^k \\
&+ \quad \mathcal{D}^{bc}{}_{rijn} \epsilon^{ijk} \epsilon^{nrt} B_c{}^k B_b{}^t] = 0
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

com

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}^{bc}{}_{ai} &= h^b{}_0 h^c{}_0 h_{ai} - h^b{}_0 h^c{}_0 h_{a0} + \frac{1}{2} h^c{}_0 h^b{}_i h_{a0} - \frac{1}{2} h^b{}_0 h^c{}_0 h_{ai}; \\
\mathcal{Q}^{bc}{}_{aij} &= -h^b{}_i h^c{}_0 h_{aj} + h^b{}_i h^c{}_j h_{a0} + \frac{1}{2} h^c{}_i h^b{}_0 h_{aj} - \frac{1}{2} h^c{}_i h^b{}_j h_{a0};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^{bc}{}_{ij} = &- \frac{1}{2} g_{00} h^b{}_i h^c{}_j + \frac{1}{2} g_{0j} h^b{}_i h^c{}_0 - \frac{1}{4} g_{ij} h^b{}_0 h^c{}_0 + \frac{1}{2} g_{0i} h^b{}_0 h^c{}_j \\
&+ \frac{1}{4} g_{00} h^b{}_i h^c{}_j - \frac{1}{4} g_{0j} h^c{}_i h^b{}_0 - \frac{1}{4} g_{0i} h^c{}_0 h^b{}_j; \\
\mathcal{N}^{bc}{}_{nij} = &\ \frac{1}{2} g_{0n} h^b{}_i h^c{}_j - \frac{1}{2} g_{ni} h^b{}_0 h^c{}_j + \frac{1}{4} g_{0j} h^c{}_i h^b{}_n - \frac{1}{4} g_{ij} h^c{}_0 h^b{}_n; \\
\mathcal{C}^{bc}{}_{nij} = &\ \frac{1}{2} g_{ni} h^b{}_j h^c{}_0 - \frac{1}{2} g_{0i} h^b{}_j h^c{}_n + \frac{1}{4} g_{0i} h^c{}_j h^b{}_n - \frac{1}{4} g_{ni} h^c{}_j h^b{}_0; \\
\mathcal{D}^{bc}{}_{rijn} = &\ \frac{1}{2} g_{ri} h^b{}_j h^c{}_n + \frac{1}{4} g_{ni} h^c{}_j h^b{}_r
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^{bc}{}_{ijar} &= h^b{}_i h^c{}_j h_{ar} - \frac{1}{2} h^b{}_j h^c{}_i h_{ar}; & \mathcal{W}^c{}_{ij} &= g_{ij} h^c{}_0 - g_{0i} h^c{}_j; \\
\mathcal{U}^{bc}{}_i &= h^b{}_0 h^c{}_i - \frac{1}{2} h^b{}_i h^c{}_0; & \mathcal{X}^c{}_i &= g_{00} h^c{}_i - g_{0i} h^c{}_0; \\
\mathcal{V}^b{}_{ij} &= \frac{1}{2}(g_{0i} h^b{}_j - g_{ij} h^b{}_0); & \mathcal{Z}^b{}_i &= g_{0i} h^b{}_0 - g_{00} h^b{}_i.
\end{aligned}
$$

Portanto, o primeiro par das equações de campo, em sua forma exata, é evidentemente mais complexo que o respectivo par eletromagnético, isto é de fato esperado, devido à não-linearidade da gravitação. Nas próximas seções vamos ver como certas considerações podem novamente aproximar as teorias.

3.3 Segundo par das equações de campo

Analogamente ao Eletromagnetismo, o segundo par das equações de Maxwell gravitacionais deve surgir do contexto geométrico das teorias de gauge. Ou seja, devemos considerar a primeira identidade de Bianchi da geometria teleparalela, dada por:

$$\partial_\rho F^a{}_{\mu\nu} + \partial_\mu F^a{}_{\nu\rho} + \partial_\nu F^a{}_{\rho\mu} = 0, \tag{3.21}$$

que pode ser escrita como

$$\partial_{[\rho} F^a_{\mu\nu]} = 0, \tag{3.22}$$

ou ainda

$$\epsilon^{\lambda\rho\mu\nu}\partial_\rho F^a{}_{\mu\nu} = 0. \tag{3.23}$$

Essas equações devem resultar num análogo ao segundo par das equações de Maxwell, a relembrar:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{3.24}$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{3.25}$$

sendo esta última a lei de Faraday.

3.3.1 Aplicando a definição D1

Vamos aplicar o modelo D1 com a seguinte escolha de posições de índices:

$$\begin{aligned} F^a{}_{0i} &= E^a{}_i \\ F^a{}_{ij} &= -\epsilon_{ijk} B^a{}_k. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Fixando as possíveis sequências de índices $\rho\mu\nu = 012, 013, 023, 123$ obtemos, por exemplo, para a primeira combinação:

$$012 \rightarrow \partial_0 F^a{}_{12} + \partial_1 F^a{}_{20} + \partial_2 F^a{}_{01} = 0 \tag{3.27}$$

que, após a aplicação da definição, assume a forma

$$\partial_x E^a{}_y - \partial_y E^a{}_x = \partial_t B^a{}_z \tag{3.28}$$

ou em notação vetorial explícita

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}^a\right)_z = \left(-\frac{\partial \vec{B}^a}{\partial t}\right)_z. \tag{3.29}$$

O mesmo procedimento será usado para as combinações de índices, 013 e 023 que resultam nas componentes x e y da equação geral que se segue:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}^a = -\frac{\partial \vec{B}^a}{\partial t}. \tag{3.30}$$

Como $\vec{E}^a$ e $\vec{B}^a$ são vetores tri-dimensionais com relação ao espaço-tempo, mas que armazenam um índice interno com quatro componentes, essa equação representa na verdade quatro equações diretamente análogas à Lei de Ampère do Eletromagnetismo.

Para a combinação 123 temos

$$\partial_1 F^a{}_{23} + \partial_2 F^a{}_{31} + \partial_3 F^a{}_{12} = 0 \tag{3.31}$$

que assume a forma

$$\partial_x B^a{}_x + \partial_y B^a{}_y + \partial_z B^a{}_z = 0 \tag{3.32}$$

ou

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}^a = 0. \tag{3.33}$$

3.3.2 Aplicando a definição D2

Vamos partir da relação entre o tensor intensidade de campo e o superpotencial da teoria na forma

$$F^a{}_{\gamma\delta} = h^b{}_\gamma g_{\rho\delta} h^a{}_\mu S_b{}^{\mu\rho} - h^b{}_\delta g_{\nu\gamma} h^a{}_\mu S_b{}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^a{}_\delta g_{\nu\gamma} h^b{}_\theta S_b{}^{\theta\nu} + \frac{1}{2} h^a{}_\gamma g_{\rho\delta} h^b{}_\theta S_b{}^{\theta\rho} \tag{3.34}$$

e aplicar diretamente nas identidades de Bianchi teleparalelas 3.21. Após a substituição da definição D2, obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} &\partial_\sigma \left[\mathcal{O}^{ba}{}_{\gamma i\delta} E_b{}^i + \mathcal{P}^{ba}{}_{\gamma ij\delta} \epsilon^{ijk} B_b{}^k\right] + \partial_\gamma \left[\mathcal{Q}^{ba}{}_{\delta i\sigma} E_b{}^i + \mathcal{R}^{ba}{}_{\delta ij\sigma} \epsilon^{ijk} B_b{}^k\right] + \\ &\qquad \partial_\delta \left[\mathcal{S}^{ba}{}_{\sigma i\gamma} E_b{}^i + \mathcal{T}^{ba}{}_{\sigma ij\gamma} \epsilon^{ijk} B_b{}^k\right] = 0. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Os dois primeiros coeficientes assumem a forma explícita

$$\mathcal{O}^{ba}{}_{\gamma i\delta} = h^b{}_\gamma h^a{}_0 g_{i\delta} - h^b{}_\gamma h^a{}_i g_{0\delta} + -h^b{}_\delta h^a{}_0 g_{i\gamma} + h^b{}_\delta h^a{}_i g_{0\gamma} + \frac{1}{2}h^a{}_\delta h^b{}_0 g_{i\gamma} - \frac{1}{2}h^a{}_\delta h^b{}_i g_{0\gamma} - \frac{1}{2}h^a{}_\gamma h^b{}_0 g_{i\delta} + \frac{1}{2}h^a{}_\gamma h^b{}_i g_{0\delta}; \quad (3.36)$$

$$\mathcal{P}^{ba}{}_{\gamma ij\delta} = h^b{}_\gamma h^a{}_i g_{j\delta} - h^b{}_\delta h^a{}_i g_{j\gamma} + \frac{1}{2}h^a{}_\delta h^b{}_i g_{j\gamma} - \frac{1}{2}h^a{}_\gamma h^b{}_i g_{j\delta}. \quad (3.37)$$

e a partir de $\mathcal{O}^{ba}{}_{\gamma i\delta}$ e $\mathcal{P}^{ba}{}_{\gamma ij\delta}$ obtemos $\mathcal{Q}^{ba}{}_{\delta i\sigma}$ e $\mathcal{R}^{ba}{}_{\delta ij\sigma}$ realizando a troca de índices ($\gamma \rightarrow \delta$ e $\delta \rightarrow \sigma$) e $\mathcal{S}^{ba}{}_{\sigma i\gamma}$ e $\mathcal{T}^{ba}{}_{\sigma ij\gamma}$ fazendo ($\gamma \rightarrow \sigma$ e $\delta \rightarrow \gamma$).

Esta é uma expressão evidentemente mais complexa do que a expressão que surge a partir da definição D1 e se torna menos semelhante à identidade de Bianchi do Eletromagnetismo do que a primeira escolha. Poderíamos ainda tentar evidenciar o análogo gravitacional ao segundo par de equações de Maxwell fazendo as substituições $(\sigma\gamma\delta) \rightarrow (012), (013), (023)$ para obter o análogo à Lei de Faraday ou fazendo $(\sigma\gamma\delta) \rightarrow (123)$ para obter a lei de divergência do campo gravito-magnético. Mas as equações, nessa forma exata, diferem radicalmente. Porém, como veremos no capítulo 5, conduzindo os cálculos para o limite de campo fraco na geometria de Schwarzschild, o paralelo com as equações eletromagnéticas será completamente recuperado. Retomaremos, assim, esta questão adiante.

3.4 Equações de campo no Teleparalelismo dual

O primeiro par da equações de Maxwell gravitacionais, dada a aplicação de D2 ganharam uma forma próxima às equações do eletromagnetismo no que diz respeito aos termos derivativos, porém apresentam vários outros termos de acoplamento entre campos, na forma de equação de vácuo sem análogo eletromagnético.

Há, entretanto, um forma bastante interessante de desaparecer explicitamente com esses termos de acoplamento, mesmo para a solução exata, e ganhar uma similaridade maior com o eletromagnetismo. Isso se dá no contexto do teleparalelismo dual.

Na seção (2.4) apresentamos um desenvolvimento que resulta na condição para que o teleparalelismo apresente simetria de dualidade. Essa propriedade, como lá bem enfatizamos, ocorre nas teorias de gauge usuais. As identidades de Bianchi escritas para o tensor intensidade de campo dual correspondem exatamente às equações de campo dinâmicas da teoria. E a gravitação, descrita pela RG, ou mesmo pelo equivalente teleparalelo da RG, não apresenta a tal propriedade. Porém, foi obtida em [15] a condição na qual a dualidade é recuperada na gravidade teleparalela, e que a torna, neste caso, mais próxima ao eletromagnetismo e às demais teorias de gauge.

Desejamos discutir nesta seção que a condição (2.41) acaba por anular a corrente gravitacional ${j_a}^{\rho}$, o que simplifica naturalmente nossas equações de campo

$$\partial_\sigma (h{S_a}^{\sigma\rho}) = 0 \tag{3.38}$$

e que nesta forma, a aplicação de D2 resulta diretamente nas equações gravitacionais análogas às equações de Maxwell. Observamos isso realizando a abertura explícita de índices em (3.38) e fixando valores para ρ.

Assim, para $\rho = 0$ obtemos

$$\partial_i (h{S_a}^{0i}) = 0 \tag{3.39}$$

que com a definição D2 se torna

$$\partial_i (h{E_a}^{i}) = 0. \tag{3.40}$$

Podemos ainda redefinir o campo gravito-elétrico (absorvendo o determinante da tetrada) como

$$E_a'^{\,i} = h{E_a}^{i}$$

para escrever a equação na forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_a = 0. \tag{3.41}$$

Para $\rho = i$ temos

$$\partial_0(hS_a{}^{i0}) + \partial_j(hS_a{}^{ij}) = 0. \tag{3.42}$$

Após aplicar a definição D2, redefinir o campo gravito-magnético como

$$B'^{\,i}_a = hB_a{}^i$$

e supondo $\partial_i \epsilon^{ijk} = 0$, obtemos finalmente

$$\epsilon^{ijk}\partial_i B'^{\,k}_a = \frac{\partial E'^{\,k}_a}{\partial t} \tag{3.43}$$

ou na forma

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}'_a = \frac{\partial E'_a}{\partial t}. \tag{3.44}$$

Vale ressaltar que $t_\rho{}^\sigma$, o pseudo-tensor energia-momento do campo gravitacional dado em (2.26) não se anula com a hipótese de simetria de dualidade. Concluímos que o cenário teleparalelo dual, apesar de restritivo, aproxima a gravitação ao eletromagnetismo, já que as equações de campo dinâmicas, mesmo em sua forma exata, são similares às eletromagnéticas. A presença da tetrada, que diferencia a gravitação das teorias de gauge internas usuais, representa de fato a diferença entre os formalismos, já que permanece nas equações de Maxwell gravitacionais.

Capítulo 4

Força de Lorentz Gravitacional

A identificação das componentes do tensor intensidade de campo $F^a{}_{\mu\nu}$ com os campos gravito-elétrico $\vec{E}^a$ e gravito-magnético $\vec{B}^a$ também foi inspirada na equação da trajetória de uma partícula escalar na presença de gravitação. A equação resultante, completamente análoga à força de Lorentz eletromagnética interpreta o próprio $F^a{}_{\mu\nu}$ acoplado à carga gravitacional da partícula, a massa, como a força responsável pela dinâmica da mesma.

Vamos rever aqui os principais passos para a obtenção desta equação (para mais detalhes, ver [18]) e, em seguida, discutiremos a aplicação e interpretação dos dois modelos propostos.

4.1 Equação de Força para uma partícula na presença de gravitação

Consideremos, no cenário da gravitação teleparalela, o movimento de uma partícula sem spin e de massa m na presença do campo gravitacional representado pelo potencial de gauge $A^a{}_\mu$. A ação, inspirada na ação eletromagnética, será escrita na forma

$$S = \int_a^b L\, ds \equiv \int_a^b \left[-m\, \sqrt{-u^2} + m\; A^a{}_\mu\; u_a\; u^\mu \right] ds \;, \tag{4.1}$$

com L representando o lagrangeano do sistema,

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \tag{4.2}$$

a quadri-velocidade e

$$ds = (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.3}$$

o intervalo no espaço-tempo de Minkowski. Note que essa ação é integrada ao longo da linha mundo da partícula no espaço-tempo plano. O primeiro termo representa a ação de uma partícula livre e o segundo o acoplamento da massa da partícula com o campo gravitacional. Essa separação da ação em dois termos é somente possível numa teoria de gauge, como o teleparalelismo, não sendo, portanto, possível na RG. Porém, podemos calcular facilmente que essa ação se reduz à ação usual da RG,

$$S = \int_a^b m ds \tag{4.4}$$

com $ds = (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{\frac{1}{2}}$ representando o intervalo não trivial.

Tomando a variação funcional em (4.1), chegamos a

$$m \left[\frac{du_\mu}{ds} + A^a{}_\mu \frac{du_a}{ds} \right] = m F^a{}_{\mu\nu} \, u_a \, u^\nu \ , \tag{4.5}$$

e fazendo uso da relação

$$\frac{du_\mu}{ds} = \left(\frac{\partial x^a}{\partial x^\mu} \right) \frac{du_a}{ds} \ , \tag{4.6}$$

obtemos

$$(\partial_\mu x^a + A^a{}_\mu) \frac{du_a}{ds} = F^a{}_{\mu\nu} \, u_a \, u^\nu \ , \tag{4.7}$$

que é a equação de movimento para uma partícula no espaço plano e sentindo o efeito do campo gravitacional através de $A^a{}_\mu$. Observe que o fator equivalente ao $\frac{e}{m}$ do eletromagnetismo não aparece aqui, pois a massa gravitacional é cancelada com a massa inercial, dado o princípio de equivalência fraco.

Vale, finalmente, salientar que essa equação pode ser reescrita como uma equação de força no teleparalelismo, com a torção desempenhando o papel de força, ou, alternativamente, pode ser escrita como a equação da geodésica da RG.

Para o desenvolvimento das duas próximas seções, vamos retomar o tensor intensidade do campo gravitacional $F^a{}_{\mu\nu}$ em termos do potencial de gauge como

$$F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu,$$

que por sua vez está relacionado à torção do espaço-tempo, por

$$F^a{}_{\mu\nu} = \; h^a{}_\rho \, T^\rho{}_{\mu\nu}$$

e a expressão da tetrada em termos do potencial de gauge:

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + A^a{}_\mu.$$

4.2 Aplicação de D1

A definição D1 corresponde à identificação natural que surge com a força de Lorentz gravitacional, ou seja, analogamente ao que é feito no eletromagnetismo, definiremos $F^a{}_{\mu\nu}$ em termos dos seus componentes $E^a{}_i$ e $B^a{}_i$ da seguinte forma:

$$F^a{}_{0i} = E^a{}_i \tag{4.8}$$

e

$$F^a{}_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B^a{}_k. \tag{4.9}$$

Ao tomarmos $\mu = 0$ em (4.7) e considerando (4.8) temos

$$h^a{}_0 \, \frac{du_a}{ds} = \; F^a{}_{0\nu} \, u_a \, u^\nu \; , \tag{4.10}$$

que pode escrita da forma

$$h^a{}_0 \, \frac{du_a}{ds} = \; \left(F^a{}_{00} \, u^0 + F^a{}_{0i} \, u^i \right) u_a \; . \tag{4.11}$$

Levando em conta a anti-simetria de $F^a{}_{\mu\nu}$ nos dois últimos índices e a definição (4.8), obtemos

$$h^a{}_0 \, \frac{du_a}{ds} = E^a{}_i u^i u_a. \tag{4.12}$$

Para $\mu = j$ chegamos em

$$h^a{}_j \, \frac{du_a}{ds} = \, F^a{}_{j\nu} \, u_a \, u^\nu \ , \tag{4.13}$$

que pode ser reescrita como

$$h^a{}_j \, \frac{du_a}{ds} = \, \left(F^a{}_{0j} \, u^0 + F^a{}_{ij} \, u^i\right) u_a \ . \tag{4.14}$$

Substituindo as definições (4.8) e (4.9) encontramos

$$h^a{}_j \, \frac{du_a}{ds} = - \left(E^a{}_j u^0 + \left(\vec{u} \times \vec{B^a}\right)_j \right) u_a. \tag{4.15}$$

As equações (4.12) e (4.15) são evidentemente semelhantes à força de Lorentz eletromagnética quanto aos papéis de $\vec{E^a}$ e $\vec{B^a}$. Notamos ainda a presença da quadri-velocidade u^a que junto à massa corresponde à carga de Noether conservada sob transformações do grupo de translações.

4.3 Força de Lorentz gravitacional via D2

A definição D2, inspirada na tentativa de aproximar o primeiro par das equações de campo gravitacionais às respectivas equações de Maxwell, não se aplica com tanta simplicidade quanto a definição D1. Vejamos os principais passos.

Consideremos a expressão da força de Lorentz gravitacional na forma:

$$h^a{}_\mu \, \frac{du_a}{ds} = \, F^a{}_{\mu\nu} \, u_a \, u^\nu \ . \tag{4.16}$$

Por meio das identificações (2.22) e (2.18) e (4.8) a equação adquire a forma

$$h^{a\mu} \frac{du_a}{ds} = h^a{}_\rho \left[S^{\mu\nu\rho} - S^{\nu\rho\mu} - \frac{1}{2} g^{\rho\nu} S^{\theta\mu}{}_\theta + \frac{1}{2} g^{\mu\rho} S^{\theta\nu}{}_\theta \right] u_a u_\nu. \tag{4.17}$$

Usando o campo de tetradas, podemos escrever os superpotenciais $S^{\mu\nu\rho}$ com o primeiro índice de álgebra para aplicação posterior de D2.

$$h^{a\mu} \frac{du_a}{ds} = -h_{b\nu} S^{b\rho\mu} u_\rho u_\nu - \frac{1}{2} h_{b\theta} (S^{b\mu\theta} u^2 - S^{b\nu\theta} u^\mu u_\nu). \tag{4.18}$$

Aplicando $u^2 = -1$, abrindo explicitamente o somatório em parte espacial e temporal e substituindo o modelo em questão, encontramos, para $\mu = 0$

$$h^{a0}\frac{du_a}{ds} = \mathcal{C}_{bi}E^{bi} + \mathcal{D}_{bj}\epsilon^{ijk}B^{bk}u_i, \tag{4.19}$$

com

$$\mathcal{C}_{bi} = h_b{}^j u_i u_j - \frac{h_{bi}}{2} + \frac{1}{2}h_{bi}u^0u_0 - \frac{1}{2}h_{b0}u^0u_i$$

e

$$\mathcal{D}_{bj} = \frac{1}{2}h_{bj}u^0.$$

Para $\mu = k$, obtemos

$$h^{ak}\frac{du_a}{ds} = \mathcal{F}_b E^{bk} + \mathcal{G}^k{}_{ib}E^{bi} + \mathcal{H}^{kl}{}_b B^{bl}, \tag{4.20}$$

com

$$\mathcal{F}_b = -h_b{}^0 u_0 u_0 - h_b{}^i u_0 u_i + \frac{h_{b0}}{2}$$

$$\mathcal{G}^k{}_{ib} = \frac{1}{2}h_{bi}u^k u_0 - \frac{1}{2}h_{b0}u^k u_i$$

$$\mathcal{H}^{kl}{}_b = -h_b{}^0\epsilon^{ikl}u_i u_0 - h_b{}^j\epsilon^{ikl}u_i u_j + \frac{u^2}{2}h_{bi}\epsilon^{ikl} + \frac{1}{2}h_{bj}\epsilon^{ijl}u^k u_i.$$

Encontramos, portanto, equações visivelmente mais complexas que as do eletromagnetismo, complexidade esta que surge devido à presença do campo de tetradas, tornando não triviais os coeficientes que acompanham os campos gravitacionais elétrico e magnético. Veremos no capítulo 5 que a hipótese de campo fraco para o modelo D2 simplifica bastante as equações, tornando-as um pouco mais próximas das equações eletromagnéticas.

Capítulo 5

Solução de Schwarzschild

Realizamos até este ponto do trabalho uma analogia ao Eletromagnetismo que resultou no surgimento de campos gravito-eletromagnéticos como componentes do tensor intensidade de campo ou do superpotencial da teoria. Assim, o paralelo foi feito no domínio das teorias de gauge. Devemos investigar, portanto, se a esses campos estão associados fenômenos físicos semelhantes aos observados e previstos pelo Eletromagnetismo. Em poucas palavras, cargas elétricas estáticas geram campos elétricos e cargas em movimento geram campos magnéticos. Da mesma forma, é desejável constatar uma associação entre os campos sugeridos em modelo com matéria estática e matéria em movimento. O objetivo destas duas seções será, então, observar, para distribuições de matéria específicas que geram diferentes geometrias no espaço-tempo, como a matéria define os campos em questão.

5.1 Geometria

Consideremos a geometria produzida pelo campo gravitacional externo esfericamente simétrico, representado por uma massa m e situado na origem de um sistema de coordenadas. Este problema, de grande interesse em gravitação por tratar de corpos tais como o Sol ou outros corpos celestes com excelente aproximação, foi o primeiro a ter sua solução exata encontrada por Schwarzschild em 1916, alguns meses depois de Einstein ter publicado suas equações de campo no vácuo. A solução de Schwarzschild [19] pode ser representada pelo conhecido elemento de linha escrito em coordenadas esféricas:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mG}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2mG}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2\right). \tag{5.1}$$

Ou seja, a métrica correspondente é dada por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2mG}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2mG}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 sen^2\theta \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

e com determinante $g = det(g_{\mu\nu}) = -r^4 sen^2\theta$.

A escolha do observador, que corresponde a um determinado campo de tetradas associado à métrica de Schwarzschild, é crucial para nossos resultados e conclusões a respeito dos papéis desempenhados por $\vec{E}^a$ e $\vec{B}^a$. Vamos adotar, portanto, um conjunto de tetradas que esteja adaptado a um observador estacionário localizado no infinito. Para tanto, é necessário que este satisfaça à condição de gauge de temporal e apresente simetria no setor espacial [20].

Esse conjunto é representado por

$$h^a{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{11} sen\theta cos\phi & rcos\theta cos\phi & -rsen\theta sen\phi \\ 0 & \gamma_{11} sen\theta sen\phi & rcos\theta sen\phi & rsen\theta cos\phi \\ 0 & \gamma_{11} cos\theta & -rsen\theta & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

nesta notação $\gamma_{00} = \sqrt{g_{00}}$ e $\gamma_{11} = \sqrt{-g_{11}}$. A inversa da tetrada acima é dada por

$$h_a{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma_{00}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{11}^{-1} sen\theta cos\phi & r^{-1} cos\theta cos\phi & -(rsen\theta)^{-1} sen\phi \\ 0 & \gamma_{11}^{-1} sen\theta sen\phi & r^{-1} cos\theta sen\phi & (rsen\theta)^{-1} cos\phi \\ 0 & \gamma_{11}^{-1} cos\theta & -r^{-1} sen\theta & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

É fácil verificar que (5.3) e (5.4) satisfazem as relações abaixo:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}\, h^a{}_\mu\, h^b{}_\nu \tag{5.5}$$

e

$$h^a{}_\mu\, h_a{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu ; h^a{}_\mu\, h_b{}^\mu = \delta^a{}_b . \tag{5.6}$$

A partir da expressão usual da torção escrita em termos da tetrada

$$T^\sigma{}_{\mu\nu} = h_a{}^\sigma \partial_\mu h^a{}_\nu - h_a{}^\sigma \partial_\nu h^a{}_\mu , \tag{5.7}$$

calculamos as componentes de $T^\sigma{}_{\mu\nu}$, das quais as não nulas são:

$$T^0{}_{01} = -\frac{2GM}{r^2} g_{00}^{-1} ; \tag{5.8}$$

$$T^2{}_{12} = \frac{1}{r}(1 - \gamma_{11}) ; \tag{5.9}$$

$$T^3{}_{13} = \frac{1}{r}(1 - \gamma_{11}) . \tag{5.10}$$

5.2 Aplicação dos modelos: solução exata

Nosso ponto de partida para a aplicação dos modelos sugeridos acima, foi considerar a solução exata teleparalela para geometria de Schwarzschild. Será que essa construção resultaria em campos $\vec{E}^a$ e $\vec{B}^a$ que concordam com a fenomenologia sugerida pelo eletromagnetismo? No caso específico da geometria de Schwarzschild nosso primeiro teste, crucial para o desenvolvimento do trabalho, foi verificar a ausência de componentes de campo magnético gravitacional, esperado para esta distribuição estacionária de matéria.

5.2.1 Aplicação de D1

A aplicação do modelo D1 é direta, já que as componentes da torção são relacionadas diretamente aos campos gravitacionais em questão. Assim, para $\vec{E}^a$ temos

$$h^a{}_\rho T^\rho{}_{0i} = E^a{}_i . \tag{5.11}$$

Abrindo explicitamente os índices de álgebra e os tridimensionais do espaço-tempo, chegamos em

$$E^{(0)}{}_r = -\left(\frac{2GM}{r^2}\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\right); \tag{5.12}$$

$$E^{(i)}{}_r = 0; \tag{5.13}$$

$$E^a{}_\theta = 0; \tag{5.14}$$

$$E^a{}_\phi = 0. \tag{5.15}$$

Da definição desse modelo, vemos que as componentes do campo gravito-magnético se relacionam com a torção da seguinte forma:

$$h^a{}_\rho T^\rho{}_{ij} = -\epsilon_{ijk} B^a{}_K, \tag{5.16}$$

e de maneira similar ao que foi feito acima, encontramos

$$\begin{aligned}
B^{(1)}{}_\phi &= -cos\theta cos\phi(1-\gamma_{11}); & B^{(2)}{}_\theta &= -sen\theta cos\phi(1-\gamma_{11});\\
B^{(2)}{}_\phi &= -cos\theta sen\phi(1-\gamma_{11}); & B^{(0)}{}_\phi &= B^{(0)}{}_\theta = B^{(3)}{}_\theta = 0;\\
B^{(3)}{}_\phi &= sen\theta(1-\gamma_{11}); & B^{(a)}{}_r &= 0;\\
B^{(1)}{}_\theta &= -sen\theta sen\phi(1-\gamma_{11}).
\end{aligned}$$

Vemos aqui surgirem componentes não nulas para o campo gravito-magnético, o que afasta o modelo da interpretação desejável de que cargas gravitacionais estáticas não geram componentes magnéticas de campo. Estudemos se o segundo modelo evitaria esse tipo de problema.

5.2.2 Aplicação de D2

Consideremos novamente a definição

$$S_b{}^{0i} = E_b{}^i \tag{5.17}$$

e retomemos a expressão da componente de interesse do superpotencial em termos de torções:

$$S_b{}^{0i} = \frac{1}{2}[h_b{}^{\lambda}T^{i0}{}_{\lambda} + h_b{}^{\lambda}T_{\lambda}{}^{0i} - h_b{}^{\lambda}T^{0i}{}_{\lambda}] - h_b{}^{i}T^{\theta 0}{}_{\theta} + h_b{}^{0}T^{\theta i}{}_{\theta}. \tag{5.18}$$

Após algumas simplificações, dadas as simetrias e componentes nulas dos tensores envolvidos, obtemos a relação direta entre o campo elétrico e a torção:

$$E_b{}^{i} = h_b{}^{0}T^{ji}{}_{j}. \tag{5.19}$$

Para $b \neq 0$ é trivial verificar que as componentes se anulam, ou seja,

$$E_k{}^{i} = 0 \tag{5.20}$$

e para $b = 0$ obtemos a forma

$$E_{(0)}{}^{i} = h_{(0)}{}^{0}(T^{1i}{}_{1} + T^{2i}{}_{2} + T^{3i}{}_{3}). \tag{5.21}$$

Substituindo explicitamente a tetrada e componentes da torção, chegamos em

$$E_{(0)}{}^{r} = -\frac{2}{r}(\gamma_{00} - 1); \tag{5.22}$$

$$E_{(0)}{}^{\theta} = 0; \tag{5.23}$$

$$E_{(0)}{}^{\phi} = 0. \tag{5.24}$$

Ou seja, apenas a componente radial do vetor $b = 0$ não é nula, coerente com a distribuição esfericamente simétrica de matéria.

Nosso próximo passo é analisar a existência de componente magnética. Para isso, consideremos novamente a definição D2

$$S_a{}^{ij} = \epsilon^{ijk}B_a{}^{k} \tag{5.25}$$

e retomemos a expressão do superpotencial em termos de torções:

$$S_b{}^{ij} = \frac{1}{2}[h_b{}^{\lambda}T^{ji}{}_{\lambda} + h_b{}^{\lambda}T_{\lambda}^{ij} - h_b{}^{\lambda}T^{ij}{}_{\lambda}] - h_b{}^{j}T^{\theta i}{}_{\theta} + h_b{}^{i}T^{\theta j}{}_{\theta}. \tag{5.26}$$

Após algumas simplificações, chegamos em

$$S_b{}^{12} = -h_b{}^2 g^{11}[T^0{}_{10} + T^3_{13}]. \quad (5.27)$$

$$S_b{}^{13} = -h_b{}^3 g^{11}[T^0{}_{10} + T^2_{12}]. \quad (5.28)$$

$$S_b{}^{23} = 0. \quad (5.29)$$

Finalmente, obtemos as componentes

$$\begin{aligned}
S_{(0)}{}^{12} &= B_{(0)}{}^{\phi} = 0; \\
S_{(1)}{}^{12} &= B_{(1)}{}^{\phi} = \frac{cos\theta cos\phi}{r^2}(1 - \gamma_{11}{}^{-1}); \\
S_{(2)}{}^{12} &= B_{(2)}{}^{\phi} = \frac{cos\theta sen\phi}{r^2}(1 - \gamma_{11}{}^{-1}); \\
S_{(3)}{}^{12} &= B_{(3)}{}^{\phi} = -\frac{sen\theta}{r^2}(1 - \gamma_{11}{}^{-1}); \\
S_{(0)}{}^{13} &= -B_{(0)}{}^{\theta} = 0; \\
S_{(1)}{}^{13} &= -B_{(1)}{}^{\theta} = -\frac{sen\phi}{rsen\theta}(1 - \gamma_{11}{}^{-1}); \\
S_{(2)}{}^{13} &= -B_{(2)}{}^{\theta} = \frac{cos\phi}{rsen\theta}(1 - \gamma_{11}{}^{-1}); \\
S_{(3)}{}^{13} &= -B_{(3)}{}^{\theta} = 0.
\end{aligned}$$

Novamente, surgem indesejáveis componentes de campo magnético. Nossa conclusão preliminar é que dado o caráter não linear da gravitação, não é possível associar à solução exata uma componente de campo gravito-magnética vinculada a apenas distribuições dinâmicas de matéria. Mesmo para uma situação estática, como essa, $\vec{B}^a$ existe. Sendo assim, partiremos para uma nova tentativa: será que a linearização da gravitação aproxima a mesma ao eletromagnetismo no que concerne à existência e interpretação destes campos?

5.3 Aplicação dos modelos: solução aproximada

Pretendemos assim investigar o surgimento de campos gravito-eletromagnéticos no contexto de campo gravitacional fraco. Assim, consideraremos que a métrica do espaço-tempo será composta por uma parte trivial de métrica plana e mais uma perturbação gerada pela presença de matéria:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + a_{\mu\nu}. \tag{5.30}$$

Como a métrica plana assume a forma diagonal apenas em coordenadas cartesianas, é conveniente trabalhar neste sistema de coordenadas, o que simplificará muito nossos cálculos. A tetrada corresponde também poderá ser dividida em uma parte trivial (diagonal) mais uma contribuição devido à presença de matéria, ou seja

$$h^a{}_\mu = H^a{}_\mu + U^a{}_\mu. \tag{5.31}$$

Para realizar a transformação de coordenadas das gradezas dinâmicas envolvidas, realizaremos primeiramente a transformação do campo de tetradas. Como exemplo de procedimento, consideremos para a primeira componente da tetrada a lei tensorial de transformação:

$$h_{(1)1}(x,y,z) = \frac{\partial x^i}{\partial x} h_{(1)i}(r,\theta,\phi) = \frac{\partial r}{\partial x} h_{(1)1} + \frac{\partial \theta}{\partial x} h_{(1)2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} h_{(1)3}. \tag{5.32}$$

Assim, obtemos para a tríade (componentes espaciais da tetrada):

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} [-cos^2\phi F(\theta) + sen^2\phi] & -[sen\phi cos\phi F(\theta)] & +sen\theta cos\theta cos\phi(1-\gamma_{11}) \\ -[sen\phi cos\phi F(\theta) + sen\phi cos\phi] & -[sen^2\phi F(\theta) + cos^2\theta] & sen\theta cos\theta sen\phi(1-\gamma_{11}) \\ sen\theta cos\theta cos\phi(1-\gamma_{11}) & sen\theta cos\theta sen\phi(1-\gamma_{11}) & -(\gamma_{11}cos^2\theta + sen^2\theta) \end{pmatrix} \tag{5.33}$$

com $F(\theta) = (\gamma_{11}sen^2\theta + cos^2\theta)$. Neste formato, a tetrada está escrita na base cartesiana, porém seus elementos estão escritos ainda em coordenadas esféricas. A transformação completa entre coordenadas será realizada mediante uma hipótese que simplificará substancialmente os cálculos: suporemos que $(\frac{m}{r})^2 = O(\epsilon^2)$ é muito pequeno e, portanto, podemos conduzir as expressões envolvidas na forma de expansão em Taylor e considerar apenas a primeira ordem em ϵ. Aqui se faz, portanto, a hipótese de campo fraco.

Para a componente zero:

$$h_{(0)0}(x,y,z) = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{0}} h_{(0)\nu}(r,\theta,\phi) = \frac{\partial t'}{\partial t} h_{(0)0} + \frac{\partial r}{\partial t} h_{(0)1} + \frac{\partial \theta}{\partial t} h_{(0)2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} h_{(0)3}. \quad (5.34)$$

Sendo assim, a tetrada utilizada para a métrica de Schwarzschild em ordem ϵ será

$$h^{a}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} (1-\frac{mG}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\frac{mG}{r}sen^2\theta cos^2\phi) & \frac{mG}{r}sen^2\theta sen\phi cos\phi & \frac{mG}{r}sen\theta cos\theta cos\phi \\ 0 & \frac{mG}{r}sen^2\theta sen\phi cos\phi & (1+\frac{mG}{r}sen^2\theta sen^2\phi) & \frac{mG}{r}sen\theta cos\theta sen\phi \\ 0 & \frac{mG}{r}sen\theta cos\theta cos\phi & \frac{mG}{r}sen\theta cos\theta sen\phi & (1+\frac{mG}{r}cos^2\theta) \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

Na forma cartesiana, vemos claramente que a tetrada corresponde à soma da tetrada diagonal de Minkowski (apenas neste sistema de coordenadas) mais uma contribuição não trivial devido à presença de matéria, ou seja, corresponde à (5.31) com

$$U^{a}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} -\frac{mG}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mG}{r}sen^2\theta cos^2\phi & \frac{mG}{r}sen^2\theta sen\phi cos\phi & \frac{mG}{r}sen\theta cos\theta cos\phi \\ 0 & \frac{mG}{r}sen^2\theta sen\phi cos\phi & \frac{mG}{r}sen^2\theta sen^2\phi & \frac{mG}{r}sen\theta cos\theta sen\phi \\ 0 & \frac{mG}{r}sen\theta cos\theta cos\phi & \frac{mG}{r}sen\theta cos\theta sen\phi & \frac{mG}{r}cos^2\theta) \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

Finalmente, considerando as relações triviais entre os sistemas de coordenadas do tipo

$$cos\phi = \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.37)$$

$$sen\phi = \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.38)$$

$$cos\theta = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.39)$$

$$sen\theta = \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.40)$$

obtemos a parte não trivial da tetrada em coordenadas cartesianas:

$$U^a{}_\mu = \begin{pmatrix} -\frac{mG}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mGx^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} & \frac{mGxy}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} & \frac{mGxz}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} \\ 0 & \frac{mGxy}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} & \frac{mGy^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} & \frac{mGyz}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} \\ 0 & \frac{mGxz}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} & \frac{mGyz}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} & \frac{mGz^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix}. \tag{5.41}$$

Nosso próximo passo será calcular a torção no espaço-tempo provocada pela perturbação $U^a{}_\mu$. Seja assim a expressão usual da torção

$$T^\rho{}_{\mu\nu} = \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$$

escrita em termos da tetrada

$$T^\rho{}_{\mu\nu} = h_a{}^\rho \partial_\mu h^a{}_\nu - h_a{}^\rho \partial_\nu h^a{}_\mu.$$

Em primeira ordem em ϵ, esta expressão adquire a forma

$$T^\rho{}_{\mu\nu} = \left(H_0{}^\rho \partial_\mu U^0{}_\nu + H_1{}^\rho \partial_\mu U^1{}_\nu + H_2{}^\rho \partial_\mu U^2{}_\nu + H_3{}^\rho \partial_\mu U^3{}_\nu - (\mu \leftrightarrow \nu)\right). \tag{5.42}$$

Substituindo explicitamente as componentes de $U^a{}_\mu$, chegamos nas seguintes componentes da torção:

$$T^0{}_{ij} = T^k{}_{0i} = 0;$$

$$
\begin{aligned}
T^0{}_{01} &= -\frac{mGx}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} & T^2{}_{12} &= -\frac{mGx}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}\\
T^0{}_{02} &= -\frac{mGy}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} & T^2{}_{13} &= 0\\
T^0{}_{03} &= -\frac{mGz}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} & T^2{}_{23} &= \frac{mGz}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}\\
T^1{}_{12} &= \frac{mGy}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} & T^3{}_{12} &= 0\\
T^1{}_{13} &= \frac{mGz}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}; & T^3{}_{13} &= -\frac{mGx}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}\\
T^1{}_{23} &= 0 & T^3{}_{23} &= -\frac{mGy}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}.
\end{aligned}
$$

5.3.1 Aplicando D1

Da mesma forma que na seção anterior, temos para $\vec{E}^a$

$$h^a{}_\rho T^\rho{}_{0i} = E^a{}_i. \tag{5.43}$$

Abrindo explicitamente os índices de álgebra e os índices tridimensionais do espaço-tempo, chegamos em:

$$
\begin{aligned}
E^{(0)}{}_x &= \frac{-mGx}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}; & E^{(0)}{}_y &= \frac{-mGy}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}};\\
E^{(1)}{}_y &= E^{(2)}{}_y = E^{(3)}{}_y = 0; & E^{(1)}{}_z &= E^{(2)}{}_z = E^{(3)}{}_z = 0.\\
E^{(0)}{}_z &= \frac{-mGz}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}};
\end{aligned}
$$

Consideremos agora a contribuição magnética:

$$h^a{}_\rho T^\rho{}_{ij} = -\epsilon_{ijk} B^a{}_k \tag{5.44}$$

que nos dá

$$B^{(0)}{}_z = B^{(3)}{}_z = B^{(0)}{}_y = B^{(2)}{}_y = B^{(0)}{}_x = B^{(1)}{}_x = 0;$$

$$B^{(1)}{}_z = \frac{-mGy}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}; \qquad B^{(3)}{}_y = \frac{-mGx}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}};$$
$$B^{(2)}{}_z = \frac{mGx}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}; \qquad B^{(2)}{}_x = \frac{-mGz}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}};$$
$$B^{(1)}{}_y = \frac{mGz}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}; \qquad B^{(3)}{}_x = \frac{mGy}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}.$$

Vemos, portanto, que esta definição resulta em componentes não nulas para o campo gravito-magnético nesta primeira ordem de aproximação. Ou seja, mesmo nesta região de campo gravitacional fraco, o gravito-eletromagnetismo não gera os efeitos dinâmicos previstos pela mesma distribuição de carga do eletromagnetismo já que uma distribuição de cargas esfericamente simétrica e estática está associada apenas ao campo elétrico coulombiano. Sendo assim, a definição D1 baseada no paralelo direto entre as teorias de gauge em questão, parece não ser satisfatória no intuito de aproximar a gravitação linear ao eletromagnetismo. A seguir, estudaremos a segunda proposta de modelo.

5.3.2 Aplicando D2

Consideremos novamente o modelo D2 aplicado à região do espaço que satisfaz a aproximação de campo fraco para a geometria de Schwarzschild. Retomemos assim a identificação:

$$\begin{aligned} S_a{}^{0i} &= E_a{}^i \\ S_a{}^{ij} &= \epsilon^{ijk} B_a{}^k \end{aligned} \tag{5.45}$$

e a expressão de $S_b{}^{\rho\sigma}$ em termos das componentes da torção:

$$S_b{}^{ij} = \frac{1}{2}[h_b{}^\lambda T^{ji}{}_\lambda + h_b{}^\lambda T^{ij}_\lambda - h_b{}^\lambda T^{ij}{}_\lambda] - h_b{}^j T^{\theta i}{}_\theta + h_b{}^i T^{\theta j}{}_\theta]. \tag{5.46}$$

Podemos abrir explicitamente em componentes espaciais e temporais:

$$S_b{}^{ij} = \frac{1}{2}[h_b{}^0 T^{ji}{}_0 + h_b{}^1 T^{ji}{}_1 + h_b{}^2 T^{ji}{}_2 + h_b{}^3 T^{ji}{}_3 + h_b{}^0 T_0{}^{ij} + h_b{}^1 T_1{}^{ij} +$$

$$h_b{}^2T_2{}^{ij} + h_b{}^3T_3{}^{ij} - h_b{}^0T^{ij}{}_0 - h_b{}^1T^{ij}{}_1 - h_b{}^2T^{ij}{}_2 - h_b{}^3T^{ij}{}_3] - h_b{}^jT^{0i}{}_0$$
$$-h_b{}^jT^{1i}{}_1 - h_b{}^jT^{2i}{}_2 - h_b{}^jT^{3i}{}_3 + h_b{}^iT^{0j}{}_0 + h_b{}^iT^{1j}{}_1 + h_b{}^iT^{2j}{}_2 + h_b{}^iT^{3j}{}_3. \qquad (5.47)$$

Fixando os valores $i = 1$ e $j = 2$ obtemos:

$$S_b{}^{12} = -h_b{}^2T^{01}{}_0 - h_b{}^2T^{31}{}_3 + h_b{}^1T^{02}{}_0 + h_b{}^1T^{32}{}_3. \qquad (5.48)$$

Finalmente, fixando os índices de álgebra encontramos,

$$S_0{}^{12} = \epsilon^{123}B_{(0)}{}^z = 0, \qquad (5.49)$$

e para as outras componentes

$$B_{(1)}{}^z = B_{(2)}{}^z = B_{(3)}{}^z = 0. \qquad (5.50)$$

Para os valores $i = 2$ e $j = 3$

$$S_b{}^{23} = -h_b{}^3T^{02}{}_0 - h_b{}^3T^{12}{}_1 + h_b{}^2T^{03}{}_0 + h_b{}^2T^{13}{}_1, \qquad (5.51)$$

que resulta em

$$B_{(0)}{}^x = B_{(1)}{}^x = B_{(2)}{}^x = B_{(3)}{}^x = 0. \qquad (5.52)$$

Para os valores $i = 1$ e $j = 3$

$$S_b{}^{13} = -h_b{}^3T^{01}{}_0 - h_b{}^3T^{21}{}_2 + h_b{}^1T^{03}{}_0 + h_b{}^1T^{23}{}_2, \qquad (5.53)$$

que nos dá

$$B_{(0)}{}^y = B_{(1)}{}^y = B_{(2)}{}^y = B_{(3)}{}^y = 0. \qquad (5.54)$$

Portanto, o modelo D2 nesta ordem de aproximação não apresenta componentes de campo magnético gravitacional para uma distribuição estática de matéria, o que fortalece o paralelo nessas condições.

Para as componentes elétricas obtivemos com $i = 1$:

$$S_b{}^{01} = H_b{}^0[T^{21}{}_2 + T^{31}{}_3] \qquad (5.55)$$

e como $H_b{}^0$ é diagonal para $b = 1, 2, 3$, segue que

$$S_{(1)}{}^{01} = S_{(2)}{}^{01} = S_{(3)}{}^{01}, \tag{5.56}$$

o que implica em

$$E_{(1)}{}^{x} = E_{(2)}{}^{x} = E_{(3)}{}^{x} = 0. \tag{5.57}$$

Para $b = 0$ encontramos exatamente

$$E_{(0)}{}^{x} = \frac{2mGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{5.58}$$

Tomando $i = 2$, chegamos a

$$S_b{}^{02} = H_b{}^0[T^{12}{}_1 + T^{32}{}_3] \tag{5.59}$$

e pela mesma razão teremos nulas as componentes espaciais na álgebra:

$$E_{(1)}{}^{y} = E_{(2)}{}^{y} = E_{(3)}{}^{y} = 0. \tag{5.60}$$

Para a componente y e com $b = 0$, encontramos o termo análogo

$$E_{(0)}{}^{y} = \frac{2mGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{5.61}$$

Com $i = 3$, podemos escrever

$$S_b{}^{03} = H_b{}^0[T^{13}{}_1 + T^{23}{}_2] \tag{5.62}$$

que resulta, da mesma forma em

$$E_{(1)}{}^{z} = E_{(2)}{}^{z} = E_{(3)}{}^{z} = 0. \tag{5.63}$$

E finalmente para a componente z, com índice de álgebra nulo encontramos

$$E_{(0)}{}^{z} = \frac{2mGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{5.64}$$

Esse resultado nos parece muito interessante: as componentes $a = 0$ de $\vec{E}^a$ desempenham um papel totalmente análogo ao do campo elétrico coulombiano do eletromagnetismo, dado por

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\hat{r} \tag{5.65}$$

ou em coordenadas cartesianas:

$$\vec{E} = kq\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{i} + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{j} + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}\right). \tag{5.66}$$

Por se tratar da interação gravitacional, é esperado um campo atrativo, com sinal negativo. Podemos recuperar esse resultado incluindo um sinal na definição (5.45). Há ainda um fator de 2 a ser considerado. As demais componentes $a = i$ não contribuem para o campo gravito-elétrico.

5.3.3 Equações de campo e a geometria de Schwarzschild

Concluímos até aqui que o modelo D2 gera componentes de $\vec{E^a}$ e $\vec{B^a}$ compatíveis com a fenomenologia do eletromagnetismo para a situação análoga gravitacional, dado o limite considerado. É, portanto, o modelo mais bem sucedido em nossa investigação. Conduziremos os cálculos dessa dissertação a partir deste instante apenas nesse modelo. Nosso próximo passo será analisar a dinâmica desses campos no contexto de suas equações.

Primeiro par das equações

As chamadas equações dinâmicas da teoria e que correspondem ao análogo gravitacional do primeiro par das equações de Maxwell resultaram na forma exata (3.18) e (3.20) são evidentemente mais complexas que as respectivas equações do eletromagnetismo. Porém, considerando a aproximação sugerida de limite campo fraco, veremos que as leis ganham uma forma extremamente simples, reforçando novamente o paralelo.

Devemos aplicar, portanto, o limite $(\frac{m}{r})^2 = \epsilon^2 << 1$ nas equações. Dado que as equações envolvem produtos de componentes de tetradas, métrica e campos, vamos avaliar ordens de grandeza:

- Produtos do tipo

$$h^a{}_\mu E_b{}^i = H^a{}_\mu E_b{}^i + O(\epsilon^2) \tag{5.67}$$

terão o termo de ordem superior desconsiderado. Consequentemente todas as tetradas que aparecem nas equações serão consideradas planas.

- A métrica usada será a de Minkowski, com determinante trivial.
- Produtos do tipo ${E_b}^i {E_c}^j$ ou serão nulos, ou serão de $O(\epsilon^2)$, e também serão desconsiderados;
- Os termos que envolvem ${B_b}^i$ já são a *priori* nulos para a primeira ordem de ϵ.

Sendo assim, torna-se trivial mostrar que toda contribuição advinda de ${j_a}^\rho$ em (3.18) e (3.20) é de $O(\epsilon^2)$ restando apenas o termo derivativo

$$\partial_\sigma(h{S_a}^{\rho\sigma}) = 0 \tag{5.68}$$

com $h = 1$. Para $\rho = 0$ obtemos

$$\partial_\sigma({S_a}^{0i}) = 0 \tag{5.69}$$

que corresponde a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_a = 0 \tag{5.70}$$

e para $\rho = i$, encontramos

$$\partial_0({S_a}^{0j}) + \partial_i({S_a}^{ij}) = 0, \tag{5.71}$$

que assume a forma simples

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_a = \frac{\partial \vec{E}_a}{\partial t}. \tag{5.72}$$

Segundo par das equações

As identidades de Bianchi teleparalelas, que nos fornecem o segundo par das equações de campo, quando calculadas de maneira exata através do modelo D2 também resultaram numa forma intrincada, com vários acoplamentos não previstos no eletromagnetismo. Mas de forma semelhante, a aproximação de campo fraco desapareceu com termos espúrios, resultando nas expressões que se seguem:

- $\sigma = 0$, $\gamma = 1$ e $\delta = 2$: Para $a = 0$:

$$\frac{1}{2}\partial_x {E_{(0)}}^y - \frac{1}{2}\partial_y {E_{(0)}}^x = 0. \tag{5.73}$$

Para $a = 1, 2, 3 \rightarrow$ trivialmente satisfeitas;

- $\sigma = 0$, $\gamma = 1$ e $\delta = 3$: Para $a = 0$:

$$\frac{1}{2}\partial_x {E_{(0)}}^z - \frac{1}{2}\partial_z {E_{(0)}}^x = 0 \tag{5.74}$$

e para $a = 1, 2, 3 \rightarrow$ trivialmente satisfeitas;

- $\sigma = 0$, $\gamma = 2$ e $\delta = 3$: Para $a = 0$:

$$\frac{1}{2}\partial_y {E_{(0)}}^z - \frac{1}{2}\partial_z {E_{(0)}}^y = 0 \tag{5.75}$$

e para $a = 1, 2, 3 \rightarrow$ trivialmente satisfeitas.

As equações não triviais podem ser compostas na expressão análoga à lei de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E_{(0)}} = -\frac{\partial \vec{B_{(0)}}}{\partial t}, \tag{5.76}$$

considerando que nesta ordem $\vec{B_a} = 0$.

- $\sigma = 1$, $\gamma = 2$ e $\delta = 3$: Esta seria a equação correspondente a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B_a} = 0, \tag{5.77}$$

porém sendo $\vec{B} = 0$, a equação torna-se identicamente nula.

Como última observação, vemos que um fator de $\frac{1}{2}$ surge à frente dos operadores. Isso não representaria alteração na nossa equação de vácuo, mas considerando uma corrente externa o fator permaneceria. Entretanto, ele de alguma forma é compensado pelo fator 2 que surge na expressão de campo elétrico.

5.4 Força de Lorentz gravitacional na geometria de Schwarzschild

Vamos retomar as expressões para a trajetória de uma partícula escalar na presença dos campos gravitacionais $\vec{E^a}$ e $\vec{B^a}$ desenvolvidas no capítulo 4 e considerar a geometria específica de Schwarzschild no limite de região de campo fraco. Consideraremos apenas o modelo D2, nosso escolhido dada sua compatibilidade com a fenomenologia de campos desejada.

Aplicaremos as seguintes considerações nas equações (4.19) e (4.20), ou seja, até ordem ϵ suporemos:

$$h_b{}^j \approx H_b{}^j; \tag{5.78}$$

$$\begin{aligned} E^{(0)i} &= \frac{2Gmx^i}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}; \\ E^{(j)i} &= 0; \\ B^{ai} &= 0. \end{aligned} \tag{5.79}$$

Assim, encontramos para a componente $\mu = 0$ a expressão

$$h^{a0}\,\frac{du_a}{ds} = -\frac{1}{2}u^0 u_i E^{(0)i} \tag{5.80}$$

e para $\mu = k$

$$h^{ak}\,\frac{du_a}{ds} = (-u_0 u_0 + \frac{1}{2}u^2)E^{(0)k} - \frac{1}{2}u^k u_i E^{(0)i}. \tag{5.81}$$

Essas equações simplificadas ficam de fato mais próximas às equações eletromagnéticas, porém o surgimento de coeficientes não triviais ainda necessita de maior interpretação.

5.5 Algumas considerações

Através da hipótese de campo gravitacional fraco, encontramos nesse capítulo expressões para $\vec{E^a}$ e $\vec{B^a}$, em ordem ϵ compatíveis com a fenomenologia esperada pela analogia com o eletromagnetismo. Ou seja, $\vec{E^a}$ na forma coulombiana, é coerente com a distribuição estática de matéria e $\vec{B^a}$ é inexistente. Devemos ressaltar que esse eficiente paralelo só se verifica nesta ordem de aproximação. Calculamos algumas componentes de $\vec{E^a}$ e $\vec{B^a}$ para a segunda ordem (não exibidas nesta dissertação) e constatamos que elas fogem a esta interpretação simplista. A própria solução exata de Schwarzschild nos mostra a existência de $\vec{B^a}$ mesmo para distribuições estacionárias de matéria. Nossa conclusão é que quando a não-linearidade é recuperada, as duas teorias começam divergir.

Uma discussão sobre a energia e o momento do campo gravitacional se faz necessária, mesmo que em caráter preliminar. Considerando apenas a primeira ordem em ϵ para os campos, e sendo suas contribuições para a corrente ${j_a}^\rho$ proporcionais a E^2, B^2 e EB (pictoricamente), vemos que elas serão apenas de ordem ϵ^2, e por essa razão as equações de campo em primeira ordem ficaram simplificadas. Manter essa contribuição é verificar que "gravitação como fonte de gravitação"(colocando, pois, ${j_a}^\rho$ no lado direito da equação de campo) ocorre tal que os efeitos da não linearidade são efetivamente pequenos (nesta aproximação).

Podemos finalmente comentar que ${j_a}^\rho \equiv$ (energia e momento) $\approx E^2 + B^2 + EB$ (expressão exata em (3.18) e (3.20)) é de fato uma expressão comparável às do eletromagnetismo, a lembrar

$$T_{00} = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2) \tag{5.82}$$

que corresponde à densidade de energia e

$$(T_{01}, T_{02}, T_{03}) = -\frac{1}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B} \tag{5.83}$$

que corresponde à densidade de momento do campo eletromagnético ($\vec{E} \times \vec{B}$ é o vetor de Poynting da eletrodinâmica).

Capítulo 6

Casca Esférica Massiva Girante

No capítulo anterior foi apresentado um teste para as nossas definições em relação a uma geometria estática (solução de Schwarzschild) tanto na forma exata, quanto numa aproximação de campo fraco.

O objetivo do atual capítulo é analisar o comportamento da definição D2, já que até aqui se mostrou mais apropriada que a definição D1, em relação a uma outra configuração do espaço-tempo em que esperamos o aparecimento de componentes do campo gravito-magnético mesmo ao linearizarmos essa geometria. Assim, consideramos o espaço-tempo de uma casca esférica em um movimento de rotação lento e, de forma similar ao que foi feito anteriormente, desprezaremos termos de ordem superior a ϵ, lembrando que $\epsilon = \frac{m}{r}$.

Ao considerarmos a forma assintótica do tensor métrico de Kerr, no limite para momentos angulares pequenos, encontramos uma estrutura correspondente a essa configuração, que é exatamente a métrica que será considerada. O maior interesse em escolhermos tal métrica é que ela assemelha-se à região exterior do espaço-tempo de Kerr, com a vantagem de não possuir singularidades. Exibe, portanto, efeitos rotacionais regulares e é matematicamente de simples tratamento.

6.1 Eletromagnetismo: revisão

Antes de tratarmos o problema gravitacional em questão, vamos rever a solução do problema análogo no eletromagnetismo, ou seja, consideramos uma casca esférica de raio R cuja superfície é carregada com carga σ e é posta para rodar com velocidade angular Ω [21].

Neste caso, o potencial vetor é dado por:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} da', \tag{6.1}$$

aqui μ_0 é a constante de permeabilidade e $\vec{K}$ é a densidade superficial de corrente.

Calculando o potencial vetor para pontos fora da esfera, em coordenadas esféricas, encontramos

$$\vec{A}(r, \theta, \phi) = \frac{\mu_0 R^4 \Omega \sigma sen\theta}{3r^2} \hat{\phi}. \tag{6.2}$$

Obtemos assim o campo magnético fora da esfera

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0 R^4 \Omega \sigma}{3r^3} (2cos\theta \hat{r} + sen\theta \hat{\theta}), \tag{6.3}$$

de onde obtemos o campo magnético em coordenadas cartesianas,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 R^4 \Omega \sigma}{3\sqrt[5]{x^2 + y^2 + z^2}} \left[3(xz\hat{x} + yz\hat{y}) - (x^2 + y^2 - 2z^2)\hat{z}\right]. \tag{6.4}$$

Posteriormente faremos uma comparação, respeitando as diferenças, deste resultado com o análogo no caso gravitacional.

6.2 Geometria

O tensor métrico que representa a configuração da casca esférica e foi introduzido inicialmente por Cohen [22] é dado por:

$$ds^2 = -V^2 dt^2 + \psi^4[dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta (d\phi - \Omega dt)^2] . \tag{6.5}$$

Vale ressaltar que esta expressão é solução das equações de Einstein até primeira ordem em Ω. Nos termos que se seguem, r_0 é o raio da casca e $\alpha = \frac{m}{2}$, onde m é a sua massa.

Para dentro da casa, ou seja, para $r < r_0$:

$$V = \frac{r_0 - \alpha}{r_0 + \alpha}; \tag{6.6}$$

$$\psi \;=\; \psi_0 = 1 + \frac{\alpha}{r_0}; \tag{6.7}$$

$$\Omega \;=\; \Omega_0. \tag{6.8}$$

Para $r > r_0$:

$$V = \frac{r - \alpha}{r + \alpha}; \tag{6.9}$$

$$\psi = 1 + \frac{\alpha}{r}; \tag{6.10}$$

$$\Omega = \left(\frac{r_0 \psi_0^2}{r \psi^2}\right)^3 \Omega_0 \tag{6.11}$$

A constante Ω_0 representa a velocidade angular de arrasto de observadores localmente inerciais no interior da casca esférica.

Novamente a escolha do observador é fundamental para nossas conclusões, sendo assim, optaremos por um campo de tetradas adaptado a observadores estáticos no espaço-tempo. Assim, a seguinte condição deve ser satisfeita [23]

$$h_{(0)}{}^{\mu}(t, r, \theta, \phi) = \left(\frac{1}{A}, 0, 0, 0\right) . \tag{6.12}$$

Um campo de tetradas que respeita a condição acima é

$$h^a{}_\mu = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & -C \\ 0 & \psi^2 sen\theta \cos\phi & r\psi^2 \cos\theta \cos\phi & -B sen\theta\, sen\phi \\ 0 & \psi^2 sen\theta\, sen\phi & r\psi^2 \cos\theta\, sen\phi & B sen\theta \cos\phi \\ 0 & \psi^2 \cos\theta & -r\psi^2 sen\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

com

$$\begin{aligned} A &= (V^2 - r^2\Omega^2\psi^4 sen^2\theta)^{1/2}\,, \\ C &= -\frac{1}{A}\,\Omega r^2\psi^4 sen^2\theta\,, \\ B &= \frac{V}{A}\,r\psi^2\,. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Como a aplicação do limite de campo fraco resulta na decomposição simples da tetrada plana diagonal mais o termo não trivial (devido a presença de matéria e rotação), vamos escrever (6.13) em coordenadas cartesianas. Realizando a transformação tensorial, encontramos:

$$h_{a\mu} = \begin{pmatrix} A & \frac{Csen\phi}{rsen\theta} & -\frac{Ccos\phi}{rsen\theta} & 0 \\ 0 & -\left(\psi^2 cos^2\phi + \frac{B}{r} sen^2\phi\right) & sen\phi cos\phi\left(\frac{B}{r} - \psi^2\right) & 0 \\ 0 & sen\phi cos\phi\left(\frac{B}{r} - \psi^2\right) & -\left(\psi^2 cos^2\phi + \frac{B}{r} sen^2\phi\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\psi^2 \end{pmatrix}. \tag{6.15}$$

Observemos que a tetrada acima está em coordenadas cartesianas, mas seus elementos ainda estão em função de (r, θ, ϕ). Antes de considerarmos as transformações vamos realizar a aplicação dos limites de baixa rotação e campo fraco.

Nosso objetivo é obter uma tetrada do tipo

$$h^a{}_\mu = H^a{}_\mu + U^a{}_\mu. \tag{6.16}$$

Portanto, vamos aplicar primeiramente o limite de rotações lentas, isto é,

$$r^2\Omega^2 << 1. \tag{6.17}$$

Assim, as definições (6.14) tornam-se

$$\begin{aligned} A &\approx V\,, \\ C &\approx -\frac{1}{V}\,\Omega r^2\psi^4 sen^2\theta\,, \\ B &\approx r\psi^2\,. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Com isso o campo de tetrada pode ser escrito como

$$h_{a\mu} = \begin{pmatrix} V & -\frac{1}{V}\Omega r\psi^4 sen\theta sen\phi & \frac{1}{V}\Omega r\psi^4 sen\theta cos\phi & 0 \\ 0 & -\psi^2 & & 0 \\ 0 & 0 & -\psi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\psi^2 \end{pmatrix}. \tag{6.19}$$

Admitiremos a mesma hipótese do capítulo anterior, ou seja, que $\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2$ ou ϵ^2 pode ser desprezado. Além disso tomaremos o limite

$$\left(\frac{\alpha}{r_0}\right)^2 << 1. \tag{6.20}$$

E assim podemos expandir em série de Taylor as expressões que contenham estes termos. Feito isso e reescrevendo a tetrada em função de (x, y, z) obtemos finalmente:

$$h^a{}_\mu = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & -\frac{r_0^2(r_0+6\alpha)\Omega_0 y}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} & \frac{r_0^2(r_0+6\alpha)\Omega_0 x}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{2\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{2\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{2\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix}, \tag{6.21}$$

que corresponde à soma de uma tetrada plana mais uma pertubação, exatamente como (6.16).

Então podemos calcular as torções em primeira ordem substituindo (6.16) em (5.7):

$$T_{\rho\mu\nu} = H_{a\rho}\partial_\mu U^a{}_\nu + U_{a\rho}\partial_\mu U^a{}_\nu - H_{a\rho}\partial_\nu U^a{}_\mu - U_{a\rho}\partial_\nu U^a{}_\mu. \tag{6.22}$$

Os seguintes componentes do tensor de torção, considerando nossas aproximações, não irão se anular:

$$T_{012} = \left(1 - \frac{2\alpha}{r}\right)\left(\frac{2r_0\Omega_0(r_0 + 6\alpha)}{r^3} - \frac{3r_0^2\Omega_0(r_0 + 6\alpha)(x^2 + y^2)}{r^5}\right), \tag{6.23}$$

$$T_{013} = -\frac{3r_0^2\Omega_0 yz}{r^5}\left(r_0 + 6\alpha - \frac{2\alpha r_0}{r}\right), \; T_{103} = \left(\frac{2\alpha z}{r^3}\right)\left(\frac{r_0^2(r_0+6\alpha)\Omega_0 y}{r^3}\right),$$

$$T_{023} = \frac{3r_0^2\Omega_0 xz}{r^5}\left(r_0 + 6\alpha - \frac{2\alpha r_0}{r}\right), \quad T_{203} = -\left(\frac{2\alpha z}{r^3}\right)\left(\frac{r_0^2(r_0+6\alpha)\Omega_0 x}{r^3}\right),$$

$$T_{001} = T_{221} = T_{331} = -\frac{2\alpha x}{r^3}, \qquad T_{201} = -\left(\frac{2\alpha x}{r^3}\right)\left(\frac{r_0^2(r_0+6\alpha)\Omega_0 x}{r^3}\right),$$

$$T_{002} = T_{112} = T_{332} = -\frac{2\alpha y}{r^3}, \qquad T_{101} = \left(\frac{2\alpha x}{r^3}\right)\left(\frac{r_0^2(r_0+6\alpha)\Omega_0 y}{r^3}\right),$$

$$T_{003} = T_{113} = T_{223} = -\frac{2\alpha z}{r^3}, \qquad T_{202} = -\left(\frac{2\alpha y}{r^3}\right)\left(\frac{r_0^2(r_0+6\alpha)\Omega_0 x}{r^3}\right).$$

$$T_{102} = \left(\frac{2\alpha y}{r^3}\right)\left(\frac{r_0^2(r_0+6\alpha)\Omega_0 y}{r^3}\right),$$

Para cálculos posteriores iremos obter o tensor métrico aproximado partindo da relação

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}\, h^a{}_\mu\, h^b{}_\nu \,, \tag{6.24}$$

com a tetrada dada pela expressão (6.21). Feita a multiplicação das matrizes, encontramos:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1-2C & -(1-C)\,H_2 & (1-C)\,H_1 & 0 \\ -(1-C)\,H_2 & -(1+2C) & 0 & 0 \\ (1-C)\,H_1 & 0 & -(1+2C) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1+2C) \end{pmatrix}, \tag{6.25}$$

com

$$H_1 = \frac{r_0^2(r_0+6\alpha)\Omega_0 x}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}, \tag{6.26}$$

$$H_2 = \frac{r_0^2(r_0+6\alpha)\Omega_0 y}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} \tag{6.27}$$

e

$$C = \frac{2\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \tag{6.28}$$

como veremos mais a frente, é necessário calcularmos os componentes contravariantes do tensor métrico, o que nos leva a:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (1-2C)^{-1} & -(1-C)\,H_2 & (1-C)\,H_1 & 0 \\ -(1-C)\,H_2 & -(1+2C)^{-1} & 0 & 0 \\ (1-C)\,H_1 & 0 & -(1+2C)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1+2C)^{-1} \end{pmatrix}, \qquad (6.29)$$

pelo mesmo motivo citado anteriormente é essencial escrevermos a inversa da tetrada (6.21)

$$h_a{}^{\mu} = \begin{pmatrix} 1+\frac{2\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{r_0^2(r_0+6\alpha)\Omega_0 y}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} & -\frac{r_0^2(r_0+6\alpha)\Omega_0 x}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} & 0 \\ 0 & 1-\frac{2\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{2\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\frac{2\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix}. \qquad (6.30)$$

6.3 Campo gravito-magnético da casca esférica girante

De posse de todos os elementos necessários, podemos calcular os componentes gravito-magnéticos do campo gravitacional produzido por uma casca esférica em baixa rotação. Como explicado anteriormente utilizaremos apenas a definição (D2).

Sabemos que o superpotencial pode ser escrito como

$$S_a{}^{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left[h_a{}^{\lambda}T^{\sigma\rho}{}_{\lambda} + h_a{}^{\lambda}T_{\lambda}{}^{\rho\sigma} - h_a{}^{\lambda}T^{\rho\sigma}{}_{\lambda}\right] - h_a{}^{\sigma}T^{\theta\rho}{}_{\theta} + h_a{}^{\rho}T^{\theta\sigma}{}_{\theta}, \qquad (6.31)$$

que pode ser reescrito, com a adequada posição de índices para as torções

$$\begin{aligned} S_a{}^{\rho\sigma} = \frac{1}{2}&\left[h_a{}^{\lambda}g^{\sigma\mu}g^{\rho\nu}T_{\mu\nu\lambda} + h_a{}^{\lambda}g^{\rho\nu}g^{\sigma\mu}T_{\lambda\nu\mu} - h_a{}^{\lambda}g^{\rho\nu}g^{\sigma\mu}T_{\nu\mu\lambda}\right] \\ &-h_a{}^{\sigma}g^{\theta\delta}g^{\rho\nu}T_{\delta\nu\theta} + h_a{}^{\rho}g^{\theta\delta}g^{\sigma\mu}T_{\delta\mu\theta}. \end{aligned} \qquad (6.32)$$

De acordo com a nossa definição, devemos tomar $\rho = i$ e $\sigma = j$ na expressão acima e posteriormente abrir os somatórios.

A componente x do campo gravito-magnético torna-se

$$B_{(0)}{}^{x} = \frac{1}{2}\left[h_0{}^0 g^{22} g^{33}\left(T_{023} + T_{203}\right)\right] + h_0{}^0 g^{20} g^{33} T_{003}$$
$$-h_0{}^2 g^{00} g^{33} T_{003} - h_0{}^2 g^{11} g^{33} T_{113}, \tag{6.33}$$

a componente y

$$B_{(0)}{}^{y} = -\frac{1}{2}\left[h_0{}^0 g^{11} g^{33}\left(T_{013} + T_{103}\right)\right] - h_0{}^0 g^{10} g^{33} T_{003}$$
$$+h_0{}^1 g^{00} g^{33} T_{003} + h_0{}^1 g^{22} g^{33} T_{223} \tag{6.34}$$

e por fim a componente z

$$B_{(0)}{}^{z} = \frac{1}{2} h_0{}^0 g^{11} g^{22}\left[-T_{201} + T_{012} - T_{102}\right] - h_0{}^0 g^{11} g^{20} T_{001}$$
$$+h_0{}^0 g^{10} g^{22} T_{002} + h_0{}^2 g^{11} g^{00} T_{001} - h_0{}^2 g^{11} g^{33} T_{313}$$
$$-h_0{}^1 g^{22} g^{00} T_{002} + h_0{}^1 g^{22} g^{33} T_{323}. \tag{6.35}$$

Todas as demais combinações do superpotencial são nulas, levando em conta nossas aproximações.

Ao substituirmos os elementos da tetrada, tensor métrico e torção nos resultados acima obtemos os componentes do campo gravito-magnético x, y e z, respectivamente,

$$B_{(0)}{}^{x} = \frac{r_0^2 \Omega_0 (r_0 + 6\alpha) x z}{\sqrt[5]{x^2 + y^2 + z^2}}\left[\frac{3}{2} - \frac{11\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right], \tag{6.36}$$

$$B_{(0)}{}^{y} = \frac{r_0^2 \Omega_0 (r_0 + 6\alpha) y z}{\sqrt[5]{x^2 + y^2 + z^2}}\left[\frac{3}{2} - \frac{11\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right] \tag{6.37}$$

e

$$B_{(0)}{}^{z} = \frac{r_0^2 \Omega_0 (r_0 + 6\alpha)}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}}\left[1 - \frac{8\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right] \tag{6.38}$$
$$-\frac{r_0^2 \Omega_0 (r_0 + 6\alpha)}{\sqrt[5]{x^2 + y^2 + z^2}}(x^2 + y^2)\left[\frac{3}{2} - \frac{11\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right]. \tag{6.39}$$

Ao compararmos as expressões acima com (6.4) notamos uma certa semelhança entre os resultados. Por exemplo, as componentes x e y de B^a (a=0) são proporcionais ao produto xz e yz respectivamente, da mesma forma que as componentes eletromagnéticas, enquanto a componente z possui um termo proporcional a x^2 e y^2, como o eletromagnetismo. É importante ressaltar que a analogia pode ser feita até um certo ponto, pois no caso gravitacional a velocidade angular para um observador fora da casca, depende da distância do mesmo a casca, além da sua própria massa, enquanto no exemplo eletromagnético dado, Ω é constante. Isso também pode explicar as diferentes potências da dependência com a distância radial nos dois sistemas físicos. E da mesma forma que no capítulo anterior as componentes de ${B_a}^k$ com $a = 0$ é que se mostram análogas ao caso eletromagnético.

Além disso, para obtermos as componentes do campo gravito-magnético consideramos o limite de baixa rotação e campo fraco. Um fato importante é que ao anularmos Ω_0 as componentes acima também desaparecem, isto é, se a casca perder seu movimento de rotação não teremos componentes do campo gravito-magnético.

Vale salientar ainda que a ordem de grandeza do campo gravito-elétrico é diferente da do campo gravito-magnético, já que o mesmo carrega um fator de $\frac{1}{c^2}$ que não fica explícito em unidades naturais, tanto que este último ainda não foi medido (por exemplo o campo gravito-magnético proposto por Mashhoon). Isso pode ser corrigido ao considerarmos a constante da velocidade da luz em nossos cálculos e definições.

Capítulo 7

Conclusão

O ETRG, que descreve a interação gravitacional, possui seus fundamentos baseados numa teoria de gauge abeliana, da mesma maneira que o Eletromagnetismo. Neste trabalho fizemos uma analogia entre essas duas interações fundamentais.

Nesse contexto definimos, de duas formas diferentes, as versões dos campos gravito-elétrico e gravito-magnético e analisamos as diferenças entre as duas abordagens. Essas definições foram propostas de uma maneira diferente do que é usualmente feito na RG.

O que seriam as equações de Maxwell gravitacionais se mostraram completamente diferentes das equações do eletromagnetismo na sua forma exata (sem aproximação), tanto na definição $D1$ quanto na $D2$. De certa forma isso já era esperado devido à não linearidade da gravitação. Contudo, o segundo par das equações de campo vindo da identidade de Biachi na definição $D1$ é parecido com o eletromagnético uma vez que a definição é bastante similar à eletromagnética.

O primeiro par das equações de Maxwell gravitacionais se mostrou mais próximo ao equivalente eletromagnético quando consideramos o teleparalelismo dual mesmo na sua forma exata. Essa consideração aproxima as duas teorias, pois o termo de acoplamento proveniente do ${j_a}^{\rho}$, neste caso, se anula. Assim, as equações de campo dinâmicas tornam-se semelhantes.

A equação da trajetória para partículas sem spin obtida no Teleparalelismo é completamente análoga à força de Lorentz do eletromagnetismo. Na definição $D1$ encontramos uma equação semelhante a da força de Lorentz em termos de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ como era esperado devido à similaridade entre o tensor intensidade de campo das duas teorias.

Quando utilizamos a definição $D2$ encontramos uma equação mais complexa. Essa diferença se deve à presença do campo de tetrada. Em contraste, quando aplicamos essa equação a uma geometria específica, no caso de Schwarzschild, considerando a condição de campo fraco, observamos uma grande simplificação que a tornou mais parecida com a equação eletromagnética. Nesse contexto, vemos que a interpretação ainda deve ser melhorada.

Na tentativa de compreender qual das definições estava associada a fenômenos físicos, aplicamos nossas definições a uma geometria conhecida, no caso a de Schwarzschild. Inicialmente encontramos um resultado inesperado, ou seja, mesmo em uma configuração estática obtivemos a componente gravito-magnética nos dois modelos. Deste fato, concluímos que o caráter não linear da gravitação é responsável pelo aparecimento dessa componente em uma solução exata. Assim, a corrente de gauge ${j_a}^{\rho}$ "agiria"como fonte do campo gravitacional.

Em seguida, com o intuito de verificar se a linearização da gravitação conduziria a equações semelhantes àquelas do eletromagnetismo, tomamos a solução de Schwarzschild no contexto de campo fraco, ou seja, primeira ordem em ϵ. O resultado obtido para a definição $D1$ foi o aparecimento da componente gravito-magnética mesmo nessa ordem de aproximação em ϵ. Este não é um resultado satisfatório pois a configuração de massa (carga) equivalente no eletromagnetismo está associada somente ao campo elétrico. Porém, um resultado interessante foi encontrado quando aplicamos a definição $D2$ às mesmas condições citadas acima. Obtivemos o seguinte: o anulamento da componente gravito-magnética e a componente gravito-elétrica totalmente análoga ao campo elétrico Coulombiano do eletromagnetismo.

Com o intuito de testarmos novamente a definição D2 escolhemos uma configuração física que de acordo com a nossa abordagem deveria gerar campo gravito-magnético. A geometria escolhida foi a de uma casca esférica em rotação. Como as expressões para $\vec{E}$ e $\vec{B}$, compatíveis com a fenomenologia esperada, se dão no regime de campo fraco, tomamos essa hipótese e ainda consideramos o limite de baixa rotação. O resultado foi novamente surpreendente quando comparamos com o análogo eletromagnético, ou seja, uma casca esférica em rotação com densidade superficial de carga σ. As expressões finais mostraram-se muito parecidas.

Como perspectivas futuras queremos analisar o comportamento dos nossos modelos considerando ordens superiores em ϵ. Exploraremos um pouco mais a geometria da casca esférica para obter a componente gravito-elétrica e as equações de campo. Testaremos nosso modelo em outras configurações de campo. Analisaremos as consequências advindas da nossa abordagem quando aplicada ao formalismo Hamiltoniano [24], na análise da energia-momento do campo gravitacional.

Referências Bibliográficas

[1] R. D'inverno, *Introducing Einstein´s Relativity* (Clarendon Press, Oxford, 1996)

[2] K. Hayashi and T. Shirafuji, Phys. Rev D **19**, 3524 (1979).

[3] C. Moller, K. Dan. Vidensk. Selsk. Mot. Fys, **1**, no. 10 (1961)

[4] C. Pellegrini on J. Plebanski, K. Dan. Vidensk. Selsk. Mot. Fys. Skr. **Z**, no. 2 (1962)

[5] H. Weyl, Gravitation und Eliktrizitüt, Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaften Berlin, 465 (1918)

[6] K. Hayashi and T. Nakano, Proy. Theor. Phys. **38**, 491. (1967)

[7] R. Aldrovandi, J.G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics* (World Scientific, Singapore, 1995).

[8] B. Mashhoon, International Journal of Modern Physics D **14**, 12 (2005).

[9] Maxwell J.C. Phil. Trans. **155**, (1865) 492.

[10] G. Holzmüller, Z. Moth. Phys. **15**, 69 (1870).

[11] F. Tisserand, Compt. Rend. **75**, 760 (1872); **110**, 313 (1890).

[12] B. Mashhoon, F. W. Hehl, D. S. Theiss, GRG **16**, 8 (1984).

[13] I. Ciufolini and J. A. Wheeler, *Gravitation and Inertia* (Princeton University Press, Princeton, 1951).

[14] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen e J. G. Pereira, Phys. Rev. Lett. **84**, 4533 (2000).

[15] V. C. de Andrade, A. L. Barbosa e J. G. Pereira, International Journal of Modern Physics D **14**, 9 (2005).

[16] R. Weitzenböck, *Invariantentheorie* (Noordhoff, Gronningen, 1923).

[17] L. Landau and E. Lifchitz, *Teoria do Campo* (Hemus, São Paulo).

[18] V. C. de Andrade e J. G. Pereira, Phys. Rev. **D 56**, 4689 (1997).

[19] J. G. Pereira, T. Vargas, C. M. Zhang, Phys.Rev. D **64** (2001) 027502.

[20] J. W. Maluf, F. F. Faria, S. C. Ulhoa, Class. Quantum Grav. **24** No 10 (21 May 2007).

[21] D. J. Griffiths, *Introduction to Eletrodynamics* (Prentice Hall, New Jersey, 1999).

[22] J. M. Cohen,J. Math.Phys. **8** 1477.

[23] J. W. Maluf, S. C. Ulhoa and J. F. Rocha-Neto, Class. Quantum Grav. **23** (6 Oct 2006).

[24] J. W. Maluf, M. V. O. Veiga and J. F. Rocha-Neto, Gen. Rel. Grav. **39** (2007) 227-240.