

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISE DE PARÂMETROS QUE CARACTERIZAM O
MÉTODO DE GALERKIN SEM MALHA APLICADO À
ELASTICIDADE LINEAR**

FLÁVIA ROMANO VILLA VERDE

ORIENTADOR: JORGE LUIZ DE ALMEIDA FERREIRA

TESE DE DOUTORADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO: ENM.TD – 002 A/09

BRASÍLIA/DF: DEZEMBRO - 2009

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISE DE PARÂMETROS QUE CARACTERIZAM O MÉTODO
DE GALERKIN SEM MALHA APLICADO À ELASTICIDADE
LINEAR**

FLÁVIA ROMANO VILLA VERDE

**TESE SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA
MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM
CIÊNCIAS MECÂNICAS.**

APROVADA POR:

**Prof Jorge Luiz de Almeida Ferreira DSc, (ENM - UnB)
(Orientador)**

**Prof. Marcelo Amorim Savi, DSc (COPPE- UFRJ)
(Examinador Externo)**

**Prof. Edgar Nobuo Mamiya, DSc (ENM - UnB)
(Examinador Interno)**

**Prof. Luciano Mendes Bezerra, PhD (ENC - UnB)
(Examinador Externo)**

**Prof^a. Dianne Magalhães Viana, DSc (ENM - UnB)
(Examinadora Externa)**

BRASÍLIA/DF, 4 DE DEZEMBRO DE 2009

FICHA CATALOGRÁFICA

VILLA VERDE, FLÁVIA ROMANO

Análise de Parâmetros que Caracterizam o Método de Galerkin sem Malha Aplicado à Elasticidade Linear [Distrito Federal] 2009.

xxxii, 222p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Doutor, Ciência Mecânica, 2009).

Tese de Doutorado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Método de Galerkin sem malha

2.Parâmetros de ajuste

3.Função de forma

4.Mecânica computacional

I. ENM/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

VILLA VERDE., F. R. (2009). Análise de Parâmetros que Caracterizam o Método de Galerkin sem Malha Aplicado à Elasticidade Linear. Tese de Doutorado em Ciências Mecânica, Publicação ENM.TD-002A/09, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 222p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Flávia Romano Villa Verde.

TÍTULO: Análise de Parâmetros que Caracterizam o Método de Galerkin sem Malha Aplicado à Elasticidade Linear.

GRAU: Doutor

ANO: 2009

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa tese de doutorado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Flávia Romano Villa Verde
Rua Gavião Peixoto 13 apt 1202, Icaraí.
24230-090 Niterói – RJ – Brasil.

DEDICATÓRIA

Ao meu marido, Thiago Saraiva de Almeida Raeder

Aos meus pais, Maria Cristina Romano Villa Verde e Carlos Monteiro Villa Verde

Aos meus irmãos, Maila e Carlos Eduardo Romano Villa Verde

RESUMO

ANÁLISE DE PARÂMETROS QUE CARACTERIZAM O MÉTODO DE GALERKIN SEM MALHA APLICADO À ELASTICIDADE LINEAR

A recente demanda por métodos sem malha ocorre em razão da necessidade de simplificar a adaptação de problemas com contornos móveis e descontinuidades, eliminando assim o processo de remalha. Estes métodos estabelecem um sistema de equações algébricas para todo o domínio sem empregar uma malha pré-definida, ao menos na interpolação das variáveis de campo. A construção das funções de forma, por sua vez, é feita utilizando apenas as posições nodais. Vários métodos sem malha foram propostos, sendo que o método de Galerkin sem malha (*Element Free Galerkin*, EFG) está entre os mais conhecidos e difundidos.

A análise realizada neste trabalho baseia-se no estudo dos parâmetros que afetam a construção da função de forma e de sua derivada. A dificuldade de trabalhar com o método EFG reside justamente no fato das funções de forma serem calculadas durante a execução. Como exemplo destes parâmetros de ajuste pode-se destacar a funções peso, o tamanho do domínio de influência (constante ou definido por busca), a quantidade de nós no domínio, o tipo da distribuição nodal (uniforme, não-uniforme) e a quantidade de células de integração (pontos amostrais de Gauss).

Este trabalho tem como objetivo identificar as melhores configurações de parâmetros que compõem o método EFG em problemas unidimensionais e bidimensionais voltados à mecânica estrutural elástico-linear. Para tal, utilizou-se a técnica de avaliar isoladamente o comportamento de cada parâmetro empregando combinações das demais variáveis. As normas de erro dos campos de deslocamento e de tensões assim como as normas de energia foram utilizadas como critério para estabelecer os limites de operacionalidade. Esta tese permite ainda fornecer uma melhor compreensão acerca do funcionamento e uso do método EFG, por meio de sua descrição detalhada em conjunto com os seus resultados.

ABSTRACT

ANALYSIS OF PARAMETERS THAT CHARACTERIZE THE ELEMENT FREE GALERKIN METHOD APPLIED IN LINEAR ELASTICITY

The recent demand for meshless methods occurs because of the need to simplify the adaptation of problems with moving boundaries and discontinuities, thus eliminating the remeshing process, since the meshless methods establish an algebraic equations system for the whole field of a problem without the use of a predefined mesh, at least in the field variables interpolation. In meshless methods, the shape functions are constructed using only the nodal positions. Several meshless methods have been proposed, among them the Element Free Galerkin method (EFG) is one of the most well-known and widespread meshless method.

The difficulty of working with meshless methods is precisely the shape functions construction during execution. Since for this to occur, a set of parameter used by the method must be adjusted. Among these parameters, we can to highlight the weight functions, the size of the domain of influence (constant or by search), the number of nodes in the domain, the type of nodal distribution (uniform, non-uniform) and the number of cells in the background mesh (Gauss sampling points).

The aim of this work is to identify the better parameters settings for the EFG method in one-dimensional and two-dimensional problems applied to elastic-linear structural analysis. For this, we try to analyze in a separate way each parameter in many variables combinations. In order to establish the EFG work limits, we use the stress and displacement error norm and energy norm. This thesis can also provide a better understanding about the procedure and use of the EFG, through its detailed description in conjunction with the results.

SÍMBOLOS

Gregos

α	Vetor que armazena o fator de penalidade
α_i	Posições no vetor α
α_n	Razão entre os pontos de integração e o número de nós no domínio
α	Parâmetro da equação peso
β	Parâmetro da equação peso
ΔV_I	Elementos de volume
Ξ	Funcional Lagrangeano
Γ	Contorno do domínio
Γ_u	Contorno do domínio com restrições aplicadas
Γ_t	Contorno do domínio forças aplicadas
δ	Função Delta Dirac
δ_{IJ}	Delta de Kronecker
\mathcal{E}'	Tensor de deformações virtual
λ	Vetor que armazena os multiplicadores de Lagrange
λ_i	Posições do vetor λ
ν	Coefficiente de Poisson.
Π	Energia potencial
ϕ	Vetor da função de forma
Φ	Matriz da função de forma
Ψ	Função teste
ψ	Energia total do sistema modificada pelas condições de contorno
Ω	Domínio
Ω_S	Domínio associado ao suporte de \mathbf{x}
\mathcal{L}	Funções de Lagrange
ρ	Massa específica

Latinos

A	Matriz de momento
a	Coefficientes do polinômio
B	Derivada da função de forma
B	Matriz para o cálculo da função de forma
b	Vetor forças de campo
c_I	Distância utilizada para a determinação do domínio de influência de um ponto
c_{xI}	Distância em x utilizada para a determinação do domínio de influência de um ponto
c_{yI}	Distância em y utilizada para a determinação do domínio de influência de um ponto
C	Função de correção
D	Matriz de elasticidade
D	Altura da viga
d_{mI}	Tamanho do domínio de influência do I -ésimo nó
d_{max}	Parâmetro de escala do domínio de influência
E	Módulo de elasticidade ou módulo de Young
E_C	Energia cinética definida
E_S	Energia de deformação
I	Momento de inércia
J	Funcional quadrático
\mathbf{f}_I	Vetor força nodal
h	Tamanho do suporte do SPH
G	Matriz de condição de contorno
K	Matriz de rigidez
K	Núcleo modificado
k	Número mínimo de pontos no domínio de influência (no suporte de função peso)
k	Ordem de consistência ou parâmetro das equações peso
L	Comprimento da viga
$L^h(u)$	Aproximação discreta de uma equação diferencial parcial $L(u)$
Lu	Erro percentual do deslocamento
$L\sigma$	Erro percentual da tensão normal
$L\tau$	Erro percentual da tensão cisalhante
m	Número de termos da base ou massa
N	Interpolador de Lagrange

N_Q	Número de equações independentes usadas em todos os pontos de quadratura
N_u	Número de variáveis desconhecidas
N_x	Números de nós na direção x
N_y	Número de nós na direção y
n	Número de nós na vizinhança do nó \mathbf{x}
\mathbf{n}	Vetor unitário normal à superfície
n_f	Número de graus de liberdade restritos
n_Q	Número total de pontos de quadratura no domínio Ω
n_g	Número de pontos de amostragem de Gauss dentro de uma célula
n_t	Número de nós do domínio Ω
n_x	Número de células de fundo na direção x
n_y	Número de células de fundo na direção y
\mathbf{p}	Vetor de monômios
\mathbf{P}	Matriz que armazena monômios
P_f	Função penalidade
\mathbf{q}	Vetor que armazena as condições de contorno
r	Raio normalizado (função peso)
s	Arco de comprimento ao longo do contorno
\mathbf{t}	Vetor de forças aplicadas em Γ_t
\mathbf{u}	Campo de deslocamento
\mathbf{U}	valor nodal
\mathbf{u}'	Campo de deslocamento virtual
$\dot{\mathbf{u}}$	Velocidade
u^h	Função tentativa ou função aproximação
x_Q	Pontos de quadratura
\mathbf{W}	Matriz que armazena a função peso de um domínio de influência em sua diagonal
\mathbf{W}'	Tensor de rotação virtual
W_f	Trabalho das forças externas
w	Função peso
w_0	Constante na função peso SPH
$w_{,x}$	derivada em x de função peso
$w_{,y}$	derivada em y de função peso
\mathbf{x}	Vetor de coordenadas espaciais

x direção x
 \mathbf{y} Vetor de coordenadas espaciais
 y direção y

Siglas

BNM	<i>Boundary Node Methods</i>
CCE	Condições de Contorno Essenciais
CSPH	<i>Corrected Smoothed Particle Hydrodynamics</i>
DAM	<i>Diffuse Approximation Method</i>
DEM	<i>Diffuse Element Method</i>
EFG	<i>Element Free Galerkin</i>
FPM	<i>Finite Point Method</i>
GFDM	<i>General Finite Difference Method</i>
GFEM	<i>Generalized Finite Element method</i>
KE	<i>Kernel Estimate</i>
LRPIM	<i>Local Radial Point Interpolation Method</i>
MCM	<i>Meshless Collocation Method</i>
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
MFEM	<i>Meshless Finite Element Method</i>
MFS	<i>Methods of Fundamental Solutions</i>
MK	<i>Moving Kriging</i>
MKI	<i>Moving Kriging Interpolation</i>
MLPG	<i>Meshless Local Petrov-Galerkin</i>
MML	Método dos Multiplicadores de Lagrange
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados
MMQM	Método dos Mínimos Quadrados Móveis
MP	Método da Penalidade
MPFEM	<i>Moving Particle Finite Element Method</i>
MRPIM	<i>Meshfree Radial Point Interpolation Method</i>
MVF	Método dos Volumes Finitos
MWS	<i>Meshfree Weak-Strong-form</i>
NEM	<i>Natural Element Method</i>
PIM	<i>Point Interpolation Method</i>
PU	Partição da Unidade
PUFEM	<i>Partition of Unity Finite Element Method</i>
PUMs	<i>Partition of Unity Methods</i>

PUM	<i>Partition of Unity Method</i>
RBF	<i>Radial Basis Functions</i>
RK	<i>Reproduced Kernel</i>
RKEM	<i>Reproducing Kernel Element Method</i>
RKM	<i>Reproducing Kernel Method</i>
RKPM	<i>Reproducing Kernel Particle Method</i>
RPIM	<i>Radial Point Interpolation Method</i>
SPH	<i>Smoothed Particle Hydrodynamics</i>
UC	<i>Unidade de Comprimento</i>
XFEM	<i>eXtended Finite Element Method</i>

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 - Classificação dos métodos sem malha por Fries e Matthies (2004).	11
Figura 2.2 - Dificuldades encontradas na construção das conectividades (a) variação do comprimento h e (b) h direcional.	15
Figura 2.3 - Utilização de elementos finitos para impor as CCE.	21
Figura 2.4 - Partição da unidade (Lagrange linear): elementos finitos em \mathbb{R}^1	29
Figura 2.5 - Enriquecimento da partição da unidade.	30
Figura 2.6 - Função aproximação $u^h(x)$ e o parâmetro nodal u_I na aproximação pelo MMQ.	33
Figura 2.7 - Pontos e suporte para o método sem malha: (a) disco, (b) retângulo.	36
Figura 2.8 - Técnicas de quadratura para métodos sem malha:	44
Figura 2.9 - Integração do domínio utilizando elementos de quadratura indicando os pontos de quadratura x_Q , suporte ou domínio de influência, nós e células de integração.	45
Figura 2.10 - Representação de um domínio que apresenta, (a) distribuição regular de pontos (N_x e N_y) e (b) células de integração de fundo (n_x e n_y).	47
Figura 3.1 - Viga engastada com carregamento de flexão aplicado na extremidade livre. .	55
Figura 3.2 - Solução analítica para campo de deslocamento em y do problema proposto. .	56
Figura 3.3 - Dimensões (D igual a 12 e L igual a 48 unidades de comprimento) e sistema de coordenadas do domínio Ω	57
Figura 3.4 - Nós distribuídos regularmente no domínio (55 nós).	57
Figura 3.5 - Células de integração para o EFG distribuídas sobre o domínio Ω	58
Figura 3.6 - Distribuição dos 16 pontos amostrais de Gauss em cada uma das 40 células de integração.	58
Figura 3.7 - Domínio de influência do ponto amostral de Gauss 640 (composto por 16 nós).	59
Figura 3.8 - Forças aplicadas no contorno: \times pontos amostrais de Gauss e \bullet nós do domínio.	60
Figura 3.9 - Domínio de influência do primeiro ponto amostral de Gauss no contorno com força aplicada.	61
Figura 3.10 - Restrições aplicadas no contorno: \times pontos amostrais de Gauss e \bullet pontos do domínio.	61

Figura 3.11 - Domínio de influência do primeiro ponto amostral de Gauss no contorno com restrição aplicada.....	63
Figura 3.12 - Domínio de influência do primeiro nó do domínio.	63
Figura 3.13 - Barra unidimensional com condições de contorno de força (distribuída e não-uniforme) e restrição (engaste).	65
Figura 3.14 - Barra com distribuição uniforme de nós e pontos de Gauss.	66
Figura 3.15 - Coordenadas dos 11 nós e 11 pontos de Gauss na barra com comprimento unitário: distribuição uniforme.	66
Figura 4.1 - (a) Número e (b) percentual de nós no domínio de influência utilizados na integração de \mathbf{K} para um domínio com 11 nós e $d_{max} = 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5$ e $4,0$	69
Figura 4.2 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada para os 11 nós do domínio durante a integração de \mathbf{K} : função peso cúbica e d_{max} igual a $1,5$	70
Figura 4.3 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) funções de forma e (d) sua derivada para os 11 nós do domínio durante a integração de \mathbf{K} : função peso cúbica e d_{max} igual a $4,0$	71
Figura 4.4 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada pertinentes aos nós 0, 1, 5, 9 e 10 do domínio, para d_{max} igual a $1,5$ e funções peso cúbica, quártica, quinta ordem e cônica1.	72
Figura 4.5 - (a) Função peso e (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada pertinentes aos nós 0, 1, 5, 9 e 10 do domínio, para d_{max} igual a $4,0$ e funções peso cúbica, quártica, quinta ordem e cônica1.	73
Figura 4.6 - Solução do sistema de equações para (a) três funções <i>spline</i> e (b) duas funções cônicas, para d_{max} igual a $1,5; 2,5; 3,5$ e $4,0$	74
Figura 4.7 - (a) Número e (b) percentual de nós no domínio de influência centrados no nó empregando domínio com 11 nós e d_{max} igual a $1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5$ e $4,0$	75
Figura 4.8 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada pertinentes os 11 nós do domínio, no cálculo do deslocamento: função cúbica e d_{max} igual a $1,5$	75
Figura 4.9 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada pertinentes os 11 nós do domínio, no cálculo do deslocamento: função cúbica e d_{max} igual a $4,0$	76
Figura 4.10 - (a) Função de forma e (b) sua derivada nos nós 0, 1, 5, 9 e 10, para $d_{max} = 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5$ e $4,0$ empregando a função peso cúbica <i>spline</i>	77

Figura 4.11 - Representação dos valores da função de forma nos nós 0, 1, 5, 9 e 10, para $d_{max} = 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5$ e 4,0; domínio com 11 nós e função peso cúbica <i>spline</i> .	77
Figura 4.12 - Campo de deslocamento obtido com (a) três funções <i>spline</i> e (b) duas funções cônicas utilizando $d_{max} = 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5$ e 4,0, em domínio com 11 nós.	78
Figura 4.13 - Número de condição (razão entre autovalores) da matriz global para as cinco funções peso e valores de d_{max} testados, em um domínio com 11 nós.	78
Figura 4.14 - Norma do erro dos campos de (a) deslocamento e de (b) deformação para as cinco funções peso e valores de d_{max} testados, em um domínio com 11 nós.	79
Figura 4.15 - Comportamento, em função de r , das funções peso: cúbica, quártica, quinta ordem, cônica1 e cônica2.	80
Figura 4.16 - Número de condição (razão entre autovalores) da matriz global para $d_{max} = 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5$ e 4,0 e função peso cúbica, em domínios com 11, 51 e 101 nós.	81
Figura 4.17 - Norma do erro dos campos de (a) deslocamento e de (b) deformação para $d_{max} = 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5$ e 4,0 e função peso cúbica, em domínios com 11, 51 e 101 nós.	81
Figura 4.18 - Tamanho de dm , em unidade de comprimento, pertinente a montagem da matriz global em um domínio unitário com 11 nós e k igual a (a) 2 e (b) 3.	83
Figura 4.19 - (a) Número e (b) percentual de nós por domínio de influência pertinente a integração da matriz global, em um domínio com 11 nós distribuídos uniformemente e k igual a 2.	83
Figura 4.20 - (a) Número e (b) percentual de nós por domínio de influência pertinente a integração da matriz global, em um domínio com 11 nós distribuídos uniformemente e k igual a 3.	84
Figura 4.21 - Domínio de influência centrado no sexto ponto de Gauss durante a integração da matriz global: d_{max} igual a 1, k igual a 2 e domínio composto por 11 nós.	85
Figura 4.22 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada, para os 11 nós durante a montagem da matriz global: d_{max} igual a 1,5; k igual a 2 e função peso cúbica.	86
Figura 4.23 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada, para os 11 nós durante a montagem da matriz global: d_{max} igual a 4,0, k igual a 2 e função peso cúbica.	87

Figura 4.24 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada para os 11 nós durante a montagem da matriz global: d_{max} igual a 1,5; k igual a 3 e função peso cúbica.....	88
Figura 4.25 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada para os 11 nós durante a montagem da matriz global: d_{max} igual a 4,0; k igual a 3 e função peso cúbica.....	89
Figura 4.26 - Número de condição em função de d_{max} : domínio com 11 nós e k igual a 2 e 3.....	89
Figura 4.27 - Domínios de influência centrados nos pontos de Gauss 0 e 6 durante o processo de integração da matriz global: d_{max} igual a 1, k igual a 3 e domínio com 11 nós.	90
Figura 4.28 - (a) Número e (b) percentual de nós utilizados no cálculo da função de forma utilizada no cálculo do deslocamento: k igual a 2 e domínio com 11 nós.	90
Figura 4.29 - (a) Número e (b) percentual de nós utilizados no cálculo das funções de forma utilizadas no cálculo do campo de deslocamento: k igual a 3 e domínio com 11 nós.	91
Figura 4.30 - (a) Função peso, (b) sua derivada (c) função de forma e (d) sua derivada para os 11 nós durante o cálculo do deslocamento: d_{max} igual a 1,5; k igual a 2 e função peso cúbica.....	92
Figura 4.31 - (a) Função peso, (b) sua derivada (c) função de forma e (d) sua derivada para os 11 nós durante o cálculo do deslocamento: d_{max} igual a 4,0; k igual a 2 e função peso cúbica.....	93
Figura 4.32 - (a) Função peso, (b) sua derivada (c) função de forma e (d) sua derivada para os 11 nós durante o cálculo do deslocamento: d_{max} igual a 1,5; k igual a 3 e função peso cúbica.....	94
Figura 4.33 - (a) Função peso, (b) sua derivada (c) função de forma e (d) sua derivada para os 11 nós durante o cálculo do deslocamento: d_{max} igual a 4,0 e k igual a 3 e função peso cúbica.....	95
Figura 4.34 - Domínio de influência centrado no sexto nó: k igual a 3, d_{max} igual a 1 e domínio com 11 nós uniformemente distribuídos.	95
Figura 4.35 - Deslocamento nodal em função de d_{max} para k igual a (a) 2 e (b) 3: função peso cúbica <i>spline</i> e domínio com 11 nós.	96
Figura 4.36 - Norma do erro do campo (a) de deslocamento e (b) de deformação em função de d_{max} : domínio com 11 nós, função peso cúbica <i>spline</i> e k igual a 2 e 3.	96

Figura 4.37 - Número de condição em função de d_{max} para domínios com 11, 51 e 101 nós e função peso cúbica <i>spline</i> : k igual a (a) 2 e (b) 3.....	96
Figura 4.38 - Norma do erro do campo de deslocamento e de deformação em função de d_{max} para domínios com 11, 51 e 101 nós e k igual a 2: função peso (a) (b) cônica2, (c) (d) cúbica, (e) (f) quártica e (g) (h) quinta ordem.....	97
Figura 4.39 - Norma do erro do campo de deslocamento e de deformação em função de d_{max} para domínios com 11, 51 e 101 nós e k igual a 3: função peso (a) (b) cônica2, (c) (d) cúbica, (e) (f) quártica e (g) (h) quinta ordem.....	98
Figura 4.40 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada para os nós 0, 1, 5, 9 e 10: domínio com 11 nós, $d_{max} = 1,5$ k = 2 e função peso cúbica. ...	99
Figura 4.41 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada para os nós 0, 1, 25, 49 e 50: domínio com 51 nós, k = 2, $d_{max} = 1,5$ e função peso cúbica.	100
Figura 4.42 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada para os nós 0, 1, 50, 99 e 100: domínio com 101 nós, k = 2, $d_{max} = 1,5$ e função peso cúbica.....	101
Figura 4.43 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada para os nós 0, 1, 5, 9 e 10: domínio com 11 nós, k = 2, $d_{max} = 1,5$ e função de quinta ordem.	102
Figura 4.44 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada para os nós 0, 1, 25, 49 e 50: domínio com 51 nós, k = 2, $d_{max} = 1,5$ e função de quinta ordem.....	103
Figura 4.45 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada para os nós 0, 1, 50, 99 e 100: domínio com 101 nós, k = 2, $d_{max} = 1,5$ e função de quinta ordem.....	104
Figura 4.46 - Distribuição não-uniforme de 11 nós e 11 pontos de Gauss no domínio: ...	105
Figura 4.47 - Número de condição para domínios com 11, 51 e 101 nós utilizando a função peso cúbica <i>spline</i> e k igual a (a) 2 e (b) 3.	105
Figura 4.48 - Número de condição para domínios com 11, 51 e 101 nós utilizando a função peso quártica <i>spline</i> e k igual a (a) 2 e (b) 3.	106
Figura 4.49 - Número de condição para domínios com 11, 51 e 101 nós utilizando a função peso de quinta ordem <i>spline</i> e k igual a (a) 2 e (b) 3.	106
Figura 4.50 - Normas dos campos de deslocamento e de deformação para k igual a 2. ...	107
Figura 4.51 - Normas dos campos de deslocamento e de deformação para k igual a 3. ...	108

Figura 4.52 - Domínios de influência centrados no sexto e nono pontos de Gauss pertinentes a integração da matriz K : k igual a 2, d_{max} igual a 1 e distribuição nodal não-uniforme.....	109
Figura 4.53 - Domínio de influência centrado no sexto durante o cálculo do deslocamento:	109
Figura 4.54 - Domínio de influência centrado no sexto e nono pontos de Gauss durante a montagem da matriz global: k igual a 3, d_{max} igual a 1 e domínio com 11 nós.....	110
Figura 4.55 - Domínio de influência centrado no sexto nó durante o cálculo do deslocamento: k igual a 3, d_{max} igual a 1,0 e domínio com 11 nós.....	110
Figura 4.56 - (a) Função peso e (c) de forma, bem como, (b) (d) de suas derivadas durante o cálculo da matriz global: função peso cúbica, k igual a 2 e d_{max} igual a 1,5.....	111
Figura 4.57 - (a) Função peso e (c) de forma, bem como, (b) (d) de suas derivadas durante o cálculo da matriz global: função peso cúbica, k igual a 2 e d_{max} igual a 4,0.....	112
Figura 4.58 - (a) Função peso e (c) de forma, bem como, (b) (d) de suas derivadas durante o cálculo da matriz global: função peso cúbica, k igual a 3 e d_{max} igual a 1,5.....	113
Figura 4.59 - (a) Função peso e (c) de forma, bem como, (b) (d) de suas derivadas durante o cálculo da matriz global: função peso cúbica, k igual a 3 e d_{max} igual a 4,0.....	114
Figura 4.60 - (a) Função peso e (c) de forma, bem como, (b) (d) de suas derivadas durante o cálculo do campo de deslocamento: função peso cúbica, k igual a 2 e d_{max} igual a 1,5.....	115
Figura 4.61 - (a) Função peso e (c) de forma, bem como, (b) (d) de suas derivadas durante o cálculo do campo de deslocamento: função peso cúbica, k igual a 2 e d_{max} igual a 4,0.....	116
Figura 4.62 - (a) Função peso e (c) de forma, bem como, (b) (d) de suas derivadas durante o cálculo do campo de deslocamento: função peso cúbica, k igual a 3 e d_{max} igual a 1,5.....	117
Figura 4.63 - (a) Função peso e (c) de forma, bem como, (b) (d) de suas derivadas durante o cálculo do campo de deslocamento: função peso cúbica, k igual a 3 e d_{max} igual a 4,0.....	118
Figura 5.1 - Deslocamento na direção y calculado nos 55 nós do domínio.....	127
Figura 5.2 - Tensão normal ao longo da viga calculada nos 55 nós do domínio.....	127
Figura 5.3 - Tensão cisalhante ao longo da viga calculada nos 55 nós do domínio.....	127
Figura 5.4 - Gráfico da tensão de cisalhamento calculada nos pontos amostrais de Gauss.	128

Figura 5.5 - Gráfico da tensão normal calculada nos pontos amostrais de Gauss.....	128
Figura 5.6 - Tensão de cisalhamento em três seções longo da viga (pontos amostrais de Gauss, função cúbica <i>spline</i>).	129
Figura 5.7 - Tensão normal em três seções ao longo da viga. $\overline{\sigma_{xx}}$ é a tensão normal normalizada pelo seu valor analítico máximo obtido em cada seção x (pontos amostrais de Gauss, função cúbica <i>spline</i>).	129
Figura 5.8 - Tensão de cisalhamento em três seções ao longo da viga (pontos amostrais de Gauss, função quártica <i>spline</i>).	130
Figura 5.9 - Tensão normal em três seções ao longo da viga. $\overline{\sigma_{xx}}$ é a tensão normal normalizada pelo seu valor analítico máximo obtido em cada seção x (pontos amostrais de Gauss, função peso quártica <i>spline</i>).	130
Figura 5.10 - Funções peso <i>spline</i> de terceira (cúbica), quarta (quártica) e quinta ordem.	132
Figura 5.11 - Função peso Exp1 para os cinco valores de α testados.	132
Figura 5.12 - Função peso Exp2 para os cinco valores de α testados.	133
Figura 5.13 - Função peso Gaussiana para os cinco valores de β e k igual a 1,0.....	133
Figura 5.14 - Função peso cônica para valores de k igual a 0,5 e 1,0.....	133
Figura 5.15 - Domínio formado por 85 nós (17×5) e 64 células de integração.	134
Figura 5.16 - Erro percentual do deslocamento em y para funções peso <i>spline</i> : 55 nós. ..	134
Figura 5.17 - Erro percentual da tensão normal para funções peso <i>spline</i> : 55 nós.	135
Figura 5.18 - Erro percentual da tensão cisalhante para funções peso <i>spline</i> : 55 nós.	135
Figura 5.19 - Erro percentual do deslocamento em y para funções peso Exp1: 55 nós. ...	135
Figura 5.20 - Erro percentual da tensão normal para funções peso Exp1: 55 nós.	136
Figura 5.21 - Erro percentual da tensão cisalhante para funções peso Exp1: 55 nós.	136
Figura 5.22 - Erro percentual do deslocamento em y para funções peso Exp2: 55 nós. ...	136
Figura 5.23 - Erro percentual da tensão normal para funções peso Exp2: 55 nós.	137
Figura 5.24 - Erro percentual da tensão cisalhante para funções peso Exp2: 55 nós.	137
Figura 5.25 - Erro percentual do deslocamento em y para função peso Gaussiana: 55 nós.	137
Figura 5.26 - Erro percentual da tensão normal para função peso Gaussiana: 55 nós.	138
Figura 5.27 - Erro percentual da tensão cisalhante para função peso Gaussiana: 55 nós..	138
Figura 5.28 - Erro percentual do deslocamento em y para funções peso cônica: 55 nós..	138
Figura 5.29 - Erro percentual da tensão normal para funções peso cônica: 55 nós.....	139
Figura 5.30 - Erro percentual da tensão cisalhante para funções peso cônica: 55 nós.	139

Figura 5.31 - Erro percentual do deslocamento em y para funções peso <i>spline</i> : 85 nós. ...	139
Figura 5.32 - Erro percentual da tensão normal para funções peso <i>spline</i> : 85 nós.	140
Figura 5.33 - Erro percentual da tensão cisalhante para funções peso <i>spline</i> : 85 nós.	140
Figura 5.34 - Erro percentual do deslocamento em y para funções peso Exp1: 85 nós. ...	140
Figura 5.35 - Erro percentual da tensão normal para funções peso Exp1: 85 nós.	141
Figura 5.36 - Erro percentual da tensão cisalhante para funções peso Exp1: 85 nós.	141
Figura 5.37 - Erro percentual do deslocamento em y para funções peso Exp2: 85 nós. ...	141
Figura 5.38 - Erro percentual da tensão normal para funções peso Exp2: 85 nós.	142
Figura 5.39 - Erro percentual da tensão cisalhante para funções peso Exp2: 85 nós.	142
Figura 5.40 - Erro percentual do deslocamento em y para função peso Gaussiana 85 nós.	142
Figura 5.41 - Erro percentual da tensão normal para função peso Gaussiana: 85 nós.	143
Figura 5.42 - Erro percentual da tensão cisalhante para função peso Gaussiana: 85 nós..	143
Figura 5.43 - Erro percentual do deslocamento em y para funções peso cônica: 85 nós...	143
Figura 5.44 - Erro percentual da tensão normal para funções peso cônica: 85 nós.....	144
Figura 5.45 - Erro percentual da tensão cisalhante para funções peso cônica: 85 nós.	144
Figura 5.46 - Funções peso com as melhores respostas para o domínio com 55 nós.....	145
Figura 5.47 - Funções peso com as melhores respostas para o domínio com 85 nós.....	146
Figura 5.48 - Melhores resultados para o erro percentual do deslocamento em y : 55 nós.	146
Figura 5.49 - Melhores resultados para o erro percentual da tensão normal: 55 nós.	146
Figura 5.50 - Melhores resultados para o erro percentual da tensão cisalhante: 55 nós....	147
Figura 5.51 - Melhores resultados para o erro percentual do deslocamento em y : 85 nós.	147
Figura 5.52 - Melhores resultados para o erro percentual da tensão normal: 85 nós.	147
Figura 5.53 - Melhores resultados para o erro percentual da tensão cisalhante: 85 nós....	148
Figura 5.54 - Função de forma do nó 28 localizado nas coordenadas 24 em x e 0 em y : d_m igual a 18, função peso cúbica, d_{max} igual a 1,0, 55 nós e 640 pontos amostrais de Gauss.	149
Figura 5.55 - Número médio, mínimo e máximo de pontos nodais nos domínios de influência centrados nos pontos amostrais de Gauss (integração de \mathbf{K}): 55 nós.	149
Figura 5.56 - Número médio, mínimo e máximo de pontos nodais nos domínios de influência centrados nos pontos amostrais de Gauss (integração de \mathbf{K}): 85 nós.	150
Figura 5.57 - Erro percentual do deslocamento em y para as funções <i>spline</i> cúbica e quártica em função de d_{max} : d_m retangular e domínio com 55 e 85 nós.	152

Figura 5.58 - Erro percentual da tensão normal para as funções <i>spline</i> cúbica e quártica em função de d_{max} : dm retangular e domínio com 55 e 85 nós.....	152
Figura 5.59 - Erro percentual da tensão cisalhante para as funções <i>spline</i> cúbica e quártica em função de d_{max} : dm retangular e domínio com 55 e 85 nós.....	153
Figura 5.60 - Erro percentual do campo de deslocamento em y : $k = 12$ e 85 nós.....	156
Figura 5.61 - Erro percentual do campo de tensões normais: $k = 12$ e 85 nós.....	156
Figura 5.62 - Erro percentual do campo de tensões cisalhantes: $k = 12$ e 85 nós.	157
Figura 5.63 - Número médio, máximo e mínimo de pontos nodais para d_{max} igual a 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0 e 3,5 em um domínio com 85 nós.....	158
Figura 5.64 - Campo de deslocamento em y : função peso cúbica, $d_{max} = 1,5$, 85 nós e $k = 12$	159
Figura 5.65 - Campo de deslocamento em y : função peso quártica, $d_{max} = 1,5$, 85 nós e $k = 12$	159
Figura 5.66 - Campo de tensão normal: função peso cúbica, $d_{max} = 1,5$, 85 nós e $k = 12$.	159
Figura 5.67 - Campo de tensão normal: função peso quártica, $d_{max} = 1,5$, 85 nós e $k = 12$	159
Figura 5.68 - Campo de tensão cisalhante: função peso cúbica, $d_{max} = 1,5$, 85 nós e $k = 12$	160
Figura 5.69 - Campo de tensão cisalhante: função peso quártica, $d_{max} = 1,5$, 85 nós e $k = 12$	160
Figura 5.70 - Campo de deslocamento em y : função peso cúbica, $d_{max} = 2,5$, 85 nós e $k = 12$	160
Figura 5.71 - Campo de deslocamento em y : função peso quártica; $d_{max} = 2,5$, 85 nós e $k = 12$	160
Figura 5.72 - Campo de tensão normal: função peso cúbica, $d_{max} = 2,5$, 85 nós e $k = 12$.	161
Figura 5.73 - Campo de tensão normal: função peso quártica, $d_{max} = 2,5$, 85 nós e $k = 12$	161
Figura 5.74 - Campo de tensão cisalhante: função peso cúbica, $d_{max} = 2,5$, 85 nós e $k = 12$	161
Figura 5.75 - Campo de tensão cisalhante: função peso quártica, $d_{max} = 2,5$, 85 nós e $k = 12$	161
Figura 5.76 - Número médio, máximo e mínimo nós para d_{max} igual a 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0 e 3,5 em um domínio com 55 nós.	162

Figura 5.77 - Campo de deslocamento em y: função peso cúbica, $d_{max} = 1,5$, 55 nós e $k = 12$	162
Figura 5.78 - Campo de tensão normal: função peso cúbica, $d_{max} = 1,5$, 55 nós e $k = 12$.	163
Figura 5.79 - Campo de tensão cisalhante: função peso cúbica, $d_{max} = 1,5$, 55 nós e $k = 12$	163
Figura 5.80 - Campo de deslocamento em y: função peso cúbica, $d_{max} = 2,5$, 55 nós e $k = 12$	163
Figura 5.81 - Campo de tensão normal: função peso cúbica, $d_{max} = 2,5$, 55 nós e $k = 12$.	163
Figura 5.82 - Campo de tensão cisalhante: função peso cúbica, $d_{max} = 2,5$, 55 nós e $k = 12$	164
Figura 5.83 - Campo de deslocamento em y: função peso cúbica, $d_{max} = 3,5$, 55 nós e $k = 12$	164
Figura 5.84 - Campo de tensão normal: função peso cúbica, $d_{max} = 3,5$, 55 nós e $k = 12$.	164
Figura 5.85 - Campo de tensão cisalhante: função peso cúbica, $d_{max} = 3,5$, 55 nós e $k = 12$	164
Figura 5.86 - Deslocamento em y na linha de centro da viga: $d_{max} = 1,5$, 55 nós e $k = 12$	166
Figura 5.87 - Deslocamento em y no topo da viga: $d_{max} = 1,5$, 55 nós e $k = 12$	166
Figura 5.88 - (a) Distribuição dos pontos amostrais de Gauss, (b) domínio de influência do primeiro ponto amostral para a primeira célula: domínio com tamanho dm com 9 nós. Domínio de influência do primeiro ponto amostral para segunda célula, (c) mantendo o domínio com tamanho dm (12 nós) e (d) domínio determinado por pelo menos 9 nós (dm').	167
Figura 5.89 - Função de forma do nó 1 (0, - 6) e 28 (24, 0) para o caso onde dm é definido pela busca aos 12 nós mais próximos: 55 nós no domínio, 640 pontos amostrais, 40 células de fundo, d_{max} igual a 1,5 e função peso cúbica <i>spline</i>	168
Figura 5.90 - Malha de fundo composta por 40 células (640 pontos de integração).....	168
Figura 5.91 - Distribuição não-uniforme de (a) 52, (c) 83, (e) 118, (g) 190 e (i) 258 nós. Visualização na malha de fundo com (b) 52, (d) 83, (f) 118, (h) 190 e (j) 258 nós. .	169
Figura 5.92 - Erro percentual dos campos de deslocamento em y (Luy) e de tensão ($L\sigma$, $L\tau$) em função de k, para uma distribuição não-uniforme de 52 nós no domínio e 40 células.	170

Figura 5.93 - Erro percentual dos campos de deslocamento em y (Lu_y) e de tensão ($L\sigma$, $L\tau$) em função de k , para uma distribuição não-uniforme de 83 nós no domínio e 40 células.....	170
Figura 5.94 - Erro percentual dos campos de deslocamento em y (Lu_y) e de tensão ($L\sigma$, $L\tau$) em função de k , para uma distribuição não-uniforme de 118 nós no domínio e 40 células.....	171
Figura 5.95 - Erro percentual dos campos de deslocamento em y (Lu_y) e de tensão ($L\sigma$, $L\tau$) em função de k , para uma distribuição não-uniforme de 190 nós no domínio e 40 células.....	171
Figura 5.96 - Erro percentual dos campos de deslocamento em y (Lu_y) e de tensão ($L\sigma$, $L\tau$) em função de k , para uma distribuição não-uniforme de 258 nós no domínio e 40 células.....	172
Figura 5.97 - Norma da energia em função de k , para domínio com distribuição de 52 nós e 40 células de integração: \blacklozenge pontos de Gauss e \blacksquare nós.....	173
Figura 5.98 - Norma da energia em função de k , para domínio com distribuição de 83 nós e 40 células de integração: \blacklozenge pontos de Gauss e \blacksquare nós.....	173
Figura 5.99 - Norma da energia em função de k , para domínio com distribuição de 118 nós e 40 células de integração: \blacklozenge pontos de Gauss e \blacksquare nós.....	173
Figura 5.100 - Norma da energia em função de k , para domínio com distribuição de 190 nós e 40 células de integração: \blacklozenge pontos de Gauss e \blacksquare nós.....	174
Figura 5.101 - Norma da energia em função de k , para domínio com distribuição de 258 nós e 40 células de integração: \blacklozenge pontos de Gauss e \blacksquare nós.....	174
Figura 5.102 - Campo de deslocamento em y : 52 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 22$	175
Figura 5.103 - Campo de tensão normal: 52 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 22$	175
Figura 5.104 - Campo de tensão cisalhante: 52 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 22$	176
Figura 5.105 - Campo de deslocamento em y : 83 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 26$	176
Figura 5.106 - Campo de tensão normal: 83 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 26$	176

Figura 5.107 - Campo de tensão cisalhante: 83 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 26$.	176
Figura 5.108 - Campo de deslocamento em y: 118 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 20$.	177
Figura 5.109 - Campo de tensão normal: 118 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 20$.	177
Figura 5.110 - Campo de tensão cisalhante: 118 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 20$.	177
Figura 5.111 - Campo de deslocamento em y: 190 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 26$.	177
Figura 5.112 - Campo de tensão normal: 190 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 26$.	178
Figura 5.113 - Campo de tensão cisalhante: 190 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 26$.	178
Figura 5.114 - Campo de deslocamento em y: 256 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 24$.	178
Figura 5.115 - Campo de tensão normal: 256 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 24$.	178
Figura 5.116 - Campo de tensão cisalhante: 256 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 24$.	179
Figura 5.117 - Número médio, máximo e mínimo de nós nos domínios de influência em função de k , para a distribuição com 52 nós, 40 células.	179
Figura 5.118 - Número médio, máximo e mínimo de nós nos domínios de influência em função de k , para a distribuição com 83 nós, 40 células.	180
Figura 5.119 - Número médio, máximo e mínimo de nós nos domínios de influência em função de k , para a distribuição com 118 nós, 40 células.	180
Figura 5.120 - Número médio, máximo e mínimo de nós nos domínios de influência em função de k , para a distribuição com 190 de nós, 40 células.	181
Figura 5.121 - Número médio, máximo e mínimo de nós nos domínios de influência em função de k , para a distribuição com 258 de nós, 40 células.	181
Figura 5.122 - Tamanho médio, máximo e mínimo de dm em função de k , para a distribuição não-uniforme de 52 nós, 40 células.	182
Figura 5.123 - Tamanho médio, máximo e mínimo de dm em função de k , para a distribuição não-uniforme de 83 nós, 40 células.	183

Figura 5.124 - Tamanho médio, máximo e mínimo de dm em função de k , para a distribuição não-uniforme de 118 nós, 40 células.....	183
Figura 5.125 - Tamanho médio, máximo e mínimo de dm em função de k , para a distribuição não-uniforme de 190 nós, 40 células.....	184
Figura 5.126 - Tamanho médio, máximo e mínimo de dm em função de k , para a distribuição não-uniforme de 258 nós.....	184
Figura 5.127 - Erro percentual dos campos de deslocamento em y (Luy) e de tensão ($L\sigma$, $L\tau$) em função de k , para uma distribuição não-uniforme de 52 nós e 64 células.	185
Figura 5.128 - Erro percentual dos campos de deslocamento em y (Luy) e de tensão ($L\sigma$, $L\tau$) em função de k , para uma distribuição não-uniforme de 83 nós e 64 células.	185
Figura 5.129 - Erro percentual dos campos de deslocamento em y (Luy) e de tensão ($L\sigma$, $L\tau$) em função de k , para uma distribuição não-uniforme de 118 nós e 64 células. ...	186
Figura 5.130 - Erro percentual do campo de deslocamento em y (Luy) para uma distribuição não-uniforme de 52 nós, 40 células e dm constante.....	186
Figura 5.131 - Erro percentual do campo de tensão normal ($L\sigma$) para uma distribuição não-uniforme de 52 nós, 40 células e dm constante.....	187
Figura 5.132 - Erro percentual do campo de tensão cisalhante ($L\tau$) para uma distribuição não-uniforme de 52 nós, 40 células e dm constante.....	187
Figura 5.133 - Valores de dm centrados nos 640 pontos amostrais (a) vista lateral e (b) vista de topo: 40 células, 55 nós, $k = 12$, $d_{max} = 1,5$, distribuição nodal uniforme....	194
Figura A.1 - Campo de deslocamento para a Malha1 unidimensional.	210
Figura A.2 - Campo de tensão normal ou deformação para a Malha1 unidimensional.....	211
Figura A.3 - Campo de deslocamento para a Malha2 unidimensional.	211
Figura A.4 - Campo de tensão normal ou deformação para a Malha2 unidimensional.....	211
Figura A.5 - Campo de deslocamento para a Malha3 unidimensional.	211
Figura A.6 - Campo de tensão normal ou deformação para a Malha3 unidimensional.....	211
Figura A.7 - Comparação do campo de deslocamento entre as soluções analíticas e numéricas do MEF e do EFG (d_{max} igual a 2,0; função peso cúbica e dm constante) para (a) 11, (b) 51 e (c) 101 nós. (d) Norma do erro do deslocamento para o MEF..	213
Figura A.8 - Comparação do campo de deformação entre as soluções analíticas e numéricas do MEF e do EFG (d_{max} igua a 2,0; função peso cúbica e dm constante) para (a) 11, (b) 51 e (c) 101 nós. (d) Norma do erro de deformação/tensão para o MEF.....	214

Figura A.9 - Malha1 composta por (a) 40 elementos quadrilaterais quadráticos e (b) 149 nós.	215
Figura A.10 - Campo de deslocamento em y obtido pelo MEF com a Malha1.	216
Figura A.11 - Campo tensão normal em x obtido pelo MEF com a Malha1.	216
Figura A.12 - Campo tensão cisalhante xy obtido pelo MEF com a Malha1.....	216
Figura A.13 - Campo de deslocamento em y obtido pelo MEF com a Malha2.	216
Figura A.14 - Campo tensão normal em x obtido pelo MEF com a Malha2.	216
Figura A.15 - Campo tensão cisalhante xy obtido pelo MEF com a Malha2.....	217
Figura A.16 - Campo de deslocamento em y obtido pelo MEF com a Malha3.	217
Figura A.17 - Campo tensão normal em x obtido pelo MEF com a Malha3.	217
Figura A.18 - Campo tensão cisalhante xy obtido pelo MEF com a Malha3.....	217
Figura A.19 - Campo de deslocamento em y obtido pelo MEF com a Malha4.	217
Figura A.20 - Campo tensão normal em x obtido pelo MEF com a Malha4.	218
Figura A.21 - Campo tensão cisalhante xy obtido pelo MEF com a Malha4.....	218
Figura A.22 - Campo de deslocamento em y obtido pelo MEF com a Malha5.	218
Figura A.23 - Campo tensão normal em x obtido pelo MEF com a Malha5.	218
Figura A.24 - Campo tensão cisalhante xy obtido pelo MEF com a Malha5.....	218
Figura A.25 - Campo de deslocamento em y obtido pelo MEF com a Malha6.	219
Figura A.26 - Campo tensão normal em x obtido pelo MEF com a Malha6.	219
Figura A.27 - Campo tensão cisalhante xy obtido pelo MEF com a Malha6.....	219
Figura A.28 - Campo tensão normal em x obtido com a Malha2 modificado a escala (escala original variando entre ± 2403).....	220
Figura A.29 - Campo tensão normal em x obtido com a Malha4 modificado a escala (escala original variando entre ± 3162).....	220
Figura A.30 - Campo tensão normal em x obtido com a Malha6 modificado a escala (escala original variando entre ± 4347).....	220
Figura A.31 - Campo tensão cisalhante obtido com a Malha2 modificado a escala (escala original variando entre $- 451,668$ e $+ 90,393$).....	220
Figura A.32 - Campo tensão cisalhante obtido com a Malha4 modificado a escala (escala original variando entre $- 717,55$ e $+ 134,20$).....	221
Figura A.33 - Campo tensão cisalhante obtido com a Malha6 modificado a escala (escala original variando entre $- 1031$ e $+ 185,313$).	221

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 4.1 - Valores de dm , em unidades de comprimento, usados no cálculo do deslocamento e das matrizes K e G, para um domínio com 11 nós.....	69
Tabela 4.2 - Campo de deslocamento: $d_{max} = 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5$ e $4,0$, domínio com 11 nós e k igual a 2.....	90
Tabela 4.3 - Campo de deslocamento: $d_{max} = 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5$ e $4,0$, domínio com 11 nós e k igual a 3.....	91
Tabela 4.4 - Faixa de d_{max} onde as normas do erro não são superiores a 10^{-1} , para as cinco funções peso testadas em um domínio com 11 nós.	119
Tabela 4.5 - Faixa de d_{max} onde as normas do erro não são superiores a 10^{-1} , para os domínios com 11, 51 e 101 nós e função peso cúbica <i>spline</i>	120
Tabela 4.6 - Faixa de d_{max} onde as normas do erro não são superiores a 10^{-1} , para as funções peso testadas em um domínio com 11 nós e k igual a 2.....	120
Tabela 4.7 - Faixa de d_{max} onde a norma do erro não é superior a 10^{-1} , para as funções peso testadas em um domínio com 51 nós e k igual a 2.....	120
Tabela 4.8 - Faixa de d_{max} onde a norma do erro não é superior a 10^{-1} para as funções peso testadas em um domínio com 11 nós e k igual a 3.....	121
Tabela 4.9 - Faixa de d_{max} onde a norma do erro não é superior a 10^{-1} , para as funções peso testadas em um domínio com 51 nós e k igual a 3.....	121
Tabela 4.10 - Faixa de d_{max} onde a norma do não é superior a 10^{-1} , para as funções peso testadas em um domínio com 101 nós e k igual a 3.....	121
Tabela 5.1 - Erro calculado pela norma da energia.	130
Tabela 5.2 - Erro calculado pela norma do erro relativo.	131
Tabela 5.3 - Intervalo de dm para o qual o erro relativo é menor e a quantidade de nós associada a cada intervalo, para domínio com 55 nós e dm quadrado.....	150
Tabela 5.4 - Intervalo de dm no qual o erro relativo é menor e a quantidade de nós associada a cada intervalo, para domínio com 85 nós e dm quadrado.....	151
Tabela 5.5 - Intervalo de dm ($dm = c \times d_{max}$) no qual o erro relativo é menor e a quantidade de nós associada a cada intervalo, para domínio com 55 e 85 nós e dm retângular. .	151
Tabela 5.6 - Erro percentual da tensão cisalhante para as funções <i>spline</i> cúbica e quártica em função de d_{max} : dm retangular e domínio com 55 e 85 nós.....	153

Tabela 5.7 - Intervalo de dm ($dm = c \times d_{max}$) para o qual o erro relativo é menor e a quantidade de nós associada a cada intervalo, para domínio com 55 nós e dm retangular.	154
Tabela 5.8 - Intervalo de dm ($dm = c \times d_{max}$) no qual o erro relativo é menor e a quantidade de nós associada a cada intervalo, para domínio com 85 nós.....	154
Tabela 5.9 - Norma da energia nos pontos de Gauss e nós em função de d_{max} para domínio com 85 nós e funções peso cúbica e quártica.	156
Tabela 5.10 - Valores médio, máximo e mínimo de dm e seu desvio padrão durante a integração da matriz de rigidez: 85 nós.....	157
Tabela 5.11 - Norma da energia: $k = 12$, 55 nós, 40 células e função peso cúbica <i>spline</i> . 165	
Tabela 5.12 - Norma do erro relativo calculado para dm quadrado: $k = 12$, 55 nós, 40 células e função peso cúbica <i>spline</i>	165
Tabela 5.13 - Desvio padrão e valores médio, máximo e mínimo de dm durante a integração da matriz de rigidez: 55 nós e $k = 12$	165
Tabela 5.14 - Valores de k pertinentes ao erro relativo mínimo do campo de deslocamento em y para as cinco distribuições nodais com 40 células de integração.	171
Tabela 5.15 - Valores de k pertinentes ao erro relativo mínimo do campo de tensão normal para as cinco distribuições nodais com 40 células de integração.	172
Tabela 5.16 - Valores de k pertinentes ao erro relativo mínimo do campo de tensão cisalhante para as cinco distribuições nodais com 40 células de integração.	172
Tabela 5.17 - Valores de k pertinentes às menores normas de energia para as cinco distribuições nodais, 40 células.....	175
Tabela 5.18 - Intervalo de k e o número máximo, mínimo e médio de nós associado às melhores respostas para o domínio com 52, 83, 118, 190 e 258 nós: função peso cúbica, 40 células.	182
Tabela 5.19 - Razão entre as densidades de pontos amostrais e de nós no domínio.	185
Tabela 5.20 - Número de nós médio, máximo e mínimo de nós nos domínios de influência para a distribuição com 52 nós empregando dm com valores de 6 a 30: 40 células de fundo, integração da matriz global.....	188
Tabela 5.21 - Número de nós médio, máximo e mínimo de nós nos domínios de influência pertinete às melhores respostas para 52, 83 e 118 nós: 40 células de fundo, integração da matriz global.....	188
Tabela 5.22 - Razão entre a quantidade de pontos amostrais de Gauss e de nós no domínio, para as distribuições nodais uniformes e não-uniformes.....	191

Tabela 5.23 - Faixa com as melhores respostas para domínios com 55 nós uniformemente e 52 nós não-uniformemente distribuídos: função peso cúbica <i>spline</i> , 40 células de fundo.....	192
Tabela 5.24 - Faixa com as melhores respostas para domínios com 85 nós uniformemente e 83 nós não-uniformemente distribuídos: função peso cúbica <i>spline</i> , 64 células de fundo.....	193
Tabela A.1 - Características das malhas estruturadas unidimensionais formadas por elementos tipo <i>link</i> (elemento de barra) empregadas no MEF.	210
Tabela A.2 - Malhas estruturadas formada por elementos finitos quadrilaterais quadráticos.	215

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	MÉTODOS SEM MALHA	6
2.1	CARACTERÍSTICAS DOS MÉTODOS SEM MALHA	13
2.2	IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO ESSENCIAIS	16
2.2.1	Método dos Multiplicadores de Lagrange, MML	17
2.2.2	Método das Penalidades (<i>penalty approach</i>), MP	19
2.2.3	Método dos Elementos Finitos Acoplados.....	21
2.3	KERNEL ESTIMATE, KE	22
2.4	SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS, SPH	23
2.5	REPRODUCING KERNEL PARTICLE METHOD, RKPM	25
2.6	MÉTODOS DA PARTIÇÃO DA UNIDADE, PUMs	26
2.6.1	MÉTODO DA PARTIÇÃO DA UNIDADE, PUM.....	27
2.7	GENERALIZED FINITE ELEMENT METHOD, GFEM	28
2.8	MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS, MMQM	30
2.8.1	Relação do MMQM com o método Shepard	33
2.9	DIFFUSE ELEMENT METHOD, DEM.....	34
2.10	MÉTODO DE GALERKIN SEM MALHA, EFG	34
2.10.1	EFG Aproximação pelo MMQM	36
2.10.2	Função Peso.....	40
2.10.3	Integração de Fundo	44
3	ELASTICIDADE LINEAR.....	49
3.1	FORMA FRACA.....	49
3.2	IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO	52
3.2.1	Caso bidimensional.....	53
3.2.2	Caso unidimensional.....	54
3.3	DESCRIÇÃO DO CÓDIGO	55
3.3.1	Caso bidimensional.....	55
3.3.2	Caso unidimensional.....	65
4	ANÁLISE UNIDIMENSIONAL.....	68

4.1	DISTRIBUIÇÃO UNIFORME DE NÓS	69
4.1.1	Caso1: Domínio de influência, dm , com tamanho constante	69
4.1.2	Caso2: Domínio de influência (dm) com tamanho variável	82
4.2	DISTRIBUIÇÃO NÃO-UNIFORME DOS NÓS	104
4.3	CONSIDERAÇÕES SOBRE O CASO UNIDIMENSIONAL	118
5	ANÁLISE BIDIMENSIONAL.....	126
5.1	VALIDAÇÃO	127
5.2	INFLUÊNCIA DA FUNÇÃO PESO	131
5.3	DISTRIBUIÇÃO UNIFORME COM VARIAÇÃO NO TAMANHO DO DOMÍNIO DE INFLUÊNCIA	155
5.4	DISTRIBUIÇÃO NÃO-UNIFORME COM VARIAÇÃO NO TAMANHO DO DOMÍNIO DE INFLUÊNCIA	168
5.5	DISTRIBUIÇÃO NÃO-UNIFORME DE NÓS COM TAMANHO DO DOMÍNIO DE INFLUÊNCIA CONSTANTE	186
5.6	CONSIDERAÇÕES SOBRE O CASO BIDIMENSIONAL	189
6	CONCLUSÕES	195
6.1	SÍNTESE DO TRABALHO DESENVOLVIDO	195
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	197
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	199
A	COMPARAÇÃO DO EFG COM O MEF	210
A.1	CASO UNIDIMENSIONAL	210
A.2	CASO BIDIMENSIONAL	214
A.3	CONSIDERAÇÕES SOBRE A COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS	222

1 INTRODUÇÃO

Os métodos sem malha têm sido extensivamente aplicados nos mais diversos campos das engenharias e das ciências. Vários métodos sem malha foram propostos, sendo que o primeiro método a ser desenvolvido foi o *Smooth Particle Hydrodynamics*, SPH (Lucy, 1977, Gingold e Monaghan, 1977). Dentre os mais conhecidos e difundidos, tem-se o *Reproducing Kernel Particle Method*, RKPM (Liu *et al.*, 1995), o método de Galerkin sem malha (*Element Free Galerkin*), EFG (Belytschko *et al.*, 1994), o *h-p clouds* (Duarte, 1996), o *Generalized Finite Element Method*, GFEM (Melenk, 1995), o *eXtended Finite Element Method*, XFEM (Moës *et al.*, 1999), o *Diffuse Element Method*, DEM (Nayroles *et al.*, 1992) e o *Point Interpolation Method*, PIM (Liu e Gu, 1999). Vários autores buscam classificar estes métodos de forma a facilitar o entendimento bem como perceber, em um contexto geral, quais diferenças, vantagens e desvantagens são pertinentes ao método que se deseja trabalhar.

A intensificação do uso dos métodos sem malha ocorre em razão da necessidade de se simplificar a adaptação de problemas com contornos móveis (p. ex. mudança de fase) e descontinuidades (p. ex. trincas). A dependência de alguns métodos clássicos a uma malha, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), leva a complicações em algumas classes de problemas, nas quais é necessário que a malha seja refeita para cada iteração durante toda a simulação (Dolbow e Belytschko, 1998): grandes deformações, crescimento de trincas, mudança de fase, etc.

Os métodos sem malha estabelecem um sistema de equações algébricas para todo o domínio de um problema sem empregar uma malha pré-definida, pelo menos na interpolação das variáveis de campo. O requisito para um método ser considerado verdadeiramente sem malha é que nenhuma malha seja necessária durante todo o processo de solução do problema, para uma geometria arbitrária governada por um sistema de equações diferenciais parciais sujeitas a todo tipo de condição de contorno. Estes métodos trabalham com um conjunto de nós distribuídos dentro de um domínio Ω , como também com conjuntos de nós distribuídos sobre suas fronteiras para representar, sem discretizar, o domínio do problema e seus contornos. Este conjunto de nós distribuídos não forma uma

malha, assim nenhuma informação sobre as relações entre os nós é requerida previamente pelo método (Liu, 2004).

Os métodos sem malha apresentam certa complexidade pelo fato de possuírem muitos parâmetros de ajuste. Em geral, os trabalhos relacionados a estes métodos apenas especificam a função peso bem como a configuração de parâmetros utilizados sem justificar suas escolhas. Por outro lado, autores têm percebido a necessidade de uma avaliação mais detalhada destes parâmetros conforme indicado a seguir. Contudo, não foi encontrado um trabalho que reunisse uma análise conjunta e mais ampla destes parâmetros.

O método de Galerkin sem malha é um dos métodos sem malha mais utilizados para a solução de problemas da mecânica dos sólidos. Belytschko *et al.* (1994) propõem o método EFG e o analisam de forma sucinta e não aprofundada alguns parâmetros relacionados a construção da função de forma, tais como: escolha da função peso (cônica e Gaussiana), domínio de influência.

Shuyao e De'an (2003), analisam por meio da solução de problemas elasto-estáticos, algumas funções peso empregadas nas aproximações locais realizadas pelo método dos mínimos quadrados móveis no *local boundary integral equation method*. Segundo eles, a suavidade (*smoothness*) da aproximação é determinada pela ordem da função base e, principalmente, pela função peso utilizada. O erro relativo do deslocamento e a norma da energia são apresentados para três funções base e cinco funções peso. Empregam apenas distribuições nodais uniformes. Para a distribuição com maior concentração nodal e utilizando uma base linear, o erro relativo do deslocamento foi maior para a função exponencial seguido pelas funções cúbica *spline*, quártica *spline*, Gaussiana e a fórmula racional.

Xiao e McCarthy (2003) utilizam um método verdadeiramente sem malha para a solução da análise de tensões em problemas elasto-estáticos de sólidos bidimensionais. O método é baseado no método de Petrov-Galerkin sem malha local e os autores utilizam a função degrau (*Heaviside*) como função peso sobre um subdomínio local. A interpolação de pontos locais é baseada em funções de base radial multiquadráticas, as quais são empregadas para a construção das funções de aproximação. Avaliam de forma bastante detalhada a influência dos parâmetros relacionados à função radial, tamanho do domínio de

interpolação, distribuição irregular de nós, etc. Para interessados em trabalhar com funções de base radial este trabalho é uma boa referência.

Hong *et al.* (2005) aplicam a teoria das ondeletas (*wavelet*) na pesquisa das funções peso dos métodos sem malha, já que estas funções têm fundamental importância na simulação dos campos de deslocamento. Os autores mostram que para o caso de uma viga engastada a nova função peso projetada sobre o espaço de uma ondeleta cúbica *spline* produz um resultado melhor do que aquele obtido com a função peso original.

Segundo Chen *et al.* (2006) a escolha das funções peso é de fundamental importância para um bom desempenho dos métodos sem malha e afirmam que esta escolha é, em certa medida, arbitrária. Os autores indicam a função peso exponencial como a melhor a ser empregada no método SPH, citando os valores de ajuste para esta função apresentados por Monaghan (1992). Consideram a função exponencial tendo um custo computacional mais elevado, porém menos sensível a variações no domínio de influência. A função peso quártica *spline* é citada como uma escolha comum em aplicações que utilizam o método EFG.

Com relação ao domínio de influência associado a cada ponto/nó Chen *et al.* (2006) afirmam que este deve possuir as seguintes características: (i) o tamanho do suporte deve ser grande o suficiente para que o ponto analisado possua em sua vizinhança um número suficiente de nós para assegurar a inversão da matriz de momento, (ii) o suporte deve ser grande o suficiente para garantir a passagem das informações pelos quatro quadrantes de cada ponto amostral (para os pontos próximos ao contorno, estes devem possuir vizinhos em todos os seus lados), (iii) o domínio deve ser pequeno o suficiente para prover a característica de aproximação local pelo método dos mínimos quadrados e (iv) o suporte não deve ser muito grande devido ao custo computacional.

Liu *et al.* (2006b) estudam funções peso em uma aplicação do método EFG. Estes apresentam os tempos de CPU e erros obtidos para seis funções peso. A função Gaussiana (exponencial negativa) consumiu o menor tempo de CPU e apresentou também o menor erro. A função peso exponencial teve o quarto maior tempo, porém o erro obtido foi bastante similar ao da função peso Gaussiana. Foram testadas duas funções *spline*. A função cúbica apresentou melhores resultados que a função quártica, contudo o maior

tempo de CPU entre as funções examinadas. A função cônica obteve os maiores valores de erro. Os autores não disponibilizam os valores dos parâmetros utilizados nas funções peso Gaussiana, exponencial e cônica e na fórmula racional. Também não detalham a aplicação, número de nós, células de integração, tamanho e tipo do domínio de influência.

Este trabalho tem como objetivo analisar as respostas do EFG, decorrentes de variações dos parâmetros que o modelam, em domínios unidimensionais e bidimensionais. A análise da influência dos parâmetros nestes dois domínios permite verificar de que forma ou em que proporção os resultados dependem destes parâmetros. Os parâmetros analisados são:

- i. funções peso,
- ii. tamanho do domínio de influência,
- iii. quantidade de nós no domínio,
- iv. tipo da distribuição nodal (uniforme, não uniforme) e
- v. quantidade de células de integração.

Ao analisar os parâmetros do EFG busca-se determinar faixas de valores para alguns destes (p. ex. tamanho do domínio de influência), bem como determinar quais são mais adequados ao EFG (p. ex. tipo da função peso). Esta análise serve de base para trabalhos futuros de forma a facilitar o processo de ajuste dos parâmetros do EFG, uma vez que este processo é bastante laborioso.

Para cada caso e configurações de parâmetros são calculadas a norma do erro relativo e a norma da energia para os campos de deslocamento e tensões, bem como as visualizações destes campos. Estas visualizações permitem um melhor entendimento dos valores de erro obtidos além de verificar se os mesmos estão concentrados em regiões específicas do domínio.

Este trabalho está dividido em seis capítulos incluindo esta introdução. No capítulo 2 são tratados pontos relevantes aos métodos sem malha como técnicas de aproximação, consistência, função peso, imposição das condições de contorno, classificações, características (vantagens e desvantagens), etc. Neste capítulo, ainda, são apresentados comentários sobre alguns dos principais métodos sem malha, como: *Smoothed Particle Hydrodynamics*, *Reproducing Kernel Particle Method*, Método da Partição da Unidade

(PUM), *Generalized Finite Element Method*, *Diffuse Element Method*, Método de Galerkin Sem Malha. Um maior detalhamento é feito para o método EFG por ser o foco deste trabalho.

No terceiro capítulo é apresentado com maior detalhe o método EFG aplicado à teoria da elasticidade linear (forma fraca, imposição das condições de contorno, etc.) e mostra ainda uma breve explicação sobre o funcionamento do programa implementado em linguagem C.

No quarto e quinto capítulos são apresentados para problemas em elasticidade linear unidimensionais e bidimensionais, respectivamente. Os resultados obtidos, bem como a validação dos programas. Os resultados são pertinentes a variações nos parâmetros de ajuste do método tais como: funções peso, tamanho do domínio de influência (dm), malha de fundo, posição nodal (uniforme e não uniforme), quantidade de nós, etc. São feitas análises para estes resultados por meio da visualização dos campos de tensão e deslocamento, como também pelo cálculo dos erros relativos e norma de energia.

Por fim, no sexto capítulo são apresentadas algumas conclusões sobre os resultados obtidos.

2 MÉTODOS SEM MALHA

Destacam-se como os métodos numéricos mais tradicionais para a solução de EDPs em problemas da mecânica dos meios contínuos: (i) Método das Diferenças Finitas, MDF, (ii) Método dos Volumes Finitos, MVF, (iii) Método dos Elementos Finitos, MEF e o (iv) Método de Elemento de Contorno. O método das diferenças finitas se baseia na aproximação de derivadas por diferenças finitas (p.ex., série de Taylor). O método dos volumes finitos é tipicamente utilizado na mecânica dos fluidos, transferência de calor, etc. Volume finito se refere a um pequeno volume que cerca cada ponto nodal de uma malha. O método dos elementos finitos foi desenvolvido originalmente na década de 50 em aplicações de análise estrutural, e foi estendido aos mais diversos campos da Engenharia. O elemento finito é um subdomínio discreto composto por pontos nodais. As funções de aproximações no MEF e no MVF são feitas com o auxílio de uma malha de elementos/volumes discretos.

Dentre os métodos citados, o MEF obteve maior destaque e transformou-se no método mais popular e mais amplamente utilizado em computações nos vários campos da Engenharia. Uma característica importante do MEF é a divisão de um meio contínuo em elementos discretos (discretização). Estes elementos são conectados formando uma malha com n_t pontos. As funções de forma são geralmente predeterminadas para diferentes tipos de elementos antes de ser iniciada a análise. As funções de interpolação são construídas sobre a malha. A utilização de uma malha assegura a compatibilidade da interpolação. Entretanto, este procedimento não é sempre vantajoso, porque a condição de compatibilidade numérica não é a mesma que a condição da compatibilidade física de um contínuo. Assim, em alguns tipos de simulações eventualmente ocorrem distorções na malha, o que pode finalizar a computação completamente ou resultar em uma deterioração da exatidão. Além disso, o MEF requer geralmente uma malha muito fina em regiões com gradientes elevados, o que é computacionalmente mais oneroso. Por esta razão, o MEF adaptável transformou-se em uma necessidade (Li e Liu, 2002, Liu e Shi, 2003).

Os procedimentos de remalha adaptável empregados em simulações de problemas tais como impacto, penetração, explosão, fragmentação, etc, têm se tornado uma tarefa computacionalmente muito trabalhosa de realizar. As dificuldades envolvidas não estão somente relacionadas ao processo de gerar uma nova malha, mas também estão no

processo de mapear as variáveis de estado da malha anterior para a nova malha. Este processo introduz frequentemente erros numéricos, e a remalha geralmente não é desejável (Li e Liu, 2002).

O principal motivo para adotar métodos sem malha ou método das partículas (*meshless*, *meshfree* ou *particle methods*) é eliminar a estrutura da malha pela construção da aproximação da função de campo inteiramente em termos dos pontos nodais, visto que nenhuma especificação da inter-relação nodal é, a priori, definida ou necessária (Cueto-Felgueroso, 2005, Liu e Shi, 2003).

Os métodos sem malha são bastante similares ao MEF, contudo sua característica principal é definida em contraposição aos métodos com malha. Entretanto, nos métodos sem malha a análise do domínio é realizada com apenas um grupo de pontos que estabelecem um sistema de equações algébricas para todo o problema baseado em funções de forma derivadas da interpolação de partículas (Liu e Shi, 2003, Idelsohn e Oñate, 2006). Segundo Idelsohn e Oñate (2006) e Idelsohn *et al.* (2003) um método sem malha é um algoritmo no qual a definição das funções de forma depende apenas das posições nodais. Gu (2005) apresenta outra definição: um método sem malha é um método numérico usado para estabelecer um sistema de equações algébricas para todo domínio do problema sem o uso de uma malha predefinida para a discretização do domínio (ou contorno).

Para qualquer método convergir ele deve ser consistente e estável. Consistência é usualmente definida no contexto dos métodos de diferenças finitas. Segundo Belytschko *et al.* (2000), uma aproximação discreta $L^h(u)$ de uma equação diferencial parcial $L(u)$ é consistente se o erro for da ordem da dimensão da malha, isto é, se

$$L(u) - L^h(u) = O(h^n) \quad \text{com } n \geq 1. \quad (2.1)$$

Consistência também se refere à ordem polinomial mais elevada que pode ser representada exatamente com um método numérico. Neste trabalho, o termo consistência é utilizado neste sentido. Se as funções de aproximação em um método de resíduos ponderados tiverem consistência de ordem k então até esta ordem a solução analítica pode ser encontrada exatamente, ou seja, um método que define a aproximação, $u^h(\mathbf{x})$, tem consistência de ordem k se reproduz exatamente uma base polinomial de grau menor ou

igual a k . A condição de consistência é expressa em termos da ordem polinomial que pode ser representada de forma exata. Chama-se de ordem de consistência de uma aproximação à ordem do polinômio que é representada de forma exata (Belytschko *et al.*, 1996, Fries e Matthies, 2004). As condições de consistência de ordem k são dadas por:

$$u^h = \sum_I^{n_I} \phi(\mathbf{x}) x_I^p = x^p \quad \text{para } 0 \leq p \leq k, \quad (2.2)$$

onde u^h é a função de aproximação, n_I é o número de nós do domínio, ϕ e x_I^p são, respectivamente, a função de forma e o valor nodal associados ao I -ésimo ponto. As técnicas de aproximação local dos métodos sem malha estão relacionadas a uma função peso w (função de ponderação). Assim, uma característica comum a todos os métodos sem malha é a utilização de uma função peso, a qual deve apresentar suporte compacto entre outras características que serão detalhadas mais adiante.

As funções de forma, ϕ , definidas por um método de aproximação formam uma Partição da Unidade (PU), se:

$$\sum_{I=1}^{n_I} \phi_I(\mathbf{x}) = 1 \quad \text{em } \Omega, \quad (2.3)$$

onde n_I é o número de nós do domínio. Assim, se a condição da partição da unidade for atendida a aproximação possui, pelo menos, consistência de ordem zero. No caso do MEF clássico, as funções convencionais de forma constituem uma partição da unidade, pois a Equação (2.3) é válida (Belytschko *et al.*, 1996, Guedes, 2006). A partir da Equação (2.3), para uma dada função κ obtém-se ainda:

$$\sum_I^n \phi_I(\mathbf{x}) \kappa = \kappa. \quad (2.4)$$

Chen *et al.* (2003) consideram três tipos de aproximações utilizadas para o cálculo das funções de forma nos métodos sem malha, que são: (i) método do núcleo reprodutor (*Reproducing Kernel Method*, RKM), (ii) Partição da Unidade (PU) e (iii) Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MMQM), explicitados a seguir.

Lucy (1977) e Gingold e Monaghan (1977) desenvolveram um esquema de integração de N -corpos chamado de *Smoothed Particle Hydrodynamics*, como uma tentativa de modelar o contínuo, evitando as limitações dos métodos de malha baseados em diferenças finitas. O SPH inicialmente aplicado em problemas de astrofísica e dinâmica dos fluidos utiliza o conceito de *Kernel Estimate* (KE). O SPH é o precursor dos métodos sem malha. Os métodos SPH apresentam soluções precisas no interior do problema quando o número de partículas é grande, porém isso não é verificado nas regiões próximas ao contorno. O *Reproducing Kernel Particle Method* (RKPM) desenvolvido por Liu *et al.* (1995) é similar ao método SPH com uma diferença principal: o desenvolvimento de uma função de correção para os efeitos de contorno (Liu *et al.*, 1995). O RKPM utiliza a técnica do núcleo reprodutor (*Reproducing Kernel*, RK).

A aproximação pela partição da unidade foi utilizada pela primeira vez por Babuška *et al.* (1994) para obter soluções aproximadas de EDPs. O *Generalized Finite Element Method*, GFEM, proposto por Melenk (1995) é baseado na aproximação da partição da unidade de Babuška *et al.* (1994). Babuška *et al.* (2004) apresentam as idéias principais, resultados e perspectivas do GFEM. A abordagem pela partição da unidade geralmente é utilizada em várias situações e com diferentes designações, como método das nuvens, *h-p cloud* (Duarte, 1996), método das esferas, *Method of Spheres* (De e Bathe, 2000), *eXtended Finite Element Method* (Moës *et al.*, 1999), GFEM (Strouboulis *et al.*, 2000, Babuška *et al.*, 2000, Babuška *et al.*, 2004). Estes métodos diferem no tipo de função utilizada na partição da unidade e no uso de espaços locais diferentes (Babuška *et al.*, 2004).

O método dos mínimos quadrados móveis desenvolvido por Lancaster e Salkaukas (1981) é utilizado para realizar as aproximações locais em métodos sem malha. Os primeiros a utilizar este método de aproximação em uma formulação sem malha foram Nayroles *et al.* (1992) no *Diffuse Element Method*. Métodos sem malha tais com Método de Galerkin sem malha (Belytschko *et al.*, 1994), *Meshless Local Petrov-Galerkin*, MLPG (Alturi e Zhu, 1998), e o método dos pontos finitos - *Finite Point Method*, FPM (Oñate *et al.*, 1995), também utilizam o MMQM em suas aproximações locais.

Fries e Matthies (2004) apresentam uma classificação para os métodos sem malha. Segundo os autores, para classificar um método sem malha deve-se verificar três passos em seu procedimento, que são:

- i. construção da partição da unidade de ordem k com uma base completa $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ intrínseca,
- ii. escolha de uma aproximação a qual pode utilizar somente a base intrínseca ou adicionar uma base extrínseca,
- iii. escolha das funções teste.

Caso a aproximação seja definida como $u^h = \sum_i \phi u_i$, isto é, se as funções PU são consideradas diretamente como funções de forma, utiliza-se somente a base intrínseca necessária para a construção das funções PU. Pode-se também definir aproximações diferentes utilizando o conceito de uma base extrínseca $\mathbf{p}(\mathbf{x})$, a qual pode ser utilizada de forma a aumentar a ordem de consistência da aproximação, ou para incluir conhecimentos prévios da solução exata da EDP na aproximação. Neste caso a aproximação pode ser dada conforme Equação (2.5).

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_i} \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n_i} \phi_i(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^l p_j(\mathbf{x}) v_{ij} \quad (2.5)$$

Desta forma, ao invés de ter u_i como variável desconhecida tem-se $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{v}_i$, o que representa l vezes mais variáveis desconhecidas $\mathbf{v}_i = v_{ij} = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{il})$ e uma base extrínseca com l componentes. \mathbf{p} pode ser formado por monômios, como polinômios de Taylor, polinômios de Lagrange ou outra função conveniente (Fries e Matthies, 2004).

A escolha da função teste, Ψ , é o último passo na caracterização dos métodos sem malha. Utilizando $\Psi_I = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)$, a função Delta Dirac, irá resultar em um esquema de colocação, ou utilizando $\Psi_I = \phi_I$, recai no procedimento de Bubnov-Galerkin, p. ex. (Fries e Matthies, 2004).

A partição da unidade pode ser construída tanto no procedimento de métodos com malha (MEF) quanto por métodos sem malha que utilizam o princípio do MMQ ou RKPM, entre outras possibilidades. A Figura 2.1 mostra o esquema de classificação proposto por Fries e Matthies (2004).

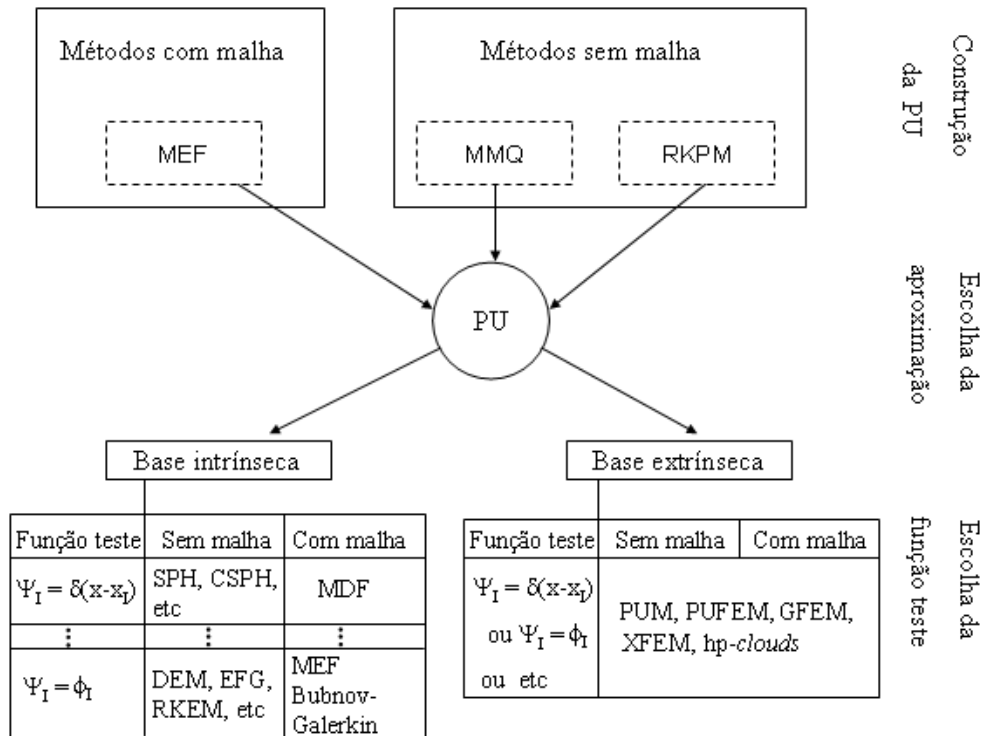


Figura 2.1 - Classificação dos métodos sem malha por Fries e Matthies (2004).

Gu (2005) lista três classificações para os métodos sem malha: baseada no tipo de formulação, na função de forma empregada e na representação do domínio do problema.

Tipo de formulação:

- i. Forma Fraca (integral). Neste tipo de formulação as equações de governo e as condições de contorno são transformadas em um conjunto de equações na forma fraca que são utilizadas para obter um sistema de equações. Como exemplo, tem-se: o DEM, EFG, *Radial Point Interpolation Method* (RPIM), *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG), *Local Radial Point Interpolation Method* (LRPIM), etc.
- ii. Forma Forte ou Técnica de Colocação: as equações diferenciais ordinárias/parciais das equações de governo e equações para as condições de contorno são discretizadas diretamente nos nós, por meio de técnicas simples de colocação e funções de forma para obter um conjunto de equações do sistema discreto. Exemplos: *General Finite Difference Method* (GFDM), *Finite Point Method*, *hp-clouds*, *Meshless Collocation Method* (MCM), etc.

- iii. Forma Fraca-Forte (*Meshfree Weak-Strong-form*, MWS). Métodos baseados na combinação da forma local fraca (integral) e da forma forte (colocação) para estabelecer o sistema de equações discretizado. As duas formulações são usadas no mesmo problema, para diferentes grupos de nós, que têm diferentes equações ou restrições.
- iv. Formulação integral para as aproximações. A função aproximação é feita com uma forma fraca (integral), mas as equações são diretamente discretizadas por colocação (forma forte) nas partículas. Exemplos: SPH, RKPM, etc.

Função de forma empregada:

- i. Métodos baseados no método da representação integral para a função aproximação. O SPH e o RKPM estão nesta categoria
- ii. Métodos baseados em aproximações realizadas pelo método dos mínimos quadrados. São exemplos de métodos que utilizam MMQ: o EFG, *Meshless Local Petrov-Galerkin*, *Boundary Node Methods* (BNM), etc.
- iii. Métodos baseados no uso de funções de base radial (*Radial Basis Functions*, RBF): *Meshfree Radial Point Interpolation Method* (MRPIM), *Local Radial Point Interpolation Method* (LRPIM), etc.
- iv. Outros esquemas de interpolação: *hp-clouds method*, *Partition of Unity* (PU), *Moving Kriging Interpolation* (MK), etc.

Representação do domínio do problema:

- i. Tipo Domínio: um conjunto de nós é escolhido no domínio e no contorno do problema de forma a obter o sistema de equações discretizado. O EFG, MLPG, SPH e RKPM são exemplos de métodos que utilizam este tipo de representação.
- ii. Tipo Contorno: um conjunto de nós somente do contorno do problema é escolhido para gerar o sistema de equações discretas baseado em equações integrais de contorno. Dentre os métodos sem malha que utilizam *Boundary Node Methods* (BNM), *Boundary Radial Point Interpolation Method* (BRPIM).

Belytschko e Xiao (2002) dividem os métodos sem malha em dois grandes grupos, que segundo eles são:

- i. Métodos baseados nos campos de aproximação que podem ser aproximações pelo MMQ e aproximações de base radial, como o EFG e os *Partition Unit Methods*, PUMs (*hp-clouds*, etc).
- ii. Métodos baseados nas aproximações de núcleo, originado por Lucy (1977) e Monaghan (1988). As respostas das aproximações de núcleo podem ser melhoradas pelo uso de uma correção na aproximação de núcleo ou pela correção das derivadas.

Em alguns casos, estes dois grupos estão diretamente relacionados (ver Belytschko *et al.*, 1994).

2.1 CARACTERÍSTICAS DOS MÉTODOS SEM MALHA

Algumas características relevantes dos métodos sem malha são apresentadas e em geral comparadas às características correspondentes dos métodos com malha. Pode-se listar dentre estas características algumas vantagens:

a) Ausência da malha proporciona (Fries e Matthies, 2004):

- i. a determinação das conectividades dos nós durante a execução do programa. Desta forma, não se verifica sensibilidade a distorções na malha, a qual pode gerar dificuldades nos cálculos de problemas formulados por métodos com malha (propagação de trincas, p. ex.).
- ii. uma adaptatividade- h comparativamente mais simples, pois esta é feita somente com a adição de nós no domínio, já que as conectividades são calculadas durante a execução.
- iii. uma adaptatividade- p também conceitualmente mais simples do que nos métodos baseados em malha.
- iv. a não utilização de remalha durante os cálculos de problemas relacionados a grandes deformações e movimento de descontinuidades, por exemplo. Para estes tipos de problemas uma freqüente remalha é necessária nos métodos com malha.

b) Continuidade das funções de forma: as funções de forma dos métodos sem malha podem ser construídas facilmente para qualquer ordem de continuidade desejada (Fries e Matthies, 2004).

- i. Os métodos sem malha cumprem a exigência da continuidade decorrente da ordem do problema sob a consideração. Por outro lado, isso não é tão simples para os métodos com malha.
- ii. Casos especiais, como propagação de trincas ou materiais com propriedades diferentes, a continuidade das funções de forma e derivadas não é desejável e podem ser tratados com auxílio de certas técnicas (critério da visibilidade, método da difração, método da transparência, etc).

c) Convergência: para uma mesma ordem de consistência verifica-se que os resultados de convergência obtidos pelos métodos sem malha são geralmente melhores do que os obtidos pelas funções de forma baseadas em métodos com malha (Fries e Matthies, 2004).

Algumas das principais dificuldades ao se empregar métodos sem malha são:

a) Construção das conectividades: os métodos sem malha necessitam apenas das conectividades entre nós vizinhos de forma a construir as funções de aproximação. A principal dificuldade para construir as conectividades nodais nos métodos sem malha são precisamente as vantagens dos métodos que usam uma malha. Uma forma de se construir as conectividades nodais para o caso de um disco de raio r está apresentada na Figura 2.2, bem como algumas das principais dificuldades encontradas em sua construção. A Figura 2.2(a) mostra que distância h entre os nós dentro do domínio é variável e algumas vezes o domínio r engloba apenas nós em uma única direção (h direcional), conforme Figura 2.2(b) (Idelsohn e Oñate, 2006).

Encontrar as conectividades dos nós para problemas tais como os apresentados na Figura 2.2 nos métodos sem malha pode ser tão difícil quanto o de resolver um problema de geração de malha. E em alguns casos, o tempo de computação para gerar as conectividades nodais em problemas sem malha é da mesma ordem que o mais difícil problema de geração de malha. Deste ponto de vista, os métodos sem malha não são tão interessantes como era pensado inicialmente (Idelsohn e Oñate, 2006).

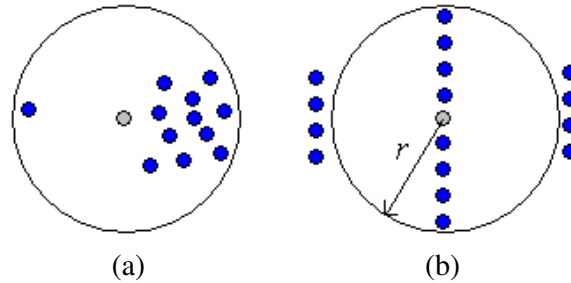


Figura 2.2 - Dificuldades encontradas na construção das conectividades (a) variação do comprimento h e (b) h direcional.

b) Esforço computacional: na prática, para uma exatidão aceitável, os métodos sem malha geralmente consomem mais tempo em sua execução do que os correspondentes problemas com malha (Fries e Matthies, 2004).

- i. As funções de forma dos métodos sem malha são mais complexas do que as dos métodos com malha. Devido a esta complexidade o número de pontos de integração, para uma solução suficientemente exata das integrais da equação da forma fraca, é consideravelmente maior nos métodos sem malha do que em métodos com malha.
- ii. O sistema de equação global dos métodos sem malha em geral apresenta uma maior largura de banda do que os métodos com malha.

c) Condições de contorno essenciais: a maioria dos métodos sem malha não possui a propriedade delta de Kronecker, o que pode levar a uma degradação da convergência do método. Os métodos com malha, em contra partida, geralmente possuem esta propriedade (Fries e Matthies, 2004).

d) *Locking* (perda do significado dos resultados numéricos): os métodos sem malha podem sofrer do fenômeno de *locking* do mesmo modo que o MEF. Às vezes é possível contornar este fenômeno pelo ajuste de alguns parâmetros dos métodos sem malha (Fries e Matthies, 2004).

2.2 IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO ESSENCIAIS

Em alguns métodos sem malha, as funções de forma ϕ_I não obedecem ao critério do delta de Kronecker, δ_{IJ} . Assim, a função de forma não apresenta característica interpoladora o que dificulta a imposição das Condições de Contorno Essenciais (CCE). Desta forma, utiliza-se o termo aproximação ao invés de interpolação. E,

$$\phi_I(\mathbf{x}_J) \neq \delta_{IJ}, \quad (2.6)$$

onde ϕ_I é a função de forma associada ao I -ésimo nó no domínio de influência do J -ésimo ponto, \mathbf{x}_J , onde se deseja calcular a aproximação. Como as aproximações são dadas por:

$$u^h(\mathbf{x}_J) = \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}_J) u_I \quad (2.7)$$

se a aproximação for calculada para um nó do domínio a desigualdade $u^h(\mathbf{x}_I) \neq u_I$ é válida, pois a aproximação para o I -ésimo nó depende do parâmetro nodal de u_I como também dos parâmetros nodais de u_1 a u_n correspondendo a todos os nós que pertencem ao domínio de influência do nó I . Esta propriedade faz a imposição das CCE ser mais complicada do que no MEF (Dolbow e Belytschko, 1998). Em decorrência, várias técnicas têm sido propostas para impor as CCEs. Dentre elas, algumas modificam a equação da forma fraca (Método dos Multiplicadores de Lagrange, Método das Penalidades, Método de Nitsche, p. ex.) outras empregam as funções de forma com a propriedade delta de Kronecker na fronteira de onde se deseja aplicar as CCE (Método dos Elementos Finitos Acoplado, p. ex.) (Fries e Matthies, 2004). Dentre os métodos sem malha que necessitam de técnicas específicas para impor as CCE tem-se: SPH, EFG, *hp-clouds*, RKPM. Por outro lado, o *Natural element method* (NEM), XFEM, *Moving Particle Finite Element Method* (MPFEM) (Hao *et al.*, 2002), *Meshless Finite Element Method* (MFEM) (Idelsohn *et al.*, 2003) e o *Reproducing Kernel Element Method* (RKEM) (Liu *et al.*, 2004) são métodos sem malha que definem aproximações cujas funções de forma são interpoladoras (Fries e Matthies, 2004, Guedes, 2006).

2.2.1 Método dos Multiplicadores de Lagrange, MML

A introdução dos multiplicadores de Lagrange permite a incorporação das condições de contorno nas equações escritas na forma fraca. O método lida com restrições e busca os locais de extremo de uma função com várias variáveis sujeitas a uma ou mais restrições. Considerando o funcional de Lagrange $\Xi(u)$ (Liu, 2004):

$$\Xi(u) = E_C - E_S + W_f \quad (2.8)$$

onde E_C é a energia cinética definida como:

$$E_C = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega \quad (2.9)$$

e E_S é a energia de deformação que pode ser expressa por:

$$E_S = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (2.10)$$

para sólidos e estruturas de material elástico, $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ escritos na forma vetorial. W_f é o trabalho das forças externas, dado por:

$$W_f = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma, \quad (2.11)$$

sendo ρ a massa específica, $\dot{\mathbf{u}}$ velocidade, \mathbf{u} o deslocamento, \mathbf{b} as forças de campo, \mathbf{t} as forças de superfície, $\boldsymbol{\sigma}$ as tensões e $\boldsymbol{\varepsilon}$ as deformações. Na Equação (2.8), o termo $(-E_S + W_f)$ pode ser chamado de energia potencial do sistema.

O funcional Ξ pode estar sujeito a k condições de contorno, as quais podem ser escritas como:

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{q}, \quad (2.12)$$

onde a matriz \mathbf{G} é chamada de matriz de condição de contorno e tem dimensão $k \times l$, onde l é o número de variáveis. A equação de restrição mostrada na Equação (2.12) pode ser escrita como uma equação homogênea (Cook *et al.*, 1989),

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (2.13)$$

a qual é multiplicada pela sua esquerda pelo vetor linha $\boldsymbol{\lambda}^T$ que contém tantos multiplicadores de Lagrange quantas equações de restrição utilizadas. Assim

$$\boldsymbol{\lambda}^T \cdot (\mathbf{G} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q}) = 0. \quad (2.14)$$

Isso pode ser considerado um invariante ou a energia requerida para manter as condições de contorno. Os multiplicadores de Lagrange são funções desconhecidas de coordenadas independentes no domínio Ω .

Adicionando a Equação (2.14) à Equação (2.8), e desprezando-se o termo da energia cinética, tem-se:

$$\psi = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}^T \cdot (\mathbf{G} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q}) d\Gamma = 0. \quad (2.15)$$

Na Equação (2.15), a expressão entre parênteses é nula e ψ representa a energia total do sistema modificada pelas condições de contorno. Aplicando o princípio da estacionariedade, tem-se:

$$\delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial\psi}{\partial \lambda_i} \delta \lambda_i = 0, \quad (2.16)$$

desde que δx e $\delta \lambda$ sejam arbitrários

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = 0 \text{ e } \frac{\partial\psi}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (2.17)$$

devem ser satisfeitas. O Método dos Multiplicadores de Lagrange (MML) é o método mais preciso para impor condições de contorno de Dirichlet, deste modo é bastante utilizado para a solução de problemas pequenos onde o custo da solução do sistema de equação não é oneroso (Belytschko *et al.*, 1996).

Neste método, um problema com l variáveis e com k restrições se transforma em um sistema com $l+k$ variáveis. Assim este método lida com o aumento do número de variáveis calculadas. A solução deste sistema fornece os valores dos multiplicadores de Lagrange, λ_i , e do vetor de incógnitas, u_i . Os multiplicadores de Lagrange só servem para aplicar as condições de contorno e depois são descartados. O método dos multiplicadores de Lagrange apresenta algumas dificuldades para a solução do sistema de equações pelo fato de não gerar uma matriz simétrica positiva definida e pelo fato de elementos nulos serem introduzidos na diagonal da matriz a ser solucionada. No capítulo 3 é apresentado um maior detalhamento da imposição das CCE para o caso da elasticidade linear utilizando este método.

2.2.2 Método das Penalidades (*penalty approach*), MP

O funcional $\Xi(u)$, Equação (2.8), está sujeito a k restrições e pelo método da penalidade, as restrições são inseridas por meio da função penalidade P_f , que também é um funcional. Para o caso onde as restrições aplicadas são do tipo $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ em Γ , o funcional P_f pode ser escrito como:

$$P_f = \frac{\alpha}{2} \cdot \int_{\Gamma} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^2 d\Gamma \quad (2.18)$$

onde α é um vetor de tamanho k que armazena os fatores de penalidade que podem ser dados como funções das coordenadas, porém geralmente são atribuídos valores de constantes positivas. Em qualquer caso o funcional P_f será sempre não negativo e assim o valor mínimo do funcional é zero. Ele seria zero se todas as condições $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ fossem completamente satisfeitas. Conseqüentemente, a utilização da condição de estacionariedade do funcional P_f garante a melhor resposta da equação de restrição

aplicada, $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ (Liu, 2004). Modificando-se o funcional Lagrangeano de forma a impor as restrições para um caso onde E_C é desprezível, tem-se:

$$\Psi = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{t} d\Gamma + \frac{\boldsymbol{\alpha}}{2} \cdot \int_{\Gamma} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^2 d\Gamma. \quad (2.19)$$

Aplicando-se o princípio de estacionariedade em Ψ , tem-se:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\alpha} \cdot \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\alpha} \cdot \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{u}} d\Gamma = 0. \quad (2.20)$$

Uma importante diferença entre o fator do método das penalidades e os multiplicadores de Lagrange é que o fator de penalidade α_i é uma constante visto que os multiplicadores de Lagrange λ_i são variáveis. Desta forma, não ocorre um aumento no número de valores desconhecidos do sistema e este recai em um sistema onde a matriz é positiva definida. Por estes fatos o Método das Penalidades é computacionalmente mais eficiente que o método dos multiplicadores de Lagrange.

A principal questão é a escolha dos valores de $\boldsymbol{\alpha}$. Se $\alpha_i = 0$ as CCE não são aplicadas. A solução tende para o valor exato quando $\alpha_i \rightarrow +\infty$, o que é impossível de ser realizado numericamente (Liu, 2004).

Liu (2004) apresenta três procedimentos para a escolha dos fatores de penalidade α_i para os métodos sem malha. O primeiro calcula o fator α_i com base na relação utilizada no MEF apresentada por (Zienkiewicz e Taylor, 2000), dada por:

$$\alpha = \text{constante} \times (1/h)^n, \quad (2.21)$$

onde h é o comprimento característico que pode ser a razão do tamanho do elemento para a dimensão do domínio do problema e n é a ordem do elemento. Para os métodos sem malha, h pode ser entendido como a taxa do espaçamento entre nós para a dimensão do domínio do problema e $n = 1$. A constante da Equação (2.21) pode ser relacionada à constante material do sólido, que pode ser 10^{10} vezes o módulo de elasticidade.

O segundo procedimento também relaciona ao cálculo de α ao módulo de elasticidade,

$$\alpha = 1.0 \times 10^{5-8} \times \text{módulo de elasticidade.} \quad (2.22)$$

O terceiro procedimento utiliza a relação:

$$\alpha = 1.0 \times 10^{4-13} \times \max(\text{elementos da diagonal na matriz de rigidez}) \quad (2.23)$$

2.2.3 Método dos Elementos Finitos Acoplados

No método dos elementos finitos acoplados, um “cordão” de elementos finitos é empregado ao longo dos contornos essenciais, Figura 2.3.

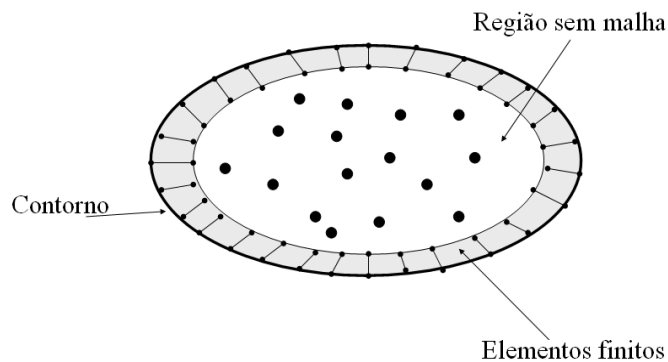


Figura 2.3 - Utilização de elementos finitos para impor as CCE.

Neste método as funções de forma do elemento finito definido no contorno são combinadas com as aproximações do método sem malha. Existem várias formas de se realizar o acoplamento (*ramp function*, *reproducing conditions*, *bridging scale method*, etc.) (Fries e Matthies, 2004).

A vantagem de se utilizar o acoplamento é que todas as funções de forma relacionadas com as condições de contorno possuem a propriedade delta de Kronecker, o que facilita a imposição das condições de contorno. A desvantagem está associada à construção do cordão de elementos e ao fato do acoplamento necessariamente lidar com uma estrutura de código mais complicada (Fries e Matthies, 2004).

2.3 KERNEL ESTIMATE, KE

A *kernel estimate*, u^h , para a função $u(\mathbf{x})$ sobre o domínio Ω é dada por (Monaghan, 1982, Duarte, 1995, Belytschko *et al.*, 1996):

$$u^h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_s} w(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h) u(\mathbf{y}) d\Omega_y \quad (2.24)$$

onde $w(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h)$ é a função núcleo ou função peso, Ω_s é o domínio associado ao suporte de \mathbf{x} , e h é o tamanho do suporte, chamado de função *smoothing*. Segundo Monaghan (1982) a função núcleo deve satisfazer as seguintes condições:

- i. $w(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h) > 0$ no subdomínio Ω_s ,
- ii. $w(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h) = 0$ fora do domínio Ω_s ,
- iii. $\int_{\Omega} w(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h) d\Omega = 1$,
- iv. $w(s, h)$ é uma função que decai monotonicamente, onde $s = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$,
- v. $w(s, h) \rightarrow \delta(s)$ com $h \rightarrow 0$, onde $\delta(s)$ é a função delta de Dirac.

As duas primeiras condições definem o suporte compacto da função peso ou núcleo. A terceira condição corresponde à verificação da consistência de ordem zero da forma contínua do método SPH. A quinta condição é difícil de conceber, pois implica em uma função cujo suporte tende a zero e pode ao mesmo tempo satisfazer as condições i a iv, sendo que computacionalmente h nunca se aproxima de zero (Belytschko *et al.*, 1996) (Monaghan, 1982). Caso $h \rightarrow 0$ a função peso w é a função delta de Dirac, assim $u^h = u$, Equação (2.24). Duarte (1995) apresenta algumas das funções núcleo mais utilizadas.

Segundo Monaghan (1982) a aproximação polinomial local da função u pode ser considerada como um caso especial da interpolação por KE. A maior diferença entre a interpolação polinomial e a KE é que no primeiro caso um grupo fixo de pontos ordenados é usado (nós de elementos finitos, por exemplo), enquanto o segundo método faz uma interpolação a partir de um grupo móvel de pontos (pontos no suporte de w).

2.4 SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS, SPH

A maioria das aplicações do SPH está relacionada com modelagem de fenômenos astrofísicos sem contorno tais como explosões de estrelas, formação de galáxias e nuvens de poeira cósmica e a mecânica dos fluidos tais como escoamentos incompressíveis, escoamentos elásticos, escoamento visco-elástico (Ellero, 2004), transferência de calor (Jeong *et al.*, 2003), etc. Outras aplicações do SPH estão relacionadas à simulação de problemas relativos a hiper-velocidade (Stellingwerf *et al.*, 2004, Cloutman, 1991), simulação de ondas de choque (Lastiwka *et al.*, 2005), simulação de detonação com TNT (Liu *et al.*, 2003), etc. Gu (2005) lista vários artigos relacionados a aplicações do SPH.

A representação Lagrangeana é adotada no SPH e o fluido é modelado como uma coleção de elementos. O procedimento padrão é selecionar um grupo de N elementos de fluido que são representados por partículas. A estas partículas é associada uma massa específica, ρ (Hernquist e Katz, 1989). A essência do método SPH pode ser expressa em duas idéias básicas (Martin *et al.*, 1993): (i) as propriedades do fluido em qualquer ponto são estimadas tomando-se a média ponderada das propriedades do volume circundante; (ii) o contínuo é aproximado por um número finito de partículas que se movem livremente devido à interação mútua e ação de forças de corpos externos.

Monaghan (1982) fundamentou o método SPH pela utilização da noção de aproximação de núcleo (*kernel approximation*) para $u(\mathbf{x})$ sobre o domínio. A Equação (2.24) é aproximada considerando-se que o meio é dividido em N pequenos elementos de volume, ΔV_I com massa $m_1, m_2...m_N$. A contribuição para a forma integral do elemento de volume I com massa m_I e centro de massa \mathbf{x}_I é (Duarte, 1995):

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)u(\mathbf{x}_I)m_I / \rho(\mathbf{x}_I) \quad (2.25)$$

onde $\rho(\mathbf{x}_I)$ é massa específica no nó \mathbf{x}_I e a Equação (2.24) é estimada por:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I \in Q(\mathbf{x})} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)u(\mathbf{x}_I)\Delta V_I \quad , \quad (2.26)$$

onde $Q(\mathbf{x})$ é o grupo de nós no domínio de influência de \mathbf{x} , isto é, o grupo de \mathbf{x}_I nós do suporte do nó \mathbf{x} ($\Delta V_I = m_I / \rho(\mathbf{x}_I)$). Note que embora nenhuma malha seja utilizada no método SPH, isto é, não existem conexões entre os nós, o domínio deve ser particionado para calcular ΔV_I . Muitas vezes estas partições são difíceis de realizar, como em domínios em três dimensões e geometrias complexas (Duarte, 1995).

Monaghan e Lattanzio (1985) propõem uma função peso ou núcleo (*kernel*) conhecida como SPH *spline*, que é uma função *spline* de terceira ordem, Equação (2.27), decorrente de generalizações nas funções *β spline*. Monaghan (1992) afirma que a melhor função peso para ser utilizada no método SPH é a exponencial. Martin *et al.* (1993) indicam que testes extensivos realizados por vários autores mostram que a função SPH *spline* é superior a qualquer outra função e, em particular, se a função peso ou núcleo não tiver suporte compacto ou não seja *smooth* (suave) vários efeitos numéricos podem ser introduzidos (interpenetrações de partículas, superestimar a massa específica) e se tornam incapazes de modelar choques corretamente. Belytschko *et al.* (1996), não verificaram vantagens significantes no uso da função exponencial com relação às funções *spline*.

$$w(s, h) = w_0 \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{s}{h} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{s}{h} \right)^3 & 0 \leq \frac{s}{h} \leq 1 \\ \frac{1}{4} \left(2 - \frac{s}{h} \right)^3 & 1 \leq \frac{s}{h} \leq 2 \\ 0 & \frac{s}{h} < 2 \end{cases} , \quad (2.27)$$

Os valores de w_0 para os casos uni, bi e tridimensional são dado por (Martin *et al.*, 1993):

$$w_0 = \begin{cases} \frac{2}{3h} & \text{caso 1D} \\ \frac{10}{7\pi h^2} & \text{caso 2D} \\ \frac{1}{\pi h^3} & \text{caso 3D} \end{cases} . \quad (2.28)$$

Gu (2005) lista algumas desvantagens do SPH:

- i. Dificuldade de encontrar funções peso apropriadas para o caso discreto do SPH.
- ii. Dificuldade no uso das funções de forma próximo ou no contorno do domínio, e ainda as funções de forma não obedecem às propriedades do delta de Kronecker.
- iii. Dificuldade de obter o volume das partículas para geometrias complexas.

2.5 REPRODUCING KERNEL PARTICLE METHOD, RKPM

O primeiro método de aproximação desenvolvido para computações sem malha foi o *kernel estimates* utilizado no SPH. Verifica-se que a discretização do KE não assegura nem mesmo consistência de ordem zero em um domínio finito, a menos que o modelo para massa/volume seja cuidadosamente selecionado, o que é difícil de ser realizado em contornos irregulares e em distribuições de partículas irregulares (Chen *et al.*, 1998).

O RKPM foi desenvolvido por Liu *et al.* (1995) com o intuito de melhorar a resposta do método SPH para problemas de domínios finitos. A idéia essencial do RKPM é recuperar a consistência discreta do SPH. Nesta abordagem, uma aproximação com núcleo reprodutor (*Reproducing Kernel*, RK) é introduzida para impor uma condição de consistência para uma ordem desejada. Ordens elevadas de consistência são alcançadas pelo enriquecimento das funções de base polinomiais locais (Chen *et al.*, 1998). Assim, a idéia principal do RKPM é adicionar uma função de correção à função peso. Esta função é particularmente útil na melhora das aproximações feitas pelo SPH próximo ao contorno. A Equação (2.24) pode ser escrita como (Gu, 2005):

$$u^h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_s} K(\mathbf{x} - \mathbf{y})u(\mathbf{y})d\Omega_y \quad (2.29)$$

Caso o núcleo $K(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ seja igual à função de delta de Dirac $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ a função $u(\mathbf{x})$ será representada exatamente. O núcleo K pode ser construído de forma a reproduzir um polinômio de ordem k (consistência de ordem k). A Equação (2.29) pode ser reescrita como (Fries e Matthies, 2004):

$$u^h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_s} C(\mathbf{x}, \mathbf{y})w(\mathbf{x} - \mathbf{y})u(\mathbf{y})d\Omega_y \quad (2.30)$$

onde w é a função peso ou função núcleo ou ainda função janela no contexto do RKPM. Ω_S é o domínio associado ao suporte de \mathbf{x} . Se $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = w(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ (caso do SPH), a aproximação pode não cumprir os requisitos de consistência. Para contornar este problema o núcleo $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é modificado com uma função de correção $C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, desta forma tem-se $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Para definir o núcleo modificado a função de correção deve ser determinada de forma que a aproximação tem consistência de ordem k (Fries e Matthies, 2004).

É importante observar na Equação(2.29) que os métodos com núcleo reprodutor são uma forma contínua de aproximação. Contudo, para a avaliação de tal integral na prática, o método RK tem sido discretizado como (Fries e Matthies, 2004, Gu, 2005):

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) u_i \Delta V_i, \quad (2.31)$$

onde u_i é $u(\mathbf{x}_i)$. Gu (2005) cita algumas áreas de aplicação do RKPM, como: grandes deformações, estruturas inelásticas, dinâmica de fluidos, estruturas acústicas, etc.

2.6 MÉTODOS DA PARTIÇÃO DA UNIDADE, PUMs

Os métodos sem malha podem ser baseados na partição da unidade, que é um paradigma no qual um domínio é coberto por sobreposições de subdomínios, cada um associado a uma função de forma $\phi_i(\mathbf{x})$, a qual apresenta suporte compacto e possui a seguinte propriedade (Belytschko *et al.*, 1996):

$$\sum_I \phi_I(\mathbf{x}) = 1 \text{ em } \Omega. \quad (2.32)$$

A condição essencial para a partição da unidade mostrada na Equação (2.32) é idêntica à condição de consistência de ordem zero, assim, pelo menos um polinômio constante ($x^p, p = 0$) é reproduzido de forma exata.

Os métodos da partição da unidade empregam uma base extrínseca. Métodos como PUM (Babuška e Melenk, 1997), PUFEM (Babuška e Melenk, 1997, Melenk e Babuška, 1996),

hp-clouds (Duarte e Oden, 1995, 1996, Duarte, 1996), XFEM (Sukumar *et al.*, 2000, 2003, Chahine *et al.*, 2006 2007), GFEM (Strouboulis *et al.*, 2000, 2001, Babuška *et al.*, 2000, Babuška *et al.*, 2004) podem ser incluídos nos PUMs.

2.6.1 MÉTODO DA PARTIÇÃO DA UNIDADE, PUM

O método da partição da unidade é um método sem malha que pode definir aproximações por meio de funções convenientemente escolhidas, não apenas polinomiais, mas que pode incluir polinômios como os de Taylor e os polinômios de Lagrange (Babuška e Melenk, 1997).

Segundo Babuška e Melenk, (1997), o PUM permite a construção de espaços *ansatz* com propriedades locais determinadas pelo usuário (*ansatz* quer dizer função de ensaio ou parametrização preferida, (Gonçalves, 2003)). O desenvolvimento deste método foi motivado pela necessidade de novas técnicas para a solução de problemas onde as abordagens pelo MEF falham ou são excessivamente onerosas. O MEF clássico é baseado nas propriedades locais de aproximações por polinômios. Para certos tipos de problemas, como equações com coeficientes aproximados ou problemas com soluções altamente oscilatórias, os polinômios apresentam propriedades pobres de aproximação.

A abordagem adotada neste método é partir de uma formulação variacional e então projetar os espaços de aproximação e teste (*ansatz*) em vista do problema sob consideração. As principais características dos métodos da partição da unidade são (Babuška e Melenk, 1997):

- i. Permitir a inclusão de conhecimentos prévios sobre a equação diferencial nos espaços *ansatz*.
- ii. Possibilita construir facilmente espaços *ansatz* para qualquer regularidade desejada; por esta razão, estão disponíveis espaços de aproximação (tentativa) para uso na formulação variacional de equações diferenciais de alta ordem.

A primeira característica está relacionada à aproximação local das propriedades dos espaços construídos pelo método enquanto que a segunda característica está intimamente relacionada à conformidade destes espaços.

Para uma implementação bem sucedida deste método, três questões devem ser tratadas, as quais são similares às questões relacionadas a outros métodos sem malha (DEM, EFGM, *hp-clouds*, SPH, RKPM, GFDM (Babuška e Melenk, 1997):

- i. A integração da função de forma.
- ii. Definir uma base para o espaço e controlar do número de condição da matriz de rigidez criada pelo PUM.
- iii. A implementação de condições de contorno essenciais.

Os espaços de aproximação dos métodos clássicos h , p e $h-p$ são espaços polinomiais por partes que são contínuos através dos contornos dos interelementos. Estas aproximações são feitas localmente por meio de polinômios. Na versão h , o grau polinomial p é fixado (geralmente $p \leq 2$) e a aproximação é atingida pelo refinamento da malha h . Na versão p a aproximação local é feita pelo aumento da ordem dos polinômios. Segundo Babuška e Melenk (1997) o método da partição da unidade pode ser visto como uma generalização da versão clássica h e p se os espaços de aproximações locais no PUM forem adotados como espaços polinomiais. As propriedades locais de aproximação dos espaços construídos são bastante similares. A malha (áreas de refinamento) e a escolha do grau do polinômio em cada elemento afeta muito o desempenho do $h-p$ MEF.

2.7 GENERALIZED FINITE ELEMENT METHOD, GFEM

A denominação Método dos Elementos Finitos Generalizados (*generalized finite element method*) foi utilizada pela primeira vez por Melenk (1995). Este método foi apresentado como uma generalização do método dos elementos finitos clássico. O GFEM apresenta duas características principais (Babuška *et al.*, 2004):

- i. Utilizar malhas parcialmente ou totalmente independentes da geometria.
- ii. Enriquecer as aproximações pelo uso de funções especiais.

No GFEM as funções de aproximações do MEF são interpretadas como uma partição da unidade, onde as nuvens são compostas pelo conjunto de elementos finitos que concorrem os nós dos elementos. Conforme exemplo mostrado por Barros (2002), para um espaço unidimensional, \mathbb{R}^1 , empregando-se funções de Lagrange lineares $\mathcal{L}(x)$ (PU), a função

$\mathcal{L}_I(x)$ possui um suporte $d_I = (el-1) \cup (el)$, conforme apresentado na Figura 2.4. Assim, a aproximação inicial para uma posição no interior do elemento el pertence ao espaço gerado pelas funções de aproximação dos pontos nodais x_I e x_{I+1} .

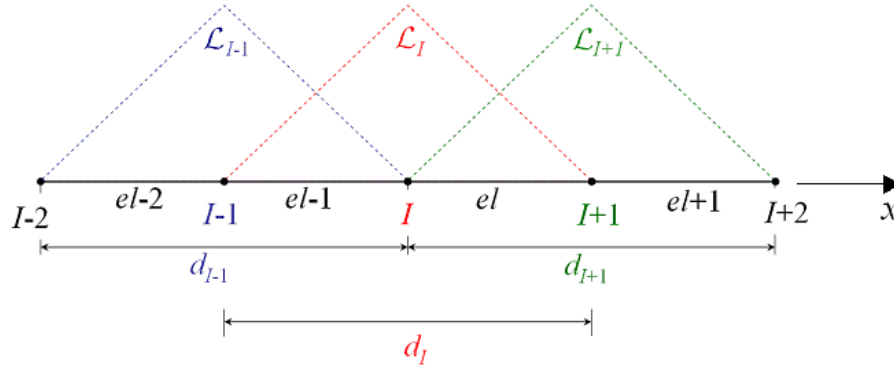


Figura 2.4 - Partição da unidade (Lagrange linear): elementos finitos em \mathbb{R}^1 .

Utilizando-se o enriquecimento do método das nuvens hp , a dimensão do espaço de elementos finitos é ampliada, p.ex., pela multiplicação da função base de cada nó por um conjunto de funções linearmente independentes quaisquer, LI . As funções LI são aproximações locais que devem representar apropriadamente a solução sobre o suporte a elas associado. A partição da unidade é utilizada para gerar espaços de aproximação local como parte da aproximação global.

A Figura 2.5 mostra a generalização desta formulação para o espaço bidimensional, \mathbb{R}^2 , por meio de uma função especial qualquer, de uma função bilinear (PU de ordem 1) e do produto entre as duas funções. A função produto tem as características aproximadoras da função especial empregada e o suporte compacto devido a PU (Barros, 2002).

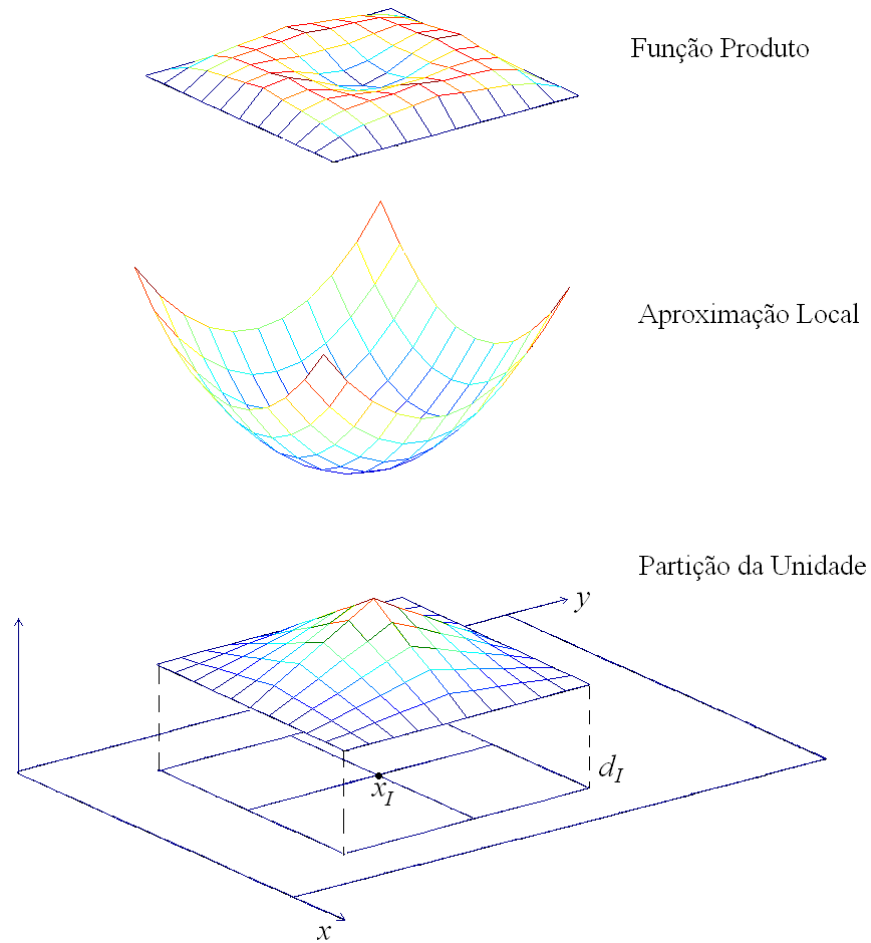


Figura 2.5 - Enriquecimento da partição da unidade.

2.8 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS, MMQM

Uma forma de se realizar aproximações em métodos sem malha é por meio do uso do Método dos Mínimos Quadrados Móveis. Shepard (1968) propôs o MMQM para realizar interpolações de baixa ordem (funções Shepard). Lancaster e Salkaukas (1981) generalizaram o método para aproximações de ordem elevada.

Assumindo que uma função contínua u no domínio Ω , onde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$ ou 3 , u é aproximada pelo do método dos mínimos quadrados móveis, por:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (2.33)$$

onde $p_i(\mathbf{x})$, é formado por m funções linearmente independentes (monômios) que definem uma base para o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a m (m é o número de termos da base), a_i são os coeficientes do polinômio (Guedes, 2006, Pan *et al.*, 2004, 2005).

No MMQM a função de aproximação global de u é construída por aproximações locais em cada ponto \mathbf{x} de Ω (Duarte, 1995). Lancaster e Salkauskas (1981) definem uma aproximação local por:

$$u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \cong u^h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}_j) a_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (2.34)$$

Os coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ são obtidos aplicando-se a técnica de mínimos quadrados ponderados para ajuste da aproximação local, a qual é obtida pela minimização da diferença entre a aproximação local e a função (ou norma do resíduo). Isto produz a forma quadrática (Belytschko *et al.*, 1996).

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k w_j \cdot \left[\sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}_j) a_i(\mathbf{x}) - u_j \right]^2 \quad (2.35)$$

onde $u_j = u(\mathbf{x}_j)$ é o valor nodal de $u(\mathbf{x})$ no ponto \mathbf{x}_j , $w(x) = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$ é uma função não negativa com suporte compacto associada ao nó \mathbf{x}_j . Além disso, n é o número total de pontos nos quais a função peso $w_i(\mathbf{x})$ não é desprezível. A minimização de $J(\mathbf{x})$ resulta em (Pan *et al.*, 2004, 2005):

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} \quad (2.36)$$

onde

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n w_j(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \quad (2.37)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [w_1(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \quad w_2(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \quad \dots \quad w_n(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_n)] \quad (2.38)$$

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T \quad (2.39)$$

a matriz \mathbf{A} é quadrada e tem tamanho m por m , já a matriz \mathbf{B} tem tamanho m por n . Isolando \mathbf{a} na Equação (2.36) e substituindo a na Equação(2.34) a aproximação pelo MMQM é

$$u^h(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} \quad (2.40)$$

onde $\boldsymbol{\phi}$ é a função de forma, dada por:

$$\boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}). \quad (2.41)$$

O MMQM é considerado uma aproximação baseada no método dos mínimos quadrados ponderados, onde a função peso, w , se desloca para o ponto \mathbf{x} no qual se deseja definir a aproximação. Uma propriedade importante MMQM é a consistência de ordem k , onde k é o grau do polinômio de ordem mais elevada da base $\mathbf{p}(\mathbf{x})$. Para $k = 0$ (consistência de ordem zero) o conceito da partição da unidade também é atendido pelo MMQM (Belytschko *et al.*, 1996, Guedes, 2006, Barros, 2002).

As funções de forma obtidas pelo MMQ apresentam as seguintes propriedades (Gu, 2005):

- i. Não possuem as propriedades do delta de Kronecker, assim $\phi_i(x_j) \neq \delta_{ij}$. A Figura 2.6 ilustra esta desigualdade. A falta desta propriedade pode levar a um aumento no custo computacional, pois em geral uma maior quantidade de nós é necessária para assegurar a exatidão da aproximação.
- ii. Partição da unidade. Se uma constante é incluída na base, a função de forma é uma partição da unidade.
- iii. Se uma base linear ou polinomial de alta ordem é utilizada, as funções de forma pelo MMQ apresentam consistência linear.
- iv. As continuidades locais e globais do domínio podem ser asseguradas quando a função peso apropriada é empregada. Assim a principal vantagem das funções de forma relacionadas ao MMQ é que sua continuidade está associada principalmente

à função peso utilizada, desta forma uma base linear pode ser empregada para gerar uma aproximação de alta ordem se a função peso for devidamente escolhida.

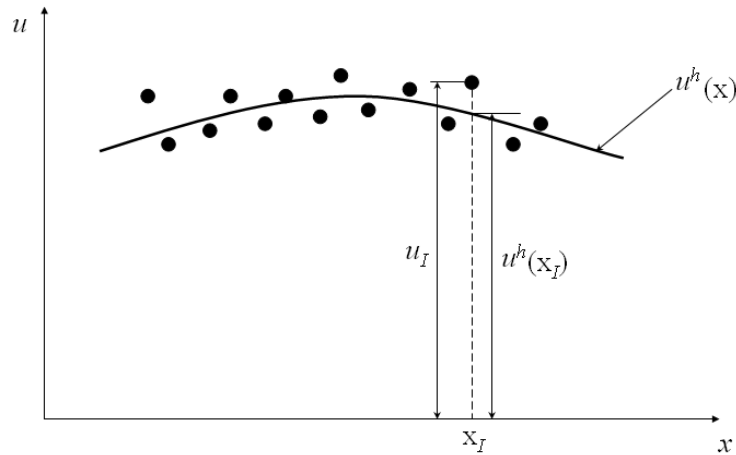


Figura 2.6 - Função aproximação $u^h(x)$ e o parâmetro nodal u_I na aproximação pelo MMQ.

2.8.1 Relação do MMQM com o método Shepard

Shepard (1968) introduziu no contexto da interpolação de dados a seguinte aproximação

$$u^h = \sum_{i=1}^{n_i} \phi_i(\mathbf{x}) u_i \quad (2.42)$$

onde $\phi_i(\mathbf{x})$ é

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \frac{w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{\sum_{i=1} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)} \quad (2.43)$$

podendo ser interpretada como a distância inversa ponderada. As funções de forma do método Shepard podem ser vistas como uma forma da partição da unidade. O método Shepard pode também ser visto como MMQM com uma base polinomial com ordem de consistência zero, $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = 1$. A demonstração da relação é simples: basta considerar $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = 1$ na função de forma, Equação (2.41), e substituir esta na Equação (2.40).

2.9 DIFFUSE ELEMENT METHOD, DEM

Nayroles *et al.* (1992) apresentam o Método da Aproximação Difusa (*Diffuse Approximation Method*, DAM) como uma generalização da técnica de interpolação de elementos finitos. Várias aplicações para o este método são indicadas, como solução de equações diferenciais parciais ou ordinárias conduzindo ao Método do Elemento Difuso (*Diffuse Element Method*, DEM). Algumas aplicações do DEM podem ser encontradas em (Nayroles *et al.*, 1992): solução da equação de Poisson e solução de um problema bidimensional de elasticidade.

Duarte (1995) apresenta uma revisão sobre o método do elemento difuso e evidencia que método da aproximação difusa é idêntico ao MMQM proposto anteriormente por Lancaster e Salkaukas (1981).

2.10 MÉTODO DE GALERKIN SEM MALHA, EFG

A característica essencial do método EFG é o uso de uma malha auxiliar, composta somente de elementos de quadratura, que cobre completamente o domínio do problema analisado. O método de Galerkin sem malha proposto por Belytschko *et al.* (1994) é baseado no método do elemento difuso desenvolvido por Nayroles *et al.* (1992). Segundo Belytschko *et al.* (1994) as principais diferenças entre o EFG e o DEM são:

- i. Uso no método EFG de um grande número de pontos de quadratura arranjados em células que cobrem o domínio.
- ii. Inclusão de certos termos nas derivadas de funções, que eram omitidas no DEM.
- iii. Imposição das condições de contorno essenciais no EFG por meio do método dos multiplicadores de Lagrange.

As modificações propostas para o método EFG proporcionam um aumento da exatidão das respostas em comparação ao DEM. O EFG tem sido aplicado em uma grande variedade de áreas da engenharia, que incluem:

- i. Conformação Mecânica (Xiong *et al.*, 2004, Guan *et al.*, 2007).

- ii. Eletricidade (Chen *et al.*, 2007) e Eletromagnetismo (Ooi *et al.*, 2004, Parreira *et al.*, 2006, Yang *et al.*, 2006, Louaï *et al.*, 2007, Manzin, 2007).
- iii. Escoamento (Du, 2000, Recio *et al.*, 2007) e Escoamento magnetohidrodinâmico (Verardi *et al.*, 2002).
- iv. Estruturas de casca (Krysl e Belytschko, 1996, Liu *et al.*, 2006a).
- v. Estruturas: engenharia civil (Karim *et al.*, 2002, Tiago e Leitão, 2004, Zeng *et al.*, 2006).
- vi. Fratura e propagação de trincas (Belytschko *et al.*, 1995a, Belytschko *et al.*, 1995b, Lu *et al.*, 1995, Belytschko e Tabbara, 1996, Xu e Saigal, 1998, 1999, Krysl e Belytschko, 1999, Belytschko *et al.*, 2000, Lee e Yoon, 2004, Brighenti, 2005).
- vii. Mecânica dos materiais: material elástico-linear (Dolbow e Belytschko, 1998), pseudo-elástico (Liew *et al.*, 2004), superelástico (Ren *et al.*, 2002), não-lineares (Jun, 1996), viscoelástico (Haitian e Yan, 2003).
- viii. Placas e laminados (Krysl e Belytschko, 1995, Peng *et al.*, 2005, Belinha e Dinis, 2007).
- ix. Transferência de calor (Singh *et al.*, 2002, 2003, Singh e Jain, 2005, Dai *et al.*, 2005, Zhihua *et al.*, 2007, Singh *et al.*, 2007).
- x. Vibrações (Chen *et al.*, 2003, Peng *et al.*, 2006).

O método de Galerkin sem malha é caracterizado pelo fato de somente ser necessário um conjunto de pontos e a descrição do contorno para gerar as equações discretas. As conectividades entre pontos e as funções de aproximação são completamente construídas pelo método (Dolbow e Belytschko, 1998).

O método EFG emprega o método dos mínimos quadrados móveis para aproximar a função $u(\mathbf{x})$ em $u^h(\mathbf{x})$ em um domínio Ω , sendo que dentro deste domínio é colocado um conjunto de pontos \mathbf{x}_I , onde I varia de 1 até n_I (Belytschko *et al.* 1996). As aproximações são construídas a partir de três componentes: (a) função peso de suporte compacto, associada a cada ponto, (b) uma base, geralmente polinomial, e (c) um conjunto de coeficientes que dependem da posição. Uma característica comum a todos os métodos sem malha é a função peso, a qual é não nula somente sobre um pequeno subdomínio ao redor do ponto, o qual é chamado de suporte. O suporte da função peso define o domínio de influência de um ponto I , que é o subdomínio $\Delta\Omega_I$ sobre o qual um ponto particular contribui para a aproximação. Os suportes mais utilizados são esferas e discos. A Figura

2.7 mostra duas formas de suporte utilizadas no espaço plano que são: discos e retângulos. A sobreposição de domínios de influência define as conectividades entre pontos (Dolbow e Belytschko, 1998, Belytschko *et al.*, 1996).

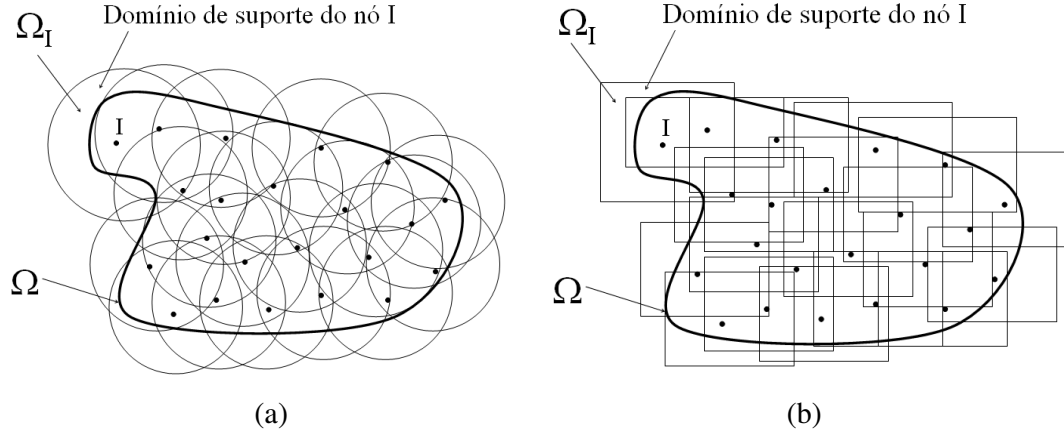


Figura 2.7 - Pontos e suporte para o método sem malha: (a) disco, (b) retângulo.

Apesar do método EFG ser considerado um método sem malha quando se refere à construção da função de forma, uma malha será necessária para construir o sistema de equações (Dolbow e Belytschko, 1998).

2.10.1 EFG Aproximação pelo MMQM

Seja $u(\mathbf{x})$ a função de uma variável de campo definida no domínio Ω . Aproximação de $u(\mathbf{x})$ no ponto \mathbf{x} é chamada de $u^h(\mathbf{x})$. A primeira aproximação pelo MMQM tem a forma

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_j(\mathbf{x})a_j(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad (2.44)$$

onde m é o número de termos do monômio, \mathbf{p} é um vetor que armazena monômios e o vetor \mathbf{a} os seus coeficientes, os quais são funções das coordenadas espaciais \mathbf{x} . Para a ordem m , $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ pode ser escrito como:

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^m], \quad (2.45)$$

e os coeficientes dos monômios são dados por:

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m]. \quad (2.46)$$

Para base linear o vetor $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ pode ser escrito como:

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1 \ x] \quad \text{caso 1D}, \quad (2.47)$$

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y] \quad \text{caso 2D}, \quad (2.48)$$

e para base quadrática o vetor $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ é:

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1 \ x \ x^2] \quad \text{caso 1D}, \quad (2.49)$$

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2] \quad \text{caso 2D}. \quad (2.50)$$

Os coeficientes, $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, são obtidos pela minimização do funcional quadrático J . Assim, o funcional de um resíduo ponderado é construído usando os valores aproximados da função campo e dos parâmetros nodais $u_I = u(\mathbf{x}_I)$. J é

$$J = \sum_I^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) [\mathbf{p}(\mathbf{x}_I) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_I]^2, \quad (2.51)$$

onde $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ é a função peso. O funcional quadrático mostrado na Equação (2.51), pode ser reescrito como:

$$J = [\mathbf{P} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{U}]^T \cdot \mathbf{W}(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{P} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{U}]. \quad (2.52)$$

sendo \mathbf{P} a matriz que aplica os monômios aos nós do domínio de influência do ponto \mathbf{x} analisado. A matriz \mathbf{P} tem dimensão do número de termos da base monomial (m) pelo número de nós no domínio de influência (n). Para base linear bidimensional, tem-se:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

onde x_I e y_I são as coordenadas espaciais dos nós que pertencem ao domínio de influência analisado, sendo que o índice I varia de 1 até n . A matriz \mathbf{W} é diagonal e armazena os valores da função peso $w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)$. Assim,

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} w(x-x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w(x-x_2) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & w(x-x_n) \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

e o vetor \mathbf{U} armazena os parâmetros nodais para as variáveis de campo analisadas para todos os nós do domínio de influência.

$$\mathbf{U} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_n]^T. \quad (2.55)$$

A minimização do funcional quadrático J , $dJ/d\mathbf{a} = 0$, resulta em:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}. \quad (2.56)$$

Sendo \mathbf{A} , matriz de momento (ponderada), e \mathbf{B} dados por:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{W}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{P} \quad (2.57)$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{W}(\mathbf{x}) \cdot \quad (2.58)$$

Assim,

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}, \quad (2.59)$$

desta forma, substituindo a equação (2.59) na equação (2.44), tem-se:

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}, \quad (2.60)$$

Definindo-se o vetor função de forma, ϕ , como:

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}). \quad (2.61)$$

tem-se:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}. \quad (2.62)$$

O vetor \mathbf{u}^h pode ser escrito como:

$$\mathbf{u}^h = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^h = \sum_I^n \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_I & 0 \\ 0 & \phi_I \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}_I} \underbrace{\begin{bmatrix} u_I \\ v_I \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_I} = \sum_I^n \boldsymbol{\Phi}_I \cdot \mathbf{u}_I \quad (2.63)$$

A fim de se determinar os derivativos a partir do deslocamento, Equação (2.62), é necessário obter a derivada da função de forma. As derivadas espaciais, para o caso 2D, da função de forma estão indicadas nas Equações (2.64) e (2.65):

$$\boldsymbol{\phi}_{,x} = (\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B})_{,x} = \mathbf{p}^T_{,x} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{A}^{-1}_{,x} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{,x} \quad , \quad (2.64)$$

$$\boldsymbol{\phi}_{,y} = (\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B})_{,y} = \mathbf{p}^T_{,y} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{A}^{-1}_{,y} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{,y} \quad , \quad (2.65)$$

onde os termos de derivadas apresentados nas Equações (2.64) e (2.65) estão indicados nas equações (2.66) a (2.71). As derivadas da matriz \mathbf{B} , em notação vírgula, são:

$$\mathbf{B}_{,x} = \mathbf{W}_{,x} \cdot \mathbf{P} \quad , \quad (2.66)$$

$$\mathbf{B}_{,y} = \mathbf{W}_{,y} \cdot \mathbf{P} \quad , \quad (2.67)$$

e do vetor \mathbf{p} ,

$$\mathbf{p}^T_{,x} = [0 \ 1 \ 0] \quad \text{caso 2D linear,} \quad (2.68)$$

$$\mathbf{p}^T_{,y} = [0 \ 0 \ 1] \quad \text{caso 2D linear.} \quad (2.69)$$

As derivadas da matriz \mathbf{A}^{-1} são calculadas por:

$$\mathbf{A}^{-1}_{,x} = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{,x} \cdot \mathbf{A}^{-1}, \quad (2.70)$$

$$\mathbf{A}^{-1}_{,y} = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{,y} \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad (2.71)$$

onde

$$\mathbf{A}_{,x} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{W}_{,x} \cdot \mathbf{P} \quad (2.72)$$

$$\mathbf{A}_{,y} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{W}_{,y} \cdot \mathbf{P} \quad (2.73)$$

2.10.2 Função Peso

Um componente importante no método EFG é a função peso (Equações (2.74), (2.75), (2.76), (2.77), (2.78), (2.79) e (2.80)). A função peso deve ser não nula somente em uma pequena vizinhança de \mathbf{x}_I (I entre 1 e n), chamada domínio de influência do ponto, de modo a gerar um conjunto de equações discretas esparsas, isto é, a função peso tem um suporte compacto. As funções de peso, w_I , neste contexto, atuam de forma direta na função de forma associada a cada ponto, assim a escolha da função peso afeta os resultados da função aproximação u^h . O suporte compacto destas funções é uma característica essencial porque permite definir as funções de aproximação em um caráter local. (Dolbow e Belytschko, 1998, Guedes, 2006). As funções peso do EFG possuem as mesmas características das funções peso SPH indicadas na seção 2.3, que são:

- i $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) > 0$ no subdomínio de Ω_S ;
- ii $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = 0$ fora de Ω_S ;
- iii $\int_{\Omega} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) d\Omega = 1$;
- iv decaimento monotônico ao longo do seu domínio;
- v $w(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|, h) \rightarrow \delta(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|)$ com $h \rightarrow 0$, onde $\delta(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|)$ é a função delta de Dirac.

onde Ω_S é o domínio associado ao suporte de \mathbf{x} . Para casos unidimensionais, definindo $d_I = \|x - x_I\|$, e $r = d_I / d_{ml}$, onde d_{ml} é o tamanho do domínio de influência do I ésimo ponto. A função peso pode ser escrita com função de um comprimento normalizado r . As funções peso unidimensionais mais utilizadas são:

Cúbica *spline* (Belytschko *et al.*, 1996)

$$w(x - x_I) \equiv w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & \text{para } r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3 & \text{para } \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1 \end{cases} ; \quad (2.74)$$

Quártica *spline* (Belytschko *et al.*, 1996)

$$w(x - x_I) \equiv w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 6r^2 + 8r^3 - \frac{4}{3}r^4 & \text{para } r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1 \end{cases} ; \quad (2.75)$$

Quinta ordem *spline* (Xiaofei *et al.*, 2004)

$$w(x - x_I) \equiv w(r) = \begin{cases} 1 - 10r^2 + 20r^3 - 15r^4 + 4r^5 & \text{para } r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1 \end{cases} ; \quad (2.76)$$

Exponencial1 (Belytschko *et al.*, 1996)

$$w(x - x_I) \equiv w(r) = \begin{cases} e^{-(r/\alpha)^2} & \text{para } r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1 \end{cases} ; \quad (2.77)$$

Exponencial2 (Long e Hu, 2003)

$$w(x - x_I) \equiv w(r) = \begin{cases} e^{-(r/\alpha)} & \text{para } r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1 \end{cases} ; \quad (2.78)$$

Gaussiana (Belytschko *et al.*, 1994)

$$w(x - x_I) \equiv w(r) = \begin{cases} \frac{e^{-(\beta r)^{2k}} - e^{-(\beta)^{2k}}}{(1 - e^{-(\beta)^{2k}})} & \text{para } r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1 \end{cases} \quad (2.79)$$

Cônica (Belytschko *et al.*, 1994)

$$w(x - x_I) \equiv w(r) = \begin{cases} 1 - r^{2k} & \text{para } r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1 \end{cases} \quad (2.80)$$

onde α , β e k são parâmetros das equações peso. Outras funções peso são apresentadas em Fries e Matthies (2004) e Xiaofei *et al.* (2004). O tamanho do domínio de influência do ponto, d_{ml} , é dado por:

$$d_{ml} = d_{max} \cdot c_I \quad (2.81)$$

onde d_{max} é um parâmetro de escala o qual varia geralmente entre 2,0 e 4,0 para análise estática, segundo Dolbow e Belytschko (1998). Em uma dimensão com base linear, a distância c_I de um pontos é a máxima distância dos vizinhos mais próximos assegurando que cada ponto irá ter pelo menos dois pontos vizinhos no domínio de influência (Dolbow e Belytschko, 1998). O parâmetro β na função peso Gaussiana permite atribuir pesos relativos dentro do domínio de influência.

Com relação às Equações (2.64), (2.65), (2.70) e (2.71) pode se verificar que para o cálculo das derivadas das matrizes **A** e **B** é necessário calcular a derivada da função peso. Para o caso da função cúbica *spline* tem-se:

$$\frac{dw_I}{dx} \equiv \frac{dw_I}{dr} \frac{dr}{dx} = \begin{cases} (-8r^2 + 12r^2)(\text{sign}(x - x_I)) & \text{para } r \leq \frac{1}{2} \\ (-4 + 8r - 4r^2)(\text{sign}(x - x_I)) & \text{para } \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1 \end{cases} \quad (2.82)$$

As funções peso $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ para o caso multidimensional \mathbb{R}^n , podem ser definidas a partir do caso unidimensional $w(x - x_I)$. Os dois casos mais freqüentes são:

- i. $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = w(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|)$
- ii. $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = \prod_{i=1}^n w(\|x_i - x_{iI}\|)$.

Em \mathbb{R}^2 , a função de peso possui forma circular para o caso (i) e forma retangular para o caso (ii). Normalizando as distâncias para o caso (ii), a função peso para qualquer ponto é dada por:

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = w(r_x) \cdot w(r_y) = w_x \cdot w_y, \quad (2.83)$$

onde $w(r_x)$ ou $w(r_y)$ é dado pela substituição de r por r_x ou r_y , respectivamente, nas Equações peso mostradas (Equação (2.74) a (2.80)). Os valores de r_x e r_y são dados por:

$$r_x = \frac{\|x - x_I\|}{d_{mx}}, \quad (2.84)$$

$$r_y = \frac{\|y - y_I\|}{d_{my}}, \quad (2.85)$$

sendo

$$d_{mx} = d_{max} \cdot c_{xI}, \quad (2.86)$$

$$d_{my} = d_{max} \cdot c_{yI}, \quad (2.87)$$

onde c_{xI} e c_{yI} são determinados para um ponto particular pela busca por pontos suficientes na vizinhança para satisfazer a base em ambas às direções. Se os pontos estão uniformemente distribuídos, os valores de c_{xI} e c_{yI} podem ser definidos com a distância entre os nós nas direções x e y , respectivamente.

As derivadas da função peso são dadas por:

$$w_{,x} = \frac{dw_x}{dx} w_y, \quad (2.88)$$

$$w_{,y} = \frac{dw_y}{dy} w_x, \quad (2.89)$$

onde dw_x/dy e dw_y/dx são dados, por exemplo, pela Equação (2.82) com r substituído por r_x e r_y , respectivamente.

2.10.3 Integração de Fundo

A discretização pelo método de Galerkin recai na forma fraca. A função de forma é então utilizada na equação da forma fraca para obter as equações discretas (Belytschko *et al.*, 1996). A principal questão nos métodos sem malha gira em torno de como realizar as integrações das equações discretas. Belytschko *et al.* (1996) citam três tipos de aproximações que podem ser realizadas: (a) integração no ponto; (b) células, Figura 2.8(a); e (c) malha de elementos finitos de fundo utilizada para a quadratura, Figura 2.8(b).

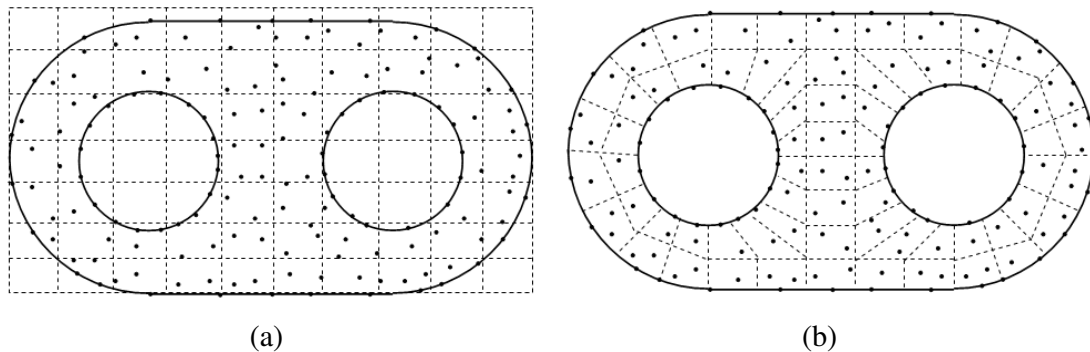


Figura 2.8 - Técnicas de quadratura para métodos sem malha:

(a) célula de quadratura (b) elemento de quadratura.

Segundo Belytschko *et al.* (1996), a aproximação por integração no ponto é mais rápida, mas a colocação nodal parece sofrer instabilidade. O segundo e terceiro casos têm como desvantagem resultar em um método que não é verdadeiramente sem malha. Para estes

dois últimos casos, pontos da quadratura de Gauss ou a regra do trapézio podem ser utilizadas para realizar a integração (Belytschko *et al.*, 1996).

Na Figura 2.9 é apresentado um caso geral para a integração por elemento de quadratura. A geometria do domínio do problema é inicialmente modelada e um conjunto de nós é utilizado para representar o domínio do problema. Pontos de quadratura x_Q são adicionados às células de integração, cada ponto possui um domínio de influência ou suporte.

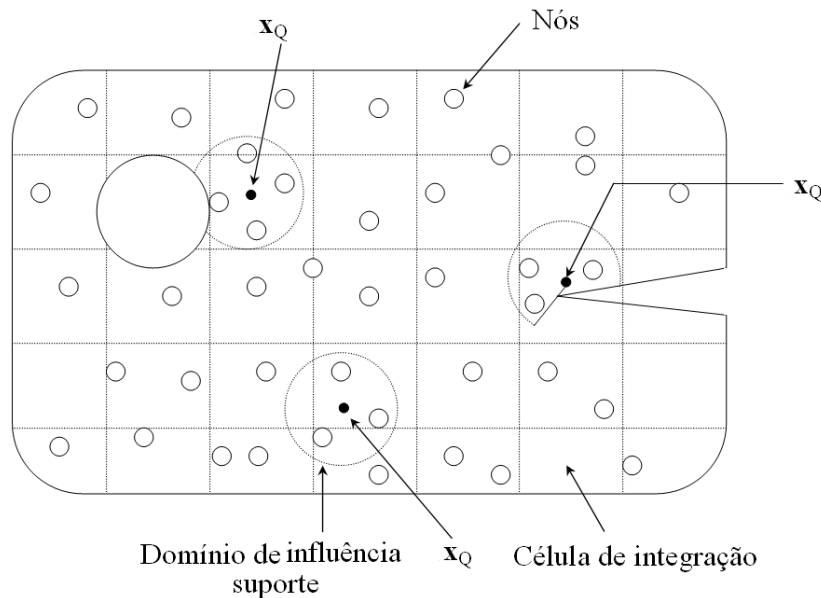


Figura 2.9 - Integração do domínio utilizando elementos de quadratura indicando os pontos de quadratura x_Q , suporte ou domínio de influência, nós e células de integração.

Tanto no MEF quanto no EFG, a integração numérica é um processo que consome tempo (computação da matriz de rigidez). No MEF, a malha de integração está relacionada ao elemento finito utilizado. Para obter resultados precisos a malha de elementos deve ser suficientemente refinada e um número suficiente de pontos de integração deve ser utilizado. Todavia, no EFG a malha de fundo é necessária somente para realizar a integração computacional da matriz de rigidez. Portanto, uma malha de fundo com densidade apropriada deve ser projetada para obter uma solução aproximada de precisão desejada. Contudo, isso só pode ser feito após realizar uma investigação detalhada para revelar a relação entre a densidade do campo de pontos e a densidade da malha de fundo. A

primeira coisa que precisa ser abordada é o número mínimo de pontos de integração quando é adotada a integração numérica (Liu, 2004).

Para o MEF se o número de relações independentes fornecida pela integração de todos os pontos é menor que o número de variáveis desconhecidas, a matriz de rigidez \mathbf{K} deve ser singular (Zienkiewicz e Taylor, 2000). Este conceito também pode ser aplicado, em princípio para o EFG. O número de variáveis desconhecidas N_u para um problema 2D, deve ser:

$$N_u = 2 \times n_t - n_f, \quad (2.90)$$

onde n_t é o número de nós no domínio Ω e n_f é o número de graus de liberdade restritos no domínio Ω (Liu, 2004).

Três relações de deformação independente são utilizadas na integração em cada ponto de quadratura. Assim, o número total de equações independentes pertinentes aos pontos de quadratura, N_Q é:

$$N_Q = 3 \times n_Q, \quad (2.91)$$

onde n_Q é o número total de pontos de quadratura no domínio Ω . Desta forma, N_Q deve ser maior que N_u para permitir a singularidade da solução e o número mínimo de pontos de quadratura deve ser maior que $N_u/3$. Assim, o número total de pontos de quadratura n_Q deve ser pelo menos dois terços do número total de nós sem restrição aplicada no domínio do problema,

$$N_Q > N_u \approx 2n_t \quad \text{ou} \quad n_Q > (2/3)n_t \quad \text{para problemas 2D}, \quad (2.92)$$

esta regra é o mínimo exigido, porém não o suficiente exigido.

Para um domínio que apresenta distribuição regular de nós e células de integração de fundo, conforme mostrado na Figura 2.10, N_x e N_y são os números de nós nas direções x e y , respectivamente. A densidade de células da malha de fundo é definida por $n_x \times n_y$, onde

n_x e n_y são o número de células de fundo nas direções x e y , respectivamente. O número total de pontos de quadratura pode ser calculado por:

$$n_Q = n_g \times n_x \times n_y, \quad (2.93)$$

onde n_g é o número de pontos de amostragem de Gauss dentro de uma célula (Liu, 2004).

O número total de equações independentes utilizadas em todos os pontos de quadratura, N_Q , pode ser calculado substituindo Equação (2.93) em Equação (2.91):

$$N_Q = 3 \times n_Q = 3 \times (n_g \times n_x \times n_y). \quad (2.94)$$

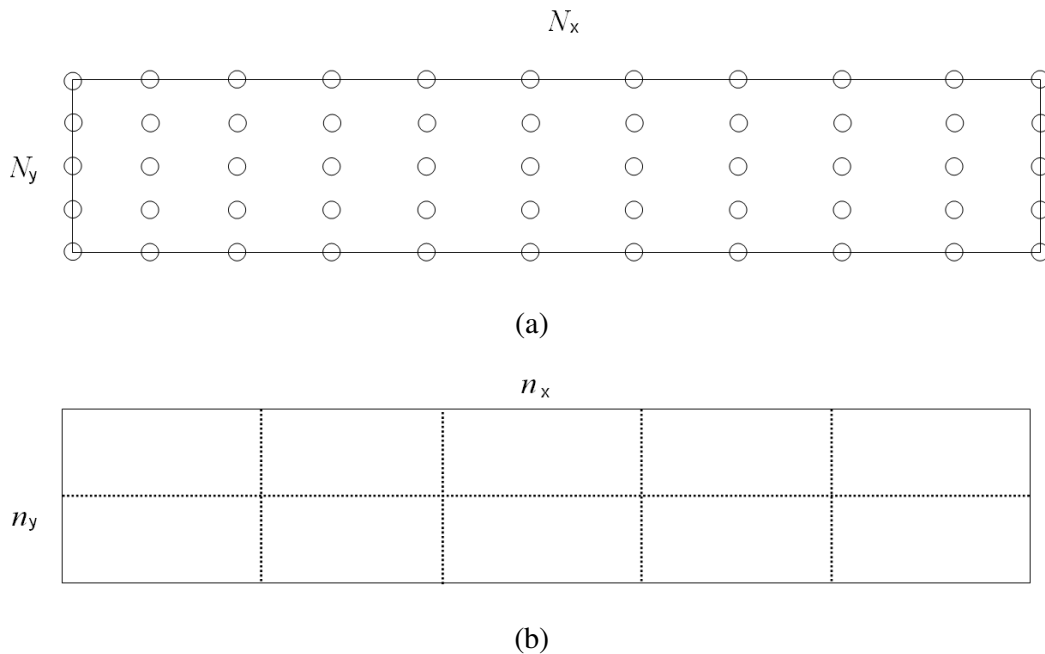


Figura 2.10 - Representação de um domínio que apresenta, (a) distribuição regular de pontos (N_x e N_y) e (b) células de integração de fundo (n_x e n_y).

Segundo Liu (2004), quando $N_Q < N_u$ não se obtém soluções estáveis e mesmo para $N_Q > N_u$ não garante necessariamente uma solução precisa, segundo ele, um resultado com precisão aceitável pode ser obtido utilizando:

$$N_Q > 4N_u \sim 5N_u \cong 9n_t \quad (2.95)$$

ou

$$n_Q > 3n_r, \tag{2.96}$$

assim, tem-se como uma regra empírica que um número suficiente de pontos de Gauss total deve ser ao menos três vezes o número total de nós (Liu, 2004).

3 ELASTICIDADE LINEAR

A solução de um problema estático da mecânica dos sólidos requer (Fenner, 1986, Bathe, 1996):

- i. O equilíbrio de forças e momentos em todos os pontos do corpo;
- ii. A compatibilidade de deformações, garantido a continuidade do material;
- iii. Estabelecimento de equações constitutivas relacionando tensões e deformações; caracterizando as propriedades físicas dos materiais;
- iv. A imposição de condições de contorno para o problema particular.

As equações de equilíbrio e compatibilidade são aplicadas em qualquer problema mecânico pertinente a sólidos estáticos envolvendo pequenas deformações, contudo são insuficientes para determinar o comportamento mecânico do material. As equações constitutivas dos materiais relacionam suas tensões e deformações, deste modo, são particulares para cada material e servem para classificá-los segundo o seu comportamento mecânico.

3.1 FORMA FRACA

Aplicando-se o equilíbrio das forças internas e externas em um corpo sólido qualquer, tem-se a equação de equilíbrio,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad , \quad \text{em } \Omega, \quad (3.1)$$

sendo $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor de tensões e \mathbf{b} o vetor forças de campo (forças externas de campo por unidade de volume). Em notação indicial

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_i = 0 \quad (3.2)$$

ou, devido à simetria de $\boldsymbol{\sigma}$,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0. \quad (3.3)$$

Considerando as condições de contorno para os deslocamentos na superfície, Γ_u , tem-se que $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^{\Gamma_u}$ e que para as forças atuantes em Γ_t é válida a relação $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}$, onde \mathbf{n} é um vetor unitário normal à superfície.

Considerando-se qualquer deslocamento arbitrário \mathbf{u}' que satisfaça a relação $\mathbf{u}' = \mathbf{0}$ em Γ_u , onde \mathbf{u}' é o deslocamento virtual, pode-se definir o trabalho virtual como sendo:

$$\delta W = \int \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) u'_i + b_i u'_i. \quad (3.4)$$

Sendo este trabalho nulo

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) u'_i d\Omega + \int_{\Omega} b_i u'_i d\Omega = 0. \quad (3.5)$$

Considerando-se a identidade matemática indicada na Equação (3.6):

$$\left(\frac{\partial \sigma_{ij} u'_i}{\partial x_j} \right) = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) u'_i + \sigma_{ij} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right). \quad (3.6)$$

Isolando-se o termo $(\partial \sigma_{ij} / \partial x_j) u'_i$ e o substituindo na Equação (3.5), tem-se:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{ij} u'_i}{\partial x_j} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) d\Omega + \int_{\Omega} b_i u'_i d\Omega = 0. \quad (3.7)$$

Utilizando o teorema da divergência de Gauss,

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{ij} u'_i}{\partial x_j} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} (\sigma_{ij} u'_i) n_j d\Gamma \quad (3.8)$$

e substituindo na Equação (3.7),

$$\int_{\Gamma} (\sigma_{ij} u'_i) n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) d\Omega + \int_{\Omega} b_i u'_i d\Omega = 0, \quad (3.9)$$

sendo $(\partial u'_i / \partial x_j)$ o gradiente de \mathbf{u}' . Como $\nabla \mathbf{u}'$ pode ser decomposto em uma parte simétrica e outra anti-simétrica, tem se:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.10)$$

onde a parte simétrica é o tensor de deformações virtual (ε'_{ij}) e a anti-simétrica é o tensor de rotação virtual (W'_{ij}) . Como o tensor de tensão $(\boldsymbol{\sigma})$ é simétrico, \mathbf{W}' é nulo. Desta forma:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) = \varepsilon'_{ij}. \quad (3.11)$$

Substituindo-se a Equação (3.11) na Equação (3.9), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} (\sigma_{ij} u'_i) n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon'_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} b_i u'_i d\Omega = 0, \quad (3.12)$$

como $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}$, tem-se:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t}_i u'_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon'_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} b_i u'_i d\Omega = 0. \quad (3.13)$$

Como $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}'$ são simétricos podem ser escritos na forma vetorial:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}' \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}' d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}' d\Gamma. \quad (3.14)$$

Como $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'$, onde \mathbf{D} é a matriz de elasticidade do material,

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}' \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}' d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}' d\Gamma. \quad (3.15)$$

A Equação (3.15) constitui a forma fraca do problema de equilíbrio de um volume sólido. Sendo o termo do lado esquerdo da equação referente ao trabalho virtual interno e os termos do lado direito ao trabalho virtual externo.

3.2 IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para a elasticidade linear, o funcional utilizado é a energia potencial, Π , e as variáveis são os graus de liberdade,

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}' d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Gamma. \quad (3.16)$$

A condição de contorno para os deslocamentos na superfície, Γ_u , conforme já citado é: $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^{\Gamma_u}$. Adicionando esta condição, por meio do método dos multiplicadores de Lagrange ao funcional para o problema de elasticidade, tem-se escrevendo os tensores na forma vetorial:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma \quad (3.17)$$

Ou tensorial

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \mathbf{D} : \nabla \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma. \quad (3.18)$$

Utilizando o princípio variacional, a Equação (3.17) se reduz a

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\lambda} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0. \quad (3.19)$$

ou

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\lambda} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0. \quad (3.20)$$

Os três primeiros termos da Equação (3.20) representam a forma fraca para o problema de elasticidade já mostrado na Equação (3.15), onde $\delta \mathbf{u}$ e \mathbf{u}' são variações infinitesimais de \mathbf{u} . A mesma analogia é válida para $\boldsymbol{\varepsilon}$. Os dois últimos termos são as condições de contorno, inseridas na equação da forma fraca por meio dos multiplicadores de Lagrange.

De forma a obter equações discretas a partir da Equação (3.20), aproxima-se \mathbf{u} e $\delta \mathbf{u}$ por analogia a Equação (2.61). Os multiplicadores de Lagrange, $\boldsymbol{\lambda}$, podem ser expressos por:

$$\boldsymbol{\lambda}(x) = N(s)\boldsymbol{\lambda}, \quad (3.21)$$

e

$$\delta \boldsymbol{\lambda}(x) = N(s)\delta \boldsymbol{\lambda}, \quad (3.22)$$

onde \mathbf{N} é um interpolador de Lagrange e s é um arco de comprimento ao longo do contorno. Substituído-se na Equação (3.20) as equações da função aproximação e as Equações (3.21) e (3.22), recai-se em:

$$\left(\int_{\Omega} (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}) \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \phi^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \phi^T \mathbf{t} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \phi^T \mathbf{N} \boldsymbol{\lambda} d\Gamma \right) \delta \mathbf{u} + \left(- \int_{\Gamma_u} \phi^T \mathbf{N} \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{N} \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \right) \delta \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

sendo \mathbf{K} a matriz de rigidez, \mathbf{G} a matriz de condição de contorno, \mathbf{u} o vetor deslocamento nodal, $\boldsymbol{\lambda}$ os multiplicadores de Lagrange, \mathbf{f} o vetor força e \mathbf{q} o vetor que armazena as condições de contorno,

3.2.1 Caso bidimensional

Para o caso bidimensional e tridimensional as matrizes e vetores da Eq. (3.24) podem ser escritos como:

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_J d\Omega, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{G}_{IK} = - \int_{\Gamma_u} \phi_I \cdot \mathbf{N}_K d\Gamma, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Omega} \phi_I^T \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \phi_I^T \cdot \mathbf{t} d\Gamma \quad (3.27)$$

e

$$\mathbf{q}_I = - \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_I^T \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Gamma. \quad (3.28)$$

Para o caso bidimensional, pode-se escrever:

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \phi_{I,y} \\ \phi_{I,y} & \phi_{I,x} \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{N}_I = \begin{bmatrix} N_I & 0 \\ 0 & N_I \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

onde \mathbf{D} é a matriz de elasticidade para o estado plano de tensão, E é o módulo de elasticidade ou módulo de Young e ν é o coeficiente de Poisson.

3.2.2 Caso unidimensional

Para o caso unidimensional o interpolador de Lagrange é unitário por não haver superfície de interpolarção e a matriz \mathbf{B} pertinente a derivada da função de forma pode ser escrita em notação vírgula como indicado na Equação (3.32).

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_x \phi_{I,x}^T E \phi_{J,x} dx \quad (3.32)$$

$$\mathbf{G}_{IK} = -\phi_K | \Gamma_{ud} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{f}_I = \int_x \phi_I^T \mathbf{b} dx + \phi_I^T \mathbf{t} |_{\Gamma_t} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{q}_I = -\bar{\mathbf{u}} \quad (3.35)$$

E é o módulo de elasticidade, e ϕ é a função de forma

3.3 DESCRIÇÃO DO CÓDIGO

3.3.1 Caso bidimensional

O programa resolve o problema de uma viga engastada com comprimento L , largura D e profundidade unitária sujeita a um carregamento fletor concentrado, P , no lado livre da viga, conforme representado na Figura 3.1.

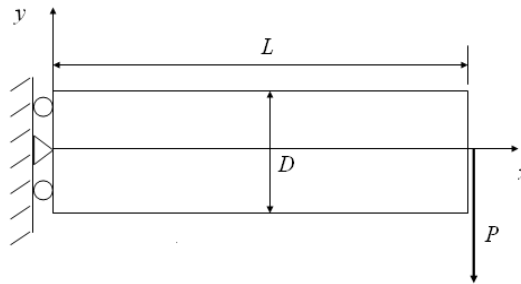


Figura 3.1 - Viga engastada com carregamento de flexão aplicado na extremidade livre.

Para um estado plano de tensões a solução exata deste problema é apresentada por Timoshenko e Goodier (1970). As deformações em x e y são, respectivamente, dadas por:

$$u_x = -\frac{Py}{6EI} \left[(6L - 3x)x + (2 + \nu) \left(y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \quad (3.36)$$

$$u_y = -\frac{P}{6EI} \left[3\nu y^2 (L - x) + (4 + 5\nu) \frac{D^2 x}{4} + (3L - x)x^2 \right] \quad (3.37)$$

Sendo P o carregamento máximo aplicado, E o módulo de elasticidade, x e y as coordenadas em x e y do ponto analisado e I o momento de inércia dado por:

$$I = \frac{D^3}{12}. \quad (3.38)$$

As tensões correspondentes aos deslocamentos (Equações (3.36) e (3.37)) são:

$$\sigma_x = -\frac{P(L - x)y}{I}, \quad (3.39)$$

$$\sigma_y = 0, \quad (3.40)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{P}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - y^2 \right). \quad (3.41)$$

A Figura 3.2 mostra a solução exata para o deslocamento em y calculada pela Equação (3.37).

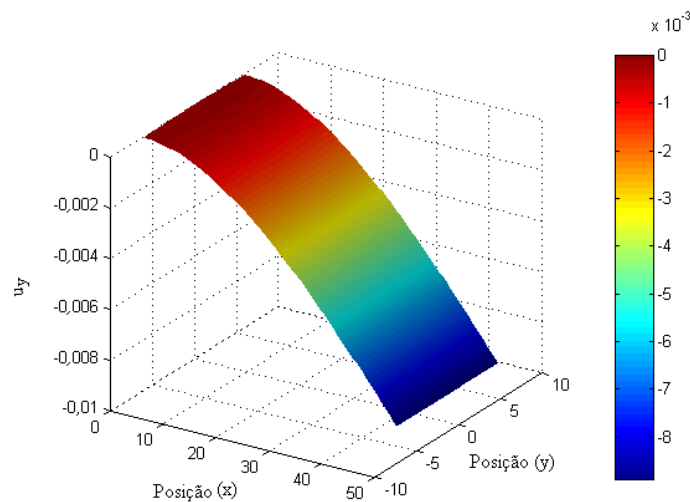


Figura 3.2 - Solução analítica para campo de deslocamento em y do problema proposto.

O primeiro passo para a simulação é escolher as dimensões da geometria a ser analisada ($D = 12$ e $L = 48$ Unidades de Comprimento, UC) bem como suas constantes materiais (módulo de elasticidade, $E = 30 \times 10^6$ unidades de pressão, coeficiente de Poisson, $\nu = 0,3$). A Figura 3.3 mostra o domínio Ω e o sistema de coordenadas utilizado.



Figura 3.3 - Dimensões (D igual a 12 e L igual a 48 unidades de comprimento) e sistema de coordenadas do domínio Ω .

Em seguida, deve-se arranjar nós no interior e no contorno do domínio. As coordenadas x e y destes nós são armazenadas em uma matriz. Para a geometria apresentada na Figura 3.3 é feita uma distribuição uniforme de nós com espaçamento na direção x de 3 UC e na direção y de 10 UC, conforme mostrado na Figura 3.4.

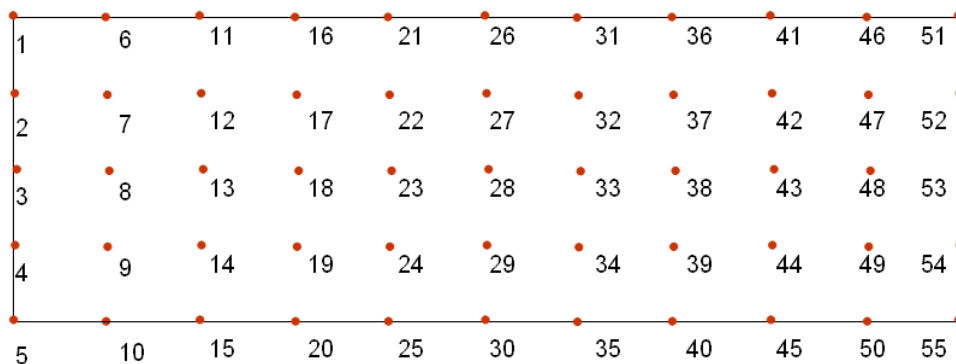


Figura 3.4 - Nós distribuídos regularmente no domínio (55 nós).

O EFG não é verdadeiramente sem malha pelo fato de precisar de uma malha de fundo para realizar a integração. A Figura 3.5 mostra uma malha de elementos retangulares

composta por 40 células de integração de fundo, as quais estão uniformemente distribuídas sobre o domínio. As conectividades destas células devem ser armazenadas.



Figura 3.5 - Células de integração para o EFG distribuídas sobre o domínio Ω .

Neste programa, cada célula utiliza 4 pontos de Gauss em cada direção para realizar o processo de integração. A combinação destes 4 pontos em cada direção gera 16 pontos amostrais de Gauss em cada uma das células. O peso, coordenadas e Jacobiano para cada um destes pontos é armazenado. A representação dos 640 pontos amostrais de Gauss (40 células \times 16 pontos amostrais por célula) é feita na Figura 3.6.

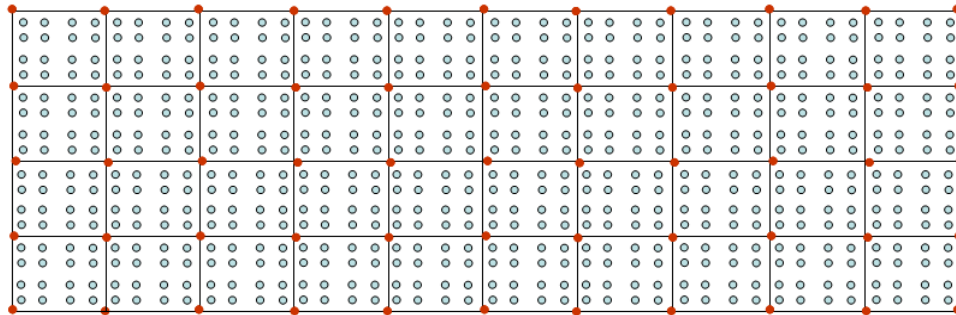


Figura 3.6 - Distribuição dos 16 pontos amostrais de Gauss em cada uma das 40 células de integração.

Deve-se então fazer a montagem da matriz de rigidez \mathbf{K} . Esta matriz é montada por dois laços. O laço externo é sobre todas as células da malha de fundo (*background mesh*) e o laço interno é executado sobre todos os pontos amostrais de Gauss da célula.

Para cada ponto amostral, deve-se:

- i. Determinar os pontos que fazem parte do seu domínio de influência - número de nós e quais nós pertencem ao domínio.
- ii. Calcular a função de forma e suas derivadas, Equações (2.61), (2.64) e (2.65).
- iii. Montar a matriz de \mathbf{B} (derivada da função de forma, Equações (2.66) e (2.67)).
- iv. Calcular da matriz de rigidez parcial.
- v. Calcular os graus de liberdade que pertencem ao domínio de influência do ponto amostral analisado (por meio do domínio de influência obtido).
- vi. Montar a matriz de rigidez \mathbf{K} global, Equação (3.25).

A Figura 3.7 mostra o domínio de influência do ponto amostral 640 o qual é composto por 16 nós: 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 49, 50, 52, 53, 54, 55 (numeração dos nós, Figura 3.4).

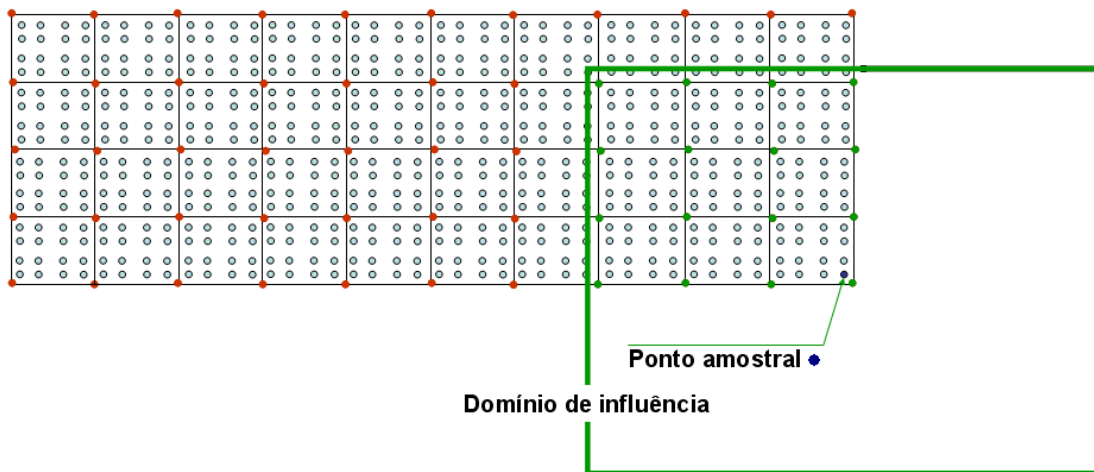


Figura 3.7 - Domínio de influência do ponto amostral de Gauss 640 (composto por 16 nós).

Após a montagem da matriz precisa-se analisar as condições de contorno impostas. Estas são de força e de restrição.

Para o contorno com força aplicada, deve-se:

- i. Ler de arquivo, armazenar número de nós e identificar os que possuem força aplicada. Como também, ler de arquivo e armazenar as coordenadas destes nós.

- ii. Posicionar os pontos amostrais de Gauss ao longo dos contornos que possuem força aplicada.

A Figura 3.8 mostra os 16 pontos de Gauss posicionados sobre o contorno, para o caso apresentado na Figura 3.6. O peso, coordenadas e jacobiano devem ser armazenados.

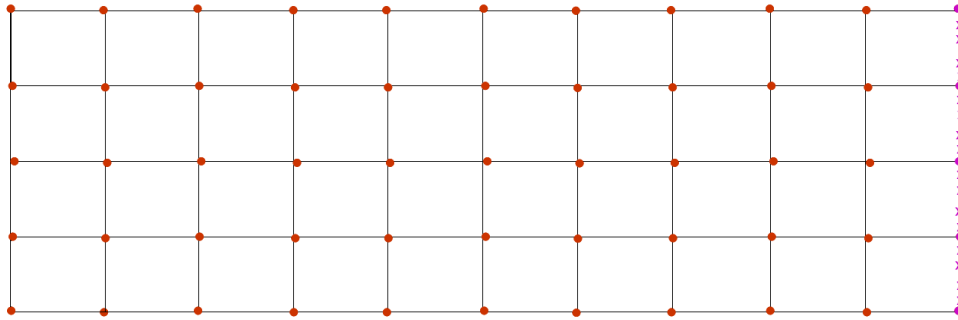


Figura 3.8 - Forças aplicadas no contorno: **x** pontos amostrais de Gauss e **•** nós do domínio.

Com os pontos amostrais de Gauss é possível fazer a integração das forças no contorno, da seguinte forma, Equação (3.27).

Para tanto para cada ponto amostral, deve-se:

- i. Determinar os nós que fazem parte do domínio
- ii. Calcular a função de forma para o ponto de Gauss, Equação (2.61). Calcular o valor da força (vetor \mathbf{t}) atuando no dm .
- iii. Adicionar ao vetor \mathbf{f} (Equação (3.27)) os valores calculados de \mathbf{t} e da função de forma relativos ao domínio do ponto amostral analisado.

A Figura 3.9 mostra o domínio de influência para o primeiro ponto de Gauss. O domínio deste ponto é formado pelos nós 36, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 49, 51, 52, 53, 54 (numeração dos nós, Figura 3.4).

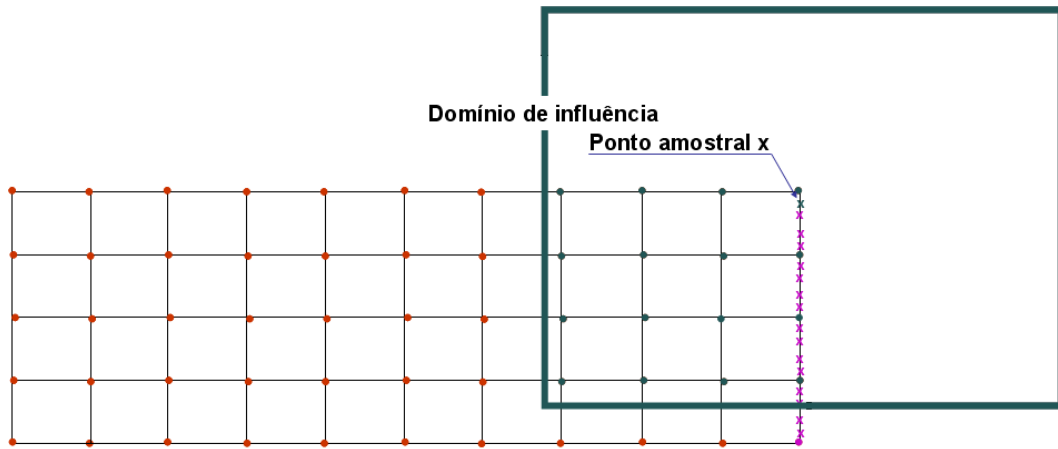


Figura 3.9 - Domínio de influência do primeiro ponto amostral de Gauss no contorno com força aplicada.

Para os contornos com restrição, deve-se:

- i. Ler de arquivo, armazenar o número de nós e identificar os que possuem restrição aplicada. Como também, ler de arquivo e armazenar as coordenadas destes nós.
- ii. Posicionar os pontos amostrais de Gauss ao longo do contorno que tem restrição aplicada.

A Figura 3.10 mostra os 16 pontos de Gauss colocados no contorno para o caso apresentado na Figura 3.4. O peso, coordenada e Jacobiano devem ser armazenados.

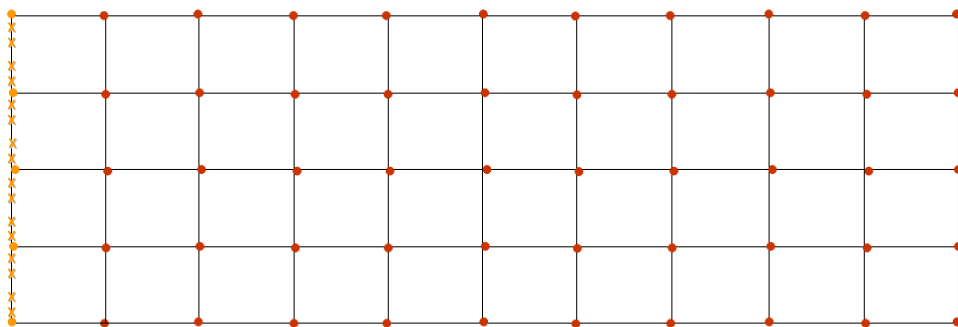


Figura 3.10 - Restrições aplicadas no contorno: **x** pontos amostrais de Gauss e **o** pontos do domínio.

Os pontos amostrais no contorno com restrição são utilizados para o cálculo do vetor \mathbf{q} , Equação (3.28), e matriz a \mathbf{G} , Equação (3.26). Para o cálculo de \mathbf{q} deve-se fazer:

Para cada ponto amostral:

- i. Calcular $\bar{\mathbf{u}}$ para o ponto amostral por meio das Equações (3.36) e (3.37).
- ii. Calcular os valores de interpolação da matriz \mathbf{N} . Esta matriz pondera os deslocamentos calculados nos pontos amostrais sobre os nós com restrição aplicada. Interpolação utilizada neste programa é linear.

Com relação ao cálculo da matriz \mathbf{G} , deve-se fazer:

Para cada ponto amostral:

- i. Determinar o domínio de influência. Calcular a função de forma, Equação (2.61).
- ii. Calcular a matriz de interpolação \mathbf{N} .

A Figura 3.11 mostra o domínio de influência do primeiro ponto amostral de Gauss que está no contorno com restrição aplicada. Os nós que pertencem a este domínio de influência são: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19 (numeração dos pontos, Figura 3.4).

Após montar as matrizes (\mathbf{K} e \mathbf{G}) e os vetores (\mathbf{f} , \mathbf{q} , \mathbf{u} e $\boldsymbol{\lambda}$) necessários para representação do sistema físico e imposição das condições de contorno (método dos multiplicadores de Lagrange) estrutura-se o sistema a ser solucionado conforme indicado na Equação (3.24).

A solução do sistema de equações é feita pelo método de decomposição LU. Este método foi implementado com pivoteamento pelo fato do método dos multiplicadores de Lagrange introduzirem valores nulos na diagonal principal da matriz. Após a solução, um novo laço sobre os nós é feito de forma a obter os deslocamentos nodais.

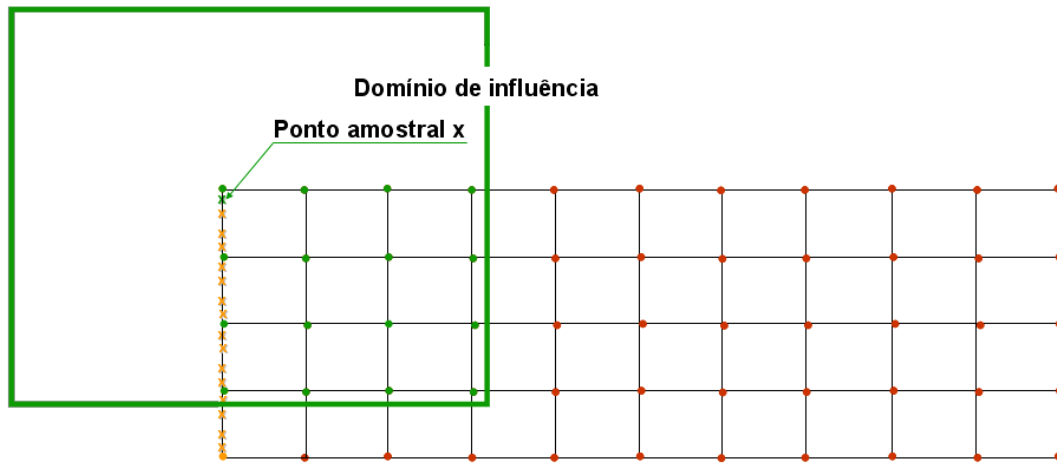


Figura 3.11 - Domínio de influência do primeiro ponto amostral de Gauss no contorno com restrição aplicada.

Para cada nó do domínio, deve-se:

- i. Determinar os nós que fazem parte do seu domínio de influência.
- ii. Calcular a função de forma e suas derivadas, Equações (2.61), (2.64) e (2.65).
- iii. Fazer o produto da função de forma e a solução do sistema para o nó em análise.

A Figura 3.12 mostra o domínio de influência do primeiro nó, o qual é composto por 16 nós: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19 (numeração dos nós ver Figura 3.4).

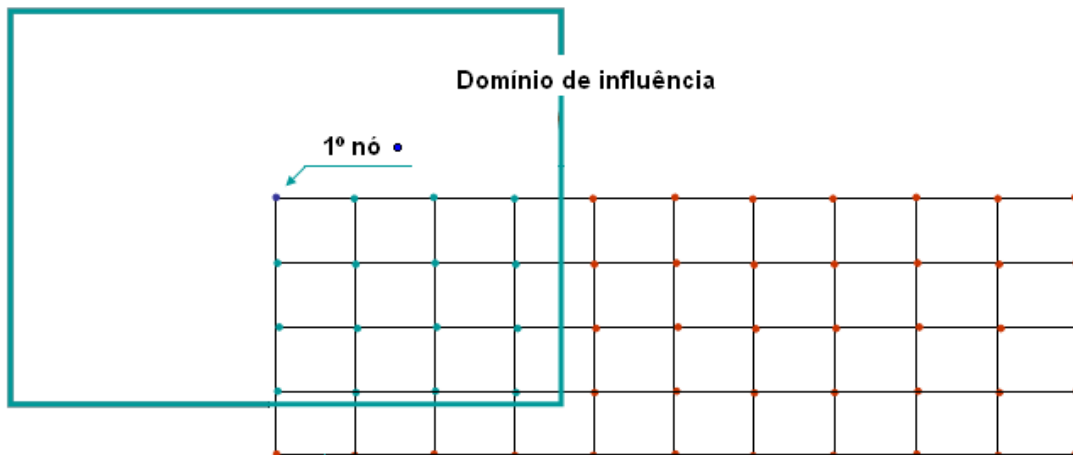


Figura 3.12 - Domínio de influência do primeiro nó do domínio.

Por último, é efetuado o cálculo das tensões. Para isto, é feito um laço sobre os pontos amostrais de Gauss e pontos nodais. Em geral, as tensões são calculadas nos pontos

amostrais de Gauss, contudo a visualização destes campos se torna mais difícil no método sem malha. Assim, foi implementado um laço sobre os pontos do domínio e os resultados obtidos com esta modificação estão apresentados no Capítulo 5. O algoritmo para o problema de elasticidade linear utilizando o método EFG pode ser resumido nas seguintes etapas:

- i. Leitura das dimensões e propriedades do material (E, ν).
- ii. Cálculo da matriz de elasticidade para o estado plano de tensões.
- iii. Estabelecimento das coordenadas nodais (leitura de arquivo).
- iv. Estabelecimento de uma malha de fundo (leitura de arquivo das coordenadas das conectividades).
- v. Leitura do fator de escala d_{max} .
- vi. Domínio de influência do ponto ou nó em análise: leitura do número de nós mínimo que deve estar na vizinhança (dm com tamanho variável) ou cálculo de domínio de influência com d_{max} e distância entre nós (caso uniforme) (domínio com tamanho constante).
- vii. Estabelecimento das células de quadratura no domínio.
- viii. Estabelecimento dos pesos e Jacobiano para os pontos de Gauss de cada célula.
- ix. Laço sobre os pontos de Gauss:
 - a. Determinação dos nós na vizinhança dos pontos amostrais de Gauss.
 - b. Determinação dos pesos, funções de forma e derivadas para todos os nós.
 - c. Montagem da matriz \mathbf{B} (derivada de função de forma).
 - d. Adição das contribuições à matriz \mathbf{K} .
- x. Leitura dos nós no contorno de tração (coordenada, quantidade de nós)
- xi. Leitura dos nós com restrição aplicada (contorno essencial).
- xii. Estabelecimento dos pontos de Gauss no contorno de tração e contorno essencial.
- xiii. Integração das forças no contorno de tração para formar o vetor \mathbf{f} .
- xiv. Integração dos multiplicadores de Lagrange no contorno essencial para formar a matriz \mathbf{G} e o vetor \mathbf{q} .
- xv. Imposição das condições de contorno essencial utilizando os multiplicados de Lagrange.
- xvi. Solução para os parâmetros nodais \mathbf{u}_I (método LU).
- xvii. Laço sobre os nós do domínio:
 - a. Determinação dos deslocamentos numéricos e analíticos para os nós do domínio.

- b. Cálculo do erro relativo.
- xviii. Laço sobre os pontos de Gauss:
 - a. Determinação das tensões numérica e analítica nos pontos de quadratura.
 - b. Cálculo da norma do erro pela energia de deformação.
- xix. Laço sobre os nós do domínio:
 - a. Determinação das tensões numérica e analítica nos pontos nodais
 - b. Cálculo da norma da energia.
 - c. Cálculo do erro relativo.

3.3.2 Caso unidimensional

O caso estudado trata de uma barra unidimensional sujeita a esforços de tração e que possui uma de suas extremidades fixa (origem), conforme a mostrado na Figura 3.13.

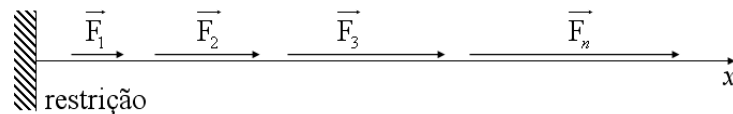


Figura 3.13 - Barra unidimensional com condições de contorno de força (distribuída e não-uniforme) e restrição (engaste).

A Figura 3.14 esquematiza a distribuição uniforme de 11 nós em uma barra com comprimento unitário. Cada célula de integração (distância entre nós) possui um único ponto de Gauss para o cálculo da matriz de rigidez, \mathbf{K} . Para aplicar a condição de restrição em uma das extremidades da barra, um ponto de Gauss é posicionado na origem do sistema de coordenadas ($x = 0$). As condições de contorno de força são aplicadas na barra de forma distribuída e não-uniforme, nos mesmos pontos de integração da matriz \mathbf{K} . Cada carregamento, em unidade de força, tem valor igual à respectiva coordenada do ponto de integração no domínio. A Figura 3.15 mostra as coordenadas dos nós e dos pontos de Gauss.

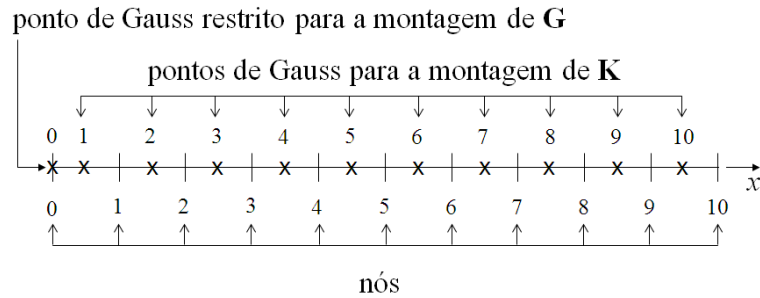


Figura 3.14 - Barra com distribuição uniforme de nós e pontos de Gauss.

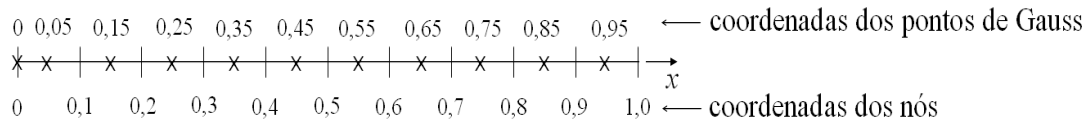


Figura 3.15 - Coordenadas dos 11 nós e 11 pontos de Gauss na barra com comprimento unitário: distribuição uniforme.

O funcionamento do código pode ser resumido no seguinte algoritmo:

1. Leitura do módulo de elasticidade e fator de escala do domínio (d_{max}).
2. Posicionamento dos nós no domínio e armazenamento de suas coordenadas.
3. Definição do número de pontos de integração (pontos de Gauss) e seu posicionamento nas células de integração (armazenar peso, jacobiano e coordenadas dos pontos de Gauss).
4. Laço sobre os pontos de Gauss (pontos de 1 a 10, Figura 3.14) para montagem da matriz de rigidez (\mathbf{K}) e do vetor (\mathbf{f}):
 - a. Cálculo de dm para cada ponto de integração.
 - b. Cálculo do peso (e derivada função peso) de cada nó pertencente ao domínio de influência (dm) de cada ponto de integração.
 - c. Cálculo da função de forma e suas derivadas.
 - d. Montagem da matriz de rigidez \mathbf{K} (Equação (3.32)).
 - e. Montagem do vetor força \mathbf{f} (Equação (3.34)): forças aplicadas ao longo da barra.
5. Cálculo de \mathbf{G} (ponto de Gauss 0, Equação (3.33)).
6. Cálculo de \mathbf{q} (ponto de Gauss 0, Equação (3.35)).
7. Solução do sistema de equações (Equação (3.24)): obtendo-se \mathbf{u} .

8. Laço sobre os nós do domínio:
 - a. Cálculo de dm para cada nó.
 - b. Cálculo do peso (e sua derivada) para cada nó pertencente a dm por meio da função de ponderação.
 - c. Cálculo da função de forma.
 - d. Cálculo do deslocamento (equação (2.44)).
9. Laço sobre os pontos de Gauss (ponto de 1 a 10, Figura 3.14).
 - a. Cálculo de dm para cada ponto de Gauss.
 - b. Cálculo do peso e sua derivada para cada nó do domínio de influência do ponto de integração analisado.
 - c. Cálculo da função de forma e derivada.
 - d. Cálculo da deformação (produto da solução do sistema pela derivada da função de forma).

4 ANÁLISE UNIDIMENSIONAL

Analisar os parâmetros de ajuste em uma aplicação unidimensional é mais simples, uma vez que as curvas das funções de forma e de suas derivadas podem ser facilmente traçadas. Esta análise serve como ponto de partida para outros trabalhos, tendo em vista que o processo de ajuste é bastante laborioso. Nota-se, ainda, que a aplicação unidimensional serve de base para a simulação de problemas mais complexos.

Na análise realizada verificam-se os parâmetros que afetam a construção da função de forma e de sua derivada, ou seja, o tipo de função peso utilizada, o tamanho do domínio de influência, o número de nós no domínio (concentração nodal), o critério para construção do domínio de influência (c_x definido por busca ou espaçamento nodal) e o tipo da distribuição nodal (uniforme ou não-uniforme). Ao analisar os parâmetros do EFG buscase determinar faixas de valores para alguns destes (p. ex. tamanho do domínio de influência), bem com determinar quais são mais adequados ao EFG (p. ex. tipo da função peso).

Os resultados do caso unidimensional são pertinentes a uma barra com comprimento e módulo de Young unitários. Esta é sujeita a esforços distribuídos de tração e possui uma de suas extremidades fixa, conforme mostrado na Figura 3.13.

Para a verificação dos resultados utiliza-se a norma de erro de um campo qualquer a , dada por:

$$\text{Norma erro } a = \sqrt{\sum_I (a_{\text{exato } I} - a_{\text{numérico } I})^2}, \quad (4.1)$$

A análise unidimensional pode ser dividida de acordo com o tipo de distribuição de nós que pode ser uniforme e não-uniforme. Nota-se que os resultados aqui apresentados seguem o algoritmo da seção 3.3.2. Neste capítulo, por fim, são feitas consideração a respeito destes resultados unidimensionais. O Apêndice A mostra uma comparação entre os resultados do EFG e do MEF. Villa Verde *et. al.* (2008b, 2008c, 2008d e 2008e) mostram alguns resultados tratados para o caso unidimensional.

4.1 DISTRIBUIÇÃO UNIFORME DE NÓS

Para distribuição uniforme de nós foram feitos testes variando o fator de escala d_{max} , o tipo da função peso (*spline* e cônica) e o número de nós no domínio (concentração nodal). Para este tipo de distribuição nodal a distância c_x pode ser igual ao valor do espaçamento entre nós ou calculada com base nos, k , nós mais próximos ($dm = c_x \times d_{max}$).

4.1.1 Caso1: Domínio de influência, dm , com tamanho constante

Para uma distribuição nodal uniforme e domínio de influência com tamanho constante, c_{xl} é tomada com valor igual ao espaçamento nodal. Os testes realizados variam o valor do fator de escala d_{max} , o tipo da função peso (*spline* e cônica) e o número de nós no domínio. Para um domínio com 11 nós, a Figura 4.1 apresenta o número e o percentual de nós por domínio de influência pertinentes ao laço da integração da matriz \mathbf{K} e montagem de \mathbf{G} e \mathbf{q} , ou seja, passos 4, 5 e 6 do algoritmo mostrado na seção 3.3.2. A Tabela 4.1 mostra, para este mesmo domínio, o valor de dm associado a cada fator d_{max} utilizado. Estes valores independem da função peso utilizada.

Tabela 4.1 - Valores de dm , em unidades de comprimento, usados no cálculo do deslocamento e das matrizes \mathbf{K} e \mathbf{G} , para um domínio com 11 nós.

	$d_{max} 1,5$	$d_{max} 2,0$	$d_{max} 2,5$	$d_{max} 3,0$	$d_{max} 3,5$	$d_{max} 4,0$
Dm	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40

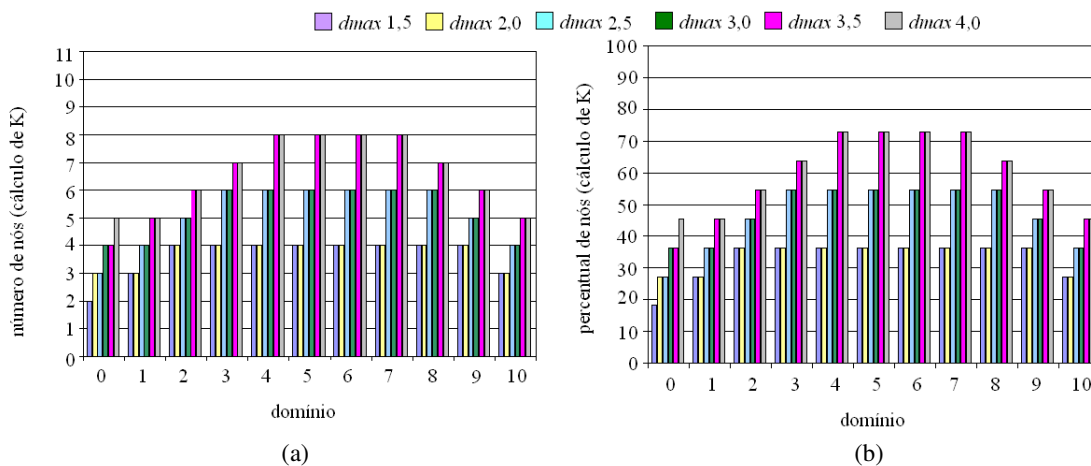


Figura 4.1 - (a) Número e (b) percentual de nós no domínio de influência utilizados na integração de \mathbf{K} para um domínio com 11 nós e $d_{max} = 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5$ e $4,0$.

As matrizes \mathbf{G} e \mathbf{K} são montadas, respectivamente, com base nos valores da função de forma e de sua derivada calculados sobre os pontos de Gauss, Equações (3.32) e (3.33).

A Figura 4.2a mostra o peso atribuído a cada um dos onze nós dentro do domínio, para função peso cúbica *spline* e d_{max} igual a 1,5. A derivada da função peso é mostrada na Figura 4.2b. A função de forma e sua derivada são apresentadas, respectivamente, na Figura 4.2c e na Figura 4.2d. A Figura 4.3 apresenta o comportamento das funções peso e de forma empregando o fator de escala d_{max} igual a 4,0.

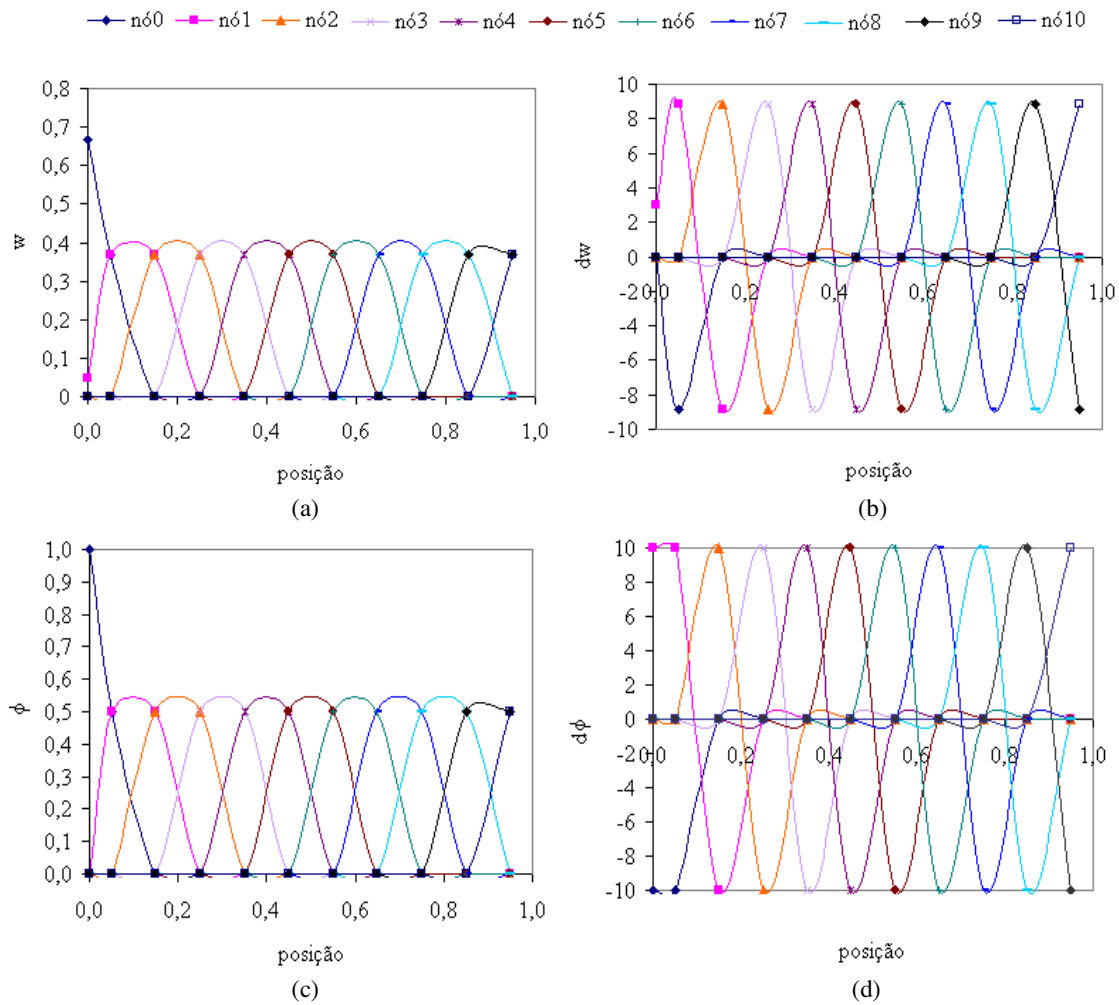


Figura 4.2 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada para os 11 nós do domínio durante a integração de \mathbf{K} : função peso cúbica e d_{max} igual a 1,5.

De acordo com a Equação (2.84), à medida que o valor de dm aumenta, diminui o valor de r (raio normalizado por dm) para um dado nó e, em consequência, aumenta a amplitude

máxima das funções peso (Equação (2.74) a (2.80)) conforme mostrado na Figura 4.2a e na Figura 4.3a. A função peso associada a cada nó também tem um aumento da sua região de influência no domínio com o aumento de dm . A derivada da função peso em relação a x ($(dw/dr)(dr/dx)$) tem sua amplitude diminuída pelo fato de ser dividida por dm , Figura 4.2b e Figura 4.3b. Os valores das funções de forma (Figura 4.2c e Figura 4.3c) e de suas derivadas (Figura 4.2d e Figura 4.3d), pertinentes a cada nó do domínio, têm suas amplitudes diminuídas com o aumento de d_{max} . Isso porque, a matriz de momento \mathbf{A} é diretamente relacionada a w , que tem seus valores aumentados (amplitude e alargamento da base). Contudo, a função de forma, Equação (2.61), é calculada com a inversa de \mathbf{A} , que têm seus valores decrescidos com o aumento de d_{max} .

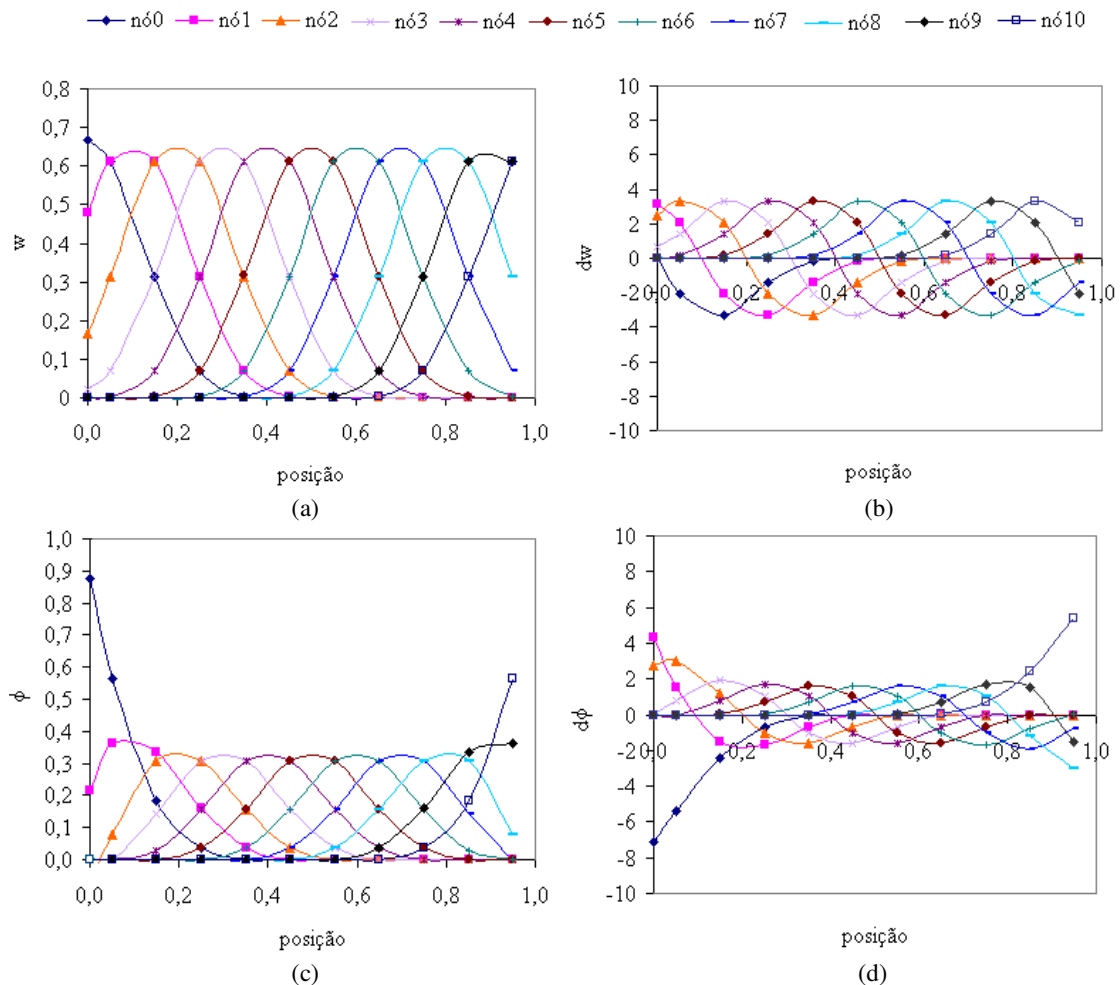


Figura 4.3 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) funções de forma e (d) sua derivada para os 11 nós do domínio durante a integração de \mathbf{K} : função peso cúbica e d_{max} igual a 4,0.

A Figura 4.4 mostra para os nós 0, 1, 5, 9 e 10, d_{max} igual a 1,5 e funções peso *spline* (cúbica, quártica e quinta ordem) e cônica1 (k igual a 1), o comportamento da função peso, Figura 4.4a, e da função de forma, Figura 4.4c, bem como de suas respectivas derivadas, Figura 4.4b e Figura 4.4d. A Figura 4.5 mostra os resultados para d_{max} igual a 4,0.

Conforme os resultados apresentados na Figura 4.4c, as funções de forma possuem o mesmo comportamento, para todas as funções peso testadas, quando d_{max} é igual a 1,5. Por outro lado, a sua derivada mostra-se adequada apenas para as funções *spline*, Figura 4.4d. Para d_{max} igual a 4,0, a função peso cônica é a que apresenta menor decaimento em suas ponderações (Figura 4.5a) e no valor da função de forma (Figura 4.5c) para um dado nó. Assim, as derivadas das funções peso e de forma tornam-se mais planas (achatadas) para um determinado nó quando funções cônicas são empregadas ao invés de funções *spline*.

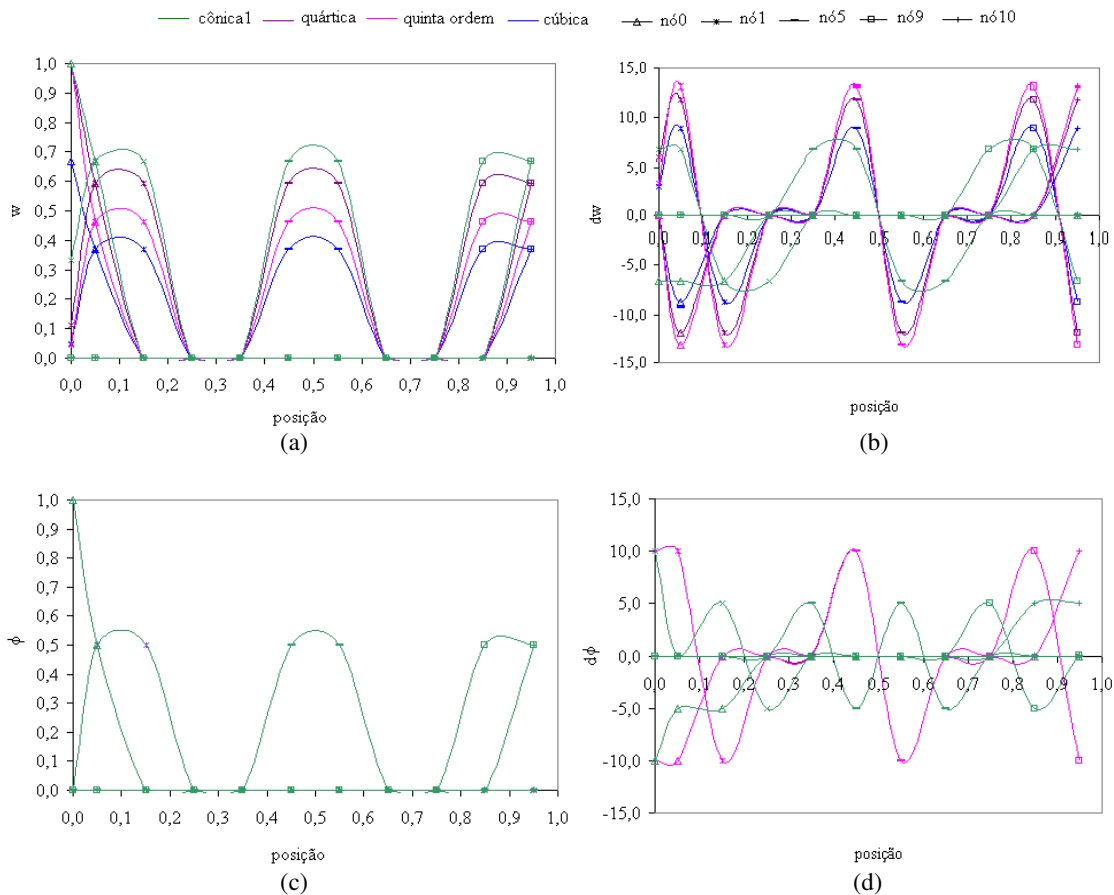


Figura 4.4 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada pertinentes aos nós 0, 1, 5, 9 e 10 do domínio, para d_{max} igual a 1,5 e funções peso cúbica, quártica, quinta ordem e cônica1.

A Figura 4.6 mostra a solução do sistema sem os valores dos multiplicadores de Lagrange para $d_{max} = 1,5; 2,5; 3,5$ e $4,0$ e para as funções peso cúbica, quártica, quinta ordem (Figura 4.6a) e cônicas de primeira e segunda ordem (Figura 4.6b). As respostas obtidas com as funções *spline* e cônicas são mostradas em gráficos distintos, pelo fato das funções cônicas apresentarem uma maior faixa de valores em suas soluções. Nota-se que mesmo com apenas a inclusão das respostas obtidas com a função cônica2 ocorre a impossibilidade de visualização do comportamento das soluções geradas com as funções *spline*.

As variações na solução da matriz global são decorrentes de alterações na função de forma e sua derivada, visto que a matriz de rigidez, \mathbf{K} , é relacionada com a derivada da função de forma e a matriz \mathbf{G} é construída com a função de forma.

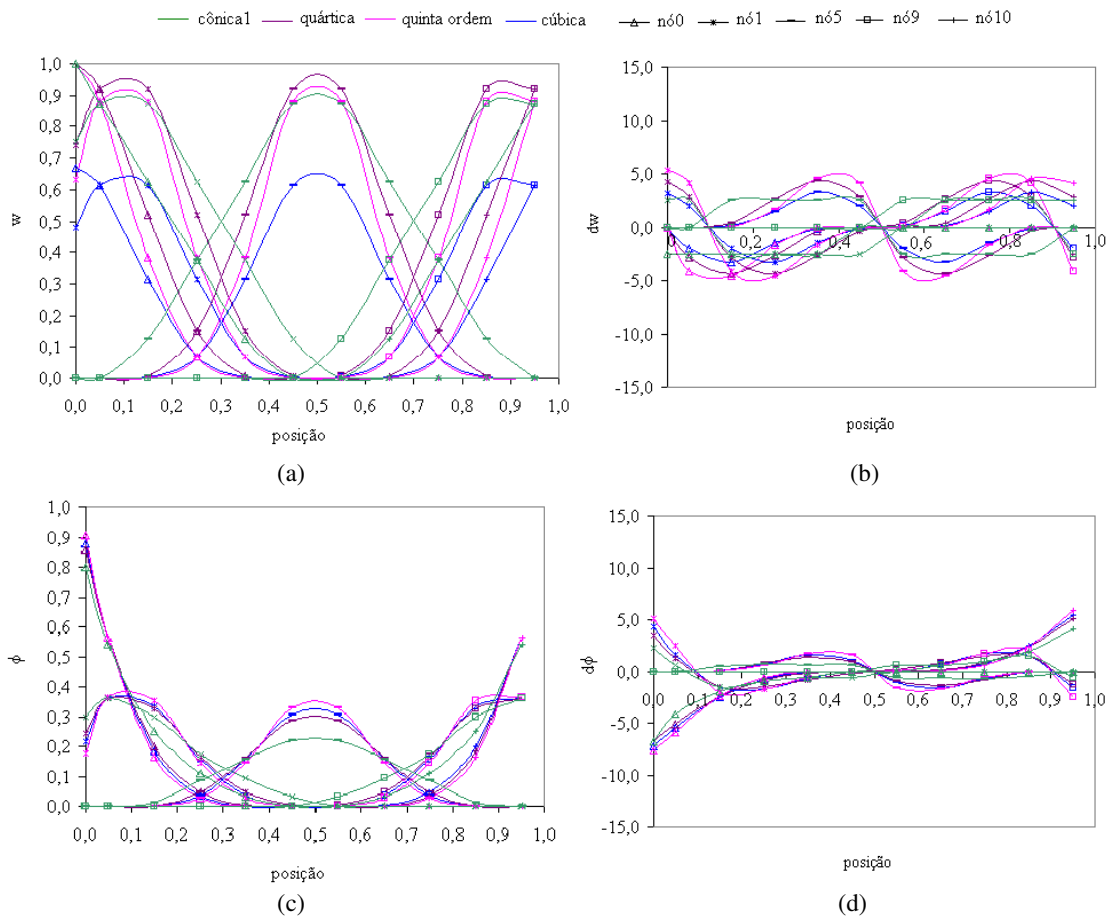


Figura 4.5 - (a) Função peso e (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada pertinentes aos nós 0, 1, 5, 9 e 10 do domínio, para d_{max} igual a 4,0 e funções peso cúbica, quártica, quinta ordem e cônica1.

A solução do sistema, empregando as funções *spline*, oscila nitidamente para a função cúbica quando d_{max} é igual a 3,5 e 4,0, conforme mostrado na Figura 4.6a. Para as funções cônicas as respostas oscilam consideravelmente em d_{max} igual a 2,5, para a função cônica1, Figura 4.6b.

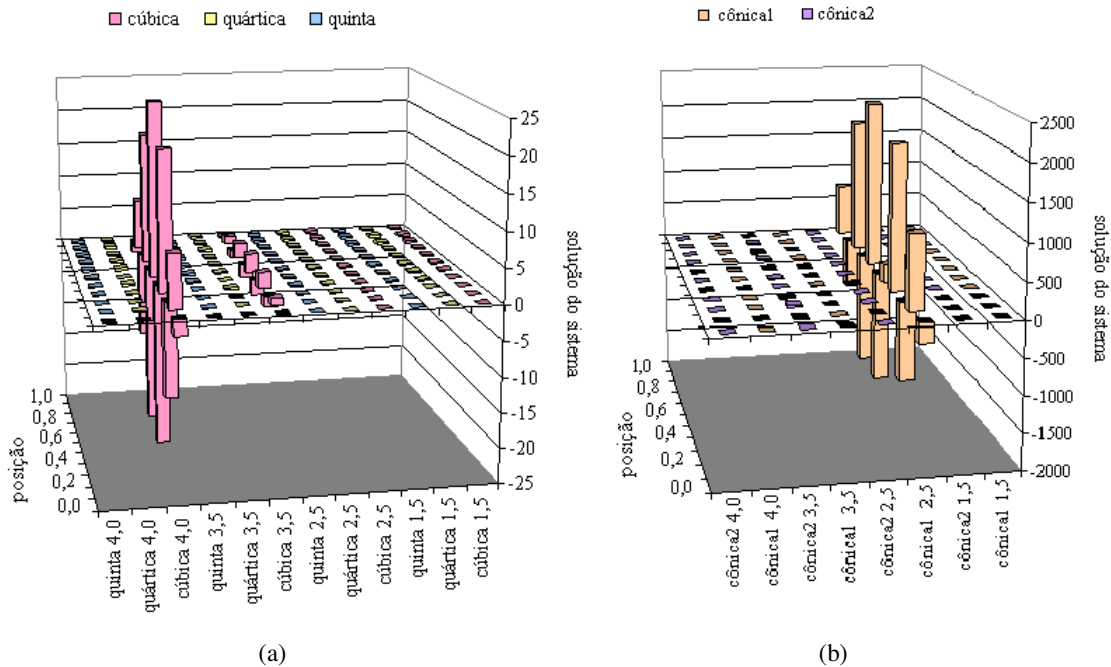


Figura 4.6 - Solução do sistema de equações para (a) três funções *spline* e (b) duas funções cônicas, para d_{max} igual a 1,5; 2,5; 3,5 e 4,0.

O deslocamento é calculado pela Equação (2.62), deste modo, deve-se computar a função de forma centrada em cada nó do domínio. A Figura 4.7 mostra o número e o percentual de nós considerados nos onze domínios de influência utilizados no cálculo do deslocamento. Estes valores independem da função peso utilizada.

A Figura 4.8 e a Figura 4.9 apresentam, para cada nó, o comportamento da função de forma e peso cúbica, bem como de suas derivadas, utilizando, respectivamente, d_{max} igual a 1,5 e 4,0. Diferentemente do constatado durante a integração de \mathbf{K} , a função peso neste caso não apresenta aumento em sua amplitude com o acréscimo de d_{max} , pelo fato do domínio de influência ter seu centro localizado sobre um nó, local onde a função tem sempre valor máximo.

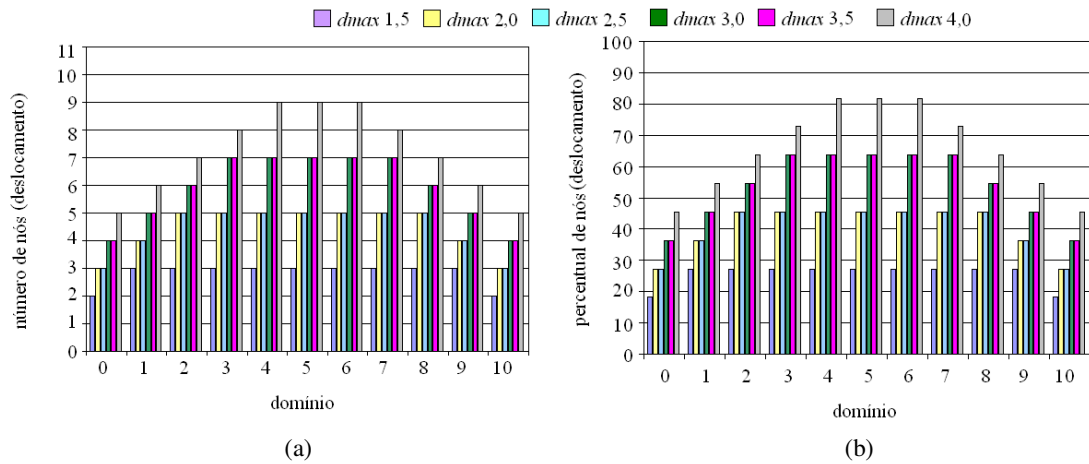


Figura 4.7 - (a) Número e (b) percentual de nós no domínio de influência centrados no nó empregando domínio com 11 nós e d_{max} igual a 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5 e 4,0.

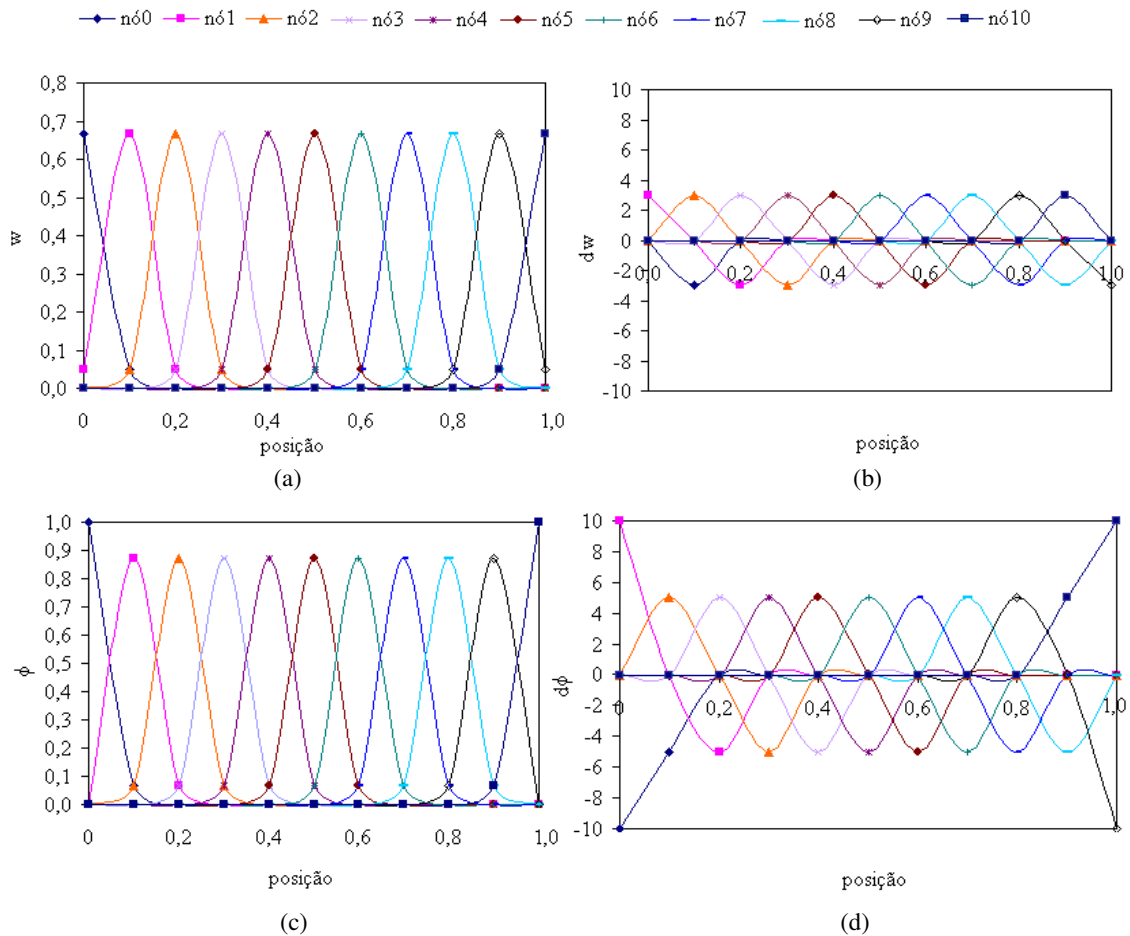


Figura 4.8 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada pertinentes os 11 nós do domínio, no cálculo do deslocamento: função cúbica e d_{max} igual a

1,5.

A Figura 4.10a e a Figura 4.11 mostram, em função de d_{max} , os valores da função de forma obtidos em cada domínio de influência para os nós 0, 1, 5, 9 e 10, utilizando a função peso cúbica. A Figura 4.10b mostra a derivada da função de forma para os mesmos nós e valores de d_{max} apresentados na Figura 4.10a. A função de forma para cada domínio de influência é uma partição da unidade. Assim, quanto maior o domínio de influência, em mais partes a função de forma é desmembrada e seus termos tornam-se menores, ocorrendo um achatamento e um alargamento das curvas com o aumento de d_{max} .

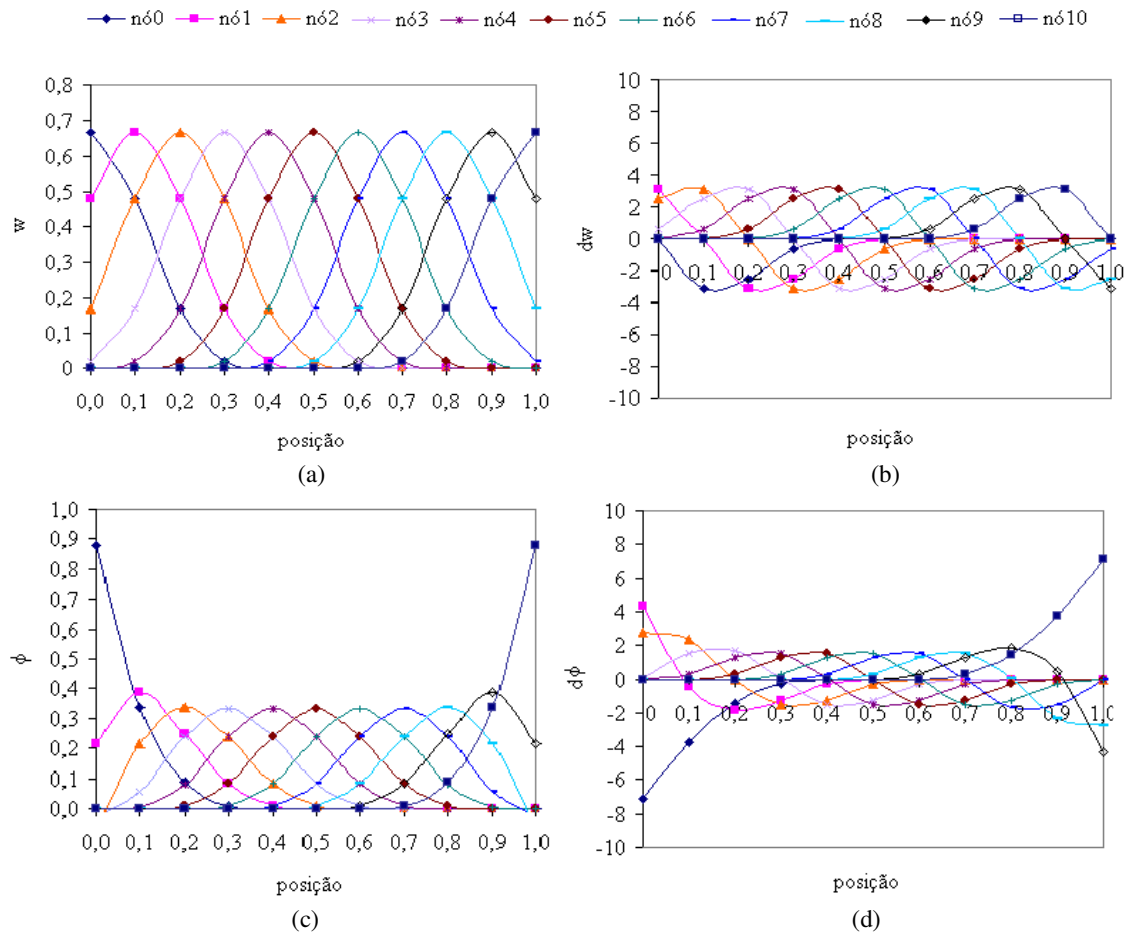


Figura 4.9 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada pertinentes os 11 nós do domínio, no cálculo do deslocamento: função cúbica e d_{max} igual a 4,0.

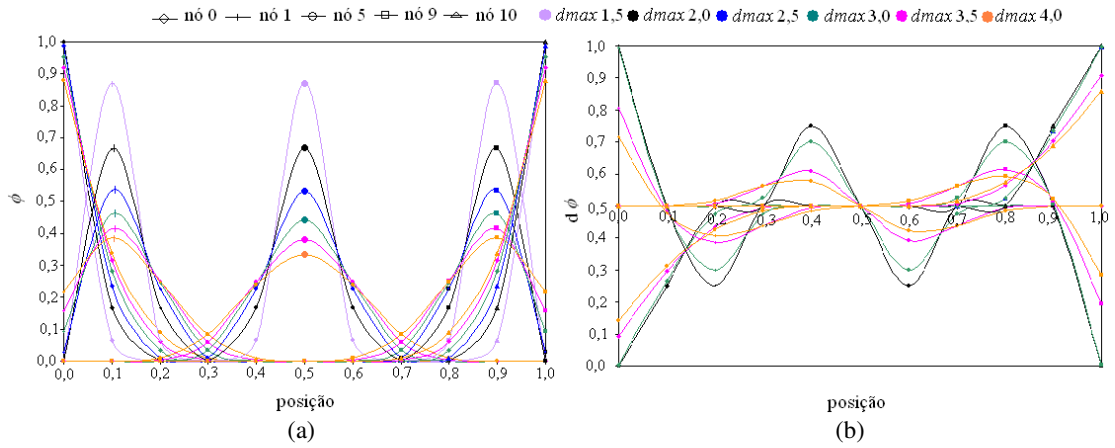


Figura 4.10 - (a) Função de forma e (b) sua derivada nos nós 0, 1, 5, 9 e 10, para $d_{max} = 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5$ e $4,0$ empregando a função peso cúbica *spline*.

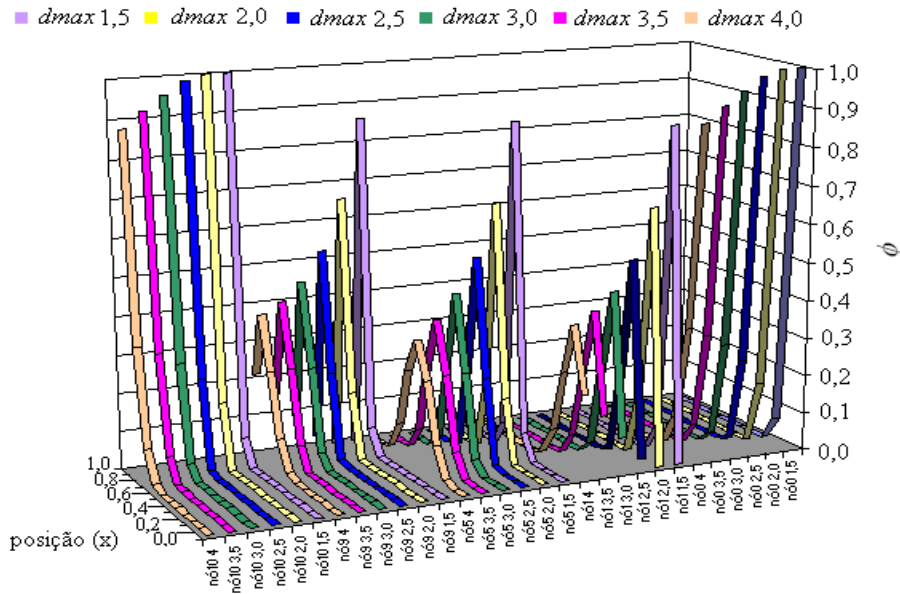


Figura 4.11 - Representação dos valores da função de forma nos nós 0, 1, 5, 9 e 10, para $d_{max} = 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5$ e $4,0$; domínio com 11 nós e função peso cúbica *spline*.

A comparação entre os valores exatos e numéricos do campo deslocamento, para um domínio com 11 nós, está mostrada na Figura 4.12. As respostas obtidas com as funções *spline*, Figura 4.12a, não apresentam a mesma ordem de valores daquelas obtidas com as funções cônicas, Figura 4.12b, mesmo para a função cônica2. Desta forma, os valores deslocamento são apresentados em gráficos distintos para cada tipo de função.

Para as cinco funções peso testadas em um domínio com 11 nós, a Figura 4.13 mostra, em função de d_{max} , o número de condição da matriz global. Este número é calculado como sendo a razão entre o maior e o menor autovalor desta matriz. Observa-se que para uma dada função peso, os valores da solução do sistema, Figura 4.6, e do campo de deslocamento, Figura 4.12, seguem as oscilações mais acentuadas dos números de condição, Figura 4.13.

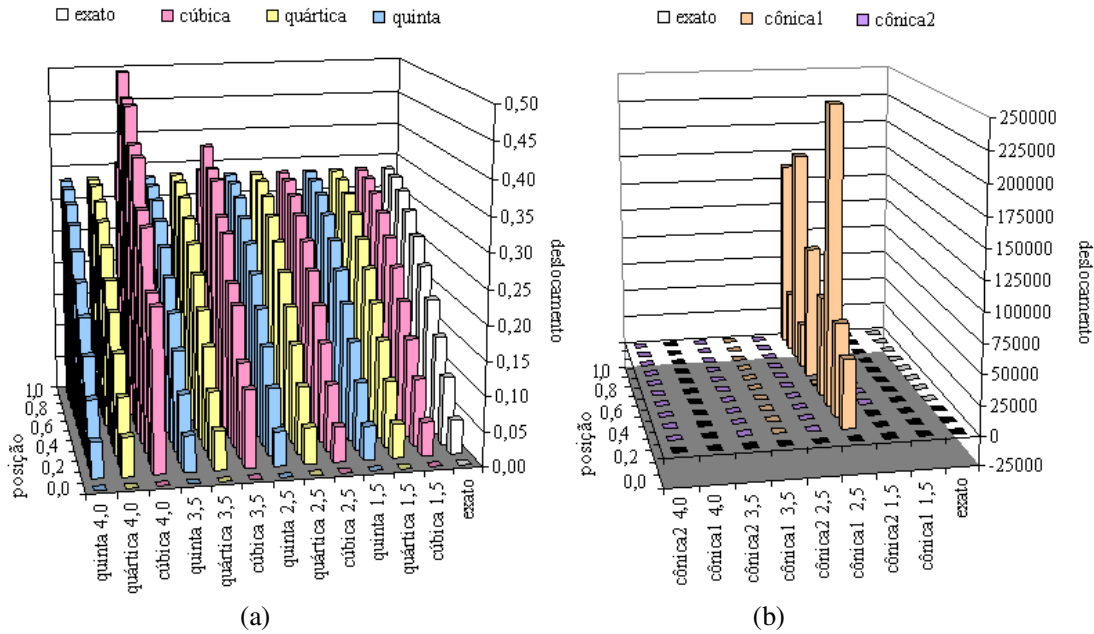


Figura 4.12 - Campo de deslocamento obtido com (a) três funções *spline* e (b) duas funções cônicas utilizando $d_{max} = 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5$ e $4,0$, em domínio com 11 nós.

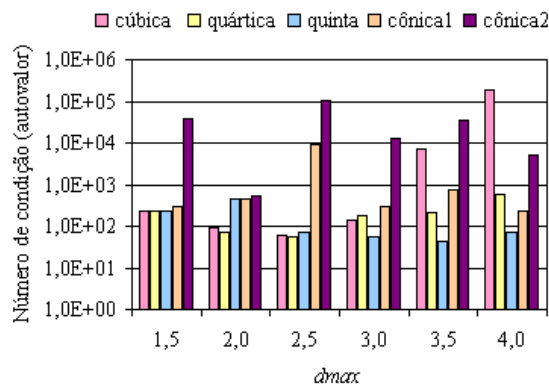


Figura 4.13 - Número de condição (razão entre autovalores) da matriz global para as cinco funções peso e valores de d_{max} testados, em um domínio com 11 nós.

As normas do erro dos campos de deslocamento e deformação estão mostradas, respectivamente, na Figura 4.14a e na Figura 4.14b. O comportamento do campo de deslocamento apresentado na Figura 4.12a é ratificado pela Figura 4.14a.

Os valores de deslocamento se afastam da solução exata, para a função peso cúbica, quando d_{max} é igual a 3,5 e 4,0 (Figura 4.12a). Isto corresponde a uma norma de erro do campo de deslocamento superior a 10^{-1} , conforme verificado na Figura 4.14a. Utilizando as respostas obtidas com a função cúbica, assume-se como adequadas, para qualquer campo, às normas de erro com valor até 10^{-1} . Desta forma, as respostas do campo de deslocamento são satisfatórias para as demais funções *spline* e valores de d_{max} testados.

As funções cônicas de primeira e segunda ordem mostram-se inadequadas, Figura 4.14b, para realizar as aproximações locais, mesmo satisfazendo as condições necessárias para ser uma função peso: suporte compacto, decaimento monotônico, etc. Tal inadequação está relacionada ao fato das funções cônicas não apresentarem um decaimento tão suave quanto o das funções *spline* testadas, conforme mostrado na Figura 4.15

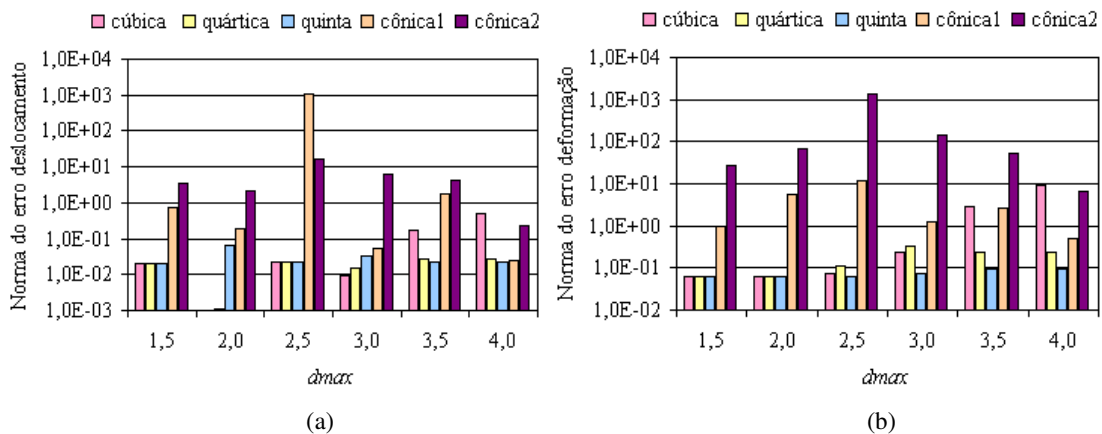


Figura 4.14 - Norma do erro dos campos de (a) deslocamento e de (b) deformação para as cinco funções peso e valores de d_{max} testados, em um domínio com 11 nós.

O campo de deformação é obtido pelo produto do vetor de parâmetros nodais, Figura 4.6, com o vetor que armazena as derivadas da função de forma, p. ex. Figura 4.2d e Figura 4.3d. Este campo apresenta, em geral, normas de erro maiores do que as encontradas pelo campo de deslocamento, conforme ilustrado na Figura 4.14.

A perda do efeito da localidade afeta de forma menos acentuada o valor da função de forma do que de sua derivada. Isso por duas razões. Primeiro, porque a suavidade da função peso fica evidenciada em suas derivadas, visto que a ordem desta derivada é decrescida, uma vez que as funções peso empregadas são polinomiais (cônica e *spline*). Assim, principalmente as respostas das funções cônicas são afetadas pelo fato de terem ordens mais baixas e serem menos suaves. Segundo, porque ocorre um achatamento da função de forma com o aumento de d_{max} , o que leva a uma diminuição nos valores da função no nó. O alargamento desta função permite atribuir aos nós valores da função de forma em regiões mais amplas do domínio. A derivada da função de forma também tende a se achatar e alargar, porém esta tem uma maior tendência a se tornar mais plana.

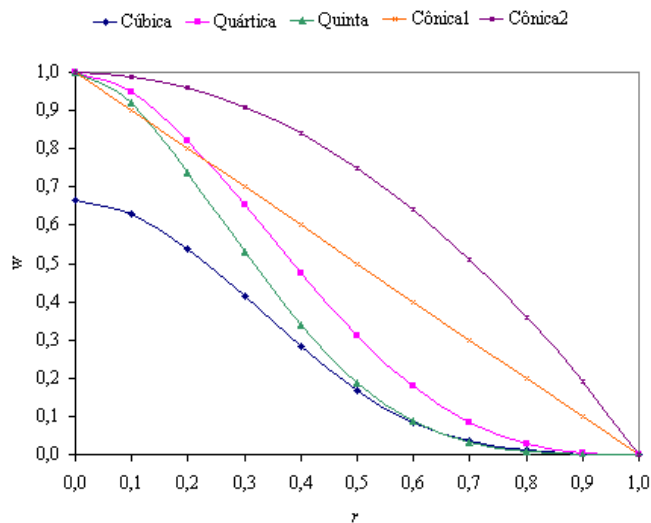


Figura 4.15 - Comportamento, em função de r , das funções peso: cúbica, quártica, quinta ordem, cônica1 e cônica2.

As variações dos valores das normas de erro (Figura 4.14) para cada função seguem, em geral, as variações do número de condição (Figura 4.13) da matriz global. Quanto maior for o número de condição, maior é a possibilidade de ocorrer uma instabilidade numérica. Assim, o erro relativo da solução pode-se tornar maior. Contudo, deve-se ressaltar que o comportamento dos campos não está somente associado à matriz global. Existem outros fatores relacionados, dentre estes: o vetor de termos independentes do sistema, a função de forma (cálculo do deslocamento) e sua derivada (cálculo da deformação). Para matrizes cujo número de condição é elevado, uma pequena oscilação no vetor de termos independente pode levar a um elevado erro relativo na solução do sistema.

A Figura 4.16 indica os valores dos números de condição da matriz global. A Figura 4.17 mostra as normas dos erros dos campos de deslocamento e de deformação, para os domínios com 11, 51 e 101 nós distribuídos uniformemente, função peso cúbica e $d_{max} = 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5$ e $4,0$.

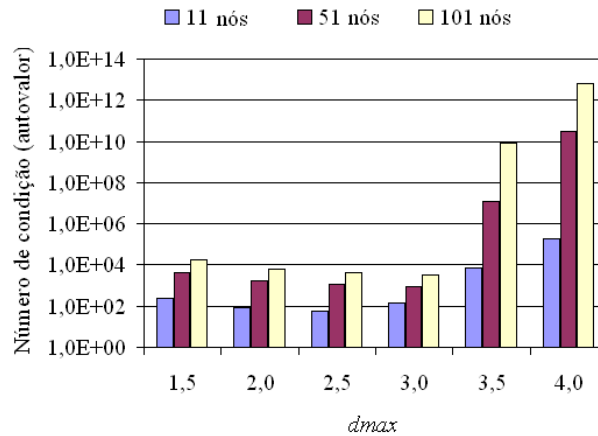


Figura 4.16 - Número de condição (razão entre autovalores) da matriz global para $d_{max} = 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5$ e $4,0$ e função peso cúbica, em domínios com 11, 51 e 101 nós.

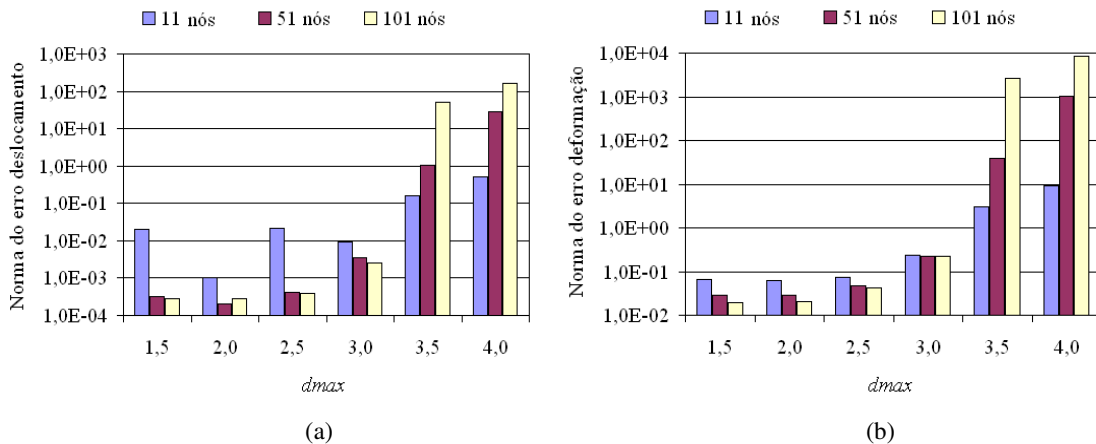


Figura 4.17 - Norma do erro dos campos de (a) deslocamento e de (b) deformação para $d_{max} = 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5$ e $4,0$ e função peso cúbica, em domínios com 11, 51 e 101 nós.

O aumento da concentração nodal (número de nós por unidade de comprimento) leva, em geral, a uma diminuição da norma do erro do deslocamento para domínios de influência com d_{max} até 3,0; Figura 4.17a. Por outro lado, o erro aumenta com o acréscimo de nós no domínio para d_{max} igual a 3,5 e 4,0. Isto porque, nos domínios de influência maiores ocorre certa perda da localidade nas aproximações, a qual passa a ser acumulada em mais

domínios de influência levando a um aumento do erro em domínios com uma concentração nodal maior.

O erro do campo de deslocamento continua menor do que o erro do campo de deformação (Figura 4.17b), mesmo com o aumento do número de nós, pelas razões supracitadas. Para cada concentração nodal (11, 51 e 101 nós), as variações das normas do erro de deslocamento e de deformação seguem, em geral, o comportamento do número de condição do sistema.

4.1.2 Caso2: Domínio de influência (dm) com tamanho variável

Este caso difere do anterior pelo fato de dm não ser constante durante toda a integração numérica. A escolha do tamanho do domínio de influência no caso1 é feita com base no espaçamento nodal, por outro lado, no caso2 o tamanho de dm é definido pelo critério dos k nós mais próximos (busca). Assim, c_x é igual à maior distância entre o ponto de Gauss/nó e os k nós mais próximos. Desta forma, os domínios de influência dos nós/pontos de Gauss mais próximos às extremidades passam a ser, em geral, diferentes dos dm dos nós/pontos internos à barra.

A Figura 4.18 mostra, para k igual a 2 e 3, o tamanho em unidade de comprimento de cada domínio de influência pertinente ao processo de integração da matriz global, para um domínio com 11 nós distribuídos uniformemente e $d_{max} = 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5$ e $4,0$. Nota-se que no caso1, os valores de dm são constantes e apresentados na Tabela 4.1. A Figura 4.19 e a Figura 4.20 mostram, respectivamente, para k igual a 2 e 3, o número e o percentual de nós associado a cada domínio de influência indicado na Figura 4.18.

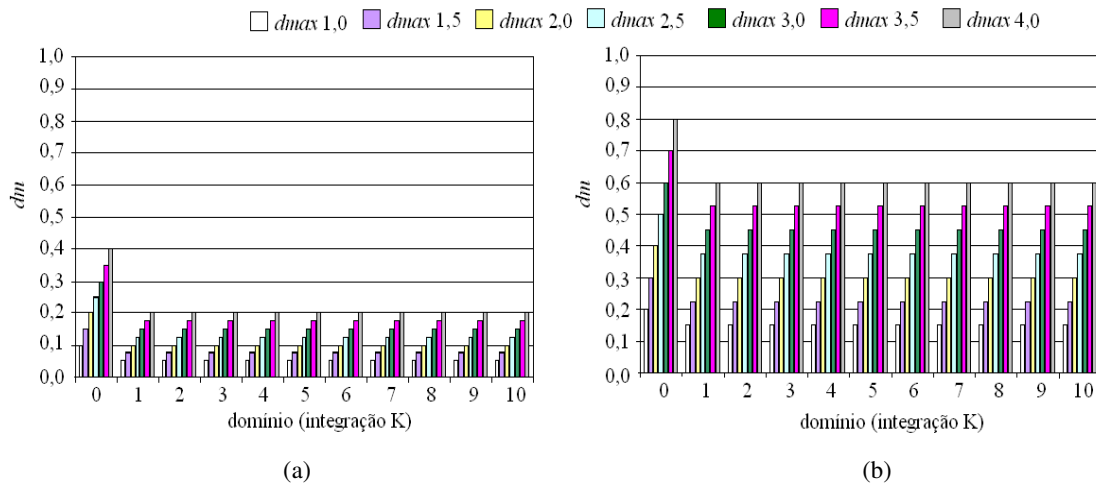


Figura 4.18 - Tamanho de dm , em unidade de comprimento, pertinente a montagem da matriz global em um domínio unitário com 11 nós e k igual a (a) 2 e (b) 3.

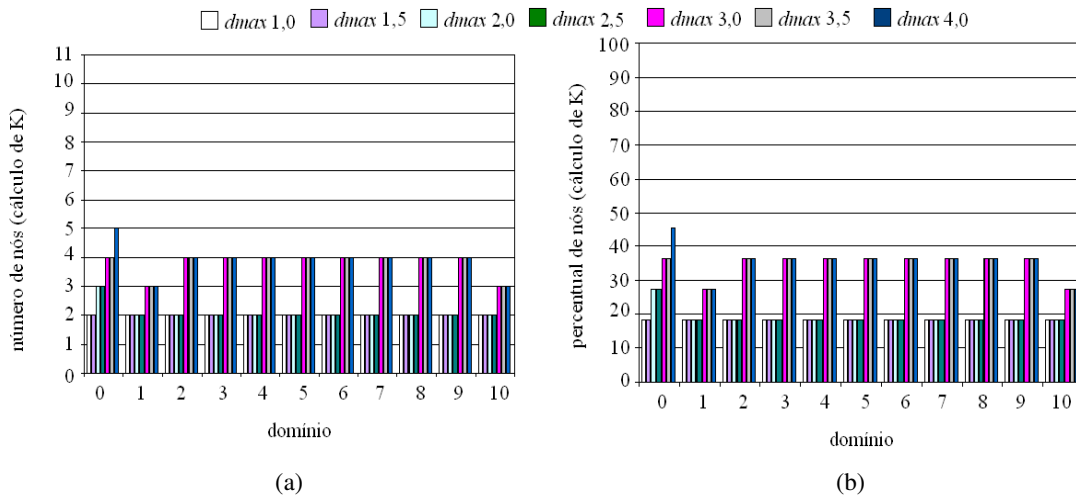


Figura 4.19 - (a) Número e (b) percentual de nós por domínio de influência pertinente a integração da matriz global, em um domínio com 11 nós distribuídos uniformemente e k igual a 2.

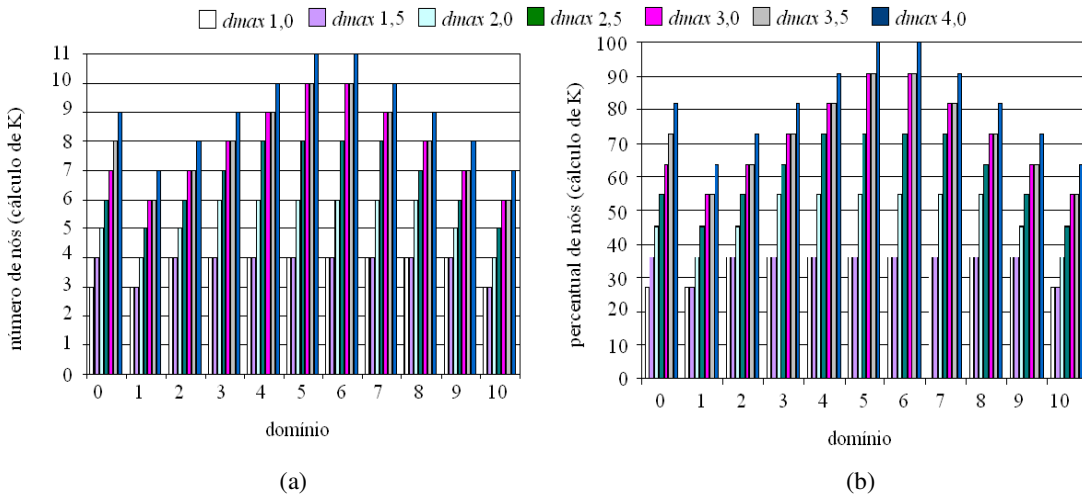


Figura 4.20 - (a) Número e (b) percentual de nós por domínio de influência pertinente a integração da matriz global, em um domínio com 11 nós distribuídos uniformemente e k igual a 3.

Observa-se na Figura 4.18 que, para k igual a 2, o valor máximo de dm é 0,2, exceto para o ponto de Gauss 0. Por outro lado, para k igual a 3, dm ultrapassa 0,2 quando d_{max} é igual a 1,5 (domínios internos). O acréscimo de um nó no critério de busca leva a variações consideráveis no tamanho do domínio de influência. Isso porque, para k igual a 2 o valor de c_x utilizado é a metade do espaçamento nodal (exceto para o ponto de Gauss 0), por outro lado quando k é igual a 3, c_x é uma vez e meia o espaçamento entre nós (exceto para o ponto de Gauss 0). Desta forma, mesmo para d_{max} igual a 4,0 não se verificam alterações nos domínios de influência que levem a um aumento considerável no número de nós ponderados nas aproximações quando k é igual a 2, conforme mostrado na Figura 4.19 e na Figura 4.20.

Verifica-se por meio da Figura 4.20, que nenhum nó é adicionado aos domínios de influência quando d_{max} deixa de ser unitário e passa a ter seu valor igual a 1,5. Para d_{max} igual a 1,0, todos os nós apresentam ponderação nula (exceto para o domínio de influência centrado no ponto de Gauss 0), pois o tamanho do domínio não é acrescido e a função de ponderação atribui peso nulo aos nós do domínio de influência por estarem localizados sobre a sua fronteira, uma vez que a distribuição de nós/pontos de integração é uniforme, conforme mostrado na Figura 4.21.

Para k igual a 2 e função peso cúbica *spline*, a Figura 4.22 e a Figura 4.23 mostram, respectivamente, para o fator de escala d_{max} igual a 1,5 e 4,0, o comportamento das funções peso e de forma, bem como, de suas derivadas para cada um dos 11 nós do domínio. A Figura 4.24 e a Figura 4.25 mostram os resultados obtidos quando k é igual a 3.

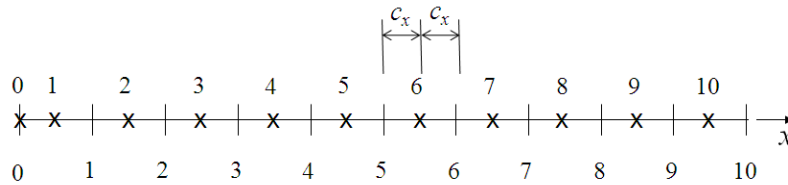


Figura 4.21 - Domínio de influência centrado no sexto ponto de Gauss durante a integração da matriz global: d_{max} igual a 1, k igual a 2 e domínio composto por 11 nós.

Para k igual a 2, não se notam alterações consideráveis na região de influência de cada nó com o aumento de d_{max} , contudo a escala de ponderação da função peso varia conforme mostrado na Figura 4.22a e na Figura 4.23a. Isso porque, para os valores de d_{max} menores os nós se localizam próximos à fronteira do domínio de influência e recebem valores de ponderação baixos. A derivada da função peso não apresenta alterações consideráveis, visto que para a função peso, apenas a escala de seus valores é alterada e não o seu comportamento (Figura 4.22b e Figura 4.23b).

A função de forma é uma função de interpolação, a qual é uma partição da unidade para cada domínio de influência. Como a região de influência de cada nó não sofre alterações significativas em seu campo de atuação, a função de forma de cada nó passa a ter praticamente o mesmo comportamento para a faixa de d_{max} testada, Figura 4.22c e Figura 4.23c.

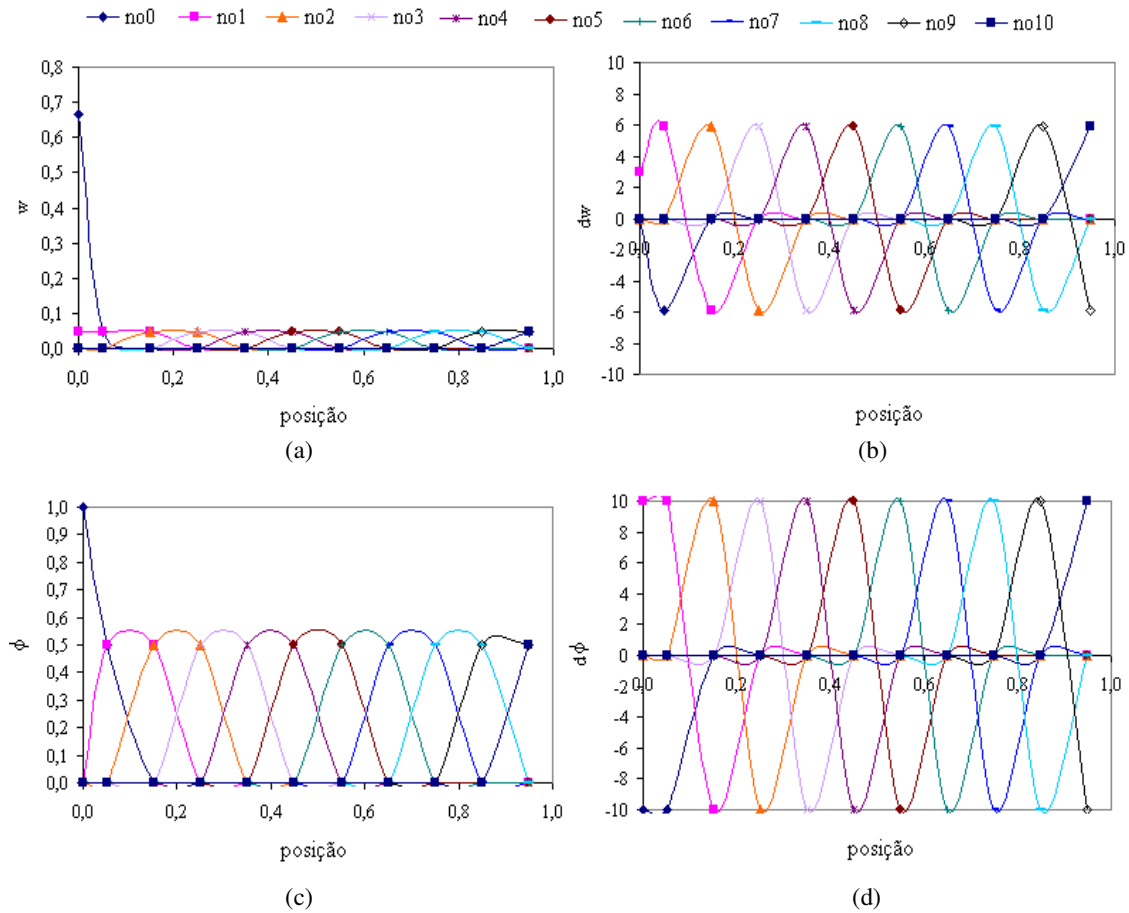


Figura 4.22 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada, para os 11 nós durante a montagem da matriz global: d_{max} igual a 1,5; k igual a 2 e função peso cúbica.

A Figura 4.26 mostra, para k igual a 2 e 3, os números de condição da matriz global pertinentes a cada fator de escala d_{max} empregado. Contudo, para d_{max} igual a 1,0 estes valores não são apresentados, pois para k igual a 2 a matriz de rigidez não pode ser montada, visto que as funções de forma e suas derivadas não são construídas devido à falta de nós ponderados nestas aproximações locais, conforme indicado na Figura 4.21. Os números de condição para k igual a 2 apresentam pequenas oscilações com a variação do fator de escala d_{max} . Por outro lado, quando k igual a 3 verifica-se um crescimento acentuado no número de condição a partir de d_{max} igual a 2,0.

Para k igual a 3 e d_{max} igual a 1,0, a matriz global é montada pelo fato de sempre existir pelo menos 2 nós com ponderação não nula em cada domínio de influência pertinente à

integração da matriz de rigidez. A Figura 4.27 mostra os domínios de influência centrados nos pontos de Gauss 0 e 6, durante a integração da matriz \mathbf{K} , para d_{max} unitário e k igual a 3.

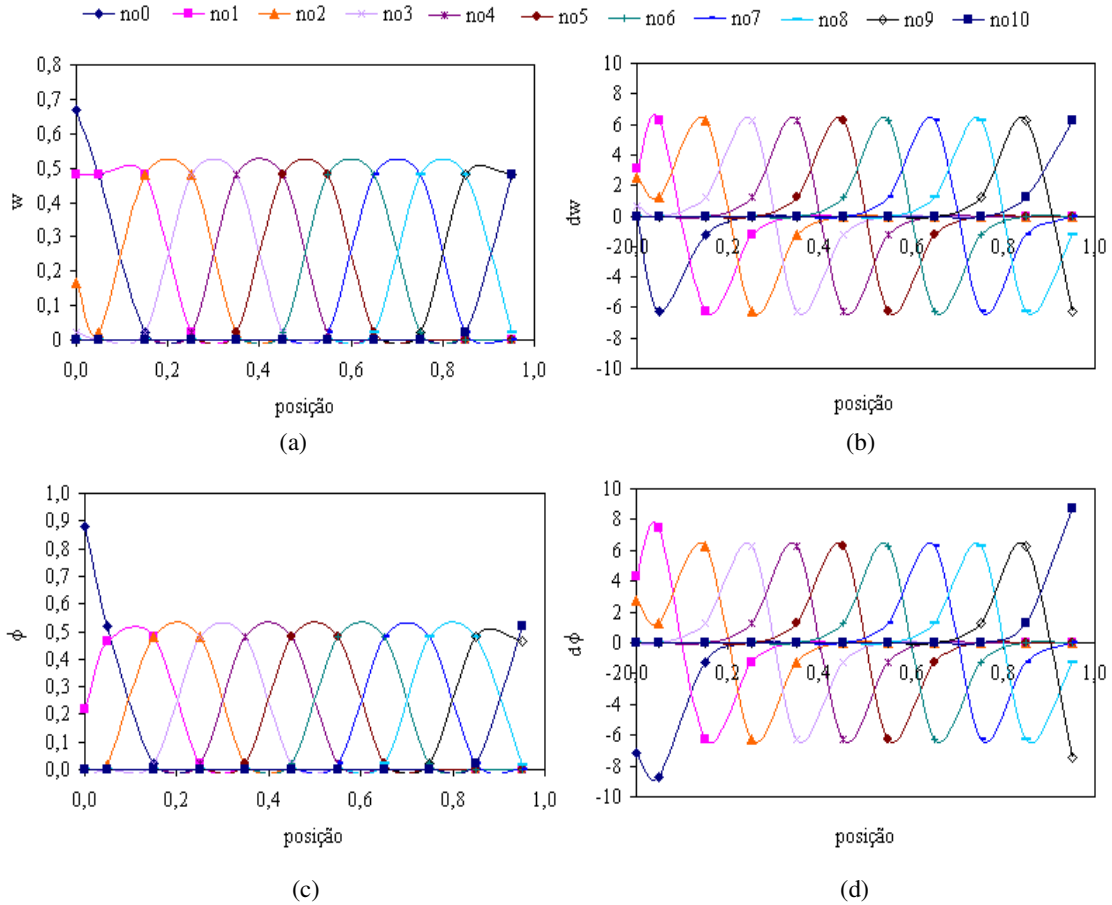


Figura 4.23 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada, para os 11 nós durante a montagem da matriz global: d_{max} igual a 4,0, k igual a 2 e função peso cúbica.

A resposta obtida com a solução do sistema de equações deve ser multiplicada pela função de forma centrada nos nós de forma a se obter o campo de deslocamento, conforme passo 8 do algoritmo listado na seção 3.3.2. A Figura 4.28a e a Figura 4.28b mostram, respectivamente, o número e percentual de nós em função de d_{max} para cada domínio de influência centrado nos nós, quando k é igual a 2. A Figura 4.29 apresenta, para k igual a 3, os valores medidos na Figura 4.28.

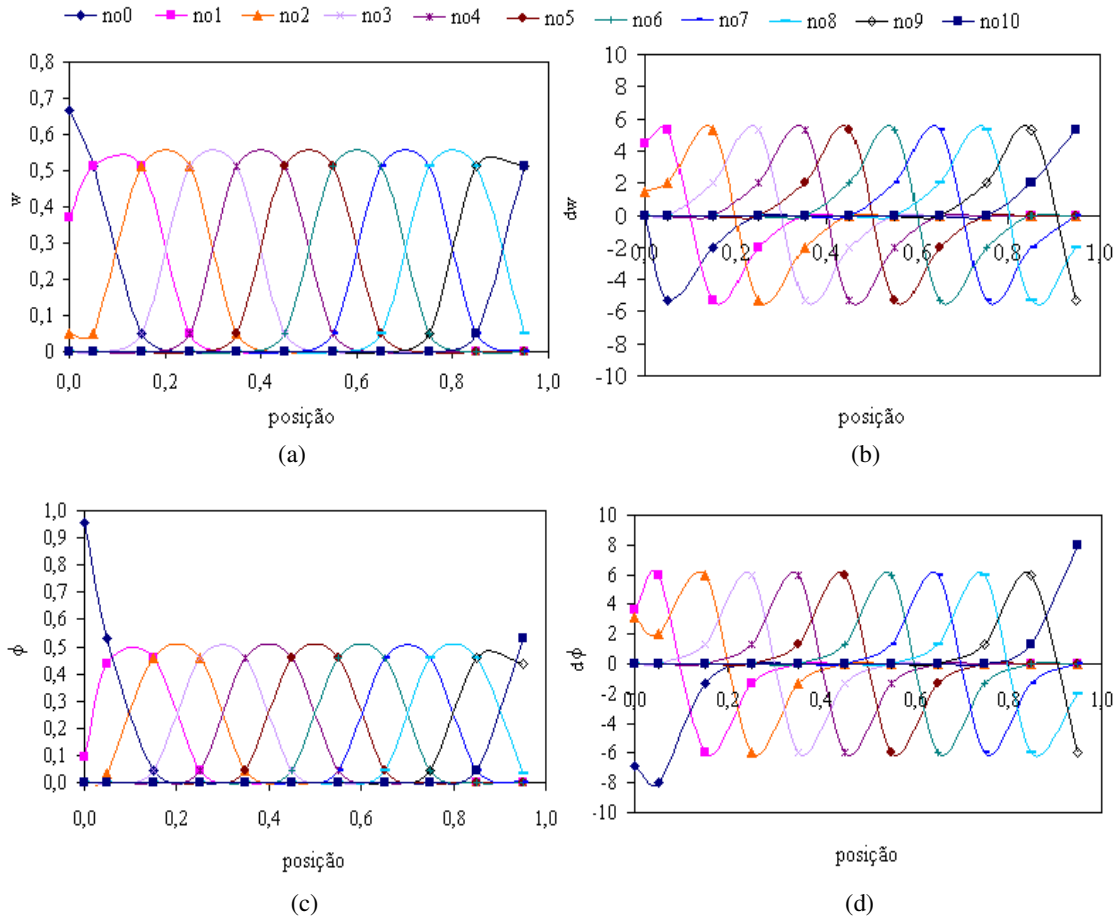


Figura 4.24 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada para os 11 nós durante a montagem da matriz global: d_{max} igual a 1,5; k igual a 3 e função peso cúbica.

A Figura 4.30 e a Figura 4.31 mostram, para cada um dos 11 nós do domínio, o comportamento da função peso cúbica e de forma, bem como, de suas derivadas durante o cálculo do campo de deslocamento, quando k igual a 2 e d_{max} igual a 1,5 e 4,0. A Figura 4.32 e a Figura 4.33 mostram, para k igual a 3, o comportamento destas funções para cada nó utilizando os mesmos prâmetros de ajuste de k igual a 2.

A Tabela 4.2 e Tabela 4.3 apresentam, respectivamente, para k igual a 2 e 3 os campos de deslocamento nodais em função dos valores de d_{max} testados. Para d_{max} igual a 1,0 e k igual a 2, nenhum valor foi encontrado, visto que a matriz de rigidez não foi montada. Para o mesmo valor de d_{max} e k igual a 3, a solução não foi válida, pois os nós internos à barra possuem apenas um único nó em cada domínio de influência com ponderação não nula durante o cálculo do deslocamento, Figura 4.34.

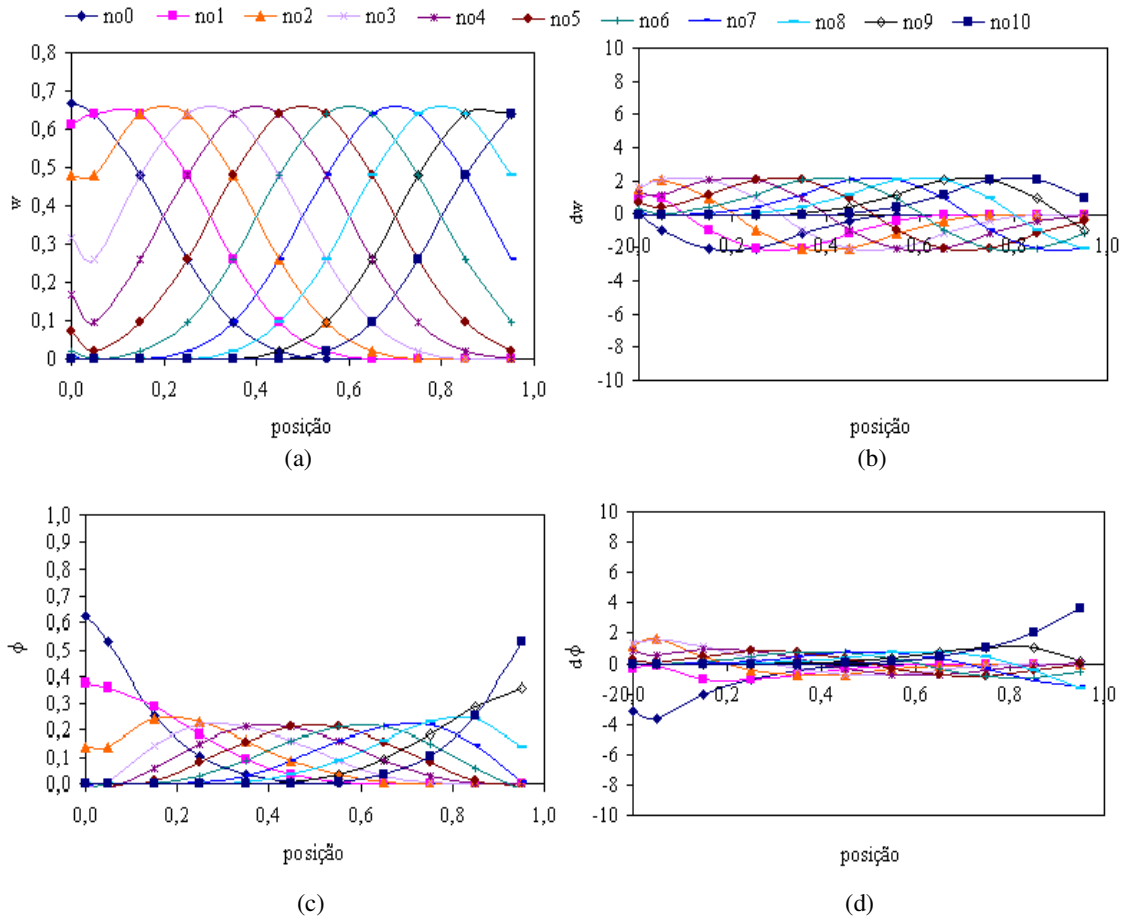


Figura 4.25 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada para os 11 nós durante a montagem da matriz global: d_{max} igual a 4,0; k igual a 3 e função peso cúbica.

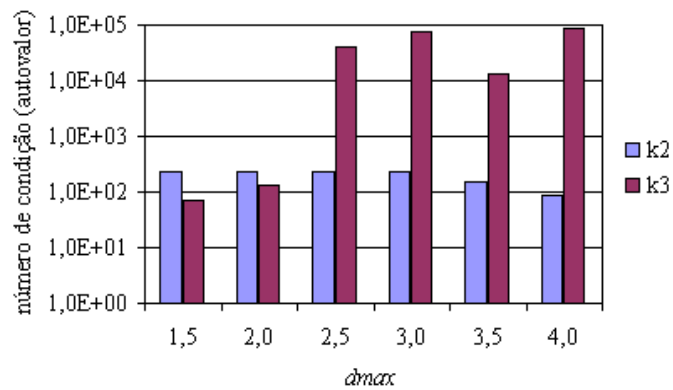


Figura 4.26 - Número de condição em função de d_{max} : domínio com 11 nós e k igual a 2 e 3.

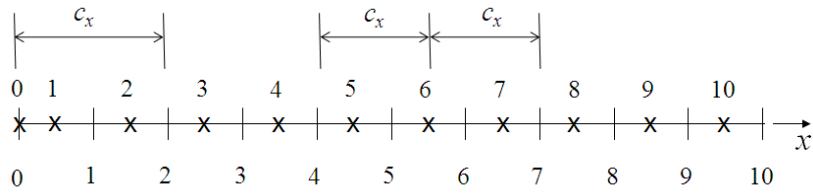


Figura 4.27 - Domínios de influência centrados nos pontos de Gauss 0 e 6 durante o processo de integração da matriz global: d_{max} igual a 1, k igual a 3 e domínio com 11 nós.

Tabela 4.2 - Campo de deslocamento: $d_{max} = 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5$ e $4,0$, domínio com 11 nós e k igual a 2.

nó	exato	$d_{max} 1,0$	$d_{max} 1,5$	$d_{max} 2,0$	$d_{max} 2,5$	$d_{max} 3,0$	$d_{max} 3,5$	$d_{max} 4,0$
0	0,0000	--	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,050	--	0,0495	0,0496	0,0491	0,0485	0,0481	0,0478
2	0,099	--	0,0981	0,0982	0,0978	0,0973	0,0972	0,0976
3	0,146	--	0,1446	0,1448	0,1445	0,1441	0,1445	0,1455
4	0,189	--	0,1881	0,1884	0,1879	0,1875	0,1881	0,1894
5	0,229	--	0,2277	0,2280	0,2274	0,2268	0,2274	0,2287
6	0,264	--	0,2622	0,2626	0,2619	0,2611	0,2618	0,2631
7	0,293	--	0,2904	0,2912	0,2904	0,2894	0,2901	0,2914
8	0,315	--	0,3119	0,3129	0,3118	0,3107	0,3115	0,3131
9	0,329	--	0,3246	0,3268	0,3255	0,3245	0,3259	0,3280
10	0,333	--	0,3282	0,3326	0,3327	0,3321	0,3341	0,3367
Norma erro	--	--	0,0079	0,0037	0,0059	0,0082	0,0063	0,0047

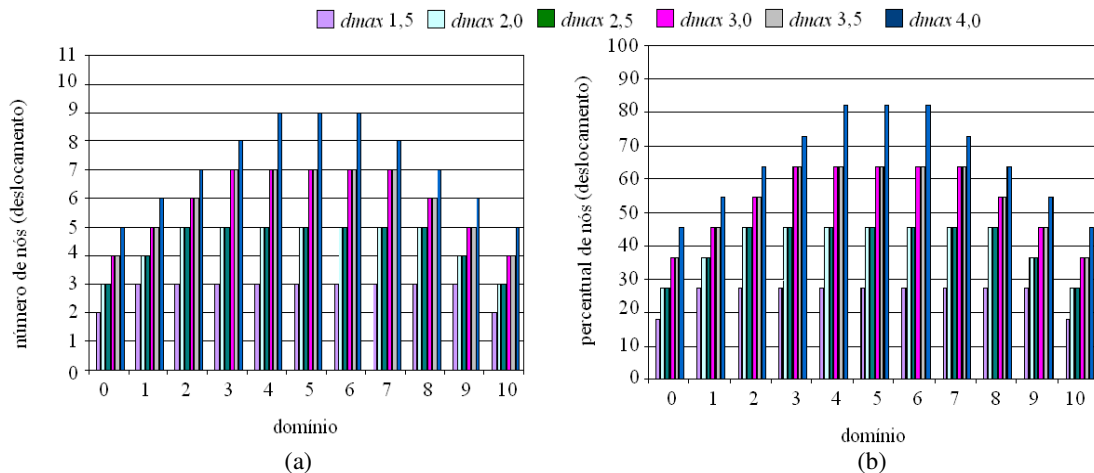


Figura 4.28 - (a) Número e (b) percentual de nós utilizados no cálculo da função de forma utilizada no cálculo do deslocamento: k igual a 2 e domínio com 11 nós.

Conforme explanado anteriormente, quando d_{max} vale 1,5 e k é igual a 2, os domínios de influência internos à barra possuem os mesmos nós de quando d_{max} é igual a 1,0. Contudo, a ponderação de todos os nós de dm é não nula. Isto porque, com a multiplicação de c_x por 1,5 os domínios de influência aumentam e assim os nós simétricos deixam de pertencer à fronteira do domínio de influência.

Para k igual a 2 e função peso cúbica, o campo de deslocamento apresenta pequenas variações em torno da solução exata, conforme apresentado na Tabela 4.2. A Tabela 4.3 mostra variações elevadas nos valores de deslocamento para k é igual a 3, quando o fator de escala d_{max} aplicado é maior que 2,0.

Tabela 4.3 - Campo de deslocamento: $d_{max} = 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5$ e 4,0, domínio com 11 nós e k igual a 3.

nó	exato	$d_{max} 1,0$	$d_{max} 1,5$	$d_{max} 2,0$	$d_{max} 2,5$	$d_{max} 3,0$	$d_{max} 3,5$	$d_{max} 4,0$
0	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0002	0,0008
1	0,050	0,3636	0,0460	0,0362	0,5578	0,1794	0,2888	0,6682
2	0,099	0,7199	0,1016	0,1145	-0,4558	-0,0585	-0,1212	-0,4217
3	0,146	0,4185	0,1453	0,1405	1,5250	0,5469	0,5195	0,6246
4	0,189	1,3814	0,1906	0,1982	-1,0342	0,0263	0,4694	1,0359
5	0,229	--	0,2301	0,2303	1,9259	0,3997	-0,0379	-0,2247
6	0,264	0,7591	0,2651	0,2685	-0,8967	0,3415	0,5308	0,2031
7	0,293	0,5146	0,2942	0,2982	1,5822	0,3423	0,5887	1,0799
8	0,315	-0,1047	0,3157	0,3167	-0,1666	0,4186	0,2133	0,3502
9	0,329	0,8927	0,3310	0,3352	0,8251	0,3821	0,5513	0,4111
10	0,333	0,3332	0,3336	0,3370	0,3484	0,4240	0,3872	0,5176
Norma erro	---	---	0,0060	0,0255	3,2144	0,5372	0,7852	1,5718

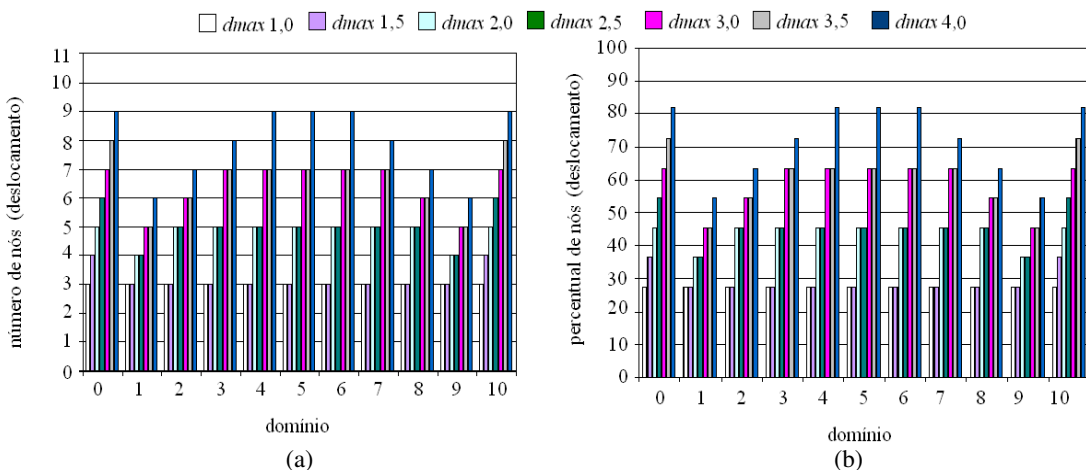


Figura 4.29 - (a) Número e (b) percentual de nós utilizados no cálculo das funções de forma utilizadas no cálculo do campo de deslocamento: k igual a 3 e domínio com 11 nós.

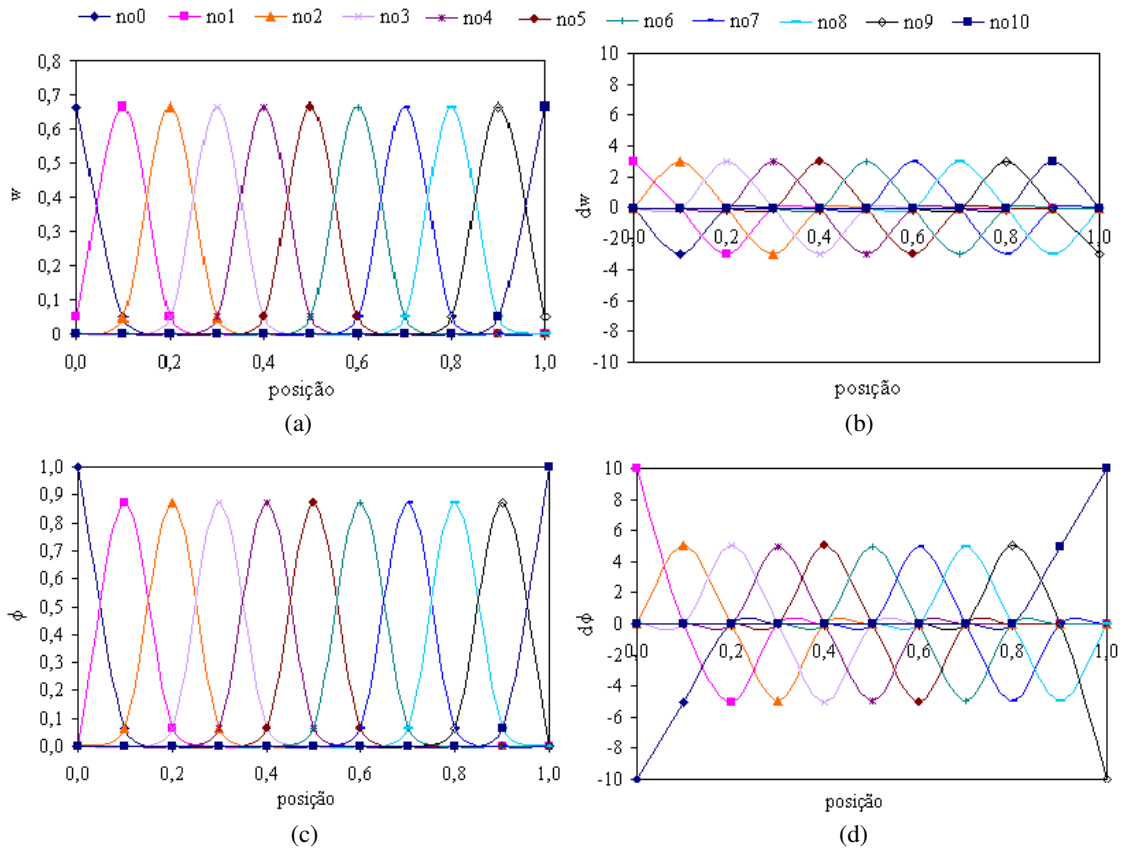


Figura 4.30 - (a) Função peso, (b) sua derivada (c) função de forma e (d) sua derivada para os 11 nós durante o cálculo do deslocamento: d_{max} igual a 1,5; k igual a 2 e função peso cúbica.

A Figura 4.35 apresenta de forma gráfica os valores da Tabela 4.2 e da Tabela 4.3. A Figura 4.36 sintetiza o comportamento do campo de deslocamento por meio dos valores das normas de erro, para cada valor de d_{max} e k . Os valores da norma do erro do deslocamento seguem o mesmo comportamento dos números de condição apresentados na Figura 4.26. Para k igual a 3, ocorre certa perda no efeito de aproximação local com o aumento de d_{max} , a qual é evidenciada com o valor da norma do erro do deslocamento, Figura 4.36. Os valores das normas dos erros para k igual a 2, não sofrem variações significativas, visto que os valores de dm não crescem de forma expressiva, Figura 4.36.

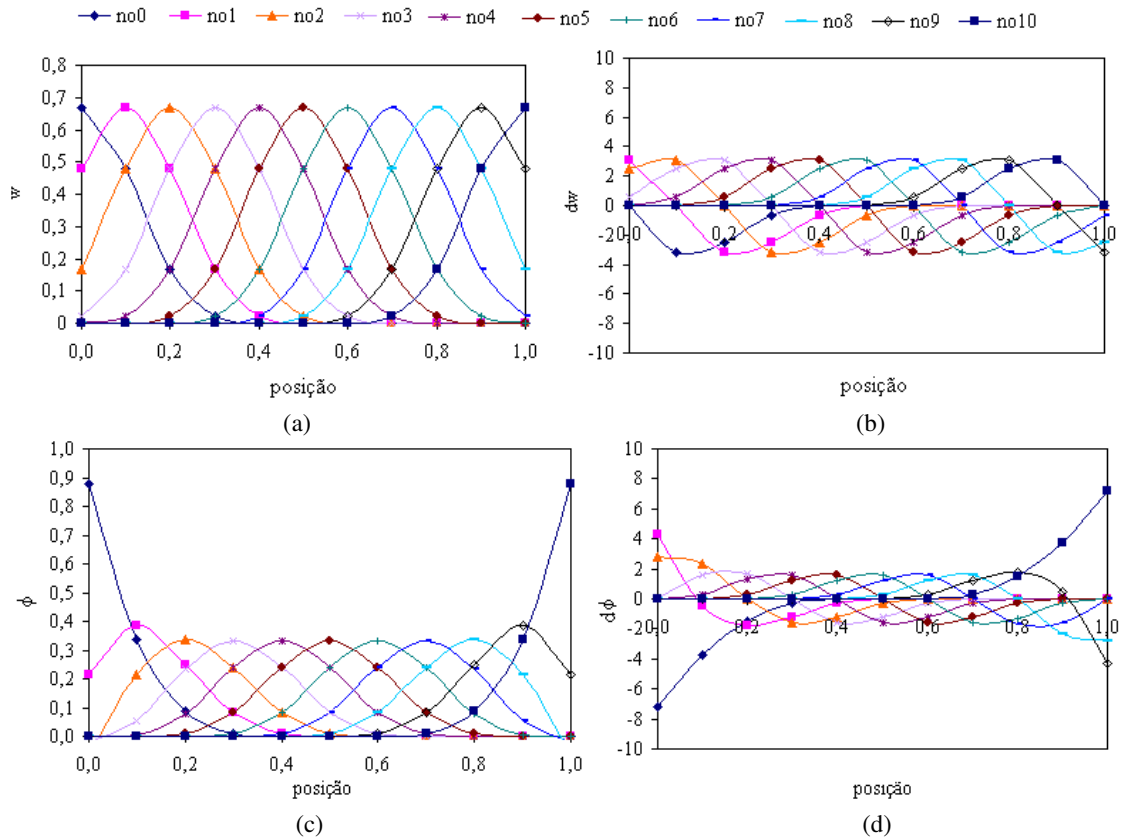


Figura 4.31 - (a) Função peso, (b) sua derivada (c) função de forma e (d) sua derivada para os 11 nós durante o cálculo do deslocamento: d_{max} igual a 4,0; k igual a 2 e função peso cúbica.

A Figura 4.37 mostra, em mais duas configurações uniformes de nós, os números de condição das matrizes globais em função de d_{max} , para k igual a 2 e 3. Estes resultados foram obtidos utilizando o critério de busca para o cálculo de dm e a função peso cúbica *spline*.

As normas do erro para os campos de deslocamento e de deformação são apresentadas na Figura 4.38 (k igual a 2) e na Figura 4.39 (k igual a 3) para cada valor de d_{max} , função peso e concentração nodal empregada (11, 51 e 101 nós). Para a função peso cúbica *spline*, as normas dos campos de deslocamento tanto para k igual a 2, quanto para k igual a 3 seguem, em geral, o comportamento dos seus números de condição, conforme Figura 4.37.

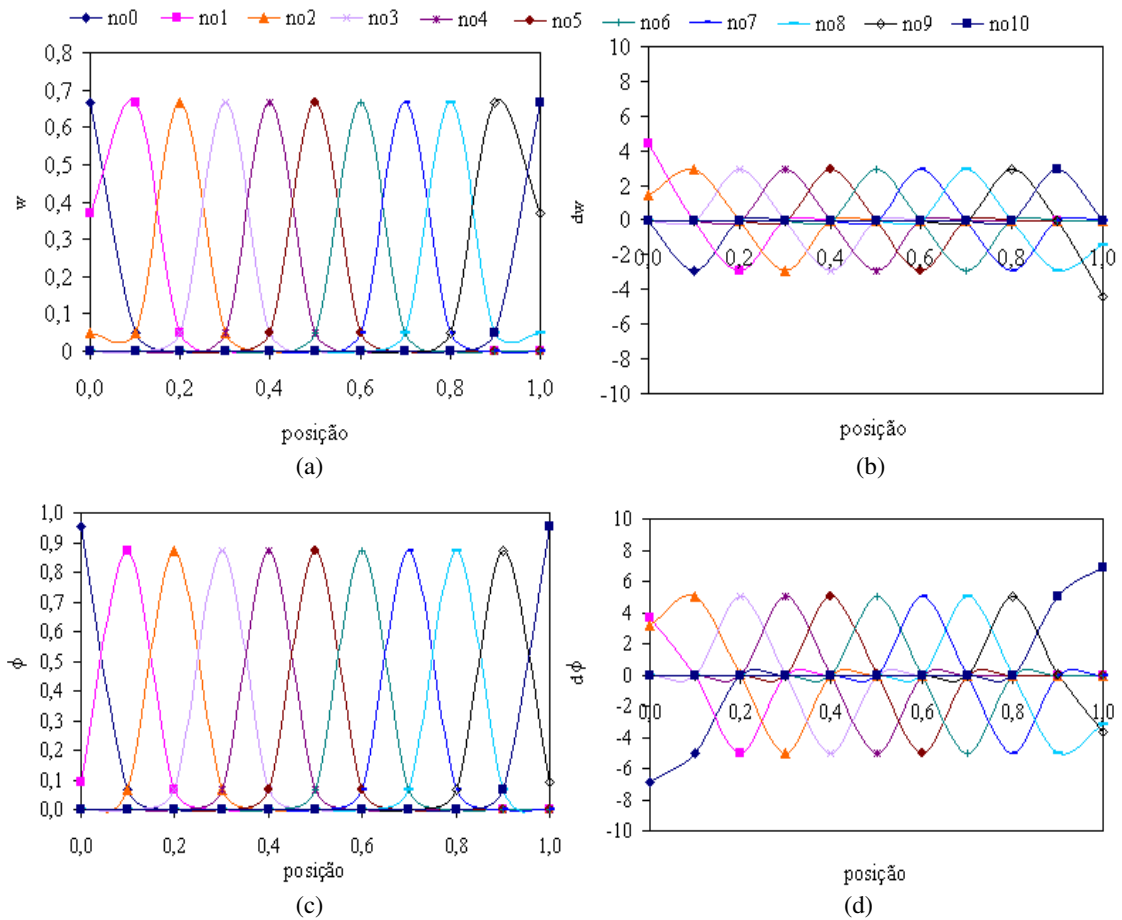


Figura 4.32 - (a) Função peso, (b) sua derivada (c) função de forma e (d) sua derivada para os 11 nós durante o cálculo do deslocamento: d_{max} igual a 1,5; k igual a 3 e função peso cúbica.

Pelo fato do domínio de influência, dm , ser determinado por meio de busca e a distribuição nodal ser uniforme, o número de nós em cada domínio de influência não se altera com o aumento do número de nós no domínio, para cada valor de d_{max} e k . Assim, para domínios com uma maior concentração nodal, o valor de dm diminui de forma a manter os k pontos mais próximos.

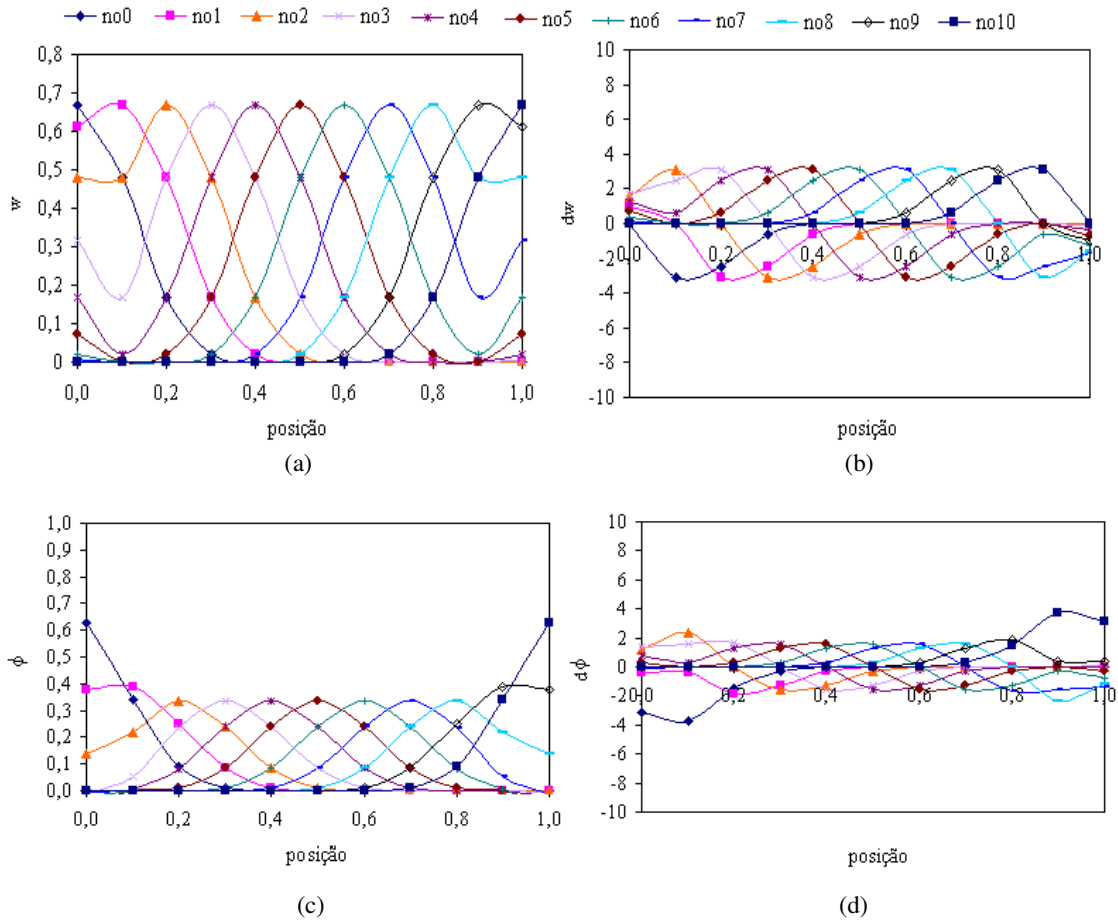


Figura 4.33 - (a) Função peso, (b) sua derivada (c) função de forma e (d) sua derivada para os 11 nós durante o cálculo do deslocamento: d_{max} igual a 4,0 e k igual a 3 e função peso cúbica.

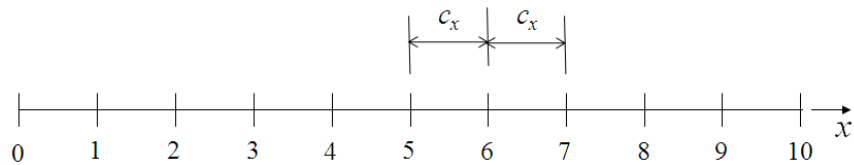


Figura 4.34 - Domínio de influência centrado no sexto nó: k igual a 3, d_{max} igual a 1 e domínio com 11 nós uniformemente distribuídos.

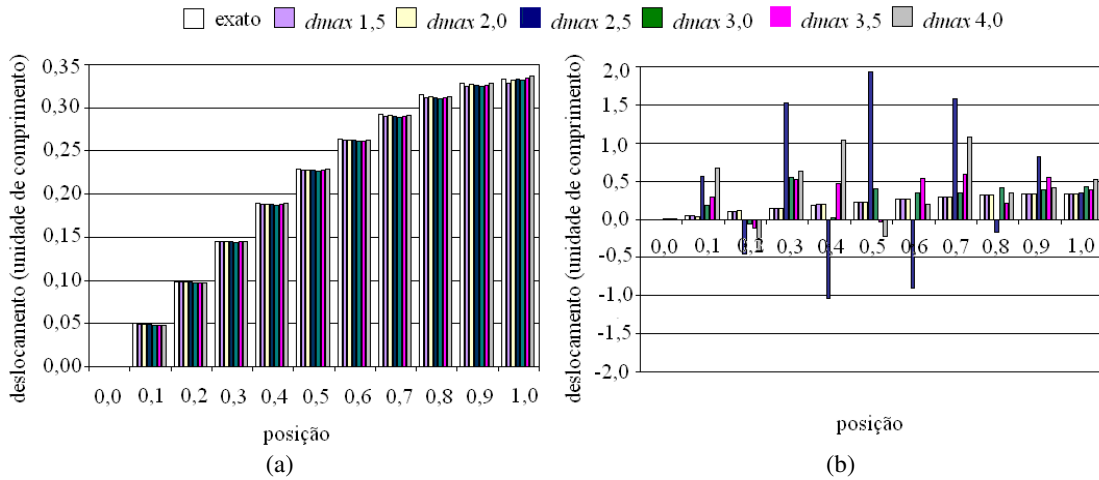


Figura 4.35 - Deslocamento nodal em função de d_{max} para k igual a (a) 2 e (b) 3: função peso cúbica *spline* e domínio com 11 nós.

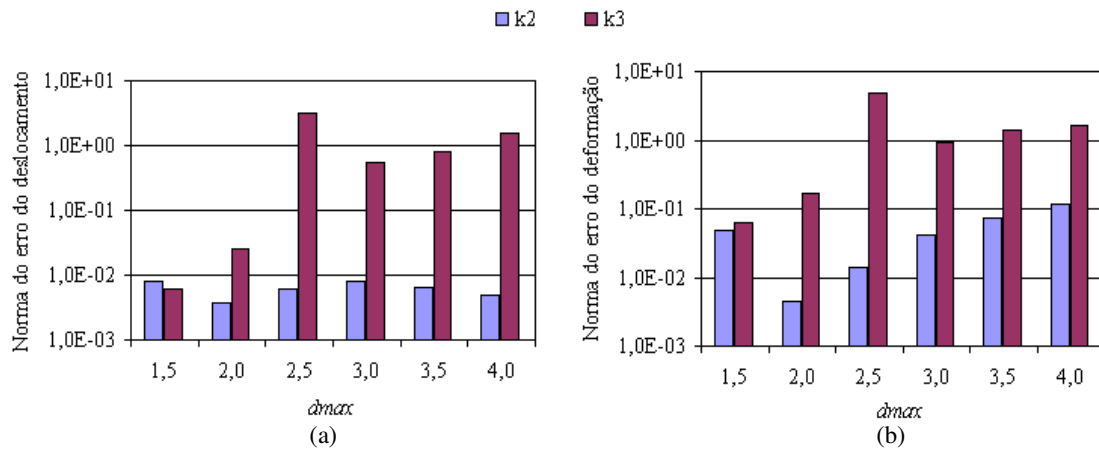


Figura 4.36 - Norma do erro do campo (a) de deslocamento e (b) de deformação em função de d_{max} : domínio com 11 nós, função peso cúbica *spline* e k igual a 2 e 3.

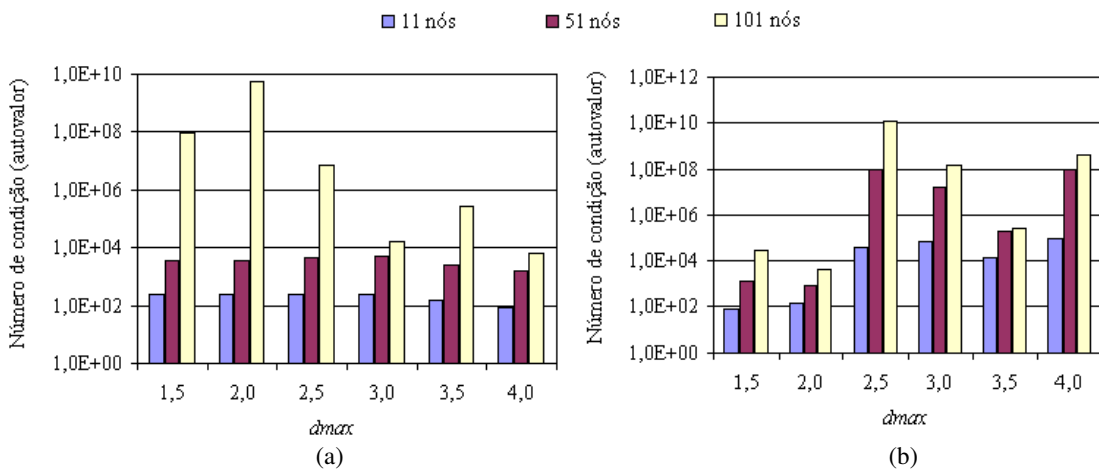


Figura 4.37 - Número de condição em função de d_{max} para domínios com 11, 51 e 101 nós e função peso cúbica *spline*: k igual a (a) 2 e (b) 3.

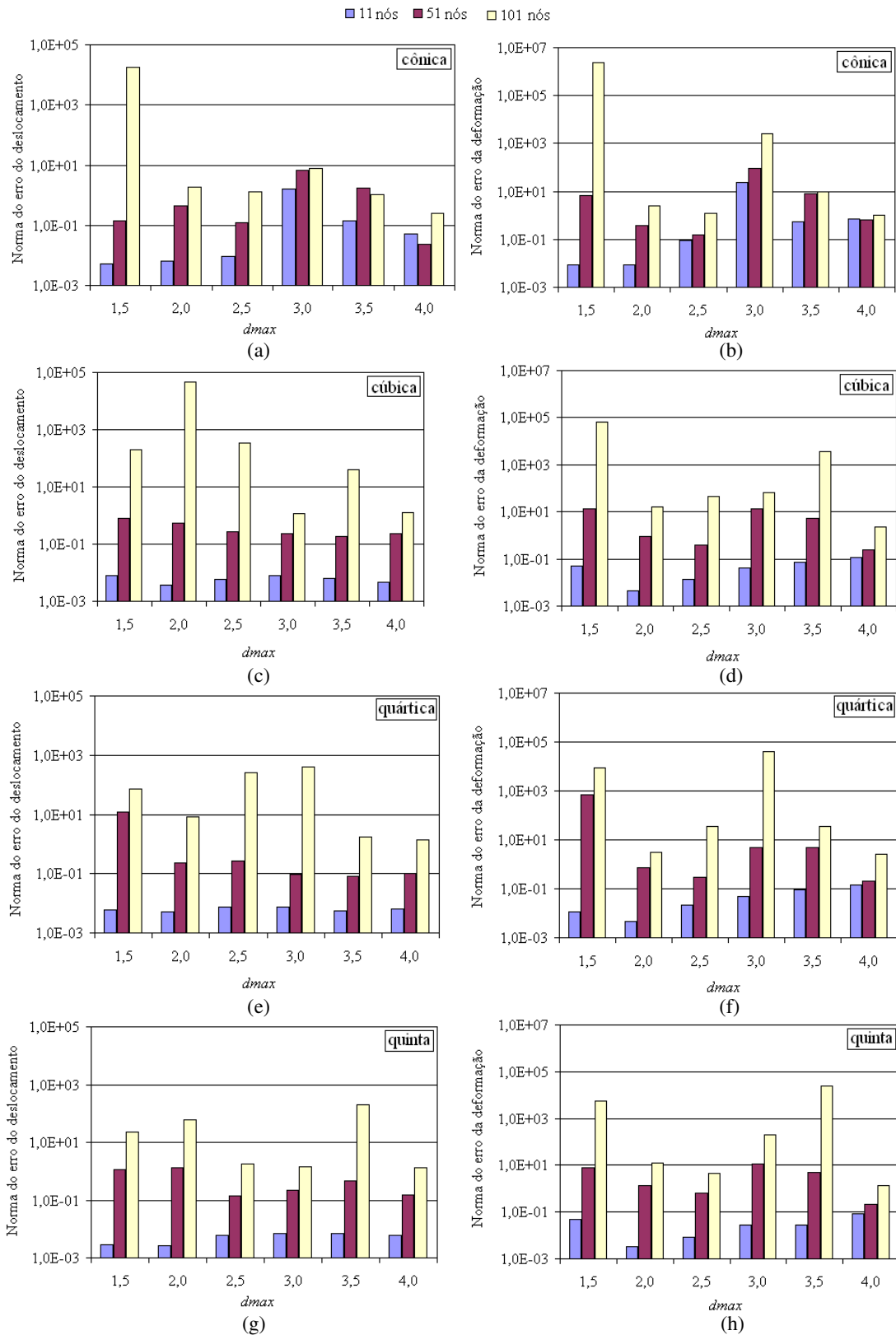


Figura 4.38 - Norma do erro do campo de deslocamento e de deformação em função de d_{max} para domínios com 11, 51 e 101 nós e k igual a 2: função peso (a) (b) cônica, (c) (d) cúbica, (e) (f) quártica e (g) (h) quinta ordem.

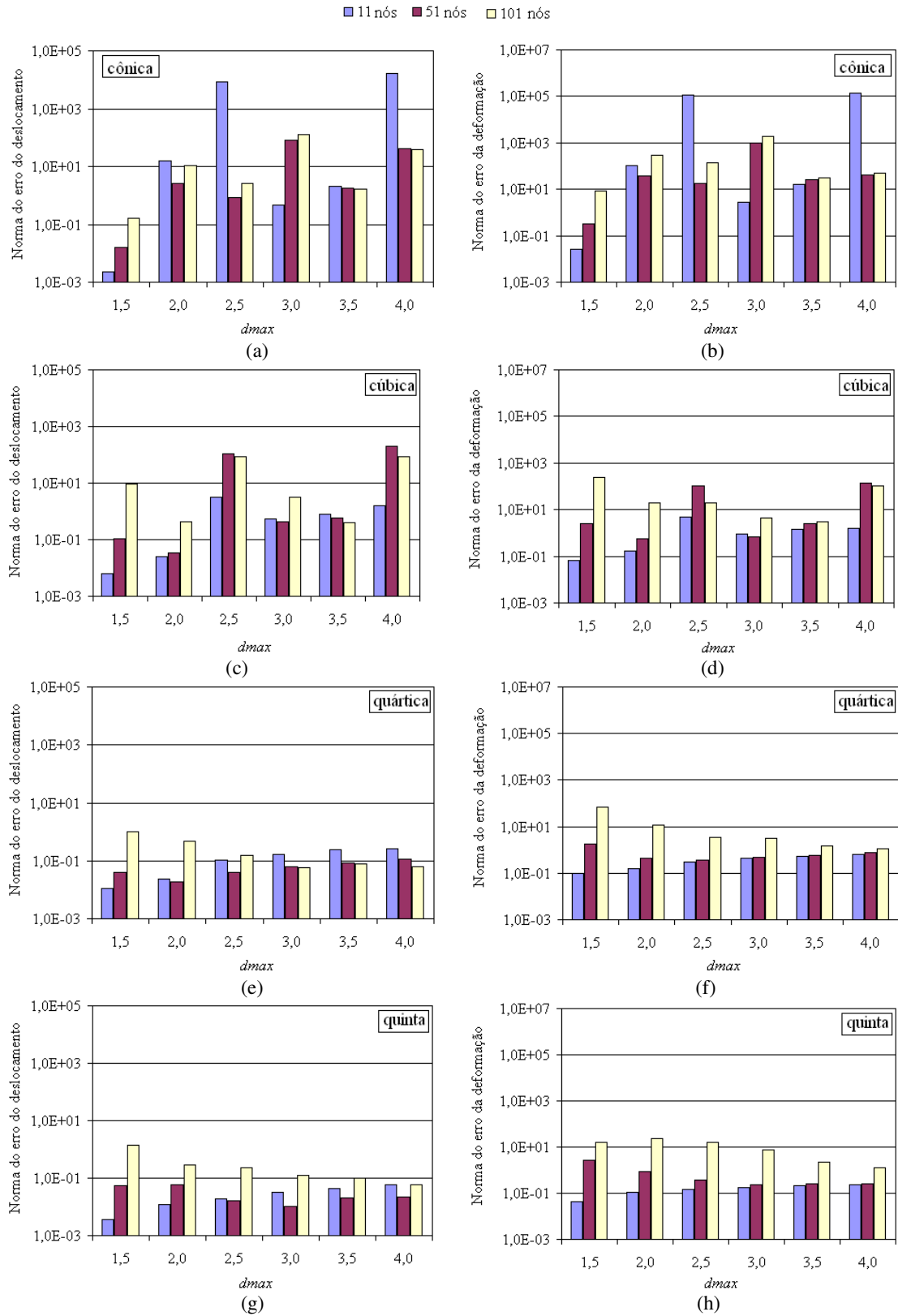


Figura 4.39 - Norma do erro do campo de deslocamento e de deformação em função de d_{max} para domínios com 11, 51 e 101 nós e k igual a 3: função peso (a) (b) cônica, (c) (d) cúbica, (e) (f) quártica e (g) (h) quinta ordem.

O aumento da concentração nodal leva a respostas menos adequadas para os valores de k e d_{max} testados, conforme mostrado na Figura 4.38 e na Figura 4.39. Adotando como satisfatórias as normas com valores até 10^{-1} , verifica-se que os campos de deslocamento e de deformação dos domínios com 51 e 101 nós não satisfazem esta condição, para a configuração dos parâmetros de ajuste avaliados.

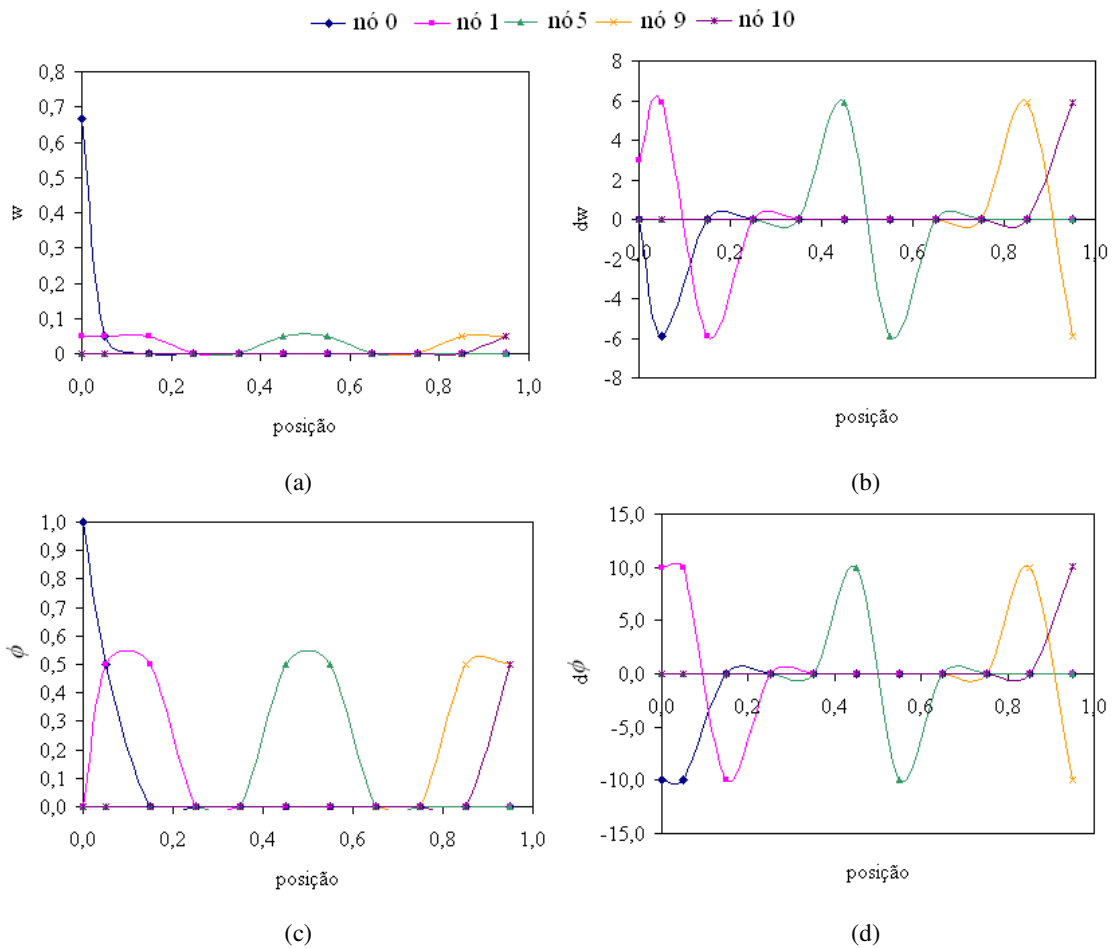


Figura 4.40 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada para os nós 0, 1, 5, 9 e 10: domínio com 11 nós, $d_{max} = 1,5$ $k = 2$ e função peso cúbica.

Para k igual a 2, ocorre um aumento mais acentuado no valor da norma dos erros com o acréscimo de nós no domínio, conforme indicado na Figura 4.38. Isso porque, quando a busca restringe-se aos dois nós mais próximos, os domínios de influência tornam-se pequenos. Assim, com o aumento do número de nós o valor de dm fica cada vez menor, o que leva a um aumento nos valores das derivadas das funções de forma e peso. Este fato afeta diretamente os termos da matriz global. Contudo, a largura de banda da matriz não é

alterada, pois o número de nós por domínio de influência é mantido constante para cada valor de d_{max} e k (independente da concentração nodal). Caso o domínio fosse extremamente refinado as derivadas apresentariam valores bastante elevados, o que levaria a resultados espúrios.

A Figura 4.40 mostra em um domínio com 11 nós uniformemente distribuídos, o comportamento da função peso, de forma e de suas derivadas, para os dois nós mais próximos de cada extremidade da barra, assim como para o nó central do domínio, quando k é igual a 2, d_{max} é igual a 1,5 (menor valor de d_{max} com solução) e a função peso empregada é a cúbica *spline*. Os resultados com esta configuração, para domínios com 51 e 101 nós, são mostrados, respectivamente, na Figura 4.41 e na Figura 4.42. Da Figura 4.43 à Figura 4.45 é mostrado o comportamento destas funções, utilizando ao invés da função peso cúbica a função de quinta ordem *spline* para as três concentrações nodais.

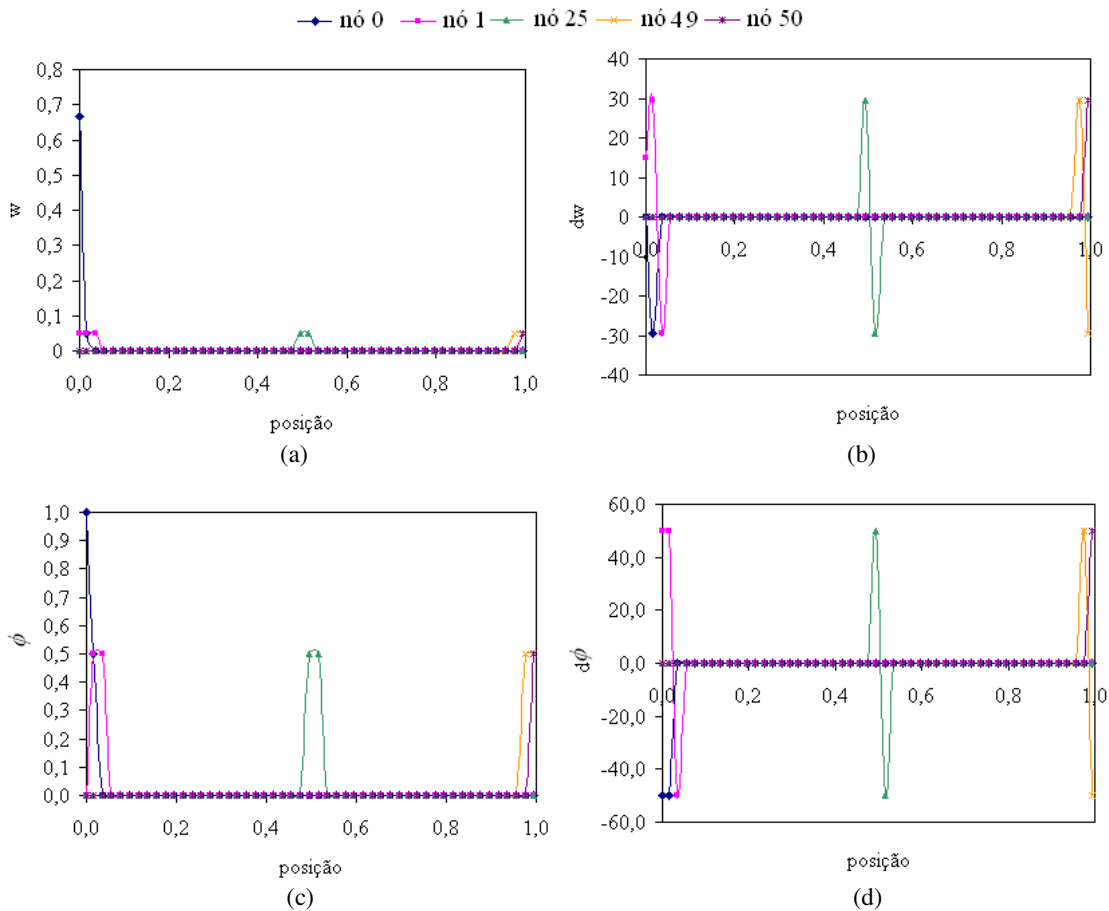


Figura 4.41 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada para os nós 0, 1, 25, 49 e 50: domínio com 51 nós, $k = 2$, $d_{max} = 1,5$ e função peso cúbica.

Conforme apresentado da Figura 4.40 à Figura 4.45, as funções de forma e peso mantêm suas amplitudes independentes do número de nós no domínio, pelo fato do valor do raio normalizado não ser afetado com a variação da concentração nodal. Por outro lado, ocorre uma diminuição na largura da base da região afetada por cada nó, visto que os valores de dm diminuem.

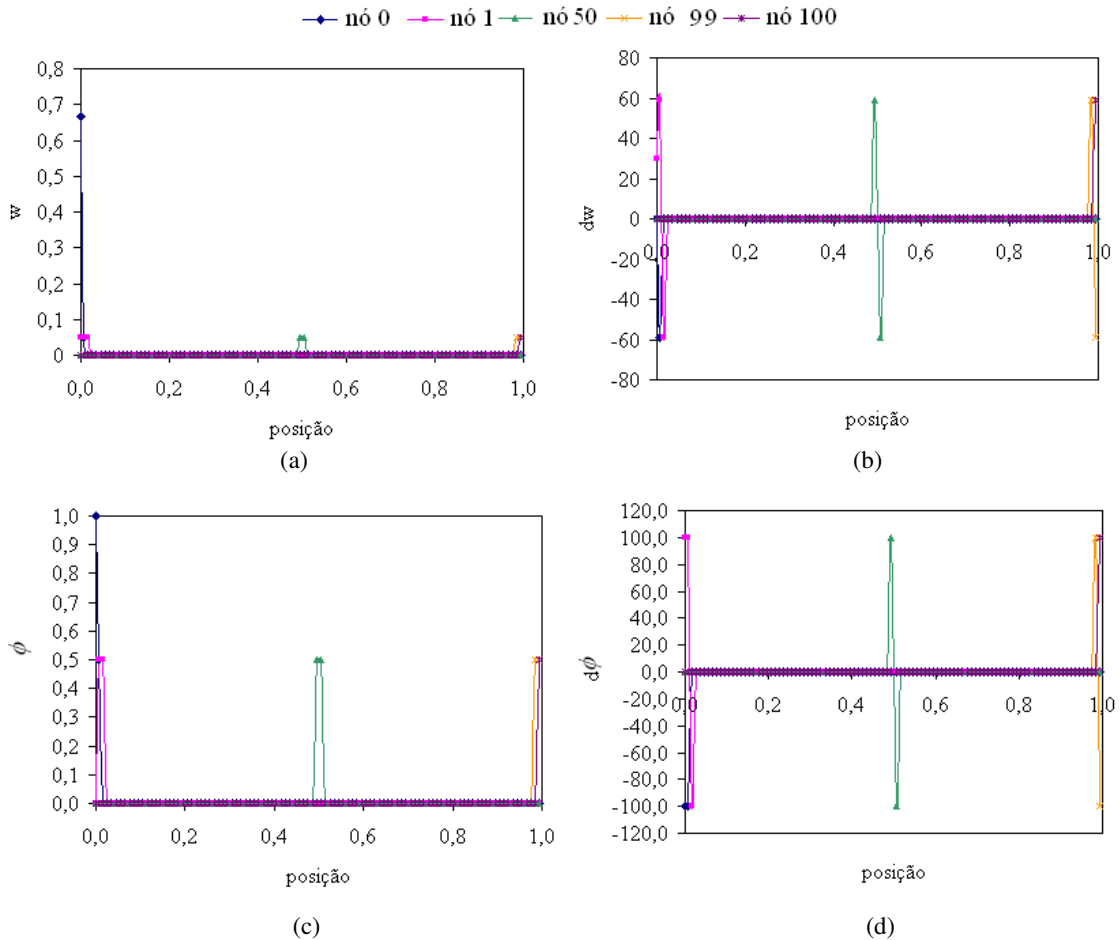


Figura 4.42 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada para os nós 0, 1, 50, 99 e 100: domínio com 101 nós, $k = 2$, $d_{max} = 1,5$ e função peso cúbica.

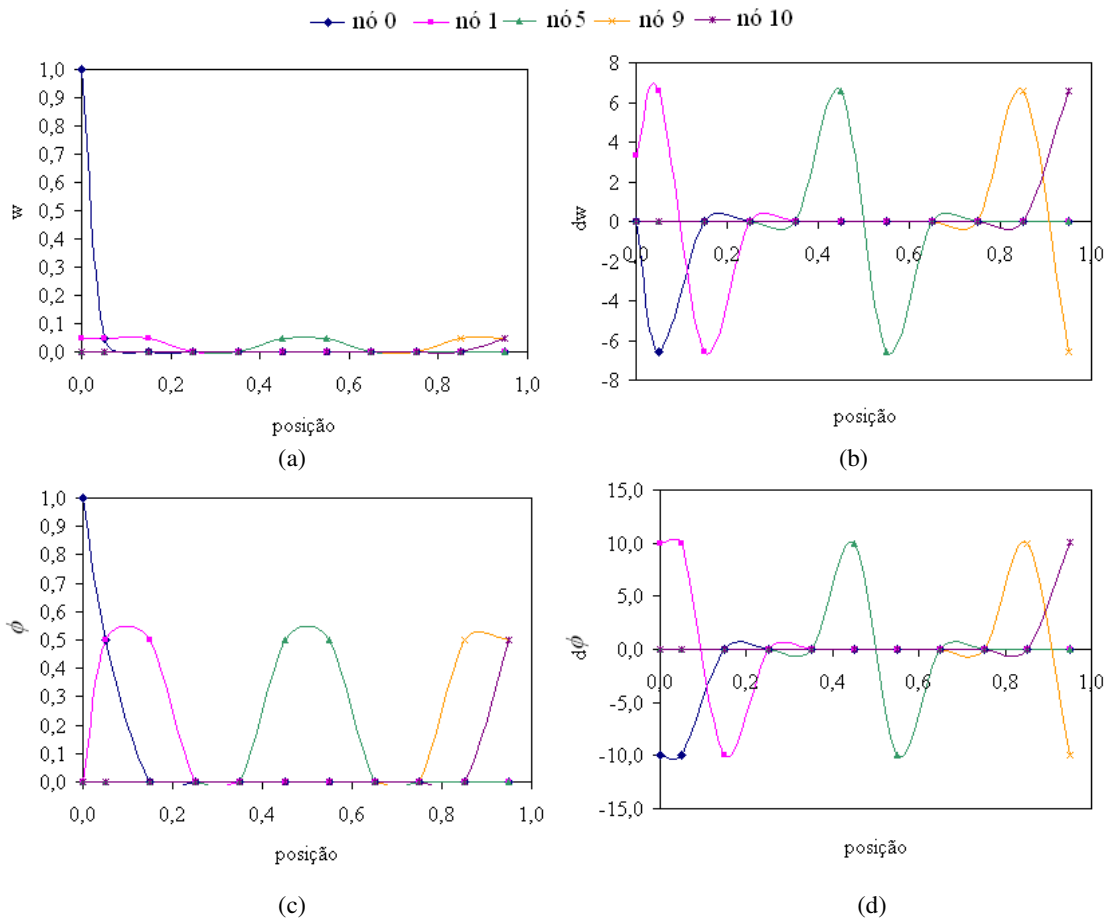


Figura 4.43 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada para os nós 0, 1, 5, 9 e 10: domínio com 11 nós, $k = 2$, $d_{max} = 1,5$ e função de quinta ordem.

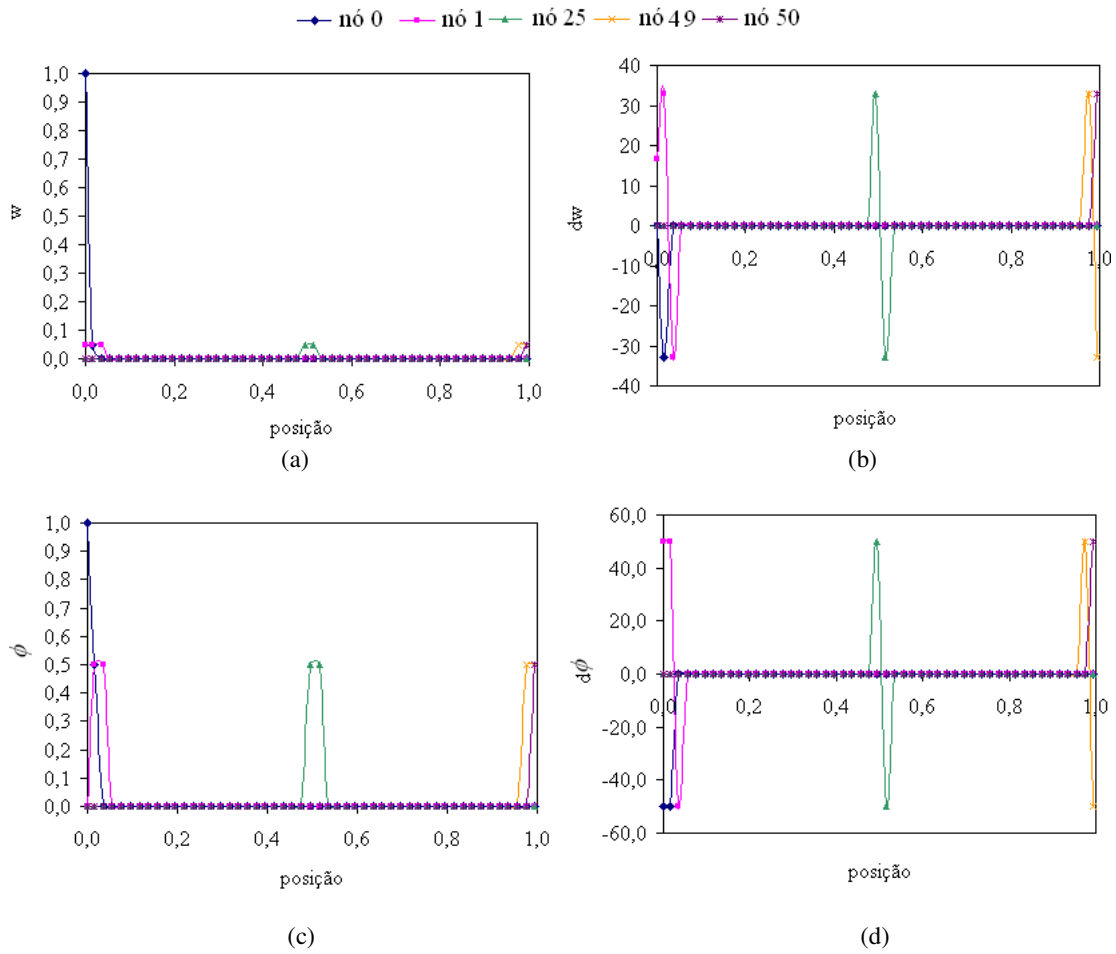


Figura 4.44 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada para os nós 0, 1, 25, 49 e 50: domínio com 51 nós, $k = 2$, $d_{max} = 1,5$ e função de quinta ordem.

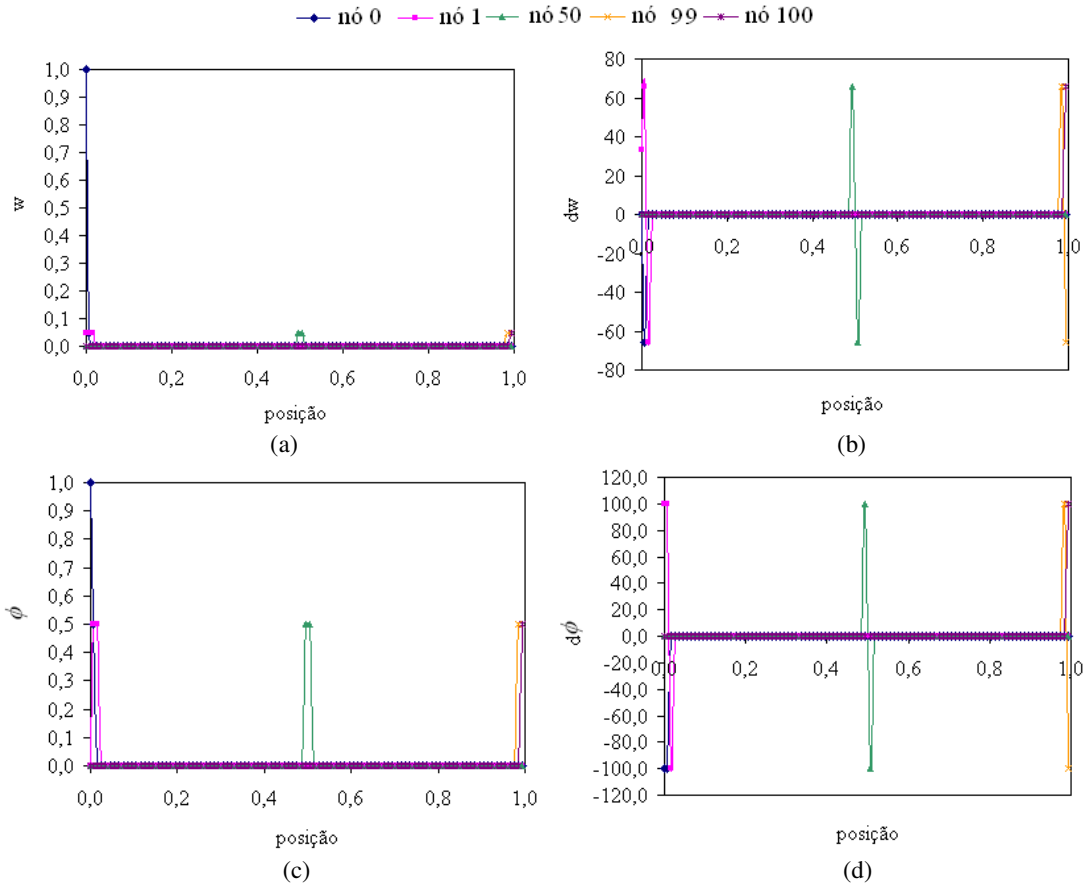


Figura 4.45 - (a) Função peso, (b) sua derivada, (c) função de forma e (d) sua derivada para os nós 0, 1, 50, 99 e 100: domínio com 101 nós, $k = 2$, $d_{max} = 1,5$ e função de quinta ordem.

4.2 DISTRIBUIÇÃO NÃO-UNIFORME DOS NÓS

A análise do EFG utilizando distribuições não-uniformes dos nós foi realizada em uma barra com comprimento unitário com um único ponto de Gauss em cada célula de integração, três concentrações nodais (11, 51 e 101 nós), três funções peso (cúbica *spline*, quártica *spline* e quinta ordem *spline*) e variando-se o valor de d_{max} . A distribuição não-uniforme de nós é feita segundo o seguinte algoritmo:

```

para  $i = 0$     $x(i) = 0$ 
para  $i = 1$     $x(i) = f$ 
para  $1 < i < n - 2$ 
    se  $i$  par    $x(i) = x(i - 1) + 0,5 * f$ 
    se  $i$  ímpar  $x(i) = x(i - 1) + 1,5 * f$ 
para  $i = n - 2$   $x(i) = 1 - f$ 
para  $i = n - 1$   $x(i) = 1$ 

```

i = identificador do nó, $i = 0 \dots n - 1$
 n = número de nós
 $x(i)$ posição do nó i
 $f = 1 / (n - 1)$

Para um domínio com 11 nós, a Figura 4.46 mostra um esquema da distribuição de nós e pontos de integração seguindo as relações apresentadas no algoritmo.

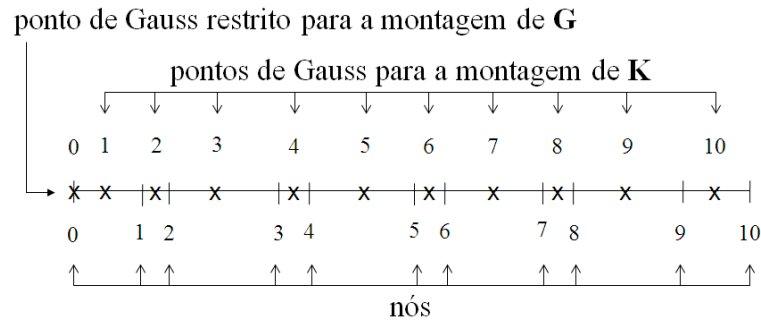


Figura 4.46 - Distribuição não-uniforme de 11 nós e 11 pontos de Gauss no domínio:
x pontos de Gauss e | nós do domínio.

Da Figura 4.47 à Figura 4.49 são apresentados os números de condição para k igual a 2 e 3 utilizando as funções peso cúbica, quártica e quinta ordem *spline*.

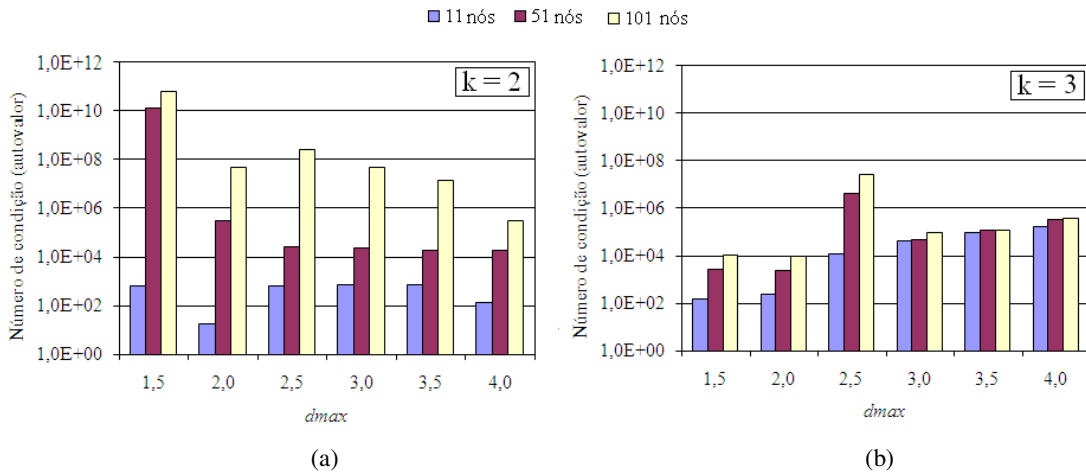


Figura 4.47 - Número de condição para domínios com 11, 51 e 101 nós utilizando a função peso cúbica *spline* e k igual a (a) 2 e (b) 3.

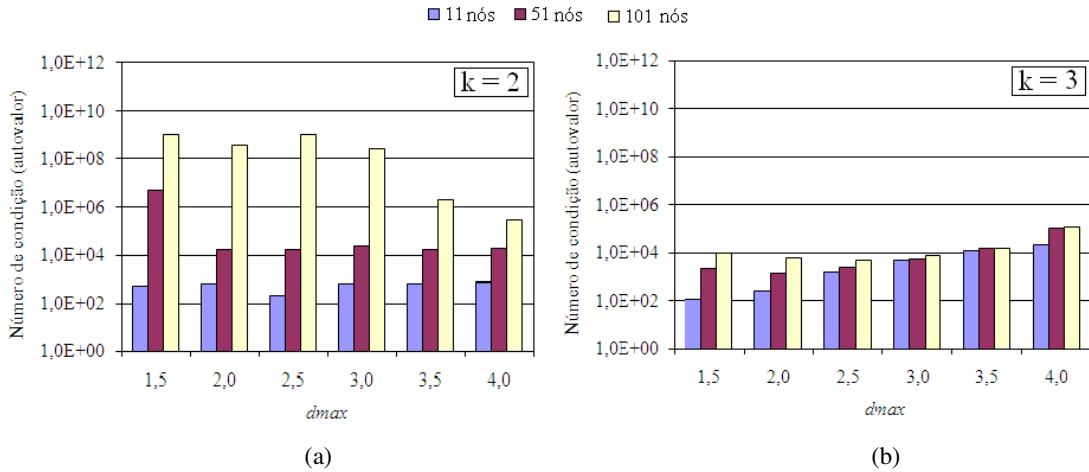


Figura 4.48 - Número de condição para domínios com 11, 51 e 101 nós utilizando a função peso quártica *spline* e k igual a (a) 2 e (b) 3.

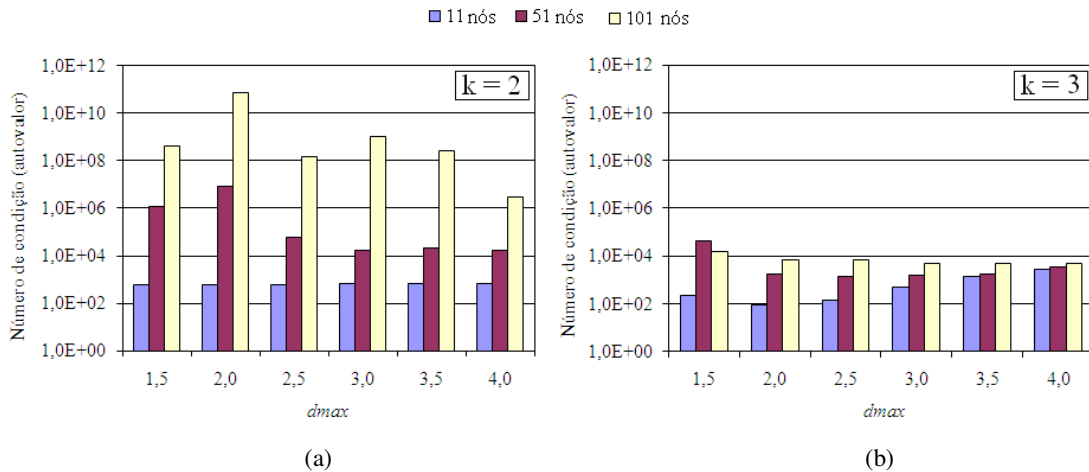


Figura 4.49 - Número de condição para domínios com 11, 51 e 101 nós utilizando a função peso de quinta ordem *spline* e k igual a (a) 2 e (b) 3.

A Figura 4.50 e a Figura 4.51 mostram, respectivamente, para k igual a 2 e 3 as normas do erro dos campos de deslocamento e de deformação, empregando três concentrações nodais e as funções peso cúbica, quártica e quinta ordem *spline*. Estas normas seguem, em geral, o comportamento dos números de condição mostrados da Figura 4.47 à Figura 4.49.

A Figura 4.52 mostra os domínios de influência centrados no sexto e nono pontos de integração, quando k é igual a 2. Para o primeiro destes domínios, c_x é igual a 0,025 unidade de comprimento e nenhum nó é adicionado a este domínio de influência mesmo quando d_{max} passa a ser igual a 4,0. Por outro lado, centrando-se dm no nono ponto de

Gauss c_x é igual a 0,075 unidade de comprimento. Assim, quando d_{max} é igual a 4,0 (dm igual a 0,3) dm passa a ter 5 nós ao invés dos 2 pertinentes a d_{max} igual a 1,0.

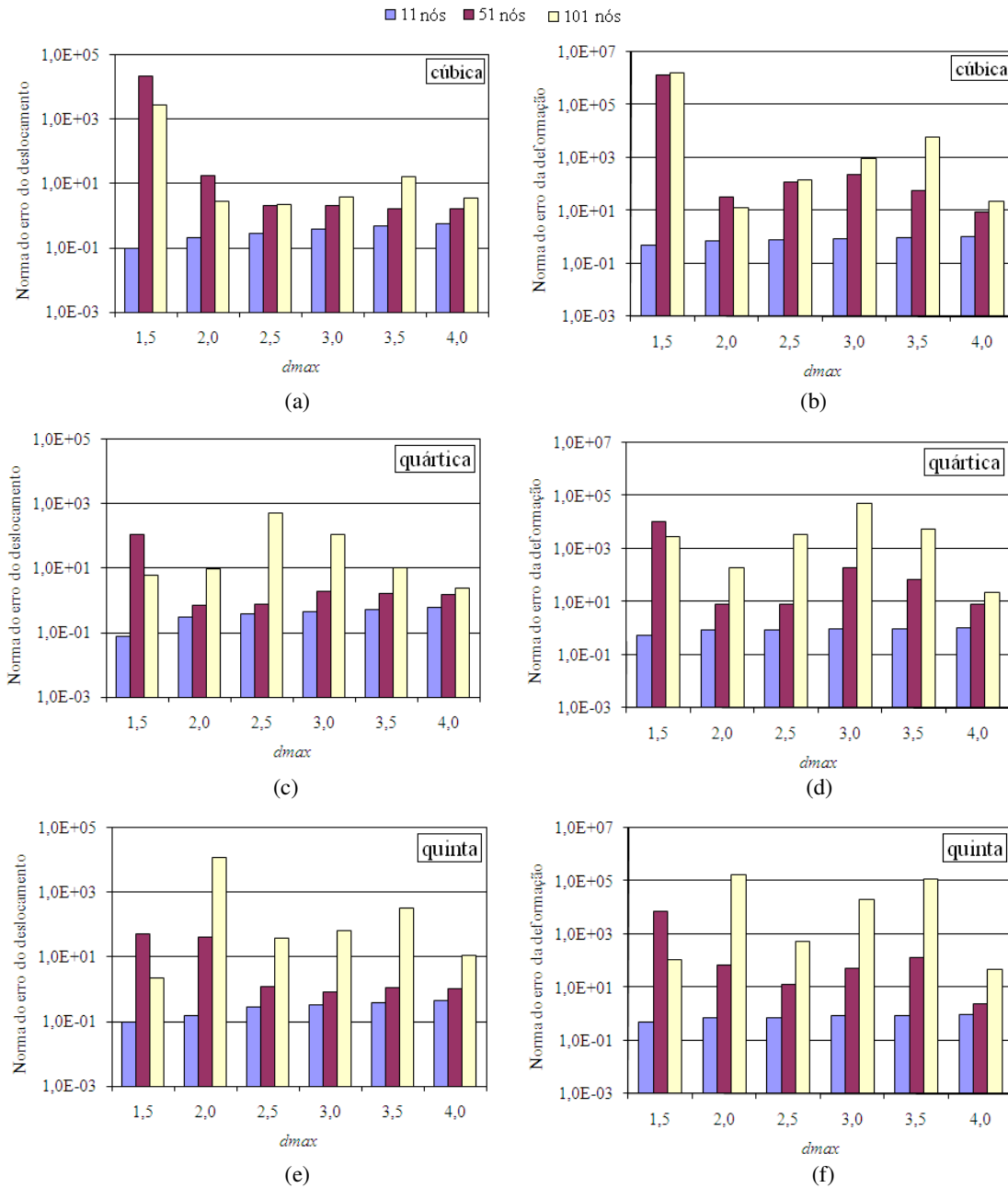


Figura 4.50 - Normas dos campos de deslocamento e de deformação para k igual a 2.

(a) (b) Função peso cúbica, (c) (d) quártica e (e) (f) de quinta ordem.

Alguns domínios de influência, p.ex. centrado no sexto ponto, possuem derivadas elevadas pelo fato do valor de c_x ser pequeno. Contudo, determinados domínios de influência

apresentam perda da localidade por c_x ser proporcionalmente grande, p.ex. centrado no nono ponto. A matriz global é afetada pelos dois efeitos descritos em uma mesma simulação, uma vez que a distribuição utilizada é não-uniforme.

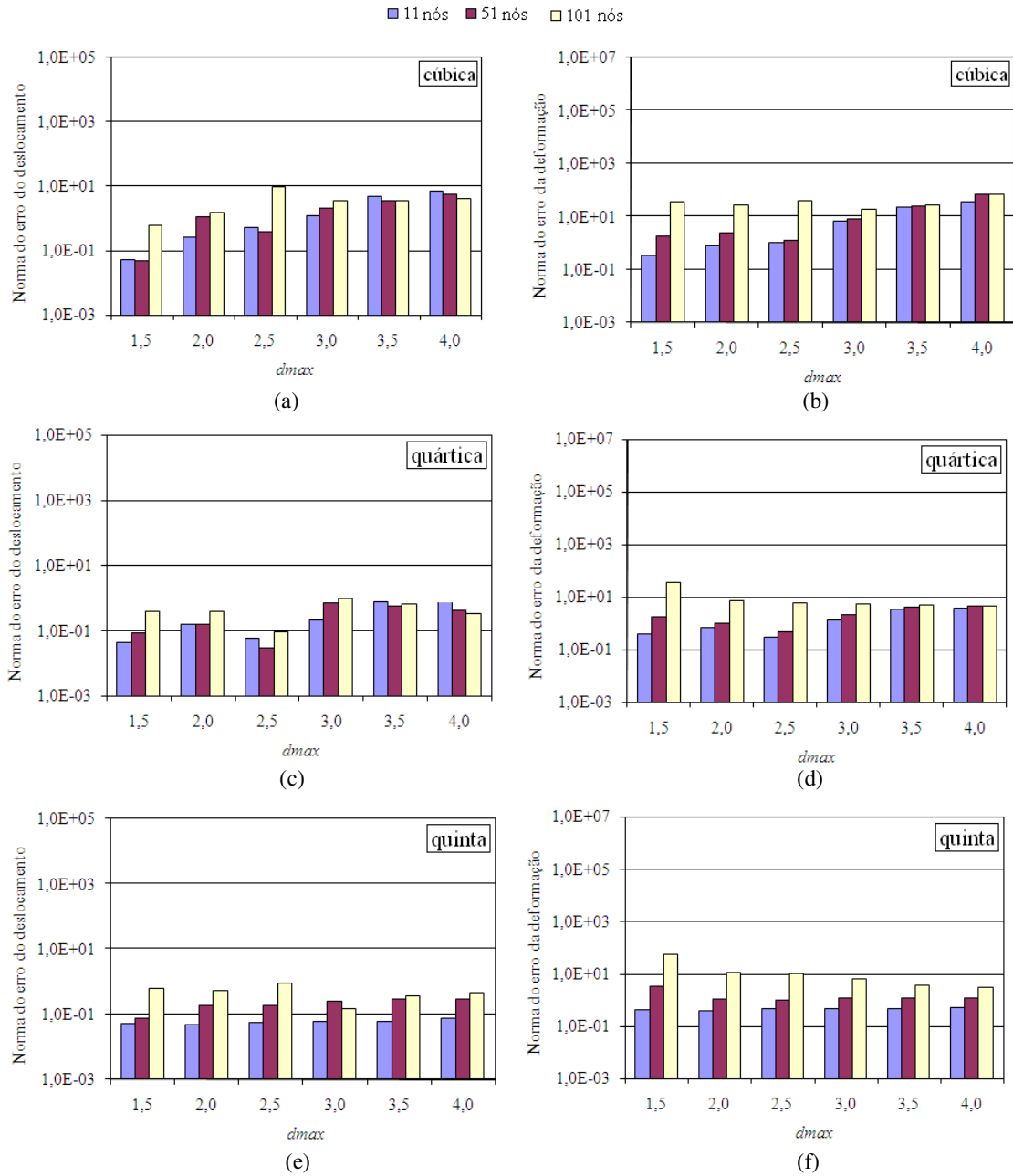


Figura 4.51 - Normas dos campos de deslocamento e de deformação para k igual a 3.

(a) (b) Função peso cúbica, (c) (d) quártica e (e) (f) de quinta ordem.

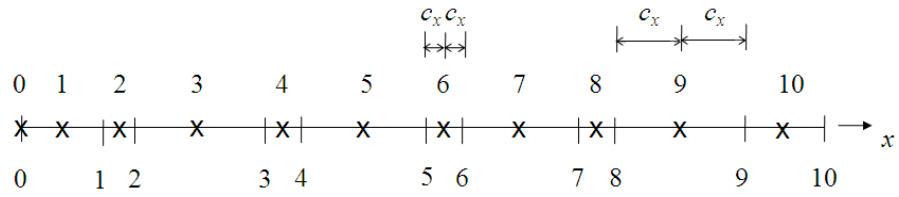


Figura 4.52 - Domínios de influência centrados no sexto e nono pontos de Gauss pertinentes a integração da matriz **K**: k igual a 2, d_{max} igual a 1 e distribuição nodal não-uniforme.

A Figura 4.53 mostra para k igual a 2, o domínio de influência centrado no sexto nó. Assumindo valores de d_{max} até 3,0, este domínio de influência passa suas informações apenas para regiões à sua esquerda, fato que não ocorre na distribuição uniforme. Para valores de d_{max} grandes, passa a ocorrer o efeito da perda da localidade nas aproximações feitas.

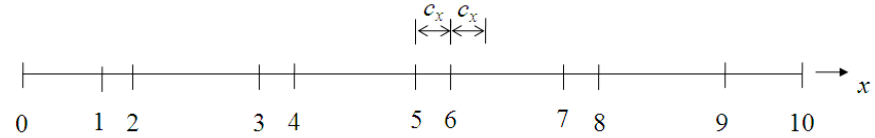


Figura 4.53 - Domínio de influência centrado no sexto durante o cálculo do deslocamento: d_{max} igual a 1,0, k igual a 2 e domínio com 11 nós não-uniformemente distribuídos.

Para k igual a 2, as respostas obtidas com as distribuições não-uniformes de nós são, em geral, piores do que aquelas obtidas com distribuições uniforme, para os mesmos valores de d_{max} , conforme os resultados apresentados na Figura 4.50 e na Figura 4.51. Isso porque: (a) para valores de d_{max} até 3,0 e distribuição de nós não-uniforme, os domínios de influência centrados nos nós mais internos apresentam apenas dois nós ponderados, conforme mostrado na Figura 4.53. Assim, as informações são passadas somente em uma direção do domínio. (b) Domínios de influência com tamanhos bastante diferentes levando ao acúmulo, em uma mesma simulação, tanto do efeito da perda da localidade como também de valores elevados para as derivadas decorrentes de domínios de influência pequenos.

Para d_{max} igual a 1,0 nenhuma resposta é obtida, pelas mesmas razões já apresentadas para o caso com distribuição uniforme. Verifica-se que para k igual a 3 e distribuição de nós não-uniforme as respostas, em geral, melhoram com o aumento da ordem da função peso,

Figura 4.51. Contudo, as respostas não são consideradas satisfatórias para nenhum dos testes realizados, visto que o campo de deformação apresenta erros superiores a 10^{-1} .

A Figura 4.54 mostra para k igual a 3, os domínios de influência centrados no sexto e no nono ponto de Gauss durante a integração da matriz de rigidez, \mathbf{K} . Estes domínios de influência têm c_x , respectivamente, igual a 0,175 e a 0,125 unidade de comprimento. Nota-se que, neste caso, a variação no tamanho dos domínios de influência é menor do que a apresentada no caso onde k é igual a 2.

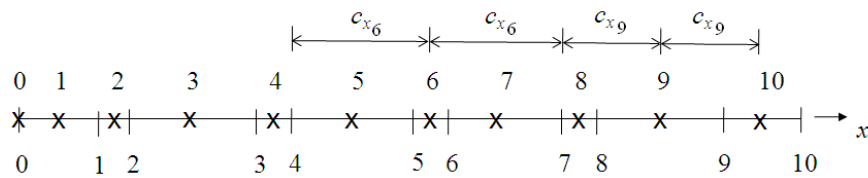


Figura 4.54 - Domínio de influência centrado no sexto e nono pontos de Gauss durante a montagem da matriz global: k igual a 3, d_{max} igual a 1 e domínio com 11 nós.

A Figura 4.55 mostra para k igual a 3, o domínio de influência centrado no sexto nó pertinente ao cálculo do deslocamento. O acréscimo de um nó no critério de busca leva a um aumento no tamanho de dm , permitido que as informações sejam passadas nos dois sentidos da barra. Desta forma, as respostas para k igual a 3 são, em geral, melhores do que as encontradas para k igual a 2.

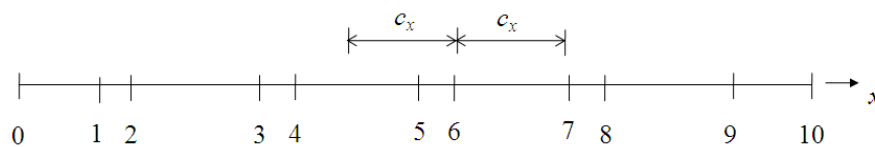


Figura 4.55 - Domínio de influência centrado no sexto nó durante o cálculo do deslocamento: k igual a 3, d_{max} igual a 1,0 e domínio com 11 nós.

O comportamento da função de forma e peso, assim como, de suas derivadas é mostrado, para k igual a 2 e 3 da Figura 4.56 à Figura 4.59. Estes resultados são pertinentes ao processo de integração da matriz de rigidez \mathbf{K} , empregando o fator de escala d_{max} igual a 1,5 e a 4,0. O comportamento dessas funções durante o cálculo do campo de deslocamento é mostrado da Figura 4.60 à Figura 4.63, utilizando os parâmetros de ajustes supracitados.

Diferentemente do caso com distribuição uniforme de nós, verifica-se variações na amplitude das derivadas das funções peso e de forma para um dado nó quando k é igual a 2, conforme apresentado na Figura 4.56, Figura 4.57, Figura 4.60 e Figura 4.61. Tal comportamento decorre do fato dos domínios de influência apresentarem grandes variações em seu tamanho, conforme mostrado na Figura 4.52 e na Figura 4.53.

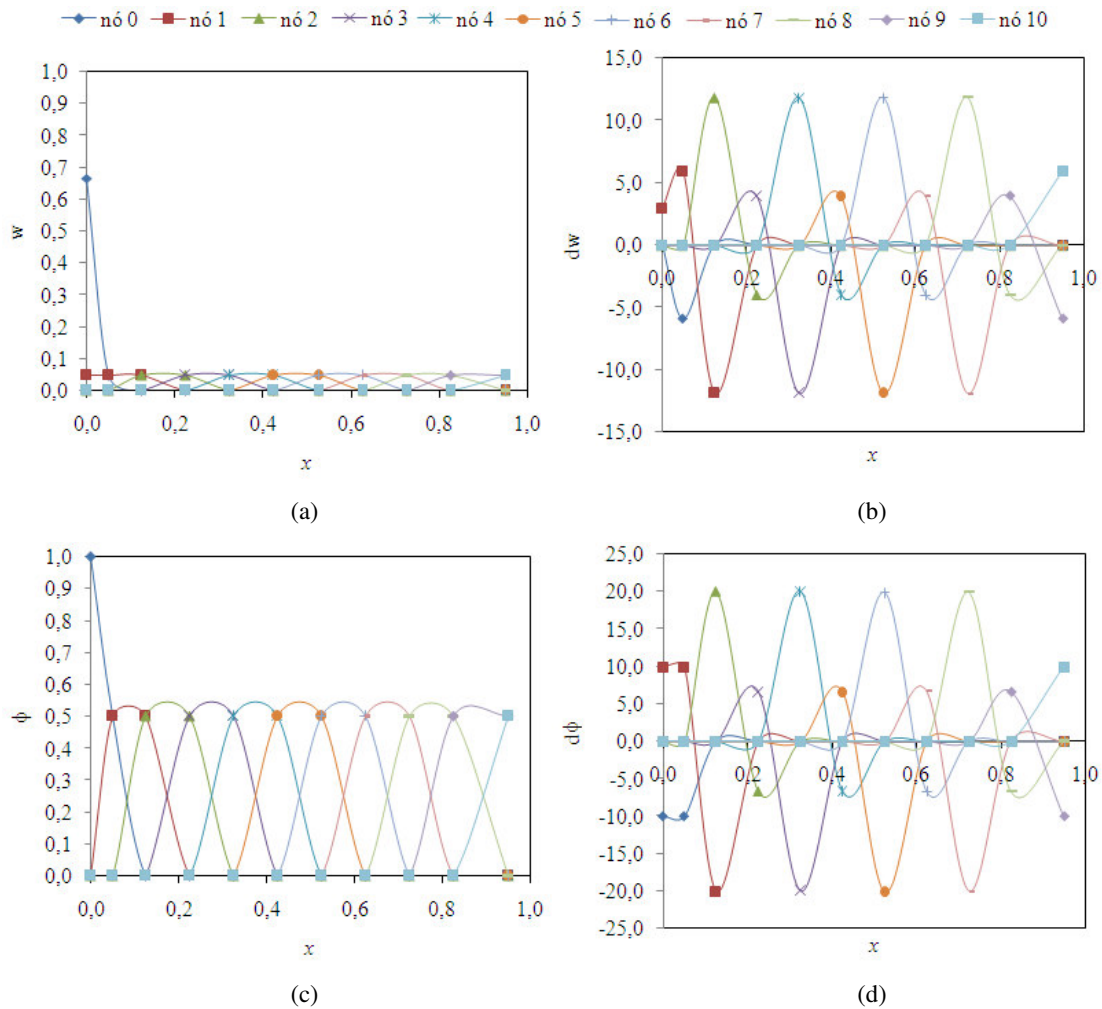


Figura 4.56 - (a) Função peso e (c) de forma, bem como, (b) (d) de suas derivadas durante o cálculo da matriz global: função peso cúbica, k igual a 2 e d_{max} igual a 1,5.

Para k igual a 3, conforme verificado na Figura 4.58, Figura 4.59, Figura 4.62 e Figura 4.63 e, as variações entre os valores máximos e mínimos da derivada da função peso e de forma, para cada nó, não são tão acentuadas quanto para o caso onde k é igual a 2. Isso porque, para k igual a 3, os domínios de influência não apresentam variações tão significativas em seus tamanhos, conforme mostrado na Figura 4.54 e na Figura 4.55.

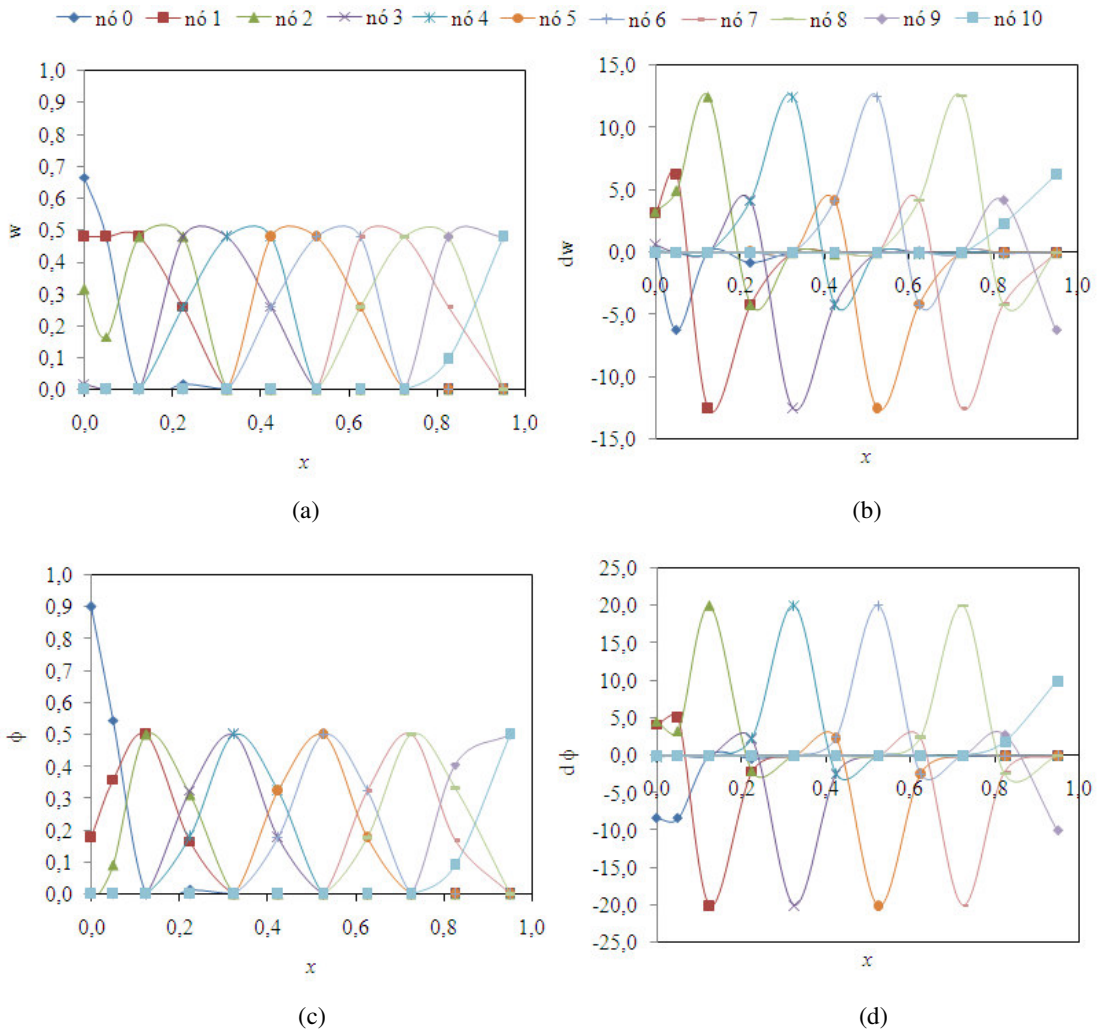


Figura 4.57 - (a) Função peso e (c) de forma, bem como, (b) (d) de suas derivadas durante o cálculo da matriz global: função peso cúbica, k igual a 2 e d_{max} igual a 4,0.

Para k igual a 2, o alargamento do domínio de influência por meio do fator de escala d_{max} leva a uma pequena diminuição na variação entre o valor máximo e mínimo das derivadas para um dado nó. Primeiro, por c_x ser pequeno, para alguns domínios. Assim, mesmo aumentando o valor de d_{max} não ocorre um acréscimo significativo no tamanho de dm (dm praticamente não varia). Segundo, porque o aumento de d_{max} proporciona uma ampliação um pouco mais expressiva no tamanho dos domínios de influência (dm cresce) com valores maiores de c_x .

Para k igual a 3, ocorre uma diminuição um pouco mais acentuada dos valores extremos das derivadas com o aumento de d_{max} , pois os valores de c_x são maiores do que os

encontrados em k igual a 2, fazendo com que d_m cresça de forma mais significativa em todos os domínios de influência com o aumento de d_{max} .

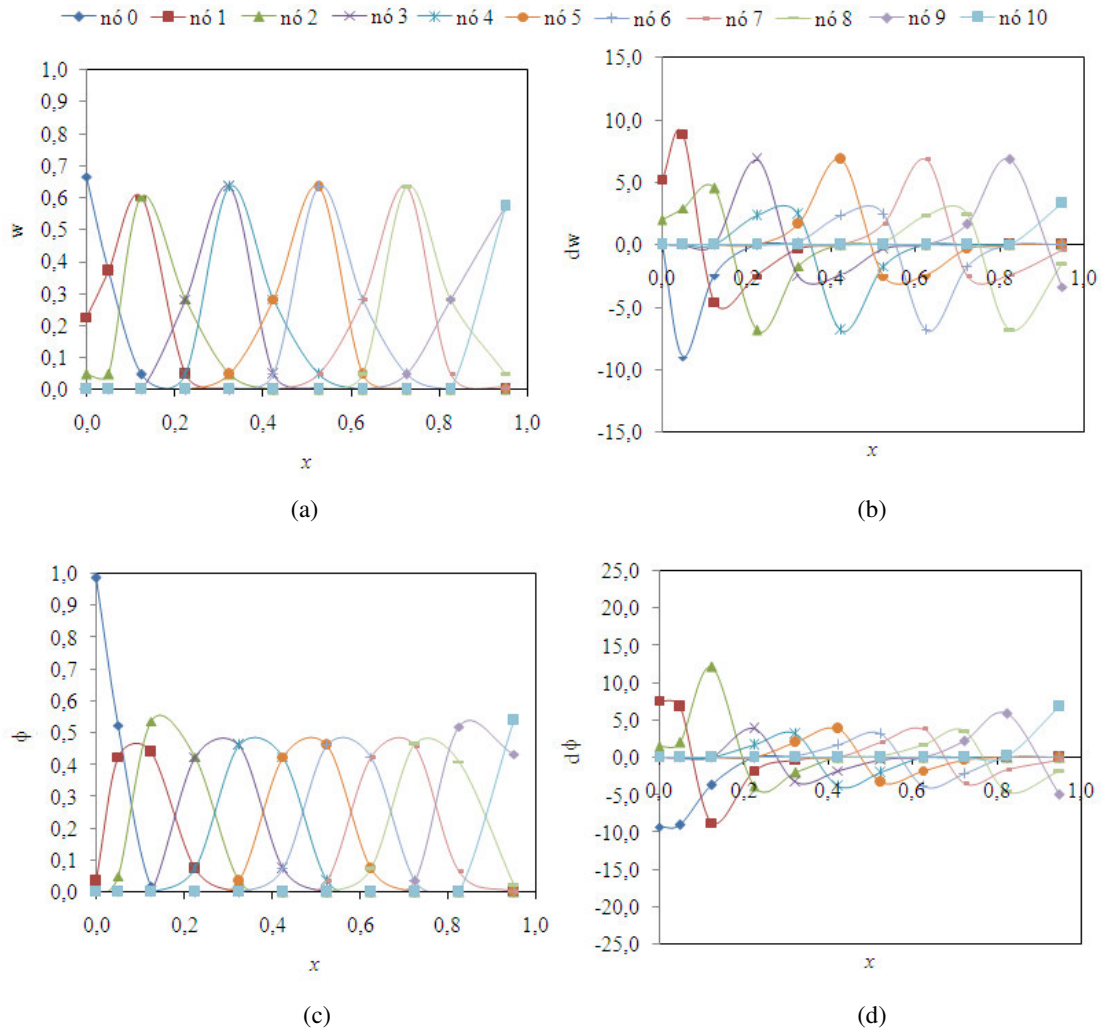


Figura 4.58 - (a) Função peso e (c) de forma, bem como, (b) (d) de suas derivadas durante o cálculo da matriz global: função peso cúbica, k igual a 3 e d_{max} igual a 1,5.

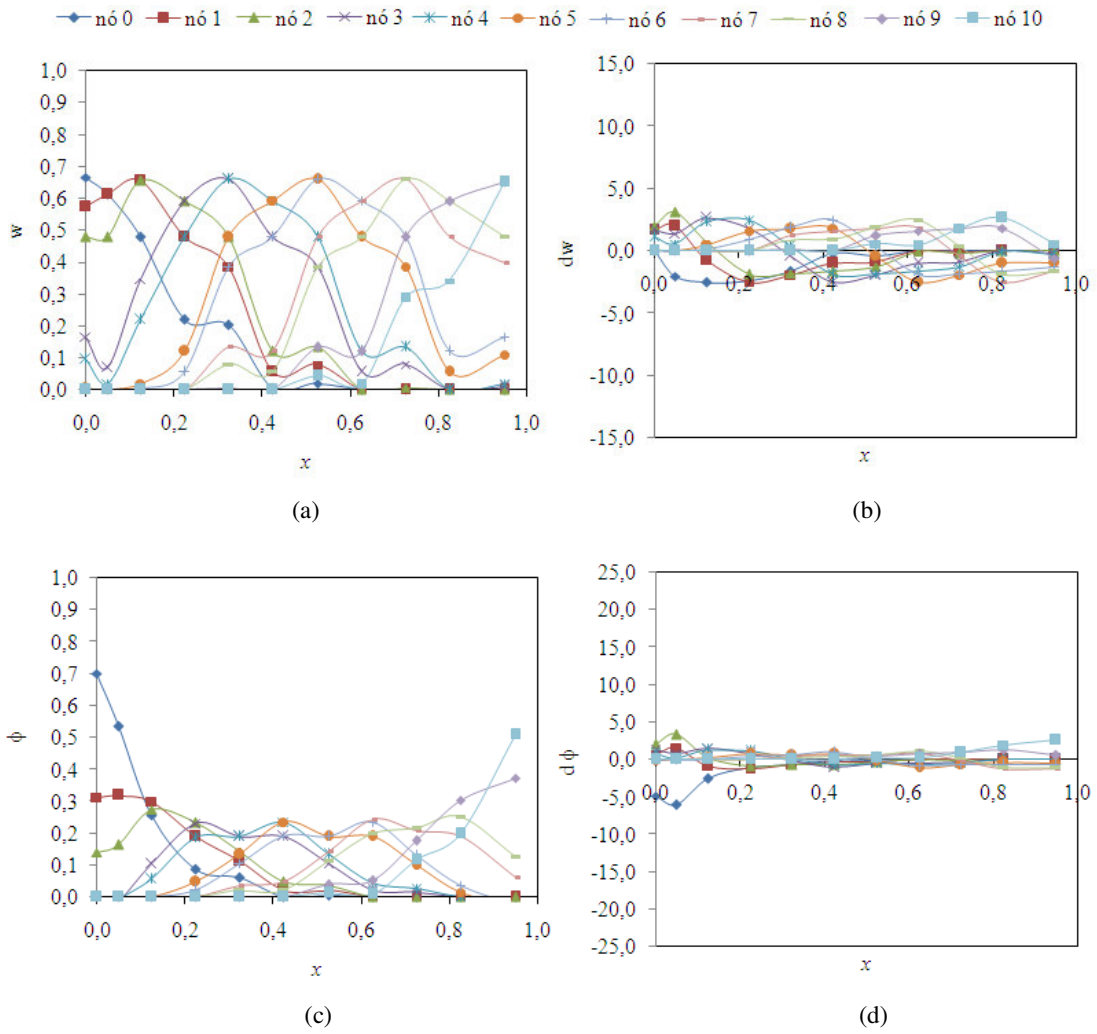


Figura 4.59 - (a) Função peso e (c) de forma, bem como, (b) (d) de suas derivadas durante o cálculo da matriz global: função peso cúbica, k igual a 3 e d_{max} igual a 4,0.

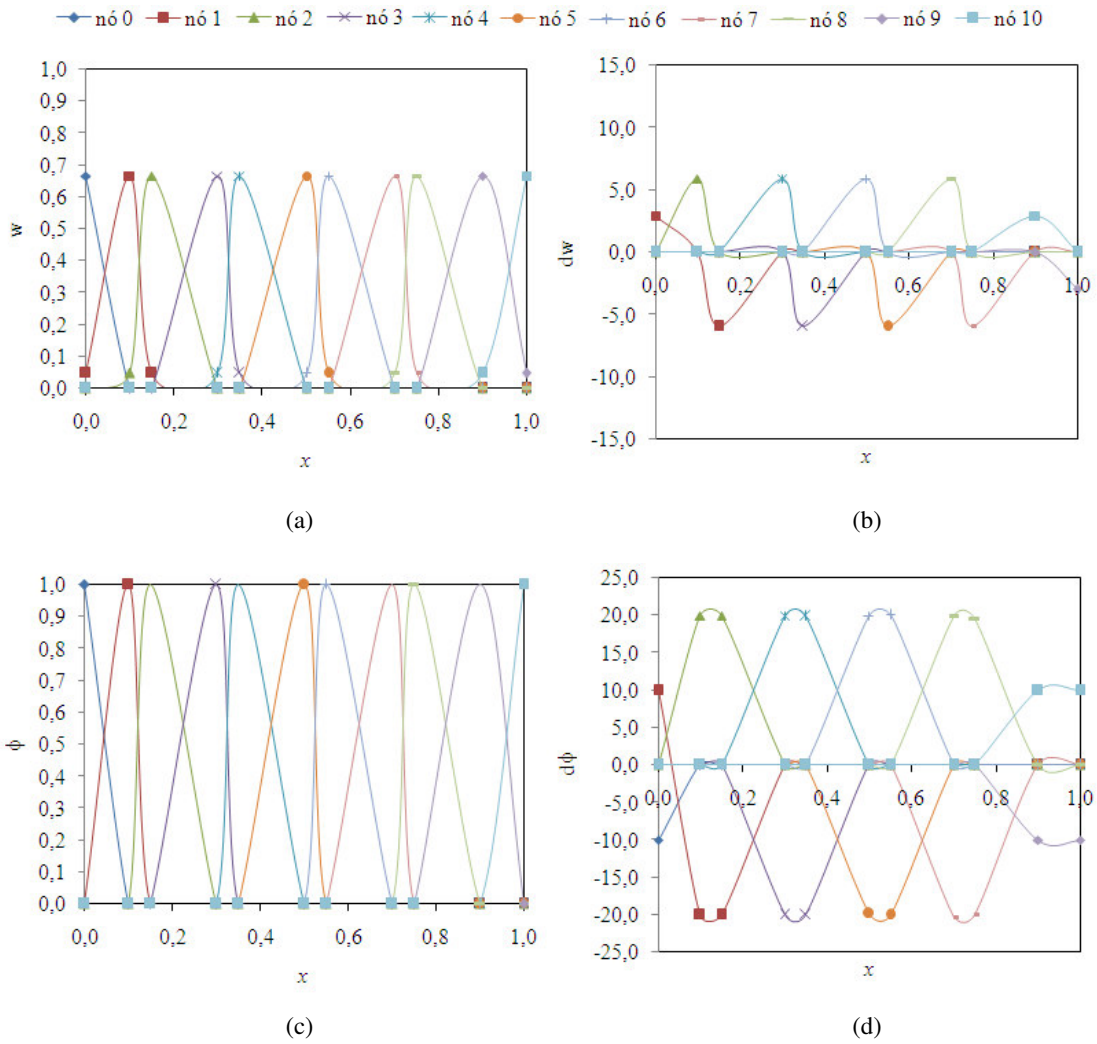


Figura 4.60 - (a) Função peso e (c) de forma, bem como, (b) (d) de suas derivadas durante o cálculo do campo de deslocamento: função peso cúbica, k igual a 2 e d_{max} igual a 1,5.

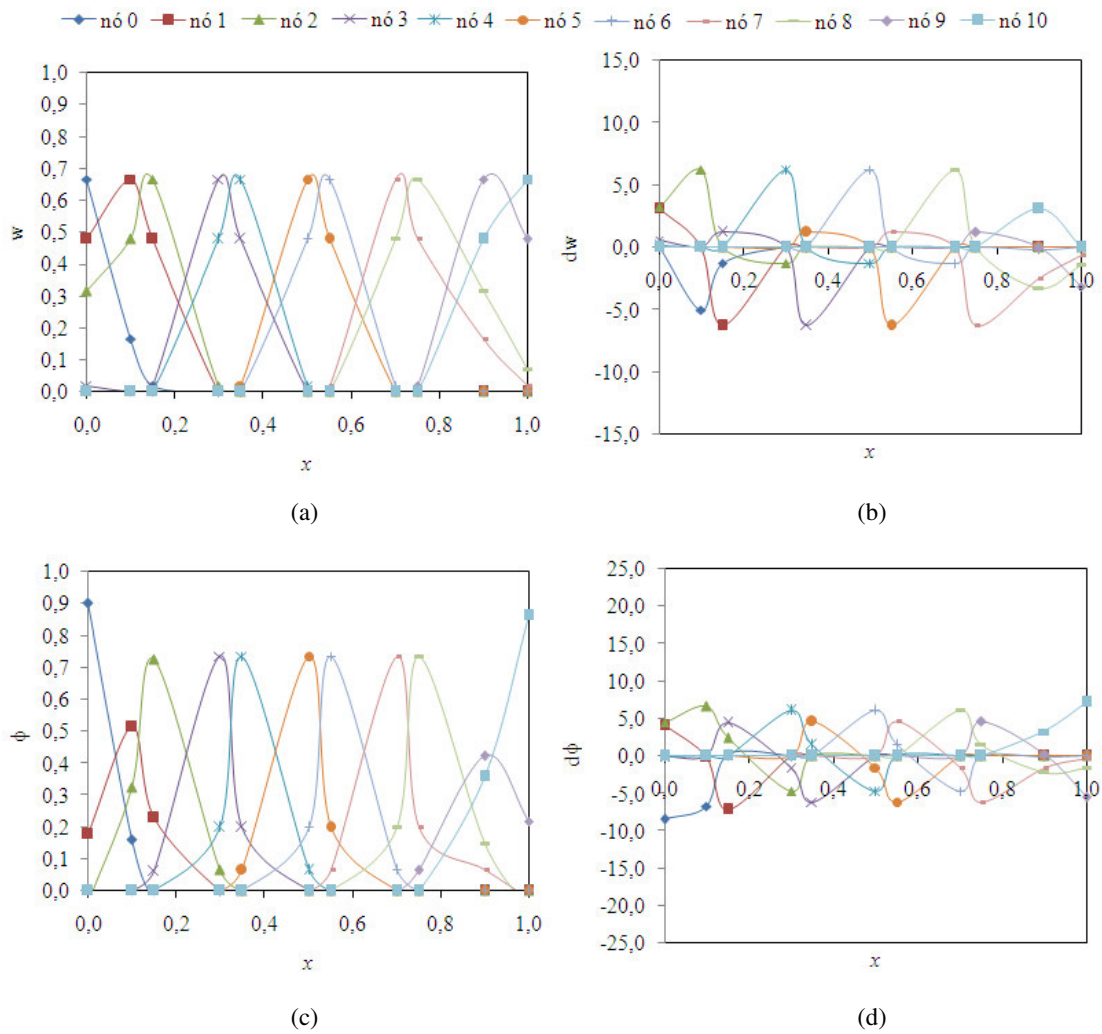


Figura 4.61 - (a) Função peso e (c) de forma, bem como, (b) (d) de suas derivadas durante o cálculo do campo de deslocamento: função peso cúbica, k igual a 2 e d_{max} igual a 4,0.

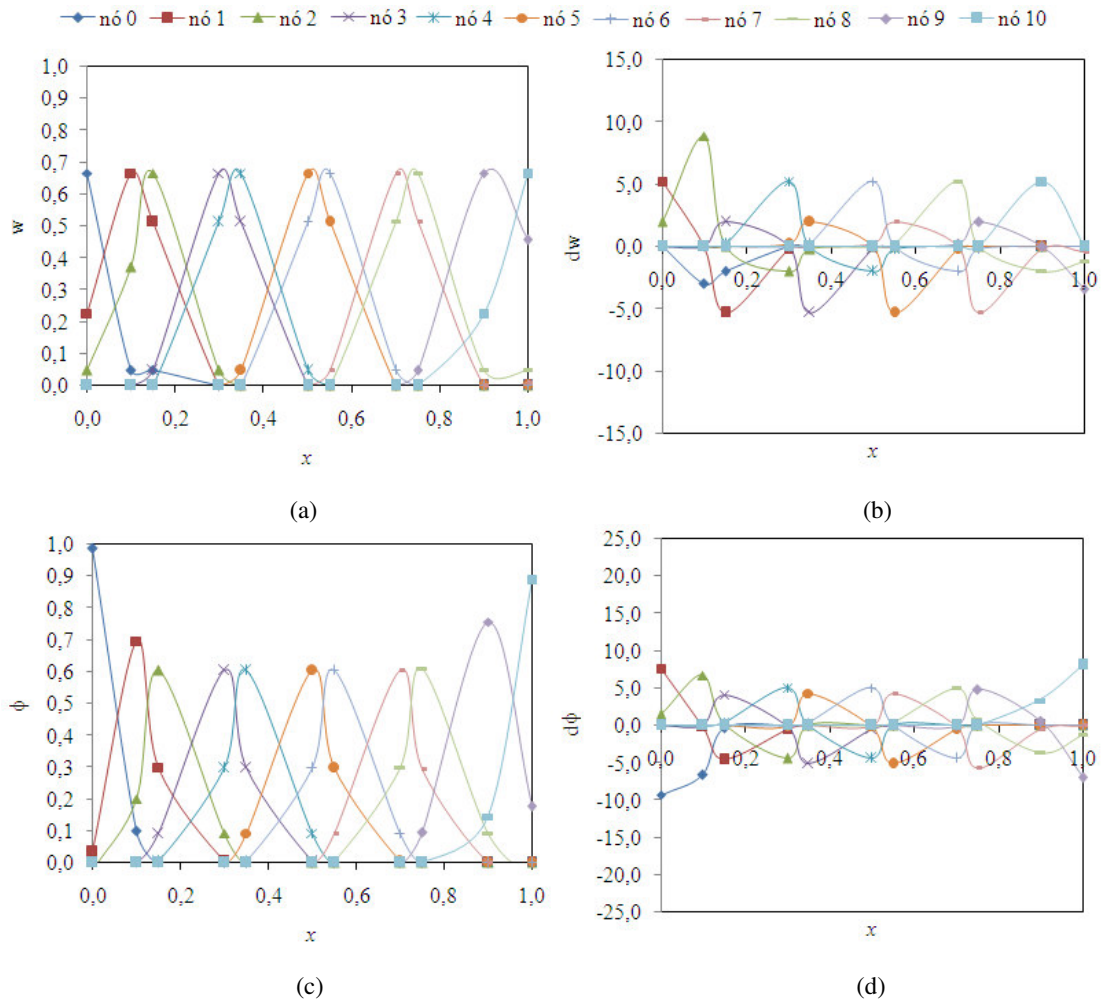


Figura 4.62 - (a) Função peso e (c) de forma, bem como, (b) (d) de suas derivadas durante o cálculo do campo de deslocamento: função peso cúbica, k igual a 3 e d_{max} igual a 1,5.

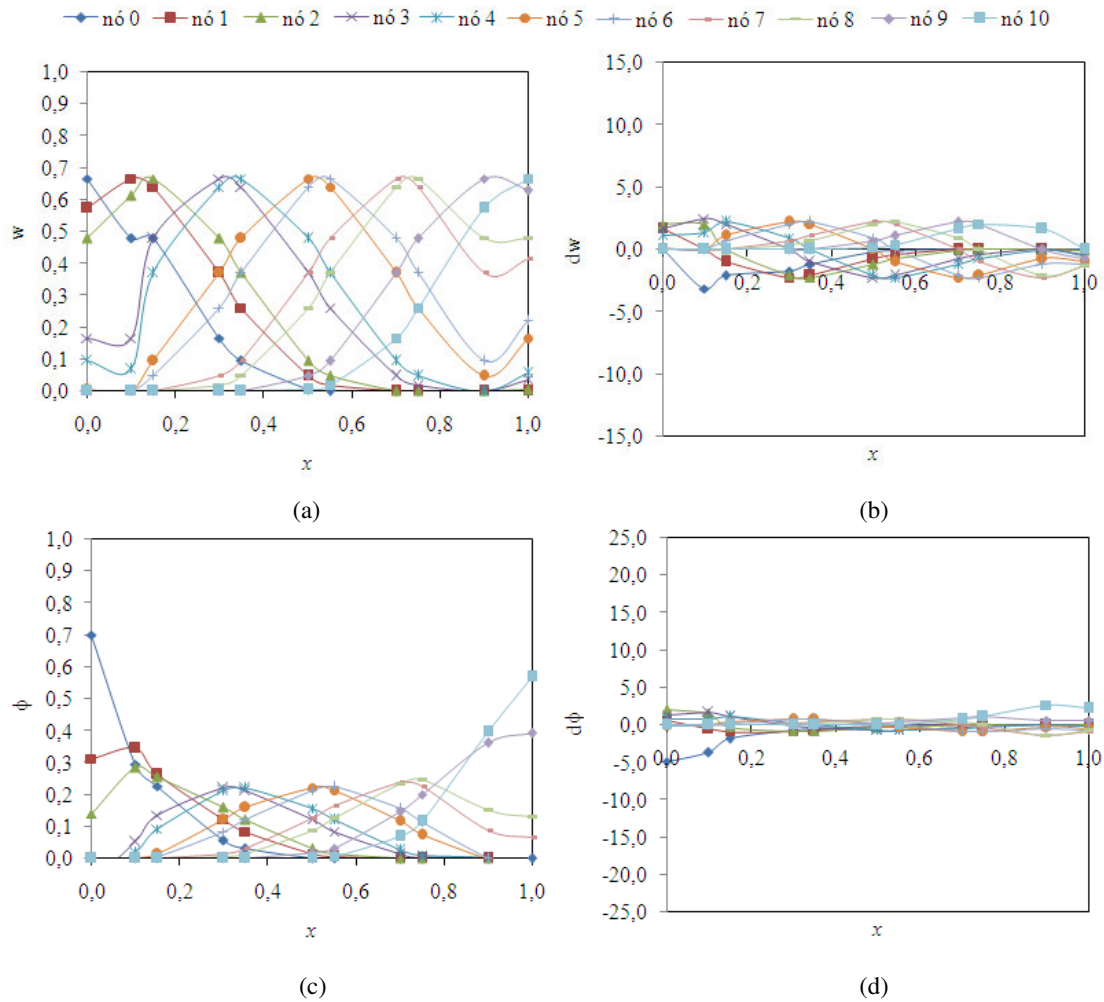


Figura 4.63 - (a) Função peso e (c) de forma, bem como, (b) (d) de suas derivadas durante o cálculo do campo de deslocamento: função peso cúbica, k igual a 3 e d_{max} igual a 4,0.

4.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE O CASO UNIDIMENSIONAL

Este capítulo apresenta uma análise da resposta do método de Galerkin sem malha por meio de variações em alguns dos parâmetros relacionados à construção da função de forma e de sua derivada. Foram analisados o tipo da função peso, o tamanho do domínio de influência, o número de nós no domínio e o tipo da distribuição nodal. De acordo com as análises apresentadas para o caso unidimensional, assumiram-se como aceitáveis as normas de erro para os campos de deslocamento e de deformação com valores até 10^{-1} .

Para domínios de influência com tamanho constante, o efeito da função peso na resposta do método EFG foi analisado em um domínio composto por 11 nós uniformemente

distribuídos. Para tanto, as funções peso cônicas de primeira e segunda ordem, bem como as funções peso *spline* de terceira, quarta e quinta ordem foram avaliadas. A Tabela 4.4 apresenta, para cada uma destas funções, a faixa de d_{max} que possui normas de erros com valores até 10^{-1} . Estes resultados têm como base as respostas indicadas na Figura 4.14. As funções peso cônica de primeira e segunda ordem apresentaram valores de erro superiores a 10^{-1} .

Tabela 4.4 - Faixa de d_{max} onde as normas do erro não são superiores a 10^{-1} , para as cinco funções peso testadas em um domínio com 11 nós.

Função peso	Domínio com 11 nós uniformemente distribuídos <i>dm</i> constante		
	Faixa de d_{max} para o deslocamento	Faixa de d_{max} para a deformação	Faixa final de d_{max} para simulação
Cônica 1	---	---	---
Cônica 2	---	---	---
Cúbica <i>spline</i>	1,5 - 3,0	1,5 - 2,5	1,5 - 2,5
Quártica <i>spline</i>	1,5 - 4,0	1,5 - 2,5	1,5 - 2,5
Quinta ordem <i>spline</i>	1,5 - 4,0	1,5 - 4,0	1,5 - 4,0

Em domínios com distribuições nodais uniformes e *dm* constante, analisou-se ainda o efeito da variação da concentração nodal. Desta forma foram testados domínios empregando 11, 51 e 101 nós utilizando a função peso cúbica *spline*, Figura 4.17. A Tabela 4.5 mostra as faixas de d_{max} para as quais as normas do erro dos campos de deformação e de deslocamento assumem valores até 10^{-1} . Com a Figura 4.17 verifica-se que o aumento do número de nós no domínio melhora as respostas obtidas pelo EFG para valores de d_{max} até 2,5. Uma vez que, para valores de d_{max} maiores do que 2,5 podem ocorrer certa perda de localidade nas aproximações. Assim, nos casos com maior número de domínios de influência, ou seja, em domínios com maiores concentrações nodais este efeito é percebido em cada *dm*.

A construção do domínio de influência considerando os *k* nós mais próximos também foi avaliada para configuração nodal uniforme. Para *k* igual a 2, a Tabela 4.6 e a Tabela 4.7 indicam, respectivamente, para 11 e 51 nós as faixas de d_{max} onde as normas dos erros não são superiores a 10^{-1} para as funções peso analisadas. Os resultados pertinentes ao domínio composto por 101 nós foram suprimidos uma vez que não foi obtida nenhuma faixa

adequada de d_{max} . Para as três concentrações nodais e k igual a 3 as faixas de d_{max} consideradas válidas são apresentadas da Tabela 4.8 à Tabela 4.10.

Tabela 4.5 - Faixa de d_{max} onde as normas do erro não são superiores a 10^{-1} , para os domínios com 11, 51 e 101 nós e função peso cúbica *spline*.

Concentração nodal	Função peso cúbica <i>spline</i> - dm constante		
	Faixa de d_{max} para o deslocamento	Faixa de d_{max} para a deformação	Faixa final de d_{max} para simulação
11 nós	1,5 - 3,0	1,5 - 2,5	1,5 - 2,5
51 nós	1,5 - 3,0	1,5 - 2,5	1,5 - 2,5
101 nós	1,5 - 3,0	1,5 - 2,5	1,5 - 2,5

Tabela 4.6 - Faixa de d_{max} onde as normas do erro não são superiores a 10^{-1} , para as funções peso testadas em um domínio com 11 nós e k igual a 2.

Função peso	Domínio com 11 nós uniformemente distribuídos $k = 2$		
	Faixa de d_{max} para o deslocamento	Faixa de d_{max} para a deformação	Faixa final de d_{max} para simulação
Cônica2	1,5 - 2,5	1,5 - 2,5	1,5 - 2,5
Cúbica <i>spline</i>	1,5 - 4,0	1,5 - 3,5	1,5 - 3,5
Quártica <i>spline</i>	1,5 - 4,0	1,5 - 3,5	1,5 - 3,5
Quinta ordem <i>spline</i>	1,5 - 4,0	1,5 - 4,0	1,5 - 4,0

Tabela 4.7 - Faixa de d_{max} onde a norma do erro não é superior a 10^{-1} , para as funções peso testadas em um domínio com 51 nós e k igual a 2.

Função peso	Domínio com 51 nós uniformemente distribuídos $k = 2$		
	Faixa de d_{max} para o deslocamento	Faixa de d_{max} para a deformação	Faixa final de d_{max} para simulação
Cônica2	4,0	---	---
Cúbica <i>spline</i>	---	---	---
Quártica <i>spline</i>	3,0 - 4,0	---	---
Quinta ordem <i>spline</i>	---	---	---

Tabela 4.8 - Faixa de d_{max} onde a norma do erro não é superior a 10^{-1} para as funções peso testadas em um domínio com 11 nós e k igual a 3.

Função peso	Domínio com 11 nós uniformemente distribuídos k = 3		
	Faixa de d_{max} para o deslocamento	Faixa de d_{max} para a deformação	Faixa final de d_{max} para simulação
Cônica2	1,5	1,5	1,5
Cúbica <i>spline</i>	1,5 - 2,0	1,5	1,5
Quártica <i>spline</i>	1,5 - 2,5	1,5	1,5
Quinta ordem <i>spline</i>	1,5 - 4,0	1,5 - 4,0	1,5 - 4,0

Tabela 4.9 - Faixa de d_{max} onde a norma do erro não é superior a 10^{-1} , para as funções peso testadas em um domínio com 51 nós e k igual a 3.

Função peso	Domínio com 51 nós uniformemente distribuídos k = 3		
	Faixa de d_{max} para o deslocamento	Faixa de d_{max} para a deformação	Faixa final de d_{max} para simulação
Cônica2	1,5	---	---
Cúbica <i>spline</i>	1,5 - 2,0	---	---
Quártica <i>spline</i>	1,5 - 3,5	---	---
Quinta ordem <i>spline</i>	1,5 - 4,0	---	---

Tabela 4.10 - Faixa de d_{max} onde a norma do não é superior a 10^{-1} , para as funções peso testadas em um domínio com 101 nós e k igual a 3.

Função peso	Domínio com 101 nós uniformemente distribuídos k = 3		
	Faixa de d_{max} para o deslocamento	Faixa de d_{max} para a deformação	Faixa final de d_{max} para simulação
Cônica2	---	---	---
Cúbica <i>spline</i>	---	---	---
Quártica <i>spline</i>	3,0 - 4,0	---	---
Quinta ordem <i>spline</i>	3,5 - 4,0	---	---

Nas simulações unidimensionais utilizando distribuições uniformes de nós, o método EFG obtém valores dentro do intervalo determinado como aceitável para as normas de erro dos campos de deslocamento e de deformação ($\leq 10^{-1}$), tanto para os domínios de influência com tamanho constante como para aqueles com tamanho definido por busca.

Nas simulações com dm constante, as três funções peso *spline* apresentam faixas de d_{max} cujas normas de erro obtidas estão dentro do limite assumido como tolerável, conforme valores apresentados na Tabela 4.4. A função peso de quinta ordem destaca-se por seus resultados válidos para toda faixa de d_{max} examinada. A Tabela 4.5 mostra que para as três concentrações nodais a função peso testada manteve a mesma faixa de d_{max} .

Para o caso de busca com distribuição uniforme, um refinamento nodal muito elevado do domínio pode, em alguns casos, propiciar o aparecimento de domínios de influência com tamanhos pequenos. Deste modo, as derivadas da função peso e de forma passam a ter valores elevados (Figura 4.40 à Figura 4.45), o que pode levar a resultados espúrios, Figura 4.38. Para k igual a 2, este efeito aparece mais claramente, pois os valores de dm são menores do que para k igual a 3. Assim, os dois domínios com maiores concentrações nodais, 51 e 101 nós, apresentam valores para as normas dos erros superiores a 10^{-1} , tanto para $k = 2$ quanto para $k = 3$. Por outro lado, para a distribuição com 11 nós as respostas foram melhores quando k é igual a 2. Isto porque para o caso de busca o valor de k não deve ser elevado, uma vez que os nós próximos às extremidades não possuem nós vizinhos em ambas as direções e, em geral, passam a ter perda de localidade por terem tamanhos maiores para seus domínios de influência. Para os domínios com distribuições não-uniformes de nós e empregando k igual a 2 e 3 foram verificados valores superiores a 10^{-1} apenas para as normas de erro dos campos de deformação. Assim, nenhuma faixa de funcionamento para d_{max} foi determinada. Contudo, algumas considerações importantes podem ser feitas com relação ao funcionamento do método.

- Na distribuição não-uniforme de nós, o acréscimo de um nó no critério de busca (k igual a 3), leva a um aumento no tamanho do domínio de influência, permitindo que as informações sejam passadas nos dois sentidos da barra. Desta forma, as respostas para $k = 3$, Figura 4.50, são geralmente melhores do que as obtidas com k igual a 2, Figura 4.51. No entanto, estes resultados não são satisfatórios.
- Pelo fato da distribuição ser não-uniforme, pode ocorrer que alguns domínios de influência tenham derivadas elevadas em decorrência do valor de c_x ser pequeno. Por outro lado, outros domínios de influência podem apresentar perda da localidade devido ao fato de c_x ser proporcionalmente grande (ver Figura 4.52). Portanto, neste

tipo de distribuição a matriz global é afetada pelos dois efeitos descritos, em uma mesma simulação.

Por fim, podem ser feitas algumas considerações sobre os resultados obtidos.

- O domínio de influência deve possuir pelo menos dois nós com ponderação não nula para que haja conectividade entre domínios de influência para que a matriz global possa ser montada e os deslocamentos calculados.
- O aumento do domínio de influência, dm , pode levar à perda da localidade nas aproximações feitas. Esta perda da localidade afeta de modo menos acentuado o valor da função de forma do que sua derivada, por duas razões. Primeiro, porque a suavidade da função peso fica evidenciada por suas derivadas, visto que a ordem destas derivadas é decrescida, uma vez que as funções peso empregadas são polinomiais (cônicas e *spline*). Este efeito é mais visível nas funções cônicas, por terem ordens mais baixas e serem menos suaves (Figura 4.4, Figura 4.12 e Figura 4.14). Assim, as funções cônicas testadas mostraram-se, em geral, menos adequadas para realizar as aproximações locais, mesmo satisfazendo as condições necessárias para serem funções peso. Segundo, porque ocorre um achatamento da função de forma com o aumento de d_{max} , devido ao acréscimo de nós por dm . Tal fato leva a uma diminuição nos valores da função no nó, uma vez que esta função é uma partição da unidade para cada dm . A derivada da função de forma também tende a se achatar e alargar, porém esta tem uma maior tendência a se tornar mais plana do que a função de forma (Figura 4.24 e Figura 4.25).
- O aumento ou a diminuição acentuada no tamanho do domínio de influência tende a afetar de forma mais incisiva o campo de deformação.
- Nota-se que a distribuição nodal uniforme permite encontrar respostas para os campos de deslocamento e de deformação com normas de erro dentro do limite estabelecido como válido neste trabalho. Assim, quanto mais uniforme for a distribuição nodal maior a perspectiva de se obter repostas adequadas. Nota-se, ainda, que a uniformidade, ou seja, a constância no tamanho de dm , permite obter

respostas válidas tanto para as funções *spline* testadas como para as concentrações nodais analisadas. Assim, as melhores respostas obtidas no método EFG estão associadas a uniformidades tanto na distribuição nodal como no tamanho dos domínios de influência durante as simulações, uma vez que dm com tamanho constante propicia uniformidade nas ponderações locais, w . Isto porque o termo de normalização do comprimento característico, r , permanece o mesmo durante toda a simulação.

- Neste trabalho foram analisados sete valores de d_{max} entre 1,0 e 4,0 ($d_{max} = 1,0, 1,5, 2,0, 2,5, 3,0, 3,5$ e 4,0). O uso de d_{max} igual a 1,0 mostrou-se inapropriado, uma vez que atribui peso nulo aos nós localizados sobre a fronteira de dm ocasionando, assim, uma falta de conectividade entre os domínios de influência. Deste modo, d_{max} deve ser maior que 1,0 para casos onde c_x é definido pelo espaçamento nodal ou por busca empregando valores pequenos para k .
- Mesmo para o caso onde a distribuição de nós é uniforme e o domínio de influência tem seu tamanho constante (Tabela 4.4 e Tabela 4.5) foi possível verificar que o tipo de função peso empregada afeta diretamente a faixa de d_{max} .
- Segundo Dolbow e Belytschko (1998) o fator de escala d_{max} está usualmente entre 2,0 e 4,0, em se tratando de análises estáticas. Contudo, todos os casos avaliados que apresentaram faixas de d_{max} válidas para os dois campos analisados indicaram 1,5 como sendo o limite inferior deste fator de escala. Verificou-se ainda que para estes casos a função peso *spline* de quinta ordem foi a única que apresentou limite superior de d_{max} igual a 4,0. Neste trabalho 4,0 foi o maior valor de d_{max} testado e 1,5 foi o menor valor de d_{max} válido, uma vez que d_{max} igual a 1,0 leva a resultados espúrios.

De acordo com as análises feitas pode-se tecer alguns considerações na escolha do valor de d_{max} em problemas unidimensionais estáticos.

- O fator de escala d_{max} deve ser maior de 1,0 pelas razões mencionadas.

- Deve-se iniciar os testes com valores de d_{max} próximos a 1,5, uma vez que todos os casos considerados válidos incluem este valor de d_{max} em sua faixa de funcionamento. Caso as normas de erro dos campos de deslocamento e de deformação sejam superiores a 10^{-1} , d_{max} deve ser lentamente acrescido até valores próximos a 2,5.

5 ANÁLISE BIDIMENSIONAL

Os resultados apresentados neste capítulo visam à validação do programa bidimensional implementado em linguagem C, bem como analisar a resposta do método EFG em relação a alguns de seus parâmetros de ajuste: tamanho do domínio de influência, função peso utilizada, número e distribuição dos nós no domínio. A norma da energia, Equação (5.1), e as normas do erro relativo percentual para os campos de deslocamento, tensão normal, Equações (5.2) e (5.3), e tensão cisalhante são utilizadas para verificar a acuracidade das soluções geradas pelo método.

$$\text{norma de energia} = \left(\frac{1}{2} \iint (\boldsymbol{\varepsilon}_{num} - \boldsymbol{\varepsilon}_{exata})^T D (\boldsymbol{\varepsilon}_{num} - \boldsymbol{\varepsilon}_{exata}) dx dy \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.1)$$

$$L_u = \frac{\sqrt{\int_{\Omega} (u_{num} - u_{exato})^T \cdot (u_{num} - u_{exato}) d\Omega}}{\sqrt{\int_{\Omega} u_{exato}^T \cdot u_{exato} d\Omega}} \times 100 (\%) \quad \text{para o deslocamento, e} \quad (5.2)$$

$$L_{\sigma} = \frac{\sqrt{\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_{num} - \boldsymbol{\sigma}_{exato})^T \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{num} - \boldsymbol{\sigma}_{exato}) d\Omega}}{\sqrt{\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{exato}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_{exato} d\Omega}} \times 100 (\%) \quad \text{para tensão normal.} \quad (5.3)$$

O programa foi testado nas seguintes situações: condições de referência para validação do código, influência da função peso, variação do tamanho do domínio de influência e nós distribuídos não-uniformemente no domínio com dm constante e definido por busca. O Apêndice A apresenta uma comparação dos resultados do EFG com os do MEF. Todos os resultados apresentados neste capítulo são relativos a uma viga engastada com dimensões em x e y iguais a 48×12 (unidades de comprimento, SI), conforme a Figura 3.3, com módulo de elasticidade, E , igual a 30×10^6 (unidades de pressão, SI) e coeficiente de Poisson, ν , igual a 0,3. A carga P aplicada é igual a 1.000 (unidades de força, SI), conforme a Figura 3.1. Em todas as simulações do EFG, foram utilizados 4 pontos de Gauss em cada uma das direções das células de integração. Villa Verde *et. al.* (2007 e 2008a) mostram alguns resultados obtidos para o caso bidimensional.

5.1 VALIDAÇÃO

A validação do programa foi feita por meio da comparação dos valores numéricos dos campos de tensão e de deslocamento com as respectivas soluções analíticas. Para a validação, foram utilizados 55 nós distribuídos uniformemente na viga apresentada na Figura 3.3, seguindo a relação 11×5. Obtém-se, assim, a distribuição nodal representada na Figura 3.4. Para este domínio, a malha de fundo empregada é composta por 40 células de integração, conforme mostrado na Figura 3.5. O domínio de influência utilizado é retangular e o fator de escala d_{max} empregado é igual a 3,5. Os valores de c_{xI} e c_{yI} são constantes e respectivamente iguais ao comprimento e altura das células de integração (espaçamento nodal). A função peso utilizada é a cúbica *spline*. Da Figura 5.1 à Figura 5.3 são mostrados os campos de deslocamento em y , tensão normal e tensão cisalhante nos 55 pontos nodais do domínio.



Figura 5.1 - Deslocamento na direção y calculado nos 55 nós do domínio.

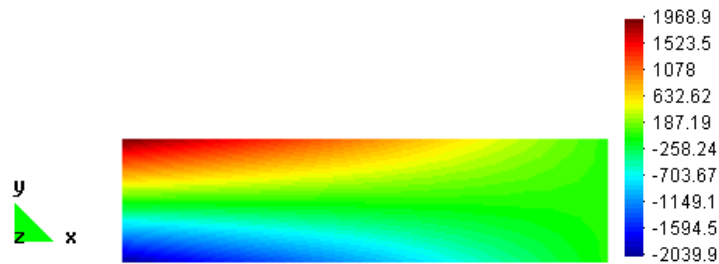


Figura 5.2 - Tensão normal ao longo da viga calculada nos 55 nós do domínio.

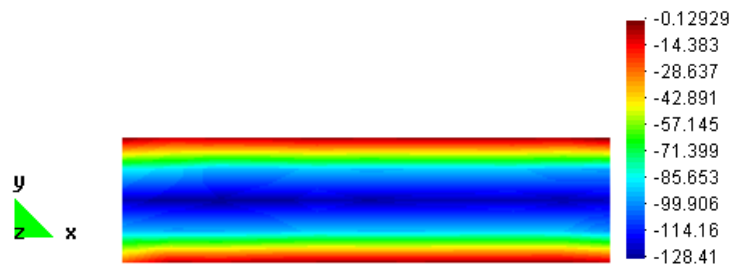


Figura 5.3 - Tensão cisalhante ao longo da viga calculada nos 55 nós do domínio.

Na Figura 5.4 e a Figura 5.5 são mostrados os gráficos das tensões cisalhante e normal calculadas nos 640 pontos amostrais de Gauss. Por meio destes, é possível verificar a resposta dos campos de tensão ao longo da viga.

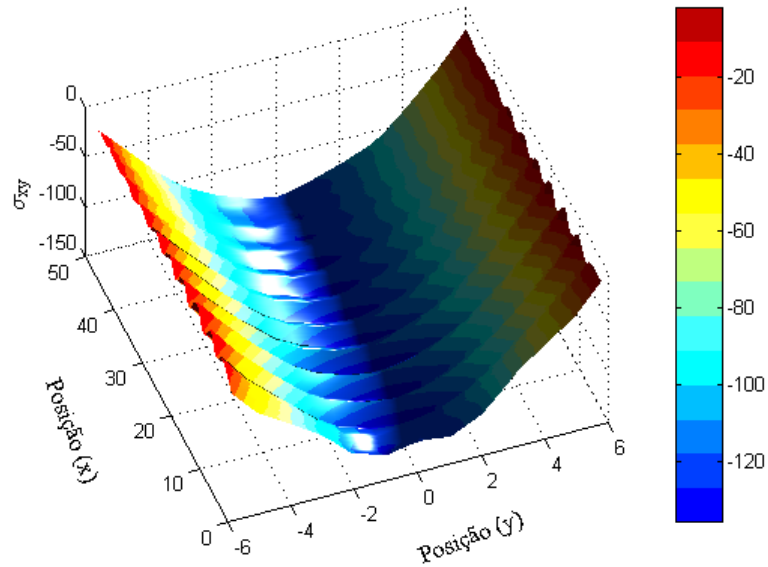


Figura 5.4 - Gráfico da tensão de cisalhamento calculada nos pontos amostrais de Gauss.

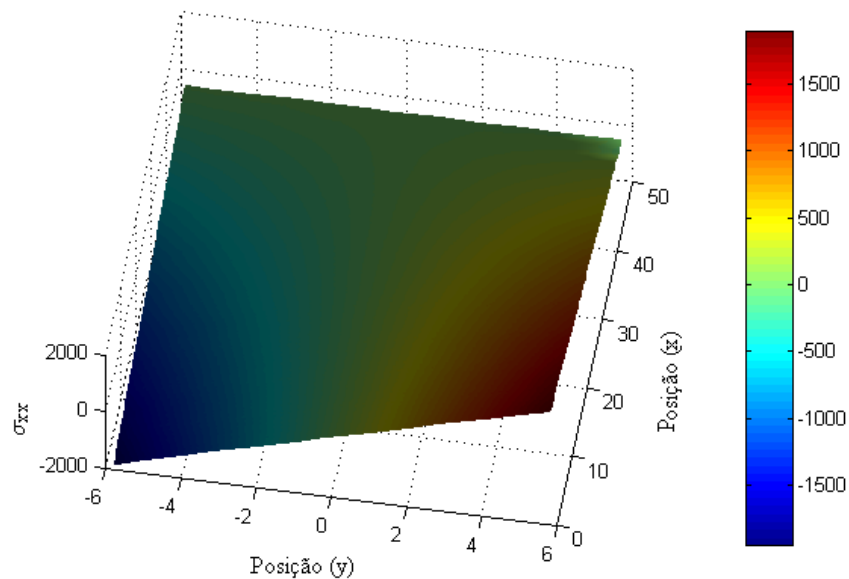


Figura 5.5 - Gráfico da tensão normal calculada nos pontos amostrais de Gauss.

Da Figura 5.1 à Figura 5.5 pode-se ter um melhor entendimento qualitativo e quantitativo dos valores numéricos obtidos para os pontos nodais do domínio e para os pontos

amostrais de Gauss. A Figura 5.6 e a Figura 5.7 mostram a comparação dos valores obtidos nos pontos amostrais de Gauss com os valores analíticos para três seções da viga.

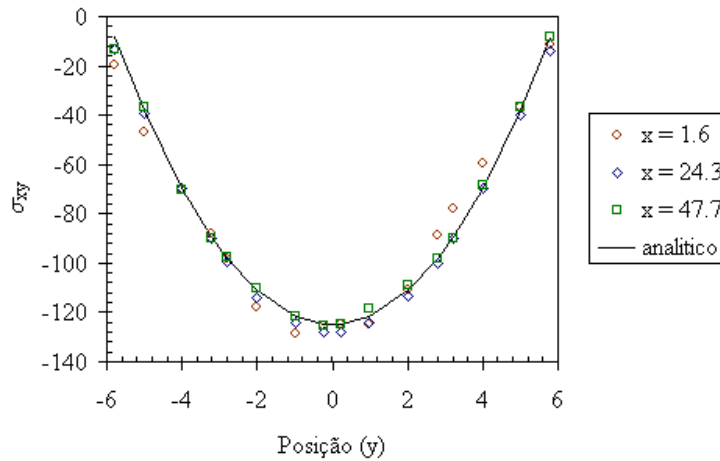


Figura 5.6 - Tensão de cisalhamento em três seções longo da viga (pontos amostrais de Gauss, função cúbica *spline*).

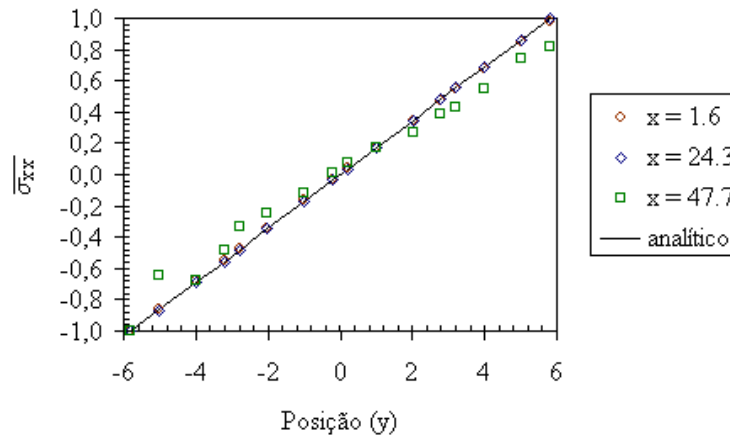


Figura 5.7 - Tensão normal em três seções ao longo da viga. $\overline{\sigma_{xx}}$ é a tensão normal normalizada pelo seu valor analítico máximo obtido em cada seção x (pontos amostrais de Gauss, função cúbica *spline*).

Alterando apenas a função peso utilizada, de cúbica para quártica *spline*, os valores obtidos nos pontos amostrais de Gauss e os valores analíticos nas mesmas três seções da viga são mostrados na Figura 5.8 e na Figura 5.9.

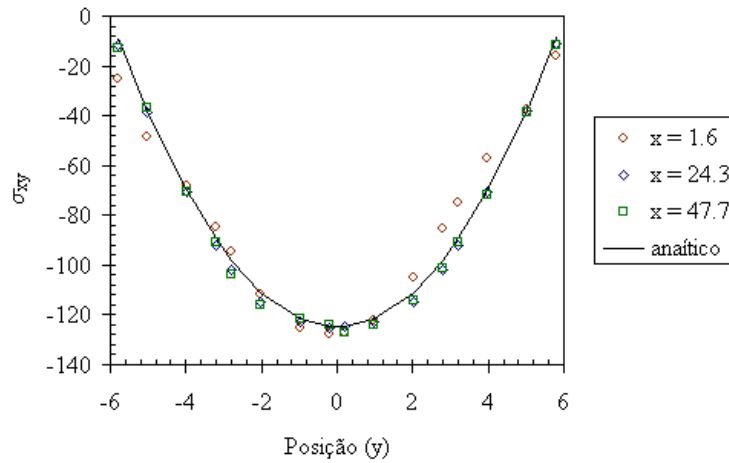


Figura 5.8 - Tensão de cisalhamento em três seções ao longo da viga (pontos amostrais de Gauss, função quártica *spline*).

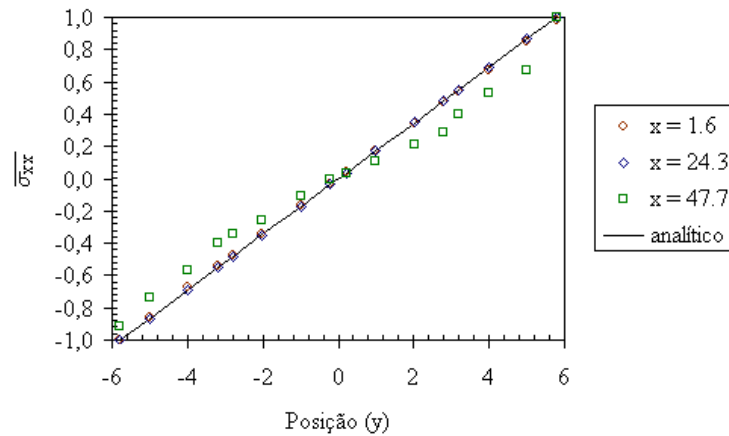


Figura 5.9 - Tensão normal em três seções ao longo da viga. $\overline{\sigma_{xx}}$ é a tensão normal normalizada pelo seu valor analítico máximo obtido em cada seção x (pontos amostrais de Gauss, função peso quártica *spline*).

A Tabela 5.1 e a Tabela 5.2 apresentam os erros calculados utilizando a norma da energia e a norma do erro relativo, respectivamente.

Tabela 5.1 - Erro calculado pela norma da energia.

Cálculo das tensões	Norma da energia	
	Cúbica <i>spline</i>	Quártica <i>spline</i>
Nos pontos amostrais de Gauss	0,0262	0,0300
Nos pontos nodais do domínio	0,0077	0,0124

Tabela 5.2 - Erro calculado pela norma do erro relativo.

Nós do domínio	Cúbica <i>spline</i>	Quártica <i>spline</i>
Deslocamento em y	0,128 %	0,244 %
Tensão normal	1,166 %	0,986 %
Tensão cisalhante	9,303 %	18,182 %

Os parâmetros de ajuste (d_{max} , função peso, carregamento, constantes materiais, etc.) utilizados na validação foram os mesmos empregados por Dolbow e Belytschko (1998), uma vez que produzem respostas satisfatórias para o mesmo problema. Os erros gerados apresentados nas Tabela 5.1 e Tabela 5.2 são pequenos e a resposta fornecida pelo programa está próxima da solução analítica. Nota-se ainda que os resultados mostrados foram melhores para a função cúbica *spline* do que para a quártica. Isso se deve ao fato do valor de d_{max} proposto por Dolbow e Belytschko (1998) estar relacionado mais especificamente à primeira função peso.

Os resultados obtidos para o cálculo das tensões nos nós do domínio mostram-se válidos conforme visualizações mostradas na Figura 5.2 e na Figura 5.3.

5.2 INFLUÊNCIA DA FUNÇÃO PESO

De forma a verificar a influência da função peso na resposta do EFG, foram testadas as sete funções descritas da Equação (2.74) à Equação (2.80). Estas funções peso estão representadas graficamente, da Figura 5.10 à Figura 5.14, em função do comprimento normalizado, r .

A Figura 5.10 mostra o comportamento das três funções peso *spline* descritas da Equação (2.74) à Equação (2.76). Duas funções exponenciais foram avaliadas para 5 valores de α (0,1; 0,2; 0,3; 0,4 e 0,5). A função peso Exp1, Equação (2.77), apresenta um decaimento mais acentuado que a Exp2, Equação (2.78), conforme mostrado na Figura 5.11 e na Figura 5.12.

A função peso Gaussiana, Equação (2.79), foi traçada para 5 valores de β (2,0; 2,5; 3,0; 3,5 e 4,0) e valor de k unitário. O comportamento desta função peso é mostrado na Figura 5.13. A função cônica, Equação (2.80), foi testada para k igual a 0,5 (função linear) e 1,0 (função

de segunda ordem). A Figura 5.14 mostra, para ambos os valores de k , o comportamento desta função peso.

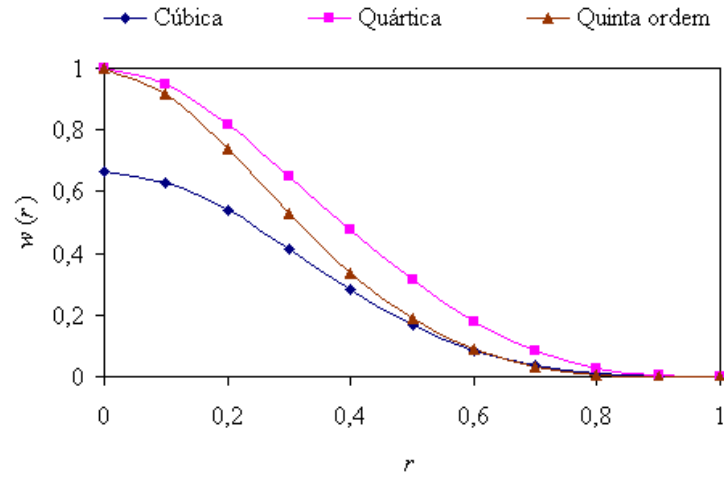


Figura 5.10 - Funções peso *spline* de terceira (cúbica), quarta (quártica) e quinta ordem.

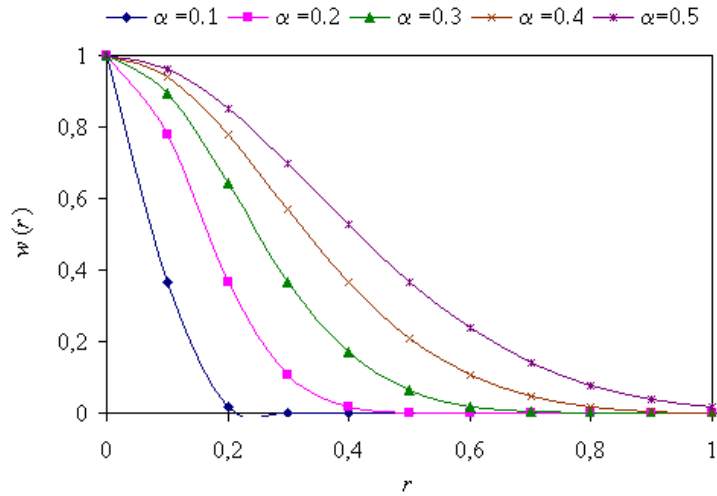


Figura 5.11 - Função peso Exp1 para os cinco valores de α testados.

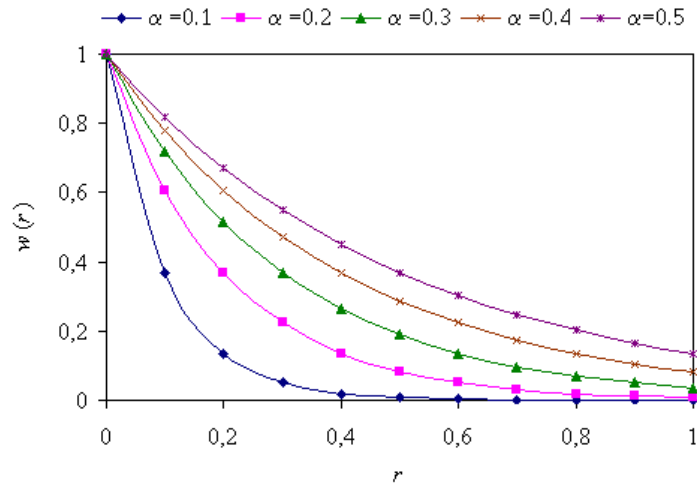


Figura 5.12 - Função peso Exp2 para os cinco valores de α testados.

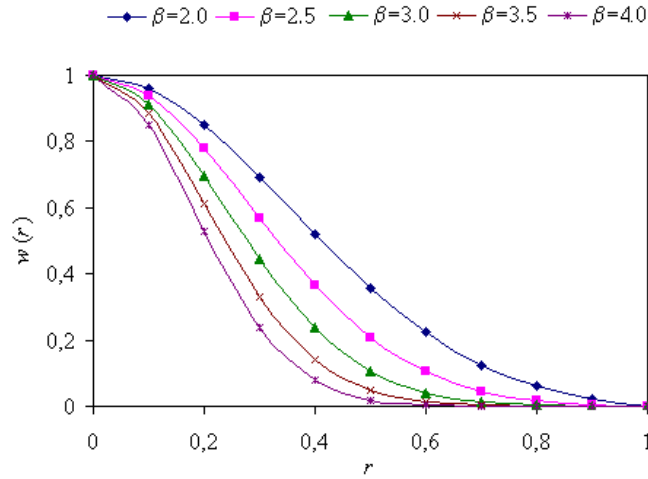


Figura 5.13 - Função peso Gaussiana para os cinco valores de β e k igual a 1,0.

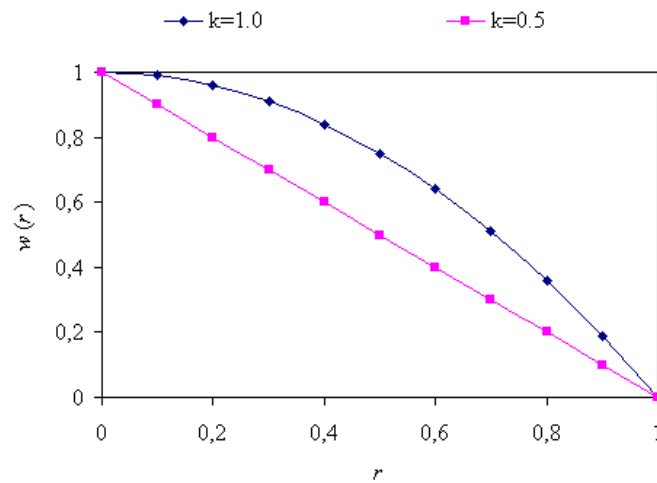


Figura 5.14 - Função peso cônica para valores de k igual a 0,5 e 1,0.

A viga empregada nesta seção apresenta as mesmas dimensões, Figura 3.3, e constantes materiais aplicadas na validação. Foram utilizadas duas configurações de nós e células nestas simulações. A primeira configuração é formada por 55 nós uniformemente distribuídos (11×5), Figura 3.4, e 40 células de integração de fundo, Figura 3.5. A segunda configuração está indicada na Figura 5.15. Esta é formada por 85 nós distribuídos uniformemente e a malha de fundo é composta por 64 células. Para ambas as configurações, foram utilizados domínios de influência quadrados (com tamanho constante), d_{max} unitário e dm variando de 6 a 30. Nesta seção são utilizadas as normas dos erros relativos de deslocamento em y , tensão normal e cisalhante para verificar o comportamento do método EFG. Os erros relativos para a primeira e segunda configuração propostas são apresentados, respectivamente, da Figura 5.16 à Figura 5.30 e da Figura 5.31 à Figura 5.45 em função do tamanho do suporte dm da função peso.

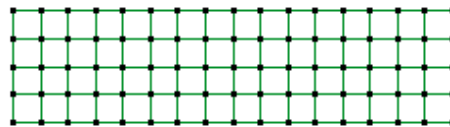


Figura 5.15 - Domínio formado por 85 nós (17×5) e 64 células de integração.

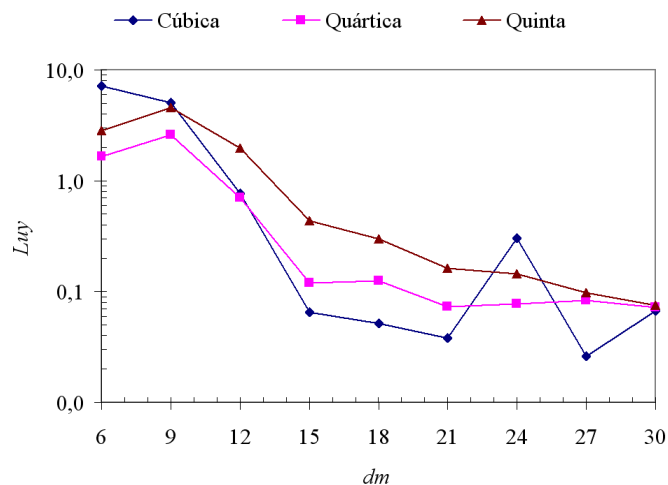


Figura 5.16 - Erro percentual do deslocamento em y para funções peso *spline*: 55 nós.

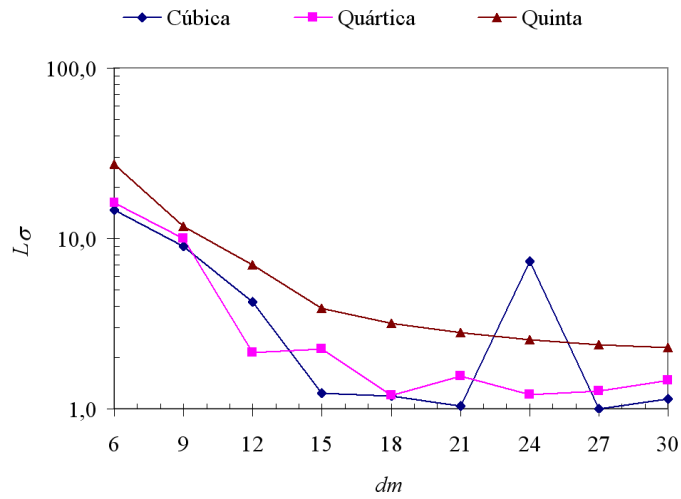


Figura 5.17 - Erro percentual da tensão normal para funções peso *spline*: 55 nós.

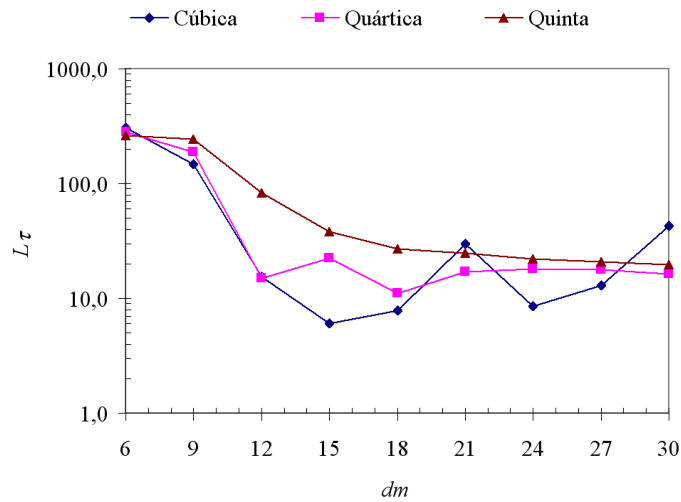


Figura 5.18 - Erro percentual da tensão cisalhante para funções peso *spline*: 55 nós.

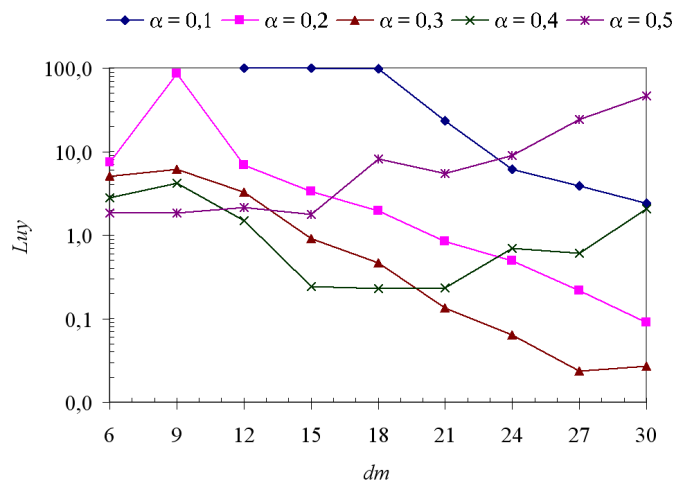


Figura 5.19 - Erro percentual do deslocamento em y para funções peso Exp1: 55 nós.

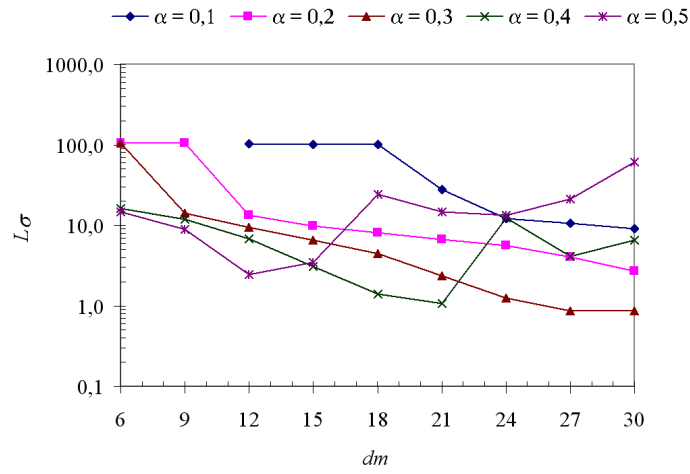


Figura 5.20 - Erro percentual da tensão normal para funções peso Exp1: 55 nós.

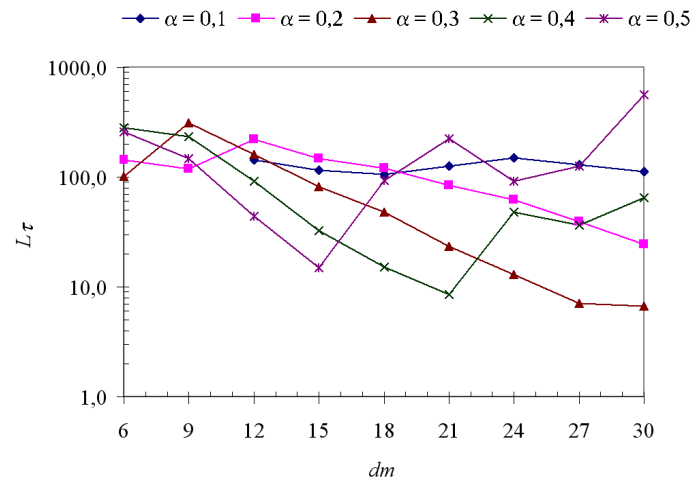


Figura 5.21 - Erro percentual da tensão cisalhante para funções peso Exp1: 55 nós.

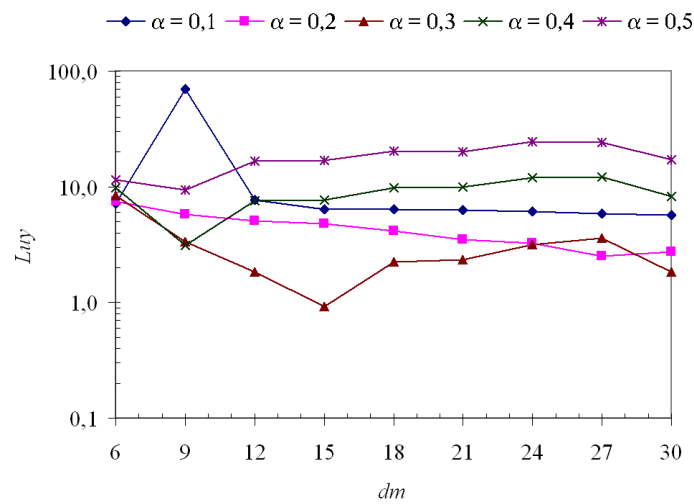


Figura 5.22 - Erro percentual do deslocamento em y para funções peso Exp2: 55 nós.

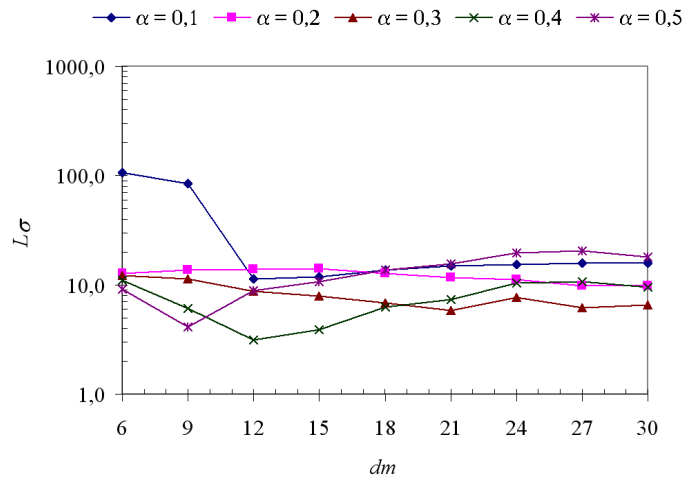


Figura 5.23 - Erro percentual da tensão normal para funções peso Exp2: 55 nós.

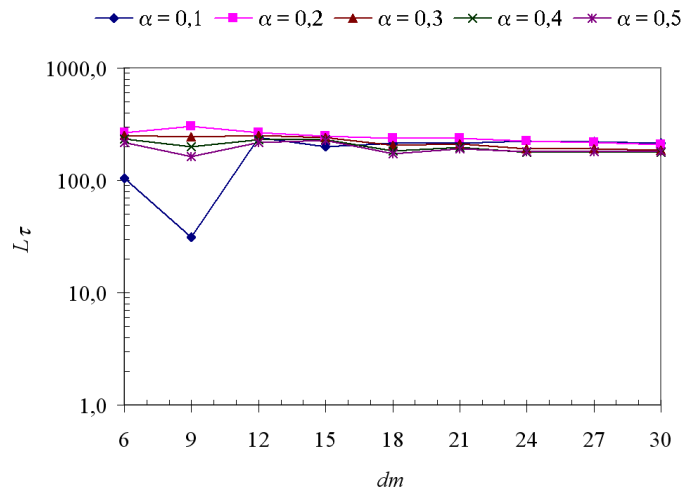


Figura 5.24 - Erro percentual da tensão cisalhante para funções peso Exp2: 55 nós.

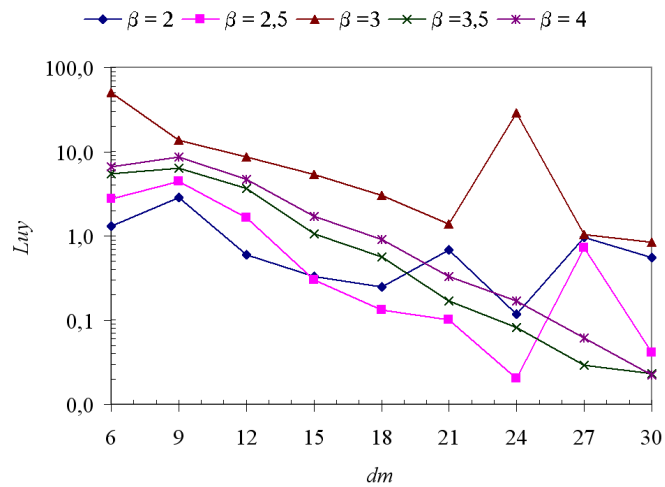


Figura 5.25 - Erro percentual do deslocamento em y para função peso Gaussiana: 55 nós.

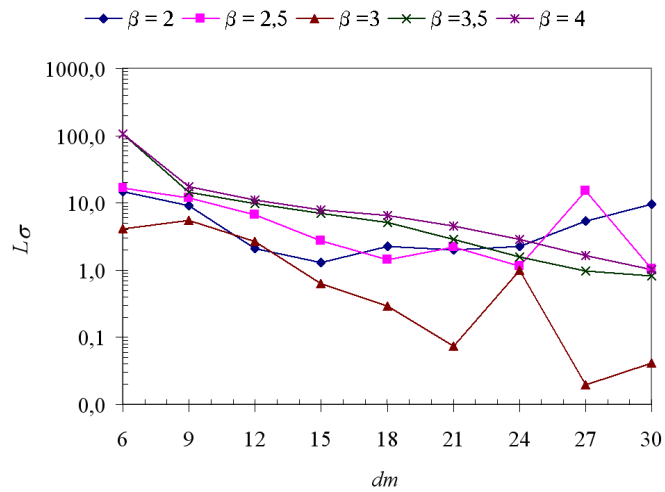


Figura 5.26 - Erro percentual da tensão normal para função peso Gaussiana: 55 nós.

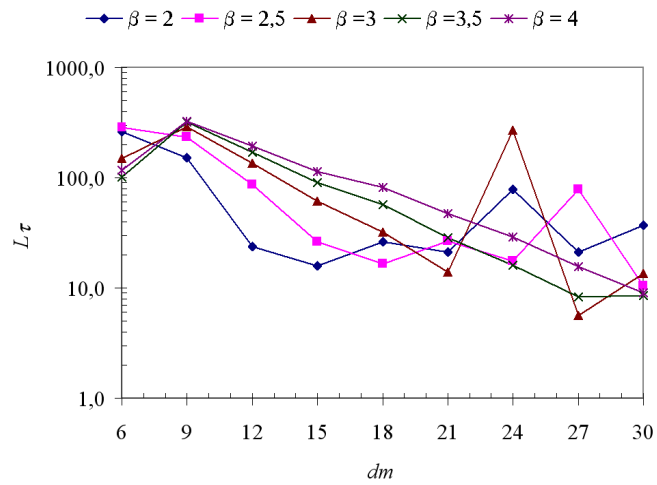


Figura 5.27 - Erro percentual da tensão cisalhante para função peso Gaussiana: 55 nós.

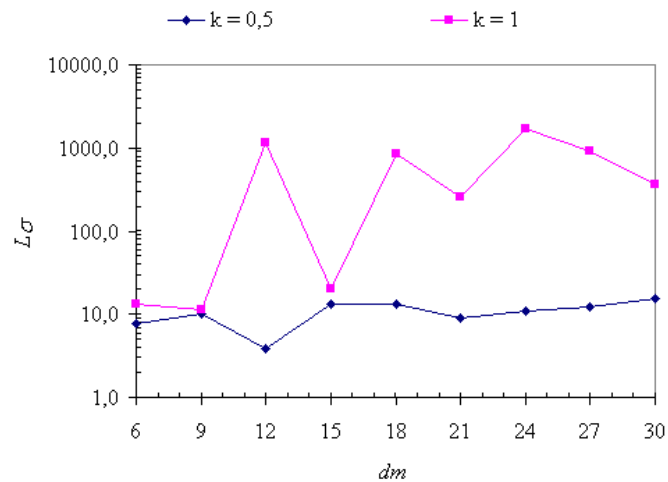


Figura 5.28 - Erro percentual do deslocamento em y para funções peso cônica: 55 nós.

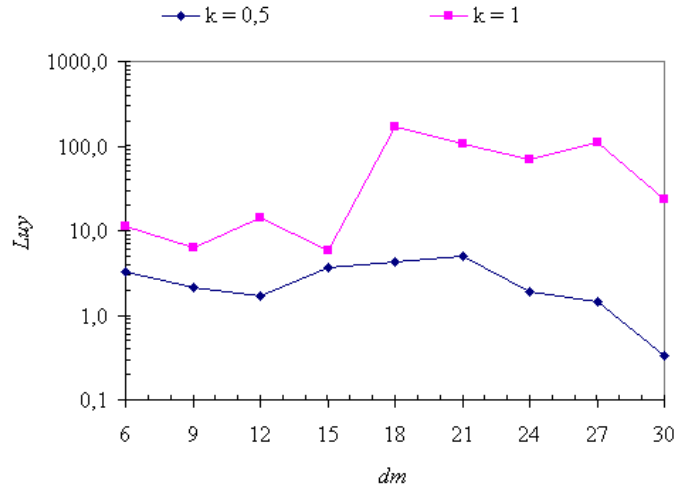


Figura 5.29 - Erro percentual da tensão normal para funções peso cônica: 55 nós.

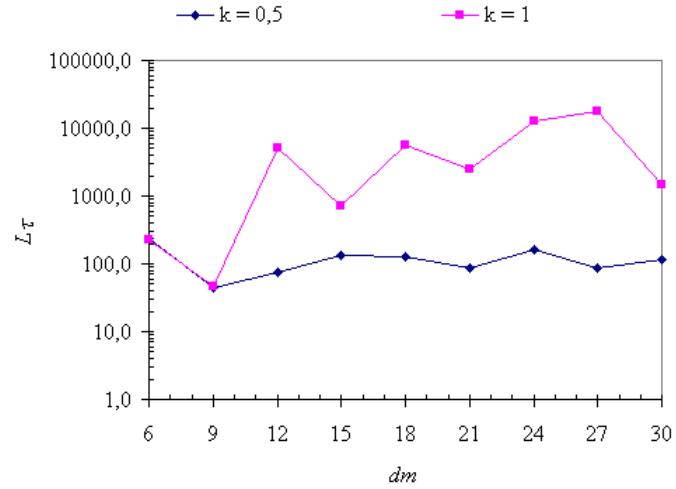


Figura 5.30 - Erro percentual da tensão cisalhante para funções peso cônica: 55 nós.

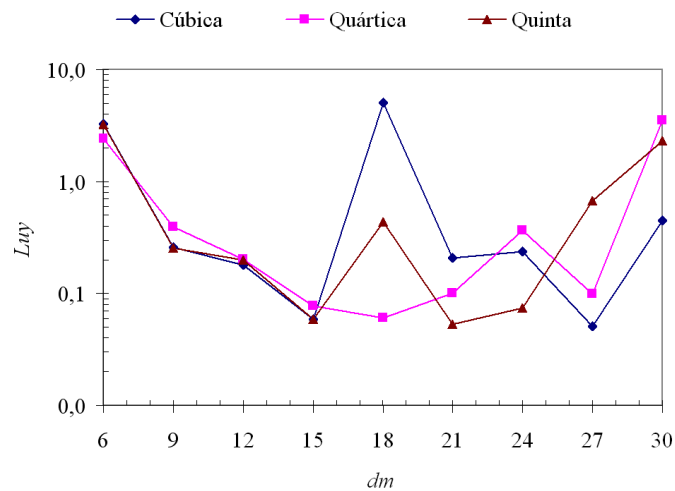


Figura 5.31 - Erro percentual do deslocamento em y para funções peso spline: 85 nós.

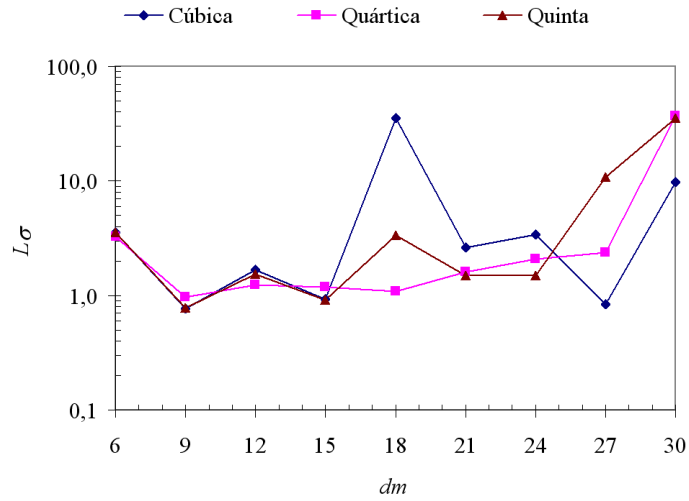


Figura 5.32 - Erro percentual da tensão normal para funções peso *spline*: 85 nós.

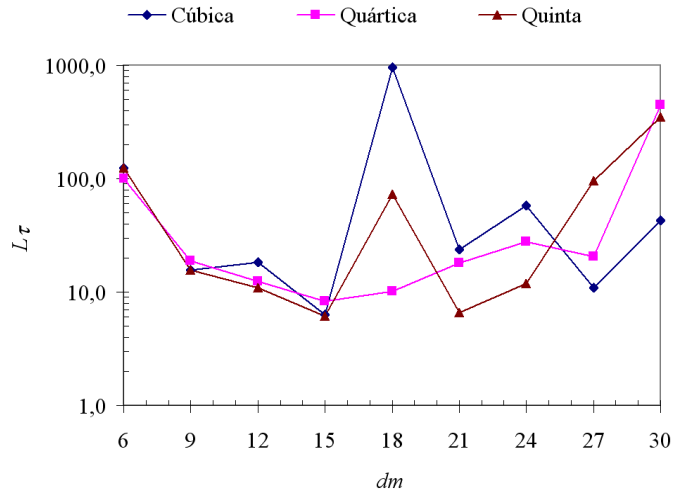


Figura 5.33 - Erro percentual da tensão cisalhante para funções peso *spline*: 85 nós.

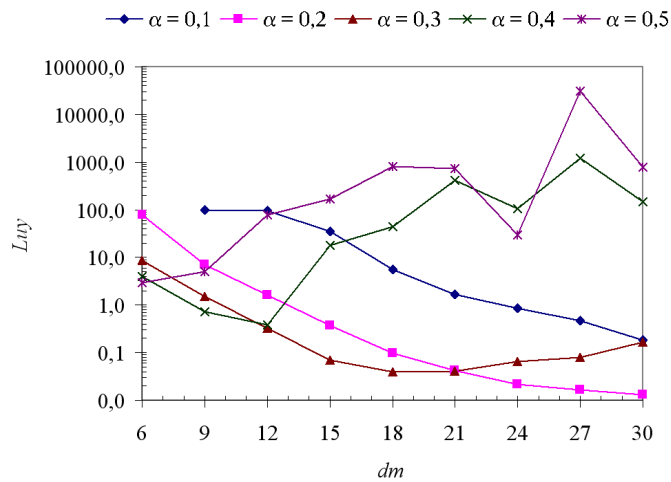


Figura 5.34 - Erro percentual do deslocamento em y para funções peso *Exp1*: 85 nós.

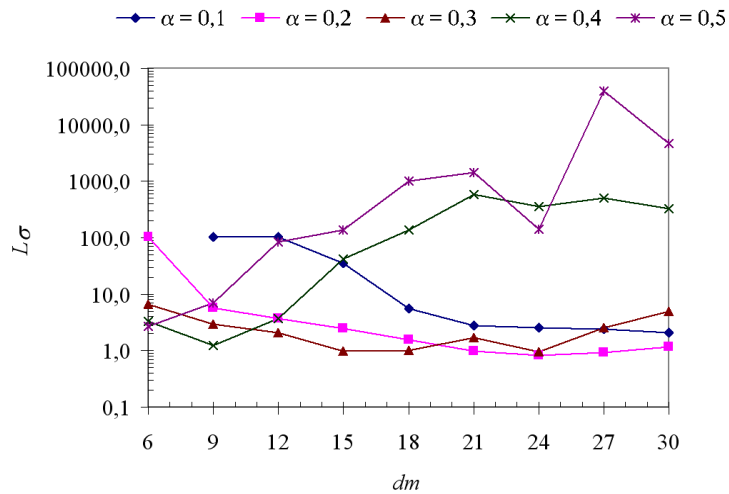


Figura 5.35 - Erro percentual da tensão normal para funções peso Exp1: 85 nós.

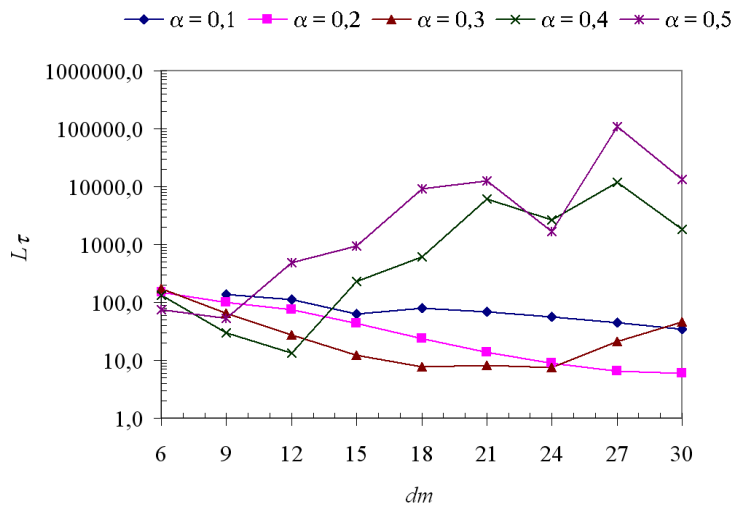


Figura 5.36 - Erro percentual da tensão cisalhante para funções peso Exp1: 85 nós.

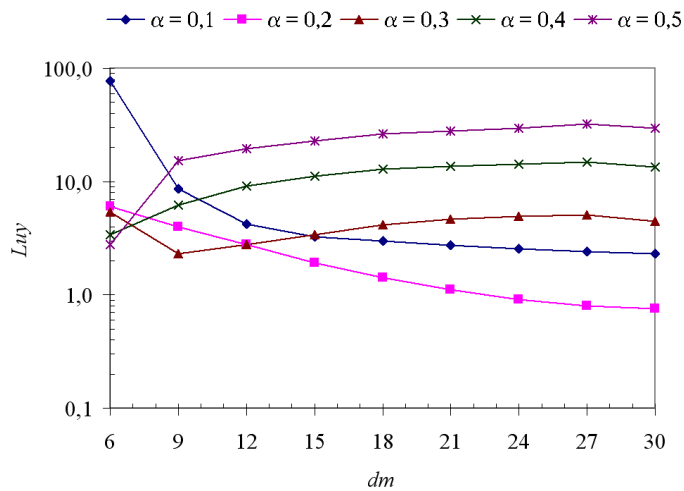


Figura 5.37 - Erro percentual do deslocamento em y para funções peso Exp2: 85 nós.

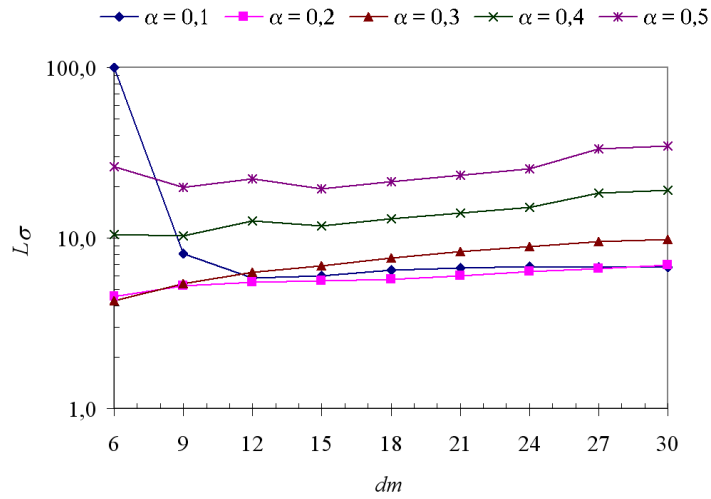


Figura 5.38 - Erro percentual da tensão normal para funções peso Exp2: 85 nós.

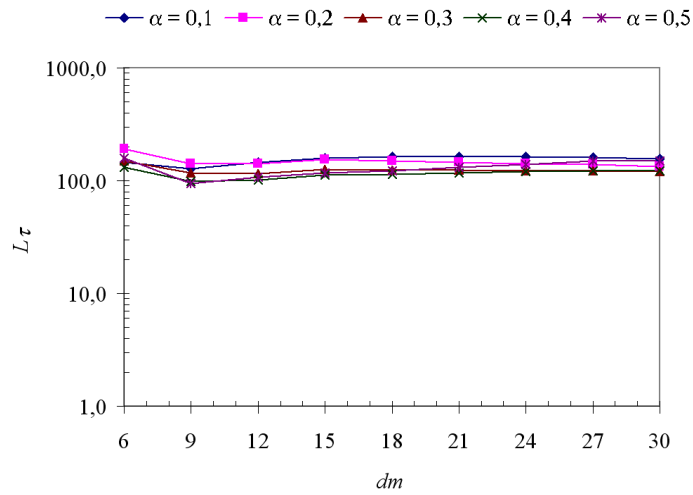


Figura 5.39 - Erro percentual da tensão cisalhante para funções peso Exp2: 85 nós.

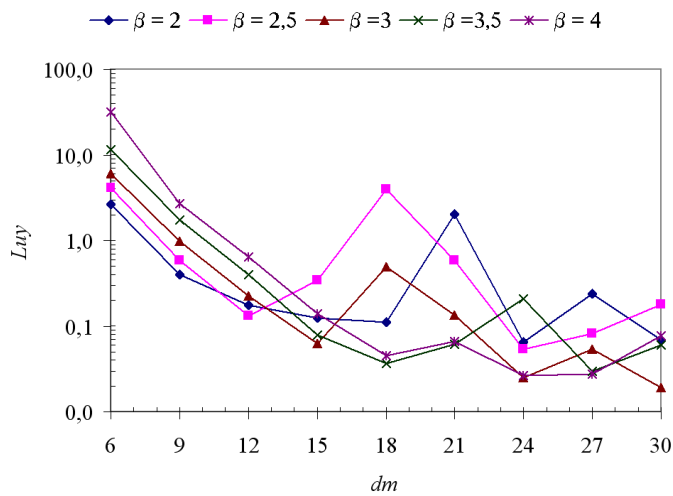


Figura 5.40 - Erro percentual do deslocamento em y para função peso Gaussiana 85 nós.

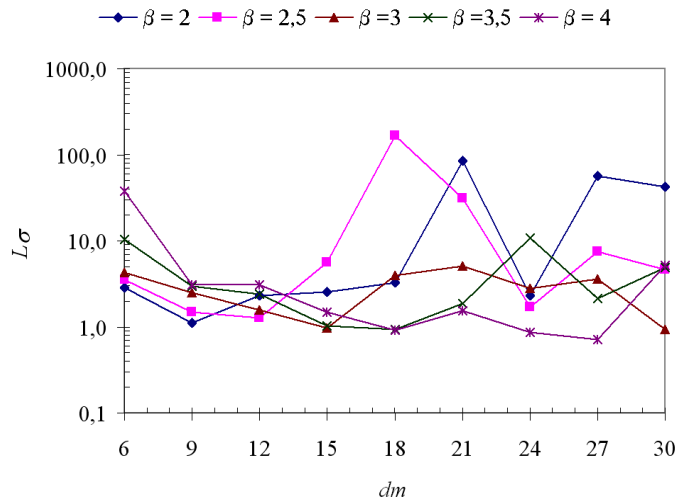


Figura 5.41 - Erro percentual da tensão normal para função peso Gaussiana: 85 nós.

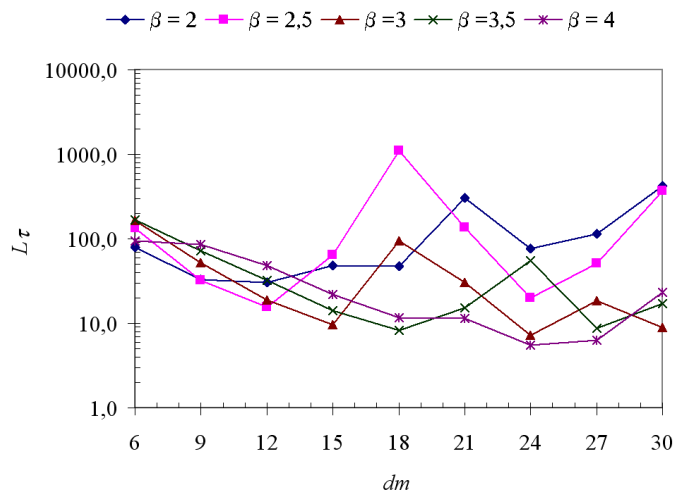


Figura 5.42 - Erro percentual da tensão cisalhante para função peso Gaussiana: 85 nós.

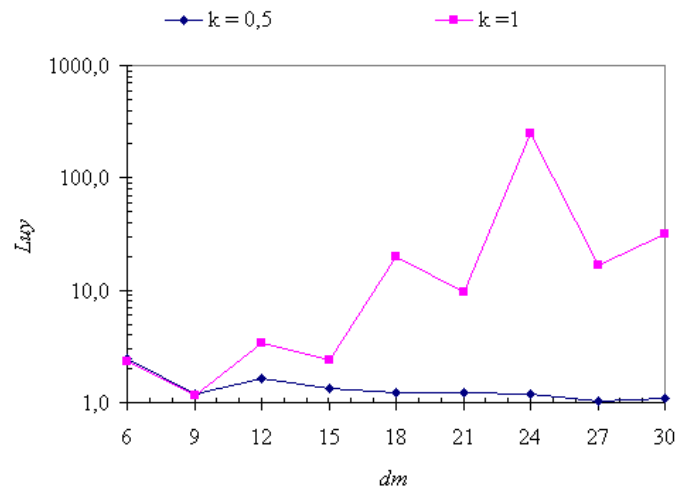


Figura 5.43 - Erro percentual do deslocamento em y para funções peso cônica: 85 nós.

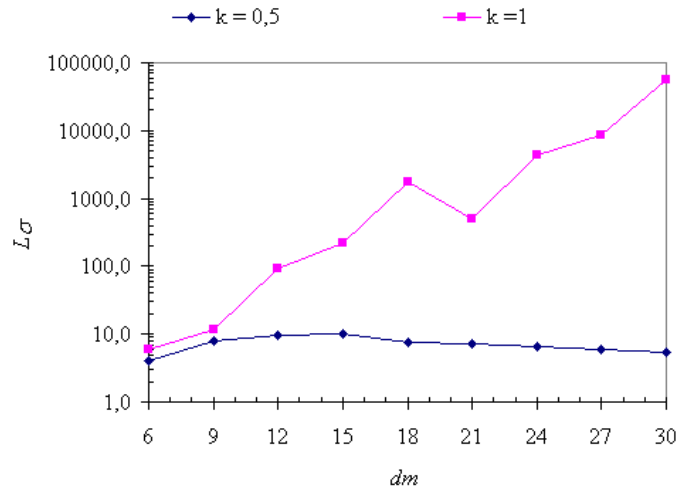


Figura 5.44 - Erro percentual da tensão normal para funções peso cônica: 85 nós.

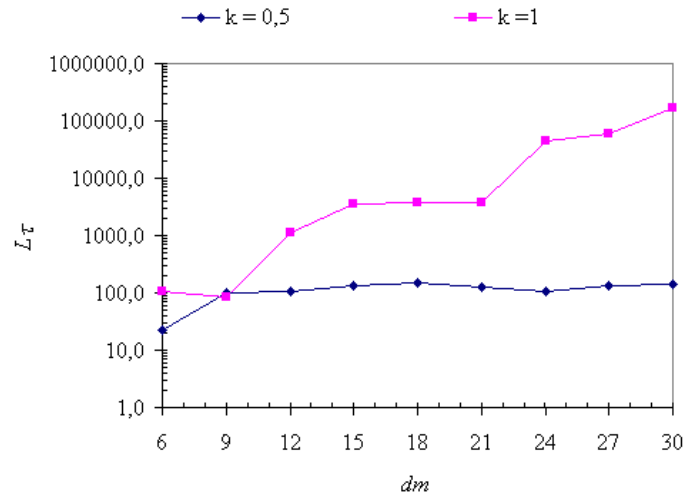


Figura 5.45 - Erro percentual da tensão cisalhante para funções peso cônica: 85 nós.

A escolha do parâmetro de ajuste α é de fundamental importância na utilização das funções exponenciais (Figura 5.19 à Figura 5.24 e Figura 5.34 à Figura 5.39). Para domínios de influência pequenos e valores baixos de α , a função peso Exp1 apresenta problemas na montagem da matriz \mathbf{A} , uma vez que baixos valores de α levam a um decaimento acentuado da função peso Exp1. Assim para valores de dm pequenos ocorre a ponderação de poucos nós. A função peso Exp2 apresenta, para todos os valores de α testados, erros percentuais elevados para as tensões cisalhantes em ambas as configurações de nós. Em contrapartida, a função Exp1 apresenta, para alguns valores de α , um comportamento bastante satisfatório tendo em vista os erros percentuais encontrados (erros próximos de 10%).

Os erros percentuais dos campos de deslocamento em y e de tensões normais e cisalhantes, empregando a função peso Gaussiana são mostrados da Figura 5.25 à Figura 5.27, para 55 nós, e da Figura 5.40 à Figura 5.42, para 85 nós. O comportamento do erro para os três campos apresentados é similar, porém a escala na qual o erro varia é bem maior para o campo de tensões, principalmente para o cisalhamento. Verifica-se que pequenas variações no valor de dm podem gerar grandes alterações no erro percentual do método.

A resposta obtida com a função cônica linear é melhor do que a obtida com a função segunda ordem, contudo o erro associado ao campo de tensão cisalhante é elevado para as duas configurações nodais testadas (Figura 5.28 à Figura 5.30 e Figura 5.43 à Figura 5.45).

Foram utilizadas três funções *spline*: cúbica, quártica e quinta ordem. O comportamento do erro percentual dos três campos analisados, com a variação de dm é mostrado da Figura 5.16 à Figura 5.18, para o caso com 55 nós, e da Figura 5.31 à Figura 5.33, para o caso com 85 nós. Todas as funções *spline* utilizadas apresentam intervalos no tamanho do domínio de influência, dm , onde o erro percentual em todos os campos é aceitável (erros próximos a 10 %). Nota-se que para estas funções, pequenas variações no valor de dm podem gerar grandes alterações no erro percentual do método.

A Figura 5.46 e a Figura 5.47 mostram, respectivamente, para as configurações com 55 e 85 nós o comportamento das funções peso que apresentam as melhores respostas. As normas de erro para os campos pertinentes a estas funções são mostradas da Figura 5.48 à Figura 5.50, para a primeira configuração nodal, e da Figura 5.51 à Figura 5.53, para a segunda.

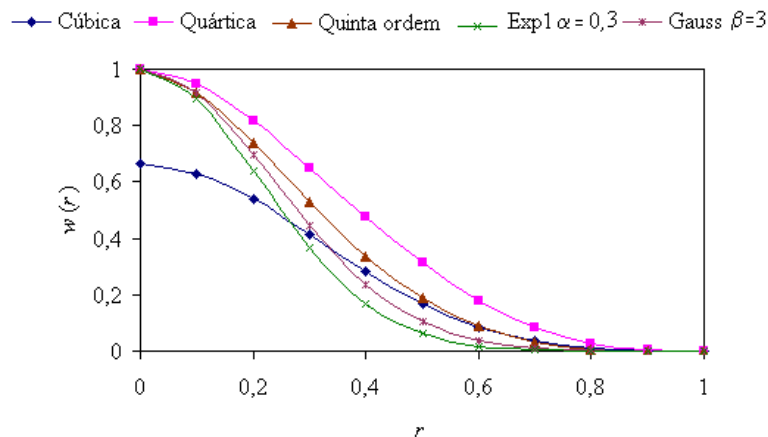


Figura 5.46 - Funções peso com as melhores respostas para o domínio com 55 nós.

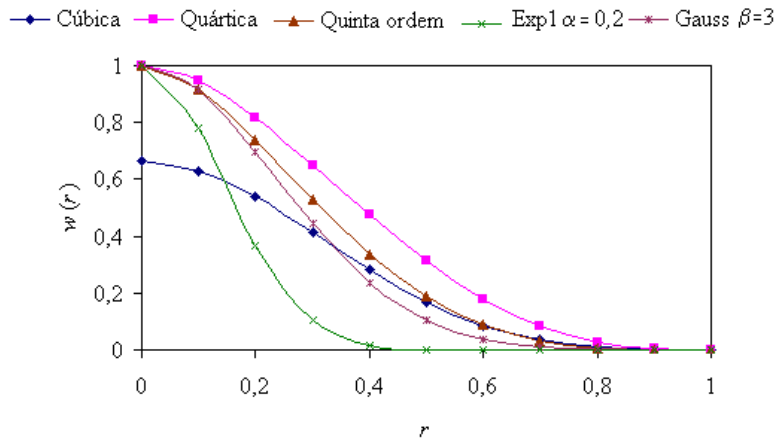


Figura 5.47 - Funções peso com as melhores respostas para o domínio com 85 nós

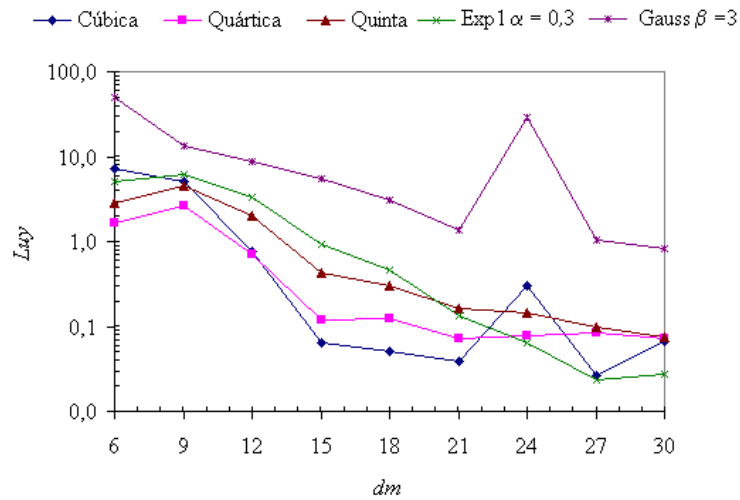


Figura 5.48 - Melhores resultados para o erro percentual do deslocamento em y : 55 nós.

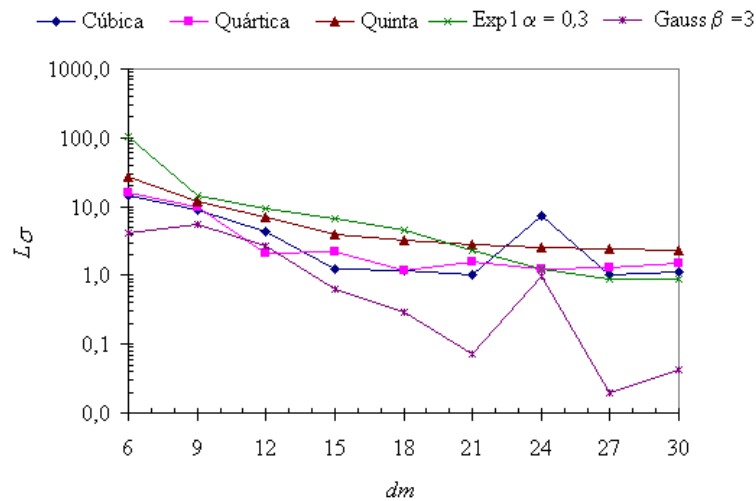


Figura 5.49 - Melhores resultados para o erro percentual da tensão normal: 55 nós.

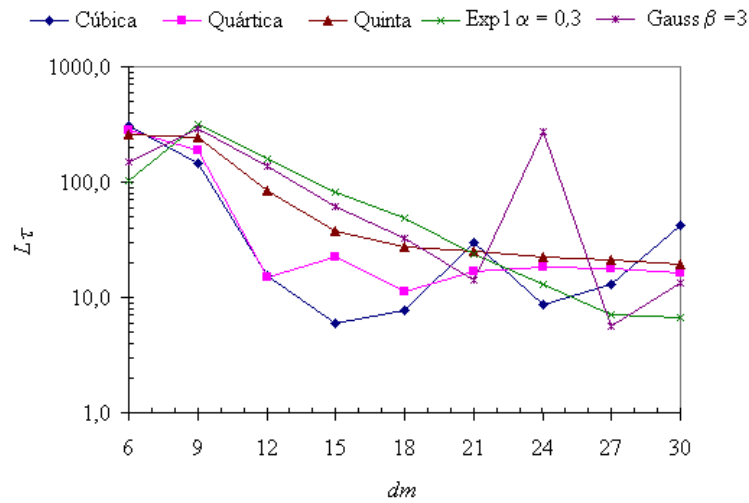


Figura 5.50 - Melhores resultados para o erro percentual da tensão cisalhante: 55 nós.

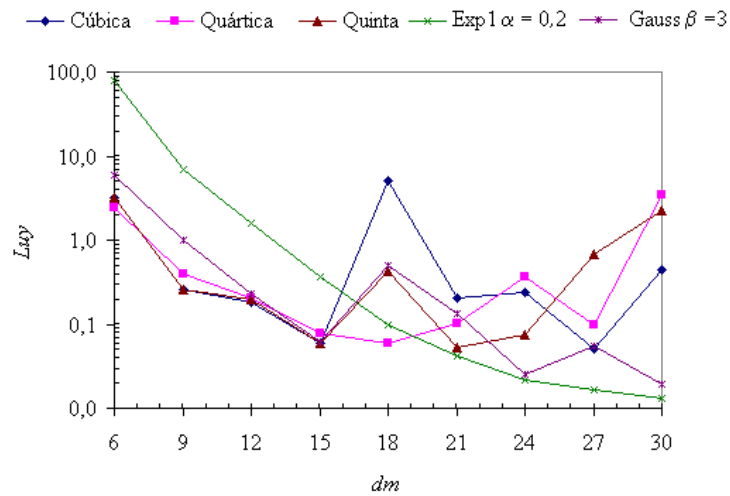


Figura 5.51 - Melhores resultados para o erro percentual do deslocamento em y: 85 nós.

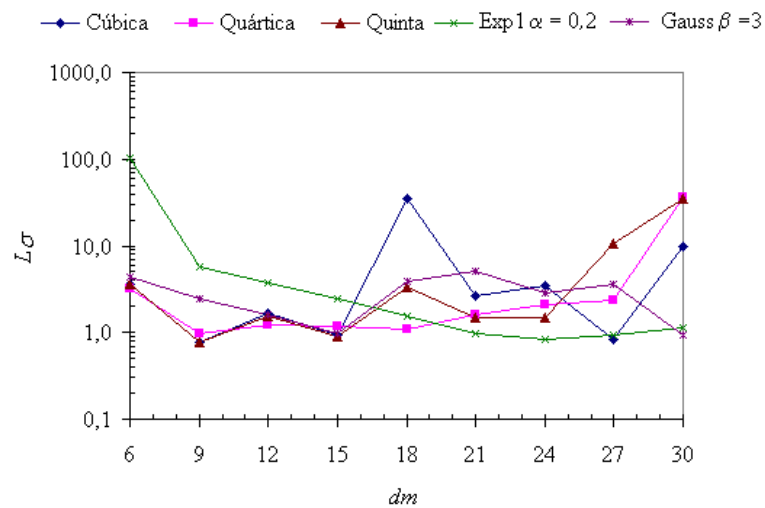


Figura 5.52 - Melhores resultados para o erro percentual da tensão normal: 85 nós.

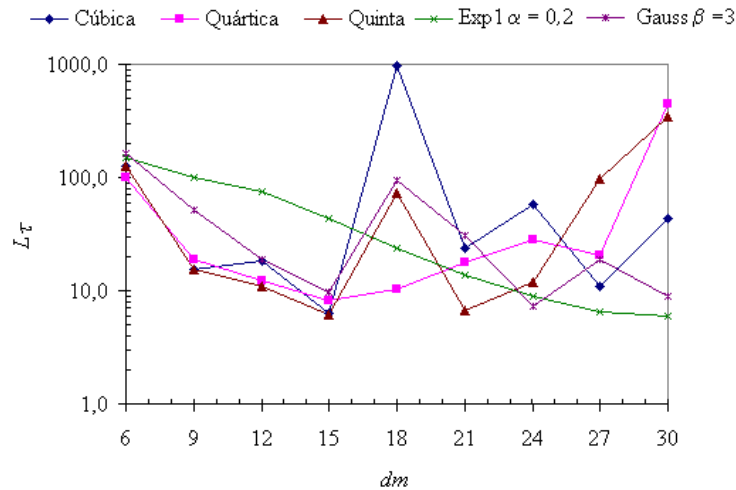


Figura 5.53 - Melhores resultados para o erro percentual da tensão cisalhante: 85 nós.

Verifica-se que a faixa onde se situa o erro mínimo para as cinco melhores funções peso apresentadas, em geral, é diferente para cada função e configuração de nós. Nota-se que, para os casos testados, o valor de dm que minimiza o erro tende a aumentar para as funções peso que apresentem decaimento mais acentuado. Este comportamento é ratificado pelos resultados apresentados da Figura 5.46 à Figura 5.53.

O tamanho do suporte dm da função peso associada ao ponto i deve ser escolhido de modo que dm seja grande o suficiente para que o número de nós cobertos no domínio de influência assegure a regularidade de \mathbf{A} (matriz de momento). Valores de dm muito pequenos podem gerar erros numéricos muito grandes quando se utiliza a quadratura numérica de Gauss para calcular os elementos da matriz. Por outro lado, dm deve ser pequeno o suficiente para manter as características locais para a aproximação pelo MMQM (Long e Hu, 2003).

De forma a visualizar o comportamento da função de forma no domínio bidimensional a Figura 5.54 apresenta a função associada ao nó 28 do domínio que está localizado no centro da viga, ou seja, coordenadas x e y , respectivamente, iguais a 24 e 0, Figura 3.3 e Figura 3.4. Esta função de forma foi construída utilizando dm constante e igual a 18, função peso cúbica, d_{max} igual a 1,0, domínio com 55 nós e 640 pontos amostrais de Gauss.

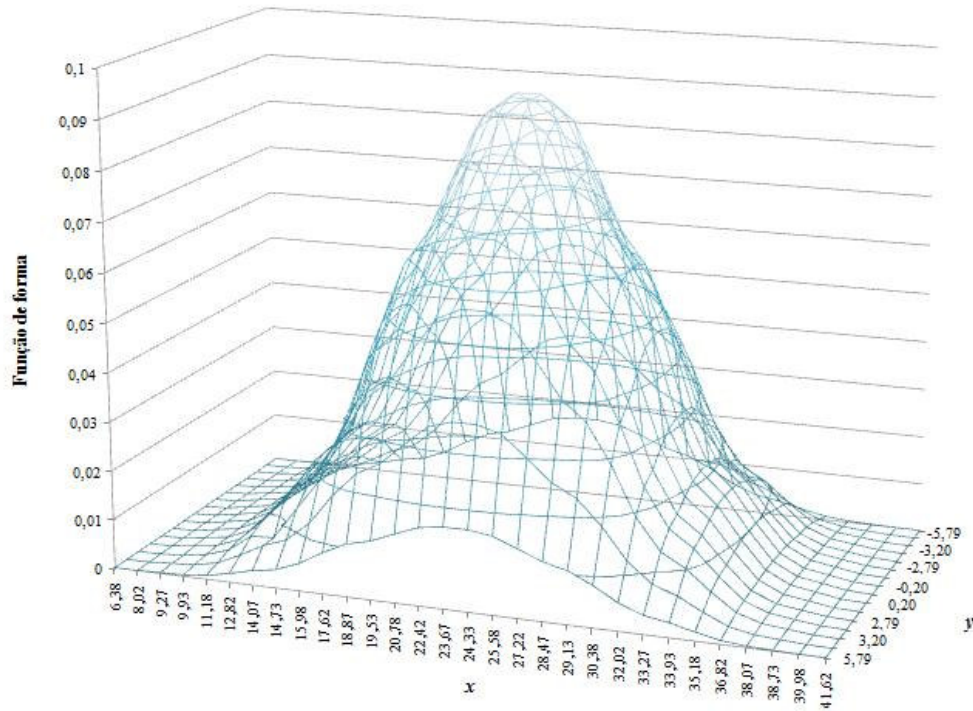


Figura 5.54 - Função de forma do nó 28 localizado nas coordenadas 24 em x e 0 em y : dm igual a 18, função peso cúbica, d_{max} igual a 1,0, 55 nós e 640 pontos amostrais de Gauss.

Na Figura 5.55 e na Figura 5.56 são mostrados o número médio, mínimo e máximo de nós contidos nos domínios de influência centrados nos pontos amostrais de Gauss durante a integração da matriz de rigidez \mathbf{K} , para todos os valores de dm testados (dm quadrado e constante).

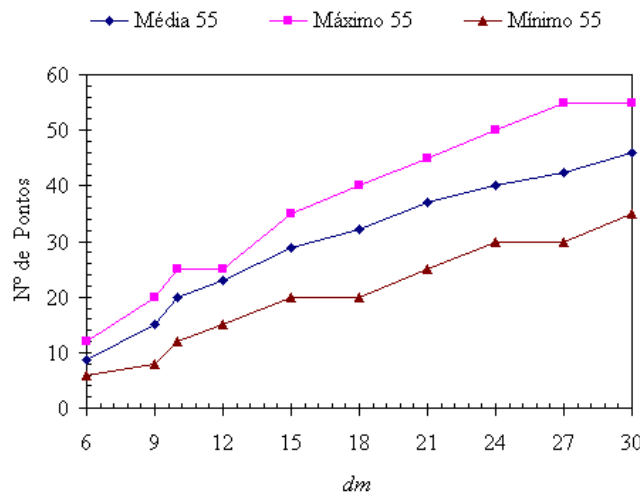


Figura 5.55 - Número médio, mínimo e máximo de pontos nodais nos domínios de influência centrados nos pontos amostrais de Gauss (integração de \mathbf{K}): 55 nós.

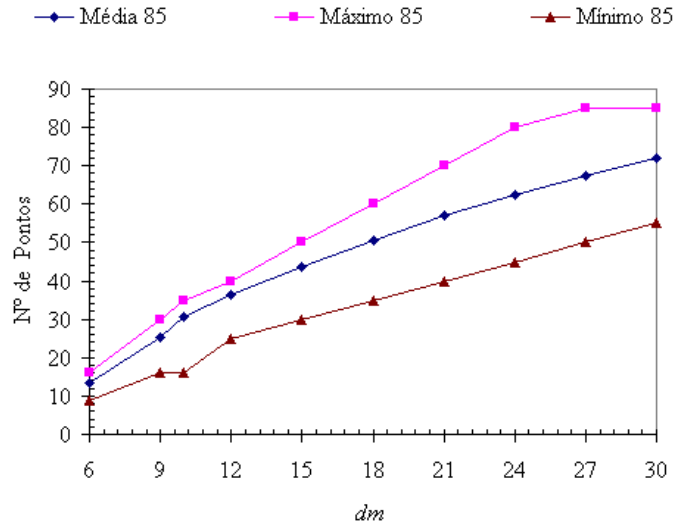


Figura 5.56 - Número médio, mínimo e máximo de pontos nodais nos domínios de influência centrados nos pontos amostrais de Gauss (integração de \mathbf{K}): 85 nós.

As funções *splines* apresentam respostas acuradas (erros próximos de 10%) para ambas as configurações de nós. A Tabela 5.3 e a Tabela 5.4 apresentam, respectivamente, para 55 e 85 nós os intervalos de dm pertinentes aos menores valores de erros relativos, indicando ainda, a quantidade de pontos nodais associada a cada um destes intervalos para as funções peso *spline* testadas.

Tabela 5.3 - Intervalo de dm para o qual o erro relativo é menor e a quantidade de nós associada a cada intervalo, para domínio com 55 nós e dm quadrado.

Função peso	Cúbica <i>spline</i>		Quártica <i>spline</i>		Quinta ordem <i>spline</i>	
	Intervalo para 55 nós		Intervalo para 55 nós		Intervalo para 55 nós	
Nº de nós	$dm = 15$	$dm = 21$	$dm = 12$	$dm = 24$	$dm = 15$	$dm = 30$
Médio	28,7	32,2	23	40	28,7	46
Máximo	35	40	25	50	35	55
Mínimo	20	20	15	30	20	35

Para uma distribuição de nós uniforme e dm constante, verifica-se por meio da Tabela 5.3 e da Tabela 5.4 que os intervalos de dm associados aos menores erros relativos são alterados de forma a manter uma mesma quantidade de nós nos domínios de influência durante a integração da matriz \mathbf{K} , para as duas configurações nodais e mesma função peso.

Tabela 5.4 - Intervalo de dm no qual o erro relativo é menor e a quantidade de nós associada a cada intervalo, para domínio com 85 nós e dm quadrado.

Função peso	Cúbica <i>spline</i>		Quártica <i>spline</i>		Quinta ordem <i>spline</i>	
Nº de nós	Intervalo para 85 nós		Intervalo para 85 nós		Intervalo para 85 nós	
	$dm = 9$	$dm = 15$	$dm = 9$	$dm = 18$	$dm = 9$	$dm = 15$
Médio	25,3	43,7	25,3	50,6	25,3	43,7
Máximo	30	50	30	60	30	50
Mínimo	16	30	16	35	16	30

Além dos testes utilizando dm quadrado foram ainda realizados testes com domínio de influência retangular para as duas concentrações nodais. Estes domínios foram calculados com base nos espaçamentos nodais em x e y utilizando o fator de escala d_{max} . Nota-se que no domínio com 85 nós os espaçamentos nodais em x e y são iguais, sendo um caso particular do domínio retangular recaindo na forma quadrada de dm acima analisada. A Tabela 5.5 mostra o número médio, máximo e mínimo de nós em função de d_{max} , para os domínios com 55 e 85 nós e dm retângular.

Tabela 5.5 - Intervalo de dm ($dm = c \times d_{max}$) no qual o erro relativo é menor e a quantidade de nós associada a cada intervalo, para domínio com 55 e 85 nós e dm retângular.

Nós por dm	55 nós								
	$d_{max} = 2$	$d_{max} = 3$	$d_{max} = 4$	$d_{max} = 5$	$d_{max} = 6$	$d_{max} = 7$	$d_{max} = 8$	$d_{max} = 9$	$d_{max} = 10$
Médio	13,3	24,3	34	40	45	49	52	54	55
Máximo	16	30	40	50	55	55	55	55	55
Mínimo	9	16	25	30	35	40	45	50	55
Nós por dm	85 nós								
	$d_{max} = 2$	$d_{max} = 3$	$d_{max} = 4$	$d_{max} = 5$	$d_{max} = 6$	$d_{max} = 7$	$d_{max} = 8$	$d_{max} = 9$	$d_{max} = 10$
Médio	13,5	25,3	36,2	43,7	50,6	56,8	62,5	67,5	71,8
Máximo	16	30	40	50	60	70	80	85	85
Mínimo	9	16	25	30	35	40	45	50	55

Da Figura 5.57 à Figura 5.59 são apresentados os erros percentuais dos campos de deslocamento e de tensões normais e cisalhantes para os domínios com 55 e 85 nós, empregando as funções peso *spline* cúbica e quártica.

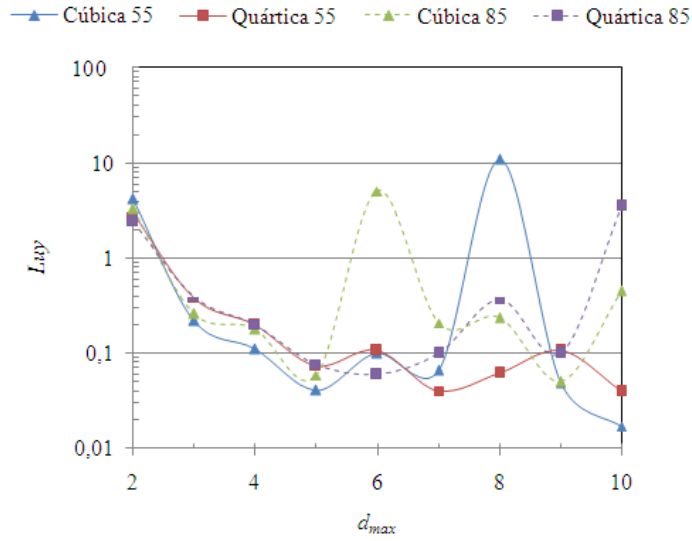


Figura 5.57 - Erro percentual do deslocamento em y para as funções *spline* cúbica e quártica em função de d_{max} : dm retangular e domínio com 55 e 85 nós.

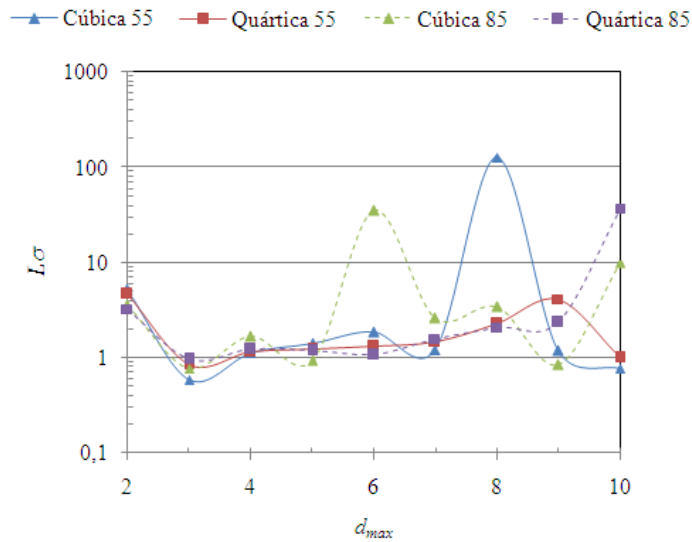


Figura 5.58 - Erro percentual da tensão normal para as funções *spline* cúbica e quártica em função de d_{max} : dm retangular e domínio com 55 e 85 nós.

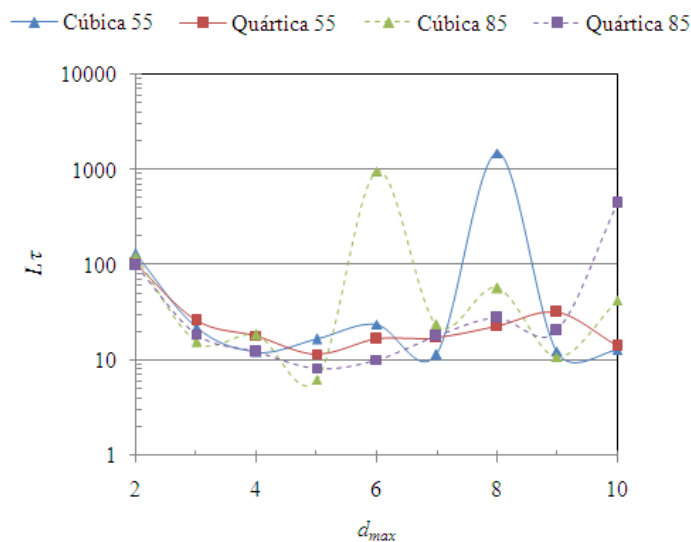


Figura 5.59 - Erro percentual da tensão cisalhante para as funções *spline* cúbica e quártica em função de d_{max} : dm retangular e domínio com 55 e 85 nós.

As faixas de d_{max} vinculadas ao menor erro são determinadas com base no erro percentual do campo de tensão cisalhante, uma vez que seus erros são superiores aos dos demais campos, conforme apresentado da Figura 5.57 à Figura 5.59. Para facilitar a análise das faixas de d_{max} com menores erros as informações da Figura 5.59 estão dispostas na Tabela 5.6.

Tabela 5.6 - Erro percentual da tensão cisalhante para as funções *spline* cúbica e quártica em função de d_{max} : dm retangular e domínio com 55 e 85 nós.

d_{max}	Erro percentual de cisalhamento			
	Cúbica 55	Cúbica 85	Quártica 55	Quártica 85
2	129,554	124,376	101,874	99,472
3	21,731	15,575	26,364	18,786
4	12,180	18,330	18,194	12,323
5	16,785	6,268	11,606	8,247
6	23,961	960,217	16,855	10,185
7	11,545	23,759	17,208	17,965
8	1507,493	57,521	23,033	27,918
9	12,446	10,922	32,127	20,408
10	12,879	42,852	14,134	448,289

A Tabela 5.7 e a Tabela 5.8 apresentam as faixas de d_{max} pertinentes aos menores erros para os domínios com 55 nós e 85 nós, respectivamente, bem como o número médio, máximo e mínimo de nós associados a esta condição. Para uma faixa razoável de valores de erro, considerou-se seu valor máximo em torno de 20%.

Tabela 5.7 - Intervalo de dm ($dm = c \times d_{max}$) para o qual o erro relativo é menor e a quantidade de nós associada a cada intervalo, para domínio com 55 nós e dm retangular.

Função peso	Cúbica <i>spline</i>		Quártica <i>spline</i>	
Nº de nós	Intervalo para 55 nós		Intervalo para 55 nós	
	$d_{max} = 3$	$d_{max} = 5$	$d_{max} = 4$	$d_{max} = 7$
Médio	24,3	40	34	49
Máximo	30	50	40	55
Mínimo	16	30	25	40

Para o caso de domínio retangular, a faixa de d_{max} correspondente ao menor erro é semelhante nos dois domínios para uma dada função peso. Nota-se que as faixas de números de nós nos domínios de influência são próximas para os dois domínios, para valores de d_{max} até 6, conforme mostrado na Tabela 5.5. Assim, como no caso de domínio quadrado, a faixa de número de nós nos domínios de influência pertinentes ao menor erro é semelhante em ambas as concentrações nodais para uma dada função peso.

Tabela 5.8 - Intervalo de dm ($dm = c \times d_{max}$) no qual o erro relativo é menor e a quantidade de nós associada a cada intervalo, para domínio com 85 nós.

Função peso	Cúbica <i>spline</i>		Quártica <i>spline</i>	
Nº de nós	Intervalo para 85 nós		Intervalo para 85 nós	
	$d_{max} = 3$	$d_{max} = 5$	$d_{max} = 3$	$d_{max} = 7$
Médio	25,3	43,7	25,3	56,8
Máximo	30	50	30	70
Mínimo	16	30	16	40

Quando se utiliza d_{max} para calcular dm , trabalha-se com a mesma faixa de nós nos domínios com diferentes concentrações nodais, salvo casos onde d_{max} continue sendo acrescido em domínios cujo número máximo de nós tenha sido atingido, conforme visto para d_{max} maior que 6 no domínio com 55 nós.

Nos domínios de influência a faixa de d_{max} que contém as melhores soluções tem valor entre 3,0 e 5,0 para ambas as funções peso testadas. Estes valores são ligeiramente diferentes dos definidos por Dolbow e Belitschko (1998) que estão compreendidos entre 2,0 e 4,0.

5.3 DISTRIBUIÇÃO UNIFORME COM VARIAÇÃO NO TAMANHO DO DOMÍNIO DE INFLUÊNCIA

Nos tópicos anteriores, os valores de dm são mantidos constantes, o que resulta em domínios de influência com o mesmo tamanho durante toda a execução. O valor de dm pode ser mantido fixo em casos em que onde a distribuição de nós é uniforme. Conhecendo-se a razão de distribuição dos nós no domínio é possível determinar um valor para dm cuja condição do número mínimo de nós por domínio de influência seja atendida durante a montagem da matriz \mathbf{K} . Em casos de distribuição de nós não-uniforme deve-se, em geral, buscar os k pontos nodais mais próximos de um ponto de integração ou de um nó, e somente então determinar o valor de dm .

As simulações foram feitas para a configuração de nós e células mostrada na Figura 5.15 (64 células e 85 pontos nodais). c_{xI} e c_{yI} foram calculados de acordo com os k nós mais próximos. k foi mantido igual a 12 com valores de d_{max} variando de 1,0 até 3,5. As funções peso utilizadas foram a cúbica e a quártica *spline*. Da Figura 5.60 à Figura 5.62 são apresentados os erro percentuais dos campos de deslocamento em y e de tensões normais e cisalhantes em função do parâmetro d_{max} , visto que dm é calculado para cada ponto ou nó desejado durante a execução. A norma da energia está indicada na Tabela 5.9. Na Tabela 5.10 são apresentados os valores médios, máximos, mínimos, como também o desvio padrão do tamanho de dm durante a integração da matriz de rigidez \mathbf{K} , para os valores de d_{max} testados.

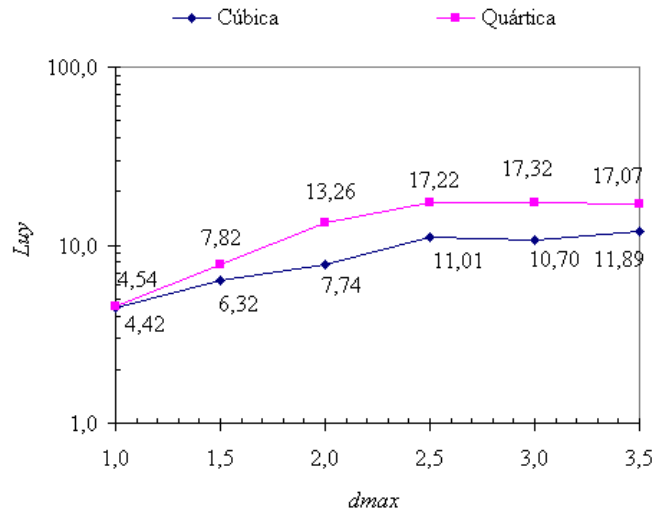


Figura 5.60 - Erro percentual do campo de deslocamento em y: k = 12 e 85 nós.

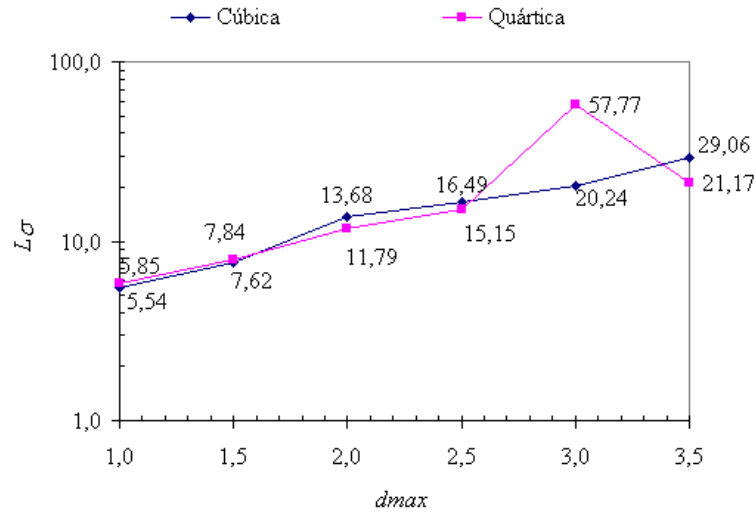


Figura 5.61 - Erro percentual do campo de tensões normais: k = 12 e 85 nós.

Tabela 5.9 - Norma da energia nos pontos de Gauss e nós em função de d_{max} para domínio com 85 nós e funções peso cúbica e quártica.

Norma da energia	cúbica					
	$d_{max} = 1,0$	$d_{max} = 1,5$	$d_{max} = 2,0$	$d_{max} = 2,5$	$d_{max} = 3,0$	$d_{max} = 3,5$
Ponto de Gauss	0,139	0,073	0,155	0,149	0,244	0,701
Nós	0,084	0,050	0,115	0,083	0,115	0,294
Norma da energia	quártica					
	$d_{max} = 1,0$	$d_{max} = 1,5$	$d_{max} = 2,0$	$d_{max} = 2,5$	$d_{max} = 3,0$	$d_{max} = 3,5$
Ponto de Gauss	0,129	0,072	0,087	0,157	1,492	0,284
Nós	0,073	0,048	0,053	0,077	0,491	0,143

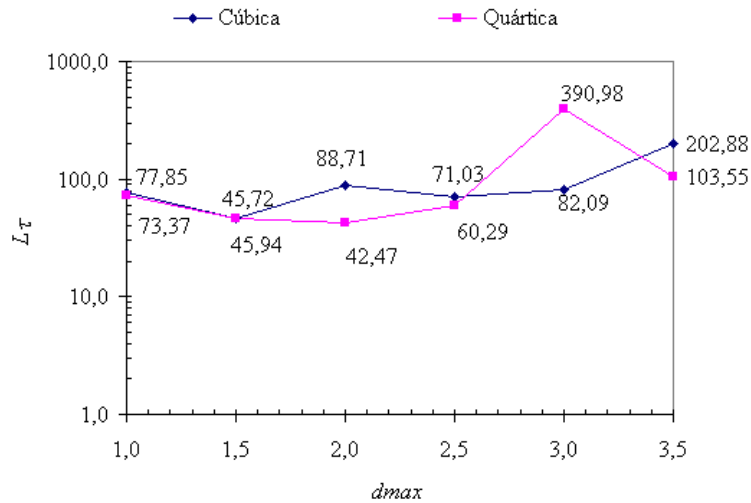


Figura 5.62 - Erro percentual do campo de tensões cisalhantes: $k = 12$ e 85 nós.

Tabela 5.10 - Valores médio, máximo e mínimo de dm e seu desvio padrão durante a integração da matriz de rigidez: 85 nós.

dm	$d_{max} = 1,0$	$d_{max} = 1,5$	$d_{max} = 2,0$	$d_{max} = 2,5$	$d_{max} = 3,0$	$d_{max} = 3,5$
Médio	6,33	9,50	12,67	15,84	19,01	22,18
Máximo	9,22	13,83	18,44	23,06	27,67	32,28
Mínimo	5,39	8,09	10,79	13,49	16,19	18,89
Desvio padrão	0,71	1,07	1,42	1,78	2,14	2,50

Para ambas as funções peso testadas, foi o campo de deslocamento que apresentou os menores erros. Conforme mostrado na Figura 5.60, verifica-se que a função cúbica *spline* obteve as melhores respostas. O campo de tensão normal apresentou certa proximidade entre os valores para as duas funções. Por meio da Figura 5.61e Figura 5.62 verifica-se que tanto o campo de tensão normal como o de tensão cisalhante apresentam variações bruscas no valor do erro relativo.

Nota-se que a melhor resposta do campo de tensão não está necessariamente relacionada à melhor resposta do campo de deslocamento, conforme apresentado da Figura 5.60 à Figura 5.62. Assim, nos métodos sem malha é importante quantificar o erro dos campos separadamente, contudo alguns autores apresentam apenas a norma da energia de deformação para verificar a melhor resposta.

Na Figura 5.63 é mostrado o número médio, máximo e mínimo de pontos nodais contidos nos domínios de influência durante a integração da matriz de rigidez. Para o caso com dm constante, domínio com 85 e funções peso cúbica e quártica, o número de nós associado aos menores erros relativos corresponde para o caso com dm variando à valores de d_{max} entre 1,5 e 2,5. Verifica-se que o erro associado para a tensão cisalhante é bastante elevado, mesmo para o intervalo de d_{max} onde se esperava uma melhor resposta do EFG, Figura 5.62. Para o caso de busca não é possível determinar faixas de uso geral para d_{max} , uma vez que a resposta está vinculada ao valor de k .

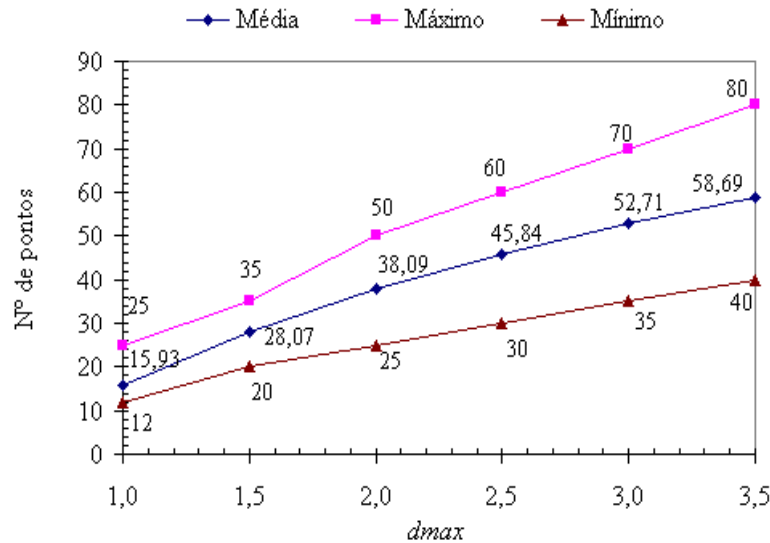


Figura 5.63 - Número médio, máximo e mínimo de pontos nodais para d_{max} igual a 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0 e 3,5 em um domínio com 85 nós

Da Figura 5.64 à Figura 5.75 são apresentados os campos de tensão normal e cisalhante e o campo de deslocamento obtido na direção y , tanto para a função peso cúbica quanto para a quártica *spline* quando d_{max} é igual a 1,5 e 2,5. A visualização dos campos indica a forma como o erro calculado se apresenta sobre o domínio e verifica possíveis variações na resposta com a modificação da função peso. Conforme esperado, verifica-se maior semelhança dos campos de deslocamento e de tensão normal com as soluções analíticas.

Mesmo sabendo que os erros dos campos de tensão cisalhante são elevados, Figura 5.62, sua visualização é importante no sentido de verificar se estes erros estão concentrados em regiões específicas do domínio. Por meio da análise gráfica, nota-se que o erro não está associado essencialmente a uma região particular do domínio.



Figura 5.64 - Campo de deslocamento em y: função peso cúbica, $d_{max} = 1,5$, 85 nós e $k = 12$.



Figura 5.65 - Campo de deslocamento em y: função peso quártica, $d_{max} = 1,5$, 85 nós e $k = 12$.

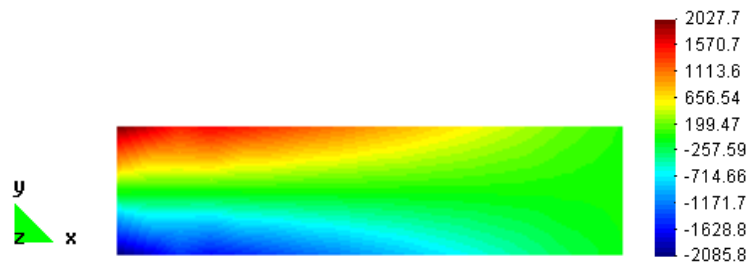


Figura 5.66 - Campo de tensão normal: função peso cúbica, $d_{max} = 1,5$, 85 nós e $k = 12$.

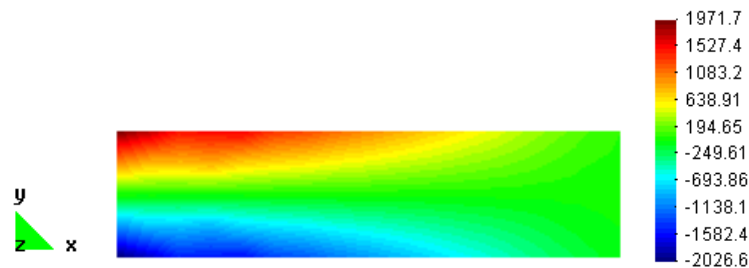


Figura 5.67 - Campo de tensão normal: função peso quártica, $d_{max} = 1,5$, 85 nós e $k = 12$.

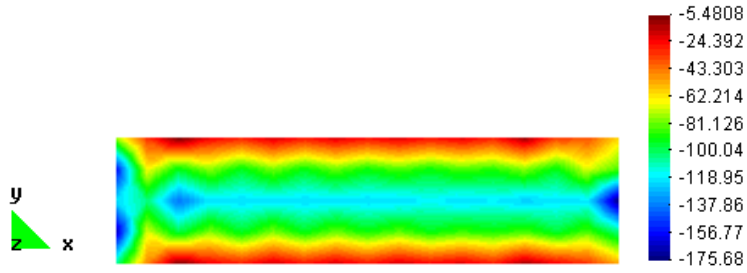


Figura 5.68 - Campo de tensão cisalhante: função peso cúbica, $d_{max} = 1,5$, 85 nós e $k = 12$.

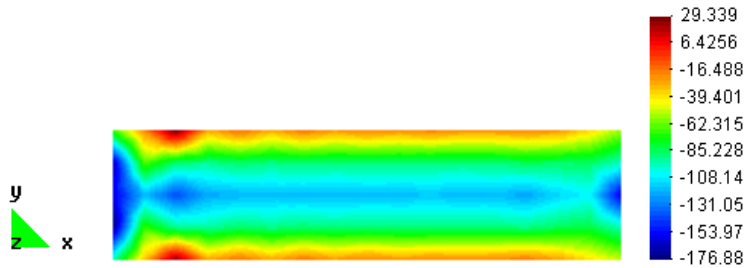


Figura 5.69 - Campo de tensão cisalhante: função peso quártica, $d_{max} = 1,5$, 85 nós e $k = 12$.



Figura 5.70 - Campo de deslocamento em y : função peso cúbica, $d_{max} = 2,5$, 85 nós e $k = 12$.



Figura 5.71 - Campo de deslocamento em y : função peso quártica; $d_{max} = 2,5$, 85 nós e $k = 12$.

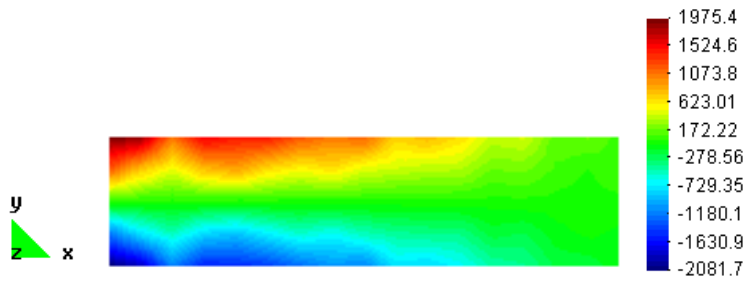


Figura 5.72 - Campo de tensão normal: função peso cúbica, $d_{max} = 2,5$, 85 nós e $k = 12$.

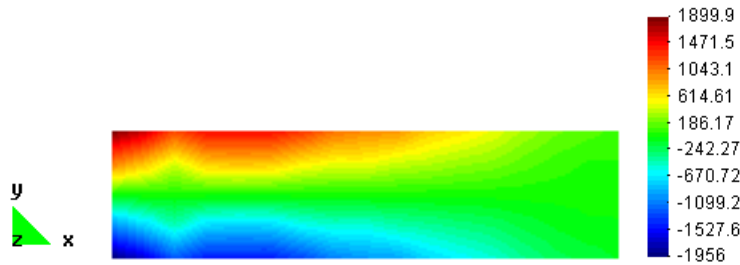


Figura 5.73 - Campo de tensão normal: função peso quártica, $d_{max} = 2,5$, 85 nós e $k = 12$.

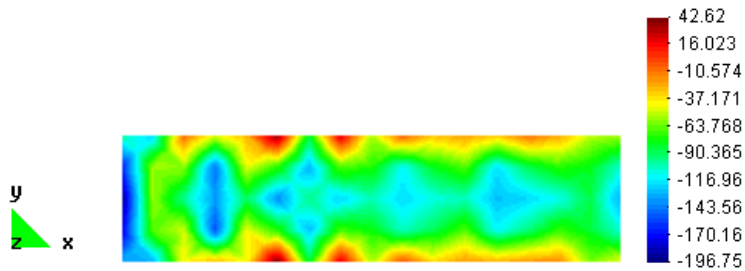


Figura 5.74 - Campo de tensão cisalhante: função peso cúbica, $d_{max} = 2,5$, 85 nós e $k = 12$.

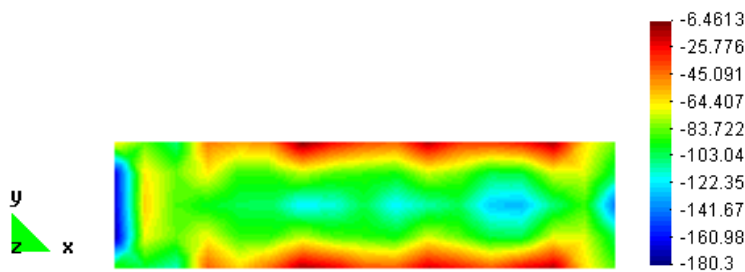


Figura 5.75 - Campo de tensão cisalhante: função peso quártica, $d_{max} = 2,5$, 85 nós e $k = 12$.

Foram feitas, ainda, simulações utilizando 55 nós, Figura 3.4, e 40 células de integração de fundo, Figura 3.5, no domínio apresentado na Figura 3.3. De forma análoga ao caso com 85 nós, o domínio de influência empregado tem forma quadrada. c_{xl} e c_{yl} foram calculadas

de acordo com os k nós mais próximos ($k = 12$) e o parâmetro de escala d_{max} assumiu os valores 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0 e 3,5. A função peso utilizada foi a cúbica *spline*. Estas simulações têm como objetivo visualizar os campos deslocamento em y e de tensões normais e cisalhantes, como também comparar a resposta desta configuração de nós com a de 85 nós. Para o domínio com 55 nós, os valores médios, máximos e mínimos de nós nos domínios de influência pertinentes a integração de matriz de rigidez são apresentados na Figura 5.76. Da Figura 5.77 à Figura 5.85 são mostradas as saídas gráficas dos campos supracitados, para d_{max} igual a 1,0, 2,5 e 3,5.

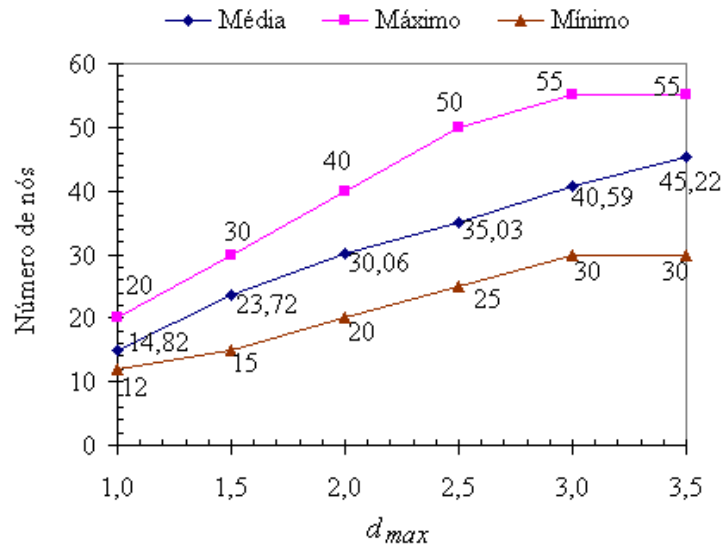


Figura 5.76 - Número médio, máximo e mínimo nós para d_{max} igual a 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0 e 3,5 em um domínio com 55 nós.

Nos casos em que o tamanho de dm é calculado durante a execução do programa para cada ponto de Gauss, pode-se verificar que variações no parâmetro d_{max} dificultam o controle do número de nós dentro dos domínios de influência.



Figura 5.77 - Campo de deslocamento em y : função peso cúbica, $d_{max} = 1,5$, 55 nós e $k =$

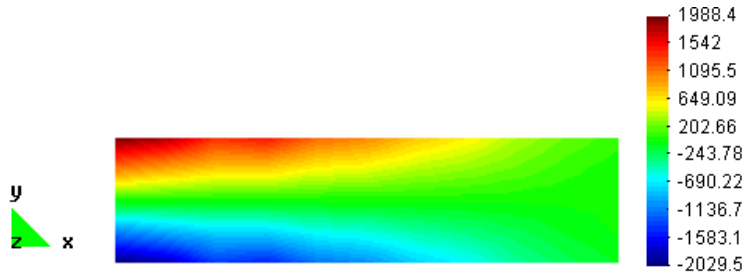


Figura 5.78 - Campo de tensão normal: função peso cúbica, $d_{max} = 1,5$, 55 nós e $k = 12$.

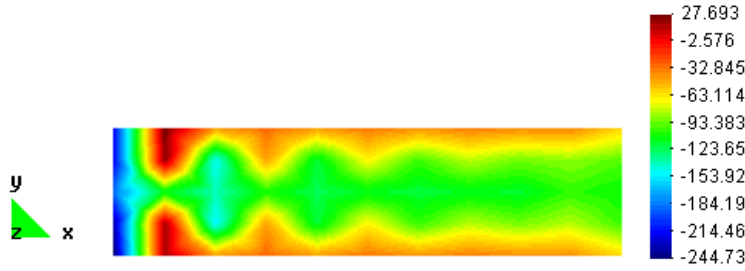


Figura 5.79 - Campo de tensão cisalhante: função peso cúbica, $d_{max} = 1,5$, 55 nós e $k = 12$.



Figura 5.80 - Campo de deslocamento em y: função peso cúbica, $d_{max} = 2,5$, 55 nós e $k = 12$.

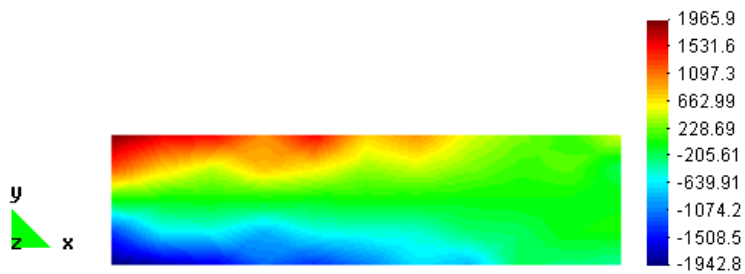


Figura 5.81 - Campo de tensão normal: função peso cúbica, $d_{max} = 2,5$, 55 nós e $k = 12$.

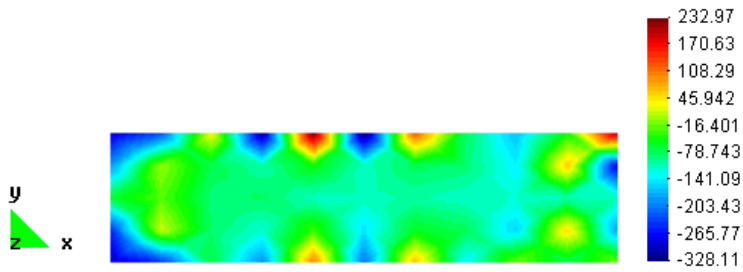


Figura 5.82 - Campo de tensão cisalhante: função peso cúbica, $d_{max} = 2,5$, 55 nós e $k = 12$.



Figura 5.83 - Campo de deslocamento em y : função peso cúbica, $d_{max} = 3,5$, 55 nós e $k = 12$.

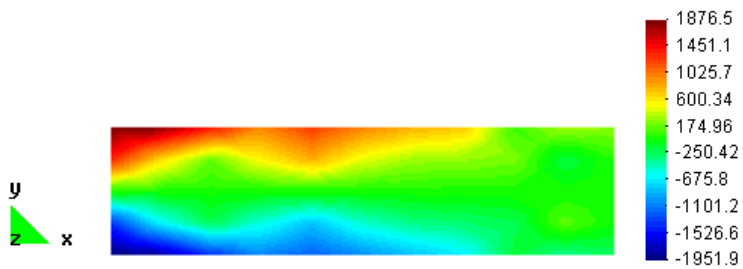


Figura 5.84 - Campo de tensão normal: função peso cúbica, $d_{max} = 3,5$, 55 nós e $k = 12$.

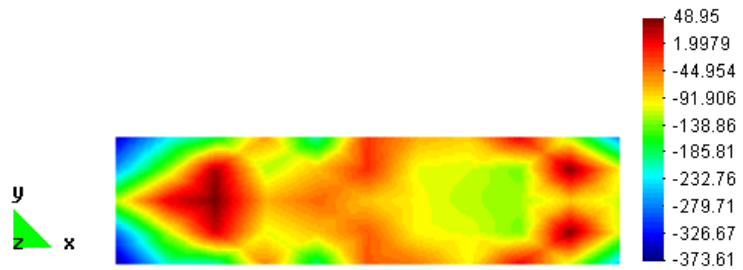


Figura 5.85 - Campo de tensão cisalhante: função peso cúbica, $d_{max} = 3,5$, 55 nós e $k = 12$.

Para a configuração com 55 nós as normas da energia e do erro relativo são mostradas, respectivamente, na Tabela 5.11 e na Tabela 5.12. A Tabela 5.13 apresenta os valores

médio, máximo e mínimo de dm , bem como, o seu desvio padrão durante a integração da matriz de rigidez.

Tabela 5.11 - Norma da energia: $k = 12$, 55 nós, 40 células e função peso cúbica *spline*.

Cálculo das tensões	d_{max}					
	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
Pontos de Gauss	0,228	0,195	0,201	0,447	0,990	0,462
Pontos nodais	0,111	0,097	0,108	0,200	0,302	0,200

Tabela 5.12 - Norma do erro relativo calculado para dm quadrado: $k = 12$, 55 nós, 40 células e função peso cúbica *spline*.

Nós do domínio	d_{max}					
	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
Luy	3,926	3,268	4,809	5,422	8,616	5,159
$L\sigma$	5,902	6,583	12,739	17,094	24,895	22,020
$L\tau$	166,053	119,265	118,414	177,163	218,861	155,169

Tabela 5.13 - Desvio padrão e valores médio, máximo e mínimo de dm durante a integração da matriz de rigidez: 55 nós e $k = 12$.

dm	d_{max}					
	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
Médio	8,280	12,421	16,561	20,702	24,842	28,983
Máximo	11,897	17,846	23,794	29,743	35,692	41,641
Mínimo	6,991	10,487	13,983	17,479	20,975	24,471
Desvio padrão	1,011	1,517	2,023	2,529	3,035	3,541

As melhores respostas obtidas com a distribuição de 55 nós são pertinentes a d_{max} igual a 1,5. Para esta configuração, os valores analíticos e numéricos obtidos para o deslocamento em y na linha de centro e topo da viga são mostrados, respectivamente, na Figura 5.86 e na Figura 5.87.

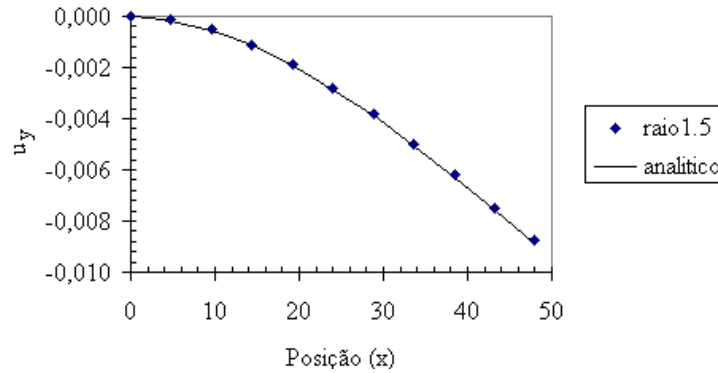


Figura 5.86 - Deslocamento em y na linha de centro da viga: $d_{max} = 1,5$, 55 nós e $k = 12$.

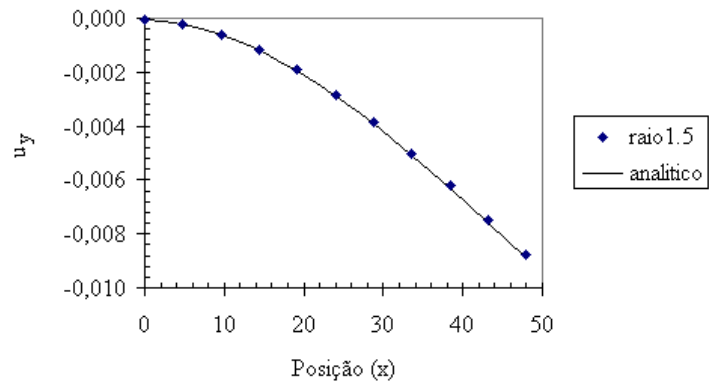


Figura 5.87 - Deslocamento em y no topo da viga: $d_{max} = 1,5$, 55 nós e $k = 12$.

De acordo com os valores indicados da Figura 5.60 à Figura 5.62, o campo de deslocamento em y (Figura 5.64, Figura 5.65, Figura 5.70 e Figura 5.71) foi o que apresentou as melhores respostas, para ambas as funções peso testadas no domínio com 85 nós. Para a configuração com 55 nós, este comportamento também é verificado e mostrado da Figura 5.77 à Figura 5.85.

Para as duas distribuições nodais, a tensão normal possui melhores respostas que as tensões cisalhantes, pelo fato destas tensões apresentarem, respectivamente, campos lineares e segunda ordem. Nota-se que os resultados apresentados utilizando busca são inferiores aos do caso com dm constante durante a execução. Tal fato pode estar relacionado a diferenças na normalização do raio da função peso para cada ponto/nós.

Na Figura 5.88(a) é mostrada a distribuição dos pontos amostrais de Gauss (4x4) empregada nas células de fundo. O mesmo padrão para a distribuição destes pontos é mantido, para todas as células. Nas simulações realizadas, os nós pertencentes ao domínio estão localizados sobre cada vértice das células de integração (distribuição uniforme),

conforme apresentado na Figura 5.88 (b), (c) e (d). Desta forma, o primeiro ponto amostral de cada célula possui a mesma posição relativa aos vértices da célula, para todas as células do domínio.

A Figura 5.88(b) mostra o domínio de influência, composto por nove nós, centrado no primeiro ponto amostral de Gauss pertencente à primeira célula de integração. Para a direção x , o peso atribuído a um nó que esteja afastado de uma distância Δ está relacionado à razão Δ/dm (valor normalizado). Para o caso no qual o tamanho do domínio de influência é constante durante a integração numérica, o peso atribuído aos pontos com mesma posição relativa será o mesmo. Na Figura 5.88(c) é mostrado o caso onde o tamanho do domínio de influência é mantido constante para o primeiro ponto amostral na segunda célula de integração. Para este caso, o peso do nó posicionado a uma distância Δ será o mesmo do caso anterior apresentado na Figura 5.88(b). Contudo, quando o número mínimo de nós é utilizado para determinar o tamanho do domínio de influência, dm , isto não acontece. A Figura 5.88(d) representa o domínio de influência obtido pelo número mínimo de pontos nodais. Assim, os nove nós mais próximos determinam o tamanho do domínio de influência, que para este caso está representado por dm' ($dm' < dm$). Deste modo, um nó posicionado a uma distância Δ terá o valor de seu peso relacionado à distância normalizada Δ/dm' .

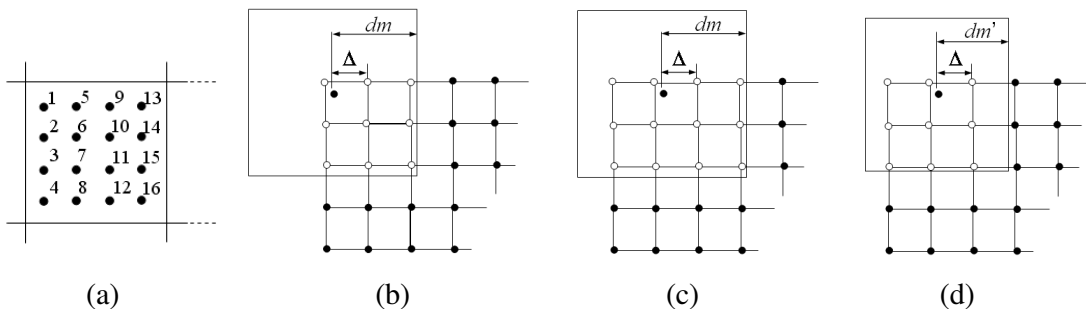


Figura 5.88 - (a) Distribuição dos pontos amostrais de Gauss, (b) domínio de influência do primeiro ponto amostral para a primeira célula: domínio com tamanho dm com 9 nós.

Domínio de influência do primeiro ponto amostral para segunda célula, (c) mantendo o domínio com tamanho dm (12 nós) e (d) domínio determinado por pelo menos 9 nós (dm').

Por fim, a Figura 5.89 apresenta a função de forma do nó 1, coordenadas 0 e -6 e do nó 28 coordenadas 24 e 0. Estas funções foram construídas com dm definido pela busca aos 12

nós mais próximos em um domínio com 55 nós, 640 pontos amostrais, 40 células de fundo e função, d_{max} igual a 1,5 e peso cúbica *spline*.

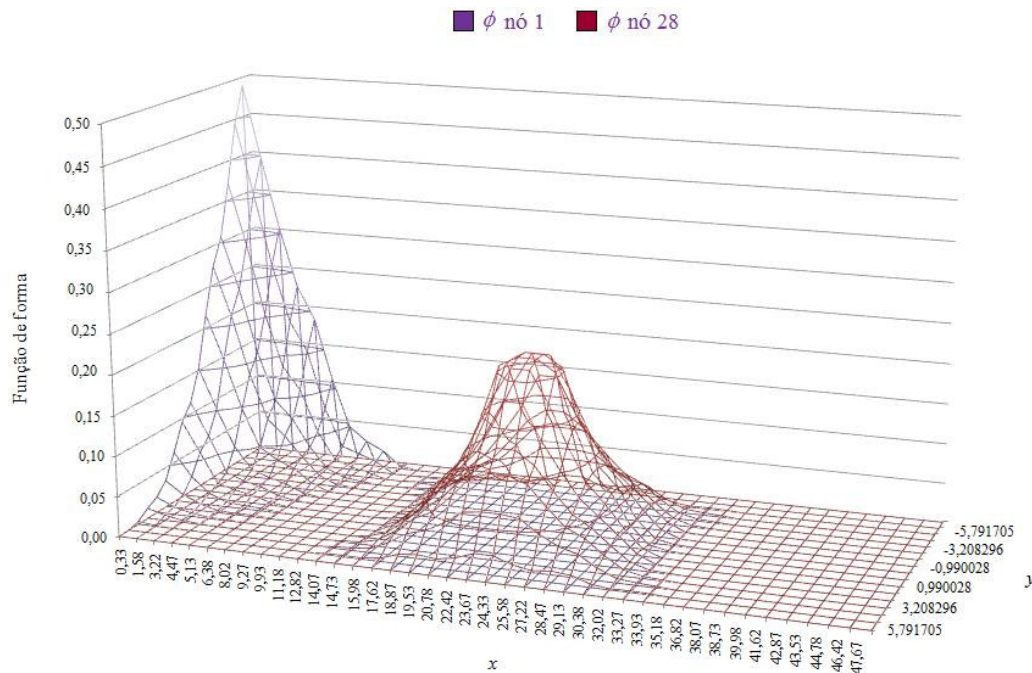


Figura 5.89 - Função de forma do nó 1 (0, - 6) e 28 (24, 0) para o caso onde dm é definido pela busca aos 12 nós mais próximos: 55 nós no domínio, 640 pontos amostrais, 40 células de fundo, d_{max} igual a 1,5 e função peso cúbica *spline*.

5.4 DISTRIBUIÇÃO NÃO-UNIFORME COM VARIAÇÃO NO TAMANHO DO DOMÍNIO DE INFLUÊNCIA

Os domínios avaliados nas seções anteriores fazem uso da distribuição uniforme de nós. Esta seção tem como escopo verificar a resposta do método EFG por meio da análise dos campos de tensão e de deslocamento em um domínio com distribuição não-uniforme de nós. Todas as simulações empregaram d_{max} igual a 1,0. c_{xI} e c_{yI} foram calculados de acordo com os k pontos mais próximos e a função peso utilizada é a cúbica *spline*. A Figura 5.90 mostra as 40 células de fundo (11×5) utilizadas na integração numérica.

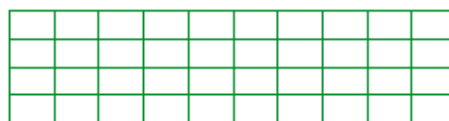


Figura 5.90 - Malha de fundo composta por 40 células (640 pontos de integração).

Na Figura 5.91 são mostradas as cinco distribuições não-uniformes de nós testadas: (a) (b) 52 nós, (c) (d) 83 nós, (e) (f) 118 nós, (g) (h) 190 nós e (i) (j) 258 nós. Da Figura 5.92 à Figura 5.96 são mostrados os erros relativos dos campos de deslocamento em y e de tensões cisalhantes e normais em função do número mínimo de nós (k) no domínio de influência, para as cinco distribuições nodais indicadas na Figura 5.91.

A Tabela 5.14, a Tabela 5.15 e a Tabela 5.16 apresentam, respectivamente, para os campos de deslocamento em y , tensão normal e tensão cisalhante os valores de k pertinentes ao erro relativo mínimo. Verifica-se, por meio da Tabela 5.14, que o erro relativo do campo de deslocamento decai com o aumento do número de nós no domínio, para as cinco distribuições nodais testadas, e que os valores de erro deste campo variam entre 0,07% e 8%. O campo de tensão normal apresenta valores de erro de 6,3% a 8,8% para as três primeiras configurações nodais, no entanto o campo de tensão cisalhante não obteve resultados acurados, para as configurações nodais testadas.

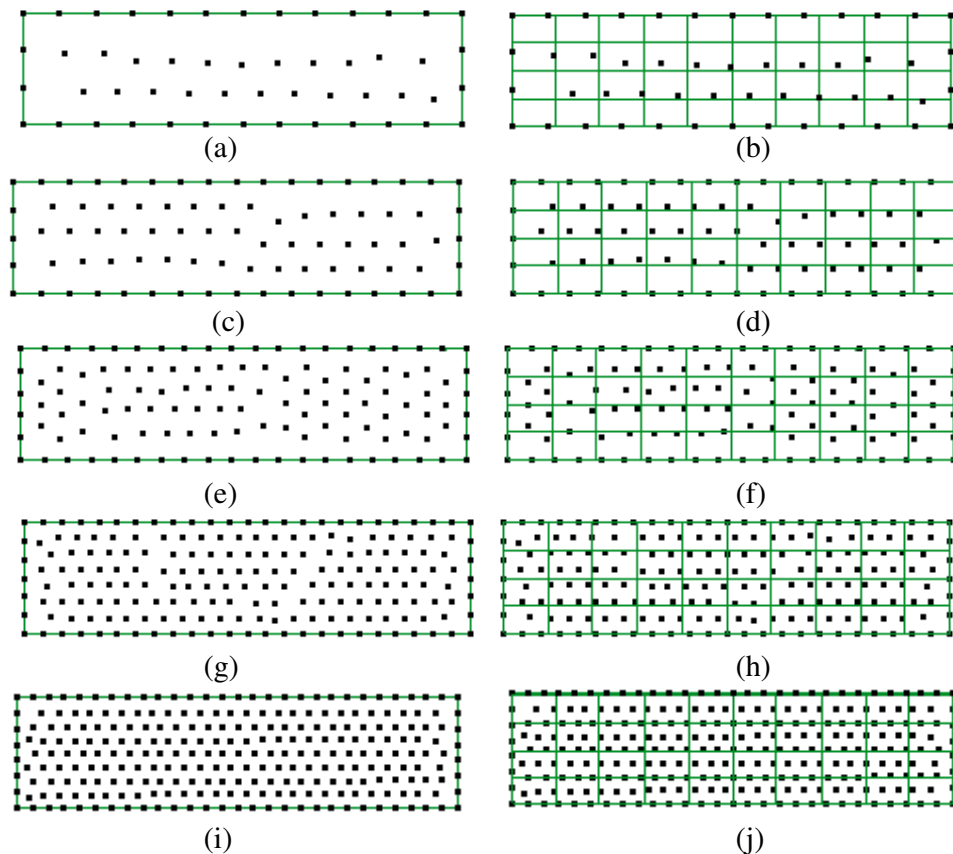


Figura 5.91 - Distribuição não-uniforme de (a) 52, (c) 83, (e) 118, (g) 190 e (i) 258 nós.
 Visualização na malha de fundo com (b) 52, (d) 83, (f) 118, (h) 190 e (j) 258 nós.

Verifica-se que o erro relativo apresenta maiores valores para os campos de tensão cisalhante. Nota-se também que o valor de k que minimiza o erro relativo para uma dada configuração de nós no domínio não é o mesmo para todos os campos analisados, conforme os resultados apresentados da Tabela 5.14 à Tabela 5.16.

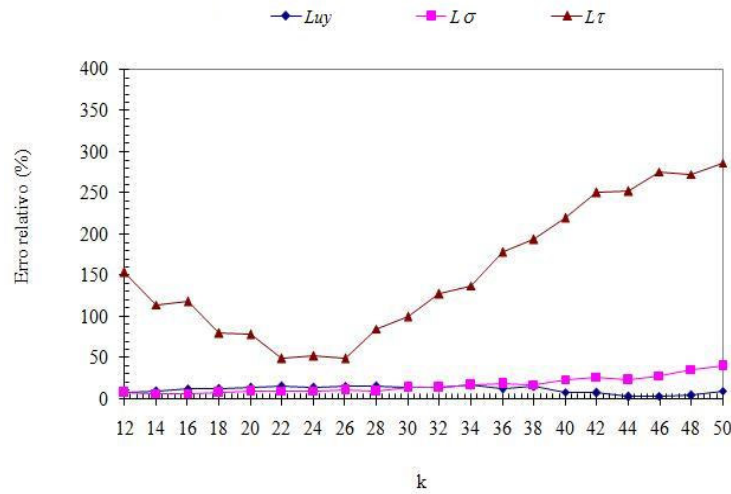


Figura 5.92 - Erro percentual dos campos de deslocamento em y (L_{uy}) e de tensão (L_{σ} , L_{τ}) em função de k , para uma distribuição não-uniforme de 52 nós no domínio e 40 células.

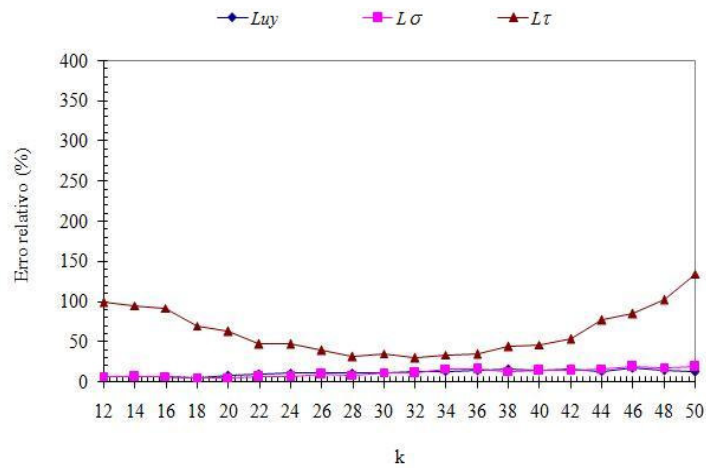


Figura 5.93 - Erro percentual dos campos de deslocamento em y (L_{uy}) e de tensão (L_{σ} , L_{τ}) em função de k , para uma distribuição não-uniforme de 83 nós no domínio e 40 células.

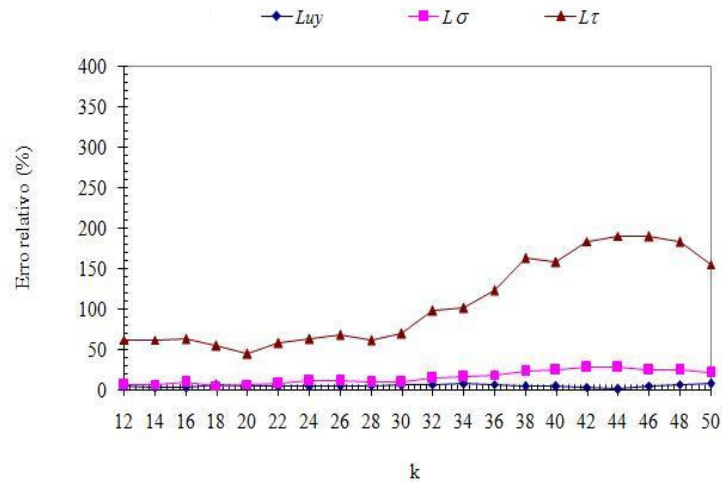


Figura 5.94 - Erro percentual dos campos de deslocamento em y (L_{uy}) e de tensão ($L\sigma$, $L\tau$) em função de k , para uma distribuição não-uniforme de 118 nós no domínio e 40 células.

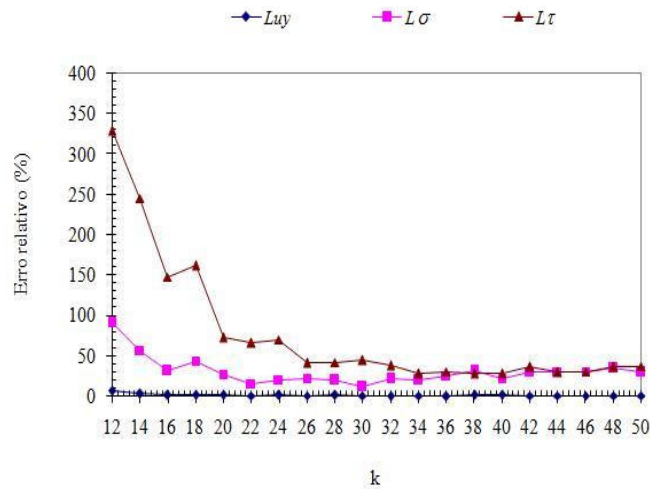


Figura 5.95 - Erro percentual dos campos de deslocamento em y (L_{uy}) e de tensão ($L\sigma$, $L\tau$) em função de k , para uma distribuição não-uniforme de 190 nós no domínio e 40 células.

Tabela 5.14 - Valores de k pertinentes ao erro relativo mínimo do campo de deslocamento em y para as cinco distribuições nodais com 40 células de integração.

Erro percentual	Número de nós no domínio				
	52	83	118	190	258
	$k = 14$	$k = 18$	$k = 16$	$k = 22$	$k = 26$
L_{uy}	8,352	4,699	2,588	0,635	0,071
$L\sigma$	6,568	5,069	8,788	15,584	42,951
$L\tau$	114,134	69,626	62,769	66,116	113,239

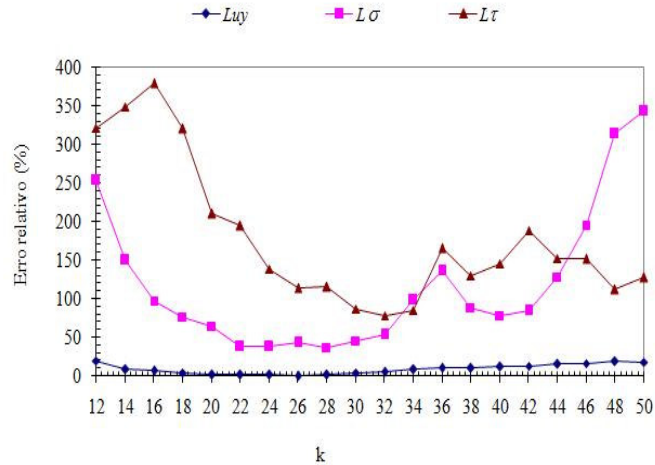


Figura 5.96 - Erro percentual dos campos de deslocamento em y (L_{uy}) e de tensão (L_{σ} , L_{τ}) em função de k , para uma distribuição não-uniforme de 258 nós no domínio e 40 células.

Tabela 5.15 - Valores de k pertinentes ao erro relativo mínimo do campo de tensão normal para as cinco distribuições nodais com 40 células de integração.

Erro percentual	Número de nós no domínio				
	52	83	118	190	258
	$k = 16$	$k = 20$	$k = 18$	$k = 22$	$k = 28$
L_{uy}	12,283	7,502	5,420	0,635	1,410
L_{σ}	6,544	4,916	5,105	15,584	36,692
L_{τ}	117,707	62,086	53,891	66,116	114,899

Tabela 5.16 - Valores de k pertinentes ao erro relativo mínimo do campo de tensão cisalhante para as cinco distribuições nodais com 40 células de integração.

Erro percentual	Número de nós no domínio				
	52	83	118	190	258
	$k = 22$	$k = 28$	$k = 20$	$k = 26$	$k = 30$
L_{uy}	14,562	11,078	5,174	0,743	4,016
L_{σ}	9,547	8,166	6,737	22,157	45,346
L_{τ}	48,285	31,244	44,515	40,541	86,754

Da Figura 5.97 à Figura 5.101 são mostrados os valores da norma da energia calculada nos nós e nos pontos amostrais de Gauss.

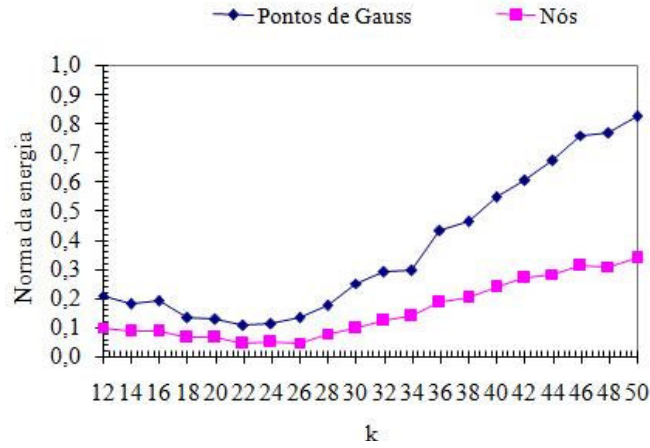


Figura 5.97 - Norma da energia em função de k, para domínio com distribuição de 52 nós e 40 células de integração: \blacklozenge pontos de Gauss e \blacksquare nós.

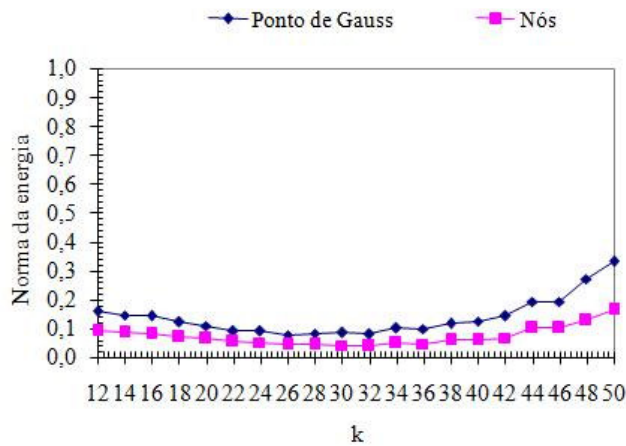


Figura 5.98 - Norma da energia em função de k, para domínio com distribuição de 83 nós e 40 células de integração: \blacklozenge pontos de Gauss e \blacksquare nós.

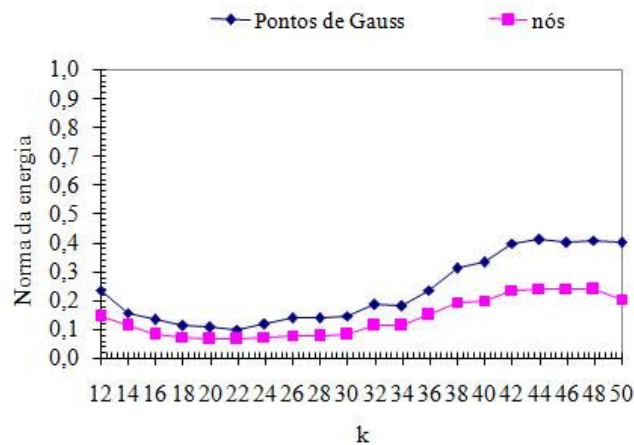


Figura 5.99 - Norma da energia em função de k, para domínio com distribuição de 118 nós e 40 células de integração: \blacklozenge pontos de Gauss e \blacksquare nós.

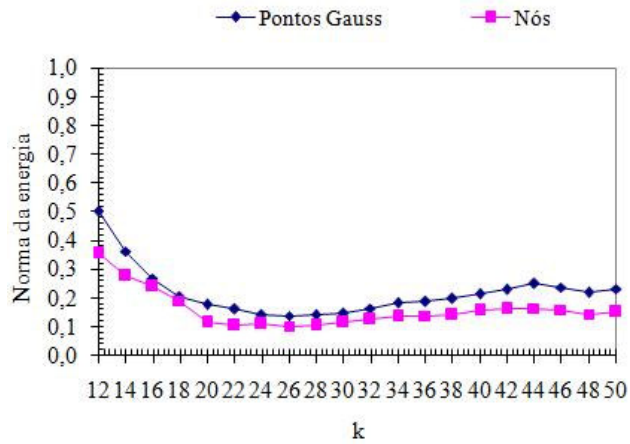


Figura 5.100 - Norma da energia em função de k, para domínio com distribuição de 190 nós e 40 células de integração: ♦ pontos de Gauss e ■ nós.

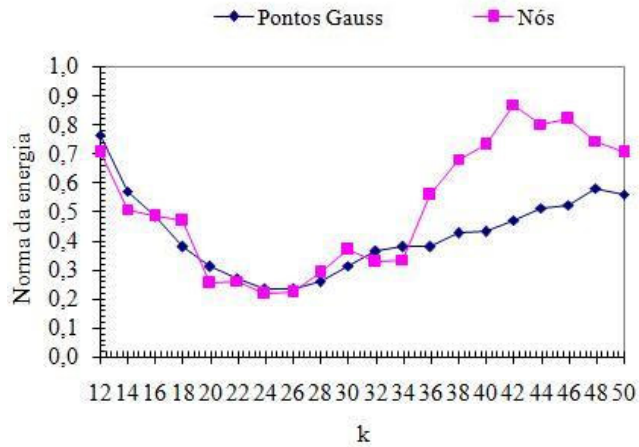


Figura 5.101 - Norma da energia em função de k, para domínio com distribuição de 258 nós e 40 células de integração: ♦ pontos de Gauss e ■ nós.

A Tabela 5.17 apresenta os valores mínimos da norma da energia para as cinco distribuições nodais testadas. Os campos de deslocamento em y e de tensões normais e cisalhantes pertinentes a estas normas de energia são mostradas da Figura 5.102 à Figura 5.116.

Tabela 5.17 - Valores de k pertinentes às menores normas de energia para as cinco distribuições nodais, 40 células.

Norma de energia	Número de nós no domínio				
	52	83	118	190	258
	k = 22	k = 26	k = 20	k = 26	k = 24
Ponto de Gauss	0,105	0,078	0,107	0,136	0,232
Ponto nodal	0,044	0,044	0,065	0,099	0,216

A norma da energia de deformação leva em conta os erros das deformações normais ε_{xx} (σ_{xx}) ε_{yy} (σ_{yy}) e cisalhantes ε_{xy} (τ_{xy}). Os valores de k relativos às menores normas de energia de deformação, Tabela 5.17, são na maioria dos casos iguais aos valores encontrados para o menor erro percentual do campo de cisalhamento, Tabela 5.16, uma vez que este campo foi o que apresentou maiores erros relativos.



Figura 5.102 - Campo de deslocamento em y: 52 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e k = 22.

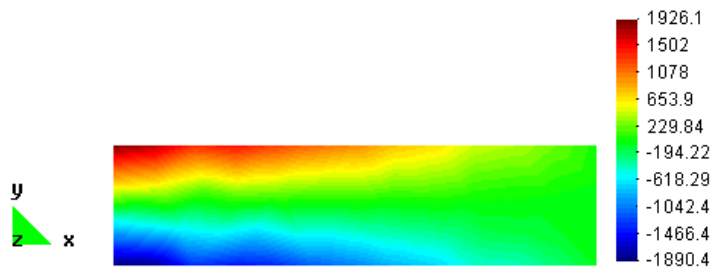


Figura 5.103 - Campo de tensão normal: 52 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e k = 22.

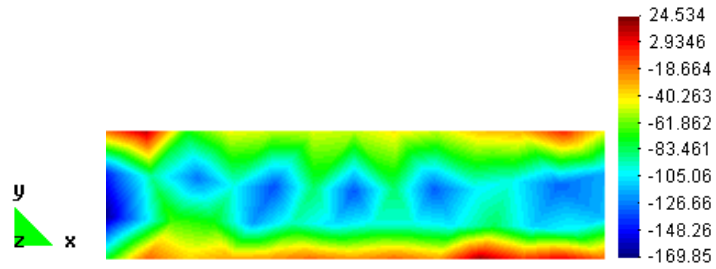


Figura 5.104 - Campo de tensão cisalhante: 52 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 22$.



Figura 5.105 - Campo de deslocamento em y: 83 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 26$.

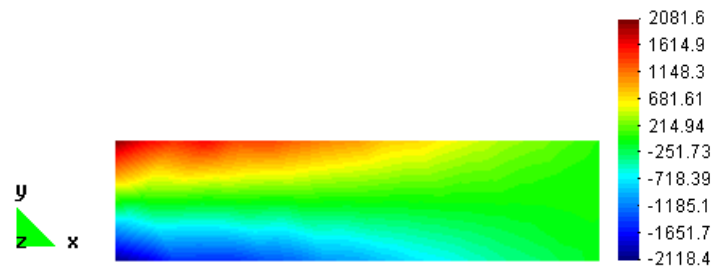


Figura 5.106 - Campo de tensão normal: 83 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 26$.

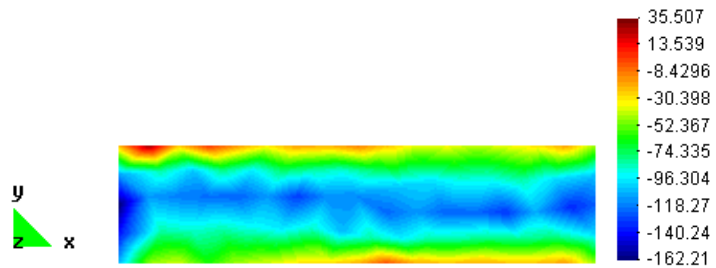


Figura 5.107 - Campo de tensão cisalhante: 83 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 26$.



Figura 5.108 - Campo de deslocamento em y : 118 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 20$.

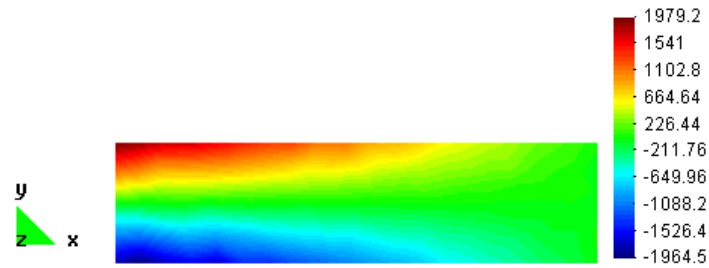


Figura 5.109 - Campo de tensão normal: 118 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 20$.

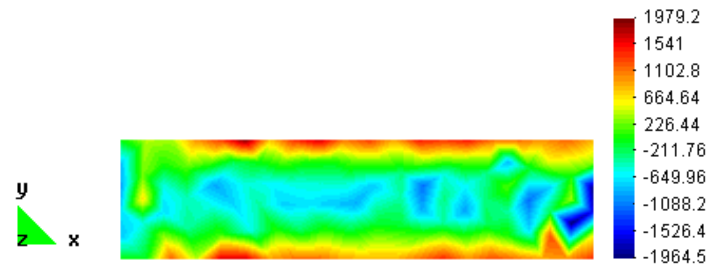


Figura 5.110 - Campo de tensão cisalhante: 118 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 20$.

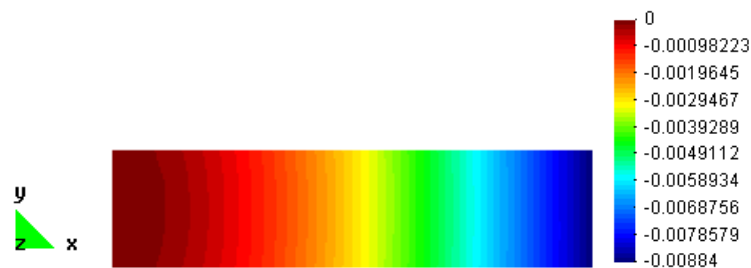


Figura 5.111 - Campo de deslocamento em y : 190 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 26$.

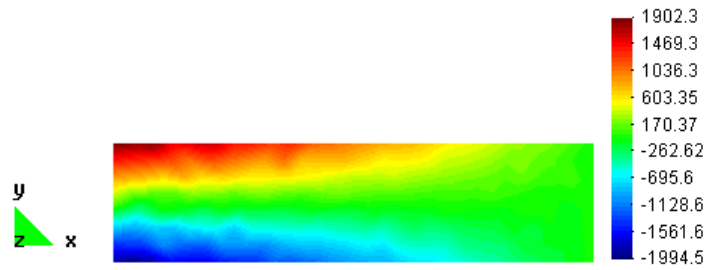


Figura 5.112 - Campo de tensão normal: 190 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 26$.

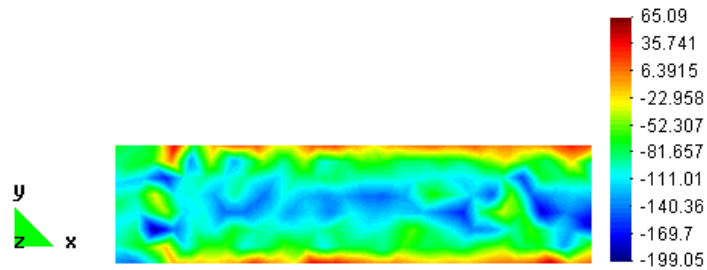


Figura 5.113 - Campo de tensão cisalhante: 190 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 26$.

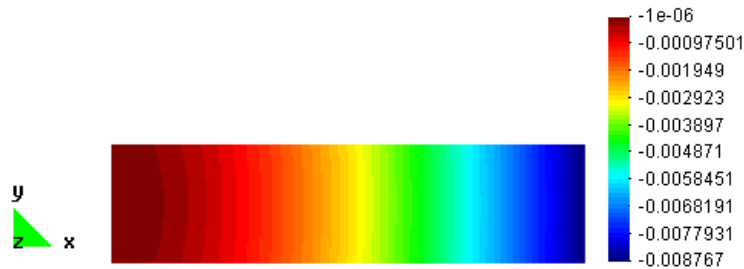


Figura 5.114 - Campo de deslocamento em y : 256 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 24$.

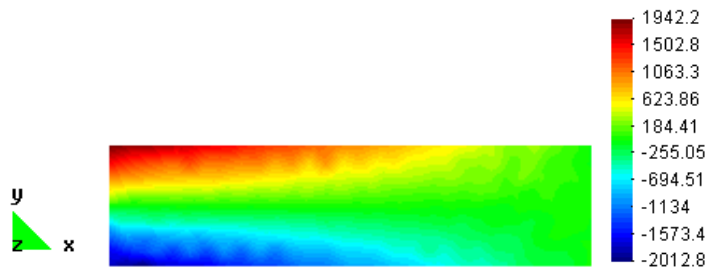


Figura 5.115 - Campo de tensão normal: 256 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 24$.

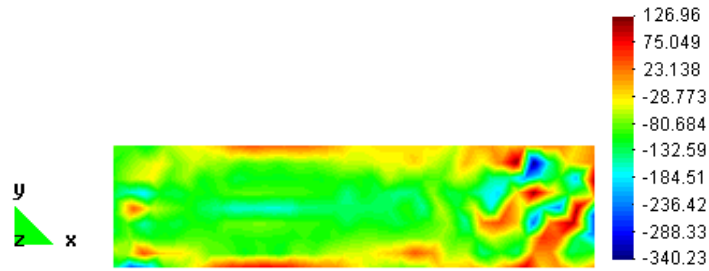


Figura 5.116 - Campo de tensão cisalhante: 256 nós, 40 células, $d_{max} = 1,0$, função peso cúbica e $k = 24$.

Da Figura 5.117 à Figura 5.121 são mostrados os valores médios, máximos e mínimos de nós nos domínios de influência em função de k . Evidentemente, o valor mínimo de nós é igual ou ligeiramente superior ao valor de k fornecido.

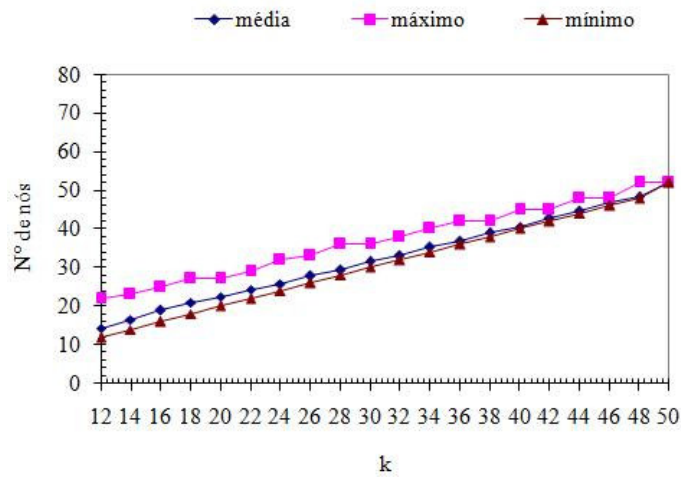


Figura 5.117 - Número médio, máximo e mínimo de nós nos domínios de influência em função de k , para a distribuição com 52 nós, 40 células.

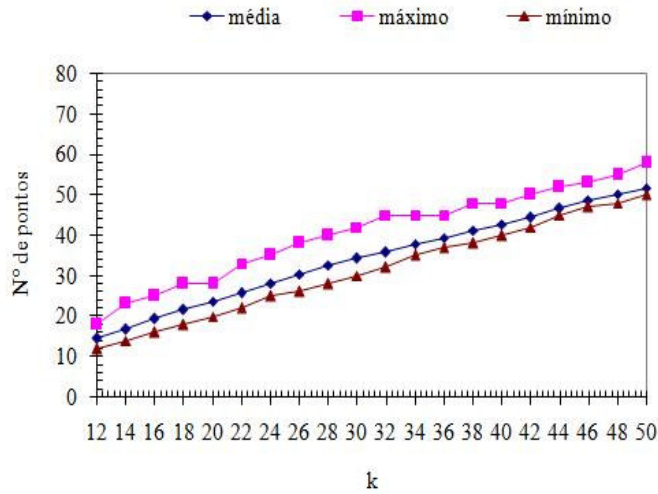


Figura 5.118 - Número médio, máximo e mínimo de nós nos domínios de influência em função de k, para a distribuição com 83 nós, 40 células.

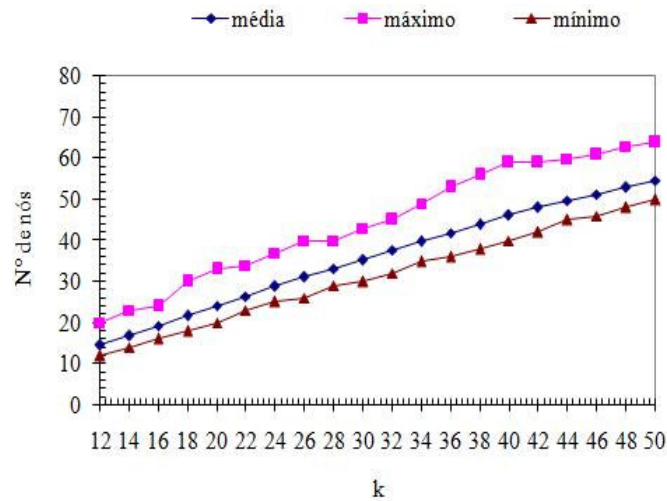


Figura 5.119 - Número médio, máximo e mínimo de nós nos domínios de influência em função de k, para a distribuição com 118 nós, 40 células.

O tamanho médio, máximo e mínimo dos domínios de influência é mostrado da Figura 5.122 à Figura 5.126, para as cinco configurações de nós não-uniforme. Com aumento da concentração nodal o tamanho dos domínios de influência diminui, pois o número mínimo de nós por dm é fixado para cada simulação.

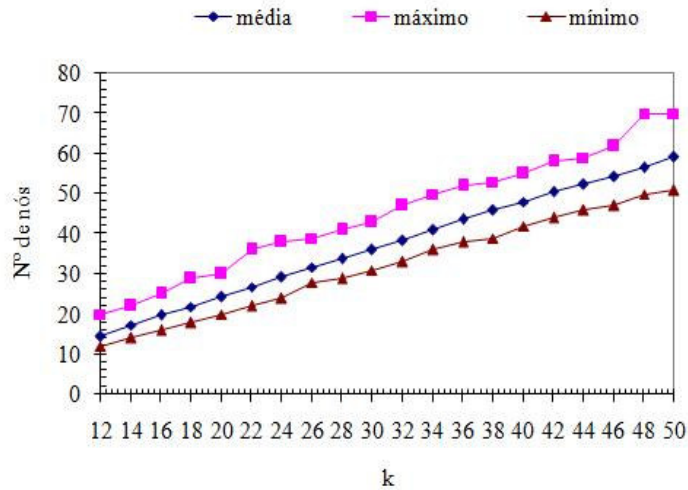


Figura 5.120 - Número médio, máximo e mínimo de nós nos domínios de influência em função de k, para a distribuição com 190 de nós, 40 células.

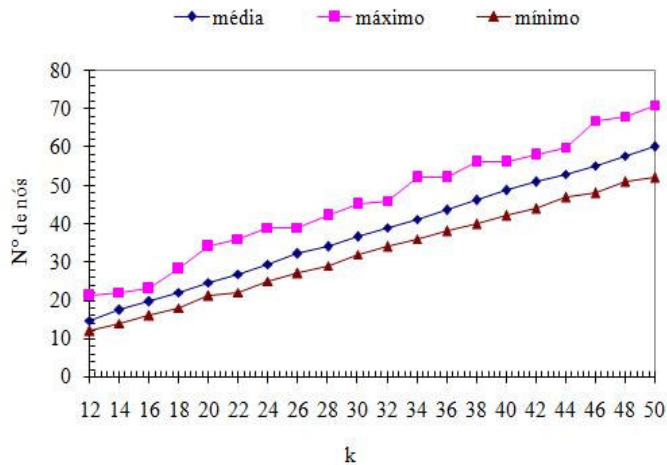


Figura 5.121 - Número médio, máximo e mínimo de nós nos domínios de influência em função de k, para a distribuição com 258 de nós, 40 células.

A Tabela 5.18 apresenta o intervalo de k pertinente às melhores respostas para cada concentração nodal não-uniforme, como também o número máximo, mínimo e médio de nós nos domínios de influência. Verifica-se que a faixa das melhores respostas sofre certa variação em algumas concentrações nodais.

Tabela 5.18 - Intervalo de k e o número máximo, mínimo e médio de nós associado às melhores respostas para o domínio com 52, 83, 118, 190 e 258 nós: função peso cúbica, 40 células.

Número de nós no domínio	Intervalo de k com as melhores respostas		
	Nº mínimo de nós em dm , k : Nº (Máximo - Mínimo) Médio de nós		
52 nós	$k = 22$: (29 - 22) 24	$k = 24$: (32 - 24) 26	$k = 26$: (33 - 26) 28
83 nós	$k = 26$: (38 - 26) 30	$k = 28$: (40 - 28) 32	$k = 30$: (42 - 30) 34
118 nós	$k = 18$: (30 - 18) 22	$k = 20$: (33 - 20) 24	$k = 22$: (34 - 23) 26
190 nós	$k = 26$: (39 - 28) 32	$k = 28$: (42 - 29) 34	$k = 30$: (43 - 31) 36
258 nós	$k = 26$: (39 - 27) 32	$k = 28$: (42 - 29) 34	$k = 30$: (47 - 32) 37

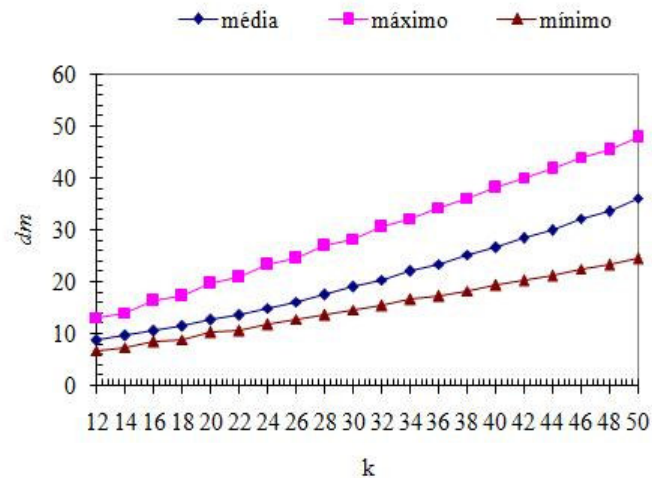


Figura 5.122 - Tamanho médio, máximo e mínimo de dm em função de k , para a distribuição não-uniforme de 52 nós, 40 células.

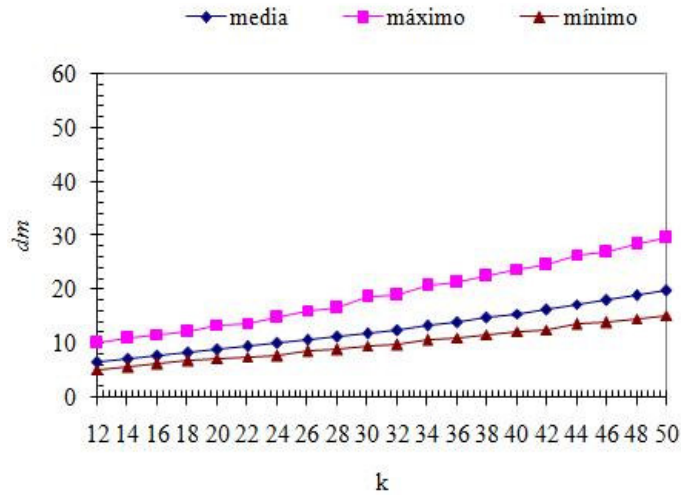


Figura 5.123 - Tamanho médio, máximo e mínimo de dm em função de k , para a distribuição não-uniforme de 83 nós, 40 células.

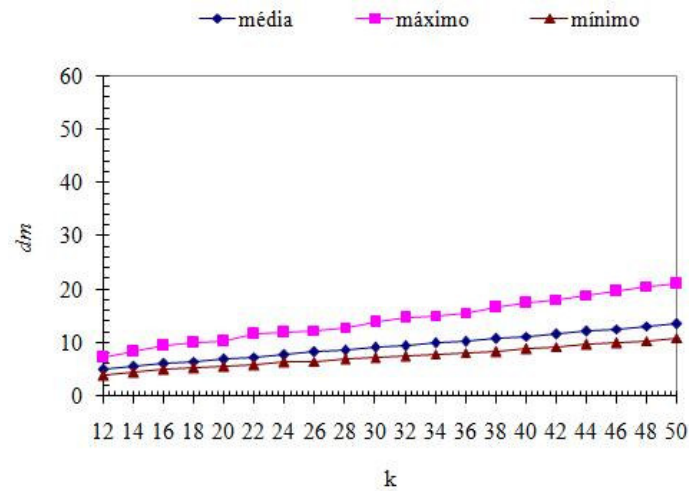


Figura 5.124 - Tamanho médio, máximo e mínimo de dm em função de k , para a distribuição não-uniforme de 118 nós, 40 células.

Foram feitas ainda simulações nos domínios com 52, 83 e 118 nós utilizando a malha de fundo composta por 64 células e 1.024 pontos de integração, de forma a comparar estes resultados com os obtidos com a malha de integração formada por 40 células e 640 pontos amostrais de Gauss, Figura 5.92 à Figura 5.94. De acordo com os erros percentuais mostrados da Figura 5.127 à Figura 5.129 para a nova malha de fundo, verifica-se que nenhuma alteração pertinente foi constatada com o aumento do número de pontos amostrais de Gauss.

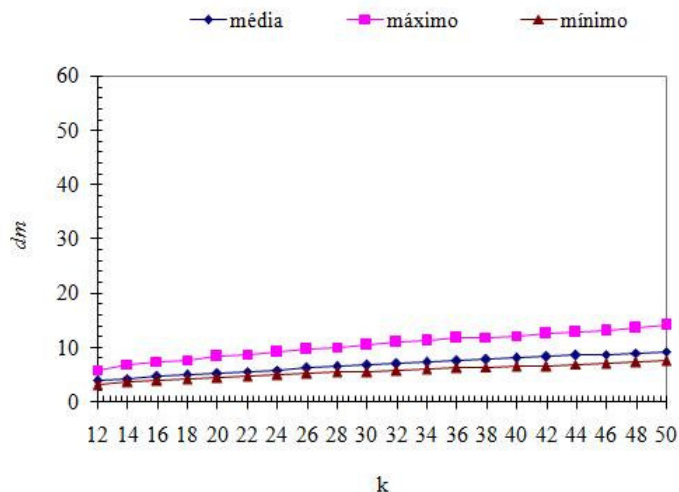


Figura 5.125 - Tamanho médio, máximo e mínimo de dm em função de k , para a distribuição não-uniforme de 190 nós, 40 células.

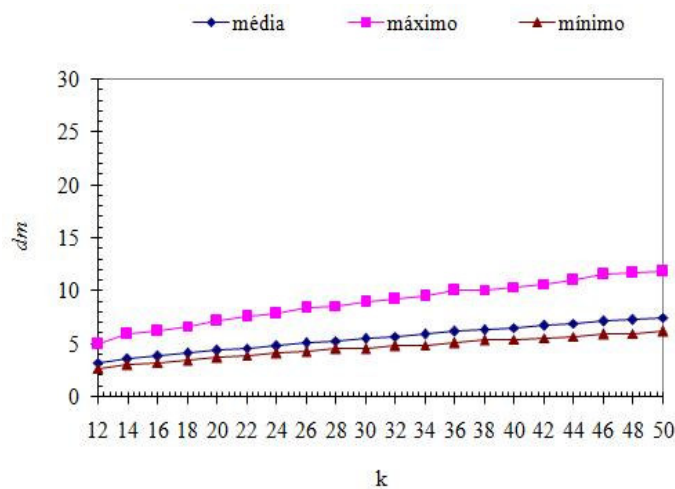


Figura 5.126 - Tamanho médio, máximo e mínimo de dm em função de k , para a distribuição não-uniforme de 258 nós.

Liu (2003) avalia a influência da densidade dos pontos de integração e nodal na acuracidade da solução. Segundo Liu, para que a resposta seja acurada a razão entre estas duas densidades, α_n , deve estar próxima do intervalo compreendido entre 3 e 9. Este intervalo é definido como válido tanto para distribuições uniformes como para não-uniformes de nós. A Tabela 5.19 apresenta os valores de α_n pertinentes às duas malhas de fundo testadas. Deste modo, as simulações nos domínios com distribuições nodais não-uniformes foram realizadas dentro e fora do intervalo de α_n definido como adequado por

Liu (2003), eliminando a hipótese de que os erros do campo de tensão cisalhante são elevados devido à inadequação da quantidade de pontos de integração no domínio.

Tabela 5.19 - Razão entre as densidades de pontos amostrais e de nós no domínio.

Número de células	Concentração nodal				
	52 nós	83 nós	118 nós	190	256
40 células	$\alpha_n = 12,3$	$\alpha_n = 7,7$	$\alpha_n = 5,4$	$\alpha_n = 3,4$	$\alpha_n = 2,5$
64 células	$\alpha_n = 19,6$	$\alpha_n = 12,3$	$\alpha_n = 8,6$		

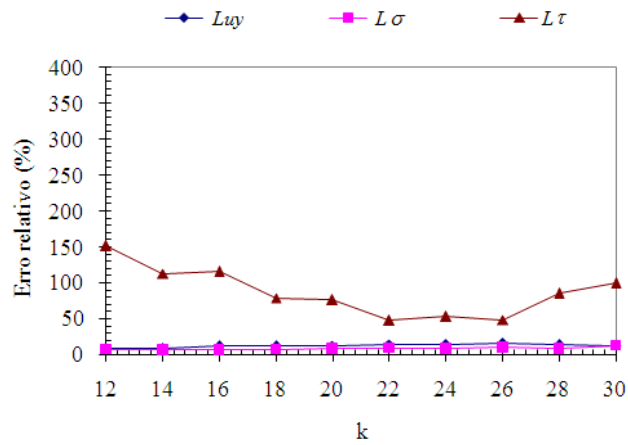


Figura 5.127 - Erro percentual dos campos de deslocamento em y (L_{uy}) e de tensão (L_{σ} , L_{τ}) em função de k, para uma distribuição não-uniforme de 52 nós e 64 células.

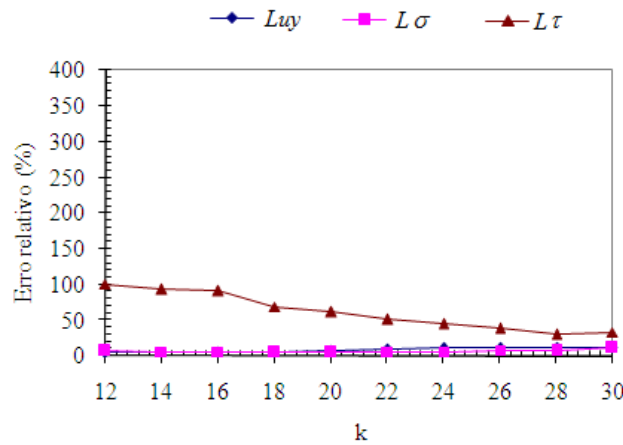


Figura 5.128 - Erro percentual dos campos de deslocamento em y (L_{uy}) e de tensão (L_{σ} , L_{τ}) em função de k, para uma distribuição não-uniforme de 83 nós e 64 células.

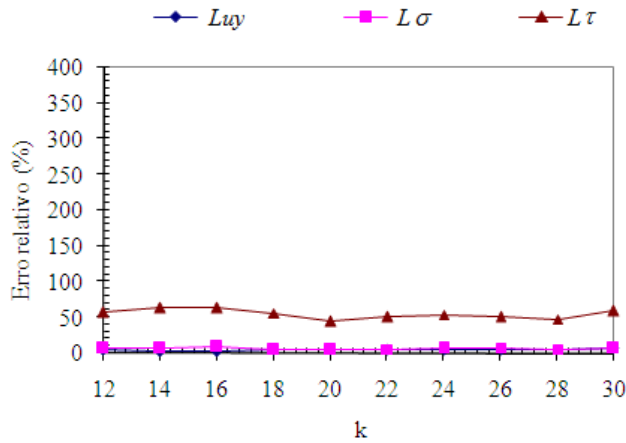


Figura 5.129 - Erro percentual dos campos de deslocamento em y (L_{uy}) e de tensão (L_{σ} , L_{τ}) em função de k, para uma distribuição não-uniforme de 118 nós e 64 células.

5.5 DISTRIBUIÇÃO NÃO-UNIFORME DE NÓS COM TAMANHO DO DOMÍNIO DE INFLUÊNCIA CONSTANTE

Esta seção apresenta simulações utilizando dm constante em domínios com distribuições nodais não-uniformes: 52, 83, 118 e 258 nós. Isto foi possível porque apesar das distribuições de nós serem não-uniformes, estas não apresentam variações acentuadas nos valores das concentrações nodais em todo domínio. Da Figura 5.130 à Figura 5.132 são mostrados os erros para os campos de deslocamento em y e de tensões normais e cisalhantes utilizando a malha de fundo com 40 células (640 pontos amostrais), função peso cúbica e valores de dm entre 6 e 30.

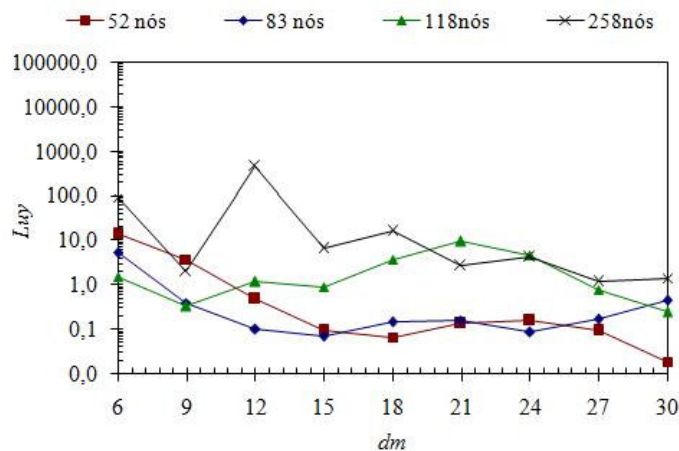


Figura 5.130 - Erro percentual do campo de deslocamento em y (L_{uy}) para uma distribuição não-uniforme de 52 nós, 40 células e dm constante.

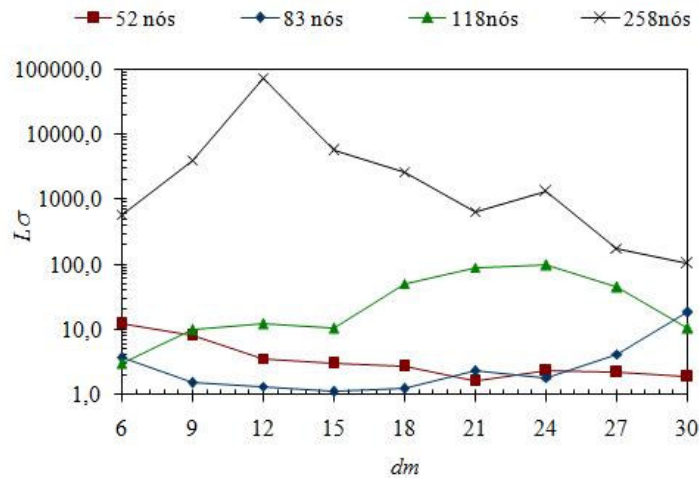


Figura 5.131 - Erro percentual do campo de tensão normal ($L\sigma$) para uma distribuição não-uniforme de 52 nós, 40 células e dm constante.

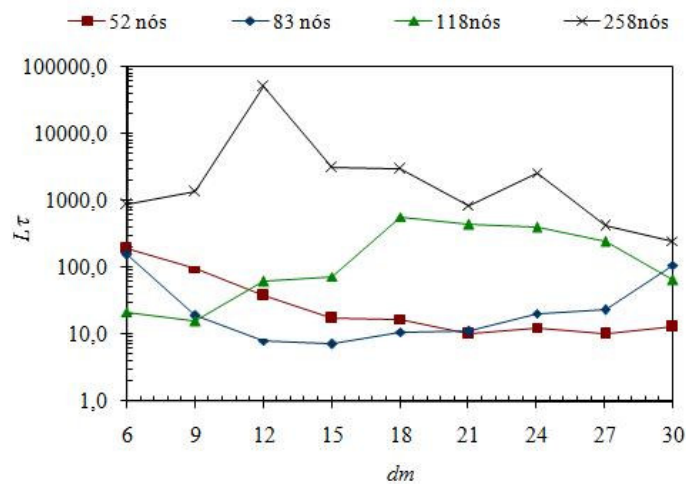


Figura 5.132 - Erro percentual do campo de tensão cisalhante ($L\tau$) para uma distribuição não-uniforme de 52 nós, 40 células e dm constante

Na Tabela 5.20 são apresentados os números médio, máximo e mínimo de nós dentro dos domínios de influência, durante a montagem da matriz global, em função do tamanho do domínio de influência, para as distribuições não-uniformes com 52, 83, 118 e 258 nós. Os valores indicados em **negrito** marcam os intervalos de dm pertinentes ao menores erros de tensão cisalhante (três melhores valores consecutivos). O domínio com 258 nós não possui intervalo em destaque, uma vez que todos os valores de $L\tau$ são elevados. A Tabela 5.21 reúne as melhores faixas de funcionamento.

Tabela 5.20 - Número de nós médio, máximo e mínimo de nós nos domínios de influência para a distribuição com 52 nós empregando dm com valores de 6 a 30: 40 células de fundo, integração da matriz global.

Distribuição não-uniforme: 52 nós									
Nº de nós	$dm = 6$	$dm = 9$	$dm = 12$	$dm = 15$	$dm = 18$	$dm = 21$	$dm = 24$	$dm = 27$	$dm = 30$
Média	7,81	14,80	22,22	26,80	30,90	34,8	38,125	41,07	43,77
Máximo	10	20	25	32	38	45	48	52	52
Mínimo	3	8	14	16	20	23	27	28	32
Distribuição não-uniforme: 83 nós									
Nº de nós	$dm = 6$	$dm = 9$	$dm = 12$	$dm = 15$	$dm = 18$	$dm = 21$	$dm = 24$	$dm = 27$	$dm = 30$
Média	13,10	24,48	35,77	43,17	49,72	55,92	61,30	66,20	70,60
Máximo	16	30	40	50	60	70	78	83	83
Mínimo	6	12	23	28	33	38	43	48	53
Distribuição não-uniforme: 118 nós									
Nº de nós	$dm = 6$	$dm = 9$	$dm = 12$	$dm = 15$	$dm = 18$	$dm = 21$	$dm = 24$	$dm = 27$	$dm = 30$
Média	19,00	34,96	50,32	60,82	70,20	78,95	86,65	93,57	99,89
Máximo	26	44	59	72	88	101	112	118	118
Mínimo	9	17	30	39	46	52	60	65	72
Distribuição não-uniforme: 258 nós									
Nº de nós	$dm = 6$	$dm = 9$	$dm = 12$	$dm = 15$	$dm = 18$	$dm = 21$	$dm = 24$	$dm = 27$	$dm = 30$
Média	43,40	79,27	111,62	135,07	156,02	175,4	192,22	207,25	220,47
Máximo	60	99	130	162	193	225	250	258	258
Mínimo	18	38	67	80	98	115	130	146	161

Tabela 5.21 - Número de nós médio, máximo e mínimo de nós nos domínios de influência pertinete às melhores respostas para 52, 83 e 118 nós: 40 células de fundo, integração da matriz global.

Distribuição não-uniforme									
Nº de nós	52 nós			83 nós			118 nós		
	$dm = 21$	$dm = 24$	$dm = 27$	$dm = 12$	$dm = 15$	$dm = 18$	$dm = 6$	$dm = 9$	$dm = 12$
Média	34,80	38,12	41,07	35,77	43,17	49,72	19,00	34,96	50,32
Máximo	45	48	52	40	50	60	26	44	59
Mínimo	23	27	28	23	28	33	9	17	30

Verifica-se por meio da Tabela 5.21 que os intervalos de dm com menores erros apresentam semelhante quantidade de nós, fato também verificado para o caso com dm constante e distribuições uniformes de nós. Para domínio com 55 nós e 40 células os valores de dm apresentados na Tabela 5.3 são 15 (nós: média = 28,7; máximo = 35 e mínimo = 20), 18 e 21 (nós: média = 32,2; máximo = 40 e mínimo = 20).

5.6 CONSIDERAÇÕES SOBRE O CASO BIDIMENSIONAL

A validação do programa bidimensional é apresentada na seção 5.1. Os valores dos parâmetros de ajuste empregados são baseados no trabalho de Dolbow e Belitschko (1998). Estes autores apresentaram respostas próximas aos valores analíticos para o método EFG em um domínio com distribuição nodal uniforme utilizando a função peso cúbica *spline* e domínio de influência retangular com tamanho constante. A validação do programa foi feita por meio das normas da energia e do erro relativo para os campos de tensão e deslocamento em y , como também pela visualização destes campos. Estes resultados validam o programa e o cálculo das tensões sobre os nós do domínio.

Na seção 5.2 são analisadas as respostas do método EFG decorrentes de modificações nas funções peso. Foram testadas sete funções peso usualmente empregadas no EFG, variando-se o tamanho do domínio de influência. Nestas simulações os nós são distribuídos uniformemente, o domínio de influência é quadrado e possui tamanho constante. Para as duas configurações de nós examinadas foram encontrados resultados próximos aos analíticos para as funções *spline*, Gaussiana e Exponencial¹. As funções *spline* têm a vantagem de não possuírem variáveis de ajuste dentro da própria função peso, o que justificaria uma primeira abordagem com este tipo de função. Foram feitos testes ainda avaliando as respostas de EFG utilizando domínios de influência retangulares e funções peso *spline* de terceira e de quarta ordem.

Tendo em vista os resultados apresentados na seção 5.2, verifica-se que a escolha da função peso é decisiva no desempenho do método de Galerkin sem malha. Assim, não deve-se utilizar funções peso que apresentem um decaimento muito acentuado, uma vez que para domínios de influência pequenos grande parte dos nós podem receber ponderações próximas a zero, o que dificulta a montagem da matriz de rigidez conforme resultados apresentados para a função peso Exponencial¹. Por outro lado, a função peso não deve ter um decaimento muito suave fazendo com que os nós mais afastados sejam ponderados de forma significativa em domínios de influência com tamanhos maiores. Os resultados da função peso cônica de segunda ordem exemplificam esta situação (Figura 5.28 à Figura 5.30 e Figura 5.43 à Figura 5.45).

Verifica-se ainda com a análise feita na seção 5.2, que, para as duas configurações nodais, o tamanho dos domínios de influência, relacionado aos menores erros, varia de modo a manter aproximadamente a mesma faixa de nós dentro de seu suporte, para cada função peso. Desta forma, pode-se estimar d_{max} para as funções peso uma vez que o espaçamento nodal é conhecido nas distribuições uniformes de nós.

Na seção 5.3 são apresentadas, para um domínio com distribuições uniformes de nós, análises do efeito da variação do tamanho do domínio de influência durante a execução, isto é, o tamanho de dm é definido por meio de busca aos k nós mais próximos do ponto/nó analisado. Nestas simulações os domínios de influência são quadrados. As respostas obtidas para os campos de tensão e deslocamento, no caso de busca, foram menos expressivas do que as obtidas para o caso em que dm apresenta tamanho constante durante a execução (seção 5.2). Isto se deve ao fato de que domínios de influência (dm) com tamanho constante permitem que pesos atribuídos aos nós com mesma posição relativa não se alterem, fato não verificado quando dm é variável. Por meio dos testes realizados verifica-se que a resposta do método está fortemente relacionada à função peso empregada, bem como ao tamanho do domínio de influência utilizado.

Na seção 5.4 avalia-se o método EFG em um domínio com distribuições não-uniformes de nós. Foram empregadas cinco distribuições nodais (52, 83, 118, 190 e 258 nós) utilizando a malha de fundo composta por 640 pontos amostrais de Gauss. O tamanho do domínio de influência fica definido pelo critério de busca aos k nós mais próximos. Foram testados vinte valores de k (12 a 50 com incremento de 2), utilizando-se a função peso cúbica *spline*. Para verificar o efeito da malha de fundo nos resultados, as três menores concentrações foram analisadas utilizando-se uma malha de fundo composta por 1.024 pontos amostrais de Gauss.

A Tabela 5.22 apresenta os valores de α_n , razão entre a quantidade de pontos amostrais de Gauss e nós no domínio, para as distribuições nodais uniformes e não-uniformes. De acordo com os resultados obtidos, as distribuições uniformes apresentam respostas mais acuradas, principalmente no caso onde dm é mantido constante. Contudo, os testes realizados com este tipo de distribuição apresentam valores de α_n fora da faixa determinada por Liu (2004) como a mais precisa. Por outro lado, algumas distribuições não-uniformes de nós possuem valores de α_n dentro deste intervalo ($3 \leq \alpha_n \leq 9$) com respostas menos

acuradas. Este fato indica que a degradação das respostas não pode ser atribuída à inadequação da malha de fundo ou da quantidade de pontos de integração.

Tabela 5.22 - Razão entre a quantidade de pontos amostrais de Gauss e de nós no domínio, para as distribuições nodais uniformes e não-uniformes.

Número de células	Distribuição nodal						
	Uniforme		Não-uniforme				
	55 nós	85 nós	52 nós	83 nós	118 nós	190 nós	256 nós
40 células	$\alpha_n = 11,6$		$\alpha_n = 12,3$	$\alpha_n = 7,7$	$\alpha_n = 5,4$	$\alpha_n = 3,4$	$\alpha_n = 2,5$
64 células		$\alpha_n = 12,0$	$\alpha_n = 19,6$	$\alpha_n = 12,3$	$\alpha_n = 8,6$		

Analisando as melhores respostas obtidas no caso bidimensional, verifica-se que as faixas de nós apresentam alguma semelhança tanto para o caso com dm variável e distribuições nodais uniformes e não-uniformes como para o caso com dm constante. A Tabela 5.23 e a Tabela 5.24 mostram, respectivamente, para domínios com aproximadamente 50 e 80 nós, as três configurações que apresentam as melhores respostas para cada caso testado.

De acordo com a Tabela 5.23, verifica-se que o número de nós nos domínios de influência apresenta certa similaridade tanto para domínios de influência retangulares e quadrados com tamanho constante quanto para dm definido por busca, principalmente no caso onde a distribuição nodal utilizada é uniforme. Nota-se que a quantidade de nós nos domínios de influência para o caso com distribuição nodal não-uniforme é menor do que a encontrada nas demais simulações, devido à falta de simetria no posicionamento dos nós. Assim, para distribuições nodais não-uniformes, a faixa de nós associada às melhores respostas fica reduzida.

As simulações com aproximadamente 80 nós no domínio apresentadas na Tabela 5.24 possuem também similaridade nos três casos testados, bem como, certa semelhança com os valores apresentados na Tabela 5.23.

De acordo com os resultados apresentados neste capítulo, verifica-se que apesar da faixa de erro mínimo está associada a uma quantidade próxima de nós, conforme os casos analisados na Tabela 5.23 e na Tabela 5.24, os valores de erro mínimo não são ao menos parecidos. Uma vez que, os casos que definem os domínios de influência por meio de

busca aos k nós mais próximos apresentam valores de erro maiores do que os encontrados nos casos com dm constante.

Tabela 5.23 - Faixa com as melhores respostas para domínios com 55 nós uniformemente e 52 nós não-uniformemente distribuídos: função peso cúbica *spline*, 40 células de fundo.

	Distribuição uniforme dm constante		Distribuição uniforme dm variável	Distribuição não-uniforme dm variável
Nós no domínio	55 nós		55 nós ($k = 12$)	52 nós ($d_{max} = 1,0$)
Faixa de nós analisada (Min – Máx)	6 – 12 ($dm = 6$) 35 – 55 ($dm = 30$)		12 – 20 ($d_{max} = 1,0$) 30 – 55 ($d_{max} = 3,5$)	12 – 22 ($k = 12$) 52 – 52 ($k = 50$)
	dm quadrado	dm retângular	dm busca	
Faixa de nós para melhores repostas (Min – Máx)	16 – 30 ($d_{max} = 3$)	20 – 35 ($dm = 15$)	15 – 30 ($k = 12$ e $d_{max} = 1,5$)	22 – 29 ($k = 22$ e $d_{max} = 1,0$)
	25 – 40 ($d_{max} = 4$)	20 – 40 ($dm = 18$)	20 – 40 ($k = 12$ e $d_{max} = 2,0$)	24 – 32 ($k = 24$ e $d_{max} = 1,0$)
	30 – 50 ($d_{max} = 5$)	24 – 45 ($dm = 21$)	25 – 50 ($k = 12$ e $d_{max} = 2,5$)	26 – 33 ($k = 26$ e $d_{max} = 1,0$)

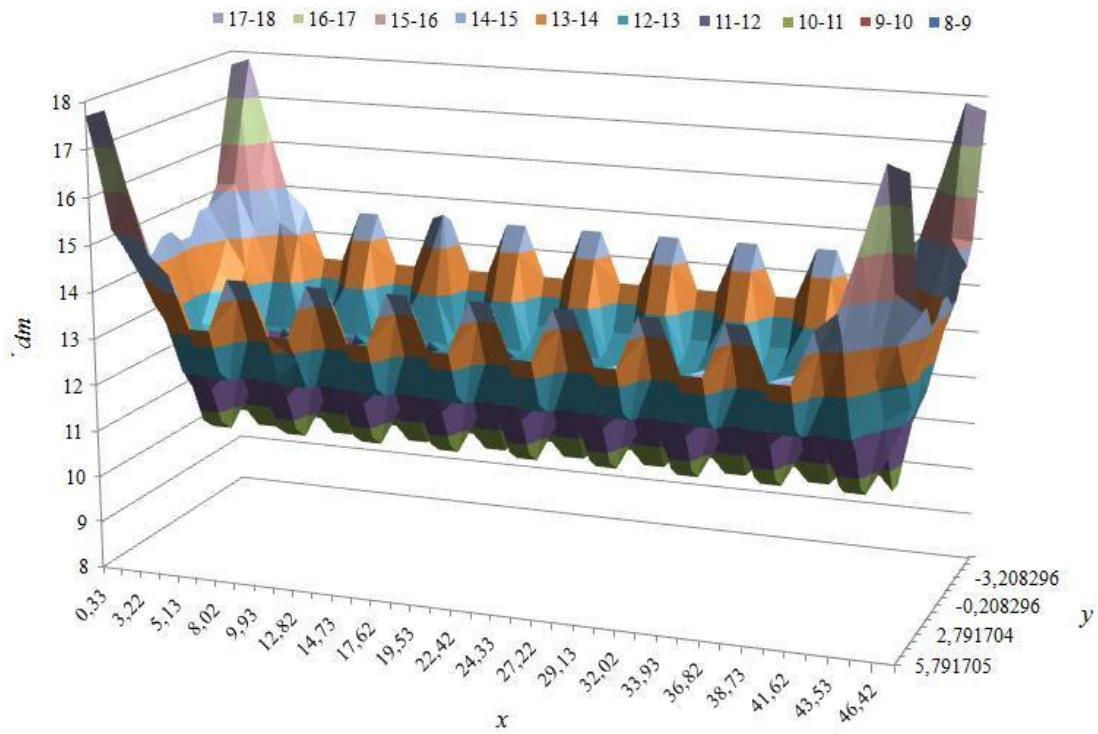
A seção 5.5 apresenta alguns resultados para domínios com distribuições nodais não-uniformes e dm constante. Verifica-se que as respostas foram bastante acuradas (erro próximos a 10%) e apresentaram erros próximos aos dos casos com distribuição uniforme e domínio de influência com valor constante. Assim, para o caso bidimensional foram feitos testes com distribuições uniformes e não-uniformes de nós, utilizando domínio de influência com tamanho constante ou definido por busca aos k nós mais próximos. Pode-se observar que os resultados menos acurados ficaram vinculados aos casos onde ocorrem variações no tamanho do domínio de influência durante a execução, para ambas as distribuições nodais.

Nos casos onde o valor de dm não é igual para todos os domínios de influência a ponderação dos nós nos domínios sofrem modificações, conforme discussão tratada na Figura 5.88. A Figura 5.133 apresenta os valores dos domínios de influência durante a

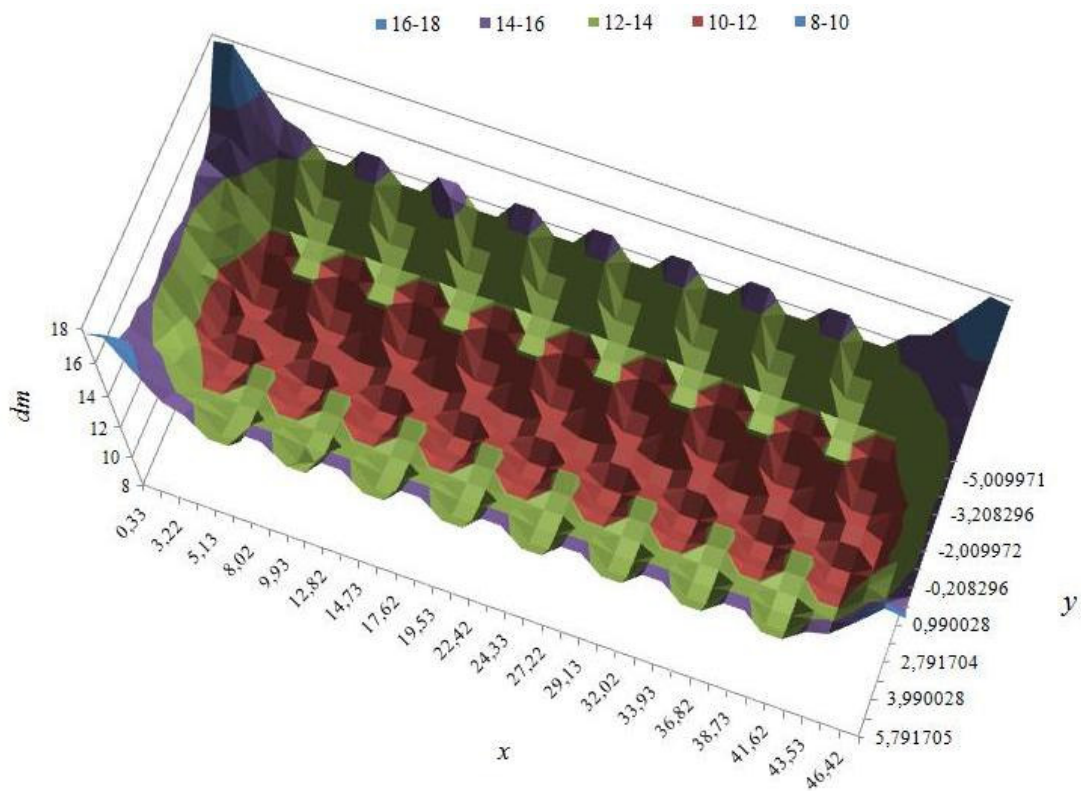
integração do sistema global, para distribuição uniforme de 55 nós, k igual a 12, d_{max} igual a 1,5 e 40 células de fundo. Verifica-se que as regiões próximas aos vértices do domínio apresentam os valores mais elevados de dm .

Tabela 5.24 - Faixa com as melhores respostas para domínios com 85 nós uniformemente e 83 nós não-uniformemente distribuídos: função peso cúbica *spline*, 64 células de fundo.

	Distribuição uniforme dm constante	Distribuição uniforme dm variável	Distribuição não-uniforme dm variável
Nós no domínio	85 nós	85 nós ($k = 12$)	83 nós ($d_{max} = 1,0$)
Faixa de nós analisada (Min – Máx)	6 – 16 ($dm = 6$) 54 – 85 ($dm = 30$)	12 – 25 ($d_{max} = 1,0$) 40 – 80 ($d_{max} = 3,5$)	12 – 18 ($k = 12$) 50 – 58 ($k = 50$)
Faixa de nós para melhores repostas (Min – Máx)	16 – 30 ($dm = 9$ ou $d_{max} = 3$)	12 – 25 ($k = 12$ e $d_{max} = 1,5$)	26 – 38 ($k = 26$ e $d_{max} = 1,0$)
	24 – 40 ($dm = 12$ ou $d_{max} = 4$)	20 – 35 ($k = 12$ e $d_{max} = 2,0$)	28 – 40 ($k = 28$ e $d_{max} = 1,0$)
	30 – 50 ($dm = 15$ ou $d_{max} = 5$)	25 – 50 ($k = 12$ e $d_{max} = 2,5$)	30 – 42 ($k = 30$ e $d_{max} = 1,0$)



(a)



(b)

Figura 5.133 - Valores de dm centrados nos 640 pontos amostrais (a) vista lateral e (b) vista de topo: 40 células, 55 nós, $k = 12$, $d_{max} = 1,5$, distribuição nodal uniforme.

6 CONCLUSÕES

Neste capítulo de considerações finais, busca-se, essencialmente, apresentar uma síntese das análises desenvolvidas nos capítulos 4 e 5 de forma a fundamentar a contribuição deste trabalho. Bem como, verificar se os objetivos que motivaram esta tese foram alcançados. As conclusões aqui apresentadas se limitam a questões centrais, uma vez que os capítulos 4 e 5 contam, cada um, com uma seção focada em considerações pertinente a tudo que foi realizado e constatado durante as análises unidimensionais e bidimensionais realizadas, respectivamente, nestes dois capítulos. Este capítulo de conclusões apresenta, por fim, algumas sugestões para trabalhos futuros.

6.1 SÍNTESE DO TRABALHO DESENVOLVIDO

A contribuição deste trabalho reside na análise do método de Galerkin sem malha buscando avaliar os parâmetros de ajuste pertinentes a construção da função de forma. Para tanto, foram feitos testes em problemas unidimensionais e bidimensionais variando a função peso (w), a concentração nodal (número de nós no domínio), o tipo de distribuição nodal (uniforme e não-uniforme), a variação do tamanho do domínio de influência (alterar d_{max} ou diretamente dm , p.ex.), e utilização de domínios de influência com tamanho constante ou variável durante a execução (dm com valor fixo ou definido por busca ao k nós mais próximos). Nota-se que as análises feitas levam em consideração trabalhos disponíveis na literatura dentre os quais se podem destacar: Belytschko, *et. al.* (1994), Belytschko, *et. al.* (1996), Dolbow e Belytschko (1998), Fries e Matthies (2004), Liu (2004), Pan *et. al.* (2004, 2005), Gu (2005), Idelsohn e Oñate (2006). Deve-se ressaltar que nenhuma das referências citadas neste trabalho apresentou análises focadas e amplas dos parâmetros de ajuste do EFG.

Nos tópicos listados a seguir estão sumarizadas algumas das conclusões mais pertinentes deste trabalho.

- Verifica-se que o EFG funciona de forma mais precisa quando existe uma uniformidade associada tanto à distribuição nodal como também ao tamanho do domínio de influência. Deste modo, domínios de influência definidos por meio de

busca levam a respostas menos acuradas do que aqueles associados a dm com tamanho constante, tanto para o caso unidimensional quanto para o bidimensional.

- Testes feitos no domínio bidimensional mostram que a uniformidade no tamanho do domínio de influência tem uma maior relevância na acuracidade das respostas do que a não-uniformidade da distribuição nodal. Assim, nos casos onde a concentração nodal deve ser alterada, esta deve ser feita de forma a minimizar variações no tamanho do domínio de influência durante a execução.
- Verifica-se que para cada função peso testada, os domínios com distribuições nodais uniformes e domínios de influência retangulares e quadrados com tamanho constante têm suas melhores respostas, respectivamente, associadas a faixas de d_{max} e dm , cuja quantidade de nós nos domínios de influência é bastante semelhante para as concentrações nodais avaliadas, conforme indicado na Tabela 5.6, Tabela 5.3 e Tabela 5.4. Tal fato também é verificado nos casos com distribuições não-uniformes de nós e dm com tamanho constante. Nestes casos além da distribuição ser não-uniforme uma maior variedade de concentrações nodais foi avaliada, o que permitiu ratificar que as melhores respostas estão associadas a determinadas faixas de nós no domínio de influência, Tabela 5.21. Nota-se que nas distribuições não-uniformes de nós, não é possível trabalhar com o fator de escala d_{max} , visto que o tamanho do domínio de influência não pode ser definido com base no espaçamento nodal.
- Segundo Dolbow e Belytschko (1998) o fator de escala d_{max} está usualmente entre 2,0 e 4,0, em se tratando de análises estáticas. De acordo com os resultados analisados, o caso unidimensional com dm constante e distribuição nodal uniforme apresentou faixa de d_{max} entre 1,5 e 2,5. Sendo 4,0 o maior valor de d_{max} testado e 1,5 o menor valor de d_{max} válido, uma vez que d_{max} igual a 1,0 leva a resultados não acurados. O caso bidimensional com distribuição nodal uniforme pode-se usualmente trabalhar com valores de d_{max} entre 3,0 e 5,0. Desta forma, pode-se crer que os valores determinados por Dolbow e Belytschko são intervalos aproximados d_{max} para os domínios uni e bidimensionais, porém ao tentar agrupá-los em uma única faixa de valores estes se tornam mais limitados.

- Por meio das análises apresentadas verifica-se que as respostas obtidas comportam-se de forma diferenciada para cada função peso analisada, indicando que o decaimento desta função afeta de forma incisiva a solução do problema. Isso porque é o decaimento que define a forma com que os nós são ponderados nos domínios de influência. As funções cônicas foram as que apresentaram as respostas menos acuradas, tanto para os casos unidimensionais como para os bidimensionais. As funções *spline* mostraram certa praticidade em sua utilização se comparada com as funções peso exponenciais e Gaussianas, uma vez que as funções *spline* não possuem valores de ajuste em sua expressão. Fato que justificaria uma primeira abordagem com este tipo de função.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

As propostas sugeridas a seguir buscam verificar a abrangência das constatações apresentadas neste trabalho, de forma a verificar se estas continuam válidas em outros tipos de problemas usualmente tratados na mecânica estrutural, como por exemplo:

- plasticidade,
- grandes deformações,
- problemas relacionados à propagação de trincas e
- simulações utilizando materiais compósitos.

Buscando constatar, p.ex.,

- se as faixas de d_{max} encontradas continuam válidas,
- se uniformidade no tamanho do domínio de influência determina de forma decisiva a resposta do método,
- se as funções peso *spline* continuam obtendo bons resultados, etc.

Nota-se que em alguns destes problemas listados passam a existir outros parâmetros vinculados ao EFG que devem ser levados em conta. Para realizar a simulação de materiais compósitos é usual utilizar uma função peso chamada função salto (*jump function*). Esta função tem como objetivo resolver problemas de descontinuidade no domínio decorrentes de modificações nas propriedades do material, p.ex.

Poderiam ser feitos testes ainda variando a ordem do polinômio interpolador das aproximações de forma a verificar o comportamento do campo de cisalhamento.

Parece mais lógico é que o MEF passe a ser trabalhado conjuntamente com métodos sem malha de forma a suprir as suas dificuldades pontuais. Uma vez que os métodos dos elementos finitos são os mais difundidos e consolidados na simulação dos problemas da mecânica do contínuo e contam com uma grande variedade de softwares disponíveis. Desta forma os softwares poderiam sugerir os parâmetros de ajuste mais adequados para cada tipo de problema (encontrados na literatura), de forma a minimizar o processo de interface com o usuário, dada à complexidade de ajuste destes nos métodos sem malha. Nota-se que no MEF este ajuste é mais simples e feito basicamente pela busca da malha e do elemento finito mais adequado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Babuška, I., Banerjee U., e Osborn, J. E. (2004). “Generalized finite element methods: main ideas, results and perspective”, In: *Technical report, TICAM*.
- Babuška, I., Caloz, G., e Osborn, J. E. (1994). “Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients.” In: *SIAM Journal Numerical Analysis*, 31, 945-981.
- Babuška, I., e Melenk, J. M. (1997). “The Partition of Unity Finite Method.” In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 727-758.
- Babuška, I., Strouboulis, T. e Coppers, K. (2000). “The design and analysis of the generalized finite element method.” In: *Computer Methods Applied Mechanical Engineering*, 181(1), 43-69.
- Barros, F. B. (2002). *Métodos sem malha e métodos dos elementos finitos generalizado em análise não-linear de estruturas*, Tese de Doutorado, Escola de engenharia de São Carlos.
- Bathe, K.-J. (1996). *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, New Jersey.
- Belinha, J. e Dinis, L.M.J.S. (2007). “Nonlinear analysis of plates and laminates using the element free Galerkin method.” In: *Composite Structures*, 78(3), 337-350.
- Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D. e Fleming, M. (1996). “Meshless Methods: An Overview and Recent Developments.” In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1), 3-47.
- Belytschko, T., Liu, W. K., e Moran, B. (2000). *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley, New York.
- Belytschko, T., Lu, Y.Y. e Gu, L. (1994). “Element-Free Galerkin methods.” In: *International Journal for numerical methods in engineering*, 37, 229-256.
- Belytschko, T., Lu, Y. Y. e Gu, L. (1995)a. “Crack propagation by element-free Galerkin methods.” In: *Engineering Fracture Mechanics*, 51(2), 295-315.
- Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L. e Tabbara, M. (1995)b. “Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture.” In: *International Journal of Solids and Structures*, 32(17-18), 2547-2570.
- Belytschko, T., Organ, D. e Gerlach, C. (2000). “Element-free Galerkin methods for dynamic fracture in concrete.” In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 187(3-4), 385-399.

- Belytschko, T. e Tabbara, M. (1996). “Dynamic Fracture Using Element-Free Galerkin Methods.” In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, 923-938.
- Belytschko, T. e Xiao, S. (2002). “Stability Analysis of Particle Methods with Corrected Derivatives.” In: *Computers and Mathematics with Applications*, 43, 329-350.
- Brighenti, R., (2005). “Application of the element-free Galerkin meshless method to 3-D fracture mechanics problems”, In: *Engineering Fracture Mechanics*, 72(18), 2808-2820.
- Chahine, E., Laborde, P., Pommier, J., Renard, Y. e Salaün, M. (2006). “Some improvements of Xfem for cracked Domains.” In: *Proceedings of IUTAM Seminar in Discretization Methods for evolving discontinuities*, Lyon, France.
- Chahine, E., Laborde, P., Pommier, J., Renard Y. e Salaün, M. (2007). “Study of Some Optimal XFEM Type Methods.” In: *Computational Methods in Applied Sciences*, 5, 27-38.
- Chen, J.-S., Han W., You Y. e Meng X. (2003). “A reproducing kernel method with nodal interpolation property”, In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56, 935-960.
- Chen, J.-S., Pan, C., Roque, C. M. O. L., e Wang, H.-P. (1998). “A lagrangian reproducing kernel particle method for metal forming analysis.” In: *Computational Mechanics*, 22, 289-307.
- Chen, X. L., Liu, G. R. e Lim, S. P. (2003). “An element free Galerkin method for the free vibration analysis of composite laminates of complicated shape.” In: *Composite Structures*, 59(20), 279-289.
- Chen, X. L., Zhao, Z. Y. e Liew, K. M. (2007). “Stability of piezoelectric FGM rectangular plates subjected to non-uniformly distributed load, heat and voltage.” In: *Advances in Engineering Software*, In Press, Corrected Proof, Available online.
- Chen, Y., D.Lee e Eskandarian A. (2006). *Meshless Methods in Solid Mechanics*, Springer, New York.
- Cook, R. D., Malkus, D. S. e Plesha, M. E. (1989). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3ª Ed. John Wiley & Sons, New York.
- Cueto-Felgueroso, L., Colominas I., Navarrina, F.e Casteleiro M. (2005). “Numerical simulation of free surface flows by Lagrangian particle methods”, In: *WIT Transactions on The Built Environment*, 84, 491-499.

- Dai, K.Y., Liu, G.R., Han X. e Lim, K.M. (2005). “Thermomechanical analysis of functionally graded material (FGM) plates using element-free Galerkin method.” In: *Computers & Structures*, 83(17-18), 1487-1502.
- De, S. e Bathe, K. J. (2000). “The method of finite spheres.” In: *Computational Mechanics*, 25(4), 329-345.
- Dolbow, J. e Belytschko, T. (1998). “An Introduction to Programming the Meshless Element Free Galerkin Method.” In: *Archives of Computational Methods in Engineering*, 5(3), 207-241.
- Du, C. (2000). “An element-free Galerkin method for simulation of stationary two-dimensional shallow water flows in rivers.” In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 182(1-2), 89-107.
- Duarte, A. C. (1995). “Review of some meshless methods to solve differential equations.” In: *Technical Report TICAM report 95-06, TICAM, Universidade do Texas -Austin, USA*.
- Duarte, A. C. (1996). *The hp cloud method*, Tese de Doutorado, Universidade do Texas-Austin, USA.
- Duarte, C. A. M. e Oden, J. T. (1995). “Hp clouds - a meshless method to solve boundary-value problems.” In: *Technical report, TICAM, Universidade do Texas- Austin*.
- Duarte, C. A. M. e Oden, J. T. (1996). “Hp clouds -an hp meshless method.” In: *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 12, 673-705.
- Ellero, M. (2004). *Smoothed Particle Dynamics Methods for the Simulation of Viscoelastic Fluids*, Tese de Doutorado, Universidade Técnica em Matemática e Ciências Naturais de Berlim.
- Fenner, R. T. (1986). *Engineering Elasticity: Application of Numerical and Analytical Techniques*, Ellis Horwood Ltd., New York.
- Fries, T.-P. e Matthies, H.-G. (2004). “Classification and Overview of Meshfree Methods.”, In: *Computer science report No. 2003-3, Universidade técnica de Carolo-Wilhelmina, Braunschweig, Alemanha*.
- Gingold, R. A. and Monaghan, J. J. (1977). “Smoothed particle hydrodynamics: theory and applications to non-spherical stars”, In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181, 375-389.
- Gonçalves, L. N. (2003). *Reorientação Magnética de Nemáticos em Células Planares*, Tese de Doutorado em Engenharia Física, Universidade Nova de Lisboa.

- Guan, Y., Zhao, G., Wu, X. e Lu, P. (2007). “Massive metal forming process simulation based on rigid/visco-plastic element-free Galerkin method.” In: *Journal of Materials Processing Technology*, 187-188, 412-416.
- Guedes, C.M.C.F.F.M. (2006). *Métodos sem Malha em Problemas de Mecânica Computacional. Aplicação a Processos de Enformação Plástica*, Tese de Doutorado em Ciências de Engenharia, Universidade do Porto.
- Gu, Y. T. (2005). “Meshfree Methods and their Comparisons.” In: *International Journal of Computational Methods*, 2(4), 477-515.
- Haitian, Y. e Yan, L. (2003). “A combined approach of EFGM and precise algorithm in time domain solving viscoelasticity problems.” In: *International Journal of Solids and Structures*, 40(3), 701-714.
- Hernquist, L. e Katz, N. (1989). “TREESPH: A unification of SPH with the hierarchical tree method.” In: *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 70, 419-446.
- Hao, S., Park H. S, e Liu, W. K. (2002). “Moving particle finite element method.” In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53, 1937-1958.
- Hong, Z., Xuan-bing, Z. e Xiu-run G. (2005). “Application of wavelet theory in research on weight function of meshless method.” In: *Applied Mathematics and Mechanics*, 26(5), 662-666.
- Idelsohn, S. R., Oñaten, E., Calvo, N. e Del Pinn F. (2003). “The meshless finite element method.” In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2649-2667.
- Idelsohn, S. R., e Oñate E. (2006). “To mesh or not mesh. That is the question...” In: *Computer methods in applied mechanical and engineering*, 195, 4681-4696.
- Jeong, J. H., Jhon, M. S., Halowb, J. S. e van Osdolb, J. (2003). “Smoothed particle hydrodynamics: Applications to heat conduction.” In: *Computer Physics Communications*, 153(1), 71-84.
- Jun, S. A. (1996). “Meshless method for nonlinear solid mechanics” In: *RIKEN Review Computational Science and Engineering*, 14, 33-34.
- Karim, M. R., Nogami, T.e Wang, J. G. (2002). “Analysis of transient response of saturated porous elastic soil under cyclic loading using element-free Galerkin method.” In: *International Journal of Solids and Structures*, 39(24), 6011-6033.
- Krysl, P. e Belytschko, T. (1995). “Analysis of Thin Plates by the Element-Free Galerkin Method.” In: *Computational Mechanics*, 17(1-2), 26-35.

- Krysl, P. e Belytschko, T. (1996). "Analysis of thin shells by the Element-Free Galerkin method." In: *International Journal of Solids and Structures*, 33(20-22), 3057-3080
- Krysl, P. e Belytschko, T. (1999). "The Element Free Galerkin Method for Dynamic Propagation of Arbitrary 3-D Cracks." In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(6), 767-800.
- Lancaster, P. e Salkauskas, K. (1981). "Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods, Mathematics of Computation." 155, 141-158.
- Lastiwka, M., Basa, M. e Quinlan, N. (2005). "Application of 3D Smoothed Particle Hydrodynamics to a Shock Tube Flow: Effects and Control of Particle Distribution." In: *17th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Ontario, Canadá.
- Lee, S.-H. e Yoon, Y.-C. (2004). "Numerical prediction of crack propagation by an enhanced element-free Galerkin method." In: *Nuclear Engineering and Design*, 227(3), 257-271.
- Li, S., e Liu, W. K. (2002). "Meshfree and particle methods and their applications." In: *Applied Mechanics Reviews*, 55(1), 1-34.
- Liew, K. M., Ren, J. e Kitiporncha, S. (2004). "Analysis of the pseudoelastic behavior of a SMA beam by the element-free Galerkin method." In: *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28(5), 497-507.
- Liu, G. R. (2004). *Mesh Free Methods: moving beyond the finite element method*, CRC Press, USA.
- Liu, G. R. e Gu, Y. T. (1999). "A Point Interpolation Method." In: *Proceedings of the Fourth Asia-Pacific Conference on Computational Mechanics*, pp. 1009-1014.
- Liu, H., e Shi, P., (2003). "Meshfree Particle Method." In: *Proceedings of the Ninth IEEE International Conference on Computer Vision*, Vol. 1, pp. 289-296.
- Liu, L., Chua, L.P. e Ghista, D.N. (2006a). "Element-free Galerkin method for static and dynamic analysis of spatial shell structures." In: *Journal of Sound and Vibration*, 295(1-2), 388-406.
- Liu, M. B., Liu, G. R. e Lam, K. Y. (2003). "Constructing smoothing functions in smoothed particle hydrodynamics with applications." In: *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 155(2), 263-284.
- Liu, S., Yang Q., Chen, H., Yang, W., e Yan, W. (2006b) "Study of Weight Functions in the Element-Free Galerkin Method." In: *12th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation*, 431-431.

- Liu, W. K., Han, W., Lu, H., Li S., e Cao J. (2004). “Reproducing kernel element method. part I: Theoretical formulation.” In: *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, 193, 933-951.
- Liu, W. K., Jun S., Li S., Adee J. e Belytschko T. (1995). “Reproducing kernel particle methods for structural dynamics.” In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(10), 1655-1679.
- Long. S. e Hu. D. (2003). “A Study on the Weight Function of the Moving Least Square Approximation in the Local Boundary Integral Equation Method”, In: *Acta mecanica solida sinica in Wuhan-China*, 16(3), 276-282.
- Louaï, F. Z., Naït-Saïd, N. e Drid, S. (2007). “Implementation of an efficient element-free Galerkin method for electromagnetic computation.” In: *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31(3), 191-199.
- Lu, Y. Y., Belytschko, T. e Tabbara, M. (1995). “Element-free Galerkin method for wave propagation and dynamic fracture.” In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126(1-2), 131-153.
- Lucy, L. B. (1977). “A numerical approach to the testing of the fission hypothesis.” In: *The Astronomical Journal*, 82, 1013-1024.
- Martin, T. J., Pearce, F. R., e Thomas, P. A. (1993). “An owner’s guide to smoothed particle hydrodynamics”, arXiv:astro-ph/9310024, Vo1. 13.
- Manzin, A. (2007). “Element-Free Galerkin Modeling of Electromagnetic Phenomena in Ferromagnetic Deformable Bodies”, In: *IEEE Transactions on Magnetics*, 43(4), 1285-1288.
- Melenk, J. M. (1995). *On generalized finite element Method*, Tese de Doutorado, Universidade de Maryland.
- Melenk, J. M. e Babuška, I. (1996). “The partition of unity finite element method: Basic theory and Applications.” In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4), 289-314.
- Moës, N., Dolbow, J., e Belytschko, T. (1999). “A finite element method for crack growth without remeshing.” In: *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 46, 131-150.
- Monaghan, J. J. (1982). “Why particle methods work.” In: *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 3(4), 422-438.

- Monaghan, J. J. (1988). "An introduction to SPH." In: *Computer Physics Communications*, 48, 89-96.
- Monaghan, J. J. "Sph." (1992). In: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 30, 543-574.
- Monaghan, J. J. e Lattanzio, J. C. (1985). "A refined particle method for astrophysical problems." In: *Journal Astronomy and Astrophysics*, 149, 135-143.
- Nayroles, B., Touzot, G. e Villon, P. (1992). "Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements." In: *Computational Mechanics* Springer Berlin /Heidelberg, 10, 307-318.
- Ooi, B. L.; Zhao, G. e Leong, M.S. (2004). "Element free Galerkin method for rectangular waveguide eigenvalues calculation." In: *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, Vol. 1, pp. 607-610.
- Pan, X. F., Zhang, X. e Mingwan, L. (2004). "Galerkin Collocation Meshless Method." In: *Proceedings of WCCM VI /APCOM'04*, Beijing, China.
- Pan, X. F., Zhang, X, Mingwan L. (2005). "Meshless Galerkin least-squares method, Journal Computational Mechanics." In: Springer Berlin / Heidelberg, 35(3), 182-189.
- Parreira, G. F.; Silva, E.J., Fonseca, A.R. e Mesquita, R.C. (2006). "The element-free Galerkin method in three-dimensional electromagnetic problems", In: *IEEE Transactions on Magnetics*, 42(4), 711-714.
- Peng, L.X., Kitipornchai, S. e Liew, K.M. (2005). "Analysis of rectangular stiffened plates under uniform lateral load based on FSDT and element-free Galerkin method." In: *International Journal of Mechanical Sciences*, 47(2), 251-276.
- Peng, L. X., Liew, K. M. e Kitipornchai, S. (2006). "Buckling and free vibration analyses of stiffened plates using the FSDT mesh-free method." In: *Journal of Sound and Vibration*, 289(3), 421-449.
- Recio, D. P., Jorge, R. M. N. e Dinis, L.M.S. (2007). "On the use of element-free Galerkin Method for problems involving incompressibility." In: *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31(2), 103-115.
- Ren, J., Liew K. M. e Meguid, S. A. (2002). "Modelling and simulation of the superelastic behaviour of shape memory alloys using the element-free Galerkin method." In: *International Journal of Mechanical Sciences*, 44(12), 2393-2413.
- Shepard, D. (1968). "A Two-Dimensional Interpolation Function for Irregularly-Spaced Data." In: *Proceedings of 23rd ACM national conference*, pp. 517-524.

- Shuyao, L. e De'an, H. (2003). "A Study on the Weight Function of the Moving Least Square Approximation in the Local Boundary Integral Equation Method." In: *Acta Mechanica Solida Sinica*, 16(3), 276-282.
- Singh, A., Singh I. V. e Prakash R. (2007). "Meshless element free Galerkin method for unsteady nonlinear heat transfer problems." In: *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50(5-6), 1212-1219.
- Singh, I. V. e Jain, P. K. (2005). "Parallel EFG algorithm for heat transfer problems", In: *Advances in Engineering Software*, 36(8), 554-560.
- Singh, I.V, Sandeep K. e Prakash R. (2002). "The element free Galerkin method in three dimensional steady state heat conduction." In: *International Journal of Computational Engineering Science*, 3(3), 291-303.
- Singh, I. V., Sandeep, K. e Prakash, R. (2003). "Heat Transfer Analysis of Two-Dimensional Fins Using Meshless Element Free Galerkin Method." In: *Numerical Heat Transfer Part A: Applications*, 44(1), 73-84.
- Stellingwerf, R. F, Piekutowski, A. J. e Robinson, J. A. (2004). "Hypervelocity Impacts on Thin Aluminum Targets - Models and Experiments." In: 45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures - Structural Dynamics & Materials Conference, pp. 1.
- Strouboulis T., Copps, K, e Babuška, I. (2000). "The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance." In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41(8), 1401-1417.
- Strouboulis, T., Copps, K. e Babuška, I. (2001). "The generalized finite element method." In: *Computer method in applied mechanics and engineering*, 190, 4081-4193.
- Sukumar, N., Moës N., Moran, B., and Belytschko, T. (2000). "Extended finite element method for three dimensional crack modeling." In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(11), 1549-1570.
- Sukumar, N., Moës, N., Moran, B. e Belytschko T. (2003). "An extended finite element with higher-order elements for curved cracks." In: *Computational Mechanics*, 31, 38-48.
- Tiago, C. M. e Leitão, V. M. A. (2004). "Development of a EFG formulation for damage analysis of reinforced concrete beams" In: *Computers & Structures*, 82(17-19), 1503-1511.
- Timoshenko, S.P. e Goodier, J.N. (1970). *Theory of Elasticity*, McGraw Hill, New York, EUA.

- Verardi, S. L. L., Machado, J.M. e Cardoso, J.R. (2002). “The element-free Galerkin method applied to the study of fully developed magnetohydrodynamic duct flows.” In: *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 38(2), 941-944.
- Villa Verde, F. R., Pfitscher, G. H., Viana, D. M. e Ferreira, J. L. A. (2007). “Parameters analysis that characterize the element free galerkin method.” In: *19th International Congress of Mechanical Engineering*.
- Villa Verde, F. R., Pfitscher, G. H., Viana, D. M. e Ferreira, J. L. A. (2008). “Influence of EFG method variables in stress analysis response with uniform and non uniform nodal distribution.” In: canadá.
- Villa Verde, F. R., Pfitscher, G. H., Viana, D. M. e Ferreira, J. L. A. (2008). “Estudo do método de Galerkin sem malha utilizando domínio de influência variável para domínios com distribuição nodal uniforme e não-uniforme.” In: *Congresso Ibero-Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia*.
- Villa Verde, F. R., Pfitscher, G. H., Viana, D. M. e Ferreira, J. L. A. (2008). “Análise comparativa dos resultados obtidos com método de Galerkin sem malha e o método dos elementos finitos.” In: *Congresso Ibero-Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia*.
- Villa Verde, F. R., Pfitscher, G. H., Viana, D. M. e Ferreira, J. L. A. (2008). “Estudo da resposta do método de Galerkin sem malha pela análise da função de forma e sua derivada.” In: *CONEM, V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*.
- Villa Verde, F. R., Pfitscher, G. H., Viana, D. M. e Ferreira, J. L. A. (2008). “Avaliação do método de galerkin sem malha utilizando domínio de influência variável.” In: *CONEM, V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*.
- Xiao, J. R. e McCarthy, M. A. (2003). “A local Heaviside weighted meshless method for two-dimensional solids using radial basis functions.” In: *Computational Mechanics*, 31, 301-315.
- Xiaofei, P., Yim, S. K. e Xiong, Z. (2004). “An Assessment of the Meshless Weighted Least-Squaremethod”, In: *Acta Mechanica Solida Sinica*, 17(3), 270-282.
- Xiong, S., Rodrigues, J. M. C e Martins, P. A. F. (2004). “Application of the element free Galerkin method to the simulation of plane strain rolling” In: *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 23(1), 77-93.
- Xu, Y. e Saigal, S. (1998). “An element free Galerkin formulation for stable crack growth in an elastic solid.” In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 154(3-4), 331-343.

- Xu, Y. e Saigal, S. (1999). “An Element Free Galerkin analysis of steady dynamic growth of a mode I crack in elastic–plastic materials.” In: *International Journal of Solids and structures*, 36(7), 1045-1079.
- Yang, Q., Chen, H., Liu, S., Yang W., Fan C., Yan W. e Liu, S. (2006). “Magnetics, Dynamic modeling of a magnetic system constructed with giant magnetostrictive thin film using element-free Galerkin method”, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 42, No 4, pp. 939-942.
- Zeng Z., Arunachalam, K., Lu C., Shanker, B. e Udpa, L. (2006). “Element-Free Galerkin Method in Modeling Microwave Inspection of Civil Structures.” In: *12th Biennial IEEE Electromagnetic Field Computation*, pp. 268-268.
- Zhihua, G., Yuanming, L., Mingyi, Z., Jilin, Q. e Shujuan, Z. (2007). “An element free Galerkin method for nonlinear heat transfer with phase change in Qinghai–Tibet railway embankment.” In: *Cold Regions Science and Technology*, 48(1), 15-23.
- Zienkiewicz, O. C e Taylor, R.L. (2000). *The Finite Element Method*, 5º edição, **vol. 1: the basis**, Butterworth Heinemann, Oxford, UK.

APÊNDICES

A COMPARAÇÃO DO EFG COM O MEF

Este apêndice visa analisar comparativamente as respostas do método EFG com um método que utiliza malha. O método escolhido é o MEF pelo fato largamente utilizado na solução de problemas da mecânica do contínuo. Esta análise visa avaliar as respostas destes métodos evidenciando as diferenças pertinentes a aplicação das condições de contorno e mostrando que os métodos sem malha não seguem em princípio a mesma lógica do MEF para a variação número de nós no domínio avaliando problemas sem gradiente de tensão elevado.

6.1 CASO UNIDIMENSIONAL

Nas simulações com ambos os métodos, a barra tem comprimento e módulo de elasticidade com valor unitário. Os campos de deslocamento e tensão/deformação obtidos com o método EFG foram comparados com aqueles obtidos com o MEF (software ANSYS). No MEF a área da seção da barra foi ajustada para cada simulação de forma a manter a rigidez dos elementos unitária, para as três malhas indicadas na Tabela A.1. No MEF as cargas aplicadas foram distribuídas entre os nós.

Tabela A.1 - Características das malhas estruturadas unidimensionais formadas por elementos tipo *link* (elemento de barra) empregadas no MEF.

Malha	Divisões em x	Número de elementos	Número de nós
Malha1	10	10	11
Malha2	50	50	51
Malha3	100	100	101

As saídas de deslocamento e tensão/deformação geradas pelo ANSYS são mostradas da Figura A.1 à Figura A.6 para os domínios com 11, 51 e 101 nós.

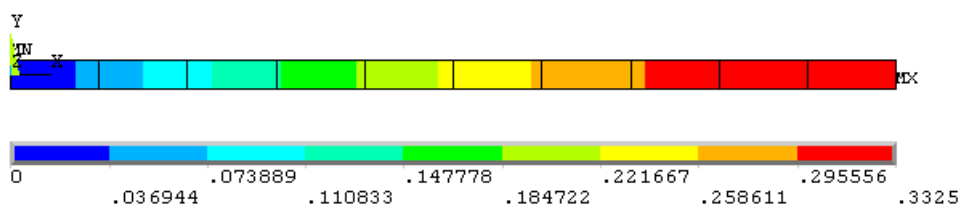


Figura A.1 - Campo de deslocamento para a Malha1 unidimensional.

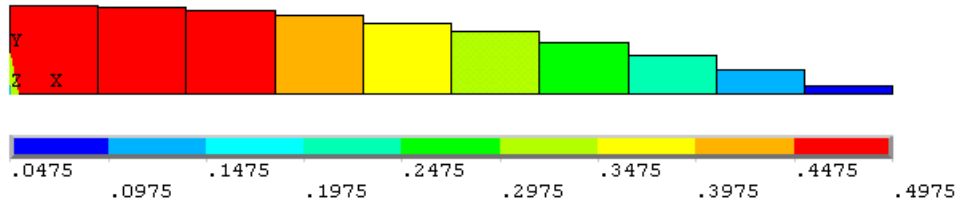


Figura A.2 - Campo de tensão normal ou deformação para a Malha1 unidimensional.

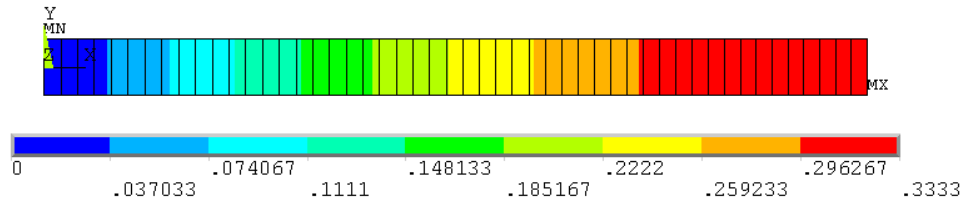


Figura A.3 - Campo de deslocamento para a Malha2 unidimensional.

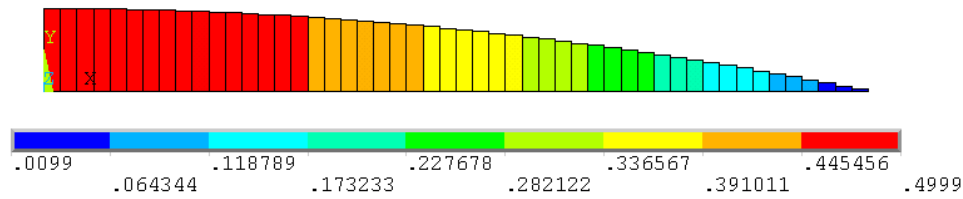


Figura A.4 - Campo de tensão normal ou deformação para a Malha2 unidimensional.

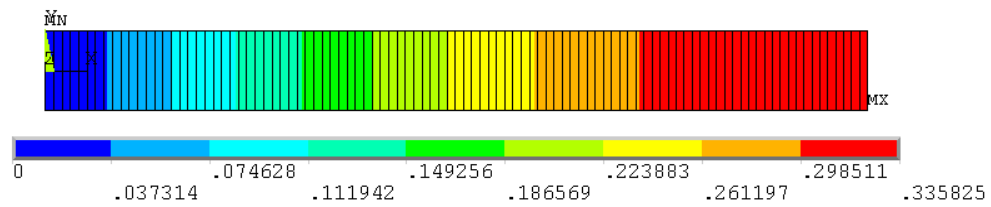


Figura A.5 - Campo de deslocamento para a Malha3 unidimensional.

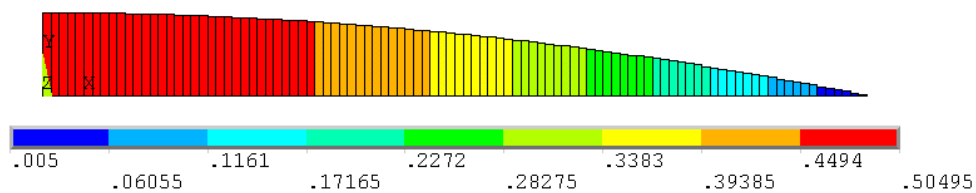


Figura A.6 - Campo de tensão normal ou deformação para a Malha3 unidimensional.

No EFG as cargas de tração foram aplicadas nos pontos de integração (centrado em cada célula) com valor igual à respectiva coordenada do ponto.

A Figura A.7 e a Figura A.8 comparam com a solução analítica as saídas dos campos de deslocamento e deformação de ambos os métodos empregando as três concentrações nodais/malhas. Esta comparação foi feita utilizando no EFG as seguintes configurações de ajuste: c_x igual ao espaçamento nodal, d_{max} igual a 2,0, função peso cúbica *spline* e dm constante.

As normas do erro dos campos de deslocamento e deformação/tensão pertinentes ao MEF estão indicadas, respectivamente, na Figura A.7d e na Figura A.8d. Estas normas de erro são aceitáveis quando comparadas com as soluções analíticas, para as três malhas testadas, conforme mostrado na Figura A.7 e na Figura A.8.

No EFG, são encontradas normas de erro com valores de mesma ordem do MEF, principalmente nos testes onde o tamanho do domínio de influência é mantido constante, Figura 4.14 (várias funções peso e 11 nós) e Figura 4.17 (domínio com 11, 51 e 101 nós e função cúbica *spline*). Dentre as melhores respostas para o caso de busca e distribuição uniforme, tem-se a configuração de 11 nós no domínio e k igual a 2, Figura 4.38.

Em casos unidimensionais, não é usual ter situações onde se faz necessária a distribuição nodal não-uniforme. Assim, não foram realizados testes com malhas não estruturadas para o MEF. Contudo, algumas análises utilizando distribuições não-uniformes de nós foram realizadas no EFG visando facilitar o entendimento de casos mais complexos formulados por este método.

No caso unidimensional apresentado verifica-se que para dadas configurações de parâmetros do EFG pode-se obter respostas semelhantes às encontradas no MEF. O primeiro mostrar-se tão acurado quanto o MEF e possui parâmetros que permitem controlar sua resposta, apesar do ajuste destes parâmetros demandar tempo.

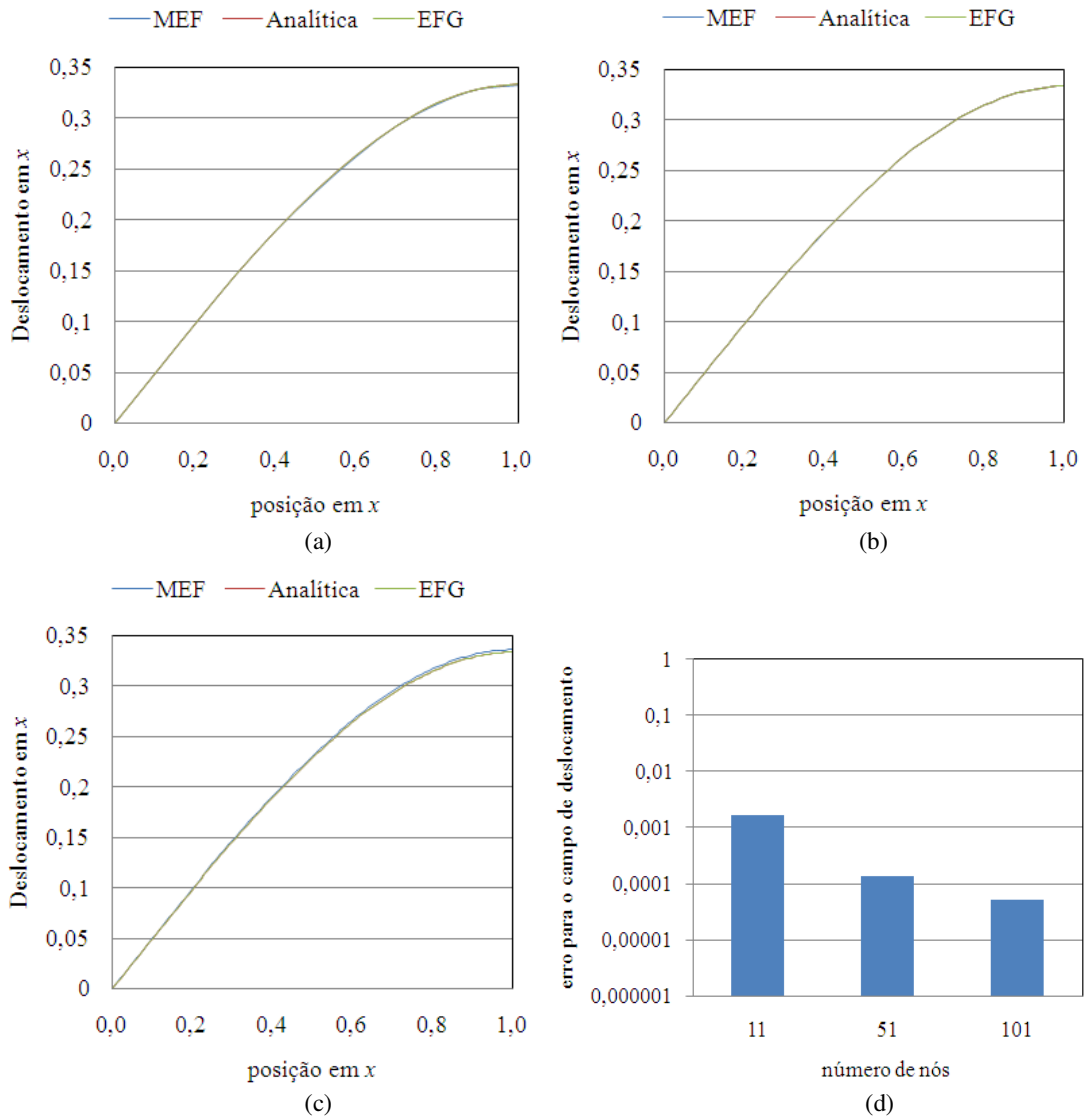


Figura A.7 - Comparação do campo de deslocamento entre as soluções analíticas e numéricas do MEF e do EFG (d_{max} igual a 2,0; função peso cúbica e dm constante) para (a) 11, (b) 51 e (c) 101 nós. (d) Norma do erro do deslocamento para o MEF.

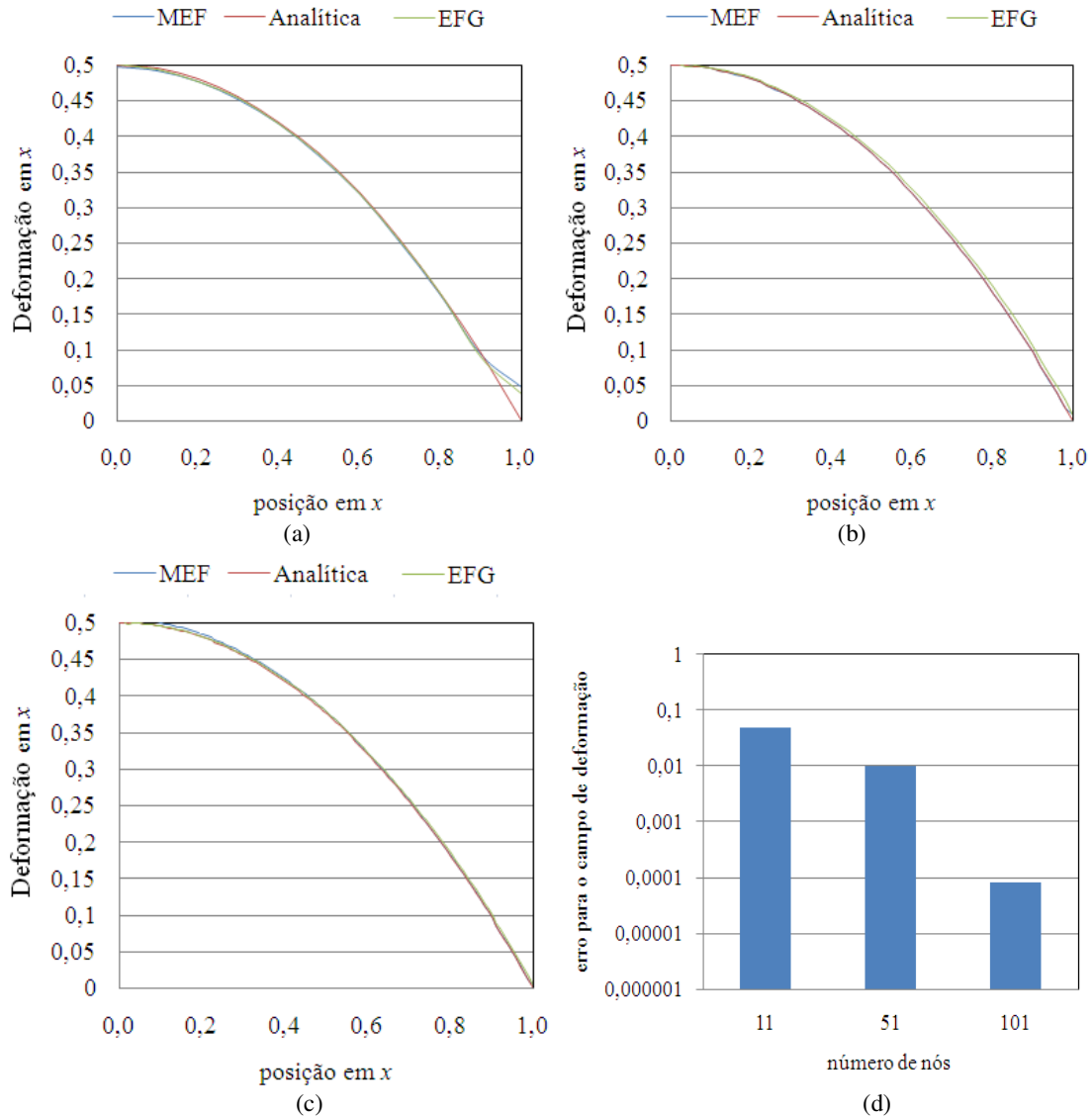


Figura A.8 - Comparação do campo de deformação entre as soluções analíticas e numéricas do MEF e do EFG (d_{max} igual a 2,0; função peso cúbica e dm constante) para (a) 11, (b) 51 e (c) 101 nós. (d) Norma do erro de deformação/tensão para o MEF.

6.2 CASO BIDIMENSIONAL

Esta seção tem como objetivo comparar respostas do método de Galerkin sem malha com as do método dos elementos finitos. O software ANSYS foi utilizado para realizar as simulações pertinentes ao MEF. Para tanto, seis malhas estruturadas (regulares) formadas por elementos finitos quadrilaterais quadráticos (8 nós) foram definidas. A Tabela A.2

mostra o número de elementos, nós e divisões nas direções x e y , pertinentes a cada malha. A Malha1, por exemplo, está representada na Figura A.9.

De forma a atenuar a propagação de efeitos locais (princípio de Saint-Venant) no MEF, o valor da carga concentrada foi aplicado de forma distribuída nos nós e as condições de contorno de restrição foram modificadas e avaliadas de forma a minimizar seus efeitos locais nas simulações. Dentre as proposições avaliadas, optou-se por aplicar restrições em todos os graus de liberdade da extremidade fixa da viga ($x = 0$).

Tabela A.2 - Malhas estruturadas formada por elementos finitos quadrilaterais quadráticos.

Malha	Divisões em x	Divisões em y	Número de elementos	Número de nós
Malha1	10	4	40	149
Malha2	20	8	160	537
Malha3	40	16	640	2.033
Malha4	80	32	2.560	7.905
Malha5	160	64	10.240	31.169
Malha6	320	128	40.960	123.777

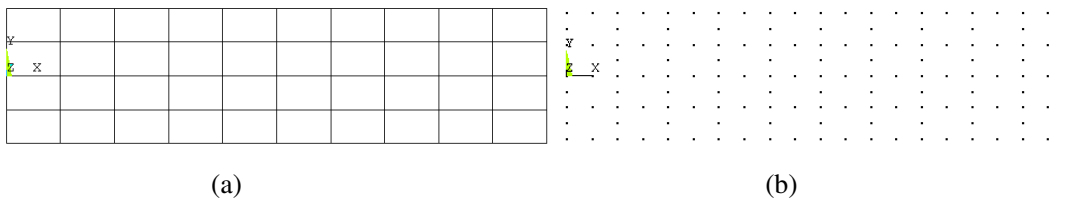


Figura A.9 - Malha1 composta por (a) 40 elementos quadrilaterais quadráticos e (b) 149 nós.

As constantes materiais utilizadas no MEF são as mesmas empregadas no EFG, ou seja, o módulo de elasticidade é igual a $30E+6$ unidades de pressão e o coeficiente de Poisson é igual a 0,3. Em ambos os métodos, o carregamento aplicado é igual a 1.000 unidades de força. Os campos de deslocamento em y e de tensões obtidos com o MEF são mostrados da Figura A.10 à Figura A.27, para as seis malhas apresentadas na Tabela A.2.

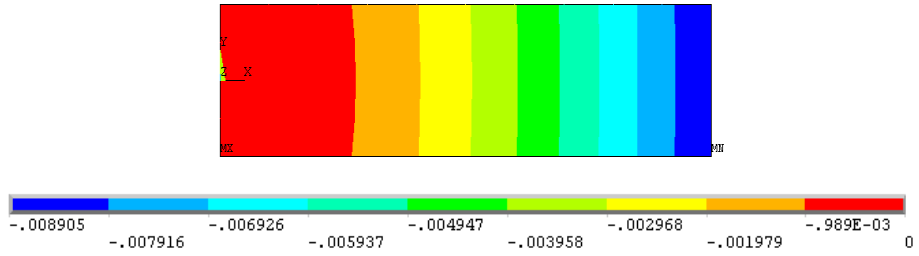


Figura A.10 - Campo de deslocamento em y obtido pelo MEF com a Malha1.

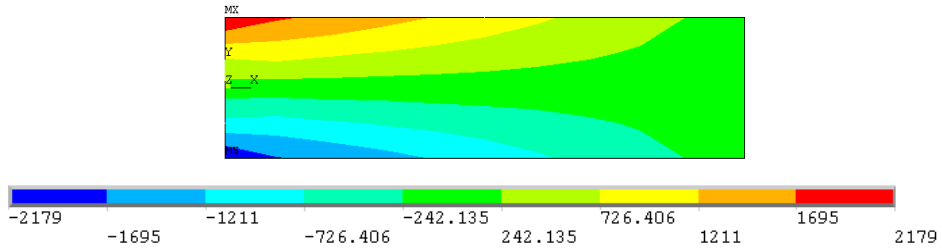


Figura A.11 - Campo tensão normal em x obtido pelo MEF com a Malha1.

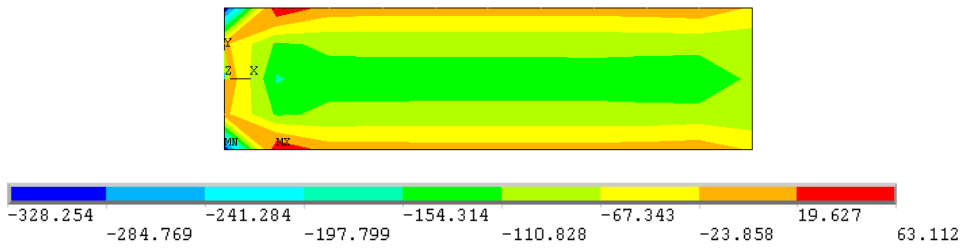


Figura A.12 - Campo tensão cisalhante xy obtido pelo MEF com a Malha1.

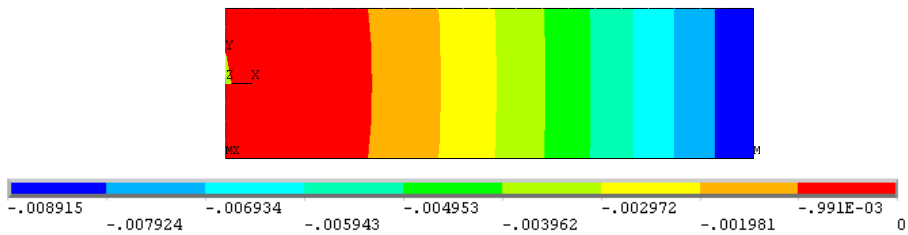


Figura A.13 - Campo de deslocamento em y obtido pelo MEF com a Malha2.

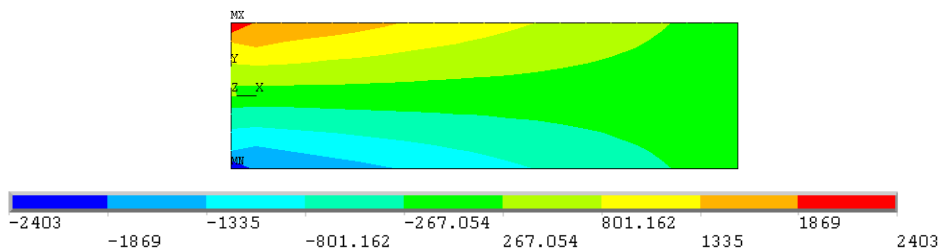


Figura A.14 - Campo tensão normal em x obtido pelo MEF com a Malha2.

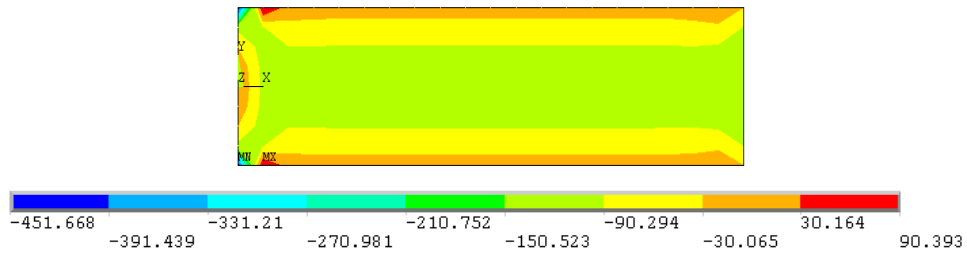


Figura A.15 - Campo tensão cisalhante xy obtido pelo MEF com a Malha2.

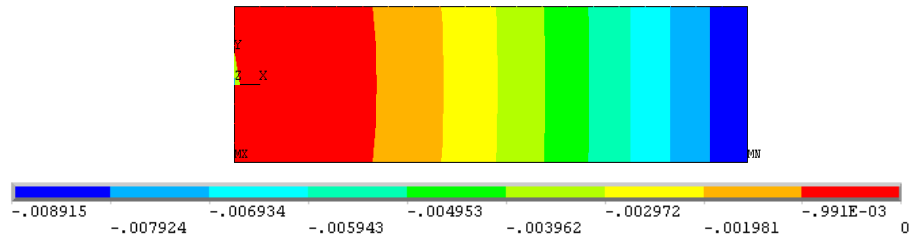


Figura A.16 - Campo de deslocamento em y obtido pelo MEF com a Malha3.

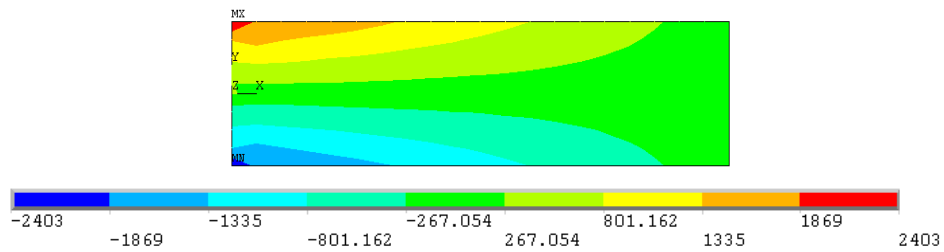


Figura A.17 - Campo tensão normal em x obtido pelo MEF com a Malha3.

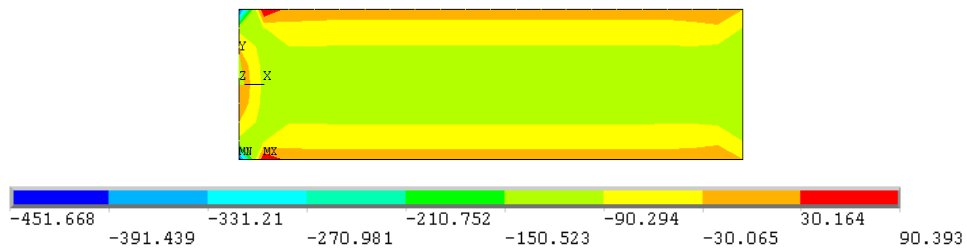


Figura A.18 - Campo tensão cisalhante xy obtido pelo MEF com a Malha3.

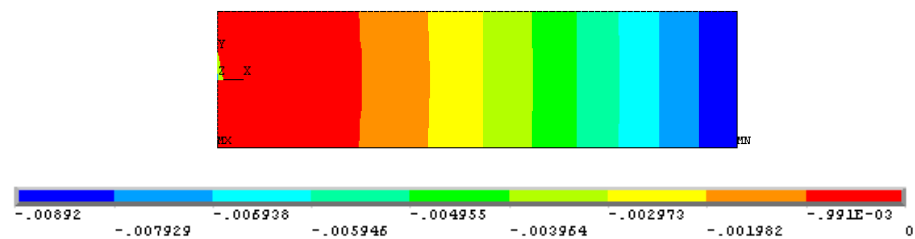


Figura A.19 - Campo de deslocamento em y obtido pelo MEF com a Malha4.

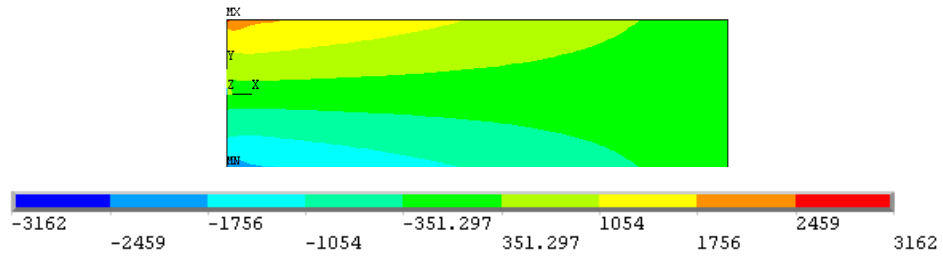


Figura A.20 - Campo tensão normal em x obtido pelo MEF com a Malha4.

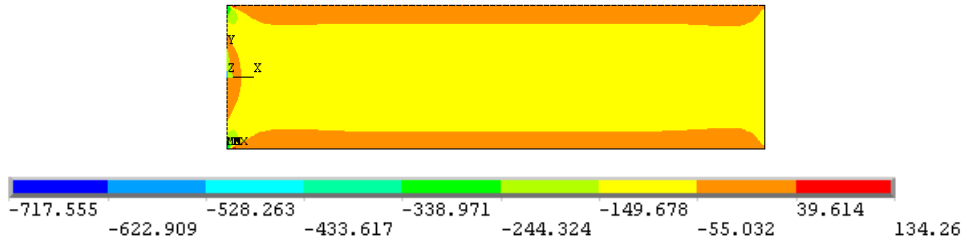


Figura A.21 - Campo tensão cisalhante xy obtido pelo MEF com a Malha4.

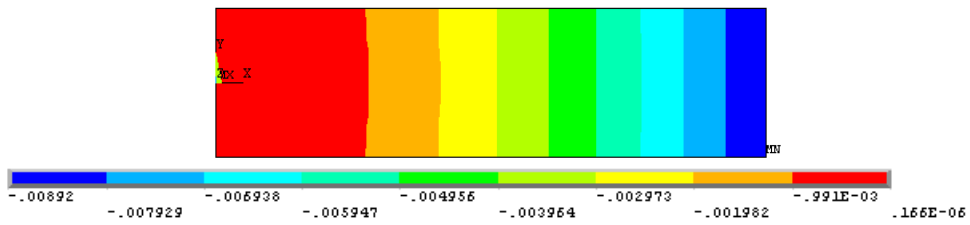


Figura A.22 - Campo de deslocamento em y obtido pelo MEF com a Malha5.

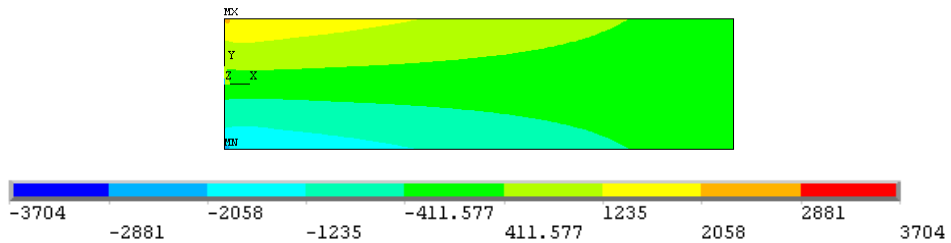


Figura A.23 - Campo tensão normal em x obtido pelo MEF com a Malha5.

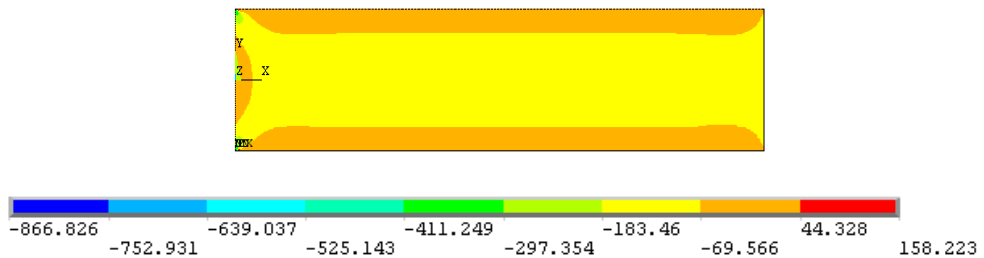


Figura A.24 - Campo tensão cisalhante xy obtido pelo MEF com a Malha5.

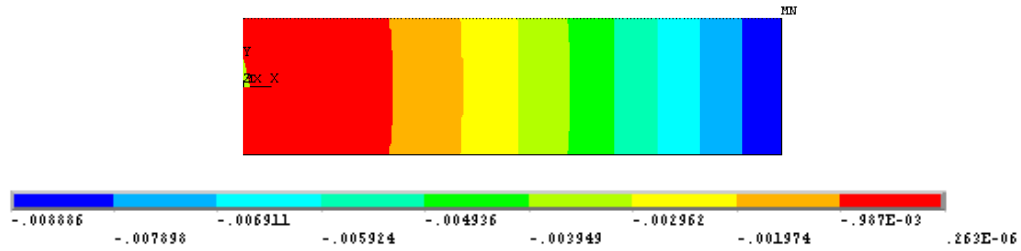


Figura A.25 - Campo de deslocamento em y obtido pelo MEF com a Malha6.

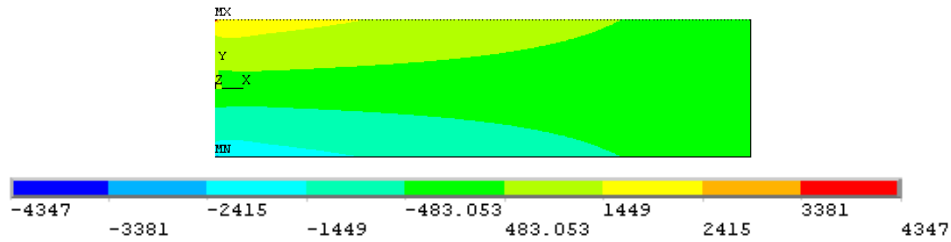


Figura A.26 - Campo tensão normal em x obtido pelo MEF com a Malha6.

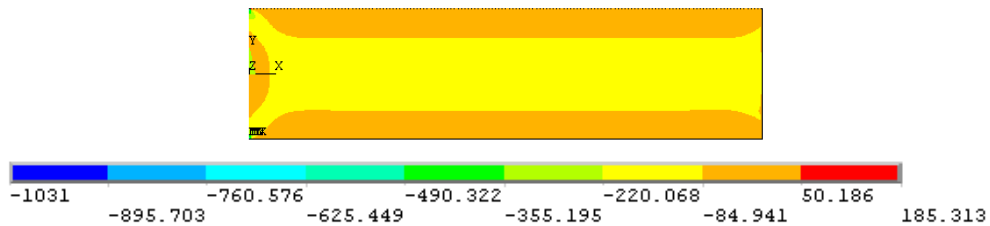


Figura A.27 - Campo tensão cisalhante xy obtido pelo MEF com a Malha6.

Para todas as malhas, o campo de deslocamento apresenta comportamento e valores próximos aos das respostas analíticas (Figura A.10, Figura A.13, Figura A.16, Figura A.19, Figura A.22 e Figura A.25). Por outro lado, os campos de tensões normais e cisalhantes mostram alterações em seu comportamento nas regiões próximas à extremidade fixa da viga, principalmente o campo de cisalhamento. Os valores de tensão máxima e mínima passam a ter valores absolutos maiores com um maior refinamento da malha, porém a região afetada por estes valores é, em geral, cada vez mais reduzida. Para evidenciar tal fato, os campos de tensão pertinentes a Malha2, Malha4 e Malha6 são apresentados da Figura A.28 à Figura A.33 empregando como o limite de suas escalas os valores analíticos máximos e mínimos pertinentes a cada campo de tensão.

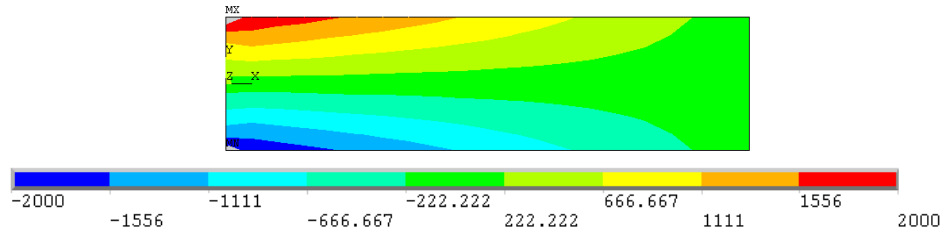


Figura A.28 - Campo tensão normal em x obtido com a Malha2 modificado a escala (escala original variando entre ± 2403).

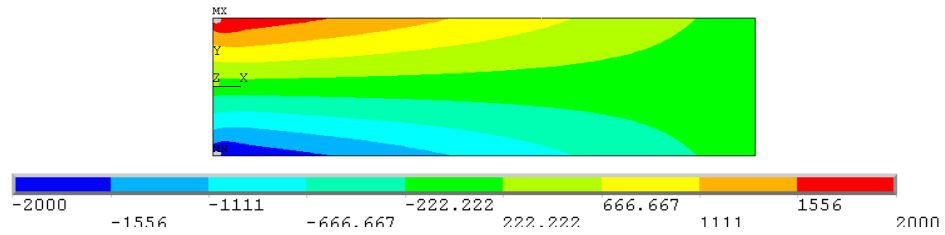


Figura A.29 - Campo tensão normal em x obtido com a Malha4 modificado a escala (escala original variando entre ± 3162).

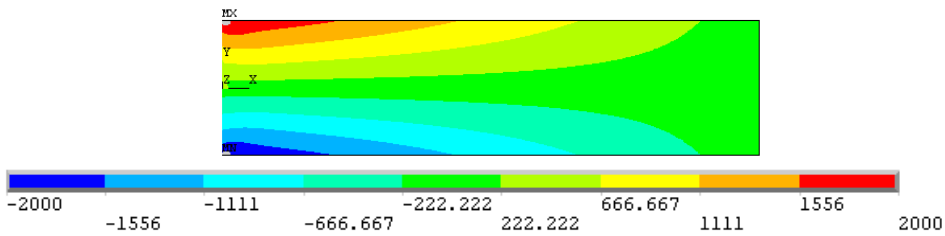


Figura A.30 - Campo tensão normal em x obtido com a Malha6 modificado a escala (escala original variando entre ± 4347).

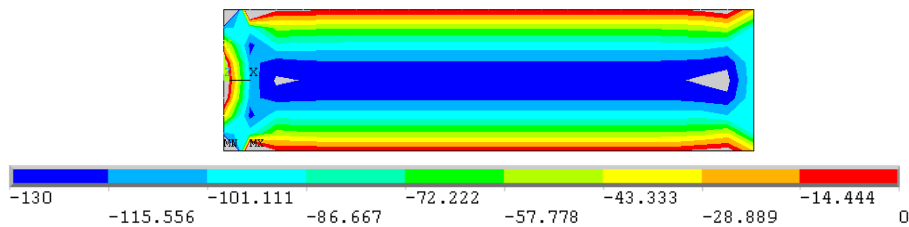


Figura A.31 - Campo tensão cisalhante obtido com a Malha2 modificado a escala (escala original variando entre $-451,668$ e $+90,393$).

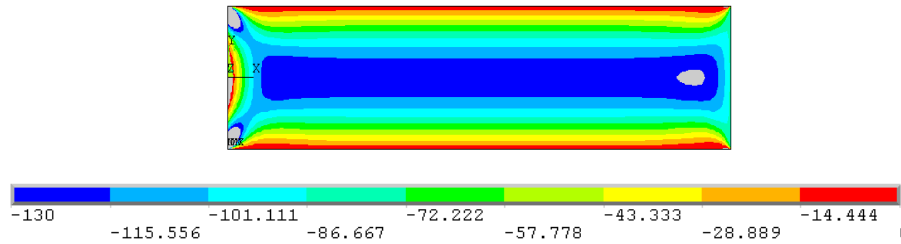


Figura A.32 - Campo tensão cisalhante obtido com a Malha4 modificado a escala (escala original variando entre $-717,55$ e $+134,20$).

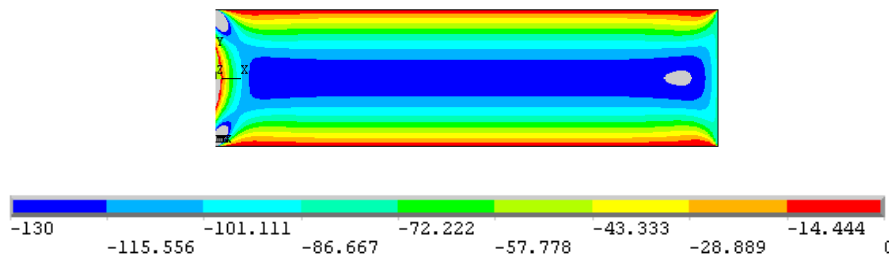


Figura A.33 - Campo tensão cisalhante obtido com a Malha6 modificado a escala (escala original variando entre -1031 e $+185,313$).

Em análise às saídas mostradas da Figura A.28 à Figura A.33, verifica-se que os campos de tensão obtidos com o MEF são semelhantes aos apresentados na validação do EFG. Contudo, algumas alterações nos valores de tensão são identificadas em locais próximos aos pontos de aplicação das condições de contorno essenciais e naturais. Deste modo, as simulações feitas com o MEF apresentam comportamento e valores próximos aos analíticos nas regiões afastadas dos pontos com restrições e das forças aplicadas. As normas dos erros dos campos não foram calculadas para o MEF, uma vez que estas seriam afetadas pelos efeitos locais.

Nota-se que MEF apresentou certas alterações em suas respostas. Tal fato está relacionado ao tipo de condição de contorno aplicada. Assim, ao invés de impor condições de força na extremidade livre da viga poder-se-ia aplicar diretamente os valores de deslocamento, por exemplo.

6.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE A COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS

Para os casos estudados, o EFG apresentou respostas tão acuradas quanto o MEF, contudo o método de Galerkin sem malha mostra-se muito mais laborioso em termos de sua implementação numérica, visto que a construção da função de forma é calculada para cada nó durante a execução e esta função está vinculada a uma série de parâmetros cujo processo de ajuste é bastante trabalhoso, conforme análises mostradas neste trabalho.

Variação da concentração nodal no domínio utilizando o método EFG não é tão ordinária quanto no MEF, conforme resultados unidimensionais e bidimensionais não-uniformes avaliados.

Os resultados bidimensionais mostraram que ambos os métodos estão aptos a solucionar o problema. Contudo, o MEF apresentou certas alterações em suas respostas nos locais próximos aos pontos de aplicação das condições de contorno. Tal fato está relacionado ao tipo de condição de contorno aplicada. Deste modo, ao invés de impor condições de força na extremidade livre da viga poder-se-ia, por exemplo, aplicar diretamente os valores de deslocamento.