Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Grupos Admitindo 2-Grupos Elementares de Automorfismos

por

Karise Gonçalves Oliveira

Brasília
2010

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Grupos Admitindo 2-Grupos Elementares de Automorfismos

por

Karise Gonçalves Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Pavel Shumyatsky

Aos meus pais, Divina e Elisio, por me darem força nos momentos difíceis.

Ao meu orientador, Pavel Shumyatsky, pela compreensão.

Ao Jardel, pelo apoio e carinho.

Agradecimentos

Agradeço a Deus e ao Divino Pai Eterno, cuidado constante em minha vida.

À minha família. Pessoas que amo. O que representam para mim está acima de qualquer conquista material ou intelectual.

Em especial minha mãe, Divina, que é um anjo em minha vida.

Meu pai, Elisio.

Meu irmão, Juninho.

Minha sobrinha, Gabriela.

Ao Jardel, por se mostrar uma pessoa cada vez mais amável, por ser companheiro, por me incentivar sempre.

Aos meus irmãozinhos em Brasília, Magno e Miguel.

Pela convivência, pelo aprendizado e pelos momentos de descontração.

Às grandes amigas, Eunice e Lu.

Por todo impulso que me deram nos momentos mais relevantes, pelas palavras de conforto e pelos momentos de entretenimento.

Ao Tonires, pela motivação e partilha de conhecimentos.

Aos amigos Simone, Kelvin, Valdemir, Judith, Fabiana (Fabinha), Claudinha, James, Franciele, Ricardo, Fabiana, Franciane, Hugo, Eduardo, Lorenna e Kely.

Pelas motivações e todas as palavras de encorajamento.

Aos amigos do MAT/UnB, Kelem, Anyelle, Jhone, Aline, Ricardo, Rangel, Manuela, Marcelo, Léo, Flávia, Theo, Vagner, Tertuliano, Evander, Walter, Raimundo, Luis Felipe, Eudes, Thiago, Walter.

Pela convivência e partilha de conhecimentos.

Ao professor Pavel Shumyatsky.

Pela orientação, pela paciência e por acreditar em mim.

Aos professores Aline Pinto, Noraí Rocco, Jhone Silva e Aline Lima.

Pelas correções, sugestões e contribuições para a versão final deste trabalho.

Aos professores e servidores do MAT/UnB e a todos que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.

À Capes e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Seja G um grupo finito de ordem ímpar admitindo um grupo de automorfismos elementar A de ordem 2^n. Neste trabalho estudamos a influência que propriedades de $C_G(A)$ exercem sobre a estrutura de G. Obtemos os seguintes resultados: se G é de comprimento derivado k e $C_G(A)$ tem expoente m, então G possui uma série normal $G = G_1 \geq T_1 \geq G_2 \geq T_2 \geq \cdots \geq G_n \geq T_n = 1$ com quocientes G_i/T_i nilpotentes de classe $\{k,m,n\}$-limitada para todo $i = 1,\ldots n$ e quocientes T_i/G_{i+1} de expoente $\{k,m,n\}$-limitado para todo $i = 1,\ldots,n-1$; e se G é de comprimento derivado k e admite um grupo de Klein de automorfismos A tal que $C_G(a)$ é extensão de um grupo de expoente e por um grupo nilpotente de classe c para todo $a \in A^{\#}$, então G possui uma série normal $1 \leq T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq T_4 = G$ com quocientes T_4/T_3 e T_2/T_1 nilpotentes de classe $\{e,c,k\}$-limitada e quocientes T_3/T_2 e T_1 de expoente $\{e,c,k\}$-limitado.

Palavras-chave: grupos finitos, automorfismos, centralizadores.

Abstract

Let G be a finite group of odd order admitting an elementary group of automorphisms A of order 2^n. We study the influence of properties of $C_G(A)$ over the structure of G. We obtain the following results: if G has derived length k and $C_G(A)$ has exponent m, then G contains a normal series $G = G_1 \geq T_1 \geq G_2 \geq T_2 \geq \cdots \geq G_n \geq T_n = 1$ such that the quotients G_i/T_i are nilpotent of $\{k,m,n\}$-bounded class for all $i = 1,\ldots,n$ and the quotients T_i/G_{i+1} have $\{k,m,n\}$-bounded exponent for all $i = 1,\ldots,n-1$; and if G has derived length k and admits a four-group of automorphisms A such that $C_G(a)$ is extention of a group of exponent e by a nilpotent group of class c for all $a \in A^{\#}$, then G contains a normal series $1 \leq T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq T_4 = G$ such that the quotients T_4/T_3 and T_2/T_1 are nilpotent of $\{e,c,k\}$-bounded class and the quotients T_3/T_2 and T_1 have $\{e,c,k\}$-bounded exponent.

Key words: finite groups, automorphisms, centralizers.

Lista de Símbolos

x^y	$y^{-1}xy$
$[x,y]$	$x^{-1}y^{-1}xy$
$H \trianglelefteq G$	H é um subgrupo normal de G
$G^{(n)}$	n-ésima derivada de G
$\gamma_n(G)$	n-ésimo termo da série central inferior de G
G^n	subgrupo gerado pelo conjunto das n-ésimas potências dos elementos de G
$Z_n(G)$	n-ésimo hipercentro de G
$N_G(H)$	normalizador de H em G
$C_G(H)$	centralizador de H em G
$\|G\|$	ordem de G
$\|G:H\|$	índice de H em G
$\langle S \rangle$	subgrupo gerado pelos elementos de S
$\langle H^G \rangle$	fecho normal de H em G

$G^{\#}$	conjunto formado pelos elementos não triviais de G
$W(G)$	subgrupo verbal de G correspondente ao conjunto de palavras W
$\pi(G)$	conjunto de todos os números primos divisores de $\|G\|$
$F(G)$	subgrupo de Fitting de G
$\exp G$	expoente do grupo G
$K \rtimes H$	produto semidireto de K por H

Sumário

Introdução **12**

1 Resultados Preliminares **18**

1.1 Comutadores 18

1.2 Grupos Solúveis e Grupos Nilpotentes 24

1.3 Produto Subcartesiano e Teorema de Remak 27

1.4 Teorema de Schur 28

1.5 Representações e Teorema de Maschke 31

2 Automorfismos Coprimos e Teorema de Schur-Zassenhaus **34**

2.1 Automorfismos Coprimos 34

2.2 Teorema de Schur-Zassenhaus 38

3 Álgebras de Lie Solúveis Graduadas **43**

3.1 Definições Básicas sobre Álgebras de Lie 43

47

4 Grupos Admitindo 2-Grupos Elementares de Automorfismos **54**

5 **Grupos Admitindo 2-Grupos Elementares de Automorfismos com Centralizador de Expoente Limitado** **60**

6 **Sobre a Estrutura de Grupos com Grupo de Klein de Automorfismos** **64**

Referências Bibliográficas **68**

Índice Remissivo **73**

Introdução

Sejam G um grupo finito e A um grupo de automorfismos coprimo de G. Denotamos por $C_G(A)$ o conjunto formado por todos os elementos de G fixados por A. É claro que $C_G(A)$ é um subgrupo de G. Estamos interessados na seguinte questão.

Qual a relação entre a estrutura de $C_G(A)$ e a estrutura de G?

Existem muitos resultados interessantes que refletem esta relação. O significado especial do caso em que um grupo admite um automorfismo de ordem 2 tem origem histórica, uma vez que resultados sobre centralizadores de automorfismos de ordem 2 indicavam o que poderia ser esperado para automorfismos de quaisquer outras ordens. Um lado atrativo é que, frequentemente, resultados podem ser obtidos por cálculos diretos sobre o grupo, sem haver a necessidade de métodos lineares sofisticados, como os descritos por exemplo em [13].

Para exemplificar a forte influência que a estrutura do grupo de pontos fixos possui sobre a estrutura de um grupo finito arbitrário podemos citar o livro de Burnside 1902 [3], que apresenta uma demonstração do fato de que um grupo admitindo um automorfismo livre de pontos fixos de ordem 2 é abeliano. Para grupos que admitem um automorfismo livre de pontos fixos de ordem 3, Burnside mostrou que tais grupos são necessariamente nilpotentes de classe no máximo 2.

Em 1940 B. H. Neumann mostrou que qualquer grupo periódico admitindo um automorfismo livre de pontos fixos de ordem 2 é abeliano [25]. Um resultado análogo sobre automorfismos de ordem prima arbitrária de grupos finitos foi obtido no fim dos anos cinquenta nos trabalhos de G. Higman [12] e J. Thompson [47]. Os principais resultados a respeito de grupos admitindo um automorfismo livre de pontos fixos de ordem prima arbitrária estão listados a seguir.

Teorema de Higman [12]. *Existe uma função $h(p)$ dependendo somente de p, p primo, tal que todo grupo nilpotente que admite um automorfismo livre de pontos fixos de ordem p é nilpotente de classe no máximo $h(p)$.*

Teorema de Thompson [47]. *Todo grupo finito admitindo um automorfismo livre de pontos fixos de ordem prima é nilpotente.*

Fazendo a junção dos dois teoremas acima, obtemos

Teorema de Higman-Thompson. *Existe uma função $h(p)$ dependendo somente de p tal que todo grupo finito que admite um automorfismo livre de pontos fixos de ordem prima p é nilpotente de classe no máximo $h(p)$.*

Nos anos 60 e posteriormente, os pesquisadores se concentraram no estudo de automorfismos de ordem composta.

Seja G um grupo solúvel finito. Então o *subgrupo de Fitting* $F(G)$ de G é o subgrupo gerado por todos os subgrupos nilpotentes normais de G. Pelo Teorema de Fitting segue que $F(G)$ é nilpotente. A série superior de Fitting de G é definida por

$$F_0(G) = 1,$$

$$F_{i+1}(G)/F_i(G) = F(G/F_i(G)),\ i = 0, 1, \ldots.$$

Uma vez que G é solúvel existe um número h tal que $G = F_h(G)$. O menor número com esta propriedade é chamado *comprimento de Fitting* de G, sendo denotado por $h(G)$. O *comprimento de composição* $k(G)$ de um grupo solúvel G é o número de divisores primos da ordem de G, contando suas multiplicidades, ou seja, se $|G| = p_1^{\alpha_1} \cdots p_d^{\alpha_d}$ então $k(G) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i$.

Thompson [46] mostrou que se G e A são solúveis com $(|G|, |A|) = 1$, então $h(G)$ é limitado em termos de $k(A)$ e de $h(C_G(A))$. Posteriormente Turull [50] provou que nestas condições $h(G) \leq h(C_G(A)) + 2k(A)$. Este limite é o melhor possível (ver [24]).

Na década de 60 surgiu a seguinte conjectura: *Sejam G um grupo finito e A um grupo solúvel agindo sobre G tal que $C_G(A) = 1$. Suponhamos que $|A|$ e $|G|$ sejam coprimos. Então $h(G) \leq k(A)$.*

Esta conjectura pode ser considerada uma generalização do Teorema de Thompson sendo verdadeira em vários casos, ver Turull [49] a respeito deste e de outros problemas relacionados. O caso no qual A é abeliano foi provado por Berger [2], enquanto o caso particular no qual A é um 2-grupo abeliano elementar foi provado por Shult [29].

Segue da classificação dos grupos simples finitos [4] que todo grupo finito admitindo um grupo de automorfismos coprimo A tal que $C_G(A) = 1$ é solúvel. Se A é um 2-grupo, a solubilidade de G segue também do Teorema de Feit-Thompson [48].

Existem poucos casos nos quais informações mais detalhadas sobre a estrutura de G podem ser obtidas. Devemos mencionar o resultado estabelecido por Kovács [20], quer seja: se G admite um grupo de automorfismos livre de pontos fixos de ordem 4, então $G/Z(G)$ é metabeliano. Outro resultado relevante é o seguinte teorema que foi provado em [36].

Teorema 4.0.1. *Seja G um grupo solúvel de comprimento derivado k admitindo um grupo de automorfismos elementar A de ordem 2^n tal que $C_G(A) = 1$. Então existem um número $f(k,n)$ dependendo somente de k e de n e uma série normal A-invariante de G*

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_n = G,$$

tais que os quocientes H_i/H_{i-1} são nilpotentes de classe no máximo $f(k,i)$ para todo $i = 1,\ldots,n$.

Existem exemplos mostrando que o comprimento derivado do grupo G no teorema acima pode ser arbitrariamente grande (ver Teorema 2.2.6).

Uma nova demonstração para o Teorema 4.0.1 faz parte desta tese (ver Capítulo 4), sendo motivada por um resultado obtido por meio da consideração do problema análogo para álgebras de Lie. O mesmo é enunciado a seguir e sua demonstração apresentada no Capítulo 3.

Teorema 3.0.1. *Sejam A o grupo elementar de ordem 2^n e L uma álgebra de Lie A-graduada solúvel de comprimento derivado k com $L_0 = 0$. Então L possui uma série de ideais*

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_n = L,$$

com quocientes G_i/G_{i-1} nilpotentes de classe $\{k,n\}$-limitada para todo $i = 1,\ldots,n$.

O Teorema 4.0.1 é de grande importância no decorrer desta tese uma vez que através dele obtemos o teorema abaixo que é o resultado principal apresentado no Capítulo 5.

Teorema 5.0.1. *Seja G um grupo finito de ordem ímpar e de comprimento derivado k admitindo um grupo de automorfismos elementar A de ordem 2^n tal que $C_G(A)$ é de expoente m. Então G possui uma série normal*

$$G = G_1 \geq T_1 \geq G_2 \geq T_2 \geq \cdots \geq G_n \geq T_n = 1$$

com quocientes G_i/T_i nilpotentes de classe $\{k,m,n\}$-limitada para $i = 1,...n$ e quocientes T_i/G_{i+1} de expoente $\{k,m,n\}$-limitado para $i = 1,...,n-1$.

Para demonstrar do Teorema 5.0.1 primeiramente provamos as duas proposições abaixo.

Proposição 5.0.2. *Seja G um grupo finito de ordem ímpar e de comprimento derivado k admitindo um automorfismo a de ordem 2 tal que $C_G(a)$ possui expoente m e $G = [G,a]$. Então o expoente de G' é $\{k,m\}$-limitado.*

Proposição 5.0.6. *Seja G um grupo finito de ordem ímpar e de comprimento derivado k admitindo um grupo de automorfismos elementar A de ordem 2^n tal que $C_G(A)$ é de expoente m. Então $N = \bigcap_{a \in A^{\#}} [G,a]$ é extensão de um grupo de expoente $\{k,m,n\}$-limitado por um grupo nilpotente de classe $\{k,m,n\}$-limitada.*

A Proposição 5.0.6 é demonstrada utilizando o teorema a seguir que permite fazer uma redução ao caso metabeliano. Denotemos por $f(g,c)$ a expressão $(g-1)\frac{c(c+1)}{2} + c$.

Teorema 5.0.5 *Seja G um grupo tendo um subgrupo normal nilpotente N de classe g tal que G/N' é uma extensão de um grupo de expoente e por um grupo nilpotente de classe c. Suponhamos que $\gamma_{c+1}(G)$ é solúvel de comprimento derivado d. Então $\gamma_{f(g,c)+1}(G)$ tem expoente finito $\{c,d,e,g\}$-limitado.*

A demonstração do Teorema 5.0.5 pode ser encontrada em [41].

Discutimos também a situação na qual um grupo admite um grupo de Klein de automorfismos com o grupo de pontos fixos deste satisfazendo certas restrições. Esta discussão é motivada por trabalhos obtidos em [16], [44] e [7]. Em [16] foi mostrado que se G é um grupo finito admitindo um grupo de automorfismos coprimo A de ordem p^2, com p primo, tal que $C_G(a)$ possui expoente e para todo $a \in A^{\#}$, então o expoente de G é limitado somente em termos de e e p.

Em [44] foram demonstrados os seguintes resultados.

Teorema. *Sejam p um primo e G um p'-grupo periódico solúvel admitindo um grupo de automorfismos elementar A de ordem p^2. Suponhamos que $C_G(a)$ é abeliano para todo $a \in A^{\#}$. Então o grupo derivado de G é nilpotente.*

Teorema. *Se G é um $2'$-grupo periódico solúvel e A um grupo de Klein de automorfismos tal que $C_G(a)$ é nilpotente para todo $a \in A^{\#}$, então G é metanilpotente.*

Por fim, em [7], foi mostrado que

Teorema. *Seja G um p'-grupo periódico admitindo um grupo de automorfismos elementar A de ordem p^3, com p um primo. Suponhamos que $C_G(a)'$ possui expoente que divide m para cada $a \in A^{\#}$. Então o grupo derivado de G possui expoente $\{m,p\}$-limitado.*

Os resultados mencionados acima sugerem o estudo de grupos finitos admitindo um grupo abeliano elementar A de ordem p^n tal que $C_G(a)$ é extensão de um grupo de expoente e por um grupo nilpotente de classe c para todo $a \in A^{\#}$.

Neste aspecto apresentamos respostas para o caso particular no qual A é o grupo de Klein e G é solúvel de comprimento derivado k. Os resultados obtidos estão listados abaixo.

Proposição 6.0.4. *Seja G um grupo finito de ordem ímpar e de comprimento derivado k admitindo um grupo de Klein de automorfismos A tal que $C_G(a)$ é extensão de um grupo de expoente e por um grupo nilpotente de classe c para todo $a \in A^{\#}$. Seja $N = \bigcap_{a \in A^{\#}} [G,a]$. Então N é extensão de um grupo de expoente $\{e,c,k\}$-limitado por um grupo nilpotente de classe $\{e,c,k\}$-limitada.*

Teorema 6.0.1. *Seja G um grupo finito de ordem ímpar e de comprimento derivado k admitindo um grupo de Klein de automorfismos A tal que $C_G(a)$ é extensão de um grupo de expoente e por um grupo nilpotente de classe c para todo $a \in A^{\#}$. Então G possui uma série normal*

$$1 \leq T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq T_4 = G$$

com quocientes T_4/T_3 e T_2/T_1 nilpotentes de classe $\{e,c,k\}$-limitada e quocientes T_3/T_2 e T_1 de expoente $\{e,c,k\}$-limitado.

Ressaltamos que nossas discussões baseiam-se no estudo de condições sobre o grupo de pontos fixos de determinado grupo, com o intuito de obtermos conclusões sobre a estrutura deste grupo em função das condições impostas inicialmente. No primeiro capítulo mencionamos alguns resultados clássicos da Teoria de Grupos que são utilizados com certa frequência no decorrer do texto, dando ênfase a tópicos relacionados aos grupos solúveis e aos grupos nilpotentes.

No segundo capítulo, passamos à apresentação de alguns resultados sobre os automorfismos coprimos, conjuntamente com considerações a respeito do Teorema de Schur-Zassenhaus e suas principais consequências.

No Capítulo 3, inicialmente são feitas observações gerais sobre álgebras de Lie, em seguida são obtidos alguns resultados sobre a estrutura de álgebras de Lie solúveis graduadas. Em especial apresentamos a demonstração do Teorema 3.0.1, com o objetivo de obter avanços no estudo de grupos solúveis admitindo 2-grupos elementares de automorfismos. Ressaltamos que alguns dos resultados obtidos sobre álgebras de Lie são de interesse independente.

O Capítulo 4 é focado em uma discussão análoga à apresentada no terceiro capítulo, desta vez para grupos, com o objetivo principal de obter a demonstração do Teorema 4.0.1. O quinto capítulo é dedicado à obtenção de uma generalização do Teorema 4.0.1, considerando o grupo de pontos fixos de expoente m. Demonstramos o Teorema 5.0.1 utilizando os principais resultados obtidos no Capítulo 4 e o Teorema 5.0.2.

Por fim, no Capítulo 6, demonstramos a Proposição 6.0.4 e o Teorema 6.0.1, que fornecem resultados sobre a estrutura de um grupo finito de ordem ímpar que admite um grupo de Klein de automorfismos.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Inicialmente fixamos algumas notações e relembramos alguns fatos e definições em Teoria de Grupos. Também demonstramos alguns resultados necessários para o desenvolvimento do tema proposto.

Em todo o texto desta tese, uma quantidade é dita m-limitada (ou limitada em termos de m), se ela é limitada por alguma função que depende somente de m. Analogamente, a expressão $\{m,n,l,\ldots\}$-limitada (ou limitada em termos de $m,n,l,\ldots$) é utilizada quando os parâmetros $m,n,l,\ldots$ estão envolvidos.

1.1 Comutadores

Seja G um grupo. Para quaisquer $x,y \in G$ definimos o *comutador* dos elementos x,y como sendo o elemento

$$[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^{y},$$

no qual $x^{y} = y^{-1}xy$ é denominado o *conjugado de x por y*.

O resultado a seguir estabelece algumas propriedades de comutadores.

Lema 1.1.1. *Seja G um grupo e consideremos elementos arbitrários $x,y,z \in G$. Então são válidas as seguintes propriedades.*

a) $xy = yx[x,y]$, $x^{y} = x[x,y]$;

b) $[x,y]^{-1} = [y,x]$;

c) $[xy,z] = [x,z]^y[y,z] = [x,z][x,z,y][y,z]$;

d) $[x,yz] = [x,z][x,y]^z = [x,z][x,y][x,y,z]$;

e) $[x,y]^z = [x^z,y^z]$;

f) $[x,y,x] = ([x,y][x^{-1},y])^{x^y}$;

g) $[x,y,x] = 1$ *se e somente se,* $[x,y]^{-1} = [x^{-1},y]$;

h) $[x,y,z^x][y,z,x^y][z,x,y^z] = 1$ *(Identidade de Witt);*

i) $[x,y^{-1},z]^y[y,z^{-1},x]^z[z,x^{-1},y]^x = 1$ *(Identidade de Hall-Witt).*

Demonstração. A demonstração destas identidades segue diretamente da definição de comutadores com aplicação de cálculos diretos. □

Sejam X,Y subconjuntos de um grupo G, então

$$[X,Y] = \langle [x,y] \mid x \in X,\ y \in Y \rangle .$$

O subgrupo de G gerado por todos os comutadores $[x,y]$, com $x,y \in G$, é chamado o *grupo derivado* de G, que é denotado por $[G,G]$. Definimos a *série derivada de G* indutivamente por

$$G^0 = G,\ G' = [G,G],$$

$$G^{(i+1)} = [G^{(i)},G^{(i)}], \text{ para todo } i = 0,1,\dots$$

O subgrupo $G^{(i)}$ de G é conhecido como a *i-ésima derivada* de G.

Seja X um subconjunto de um grupo G. Os comutadores de peso p em elementos de X são definidos indutivamente da seguinte forma. Comutadores de peso 1 em elementos de X são exatamente os elementos de X. Se v_1 e v_2 são comutadores de pesos p_1 e p_2 em elementos de X então $[v_1,v_2]$ é um comutador em elementos de X de peso p_1+p_2.

Um comutador da forma $[\cdots[[a_1,a_2],a_3],\cdots,a_k]$ é dito *simples* e denotado por $[a_1,a_2,\cdots,a_k]$.

O próximo resultado é enunciado sem demonstração, que pode ser encontrada em [6, Teorema 2.2.1].

Lema 1.1.2. *Sejam M,N,P subgrupos de um grupo G, então*

a) $[M,N]$ *é um subgrupo normal de* $\langle M,N\rangle$*;*

b) Se M,N e P são subgrupos normais de G, então $[MN,P] = [M,P][N,P]$ e $[M,NP] = [M,N][M,P]$.

Lema 1.1.3. *(Lema dos três subgrupos) Seja N um subgrupo normal de um grupo G. Se para subgrupos A,B,C de G*

$$[A,B,C] \leq N \text{ e } [B,C,A] \leq N,$$

então também temos que $[C,A,B] \leq N$.

Demonstração. É suficiente considerarmos o caso no qual $N = 1$. Pelo Lema 1.1.1 $i)$ temos que dados $x \in A, y \in B, z \in C$

$$[x,y^{-1},z]^y[y,z^{-1},x]^z[z,x^{-1},y]^x = 1.$$

Por hipótese $[x,y^{-1},z]^y = [y,z^{-1},x]^z = 1$, pois estão em $[A,B,C]$ e $[B,C,A]$, respectivamente. Logo $[z,x^{-1},y]^x = 1$ e

$$[z,x^{-1},y] = ([z,x^{-1},y]^x)^{x^{-1}} = 1^{x^{-1}} = 1.$$

Uma vez que x percorre todo A o mesmo ocorre com x^{-1} e obtemos $[z,x,y] = 1$ para todo $x \in A, y \in B, z \in C$. Assim $b \in C_G([z,x])$ para todo $b \in B$. Então B é subgrupo de $C_G([z,x])$, ou seja, $[z,x] \in C_G(B)$ para todo $x \in A, z \in C$. Por definição $[C,A]$ é gerado pelos elementos $[z,x]$, consequentemente $[C,A] \leq C_G(B)$. Portanto $[C,A,B] = 1$. $\square$

Definimos os subgrupos $\gamma_i(G)$ de G indutivamente por

$$\gamma_1(G) = G,$$

$$\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G),G], \text{ para todo } i = 1,2,\ldots.$$

A série $G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \ldots$ é chamada *série central inferior* de G.

O *centro* $Z(G)$ de G é tal que

$$Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \text{ para todo } g \in G\},$$

que é, claramente, um subgrupo normal de G. A *série central superior* de G é definida por

$$Z_0(G) = 1,\ Z_1(G) = Z(G),$$

$$Z_{i+1}(G) = \{z \in G \mid [G,z] \in Z_i(G)\}, \text{ para todo } i = 1,2,\ldots,$$

sendo o subgrupo $Z_i(G)$ de G chamado o i-ésimo *hipercentro* de G.

Lema 1.1.4. *Seja G um grupo. Então* $[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] \subseteq \gamma_{i+j}(G)$.

Demonstração. Vamos mostrar este fato por indução em i. Para $i = 1$ temos que $[\gamma_1(G), \gamma_j(G)] = \gamma_{1+j}(G)$ e o resultado segue. Façamos $i \geq 2$ e suponhamos sem perda de generalidade que $\gamma_{i+j}(G) = 1$. Por indução obtemos que

$$[\gamma_{i-1}(G), \gamma_j(G), \gamma_1(G)] = [\gamma_{j+i-1}(G), \gamma_1(G)] \subseteq \gamma_{i+j}(G) = 1$$

e

$$[\gamma_j(G), \gamma_1(G), \gamma_{i-1}(G)] = [\gamma_{j+1}(G), \gamma_{i-1}(G)] \subseteq \gamma_{i+j}(G) = 1.$$

Pelo Lema dos três subgrupos segue que

$$[\gamma_1(G), \gamma_{i-1}(G), \gamma_j(G)] = 1,$$

ou seja, $[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] = 1$. □

Lema 1.1.5. *Sejam G um grupo e k um número natural. Então*

a) $\gamma_k(G)$ *contém todos os comutadores de peso maior ou igual a k em elementos de G;*

b) $\gamma_k(G)$ *é gerado pelos comutadores simples de peso maior ou igual a k em elementos de G;*

c) Se $G = \langle M \rangle$ *então* $\gamma_k(G)$ *é gerado pelos comutadores simples de peso k em elementos de M e seus inversos;*

d) $G^{(k)} \subseteq \gamma_{2^k}(G)$.

Demonstração. $a)$ Vamos aplicar indução em k. Para $k=1$ é imediato. Façamos $k \geq 2$ e seja c um comutador de peso $r \geq k$. Então $c = [c_1, c_2]$, sendo c_1 e c_2 comutadores de peso r_1 e r_2, respectivamente, com $r_1 + r_2 = r$. Pela hipótese de indução $c_1 \in \gamma_{r_1}(G)$ e $c_2 \in \gamma_{r_2}(G)$.

Assim, pelo Lema 1.1.4 segue que

$$c = [c_1, c_2] \in [\gamma_{r_1}(G), \gamma_{r_2}(G)] \leq \gamma_r(G) \leq \gamma_k(G).$$

$b)$ Façamos

$$N_k = \langle [x_1, x_2, \ldots, x_k] \mid x_i \in G,\ i = 1, 2, \ldots, k \rangle .$$

Uma vez que $[x_1, x_2, \ldots, x_k]^y = [x_1^y, x_2^y, \ldots, x_k^y]$ segue que N é um subgrupo normal de G. Pelo item $a)$ obtemos que N_k é subgrupo de $\gamma_k(G)$. Vamos mostrar a inclusão contrária por indução em k. Para $k=1$ é imediato.

Suponhamos que $k \geq 2$. As imagens de todos comutadores $[x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}]$ de peso $k-1$ estão no centro do grupo quociente G/N_k uma vez que $[[x_1, x_2, \ldots, x_k], x] \in N_k$ para todo $x \in G$. Assim $[N_{k-1}, G]$ é subgrupo de N_k. Logo

$$\gamma_k(G) = [\gamma_{k-1}(G), G] = [N_{k-1}, G] \leq N_k.$$

$c)$ De acordo com $b)$ temos que

$$\gamma_k(G) = \langle [x_1, x_2, \ldots, x_k] \mid x_i \in G,\ i = 1, 2, \ldots, k \rangle .$$

Podemos expressar cada um dos elementos x_i como um produto de elementos de M e seus inversos, pois M gera G. Aplicando o Lema 1.1.1 $c)$ e $d)$ obtemos o resultado desejado.

$d)$ Vamos aplicar indução em k. Para $k=0$ é imediato. Façamos $k \geq 1$. Pela hipótese de indução temos que $G^{(k-1)} \subseteq \gamma_{2^{k-1}}(G)$. Aplicando a definição de $G^{(k)}$ e o Lema 1.1.4 deduzimos que

$$G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}] \subseteq [\gamma_{2^{k-1}}(G), \gamma_{2^{k-1}}(G)] \subseteq \gamma_{2^k}(G).$$

□

Um grupo G possui *expoente finito (ou período finito)* n, se n é o menor número tal que $x^n = 1$, para todo $x \in G$.

Denotamos por $G^n = \langle g^n \mid g \in G \rangle$ o subgrupo de G gerado pelas n-ésimas potências de todos os seus elementos. É claro que G^n é um subgrupo característico de G, sendo o menor subgrupo normal de G para o qual o grupo quociente possui expoente n.

Dizemos que um grupo G é *extensão de um grupo* N por um grupo Q se existe um subgrupo normal M de G tal que M é isomorfo a N e G/M é isomorfo a Q.

O *Teorema de Schreier* afirma que um subgrupo de índice finito m de um grupo finitamente gerado por n elementos é finitamente gerado por $1 + (n-1)m$ elementos.

Um grupo G é chamado *periódico* se todo elemento de G possui ordem finita.

Uma *classe de grupos* $\mathscr{C}$ é um conjunto no qual os membros são grupos tais que

a) $\mathscr{C}$ contém um grupo de ordem 1;

b) Se $G_1 \cong G \in \mathscr{C}$ implica que $G_1 \in \mathscr{C}$.

Todos os grupos finitos e todos os grupos abelianos são exemplos de classes de grupos.

Uma *variedade* é uma classe de grupos definida por identidades. A classe de todos os grupos abelianos é um exemplo de variedade, uma vez que seus membros são apenas os grupos que satisfazem a lei $xy = yx$. Seja $F(X)$ um grupo livre com geradores em um conjunto finito $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Define-se uma palavra no alfabeto X como sendo uma sequência finita dos símbolos de $X \cup X^{-1}$. Para maiores detalhes com relação a estes conceitos ver por exemplo [27, 2].

Uma *palavra* w em um *alfabeto* $x_1, x_2, \ldots$, é chamada uma *lei* na classe de grupos $\mathscr{C}$ se para todo grupo $G \in \mathscr{C}$, w se torna trivial sempre que avaliada nos argumentos $x_1, x_2, \ldots$ pertencentes a G, ou seja, se $w = w(x_1, \ldots, x_n)$ então $w(g_1, \ldots g_n) = 1$ para todo $g_i \in G$, e para todo $G \in \mathscr{C}$.

Sejam W um conjunto de palavras no alfabeto $x_1, x_2, \ldots$ e G um grupo. Os valores tomados pelas palavras em W com os argumentos $x_1, x_2, \ldots$, percorrendo todo o grupo G, em geral não são todos triviais. O subgrupo $W(G)$ gerado por esses valores é chamado o *subgrupo verbal de*

G relativo a W. Assim

$$W(G) = \left\langle w(g_1, \ldots, g_{n(w)}) \mid w \in W, g_i \in G \right\rangle.$$

Como exemplos de subgrupos verbais de um grupo G podemos citar o grupo derivado de G e a n-ésima potência de G. Eles são definidos pelas palavras $[x,y]$ e x^n, respectivamente. No primeiro caso, temos $W(G) = G'$ e, no segundo, $W(G) = G^n$.

Dizemos que um grupo G é produto semidireto de K por H, denotado por $G = K \rtimes H$, se $K \trianglelefteq G$ e K tem um complemento $Q_1 \cong H$. Também dizemos que G é *split* sobre K.

Definição 1.1.6. Um módulo sobre um anel comutativo com identidade K é um grupo aditivo M que admite uma multiplicação por elementos de K, satisfazendo os seguintes axiomas:

a) $1a = a, \quad 1 \in K, a \in M$;

a) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a, \quad \alpha, \beta \in K, a \in M$;

a) $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b, \quad \alpha \in K, a, b \in M$;

a) $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a), \quad \alpha \in K, a, b \in M$.

A partir da definição acima vemos que módulos sobre um corpo K são precisamente espaços vetoriais sobre K. Desta forma todo grupo abeliano pode ser visto como um $\mathbb{Z}$-módulo de modo natural: para $k > 0$

$$ka = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{k}, \quad (-k)a = k(-a) = -ka \quad \text{e} \quad 0a = 0.$$

1.2 Grupos Solúveis e Grupos Nilpotentes

As generalizações mais importantes de comutatividade são solubilidade e nilpotência. Os grupos solúveis são aqueles que podem ser construídos a partir dos grupos abelianos por meio de um número finito de extensões sucessivas. Vamos utilizar os fatos acerca de comutadores obtidos na seção anterior para apresentarmos resultados sobre grupos solúveis e nilpotentes.

Definição 1.2.1. Um grupo G é dito *solúvel* se possui uma cadeia de subgrupos

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G$$

com G_i normal em G_{i+1} para todo $i = 0, \ldots, n-1$ e quocientes G_{i+1}/G_i abelianos, para todo $i = 0, \ldots, n-1$.

Uma cadeia de subgrupos de G com a propriedade mencionada acima é chamada *série solúvel* de G. Se G é um grupo solúvel, o comprimento da menor série solúvel de G é chamado *comprimento derivado* de G. Recordamos nos próximos dois lemas algumas propriedades elementares dos grupos solúveis cujas demonstrações podem ser encontradas em [27, 5.1].

Lema 1.2.2. *A classe de grupos solúveis é fechada com respeito à formação de subgrupos, imagens homomórficas e extensões de seus membros.*

Lema 1.2.3. *O produto de dois subgrupos normais solúveis de um grupo G é um subgrupo solúvel de G.*

Seja G um grupo. Uma série normal

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G$$

é chamada uma *série central* de G se todos os seus quocientes são centrais, isto é,

$$G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i) \text{ para todo } i = 0, \cdots, n-1,$$

ou equivalentemente, se

$$[G_{i+1}, G] \leq G_i, \text{ para todo } i = 0, \cdots, n-1.$$

Definição 1.2.4. Um grupo G é dito ser *nilpotente* quando ele possui uma série central.

O comprimento da menor série central de um grupo nilpotente G é chamado *classe de nilpotência* de G. Observamos que a classe dos grupos nilpotentes é intermediária entre as classes dos grupos abelianos e dos grupos solúveis, o que pode ser visto a partir da definição acima. Desta forma os grupos abelianos são os grupos nilpotentes de classe 1.

A classe dos grupos nilpotentes é fechada com relação à formação de subgrupos, imagens homomórficas e produtos diretos finitos.

Os próximos resultados fornecem algumas caracterizações de solubilidade e nilpotência e são enunciados sem demonstração. Para maiores detalhes ver [27, 5.1,5.2].

Lema 1.2.5. *Para um grupo G as seguintes afirmações são equivalentes.*

a) *G é solúvel de comprimento derivado n*;

b) $G^{(n)} = 1$;

c) *G satisfaz a identidade*

$$\delta_n(x_1,\dots,x_{2^n}) = 1,\ n = 1,2,\dots,$$

com δ_n definido indutivamente da seguinte forma:

$$\delta_0(x) = x,$$

$$\delta_{n+1}(x_1,\dots,x_{2^{n+1}}) = [\delta_n(x_1,\dots,x_{2^n}),\delta_n(x_{2^n+1},\dots,x_{2^{n+1}})].$$

Lema 1.2.6. *Para um grupo G as seguintes afirmações são equivalentes.*

a) $\gamma_{c+1}(G) = 1$;

b) $Z_c(G) = G$;

c) *G possui uma série central de comprimento c;*

d) *Para quaisquer $c+1$ elementos $x_1,x_2,\dots,x_{c+1} \in G$ temos que*

$$[x_1,x_2,\cdots,x_{c+1}] = 1.$$

Corolário 1.2.7. *Seja G um grupo cuja classe de nilpotência é no máximo $2^k - 1$. Então G é solúvel de comprimento derivado menor ou igual a k.*

Em Teoria de Grupos, o Teorema de Fitting constitui uma regra fundamental sendo apresentado a seguir.

Teorema 1.2.8. *(Fitting) Sejam G um grupo e M, N subgrupos normais nilpotentes de G. Se as classes de nilpotência de M e N são m e n respectivamente então MN é nilpotente de classe no máximo $m+n$.*

Demonstração. Vamos aplicar indução sobre $m+n$. Assumimos que $cl\ G = 0$ se, e somente se, $G = 1$. Sem perda de generalidade façamos $G = MN$. Uma vez que M e N são subgrupos normais de G então também o são $Z(M)$ e $Z(N)$. Por indução $G/Z(M)$ é nilpotente de classe no máximo $m+n-1$. Assim $\gamma_{m+n}(G) \subseteq Z(M)$. Analogamente $\gamma_{m+n}(G) \subseteq Z(N)$. Assim $\gamma_{m+n}(G) \subseteq Z(M) \cap Z(N)$. Como $Z(M) \cap Z(N) \subseteq Z(MN)$, então $\gamma_{m+n}(G) \subseteq Z(G)$ e o resultado segue. □

1.3 Produto Subcartesiano e Teorema de Remak

Sejam G_1 e G_2 grupos. O conjunto

$$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) \mid g_1 \in G_1, g_1 \in G_2\}$$

munido da multiplicação

$$(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$$

satisfaz a definição de grupo. Generalizando esta ideia, seja G_i, $i \in I$, uma família de grupos e denotemos por $G = \prod_{i \in I} G_i$ o conjunto

$$\{f : I \to \bigcup_{i \in I} G_i \mid f(i) \in G_i, \text{ para todo } i \in I\},$$

e definamos em G uma multiplicação dada por $(fg)(i) = f(i)g(i)$. Desta forma G possui estrutura de grupo, sendo chamado *produto cartesiano* dos grupos G_i.

Consideremos o subconjunto das funções f tais que $f(i) \neq 1$ (unidade) somente para um número finito de i's. Assim obtemos o chamado *produto direto* dos grupos G_i. A notação é a mesma fornecida acima para o caso do produto cartesiano.

Em $G = \prod\limits_{i \in I} G_i$ consideremos o subgrupo $A_i = \{f(j) = 1 \text{ se } j \neq i\}$. Temos que A_i é isomorfo a G_i. Desta forma podemos definir a projeção de f sobre o grupo G_k

$$\alpha_k : \prod_{i \in I} G_i \to G_k.$$

Se H é um subgrupo qualquer de $G = \prod_{i \in I} G_i$ podemos considerar $\alpha_k : H \to G_k$.

Definição 1.3.1. Sejam $G = \prod_{i \in I} G_i$ e H um subgrupo de G tal que $\alpha_k(H) = G_k$ para todo $k \in I$. Dizemos que H é um *produto subcartesiano* dos grupos G_i.

Teorema 1.3.2. *(Remak) Sejam G um grupo e $\{N_i \mid i \in I\}$ uma família de subgrupos normais de G. Seja $N = \bigcap_{i \in I} N_i$. Então G/N é um produto subcartesiano dos grupos G/N_i.*

Demonstração. Consideremos

$$\begin{aligned} \vartheta : G &\to \prod_{i \in I} G/N_i \\ x &\mapsto \vartheta(x) = (\ldots, xN_i, \ldots). \end{aligned}$$

Temos que ϑ é um homomorfismo com $\mathrm{Ker}\vartheta = N$ e o resultado segue. □

O teorema demonstrado acima foi enunciado pela primeira vez em 1909 por Wedderburn, mas sua demonstração continha um erro. A primeira demonstração correta, para grupos finitos, foi apresentada por Remak em 1911, com uma simplificação de Schmidt em 1912. Este teorema foi estendido para módulos por W. Krull em 1925 e para grupos com operadores por Schmidt em 1928.

1.4 Teorema de Schur

Nesta seção demonstramos o Teorema de Schur. Para isto necessitamos dos conceitos de transversal e de Homorfismo Transfer que são apresentados a seguir.

Definição 1.4.1. Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Um *transversal à esquerda (à direita)* de H em G é um subconjunto de G que consiste de um elemento de cada classe lateral à esquerda (à direita) de H em G.

Definição 1.4.2. Sejam G um grupo e H um subgrupo com índice finito n em G. Consideremos a função ϑ de G em H/H' definida por

$$\begin{array}{rcl}\vartheta : G & \to & H/H' \\ g & \mapsto & \vartheta(g) = \prod_{i=1}^{n} x_i H',\end{array}$$

sendo $\{l_1, \dots, l_n\}$ um transversal à esquerda de H em G e $gl_i = l_j x_i$. A função ϑ é um homomorfismo chamado *Homomorfismo Transfer*.

Observamos que a aplicação ϑ de G em H/H' é um homomorfismo de grupos que não depende da escolha do transversal. Uma aplicação do Homomorfismo Transfer de interesse especial ocorre quando H é central em G, conforme o teorema abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em [27, 10.1.3].

Teorema 1.4.3. *Sejam G um grupo e H um subgrupo do centro de G tal que $|G : H| = n$. Então o Homomorfismo Tranfer de G em H é a aplicação*

$$\begin{array}{rcl}\vartheta : G & \to & H \\ x & \mapsto & x^n.\end{array}$$

Agora estamos em condições de obter o principal teorema desta seção.

Teorema 1.4.4. *(Schur) Seja G um grupo tal que $Z(G)$ possui índice finito n. Então o grupo derivado de G é finito de ordem $\{n\}$-limitada e possui expoente n.*

Demonstração. Façamos $Z = Z(G)$ e consideremos G como união de classes de Z. Assim

$$G = g_1 Z \cup g_2 Z \cup \cdots \cup g_n Z.$$

Utilizando as identidades de comutadores apresentadas no Lema 1.1.1 $c)$ e $d)$, obtemos que, para quaisquer elementos $z_k, z_l \in Z$, $[z_k g_i, z_l g_j] = [g_i, g_j]$, para todos $i, j = 1, \dots, n$. Desta forma podemos assumir que $G = \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$ com um total de $\binom{n}{2}$ comutadores $[g_i, g_j]$ para $i < j$.

Por hipótese Z é um grupo de índice finito n em G e temos que G é finitamente gerado por n elementos, desta forma obtemos pelo Teorema de Schreier que Z é finitamente gerado por uma quantidade $\{n\}$-limitada de elementos. Dados $g \in G$ e $i = 1,\ldots,n$, façamos $g_i g = z_i(g) g_{i(g)}$, com $z_i(g) \in Z$, e $g_{i(g)} \in \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Segue que a aplicação

$$\begin{aligned} \vartheta : G &\rightarrow Z \\ g &\mapsto \prod_{i=1}^{n} z_i(g) \end{aligned}$$

é o Homomorfismo Transfer de G em Z e pelo Teorema 1.4.3 temos que $\vartheta(z) = z^n$ para todo $z \in Z$.

Como $G/\mathrm{Ker}\,\vartheta$ é isomorfo a um subgrupo de Z, que é abeliano, logo $G' \subseteq \mathrm{Ker}\,\vartheta$ e consequentemente G' possui expoente n. Assim

$$\vartheta(G' \cap Z) = (G' \cap Z)^n = 1,$$

e o expoente de $(G' \cap Z)$ divide n. Como Z é abeliano finitamente gerado segue que $G' \cap Z$ é finitamente gerado com ordem $\{n\}$-limitada. Uma vez que $G'/G' \cap Z \cong G'Z/Z \leq G/Z$, temos que $|G' : G' \cap Z| \leq |G : Z| = n$. Assim de $|G'| = |G' : G' \cap Z| \cdot |G' \cap Z|$ concluímos que G' é finito de ordem $\{n\}$-limitada. $\square$

Definição 1.4.5. Dizemos que um grupo G é *localmente* finito se qualquer subgrupo finitamente gerado de G é finito.

Corolário 1.4.6. *Se $G/Z(G)$ é localmente finito então G' é localmente finito.*

Demonstração. Seja H um subgrupo finitamente gerado de G', com $H = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$. Pela demonstração do Teorema 1.4.4 temos que $x_i = \prod_{j=1}^{r} c_{ji}$ com $c_{ji} = [g_{ji}, l_{ij}]$, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,r$. Desta forma, H é subgrupo de K', com $K = \left\langle g_{ji}, l_{ij} \mid i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,r \right\rangle$ é finitamente gerado. Assim $K/(K \cap Z(G))$ é finitamente gerado, consequentemente finito. Observando que $K \cap Z(G)$ é subgrupo de $Z(K)$, obtemos que $K/Z(K)$ é finito. Por fim, pelo Teorema 1.4.4 concluímos que K' é finito. Como H é subgrupo de K' segue que G' é localmente finito. $\square$

Como uma generalização do Teorema de Schur podemos citar o resultado abaixo.

Proposição 1.4.7. *Seja G um grupo solúvel tal que $G/Z(G)$ é de expoente finito. Então G' é (localmente finito) de expoente finito.*

Demonstração. Sejam a,b elementos arbitrários G, n o expoente de G e $H = \langle a,b \rangle$. Desta forma $H/Z(H)$ também possui expoente n e temos que $H/Z(H)$ é 2-gerado. Uma vez que $H/Z(H)$ também é solúvel por hipótese, concluímos que $|H/Z(H)|$ é limitado. Pelo Teorema de Schur 1.4.4 segue que $|H'|$ é limitado. Assim $|[a,b]|$ é limitado para todo $a,b \in G$. Seja k o comprimento derivado de G. Uma vez que todo quociente $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ é gerado por elementos da forma $[a,b]$ para todo $i = 1,\ldots,k-1$ logo o expoente de $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ é limitado para todo $i = 1,\ldots,k-1$. Portanto o expoente de G' é limitado. $\square$

Corolário 1.4.8. *Seja G um grupo nilpotente de classe c tal que G/G' possui expoente d. Então G tem expoente $\{d,c\}$-limitado.*

Demonstração. Vamos aplicar indução sobre a classe de nilpotência c de G. Para G abeliano é imediato. Suponhamos que o resultado seja válido para $c-1$ e mostremos para c. Seja $M = G/Z(G)$. Temos que M é nilpotente de classe $c-1$ e M possui expoente $\{d,c\}$-limitado. Aplicando o Teorema de Schur 1.4.4 obtemos que G' também possui expoente $\{d,c\}$-limitado, o que conclui a demonstração, pois $\exp G \leq \exp G' \cdot \exp G/G'$. $\square$

1.5 Representações e Teorema de Maschke

Discorremos brevemente sobre alguns fatos básicos da Teoria de Representações Lineares, com o objetivo de apresentar o Teorema de Maschke sobre redutibilidade completa de certas representações de grupos finitos. Esta seção é baseada em textos apresentados em [15, 7.20.2] e [6, 3.2 e 3.3].

Sejam K um corpo, V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre K e $GL(V)$ um grupo de transformações
lineares invertíveis de V. Um homorfismo $\rho : G \to GL(V)$ é dito uma *representação linear* de G. O inteiro n é dito *grau da representação ρ*.

Se V contém um subespaço próprio G-invariante, então G é chamado *redutível*. Caso contrário G é dito ser *irredutível*. O grupo G é *completamente redutível* se todo subespaço G-invariante $U \subseteq V$ possui como complemento um subespaço G-invariante, ou seja, se existe um subespaço G-invariante W tal que $V = U \oplus W$.

Lembramos que $GL(V)$ pode ser identificado com $GL(n,K)$, grupo das matrizes $n \times n$ invertíveis com coeficientes em K. Se o grupo G^ρ de transformações lineares é irredutível então dizemos que ρ é *irredutível*. Para os termos redutível e completamente irredutível a identificação ocorre de forma análoga. Uma *representação linear* de um grupo G é apenas um homomorfismo ρ de G para o grupo de transformações lineares invertíveis de um espaço vetorial V de dimensão n sobre um corpo K.

O próximo resultado estabelece propriedades de representações irredutíveis de grupos abelianos e sua demonstração pode ser encontrada em [6, Teorema 3.2.3].

Teorema 1.5.1. *Se ρ é uma representação irredutível de um grupo abeliano G com núcleo N, então G/N é cíclico. Em particular, um grupo abeliano não cíclico não possui uma representação fiel irredutível.*

Agora vamos estabelecer uma condição suficiente para uma representação ser completamente redutível.

Teorema 1.5.2. *(Maschke) Seja ρ uma representação do grupo finito G por transformações lineares do espaço vetorial V sobre o corpo K. Se a ordem de G não é divisível pela característica de K, então ρ é completamente redutível.*

Demonstração. A representação ρ fornece uma ação de G sobre V e denotamos $(v)g^\rho$ por vg, para $v \in V, g \in G$. Identifiquemos por U um subespaço G-invariante de V e por W um subespaço qualquer de V que complementa U, isto é, $V = U \oplus W$.

Denotemos por π_W a projeção de V em W e definamos uma aplicação t de V em V por

$$\begin{array}{rcl} t : V & \to & V \\ v & \mapsto & vt = \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{g \in G} (vg^{-1}) \pi_W g, \end{array}$$

com m sendo a ordem de G. Temos que t é uma transformação linear de V. Para cada elemento h fixo pertencente a G, o produto gh percorre todo o grupo G assim como g percorre o grupo G. Segue deste fato que

$$(vt)h = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} (vh \cdot h^{-1} g^{-1}) \pi_W gh = (vh)t,$$

assim o subespaço V_t, gerado pelas imagens de V pela aplicação t, é G-invariante. Vamos mostrar que $V = U \oplus V_t$.

Dado um elemento arbitrário $v \in V$ temos que $v = (v - vt) + vt$. O termo vt pertence a V_t, pelo demonstrado no parágrafo anterior. Desta forma o termo $v - vt$ pode ser escrito da seguinte forma $v - vt = v - \frac{1}{m}\sum_{g\in G}(vg^{-1})\pi_W g = \frac{1}{m}\sum_{g\in G}(vg^{-1} - (vg^{-1})\pi_W)g$.

Uma vez que $vg^{-1} - (vg^{-1})\pi_W \in U$, e U é G-invariante, segue que $v - vt \in U$. Assim temos que $V = U + V_t$. Suponhamos que exista $v \in U \cap V_t$. Então como U é G-invariante e para todo elemento $u \in U$, temos que $u\pi_W = 0$, então $vt = 0$.

Por outro lado, como $v \in V_t$, v é imagem de algum elemento $v' \in V$ pela t, ou seja, $v't = v$. Então $v't^2 = vt$. Como $v' - v't \in U$, consequentemente $v't - v't^2 = 0$. Assim $v't = vt$, e $0 = vt = v't = v$. Desta forma $V = U \oplus V_t$. $\square$

Capítulo 2

Automorfismos Coprimos e Teorema de Schur-Zassenhaus

Trabalhando com grupos finitos, frequentemente encontramos a situação na qual um grupo admite um automorfismo cuja ordem é coprima com a ordem daquele grupo. Tal automorfismo é chamado *coprimo*. Neste capítulo fazemos uma abordagem sobre estes automorfismos baseada em [6, 5.3].

2.1 Automorfismos Coprimos

Sejam G um grupo finito e a um automorfismo de G. Denotamos por $C_G(a)$ o conjunto de todos os elementos de G fixados por a, ou seja,

$$C_G(a) = \{x \in G \mid x^a = x\}.$$

É fácil ver que $C_G(a)$ é um subgrupo de G. No caso em que $C_G(a) = 1$, dizemos que a é *livre de pontos fixos*.

O resultado a seguir é um exemplo da influência que $C_G(a)$ exerce sobre a estrutura de G.

Lema 2.1.1. *Seja G um grupo finito admitindo um automorfismo livre de pontos fixos a de ordem 2. Então G é abeliano.*

Demonstração. Seja τ a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \tau : G & \to & G \\ x & \mapsto & x^\tau = x^{-1}x^a. \end{array}$$

Para $x, y \in G$ temos que $x^\tau = y^\tau$ implica que $xy^{-1} \in C_G(a) = 1$. Então τ é injetora. Desta forma τ é sobrejetora, ou seja, cada elemento de G pode ser representado como x^τ, para $x \in G$ conveniente. Notemos que a aplica x em seu inverso. De fato,

$$(x^\tau) = (x^{-1}x^a)^a = x^{-a}x = (x^\tau)^{-1}.$$

Assim a aplica todo elemento de G em seu inverso. Portanto G é abeliano. □

Provavelmente Burnside foi o primeiro a notar que a existência de automorfismos livre de pontos fixos implica em fortes conclusões sobre um grupo. Em seu livro de 1902 [3] há uma demonstração do fato mencionado acima.

Lema 2.1.2. *Sejam G um grupo de ordem ímpar admitindo um automorfismo a de ordem 2 e $I = \{x \mid x^a = x^{-1}$ para todo $x \in G\}$. Então são válidas as seguinte afirmações.*

a) $G = C_G(a)I = IC_G(a)$, $I \cap C_G(a) = \{1\}$ *e* $|I| = |G : C_G(a)|$;

b) *I é invariante por $C_G(a)$;*

c) *Se $H \subseteq C_G(a)$ é tal que $H^x \subseteq C_G(a)$ para todo $x \in I$, então x centraliza H;*

d) *Dois elementos de $C_G(a)$ conjugados em G são conjugados em $C_G(a)$;*

e) *Se $H \leq C_G(a)$, então $N_G(H) = C_G(H)N_{C_G(a)}(H)$;*

f) *Se $H \leq I$, então H é abeliano.*

Demonstração. a) Dado $x \in G$, temos que todo elemento da forma $y = x^{-1}x^a$ pertence a I, pois

$$y^a = (x^{-1})^a x^{a^2} = (x^a)^{-1}x = y^{-1}.$$

Suponhamos que $|G : C_G(a)| = n$ e denotemos $C_G(a)$ por C. Consideremos G como união de classes de C. Assim

$$G = Cg_1 \cup Cg_2 \cup \cdots \cup Cg_n.$$

Façamos $y_i = g_i^{-1} g_i^a \in I$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Vamos mostrar que $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ é um conjunto completo de representantes de classes laterais à direita de C em G. Caso contrário, existe $i \neq j$, tal que $y_j = zy_i$, $z \in C$. Aplicando a obtemos $y_j^{-1} = zy_i^{-1}$, então $y_j = y_i z^{-1}$. Assim $y_i z^{-1} = zy_i$ e $z^{y_i} = z^{-1}$, o que permite concluirmos que

$$z^{y_i^2} = z \text{ e } y_i^2 \text{ centraliza } z.$$

Uma vez que G é de ordem ímpar, segue que y_i centraliza z. Então de $zy_i = y_i z^{-1}$ segue que $z = z^{-1}$. Como z também é de ordem ímpar, obtemos que $z = 1$ e $y_i = y_j$.

Desta forma $g_i^{-1} g_i^a = g_j^{-1} g_j^a$ então $g_i g_j^{-1} = (g_i g_j^{-1})^a$. Assim $g_i g_j^{-1} \in C$ e consequentemente g_i e g_j determinam a mesma classe de C, o que ocorre somente quando $i = j$. Portanto $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ é um conjunto completo de representantes de classes laterais à direita de C em G.

Suponhamos que $u = zy_i$ para algum $z \in C$ e para algum i. Então $u^a = (zy_i)^a = zy_i^{-1}$ e $zy_i^{-1} = zy_i$. Assim $z = 1$.
Pelo exposto, segue que $I = \{y_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Assim $G = CI$ e $|I| = |G : C|$. Com cálculos análogos utilizando classes laterais à esquerda obtemos que $G = IC$. Tomemos $z \in C \cap I$, então $z = z^{-1}$ e então $z = 1$. Portanto $C \cap I = 1$.

$b)$ Tomemos $z \in C$ e $x \in I$. Então $(x^z)^a = (x^z)^{-1}$, logo $x^z \in I$. Desta forma I é C-invariante.

$c)$ Suponhamos que $H \subseteq C$ é tal que $H^x \subseteq C$ para $x \in I$. Seja z um elemento arbitrário de H. Assim $z^x \in C$ e $z^x = (z^x)^a = xzx^{-1}$. Desta forma x^2 centraliza z, e como x é de ordem ímpar, segue que x centraliza z.

$d)$ Sejam $x_1, x_2 \in C$ tais que $x_2 = x_1^x$ para algum $x \in G$. Por $a)$ segue que $x = yz$, para $y \in I$ e $z \in C$, logo $x_1^y = x_2^{z^{-1}} \in C$. Então por $c)$ temos que y centraliza x_1 e portanto $x_2 = x_1^z$.

$e)$ Uma vez que H é a-invariante então o mesmo é válido para $N_G(H)$. Assim, por $a)$ segue que $N_G(H) = (N_G(H) \cap I)(N_G(H) \cap C) = (N_G(H) \cap I) N_{C_G(a)}(H)$. Como $H^{N_G(H) \cap I} = H \subseteq C$, por c) obtemos que $N_G(H) \cap I$ centraliza H. Lembrando que $N_G(H) \cap C = N_C(H)$, segue o resultado.

f) Temos que a induz um automorfismo livre de pontos fixos de H de ordem 2. Pelo Lema 2.1.1 segue que H é abeliano. □

Corolário 2.1.3. *Seja G um grupo finito de ordem ímpar admitindo um automorfismo a de ordem 2 tal que $G = [G, a]$. Suponhamos que N é um subgrupo normal a-invariante de G tal que $C_N(a) = 1$. Então $N \leq Z(G)$.*

A demonstração do resultado abaixo pode ser encontrada em [6, Teorema 5.3.15].

Teorema 2.1.4. *Sejam A um p'-grupo de automorfismos de um p-grupo P e H um subgrupo normal A-invariante de P. Então $C_{P/H}(A)$ é imagem de $C_P(A)$ em P/H. Em particular, se A é um grupo regular de automorfismos de P então A é um grupo regular de automorfismos de P/H.*

Teorema 2.1.5. *Sejam P um p-grupo e Q um q-grupo abeliano não cíclico de automorfismos de P, tais que p e q são distintos. Então*

$$P = \prod_{x \in Q^{\#}} C_P(x).$$

Em particular, P é gerado por seus subgrupos $C_P(x)$ tais que $x \in Q^{\#}$.

Demonstração. Suponhamos que P é um p-grupo abeliano elementar. Podemos considerar P como um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_p$ e ver P como um Q-módulo. Uma vez que $p \neq q$, temos pelo Teorema de Maschke que P é um Q-módulo completamente redutível. Logo

$$P = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n,$$

e P_i é um Q-submódulo irredutível de P, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Como Q é abeliano, pelo Teorema 1.5.1 segue que Q/Q_i é cíclico, no qual Q_i denota o núcleo da representação de Q sobre P_i. Como Q é não cíclico, implica que $Q_i \neq 1$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Escolhendo $x_i \in Q_i^{\#}$, temos que $P_i \subseteq C_P(x_i)$, assim

$$P = \sum_{i=1}^{n} C_P(x_i) \subseteq \prod_{x \in Q^\#} C_P(x).$$

Passando para a notação multiplicativa o resultado segue quando P é um p-grupo abeliano elementar. Suponhamos que P é um p-grupo arbitrário. Vamos demonstrar o resultado por indução sobre a ordem de P. Façamos $Z = Z(P)^p = \langle x \in Z(P) \mid x^p = 1 \rangle$. Pelo parágrafo acima segue que $C_Z(x_j) \neq 1$ para algum j.

Assim pela hipótese de indução o teorema é válido em $\overline{P} = P/C_Z(x_j)$. Como $C_P(x_i)$ é uma aplicação sobrejetora em $C_{\overline{P}}(x_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$, pelo teorema anterior obtemos que $P = C_Z(x_j)\prod_{i=1}^{n} C_P(x_i)$. Como $C_Z(x_j) \subseteq C_P(x_j) \cap Z(P)$, logo $P = \prod_{x \in Q^\#} C_P(x)$. □

2.2 Teorema de Schur-Zassenhaus

Nesta seção o termo "grupo" significa "grupo finito".

Sejam G um grupo e π um conjunto não vazio de primos. O grupo G é dito um *π-grupo* se a ordem de G é divisível somente pelos primos em π.

Definição 2.2.1. Sejam G um grupo e π um conjunto não vazio de primos. Um subgrupo H de G é chamado *S_π-subgrupo* de G se H é um π-grupo e $|G : H|$ não é divisível por nenhum primo em π.

Para $\pi = \{p\}$, o subgrupo H da definição acima correponde a um p-subgrupo de Sylow de G e neste caso denotamos por S_p-subgrupo. Dado um grupo G o Teorema de Sylow garante que G possui um S_p-subgrupo e que quaisquer dois S_p-subgrupos são conjugados em G.

Para o caso de π ser um conjunto arbitrário de primos tais que o produto de seus termos divida a ordem de G pode ocorrer que S_π-subgrupos de G não existam. Como exemplo podemos citar um $S_{\{3,5\}}$-subgrupo de A_5, que deveria ter índice 4, mas A_5 não possui subgrupos de índice 4. Da mesma forma pode ocorrer que no caso de existirem S_π-subgrupos em G eles não sejam conjugados em G.

Com estas observações enunciamos o próximo resultado que é considerado um dos resultados fundamentais mais relevantes em Teoria de Grupos e cuja demonstração pode ser encontrada em [6, Teorema 6.2.1.].

Teorema 2.2.2. *(Schur-Zassenhaus) Sejam G um grupo e H um subgrupo normal de G tais que $|H|$ e $|G:H|$ são relativamente primos. Então G possui subgrupos de ordem $|G:H|$ e quaisquer dois desses subgrupos são conjugados em G.*

Com a terminologia a seguir podemos fornecer outra formulação para o Teorema 2.2.2.

Definição 2.2.3. Seja K um subgrupo, não necessariamente normal, de um grupo G. Então um subgrupo H de G é um *complemento* de K em G se $K \cap H = 1$ e $KH = G$.

Um subgrupo K de um grupo G não necessariamente possui um complemento, e caso possua, não precisa ser único. Em S_3 por exemplo, todo subgrupo de ordem 2 é um complemento para A_3. Por outro lado, caso existam complementos, eles são isomorfos, pois

$$G/K = KH/K \cong H/(K \cap H) \cong H.$$

Seja H um S_π-subgrupo de G tal que K é um complemento de H em G, então $|K| = |G:H|$ e $|H| = |G:K|$. Desta forma obtemos que K é um $S_{\pi'}$-subgrupo de G, ou seja, $|K|$ não é divisível por nenhum primo que esteja no conjunto π. Reciprocamente, se H é um S_π-subgrupo de G e K é um $S_{\pi'}$-subgrupo de G então $G = HK$, com $H \cap K = 1$, sendo complemento um do outro.

Com a terminologia acima vemos que o Teorema 2.2.2 afirma que complementos de H existem e que quaisquer dois deles são conjugados em G. Assim, outra formulação para o Teorema 2.2.2 é a seguinte: se π' é o conjunto de divisores primos de $|G:H|$, então $S_{\pi'}$-subgrupos de G existem e quaisquer dois deles são conjugados em G.

O Teorema de Schur-Zassenhaus possui importantes consequências, algumas das quais estão listadas nos teoremas a seguir.

Teorema 2.2.4. *Sejam G um π-grupo e A um π'-grupo de automorfismos de G. Suponhamos que G ou A é solúvel. Então para cada primo $p \in \pi$, temos que*

a) A deixa invariante algum S_p-subgrupo de G invariante;

b) Quaisquer S_p-subgrupos A-invariantes de G são conjugados por algum elemento de $C_G(A)$;

c) Qualquer p-subgrupo A-invariante de G está contido em algum S_p-subgrupo A-invariante de G;

d) Se N é um subgrupo normal A-invariante de G, então $C_{G/N}(A) = C_G(A)N/N$.

Demonstração. $a)$Seja M o produto semidireto de G por A. Então G é um S_π-subgrupo normal de M e A é um $S_{\pi'}$-subgrupo de M. Como A é isomorfo a M/G, então G ou M/G é solúvel. Assim pelo Teorema de Schur-Zassenhaus, qualquer outro $S_{\pi'}$-subgrupo de M é conjugado a A. Como $M = G \rtimes A$, podemos assumir que o elemento conjugante pertence a G.

Seja P um S_p-subgrupo de G. Então $M = GN_M(P)$. Assim $N_M(P)/G \cap N_M(P)$ é isomorfo a M/G e consequentemente é isomorfo a A. Como $G \cap N_M(P)$ é um S_π-subgrupo normal de $N_M(P)$, o Teorema de Schur-Zassenhaus garante que $N_M(P)$ possui um $S_{\pi'}$-subgrupo B. Então B é um $S_{\pi'}$-subgrupo de M e então $B^x = A$ para algum $x \in G$. Entretanto, B deixa P invariante pois $B \subseteq N_M(P)$, e consequentemente A deixa o S_p-subgrupo P^x de G invariante.

$b)$ Suponhamos que A deixa invariantes dois S_p-subgrupos P e Q de G. Então $P = Q^x$ para algum $x \in G$ e consequentemente A^x deixa $Q^x = P$ invariante. Uma vez que A também deixa P invariante, então tanto A quanto A^x estão em $N_M(P)$ e cada um deles é um $S_{\pi'}$-subgrupo de $N_M(P)$. Como $G \cap N_M(P)$ ou $N_M(P)/G \cap N_M(P)$ é solúvel, pelo Teorema de Schur-Zassenhaus segue que $(A^x)^y = A$ para algum elemento $y \in G \cap N_M(P)$.

Façamos $z = xy$, então $z \in G$. Como y normaliza P, consequentemente $Q^z = Q^{xy} = P^y = P$. Assim P e Q são conjugados por z. Por outro lado, $[A,z] \subseteq A$ pois $z = xy$ normaliza A. Mas $[A,z] \subseteq G$ pois G é um subgrupo normal de M . Assim $[A,z] \subseteq A \cap G = 1$. Portanto $z \in C_G(A)$.

$c)$ Sejam Q um p-subgrupo A-invariante de G e P um p-subgrupo A-invariante máximo de G que contém Q. Pelo Teorema de Schur-Zassenhaus $N_G(P)$ é A-invariante e por $a)$ existe um S_p-subgrupo A-invariante R de $N_G(P)$. Como $P \subseteq R$, consequentemente $R = P$ pois P foi escolhido máximo. Assim P é um S_p-subgrupo de G.

$d)$ Se uma classe xN contém um elemento de $C_G(A)$ então A deixa a classe xN invariante e então $xN \in C_{G/N}(A)$. Desta forma a inclusão $C_G(A)N/N \subseteq C_{G/N}(A)$ é verdadeira. Vamos mostrar a inclusão contrária verificando que toda classe xN possui um elemento de $C_G(A)$.

Suponhamos que A é de ordem prima p. Como o comprimento de qualquer A-órbita em G divide a ordem de A, segue que elas possuem comprimento 1 ou p. Suponhamos que xN

não possua elementos de $C_G(A)$. Então xN é a união de A-órbitas de comprimento p. Como a interseção de quaisquer A-órbitas é vazia, obtemos que p divide o número de elementos em xN. Por outro lado $|xN| = |N|$, que é coprimo com p. O que mostra que xN possui um elemento de $C_G(A)$.

Suponhamos que A é de ordem $p \cdot m$ não prima e vamos aplicar indução sobre a ordem de A. Façamos $B = A^p$ e suponhamos que xN é uma classe A-invariante. Então xN também é B-invariante. Desta forma, pela hipótese de indução, xN possui um elemento $x_0 \in C_G(B)$. Então $xN = x_0N$.

Denotemos por $\overline{A}$ o automorfismo de $C_G(B)$ induzido pela ação de A. Temos que $C_G(B)$ é A-invariante. Temos que a ordem de $\overline{A}$ é 1 ou p. A classe $x_0(N \cap C_G(B))$ é $\overline{A}$-invariante e possui um elemento x_1 que pertence a $C_{C_G(B)}(\overline{A})$. Uma vez que $x_0(N \cap C_G(B)) \subseteq x_0N = xN$ e $C_{C_G(B)}(\overline{A}) = C_G(A)$, obtemos que $xN = x_1N$, com $x_1 \in C_G(A)$. Portanto $xN \subseteq C_G(A)N/N$. $\square$

Corolário 2.2.5. *Seja G um grupo finito admitindo um grupo de automorfismos coprimo A. Então são válidas as seguintes afirmações.*

a) $G = C_G(A)[G,A]$;

b) $[G,A] = [G,A,A]$, *com* $[G,A,A] = [[G,A],A]$;

c) Se G é abeliano então $G = C_G(A) \oplus [G,A]$.

Demonstração. a) Façamos $N = [G,A]$. Pelo Teorema 2.2.4 d) temos que $C_{G/N}(A) = C_G(A)N/N$. Uma vez que A age trivialmente sobre o quociente G/N, segue que $C_{G/N}(A) = G/N$. Desta forma

$$C_G(A)N/N = G/N,$$

e $G = C_G(A)[G,A]$.

b) Temos pelo Lema 1.1.1 c) que

$$[G,A] = [[G,A]C_G(A),A] \subseteq \left\langle [[G,A],A]^{C_G(A)} \right\rangle [C_G(A),A] = [G,A,A].$$

c) Podemos aplicar o Teorema de Maschke, uma vez que G é abeliano e A é um automorfismo coprimo de G. Assim, existe um subgrupo A-invariante N de G tal que $G = C_G(A) \oplus N$. Como $C_N(A) = 0$, segue do item b) que $N = [N,A]$. Portanto

$$[G,A] = [C_G(A) \oplus N, A] \subseteq [C_G(A),A] + [N,A] = N \text{ e } G = C_G(A) \oplus [G,A].$$

□

Teorema 2.2.6. *Sejam G um grupo e A um p-grupo de automorfismos de G tal que $C_G(A) = 1$. Então G é um p'-grupo.*

Demonstração. Denotemos por M o produto semidireto de G por A e seja $\overline{P}$ um S_p-subgrupo de M que contém A. Como G é um subgrupo normal de M e $\overline{P}$ é um S_p-subgrupo de M então $P = \overline{P} \cap G$ é um S_p-subgrupo de G. Suponhamos que $P \neq 1$. Uma vez que todo subgrupo normal não trivial de um grupo nilpotente possui interseção não trivial com o centro do grupo e temos que $P \trianglelefteq \overline{P}$ então $P \cap Z(\overline{P}) \neq 1$. Como A centraliza $P \cap Z(\overline{P})$ segue que $C_G(A) \neq 1$, o que contraria a hipótese. Logo $P = 1$ e G é um p'-grupo. □

Teorema 2.2.7. *Sejam G um π-grupo e A um π'-grupo abeliano não cíclico de automorfismos de G. Então*

$$G = \left\langle C_G(a) \mid a \in A^{\#} \right\rangle.$$

Demonstração. Uma vez que A é não cíclico obtemos que algum S_q-subgrupo Q de A é não cíclico. Pelo Teorema 2.2.4 $a)$ segue que H deixa invariante algum S_p-subgrupo de G, para cada $p \in \pi(G)$. Pelo Teorema 2.1.5 temos que $P = \left\langle C_P(a) \mid a \in Q^{\#} \right\rangle$. Como G é gerado por um conjunto de S_p-subgrupos, com p percorrendo todos os primos em $\pi(G)$, obtemos que $G = \left\langle C_G(a) \mid a \in A^{\#} \right\rangle$. □

Capítulo 3

Álgebras de Lie Solúveis Graduadas

O principal objetivo neste capítulo é demonstrar o seguinte resultado

Teorema 3.0.1. *Sejam A o grupo elementar de ordem 2^n e L uma álgebra de Lie A-graduada solúvel de comprimento derivado k com $L_0 = 0$. Então L possui uma série de ideais*

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_n = L,$$

com quocientes G_i/G_{i-1} nilpotentes de classe $\{k,n\}$-limitada para todo $i = 1,\ldots,n$.

3.1 Definições Básicas sobre Álgebras de Lie

Definição 3.1.1. Sejam R um anel comutativo com unidade e L um R-módulo. Suponhamos que L esteja munido com uma operação

$$\begin{array}{ccc} L \times L & \to & L \\ (x,y) & \mapsto & [x,y]. \end{array}$$

O R-módulo L é dito uma *R-álgebra de Lie*, ou uma álgebra de Lie sobre R, se para quaisquer $x,y,z \in L$ e $a,b \in R$ são válidas as seguintes propriedades.

1) $[x,x] = 0$ para todo $x \in L$ (Anticomutatividade);

2) $[ax+by,z]=a[x,y]+b[y,z]$;

3) $[x,ay+bz]=a[x,y]+b[x,z]$;

4) $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$ (Identidade de Jacobi).

Por 1) segue que $[x+y,x+y]=0$. Assim, em qualquer álgebra de Lie temos que $[x,y]=-[y,x]$. Isto implica que o produto de Lie é uma aplicação R-bilinear antissimétrica.

Se U é um subconjunto qualquer de L denotamos por $\langle U\rangle$ a subálgebra de L gerada por U e por ${}_+\langle U\rangle$ o submódulo que U gera no grupo aditivo de L. Para U,V subconjuntos de L temos que

$$U+V=\{u+v \mid u\in U,\ v\in V\}$$

e

$$[U,V]={}_+\langle [u,v] \mid u\in U,\ v\in V\rangle .$$

Um R-submódulo I de L é dito um ideal de L se $[L,I]\subseteq I$, ou equivalentemente, $[I,L]\subseteq I$. Pela propriedade anticomutativa obtemos que as noções de ideais à esquerda, à direita e bilaterais coincidem em álgebras de Lie. Logo, se U e V são ideais de L então $U+V$ e $[U,V]$ também são ideais de L.

O *centralizador* $C_L(U)$ de U em L é definido por

$$C_L(U)=\{y\in L \mid [U,y]=0\}.$$

O *normalizador* de uma subálgebra U em L é denotado por

$$N_L(U)=\{y\in L \mid [U,y]\subseteq U\}.$$

Utilizando a Identidade de Jacobi obtemos que $C_L(U)$ e $N_L(U)$ são subálgebras de L. O centralizador $C_L(L)$ é denotado por $Z(L)$ sendo chamado *centro* de L.

Por analogia às definições em grupos obtemos a série central superior, série central inferior e série derivada de uma álgebra de Lie. Façamos

$$Z_0(L)=0,\ Z_1(L)=Z(L),$$

$$Z_{i+1}(L) = \{x \in L \mid [L,x] \subseteq Z_i(L)\}, \quad i = 0,1,\ldots.$$

A série
$$0 = Z_0(L) \subseteq Z_1(L) \subseteq \cdots \subseteq Z_i(L) \subseteq \cdots$$
é chamada a *série central superior* de L. Façamos

$$L^{(0)} = L,\ L^{(1)} = L' = [L,L],$$

$$L^{(i+1)} = [L^{(i)},L^{(i)}],\ i = 0,1,2,\ldots$$

e
$$\gamma_1(L) = L,$$

$$\gamma_{i+1}(L) = [\gamma_i(L),L],\ i = 1,2,\ldots.$$

As séries
$$L^{(0)} \supseteq L^{(1)} \supseteq \cdots \supseteq L^{(i)} \supseteq \cdots$$
e
$$\gamma_1(L) \supseteq \gamma_2(L) \supseteq \cdots \supseteq \gamma_i(L) \supseteq \cdots$$
são chamadas *série derivada de L* e *série central inferior de L*, respectivamente.

Também por analogia ao estudo de grupos, definimos os comutadores de peso maior ou igual a 1 em elementos de um subconjunto M de uma álgebra de Lie. Assim os comutadores de peso 1 em elementos de M são exatamente os elementos de M. Assumindo conhecida a definição de comutadores de peso menor ou igual a $w-1$ em elementos de M, então os comutadores de peso w são as expressões da forma $[c_1,c_2]$ nas quais c_1 e c_2 são comutadores de pesos w_1 e w_2 respectivamente, tais que $w_1+w_2 = w$.

Um comutador da forma $[\ldots[[x_1,x_2],x_3],\ldots,x_k]$ é denotado por $[x_1,x_2,\ldots,x_k]$ e chamado *simples*.

Os conceitos de solubilidade e nilpotência em álgebras de Lie são análogos àqueles obtidos em grupos. Estes são apresentados nas definições a seguir.

Definição 3.1.2. Uma álgebra de Lie é chamada solúvel se existe um inteiro k tal que $L^{(k)} = 0$. O menor número k tal que $L^{(k)} = 0$ é chamado comprimento derivado de L, sendo denotado por *dl L*.

Definição 3.1.3. Uma álgebra de Lie é chamada nilpotente se existe um inteiro k tal que $\gamma_{k+1}(L) = 0$ ou, equivalentemente, $Z_k(L) = L$. O menor número k tal que $\gamma_{k+1}(L) = 0$ é chamado a classe de nilpotência de L, sendo denotado por $cl\ L$.

Os teoremas seguintes são análogos aos resultados sobre grupos apresentados no Capítulo 1 e suas demonstrações são omitidas.

Teorema 3.1.4. *Seja L uma álgebra de Lie e k um inteiro positivo. Então são válidas as seguintes afirmações.*

a) *O ideal $\gamma_k(L)$ contém todos comutadores de peso $\geq k$ em elementos de L;*

b) *O subgrupo aditivo $\gamma_k(L)$ é gerado pelos comutadores simples de peso k em elementos de L;*

c) *Se $L = \langle M \rangle$, então o subgrupo aditivo $\gamma_k(L)$ é gerado pelos comutadores simples de peso $\geq k$ em elementos de M e seus inversos;*

d) *$L^{(k)} \subseteq \gamma_{2^k}(L)$. Em particular, se L é nilpotente de classe no máximo $2^k - 1$ então L é solúvel e seu comprimento derivado é no máximo k.*

Teorema 3.1.5. *As seguintes condições são equivalentes para uma álgebra de Lie.*

a) *$\gamma_{c+1}(L) = 0$;*

b) *L possui uma série central de comprimento c*

$$L = L_1 \geq L_2 \geq \ldots \geq L_c \geq L_{c+1} = 0,$$

tal que $[L_i, L] \leq L_{i+1}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, c$;

c) *A álgebra de Lie L satisfaz a identidade*

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{c+1}] = 0.$$

Teorema 3.1.6. *As seguintes condições são equivalentes para uma álgebra de Lie.*

a) $L^{(s)} = 0$;

b) L possui uma série de ideais de comprimento s com quocientes que comutam

$$L = L_1 \trianglerighteq L_2 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq L_{s-1} \trianglerighteq L_s = 0,$$

ou seja, tais que $[L_i, L_i] \leq L_{i+1}$ *para todo* $i = 1, 2, \ldots, s-1$;

c) L satisfaz a identidade

$$\delta_s(x_1, x_2, \ldots, x_{2^s}) = 0.$$

Definição 3.1.7. Seja G um grupo abeliano aditivo. Uma álgebra de Lie L é dita *G-graduada* ou tem uma *G-graduação*, se para cada elemento $g \in G$ corresponde um R-submódulo L_g do grupo aditivo de L tal que são válidas as seguintes condições.

1) $L = \oplus_{g \in G} L_g$;

2) $[L_x, L_y] \leq L_{x+y}$, para quaisquer $x, y \in G$.

Os submódulos L_x na definição acima são chamados componentes homogêneos de L.

3.2 Sobre a Estrutura de Álgebras de Lie Solúveis Graduadas

Sejam A um grupo aditivo elementar de ordem 2^n e L uma álgebra de Lie A-graduada. Uma subálgebra H de L é chamada *homogênea* se

$$H = \oplus_{a \in A} H_a, \text{ com } H_a = H \cap L_a \text{ para todo } a \in A.$$

Desta forma os termos da série derivada e da série central inferior de L são homogêneos. Se N é um ideal homogêneo de L, o quociente L/N herda a graduação de L de modo natural e então L/N pode ser visto como uma álgebra A-graduada.

Sejam A um grupo aditivo elementar de ordem 2^n e L uma álgebra de Lie A-graduada. Seja W um subgrupo de A. Denotamos por $L[W]$ a subálgebra de L gerada por todos L_a tais que

$a \in A \setminus W$, ou seja, $L[W] = \langle L_a \mid a \in A \setminus W \rangle$. Desta forma $L[W]$ é um ideal de L para qualquer subgrupo W de A. Basta verificar que L_a normaliza $L[W] = \langle L_a \mid a \in A \setminus W \rangle$ para todo $a \in A^{\#}$. É claro que para $L = \oplus_{a \in A} L_a$ temos que $\oplus_{b \in W} L_b$ é uma subálgebra de L. Em geral $\oplus_{b \in W} L_b$ não é um ideal de L pois $[L_a, L_b] \subseteq L_{a+b}$ e $a + b \notin W$ quando $a \notin W$.

Definição 3.2.1. Um ideal I de L é chamado um *ideal A-especial* se existe um subgrupo maximal W de A tal que $I = L[W]$.

Seja $\overline{A} = A/W$ um quociente de A. Para cada $a \in A$ denotamos por $\overline{a}$ a imagem de a em $\overline{A}$. Fazendo $L_{\overline{a}} = \oplus_w L_w$, sendo a soma tomada sobre todo $w \in A$ tal que $\overline{w} = \overline{a}$, obtemos que $L = \oplus_{\overline{a} \in \overline{A}} L_{\overline{a}}$ pode ser considerada uma álgebra $\overline{A}$-graduada.

Lema 3.2.2. *Sejam A um grupo aditivo elementar de ordem 2^n e L uma álgebra de Lie A-graduada. Consideremos $\overline{A} = A/B$ um quociente de A e I um ideal $\overline{A}$-especial em L. Então I é um ideal A-especial.*

Demonstração. Seja W/B um subgrupo maximal de $\overline{A}$ tal que $I = L[W/B]$. Pela definição de ideal especial segue que $I = L[W]$. Como W é um subgrupo maximal de A então I é A-especial. □

O próximo lema é outro resultado relevante sobre ideais A-especiais.

Lema 3.2.3. *Sejam A um grupo aditivo elementar de ordem 2^n e L uma álgebra de Lie A-graduada. Sejam N a interseção de todos ideais A-especiais de L e W o grupo elementar de ordem 2^{n-1}. Suponhamos que $L_0 = 0$. Então o quociente L/N está imerso em uma álgebra de Lie W-graduada K tal que $K_0 = 0$. Além disso, se L é solúvel então K pode ser escolhida solúvel de comprimento derivado no máximo dl L.*

Demonstração. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_{2^{n-1}}$ os subgrupos maximais de A. Para todo $a \notin A_i$, temos que $L_a \subseteq L[A_i]$. Logo o a-componente em $L/L[A_i]$ é nulo. Desta forma podemos ver $L/L[A_i]$ como uma álgebra A_i-graduada. Assim obtemos uma W-graduação da soma direta $K = \oplus_i L/L[A_i]$. Uma vez que L/N está imerso em K o resultado segue. □

Notação 3.2.4. *Denotamos por $a_0 = 0, a_1, \ldots, a_{2^n-1}$ os elementos de A, $L_{a_i} = L_i$ para todo $i = 0, \ldots, 2^n - 1$ e $i + j$ é o índice k tal que $a_i + a_j = a_k$.*

Lema 3.2.5. *Sejam A um grupo aditivo elementar de ordem 2^n e L uma álgebra de Lie A-graduada. Seja H um ideal homogêneo de L satisfazendo $L = H + L_j$ para algum*

$j = 0,\ldots,2^n - 1$. *Seja* T *um ideal homogêneo de* H *tal que* $T \cap L_0 = T \cap L_j = 0$. *Então o menor ideal de* L *que contém* T *também possui interseção trivial com* L_0 *e com* L_j.

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos assumir que $n \geq 2$ e que $j = 1$. Façamos

$$N_i = T + [T, L_1] + [T, L_1, L_1] + \cdots + [T, \underbrace{L_1, \cdots, L_1}_{i}]$$

para $i = 0, 1, \ldots$. Vamos mostrar que L_s normaliza N_i para todo $s \neq 1$ e para todo i. Se $i = 0$ segue da hipótese que $L_s \leq H$ e T é um ideal de H. Suponhamos por indução que $i \geq 1$ e que L_s normaliza N_{i-1}. Assim

$$[N_i, L_s] = [N_{i-1} + [T, \underbrace{L_1, \cdots, L_1}_{i}], L_s] \leq$$

$$N_{i-1} + [T, \underbrace{L_1, \cdots, L_1}_{i-1}], L_s, L_1] + [T, \underbrace{L_1, \cdots, L_1}_{i-1}], L_{s+1}].$$

Por indução, ambos $[T, \underbrace{L_1, \cdots, L_1}_{i-1}], L_s, L_1]$ e $[T, \underbrace{L_1, \cdots, L_1}_{i-1}], L_{s+1}]$ estão contidos em N_i. Desta forma L_s normaliza N_i.

Assim é fácil ver que o menor ideal de L que contém T é tal que

$$N = T + [T, L_1] + [T, L_1, L_1] + \cdots + [T, \underbrace{L_1, \cdots, L_1}_{i}] + \ldots.$$

Desta maneira é suficiente mostrar que para todo i, temos que $[T, \underbrace{L_1, \cdots, L_1}_{i}]$ possui interseção trivial com L_0 e com L_1. Vamos mostrar este fato por indução sobre i. Para $i = 0$ o resultado é válido pela hipótese. Suponhamos então que $i \geq 1$ e que o resultado seja válido para $[T, \underbrace{L_1, \cdots, L_1}_{i-1}]$. Mostremos que é válido para i. Tomemos o subespaço

$$[[T, \underbrace{L_1, \cdots, L_1}_{i-1}], L_1].$$

Observamos que é gerado por elementos da forma $[y, l]$, tais que $y \in L_k$ para algum $2 \leq k \leq 2^n - 1$ e $l \in L_1$. Temos que $[y, l] \in L_{k+1}$. Se $k + 1 = 0$, segue que $k = 1$, o que de fato não ocorre pois $k \geq 2$. O caso em que $k+1 = 1$ é análogo, pois obtemos $k = 0$. Portanto N tem interseção trivial com L_1. Com um raciocínio similar verificamos o caso em que $j = 0$, o que conclui a demonstração. $\square$

Definição 3.2.6. Sejam A um grupo aditivo elementar de ordem 2^n e L uma álgebra de Lie A-graduada. Dizemos que uma série de subálgebras homogêneas de L

$$0 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{m-1} \leq G_m = L$$

é um A-*complexo* de L se as seguintes condições são satisfeitas.

a) G_i é um ideal de G_{i+1}, para todo $i = 0, \ldots, m-1$,

b) $G_i \subseteq G_{i-1} + L_a$, para um elemento conveniente $a \in A$.

Lema 3.2.7. *Sejam A um grupo aditivo elementar de ordem 2^n e L uma álgebra de Lie A-graduada de comprimento derivado k. Então L possui um A-complexo de comprimento no máximo $2^n \cdot k$.*

Demonstração. Vamos mostrar este fato por indução em k. Para $k = 0$ é imediato. Suponhamos que $k \geq 1$. Por indução L' possui um A-complexo de comprimento $m = 2^n(k-1)$

$$0 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{m-1} \leq G_m = L.$$

Façamos $G_{m+i+1} = G_{m+i} + L_i$, para todo $i = 0, \ldots, 2^n - 1$. Desta forma $G_{m+2^n} = G_{m+2^n-1} + L_{i+2^n-1} = L$ e a série $\{G_i \mid i = 0, \ldots, 2^n k\}$ é um A-complexo de L. $\square$

Proposição 3.2.8. *Sejam A um grupo aditivo elementar de ordem 2^n e L uma álgebra de Lie A-graduada de comprimento derivado k. Suponhamos que R seja um ideal homogêneo de L tal que $R \cap L_0 = 0$. Então existem um número $s = s(k,n)$, que depende somente de k e de n, e uma série de ideais homogêneos de L*

$$0 = K_0 \leq K_1 \leq \ldots \leq K_s = R$$

tais que os quocientes K_j/K_{j-1} centralizam um ideal A-especial de L/K_{j-1} para todo $j = 1, \ldots, s$.

Demonstração. Vamos aplicar indução em n. Uma vez que R é um ideal homogêneo de L tal que $R \cap L_0 = 0$, segue que $[R \cap L_i, L_i] = 0$ para todo $1 \leq i \leq 2^n - 1$. Portanto no caso em que $n = 1$ o resultado é imediato. Vamos assumir que $n \geq 2$ e suponhamos que L contenha um ideal S tal que $S \cap L_a = S \cap L_0 = 0$ para algum $a \in A^{\#}$. Façamos $\overline{A} = A / \langle a \rangle$ e consideremos L como uma álgebra $\overline{A}$-graduada. Uma vez que $|\overline{A}| = 2^{n-1}$ e $S \cap L_{\overline{0}} = 0$, pela hipótese de indução segue que existem um número $r = r(k,n)$, dependendo somente de k e de n, e uma série de ideais homogêneos de L

$$0 = I_0 \leq I_1 \leq \cdots \leq I_r = S$$

tais que I_j / I_{j-1} centraliza um ideal $\overline{A}$-especial de L / I_{j-1}, para todo $j = 1, \ldots, r$. Pelo Lema 3.2.2 temos que todo ideal $\overline{A}$-especial é de fato um ideal A-especial. Assim, concluímos que existe uma constante $r = r(k,n)$, dependendo somente de k e de n, tal que se um ideal S satisfaz a condição $S \cap L_a = S \cap L_0 = 0$, então S possui uma série de ideais homogêneos de L

$$0 = I_0 \leq I_1 \leq \cdots \leq I_r = S$$

tais que I_j / I_{j-1} centraliza um ideal A-especial de L / I_{j-1}, para todo $j = 1, \ldots, r$.

Seja

$$0 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{m-1} \leq G_m = L$$

um A-complexo em L de comprimento mínimo m. Uma vez que pelo Lema 3.2.7 temos que m é $\{k,n\}$-limitado, é suficiente mostrar que existem um número $s = s(m)$, dependendo somente de m, e uma série de ideais homogêneos de L

$$0 = K_0 \leq K_1 \leq \cdots K_{s-1} \leq K_s = R$$

tais que K_j / K_{j-1} centraliza um ideal A-especial de L / K_{j-1}, para todo $j = 1, \ldots, s$. Vamos verificar este fato por indução em m. O caso no qual $m = 1$ ocorre somente quando $n = 1$. Supo- nhamos então que $m \geq 2$ e façamos $H = G_{m-1}$.

Denotemos por $A_1, \ldots, A_{2^n - 1}$ os subgrupos maximais de A. Pela definição de A-complexo, $L = H + L_j$ para algum j conveniente. Sem perda de generalidade podemos assumir que $j = 2^n - 1$, e então $L = H + L_{2^n - 1}$. Temos que $R \cap H$ é um ideal homogêneo de H tal que $(R \cap H) \cap H_0 = 0$. Como H é uma subálgebra homogênea de L, então $(R \cap H) \cap H_0 \subseteq (R \cap L_0) = R_0 = 0$. Pela hipótese de indução existem um número $u = u(m)$, dependendo somente de m, e uma série de ideais homogêneos de H

$$0 = T_0 \leq T_1 \leq \cdots \leq T_{u-1} \leq T_u = R \cap H$$

tais que T_j/T_{j-1} centraliza um ideal A-especial de H/T_{j-1}, para todo $j = 1, \ldots, u$, ou seja, $T_j/T_{j-1} \subseteq C_{H/T_{j-1}}(H/T_{j-1}[A_{i(j)}])$, para todo $j = 1, \ldots, u$ e para $A_{i(j)}$ subgrupos maximais convenientes de A.

Façamos $i(1) = i$. Em particular obtemos que $T_1 \subseteq C_H(H[A_i])$. Temos dois casos para considerar. Se $H[A_i] = L[A_i]$, então o menor ideal N_1 de L contendo T_1 centraliza $L[A_i]$, ou seja, $N_1 \subseteq C_L(L[A_i])$. Assim, podemos tomar N_1 como sendo o primeiro termo da série desejada $K_1 \leq \cdots \leq K_{s-1} \leq K_s = R$. Suponhamos que $H[A_i] \neq L[A_i]$. Segue da definição de ideal especial que $L[A_i] = H[A_i] + L_{2^n-1}$. Notemos que $T_1 \cap L_{2^n-1}$ centraliza L_{2^n-1}, pois $[T_1 \cap L_{2^n-1}, L_{2^n-1}] \leq R \cap L_0 = 0$. Segue que $T_1 \cap L_{2^n-1}$ centraliza $L[A_i]$. O menor ideal J de L que contém $T_1 \cap L_{2^n-1}$ também centraliza $L[A_i]$. Consideremos a álgebra quociente L/J e suponhamos, sem perda de generalidade, que $T_1 \cap L_{2^n-1} = 0$. Seja N o menor ideal de L contendo T_1. Segue do Lema 3.2.5 que $N \cap L_{2^n-1} = 0$. Desta forma, o primeiro parágrafo desta demonstração permite concluirmos que existem um número $r = r(k,n)$, dependendo somente de k e de n, e uma série de ideais de L

$$0 = I_0 \leq I_1 \leq \cdots \leq I_{r-1} \leq I_r = N$$

tais que I_j/I_{j-1} centraliza um ideal A-especial de L/I_{j-1}, para todo $j = 1, \ldots, r$. Logo podemos tomar $J = K_1$, $I_1 = K_2$, $I_2 = K_3$ e assim sucessivamente.

Aplicando o mesmo argumento com L/N no lugar de L podemos encontrar uma série com as propriedades requeridas no menor ideal de L/N que contém T_2/N. Iterando este processo concluímos que existe uma série de ideais homogêneos de L em $R \cap H$ com as propriedades requeridas e de comprimento no máximo $u(r+1)$. Uma vez que $R/(R \cap H)$ está contido no componente homogêneo $(H + L_{2^n-1})/(R \cap H)$, segue que $R/(R \cap H)$ é central em $(H + L_{2^n-1})/(R \cap H)$. Assim mostramos que uma série com as propriedades desejadas pode ser escolhida de comprimento no máximo $u(r+1)+1$. □

Agora estamos em condições de fornecer a demonstração do resultado principal apresentado neste capítulo.

Demonstração do Teorema 3.0.1. Vamos mostrar este fato por indução em n. Para $n = 1$ temos que L é abeliana e o resultado segue. Suponhamos que $n \geq 2$ e que o resultado seja válido para álgebras de Lie graduadas pelo grupo elementar de ordem 2^{n-1}. Sejam W o grupo elementar de ordem 2^{n-1} e N a interseção de todos os ideais A-especiais de L. Pelo Lema 3.2.3, o quociente L/N está imerso em uma álgebra W-graduada K tal que $K_0 = 0$. Além disso K pode ser escolhida solúvel de comprimento derivado no máximo k. Por indução, K possui uma série de ideais de comprimento $n-1$ tal que todos os quocientes são nilpotentes de classe $\{k,n\}$-limitada. Assim, é suficiente mostrar que N é nilpotente de classe $\{k,n\}$-limitada.

Pela Proposição 3.2.8, com $R = L$, obtemos que existem um número $s = s(k,n)$, dependendo somente de k e de n, e uma série de ideais homogêneos de L

$$0 = K_0 \leq K_1 \leq \ldots \leq K_s = L$$

tais que os quocientes K_j/K_{j-1} centralizam um ideal A-especial de L/K_{j-1} para todo $j = 1,\ldots,s$. Uma vez que $K_j \cap N$ é central em N módulo $K_{j-1} \cap N$ então N possui uma série central de comprimento no máximo s, como queríamos demonstrar. $\square$

Capítulo 4

Grupos Admitindo 2-Grupos Elementares de Automorfismos

O principal objetivo neste capítulo é demonstrar o resultado a seguir.

Teorema 4.0.1. *Seja G um grupo solúvel de comprimento derivado k admitindo um grupo de automorfismos elementar A de ordem 2^n tal que $C_G(A) = 1$. Então existem um número $f(k,n)$ dependendo somente de k e de n e uma série normal A-invariante de G*

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_n = G,$$

com quocientes H_i/H_{i-1} nilpotentes de classe no máximo $f(k,i)$ para todo $i = 1,\ldots,n$.

Vamos começar com o seguinte lema elementar.

Lema 4.0.2. *Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G de expoente n tal que G/N possui expoente d. Então o expoente de G é menor ou igual a $n \cdot d$.*

Demonstração. De fato, dado $x \in G$, $(x^d)^n = 1$, pois $x^d \in N$. $\square$

Lema 4.0.3. *Sejam G um grupo finito admitindo um grupo de automorfismos coprimo A e H um subgrupo normal A-invariante de G tal que $G = HC_G(A)$. Suponhamos que H contenha um subgrupo normal A-invariante N tal que $C_N(A) = 1$. Então o fecho normal de N em G possui interseção trivial com $C_G(A)$.*

Demonstração. Denotemos por D o fecho normal de N em G. Então $D = \langle N^x \mid x \in G\rangle$. Uma vez que N é um subgrupo normal de H e $G = HC_G(A)$, segue que $D = \langle N^x \mid x \in C_G(A)\rangle$. Como N^x é um subgrupo de H para todo $x \in G$, concluímos que N^x normaliza N e então $D = N^{x_1}N^{x_2}\cdots N^{x_r}$, para $x_1, x_2, \ldots, x_r \in C_G(A)$. Uma vez que $C_N(A) = 1$, segue que $C_{N^{x_i}}(A) = 1$. Vamos aplicar indução em r. Para $r = 1$ o resultado é imediato. Façamos $M = N^{x_1}N^{x_2}\cdots N^{x_{r-1}}$ e suponhamos por indução que $M \cap C_G(A) = 1$. Então $1 = C_{D/M}(A) = C_D(A)M/M$. Desta forma temos $C_D(A) \leq Z(G)$. Uma vez que por indução $C_M(A) = 1$ concluímos que $C_D(A) = 1$. □

Lema 4.0.4. *Sejam G um grupo finito de ordem ímpar admitindo um grupo de automorfismos elementar A de ordem 2^n e $A_1, \ldots, A_{2^n-1}$ os subgrupos maximais de A. Façamos $G_0 = C_G(A)$, $I_i = \{x \in C_G(A_i) \mid x^u = x^{-1}$ para algum $u \notin A_i\}$ e $G_i = C_G(A_i)$. Então são válidas as seguintes afirmações.*

a) $G_i = G_0 I_i$, *para* $i = 1, \ldots, 2^n - 1$;

b) $G = \langle G_0, I_i \mid i = 1, \ldots, 2^n - 1\rangle$;

c) $[G, a] = \langle [G_i, a] \mid 1 \leq i \leq 2^n - 1\rangle$, *para todo* $a \in A^\#$;

d) $[G, a] = \langle I_i \mid a \notin A_i\rangle$, *para todo* $a \in A^\#$.

Demonstração. $a)$ Para $a \notin A_i$, pelo Corolário 2.2.5 a), segue que $C_G(A_i) = G_0 I_i$ e a) está provado.

$b)$ Pelo Teorema 2.2.7 obtemos que $G = \langle C_G(A_i) \mid i = 1, \ldots, 2^n - 1\rangle$, então $b)$ é uma consequência de $a)$.

$c)$ O Corolário 2.2.5 $b)$ garante que $[G, a] = [G, a, a]$. Façamos $G = [G, a]$. Se $a \in A_i$ então $G_i = 1$. Caso contrário $G_i = [G_i, a]C_G(A)$ e $C_G(A) = 1$. Uma vez que pelo Teorema 2.2.7 temos que $G = \langle G_1, G_2, \ldots, G_{2^n-1}\rangle$, então $[G, a] = \langle [G_i, a] \mid 1 \leq i \leq 2^n - 1\rangle$.

$d)$ É suficiente observar que $[G_i, a] = 1$ se $a \in A_i$ e $[G_i, a] = I_i$ se $a \notin A_i$. □

Definição 4.0.5. *Sejam G um grupo admitindo um grupo de automorfismos elementar A e $A_1, \ldots, A_{2^n-1}$ os subgrupos maximais de A. Dizemos que uma série de subgrupos A-invariantes de G*

$$1 = L_0 \leq L_1 \leq \ldots \leq L_{m-1} \leq L_m = G$$

é um A-complexo de G se as seguintes condições são satisfeitas.

a) L_i *é normal em* L_{i+1} *para todo* $i = 0, \dots, m-1$*;*

b) $[L_{i+1}, A_j] \subseteq L_i$ *para algum* j *dependendo de* i *e para todo* $i = 0, \dots, m-1$*, ou equivalentemente,* $L_{i+1} = L_i C_{L_{i+1}}(A_j)$ *para algum* j *dependendo de* i *e para todo* $i = 0, \dots, m-1$*.*

Lema 4.0.6. *Seja* G *um grupo finito de ordem ímpar e de comprimento derivado* k *admitindo um grupo de automorfismos elementar* A *de ordem* 2^n*. Então* G *possui um* A*-complexo de comprimento no máximo* $k(2^n - 1)$*.*

Demonstração. Vamos aplicar indução sobre o comprimento derivado de G. Sejam $A_1, A_2, \dots, A_{2^n-1}$ os subgrupos maximais de A. Consideremos o A-complexo de G'

$$1 \leq L_0 \leq L_1 \leq \cdots \leq L_j = G'.$$

Façamos $L_{j+m} = \langle L_j, C_G(A_1), C_G(A_2), \cdots, C_G(A_{2^n-1}) \rangle$, para $m = 1, \dots, 2^n - 1$. Uma vez que A é abeliano então $L_{j+2^n-1} = G$ e $L_0 \leq L_1 \leq \cdots \leq L_{j+2^n-1}$ é um A-complexo de G. Assim G possui um A-complexo de comprimento no máximo $k(2^n - 1)$. □

Definição 4.0.7. *Seja* G *um grupo finito de ordem ímpar e de comprimento derivado* k *admitindo um grupo de automorfismos elementar* A *de ordem* 2^n*. Sejam* $a_1, a_2, \dots, a_s$ *elementos não necessariamente distintos de* $A^{\#}$*. Definimos o subgrupo* $C_G^{(a_1, a_2, \dots, a_s)}$ *indutivamente pela seguinte regra*

$$C_G^{(a_1)} = C_G([G, a_1])$$

e

$$C_G^{(a_1, a_2, \dots, a_s)} = \{x \in G \mid [[G, a_s], x] \subseteq C_G^{(a_1, a_2, \dots, a_{s-1})}\}.$$

Da definição acima segue que $C_G^{(a_1, \dots, a_s)}$ é o centralizador de $[G, a_s]$ módulo $C_G^{(a_1, \dots, a_{s-1})}$.

A proposição abaixo fornece um resultado técnico fundamental para a demonstração do Teorema 4.0.1.

Proposição 4.0.8. *Sejam* G *um grupo finito de ordem ímpar e de comprimento derivado* k *admitindo um grupo de automorfismos elementar* A *de ordem* 2^n *e* R *um subgrupo normal* A*-invariante de* G *tal que* $C_R(A) = 1$*. Então existem um número* $s = s(k, n)$*, dependendo somente de* k *e de* n*, e uma sequência de elementos não necessariamente distintos* $a_1, a_2, \dots, a_s \in A^{\#}$ *tais que* $R \leq C_G^{(a_1, a_2, \dots, a_s)}$*.*

Demonstração. Uma vez que $C_R(A) = 1$, quando $n = 1$ o Corolário 2.1.3 garante que $R \leq Z([G,a]) \leq C_G^{(a)}$. Assim, no caso $n = 1$, o resultado é imediato. Suponhamos que $n \geq 2$ e vamos usar indução em n.

Pode ocorrer que G contenha um subgrupo normal A-invariante S tal que $S \cap C_G(W) = 1$, para um subgrupo próprio W de A. Por indução, existem um número $r = r(k,n)$ e uma sequência de elementos não necessariamente distintos $a_1,\ldots,a_r \in W^{\#}$ tais que $S \leq C_G^{(a_1,\ldots,a_r)}$.

Seja

$$1 = L_0 \leq L_1 \leq \cdots \leq L_{m-1} \leq L_m = G$$

um A-complexo em G de comprimento mínimo m. Uma vez que pelo Lema 4.0.6 temos que $m \leq k(2^n - 1)$, é suficiente mostrar que existem um número $s = s(m)$, dependendo somente de m, e uma sequência de elementos não necessariamente distintos $b_1,\ldots,b_s \in A^{\#}$ tais que $R \leq C_G^{(b_1,\ldots,b_s)}$. Mostraremos este fato por indução em m. O caso no qual $m = 1$ segue do Corolário 2.1.3, pois ocorre somente quando $n = 1$. Suponhamos que $m \geq 2$ e façamos $H = L_{m-1}$.

Pela hipótese de indução existem uma constante $u = u(m)$, dependendo somente de m, e uma sequência de elementos não necessariamente distintos $c_1,\ldots,c_u \in A^{\#}$ tais que $R \cap H \leq C_H^{(c_1,\ldots,c_u)}$. Façamos $N = C_H^{(c_1)} \cap R$. Pela definição de A-complexo existe um subgrupo maximal W de A tal que $[G,W] \subseteq H$. Sem perda de generalidade suponhamos que $W = A_{2^n-1}$. Logo $G = HG_{2^n-1}$.

Temos dois casos para considerar. Se $c_1 \in W$, como $G = HG_{2^n-1}$ então $[H,c_1] = [G,c_1]$. Assim $N \leq C_G^{(c_1)}$. Quando $c_1 \notin W$, o Lema 4.0.4 c) garante que $[G,c_1] = \left\langle I_j \mid c_1 \notin A_j \right\rangle$ e que $[H,c_1] = \left\langle H \bigcap I_j \mid c_1 \notin A_j \right\rangle$. Desta forma $[G,c_1] = \langle [H,c_1], I_{2^n-1} \rangle$. Seja $M = N \cap G_{2^n-1}$. Uma vez que $M \leq C_G([H,c_1])$ e o Corolário 2.1.3 garante que $[M, I_{2^n-1}] = 1$, obtemos que $M \leq C_G^{(c_1)}$.

Tomemos $G/\langle M^G \rangle$ e suponhamos, sem perda de generalidade, que $M = 1$. Denotemos por D o fecho normal de N em G. Uma vez que N é um subgrupo normal de H e H é uma subgrupo normal de G, concluímos pelo Lema 4.0.3 que D tem interseção trivial com G_{2^n-1}, ou seja, $C_D(A_{2^n-1}) = 1$. Neste caso, como já foi mencionado, a indução em n implica que existem uma constante $r = r(k,n)$ e uma sequência de elementos não necessariamente distintos $a_1,\ldots,a_r \in A_{2^n-1}^{\#}$ tais que $N \leq D \leq C_G^{(a_1,\ldots,a_r)}$. Assim, sem supormos que $M = 1$ segue que $N \leq C_G^{(c_1,a_1,\ldots,a_r)}$.

Com o mesmo argumento aplicado ao quociente $G/C_G^{(c_1,a_1\ldots,a_r)}$ no lugar de G deduzimos que existe uma sequência de elementos não necessariamente distintos $d_1,\dots,d_{2r+2}\in A^{\#}$ tais que $C_H^{(c_1,c_2)}\bigcap R\le C_G^{(d_1,\dots,d_{2r+2})}$. Iterando esse processo, concluímos que existe uma sequência de elementos não necessariamente distintos $f_1,\dots,f_{(r+1)u}\in A^{\#}$ tal que $R\cap H\subseteq C_G^{(f_1,\dots,f_{(r+1)u})}$. Uma vez que o grupo quociente G/H é abeliano, pois $G'\subseteq H$, segue que $[R,G]\subseteq R\cap H$. Consequentemente $R/(R\cap H)\le Z(G/(R\cap H))$. Assim, no caso geral, existem elementos não necessariamente distintos $g_1,\dots,g_{(r+1)u+1}\in A^{\#}$ tais que $R\le C_G^{(g_1,g_2\dots,g_{(r+1)u+1})}$. Tomemos $s=(r+1)u+1$ e o resultado está provado. □

Corolário 4.0.9. *Sejam G um grupo finito de ordem ímpar e de comprimento derivado k admitindo um grupo de automorfismos elementar A de ordem 2^n e R um subgrupo normal A-invariante de G tal que $C_R(A)=1$. Sejam s como na Proposição 4.0.8 e $N=\bigcap_{a\in A^{\#}}[G,a]$. Então*

$$[R,\underbrace{N,\cdots,N}_{s}]=1.$$

Agora estamos em condições de demonstrar o Teorema 4.0.1.

Demonstração do Teorema 4.0.1. Vamos aplicar indução em n. Para $n=1$ temos que G é abeliano e o teorema é válido. Pela hipótese de indução existem números $f(k,1),f(k,2),\dots,f(k,n-1)$ tais que se um grupo finito solúvel H de comprimento derivado no máximo k admite um grupo de automorfismos livre de pontos fixos elementar de ordem 2^{n-1}, então H possui uma série normal de comprimento $n-1$ tal que todos os quocientes são nilpotentes de classe no máximo $f(k,1),f(k,2),\dots,f(k,n-1)$, respectivamente. Uma vez que $C_G(A)=1$, temos por [6, 6.2.3] que G tem ordem ímpar. Então, para todo subgrupo normal A-invariante T de G, o grupo A induz um automorfismo livre de pontos fixos de G/T. Em particular A induz um automorfismo livre de pontos fixos de $G/[G,a]$ para todo $a\in A^{\#}$. É claro que o grupo induzido agindo sobre $G/[G,a]$ tem ordem no máximo 2^{n-1}. Seja W o 2-grupo elementar de ordem 2^{n-1}. Concluímos que para todo $a\in A^{\#}$ existe uma ação livre de pontos fixos de W em $G/[G,a]$.

Denotemos por K o produto direto $\prod_{a\in A^{\#}}G/[G,a]$. Temos uma ação de W sobre K tal que $C_K(W)=1$. Então, por indução K possui uma série normal A-invariante de comprimento $n-1$ tal que todos os quocientes são nilpotentes de classe no máximo $f(k,1),f(k,2),\dots,f(k,n-1)$, respectivamente. Seja $N=\bigcap_{a\in A^{\#}}[G,a]$. O Corolário 4.0.9 garante que N é nilpotente de classe no máximo $s=s(k,n)$, como na Proposição 4.0.8. Uma vez que G/N está imerso em K concluímos que G/N possui uma série normal

$$1 = H_0/N \leq H_1/N \leq \ldots \leq H_{n-1}/N = G/N,$$

tal que os quocientes H_i/H_{i-1} são nilpotentes de classe no máximo $f(k,i)$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Portanto G possui uma série satisfazendo as condições desejadas. $\square$

Capítulo 5

Grupos Admitindo 2-Grupos Elementares de Automorfismos com Centralizador de Expoente Limitado

É conhecido que se a é um automorfismo de ordem 2 de um grupo G, então as propriedades de $C_G(a)$ têm forte impacto sobre a estrutura de G (ver por exemplo o Lema 2.1.1). No capítulo anterior mostramos que um grupo finito G de comprimento derivado k que admite uma ação livre de pontos fixos de um 2-grupo elementar A de ordem 2^n possui uma série normal de comprimento n na qual todos os quocientes são nilpotentes de classe limitada somente em termos de k e de n. Neste capítulo consideramos a situação na qual A age sobre um grupo G de ordem ímpar de tal forma que $C_G(A)$ possui expoente m, sendo nosso objetivo principal demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 5.0.1. *Seja G um grupo finito de ordem ímpar e de comprimento derivado k admitindo um grupo de automorfismos elementar A de ordem 2^n tal que $C_G(A)$ é de expoente m. Então G possui uma série normal*

$$G = G_1 \geq T_1 \geq G_2 \geq T_2 \geq \cdots \geq G_n \geq T_n = 1$$

com quocientes G_i/T_i nilpotentes de classe $\{k,m,n\}$-limitada para $i = 1,\dots,n$ e quocientes T_i/G_{i+1} de expoente $\{k,m,n\}$-limitado para $i = 1,\dots,n-1$.

A demonstração do teorema supracitado é baseada nas mesmas técnicas aplicadas em [36].

Os resultados apresentados a seguir são relevantes para se obter tal demonstração.

Proposição 5.0.2. *Seja G um grupo finito de ordem ímpar e de comprimento derivado k admitindo um automorfismo a de ordem 2 tal que $C_G(a)$ possui expoente m e $G = [G,a]$. Então o expoente de G' é $\{k,m\}$-limitado.*

Primeiramente é conveniente estabelecer a Proposição 5.0.2 sob a hipótese de que o grupo G é metabeliano. O que é feito no próximo lema.

Lema 5.0.3. *Seja G um grupo finito de ordem ímpar metabeliano admitindo um automorfismo a de ordem 2 tal que $C_G(a)$ possui expoente m e $G = [G,a]$. Então o expoente de G' é igual a m.*

Demonstração. Pela hipótese $G = [G,a]$ e, assim, segue que $C_G(a) \subseteq G'$. Denotemos por N o fecho normal de $C_G(a)$ em G. Uma vez que G' é abeliano, concluímos que N possui expoente m. Por outro lado G/N é abeliano, pois a age em G/N livre de pontos fixos. Então $G' = N$. $\square$

Demonstração da Proposição 5.0.2. Vamos aplicar indução em k. Para $k \leq 2$, o resultado segue pelo Lema 5.0.3. Suponhamos que $k \geq 3$. Como o comprimento derivado de $G/G^{(k-1)}$ é menor do que k, obtemos que $G'/G^{(k-1)}$ é de expoente $\{m,k\}$-limitado. Pelo Lema 4.0.2 é suficiente mostrar que $G^{(k-1)}$ é de expoente $\{m,k\}$-limitado. Consideremos o quociente $G/\left\langle C_{G^{(k-1)}}(a)^G \right\rangle$. Uma vez que $\left\langle C_{G^{(k-1)}}(a)^G \right\rangle$ é de expoente m podemos supor, sem perda de generalidade, que $C_{G^{(k-1)}}(a) = 1$. Como por hipótese a é de ordem 2 e $G = [G,a]$, segue pelo Corolário 2.1.3 que $G^{(k-1)} \leq Z(G)$. Assim $G^{(k-2)}$ é nilpotente de classe 2. Pela hipótese de indução $G^{(k-2)}/G^{(k-1)}$ é de expoente $\{m,k\}$-limitado. Assim, aplicando o Corolário 1.4.8 ao grupo $G^{(k-2)}$, obtemos que $G^{(k-2)}$ é de expoente $\{m,k\}$-limitado. Logo $G^{(k-1)}$ é de expoente $\{m,k\}$-limitado. $\square$

Hall [9] apresenta o seguinte resultado: se G é um grupo solúvel de comprimento derivado k e todas as seções metabelianas de G são nilpotentes de classe c, então G é nilpotente de classe $\{k,c\}$-limitada. O Teorema 5.0.4, enunciado a seguir, é uma generalização deste resultado de Hall e dele decorre o Teorema 5.0.5, que permite demonstrar a Proposição 5.0.6 utilizando uma redução ao caso metabeliano. As demonstrações dos Teoremas 5.0.4 e 5.0.5 podem ser encontradas em [41]. Denotemos por $f(g,c)$ a expressão $(g-1)\frac{c(c+1)}{2} + c$.

Teorema 5.0.4. *Sejam c,d,q inteiros positivos e G um grupo solúvel de comprimento derivado d. Suponhamos que para qualquer i o quociente metabeliano $G^{(i)}/G^{(i+2)}$ seja extensão de um* *grupo de expoente q por um grupo nilpotente de classe c. Então existem números $\{c,d,q\}$-limitados f e g tais que G é extensão de um grupo de expoente g por um grupo nilpotente de classe f.*

Teorema 5.0.5. *Seja G um grupo tendo um subgrupo normal nilpotente N de classe g tal que G/N' é extensão de um grupo de expoente e por um grupo nilpotente de classe c. Suponhamos que $\gamma_{c+1}(G)$ é solúvel de comprimento derivado d. Então $\gamma_{f(g,c)+1}(G)$ tem expoente finito $\{c,d,e,g\}$-limitado.*

Proposição 5.0.6. *Seja G um grupo finito de ordem ímpar e de comprimento derivado k admitindo um grupo de automorfismos elementar A de ordem 2^n tal que $C_G(A)$ é de expoente m. Então $N = \bigcap_{a\in A^{\#}} [G,a]$ é extensão de um grupo de expoente $\{k,m,n\}$-limitado por um grupo nilpotente de classe $\{k,m,n\}$-limitada.*

Demonstração. Vamos aplicar indução sobre o comprimento derivado de N. Para N abeliano é imediato. Suponhamos que o comprimento derivado de N é maior ou igual a 2 e seja L termo metabeliano da série derivada de N. Façamos $M = L' \cap C_G(A)$ e D o fecho normal de M em G. Desta forma D é abeliano com geradores de ordem m. Logo D possui expoente m. Consideremos o quociente L/D e suponhamos, sem perda de generalidade, que $C_{L'}(A) = 1$. Pelo Corolário 4.0.9 obtemos que $L' \subset Z_s(L)$, ou seja, L é nilpotente de classe $s+1$, com $s = s(k,n)$ dependendo somente de k e de n.

Como o comprimento derivado de N/L' é menor do que o comprimento derivado de N, pela hipótese de indução, segue que N/L' é extensão de um grupo de expoente $\{k,m,n\}$-limitado por um grupo nilpotente de classe $\{k,m,n\}$-limitada j. Uma vez que o comprimento derivado de $\gamma_{j+1}(N)$ é menor ou igual a k, pelo Teorema 5.0.5 concluímos que $\gamma_{f(s+1,j)+1}(N)$ é de expoente $\{k,m,n\}$- limitado, como queríamos demonstrar. □

Agora estamos em condições de fornecer a demonstração do resultado principal enunciado neste capítulo.

Demonstração do Teorema 5.0.1. Se $n = 1$, a Proposição 5.0.2 garante que G' é de expoente $\{m,k\}$-limitado e o teorema segue. Suponhamos que $n \geq 2$ e vamos aplicar indução em n. Para todo subgrupo normal A-invariante T de G o grupo A induz um grupo de automorfismos de G/T. Em particular A induz um grupo de automorfismos B_a de $G/[G,a]$ para todo $a \in A^{\#}$. É claro que B_a é um 2-grupo elementar de ordem menor ou igual a 2^{n-1}, com a propriedade que

$C_{G/[G,a]}(B_a)$ é de expoente m. Seja B o grupo elementar de ordem 2^{n-1}. Temos que existe uma imersão de B_a em B. Para todo $a \in A^\#$, fixemos um subgrupo D_a de B tal que $B = B_a \oplus D_a$. Dado $b \in B$, escrevemos $b = b_1 + b_2$, onde $b_1 \in B_a$ e $b_2 \in D_a$ de maneira que se $b \in B$ e $x \in G/[G,a]$, então $x^b = x^{b_1}$. Esta ação é bem definida e $C_{G/[G,a]}(B)$ é de expoente m. Podemos então definir uma ação de B sobre $G/[G,a]$ tal que $C_{G/[G,a]}(B)$ é de expoente m.

Seja $K = \prod_{a \in A^\#} G/[G,a]$. Definamos uma ação de B em K tal que $C_K(B)$ é de expoente m. Por indução K possui uma série de comprimento $2(n-1)$ satisfazendo as condições requeridas. Seja $N = \bigcap_{a \in A^\#} [G,a]$. Segue pela Proposição 5.0.6 que N é extensão de um grupo de expoente $\{k,m,n\}$-limitado por um grupo nilpotente de classe $\{k,m,n\}$-limitada. Uma vez que G/N está imerso em K, decorre que G/N possui uma série normal

$$G/N = G_1/N \geq T_1/N \geq \cdots \geq G_{n-1}/N \geq T_{n-1}/N = 1$$

tal que os quocientes G_i/T_i são nilpotentes de classe $\{k,m,n\}$-limitada para $i = 1,\ldots,n-1$ e os quocientes T_i/G_{i+1} possuem expoente $\{k,m,n\}$- limitado para $i = 1,\ldots,n-2$. Portanto G possui uma série normal de comprimento no máximo $2n$ satisfazendo as condições desejadas. $\square$

Capítulo 6

Sobre a Estrutura de Grupos com Grupo de Klein de Automorfismos

Neste capítulo faremos uso do seguinte abuso de notação: consideramos que um grupo G é de expoente e quando o mesmo possui expoente dividindo e e dizemos que G é nilpotente de classe c quando este for nilpotente de classe menor ou igual a c. Objetivamos demonstrar o teorema a seguir.

Teorema 6.0.1. *Seja G um grupo finito de ordem ímpar e de comprimento derivado k admitindo um grupo de Klein de automorfismos A tal que $C_G(a)$ é extensão de um grupo de expoente e por um grupo nilpotente de classe c para todo $a \in A^{\#}$. Então G possui uma série normal*

$$1 \leq T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq T_4 = G$$

com quocientes T_4/T_3 e T_2/T_1 nilpotentes de classe $\{e,c,k\}$-limitada e quocientes T_3/T_2 e T_1 de expoente $\{e,c,k\}$-limitado.

O seguinte lema elementar decorre do Lema 1.1.1.

Lema 6.0.2. *Sejam G um grupo e X um subgrupo normal abeliano de G. Então $[x,y]^k = [x^k,y]$ para todo $x \in X$, para todo $y \in G$ e para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Vamos aplicar indução em k. Para $k = 0,1$ é imediato. Suponhamos que o resultado seja válido para $k-1$ e mostremos para k. Dados $x \in X$ e $y \in G$ temos que

$$\begin{aligned}
[x^k, y] &= [x^{k-1}x, y] = [x^{k-1}, y]^x [x, y] = ([x, y]^x)^{k-1}[x, y] \\
&= [x, y]^{k-1}[x, y] = [x, y]^k.
\end{aligned}$$

□

Lema 6.0.3. *Seja G um grupo finito metabeliano de ordem ímpar admitindo um grupo de Klein de automorfismos A tal que $C_G(a)$ é extensão de um grupo de expoente e e por um grupo nilpotente de classe c para todo $a \in A^{\#}$. Então existe um subgrupo normal M de G tal que $C_M(A) = 1$ e G/M é extensão de um grupo de expoente e^3 por um grupo nilpotente de classe $3c$.*

Demonstração. Seja V a palavra $[x_1, \dots, x_{c+1}]^e$. Para todo $a \in A^{\#}$, seja $G_a = G'C_G(a)$. Então o subgrupo verbal $V(G_a)$ de G_a relativo a V está contido em $[G', a] = [G_a, a]$ e também é claro que $V(G_a)$ é um subgrupo normal de G para todo $a \in A^{\#}$. Temos que $[G', a] \cap C_G(a) = 1$, logo $V(G_a) \cap C_G(a) = 1$. Seja $M = \prod_{a \in A^{\#}} V(G_a)$. Então $C_M(A) = 1$ e M é um subgrupo normal de G. Como A é abeliano segue que $G = \langle G'C_G(a) \mid a \in A^{\#} \rangle$. Assim G/M é o produto de três subgrupos normais, sendo cada um deles extensão de um grupo de expoente e por um grupo nilpotente de classe c. Desta forma G/M é extensão de um grupo de expoente e^3 por um grupo nilpotente de classe $3c$. □

Proposição 6.0.4. *Seja G um grupo finito de ordem ímpar e de comprimento derivado k admitindo um grupo de Klein de automorfismos A tal que $C_G(a)$ é extensão de um grupo de expoente e por um grupo nilpotente de classe c para todo $a \in A^{\#}$. Seja $N = \bigcap_{a \in A^{\#}} [G, a]$. Então N é extensão de um grupo de expoente $\{e, c, k\}$-limitado por um grupo nilpotente de classe $\{e, c, k\}$-limitada.*

Demonstração. Vamos aplicar indução sobre o comprimento derivado de N. Se N é abeliano, o resultado é imediato. Suponhamos que o comprimento derivado de N seja maior ou igual a 2 e seja L o termo metabeliano da série derivada de N. Primeiramente vamos mostrar que L é extensão de um grupo de expoente $\{e, c, k\}$-limitado por um grupo nilpotente de classe $\{e, c, k\}$-limitada. Sejam $M = \prod_{a \in A^{\#}} V(L'C_L(a))$, com $V = [x_1, \dots, x_{c+1}]^e$ e seja W a palavra $[x_1, \dots, x_{3c+1}]^{e^3}$. Pelo Lema 6.0.3 segue que $C_M(A) = 1$ e que L/M é extensão de um grupo de expoente e^3 por um grupo nilpotente de classe $3c$. Assim $W(L) \subseteq M$ e $W(L) \cap C_L(A) = 1$.

Se $W(L) = 1$ então L é extensão de um grupo de expoente e^3 por um grupo nilpotente de classe $3c$. Suponhamos que $W(L) \neq 1$. Como $W(L) \cap C_G(A) = 1$ segue do Corolário 4.0.9 que existe um número s tal que

$$[W(L), \underbrace{N, \cdots, N}_{s}] = 1.$$

Seja t o menor número tal que $W(L) \subseteq Z_t(N)$. Vamos mostrar por indução em t que L é extensão de um grupo de expoente $\{e,c,k\}$- limitado por um grupo nilpotente de classe $\{e,c,k\}$-limitada. Para $t = 1$, obtemos $W(L) \subseteq Z(N)$. Seja $E = \gamma_{3c+1}(N)$. Assim $E/(Z(N) \cap E)$ é de expoente e^3 e L/E é nilpotente de classe $3c$.

Dados $x_1, x_2, \ldots, x_{3c+1} \in L$ temos que

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{3c+1}] \in E, \text{ então}$$

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{3c+1}]^{e^3} \in (Z(N) \cap E), \text{ consequentemente}$$

$$[[x_1, x_2, \ldots, x_{3c+1}]^{e^3}, x_{3c+2}] = 1.$$

Pelo Lema 6.0.2 e do fato de que $[x_1, x_2, \ldots, x_{3c+1}] \in L'$, que é um subgrupo normal abeliano de L, obtemos que

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{3c+1}, x_{3c+2}]^{e^3} = [[x_1, x_2, \ldots, x_{3c+1}]^{e^3}, x_{3c+2}] = 1,$$

então $\gamma_{3c+2}(L)$ tem expoente e^3 e L é extensão de um grupo de expoente e^3 por um grupo nilpotente de classe $3c+1$.

Suponhamos que $t \geq 2$ e que o resultado seja válido para $t-1$. Seja $K = [W(L), \underbrace{N, \cdots, N}_{t-1}]$. Temos que $K \subseteq Z(N)$. Por indução segue que L/K é extensão de um grupo de expoente $\{e,c,k\}$-limitado por um grupo nilpotente de classe $\{e,c,k\}$-limitada, consequentemente o mesmo é válido para $L/Z(L)$. Assim L é extensão de um grupo de expoente $\{e,c,k\}$-limitado por um grupo nilpotente de classe $\{e,c,k\}$-limitada.

Seja H um subgrupo normal de L tal que L/H é nilpotente de classe $\{e,c,k\}$-limitada e H é de expoente $\{e,c,k\}$-limitado. Consideremos N/H e suponhamos, sem perda de generalidade, que $H = 1$. Assim L é nilpotente de classe h, com h sendo $\{e,c,k\}$-limitado. Como o comprimento derivado de N/L' é menor do que o comprimento derivado de N, pela hipótese de indução, obtemos que N/L' é extensão de um grupo de expoente $\{e,c,k\}$-limitado por um grupo nilpotente de classe j, com j sendo $\{e,c,k\}$-limitado. Uma vez que o comprimento derivado de $\gamma_{j+1}(N)$ é menor ou igual ao comprimento derivado de N, pelo Teorema 5.0.5 concluímos que $\gamma_{f(h,j)+1}(N)$ é de expoente $\{e,c,k\}$-limitado. Como queríamos demonstrar. $\square$

Demonstração do Teorema 6.0.1. Temos que cada um dos fatores $G/[G,a]$ é isomorfo a um quociente de $C_G(a)$, que por hipótese, é extensão de um grupo de expoente e por um grupo nilpotente de classe c para todo $a \in A^{\#}$. Uma vez que $G/\bigcap_{a\in A^{\#}}[G,a]$ está imerso em $K = \prod_{a\in A^{\#}} G/[G,a]$, decorre que $G/\bigcap_{a\in A^{\#}}[G,a]$ é extensão de um grupo de expoente e^3 por um grupo nilpotente de classe $3c$. Pela Proposição 6.0.4 obtemos que $N = \bigcap\limits_{a\in A^{\#}}[G,a]$ é extensão de um grupo nilpotente de classe $\{e,c,k\}$-limitada por um grupo de expoente $\{e,c,k\}$-limitado. Assim obtemos uma série satifazendo as condições desejadas. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] ASAR, A. O., *Involutory automorphisms of groups of odd order*, Arch. Math. **36** (1981), 97-103.

[2] BERGER, T., *Nilpotent fixed pont free automorphism groups of solvable groups*, Math. Z., **131** (1973), 305-312.

[3] BURNSIDE, W., *Theory of Groups*, 2nd edition, Dover, New York, 1955.

[4] CLEMENS, K. H., *Fixpunktfreie automorfismen endlicher Gruppen*, Diplomarbeit, Mathematisches Institut der Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 1978.

[5] GOLDSCHMIDT, D. M., *Weakly Embedded 2-Local Subgroups of Finite Groups*, Journal of Algebra **21** (1972), 341-351.

[6] GORENSTEIN, D., *Finite Groups*, Harper and Row, New York, Evanston, London, 1968.

[7] GURALNICK, R., SHUMYATSKY, P., *Derived Subgroups of Fixed Points*, Israel J. Math., **126** (2001), 345-362.

[8] HALL JR, M., *The Theory of Groups*, Macmillan, New York, 1959.

[9] HALL, P., *Some Sufficient Conditions for a Group to be Nilpotent*, Illinois J. Math., **2** (1958), 787-801.

[10] HARTLEY, B., *Periodic locally soluble groups containing an element of prime order with Cernikov centralizer*, Quart J. Math. **33** (1982), 309-323.

[11] HARTLEY, B., MEIXNER, T., *Periodic groups in which the centralizer of an involution has bounded order*, J. Algebra **64** (1980), 285-291.

[12] HIGMAN, G., *Groups and Lie rings having automorphisms without non-trivial fixed points*, J. London Math. Soc., **32** (1957), 321-334.

[13] HUPPERT, B.,BLACKBURN, N., *Finite Groups II*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[14] HUPPERT, B., *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[15] KARGAPOLOV, M. I., MERZLJAKOV, Ju. I., *Fundamentals of the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York ,1979.

[16] KHUKHRO, E. I., SHUMYATSKY, P., *Bounding the exponent of a finite group with automorphisms*, J. Algebra **212** (1999), 363-374.

[17] KHUKHRO, E. I., *Nilpotent groups and their automorphisms*, (De Gruyter expositions in mathematics; 8) Berlin; New York; de Gruyter, 1993.

[18] KHUKHRO, E. I., SHUMYATSKY, P., *On Fixed Points of Automorphisms of Lie Rings and Locally Finite Groups*, Algebra and Logic **34** (1995), 395-405.

[19] KHUKHRO, E. I., *p-Automorphisms of Finite p-Groups*, Cambridge Univ. Press, Lecture Note Series **246**, 1998.

[20] KOVÁCS, L. G., *Groups with regular automorphisms of order four*, Math. Z., **75** (1961), 277-294.

[21] KOVÁCS, L. G., WALL, G. E., *Involutory Automorphisms of Groups of Odd Order and their Fixed Point Groups*, Nagoya Math J. **27** (1966), 113-120.

[22] KREKNIN, V. A., KOSTRIKIN, A. I., *On Lie Algebras with regular automorphisms*, Soviet Math. Dolk. **4** (1963), 355-357.

[23] KREKNIN, V. A., *Solvability of Lie Algebras with a regular automorphism of finite order*, Soviet Math. Dolk. **4** (1963), 683-685.

[24] KURZWEIL, H., *p-Automorfismen von auflösbaren p'-Gruppen*, Math. Z. **120** (1971), 326-354.

[25] NEUMANN, B. H., *On the commutativity of addition*, J. London Math. Soc. **15** (1940), 203-208.

[26] ROBINSON, D. J. S., *Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups, Part 1*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[27] ROBINSON, D. J. S., *A Course in the Theory of Groups, Part 1*, 2a ed., Graduate Texts in Mathematics; 80, Springer-Verlag, New York, 1995.

[28] SERRE, J. P., *Linear Representations of Finite Groups*, New York, Springer- Verlag, 1977.

[29] SHULT, E., *On groups admitting fixed point free abelian operator groups*, Illinois J. Math., **9** (1965), 701-720.

[30] SHUMYATSKY, P., *A four-group of automorfisms with a small numberv of fixed points*, Algebra and Logic, **30** no. 6, (1991), 735-746.

[31] SHUMYATSKY, P., *A variety of groups*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (2005), **138**, 21.

[32] SHUMYATSKY, P., *Centralizers of involutory automorphisms of groups of odd order*, Journal of Algebra **315** (2007), 954-962.

[33] SHUMYATSKY, P., *Exponent of a finite group with an involutory automorphism*, J. Group Theory **2** (1999), 367-372.

[34] SHUMYATSKY, P., *Finite Groups and the Fixed Points of Coprime Automorphisms*, Proc. Am. Math Soc. **129 (12)** (2001), 3479-3484.

[35] SHUMYATSKY, P., *Fixed points in finite soluble groups*, Comm. Algebra **33** (2005), no. 10, 3405-3408.

[36] SHUMYATSKY, P., *Groups with regular elementary 2-groups of automorphisms*, Algebra and Logic, **27** no. 6, (1988), 715-730.

[37] SHUMYATSKY, P., *Involutory automorphisms of finite groups and their centralizers*, Arch. Math. **71** 425-432 (1998).

[38] SHUMYATSKY, P., *Involutory automorphisms of groups of odd order*, Monatsh. Math. 146, 77-82 (2005).

[39] SHUMYATSKY, P., *Involutory automorphisms of periodic groups*, Int. J. of Algebra and Computation vol. 6, no. 6 (1996), 745-749.

[40] SHUMYATSKY, P., *Locally finite groups with an automorphisms whose centralizer is small*, Quaderni di Matematica vol. 8, edited by Dipartmento di Matematica Seconda Università di Napoli, Caserta-(2001).

[41] SHUMYATSKY, P., *On extensions of groups of finite exponent*, Glasgow Math J. **45** (2003), 535-538.

[42] SHUMYATSKY, P., *On Finite Nilpotent Groups Having Fixed Point Free Automorphisms*, UnB, Trabalhos de Matemática no 295, Junho/1996.

[43] SHUMYATSKY, P., *On Locally Finite Groups and the Centralizers of Automorphisms*, Bollettino U.M.I. **4 - B(8)** (2001), 731-736.

[44] SHUMYATSKY, P., *On Periodic Soluble Groups and the Fixed Point Groups of Operators*, Comm. Algebra **20 (10)** (1992).

[45] SHUMYATSKY, P., *On periodic solvable groups having automorphisms with nilpotent fixed point groups*, Israel Journal of Mathematics **87** (1994), 111-116.

[46] THOMPSON, J. G., *Automorphisms of Solvable Groups*, Journal of Algebra **1** (1964), 259-267.

[47] THOMPSON, J. G., *Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **45** (1959), 578-581.

[48] THOMPSON, W. Feit, *Solvability of groups of odd order*, Pacific J. Math., **13** (1963), 773-1029.

[49] TURULL, A., *Character theory and length problems, in Finite and Locally Finite Groups*, Kluwer Academic Publ., NATO ASI Series **471** Dordrecht-Boston-London (1995), 377-400.

[50] TURULL, A., *Fitting height of groups and of fixed points*, J. Algebra **86** no. 2 (1984), 555-566.

[51] WARD, J. N., *Automorphisms of finite groups and their fixed-point groups*, J. Austral. Math. Soc. **9** (1969), 467-477.

[52] WARD, J. N., *Involutory automorphisms of groups of odd order*, J. Austral. Math Soc. **6** (1966), 480-494.

[53] WARD, J. N., *On Finite Groups Admitting Automorphisms with Nilpotent Fixed Point Group*, Bull. Austral. Math. Soc. **5** (1971), 281-282.

[54] WARD, J. N., *On Finite Soluble Groups and Fixed Point Group of Automosphisms*, Bull. Austral. Math. Soc. **5** (1971), 375-378.

Índice Remissivo

álgebra de Lie, 43
  nilpotente, 46
  solúvel, 45

alfabeto, 23
automorfismo
  coprimo, 34
  livre de pontos fixos, 34

centralizador, 44
centro, 21
classe
  de grupos, 23
  de nilpotência, 25
complemento, 39
complexo
  A-complexo, 50, 55
comprimento
  de composição, 13
  de Fitting, 13
  derivado, 25
comutador, 18
  simples, 19, 45
conjugado, 18

expoente finito, 23
extensão de um grupo, 23

graduação
  G-graduação, 47

grupo
  π-grupo, 38
  completamente redutível, 31
  derivado, 19
  irredutível, 31
  nilpotente, 25
  periódico, 23
  redutível, 31

hipercentro, 21
Homomorfismo Transfer, 29

ideal A-especial, 48
Identidade
  de Hall-Witt, 18
  de Witt, 18

lei, 23
Lema dos Três Subgrupos, 20
localmente $\mathscr{C}$, 30

normalizador de uma álgebra, 44

palavra, 23
produto
  cartesiano de grupos, 27
  direto de grupos, 27
  subcartesiano, 28

representação linear, 31, 32
  grau de uma, 31

série
    central, 25
    central inferior, 20, 45
    central superior, 21, 45
    derivada, 19, 45
    solúvel, 25
subálgebra homogênea, 47
subgrupo
    S_π-subgrupo, 38
    de Fitting, 13
    verbal, 23

Teorema
    de Maschke, 32
    de Remak, 28
    de Schreier, 23, 29
    de Schur, 29
    de Schur-Zassenhaus, 38, 39
transversal à esquerda, 28

variedade, 23