Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Métricas Conformes e Quasi-Einstein em Formas Espaciais

por

Flávio Raimundo de Souza

Brasília

2006

RESUMO

Caracterizamos, em termos de equações diferenciais, as métricas $\overline{g} = \dfrac{1}{\varphi^2} g$, conformes à métrica pseudo-Euclidiana g, que são quasi-Einstein. Para um campo de vetores $V \in \chi(\mathbb{R}^n)$ (não-Killing) especial, o sistema de equações reduz-se a uma equação diferencial ordinária, cujas soluções fornecem métricas que são quasi-Einstein. Fornecemos uma solução explícita desta equação para o espaço de dimensão $n = 5$ pseudo-Euclidiano. Problemas análogos também são estudados para o espaço hiperbólico e a esfera com as métricas canônicas.

Palavras-chaves: Tensor de Ricci, Métricas Conformes, Métricas Quasi-Einstein

ABSTRACT

We characterize, in terms of differential equations, the metrics $\overline{g} = \dfrac{1}{\varphi^2} g$, conformal to the pseudo-Euclidean metric g, that are quasi-Einstein. For a special vector field $V \in \chi(\mathbb{R}^n)$ (non-Killing), the system of equations system reduces to an ordinary differential equation. We provide an explicit solution of this equation in the 5-dimensional pseudo-Euclidean space. Analogous problems are studied for the hyperbolic space and the sphere with the canonical metrics.

keywords: Ricci tensor, Conformal metrics, Quasi-Einstein metrics

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No nosso trabalho, vamos estudar certos tipos de métricas, variações das métricas de Einstein, chamadas métricas quasi-Einstein. Uma métrica é dita quasi-Einstein se satisfizer a seguinte definição:

Definição: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana, ∇ a conexão de Levi-Civita e Ric_g o tensor de Ricci da métrica Riemanniana g. Dizemos que (M, g) é *quasi-Einstein*, ou que, g é uma métrica *quasi-Einstein*, se

$$Ric_g(X, Y) = \lambda g(X, Y) + g(\nabla_X V, Y) + g(\nabla_Y V, X), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

para algum campo de vetor (não-Killing) $V \in \chi(M)$ e para todos $X, Y \in \chi(M)$.

Quando o campo V é Killing, então a métrica g satisfaz $Ric_g(X, Y) = \lambda g(X, Y)$ e portanto é uma métrica de Einstein.

O primeiro pesquisador a verificar a importância de uma métrica quasi-Einstein foi D. H. Friedan, em sua tese para obtenção do título de Ph.D., submetida ao Departamento de Física da Universidade da Califórnia em Berkeley(Agosto/1980). A referida tese tornou um artigo, com o título: *Nonlinear models in* $2 + \epsilon$ *dimensions* [15].

As métricas quasi-Einstein são utilizadas tanto na Matemática (Geometria) quanto na Física (Teoria da Relatividade). A importância de tais métricas na Física pode ser encontrada em vários trabalhos, dentre eles, o de Friedan [15].

O trabalho pioneiro de Friedan [15], conduziu vários pesquisadores a trabalharem com tais métricas. Entre eles, podemos destacar, Chave e Valent [10] construíram uma família de métricas quasi-Einstein Kahleriana com um grupo de isometria $U(n)$ agindo linearmente sobre as coordenadas holomórficas. Pedersen, Tonnnesen-Friedman e Valent [29] construíram, uma espécie de "algoritmo" para obter métricas Kähler quasi-Einstein e construíram novos exemplos completos.

Derdzinski e Mascher [13] realizaram uma exposição de resultados sobre solitons de Ricci compactos (ou, variedades quasi-Einstein compactas). Nesse mesmo preprint, encontramos uma boa e vasta bibliografia sobre métricas quasi-Einstein.

Motivados pelo estudo, realizado por Pina e Tenenblat [27], [28] sobre métricas de Einstein conformes às formas espaciais, consideramos o seguinte problema:

"Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Existe uma métrica $\overline{g}$ conforme a g tal que $(M, \overline{g})$ é quasi-Einstein?"

Estudamos o problema acima no espaço pseudo-Euclidiano, no espaço hiperbólico e na esfera.

No Capítulo 1, apresentamos um resumo dos resultados que serão úteis nos capítulos subseqüentes.

No Capítulo 2, trabalhamos com o espaço pseudo-Euclidiano $(\mathbb{R}^n, g)$, $n \geq 3$. Considerando coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, onde $\varepsilon_i = \pm 1$, veremos que a métrica $\overline{g} = \dfrac{1}{\varphi^2} g$ é quasi-Einstein se, e só se, satisfaz o seguinte sistema

$$\frac{1}{\varphi^2}\left\{(n-2)\varphi Hess_g(\varphi)_{ij} + \left[\varphi\Delta_g\varphi - (n-1)\|grad_g\varphi\|^2\right]\delta_{ij}\varepsilon_i\right\} = \frac{1}{\varphi^2}\lambda\delta_{ij}\varepsilon_i$$
$$+\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\left(\sum_k f_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right), \frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\left(\sum_k f_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right), \frac{\partial}{\partial x_i}\right),$$

para algum campo não-Killing $V = \sum_k f_k \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ onde $\overline{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita para $\overline{g} = \dfrac{1}{\varphi^2} g$.

Do sistema anterior, obtivemos o seguinte teorema para o espaço pseudo-Euclidiano.

Teorema: *Seja* $(\mathbb{R}^n, g)$, $n \geq 3$, *o espaço pseudo-Euclidiano com sistema de coordenadas tal que* $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \pm 1$. *Então, existe métrica* $\overline{g} = \dfrac{1}{\varphi^2}g$ *quasi-Einstein para um campo não-Killing* $V = \sum_k f_k \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ *se, e só se,* φ *e* f_k *satisfazem*

$$\varphi_{x_i x_j} = \frac{1}{(n-2)\varphi}\left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\varepsilon_i + \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\varepsilon_j\right\}, \quad \forall\, i \neq j, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{x_i x_i} &= \frac{\varepsilon_i}{2(n-1)\varphi}\left\{\lambda + (n-1)\|grad_g\, \varphi\|^2 - \frac{2}{n-2}\sum_{m\neq i}\frac{\partial f_m}{\partial x_m}\right.\\ &+ \left.\frac{2(2n-3)}{n-2}\frac{\partial f_i}{\partial x_i} - \frac{2}{\varphi}\sum_k f_k \varphi_{x_k}\right\}, \quad \forall\, i\end{aligned} \tag{2}$$

e

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} - \frac{1}{\varphi}\sum_k f_k\varphi_{x_k}\right)^2 + \sum_{i\neq j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\varphi_j + \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\varphi_i\right)^2 \neq 0. \tag{3}$$

Escolhendo o campo da forma $V = (a_1, \ldots, f(x_l), \ldots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{R}$, obtivemos uma classe de métricas quasi-Einstein ao espaço Pseudo-Euclidiano, dada pela seguinte proposição.

Proposição: *Seja* $(\mathbb{R}^n, g)$, $n \geq 3$, *um espaço pseudo-Euclidiano com coordenadas* $(x_1, \ldots, x_n)$ *e métrica* g, *tal que* $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \pm 1$. *Então, fixado* l, *para toda solução não-constante* $\psi(x_l)$ *da equação diferencial ordinária*

$$\left[\frac{\psi''\psi^2}{\psi'}\right]' - \psi''\psi - \varepsilon_l\lambda\left[\frac{\psi}{\psi'}\right]' - (n-1)\,[\psi']^2 = 0, \tag{4}$$

temos que $(U, \dfrac{1}{(\psi(x_l))^2}g)$, *é quasi-Einstein para o campo* $V = \sum_{k\neq l} a_k\dfrac{\partial}{\partial x_k} + f(x_l)\dfrac{\partial}{\partial x_l}$, $a_i \in \mathbb{R}$, *onde*

$$f(x_l) = \frac{\lambda}{2}\frac{\psi}{\psi'} + \frac{\varepsilon_l(n-1)}{2}\psi'\psi - \frac{\varepsilon_l}{2}\frac{\psi''\psi^2}{\psi'}$$

e $U \subset \mathbb{R}^n$ *é um aberto onde* ψ, ψ' *e* f *não se anulam.*

Neste capítulo, apresentamos um exemplo explícito de solução da equação (4), no caso $\lambda = 0$ e $n = 5$.

No Capítulo 3, provamos o seguinte teorema para o espaço hiperbólico.

Teorema: *Seja* $(\mathbb{R}^n_+, g)$, $n \geq 3$, *o semi-spaço superior com a métrica em sistema de coordenadas* $(x_1, \ldots, x_n)$ *dada por* $g_{ij} = \dfrac{1}{x_n^2}\delta_{ij}$. *Existe métrica* $\overline{g} = \dfrac{1}{\varphi^2} g$ *quasi-Einstein em* $\mathbb{R}^n_+$ *para um campo não-Killing* $V = \sum_k f_k \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ *se, e só se,* $\varphi = \dfrac{\psi}{x_n}$, f_k *e* ψ *satisfazem as equações* (1), (2) *e* (3) *com* $\varepsilon_i = 1$.

Também provamos uma proposição análoga ao caso pseudo-Euclidiano e obtemos um exemplo explícito quando $n = 5$. Provamos ainda, que para $x_l = x_5$, com escolha conveniente de alguns coeficientes, a métrica está definida para todo $\mathbb{R}^5_+$, entretanto o semi-espaço com tal métrica não é completo.

No Capítulo 4, estudamos o problema para a esfera. Obtivemos um teorema, uma proposição e um exemplo análogos ao caso pseudo-Euclidiano. Observamos que a solução para $\lambda = 0$ e $n = 5$ não está definida em toda a esfera.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Abunahman, S. A., *Equações Diferenciais*, LTC Editora, 2ª Impressão, Rio de Janeiro (1980).

[2] Aubin, T., *Nonlinear Analysis on manifolds*, Monge-Ampére Equations, Springer-Verlag, New York, 1982.

[3] Besse, A., *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[4] Boyce, W. E., DiPrima, R. C., *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Editora Guanabara, 3ª Ed., Rio de Janeiro(1988).

[5] Bouruignon, J. P., Ezin, J. P., *Scalar curvature functions in a conformal class of metrics and conformal transformations*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 301, N. 2(1987), 723-736.

[6] Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, (1988).

[7] Cao, H-D., Chow, B., *Recent developments on the Ricci flow*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 36, N. 1 (1999), 59-74.

[8] Chaki, M. C., Maity, R. K., *On quasi Einstein manifolds*, Publ. Math. Debrecen 57/3-4 (2000), 297-306.

[9] Chaki, M. C., Ghoshal, P. K., *Some global properties of quasi Einstein manifolds*, Publ. Math. Debrecen 63/4 (2003), 635-641.

[10] Chavel, T., Valent, G., *On a class of compact and non-compact quasi-Einstein metrics and their renormalizability properties*, Nuclear Physics B 478(1996), 758-778.

[11] Deszcz, R., Dillen, F., Verstraelen, L., Vrancken, L., *Quasi-Einstein totally submanifolds of the nearly Kähler 6-Sphere*, Tohoku Math. J. 51(1999), 461-478.

[12] De, U. C., Ghosh, G. C., *On quasi Einstein Manifolds*, Periodica mathematica Hungarica, Vol. 48/1-2 (2004), 223-231.

[13] Derdzinski, A., Maschler, G., *Compact Ricci solitons*, 2005, preprint.

[14] Eisenhart, P. L., *Riemannian Geometrics*, Princeton, $5^{\underline{a}}$ Impressão (1964).

[15] Friedan, D. H., *Nonlinear Models in* $2+\varepsilon$ *Dimensions*, Annals of Physics 16, (1985), 318-419.

[16] Hamilton, R. S., *The Ricci Curvature equation*, Seminar on Nonlinear Partial Differential Equations(Berkeley, California, 1983), 47-72.

[17] Ince, E. L., *Ordinary differential Equations*, Dover publications, Inc.,New York, $3^{\underline{a}}$ Edition (1962).

[18] Ivey, T., *Ricci solitons on compact Kähler surfaces*, Proc. of the American Mathematical Society, Vol. 125, N. 4(1997), 1203-1208.

[19] Ivey, T., *New examples of complete Ricci solitons*, Proc. of the American Mathematical Society, Vol. 122, N. 1(1994), 241-245.

[20] Koiso, N., *On rotationally symetric Hamilton's equation for Kähler-Einstein metrics*, Adv. Stud. Pure Math. 18-I, (1990), 327-337.

[21] Külnel, W., *Differential Geometry*, Curves - Surfaces - Manifolds, Translated from the 1999 German original by Bruce Hunt. Student Mathetmatical Library,16. American Mathematical Society, Providence, RI,(2002).

[22] ——————, *Conformal Transformations between Einstein Spaces*, Conformal Geometry(Bonn, 1985/1986), Aspects of Math.,E 12, Vieweg, Braunschweig, (1988), 105-146.

[23] Kühnel, W., Rademacher, H. B., *Conformal diffeomorphisms Preserving the Ricci Tensor*, Proc. of the American Mathematical Society, Vol. 123,(1995), 2841-2848.

[24] Mahuya, B., *Some global properties of quasi Einstein manifolds*, Bull. Calcutta Math. Soc. 94, N. 6(2002), 483-486.

[25] O'Neill, B., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, 1983.

[26] Petean, J., *Indefinite Kähler-Einstein metrics on Compact complex surfaces*, Commun. Math. Phys. 189(1997), 227-235.

[27] Pina, R. S., Tenenblat, K., *Conformal metrics and Ricci Tensors on the sphere*, Proc. of the American Mathematical Society, Vol. 132, N. 12(2004), 3715-3724.

[28] ——————, *On the Ricci and Einstein equations on the pseudo-euclidean and hyperbolic spaces*, Differential Geometry and its Applications 24(2006), 101-107.

[29] Pedersen, H., Tonnesen-Friedman, C., Valent, G., *Quasi-Einstein Kähler Metrics*, Letters Mathematical Physics 50 (1999), 229-241.

[30] Xu, X., *Prescribing a Ricci Tensor in a Conformal Class of Riemannian metrics*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 115, (1992), 455-459.