Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Equações Elípticas com Potencial Singular

por

Roberval de Jesus Leone dos Santos

Brasília
2006

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Equações Elípticas com Potencial Singular

por

Roberval de Jesus Leone dos Santos

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 15 de dezembro de 2006

Comissão Examinadora:

Prof. José Valdo Abreu Gonçalves - MAT/UnB (Orientador)

Prof. Ma To Fu - ICMC/USP

Prof. Arthur Vicentini Ferreira de Azevedo - MAT/UnB

Prof. Olímpio Hiroshi Miyagaki - DM/UFV

Prof. Carlos Alberto Pereira dos Santos - MAT/UnB

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. José Valdo pela orientação perfeita e marcante. Distinguir, em matemática, aquilo que parece ser daquilo que, de fato, é, fazendo, ainda, uso de uma argumentação bela, serena e inequívoca, compete a pouquíssimos: somente aos "escolhidos"como ele.

Ao Prof. Antonio Luiz de Melo, que me fez passar por uma das portas estreitas. A seguir, viriam outras portas cada vez mais delgadas e, durante a trajetória, encontrei vários colegas de mão aberta, especialmente: Rogério, ainda no curso de mestrado, Angelo R. F. de Holanda, Juliana Rabelo e Jiazheng Zhou.

Ao Prof. Carlos Alberto P. dos Santos, que acompanhou meus trabalhos.

Ao Sr. Manuel, meu amigo, profissional exemplar.

Aos dirigentes com os quais trabalhei, no exercício da função pública: Ney Leal, Geraldo Garcia, Afonso de Almeida e Maurício Muniz.

Aos meus amigos Nilson Figueiredo Filho e Jorge Eurico: no momento adequado indicaram-me quando haveria bom tempo e onde estaria o porto seguro. Ambos foram atingidos.

Por fim, à minha família pela inquebrantável presença: suprema deve ser a obstinação mesmo sendo ínfima a esperança.

Sumário

Resumo

Neste trabalho formulamos e provamos resultados sobre existência, multiplicidade, unicidade e taxa de decaimento no infinito de soluções de equações elípticas semilineares com um potencial singular. Em alguns casos, provamos que a solução explode na origem. Discutimos também o comportamento de soluções com relação a parâmetros envolvidos nas equações. São utilizados métodos variacionais, concentração-compacidade, sub e supersoluções e é explorada a simetria de classes de equações associadas.

Abstract

In this work we establish results on existence, multiplicity, uniqueness and the rate of decay at infinity of solutions of semilinear elliptic equations with a singular potential. In certain situations we show that the solutions blowup at the origin. We also discuss the behavior of the solutions with respect to the parameters appearing in the elliptic equation. Variational methods, the concentration-compactness principle, the lower and upper solutions technique and symmetry arguments are exploited.

Introdução

Neste trabalho estudamos existência, multiplicidade, unicidade, regularidade e comportamento qualitativo de soluções da equação com um potencial singular

$$-\Delta u = \lambda \frac{u_+^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta} + \alpha k(x) u_+^q + \mu f(x) \ \text{ em } \ \mathbf{R}^N, \tag{0.1}$$

onde $\lambda,\ \alpha,\ \mu \geq 0$ são parâmetros, $2_\theta^* := 2\ (N-\theta)/(N-2)$, $0 \leq \theta \leq 2$, $q \in (0,\ 1) \cup (1,\ 2^*-1)$, $2^* := 2_0^*$, $N \geq 3$, $|x|$ é a norma euclidiana de x, $u_+ := \max\{0, u\}$ e $k,\ f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ satisfazem as seguintes condições:

$$k,\ f \in C(\mathbf{R}^N) \tag*{$(kf)_1$}$$

$$k,\ f \geq 0 \ \text{ e } \ k,\ f \not\equiv 0. \tag*{$(kf)_2$}$$

No Capítulo 1 provaremos resultados técnicos para (0.1) que serão úteis nas demonstrações dos nossos resultados principais.

No Capítulo 2 faremos $\alpha = 0$ em (0.1), a qual se reescreve como

$$-\Delta u = \lambda \frac{u_+^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta} + \mu f(x) \ \text{ em } \ \mathbf{R}^N. \tag{0.2}$$

Nos Capítulos 3 e 4 consideraremos (0.1) com a perturbação homogênea, com crescimento sublinear ($0 < q < 1$) e com crescimento subcrítico ($1 < q < 2^* - 1$), respectivamente, fazendo em (0.1) $\mu = 0$. Em ambos os casos, (0.1) torna-se:

$$-\Delta u = \lambda \frac{u_+^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta} + \alpha k(x) u_+^q \quad \text{em} \quad \mathbf{R}^N. \tag{0.3}$$

A literatura a respeito de (0.1) é vasta. Consideraremos, a seguir, alguns resultados e quais as melhorias que neles implementamos com este trabalho.

Pan [34] demonstrou que a equação

$$-\Delta u = u_+^{2^*-1} + k(x) u_+^q \quad \text{em} \quad \mathbf{R}^N,$$

onde $N \geq 3$, $k : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ é contínua, $k \geq 0$, $k \not\equiv 0$ e $1 < q < 2^* - 1$, admite uma solução positiva $u \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$, desde que k satisfaça certas condições de integrabilidade. Pan [34] usou uma variante do Teorema do Passo da Montanha em cones devida a Hofer [26].

Melhoramos o teorema 2 de Pan [34] ao caracterizarmos um blow-up da solução na origem para várias situações de θ da correspondente equação radial de (0.3).

Gonçalves e Alves [24] estenderam o principal resultado de Pan [34] usando uma técnica desenvolvida por Brézis e Nirenberg [11] junto com uma variante do Teorema do Passo da Montanha de Brézis e Nirenberg [11], provando a existência de solução não-negativa e não-identicamente nula com energia positiva em $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + h(x) u^q \quad \text{em} \quad \mathbf{R}^N, \\ \\ u \geq 0, \quad u \not\equiv 0, \end{cases} \tag{0.4}$$

onde $N > 2$, $h \in L^\theta(\mathbf{R}^N)$ com $\theta = \dfrac{2N}{2N - (q+1)(N-2)}$, $h \geq 0$, $h \not\equiv 0$ e valem: (i) $0 < q < 1$ e $|h|_{L^\theta(\mathbf{R}^N)}$ é pequeno no sentido apropriado ou (ii) $1 < q < 2^* - 1$.

Nosso trabalho estende os resultados de Gonçalves e Alves [24] devido à presença de um potencial singular acoplado à potência crítica como em (0.3) e encontra uma solução adicional em $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ com energia negativa. Além disso, mostramos um blow-up da solução na origem e calculamos a taxa de decaimento no infinito da solução, sob certas condições.

Assunção [5] (cf. também Assunção, Carrião e Miyagaki em [6]) provou existência e multiplicidade de soluções em $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ via métodos variacionais para a equação geral

$$-div\left(\frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{|x|^{ap}}\right) + \lambda \frac{|u|^{p-2}u}{|x|^{(a+1)p}} = \alpha \frac{|u|^{q-2}u}{|x|^{bq}} + \beta k(x) \frac{|u|^{r-2}u}{|x|^{dr}} + f(x) \quad \text{em} \quad \mathbf{R}^N, \tag{0.5}$$

onde $1 < p \leq N-1$, $N \geq 3$, $q = \dfrac{Np}{N-p(a+1-b)}$, α, β, λ são parâmetros, $0 \leq a < \dfrac{N-p}{p}$, $a \leq b \leq a+1$, d, $r \in \mathbf{R}$, $k \in L^{\frac{q}{q-r}}_{r(d-b)}(\mathbf{R}^N)$ e $f \in (L^q_b(\mathbf{R}^N))'$.

Para o caso particular de (0.5) com $p = 2$, $a = 0$, $\lambda = \beta = 0$, $\alpha > 0$, $q = 2^*_\theta$ e $b = \theta/2^*_\theta$, melhoramos (0.5) adicionando-lhe vários resultados de regularidade e comportamento assintótico das soluções determinadas pelo teorema 1.6 de Assunção [5].

Alves, Gonçalves e Santos [3] provaram, usando métodos variacionais, minimização clássica e técnicas de sub e supersoluções, que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \dfrac{g(u)}{|x|^\theta} + \rho(x) f(u) \text{ em } \mathbf{R}^N, \\ \\ u > 0 \text{ em } \mathbf{R}^N, \qquad u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases}$$

onde $N > 2$, $\rho : \mathbf{R}^N \to [0, \infty)$, $\rho \not\equiv 0$, $\lambda \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2$ e f, $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ contínuas e não-decrescentes, admite uma solução em $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ para certas condições adicionais técnicas de ρ, f, g. Alves, Gonçalves e Santos [3] encontraram, ainda, resultados de regularidade da solução e sua taxa de decaimento.

Nosso trabalho faz uso de várias técnicas adotadas por Gonçalves e Alves [24] e Alves, Gonçalves e Santos [3] no que se refere ao estudo da existência, regularidade e comportamento assintótico da solução no infinito e melhora os resultados de Alves, Gonçalves e Santos [3] ao encontrar uma solução adicional com energia negativa, fazer análise quantitativa de parâmetros e provar a unicidade para o caso $\theta = 2$.

Em domínio limitado, Tarantello [40] mostrou que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2} u + f(x) \quad \text{em } \Omega, \\ \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.6}$$

onde Ω é um domínio limitado com fronteira regular $\partial\Omega$, admite ao menos duas soluções não-negativas em $H^1_0(\Omega)$, se $f \in H^{-1}(\Omega)$ é não-negativa, não-identicamente nula e $|f|_{H^{-1}(\Omega)}$ é suficientemente pequena.

A equação (0.2) generaliza (0.6) para o $\mathbf{R}^N$ e estende resultados de Tarantello [40] para $0 < \theta \leq 2$.

Dupaigne [16] provou que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \dfrac{u}{|x|^2} + f(x) \text{ em } \Omega, \\ \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado com fronteira regular $\partial\Omega$, admite uma única solução em $H_0^1(\Omega)$, desde que $\lambda \in (0, (N-2)^2/4)$ e $f \in H^{-1}(\Omega)$. Esse resultado é estendido, neste trabalho, para o $\mathbf{R}^N$.

Voltando ao $\mathbf{R}^N$, Montefusco [33] mostrou que a equação

$$-\Delta u = \lambda \frac{u}{|x|^2} + f(x) \ \text{ em } \ \mathbf{R}^N$$

admite uma solução em $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$, desde que

$$\lambda \in (0, H),\ f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\mathbf{R}^N),\ f(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ e } f(x) \geq \delta_0 \text{ qtp em } B,$$

onde, $H = (\frac{N-2}{2})^2$, $\delta_0 > 0$ é uma constante conveniente e $B \subset \mathbf{R}^N$ é alguma bola.

Em nosso trabalho (equação (0.2) com $\mu = 1$ e $\theta = 2$), a função f é mais geral do que a adotada por Montefusco, podendo ser, por exemplo, do tipo dente-de-serra.

Recentemente, Hirano, Micheletti e Pistoia [25] provaram que a equação

$$-\Delta u = |u|^{2^*-2}u + f(x) \ \text{ em } \ \mathbf{R}^N$$

admite ao menos três soluções em $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$, sendo duas positivas e uma não-positiva, se $3 \leq N \leq 6$ e $f \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ é não-negativa, não-identicamente nula e satisfaz condições adicionais técnicas.

Estendemos este resultado quanto às duas soluções positivas sem fazer restrições do tipo $3 \leq N \leq 6$ e $\theta = 0$.

Nossos resultados são motivados por alguns problemas físicos ou matemáticos disponíveis na literatura. Fazemos referência a alguns deles.

A equação (0.2) aparece em teoria da probabilidade, no estudo de processos estocásticos (cf. Bernard [8]). Como exemplo de modelagem física tem-se o movimento super-browniano estudado por Lee [28].

A equação (0.2) também faz-se presente, especialmente quando $\theta = 2$, em problemas de combustão (cf. Peral e Vázquez [35]) e na Lei de Coulomb (cf. Fefferman [20]).

A equação (0.3), quando $\lambda = \mu = 0$ e $q > 1$, surge em geometria riemanniana, sendo k a curvatura escalar (cf. Ding e Ni [14] e Li e Ni [29]).

A seguir, firmamos algumas notações, condições e observações para enunciarmos nossos resultados principais, que serão provados nos Capítulos 2, 3 e 4 a partir de resultados auxiliares obtidos no Capítulo 1.

Definindo

$$\widehat{k}(r) := \max_{|x|:=r} k(x),\ r \geq 0 \ \text{ e } \ \widehat{f}(r) := \max_{|x|:=r} f(x),\ r \geq 0,$$

temos que $\widehat{k}$ e $\widehat{f}$ são funções radialmente simétricas satisfazendo, respectivamente,

$$\widehat{k} \in C(\mathbf{R}^N),\ \widehat{k} \geq 0 \ \text{ e } \ \widehat{k} \not\equiv 0\ ,\ \widehat{f} \in C(\mathbf{R}^N),\ \widehat{f} \geq 0 \ \text{ e } \ \widehat{f} \not\equiv 0.$$

Suporemos que

$$\widehat{k} \in L^a_{rad}(\mathbf{R}^N), \quad \widehat{f} \in L^b_{rad}(\mathbf{R}^N), \tag{$(kf)_3$}$$

onde $a := \dfrac{2N}{(N+2)-(N-2)q}$, $b := \dfrac{2N}{N+2}$ e $L^a_{rad}(\mathbf{R}^N)$, $L^b_{rad}(\mathbf{R}^N)$ são, respectivamente, os subespaços fechados das funções radialmente simétricas de $L^a(\mathbf{R}^N)$ e $L^b(\mathbf{R}^N)$.

Denotaremos por $\|\cdot\|$ a norma de $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ e de $D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ e escreveremos $\displaystyle\int := \int_{\mathbf{R}^N}$. Dado um espaço normado E sobre um domínio $\Omega \subseteq \mathbf{R}^N$, denotaremos sua norma por $|\cdot|_E := |\cdot|_{E(\Omega)}$. Sempre que não haja confusão de notação, faremos $E := E(\Omega)$. Por fim, lembramos que ω_N é o volume da bola unitária de $\mathbf{R}^N$.

Os dois números reais positivos seguintes exercerão papel importante em métodos variacionais:

$$\bar{\alpha} := \left\{ 2\frac{S_\theta^{-2^*_\theta/2}}{2^*_\theta}\left[\frac{(\frac{1-q}{q+1})S_0^{-(q+1)/2}|\widehat{k}|_{L^a_{rad}}}{(2^*_\theta-2)\frac{S_\theta^{-2^*_\theta/2}}{2^*_\theta}}\right]^{\frac{2^*_\theta-2}{2^*_\theta-1-q}} + 2\frac{S_0^{-(q+1)/2}|\widehat{k}|_{L^a_{rad}}}{q+1}\left[\frac{(2^*_\theta-2)\frac{S_\theta^{-2^*_\theta/2}}{2^*_\theta}}{(\frac{1-q}{q+1})S_0^{-(q+1)/2}|\widehat{k}|_{L^a_{rad}}}\right]^{\frac{1-q}{2^*_\theta-1-q}}\right\}^{\frac{q+1-2^*_\theta}{2^*_\theta-2}}$$

e

$$\bar{\mu} := \left(\frac{2^*_\theta}{S_\theta^{-2^*_\theta/2}}\right)^{\frac{1}{2^*_\theta-2}} \frac{(2^*_\theta-2)}{S_0^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}}\left[2(2^*_\theta-1)\right]^{\frac{2^*_\theta-1}{2^*_\theta-2}}},$$

onde

$$S_\theta := \inf_{u\in D^{1,2},\ u\not\equiv 0} \frac{\displaystyle\int |\nabla u|^2 dx}{\left(\displaystyle\int \frac{|u|^{2^*_\theta}}{|x|^\theta}dx\right)^{\frac{2}{2^*_\theta}}}$$

é a melhor constante para a imersão

$$D^{1,2}(\mathbf{R}^N) \hookrightarrow L_\theta^{2_\theta^*}(\mathbf{R}^N) := L^{2^*}(\mathbf{R}^N, 1/|x|^\theta \, dx),$$

decorrente da desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12], que se escreve:

$$|u|_{L_\theta^{2_\theta^*}} \leq S_\theta^{-1/2} \|u\|, \; u \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N),$$

e S_0 é a melhor constante para a imersão de Sobolev, a saber:

$$D^{1,2}(\mathbf{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbf{R}^N).$$

Notemos que quando $\theta = 0$, a desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12] reduz-se à desigualdade de Sobolev, a qual implica a imersão antes mencionada.

Do Carmo e Xia [15] provaram que a desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12] é satisfeita não apenas sobre o espaço euclidiano ordinário, mas também sobre variedades completas com curvatura de Ricci não-negativa e dimensão $N \geq 3$.

No caso $\theta = 2$, a desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12] torna-se a desigualdade de Hardy, a saber:

$$|u|_{L_2^2} \leq S_2^{-1/2} \|u\|, \; u \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N).$$

Foi provado por Ghoussoub e Yuan [22] que para $\theta \in [0, \; 2)$, S_θ é atingida em

$$w_\delta(x) = [\delta(N-\theta)(N-2)]^{\frac{N-2}{2(2-\theta)}} (\delta + |x|^{2-\theta})^{\frac{2-N}{2-\theta}}, \tag{W_δ}$$

onde $\delta > 0$ e que, de fato, a família de funções $\{w_\delta\}$ provê as únicas soluções positivas radialmente simétricas em $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ para a equação

$$-\Delta u = \lambda \frac{u^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta} \quad \text{em} \quad \mathbf{R}^N \tag{E_θ}$$

com $\lambda = 1$. Decorre que

$$\|w_\delta\|^2 = |w_\delta|_{L_\theta^{2_\theta^*}}^{2_\theta^*} = S_\theta^{\frac{N-\theta}{2-\theta}}. \tag{$C_{N,\theta}$}$$

O caso $\theta = 2$ de (E_θ) foi estudado por Catrina e Wang [13]. Esses autores mostraram que (E_θ) não admite solução não-trivial, se $\lambda \in (0, S_2)$ e que S_2 nunca é atingida.

Para estabelecermos nossos resultados, consideraremos a seguinte equação associada a (0.1):

$$-\Delta\widehat{u} = \lambda\frac{\widehat{u}_+^{2^*_\theta-1}}{|x|^\theta} + \alpha\widehat{k}(x)\widehat{u}_+^q + \mu\widehat{f}(x) \quad \text{em} \quad \mathbf{R}^N. \tag{0.7}$$

No Capítulo 1 provaremos resultados técnicos para (0.7) que auxiliarão na demonstração dos teoremas enunciados adiante.

No Capítulo 2 trataremos (0.7) com a perturbação não-homogênea ($\alpha = 0$) como a equação associada a (0.2).

Nos Capítulos 3 e 4 consideraremos (0.7) com a perturbação homogênea ($\mu = 0$), com crescimento sublinear ($0 < q < 1$) e com crescimento subcrítico ($1 < q < 2^* - 1$), respectivamente, como a equação associada a (0.3).

Seja $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$. O funcional de Euler-Lagrange correspondente a (0.7) é definido por

$$I(\widehat{u}) = \frac{1}{2}\int |\nabla\widehat{u}|^2 dx - \frac{\lambda}{2^*_\theta}\int \frac{\widehat{u}_+^{2^*_\theta}}{|x|^\theta}dx - \frac{\alpha}{q+1}\int \widehat{k}\widehat{u}_+^{q+1}dx - \mu\int \widehat{f}\widehat{u}dx. \tag{0.8}$$

I é de classe $C^1(D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N),\ \mathbf{R})$ em virtude da desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12] (cf. Apêndice A) e sua derivada de Gâteaux é dada, para cada $\phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$, por

$$\langle I'(\widehat{u}), \phi\rangle = \int \nabla\widehat{u}\cdot\nabla\phi dx - \lambda\int \frac{\widehat{u}_+^{2^*_\theta-1}}{|x|^\theta}\phi dx - \alpha\int \widehat{k}\widehat{u}_+^q\phi dx - \mu\int \widehat{f}\phi dx. \tag{0.9}$$

Adotaremos a mesma notação I e I', respectivamente, para o funcional e sua derivada relativamente às equações associadas a (0.2) e a (0.3).

Uma solução fraca de (0.7) é um elemento $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ satisfazendo, para cada $\phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$,

$$\int \nabla\widehat{u}\cdot\nabla\phi dx = \lambda\int \frac{\widehat{u}_+^{2^*_\theta-1}}{|x|^\theta}\ \phi dx + \alpha\int \widehat{k}\widehat{u}_+^q\ \phi dx + \mu\int \widehat{f}\ \phi dx. \tag{0.10}$$

Nossos principais resultados são enunciados a seguir.

Nosso primeiro teorema fornece propriedades de regularidade e comportamento assintótico no infinito e na origem para soluções radialmente simétricas de (0.7) com $\alpha = 0$. Garante também existência, multiplicidade e, em certos casos, unicidade de soluções dessa equação. Formulamos abaixo o teorema.

Teorema A. *Sejam* $\lambda \geq 0$, $\alpha = 0$, $\mu > 0$ *e* $\theta \in [0, 2]$ *em* (0.7). *Suponha* $(kf)_1$, $(kf)_2$ *e* $(kf)_3$. *Se* $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ *é uma solução fraca não-negativa de* (0.7), *então*

(*i*) $\widehat{u} \in C^2(\mathbf{R}^N \setminus \{0\}\ )$, $\nabla \widehat{u}(x) \cdot x < 0$ *em* $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ *e* $\widehat{u} > 0$ *em* $\mathbf{R}^N$,

(*ii*) $\widehat{u}(x)^{2^*_\theta} = O\left(\dfrac{\|\widehat{u}\|^2}{\dfrac{\lambda \omega_N}{N-\theta}|x|^{N-\theta} + \mu \displaystyle\int_{B_{|x|}(0)} \widehat{f} dy} \right)$ *quando* $|x| \to \infty$,

(*iii*) $\widehat{u}(x) \overset{|x| \to 0}{\longrightarrow} \infty$, *se adicionalmente* $\widehat{f}$ *satisfaz:*

$$\widehat{f} \in C^1(\mathbf{R}^N),\ \ \widehat{f} > 0,\ \ \frac{N+2}{2}\widehat{f}(x) + \nabla \widehat{f}(x) \cdot x \geq 0 \ \ e \tag{0.11}$$

$$|\nabla \widehat{f}(x)| = O(|x|^{-c}) \text{ quando } |x| \to \infty, \text{ onde } c > \frac{N+4}{2}.$$

Além disso, (0.7) *admite*

(*iv*) *duas soluções fracas* $\widehat{u}^1,\ \widehat{u}^2 \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ *tais que* $\widehat{u}^1,\ \widehat{u}^2 \geq 0$, $\widehat{u}^1,\ \widehat{u}^2 \not\equiv 0$

e $I(\widehat{u}^1) < 0 < I(\widehat{u}^2)$ *se*

$$0 \leq \theta < 2, \quad \lambda = 1 \quad e \quad 0 < \mu < \bar{\mu},$$

(*v*) *uma solução fraca* $\widehat{u}^3 \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ *tal que* $\widehat{u}^3 \geq 0$, $\widehat{u}^3 \not\equiv 0$ *e* $I(\widehat{u}^3) < 0$ *se*

$$\theta = 2, \quad 0 \leq \lambda < S_2, \quad \mu > 0.$$

No caso (*v*), *a solução é única se adicionalmente* $\widehat{f} > 0$.

Observação *Um exemplo de função que satisfaz a condição* (0.11) *é apresentado no Apêndice B.*

Nosso segundo resultado refere-se à equação (0.1) com $\alpha = 0$. Não são exigidas condições de simetrias. É estudado o comportamento das eventuais soluções com relação aos parâmetros μ e λ e, por fim, obtemos condições para a existência de soluções fracas e descrevemos seu decaimento no infinito.

Teorema B. *Sejam $\lambda \geq 0$, $\alpha = 0$, $\mu > 0$ e $\theta \in [0,2]$ em (0.1) e em (0.7) e seja $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ uma solução fraca de (0.7). Suponha $(kf)_1$, $(kf)_2$ e $(kf)_3$. Se $u \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ é uma solução fraca positiva de (0.1) no sentido de $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ tal que $u \leq \widehat{u}$, então*

$$(i) \quad u \overset{\mu\to\infty}{\to} 0 \quad \text{em } L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^N\backslash\{0\}) \quad \text{se} \quad \int_{r\leq|y|\leq R} f(y)dy > 0, \quad 0 < r < R < \infty,$$

$$(ii) \quad u \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0 \quad \text{em } L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^N\backslash\{0\}),$$

$$(iii) \quad u \overset{\mu\to 0}{\to} 0 \quad \text{em } D^{1,2}(\mathbf{R}^N) \quad \text{se} \quad \theta = 2 \quad e \quad \lambda \in [0, S_2).$$

Além disso, (0.1) admite uma solução fraca positiva $u \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ no sentido de $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ com $u \leq \widehat{u}$ se valem:

$$(iv) \quad 0 \leq \theta < 2, \;\; 0 \leq \lambda \leq 1 \;\; e \;\; 0 < \mu < \bar{\mu}$$

ou

$$(v) \quad \theta = 2, \;\; 0 \leq \lambda < S_2 \;\; e \;\; \mu > 0.$$

Adicionalmente,

$$(vi) \quad u(x)^{2^*_\theta} = O\Bigg(\frac{1}{\frac{\lambda\omega_N}{N-\theta}|x|^{N-\theta} + \mu\int_{B_{|x|}(0)} f(y)dy}\Bigg) \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty.$$

Nosso terceiro teorema fornece propriedades de regularidade e comportamento assintótico no infinito e na origem para soluções radialmente simétricas de (0.7) com $\mu = 0$ e $0 < q < 1$ (crescimento sublinear). Garante também existência, multiplicidade e, em certos casos, unicidade de soluções dessa equação. Formulamos abaixo o teorema.

Teorema C. *Sejam* $\lambda \geq 0$, $\alpha > 0$, $\mu = 0$, $0 < q < 1$ *e* $\theta \in [0,2]$ *em* (0.7). *Suponha* $(kf)_1$, $(kf)_2$ *e* $(kf)_3$. *Se* $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ *é uma solução fraca não-negativa e não-identicamente nula de* (0.7), *então*

(*i*) $\widehat{u} \in C^2(\mathbf{R}^N \setminus \{0\}\ )$, $\nabla\widehat{u}(x) \cdot x < 0$ *em* $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ *e* $\widehat{u} > 0$ *em* $\mathbf{R}^N$,

(*ii*) $$\widehat{u}(x)^{2^*_\theta} = O\left(\frac{\|\widehat{u}\|^2}{\frac{\lambda\omega_N}{N-\theta}|x|^{N-\theta} + \alpha\displaystyle\int_{B_{|x|}(0)} \widehat{k}dy}\right) \text{ quando } |x| \to \infty,$$

(*iii*) $\widehat{u}(x) \stackrel{|x|\to 0}{\to} \infty$, *se adicionalmente* $\widehat{k}$ *satisfaz:*

$$\widehat{k} \in C^1(\mathbf{R}^N),\ \widehat{k} > 0,\quad \left(\frac{N}{q+1} - \frac{N-2}{2}\right)\widehat{k}(x) + \frac{1}{q+1}\nabla\widehat{k}(x) \cdot x \geq 0 \quad e \tag{0.12}$$

$$|\nabla\widehat{k}(x)| = O(|x|^{-d}) \text{ quando } |x| \to \infty, \text{ onde } d > \frac{N+4+2q-Nq}{2}.$$

Além disso, (0.7) *admite*

(*iv*) *duas soluções fracas* $\widehat{u}^1$, $\widehat{u}^2 \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ *tais que* $\widehat{u}^1$, $\widehat{u}^2 \geq 0$, $\widehat{u}^1$, $\widehat{u}^2 \not\equiv 0$

e $I(\widehat{u}^1) < 0 < I(\widehat{u}^2)$ *se*

$$0 \leq \theta < 2, \quad \lambda = 1 \quad e \quad 0 < \alpha < \bar{\alpha},$$

(*v*) *uma solução fraca* $\widehat{u}^3 \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ *tal que* $\widehat{u}^3 \geq 0$, $\widehat{u}^3 \not\equiv 0$ *e* $I(\widehat{u}^3) < 0$ *se*

$$\theta = 2, \quad 0 \leq \lambda < S_2, \quad \alpha > 0.$$

No caso (*v*), *a solução é única se adicionalmente* $\widehat{k} > 0$.

Nosso quarto resultado refere-se à equação (0.1) com $\mu = 0$ e $0 < q < 1$ (crescimento sublinear). Não são exigidas condições de simetrias. É estudado o comportamento das eventuais soluções com relação aos parâmetros α e λ e, por fim, obtemos condições para a existência de soluções fracas e descrevemos seu decaimento no infinito.

Teorema D. *Sejam* $\lambda \geq 0$, $\alpha > 0$, $\mu = 0$, $0 < q < 1$ *e* $\theta \in [0,2]$ *em* (0.1) *e em* (0.7) *e seja* $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ *uma solução fraca de* (0.7). *Suponha* $(kf)_1$, $(kf)_2$ *e* $(kf)_3$. *Se* $u \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ *é uma solução fraca positiva de* (0.1) *no sentido de* $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ *tal que* $u \leq \widehat{u}$, *então*

$$(i) \quad u \overset{\alpha\to\infty}{\to} 0 \quad em \ L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^N\backslash\{0\}) \quad se \quad \int_{r\leq|y|\leq R} k(y)dy > 0, \quad 0 < r < R < \infty,$$

$$(ii) \quad u \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0 \quad em \ L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^N\backslash\{0\}),$$

$$(iii) \quad u \overset{\alpha\to 0}{\to} 0 \quad em \ D^{1,2}(\mathbf{R}^N) \quad se \quad \theta = 2 \quad e \quad \lambda \in [0, S_2).$$

Além disso, (0.1) *admite uma solução fraca positiva* $u \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ *no sentido de* $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ *com* $u \leq \widehat{u}$ *se valem:*

$$(iv) \quad 0 \leq \theta < 2, \ \ 0 \leq \lambda \leq 1 \quad e \quad 0 < \alpha < \bar{\alpha}$$

ou

$$(v) \quad \theta = 2, \ \ 0 \leq \lambda < S_2 \ \ e \ \ \alpha > 0.$$

Adicionalmente,

$$(vi) \quad u(x)^{2^*_\theta} = O\left(\frac{1}{\dfrac{\lambda\omega_N}{N-\theta}|x|^{N-\theta} + \alpha\displaystyle\int_{B_{|x|}(0)} k(y)dy}\right) \quad quando \quad |x| \to \infty.$$

Nosso quinto teorema fornece propriedades de regularidade e comportamento assintótico no infinito e na origem para soluções radialmente simétricas de (0.7) com $\mu = 0$ e $1 < q < 2^* - 1$ (crescimento subcrítico). Garante também existência e multiplicidade de soluções dessa equação. Formulamos abaixo o teorema.

Teorema E. *Sejam* $\lambda \geq 0$, $\alpha > 0$, $\mu = 0$, $1 < q < 2^* - 1$ *e* $\theta \in [0,2]$ *em* (0.7). *Suponha* $(kf)_1$, $(kf)_2$ *e* $(kf)_3$. *Se* $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ *é uma solução fraca não-negativa e não-identicamente nula de* (0.7), *então*

$$(i) \quad \widehat{u} \in C^2(\mathbf{R}^N \setminus \{0\}\ ),\ \nabla\widehat{u}(x)\cdot x < 0 \ \ em \ \ \mathbf{R}^N \setminus \{0\} \ \ e \ \ \widehat{u} > 0 \ \ em \ \ \mathbf{R}^N,$$

$$(ii) \quad \widehat{u}(x)^{2^*_\theta} = O\left(\frac{\|\widehat{u}\|^2}{\dfrac{\lambda\omega_N}{N-\theta}|x|^{N-\theta} + \alpha\displaystyle\int_{B_{|x|}(0)}\widehat{k}dy}\right) \ quando\ |x| \to \infty,\ se\ 2^*_\theta \geq q+1$$

e

$$\widehat{u}(x)^{q+1} = O\left(\frac{\|\widehat{u}\|^2}{\dfrac{\lambda\omega_N}{N-\theta}|x|^{N-\theta} + \alpha\displaystyle\int_{B_{|x|}(0)}\widehat{k}dy}\right) \ quando\ |x| \to \infty,\ se\ 2^*_\theta \leq q+1,$$

$$(iii) \quad \widehat{u}(x) \overset{|x|\to 0}{\to} \infty,\ \ se\ adicionalmente\ \widehat{k}\ satisfaz:$$

$$\widehat{k} \in C^1(\mathbf{R}^N),\ \widehat{k} > 0, \ \ \left(\frac{N}{q+1} - \frac{N-2}{2}\right)\widehat{k}(x) + \frac{1}{q+1}\nabla\widehat{k}(x)\cdot x \geq 0 \ \ e \tag{0.13}$$

$$|\nabla\widehat{k}(x)| = O(|x|^{-d})\ quando\ |x| \to \infty,\ onde\ d > \frac{N+4+2q-Nq}{2}.$$

Além disso, (0.7) *admite*

$$(iv) \quad duas\ soluções\ fracas\ \widehat{u}^1,\ \widehat{u}^2 \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)\ tais\ que\ \widehat{u}^1,\ \widehat{u}^2 \geq 0,\ \ \widehat{u}^1,\ \widehat{u}^2 \not\equiv 0$$

e $I(\widehat{u}^1) < 0 < I(\widehat{u}^2)$ *se*

$$2^*_\theta \leq q+1, \quad 0 < \theta < 2, \quad \lambda = 1 \ \ e \ \ 0 < \alpha < \bar{\alpha},$$

$$(v) \quad duas\ soluções\ fracas\ \widehat{u}^3,\ \widehat{u}^4 \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)\ tais\ que\ \widehat{u}^3,\ \widehat{u}^4 \geq 0,\ \ \widehat{u}^3,\ \widehat{u}^4 \not\equiv 0$$

e $I(\widehat{u}^3) < 0 < I(\widehat{u}^4)$ *se*

$$\theta = 2, \quad 0 \leq \lambda < S_2, \quad \alpha > 0.$$

CAPÍTULO 1

Princípios Variacionais, Regularidade, Identidades, Sub e Supersoluções

Demonstraremos neste Capítulo vários resultados gerais para as equações (0.1) e (0.7) que auxiliarão a demonstração dos teoremas enunciados.

1.1 Geometria do Passo da Montanha

O primeiro lema estabelece a geometria do Passo da Montanha, que satisfaz as condições de uma variante (cf. Apêndice B, adaptado) do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti e Rabinowitz [4] devida a Brézis e Nirenberg [11] (cf. também Brézis, Coron e Nirenberg [10]).

As duas condições abaixo descrevem a geometria do Passo da Montanha:

(Φ_1) Existem constantes $\beta,\ \rho > 0$ tais que $I(u) \geq \beta$ para $\|u\| = \rho$,

(Φ_2) Existe $e \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ tal que $\|e\| > \rho$ e $I(e) < 0$.

Lema 1.1. *Sejam* $\lambda,\ \alpha,\ \mu \geq 0$, $q \in (0,\ 1) \cup (1,\ 2^*-1)$ *e* $\theta \in [0,2]$ *em* (0.7). *Suponha* $(kf)_1,\ (kf)_2$ *e* $(kf)_3$. *Então,*

(*i*) *I satisfaz* (Φ_1) *se valem:*

(*a*) $0 \leq \theta < 2,\ \ \lambda = 1$ *e* $\alpha = 0$, *para cada* $0 < \mu < \bar{\mu}$

ou

(*b*) $0 \leq \theta < 2,\ \ \lambda = 1,\ \ \mu = 0$ *e* $0 < q < 1$, *para cada* $0 < \alpha < \bar{\alpha}$

ou

(*c*) $0 \leq \theta < 2,\ \ \lambda = 1,\ \ \mu = 0$ *e* $1 < q < 2^*-1$, *para cada* $\alpha > 0$

ou

(*d*) $\theta = 2,\ \ 0 \leq \lambda < S_2,\ \ \mu = 0$ *e* $1 < q < 2^*-1$, *para cada* $\alpha > 0$.

(*ii*) *I satisfaz* (Φ_2) *se valem:*

(*a*) $0 \leq \theta < 2,\ \ \lambda = 1$ *e* $\alpha = 0$, *para cada* $\mu > 0$

ou

(*b*) $0 \leq \theta < 2,\ \ \lambda = 1,\ \ \mu = 0$ *e* $0 < q < 1$, *para cada* $\alpha > 0$

ou

(*c*) $0 \leq \theta < 2,\ \ \lambda = 1,\ \ \mu = 0$ *e* $1 < q < 2^*-1$, *para cada* $\alpha > 0$

ou

(*d*) $\theta = 2,\ \ 0 \leq \lambda < S_2,\ \ \mu = 0$ *e* $1 < q < 2^*-1$, *para cada* $\alpha > 0$.

Demonstração: Verificação de (i).

Seja $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$. De (0.8), temos, pela desigualdade de Hölder,

$$I(\widehat{u}) \geq \frac{1}{2}\|\widehat{u}\|^2 - \frac{\lambda}{2^*_\theta}\int \frac{|\widehat{u}|^{2^*_\theta}}{|x|^\theta}dx - \frac{\alpha}{q+1}(\int |\widehat{k}|^a dx)^{\frac{1}{a}}(\int |\widehat{u}|^{2^*}dx)^{\frac{q+1}{2^*}} - \mu(\int |\widehat{f}|^b dx)^{\frac{1}{b}}(\int |\widehat{u}|^{2^*}dx)^{\frac{1}{2^*}}.$$

E pelas desigualdades de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12] e de Sobolev,

$$I(\widehat{u}) \geq \|\widehat{u}\|^2\Big(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2^*_\theta} S_\theta^{-2^*_\theta/2}\|\widehat{u}\|^{2^*_\theta-2} - \frac{\alpha}{q+1} S_0^{-(q+1)/2}|\widehat{k}|_{L^a_{rad}}\|\widehat{u}\|^{q-1} - \mu S_0^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}}\|\widehat{u}\|^{-1}\Big).$$

Agora, seja

$$R(t) := \frac{\lambda}{2^*_\theta} S_\theta^{-2^*_\theta/2} t^{2^*_\theta-2} + \frac{\alpha}{q+1} S_0^{-(q+1)/2}|\widehat{k}|_{L^a_{rad}} t^{q-1} + \mu S_0^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}} t^{-1},\ t > 0.$$

Verificaremos abaixo os itens (a) a (d) do lema 1.1(i).

(a) $0 \leq \theta < 2,\ \lambda = 1$ e $\alpha = 0$

Neste caso, $R(t)$ fica:

$$R(t) = \frac{1}{2^*_\theta} S_\theta^{-2^*_\theta/2} t^{2^*_\theta-2} + \mu S_0^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}} t^{-1},\ t > 0.$$

Notemos que

$$R(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty \ \text{ e } \ R(t) \overset{t\to 0}{\longrightarrow} \infty.$$

Portanto, existe $\rho > 0$ satisfazendo

$$R(\rho) = \min_{t>0} R(t) \ \text{ para algum } \ \rho > 0.$$

Calculando $R'(t) = 0$, obtemos

$$\frac{S_\theta^{-2^*_\theta/2}(2^*_\theta - 2)t^{2^*_\theta-3}}{2^*_\theta} - \mu S_0^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}} t^{-2} = 0,\ t > 0,$$

de modo que

$$\rho = \Big[\mu \frac{2^*_\theta S_0^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}}}{S_\theta^{-2^*_\theta/2}(2^*_\theta - 2)}\Big]^{\frac{1}{2^*_\theta-1}}$$

é solução de $R'(t) = 0$.

Como $\mu < \bar{\mu}$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} - R(\rho) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^*_\theta} S_\theta^{-2^*_\theta/2}\Big[\mu \frac{2^*_\theta S_0^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}}}{S_\theta^{-2^*_\theta/2}(2^*_\theta - 2)}\Big]^{\frac{2^*_\theta-2}{2^*_\theta-1}} - \mu S_0^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}}\Big[\mu \frac{2^*_\theta S_0^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}}}{S_\theta^{-2^*_\theta/2}(2^*_\theta - 2)}\Big]^{\frac{-1}{2^*_\theta-1}} \\
&> \frac{1}{2} - \frac{1}{2^*_\theta} S_\theta^{-2^*_\theta/2}\Big[\bar{\mu} \frac{2^*_\theta S_0^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}}}{S_\theta^{-2^*_\theta/2}(2^*_\theta - 2)}\Big]^{\frac{2^*_\theta-2}{2^*_\theta-1}} - \bar{\mu} S_0^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}}\Big[\bar{\mu} \frac{2^*_\theta S_0^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}}}{S_\theta^{-2^*_\theta/2}(2^*_\theta - 2)}\Big]^{\frac{-1}{2^*_\theta-1}} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^*_\theta} S_\theta^{-2^*_\theta/2}\Big[\Big(\frac{2^*_\theta}{S_\theta^{-2^*_\theta/2}}\Big)^{\frac{1}{2^*_\theta-2}} \frac{(2^*_\theta-2)}{S_0^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}}\big[2(2^*_\theta-1)\big]^{\frac{2^*_\theta-1}{2^*_\theta-2}}} \frac{2^*_\theta S_0^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}}}{S_\theta^{-2^*_\theta/2}(2^*_\theta - 2)}\Big]^{\frac{2^*_\theta-2}{2^*_\theta-1}} \\
&- \Big(\frac{2^*_\theta}{S_\theta^{-2^*_\theta/2}}\Big)^{\frac{1}{2^*_\theta-2}} \frac{(2^*_\theta-2)}{S_0^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}}\big[2(2^*_\theta-1)\big]^{\frac{2^*_\theta-1}{2^*_\theta-2}}} S_0^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}} \\
&\times \Big[\Big(\frac{2^*_\theta}{S_\theta^{-2^*_\theta/2}}\Big)^{\frac{1}{2^*_\theta-2}} \frac{(2^*_\theta-2)}{S_0^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}}\big[2(2^*_\theta-1)\big]^{\frac{2^*_\theta-1}{2^*_\theta-2}}} \frac{2^*_\theta S_0^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}}}{S_\theta^{-2^*_\theta/2}(2^*_\theta - 2)}\Big]^{\frac{-1}{2^*_\theta-1}} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Donde $R(\rho) < \dfrac{1}{2}$. Portanto, (Φ_1) fica satisfeito.

(b) $0 \leq \theta < 2,\ \lambda = 1,\ \mu = 0$ e $0 < q < 1$

Neste caso, $R(t)$ fica:

$$
R(t) = \frac{1}{2^*_\theta} S_\theta^{-2^*_\theta/2} t^{2^*_\theta-2} + \frac{\alpha}{q+1} S_0^{-(q+1)/2}|\widehat{k}|_{L^a_{rad}} t^{q-1},\ t > 0.
$$

Notemos que

$$
R(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty \ \text{ e } \ R(t) \overset{t\to 0}{\longrightarrow} \infty.
$$

Portanto, existe $\rho > 0$ satisfazendo

$$
R(\rho) = \min_{t>0} R(t) \ \text{ para algum } \ \rho > 0.
$$

Calculando $R'(t) = 0$, obtemos

$$
\frac{S_\theta^{-2^*_\theta/2}(2^*_\theta - 2)t^{2^*_\theta-3}}{2^*_\theta} + \alpha\Big(\frac{q-1}{q+1}\Big) S_0^{-(q+1)/2}|\widehat{k}|_{L^a_{rad}} t^{q-2} = 0,\ t > 0,
$$

de modo que

$$\rho = \Big[\alpha(\frac{1-q}{q+1})\frac{2^*_\theta S_0^{-(q+1)/2}|\widehat{k}|_{L^a_{rad}}}{S_\theta^{-2^*_\theta/2}(2^*_\theta-2)}\Big]^{\frac{1}{2^*_\theta-q-1}}$$

é solução de $R'(t)=0$.

Como $\alpha<\bar{\alpha}$, calculando como no caso anterior, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}-R(\rho) &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2^*_\theta}S_\theta^{-2^*_\theta/2}\Big[\alpha(\frac{1-q}{q+1})\frac{2^*_\theta S_0^{-(q+1)/2}|\widehat{k}|_{L^a_{rad}}}{S_\theta^{-2^*_\theta/2}(2^*_\theta-2)}\Big]^{\frac{2^*_\theta-2}{2^*_\theta-q-1}}\\
&- \frac{\alpha}{q+1}S_0^{-(q+1)/2}|\widehat{k}|_{L^a_{rad}}\Big[\alpha(\frac{1-q}{q+1})\frac{2^*_\theta S_0^{-(q+1)/2}|\widehat{k}|_{L^a_{rad}}}{S_\theta^{-2^*_\theta/2}(2^*_\theta-2)}\Big]^{\frac{q-1}{2^*_\theta-q-1}}\\
&> \frac{1}{2}-\frac{1}{2^*_\theta}S_\theta^{-2^*_\theta/2}\Big[\bar{\alpha}(\frac{1-q}{q+1})\frac{2^*_\theta S_0^{-(q+1)/2}|\widehat{k}|_{L^a_{rad}}}{S_\theta^{-2^*_\theta/2}(2^*_\theta-2)}\Big]^{\frac{2^*_\theta-2}{2^*_\theta-q-1}}\\
&- \frac{\bar{\alpha}}{q+1}S_0^{-(q+1)/2}|\widehat{k}|_{L^a_{rad}}\Big[\bar{\alpha}(\frac{1-q}{q+1})\frac{2^*_\theta S_0^{-(q+1)/2}|\widehat{k}|_{L^a_{rad}}}{S_\theta^{-2^*_\theta/2}(2^*_\theta-2)}\Big]^{\frac{q-1}{2^*_\theta-q-1}}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donde $R(\rho)<\dfrac{1}{2}$. Portanto, (Φ_1) fica satisfeito.

(c) $0\le\theta<2,\ \lambda=1,\ \mu=0$ e $1<q<2^*-1$

Neste caso, $R(t)$ fica:

$$R(t)=\frac{1}{2^*_\theta}S_\theta^{-2^*_\theta/2}t^{2^*_\theta-2}+\frac{\alpha}{q+1}S_0^{-(q+1)/2}|\widehat{k}|_{L^a_{rad}}t^{q-1},\ t>0.$$

Notemos que

$$R(t)\overset{t\to 0}{\longrightarrow}0 \ \text{ e } \ R(t)\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}\infty.$$

Portanto, para cada $\alpha>0$ sempre é possível encontrar $\rho>0$ satisfazendo

$$R(\rho)<\frac{1}{2}.$$

Portanto, (Φ_1) fica satisfeito.

(d) $\theta = 2,\ 0 \leq \lambda < S_2,\ \mu = 0$ e $1 < q < 2^* - 1$

Neste caso, $R(t)$ fica:

$$R(t) = \frac{\lambda}{2S_2} + \frac{\alpha}{q+1} S_0^{-(q+1)/2} |\widehat{k}|_{L^a_{rad}} t^{q-1},\ t > 0.$$

Notemos que

$$R(t) \overset{t \to 0}{\longrightarrow} C_\lambda \ \text{ e } \ R(t) \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} \infty,$$

onde $0 \leq C_\lambda < 1/2$. Portanto, para cada $\alpha > 0$ sempre é possível encontrar $\rho > 0$ satisfazendo

$$R(\rho) < \frac{1}{2}.$$

Portanto, (Φ_1) fica satisfeito.

Fica verificado (i).

Verificação de (ii). Seja $0 \leq \theta < 2$. Aplicando em (0.8) a função caracterizada em (W_δ), temos, para cada $t > 0$,

$$I(tw_\delta) = \frac{1}{2}\int |\nabla tw_\delta|^2 dx - \frac{\lambda}{2^*_\theta}\int \frac{(tw_\delta)_+^{2^*_\theta}}{|x|^\theta} dx - \frac{\alpha}{q+1}\int \widehat{k}(tw_\delta)_+^{q+1} dx - \mu \int \widehat{f}(tw_\delta) dx. \quad (1.1)$$

Como $w_\delta \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbf{R}^N)$, $\widehat{k} \in L^a_{rad}(\mathbf{R}^N)$ e $\widehat{f} \in L^b_{rad}(\mathbf{R}^N)$, temos, graças à desigualdade de Hölder,

$$\widehat{k}{w_\delta}^{q+1},\ \widehat{f}w_\delta \in L^1(\mathbf{R}^N).$$

Conseqüentemente, usando (1.1) e $(C_{N,\theta})$, obtemos:

$$I(tw_\delta) = S_\theta^{\frac{N-\theta}{2-\theta}}\big(\frac{t^2}{2} - \lambda\frac{t^{2^*_\theta}}{2^*_\theta}\big) - \alpha\frac{t^{q+1}}{q+1}|\widehat{k}{w_\delta}^{q+1}|_{L^1} - \mu t|\widehat{f}w_\delta|_{L^1},\ t > 0. \quad (1.2)$$

Verificaremos abaixo os itens (a) a (d) do lema 1.1(ii).

(a) $0 \leq \theta < 2,\ \lambda = 1$ e $\alpha = 0$

Neste caso, (1.2) torna-se, para cada $t > 0$,

$$I(tw_\delta) = S_\theta^{\frac{N-\theta}{2-\theta}}\big(\frac{t^2}{2} - \frac{t^{2^*_\theta}}{2^*_\theta}\big) - \mu t|\widehat{f}w_\delta|_{L^1}.$$

Como $2^*_\theta > 2$, é claro que, qualquer que seja $\mu > 0$,

$$I(tw_\delta) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Assim, $I(tw_\delta) < 0$ para algum t_θ suficientemente grande. Fazendo $e := t_\theta w_\delta$, (Φ_2) fica satisfeito.

(b) $0 \leq \theta < 2,\ \lambda = 1,\ \mu = 0$ e $0 < q < 1$

Neste caso, (1.2) torna-se, para cada $t > 0$,

$$I(tw_\delta) = S_\theta^{\frac{N-\theta}{2-\theta}}\big(\frac{t^2}{2} - \frac{t^{2^*_\theta}}{2^*_\theta}\big) - \alpha\frac{t^{q+1}}{q+1}|\widehat{k}{w_\delta}^{q+1}|_{L^1}.$$

Como $2^*_\theta > 2$, é claro que, qualquer que seja $\alpha > 0$,

$$I(tw_\delta) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Assim, $I(tw_\delta) < 0$ para algum t_θ suficientemente grande. Fazendo $e := t_\theta w_\delta$, (Φ_2) fica satisfeito.

(c) $0 \leq \theta < 2,\ \lambda = 1,\ \mu = 0$ e $1 < q < 2^* - 1$

Neste caso, (1.2) torna-se, para cada $t > 0$,

$$I(tw_\delta) = S_\theta^{\frac{N-\theta}{2-\theta}}\big(\frac{t^2}{2} - \frac{t^{2^*_\theta}}{2^*_\theta}\big) - \alpha\frac{t^{q+1}}{q+1}|\widehat{k}{w_\delta}^{q+1}|_{L^1}.$$

Como $2^*_\theta > 2$, é claro que, qualquer que seja $\alpha > 0$,

$$I(tw_\delta) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Assim, $I(tw_\delta) < 0$ para algum t_θ suficientemente grande. Fazendo $e := t_\theta w_\delta$, (Φ_2) fica satisfeito.

(d) $\theta = 2,\ 0 \leq \lambda < S_2,\ \mu = 0$ e $1 < q < 2^* - 1$

Este último caso não fará uso de (W_δ), porque $\theta = 2$. Seja, pois, $\widehat{\phi} \in C^\infty_{0,\ rad}$ com $\widehat{\phi} \geq 0$, $\widehat{\phi} \not\equiv 0$. Usando (0.8), temos, para cada $t > 0$,

$$I(t\widehat{\phi}) = \frac{t^2}{2}\Big(\int |\nabla\widehat{\phi}|^2 dx - \lambda \int \frac{\widehat{\phi}^2}{|x|^2} dx\Big) - \alpha \frac{t^{q+1}}{q+1} \int \widehat{k}\widehat{\phi}^{q+1} dx.$$

Como $0 \leq \lambda < S_2$, a desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12] assegura que

$$\int |\nabla\widehat{\phi}|^2 dx - \lambda \int \frac{\widehat{\phi}^2}{|x|^2} dx > 0,$$

de modo que, sendo $2 < q+1$, qualquer que seja $\alpha > 0$,

$$I(t\widehat{\phi}) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Assim, $I(t\widehat{\phi}) < 0$ para algum t_2 suficientemente grande. Fazendo $e := t_2\widehat{\phi}$, (Φ_2) fica satisfeito.

Fica verificado (ii).

□

Observação 1.2. *Notemos que $I(0) = 0$ e lembramos que $I \in C^1(D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N),\ \mathbf{R})$. O lema 1.1 aplicado ao Teorema do Passo da Montanha (cf. Apêndice B) garante a existência de uma seqüência $\{\widehat{u}_n\} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ e de algum $c \geq \beta > 0$ tais que*

$$I(\widehat{u}_n) \longrightarrow c \;\; e \;\; I'(\widehat{u}_n) \longrightarrow 0.$$

1.2 Minimização Clássica

O segundo lema fornece os critérios do teorema de minimização clássica (cf. Apêndice B).

Faremos uso das seguintes condições técnicas:

(Ψ_1) $I(u) \to \infty$ quando $\|u\| \to \infty$, $u \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$,

(Ψ_2) Para cada $u \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$, qualquer seqüência $\{u_n\} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \;\; \text{em} \;\; D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$$

implica $I(u) \leq \liminf_{n\to\infty} I(u_n)$.

Lema 1.3. *Sejam* $\lambda,\ \alpha,\ \mu \geq 0$, $0 < q < 1$ *e* $\theta = 2$ *em* (0.7). *Suponha* $(kf)_1$, $(kf)_2$ *e* $(kf)_3$. *Então,* I *satisfaz* (Ψ_1) *e* (Ψ_2) *se valem:*

(i) $0 \leq \lambda < S_2,\ \ \alpha = 0 \quad e \ \ \mu > 0$

ou

(ii) $0 \leq \lambda < S_2,\ \ \alpha > 0 \quad e \ \ \mu = 0.$

Demonstração: Verificação de (Ψ_1). Seja $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$. Como $\theta = 2$, obtemos, usando (0.8) e aplicando as desigualdades de Hölder, de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12] e de Sobolev:

$$I(\widehat{u}) \geq \|\widehat{u}\|^2\Big(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2S_2} - \frac{\alpha}{q+1}S_0^{-(q+1)/2}|\widehat{k}|_{L^a_{rad}}\|\widehat{u}\|^{q-1} - \mu S_0^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}}\|\widehat{u}\|^{-1}\Big) \qquad (1.3).$$

Verifiquemos cada caso do lema ((i)-(ii)) separadamente.

(i) $0 \leq \lambda < S_2,\ \ \alpha = 0$ e $\mu > 0$

Usando (1.3) com $\alpha = 0,\ \mu > 0$, temos:

$$I(\widehat{u}) \geq \|\widehat{u}\|^2\Big(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2S_2} - \mu S_0^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}}\|\widehat{u}\|^{-1}\Big).$$

Como $0 \leq \lambda < S_2$, obtemos imediatamente

$$I(\widehat{u}) \overset{\|\widehat{u}\|\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

(ii) $0 \leq \lambda < S_2,\ \ \alpha > 0$ e $\mu = 0$

Usando (1.3) com $\alpha > 0,\ \mu = 0$, temos:

$$I(\widehat{u}) \geq \|\widehat{u}\|^2\Big(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2S_2} - \frac{\alpha}{q+1}S_0^{-(q+1)/2}|\widehat{k}|_{L^a_{rad}}\|\widehat{u}\|^{q-1}\Big).$$

Como $0 \leq \lambda < S_2$, obtemos, como antes, imediatamente

$$I(\widehat{u}) \overset{\|\widehat{u}\|\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Fica verificado (Ψ_1).

Verificação de (Ψ_2). Seja $\{\widehat{u}_n\} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ tal que

$$\widehat{u}_n \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u}.$$

Como $\theta = 2$, usando (0.8) e propriedades de limites, temos:

$$\begin{aligned} \underline{\lim} I(\widehat{u}_n) &= -\overline{\lim}(-I(\widehat{u}_n)) \\ &\geq \frac{1}{2}\underline{\lim}\int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\overline{\lim}\int \frac{\widehat{u}^2_{n_+}}{|x|^2}dx - \frac{\alpha}{q+1}\overline{\lim}\int \widehat{k}\widehat{u}^{q+1}_{n_+}dx - \mu\overline{\lim}\int \widehat{f}\widehat{u}_n dx. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Usando um resultado de Evans [18][teorema 9(i)(ii), p. 12], propriedades de medidas de Radon e o lema de concentração-compacidade (cf. Apêndice B), verifica-se que

$$\underline{\lim}\int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx \geq \int |\nabla \widehat{u}|^2 dx + \delta_{x_0}\widehat{\mu}_0,$$

$$\overline{\lim}\int \frac{\widehat{u}^2_{n_+}}{|x|^2}dx \leq \int \frac{\widehat{u}^2_+}{|x|^2}dx + \delta_{x_0}\widehat{\nu}_0 \quad \text{e}$$

$$\widehat{\mu}_0 \geq S_2\widehat{\nu}_0.$$

Com essas desigualdades, (1.4) torna-se

$$\underline{\lim} I(\widehat{u}_n) \geq \frac{1}{2}\int |\nabla \widehat{u}|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int \frac{\widehat{u}^2_+}{|x|^2}dx - \frac{\alpha}{q+1}\overline{\lim}\int \widehat{k}\widehat{u}^{q+1}_{n_+}dx - \mu\overline{\lim}\int \widehat{f}\widehat{u}_n dx + \frac{\delta_{x_0}\widehat{\nu}_0}{2}(S_2 - \lambda).$$

Como $0 \leq \lambda < S_2$, obtemos:

$$\underline{\lim} I(\widehat{u}_n) \geq \frac{1}{2}\int |\nabla \widehat{u}|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int \frac{\widehat{u}^2_+}{|x|^2}dx - \frac{\alpha}{q+1}\overline{\lim}\int \widehat{k}\widehat{u}^{q+1}_{n_+}dx - \mu\overline{\lim}\int \widehat{f}\widehat{u}_n dx. \tag{1.5}$$

Verifiquemos cada caso do lema ((i)-(ii)) sepradamente.

(i) $0 \leq \lambda < S_2$, $\alpha = 0$ e $\mu > 0$

Como $\widehat{u}_n \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u}$ e $\widehat{f} \in L^b(\mathbf{R}^N) \equiv (L^{2^*}(\mathbf{R}^N))'$, é imediato que

$$\lim_{n\to\infty}\int \widehat{f}\widehat{u}_n dx = \int \widehat{f}\widehat{u} dx.$$

Conseqüentemente, por (1.5) com $\alpha = 0$, concluímos que

$$\underline{\lim} I(\widehat{u}) \geq I(\widehat{u}).$$

(ii) $0 \leq \lambda < S_2$, $\alpha > 0$ e $\mu = 0$

Afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty}\int \widehat{k}\widehat{u}_{n_+}^{q+1} dx = \int \widehat{k}\widehat{u}_{+}^{q+1} dx.$$

De fato, lembramos que, em virtude da desigualdade de Sobolev,

$$\left[\int (\widehat{u}_{n_+}^{q+1})^{\frac{2^*}{q+1}} dx\right]^{\frac{q+1}{2^*}} \leq S_0^{-(q+1)/2}\|\widehat{u}_n\|^{q+1}.$$

Como $\{\widehat{u}_n\}$ é limitada em $D_{rad}^{1,2}(\mathbf{R}^N)$, verifica-se que $\{\widehat{u}_{n_+}^{q+1}\} \in L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbf{R}^N)$ e que $\{\widehat{u}_{n_+}^{q+1}\}$ é limitada em $L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbf{R}^N)$.

Por outro lado, pelo fato de $\widehat{u}_n \overset{D_{rad}^{1,2}}{\rightharpoonup} \widehat{u}$, é fácil verificar que (cf. Alves [2] [apêndice, p. 73])

$$\widehat{u}_{n_+}^{q+1} \xrightarrow{qtp} \widehat{u}_{+}^{q+1}.$$

Pelo lema 4.8 de Kavian [27] [p. 11], obtemos:

$$\int \widehat{u}_{n_+}^{q+1}\varphi dx \to \int \widehat{u}_{+}^{q+1}\varphi dx, \text{ para cada } \varphi \in (L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbf{R}^N))'.$$

Escolhendo $\varphi = \widehat{k} \in L^a(\mathbf{R}^N) \equiv (L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbf{R}^N))'$, cumpre-se a afirmação.

Conseqüentemente, por (1.5) com $\mu = 0$, concluímos que

$$\underline{\lim} I(\widehat{u}) \geq I(\widehat{u}).$$

Fica verificado (Ψ_2).

$\square$

1.3 Princípio Variacional de Ekeland

O terceiro lema fará uso do Princípio Variacional de Ekeland (cf. Apêndice B), sob condições obtidas da geometria do Passo da Montanha (lema 1.1).

Lema 1.4. *Sejam* $\lambda,\ \alpha,\ \mu \geq 0$, $q \in (0,\ 1) \cup (1,\ 2^* - 1)$ *e* $\theta \in [0, 2]$ *em* (0.7). *Suponha* $(kf)_1$, $(kf)_2$ *e* $(kf)_3$. *Então, sob as condições do lema* 1.1, *existem uma seqüência* $\{\widehat{u}_n\} \in B$ *e algum* $c < 0$ *tais que*

$$I(\widehat{u}_n) \longrightarrow c \quad e \quad I'(\widehat{u}_n) \longrightarrow 0,$$

onde B *é a bola de* $D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ *de centro na origem e raio* ρ *provido pelo lema* 1.1 *e* $c := \inf_{\overline{B}} I$.

Demonstração: Primeiro, notemos que, fazendo $E := \overline{B} := \{\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N);\ \|\widehat{u}\| \leq \rho\}$ com ρ provido pelo lema 1.1 e $d := d(\widehat{u},\ \widehat{v}) := \|\widehat{u} - \widehat{v}\|$, $(E,\ d)$ é um espaço métrico completo. Além disso, I é semicontínuo inferiormente, não-identicamente igual a $+\infty$ e limitado por baixo sobre $\overline{B}$, nos casos considerados no lema 1.1.

Aplicando o Princípio Variacional de Ekeland (cf. Apêndice B, adaptado) a

$$I :\ \overline{B} \to \mathbf{R}$$

e definindo

$$c := \inf_{\overline{B}} I,$$

temos conjuntamente: para cada $\varepsilon > 0$, existe $\widehat{u}_\varepsilon \in \overline{B}$ tal que

$$c \quad \leq \quad I(\widehat{u}_\varepsilon) \quad \leq \quad c + \varepsilon \tag{1.6}$$

$$\text{para cada } \widehat{u} \in E,\ \widehat{u} \neq \widehat{u}_\varepsilon,\ I(\widehat{u}) - I(\widehat{u}_\varepsilon) + \varepsilon\|\widehat{u} - \widehat{u}_\varepsilon\| > 0. \tag{1.7}$$

Provemos agora que

$$-\infty \quad < \quad c \quad < \quad 0. \tag{1.8}$$

De fato, lembramos que a função caracterizada em (W_δ) tomada na demonstração do lema 1.1 permite concluir que

$$I(tw_\delta) < 0, \ t > 0.$$

Isso junto com o fato de I ser limitado inferiormente sobre $\overline{B}$ prova (1.8).

Além disso, ainda do lema 1.1, é imediato que:

$$\inf_{\partial B} I \geq \beta. \tag{1.9}$$

Afirmamos que

$$\widehat{u}_\varepsilon \in B.$$

De fato, de (1.8) e (1.9), fixando ε suficientemente pequeno, temos:

$$0 < \varepsilon < \inf_{\partial B} I - \inf_{\overline{B}} I. \tag{1.10}$$

De (1.6), existe $\widehat{u}_\varepsilon \in \overline{B}$ tal que

$$I(\widehat{u}_\varepsilon) \leq \inf_{\overline{B}} I + \varepsilon.$$

Usando (1.10) na última expressão, obtemos:

$$I(\widehat{u}_\varepsilon) < \inf_{\partial B} I,$$

de modo que

$$\widehat{u}_\varepsilon \in B. \tag{1.11}$$

Agora, seja

$$F: \ \overline{B} \to \mathbf{R},$$

onde $F(\widehat{u}) := I(\widehat{u}) + \varepsilon\|\widehat{u} - \widehat{u}_\varepsilon\|$. Usando (1.7), encontramos:

$$F(\widehat{u}_\varepsilon) = I(\widehat{u}_\varepsilon) < I(\widehat{u}) + \varepsilon\|\widehat{u} - \widehat{u}_\varepsilon\| = F(\widehat{u}),$$

isto é,

$$F(\widehat{u}_\varepsilon) < F(\widehat{u}) \ \text{ para cada } \ \widehat{u} \in \overline{B}.$$

Isso juntamente com (1.11) mostra que $\widehat{u}_\varepsilon \in B$ é mínimo local estrito de F sobre $\overline{B}$. Assim, para $t > 0$ pequeno e para cada $\varphi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ com $\|\varphi\| = 1$, temos:

$$\frac{F(\widehat{u}_\varepsilon + t\varphi) - F(\widehat{u}_\varepsilon)}{t} \geq 0, \ t > 0.$$

Usando a definição de F na expressão anterior, encontramos:

$$\frac{I(\widehat{u}_\varepsilon + t\varphi) - I(\widehat{u}_\varepsilon)}{t} + \varepsilon\|\varphi\| \geq 0, \ t > 0. \tag{1.12}$$

Trocando φ por $-\varphi$ e procedendo como antes, usando a definição de F novamente, obtemos:

$$\frac{I(\widehat{u}_\varepsilon - t\varphi) - I(\widehat{u}_\varepsilon)}{t} + \varepsilon\|\varphi\| \geq 0, \ t > 0. \tag{1.13}$$

Fazendo $t \longrightarrow 0$ em (1.12) e (1.13), obtemos, respectivamente:

$$\langle I'(\widehat{u}_\varepsilon), \varphi\rangle + \varepsilon\|\varphi\| \geq 0 \ \text{ e } \ \langle I'(\widehat{u}_\varepsilon), \varphi\rangle - \varepsilon\|\varphi\| \leq 0, \ \varphi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N).$$

Conseqüentemente, fazendo $\varepsilon := \dfrac{1}{n}$ ($n > 1$ inteiro) e $\widehat{u}_\varepsilon := \widehat{u}_n$, tem-se:

$$\|I'(\widehat{u}_n)\|_{(D^{1,2}_{rad})'} := \sup_{\|\varphi\|=1, \ \varphi \in D^{1,2}_{rad}} |\langle I'(\widehat{u}_n), \varphi\rangle| \leq \frac{1}{n}. \tag{1.14}$$

De (1.6) e (1.14) concluímos, respectivamente, para n grande, que existe uma seqüência $\{\widehat{u}_n\} \in B$ satisfazendo

$$I(\widehat{u}_n) \longrightarrow c, \ c < 0 \ \ e \ \ I'(\widehat{u}_n) \longrightarrow 0.$$

$\square$

1.4 Regularidade e Comportamento de Soluções no Infinito

A seguir, enunciamos um lema de regularidade e de comportamento assintótico no infinito de quaisquer soluções fracas de (0.7).

Lema 1.5. *Sejam* $\lambda,\ \alpha,\ \mu \geq 0$, $q \in (0,\ 1) \cup (1,\ 2^* - 1)$ *e* $\theta \in [0, 2]$ *em* (0.7). *Suponha* $(kf)_1$, $(kf)_2$ *e* $(kf)_3$. *Se* $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ *é uma solução fraca de* (0.7) *tal que* $\widehat{u} \geq 0$ *e* $\widehat{u} \not\equiv 0$ *e valem:*

(a) $\alpha = 0$ *e* $\mu > 0$

ou

(b) $\alpha > 0$ *e* $\mu = 0$,

então:

(i) $\widehat{u} \in C^2(\mathbf{R}^N \setminus \{0\})$, $\nabla \widehat{u}(x) \cdot x < 0$ *em* $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ *e* $\widehat{u} > 0$ *em* $\mathbf{R}^N$,

(ii) $\lambda \dfrac{\omega_N}{N-\theta} |x|^{N-\theta} \widehat{u}(x)^{2^*_\theta} + \alpha \widehat{u}(x)^{q+1} \displaystyle\int_B \widehat{k} dy + \mu \widehat{u}(x) \int_B \widehat{f} dy \leq \ \|\widehat{u}\|^2,\ x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$,
onde $B := B_{|x|}(0)$.

Demonstração: Seja $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ uma solução fraca de (0.7) tal que $\widehat{u} \geq 0$, $\widehat{u} \not\equiv 0$ e α, μ conforme (a) ou (b). Então, usando (0.10) em coordenadas radiais, temos:

$$\int_S \int_0^\infty r^{N-1} \widehat{u}' \phi' dr d\sigma = \int_S \int_0^\infty (\lambda r^{N-\theta-1} \widehat{u}^{2^*_\theta - 1} + \alpha r^{N-1} \widehat{k} \widehat{u}^q + \mu r^{N-1} \widehat{f}) \phi dr d\sigma, \tag{1.15}$$

onde $r := |x|$, $\widehat{u}'$ e ϕ' são, respectivamente, as derivadas fracas de $\widehat{u}$ e de ϕ em coordenadas radiais e S é a superfície da bola unitária de $\mathbf{R}^N$.

Verificação de (i). Consideremos, para cada $\epsilon > 0$, $r > 0$, a função

$$\widehat{u}_{r,\epsilon}(t) := \begin{cases} 1, \quad 0 \leq t \leq r, \\ -\dfrac{t}{\epsilon} + \dfrac{r+\epsilon}{\epsilon}, \quad r \leq t \leq r+\epsilon, \\ 0, \quad t \geq r+\epsilon. \end{cases}$$

Afirmamos que

$$\widehat{u}_{r,\epsilon} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N).$$

De fato, designando, por simplicidade, $\widehat{u}_{r,\epsilon} := v(t)$, estendamos v a $(-\infty, 0]$ fazendo $s := r + \epsilon$ e

$$v(t) := \begin{cases} 1, \quad -r \leq t \leq 0, \\ \\ \dfrac{t}{s-r} + \dfrac{s}{s-r}, \quad -s \leq t \leq -r \\ \\ 0, \quad t \leq -s. \end{cases}$$

Seja $t := |x|$. Então, $v(t) := v(|x|)$. É fácil mostrar, usando função regularizante, o Teorema do Divergente e o Teorema de Lebesgue que $|x| \in H^1(B_s)$.

Notemos que, além disso, $-s \leq |x| \leq s$, $v(t)$ é Lipschitz-contínua e $v'(t)$ existe exceto no conjunto $\{-r, r\}$. Conseqëntemente, em virtude de um teorema devido a Stampacchia [38], resulta:

$$v \in H^1(B_s) \;\text{ e }\; \frac{\partial v}{\partial x_i} = v' \frac{x_i}{|x|} \;\text{ qtp em }\; B_s.$$

Como, junto com isso, $v \in C(\overline{B_s})$, ∂B_s é regular e $v = 0$ sobre ∂B_s, implica que (cf. teorema IX.17, p. 171 em Brézis [9]) $v \in H^1_0(B_s)$.

Recorrendo novamente a Brézis [9][proposição IX.18, p. 172-3], constatamos que a extensão de v, a saber

$$\bar{v}(|x|) := \begin{cases} v(x), \quad x \in B_s, \\ \\ 0, \quad x \in \mathbf{R}^N \setminus B_s \end{cases}$$

pertence a $H^1(\mathbf{R}^N)$. Pela definição de H^1 e usando a imersão de Sobolev, é claro que $\bar{v} \in L^{2^*}(\mathbf{R}^N)$ e $\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} \in L^2(\mathbf{R}^N)$, para cada $i = 1, \dots, N$ no sentido fraco, donde

$$\bar{v} \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N).$$

Redefinindo $\bar{v}$ como $\bar{v} := v(|x|)$, obtemos $v \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$, provando a afirmação.

Agora, façamos em (1.15) $\phi = \widehat{u}_{r,\epsilon}$. Lembrando que $\phi = \widehat{u}_{r,\epsilon} = 0$ em $[r + \epsilon, \infty)$ e que $(\widehat{u}_{r,\epsilon})' = 0$ em $[r + \epsilon, \infty)$, temos:

$$\int_0^{r+\epsilon} t^{N-1}\ \widehat{u}'\ (\widehat{u}_{r,\epsilon})' dt \ = \ \int_0^{r+\epsilon} (\lambda\ t^{N-\theta-1}\ \widehat{u}^{2^*_\theta-1}\ \widehat{u}_{r,\epsilon} + \ \alpha t^{N-1}\widehat{k}\ \widehat{u}^q\ \widehat{u}_{r,\epsilon} + \ \mu t^{N-1}\widehat{f}\ u_{r,\epsilon}) dt.$$

Usando a definição de $\widehat{u}_{r,\epsilon}$, calculando sua derivada e substituindo na expressão anterior, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{\epsilon}\int_r^{r+\epsilon} t^{N-1}\ \widehat{u}'\ dt \ &= \ \int_0^r (\lambda\ t^{N-\theta-1}\ \widehat{u}^{2^*_\theta-1} + \alpha t^{N-1}\ \widehat{k}\ \widehat{u}^q + \mu\ t^{N-1}\ \widehat{f})\ dt \\
&- \ \frac{1}{\epsilon}\ \int_r^{r+\epsilon} (\lambda t^{N-\theta}\ \widehat{u}^{2^*_\theta-1} + \alpha t^N\ \widehat{k}\ \widehat{u}^q + \mu t^N \widehat{f}) dt \\
&+ \ \frac{1}{\epsilon}\int_r^{r+\epsilon} (\lambda t^{N-\theta-1} r \widehat{u}^{2^*_\theta-1} + \alpha t^{N-1} r\widehat{k}\ \widehat{u}^q + \mu t^{N-1} r\widehat{f})\ dt \\
&+ \ \frac{1}{\epsilon}\int_r^{r+\epsilon} (\lambda t^{N-\theta-1}\widehat{u}^{2^*_\theta-1}\epsilon + \alpha t^{N-1}\ \widehat{k}\ \widehat{u}^q\epsilon + \mu t^{N-1}\widehat{f}\epsilon)\ dt.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Aplicaremos em (1.16) o Teorema do Valor Médio para Integrais. Para isso, afirmamos que $\widehat{u}'(t)$ é contínua para todo t pertencente ao anel $[r, r+\epsilon]$.

De fato, tomando

$$\phi := r^{-(N-1)}\psi, \quad r > 0, \quad \psi \in C_0^\infty(0,\infty),$$

temos:

$$\int_0^\infty \left(r^{(N-1)}\widehat{u}'\right)\left(r^{-(N-1)}\psi\right)' dr = \int_0^\infty (\lambda r^{-\theta}\ \widehat{u}^{2^*_\theta-1}\ + \alpha\widehat{k}\ \widehat{u}^q + \mu\ \widehat{f}\ )\psi\ dr$$

no sentido das distribuições (cf. Lions [30] [p. 12]).

Se $\mathcal{O} \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ é um anel, vale, em virtude de um corolário do Teorema de Strauss (cf. Kavian [27][p. 251]), a imersão compacta

$$H^1_{rad}(\mathcal{O}) \hookrightarrow C(\overline{\mathcal{O}}).$$

Assim, $\widehat{u} \in C(\overline{\mathcal{O}})$. Escrevendo

$$\lambda r^{-\theta}\ \widehat{u}^{2^*_\theta-1}\ + \alpha\ \widehat{k}\ \widehat{u}^q + \mu\ \widehat{f} := H(r), \quad r > 0,$$

segue, tendo em vista a continuidade de $\widehat{k}$ e de $\widehat{f}$, que $H \in L^{\infty}_{loc}(0,\infty)$. Isso junto com a igualdade em distribuição acima implica (cf. Gilbarg e Trudinger [23][p. 230]) que $\widehat{u} \in W^{2,p}_{loc}(0,\infty)$ para cada $p \in (1,\infty)$ e que

$$-\Delta\widehat{u}(r) = H(r) \;\; \text{qtp em} \;\;\; (0,\infty)\,.$$

Usando a teoria da regularidade e pelo fato de aplicarmos o procedimento em cada anel $\mathcal{O} \subset \mathbf{R} \setminus \{0\}$, concluímos que $\widehat{u} \in C^1(0,\infty)$.

Fazendo $\epsilon \to 0$ em (1.16), resulta, graças ao Teorema do Valor Médio para Integrais,

$$-r^{N-1}\;\widehat{u}'(r) = \int_0^r (\lambda t^{N-\theta-1}\;\widehat{u}^{2^*_\theta-1} + t^{N-1}\;\alpha\;\widehat{k}\;\widehat{u}^q + t^{N-1}\;\mu\;\widehat{f})\;dt, \quad r > 0. \tag{1.17}$$

De (1.17) concluímos de pronto que $\widehat{u} \in C^2(0,\infty)$.

Afirmamos que $\widehat{u}'(r) < 0,\; r \in (0,\infty)$.

De fato, a integral em (1.17) é não-negativa, de modo que

$$\widehat{u}'(r) \leq 0,\; r \in (0,\infty). \tag{1.18}$$

Agora, como $\widehat{u},\; \widehat{k},\; \widehat{f} \not\equiv 0$ e $\widehat{u} \geq 0$, de (1.17) notamos que, para $r > r_0$, r_0 fixado, o valor assumido por

$$\widehat{u}'(r_0) = -{r_0}^{1-N}\int_0^{r_0} (\lambda t^{N-\theta-1}\;\widehat{u}^{2^*_\theta-1} + t^{N-1}\;\alpha\;\widehat{k}\;\widehat{u}^q + t^{N-1}\;\mu\;\widehat{f})\;dt$$

é estritamente negativo. Esse fato, combinado com (1.18) implica que $\widehat{u}'(r) < 0,\; r \in (0,\infty)$.

Daí, raciocinando de modo semelhante, $\widehat{u} > 0,\; r \in (0,\infty)$.

Por simetria radial, finalmente, $\widehat{u} \in C^2(\mathbf{R}^N \setminus \{0\}\;)$ e, em particular, $\nabla\widehat{u}(x) \cdot x < 0$.

Fica verificado (i).

Verificação de (ii). Fazendo $\phi = \widehat{u}$ em (0.10), temos:

$$\|\widehat{u}\|^2 = \lambda \int \frac{\widehat{u}^{2^*_\theta}}{|x|^\theta}dx + \alpha \int \widehat{k}\;\widehat{u}^{q+1}dx + \mu \int \widehat{f}\;\widehat{u}dx.$$

Usando simetria radial, o fato elementar de que $B := B_{|x|}(0) \subset \mathbf{R}^N$, a continuidade e o decaimento de $\widehat{u}$ e minorações, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\|\widehat{u}\|^2 &\geq \int_S \int_0^{\infty} \lambda \widehat{u}^{2^*_\theta}\ r^{N-\theta-1} dr d\sigma + \alpha \widehat{u}(x)^{q+1} \int_B \widehat{k}(y) dy + \mu \widehat{u}(x) \int_B \widehat{f}(y) dy \\
&\geq \lambda w_N \widehat{u}^{2^*_\theta}(x) \int_0^r t^{N-\theta-1} dt + \alpha \widehat{u}(x)^{q+1} \int_B \widehat{k}(y) dy + \mu \widehat{u}(x) \int_B \widehat{f}(y) dy \\
&= \frac{\lambda w_N \widehat{u}^{2^*_\theta}(x) |x|^{N-\theta}}{N-\theta} + \alpha \widehat{u}(x)^{q+1} \int_B \widehat{k}(y) dy + \mu \widehat{u}(x) \int_B \widehat{f}(y) dy, \quad |x| > 0,
\end{aligned}
$$

mostrando (ii).

$\square$

1.5 Identidades Variacionais

O lema seguinte será usado na análise do comportamento da solução de (0.7) na origem e será provado com base em uma identidade do tipo Derrick-Pohožaev (cf. Pohožaev [36]).

Lema 1.6. *Sejam* $\lambda,\ \alpha,\ \mu \geq 0$, $q \in (0,\ 1) \cup (1,\ 2^* - 1)$ *e* $\theta \in [0, 2]$ *em* (0.7). *Suponha* $(kf)_1,\ (kf)_2$ *e* $(kf)_3$. *Suponha, ainda, que* $\widehat{k}$ *e* $\widehat{f}$ *satisfazem, respectivamente,*

$$\widehat{k},\ \widehat{f} \in C^1(\mathbf{R}^N),\ \widehat{k},\ \widehat{f} > 0,$$

$$(\frac{N}{q+1} - \frac{N-2}{2})\widehat{k}(x) + \frac{1}{q+1}\nabla \widehat{k}(x) \cdot x \geq 0,\ \frac{N+2}{2}\widehat{f}(x) + \nabla \widehat{f}(x) \cdot x \geq 0 \ \ e \tag{1.19}$$

$$|\nabla \widehat{k}(x)| = O(|x|^{-d}) \text{ quando } |x| \to \infty,\ |\nabla \widehat{f}(x)| = O(|x|^{-c}) \text{ quando } |x| \to \infty,$$

onde, respectivamente, $d > \dfrac{N+4+2q-Nq}{2}$ *e* $c > \dfrac{N+4}{2}$. *Se* $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N) \cap C^2(\mathbf{R}^N)$ *é uma solução positiva de* (0.7) *e valem:*

(*a*) $\alpha = 0 \quad e \quad \mu > 0$

ou

(*b*) $\alpha > 0 \quad e \quad \mu = 0$,

então:

$$\alpha \int \Big[(\frac{N}{q+1} - \frac{N-2}{2})\widehat{k}(x) + \frac{1}{q+1}\nabla \widehat{k}(x) \cdot x \Big]\, \widehat{u}^{q+1}\, dx + \mu \int \Big[\frac{N+2}{2}\, \widehat{f}(x) + \nabla \widehat{f}(x) \cdot x \Big]\, \widehat{u}\, dx = 0. \tag{1.20}$$

Para demonstrar o lema 1.6, necessitamos provar o lema auxiliar seguinte. Consideremos, pois, para cada $R > 0$, o problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \dfrac{|u|^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} + \alpha \widehat{k}(x)|u|^q + \mu \widehat{f}(x) \ \text{ em } \ B_R, \\ \\ \qquad u \in H^1(B_R), \end{cases} \tag{1.21}$$

onde $B_R := B_R(0)$.

O lema é o seguinte:

Lema 1.7. *Sejam* $\lambda,\ \alpha,\ \mu \geq 0$, $q \in (0,\ 1) \cup (1,\ 2^* - 1)$ *e* $\theta \in [0, 2]$ *em* (1.21). *Suponha* $(kf)_1$, $(kf)_2$ *e* $(kf)_3$. *Se* $u \in H^1_{rad}(B_R) \cap C^2(\overline{B_R})$ *é uma solução positiva de* (1.21) *e valem:*

(a) $\alpha = 0$ *e* $\mu > 0$

ou

(b) $\alpha > 0$ *e* $\mu = 0$,

então:

$$\alpha \int_{B_R} \Big[\Big(\frac{N}{q+1} - \frac{N-2}{2}\Big)\widehat{k}(x) + \frac{1}{q+1}\nabla\widehat{k}(x)\cdot x\Big]\ u^{q+1}\ dx + \mu \int_{B_R} \Big[\frac{N+2}{2}\ \widehat{f}(x) + \nabla\widehat{f}(x)\cdot x\Big]\ u\ dx$$

$$= \frac{\lambda}{2^*_\theta} \int_{\partial B_R} \frac{u^{2^*_\theta}}{|x|^\theta}(x\cdot\nu)d\sigma + \frac{\alpha}{q+1}\int_{\partial B_R} u^{q+1}\widehat{k}(x)(x\cdot\nu)d\sigma + \mu\int_{\partial B_R} u\widehat{f}(x)(x\cdot\nu)d\sigma - \frac{1}{2}\int_{\partial B_R} |\nabla u|^2(x\cdot\nu)d\sigma. \tag{1.22}$$

Demonstração do lema 1.6: A prova é inspirada em Berestycki e Lions [7] [proposição 1, p. 329]. Usaremos o lema 1.7.

Grosso modo, a idéia é provar que o lado esquerdo de (1.22) converge para uma integração sobre $\mathbf{R}^N$ e que o lado direito converge para zero, quando $R \to \infty$. Faremos a prova por etapas. Sejam, pois, α e μ conforme (a) ou (b).

Etapa 1. Afirmamos que

$$\int_{\partial B_R} |\nabla u|^2\ (x\cdot\nu)\ d\sigma \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Sabemos que

$$x\cdot\nu = x\cdot\frac{x}{|x|} = |x| = R,\ \text{ para cada } x \in \partial B_R.$$

Portanto, usando esse fato na expressão anterior, é suficiente provar que

$$R\int_{\partial B_R} |\nabla u|^2\ d\sigma \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Suponha, por contradição, que existe uma sequência $\{R_m\}$ de números positivos satisfazendo

$$\liminf_{R_m \to \infty} \; R_m \int_{\partial B_{R_m}} |\nabla u|^2 d\sigma \;:=\; \xi_1 > 0. \tag{1.23}$$

Como $u \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$, temos:

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 dx < \infty. \tag{1.24}$$

Agora, desde que $u \in C^2(\overline{B_R})$, segue que $\nabla u \in L^{2N}(\partial B_R)$ e, por (1.23), usando simetria radial,

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 dx \geq \int_0^\infty \Big(\int_{\partial B_{R_m}} |\nabla u|^2 d\sigma \Big) dR = \infty,$$

para algum m conveniente, contradizendo (1.24). Isso prova nossa afirmação.

As etapas 2, 3 e 4 seguem o mesmo rito da etapa 1.

Etapa 2. Afirmamos que

$$\int_{\partial B_R} u^{q+1}\widehat{k}\ (x \cdot \nu)\ d\sigma \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como na etapa 1, é suficiente provar que

$$R \int_{\partial B_R} u^{q+1}\widehat{k}\ d\sigma \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Suponha, por contradição, que existe uma sequência $\{R_m\}$ de números positivos satisfazendo

$$\liminf_{R_m \to \infty} \; R_m \int_{\partial B_{R_m}} u^{q+1}\widehat{k} d\sigma \;:=\; \xi_2 > 0. \tag{1.25}$$

Como $u^{q+1} \in L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbf{R}^N)$ e $\widehat{k} \in (L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbf{R}^N))' \equiv L^a(\mathbf{R}^N)$, temos:

$$\int_{\mathbf{R}^N} u^{q+1}\widehat{k} dx < \infty. \tag{1.26}$$

Agora, usando (1.25) e simetria radial,

$$\int_{\mathbf{R}^N} u^{q+1}\widehat{k}dx \geq \int_0^{\infty} \Big(\int_{\partial B_{R_m}} u^{q+1}\widehat{k}d\sigma \Big) dR = \infty,$$

para algum m conveniente, contradizendo (1.26). Isso prova nossa afirmação.

Etapa 3. Afirmamos que

$$\int_{\partial B_R} u\widehat{f}\ (x\cdot\nu)\ d\sigma \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como na etapa 1, é suficiente provar que

$$R\int_{\partial B_R} u\widehat{f}\ d\sigma \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Suponha, por contradição, que existe uma sequência $\{R_m\}$ de números positivos satisfazendo

$$\liminf_{R_m\to\infty}\ R_m\int_{\partial B_{R_m}} u\widehat{f}d\sigma\ :=\ \xi_3 > 0. \tag{1.27}$$

Como $u \in L^{2^*}(\mathbf{R}^N)$ e $\widehat{f} \in (L^{2^*}(\mathbf{R}^N))' \equiv L^b(\mathbf{R}^N)$, temos:

$$\int_{\mathbf{R}^N} u\widehat{f}dx < \infty. \tag{1.28}$$

Agora, usando (1.27) e simetria radial,

$$\int_{\mathbf{R}^N} u\widehat{f}dx \geq \int_0^{\infty} \Big(\int_{\partial B_{R_m}} u\widehat{f}d\sigma \Big) dR = \infty,$$

para algum m conveniente, contradizendo (1.28). Isso prova nossa afirmação.

Etapa 4. Afirmamos que

$$\int_{\partial B_R} \frac{u^{2^*_\theta}}{|x|^\theta}\ (x\cdot\nu)\ d\sigma \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como na etapa 1, é suficiente provar que

$$R\int_{\partial B_R} \frac{u^{2^*_\theta}}{|x|^\theta}\ d\sigma \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Suponha, por contradição, que existe uma sequência $\{R_m\}$ de números positivos satisfazendo

$$\liminf_{R_m \to \infty} \; R_m \int_{\partial B_{R_m}} \frac{u^{2^*_\theta}}{|x|^\theta} d\sigma \;:=\; \xi_4 > 0. \tag{1.29}$$

Como $u \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$, temos, graças à desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12]:

$$\int_{\mathbf{R}^N} \frac{u^{2^*_\theta}}{|x|^\theta} dx < \infty. \tag{1.30}$$

Agora, usando (1.29) e simetria radial,

$$\int_{\mathbf{R}^N} \frac{u^{2^*_\theta}}{|x|^\theta} dx \geq \int_0^\infty \Big(\int_{\partial B_{R_m}} \frac{u^{2^*_\theta}}{|x|^\theta} d\sigma \Big) dR = \infty,$$

para algum m conveniente, contradizendo (1.30). Isso prova nossa afirmação.

Etapa 5. Afirmamos que

$$\int_{B_R} [(\frac{N}{q+1} - \frac{N-2}{2})\widehat{k}(x) + \frac{1}{q+1} \nabla \widehat{k}(x) \cdot x] u^{q+1} dx \overset{R \to \infty}{\longrightarrow} \int [(\frac{N}{q+1} - \frac{N-2}{2})\widehat{k}(x) + \frac{1}{q+1} \nabla \widehat{k}(x) \cdot x] u^{q+1} dx.$$

Usaremos o Teorema de Lebesgue. Para isso, invocamos a função característica de B_R:

$$\chi_{B_R} := \begin{cases} 1, & B_R, \\ 0, & \mathbf{R}^N \setminus B_R. \end{cases}$$

Pelas propriedades de χ_{B_R}, é imediato que

$$\Big[(\frac{N}{q+1} - \frac{N-2}{2})\widehat{k}(x) + \frac{1}{q+1} \nabla \widehat{k}(x) \cdot x \Big] \, u^{q+1} \, \chi_{B_R} \overset{R \to \infty}{\longrightarrow} \Big[(\frac{N}{q+1} - \frac{N-2}{2})\widehat{k}(x) + \frac{1}{q+1} \nabla \widehat{k}(x) \cdot x \Big] \, u^{q+1}$$

qtp em $\mathbf{R}^N$ e que

$$\Big| \Big[(\frac{N}{q+1} - \frac{N-2}{2})\widehat{k}(x) + \frac{1}{q+1} \nabla \widehat{k}(x) \cdot x \Big] \, u^{q+1} \, \chi_{B_R} \Big| \leq \Big| \Big[(\frac{N}{q+1} - \frac{N-2}{2})\widehat{k}(x) + \frac{1}{q+1} \nabla \widehat{k}(x) \cdot x \Big] \, u^{q+1} \Big|$$

qtp em $\mathbf{R}^N$.

Resta, portanto, para aplicar o Teorema de Lebesgue, mostrar que

$$\Big[(\frac{N}{q+1}-\frac{N-2}{2})\widehat{k}(x)+\frac{1}{q+1}\nabla\widehat{k}(x)\cdot x\Big]\ u^{q+1}\ \chi_{B_R}\in L^1(\mathbf{R}^N). \qquad (1.31)$$

Com efeito, usando as desigualdades de Hölder e de Cauchy-Schwarz:

$$\textstyle\int |[(\frac{N}{q+1}-\frac{N-2}{2})\widehat{k}(x)+\frac{1}{q+1}\nabla\widehat{k}(x)\cdot x]\ u^{q+1}\ \chi_{B_R}|dx \leq |\frac{N}{q+1}-\frac{N-2}{2}||\widehat{k}|_{L^a_{rad}}|u|^{q+1}_{L^{2^*}}+\frac{1}{q+1}\int|\nabla\widehat{k}||x||u|^{q+1}dx.$$

Como $u\in D^{1,2}_{rad}$, usaremos o seu decaimento nativo, a saber (cf. Struwe [39] [p. 154]):

$$|u(x)|\leq C_N|x|^{\frac{2-N}{2}}\|u\|,$$

onde C_N é uma constante positiva. Lembramos, também, que, de (1.19),

$$|\nabla\widehat{k}(x)|=O(|x|^{-d}),\ d>\frac{N+4+2q-Nq}{2},$$

para $|x|$ suficientemente grande. Temos, pois, usando simetria radial:

$$\begin{aligned}
&\int\Big|\Big[(\frac{N}{q+1}-\frac{N-2}{2})\widehat{k}(x)+\frac{1}{q+1}\nabla\widehat{k}(x)\cdot x\Big]\ u^{q+1}\Big|dx\\
&\leq\Big|\frac{N}{q+1}-\frac{N-2}{2}\Big||\widehat{k}|_{L^a_{rad}}|u|^{q+1}_{L^{2^*}}+\frac{1}{q+1}\int|\nabla\widehat{k}||x|{C_N}^{q+1}|x|^{(\frac{2-N}{2})(q+1)}\|u\|^{q+1}dx\\
&\leq\Big|\frac{N}{q+1}-\frac{N-2}{2}\Big||\widehat{k}|_{L^a_{rad}}|u|^{q+1}_{L^{2^*}}+\frac{{C_N}^{q+1}}{q+1}\|u\|^{q+1}|\nabla\widehat{k}|_{L^\infty}w_N\int_0^R r^{N+\frac{(2-N)(q+1)}{2}}dr\\
&+\frac{{C_N}^{q+1}}{q+1}\|u\|^{q+1}w_N\int_R^\infty r^{N+\frac{(2-N)(q+1)}{2}-d}dr
\end{aligned}$$

Mas $d>\dfrac{N+4+2q-Nq}{2}$ e $N+4+2q-Nq>0$, para cada $q\in(0,1)\cup(1,2^*-1)$, de modo que

$$
\begin{aligned}
&\int \Big| \Big[\big(\frac{N}{q+1} - \frac{N-2}{2}\big)\widehat{k}(x) + \frac{1}{q+1}\nabla \widehat{k}(x)\cdot x \Big] \; u^{q+1} \Big| dx \\
&\leq \big|\frac{N}{q+1} - \frac{N-2}{2}\big| |\widehat{k}|_{L^a_{rad}} |u|^{q+1}_{L^{2^*}} \\
&+2\frac{C_N{}^{q+1}}{q+1}\|u\|^{q+1} w_N \left[\frac{|\nabla \widehat{k}|_{L^\infty} R^{\frac{N+4+2q-Nq}{2}}}{N+4+2q-Nq} + \frac{R^{\frac{N+4+2q-Nq-2d}{2}}}{2d-N-4-2q+Nq} \right] \\
&< \infty,
\end{aligned}
$$

mostrando (1.31). Usando o Teorema de Lebesgue, segue nossa afirmação.

Etapa 6. Afirmamos que

$$\int_{B_R} \Big[\frac{N+2}{2} \; \widehat{f}(x) + \nabla \widehat{f}(x)\cdot x \Big] \; u \; dx \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \int \Big[\frac{N+2}{2} \; \widehat{f}(x) + \nabla \widehat{f}(x)\cdot x \Big] \; u \; dx.$$

Esta etapa é semelhante à anterior, usando o Teorema de Lebesgue. Simplificaremos alguns passos.

Como antes, é imediato que

$$\Big[\frac{N+2}{2} \; \widehat{f}(x) + \nabla \widehat{f}(x)\cdot x \Big] \; u \; \chi_{B_R} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \Big[\frac{N+2}{2} \; \widehat{f}(x) + \nabla \widehat{f}(x)\cdot x \Big] \; u \;\; \text{qtp em } \mathbf{R}^N$$

e que

$$\Big| \Big[\frac{N+2}{2} \; \widehat{f}(x) + \nabla \widehat{f}(x)\cdot x \Big] \; u \; \chi_{B_R} \Big| \leq \Big| \Big[\frac{N+2}{2} \; \widehat{f}(x) + \nabla \widehat{f}(x)\cdot x \Big] \; u \Big| \;\; \text{qtp em } \mathbf{R}^N.$$

Resta, portanto, para aplicar o Teorema de Lebesgue, mostrar que

$$\Big[\frac{N+2}{2} \; \widehat{f}(x) + \nabla \widehat{f}(x)\cdot x \Big] \; u \; \chi_{B_R} \in L^1(\mathbf{R}^N). \tag{1.32}$$

Com efeito, usando as desigualdades de Hölder e de Cauchy-Schwarz:

$$\int \Big| \Big[\frac{N+2}{2} \; \widehat{f}(x) + \nabla \widehat{f}(x)\cdot x \Big] \; u \Big| dx \leq \frac{N+2}{2} |\widehat{f}|_{L^b_{rad}} |u|_{L^{2^*}} + \int |\nabla \widehat{f}||x||u| dx.$$

Usando (1.19), o decaimento nativo de u, simetria radial e o fato de que $c > \dfrac{N+4}{2}$, obtemos:

$$\int \Big| \Big[\frac{N+2}{2} \, \widehat{f}(x) + \nabla \widehat{f}(x) \cdot x \Big] \, u \Big| dx$$

$$\leq \frac{N+2}{2} |\widehat{f}|_{L^b_{rad}} |u|_{L^{2^*}} + 2C_N \|u\| w_N \left[\frac{|\nabla \widehat{f}|_{L^\infty} R^{\frac{N+4}{2}}}{N+4} + \frac{R^{\frac{N+4-2c}{2}}}{2c-N-4} \right]$$

$$< \infty,$$

mostrando (1.32). Usando o Teorema de Lebesgue, segue nossa afirmação.

Passando ao limite em (1.22) e usando as convergências provadas nas etapas 1 a 6, obtemos (1.20).

$\square$

Demonstração do lema 1.7: Para provarmos (1.22), demonstraremos inicialmente, argumentando como em Evans [19] [p. 516], a seguinte identidade do tipo Derrick-Pohožaev associada a (1.21):

$$\Big(\frac{2-N}{2}\Big) \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx + \lambda \Big(\frac{N-2}{2}\Big) \int_{B_R} \frac{u^{2^*_\theta}}{|x|^\theta} \, dx$$
$$+ \frac{\alpha}{q+1} \int_{B_R} (\nabla \widehat{k}.x + N\widehat{k}) \, u^{q+1} \, dx + \mu \int_{B_R} (\nabla \widehat{f}.x + N\widehat{f}) \, u \, dx$$
$$= \frac{\lambda}{2^*_\theta} \int_{\partial B_R} \frac{u^{2^*_\theta}}{|x|^\theta} (x \cdot \nu) \, d\sigma + \frac{\alpha}{q+1} \int_{\partial B_R} u^{q+1} \, \widehat{k} (x \cdot \nu) \, d\sigma + \mu \int_{\partial B_R} u \, \widehat{f} (x \cdot \nu) \, d\sigma - \int_{\partial B_R} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 (x \cdot \nu) \, d\sigma.$$

De fato, lembramos que B_R é um domínio estrelado relativamente à origem e que, portanto,

$$x \cdot \nu(x) > 0, \text{ para cada } x \in \partial B_R,$$

onde ν é a normal unitária exterior de ∂B_R. Multiplicando a EDP em (1.21) por $x \cdot \nabla u$ e integrando sobre B_R, temos:

$$\int_{B_R} (-\Delta u)(x.\nabla u) dx = \lambda \int_{B_R} \frac{u^{\frac{N+2-2\theta}{N-2}}}{|x|^\theta} (x.\nabla u) dx + \alpha \int_{B_R} \widehat{k} u^q (x.\nabla u) dx + \mu \int_{B_R} \widehat{f} (x.\nabla u) dx.$$

Sejam

$$A := \int_{B_R} (-\Delta u)(x.\nabla u)dx,$$

$$B := \lambda \int_{B_R} \frac{u^{\frac{N+2-2\theta}{N-2}}}{|x|^\theta}(x.\nabla u)dx, \quad C := \alpha \int_{B_R} \widehat{k}u^q(x.\nabla u)dx \quad \text{e} \quad D := \mu \int_{B_R} \widehat{f}(x.\nabla u)dx,$$

de modo que

$$A = B + C + D.$$

Sejam $u \in C^2(\overline{B_R})$, $\widehat{k},\ \widehat{f} \in C^1(\overline{B_R})$ e $\alpha,\ \mu$ conforme (a) ou (b). Usaremos integração por partes (cf. Evans [19] [teorema 2, p. 628]).

Cálculo de A. Desenvolvendo o produto interno em A e integrando por partes, obtemos:

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} \int_{B_R} u_{x_i}(x_j u_{x_j})_{x_i} dx - \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\partial B_R} u_{x_i}\nu^i x_j u_{x_j} d\sigma,$$

onde ν^i é a i-ésima componente vetorial de ν. Note que o segundo termo de A reduz-se a

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\partial B_R} u_{x_i}\nu^i x_j u_{x_j} d\sigma &= -\int_{\partial B_R} (u_{x_1}\nu^1 + ... + u_{x_N}\nu^N)(x_1 u_{x_1} + ... + x_N u_{x_N})d\sigma \\ &= -\int_{\partial B_R} (\nabla u.\nu)(x.\nabla u)d\sigma \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $u \in C^2(\overline{B_R})$, de modo que $\nabla u.\nu \equiv \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ (cf. Lions [30] [p. 97]). Assim, A torna-se:

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} \int_{B_R} u_{x_i}(x_j u_{x_j})_{x_i} dx,$$

que, após derivação em x_i, resulta:

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} \int_{B_R} (u_{x_i}\delta_{ij}u_{x_j} + u_{x_i}x_j u_{x_j x_i})dx,$$

onde δ_{ij} é o Delta de Kronecker. Note que, por um lado

$$\sum_{i,j=1}^{N}(u_{x_i}\delta_{ij}u_{x_j}) = \begin{cases} |\nabla u|^2, & i=j, \\ \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

Por outro lado, é fácil ver que

$$u_{x_i}u_{x_jx_i} = \Big(\frac{|\nabla u|^2}{2}\Big)_{x_j}.$$

Substituindo ambas as expressões em A, obtemos:

$$A = \int_{B_R}|\nabla u|^2dx + \sum_{j=1}^{N}\int_{B_R}\Big(\frac{|\nabla u|^2}{2}\Big)_{x_j}x_jdx.$$

Aplicando novamente integração por partes na última integral, obtemos:

$$\begin{aligned} A &= \int_{B_R}|\nabla u|^2dx - \sum_{j=1}^{N}\int_{B_R}\frac{|\nabla u|^2}{2}dx + \sum_{j=1}^{N}\int_{\partial B_R}\frac{|\nabla u|^2}{2}x_j\nu^j d\sigma \\ &= \int_{B_R}|\nabla u|^2dx - \frac{N}{2}\int_{B_R}|\nabla u|^2dx + \int_{\partial B_R}\frac{|\nabla u|^2}{2}(x\cdot\nu)d\sigma, \end{aligned}$$

donde

$$A = (\frac{2-N}{2})\int_{B_R}|\nabla u|^2dx + \frac{1}{2}\int_{\partial B_R}|\nabla u|^2(x\cdot\nu)d\sigma.$$

Cálculo de B. Desenvolvendo B, obtemos:

$$B = \lambda\sum_{i=1}^{N}\int_{B_R}\frac{u^{\frac{N+2-2\theta}{N-2}}}{|x|^\theta}x_iu_{x_i}dx.$$

É imediato que

$$\left[(\frac{N-2}{2N-2\theta})u^{\frac{2N-2\theta}{N-2}}\right]_{x_i} = u^{\frac{N+2-2\theta}{N-2}}u_{x_i},$$

que substituído em B, fica

$$B = \lambda \sum_{i=1}^{N} \int_{B_R} \left[(\frac{N-2}{2N-2\theta}) u^{\frac{2N-2\theta}{N-2}} \right]_{x_i} \frac{x_i}{|x|^\theta} dx.$$

Integrando por partes, temos:

$$B = -\lambda \sum_{i=1}^{N} \int_{B_R} (\frac{N-2}{2N-2\theta}) u^{\frac{2N-2\theta}{N-2}} \left(\frac{x_i}{|x|^\theta} \right)_{x_i} dx + \lambda \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial B_R} (\frac{N-2}{2N-2\theta}) u^{\frac{2N-2\theta}{N-2}} \left(\frac{x_i}{|x|^\theta} \right) \nu^i d\sigma.$$

Observe que

$$\left(\frac{x_i}{|x|^\theta} \right)_{x_i} = \frac{1}{|x|^\theta} - \frac{\theta x_i^2}{|x|^{\theta+2}},$$

de modo que

$$B = -\lambda \sum_{i=1}^{N} \int_{B_R} (\frac{N-2}{2N-2\theta}) u^{\frac{2N-2\theta}{N-2}} \left(\frac{1}{|x|^\theta} - \frac{\theta x_i^2}{|x|^{\theta+2}} \right) dx + \lambda \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial B_R} (\frac{N-2}{2N-2\theta}) u^{\frac{2N-2\theta}{N-2}} \left(\frac{x_i \nu^i}{|x|^\theta} \right) d\sigma$$

e calculando B fica

$$B = -\lambda \int_{B_R} (\frac{N-2}{2N-2\theta}) u^{\frac{2N-2\theta}{N-2}} \left(\frac{N-\theta}{|x|^\theta} \right) dx + \lambda \int_{\partial B_R} (\frac{N-2}{2N-2\theta}) \frac{u^{\frac{2N-2\theta}{N-2}}}{|x|^\theta} (x \cdot \nu) d\sigma,$$

donde

$$B = -\lambda (\frac{N-2}{2}) \int_{B_R} \frac{u^{\frac{2N-2\theta}{N-2}}}{|x|^\theta} dx + \lambda (\frac{N-2}{2N-2\theta}) \int_{\partial B_R} \frac{u^{\frac{2N-2\theta}{N-2}}}{|x|^\theta} (x \cdot \nu) d\sigma.$$

O cálculo de C e D, a seguir, segue o mesmo procedimento feito em B, com integração por partes e artifícios óbvios.

Cálculo de C. Após desenvolvimento, C torna-se

$$
\begin{aligned}
C &= \alpha \sum_{i=1}^{N} \int_{B_R} \widehat{k} u^q x_i u_{x_i} dx \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{N} \int_{B_R} \left(\frac{1}{q+1} u^{q+1} \right)_{x_i} (\widehat{k} x_i) dx \\
&= -\alpha \sum_{i=1}^{N} \int_{B_R} \frac{1}{q+1} u^{q+1} (\widehat{k} x_i)_{x_i} dx + \alpha \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial B_R} \frac{1}{q+1} u^{q+1} \widehat{k} x_i \nu^i d\sigma \\
&= -\alpha \sum_{i=1}^{N} \int_{B_R} \frac{1}{q+1} u^{q+1} (\widehat{k}_{x_i} x_i + \widehat{k}.1) dx + \alpha \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial B_R} \frac{1}{q+1} u^{q+1} \widehat{k} x_i \nu^i d\sigma,
\end{aligned}
$$

donde

$$
C = -\frac{\alpha}{q+1} \int_{B_R} (\nabla \widehat{k}.x + N\widehat{k}) u^{q+1} dx + \frac{\alpha}{q+1} \int_{\partial B_R} u^{q+1} \widehat{k} (x \cdot \nu) d\sigma.
$$

Cálculo de D. Como em C, D torna-se

$$
\begin{aligned}
D &= \mu \sum_{i=1}^{N} \int_{B_R} \widehat{f} x_i u_{x_i} dx \\
&= \mu \sum_{i=1}^{N} \int_{B_R} u_{x_i} \widehat{f} x_i dx \\
&= -\mu \sum_{i=1}^{N} \int_{B_R} u (\widehat{f} x_i)_{x_i} dx + \mu \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial B_R} u \widehat{f} x_i \nu^i d\sigma \\
&= -\mu \sum_{i=1}^{N} \int_{B_R} u (\widehat{f}_{x_i} x_i + \widehat{f}.1) dx + \mu \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial B_R} u \widehat{f} x_i \nu^i d\sigma,
\end{aligned}
$$

donde

$$
D = -\mu \int_{B_R} (\nabla \widehat{f}.x + N\widehat{f}) u + \mu \int_{\partial B_R} u \widehat{f} (x \cdot \nu) d\sigma.
$$

Lembrando que $A = B + C + D$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&(\frac{2-N}{2})\int_{B_R}|\nabla u|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\partial B_R}|\nabla u|^2(x\cdot\nu)d\sigma\\
&=-\lambda(\frac{N-2}{2})\int_{B_R}\frac{u^{\frac{2N-2\theta}{N-2}}}{|x|^\theta}dx+\lambda(\frac{N-2}{2N-2\theta})\int_{\partial B_R}\frac{u^{\frac{2N-2\theta}{N-2}}}{|x|^\theta}(x\cdot\nu)d\sigma\\
&-\frac{\alpha}{q+1}\int_{B_R}(\nabla\widehat{k}.x+N\widehat{k})u^{q+1}dx+\frac{\alpha}{q+1}\int_{\partial B_R}u^{q+1}\widehat{k}(x\cdot\nu)d\sigma\\
&-\mu\int_{B_R}(\nabla\widehat{f}.x+N\widehat{f})u+\mu\int_{\partial B_R}u\widehat{f}(x\cdot\nu)d\sigma,
\end{aligned}
$$

que, após cálculos e rearranjos, resulta a identidade do tipo Derrick-Pohožaev associada a (1.21) acima afirmada. Com essa identidade, podemos provar (1.22). Com efeito, multiplicando a EDP em (1.21) por u e integrando sobre B_R, temos:

$$
\int_{B_R}-u\Delta udx=\lambda\int_{B_R}\frac{u^{\frac{2N-2\theta}{N-2}}}{|x|^\theta}dx+\alpha\int_{B_R}\widehat{k}u^{q+1}dx+\mu\int_{B_R}\widehat{f}udx. \tag{1.33}
$$

Da segunda Identidade de Green (cf. Evans [19] [teorema 3, p. 628]), podemos escrever:

$$
\int_{B_R}|\nabla u|^2dx=-\int_{B_R}u\Delta udx+\int_{B_R}u\frac{\partial u}{\partial\nu}d\sigma.
$$

Lembrando que $\frac{\partial u}{\partial\nu}=0$ sobre ∂B_R, resulta:

$$
\int_{B_R}|\nabla u|^2dx=-\int_{B_R}u\Delta udx.
$$

Substituindo essa última expressão em (1.33), obtemos:

$$
\int_{B_R}|\nabla u|^2dx=\lambda\int_{B_R}\frac{u^{\frac{2N-2\theta}{N-2}}}{|x|^\theta}dx+\alpha\int_{B_R}\widehat{k}u^{q+1}dx+\mu\int_{B_R}\widehat{f}udx.
$$

Substituindo essa última expressão na identidade acima obtida, cancelando termos e calculando, obtemos:

$$\alpha\int_{B_R}(\frac{2-N}{2}\widehat{k}+\frac{\nabla\widehat{k}.x}{q+1}+\frac{N}{q+1}\widehat{k})u^{q+1}dx+\mu\int_{B_R}(\frac{2-N}{2}\widehat{f}+\nabla\widehat{f}.x+N\widehat{f})udx$$

$$=\lambda(\frac{N-2}{2N-2\theta})\int_{\partial B_R}\frac{u^{\frac{2N-2\theta}{N-2}}}{|x|^\theta}(x\cdot\nu)d\sigma+\frac{\alpha}{q+1}\int_{\partial B_R}u^{q+1}\widehat{k}(x\cdot\nu)d\sigma$$

$$+\mu\int_{\partial B_R}u\widehat{f}(x\cdot\nu)d\sigma-\frac{1}{2}\int_{\partial B_R}|\nabla u|^2(x\cdot\nu)d\sigma.$$

Finalmente, após cálculos,

$$\alpha\int_{B_R}[(\frac{N}{q+1}-\frac{N-2}{2})\widehat{k}(x)+\frac{1}{q+1}\nabla\widehat{k}(x)\cdot x]u^{q+1}dx+\mu\int_{B_R}(\frac{N+2}{2}\widehat{f}+\nabla\widehat{f}.x)udx$$

$$=\lambda(\frac{N-2}{2N-2\theta})\int_{\partial B_R}\frac{u^{\frac{2N-2\theta}{N-2}}}{|x|^\theta}(x\cdot\nu)d\sigma+\frac{\alpha}{q+1}\int_{\partial B_R}u^{q+1}\widehat{k}(x\cdot\nu)d\sigma$$

$$+\mu\int_{\partial B_R}u\widehat{f}(x\cdot\nu)d\sigma-\frac{1}{2}\int_{\partial B_R}|\nabla u|^2(x\cdot\nu)d\sigma,$$

que é a expressão (1.22).

□

1.6 Um Teorema de Sub e Supersoluções para Potenciais Singulares

Provaremos, a seguir, um teorema de sub e supersoluções para potenciais singulares, o qual permitirá encontrar soluções fracas no sentido de $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ para a equação (0.1).

Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u=\lambda\dfrac{u^{2^*_\theta-1}}{|x|^\theta}+\alpha k(x)u^q+\mu f(x) \ \text{ em } \ \Omega, \\ \\ u\geq 0 \ \text{ em } \ \Omega, \ u=0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.34}$$

onde $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular.

Sejam $\underline{u}$, $\overline{u} \in L_\theta^{2_\theta^*}(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ satisfazendo $0 \leq \underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω, $\underline{u} \leq 0$ sobre $\partial\Omega$ e $\overline{u} \geq 0$ sobre $\partial\Omega$. Dizemos que $\underline{u}$ é uma subsolução de (1.34) se

$$\int_\Omega \nabla \underline{u} \cdot \nabla \phi dx \leq \lambda \int_\Omega \frac{\underline{u}^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta} \phi dx + \alpha \int_\Omega k \underline{u}^q \phi dx + \mu \int_\Omega f \phi dx, \quad \phi \in H_0^1(\Omega), \quad \phi \geq 0 \tag{1.35}$$

e $\overline{u}$ é uma supersolução de (1.34) se

$$\int_\Omega \nabla \overline{u} \cdot \nabla \phi dx \geq \lambda \int_\Omega \frac{\overline{u}^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta} \phi dx + \alpha \int_\Omega k \overline{u}^q \phi dx + \mu \int_\Omega f \phi dx, \quad \phi \in H_0^1(\Omega), \quad \phi \geq 0 \quad (1.36).$$

Teorema 1.8. *Sejam* $\lambda,\ \alpha,\ \mu \geq 0$, $q \in (0,\ 1) \cup (1,\ 2^* - 1)$ *e* $\theta \in [0, 2]$ *em* (1.34). *Suponha* $(kf)_1$, $(kf)_2$ *e* $(kf)_3$ *e valem:*

(*a*) $\alpha = 0$ *e* $\mu > 0$

ou

(*b*) $\alpha > 0$ *e* $\mu = 0$.

Se $\underline{u}$, $\overline{u}$ *são, respectivamente, sub e supersolução de* (1.34), *então existe* $u \in H_0^1(\Omega)$ *tal que* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ *em* Ω *e*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi dx = \lambda \int_\Omega \frac{u^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta} \phi dx + \alpha \int_\Omega k u^q \phi dx + \mu \int_\Omega f \phi dx, \ \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.37}$$

Demonstração: Seguiremos Alves, Gonçalves e Santos [3] [teorema 1.2]. Suponha α, μ conforme (a) ou (b). Provaremos por etapas.

Etapa 1. Consideremos o problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta u = \Psi \ \text{ em } \ \Omega, \\ \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.38}$$

cujo operador-solução é dado por

$$\begin{aligned} S : H^{-1}(\Omega) &\to H_0^1(\Omega) \\ \Psi &\mapsto S(\Psi) := u. \end{aligned}$$

Sabemos que S é limitado, não-decrescente e contínuo (cf. Melo [32]).

Etapa 2. Consideremos a aplicação não-linear

$$N : \mathcal{C} \to H^{-1}(\Omega),$$

dada por

$$\langle Nu, \phi \rangle := \int_\Omega z(x,u)\phi dx,\ x \in \Omega,\ u,\ \phi \in H_0^1(\Omega),$$

onde $z(x,u) := \lambda \dfrac{u^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta} + \alpha k(x) u^q + \mu f(x)$ e $\mathcal{C} := \{u \in H_0^1(\Omega);\ \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\}$.

Afirmamos:

$$N(\mathcal{C}) \text{ é limitada, isto é, existe } K \geq 0 \text{ tal que } |Nu|_{H^{-1}} \leq K, \text{ para cada } u \in \mathcal{C}. \tag{1.39}$$

$$N \text{ é contínua, isto é,} \tag{1.40}$$

$$\text{dada } \{u_n\} \in \mathcal{C} \text{ tal que } u_n \longrightarrow u \text{ qtp em } \Omega \text{ implica } Nu_n \stackrel{H^{-1}}{\longrightarrow} Nu.$$

$$N \text{ é não-decrescente, isto é,} \tag{1.41}$$

$$\text{dadas } u_1,\ u_2 \in \mathcal{C},\ \text{com } u_1 \leq u_2,\ \text{então } \langle Nu_1 - Nu_2, \phi \rangle \leq 0,\ \phi \in H_0^1(\Omega),\ \phi \geq 0.$$

Verificação de (1.39). Sejam $u \in \mathcal{C}$ e $\phi \in H_0^1(\Omega)$. Temos:

$$\begin{aligned}
|\langle Nu, \phi \rangle| &= \Big| \int_\Omega z(x,u)\phi dx \Big| \\
&\leq \lambda \int_\Omega \frac{|\overline{u}|^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta} |\phi| dx + \alpha \int_\Omega |k||\overline{u}|^q |\phi| dx + \mu \int_\Omega |f||\phi| dx \\
&= \lambda \int_\Omega \frac{|\overline{u}|^{2_\theta^*-1}}{|x|^{\theta \frac{2_\theta^*-1}{2_\theta^*}}} \frac{|\phi|}{|x|^{\theta \frac{1}{2_\theta^*}}} dx + \alpha \int_\Omega |k||\overline{u}||\phi| dx + \mu \int_\Omega |f||\phi| dx.
\end{aligned}$$

Graças às restrições $k \in L^a(\Omega)$, $f \in L^b(\Omega)$, às imersões contínuas $\phi \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L_\theta^{2_\theta^*}(\Omega)$, $\overline{u} \in H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ e às conjugações $\frac{2_\theta^*-1}{2_\theta^*} + \frac{1}{2_\theta^*} = 1$, $\frac{1}{a} + \frac{q}{2^*} + \frac{1}{2^*} = 1$ e $\frac{1}{b} + \frac{1}{2^*} = 1$, podemos aplicar as desigualdades de Hölder, de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12] e de Sobolev, para obter:

$$|\langle Nu, \phi\rangle| \leq \lambda S_\theta^{-1/2} |\overline{u}|_{L_\theta^{2_\theta^*}}^{2_\theta^*-1} |\phi|_{H_0^1} + \alpha S_0^{-1/2} |k|_{L^a} |\overline{u}|_{L^{2^*}}^q |\phi|_{H_0^1} + \mu S_0^{-1/2} |f|_{L^b} |\phi|_{H_0^1},$$

de modo que,

$$|\langle Nu, \phi\rangle| \leq K|\phi|_{H_0^1}, \text{ para cada } u \in \mathcal{C}, \text{ para cada } \phi \in H_0^1(\Omega),$$

onde $K := \lambda S_\theta^{-1/2} |\overline{u}|_{L_\theta^{2_\theta^*}}^{2_\theta^*-1} + \alpha S_0^{-1/2} |k|_{L^a} |\overline{u}|_{L^{2^*}}^q + \mu S_0^{-1/2} |f|_{L^b}$. Donde

$$|Nu|_{H^{-1}} \leq K, \text{ para cada } u \in \mathcal{C},$$

mostrando (1.39).

Verificação de (1.40). Sejam $\{u_n\} \subset \mathcal{C}$ e $u \in \mathcal{C}$ tais que

$$u_n \longrightarrow u \text{ qtp em } \Omega.$$

Temos:

$$\begin{aligned}
|\langle Nu_n - Nu, \phi\rangle| &= \Big| \int_\Omega z(x, u_n)\phi dx - \int_\Omega z(x, u)\phi dx \Big| \\
&\leq \lambda \int_\Omega \frac{|{u_n}^{2_\theta^*-1} - u^{2_\theta^*-1}|}{|x|^\theta} |\phi| dx + \alpha \int_\Omega |k| |{u_n}^q - u^q| |\phi| dx.
\end{aligned}$$

Usando as mesmas desigualdades citadas na verificação de (1.39) sob os mesmos argumentos, obtemos:

$$|Nu_n - Nu|_{H^{-1}} \leq \lambda S_\theta^{-1/2} |{u_n}^{2_\theta^*-1} - u^{2_\theta^*-1}|_{L_\theta^{\frac{2_\theta^*}{2_\theta^*-1}}} + \alpha S_0^{-1/2} |k|_{L^a} |{u_n}^q - u^q|_{L^{\frac{2^*}{q}}}.$$

Notemos que

$${u_n}^{2_\theta^*-1} \longrightarrow u^{2_\theta^*-1} \text{ qtp em } \Omega \;\text{ e }\; {u_n}^q \longrightarrow u^q \text{ qtp em } \Omega.$$

Além disso, valem as dominações:

$$u_n{}^{2^*_\theta - 1} \leq \overline{u}^{2^*_\theta - 1} \in L_\theta^{\frac{2^*_\theta}{2^*_\theta - 1}}(\Omega) \text{ e } u_n{}^q \leq \overline{u}^q \in L^{\frac{2^*}{q}}(\Omega).$$

Usando o Teorema de Lebesgue, é imediato que

$$Nu_n \xrightarrow{H^{-1}} Nu,$$

provando (1.40).

Verificação de (1.41). Sejam $u_1,\ u_2 \in \mathcal{C}$ tais que $u_1 \leq u_2$. Dada $\phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned} \langle Nu_1 - Nu_2, \phi \rangle &= \int_\Omega z(x, u_1)\phi dx - \int_\Omega z(x, u_2)\phi dx \\ &= \lambda \int_\Omega \frac{(u_1{}^{2^*_\theta - 1} - u_2{}^{2^*_\theta - 1})}{|x|^\theta} \phi dx + \alpha \int_\Omega k(u_1{}^q - u_2{}^q)\phi dx \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Donde

$$Nu_1 \leq Nu_2,$$

provando (1.41).

Etapa 3. Seja

$$F : \mathcal{C} \to H_0^1(\Omega)$$

dada por $F(u) := S(Nu)$, onde S é o operador-solução caracterizado na etapa 1 e N é a aplicação não-linear definida na etapa 2.

Afirmamos que $u \in \mathcal{C}$ é solução fraca de (1.34) no sentido de $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi dx = \lambda \int \frac{u^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \phi dx + \alpha \int_\Omega k u^q \phi dx + \mu \int_\Omega f \phi dx, \text{ para cada } \phi \in H_0^1(\Omega), \quad (1.42)$$

se, e somente se,

$$u = F(u). \tag{1.43}$$

De fato, se $u \in \mathcal{C}$ satisfaz (1.42), então

$$-\Delta u = \Psi \text{ em } \Omega,$$

onde, basicamente, $\Psi = Nu = \lambda \frac{u^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} + \alpha k(x) u^q + \mu f(x),\ x \in \Omega$. Mas $S(\Psi) := u$ e $F(u) := S(Nu)$, de modo que $F(u) = u$, valendo (1.43).

Reciprocamente, se $u = F(u)$, então $S(Nu) = S(\Psi) = u$, isto é,

$$-\Delta u = \lambda \frac{u^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} + \alpha k(x) u^q + \mu f(x) \text{ em } \Omega.$$

Donde $u \in \mathcal{C}$ satisfaz (1.42).

Para concluir a demonstração, é suficiente encontrar um ponto fixo u para F.

Etapa 4. Consideremos, pois, a seqüência

$$\underline{u}_{n+1} := F(\underline{u}_n),\ n = 0,\ 1,\ 2,\ ...,$$

onde $\underline{u}_0 := \underline{u}$.

Afirmamos que

$$\underline{u} \leq \underline{u}_1 \leq ... \leq \underline{u}_n \leq ... \leq \overline{u}_1,\ \Omega,\ \text{para cada } n \in \mathbf{N}. \tag{1.44}$$

De fato, tomemos $\phi \in H^1_0(\Omega)$ com $\phi \geq 0$. Temos, de (1.35):

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla \underline{u} \cdot \nabla \phi dx &\leq \lambda \int_\Omega \frac{\underline{u}^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta}\ \phi dx + \alpha \int_\Omega k \underline{u}^q \phi dx + \mu \int_\Omega f \phi dx \\
&= \lambda \int_\Omega \frac{F(\underline{u})^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta}\ \phi dx + \alpha \int_\Omega k F(\underline{u})^q \phi dx + \mu \int_\Omega f \phi dx \\
&= \lambda \int_\Omega \frac{\underline{u}_1{}^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta}\ \phi dx + \alpha \int_\Omega k \underline{u}_1{}^q \phi dx + \mu \int_\Omega f \phi dx \\
&= \int_\Omega \nabla \underline{u}_1 \cdot \nabla \phi dx.
\end{aligned}$$

Como $\underline{u} \leq 0 = \underline{u}_1$ sobre $\partial\Omega$, pelo Princípio de Comparação Fraco,

$$\underline{u} \leq \underline{u}_1, \ \Omega.$$

De forma análoga,

$$\underline{u}_1 \leq \underline{u}_2, \ \Omega.$$

Iterando a argumentação, obtemos (1.44).

Analogamente, provamos que

$$\overline{u} \geq \overline{u}_1 \geq ... \geq \overline{u}_n \geq ... \geq \underline{u}_1, \ \Omega, \ \text{para cada } n \in \mathbf{N}, \tag{1.45}$$

usando (1.36) em lugar de (1.35).

Sejam $u := \lim_{n\to\infty} \underline{u}_n$ e $\overline{u} := \lim_{n\to\infty} \overline{u}_n$. Logo, por (1.44) e (1.45), obtemos:

$$\overline{u}_n \longrightarrow u \text{ qtp em } \Omega \ \text{ e } \ \underline{u} \leq u \leq \overline{u}.$$

Afirmamos que F tem um ponto fixo $u \in \mathcal{C}$.

De fato, argumentando exatamente como na verificação de (1.40),

$$|N\underline{u}_n - N\underline{u}_m|_{H^{-1}} \leq \lambda S_\theta^{-1/2} |\underline{u}_n{}^{2^*_\theta - 1} - \underline{u}_m{}^{2^*_\theta - 1}|_{L_\theta^{\frac{2^*_\theta}{2^*_\theta - 1}}} + \alpha S_0^{-1/2} |k|_{L^a} |\underline{u}_n{}^q - \underline{u}_m{}^q|_{L^{\frac{2^*}{q}}},$$

de modo que,

$$|N\underline{u}_n - N\underline{u}_m|_{H^{-1}} \longrightarrow 0,$$

em virtude do Teorema de Lebesgue. Isso mostra que $\{N\underline{u}_n\} \in \mathcal{C}$ é uma seqüência de Cauchy em $H^{-1}(\Omega)$. Desse modo,

$$N\underline{u}_n \longrightarrow Nu \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Usando a continuidade de S,

$$S(N\underline{u}_n) = F(\underline{u}_n) \longrightarrow S(Nu) = F(u) \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

isto é,

$$F(\underline{u}_n) \longrightarrow F(u) \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Lembrando da imersão compacta, a saber,

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

obtemos,

$$F(\underline{u}_n) \longrightarrow F(u) \text{ qtp em } \Omega$$

e como $\underline{u}_{n+1} = F(\underline{u}_n)$, inferimos que $u = F(u)$, provando a afirmação.

$\square$

CAPÍTULO 2

Equação não-Homogênea

Neste Capítulo, estudaremos a equação (0.2). Para isso, consideraremos a seguinte equação associada a (0.2), fazendo em (0.7) $\alpha = 0$:

$$-\Delta \widehat{u} = \lambda \frac{\widehat{u}_+^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} + \mu \widehat{f}(x) \ \text{ em } \ \mathbf{R}^N, \tag{2.1}$$

onde seus atributos e função são os descritos na Introdução.

Nosso objetivo é a demonstração dos teoremas A e B.

2.1 Soluções radiais: demonstração do teorema A

Demonstração: Verificação de (i). Seja $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$, $\widehat{u} \geq 0$ uma solução fraca de (2.1). Pelo lema 1.5(a)(i), segue imediatamente que $\widehat{u} \in C^2(\mathbf{R}^N \setminus \{0\})$, $\nabla \widehat{u}(x) \cdot x < 0$ em $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ e $\widehat{u} > 0$ em $\mathbf{R}^N$.

Fica verificado (i).

Verificação de (ii). Seja $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$, $\widehat{u} \geq 0$ uma solução fraca de (2.1). Pelo lema 1.5(a)(ii), temos que

$$\lambda\frac{\omega_N}{N-\theta}|x|^{N-\theta}\widehat{u}(x)^{2^*_\theta}+\mu\widehat{u}(x)\int_{B_{|x|}(0)}\widehat{f}dy\leq\ \|\widehat{u}\|^2.$$

Como, pelo teorema A(i), $\nabla\widehat{u}(x)\cdot x<0$ em $\mathbf{R}^N\setminus\{0\}$, podemos escrever, para $|x|\sim\infty$:

$$\widehat{u}^{2^*_\theta}\leq\widehat{u}.$$

Assim, usando a expressão da taxa de decaimento de $\widehat{u}$ acima,

$$\widehat{u}(x)^{2^*_\theta}\leq\frac{\|\widehat{u}\|^2}{\lambda\frac{\omega_N}{N-\theta}|x|^{N-\theta}+\mu\displaystyle\int_{B_{|x|}(0)}\widehat{f}dy}\ \text{para } |x|\sim\infty.$$

Donde

$$\widehat{u}(x)^{2^*_\theta}=O\left(\frac{\|\widehat{u}\|^2}{\frac{\lambda\omega_N}{N-\theta}|x|^{N-\theta}+\mu\displaystyle\int_{B_{|x|}(0)}\widehat{f}dy}\right)\ \text{quando } |x|\to\infty.$$

Fica verificado (ii).

Verificação de (iii). Usaremos o lema 1.6(a). Suponha, por contradição, que $\widehat{u}$ é limitada em $\mathbf{R}^N\setminus\{0\}$. Como $\widehat{u}$ é definida e contínua sobre $\mathbf{R}^N\setminus\{0\}$ e é decrescente (teorema A(i)), podemos estendê-la até a origem. Assim, $\widehat{u}$, como uma função radial, é definida e contínua sobre $[0,\infty)$ e é uma solução positiva de (2.1).

Fazendo $\widehat{f}(x):=\widehat{f}(r)$, temos:

$$\nabla\widehat{f}(x)=\widehat{f}'(r)\frac{x}{r}.$$

Também, $dx:=r^{N-1}drd\sigma$. Fazendo mudança de coordenadas em (1.20) com $\alpha=0$ e $\mu>0$, obtemos:

$$\int_0^\infty r^{N-1}\left[\frac{(N+2)}{2}\widehat{f}(r)+\widehat{f}'(r)\ r\right]\widehat{u}(r)\ dr=0. \tag{2.2}$$

Invocando (0.11), em virtude da igualdade em (2.2), a única possibilidade é que,

$$\frac{(N+2)}{2}\widehat{f}(r)+\widehat{f}'(r)\ r=0.$$

Usando essa expressão, fazendo $\gamma := (N+2)/2$ e fixando ε suficientemente pequeno, temos:

$$\frac{\widehat{f}'(r)}{\widehat{f}(r)} = -\frac{\gamma}{r},\ r > \varepsilon,$$

a qual, integrada de ε a 2ε, resulta:

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\widehat{f}'(s)}{\widehat{f}(s)} ds = -\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\gamma}{s} ds.$$

Donde

$$\widehat{f}(2\varepsilon) = \frac{\widehat{f}(\varepsilon)}{2^{\gamma}}.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, graças à continuidade de $\widehat{f}$, segue que $\gamma = 0$, um absurdo. Portanto, $\widehat{u}$ não pode ser limitada na origem.

Fica verificado (iii).

Verificação de (iv). Sejam $0 \leq \theta < 2$ e $\lambda = 1$.

Etapa 1. Solução via Teorema do Passo da Montanha. Usaremos o lema 1.1(i)(a) e (ii)(a). Provaremos que

$$\text{Existe } \widehat{u}^2 \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N) \text{ tal que } \widehat{u}^2 \geq 0,\ \widehat{u}^2 \not\equiv 0,\ I(\widehat{u}^2) > 0 \text{ e } I'(\widehat{u}^2) = 0. \tag{2.3}$$

Designemos $\widehat{u}^2 := \widehat{u}$. De fato, pela observação 1.2, existem $\{\widehat{u}_n\} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ e algum $c_2 > 0$ satisfazendo

$$I(\widehat{u}_n) \longrightarrow c_2 \ \ e \ \ I'(\widehat{u}_n) \longrightarrow 0. \tag{2.4}$$

Afirmamos que existe $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ com $\widehat{u} \geq 0$ tal que

$$\widehat{u}_{n_-} \xrightarrow{D^{1,2}_{rad}} 0 \ \text{ e } \ \widehat{u}_{n_+} \xrightarrow{D^{1,2}_{rad}} \widehat{u}.$$

De fato, temos, usando, respectivamente, (0.8) e (0.9) com $\lambda = 1$, $\alpha = 0$ e $\mu > 0$:

$$\begin{aligned} I(\widehat{u}_n) - \frac{1}{2^*_\theta}\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_{n_+}\rangle &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*_\theta}\right)\int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx - \mu \int \widehat{f}\widehat{u}_n dx + \frac{\mu}{2^*_\theta}\int \widehat{f}\widehat{u}_{n_+} dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*_\theta}\right)\int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx - \mu \int \widehat{f}\widehat{u}_n dx. \end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Hölder e de Sobolev, obtemos:

$$I(\widehat{u}_n) - \frac{1}{2^*_\theta}\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_{n_+}\rangle \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*_\theta}\right)\|\widehat{u}_n\|^2 - \mu {S_0}^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}}\|\widehat{u}_n\|. \tag{2.5}$$

Agora, de (2.4), temos, para n suficientemente grande:

$$I(\widehat{u}_n) - \frac{1}{2^*_\theta}\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_{n_+}\rangle \leq c_2 + \frac{\|\widehat{u}_n\|}{2^*_\theta},$$

que combinada com (2.5) resulta:

$$c_2 + \frac{\|\widehat{u}_n\|}{2^*_\theta} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*_\theta}\right)\|\widehat{u}_n\|^2 - \mu {S_0}^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}}\|\widehat{u}_n\|,$$

onde, evidentemente, $2^*_\theta > 2$. Conseqüentemente,

$$\|\widehat{u}_n\| \leq K,$$

onde K é uma constante positiva. Portanto,

$$\widehat{u}_n \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u}.$$

Usando (0.9) com $\lambda = 1$, $\alpha = 0$, $\mu > 0$ e $\phi = \widehat{u}_{n_-}$, temos:

$$\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_{n_-}\rangle \geq -\|\widehat{u}_{n_-}\|^2 - \mu S_0^{-1/2}|\widehat{f}|_{L^b_{rad}}\|\widehat{u}_{n_-}\|.$$

Agora, de (2.4), notemos que

$$|\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_{n_-}\rangle| = o_n(1).$$

Isso junto com a última desigualdade implica

$$\|\widehat{u}_{n-}\| \longrightarrow 0,$$

isto é,

$$\widehat{u}_{n-} \overset{D^{1,2}_{rad}}{\longrightarrow} 0.$$

Como $\widehat{u}_n = \widehat{u}_{n+} - \widehat{u}_{n-}$ e $\widehat{u}_n \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u}$, obtemos:

$$\widehat{u}_{n+} \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u} \text{ com } \widehat{u} \geq 0.$$

Isso prova a afirmação. Devido a esta, observamos que

$$\widehat{u}_n \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u} \;\text{ e }\; \widehat{u}_n \overset{qtp}{\longrightarrow} \widehat{u},\; \widehat{u} \geq 0. \tag{2.6}$$

Em particular,

$$\int \nabla\widehat{u}_n \cdot \nabla\phi dx \to \int \nabla\widehat{u} \;\cdot \nabla\phi\; dx, \text{ para cada } \phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N). \tag{2.7}$$

Afirmamos que

$$\int \frac{\widehat{u}_{n+}^{2^*_\theta-1}}{|x|^\theta}\;\phi\; dx \to \int \frac{\widehat{u}^{2^*_\theta-1}}{|x|^\theta}\;\phi\; dx, \text{ para cada } \phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N). \tag{2.8}$$

Com efeito, pelo fato de $\widehat{u}_{n+} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*_\theta}_\theta(\mathbf{R}^N)$ e de $\|\widehat{u}_n\| \leq K$, é claro que

$$\int \frac{\widehat{u}_{n+}^{2^*_\theta}}{|x|^\theta} dx \leq S_\theta^{-2^*_\theta/2} K^{2^*_\theta}$$

e, portanto,

$$\int (\widehat{u}_{n+}^{2^*_\theta-1})^{\frac{2^*_\theta}{2^*_\theta-1}} \frac{dx}{|x|^\theta} \leq S_\theta^{-2^*_\theta/2} K^{2^*_\theta}.$$

Isso mostra que $\widehat{u}_{n+}^{2^*_\theta-1} \in L_\theta^{\frac{2^*_\theta}{2^*_\theta-1}}(\mathbf{R}^N)$ e é limitada em $L_\theta^{\frac{2^*_\theta}{2^*_\theta-1}}(\mathbf{R}^N)$.

Notemos, também, que

$$\frac{1}{2^*_\theta} + \frac{2^*_\theta - 1}{2^*_\theta} = 1.$$

Donde $(L_\theta^{\frac{2^*_\theta}{2^*_\theta - 1}}(\mathbf{R}^N))' \equiv L_\theta^{2^*_\theta}(\mathbf{R}^N)$. Como $\phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N) \hookrightarrow L_\theta^{2^*_\theta}(\mathbf{R}^N)$, temos que

$$\phi \in (L_\theta^{\frac{2^*_\theta}{2^*_\theta - 1}}(\mathbf{R}^N))'.$$

Usando (2.6), é evidente que

$$\widehat{u}_n^{2^*_\theta - 1} \xrightarrow{qtp} \widehat{u}^{2^*_\theta - 1}.$$

Pelo lema 4.8 de Kavian [27] [p. 11],

$$\widehat{u}_{n_+}^{2^*_\theta - 1} \rightharpoonup \widehat{u}^{2^*_\theta - 1} \text{ em } L_\theta^{\frac{2^*_\theta}{2^*_\theta - 1}}(\mathbf{R}^N).$$

Em particular, obtemos (2.8).

Usando (2.7), (2.8) e

$$\langle I'(\widehat{u}_n), \phi \rangle = \int \nabla \widehat{u}_n \cdot \nabla \phi dx - \int \frac{\widehat{u}_{n_+}^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \phi dx - \mu \int \widehat{f} \phi dx, \text{ para cada } \phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N),$$

obtemos:

$$\langle I'(\widehat{u}_n), \phi \rangle \longrightarrow \langle I'(\widehat{u}), \phi \rangle, \text{ para cada } \phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N).$$

Graças a (2.4), segue que

$$I'(\widehat{u}) = 0.$$

Como $\widehat{f} \not\equiv 0$, segue que $\widehat{u} \not\equiv 0$. Voltando à notação inicial, $\widehat{u} := \widehat{u}^2$ e lembrando que $c_2 > 0$, obtemos (2.3).

Etapa 2. Solução via Princípio Variacional de Ekeland. Usaremos o lema 1.1(i)(a) e (ii)(a) e o lema 1.4. Provaremos que

$$\text{Existe } \widehat{u}^1 \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N) \text{ tal que } \widehat{u}^1 \geq 0,\ \widehat{u}^1 \not\equiv 0,\ I(\widehat{u}^1) < 0 \text{ e } I'(\widehat{u}^1) = 0. \tag{2.9}$$

Designemos $\widehat{u}^1 := \widehat{u}$. De fato, o lema 1.4 garante a existência de uma seqüência $\{\widehat{u}_n\} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ satisfazendo

$$I(\widehat{u}_n) \longrightarrow c_1, \quad c_1 < 0 \quad e \quad I'(\widehat{u}_n) \longrightarrow 0. \tag{2.10}$$

Por outro lado, conforme fizemos na etapa 1, existe $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ satisfazendo

$$\widehat{u}_n \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u} \text{ com } \widehat{u} \geq 0.$$

Por argumento idêntico ao da etapa 1, aplicando as convergências (2.7) e (2.8) e usando (2.10), obtemos:

$$I'(\widehat{u}) = 0.$$

E, como antes, $\widehat{u} \not\equiv 0$. Resta provar que

$$I(\widehat{u}) = c_1.$$

Temos:

$$I(\widehat{u}_n) - \frac{1}{2^*_\theta}\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_n\rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*_\theta}\right)\int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx + \mu\left(\frac{1}{2^*_\theta} - 1\right)\int \widehat{f}\widehat{u}_n dx.$$

Essa expressão junto com (2.10), o fato de que a norma é (fssci) e de que

$$\lim_{n\to\infty}\int \widehat{f}\widehat{u}_n dx = \int \widehat{f}\widehat{u} dx$$

(pois $\widehat{u}_n \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u}$ e $\widehat{f} \in (L^{2^*}(\mathbf{R}^N))' \equiv L^b(\mathbf{R}^N)$), resultam que

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \liminf I(\widehat{u}_n) \\
&\geq \liminf \left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*_\theta}\right)\int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx + \mu\left(\frac{1}{2^*_\theta}-1\right)\int \widehat{f}\widehat{u}_n dx\right] \\
&\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*_\theta}\right)\liminf \int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx + \mu\left(\frac{1}{2^*_\theta}-1\right)\lim_{n\to\infty}\int \widehat{f}\widehat{u}_n dx \\
&\geq I(\widehat{u}) - \frac{1}{2^*_\theta}\int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx + \frac{1}{2^*_\theta}\int \frac{\widehat{u}^{2^*_\theta}}{|x|^\theta}dx + \frac{\mu}{2^*_\theta}\int \widehat{f}\widehat{u}dx \\
&= I(\widehat{u}),
\end{aligned}
$$

pois $\dfrac{\langle I'(\widehat{u}),\ \widehat{u}\rangle}{2^*_\theta} = 0$. Assim, $c_1 = \liminf I(\widehat{u}_n) \geq I(\widehat{u})$. Conseqüentemente,

$$I(\widehat{u}) = c_1.$$

Desde que $c_1 < 0$, verifica-se que $I(\widehat{u}) < 0$. Fazendo $\widehat{u} =: \widehat{u}^1$, obtemos (2.9).

Fica verificado (iv).

Verificação de (v). Sejam $\theta = 2$ e $\lambda \in [0, S_2)$.

Etapa 1. Existência. Usaremos o lema 1.3(i). Provaremos que

$$\text{Existe } \widehat{u}^3 \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N) \text{ tal que } \widehat{u}^3 \geq 0,\ \widehat{u}^3 \not\equiv 0,\ I(\widehat{u}^3) < 0 \text{ e } I'(\widehat{u}^3) = 0. \tag{2.11}$$

Designemos $\widehat{u}^3 := \widehat{u}$. Lembrando que $I \in C^1(D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N), \mathbf{R})$, graças ao lema 1.3(i), segue imediatamente do Teorema de Minimização Clássica (cf. Apêndice B) que existe $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ tal que

$$\langle I'(\widehat{u}), \phi\rangle = 0, \text{ para cada } \phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N).$$

Agora, notemos que, de (0.10) com $\theta = 2$ e $\alpha = 0$, temos:

$$\int \nabla\widehat{u}\cdot\nabla\phi dx = \lambda\int \frac{\widehat{u}_+}{|x|^2}\,\phi dx + \mu\int \widehat{f}\ \phi dx, \text{ para cada } \phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N).$$

Tomando $\phi = \widehat{u}_-$, obtemos:

$$-\|\widehat{u}_-\|^2 = \mu \int \widehat{f}\widehat{u}_- dx \geq 0.$$

Donde $\widehat{u}_- \equiv 0$ e $\widehat{u} = \widehat{u}_+ \geq 0$.

Por outro lado, $\widehat{f} \not\equiv 0$ implica $\widehat{u} \not\equiv 0$. Finalmente, notemos que, escolhendo $\phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ com $\phi > 0$ e tomando $t > 0$, temos:

$$I(t\phi) = \frac{t^2}{2}\Big(\int |\nabla\phi|^2 dx - \lambda \int \frac{\phi^2}{|x|^2} dx\Big) - t\mu \int \widehat{f}\phi dx, \ t > 0.$$

Desde que $\lambda \in [0, S_2)$, em virtude da desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12] o termo entre parênteses é positivo. Portanto,

$$I(t_0\phi) < 0, \text{ para algum } t_0 \in (0, t)$$

suficientemente pequeno. Conseqüentemente,

$$I(\widehat{u}) < 0.$$

Fazendo $\widehat{u} =: \widehat{u}^3$, obtemos (2.11).

Etapa 2. Unicidade. Suponha, por contradição, que $\widehat{u}_1, \ \widehat{u}_2 \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ são soluções fracas não-negativas de (2.1) com $\theta = 2$. Então, podemos aplicar o teorema A(i) a $\widehat{u}_j \ \ (j = 1, 2)$ e, além disso,

$$\begin{aligned} -\Delta\widehat{u}_1 &= \lambda\frac{\widehat{u}_1}{|x|^2} + \mu\widehat{f} \ \text{ em } \ \mathbf{R}^N \setminus \{0\} \\ -\Delta\widehat{u}_2 &= \lambda\frac{\widehat{u}_2}{|x|^2} + \mu\widehat{f} \ \text{ em } \ \mathbf{R}^N \setminus \{0\} \end{aligned} \tag{2.12}$$

no sentido clássico. Conseqüentemente,

$$-\frac{\Delta\widehat{u}_2}{\widehat{u}_2} + \frac{\Delta\widehat{u}_1}{\widehat{u}_1} = \mu\widehat{f}\Big(\frac{1}{\widehat{u}_2} - \frac{1}{\widehat{u}_1}\Big)$$

e, assim,

$$(-\frac{\Delta\widehat{u}_2}{\widehat{u}_2} + \frac{\Delta\widehat{u}_1}{\widehat{u}_1})(\widehat{u}_2^2 - \widehat{u}_1^2) = \mu \ \widehat{f} \ (\frac{1}{\widehat{u}_2} - \frac{1}{\widehat{u}_1})(\widehat{u}_2^2 - \widehat{u}_1^2). \tag{2.13}$$

Notemos que, por (2.12) e (2.11), verifica-se que

$$\int -\widehat{u}_j \ \Delta \widehat{u}_j dx = \int |\nabla \widehat{u}_j|^2 dx. \tag{2.14}$$

Integrando (2.13) sobre $\mathbf{R}^N$ e usando (2.14), obtemos:

$$\int |\nabla \widehat{u}_2|^2 dx + \int \Delta \widehat{u}_2 \frac{\widehat{u}_1^2}{\widehat{u}_2} dx + \int |\nabla \widehat{u}_1|^2 dx + \int \Delta \widehat{u}_1 \frac{\widehat{u}_2^2}{\widehat{u}_1} dx = \int \mu \widehat{f}(\frac{1}{\widehat{u}_2} - \frac{1}{\widehat{u}_1})(\widehat{u}_2^2 - \widehat{u}_1^2) dx. \tag{2.15}$$

Em Abdellaoui, Felli e Peral [1] [teorema 2.1], é assegurado que

$$\int |\nabla \widehat{u}_2|^2 dx + \int \frac{\widehat{u}_2^2}{\widehat{u}_1}(\Delta \widehat{u}_1) dx \geq 0, \tag{2.16}$$

$$\int |\nabla \widehat{u}_1|^2 dx + \int \frac{\widehat{u}_1^2}{\widehat{u}_2}(\Delta \widehat{u}_2) dx \geq 0. \tag{2.17}$$

Por (2.15), (2.16) e (2.17), concluímos que

$$0 \leq \int \mu \widehat{f}(\frac{1}{\widehat{u}_2} - \frac{1}{\widehat{u}_1})(\widehat{u}_2^2 - \widehat{u}_1^2) dx \leq 0.$$

Impossível, uma vez que $\mu > 0$ e $\widehat{f} > 0$. Assim,

$$\widehat{u}_1 \equiv \widehat{u}_2.$$

Fica verificado (v).

□

2.2 Soluções não-radiais: demonstração do teorema B

Demonstração: Verificação de (i). Seja $u \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ uma solução fraca positiva de (0.2) no sentido de $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ tal que

$$u \leq \widehat{u},$$

onde $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ é uma solução fraca de (2.1). Seja, ainda, $K \subset \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ um subconjunto compacto e consideremos o número positivo

$$r = \frac{dist(0,K)}{2}.$$

Para provar (i), basta verificar que

$$u \overset{\mu\to\infty}{\to} 0 \ \text{ em } \ L^\infty(K). \tag{2.18}$$

Como K é fechado, existe uma bola de raio fixado $R > r > 0$ tal que $A := B_R \setminus B_r \supset K$. Em virtude do lema 1.5(a)(ii), temos ($\widehat{u} \geq u$ e $\widehat{f} \geq f$):

$$\lambda \frac{\omega_N}{N-\theta}|x|^{N-\theta} u(x)^{2^*_\theta} + \mu u(x) \int_{B_{|x|}(0)} f dy \leq \ \|\widehat{u}\|^2, \ x \in K.$$

Como $A \subset B_{|x|}(0)$,

$$u(x) \leq \frac{\|\widehat{u}\|^2}{\mu \displaystyle\int_A f dy}, \ x \in A.$$

Usando o fato de que $\displaystyle\int_A f dy > 0$, resulta:

$$|u|_{L^\infty(A)} \overset{\mu\to\infty}{\to} 0.$$

Em particular, obtemos (2.18).

Fica verificado (i).

Verificação de (ii). Usando as notações e alguns dos passos da verificação de (i), é imediato que

$$u(x) \leq \left(\frac{\|\widehat{u}\|^2}{\lambda \frac{\omega_N}{N-\theta}|x|^{N-\theta}} \right)^{1/2^*_\theta}, \ x \in A,$$

mostrando que

$$|u|_{L^\infty(A)} \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0.$$

Fica verificado (ii).

Verificação de (iii). Sejam $\theta = 2$, $\lambda \in [0, S_2)$. Como $u \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ é uma solução fraca positiva de (0.2) no sentido de $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$, temos:

$$\int \nabla u \cdot \nabla \phi dx = \lambda \int \frac{u^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \phi dx + \mu \int f \; \phi dx, \text{ para cada } \phi \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N).$$

Fazendo $\phi = u$ na última expressão, obtemos, usando as desigualdades de Hölder, de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12] e de Sobolev:

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &\leq \lambda S_2^{-1} \|u\|^2 + \mu |f|_{L^b} |u|_{L^{2^*}} \\ &\leq \lambda S_2^{-1} \|u\|^2 + \mu S_0^{-1/2} \; |f|_{L^b} \|u\|. \end{aligned}$$

Donde,

$$0 \leq \|u\| \leq \frac{\mu S_0^{-1/2} |f|_{L^b}}{(1 - \dfrac{\lambda}{S_2})}.$$

Assim,

$$u \longrightarrow 0 \;\text{ em }\; D^{1,2}(\mathbf{R}^N) \;\text{ quando }\; \mu \longrightarrow 0 \;\text{ para cada }\; \lambda \in [0, S_2).$$

Fica verificado (iii).

Verificação de (iv) e (v). Seja $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ uma solução fraca não-negativa de (2.1). Tal solução existe em virtude do teorema A(iv)(v). Para provar (iv) e (v), consideremos a família de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \dfrac{u^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} + \mu f(x) \;\text{ em }\; B_k, \\ \\ u > 0 \;\text{ em }\; B_k, \; u = 0 \;\text{ sobre }\; \partial B_k. \end{cases} \tag{2.19}$$

Construção de uma supersolução de (2.19) **no sentido de** (1.36) **com** $\alpha = 0$ **e** $\mu > 0$. Pelo teorema A(i), $0 < \widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ satisfaz (2.1) no sentido clássico para $x \in \mathbf{R}^N \backslash \{0\}$.

Afirmamos que

$$\int \nabla \widehat{u} \cdot \nabla \phi dx = \lambda \int \frac{\widehat{u}^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \phi \; dx + \mu \int \widehat{f} \phi dx, \quad \phi \in D^{1,2}, \tag{2.20}$$

onde lembramos que $\lambda = 1$, se $\theta \in [0, 2)$ e $\lambda \in [0, S_2)$, se $\theta = 2$. De fato, seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N \backslash \{0\})$ e fixemos uma função *cut-off* η infinitamente derivável tal que $0 \leq \eta \leq 1$,

$$\eta(x) = 0 \ \text{ se } \ |x| \leq 1 \ \text{ e } \ \eta(x) = 1 \ \text{ se } \ |x| \ \geq 2.$$

Sejam $\epsilon > 0$ e $\eta_\epsilon(x) := \eta(x/\epsilon)$ de modo que $\eta_\epsilon \phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N \setminus \{0\}\ )$.

Multiplicando (2.1) por $\eta_\epsilon \phi$ e integrando sobre $\mathbf{R}^N$, obtemos:

$$\int \nabla \widehat{u} \cdot \nabla(\eta_\epsilon \ \phi) \ dx = \lambda \int \frac{\widehat{u}^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \eta_\epsilon \phi dx + \mu \int \widehat{f} \eta_\epsilon \phi dx.$$

Ou seja,

$$\int \phi \nabla \widehat{u} \cdot \nabla \eta_\epsilon \ dx + \int \eta_\epsilon \nabla \widehat{u} \cdot \nabla \phi \ dx = \lambda \int \frac{\widehat{u}^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \eta_\epsilon \phi dx + \mu \int \widehat{f} \eta_\epsilon \phi dx. \tag{2.21}$$

Usando as propriedades de η_ϵ, é imediato, pelo Teorema de Lebesgue, que

$$\int \eta_\epsilon \nabla \widehat{u} \cdot \nabla \phi \ dx \stackrel{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \int \nabla \widehat{u} \cdot \nabla \phi \ dx, \tag{2.22}$$

$$\int \frac{\widehat{u}^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \eta_\epsilon \phi dx \stackrel{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \int \frac{\widehat{u}^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \phi dx \ \text{ e} \tag{2.23}$$

$$\int \widehat{f} \eta_\epsilon \phi dx \stackrel{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \int \widehat{f} \phi dx. \tag{2.24}$$

Resta verificar que

$$\int \phi \nabla \widehat{u} \cdot \nabla \eta_\epsilon \ dx \stackrel{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{2.25}$$

De fato, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \Big| \int \phi \nabla \widehat{u} \cdot \nabla \eta_\epsilon \ dx \Big| \ &\leq \ |\phi|_{L^\infty} \int |\nabla \widehat{u}| |\nabla \eta_\epsilon| \ dx \\ &\leq \ |\phi|_{L^\infty} \|\widehat{u}\| (\int_{|x| \leq 2\epsilon} |\nabla \eta_\epsilon|^2 \ dx)^{1/2}. \end{aligned}$$

Definemos $y := \dfrac{x}{\epsilon}$, de modo que $\eta(y) = \eta_\epsilon(x(\epsilon))$. Temos:

$$\frac{\partial \eta}{\partial y_j} = \epsilon \frac{\partial \eta_\epsilon}{\partial x_j},\ j = 1, ..., N \ \text{ e } \ |\nabla \eta|^2 = \epsilon^2 |\nabla \eta_\epsilon|^2.$$

Sendo $\det J = \epsilon^N$, isto é, $dx = \epsilon^N dy$, obtemos:

$$\Big| \int \phi \nabla \widehat{u} \cdot \nabla \eta_\epsilon \ dx \Big| \leq |\phi|_{L^\infty} \|\widehat{u}\| \epsilon^{\frac{N-2}{2}} (\int_{|y|\leq 2} |\nabla \eta|^2 \ dy)^{1/2}.$$

Como $N \geq 3$, passando ao limte quando $\epsilon \longrightarrow 0$, obtemos (2.25).

Passando ao limite em (2.21) quando $\epsilon \longrightarrow 0$ e usando (2.22), (2.23), (2.24) e (2.25), obtemos (2.20).

Seja B_k a bola de $\mathbf{R}^N$ com raio inteiro $k \geq 1$ e centro na origem. Definindo $\bar{u}_k := \widehat{u}_{|B_k}$, segue de (2.19) e (2.20) ($\widehat{f} \geq f$) que

$$\int_{B_k} \nabla \bar{u}_k \cdot \nabla \phi dx \geq \lambda \int_{B_k} \frac{\bar{u}_k^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta} \ \phi \ dx + \mu \int_{B_k} f \phi dx, \quad \phi \in H_0^1(B_k),\ \phi \geq 0, \tag{2.26}$$

no sentido de (1.36) com $\alpha = 0$ e $\mu > 0$.

Construção de uma subsolução de (2.19) **no sentido de** (1.35) **com** $\alpha = 0$ **e** $\mu > 0$. Consideremos a família de problemas de Dirichlet, a saber,

$$\begin{cases} -\Delta w = \mu f(x) \ \text{ em } \ B_k, \\ w \geq 0,\ w \not\equiv 0 \ \text{ em } \ B_k, \\ w = 0 \ \text{ sobre } \ \partial B_k. \end{cases} \tag{2.27}$$

É fácil mostrar que (2.27) admite uma única solução fraca $\omega_k \in H_0^1(B_k)$ tal que, pela teoria da regularidade, $\omega_k \in C^1(\overline{B}_k)$ e, pelo princípio do máximo, $\omega_k > 0$.

Afirmação: $\omega_k \leq \bar{u}_k$ em B_k.

De fato, como $\bar{u}_k > 0$ e é regular e $0 < \omega_k \in C^1(\overline{B}_k)$, existe $\tau_k \in (0,1)$ tal que $\tau_k \max_{\overline{B}_k} \omega_k < \min_{\overline{B}_k} \bar{u}_k$. Conseqüentemente,

$$\tau_k \omega_k < \bar{u}_k \ \text{ em } \ B_k.$$

Agora, dada $\phi \in H_0^1(B_k)$ com $\phi \geq 0$, temos:

$$
\begin{aligned}
\int_{B_k} \nabla(\tau_k \omega_k) \cdot \nabla \phi dx - \mu \int_{B_k} f \phi dx &= \tau_k \int_{B_k} \nabla \omega_k \cdot \nabla \phi dx - \mu \int_{B_k} f \phi dx \\
&\leq \int_{B_k} \nabla \omega_k \cdot \nabla \phi dx - \mu \int_{B_k} f \phi dx \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

pois ω_k é solução fraca de (2.27). Donde

$$\int_{B_k} \nabla(\tau_k \omega_k) \cdot \nabla \phi dx \leq \mu \int_{B_k} f \phi dx, \ \phi \geq 0, \ \phi \in H_0^1(B_k).$$

Logo, $\tau_k \omega_k$ satisfaz (1.35) com $\lambda = 0$. Portanto, $\tau_k \omega_k$ é uma subsolução de (2.27). Lembramos que $\bar{u}_k$ é uma supersolução de (2.19). Em particular ($\lambda = 0$), é uma supersolução de (2.27). Aplicando o teorema 1.8(a) com $\lambda = 0$ a (2.27), existe $\widehat{\omega}_k \in H_0^1(B_k)$ satisfazendo $\tau_k \omega_k \leq \widehat{\omega}_k \leq \bar{u}_k$ e

$$\int_{B_k} \nabla \widehat{\omega}_k \cdot \nabla \phi dx = \mu \int_{B_k} f \phi dx, \text{ para cada } \phi \in H_0^1(B_k).$$

Donde $\widehat{\omega}_k$ é uma solução fraca de (2.27) no sentido de $H_0^1(B_k)$. Por unicidade, $\widehat{\omega}_k = \omega_k$, de modo que

$$\omega_k \leq \bar{u}_k \quad \text{em} \quad B_k,$$

seguindo a afirmação.

Afirmação: $\omega_k \leq \omega_{k+1}$ em B_k.

De fato, como antes, existe $\delta_k \in (0,1)$ tal que

$$\delta_k \omega_k < \omega_{k+1} \quad \text{em} \quad B_k.$$

Mas, como fizemos acima, $\delta_k \omega_k$ é uma subsolução de (2.27) e ω_{k+1} é uma supersolução de (2.27). Pelo teorema 1.8(a) com $\lambda = 0$, existe $\widetilde{\omega}_k \in H_0^1(B_k)$ tal que $\delta_k \omega_k \leq \widetilde{\omega}_k \leq \omega_k$ e

$$\int_{B_k} \nabla \widetilde{\omega}_k \cdot \nabla \phi dx = \mu \int_{B_k} f \phi dx, \text{ para cada } \phi \in H_0^1(B_k).$$

Donde $\widetilde{\omega}_k$ é uma solução fraca de (2.27) no sentido de $H_0^1(B_k)$. Por unicidade, $\widetilde{\omega}_k = \omega_k$, de modo que

$$\omega_k \leq \omega_{k+1} \quad \text{em} \quad B_k,$$

seguindo a afirmação.

Fazendo $\omega_k = 0$ sobre $\mathbf{R}^N \setminus B_k$, temos que a seqüência $\{\omega_k\}$ satisfaz

$$0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq ... \leq \omega_k \leq ... \leq \widehat{u}, \tag{2.28}$$

de modo que $(\lambda \geq 0)$

$$\int_{B_k} \nabla \omega_k \cdot \nabla \phi dx \leq \lambda \int_{B_k} \frac{\omega_k{}^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \phi \, dx + \mu \int_{B_k} f \phi dx, \quad \phi \in H^1_0(B_k), \ \phi \geq 0. \tag{2.29}$$

Isso finaliza a construção de uma seqüência ordenada de subsoluções de (2.19) limitadas por cima por $\widehat{u}$.

Por (2.26) e (2.29) e usando o teorema 1.8(a), existe $u_k \in H^1_0(B_k)$ com $\omega_k \leq u_k \leq \bar{u}_k$ satisfazendo

$$\int_{B_k} \nabla u_k \cdot \nabla \phi dx = \lambda \int_{B_k} \frac{u_k^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \phi dx + \mu \int_{B_k} f \phi dx, \quad \phi \in H^1_0(B_k). \tag{2.30}$$

Afirmação: $\{u_k\}$ é limitada em $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$.

De fato, como $\{u_k\} \in H^1_0(B_k)$, sua extensão ao $\mathbf{R}^N$, a saber,

$$\widetilde{u}_k(x) := \begin{cases} u_k(x), & x \in B_k, \\ 0, & x \in \mathbf{R}^N \setminus B_k \end{cases}$$

pertence a $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$, a qual ainda denominaremos por u_k. Disso se segue que

$$\|u_k\|^2 = \int |\nabla u_k|^2 dx = \int_{B_k} |\nabla u_k|^2 dx = |u_k|^2_{H^1_0}. \tag{2.31}$$

Fazendo $\phi = u_k$ em (2.30) e lembrando que $u_k \leq \bar{u}_k$, obtemos:

$$|u_k|^2_{H^1_0} \leq \lambda S_\theta^{-2^*_\theta/2} |\bar{u}_k|^{2^*_\theta}_{H^1_0} + \mu S_0^{-1/2} |f|_{L^b} |\bar{u}_k|_{H^1_0},$$

após usarmos as desigualdades de Hölder, de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12] e de Sobolev. Usando (2.31), verifica-se imediatamente a afirmação. Conseqüentemente,

$$u_k \overset{D^{1,2}}{\rightharpoonup} u \quad \text{e} \quad u_k \xrightarrow{qtp} u \tag{2.32}$$

para alguma $u \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ com $u \leq \widehat{u}$.

Afirmação: u é uma solução fraca positiva de (0.2) no sentido de $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$.

De fato, graças à extensão de u_k ao $\mathbf{R}^N$, podemos escrever:

$$\int \nabla u_k \cdot \nabla \phi dx = \lambda \int \frac{u_k^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \phi dx + \mu \int f \phi dx, \quad \phi \in H_0^1(B_k). \tag{2.33}$$

Lembramos que

$$D^{1,2}(\mathbf{R}^N) := \overline{C_0^\infty(\mathbf{R}^N)}^{\|\cdot\|},$$

onde $\|u\| := (\int |\nabla u|^2 dx)^{1/2}$, $u \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$. Fixando $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ de modo que $supt\varphi_j \subset B_k \subset \mathbf{R}^N$, temos:

$$\varphi_j \longrightarrow \varphi \;\; \text{em} \;\; D^{1,2}(\mathbf{R}^N) \tag{2.34}$$

e também:

$$\int \nabla u_k \cdot \nabla \varphi_j dx = \lambda \int \frac{u_k^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \varphi_j dx + \mu \int f \varphi_j dx, \quad \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N). \tag{2.35}$$

De (2.32) obtemos, em particular, que

$$\int \nabla u_k \cdot \nabla \varphi_j dx \to \int \nabla u \cdot \nabla \varphi_j \; dx, \text{ para cada } \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N). \tag{2.36}$$

e

$$\int \frac{{u_k}^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \; \varphi_j \; dx \to \int \frac{u^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \; \varphi_j \; dx, \text{ para cada } \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N). \tag{2.37}$$

Fazendo $k \to \infty$ em (2.35) e usando (2.36) e (2.37), concluímos que

$$\int \nabla u \cdot \nabla \varphi_j dx = \lambda \int \frac{u^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \varphi_j dx + \mu \int f \varphi_j dx, \quad \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N). \tag{2.38}$$

Usando (2.34) e o Teorema de Lebesgue, obtemos, fazendo $j \to \infty$ em (2.38):

$$\int \nabla u \cdot \nabla \phi dx = \lambda \int \frac{u^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \phi dx + \mu \int f \phi dx, \quad \phi \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N). \tag{2.39}$$

Agora, notemos que de (2.28), (2.32) e das propriedades de $\{\omega_k\}$, segue imediatamente que $u > 0$.

A afirmação está provada.

Ficam verificados (iv) e (v).

Verificação de (vi). Do lema 1.5(a)(ii) juntamente com as hipóteses $u \leq \widehat{u}$ e $f \leq \widehat{f}$, segue imediatamente que

$$u(x)^{2^*_\theta} \leq \frac{K^2}{\lambda \dfrac{\omega_N}{N-\theta}|x|^{N-\theta} + \mu \displaystyle\int_{B_{|x|}(0)} f dy},$$

onde K é uma constante não-negativa que independe de u. Portanto,

$$u(x)^{2^*_\theta} = O\Bigg(\frac{1}{\dfrac{\lambda\omega_N}{N-\theta}|x|^{N-\theta} + \mu \displaystyle\int_{B_{|x|}(0)} f dy} \Bigg) \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty.$$

Fica verificado (vi).

$\square$

CAPÍTULO 3

Equação Homogênea: crescimento sublinear

Neste Capítulo, estudaremos a equação (0.3) com $0 < q < 1$. Para isso, consideraremos a seguinte equação associada a (0.3), fazendo em (0.7) $\mu = 0$:

$$-\Delta \widehat{u} = \lambda \frac{\widehat{u}_+^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta} + \alpha \widehat{k}(x) \widehat{u}_+^q \;\text{ em }\; \mathbf{R}^N, \tag{3.1}$$

onde seus atributos e função são os descritos na Introdução.

Nosso objetivo é a demonstração dos teoremas C e D.

Simplificaremos alguns passos quando semelhantes ou iguais aos dados no Capítulo 2.

3.1 Soluções radiais: demonstração do teorema C

Demonstração: Verificação de (i). Seja $\widehat{u} \in D_{rad}^{1,2}(\mathbf{R}^N)$, $\widehat{u} \geq 0$, $\widehat{u} \not\equiv 0$ uma solução fraca de (3.1). Pelo lema 1.5(b)(i), segue imediatamente que $\widehat{u} \in C^2(\mathbf{R}^N \setminus \{0\})$, $\nabla \widehat{u}(x) \cdot x < 0$ em $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ e $\widehat{u} > 0$ em $\mathbf{R}^N$.

Fica verificado (i).

Verificação de (ii). Seja $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$, $\widehat{u} \geq 0$, $\widehat{u} \not\equiv 0$ uma solução fraca de (3.1). Pelo lema 1.5(b)(ii), temos que

$$\lambda \frac{\omega_N}{N-\theta}|x|^{N-\theta}\widehat{u}(x)^{2^*_\theta} + \alpha \widehat{u}(x)^{q+1}\int_{B_{|x|}(0)} \widehat{k}dy \leq \ \|\widehat{u}\|^2.$$

Como, pelo teorema C(i), $\nabla \widehat{u}(x) \cdot x < 0$ em $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$, podemos escrever, para $|x| \sim \infty$:

$$\widehat{u}^{2^*_\theta} \leq \widehat{u}^{q+1}, \ q+1 < 2 \leq 2^*_\theta.$$

Assim, usando a expressão da taxa de decaimento de $\widehat{u}$ acima,

$$\widehat{u}(x)^{2^*_\theta} \leq \frac{\|\widehat{u}\|^2}{\lambda \frac{\omega_N}{N-\theta}|x|^{N-\theta} + \alpha \int_{B_{|x|}(0)} \widehat{k}dy} \text{ para } |x| \sim \infty.$$

Donde

$$\widehat{u}(x)^{2^*_\theta} = O\Bigg(\frac{\|\widehat{u}\|^2}{\frac{\lambda\omega_N}{N-\theta}|x|^{N-\theta} + \alpha \int_{B_{|x|}(0)} \widehat{k}dy}\Bigg) \text{ quando } |x| \to \infty.$$

Fica verificado (ii).

Verificação de (iii). Usaremos o lema 1.6(b). Suponha, por contradição, que $\widehat{u}$ é limitada em $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$. Como $\widehat{u}$ é definida e contínua sobre $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ e é decrescente (teorema C(i)), podemos estendê-la até a origem. Assim, $\widehat{u}$, como uma função radial, é definida e contínua sobre $[0, \infty)$ e é uma solução positiva de (3.1).

Fazendo $\widehat{k}(x) := \widehat{k}(r)$, temos:

$$\nabla \widehat{k}(x) = \widehat{k}'(r)\frac{x}{r}.$$

Também, $dx := r^{N-1}drd\sigma$. Fazendo mudança de coordenadas em (1.20) com $\alpha > 0$ e $\mu = 0$, obtemos:

$$\int_0^\infty r^{N-1}\ \Big[(\frac{N}{q+1} - \frac{N-2}{2})\widehat{k}(r) + \frac{1}{q+1}\widehat{k}'(r)\ r\Big]\widehat{u}(r)^{q+1}\ dr = 0. \tag{3.2}$$

Invocando (0.12), em virtude da igualdade em (3.2), a única possibilidade é que,

$$(\frac{N}{q+1} - \frac{N-2}{2})\widehat{k}(r) + \frac{1}{q+1}\widehat{k}'(r)\ r = 0.$$

Usando essa expressão, fazendo $\gamma := (\frac{N}{q+1} - \frac{N-2}{2})$ e fixando ε suficientemente pequeno, temos:

$$\frac{\widehat{k}'(r)}{\widehat{k}(r)} = -\frac{\gamma(q+1)}{r},\ r > \varepsilon,$$

donde

$$\widehat{k}(2\varepsilon) = \frac{\widehat{k}(\varepsilon)}{2^{\gamma(q+1)}},$$

após integração de ε a 2ε.

Fazendo $\varepsilon \to 0$, graças à continuidade de $\widehat{k}$, segue que $\gamma(q+1) = 0$, um absurdo. Portanto, $\widehat{u}$ não pode ser limitada na origem.

Fica verificado (iii).

Verificação de (iv). Sejam $0 \leq \theta < 2$ e $\lambda = 1$.

Etapa 1. Solução via Teorema do Passo da Montanha. Usaremos o lema 1.1(i)(b) e (ii)(b). Provaremos que

$$\text{Existe } \widehat{u}^2 \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N) \text{ tal que } \widehat{u}^2 \geq 0,\ \widehat{u}^2 \not\equiv 0,\ I(\widehat{u}^2) > 0 \text{ e } I'(\widehat{u}^2) = 0. \tag{3.3}$$

Designemos $\widehat{u}^2 := \widehat{u}$. De fato, pela observação 1.2, existem $\{\widehat{u}_n\} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ e algum $c_2 > 0$ satisfazendo

$$I(\widehat{u}_n) \longrightarrow c_2 \ \ e \ \ I'(\widehat{u}_n) \longrightarrow 0. \tag{3.4}$$

Afirmamos que existe $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ com $\widehat{u} \geq 0$ tal que

$$\widehat{u}_{n_-} \overset{D^{1,2}_{rad}}{\longrightarrow} 0 \ \text{ e } \ \widehat{u}_{n_+} \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u}.$$

De fato, temos, usando, respectivamente, (0.8) e (0.9) com $\lambda = 1$, $\alpha > 0$ e $\mu = 0$:

$$I(\widehat{u}_n) - \frac{1}{2^*_\theta}\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_{n_+}\rangle \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*_\theta}\right)\int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx - \alpha\frac{2^*_\theta - (q+1)}{2^*_\theta(q+1)}\int \widehat{k}\widehat{u}_{n_+}^{q+1} dx.$$

Usando as desigualdades de Hölder e de Sobolev, obtemos:

$$I(\widehat{u}_n) - \frac{1}{2^*_\theta}\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_{n+}\rangle \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*_\theta}\right)\|\widehat{u}_n\|^2 - \alpha[\frac{2^*_\theta - (q+1)}{2^*_\theta(q+1)}]{S_0}^{-1/2}|\widehat{k}|_{L^a_{rad}}\|\widehat{u}_n\|^{q+1}. \quad (3.5)$$

Agora, de (3.4), temos, para n suficientemente grande:

$$I(\widehat{u}_n) - \frac{1}{2^*_\theta}\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_{n+}\rangle \leq c_2 + \frac{\|\widehat{u}_n\|}{2^*_\theta},$$

que combinada com (3.5) resulta:

$$c_2 + \frac{\|\widehat{u}_n\|}{2^*_\theta} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*_\theta}\right)\|\widehat{u}_n\|^2 - \alpha[\frac{2^*_\theta - (q+1)}{2^*_\theta(q+1)}]{S_0}^{-1/2}|\widehat{k}|_{L^a_{rad}}\|\widehat{u}_n\|^{q+1},$$

onde, evidentemente, $2^*_\theta > 2 > q+1$. Conseqüentemente,

$$\|\widehat{u}_n\| \leq K,$$

onde K é uma constante positiva. Portanto,

$$\widehat{u}_n \stackrel{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u}.$$

Usando (0.9) com $\lambda = 1$, $\alpha > 0$, $\mu = 0$ e $\phi = \widehat{u}_{n-}$, temos:

$$\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_{n-}\rangle = -\|\widehat{u}_{n-}\|^2.$$

Agora, de (3.4), notemos que

$$|\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_{n-}\rangle| = o_n(1).$$

Isso junto com a última igualdade implica

$$\|\widehat{u}_{n-}\| \longrightarrow 0,$$

isto é,

$$\widehat{u}_{n-} \xrightarrow{D^{1,2}_{rad}} 0.$$

Como $\widehat{u}_n = \widehat{u}_{n_+} - \widehat{u}_{n_-}$ e $\widehat{u}_n \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u}$, obtemos:

$$\widehat{u}_{n_+} \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u} \text{ com } \widehat{u} \geq 0.$$

Isso prova a afirmação. Devido a esta, observamos que

$$\widehat{u}_n \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u} \ \text{ e } \ \widehat{u}_n \xrightarrow{qtp} \widehat{u}, \ \widehat{u} \geq 0. \tag{3.6}$$

Em particular,

$$\int \nabla \widehat{u}_n \cdot \nabla \phi dx \to \int \nabla \widehat{u} \cdot \nabla \phi \ dx, \ \text{para cada } \phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N). \tag{3.7}$$

Usando imersões contínuas e (3.6) segue que

$$\int \frac{\widehat{u}_{n_+}^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \ \phi \ dx \to \int \frac{\widehat{u}^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \ \phi \ dx, \ \text{para cada } \phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N). \tag{3.8}$$

Afirmamos que

$$\int \widehat{k} \widehat{u}_{n_+}^q \phi dx \to \int \widehat{k} \widehat{u}^q \phi dx, \ \text{para cada } \phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N). \tag{3.9}$$

Com efeito, notemos que

$$\Big[\int (\widehat{u}_{n_+}^{\frac{2^* q}{q+1}})^{\frac{q+1}{q}} dx \Big]^{\frac{q}{q+1}} \leq (\int |\widehat{u}_n|^{2^*} dx)^{\frac{q}{q+1}} \leq S_0^{-\frac{2^* q}{2(q+1)}} \|\widehat{u}_n\|^{\frac{2^* q}{q+1}}.$$

Como $\{\widehat{u}_n\}$ é limitada em $D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$, verifica-se que $\{\widehat{u}_{n_+}^{\frac{2^* q}{q+1}}\} \in L^{\frac{q+1}{q}}(\mathbf{R}^N)$. Por outro lado,

$$\Big[\int (|\phi|^{\frac{2^*}{q+1}})^{q+1} dx \Big]^{\frac{1}{q+1}} = (\int |\phi|^{2^*} dx)^{\frac{1}{q+1}} \leq S_0^{-\frac{2^*}{2(q+1)}} \|\phi\|^{\frac{2^*}{q+1}}.$$

Donde $|\phi|^{\frac{2^*}{q+1}} \in L^{q+1}(\mathbf{R}^N)$.

Também,

$$\frac{q}{q+1} + \frac{1}{q+1} = 1.$$

Assim, pelas desigualdades de Hölder e de Sobolev,

$$\int |\widehat{u}_{n_+}^q \phi|^{\frac{2^*}{q+1}} dx \leq \int |\widehat{u}_n|^{\frac{2^* q}{q+1}} |\phi|^{\frac{2^*}{q+1}} dx \leq S_0^{-2^*/2} \|\widehat{u}_n\|^{\frac{2^* q}{q+1}} \|\phi\|^{\frac{2^*}{q+1}}.$$

Como $\widehat{u}_n$ é limitada em $D_{rad}^{1,2}(\mathbf{R}^N)$, concluímos que $\widehat{u}_{n_+}^q \phi \in L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbf{R}^N)$ e é limitada em $L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbf{R}^N)$. Além disso, de (3.6),

$$\widehat{u}_{n_+}^q \phi \xrightarrow{qtp} \widehat{u}^q \phi.$$

Pelo lema 4.8 de Kavian [27] [p. 11],

$$\langle \widehat{u}_{n_+}^q \phi, \psi \rangle \longrightarrow \langle \widehat{u}^q \phi, \psi \rangle, \text{ para cada } \psi \in (L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbf{R}^N))' \equiv L^a(\mathbf{R}^N).$$

Lembrando que $\widehat{k} \in L_{rad}^a(\mathbf{R}^N)$, escolhemos $\psi = \widehat{k}$ para obtermos, em particular,

$$\int \widehat{k} \widehat{u}_{n_+}^q \phi dx \to \int \widehat{k} \widehat{u}^q \phi dx, \text{ para cada } \phi \in D_{rad}^{1,2}(\mathbf{R}^N),$$

que é a afirmação (3.9).

Usando (3.7), (3.8), (3.9) e

$$\langle I'(\widehat{u}_n), \phi \rangle = \int \nabla \widehat{u}_n \cdot \nabla \phi dx - \int \frac{\widehat{u}_{n_+}^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta} \phi dx - \alpha \int \widehat{k} \widehat{u}_{n_+}^q \phi dx, \text{ para cada } \phi \in D_{rad}^{1,2}(\mathbf{R}^N),$$

obtemos:

$$\langle I'(\widehat{u}_n), \phi \rangle \longrightarrow \langle I'(\widehat{u}), \phi \rangle, \text{ para cada } \phi \in D_{rad}^{1,2}(\mathbf{R}^N).$$

Graças a (3.4), segue que

$$I'(\widehat{u}) = 0.$$

Resta verificar que $\widehat{u} \not\equiv 0$.

De fato, da demonstração do lema 1.1(ii)(b), lembramos que

$$I(tw_\delta) = S_\theta^{\frac{N-\theta}{2-\theta}} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^{2_\theta^*}}{2_\theta^*} \right) - \alpha \frac{t^{q+1}}{q+1} |\widehat{k} w_\delta{}^{q+1}|_{L^1},$$

onde w_δ é a função caracterizada em (W_δ).

Segue-se, argumentando como em Gonçalves e Alves [24], que

$$\sup_{t\geq 0} I(tw_\delta) < (\frac{1}{2} - \frac{1}{2_\theta^*}) S_\theta^{\frac{N-\theta}{2-\theta}}.$$

Pela definição de c_2 (cf. Apêndice B), temos que

$$0 < c_2 < \frac{2-\theta}{2(N-\theta)} S_\theta^{\frac{N-\theta}{2-\theta}}. \tag{3.10}$$

Suponha, por contradição, que $\widehat{u} \equiv 0$. Como $\widehat{u}_n$ é limitada em $D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$, temos que

$$\int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx \longrightarrow M, \tag{3.11}$$

onde $M \geq 0$ é uma constante. Lembramos que de (3.4), para $\phi = \widehat{u}_n$, temos:

$$\int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx = \int \Big[\widehat{k}\widehat{u}_{n_+}^{q+1} + \frac{\widehat{u}_{n_+}^{2_\theta^*}}{|x|^\theta} \Big] dx + o_n(1), \tag{3.12}$$

para n suficientemente grande. Usando (3.9), a hipótese de contradição e (3.12), obtemos, ao passar ao limite:

$$\int \frac{\widehat{u}_{n_+}^{2_\theta^*}}{|x|^\theta} dx \longrightarrow M. \tag{3.13}$$

Agora, usando (3.4), (3.9), (3.11), (3.13), a hipótese de contradição e (0.8) com $\lambda = 1,\ \alpha > 0,\ 0 < q < 1,\ \mu = 0$, obtemos:

$$c_2 = M(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_\theta^*}), \tag{3.14}$$

o que implica $M > 0$ desde que $\theta \in [0, 2)$ e $c_2 > 0$. Por outro lado, graças à desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12],

$$\int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx \geq S_\theta \Big(\int \frac{\widehat{u}_{n_+}^{2_\theta^*}}{|x|^\theta} dx \Big)^{2/2_\theta^*}. \tag{3.15}$$

De (3.11), (3.13) e (3.15), obtemos, ao passar ao limite:

$$M \geq S_\theta^{\frac{N-\theta}{2-\theta}},\ 0 \leq \theta < 2. \tag{3.16}$$

Por fim, de (3.14) e (3.16), verifica-se que

$$c_2 \geq \frac{2-\theta}{2(N-\theta)} S_\theta^{\frac{N-\theta}{2-\theta}},$$

contradizendo (3.10). Logo, $u \not\equiv 0$.

Voltando à notação inicial, $\widehat{u} := \widehat{u}^2$ e lembrando que $c_2 > 0$, obtemos (3.3).

Etapa 2. Solução via Princípio Variacional de Ekeland. Usaremos o lema 1.1(i)(b) e (ii)(b) e o lema 1.4. Provaremos que

$$\text{Existe } \widehat{u}^1 \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N) \text{ tal que } \widehat{u}^1 \geq 0,\ \widehat{u}^1 \not\equiv 0,\ I(\widehat{u}^1) < 0 \text{ e } I'(\widehat{u}^1) = 0. \tag{3.17}$$

Designemos $\widehat{u}^1 := \widehat{u}$. De fato, o lema 1.4 garante a existência de uma seqüência $\{\widehat{u}_n\} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ satisfazendo

$$I(\widehat{u}_n) \longrightarrow c_1, \quad c_1 < 0 \quad e \quad I'(\widehat{u}_n) \longrightarrow 0. \tag{3.18}$$

Por outro lado, conforme fizemos na etapa 1, existe $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ satisfazendo

$$\widehat{u}_n \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u} \text{ com } \widehat{u} \geq 0.$$

Por argumento idêntico ao da etapa 1, aplicando as convergências (3.7), (3.8) e (3.9) e usando (3.18), obtemos:

$$I'(\widehat{u}) = 0.$$

Analogamente ao procedimento adotado na etapa 1, $\widehat{u} \geq 0$. Resta provar que

$$I(\widehat{u}) = c_1$$

(como $c_1 < 0$, automaticamente $\widehat{u} \not\equiv 0$).

Temos:

$$I(\widehat{u}_n) - \frac{1}{2^*_\theta}\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_n\rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*_\theta}\right)\int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx + \alpha\left(\frac{1}{2^*_\theta} - \frac{1}{q+1}\right)\int \widehat{k}\widehat{u}^{q+1}_{n_+} dx.$$

Essa expressão junto com (3.18), o fato de que a norma é (fssci) e de que

$$\lim_{n\to\infty}\int \widehat{k}\widehat{u}_{n_+}^{q+1}dx = \int \widehat{k}\widehat{u}^{q+1}dx,$$

implica que:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \liminf I(\widehat{u}_n)\\
&\geq \liminf\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_\theta^*}\right)\int|\nabla\widehat{u}_n|^2dx+\alpha\left(\frac{1}{2_\theta^*}-\frac{1}{q+1}\right)\int\widehat{k}\widehat{u}_{n_+}^{q+1}dx\right]\\
&\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_\theta^*}\right)\liminf\int|\nabla\widehat{u}_n|^2dx+\alpha\left(\frac{1}{2_\theta^*}-\frac{1}{q+1}\right)\lim_{n\to\infty}\int\widehat{k}\widehat{u}_{n_+}^{q+1}dx\\
&\geq I(\widehat{u})-\frac{1}{2_\theta^*}\int|\nabla\widehat{u}_n|^2dx+\frac{1}{2_\theta^*}\int\frac{\widehat{u}^{2_\theta^*}}{|x|^\theta}dx+\frac{\alpha}{2_\theta^*}\int\widehat{k}\widehat{u}^{q+1}dx\\
&= I(\widehat{u}),
\end{aligned}$$

pois $\dfrac{\langle I'(\widehat{u}),\ \widehat{u}\rangle}{2_\theta^*}=0$. Assim, $c_1=\liminf I(\widehat{u}_n)\geq I(\widehat{u})$. Conseqüentemente,

$$I(\widehat{u})=c_1.$$

Desde que $c_1<0$, verifica-se que $I(\widehat{u})<0$. Fazendo $\widehat{u}=:\widehat{u}^1$, obtemos (3.17).

Fica verificado (iv).

Verificação de (v). Sejam $\theta=2$ e $\lambda\in[0,S_2)$.

Etapa 1. Existência. Usaremos o lema 1.3(ii). Provaremos que

$$\text{Existe } \widehat{u}^3\in D_{rad}^{1,2}(\mathbf{R}^N) \text{ tal que } \widehat{u}^3\geq 0,\ \widehat{u}^3\not\equiv 0,\ I(\widehat{u}^3)<0 \text{ e } I'(\widehat{u}^3)=0. \tag{3.19}$$

Designemos $\widehat{u}^3:=\widehat{u}$. Lembrando que $I\in C^1(D_{rad}^{1,2}(\mathbf{R}^N),\mathbf{R})$, graças ao lema 1.3(ii), segue imediatamente do Teorema de Minimização Clássica (cf. Apêndice B) que existe $\widehat{u}\in D_{rad}^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ tal que

$$\langle I'(\widehat{u}),\phi\rangle=0,\ \text{para cada } \phi\in D_{rad}^{1,2}(\mathbf{R}^N).$$

Agora, notemos que, de (0.10) com $\theta=2$ e $\mu=0$, temos:

$$\int \nabla \widehat{u} \cdot \nabla \phi dx = \lambda \int \frac{\widehat{u}_+}{|x|^2}\ \phi dx + \alpha \int \widehat{k}\widehat{u}_+^q\ \phi dx,\ \text{para cada } \phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N).$$

Tomando $\phi = \widehat{u}_-$, obtemos:

$$-\|\widehat{u}_-\|^2 = 0.$$

Donde $\widehat{u}_- \equiv 0$ e $\widehat{u} = \widehat{u}_+ \geq 0$.

Notemos que, escolhendo $\phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ com $\phi > 0$ e tomando $t > 0$,

$$I(t\phi) = \frac{t^2}{2}\Big(\int |\nabla \phi|^2 dx - \lambda \int \frac{\phi^2}{|x|^2} dx\Big) - \alpha \frac{t^{q+1}}{q+1} \int \widehat{k}\phi^{q+1} dx,\ t > 0.$$

Desde que $\lambda \in [0, S_2)$, em virtude da desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12], o termo entre parênteses é positivo. Donde

$$I(t_0\phi) < 0 \ \text{ para algum } \ t_0 \in (0, t)$$

suficientemente pequeno. Conseqüentemente, $I(\widehat{u}) < 0$. Disso decorre imediatamente que $\widehat{u} \not\equiv 0$.

Fazendo $\widehat{u} =: \widehat{u}^3$, obtemos (3.19).

Etapa 2. Unicidade. Suponha, por contradição, que $\widehat{u}_1,\ \widehat{u}_2 \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ são soluções fracas não-negativas e não-identicamente nulas de (3.1) com $\theta = 2$. Então, podemos aplicar o teorema C(i) a $\widehat{u}_j \ \ (j = 1, 2)$ e, além disso,

$$\begin{aligned} -\Delta \widehat{u}_1 &= \lambda \frac{\widehat{u}_1}{|x|^2} + \alpha \widehat{k}\widehat{u}_1^q \ \text{ em } \ \mathbf{R}^N \setminus \{0\} \\ -\Delta \widehat{u}_2 &= \lambda \frac{\widehat{u}_2}{|x|^2} + \alpha \widehat{k}\widehat{u}_2^q \ \text{ em } \ \mathbf{R}^N \setminus \{0\} \end{aligned} \tag{3.20}$$

no sentido clássico. Conseqüentemente,

$$-\frac{\Delta \widehat{u}_2}{\widehat{u}_2} + \frac{\Delta \widehat{u}_1}{\widehat{u}_1} = \alpha \widehat{k}\Big(\frac{1}{\widehat{u}_2^{1-q}} - \frac{1}{\widehat{u}_1^{1-q}}\Big)$$

e, assim,

$$(-\frac{\Delta \widehat{u}_2}{\widehat{u}_2} + \frac{\Delta \widehat{u}_1}{\widehat{u}_1})(\widehat{u}_2^2 - \widehat{u}_1^2) = \alpha\ \widehat{k}\ (\frac{1}{\widehat{u}_2^{1-q}} - \frac{1}{\widehat{u}_1^{1-q}})(\widehat{u}_2^2 - \widehat{u}_1^2). \tag{3.21}$$

Notemos que, por (3.20) e (3.19), verifica-se que

$$\int -\widehat{u}_j \ \Delta \widehat{u}_j dx = \int |\nabla \widehat{u}_j|^2 dx. \tag{3.22}$$

Integrando (3.21) sobre $\mathbf{R}^N$ e usando (3.22), obtemos:

$$\int |\nabla \widehat{u}_2|^2 dx + \int \Delta \widehat{u}_2 \frac{\widehat{u}_1^2}{\widehat{u}_2} dx + \int |\nabla \widehat{u}_1|^2 dx + \int \Delta \widehat{u}_1 \frac{\widehat{u}_2^2}{\widehat{u}_1} dx = \int \alpha \widehat{k} \left(\frac{1}{\widehat{u}_2^{1-q}} - \frac{1}{\widehat{u}_1^{1-q}}\right)(\widehat{u}_2^2 - \widehat{u}_1^2) dx. \tag{3.23}$$

Em Abdellaoui, Felli e Peral [1] [teorema 2.1], é assegurado que

$$\int |\nabla \widehat{u}_2|^2 dx + \int \frac{\widehat{u}_2^2}{\widehat{u}_1} (\Delta \widehat{u}_1) dx \geq 0, \tag{3.24}$$

$$\int |\nabla \widehat{u}_1|^2 dx + \int \frac{\widehat{u}_1^2}{\widehat{u}_2} (\Delta \widehat{u}_2) dx \geq 0. \tag{3.25}$$

Por (3.23), (3.24) e (3.25), concluímos que

$$0 \leq \int \alpha \widehat{k} \left(\frac{1}{\widehat{u}_2^{1-q}} - \frac{1}{\widehat{u}_1^{1-q}}\right)(\widehat{u}_2^2 - \widehat{u}_1^2) dx \leq 0.$$

Impossível, uma vez que $\alpha > 0$ e $\widehat{k} > 0$. Assim,

$$\widehat{u}_1 \equiv \widehat{u}_2.$$

Fica verificado (v).

□

3.2 Soluções não-radiais: demonstração do teorema D

Demonstração: Verificação de (i). Seja $u \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ uma solução fraca positiva de (0.3) no sentido de $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ tal que

$$u \leq \widehat{u},$$

onde $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ é uma solução fraca de (3.1). Seja, ainda, $K \subset \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ um subconjunto compacto e consideremos o número positivo

$$r = \frac{dist(0, K)}{2}.$$

Para provar (i), basta verificar que

$$u \overset{\mu \to \infty}{\to} 0 \ \text{ em } \ L^\infty(K). \tag{3.26}$$

Agora, existe uma bola de raio fixado $R > r > 0$ tal que $A := B_R \setminus B_r \supset K$. Em virtude do lema 1.5(b)(ii), temos ($\widehat{u} \geq u$ e $\widehat{k} \geq k$):

$$\lambda \frac{\omega_N}{N - \theta} |x|^{N-\theta} u(x)^{2^*_\theta} + \alpha u^{q+1}(x) \int_{B_{|x|}(0)} k dy \leq \ \|\widehat{u}\|^2, \ x \in K.$$

Como $A \subset B_{|x|}(0)$,

$$u(x) \leq \frac{\|\widehat{u}\|^{\frac{2}{q+1}}}{(\alpha \displaystyle\int_A k dy)^{\frac{1}{q+1}}}, \ x \in A.$$

Usando o fato de que $\displaystyle\int_A k dy > 0$, resulta:

$$|u|_{L^\infty(A)} \overset{\mu \to \infty}{\to} 0.$$

Em particular, obtemos (3.26).

Fica verificado (i).

Verificação de (ii). Usando as notações e alguns dos passos da verificação de (i), é imediato que

$$u(x) \leq \ \left(\frac{\|\widehat{u}\|^2}{\lambda \frac{\omega_N}{N - \theta} |x|^{N-\theta}} \right)^{1/2^*_\theta}, \ x \in A,$$

mostrando que

$$|u|_{L^\infty(A)} \overset{\lambda \to \infty}{\to} 0.$$

Fica verificado (ii).

Verificação de (iii). Sejam $\theta = 2$, $\lambda \in [0, S_2)$. Como $u \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ é uma solução fraca positiva de (0.3) no sentido de $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$, temos:

$$\int \nabla u \cdot \nabla \phi dx = \lambda \int \frac{u^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \phi dx + \alpha \int k u^q \phi dx, \text{ para cada } \phi \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N).$$

Fazendo $\phi = u$ na última expressão, obtemos, usando as desigualdades de Hölder, de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12] e de Sobolev:

$$\|u\|^2 \leq \lambda S_2^{-1} \|u\|^2 + \alpha S_0^{-(q+1)/2} \ |k|_{L^a} \|u\|^{q+1}.$$

Donde,

$$0 \leq \|u\|^{2-(q+1)} \leq \frac{\alpha S_0^{-(q+1)/2} |k|_{L^a}}{(1 - \dfrac{\lambda}{S_2})}.$$

Como $2 > q+1$, obtemos:

$$u \longrightarrow 0 \ \text{ em } \ D^{1,2}(\mathbf{R}^N) \ \text{ quando } \ \alpha \longrightarrow 0 \ \text{ para cada } \ \lambda \in [0, S_2).$$

Fica verificado (iii).

Verificação de (iv) e (v). Seja $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ uma solução fraca não-negativa e não-identicamente nula de (3.1). Tal solução existe em virtude do teorema C(iv)(v). Para provar (iv) e (v), consideremos a família de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \dfrac{u^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} + \alpha k(x) u^q \ \text{ em } \ B_k, \\ \\ u > 0 \ \text{ em } \ B_k, \ u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial B_k. \end{cases} \tag{3.27}$$

Construção de uma supersolução de (3.27) **no sentido de** (1.36) **com** $\alpha > 0$ **e** $\mu = 0$. Pelo teorema C(i), $0 < \widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ satisfaz (3.1) no sentido clássico para $x \in \mathbf{R}^N \backslash \{0\}$.

Afirmamos que

$$\int \nabla \widehat{u} \cdot \nabla \phi dx = \lambda \int \frac{\widehat{u}^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \phi \ dx + \alpha \int \widehat{k} \widehat{u}^q \phi dx, \quad \phi \in D^{1,2}, \tag{3.28}$$

onde lembramos que $\lambda = 1$, se $\theta \in [0, 2)$ e $\lambda \in [0, S_2)$, se $\theta = 2$. De fato, sejam $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N \backslash \{0\})$ e $\eta_\epsilon(x)$ como no Capítulo 2, p. 64-65.

Multiplicando (3.1) por $\eta_\epsilon \phi$ e integrando sobre $\mathbf{R}^N$, obtemos:

$$\int \nabla \widehat{u} \cdot \nabla(\eta_\epsilon \ \phi) \ dx = \lambda \int \frac{\widehat{u}^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \eta_\epsilon \phi dx + \alpha \int \widehat{k} \widehat{u}^q \eta_\epsilon \phi dx.$$

Ou seja,

$$\int \phi \nabla \widehat{u} \cdot \nabla \eta_\epsilon \ dx + \int \eta_\epsilon \nabla \widehat{u} \cdot \nabla \phi \ dx = \lambda \int \frac{\widehat{u}^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \eta_\epsilon \phi dx + \alpha \int \widehat{k} \widehat{u}^q \eta_\epsilon \phi dx. \tag{3.29}$$

Usando as propriedades de η_ϵ, é imediato, pelo Teorema de Lebesgue, que

$$\int \eta_\epsilon \nabla \widehat{u} \cdot \nabla \phi \ dx \overset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \int \nabla \widehat{u} \cdot \nabla \phi \ dx, \tag{3.30}$$

$$\int \frac{\widehat{u}^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \eta_\epsilon \phi dx \overset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \int \frac{\widehat{u}^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \phi dx \quad \text{e} \tag{3.31}$$

$$\int \widehat{k} \widehat{u}^q \eta_\epsilon \phi dx \overset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \int \widehat{k} \widehat{u}^q \phi dx. \tag{3.32}$$

Sabemos que (cf. Capítulo 2, p. 65, (2.25))

$$\int \phi \nabla \widehat{u} \cdot \nabla \eta_\epsilon \ dx \overset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{3.33}$$

Portanto, (3.28) fica verificada, após passagem ao limite.

Seja B_k a bola de $\mathbf{R}^N$ com raio inteiro $k \geq 1$ e centro na origem. Definindo $\bar{u}_k := \widehat{u}_{|B_k}$, segue de (3.27) e (3.28) ($\widehat{k} \geq k$) que

$$\int_{B_k} \nabla \bar{u}_k \cdot \nabla \phi dx \geq \lambda \int_{B_k} \frac{\bar{u}_k^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \ \phi \ dx + \alpha \int_{B_k} \widehat{k} \bar{u}_k^q \phi dx, \quad \phi \in H_0^1(B_k), \ \phi \geq 0, \tag{3.34}$$

no sentido de (1.36) com $\alpha > 0$ e $\mu = 0$.

Construção de uma subsolução de (3.27) **no sentido de** (1.35) **com** $\alpha > 0$ **e** $\mu = 0$. Consideremos a família de problemas de Dirichlet, a saber,

$$\begin{cases} -\Delta w = \alpha k(x) w^q \ \text{ em } \ B_k, \\ \\ w \geq 0, \ w \not\equiv 0 \ \text{ em } \ B_k, \\ \\ w = 0 \ \text{ sobre } \ \partial B_k. \end{cases} \tag{3.35}$$

É fácil mostrar que (3.35) admite uma única solução fraca $\omega_k \in H_0^1(B_k)$ tal que, pela teoria da regularidade, $\omega_k \in C^1(\overline{B}_k)$ e, pelo princípio do máximo, $\omega_k > 0$.

Afirmação: $\omega_k \leq \bar{u}_k$ em B_k.

De fato, como $\bar{u}_k > 0$ e é regular e $0 < \omega_k \in C^1(\overline{B}_k)$, existe $\tau_k \in (0,1)$ tal que $\tau_k \max_{\overline{B}_k} \omega_k < \min_{\overline{B}_k} \bar{u}_k$. Conseqüentemente,

$$\tau_k \omega_k < \bar{u}_k \ \text{ em } \ B_k.$$

Agora, dada $\phi \in H_0^1(B_k)$ com $\phi \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned} \int_{B_k} \nabla(\tau_k \omega_k) \cdot \nabla \phi dx - \alpha \int_{B_k} k(\tau_k \omega_k)^q \phi dx &= \tau_k \int_{B_k} \nabla \omega_k \cdot \nabla \phi dx - \alpha {\tau_k}^q \int_{B_k} k{\omega_k}^q \phi dx \\ &\leq {\tau_k}^q \Big[\int_{B_k} \nabla \omega_k \cdot \nabla \phi dx - \alpha \int_{B_k} k{\omega_k}^q \phi dx \Big] \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois ω_k é solução fraca de (3.35). Donde

$$\int_{B_k} \nabla(\tau_k \omega_k) \cdot \nabla \phi dx \leq \alpha \int_{B_k} k(\tau_k \omega_k)^q \phi dx, \ \phi \geq 0, \ \phi \in H_0^1(B_k).$$

Logo, $\tau_k \omega_k$ satisfaz (1.35) com $\lambda = 0$. Portanto, $\tau_k \omega_k$ é uma subsolução de (3.35). Lembramos que $\bar{u}_k$ é uma supersolução de (3.27). Em particular ($\lambda = 0$), é uma supersolução de (3.35). Aplicando o teorema 1.8(b) com $\lambda = 0$ a (3.35), existe $\widehat{\omega}_k \in H_0^1(B_k)$ satisfazendo $\tau_k \omega_k \leq \widehat{\omega}_k \leq \bar{u}_k$ e

$$\int_{B_k} \nabla \widehat{\omega}_k \cdot \nabla \phi dx = \alpha \int_{B_k} k \widehat{\omega}_k^q \phi dx, \ \text{para cada } \phi \in H_0^1(B_k).$$

Donde $\widehat{\omega}_k$ é uma solução fraca de (3.35) no sentido de $H_0^1(B_k)$. Por unicidade, $\widehat{\omega}_k = \omega_k$, de modo que

$$\omega_k \leq \bar{u}_k \quad \text{em} \quad B_k,$$

seguindo a afirmação.

Afirmação: $\omega_k \leq \omega_{k+1}$ em B_k.

De fato, como antes, existe $\delta_k \in (0, 1)$ tal que

$$\delta_k \omega_k < \omega_{k+1} \quad \text{em} \quad B_k.$$

Mas, como fizemos acima, $\delta_k \omega_k$ é uma subsolução de (2.27) e ω_{k+1} é uma supersolução de (3.35). Pelo teorema 1.8(b) com $\mu = 0$, existe $\widetilde{\omega}_k \in H_0^1(B_k)$ tal que $\delta_k \omega_k \leq \widetilde{\omega}_k \leq \omega_k$ e

$$\int_{B_k} \nabla \widetilde{\omega}_k \cdot \nabla \phi dx = \alpha \int_{B_k} k \widetilde{\omega}_k^q \phi dx, \text{ para cada } \phi \in H_0^1(B_k).$$

Donde $\widetilde{\omega}_k$ é uma solução fraca de (3.35) no sentido de $H_0^1(B_k)$. Por unicidade, $\widetilde{\omega}_k = \omega_k$, de modo que

$$\omega_k \leq \omega_{k+1} \quad \text{em} \quad B_k,$$

seguindo a afirmação.

Fazendo $\omega_k = 0$ sobre $\mathbf{R}^N \setminus B_k$, temos que a seqüência $\{\omega_k\}$ satisfaz

$$0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq ... \leq \omega_k \leq ... \leq \widehat{u}, \tag{3.36}$$

de modo que ($\lambda \geq 0$)

$$\int_{B_k} \nabla \omega_k \cdot \nabla \phi dx \leq \lambda \int_{B_k} \frac{{\omega_k}^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta} \phi \, dx + \alpha \int_{B_k} k {\omega_k}^q \phi dx, \quad \phi \in H_0^1(B_k), \ \phi \geq 0. \tag{3.37}$$

Isso finaliza a construção de uma seqüência ordenada de subsoluções de (3.27) limitadas por cima por $\widehat{u}$.

Por (3.34) e (3.37) e usando o teorema 1.8(b), existe $u_k \in H_0^1(B_k)$ com $\omega_k \leq u_k \leq \bar{u}_k$ satisfazendo

$$\int_{B_k} \nabla u_k \cdot \nabla \phi dx = \lambda \int_{B_k} \frac{u_k^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta} \phi dx + \alpha \int_{B_k} k {u_k}^q \phi dx, \quad \phi \in H_0^1(B_k). \tag{3.38}$$

Afirmação: $\{u_k\}$ é limitada em $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$.

De fato, como $\{u_k\} \in H_0^1(B_k)$, sua extensão ao $\mathbf{R}^N$, a saber,

$$\widetilde{u}_k(x) := \begin{cases} u_k(x), & x \in B_k, \\ 0, & x \in \mathbf{R}^N \setminus B_k \end{cases}$$

pertence a $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$, a qual ainda denominaremos por u_k. Disso se segue que

$$\|u_k\|^2 = \int |\nabla u_k|^2 dx = \int_{B_k} |\nabla u_k|^2 dx = |u_k|^2_{H_0^1}. \tag{3.39}$$

Fazendo $\phi = u_k$ em (3.38) e lembrando que $u_k \leq \bar{u}_k$, obtemos:

$$|u_k|^2_{H_0^1} \leq \lambda S_\theta^{-2_\theta^*/2} |\bar{u}_k|^{2_\theta^*}_{H_0^1} + \alpha S_0^{-(q+1)/2} |k|_{L^a} |\bar{u}_k|^{q+1}_{H_0^1},$$

após usarmos as desigualdades de Hölder, de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12] e de Sobolev. Usando (3.39), verifica-se imediatamente a afirmação. Conseqüentemente,

$$u_k \overset{D^{1,2}}{\rightharpoonup} u \quad \text{e} \quad u_k \xrightarrow{qtp} u \tag{3.40}$$

para alguma $u \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ com $u \leq \widehat{u}$.

Afirmação: u é uma solução fraca positiva de (0.3) no sentido de $D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$.

De fato, graças à extensão de u_k ao $\mathbf{R}^N$, podemos escrever:

$$\int \nabla u_k \cdot \nabla \phi dx = \lambda \int \frac{u_k^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta} \phi dx + \alpha \int k {u_k}^q \phi dx, \quad \phi \in H_0^1(B_k). \tag{3.41}$$

Lembramos que

$$D^{1,2}(\mathbf{R}^N) := \overline{C_0^\infty(\mathbf{R}^N)}^{\|\cdot\|},$$

onde $\|u\| := (\int |\nabla u|^2 dx)^{1/2}$, $u \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$. Fixando $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ de modo que $supt\varphi_j \subset B_k \subset \mathbf{R}^N$, temos:

$$\varphi_j \longrightarrow \varphi \ \text{ em } \ D^{1,2}(\mathbf{R}^N) \tag{3.42}$$

e também:

$$\int \nabla u_k \cdot \nabla \varphi_j dx = \lambda \int \frac{u_k^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \varphi_j dx + \alpha \int k {u_k}^q \varphi_j dx, \quad \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N). \tag{3.43}$$

De (3.40) obtemos, em particular, que

$$\int \nabla u_k \cdot \nabla \varphi_j dx \to \int \nabla u \ \cdot \nabla \varphi_j \ dx, \text{ para cada } \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N), \tag{3.44}$$

$$\int \frac{{u_k}^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \ \varphi_j \ dx \to \int \frac{u^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \ \varphi_j \ dx, \text{ para cada } \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N) \tag{3.45}$$

e

$$\int k {u_k}^q \ \varphi_j dx \to \int k u^q \ \varphi_j dx, \text{ para cada } \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N). \tag{3.46}$$

Fazendo $k \to \infty$ em (3.43) e usando (3.44), (3.45) e (3.46), concluímos que

$$\int \nabla u \cdot \nabla \varphi_j dx = \lambda \int \frac{u^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \varphi_j dx + \alpha \int k u^q \varphi_j dx, \quad \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N). \tag{3.47}$$

Usando (3.42) e o Teorema de Lebesgue, obtemos, fazendo $j \to \infty$ em (3.47):

$$\int \nabla u \cdot \nabla \phi dx = \lambda \int \frac{u^{2^*_\theta - 1}}{|x|^\theta} \phi dx + \alpha \int k u^q \phi dx, \quad \phi \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N). \tag{3.48}$$

Agora, notemos que de (3.36), (3.40) e das propriedades de $\{\omega_k\}$, segue imediatamente que $u > 0$.

A afirmação está provada.

Ficam verificados (iv) e (v).

Verificação de (vi). Lembramos que $2^*_\theta \geq 2 > q + 1$. Do lema 1.5(b)(ii) juntamente com as hipóteses $u \leq \widehat{u}$ e $k \leq \widehat{k}$, segue imediatamente que

$$u(x)^{2^*_\theta} \leq \frac{K^2}{\lambda \dfrac{\omega_N}{N - \theta} |x|^{N-\theta} + \alpha \displaystyle\int_{B_{|x|}(0)} k dy},$$

onde K é uma constante não-negativa que independe de u. Portanto,

$$u(x)^{2^*_\theta} = O\Big(\frac{1}{\frac{\lambda\omega_N}{N-\theta}|x|^{N-\theta} + \alpha\displaystyle\int_{B_{|x|}(0)} kdy}\Big) \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty.$$

Fica verificado (vi).

$\square$

CAPÍTULO 4

Equação Homogênea: crescimento subcrítico: prova do teorema E

Neste Capítulo, estudaremos a equação (0.3) com $1 < q < 2^* - 1$. Para isso, consideraremos a seguinte equação associada a (0.3), fazendo em (0.7) $\mu = 0$:

$$-\Delta \widehat{u} = \lambda \frac{\widehat{u}_+^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta} + \alpha \widehat{k}(x) \widehat{u}_+^q \quad \text{em} \quad \mathbf{R}^N, \tag{4.1}$$

onde seus atributos e função são os descritos na Introdução.

Nosso objetivo é a demonstração do teorema E.

Simplificaremos alguns passos quando semelhantes ou iguais aos dados no Capítulo 3.

Demonstração: Verificação de (i). Seja $\widehat{u} \in D_{rad}^{1,2}(\mathbf{R}^N)$, $\widehat{u} \geq 0$, $\widehat{u} \not\equiv 0$ uma solução fraca de (4.1). Pelo lema 1.5(b)(i), segue imediatamente que $\widehat{u} \in C^2(\mathbf{R}^N \setminus \{0\})$, $\nabla \widehat{u}(x) \cdot x < 0$ em $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ e $\widehat{u} > 0$ em $\mathbf{R}^N$.

Fica verificado (i).

Verificação de (ii). Seja $\widehat{u} \in D_{rad}^{1,2}(\mathbf{R}^N)$, $\widehat{u} \geq 0$, $\widehat{u} \not\equiv 0$ uma solução fraca de (4.1). Pelo lema 1.5(b)(ii), temos que

$$\lambda \frac{\omega_N}{N-\theta}|x|^{N-\theta}\widehat{u}(x)^{2^*_\theta} + \alpha \widehat{u}(x)^{q+1}\int_{B_{|x|}(0)} \widehat{k}dy \leq \ \|\widehat{u}\|^2.$$

Como, pelo teorema E(i), $\nabla\widehat{u}(x)\cdot x < 0$ em $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$, podemos escrever, para $|x| \sim \infty$:

$$\widehat{u}^{2^*_\theta} \leq \widehat{u}^{q+1}, \ \text{ se } \ 2^*_\theta \geq q+1 \ \text{ e } \ \widehat{u}^{q+1} \leq \widehat{u}^{2^*_\theta}, \ \text{ se } \ 2^*_\theta \leq q+1.$$

Assim, usando a expressão da taxa de decaimento de $\widehat{u}$ acima,

$$\widehat{u}(x)^{2^*_\theta} = O\Bigg(\frac{\|\widehat{u}\|^2}{\frac{\lambda\omega_N}{N-\theta}|x|^{N-\theta} + \alpha\int_{B_{|x|}(0)} \widehat{k}dy}\Bigg) \ \textit{quando } |x| \to \infty, \ \text{ se } \ 2^*_\theta \geq q+1$$

e

$$\widehat{u}(x)^{q+1} = O\Bigg(\frac{\|\widehat{u}\|^2}{\frac{\lambda\omega_N}{N-\theta}|x|^{N-\theta} + \alpha\int_{B_{|x|}(0)} \widehat{k}dy}\Bigg) \ \textit{quando } |x| \to \infty, \ \text{ se } \ 2^*_\theta \leq q+1.$$

Fica verificado (ii).

Verificação de (iii). Usaremos o lema 1.6(b). Suponha, por contradição, que $\widehat{u}$ é limitada em $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$. Como $\widehat{u}$ é definida e contínua sobre $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ e é decrescente (teorema E(i)), podemos estendê-la até a origem. Assim, $\widehat{u}$, como uma função radial, é definida e contínua sobre $[0,\infty)$ e é uma solução positiva de (4.1).

Fazendo $\widehat{k}(x) := \widehat{k}(r)$, temos:

$$\nabla\widehat{k}(x) = \widehat{k}'(r)\frac{x}{r}.$$

Também, $dx := r^{N-1}drd\sigma$. Fazendo mudança de coordenadas em (1.20) com $\alpha > 0$ e $\mu = 0$, obtemos:

$$\int_0^\infty r^{N-1} \ \Big[(\frac{N}{q+1} - \frac{N-2}{2})\widehat{k}(r) + \frac{1}{q+1}\widehat{k}'(r) \ r\Big]\widehat{u}(r)^{q+1} \ dr = 0. \tag{4.2}$$

Invocando (0.12), em virtude da igualdade em (4.2), a única possibilidade é que,

$$(\frac{N}{q+1} - \frac{N-2}{2})\widehat{k}(r) + \frac{1}{q+1}\widehat{k}'(r) \ r = 0.$$

Usando essa expressão, fazendo $\gamma := (\frac{N}{q+1} - \frac{N-2}{2})$ e fixando ε suficientemente pequeno, temos:

$$\frac{\widehat{k}'(r)}{\widehat{k}(r)} = -\frac{\gamma(q+1)}{r}, \ r > \varepsilon,$$

donde

$$\widehat{k}(2\varepsilon) = \frac{\widehat{k}(\varepsilon)}{2^{\gamma(q+1)}},$$

após integração de ε a 2ε.

Fazendo $\varepsilon \to 0$, graças à continuidade de $\widehat{k}$, segue que $\gamma(q+1) = 0$, um absurdo. Portanto, $\widehat{u}$ não pode ser limitada na origem.

Fica verificado (iii).

Verificação de (iv). Sejam $0 < \theta < 2$ e $\lambda = 1$.

Etapa 1. Solução via Teorema do Passo da Montanha. Usaremos o lema 1.1(i)(c) e (ii)(c). Provaremos que

$$\text{Existe } \widehat{u}^2 \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N) \text{ tal que } \widehat{u}^2 \geq 0, \ \widehat{u}^2 \not\equiv 0, \ I(\widehat{u}^2) > 0 \text{ e } I'(\widehat{u}^2) = 0. \tag{4.3}$$

Designemos $\widehat{u}^2 := \widehat{u}$. De fato, pela observação 1.2, existem $\{\widehat{u}_n\} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ e algum $c_2 > 0$ satisfazendo

$$I(\widehat{u}_n) \longrightarrow c_2 \ \ e \ \ I'(\widehat{u}_n) \longrightarrow 0. \tag{4.4}$$

Afirmamos que existe $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ com $\widehat{u} \geq 0$ tal que

$$\widehat{u}_{n_-} \overset{D^{1,2}_{rad}}{\longrightarrow} 0 \ \text{ e } \ \widehat{u}_{n_+} \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u}.$$

De fato, temos, usando, respectivamente, (0.8) e (0.9) com $\lambda = 1$, $\alpha > 0$ e $\mu = 0$ e usando a hipótese segundo a qual $2^*_\theta \leq q + 1$:

$$\begin{aligned}
I(\widehat{u}_n) - \frac{1}{2^*_\theta}\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_{n_+}\rangle &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*_\theta}\right)\int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx + \alpha \frac{(q+1) - 2^*_\theta}{2^*_\theta (q+1)} \int \widehat{k}\widehat{u}_+^{q+1} dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*_\theta}\right)\|\widehat{u}_n\|^2 + \alpha \frac{(q+1) - 2^*_\theta}{2^*_\theta (q+1)} |\widehat{k}\widehat{u}_+^{q+1}|_{L^1} \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*_\theta}\right)\|\widehat{u}_n\|^2.
\end{aligned}$$

Donde

$$I(\widehat{u}_n) - \frac{1}{2^*_\theta}\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_{n_+}\rangle \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*_\theta}\right)\|\widehat{u}_n\|^2. \tag{4.5}$$

Agora, de (4.4), temos, para n suficientemente grande:

$$I(\widehat{u}_n) - \frac{1}{2^*_\theta}\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_{n_+}\rangle \leq c_2 + \frac{\|\widehat{u}_n\|}{2^*_\theta},$$

que combinada com (4.5) resulta:

$$c_2 + \frac{\|\widehat{u}_n\|}{2^*_\theta} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*_\theta}\right)\|\widehat{u}_n\|^2.$$

Conseqüentemente,

$$\|\widehat{u}_n\| \leq K,$$

onde K é uma constante positiva. Portanto,

$$\widehat{u}_n \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u}.$$

Usando (0.9) com $\lambda = 1$, $\alpha > 0$, $\mu = 0$ e $\phi = \widehat{u}_{n_-}$, temos:

$$\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_{n_-}\rangle = -\|\widehat{u}_{n_-}\|^2.$$

Agora, de (4.4), notemos que

$$|\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_{n_-}\rangle| = o_n(1).$$

Isso junto com a última igualdade implica

$$\|\widehat{u}_{n_-}\| \longrightarrow 0,$$

isto é,

$$\widehat{u}_{n_-} \overset{D^{1,2}_{rad}}{\longrightarrow} 0.$$

Como $\widehat{u}_n = \widehat{u}_{n_+} - \widehat{u}_{n_-}$ e $\widehat{u}_n \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u}$, obtemos:

$$\widehat{u}_{n_+} \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u} \text{ com } \widehat{u} \geq 0.$$

Isso prova a afirmação. Devido a esta, observamos que

$$\widehat{u}_n \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u} \ \text{ e } \ \widehat{u}_n \overset{qtp}{\longrightarrow} \widehat{u}, \ \widehat{u} \geq 0. \tag{4.6}$$

Em particular,

$$\int \nabla\widehat{u}_n \cdot \nabla\phi dx \to \int \nabla\widehat{u} \ \cdot \nabla\phi \ dx, \text{ para cada } \phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N). \tag{4.7}$$

Usando imersões contínuas e (4.6) segue que

$$\int \frac{\widehat{u}_{n_+}^{2^*_\theta-1}}{|x|^\theta} \ \phi \ dx \to \int \frac{\widehat{u}^{2^*_\theta-1}}{|x|^\theta} \ \phi \ dx, \text{ para cada } \phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N). \tag{4.8}$$

Por sua vez, fazendo como no Capítulo 3 (p. 75, (3.9)),

$$\int \widehat{k}\widehat{u}_{n_+}^q \phi dx \to \int \widehat{k}\widehat{u}^q \phi dx, \text{ para cada } \phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N). \tag{4.9}$$

Usando (4.7), (4.8), (4.9) e

$$\langle I'(\widehat{u}_n), \phi\rangle = \int \nabla\widehat{u}_n \cdot \nabla\phi dx - \int \frac{\widehat{u}_{n_+}^{2^*_\theta-1}}{|x|^\theta}\phi dx - \alpha\int \widehat{k}\widehat{u}_{n_+}^q \phi dx, \text{ para cada } \phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N),$$

obtemos:

$$\langle I'(\widehat{u}_n), \phi \rangle \longrightarrow \langle I'(\widehat{u}), \phi \rangle, \text{ para cada } \phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N).$$

Graças a (4.4), segue que

$$I'(\widehat{u}) = 0.$$

Resta verificar que $\widehat{u} \not\equiv 0$.

De fato, segue da demonstração do lema 1.1(ii)(c) e do mesmo argumento usado no Capítulo 3 (p. 77).

Voltando à notação inicial, $\widehat{u} := \widehat{u}^2$ e lembrando que $c_2 > 0$, obtemos (4.3).

Etapa 2. Solução via Princípio Variacional de Ekeland. Usaremos o lema 1.1(i)(c) e (ii)(c) e o lema 1.4. Provaremos que

$$\text{Existe } \widehat{u}^1 \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N) \text{ tal que } \widehat{u}^1 \geq 0,\ \widehat{u}^1 \not\equiv 0,\ I(\widehat{u}^1) < 0 \text{ e } I'(\widehat{u}^1) = 0. \tag{4.10}$$

Designemos $\widehat{u}^1 := \widehat{u}$. De fato, o lema 1.4 garante a existência de uma seqüência $\{\widehat{u}_n\} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ satisfazendo

$$I(\widehat{u}_n) \longrightarrow c_1, \quad c_1 < 0 \;\; e \;\; I'(\widehat{u}_n) \longrightarrow 0. \tag{4.11}$$

Por outro lado, conforme fizemos na etapa 1, existe $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ satisfazendo

$$\widehat{u}_n \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u} \text{ com } \widehat{u} \geq 0.$$

Por argumento idêntico ao da etapa 1, aplicando as convergências (4.7), (4.8) e (4.9) e usando (4.11), obtemos:

$$I'(\widehat{u}) = 0.$$

Analogamente ao procedimento adotado na etapa 1, $\widehat{u} \geq 0$. Resta provar que

$$I(\widehat{u}) = c_1$$

(como $c_1 < 0$, automaticamente $\widehat{u} \not\equiv 0$).

Temos:

$$I(\widehat{u}_n) - \frac{1}{2^*_\theta}\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_n\rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*_\theta}\right)\int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx + \alpha\left(\frac{1}{2^*_\theta} - \frac{1}{q+1}\right)\int \widehat{k}\widehat{u}_{n_+}^{q+1} dx.$$

Essa expressão junto com (4.11), o fato de que a norma é (fssci) e de que

$$\lim_{n\to\infty}\int \widehat{k}\widehat{u}_{n_+}^{q+1} dx = \int \widehat{k}\widehat{u}^{q+1} dx,$$

implica que:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \liminf I(\widehat{u}_n) \\
&\geq \liminf \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*_\theta}\right)\int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx + \alpha\left(\frac{1}{2^*_\theta} - \frac{1}{q+1}\right)\int \widehat{k}\widehat{u}_{n_+}^{q+1} dx\right] \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*_\theta}\right)\liminf \int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx + \alpha\left(\frac{1}{2^*_\theta} - \frac{1}{q+1}\right)\lim_{n\to\infty}\int \widehat{k}\widehat{u}_{n_+}^{q+1} dx \\
&\geq I(\widehat{u}) - \frac{1}{2^*_\theta}\int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx + \frac{1}{2^*_\theta}\int \frac{\widehat{u}^{2^*_\theta}}{|x|^\theta} dx + \frac{\alpha}{2^*_\theta}\int \widehat{k}\widehat{u}^{q+1} dx \\
&= I(\widehat{u}),
\end{aligned}$$

pois $\dfrac{\langle I'(\widehat{u}),\ \widehat{u}\rangle}{2^*_\theta} = 0$. Assim, $c_1 = \liminf I(\widehat{u}_n) \geq I(\widehat{u})$. Conseqüentemente,

$$I(\widehat{u}) = c_1.$$

Desde que $c_1 < 0$, verifica-se que $I(\widehat{u}) < 0$. Fazendo $\widehat{u} =: \widehat{u}^1$, obtemos (4.10).

Fica verificado (iv).

Verificação de (v). Sejam $\theta = 2$ e $\lambda \in [0, S_2)$.

Etapa 1. Solução via Teorema do Passo da Montanha. Usaremos o lema 1.1(i)(d) e (ii)(d). Provaremos que

$$\text{Existe } \widehat{u}^4 \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N) \text{ tal que } \widehat{u}^4 \geq 0,\ \widehat{u}^4 \not\equiv 0,\ I(\widehat{u}^4) > 0 \text{ e } I'(\widehat{u}^4) = 0. \tag{4.12}$$

Designemos $\widehat{u}^4 := \widehat{u}$. De fato, pela observação 1.2, existem $\{\widehat{u}_n\} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ e algum $c_4 > 0$ satisfazendo

$$I(\widehat{u}_n) \longrightarrow c_4 \quad e \quad I'(\widehat{u}_n) \longrightarrow 0. \tag{4.13}$$

Afirmamos que existe $\widehat{u} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ com $\widehat{u} \geq 0$ tal que

$$\widehat{u}_{n_-} \overset{D^{1,2}_{rad}}{\longrightarrow} 0 \;\text{ e }\; \widehat{u}_{n_+} \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u}.$$

De fato, temos, usando, respectivamente, (0.8) e (0.9) com $\theta = 2$, $\alpha > 0$ e $\mu = 0$:

$$\begin{aligned} I(\widehat{u}_n) - \frac{1}{q+1}\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_{n_+}\rangle &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx - \lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\int \frac{\widehat{u}^2_{n_+}}{|x|^2}dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\|\widehat{u}_n\|^2 - \lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)S_2^{-1}\|\widehat{u}_n\|^2, \end{aligned}$$

em virtude da desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12]. Donde

$$I(\widehat{u}_n) - \frac{1}{q+1}\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_{n_+}\rangle \geq \left(1 - \frac{\lambda}{S_2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\|\widehat{u}_n\|^2. \tag{4.14}$$

Agora, de (4.13), temos, para n suficientemente grande:

$$I(\widehat{u}_n) - \frac{1}{q+1}\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_{n_+}\rangle \leq c_4 + \frac{\|\widehat{u}_n\|}{q+1},$$

que combinada com (4.14) resulta:

$$c_4 + \frac{\|\widehat{u}_n\|}{q+1} \geq \left(1 - \frac{\lambda}{S_2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\|\widehat{u}_n\|^2,$$

onde lembramos que $\lambda \in [0, S_2)$ e que $2 < q+1 < 2^*$. Conseqüentemente,

$$\|\widehat{u}_n\| \leq K,$$

onde K é uma constante positiva. Portanto,

$$\widehat{u}_n \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u}.$$

Usando (0.9) com $\theta = 2$, $\alpha > 0$, $\mu = 0$ e $\phi = \widehat{u}_{n_-}$, temos:

$$\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_{n_-} \rangle = -\|\widehat{u}_{n_-}\|^2.$$

Agora, de (4.13), notemos que

$$|\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_{n_-} \rangle| = o_n(1).$$

Isso junto com a última igualdade implica

$$\|\widehat{u}_{n_-}\| \longrightarrow 0,$$

isto é,

$$\widehat{u}_{n_-} \overset{D^{1,2}_{rad}}{\longrightarrow} 0.$$

Como $\widehat{u}_n = \widehat{u}_{n_+} - \widehat{u}_{n_-}$ e $\widehat{u}_n \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u}$, obtemos:

$$\widehat{u}_{n_+} \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u} \text{ com } \widehat{u} \geq 0.$$

Isso prova a afirmação. Devido a esta, observamos que

$$\widehat{u}_n \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u} \ \text{ e } \ \widehat{u}_n \overset{qtp}{\longrightarrow} \widehat{u}, \ \widehat{u} \geq 0. \tag{4.15}$$

Em particular,

$$\int \nabla \widehat{u}_n \cdot \nabla \phi dx \to \int \nabla \widehat{u} \ \cdot \nabla \phi \ dx, \text{ para cada } \phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N). \tag{4.16}$$

Usando imersões contínuas e (4.15) segue que

$$\int \frac{\widehat{u}_{n_+}}{|x|^2} \ \phi \ dx \to \int \frac{\widehat{u}}{|x|^2} \ \phi \ dx, \text{ para cada } \phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N). \tag{4.17}$$

Por sua vez, fazendo como no Capítulo 3 (p. 75, (3.9)),

$$\int \widehat{k}\widehat{u}_{n_+}^q \phi dx \to \int \widehat{k}\widehat{u}^q \phi dx, \text{ para cada } \phi \in D_{rad}^{1,2}(\mathbf{R}^N). \tag{4.18}$$

Usando (4.16), (4.17), (4.18) e

$$\langle I'(\widehat{u}_n), \phi\rangle = \int \nabla\widehat{u}_n \cdot \nabla\phi dx - \lambda \int \frac{\widehat{u}_{n_+}}{|x|^2}\phi dx - \alpha \int \widehat{k}\widehat{u}_{n_+}^q \phi dx, \text{ para cada } \phi \in D_{rad}^{1,2}(\mathbf{R}^N),$$

obtemos:

$$\langle I'(\widehat{u}_n), \phi\rangle \longrightarrow \langle I'(\widehat{u}), \phi\rangle, \text{ para cada } \phi \in D_{rad}^{1,2}(\mathbf{R}^N).$$

Graças a (4.13), segue que

$$I'(\widehat{u}) = 0.$$

É fácil ver que $\widehat{u} \not\equiv 0$.

De fato, segue da demonstração do lema 1.1(ii)(d).

Voltando à notação inicial, $\widehat{u} := \widehat{u}^4$ e lembrando que $c_4 > 0$, obtemos (4.12).

Etapa 2. Solução via Princípio Variacional de Ekeland. Usaremos o lema 1.1(i)(d) e (ii)(d), o lema 1.4 e o lema de concentração-compacidade (cf. Apêndice B). Provaremos que

$$\text{Existe } \widehat{u}^3 \in D_{rad}^{1,2}(\mathbf{R}^N) \text{ tal que } \widehat{u}^3 \geq 0,\ \widehat{u}^3 \not\equiv 0,\ I(\widehat{u}^3) < 0 \text{ e } I'(\widehat{u}^3) = 0. \tag{4.19}$$

Designemos $\widehat{u}^3 := \widehat{u}$. De fato, o lema 1.4 garante a existência de uma seqüência $\{\widehat{u}_n\} \in D_{rad}^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ satisfazendo

$$I(\widehat{u}_n) \longrightarrow c_3, \quad c_3 < 0 \quad e \quad I'(\widehat{u}_n) \longrightarrow 0. \tag{4.20}$$

Por outro lado, conforme fizemos na etapa 1, existe $\widehat{u} \in D_{rad}^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ satisfazendo

$$\widehat{u} \overset{D_{rad}^{1,2}}{\rightharpoonup} \widehat{u} \text{ com } \widehat{u} \geq 0.$$

Por argumento idêntico ao da etapa 1, aplicando as convergências (4.16), (4.17) e (4.18) e usando (4.20), obtemos:

$$I'(\widehat{u}) = 0.$$

Analogamente ao procedimento adotado na etapa 1, $\widehat{u} \geq 0$. Resta provar que

$$I(\widehat{u}) = c_3$$

(como $c_3 < 0$, automaticamente $\widehat{u} \not\equiv 0$).

Temos:

$$I(\widehat{u}_n) - \frac{1}{q+1}\langle I'(\widehat{u}_n), \widehat{u}_n\rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx - \lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\int \frac{\widehat{u}_{n_+}^2}{|x|^2} dx.$$

Essa expressão junto com (4.20) e o fato de que (cf. Capítulo 1, p. 22 e o lema de concentração-compacidade, no Apêndice B)

$$\underline{\lim} \int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx \geq \int |\nabla \widehat{u}|^2 dx + \delta_{x_0}\widehat{\mu}_0,$$

$$\overline{\lim} \int \frac{\widehat{u}_{n_+}^2}{|x|^2} dx \leq \int \frac{\widehat{u}_+^2}{|x|^2} dx + \delta_{x_0}\widehat{\nu}_0 \quad \text{e}$$

$$\widehat{\mu}_0 \geq S_2 \widehat{\nu}_0$$

resulta

$$
\begin{aligned}
c_3 &= \liminf I(\widehat{u}_n) \\
&\geq -\limsup - \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right) \int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx - \lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right) \int \frac{\widehat{u}_{n+}^2}{|x|^2} dx \right] \\
&= -\limsup \left[- \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right) \int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx + \lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right) \int \frac{\widehat{u}_{n+}^2}{|x|^2} dx \right] \\
&\geq -\limsup \left[- \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right) \int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx \right] - \limsup \lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right) \int \frac{\widehat{u}_{n+}^2}{|x|^2} dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right) \liminf \int |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx - \lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right) \limsup \int \frac{\widehat{u}_{n+}^2}{|x|^2} dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right) \left[\int |\nabla \widehat{u}|^2 dx + \delta_{x_0} \widehat{\mu}_0 \right] - \lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right) \left[\int \frac{\widehat{u}_+^2}{|x|^2} dx + \delta_{x_0} \widehat{\nu}_0 \right] \\
&= \frac{1}{2} \int |\nabla \widehat{u}|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int \frac{\widehat{u}_+^2}{|x|^2} dx - \frac{1}{q+1} \int |\nabla \widehat{u}|^2 dx \\
&+ \frac{\lambda}{q+1} \int \frac{\widehat{u}_+^2}{|x|^2} dx + \delta_{x_0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right) \left(\widehat{\mu}_0 - \lambda \widehat{\nu}_0 \right) \\
&= I(\widehat{u}) - \frac{1}{q+1} \int |\nabla \widehat{u}|^2 dx + \frac{\lambda}{q+1} \int \frac{\widehat{u}_+^2}{|x|^2} dx \\
&+ \frac{\alpha}{q+1} \int \widehat{k} \widehat{u}_+^{q+1} dx + \delta_{x_0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right) \left(\widehat{\mu}_0 - \lambda \widehat{\nu}_0 \right) \\
&= I(\widehat{u}) - \frac{\langle I'(\widehat{u}),\ \widehat{u} \rangle}{q+1} + \delta_{x_0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right) \left(\widehat{\mu}_0 - \lambda \widehat{\nu}_0 \right) \\
&\geq I(\widehat{u}) + \delta_{x_0} \widehat{\mu}_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right) \left(1 - \frac{\lambda}{S_2} \right) \\
&\geq I(\widehat{u}),
\end{aligned}
$$

após usarmos a definição de I, o fato de que $\dfrac{\langle I'(\widehat{u}),\ \widehat{u} \rangle}{q+1} = 0$ e de que $\lambda \in [0, S_2)$. Assim, $c_3 = \liminf I(\widehat{u}_n) \geq I(\widehat{u})$. Conseqüentemente,

$$I(\widehat{u}) = c_3.$$

Desde que $c_3 < 0$, verifica-se que $I(\widehat{u}) < 0$. Fazendo $\widehat{u} =: \widehat{u}^3$, obtemos (4.19).

Fica verificado (v).

$\square$

APÊNDICE A

Diferenciabilidade do Funcional de Euler-Lagrange

Proposição. *Sejam* $\lambda,\ \alpha,\ \mu \geq 0$, $q \in (0,\ 1) \cup (1,\ 2^* - 1)$ *e* $\theta \in [0, 2]$ *em* (0.7). *Suponha* $(kf)_1,\ (kf)_2$ *e* $(kf)_3$. *Então, o funcional definido em* (0.8) *é de classe* $C^1(D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N),\ \mathbf{R})$ *e sua derivada de Gâteaux é dada por* (0.9).

Demonstração resumida: provaremos por meio das três conhecidas etapas.

Etapa 1. I é Gâteaux-diferenciável.

De fato, temos:

$$\begin{aligned}
\langle I'(\widehat{u}), \phi \rangle &= \lim_{t \to 0} \frac{I(\widehat{u} + t\phi) - I(u)}{t} \\
&= \int \nabla \widehat{u} \cdot \nabla \phi dx - \frac{\lambda}{2^*_\theta} \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int \frac{(\widehat{u} + t\phi)_+^{2^*_\theta} - \widehat{u}_+^{2^*_\theta}}{|x|^\theta} dx \\
&- \frac{\alpha}{q+1} \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int \widehat{k}[(\widehat{u} + t\phi)_+^{q+1} - \widehat{u}_+^{q+1}] dx - \mu \int \widehat{f} \phi dx.
\end{aligned}$$

É imediato, por argumentos conhecidos e lembrando que $\widehat{k} \in L^a_{rad}(\mathbf{R}^N)$, em virtude do Teorema de Lebesgue, que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int \widehat{k}[(\widehat{u}+t\phi)_+^{q+1}-\widehat{u}_+^{q+1}]dx=(q+1)\int \widehat{k}\widehat{u}_+^q\phi dx.$$

Afirmamos que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int \frac{(\widehat{u}+t\phi)_+^{2_\theta^*}-\widehat{u}_+^{2_\theta^*}}{|x|^\theta}dx=2_\theta^*\int \frac{\widehat{u}_+^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta}\phi dx.$$

Substituindo-se esses dois últimos limites na expressão de $\langle I'(\widehat{u}),\phi\rangle$ acima, obtemos (0.9) e a etapa 1 fica provada. Verifiquemos a afirmação restante.

Com efeito, graças ao Teorema do Valor Médio, existe $\Theta_t(x) := \Theta \in \mathbf{R}$ tal que

$$\frac{(\widehat{u}+t\phi)_+^{2_\theta^*}-\widehat{u}_+^{2_\theta^*}}{|x|^\theta}=t\frac{2_\theta^*\phi\Theta_+^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta}\quad \text{qtp}\quad \mathbf{R}^N$$

com Θ satisfazendo

$$\min\{\widehat{u}+t\phi,\ \widehat{u}\}\leq\Theta\leq\max\{\widehat{u}+t\phi,\ \widehat{u}\}\quad \text{qtp}\quad \mathbf{R}^N. \tag{A.1}$$

Donde

$$|\Theta|\leq|\widehat{u}|+|\phi|. \tag{A.2}$$

Conseqüentemente, para $|t|\leq 1$

$$\left|\frac{2_\theta^*\phi\Theta_+^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta}\right|\leq K_0G(x), \tag{A.3}$$

onde K_0 é uma constante positiva e $G(x) := \dfrac{|\widehat{u}|^{2_\theta^*-1}|\phi|}{|x|^\theta}+\dfrac{|\phi|^{2_\theta^*}}{|x|^\theta}$.

Usaremos o Teorema de Lebesgue. Destarte, é suficiente verificar que

$$G\in L^1(\mathbf{R}^N), \tag{A.4}$$

$$\frac{2_\theta^*\phi\Theta_+^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta}\in L^1(\mathbf{R}^N)\quad \text{e} \tag{A.5}$$

$$\Theta\to\widehat{u}\quad \text{qtp}\quad \mathbf{R}^N. \tag{A.6}$$

De fato, $(A.5)$ é óbvio por causa de $(A.4)$. Quanto a $(A.6)$, segue imediatamente de $(A.1)$. Verifiquemos $(A.4)$.

Com efeito, segue de $(A.2)$ e em virtude da desigualdade de Hölder com

$$\frac{2_\theta^* - 1}{2_\theta^*} + \frac{1}{2_\theta^*} = 1,$$

que

$$\int \left|\frac{2_\theta^* \phi \Theta_+^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta}\right| dx \leq K_1 \left(\int \frac{|\widehat{u}|^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta} dx\right)^{\frac{2_\theta^*-1}{2_\theta^*}} \left(\int \frac{|\phi|^{2_\theta^*}}{|x|^\theta} dx\right)^{\frac{1}{2_\theta^*}} + K_1 \int \frac{|\phi|^{2_\theta^*}}{|x|^\theta} dx,$$

onde K_1 é uma constante positiva.

Donde, graças à desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12],

$$\int \left|\frac{2_\theta^* \phi \Theta_+^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta}\right| dx \leq K_1 K_2 \|\widehat{u}\|^{2_\theta^*-1} \|\phi\| + K_1 K_3 \|\phi\|^{2_\theta^*},$$

onde K_2, K_3 são constantes positivas. Isso mostra $(A.4)$. Aplicando o Teorema de Lebesgue, segue a afirmação.

Etapa 2. $I'(u)$ é um operador linear e contínuo.

A linearidade é trivial. Quanto à continuidade, graças às desigualdades de Hölder, de Sobolev e de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12],

$$\begin{aligned} |\langle I'(\widehat{u}), \phi \rangle| &\leq \int |\nabla \widehat{u}| |\nabla \phi| dx + \lambda \int \frac{|\widehat{u}|^{2_\theta^*-1}}{|x|^\theta} |\phi| dx + \alpha \int |\widehat{k}| |\widehat{u}|^q |\phi| dx + \mu \int |\widehat{f}| |\phi| dx \\ &\leq \left(\|\widehat{u}\| + \lambda K_4 \|\widehat{u}\|^{2_\theta^*-1} + \alpha K_5 |\widehat{k}|_{L^a_{rad}} \|\widehat{u}\|^q + \mu K_6 |\widehat{f}|_{L^b_{rad}} \right) \|\phi\|, \end{aligned}$$

para cada $\phi \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$, de modo que $I'(\widehat{u})$ é um operador contínuo.

Etapa 3. I' é uma aplicação contínua.

De fato, seja $\widehat{u}_n \overset{D^{1,2}_{rad}}{\to} \widehat{u}$. Temos, em virtude das desigualdades de Hölder, de Sobolev e de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12]:

$$
\begin{aligned}
|I'(\widehat{u}_n) - I'(\widehat{u})|_{(D^{1,2}_{rad})'} \;\; & \leq \sup_{\|\phi\|\leq 1,\ \phi\in D^{1,2}_{rad}} \Big[\lambda K_4 \Big(\int \frac{|\widehat{u}_{n_+}^{2^*_\theta-1} - \widehat{u}_+^{2^*_\theta-1}|^{\frac{2^*_\theta}{2^*_\theta-1}}}{|x|^\theta} dx \Big)^{\frac{2^*_\theta-1}{2^*_\theta}} \|\phi\| \\
& + \;\; \alpha K_5 |\widehat{k}|_{L^a_{rad}} \Big(\int |\widehat{u}^q_{n_+} - \widehat{u}^q_+|^{\frac{2^*}{q}} dx \Big)^{\frac{q}{2^*}} \|\phi\| \Big] \qquad (A.7) \\
& \leq \;\; \lambda K_4 |\widehat{u}_{n_+}^{2^*_\theta-1} - \widehat{u}_+^{2^*_\theta-1}|_{L_\theta^{\frac{2^*_\theta}{2^*_\theta-1}}} + \alpha K_5 |\widehat{k}|_{L^a_{rad}} |\widehat{u}^q_{n_+} - \widehat{u}^q_+|_{L^{\frac{2^*}{q}}},
\end{aligned}
$$

onde $K_4,\ K_5$ são constantes positivas. É fácil verificar, graças às imersões contínuas, que valem as convergências:

$$
\widehat{u}_{n_+}^{2^*_\theta-1} \to \widehat{u}_+^{2^*_\theta-1} \;\; \text{em} \;\; L_\theta^{\frac{2^*_\theta}{2^*_\theta-1}}(\mathbf{R}^N) \;\; \text{e} \;\; \widehat{u}^q_{n_+} \to \widehat{u}^q_+ \;\; \text{em} \;\; L^{\frac{2^*}{q}}(\mathbf{R}^N).
$$

Passando ao limite em $(A.7)$ e usando essas convergências, obtemos:

$$
I'(\widehat{u}_n) \overset{D^{1,2}_{rad}}{\to} I'(\widehat{u}),
$$

mostrando que I' é uma aplicação contínua. As etapas 1, 2 e 3 implicam que $I \in C^1(D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N),\ \mathbf{R})$ e possui derivada de Gâteaux dada por (0.9).

$\square$

APÊNDICE B

Sobre Princípios Variacionais

B.1 Teorema do Passo da Montanha

Teorema. (Brézis e Nirenberg [11]) *Seja Φ uma função C^1 sobre um espaço de Banach E. Suponha que*

(Φ_1) *existem uma vizinhança U de 0 em E e uma constante ρ tal que $\Phi(u) \geq \rho$ para cada u na fronteira de U,*

(Φ_2) $\Phi(0) < \rho$ *e* $\Phi(v) < \rho$ *para algum $v \notin U$.*

Seja

$$c = \inf_{P \in \mathcal{P}} \max_{w \in P} \Phi(w) \geq \rho,$$

onde $\mathcal{P}$ denota a classe de caminhos contínuos ligando 0 a v.

Conclusão: existe uma seqüência $\{u_j\}$ em E tal que

$$\Phi(u_j) \to c \quad e \quad \Phi'(u_j) \to 0 \quad em \quad E'.$$

B.2 Teorema de Minimização Clássica

Teorema. (Struwe [39] [p. 4], adaptado) *Seja E um espaço reflexivo de Banach e seja $M \subset E$ um subespaço fracamente fechado de E. Suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

(Ψ_1) $\Psi(u) \to \infty$ *quando* $\|u\|_E \to \infty$, $u \in M$,

(Ψ_2) *Para cada $u \in M$, qualquer seqüência $\{u_n\} \in M$ tal que*

$$u_n \rightharpoonup u \quad em \quad E$$

implica $\Psi(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \Psi(u_n)$.

Então, Ψ é limitado por baixo sobre M e atinge seu ínfimo em M. Além disso, se $\Psi \in C^1(M, \mathbf{R})$, então

$$\Psi'(u) = 0.$$

B.3 Princípio Variacional de Ekeland

Seja V um espaço métrico completo cuja distância entre dois pontos $u,\ v \in V$ é denotada por $d(u,v)$. Seja $F: \ V \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ uma função semicontínua inferiormente, não-identicamente igual a $+\infty$. Consideremos a seguinte condição (Ekeland [17]): para cada $\epsilon > 0$, existe algum ponto $u \in V$ tal que:

$$\inf F \leq F(u) \leq \inf F + \epsilon. \tag{$B.0$}$$

Teorema. (Ekeland [17]) *Sejam V um espaço métrico completo e $F: \ V \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ uma função semicontínua inferiormente, não-identicamente igual a $+\infty$, limitada por baixo. Para cada ponto $u \in V$ satisfazendo $(B.0)$ e cada $\lambda > 0$, existe algum ponto $v \in V$ tal que*

$$F(v) \leq F(u),$$

$$d(u,v) \leq \lambda,$$

$$\text{Para todo} \quad w \neq v, \ F(w) > F(v) - \frac{\epsilon}{\lambda} d(v,w).$$

B.4 Um Lema de Concentração-Compacidade para Potenciais Singulares

A seguir, faremos um resumo da demonstração de um lema de concentração-compacidade para potenciais singulares utilizado na pesquisa de soluções de (0.7).

Lema. *Seja* $\{\widehat{u}_n\} \in D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$ *uma seqüência tal que* $\widehat{u}_n \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u}$. *Então, existem medidas de Radon* $\widehat{\mu}$ *e* $\widehat{\nu}$ *tais que*

$$|\nabla \widehat{u}_n|^2 dx \rightharpoonup \widehat{\mu} \quad e \quad \frac{\widehat{u}^2_{n_+}}{|x|^2} dx \rightharpoonup \widehat{\nu}.$$

Além disso, existem $x_0 \in \mathbf{R}^N$ *e correspondentes números positivos* $\widehat{\mu}_0$, $\widehat{\nu}_0$ *tais que*

$$\widehat{\nu} = \frac{{u_+}^2}{|x|^2} dx + \delta_{x_0} \widehat{\nu}_0 \quad e \quad \widehat{\mu} \geq |\nabla \widehat{u}|^2 dx + \delta_{x_0} \widehat{\mu}_0$$

onde $\widehat{\mu}_0 \geq S_2 \widehat{\nu}_0$ *e* δ_{x_0} *é a massa de Dirac de* x_0.

Demonstração resumida: faremos por etapas (cf. Lions [31] e Smets [37]). Temos:

$$\widehat{u}_{n_+} \overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup} \widehat{u}_+ \text{ donde } \widehat{u}_{n_+} \overset{qtp}{\to} \widehat{u}_+ \text{ em } \mathbf{R}^N. \qquad (B.1)$$

Etapa 1. Afirmamos que

$$\frac{\widehat{u}^2_{n_+}}{|x|^2} dx - \frac{|\widehat{u}_{n_+} - \widehat{u}_+|^2}{|x|^2} dx - \frac{\widehat{u}^2_+}{|x|^2} dx = o_n(1),$$

onde $o_n(1) \to 0$ no sentido das medidas de Radon.

De fato, seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ com $\Omega := supt\varphi \subset \mathbf{R}^N$. É fácil verificar que, por meio de mudança de variável,

$$\int_\Omega \varphi \Big(\frac{\widehat{u}^2_{n_+}}{|x|^2} - \frac{|\widehat{u}_{n_+} - \widehat{u}_+|^2}{|x|^2} \Big) dx = 2 \int_\Omega \Big(\int_0^1 \varphi |\widehat{u}_{n_+} - z\widehat{u}_+| \frac{\widehat{u}_+}{|x|^2} dz \Big) dx. \qquad (B.2)$$

Definemos $f_n : \mathbf{R}^N \times [0,1] \to \mathbf{R}$ por

$$f_n(x,z) := \varphi |\widehat{u}_{n_+} - z\widehat{u}_+| \frac{\widehat{u}_+}{|x|^2}.$$

Notemos que

(i) $f_n(x,z) \to \varphi|\widehat{u}_+ - z\widehat{u}_+|\dfrac{\widehat{u}_+}{|x|^2} := f(x,z)$ qtp $\mathbf{R}^N$, em virtude de $(B.1)$.

(ii) Dado $E \subset \mathbf{R}^N$, subconjunto mensurável, temos, observando que, de $(B.1)$, $\{\widehat{u}_{n+}\}$ é limitada em $D^{1,2}_{rad}(\mathbf{R}^N)$,

$$\Big|\int_E f_n(x,z)dx\Big| \leq |\varphi|_{L^\infty} S_2^{-1}(K\|\widehat{u}\| + \|\widehat{u}\|^2),$$

graças às desigualdades de Hölder e de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12]. Como a expressão não depende de n, concluímos, por definição, que $\{f_n\}$ é um conjunto uniformemente integrável.

(iii) $|f(x,z)| < \infty$ qtp $\mathbf{R}^N$.

Lembrando que $\Omega = supt\varphi$, de $(i)(ii)(iii)$ concluímos, graças ao Teorema de Vitali, que

$$\lim_n \int f_n(x,z)dx = \int f(x,z)dx, \text{ para cada } z \in [0,1].$$

Agora, definemos $g_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ por

$$g_n(z) := \int f_n(x,z)dx.$$

Temos:

(i) $g_n \in L^1([0,1])$.

(ii) $g_n(z) \to \displaystyle\int f(x,z)dx := g(z)$ qtp $\mathbf{R}^N$.

(iii) $|g_n(z)| < \infty$ qtp $\mathbf{R}^N$.

De $(i)(ii)(iii)$ temos, pelo Teorema de Lebesgue, que

$$\int_0^1 g_n(z)dz \to \int_0^1 g(z)dz. \tag{B.3}$$

Passando ao limite em $(B.2)$ e usando $(B.3)$ e o Teorema de Fubini, obtemos:

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi\Big(\frac{\widehat{u}^2_{n+}}{|x|^2} - \frac{|\widehat{u}_{n+} - \widehat{u}_+|^2}{|x|^2}\Big)dx = \int_\Omega \varphi\frac{\widehat{u}^2_+}{|x|^2}dx, \text{ para cada } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Donde,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\Big(\frac{\widehat{u}^2_{n_+}}{|x|^2}dx-\frac{|\widehat{u}_{n_+}-\widehat{u}_+|^2}{|x|^2}dx-\frac{\widehat{u}^2_+}{|x|^2}dx\Big)\varphi=0,\ \text{para cada } \varphi\in C_0^\infty(\Omega),$$

o que prova nossa afirmação.

Etapa 2. De $(B.1)$ e graças à desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12] e à imersão contínua,

$$L^1(\mathbf{R}^N)\hookrightarrow M(\mathbf{R}^N),$$

verifica-se que $\{\frac{\widehat{u}^2_{n_+}}{|x|^2}\}$, $\{|\nabla\widehat{u}_{n_+}|^2\}\in M(\mathbf{R}^N)$ e são limitadas em $M(\mathbf{R}^N)$. Conseqüentemente, por um teorema de teoria da medida, existem medidas de Radon $\widehat{\mu}$ e $\widehat{\nu}$ tais que

$$|\nabla\widehat{u}_n|^2dx\le|\nabla\widehat{u}_{n_+}|^2dx\rightharpoonup\widehat{\mu}\ \text{ e }\ \frac{\widehat{u}^2_{n_+}}{|x|^2}dx\rightharpoonup\widehat{\nu}.$$

Etapa 3. Definemos

$$v_n:=\widehat{u}_{n_+}-\widehat{u}\ \text{ e }\ w_n:=\frac{\widehat{u}^2_{n_+}}{|x|^2}dx-\frac{\widehat{u}^2_+}{|x|^2}dx.$$

Conseqüentemente, temos, evidentemente,

$$v_n\overset{D^{1,2}_{rad}}{\rightharpoonup}0\ \text{ e }\ w_n\rightharpoonup\widehat{\nu}-\frac{\widehat{u}^2_+}{|x|^2}dx=:w,$$

no sentido das medidas de Radon.

Da afirmação provada na etapa 1 e da definição de v_n e w_n, obtemos:

$$\int\varphi dw_n-\int\varphi\frac{|v_n|^2}{|x|^2}dx\to0,\ \text{para cada } \varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N).\tag{B.4}$$

É fácil verificar, usando teoria da medida (cf. Folland [21] [p. 212]), que w é uma medida de Radon não-negativa. Afirmamos que w concentra-se apenas em $\{0\}\subset\mathbf{R}^N$.

De fato, notemos primeiro que, usando $(B.4)$ com $\varphi=|\phi|^2$, onde $\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, temos, devido à desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12]:

$$\int |\phi|^2 dw = \lim_{n\to\infty} \int |\phi|^2 dw_n \leq S_2^{-1}(\limsup_{n\to\infty} \int |\phi|^2 |\nabla \widehat{u}_{n_+}|^2 dx + \limsup_{n\to\infty} \int |\nabla \phi|^2 |\widehat{u}_{n_+}|^2 dx).$$

Como $|\nabla \widehat{u}_{n_+}|^2 dx \rightharpoonup \widehat{\mu}$, na verdade,

$$\int |\phi|^2 dw \leq S_2^{-1}(\int |\phi|^2 d\widehat{\mu} + \limsup_{n\to\infty} \int |\nabla \phi|^2 |\widehat{u}_{n_+}|^2 dx).$$

Agora, notemos que, graças à desigualdade de Sobolev, $\{\widehat{u}_{n_+}^2\} \in L^{2^*/2}(\mathbf{R}^N)$ e é limitada em $L^{2^*/2}(\mathbf{R}^N)$. Isso junto com $(B.1)$ e com o lema 4.8 de Kavian [27] [p. 11] implica que, em particular,

$$\int \widehat{u}_{n_+}^2 \eta dx \to \int \widehat{u}_+^2 \eta dx, \text{ para cada } \eta \in (L^{2^*/2}(\mathbf{R}^N))' \equiv L^{\frac{2^*}{2^*-2}}(\mathbf{R}^N).$$

É fácil verificar que $\eta := |\nabla \phi|^2 \in L^{\frac{2^*}{2^*-2}}(\mathbf{R}^N)$, donde

$$\int |\nabla \phi|^2 |\widehat{u}_{n_+}|^2 dx \to \int |\nabla \phi|^2 |\widehat{u}_+|^2 dx.$$

Conseqüentemente,

$$\int |\phi|^2 dw = \lim_{n\to\infty} \int |\phi|^2 dw_n \leq S_2^{-1}(\int |\phi|^2 d\widehat{\mu} + \int |\nabla \phi|^2 \widehat{u}_+^2 dx). \qquad (B.5)$$

Segundo, dada $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ tal que $\{0\} \not\subset supt\phi$, temos:

$$\int |\phi|^2 \frac{|v_n|^2}{|x|^2} dx \leq ||\phi|^2|_{L^\infty} \int_{supt\phi} \frac{|v_n|^2}{|x|^2} dx.$$

Usando essa expressão, imersões, a desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [12], o Teorema de Lebesgue e $(B.4)$, obtemos:

$$\int |\phi|^2 dw = \lim_{n\to\infty} \int |\phi|^2 dw_n = \lim_{n\to\infty} \int |\phi|^2 \frac{|v_n|^2}{|x|^2} dx = o_n(1). \qquad (B.6)$$

Seja $E \subset \mathbf{R}^N$ um boreliano tal que $\{0\} \not\subset E$ e seja $A \subset \mathbf{R}^N$ um aberto tal que $\{0\} \not\subset E$. Dado $\mathcal{K} \subset A$ compacto, segue que $\{0\} \not\subset \mathcal{K}$. Logo, pelo Lema de Urysson, existe $\xi \in C_0(\mathbf{R}^N)$ tal que $supt\xi \subset A$, $\xi \equiv 1$ em $\mathcal{K}$ e $0 \leq \xi \leq 1$. Portanto, usando $(B.6)$,

$$w(\mathcal{K}) := \int_{\mathcal{K}} dw = \int_{\mathcal{K}} |\xi|^2 dw \leq \int |\xi|^2 dw = 0.$$

Assim, $w(\mathcal{K}) = 0$ (w é não-negativa). Como $w(A) := \sup\{w(\mathcal{K});\ \mathcal{K} \subset A \textit{ compacto}\}$, verifica-se que $w(A) = 0$.

Dado $y \in E$, seja $V := \bigcup_{y \in E} V_y$, onde V_y é uma vizinhança de y. É imediato que $w(V) = 0$. Conseqüentemente, desde que $w(E) := \inf\{w(A);\ A \supset E,\ A \textit{ aberto}\}$, segue que $w(E) = 0$. Isso mostra que w concentra-se apenas em $\{0\}$, provando a afirmação. Assim, w calculada em um conjunto unitário somente poderá ser positiva no conjunto $\{0\}$. Desse modo, facilmente verifica-se que

$$w(\{0\}) = \int \chi_{\{0\}}(x) dw = \int \chi_{\{0\}}(x) d\widehat{\nu} - \int \chi_{\{0\}}(x) \frac{\widehat{u}_+^2(x)}{|x|^2} dx = \int_{\{0\}} d\widehat{\nu} = \widehat{\nu}(\{0\}) := \widehat{\nu}_0.$$

Destarte, w pode ser decomposta em

$$w = \widehat{\nu}_0 \delta_{x_0} + w_c,$$

onde w_c é uma medida contínua não-negativa, isto é, $w(\{0\}) = 0$, para todo conjunto unitário (cf. Folland [21] [p. 102]).

Agora, tomemos $E = \mathbf{R}^N \backslash \{0\}$. Então, como já vimos, $0 = w(E) = \widehat{\nu}_0 \delta_{x_0}(E) + w_c(E)$. Como $\delta_{x_0}(E) = 0$, pois $\{0\} \not\subset E$, segue que $w_c(E) = 0$. Pelo fato de $\mathbf{R}^N = E \cup \{0\}$ e $E \cap \{0\} = \emptyset$, obtemos:

$$w_c(\mathbf{R}^N) = w_c(E) + w_c(\{0\}) = 0.$$

Conseqüentemente, $w = \widehat{\nu}_0 \delta_{x_0}$. Assim, pela definição de w,

$$\widehat{\nu} = \frac{\widehat{u}_+^2}{|x|^2} dx + \widehat{\nu}_0 \delta_{x_0}.$$

Etapa 4. Afirmamos que

$$\widehat{\mu}(E) \geq \widehat{\mu}_0 \ \text{ e } \ \widehat{\mu}(E) \geq \int_E |\nabla \widehat{u}|^2 dx, \ \text{para cada } E \ \text{ mensurável},$$

onde $\widehat{\mu}_0 := \mu(\{0\})$. De fato, se $\{0\} \subset E$, temos:

$$\widehat{\mu}(E) \geq \widehat{\mu}(\{0\}) = \widehat{\mu}_0 \cdot 1 = \widehat{\mu}_0 \delta_{x_0}(E).$$

Se $\{0\} \not\subset E$, temos:

$$\widehat{\mu}(E) \geq \widehat{\mu}(\{0\}) = \widehat{\mu}_0 \cdot 0 = \widehat{\mu}_0 \delta_{x_0}(E).$$

Em qualquer caso, $\widehat{\mu} \geq \widehat{\mu}_0 \delta_{x_0}$, conforme afirmado.

Agora, devido à regularidade exterior de $\widehat{\mu}$, é suficiente provar a outra afirmação para todo $A \subset \mathbf{R}^N$ aberto. Aplicando o Lema de Urysson com a função ξ acima mencionada e invocando um resultado de Folland [21] [p. 212], temos:

$$\widehat{\mu}(A) = \int_A d\mu \geq \int_A \xi d\mu \geq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathcal{K}} |\nabla \widehat{u}_n|^2 dx, \text{ para cada } \mathcal{K} \subset A \text{ compacto.} \qquad (B.7)$$

Usando imersões, as convergências acima, $(B.7)$ e minorações sobre a seqüência de gradientes, obtemos:

$$\widehat{\mu}(A) \geq \int_{\mathcal{K}} |\nabla \widehat{u}|^2 dx := \overline{\mu}(\mathcal{K}).$$

Aplicando o ínfimo à expressão anterior e usando a regularidade interna de $\overline{\mu}$, obtemos:

$$\widehat{\mu}(A) \geq \int_A |\nabla \widehat{u}|^2 dx.$$

Novamente usando a regularidade exterior de $\widehat{\mu}$ e de $\overline{\mu}$ e aplicando o supremo, obtemos:

$$\widehat{\mu}(E) \geq \int_E |\nabla \widehat{u}|^2 dx, \text{ para cada } E \subset \mathbf{R}^N \text{ mensurável.}$$

Isso conclui a prova da afirmação.

Etapa 5. Finalmente, seja $\xi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ tal que $0 \leq \xi \leq 1$,

$$\xi(x) = 0 \text{ se } |x| \leq 1 \text{ e } \xi(x) = 1 \text{ se } |x| \geq 2.$$

Sejam $\epsilon > 0$ e $\xi_\epsilon(x) := \xi(x/\epsilon)$ de modo que $\xi_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$. Substituindo ξ_ϵ em lugar de ϕ em $(B.5)$, obtemos:

$$\int |\xi_\epsilon|^2 dw \leq S_2^{-1}\Big(\int |\xi_\epsilon|^2 d\widehat{\mu} + \int |\nabla \xi_\epsilon|^2 \widehat{u}_+^2 dx\Big). \qquad (B.8)$$

É fácil verificar, usando propriedades de ξ_ϵ e o Teorema de Lebesgue, que, quando $\epsilon \to 0$,

$$\int |\xi_\epsilon|^2 dw \to \widehat{\nu}_0, \quad \int |\xi_\epsilon|^2 d\widehat{\mu} \to \widehat{\mu}_0 \ \text{ e } \ \int |\nabla \xi_\epsilon|^2 \widehat{u}_+^2 dx \to 0.$$

Passando ao limite em $(B.8)$ e usando esses três últimos limites, verifica-se que

$$\widehat{\mu}_0 \geq S_2 \widehat{\nu}_0.$$

$\square$

B.5 Exemplo

Uma função que verifica a condição (0.11) é dada por

$$\widehat{f} = \frac{1}{1 + |x|^3}, \quad N = 3.$$

Referências Bibliográficas

[1] B. Abdellaoui, V. Felli & I. Peral, *Existence and nonexistence results for quasilinear elliptic equations involving the p-Laplacian*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) 9 (2006), 445–484.

[2] C. O. Alves, *Existência de solução positiva de equações elípticas não-lineares variacionais em R^N*, Tese de Doutorado, 1996, Universidade de Brasília.

[3] C. O. Alves, J. V. Goncalves & C. A. Santos, *Existence and asymptotic behavior of ground states for quasilinear singular equations involving Hardy-Sobolev exponents*, J. Math. Anal. Appl. 322 (2006), 298-315.

[4] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Func. Anal. 14 (1973), 349-381.

[5] R. B. Assunção, *Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de equações elípticas quase lineares degeneradas*, Tese de Doutorado, 2004, Universidade Federal de Minas Gerais.

[6] R. B. Assunção, P. C. Carrião & O. Miyagaki, *Hiroshi Multiplicity of solutions for critical singular problems*, Appl. Math. Lett. 19 (2006), 741–746.

[7] H. Berestycki, P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations-I: Existence of a ground state*, Arch. Rational Mech. Anal. 82 (1983), 313-345.

[8] G. Bernard, *An inhomogeneous semilinear elliptic equation in entire space*, J. Differential Equations, 125 (1996), 184-214.

[9] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.

[10] H. Brézis, J. M. Coron & L. Nirenberg, *Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz*, Comm. Pure Appl. Math. 33 (1980), 667-689.

[11] H. Brézis & L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), 437–477.

[12] L. Caffarelli, R. Kohn & L. Nirenberg, *First order interpolation inequalities with weights*, Compositio Math. 53 (1984), 259-275.

[13] F. Catrina & Z-Q. Wang, *On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities: sharp constants, existence $(non-existence)$, and symmetry of extremal functions*, Comm. Pure Appl. Math. 54 (2001), 229-258.

[14] W-Y. Ding & W-M. Ni *On the elliptic equation $\Delta u + Ku^{(n+2)/(n-2)} = 0$ and related topics*, Duke Math. J. 52 (1985), 485–506.

[15] M. P. do Carmo & C. Xia *Complete manifolds with non-negative Ricci curvature and the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities*, Compos. Math. 140 (2004), 818–826.

[16] L. Dupaigne, *A nonlinear elliptic PDE with the inverse square potential*, J. Anal. Math. 86 (2002), 359-398.

[17] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974), 324–353.

[18] L. C. Evans, *Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, 1988.

[19] L. C. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, 1998.

[20] C. L. Fefferman, *The uncertainty principle*, Bull. Amer. Math. Soc., 9 (1983), 129-206.

[21] G. B. Folland, *Real analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

[22] N. Ghoussoub & C. Yuan, *Multiple solutions for quasilinear PDE's involving the critical Sobolev and Hardy-Sobolev exponents*, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), 5703-5743.

[23] D. Gilberg & N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[24] J. V. Gonçalves & C. O. Alves, *Existence of positive solutions for m-Laplacian equations in R^N involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal. 32 (1998), 53–70.

[25] N. Hirano, A. Micheletti & A. Pistoia, *Multiple existence of solutions for nonhomogeneous elliptic problem with critical exponent on R^N*, Nonlinear Anal. 65 (2006), 501–513.

[26] H. Hofer, *Variational and topological methods in partially ordered Hilbert spaces*, Math. Ann. 261 (1982), 493–514.

[27] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer-Verlag, Paris, 1993.

[28] T-Y. Lee, *Some limit theorems for super-Brownian motion and semilinear differential equations*, Ann. Probab., 21 (1993), 979-995.

[29] Y. Li & W-M. Ni, *On conformal scalar curvature equations in* R^N, Duke Math. J. 57 (1988), 895–924.

[30] P. L. Lions *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*, Les Presses de l'Université de Montréal, Montreal, 1965.

[31] P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1*, Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1985), 145-201.

[32] A. L. Melo, *Existência, multiplicidade, regularidade e simetria de soluções de equações elípticas quaselineares*, Tese de Doutorado, 2000, Universidade de Brasília.

[33] E. Montefusco, *Lower semicontinuity of functionals via the concentration-compactness principle*, J. Math. Anal. Appl. 263 (2001), 264-276.

[34] X. Pan, *Positive solutions of the elliptic equation* $\Delta u + u^{(n+2)/(n-2)} + K(x)u^q = 0$ *in* R^N *and in balls*, J. Math. Anal. Appl. 172 (1993), 323–338.

[35] I. Peral & J. L. Vázquez, *On the stability or instability of the singular solution of the semilinear heat equation with exponential reaction term*, Arch. Rat. Mech. Anal., 129 (1975), 201-264.

[36] S. I. Pohožaev, *On the eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 165 (1965), 36–39.

[37] D. Smets, *A concentration-compactness lemma with applications to singular eigenvalue problems*, J. Funct. Anal. **167** (1999), 463-480.

[38] G. Stampacchia, *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Les Presses de l'Université de Montréal, Montreal, 1966.

[39] M. Struwe *Variational methods*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[40] G. Tarantello, *On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 9 (1992), 281-304.