

**DETERMINAÇÃO E PROPAGAÇÃO DE TRINCAS EM ESTRUTURAS
AERONÁUTICAS COM REFORÇADORES UTILIZANDO O MÉTODO
DOS ELEMENTOS DE CONTOURNO DUAL E SENSORES
PIEZELÉTRICOS**

SANDRO PETRY LAUREANO LEME

**TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**DETERMINAÇÃO E PROPAGAÇÃO DE TRINCAS EM
ESTRUTURAS AERONÁUTICAS COM REFORÇADORES
UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
DUAL E SENSORES PIEZELÉTRICOS**

SANDRO PETRY LAUREANO LEME

**ORIENTADOR: LUCIANO MENDES BEZERRA, UnB,
CO-ORIENTADORES: PAUL WILLIAM PARTRIDGE, UnB, E
M. H. ALIABADI, IC/UK**

TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

**PUBLICAÇÃO: E.TD – 002A/07
BRASÍLIA/DF: JUNHO – 2007**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**DETERMINAÇÃO E PROPAGAÇÃO DE TRINCAS EM
ESTRUTURAS AERONÁUTICAS COM REFORÇADORES
UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
DUAL E SENSORES PIEZELÉTRICOS**

ENG^O MSc. SANDRO PETRY LAUREANO LEME

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:

**Prof. Luciano Mendes Bezerra, PhD (ENC-UnB)
(Orientador)**

**Prof. William Taylor Matias Silva, Dr. Ing. (ENC-UnB)
(Examinador Interno)**

**Prof. Jorge Luiz de Almeida Ferreira, DSc (ENM-UnB)
(Examinador Interno)**

**Prof. Marcos Aurélio Marques Noronha, DSc (USP)
(Examinador Externo)**

**Prof. Paulo Sollero, PhD (UNICAMP)
(Examinador Externo)**

BRASÍLIA-DF, 22 DE JUNHO DE 2007

FICHA CATALOGRÁFICA

LEME, SANDRO PETRY LAUREANO LEME.

Determinação e Propagação de Trincas em Estruturas Aeronáuticas com Reforçadores Utilizando o Método dos Elementos de Contorno Dual e Sensores Piezelétricos [Distrito Federal] 2007.

xx, 177 (ENC/FT/UnB, Doutor, Estruturas e Construção Civil, 2007).

Tese de Doutorado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1.Métodos Numéricos

2.Método dos Elementos de Contorno

3.Análise Estática e Dinâmica

4.Determinação de trincas e FIT

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

LEME, S. P. L. (2007). Determinação e Propagação de Trincas em Estruturas Aeronáuticas com Reforçadores Utilizando o Método dos Elementos de Contorno Dual e Sensores Piezelétricos. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação. Publicação PECC E.TD-002A/07, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 177p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Sandro Petry Laureano Leme.

TÍTULO: Determinação e Propagação de Trincas em Estruturas Aeronáuticas com Reforçadores Utilizando o Método dos Elementos de Contorno Dual e Sensores Piezelétricos.

GRAU: Doutor

ANO: 2007

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa tese de doutorado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Sandro Petry Laureano Leme

Rua das Garças, 578, Ed. Solar das Garças, Apto 301, Centro.

79.010-020 – Campo Grande – MS – Brasil.

RESUMO

DETERMINAÇÃO E PROPAGAÇÃO DE TRINCAS EM ESTRUTURAS AERONÁUTICAS COM REFORÇADORES UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL E SENSORES PIEZELÉTRICOS

Autor: Sandro Petry Laureano Leme

Orientador: Luciano Mendes Bezerra

Co-orientadores: Paul William Partridge e M. H. Aliabadi

Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, Junho de 2007

Nos equipamentos usados na engenharia aeroespacial, na construção civil e na indústria nuclear, entre outras, as trincas ou os defeitos devem ser analisados com bastante cuidado. Determinada a trinca, existe a possibilidade, com o auxílio da Mecânica da Fratura, de se avaliar a vida útil, ou o número de ciclos de carga, que a estrutura ainda pode suportar com segurança. Por outro lado, as técnicas de ensaio para a determinação precisa de trincas em estruturas podem ser caras, principalmente se a opção for o uso do Raio-X - que é o mais eficiente entre os ensaios não-destrutivos. Algoritmos numérico-computacionais podem ser de grande auxílio para a determinação de trincas e para o cálculo dos parâmetros da Mecânica da Fratura, como o Fator de Intensidade de Tensão, que podem servir de auxílio no estudo da propagação de trincas.

Este trabalho apresenta algumas formulações com aplicações do Método dos Elementos de Contorno para o cálculo do Fator de Intensidade de Tensão e para a determinação da existência de trincas fechadas simples ou múltiplas em chapas. Para determinar trincas, a formulação apresentada associa as respostas do Método dos Elementos de Contorno com a resposta de sensores piezométricos em campos de tensão elásto-estáticos ou elásto-dinâmicos. As aplicações limitam-se a chapas usadas na indústria aeroespacial com ou sem reforçadores. Os algoritmos numérico-computacionais propostos foram implementados em códigos base do Método do Elemento de Contorno e do Método do Elemento de Contorno Dual. Através de uma série de exemplos, estes algoritmos foram testados e revelam-se eficientes tanto para o cálculo do Fator de Intensidade de Tensão bem como para a determinação da presença de trincas em chapas.

ABSTRACT

DETERMINATION AND PROPAGATION OF CRACKS IN AERONAUTICAL STRUCTURES WITH STIFENNERS USING THE DUAL BOUNDARY ELEMENT METHOD AND PIEZOELECTRIC SENSORS

Author: Sandro Petry Laureano Leme

Supervisor: Luciano Mendes Bezerra

Co-supervisors: Paul William Partridge and M. H. Aliabadi

Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, June 2007

In equipments used in the aerospace engineering, in civil construction, and in the nuclear industry, among other, cracks or defects should be analyzed with great care. Once a crack is detected, it is possible, with the help of Fracture Mechanics, to make the evaluation of the crack, and, consequently, to assess the lifetime, or the number of loading cycles, the equipment or structure with the crack can still undertake with safety. On the other hand, the non-destructive techniques for the accurate determination of cracks in structures can be very expensive, mainly if the option chosen is the X-Ray examination, which is the most efficient among the non-destructive tests. Numerical-computational algorithms can be of great assistance in the determination of cracks and in the calculation of the Fracture Mechanics parameters, like the Stress Intensity Factor, employed in the evaluation of the crack propagation.

This work presents several formulations making use of the Boundary Element Methods for the calculation of the Stress Intensity Factor and also for the determination of simple or multiple closed cracks. To detect cracks, the formulation presented associates the answers of the Boundary Element Method with the answers of piezoelectric sensors in elastostatic or elastodynamic stress fields. The formulations presented in this work are limited to stiffened or without stiffener plates which are typically used in the aerospace industry. The numerical-computational algorithms proposed were implemented in basic codes of Boundary Element or Dual Boundary Element Methods. Throughout a series of examples, these algorithms were tested and confirmed to be efficient for the calculation of the Stress Intensity Factor as well as for the determination of the closed cracks in plates.

AGRADECIMENTOS

Ao término deste trabalho, faço um retrospecto e reconhecimento que várias pessoas foram de suma importância para a concretização do mesmo e para as quais quero render meus agradecimentos.

Ao Professor M. H. Aliabadi, Professor eminente do Imperial College, que me recebeu em Londres e me acompanhou durante todo o ano de 2005 e tive em seus trabalhos científicos, orientação necessária para a realização desta Tese de Doutorado.

Um agradecimento especial também ao Professor Luciano Mendes Bezerra, meu orientador e incentivador de todas as horas, que foi de essencial ajuda para a edição final desta tese.

Ao Professor Paul William Partridge pela ajuda principalmente no que diz respeito a minha apresentação ao Prof. Aliabadi e conseqüentemente minha ida à Inglaterra.

Ao Professor Wen, Professor da Universidade Queen Mary, pela ajuda principalmente com a parte dinâmica do desenvolvimento desta Tese.

Ao Imperial College, pela estrutura colocada a minha disposição e pela estrutura humana, representada pelas pessoas que tive convivência durante o ano de 2005.

Ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Brasília, agradecendo o Secretário Pedro, em seu nome agradeço a todos os funcionários.

Aos colegas que pude fazer no período em Londres, citando nome de alguns como Pedro, Silvester, Andrew, Chee Wee, Renata, Alexandre, Cristiano e Lalinka, e muitos outros que também fizeram parte de um ano muito produtivo.

Aos meus amigos e colegas da UnB, em especial ao Bernardo, Magno, Tufic, Marcos, Eduardo, Michele, Ricardo e Heidi.

Finalmente, e não menos importante agradeço a meu Pai, Nilo pela compreensão e incentivo e a minha Mãe, Neca, companheira e crítica da estrutura lingüística dos meus textos. Ao meu irmão, Marco pela companhia e força nas horas difíceis e ao meu filho, Lucas, por ter entendido a ausência do pai.

Agradeço ainda a Capes e ao CNPq pela concessão de bolsas de estudo no exterior e no país respectivamente e a todas as outras pessoas que de certa forma contribuíram para a execução deste trabalho.

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - INTRODUÇÃO	1
1.2 - MOTIVAÇÃO	1
1.3 - OBJETIVOS GERAIS.....	3
1.4 - CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO	4
1.5 - RESUMOS DOS CAPÍTULOS.....	5
2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	7
2.1 - INTRODUÇÃO	7
2.2 - PARÂMETROS DA MECÂNICA DA FRATURA	7
2.3 - DETECÇÃO E PROPAGAÇÃO DE TRINCAS NAS ESTRUTURAS.....	11
3 - CONCEITOS FUNDAMENTAIS.....	15
3.1 - INTRODUÇÃO	15
3.2 - CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MFEL	15
3.2.1 - Estados Planos de Tensão e Deformação - <i>EPT</i> e <i>EPD</i>	18
3.2.2 – Critério de Energia	20
3.2.3 - Fator de Intensidade de Tensão - <i>FIT</i> ou <i>K</i>	23
3.3 - MECÂNICA DA FRATURA ELASTO PLÁSTICA - <i>MFEP</i>	33
3.3.1 – Critério de Energia para a <i>MFEP</i>	35
3.3.2 – Critérios de Avaliação da Trinca na <i>MFEP</i>	37
3.3.2.1 - Primeiro Critério de Dimensionamento da Zona Plástica	38
3.3.2.2 - Segundo Critério de Dimensionamento da Zona Plástica	39
3.3.3 - Parâmetros Empregados na <i>MFEP</i>	40
3.3.3.1 - Integral-J	41
3.3.3.2 - Deslocamento de Abertura da Trinca - <i>Crack Opening Displacement</i> - <i>COD</i>	44
3.4 - MECÂNICA DA FRATURA PARA CARREGAMENTO CÍCLICO	47
3.4.1 - Descrição do Crescimento de Trinca por Fadiga usando <i>K</i>	49
3.5 - DETERMINAÇÃO DA PRESENÇA DE TRINCAS	53
3.5.1 - Análise Modal	55
3.5.2 - Domínio da Frequência.....	56
3.5.3 - Domínio do Tempo	57

3.5.4 - Domínio da Impedância.....	57
3.5.5 - Uso de material Piezoelétrico	58
3.5.6 - Sensores	60
3.6 - <i>MEF</i> , <i>MEC</i> e <i>MECD</i> NA MECÂNICA DA FRATURA	62
3.6.1 - Método dos Elementos Finitos - <i>MEF</i>	63
3.6.2 - Método dos Elementos de Contorno - <i>MEC</i>	66
3.6.3 - Método dos Elementos de Contorno Dual - <i>MECD</i>	70
3.6.4 - Utilização da Transformada de Laplace no <i>MECD</i>	74
3.7 - UTILIZAÇÃO DE ELEMENTOS ESPECIAIS	77
3.7.1 - Elementos Ponto a um Quarto	78
4 - FORMULAÇÃO PARA AS ANÁLISES.....	82
4.1 - DETERMINAÇÃO DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO.....	82
4.1.1 - Para Carregamento Estático (<i>FIT</i>).....	82
4.1.2 - Para Carregamento Dinâmico (<i>FITD</i>)	85
4.2 - DETERMINAÇÃO DA PRESENÇA DA TRINCA POR ANÁLISE ESTÁTICA.....	86
4.2.1 - A Metodologia Adotada para a Análise Estática.....	86
4.2.2 - <i>MECD</i> na Determinação da Presença da Trinca.....	87
4.2.2.1 - Equações dos Sensores.....	90
4.2.2.2 - Modelamento dos Reforçadores, Sensores e Compatibilidade de Deslocamento	92
4.2.2.3 - Efeito Piezoelétrico	96
4.3 - DETERMINAÇÃO DA PRESENÇA DA TRINCA POR ANÁLISE DINÂMICA	97
4.3.1 - A Metodologia Adotada para a Análise Dinâmica	98
4.3.2 - Uso da Transformada de Laplace.....	99
4.3.2.1 - Comportamento das Transformadas das Soluções Fundamentais e suas Integrações.....	105
4.3.3 - Uso do <i>MECD</i> em Chapas com Reforçadores.....	108
4.3.3.1 - Introdução.....	108
4.3.3.2 - Equações Matemáticas para a Vibração de uma Viga Isolada.....	109
4.3.3.3 - Comprovação do Código para Problemas sem Trinca	114
4.3.3.4 - Efeito Piezoelétrico	118

5 - EXEMPLOS NUMÉRICOS	120
5.1 - INTRODUÇÃO	120
5.2 - DETERMINAÇÃO DO <i>FIT</i> E DO <i>FITD</i>	120
5.2.1 - Exemplo 1 – Determinação do <i>FIT</i> para Chapa com Trinca de Canto, Análise Estática.....	120
5.2.2 - Exemplo 2 – Determinação do <i>FIT</i> para Chapa com Duas Trinca de Canto, Análise Estática	122
5.2.3 – Exemplo 3 – Determinação do <i>FIT</i> para Chapa com Trinca de Central, Análise Estática.....	123
5.2.4 – Exemplo 4- Determinação do <i>FITD</i> - Chapa com e sem Reforçadores, Trinca Plana - Análise Dinâmica.....	124
5.2.5 – Exemplo 5 - Determinação do <i>FITD</i> - Chapa com e sem Reforçadores, Trinca Inclinada - Análise Dinâmica	126
5.3 – ANÁLISE ESTÁTICA - DETERMINAÇÃO DE TRINCAS	129
5.3.1 – Exemplo 6 – Detecção Estática da Trinca, Trinca Única.....	129
5.3.2 – Exemplo 7 – Detecção Estática da Trinca, Tamanho de Trinca Crescente	134
5.3.3 – Exemplo 8 – Detecção Estática da Trinca, Propagação da Trinca	136
5.4 – ANÁLISE DINÂMICA – VALIDAÇÃO.....	142
5.4.1 – Exemplo 9 – Chapa com 1 Reforçador – Análise Dinâmica	142
5.4.2 – Exemplo 10 – Chapa com 2 Reforçadores – Análise Dinâmica.....	144
5.4.3 – Exemplo 11 – Chapa com 3 Reforçadores – Análise Dinâmica.....	146
5.5 – ANÁLISE DINÂMICA - DETERMINAÇÃO DE TRINCAS.....	149
5.5.1 – Exemplo 12 – Detecção da Trinca, Trinca Plana – Análise Dinâmica	149
5.4.2 – Exemplo 13 – Detecção da Trinca, Trinca Inclinada – Análise Dinâmica.....	153
6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	156
6.1 - INTRODUÇÃO	156
6.2 - CONCLUSÕES.....	156
6.3 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	159
APÊNDICES.....	161
APÊNDICE A	161
APÊNDICE B	163

APÊNDICE C	164
APÊNDICE D	167
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	168

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 - Propriedades Geométricas e do Material para a Chapa de Alumínio.....	130
Tabela 5.2 - Propriedades Geométricas e do Material para o Sensor de Cerâmica de <i>PZT</i> (<i>PKI-402</i>).....	131
Tabela 5.3 - Propriedades Geométricas e do Material para a Chapa e Reforçador de Aço143	
Tabela 5.4 - Propriedades Geométricas e do Material para a Chapa de Alumínio.....	149
Tabela 5.5 - Propriedades Geométricas e Propriedades do Material para os Sensores de <i>PZT (PKI-402)</i>	149

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Dimensões características para determinação do FCT para um furo elíptico....	7
Figura 2.2 - Fratura frágil em um navio tanque (Callister, 2002)...	9
Figura 3.1 - Modos de Carregamentos Básicos.....	17
Figura 3.2 - Trinca central em uma chapa infinita	19
Figura 3.3 - Diagrama Força – Deslocamento para material linear elástico.	21
Figura 3.4 - Curvas G e R para Estado Plano de Tensão na <i>MFEL</i>	22
Figura 3.5 - Região de plastificação na ponta da trinca para <i>EPT</i> e <i>EPD</i>	29
Figura 3.6 - Distribuição de Tensão na ponta da trinca para: a) <i>EPD</i> e b) <i>EPT</i>	30
Figura 3.7 - Variação do valor de K_I com a espessura	33
Figura 3.8 - Curvas J e J_R para Estado Plano de Tensão na <i>MFEP</i>	37
Figura 3.9 - Esquema da análise de Irwin e dimensionamento da zona plástica.....	39
Figura 3.10 - Esquema da análise de Dugdale	40
Figura 3.11 - Representação da Integral J	42
Figura 3.12 - Diagrama Força – Deslocamento para material não - linear elástico.	43
Figura 3.13 - Representação do cálculo de <i>COD</i>	44
Figura 3.14 - Discretização da trinca para cálculo de K_I usando <i>COD</i> e <i>MEC</i>	46
Figura 3.15 - Curva esquemática do crescimento de trinca por fadiga	51
Figura 3.16 - Curva log-log ($da/dN - \Delta K$) para diferentes valores de $\Delta\sigma$	52
Figura 3.17 - Modelagem do problema de trinca para o uso do MECD	75
Figura 3.18 - Representação Gráfica para a Interpolação das funções de forma quadráticas	79
Figura 3.19 - Interpolação das funções de forma do elemento ponto a um quarto no <i>MEC</i>	81
Figura 4.1 - Sistema de Forças e Deslocamentos Considerados na Análise	92
Figura 4.2 - (a) Forças aplicadas na chapa com reforçadores; (b) Forças e Momentos aplicados sobre os reforçadores.....	110
Figura 5.1 - Exemplo esquemático para trinca de canto e resultados.....	121
Figura 5.2 - Malhas utilizadas para a resolução do Exemplo 1 – a) <i>MEC</i> e b) <i>MEF</i>	122
Figura 5.3 - Exemplo esquemático para duas trincas de canto e resultados.....	123
Figura 5.4 - Exemplo esquemático para trinca de centro e resultados	124
Figura 5.5 - Configuração da chapa na determinação do <i>FITD</i> no modo I.....	125
Figura 5.6 - Valores Normalizados do <i>FITD</i> no modo I para diferente valores de $d/2a$...	126

Figura 5.7 - Configuração da chapa na determinação do <i>FITD</i> no modo I e modo II	127
Figura 5.8 - Valores Normalizados do <i>FITD</i> - modos I e II para diferente valores de $d/2a$	128
Figura 5.9 - Chapa de Alumínio com 4 diferentes posicionamentos dos sensores	130
Figura 5.10 - Resposta dos sensores para diferentes posições na chapa	131
Figura 5.11 - Posicionamentos dos sensores para detecção da trinca	132
Figura 5.12 - Respostas dos sensores para detecção da trinca.....	134
Figura 5.13 – Detecção de diferentes dimensões da trinca.....	135
Figura 5.14 – Respostas dos sensores para detecção da dimensão da trinca.....	136
Figura 5.15 – Chapa de alumínio com reforçadores aparafusados.....	138
Figura 5.16 – Chapa de alumínio com reforçadores e duas trincas simuladas.....	138
Figura 5.17 – Respostas dos sensores na detecção de trincas	139
Figura 5.18 – Caminho da propagação das trincas no painel	140
Figura 5.19 – Comportamento do sinal dos sensores com a propagação das trincas.....	141
Figura 5.20 - Exemplos numéricos para diferentes posicionamentos dos reforçadores dentro da chapa	143
Figura 5.21 - Valores dos deslocamentos ao longo da parte superior da chapa com um reforçador usando os códigos estático e dinâmico.....	144
Figura 5.22 - Exemplos numéricos para diferentes posicionamentos dos reforçadores dentro da chapa	145
Figura 5.23 - Valores dos deslocamentos ao longo da parte superior da chapa com dois reforçadores usando os códigos estático e dinâmico	146
Figura 5.24 - Exemplos numéricos para diferentes posicionamentos dos reforçadores dentro da chapa	147
Figura 5.25 - Valores dos deslocamentos ao longo da parte superior da chapa com três reforçadores usando os códigos estático e dinâmico	148
Figura 5.26 - Chapa de alumínio com dois sensores utilizada nos exemplos numéricos..	150
Figura 5.27 - Sinal de saída dos sensores para chapa sem defeito	151
Figura 5.28 - Chapas de alumínio com trinca reta.....	152
Figura 5.29 - Sinal de saída dos sensores para chapa com e sem trincas retas.....	153
Figura 5.30 - Chapas de alumínio com trinca inclinada.....	154
Figura 5.31 - Sinal de saída dos sensores para chapa com e sem trincas inclinadas.....	154
Figura 5.32 - Sinal de saída dos sensores para chapa com trincas retas e inclinadas.....	155

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES

A	- área do sensor retangular ou matriz para resolução do sistema no <i>MEC</i> ou constante de integração calculadas a partir das condições de contorno para uma viga isolada
$A1$	- posicionamento dos sensores na chapa para detecção da trinca
$A2$	- posicionamento dos sensores na chapa para detecção da trinca
$A3$	- posicionamento dos sensores na chapa para detecção da trinca
$A4$	- posicionamento dos sensores na chapa para detecção da trinca
A_s	- área da seção transversal do sensor
a	- comprimento da trinca ou metade do comprimento ou raio do sensor
a_0	- comprimento de trinca inicial presente na peça
a_c	- máximo comprimento de trinca admissível
a_d	- comprimento de trinca inicial detectável
a_j	- parâmetros nodais no <i>MEF</i>
B	- espessura da chapa ou constante de integração calculadas a partir das condições de contorno para uma viga isolada
b	- altura da trinca ou vetor determinado pelas condições de contorno no <i>MEC</i>
b_j^{Sn}	- forças de corpo sobre os sensores
C	- constante do material, coeficiente da equação de Paris ou constante de integração calculadas a partir das condições de contorno para uma viga isolada
C_a	- capacitância piezométrica
C_{ijlm}	- modulo elástico
COD	- crack opening displacement (abertura da ponta da trinca)
COD_C	- critic crack opening displacement (crítico abertura da ponta da trinca)
COD_{IC}	- <i>COD</i> crítico para o modo I de carregamento (<i>EPD</i>)
$CTOD$	- crack tip opening displacement (abertura da ponta aguda da trinca)
c_1	- velocidade de onda longitudinal
c_2	- velocidade de onda transversal
D	- constante de integração calculadas a partir das condições de contorno para uma viga isolada

D_i	- deslocamento elétrico na direção i
$D_{ijk}(x',x)$	- derivadas das soluções fundamentais de Kelvin para deslocamento
d_{31}	- coeficiente de carga piezoeletrica
da	- variação infinitesimal no comprimento da trinca
da/dN	- relação propagação de trinca por ciclo de carga
ds	- variação infinitesimal no contorno Γ
$d\Gamma$	- variação no contorno utilizado na integração de linha no MEC
$d\Omega$	- variação do domínio do problema no MEC
dx	- distância infinitesimal em x
dy	- distância infinitesimal em y
E	- módulo de elasticidade longitudinal a tração
E_i	- campo elétrico na direção i
$EnDs$	- Ensaio não destrutivo
E_p	- módulo de Young do disco piezoeletrico
EPD	- estado plano de deformação
EPT	- estado plano de tensão
E_s	- módulo de Young do sensor
e_{ijk}	- coeficientes piezoeletricos
F	- trabalho realizado pelas forças externas ou constantes do material
FCT	- fator de concentração de tensão
F_i	- força de corpo na direção i
FIT	- fator de intensidade de tensão
$FITD$	- fator de intensidade de tensão dinâmico
f	- vetor determinado pelas condições de contorno no MEC
$FORTRAN$	- linguagem de programação estruturada
G	- taxa de energia liberada na fratura utilizada na MFEL ou módulo de elasticidade transversal (μ) ou matriz da integral da função fundamental em deslocamento U_{ij} no MEC ou constante de integração calculada a partir das condições de contorno para uma viga isolada
G_{Ad}	- módulo de cisalhamento do adesivo
G_{IC}	- taxa de energia crítica liberada na fratura utilizada na MFEL (EPD)
G_s	- módulo de cisalhamento do sensor

H	- fator de forma utilizado na <i>MFEP</i> ou matriz da integral da função fundamental em tensão T_{ij} no <i>MEC</i> ou constante de integração calculadas a partir das condições de contorno para uma viga isolada
h_{Ad}	- espessura do adesivo
I_s	- segundo momento de inércia da seção transversal do sensor
J	- integral J ou taxa de energia liberada na fratura utilizada na <i>MFEP</i>
J_{el}	- taxa de energia elástica liberada na fratura utilizada na <i>MFEP</i>
J_{IC}	- taxa de energia liberada crítica na fratura utilizada na <i>MFEP</i>
J_{pl}	- taxa de energia plástica liberada na fratura utilizada na <i>MFEP</i>
J_R	- resistência da trinca por unidade de espessura utilizada na <i>MFEP</i>
K	- fator de intensidade de tensão
K_0	- funções Bessel de segundo tipo ordem 0
K_1	- funções Bessel de segundo tipo ordem 1
K_3	- constante dielétrica relativa
K_I	- fator de intensidade de tensão para o modo I
K_{IC}	- fator de intensidade crítico de tensão para o modo I (<i>EPD</i>)
K_{II}	- fator de intensidade de tensão para o modo II
K_{III}	- fator de intensidade de tensão para o modo III
K_{max}	- fator de intensidade de tensão máximo
K_{min}	- fator de intensidade de tensão mínimo
k	- constante que usada para situações de <i>EPT</i> e <i>EPD</i>
\vec{K}	- matriz de rigidez no <i>MEF</i>
L	- comprimento do elemento
$\ell [f(x, \tau)]$	- transformada de Laplace da função f
M	- número de elementos no domínio no <i>MEC</i>
<i>MDF</i>	- método das diferenças finitas
<i>MEC</i>	- métodos dos elementos de contorno
<i>MECD</i>	- métodos dos elementos de contorno dual
<i>MECD-I_{est}</i>	- código computacional em <i>MECD</i> para análise estática
<i>MECD-II_{est}</i>	- código computacional em <i>MECD</i> para a determinação da trinca na análise estática
<i>MECD-IV_{din}</i>	- código computacional em <i>MECD</i> na análise dinâmica utilizando a transformada de Laplace

$MECD-V_{din}$	- código computacional em $MECD$ para a determinação da trinca na análise dinâmica para chapas com reforçadores utilizando a transformada de Laplace
$MEC-I_{est}$	- código computacional em MEC na análise estática
$MEC-II_{din}$	- código computacional em MEC na análise dinâmica
MEF	- método dos elementos finitos
$MFEL$	- Mecânica da Fratura Elástica Linear
$MFEP$	- Mecânica da Fratura Elasto - Plástica
$MSEM$	- micro sistemas elétrico mecânico
m	- constante do material, coeficiente da equação de Paris ou número de nós em cada elemento no MEF
N	- número de ciclos, vida da peça
NE	- número de elementos no contorno no MEC
n	- constantes do material ou número de elementos no MEF
n_i	- vetor normal nas direções x e y ou normal externa ao contorno da peça
$\bar{O}(x)$	- funções de ordem
P	- carregamento
p	- tensões no contorno no MEC
\vec{p}	- vetor de cargas nodais no MEF
Q	- carga do corpo
R	- resistência da trinca por unidade de espessura utilizada na $MFEL$ ou razão de tensão
r	- distância radial da ponta da trinca ou distância entre ponto fonte e ponto campo no MEC
S	- jacobiano
SIF	- stress intensity factor (K)
$S_{ijk}(x',x)$	- derivadas das soluções fundamentais de Kelvin para tração
s	- variável no domínio da transformada de Laplace
T	- vetor de tração de superfície
$T_{ij}(x',x)$	- soluções fundamentais de Kelvin para tração
U	- energia total do sistema
U_0	- energia elástica da chapa sem trinca
U_a	- energia elástica causada pela introdução da trinca

U_γ	- energia de superfície causada pela formação das superfícies da trinca
$U_{ij}(x',x)$	- soluções fundamentais de Kelvin para deslocamento
u	- deslocamento ou deslocamentos no contorno no <i>MEC</i>
u_1	- deslocamento na direção x
u_2	- deslocamento na direção y
\vec{u}	- vetor dos deslocamentos nodais no <i>MEF</i>
$\bar{u}_i(x,s)$	- componente da transformada do deslocamento no ponto x
$\bar{u}^{(\alpha)}(\theta)$	- funções adimensionais de deslocamento de ângulo polar
V	- energia potencial
V_0	- valor de referência de voltagem de saída, igual a 1 V.
V_{out}	- voltagem de saída do sensor
v	- deslocamento
$v_j(0)$	- translações de corpo rígido
W	- largura da chapa ou densidade de energia de deformação
w	- função aproximadora no <i>MEF</i>
w_{Ad}	- largura do adesivo
x	- índice que indica a direção ou vetor de incógnitas no <i>MEC</i>
y	- índice que indica a direção ou vetor de incógnitas para o método da diferenciação implícita no <i>MEC</i>
z	- índice que indica a direção

Letras Gregas

α	- constante que usada para situações de <i>EPT</i> e <i>EPD</i>
β	- fator de forma utilizado na <i>MFEL</i>
Γ	- contorno utilizado na integração de linha
γ_{ij}	- tensor deformação
ΔK	- variação do fator de intensidade de tensão
$\Delta K_{\eta\tau}$	- fator limite de intensidade de tensão (thresrold)
$\Delta\alpha$	- variação no comprimento da trinca
$\Delta\sigma$	- intervalo de tensão normal
$\Delta\sigma$	- intervalo de tensão normal

$\Delta\sigma_H$	- alto valor de intervalo de tensão normal
$\Delta\sigma_A$	- baixo valor de intervalo de tensão normal
δ	- delta de Kronecker
ε	- deformação
ε_{ij}	- constantes dielétricas
η	- coordenadas naturais de elementos no <i>MEF</i> para problemas 2D.
θ	- ângulo entre ponto de interesse e eixo x
λ	- constante de Lamé
μ	- constante de Lamé = módulo de elasticidade transversal = <i>G</i>
ν_p	- coeficiente de Poisson do disco piezolétrico
ν	- coeficiente de Poisson
ξ	- coordenadas naturais de elementos no <i>MEC</i> e <i>MEF</i>
Π	- funcional para o domínio no <i>MEF</i>
ρ	- raio de curvatura da trinca
σ	- tensão normal
σ_1	- tensão principal na direção <i>x</i>
σ_2	- tensão principal na direção <i>y</i>
σ_3	tensão principal na direção <i>z</i>
σ_α	- tensão normal alternada
σ_X	- tensão normal crítica de propagação de trinca
$\sigma_{\rho\phi}$	- tensão normal de fratura
$\sigma_{\phi_i}(\theta)$	- funções adimensionais de tensão de ângulo polar
σ_μ	- tensão normal média
$\sigma_{\xi\alpha\mu}$	- tensão normal máxima
$\sigma_{\nu\mu}$	- tensão normal mínima
$\sigma_{\sigma\psi}$	- tensão de escoamento do material
τ	- tensão cisalhante ou variável de tempo no domínio real
Φ	- coeficiente de deformação cisalhante do adesivo
ϕ_φ	- funções de forma no <i>MEF</i>
ϕ_φ	- funções de forma no <i>MEC</i>
χ	- funções para calculo das soluções fundamentais dinâmicas
$\chi(0)$	- rotações de corpo rígido

- ψ - funções para cálculo das soluções fundamentais dinâmicas
- Ω - domínio do problema no *MEC*
- ∂ - derivada

1 - INTRODUÇÃO

1.1 – INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta as motivações deste trabalho, situa o tema na perspectiva econômica e tecnológica, mostra a importância do conhecimento de técnicas para o diagnóstico da presença de trincas e também de métodos para o monitoramento destas trincas via parâmetros da Mecânica da Fratura. Este capítulo expõe ainda os objetivos gerais da pesquisa bem como resume as etapas importantes que foram elaboradas ao longo do desenvolvimento do trabalho apontando, em linhas gerais, as principais contribuições e originalidades deste trabalho. Por fim, o capítulo descreve, de forma resumida, o conteúdo que o leitor encontra no desenrolar da leitura desta Tese.

1.2 – MOTIVAÇÃO

O emprego da Mecânica da Fratura na engenharia tem importância fundamental no dimensionamento e no monitoramento de estruturas sujeitas ao aparecimento de trincas sob carregamentos monotônicos e cíclicos. Setores como as indústrias nucleares, indústrias petroquímicas, aviação, usinas hidrelétricas e termoeletricas são, entre outros, os maiores interessados na determinação e no controle da propagação de trincas em equipamentos, vasos de pressão, tubulações, fuselagens, entre outros. (Pastoukhov e Voorwald, 1995; Broek, 2004; Anderson, 2004). O interesse e o investimento em pesquisa de setores estratégicos para a economia dos países desenvolvidos e em desenvolvimento têm ocasionado um crescente acúmulo de técnicas para a determinação de falhas em estruturas. Muitas são as técnicas destrutivas e não-destrutivas para se conhecer trincas e defeitos em estruturas e muitos são os procedimentos que podem, via parâmetros adequados, prever o comportamento das trincas detectadas. Tais procedimentos podem avaliar a instabilidade ou não de trincas bem como o tempo de vida que um determinado equipamento, ainda que com uma trinca, pode dispor quando sob transientes de carga de serviço. Dentro deste contexto, o emprego de sensores para o diagnóstico, a determinação e o monitoramento de defeitos ou trincas em peças (Tanaka e Masuda, 1986; Bezerra e Saigal, 1991; Pollard e Kassab, 1992; Aliabadi e Mellings, 1997) tem ganho interesse de alguns pesquisadores e

instituições de pesquisa.

A existência de fraturas em estruturas ocasiona um custo que ainda não é conhecido no Brasil. Nos Estados Unidos, entretanto, conforme Saouma (2000), o custo da presença de fraturas ou trincas nos materiais, insumo da indústria, é de aproximadamente 120 bilhões de dólares por ano, ou estimado em 4 % do produto nacional bruto dos EUA em 2000. Na mesma referência, afirma-se ainda que seria possível reduzir os gastos em torno de 35 bilhões apenas utilizando as tecnologias já disponíveis e mais 28 bilhões poderiam ser economizados caso novas pesquisas fossem realizadas na prevenção dos efeitos danosos das trincas. Tomando por base estes valores, pode-se perceber a importância e o interesse que o assunto desperta na comunidade internacional (Saouma, 2000).

O ramo das ciências mecânicas que trata das tensões nas proximidades de uma fratura e examina a estabilidade e a propagação da fratura é a Mecânica da Fratura. Dentro da Mecânica da Fratura podemos destacar dois campos distintos para tratamento do problema da propagação de trincas: a Mecânica da Fratura Elástica Linear (*MFEL*) e a Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (*MFEP*). Devido a maior simplicidade e ao maior número de trabalhos relacionados à *MFEL*, esta é frequentemente mais abordada e preferida para o tratamento dos problemas encontrados na prática, embora apresentem limitações que podem impossibilitar o seu uso. A aplicabilidade da *MFEP* está nos problemas onde a deformação plástica não pode ser ignorada. Para o caso onde as estruturas estão sujeitas a cargas alternadas ou cíclicas pode haver ainda o risco de fratura por fadiga que pode ser estudado pela *MFEL* ou pela *MFEP*, dependendo do comportamento do material e do nível de tensões e deformações (Maneschy, 1998; Cruz, 1998). Este trabalho se desenvolve mais no campo da *MFEL* embora alguns conceitos da *MFEP* sejam também adotados como técnicas auxiliares.

Com o contínuo desenvolvimento dos computadores e com a aplicação de Métodos Numéricos para a resolução dos problemas, ocorreu uma melhora considerável na precisão dos cálculos dos parâmetros utilizados para a caracterização das trincas na Mecânica da Fratura. Parâmetros como o Fator de Intensidade de Tensão (*FIT* ou *K*), *Crack Opening Displacement (COD)* e a Integral-J tornaram-se facilmente calculáveis com a aplicação, por exemplo, do Método dos Elementos Finitos (*MEF*) e posteriormente do Método dos Elementos de Contorno (*MEC*), entre outros métodos. A detecção de trincas no material e a possibilidade de se estudar a propagação da mesma sob esforços de serviço, tem sido uma aspiração constante na engenharia e o uso de Métodos Numéricos para eliminar (ou

diminuir) a necessidade de complexos ensaios experimentais, que geralmente são custosos (Kubo, 1988; Bezerra, 1993) tem ganho foco nas pesquisas. Nota-se que a detecção de trincas, normalmente, é realizada por meios de ensaios experimentais. A detecção numérico-computacional de falhas (abertas ou fechadas) em estruturas é um tópico, portanto, atual (Rus e Galego, 2007) e de grande interesse na Mecânica da Fratura (Kubo, 1988), seja em estruturas civis, equipamentos mecânicos, bem como de modo especial, em estruturas aeronáuticas (Banks e Kojima, 1988). Em Mecânica Experimental, existem diversas técnicas para ensaios não-destrutivos de peças (Hull e John, 1988; Halmshaw, 1987), mas poucos são os ensaios – i.e. o Ultra-som e o Raio-X - que conseguem efetivamente detectar a posição e as dimensões de trincas superficiais ou subsuperficiais. O emprego de materiais piezelétricos, como sensores para a detecção e propagação de trinca, vem ao encontro desta aspiração quando utilizado em conjunto com Métodos Numéricos eficientes. As respostas indicadas na saída desses sensores podem ser avaliadas para a detecção e propagação de trincas sem a necessidade de execução de complexos ensaios experimentais.

1.3 – OBJETIVOS GERAIS

Este trabalho tem como objetivo apresentar simulações numéricas para a obtenção de certos parâmetros da Mecânica da Fratura que podem, eventualmente, ser usados no estudo da propagação de trincas em estruturas, trincas estas que podem ter forma geométrica qualquer, portanto, diferente dos padrões analíticos padronizados nos manuais de Mecânica da Fratura.

Também são aqui apresentadas formulações numéricas com o objetivo de determinar a presença de trinca em estruturas metálicas aeronáuticas típicas, com e sem reforçadores. As formulações apresentadas, com diferentes graus de complexidade, são adequadas para estruturas sob esforços estáticos bem como dinâmicos. Aqui são apresentadas as formulações para a determinação de trincas sob carregamentos estáticos e dinâmicos.

Recentemente, tem havido um grande interesse na aplicação de algoritmos numéricos e computacionais para a detecção de trincas em estruturas e para a previsão do comportamento destas trincas. Tais algoritmos podem vir a ser de extraordinário auxílio para o diagnóstico e o monitoramento de trincas em estruturas, em particular na engenharia

aeroespacial, mecânica e nuclear. A análise numérica pode vir a baratear em muito os custos para ensaios não-destrutivos de defeitos, reduzindo a necessidade de muitos ensaios em locais onde o modelo numérico pode proporcionar resultados satisfatórios (Bezerra e Saigal, 1993 e 1994). Acredita-se que este trabalho apresente uma contribuição neste sentido e desta forma, aqui, são propostos algoritmos numérico-computacionais para a detecção de trincas com inovação na metodologia de detecção, e são apresentados métodos numéricos para o cálculo de parâmetros da Mecânica da Fratura que podem servir para o diagnóstico do comportamento da trinca. O objetivo maior deste trabalho é a implementação de métodos numéricos que demonstrem que é factível calcular de forma adequada e precisa (a) os parâmetros para o monitoramento de uma trinca e (b) detectar a trinca em painéis que, com e sem reforçadores, são bastante usados em estruturas aeronáuticas. Não há, neste trabalho, a preocupação na criação de um programa computacional único que sirva tanto para a detecção de trincas bem como para o cálculo dos parâmetros da Mecânica da Fratura relacionados à trinca detectada.

Como métodos numéricos adotados nesta Tese, utilizou-se o Método dos Elementos de Contorno (*MEC*) e o Método dos Elementos de Contorno Dual (*MECD*) em associação ao uso de sensores piezelétricos. Este último método mostra-se muito adequado para a análise numérica de peças com trincas e os motivos desta escolha serão explicitados ao longo do trabalho. É crescente o emprego de sensores de materiais piezelétricos na detecção e monitoramento de trincas em estruturas. Este fato mostra-se também relevante para o emprego destes materiais em conjunto com as técnicas numéricas escolhidas. O trabalho também objetiva fazer análises estáticas e dinâmicas para detecção de trincas e dos parâmetros da Mecânica da Fratura. Para a análise estática o emprego do *MECD* e a formulação do efeito piezelétrico para os sensores são suficientes para se alcançar resultados satisfatórios tanto para a detecção de trinca quanto para sua propagação. Para a análise dinâmica é necessária a utilização da técnica da Transformada de Laplace no *MECD* para se obter resultados satisfatórios.

1.4 – CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho alguns pontos foram estudados e implementados de forma original: (a) Para determinação do Fator de Intensidade de Tensão

estático, utilizando a derivação implícita das soluções fundamentais de Kelvin de um código base do *MEC* e dentro do algoritmo numérico para o cálculo da Integral-J. Isto foi feito de forma exata e não de forma aproximada pelo método das diferenças finitas como em alguns trabalhos encontrados na literatura. (b) Para a detecção de trincas sob carga estática o código computacional base do trabalho utiliza o *MECD* e teve toda a parte correspondente aos sensores piezelétricos implementada. Esta união, entre a parte numérica do *MECD* para carga estática e a parte de simulação do efeito piezelétrico, não havia sido realizada em pesquisas anteriores correlatas à determinação de trincas. As respostas encontradas tanto para a detecção da trinca como para a propagação da mesma deixam claras a viabilidade da formulação aqui proposta. (c) Para a situação de carregamentos dinâmicos, o código computacional *MECD* ainda não tinha a parte de análise dinâmica implementada correspondente aos reforçadores internos. Executa-se ainda a implementação numérica para a análise da presença da trinca e do Fator de Intensidade de Tensão dinâmico além do efeito piezelétrico para a captação do sinal utilizado para a detecção da trinca. Esta trinca, graças à formulação do *MECD*, pode, neste trabalho, ser reta ou curva ou mesmo se ter no painel múltiplas trincas, e pode ser considerada fechada.

1.5 – RESUMO DOS CAPÍTULOS

Este documento está dividido em seis capítulos. O primeiro capítulo apresenta uma introdução ao assunto, a motivação para a realização do trabalho, os objetivos maiores perseguidos neste trabalho, os principais pontos de contribuição e originalidade do trabalho e finalmente traz a descrição resumida do conteúdo de cada capítulo da Tese.

O segundo capítulo resume a revisão bibliográfica realizada, dividindo-a em duas partes. Uma parte referente aos parâmetros da Mecânica da Fratura e a outra a determinação de trincas. O capítulo tem início com os parâmetros da Mecânica da Fratura e em seguida descreve as principais contribuições para o cálculo numérico destes parâmetros. A segunda parte se refere às metodologias para a determinação da presença de trincas em estruturas. Esta determinação pode ser realizada com sensores e com a ajuda das análises estáticas e dinâmicas.

O terceiro capítulo apresenta os conceitos fundamentais da Mecânica da Fratura que servem para alicerçar os métodos numéricos usados na obtenção dos parâmetros da

MFEL ou da *MFEP*, para carregamentos estáticos e dinâmicos ou cíclicos. Apresenta também as avaliações que podem ser feitas para o estabelecimento de estabilidade ou não da trinca. O capítulo ainda aborda os algoritmos de detecção de trincas sob carregamentos estáticos ou dinâmicos em estruturas e com a utilização de sensores piezelétricos. Por fim, este capítulo, resume os princípios dos principais métodos numéricos, Elementos Finitos e Elementos de Contorno, com ênfase no *MECD* e ainda, explicita a técnica do elemento ponto a um quarto que propicia simular singularidade na ponta da trinca.

O quarto capítulo proporciona a exposição da formulação matemática desenvolvida neste trabalho. Inicia-se com a formulação que objetiva o cálculo dos parâmetros da Mecânica da Fratura para carregamento estático e dinâmico. Mostra a diferenciação implícita dos *kernels* do *MEC* e como ela é usada no cálculo dos parâmetros da Mecânica da Fratura. Em seguida, abordam-se as formulações, estática e dinâmica, para a determinação da presença de trinca na estrutura juntamente com a compatibilidade das equações que descrevem os sensores piezelétricos e como estes podem ser usados para a determinação da trinca de forma estática e dinâmica de carregamento.

O quinto capítulo apresenta diversos exemplos mostrando a aplicação das formulações numérico-computacionais desenvolvidas no capítulo precedente. Inicialmente, são mostrados os resultados da obtenção dos Fatores de Intensidade de Tensão sob carregamento estático e em seguida sob carregamento dinâmico. Posteriormente, outros exemplos mostram a determinação da presença de trincas em painéis tipicamente usados em estruturas aeroespaciais com e sem reforçadores. As trincas nos painéis são determinadas com simuladores de sensores piezelétricos e sob carregamentos estáticos e dinâmicos. Cada exemplo é discutido e comparado com resultados de outros métodos, apontando para algumas conclusões.

No sexto e último capítulo são apresentadas as conclusões deste trabalho e as sugestões para trabalhos futuros. Resume-se como cada parte foi desenvolvida e as conclusões que podem ser retiradas dos resultados. As sugestões que se apresentam ao final deste capítulo apontam tarefas que podem ser executadas com o intuito de completar, melhorar e integrar as diversas formulações aqui desenvolvidas e apresentadas.

2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo, são relatados de forma sucinta os principais trabalhos pesquisados para o desenvolvimento desta Tese, bem como os principais problemas encontrados na revisão bibliográfica. Por uma questão cronológica de desenvolvimento e amadurecimento da Tese, inicia-se pela revisão sobre os parâmetros da Mecânica da Fratura, mais especificamente pelo Fator de Intensidade de Tensão, posteriormente são apresentados os trabalhos que foram revisados para a determinação de trincas.

2.2 – PARÂMETROS DA MECÂNICA DA FRATURA

Em 1898, um engenheiro alemão de nome Kirsch mostrou que um fator de concentração de tensão igual a 3 (três) acontece quando uma chapa infinita com um furo circular é sujeita a tensão de tração uniforme (Timoshenko e Goodier, 1980). Em 1913, Inglis durante investigação de defeitos inesperados em navios, estendeu a solução das tensões em volta de um orifício circular para o caso mais geral de uma elipse. Nota-se que este problema foi resolvido três anos antes por Kolossoff (mentor de Muschelisvili) em St. Petersburg. Entretanto, apenas Inglis é lembrado quando se fala em Fator de Concentração de Tensão (*FCT*). De acordo com a Figura 2.1 - tendo presente que a é a metade do comprimento do eixo maior da trinca elipsoidal, b é a metade do menor eixo, $\rho = b^2/a$ corresponde ao raio de curvatura (Saouma 2000) - Inglis demonstrou a Equação (2.1) do *FCT* para uma chapa infinita com trinca elipsoidal como mostrada na Figura 2.1.

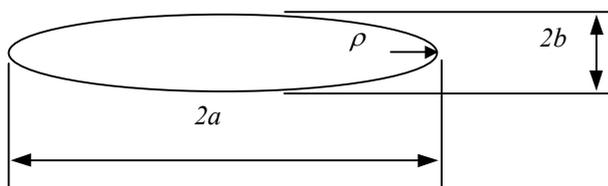


Figura 2.1 – Dimensões características para determinação do *FCT* para um furo elíptico.

$$FCT = 1 + 2 \sqrt{\left(\frac{a}{\rho}\right)} \quad (2.1)$$

Seguindo o trabalho de Inglis, Griffith contribuiu muito para o desenvolvimento da Mecânica da Fratura. Sua primeira grande contribuição foi a sugestão de que falhas internas agiriam como intensificadores de tensão, afetando, fortemente, as resistências dos sólidos. A segunda grande contribuição foi na formulação do critério termodinâmico para a fratura. Este critério considera a mudança total na energia que acontece durante o processo de fratura. Durante a extensão da trinca, a energia potencial (tanto devido ao trabalho externo aplicado quanto a deformação interna) é liberada e transferida na forma de energia superficial (Broek, 1989).

Após o trabalho de Griffith, a Mecânica da Fratura permaneceu relativamente inalterada por aproximadamente vinte anos. Em 1939, Westergaard formulou a expressão para o campo de tensão perto da ponta da trinca (Broek, 1984). Até então, a Mecânica da Fratura ainda era, relativamente, uma ciência obscura e puramente empírica, entretanto, mais do que qualquer outro fator, um grande número de fraturas catastróficas e repentinas que ocorreram durante e logo após a Segunda Guerra Mundial motivaram um desenvolvimento impetuoso da Mecânica da Fratura. De aproximadamente 5.000 navios construídos com o uso de soldas durante a guerra, mais de 1.000 sofreram danos estruturais, com 150 sendo gravemente avariados e 10 separados totalmente em duas partes. A Figura 2.2 ilustra um destes fatos ocorridos (Callister, 2002).

Depois da guerra, George Irwin, que estava no laboratório de pesquisa naval nos EUA, fez uso da idéia de Griffith, e assim propôs os fundamentos da Mecânica da Fratura (Saouma, 2000). Ele fez três grandes contribuições:

1. Estendeu a teoria de Griffith para metais pela consideração da deformação na ponta da trinca. Isto resultou na que as vezes é chamada de Teoria de Griffith Modificada.
2. Alterou a solução geral de Westergaard pela introdução do conceito do Fator de Intensidade de Tensão (*FIT*) (em inglês, *SIF*, *Stress Intensity Factor*), posteriormente chamado de *K*.
3. Verificou e comprovou o conceito da taxa de energia liberada *G*. Este conceito será esclarecido na subseção 3.2.2 – Critério de Energia.



Figura 2.2 – Fratura frágil em um navio tanque (Callister, 2002).

Demonstrações de equivalência entre K e G foram a base para o aparecimento da *MFEL*. Isto foi possível porque a forma da distribuição de tensão ao redor e perto da ponta da trinca é sempre igual (Ewalds e Wanhill, 1984). O crescimento subcrítico da trinca foi, então, estudado. Esta forma de propagação de trinca acontece pela aplicação de carregamento cíclico (fadiga cíclica) ou pela existência de ambiente corrosivo em contato com uma trinca. Em ambos os casos, o comprimento original da trinca e as condições de carregamento estão abaixo dos valores críticos para a ruptura catastrófica. Em 1961, Paris propôs a primeira equação empírica relacionando a faixa do Fator de Intensidade de Tensão com a taxa de crescimento da trinca (Broek, 1984).

Considerações não-lineares foram propostas por Wells e Rice. Em 1963, Wells utilizou o deslocamento da abertura da trinca, posteriormente conhecido como *COD* (*Crack Opening Displacement*) como parâmetro que caracteriza a resistência à trinca em sólidos elasto-plásticos. Em 1968, Rice (1968) introduziu o conceito da Integral-J cujo artigo é, provavelmente, o mais referenciado após o trabalho de Griffith. Esse artigo introduziu uma integral de linha de contorno independente do caminho, que é a taxa de mudança de energia potencial para um sólido elástico não-linear durante a extensão unitária da trinca (Broek, 1989).

Outra grande contribuição foi feita por Erdogan e Sih (Broek, 1989) em meados dos anos 60, quando introduziram o primeiro modelo de propagação de trinca para modo misto. Grandes contribuições, em muito maior número, aconteceram com a introdução dos Métodos Numéricos para a análise de estruturas trincadas (Saouma, 2000).

Devido a sua aplicabilidade para domínios matemáticos de forma geométrica qualquer, fugindo das clássicas configurações perfeitamente lineares das trincas idealizadas pelos pioneiros da mecânica da fratura (Broek, 1989); nas últimas décadas, os métodos numéricos têm tido larga aplicação na Mecânica da Fratura (Anderson, 1995), principalmente, o *MEF* e o *MEC*. Uma nova área, a da “Mecânica da Fratura Computacional”, tem se desenvolvido e é atualmente utilizada para o cálculo do *FIT* e para simular a propagação de trincas em diversos materiais (concreto, aço) (Bittencourt, 1993).

Um grande problema encontrado pelos métodos numérico-computacionais para o cálculo preciso do *FIT* é a simulação das singularidades na ponta da trinca prevista pela teoria matemática clássica. Este assunto, entretanto, ganhou destaque com os trabalhos de Barson (1976) e Blandford, Ingraffea e Liggett (1981), respectivamente, aplicados ao *MEF* e ao *MEC*. Estes autores propuseram deslocamento do nó da posição central do elemento quadrático para a posição de um quarto da distância total do elemento, com o intuito de simular a singularidade proposta pela teoria matemática da Mecânica da Fratura. Este deslocamento garante que o comportamento das funções de forma de deslocamento se aproxime do comportamento matemático previsto pela teoria matemática da Mecânica da Fratura. Este assunto será esclarecido no capítulo 3.

Dentre os métodos numéricos mais utilizados na mecânica da fratura, o *MEF* tem tido a preferência dos pesquisadores (Bittencourt, 1993; Cavalcanti, 1997; Shang, Meinhard e Abendroth, 2003). Entretanto, recentemente, outros métodos sem necessidade da discretização de todo o domínio do objeto em estudo, como o *MEC* e o *MECD*, têm merecido, também, maior atenção por parte da comunidade científica (Cruse, 1988; Aliabadi, 1997a, 1997b; Medeiros, 2000; Wessel et al., 2001; P. Fedelinski, 2004; Sanz, Ariza, Domínguez; 2005), tendo em vista a precisão numérica, dentre outras vantagens, para a representação singular das tensões na ponta da trinca. Outras vantagens do uso do *MEC* e do *MECD* em problemas da mecânica da fratura, serão apontadas no capítulo 3.

Dentre as técnicas utilizadas em conjunto com o *MEF* ou o *MEC* para a determinação do *FIT*, pode-se citar a técnica de extrapolação de deslocamentos, a técnica da variação da energia potencial e a técnica da Integral-J (Watwood, 1969). As duas

primeiras apresentam aproximações matemáticas que em alguns casos podem ser limitantes para se conseguir a precisão requerida no problema. Dentre estas técnicas, a que se mostra com maior precisão é a da Integral-J. Entretanto, esta técnica tem encontrado dificuldades quando da sua implementação numérica, pois envolve derivadas de deslocamento (ver definição da Integral-J no próximo capítulo) que nem sempre são fáceis de se obter, principalmente, no âmbito do *MEC* e do *MECD* pois estes métodos, apesar da precisão, usam funções não muito bem comportadas e de difícil integração numérica. Este mau comportamento destas funções deve-se às singularidades que surgem nas soluções fundamentais (ver próximo capítulo) e que se transformam em singularidades de ordem mais elevada quando as derivadas destas funções são usadas na Integral-J.

Portanto, esta pesquisa se insere na tendência atual do estudo dos parâmetros da Mecânica da Fratura - como o Fator de Intensidade de Tensão – com o uso de técnicas do *MEC* e *MECD*. Cabe ainda mencionar que determinada uma trinca, pode-se, com o auxílio dos parâmetros da Mecânica da Fratura, estudar a sua estabilidade ou a sua propagação.

Entretanto, ressalta-se que determinar uma trinca pode não ser uma tarefa fácil, principalmente, em se tratando de trincas microscópicas e/ou subsuperficiais e que é o outro tema objeto deste trabalho - conforme especificado nos objetivos do capítulo 1. Este tema, por sinal, este ainda pouco pesquisado por ser de difícil formulação matemática e constituir uma classe de problemas ainda pouco explorados na engenharia, que são os problemas inversos – ou matematicamente mal-postulados (Tanaka e Masuda, 1986; Bezerra, 1995).

2.3 – DETECÇÃO E PROPAGAÇÃO DE TRINCAS NAS ESTRUTURAS

Na prática, estruturas civis e mecânicas, componentes de equipamentos e máquinas e estruturas aeroespaciais, entre outras, são freqüentemente testadas para se identificar possíveis trincas ou falhas geradas durante processo de fabricação ou surgidas a partir da nucleação e crescimento de trincas durante o processo de fadiga por fratura. Para se determinar uma trinca numa estrutura, existem diversos métodos; entre eles os métodos destrutivos e os não-destrutivos. Os métodos destrutivos, como o nome sugere, destroem o objeto para averiguar a existência da trinca, impossibilitando com isso um prosseguimento do estudo sobre o objeto inicialmente verificado. Os não-destrutivos, pelo contrário,

detectam a trinca sem que o objeto seja destruído. Uma trinca superficial grande pode, geralmente, ser determinada sem a destruição da peça e com um simples exame visual. Entretanto, a maioria das trincas é geralmente de pequeno porte e subsuperficial. Em Mecânica Experimental, existem diversas técnicas para ensaios não-destrutivos (*EnDs*) de peças e estruturas (Hull e John, 1988; Halmshaw, 1987) tais como: a) Inspeção visual; b) Líquido Penetrante; c) Partículas Magnéticas; d) Corrente de Eddy; e) Ultra-som; e f) Raio-X, dentre outros (Balas, Sladek e Drzik, 1983; Weathers et al. 1985). Destes *EnDs*, somente o Ultra-som e, com maior precisão, o Raio-X conseguem detectar trincas subsuperficiais com precisão na determinação da localização e das dimensões da trinca. Entretanto, estes *EnDs* são custosos em termos financeiros e de tempo, e portanto, seria de muito interesse para a engenharia, o desenvolvimento de numa técnica confiável de, pelo menos, restringir a região necessária (Bezerra e Saigal, 1994; Bezerra, 1995) para a aplicação dos *EnDs* caros. A localização segura e precisa do tamanho da falha e da localização da mesma pode ser usada para a projeção da vida útil do componente analisado e pode eliminar desperdícios desnecessários (Aliabadi e Melling, 1997).

Nos anos mais recentes tem havido um grande interesse da comunidade de engenheiros que trabalham na área da mecânica computacional para desenvolver algoritmos efetivos para a determinação de defeitos ou trincas em estruturas e objetos. Este recente interesse deve-se, sobretudo, a facilidade computacional nos ambientes de trabalho; mais memória e mais velocidade de processamento a custos menores.

Os métodos numérico-computacionais para detecção de falhas internas podem auxiliar no monitoramento e no diagnóstico de trincas em estruturas e objetos (Ingham e Wrobel, 1997). Geralmente, na maioria destes métodos numérico-computacionais, um campo (eletromagnético, de ultra-som, Raio-x ou eletrostático), é aplicado ao componente e as respostas são medidas em vários pontos através de sensores. A presença da falha ou trinca ocasiona uma distorção no campo medido, distorção esta que pode ser usada para se estimar o tamanho e a posição da trinca ou falha (Aliabadi e Mellings, 1997).

Uma destas metodologias numérico-computacionais já bastante usadas em anos mais recentes é conhecida como técnica da análise inversa. De fato, este método de identificação de falha é um problema de identificação de forma (identificação de domínio matemático) que também pode ser formulado como um problema de otimização (Ingham e Wrobel, 1997). Problemas deste tipo são também, freqüentemente, usados em projetos de otimização de forma de estruturas. Aqui, e em vez de se buscar a forma de um defeito no

interior do objeto, acha-se a forma ideal (segundo certas funções objetivo) para a estrutura (Vanderplaats, 1981; Friefman e Vogelius, 1989; Bryan e Vogelius, 1992) suportar determinadas solicitações.

A aplicação do Método dos Elementos de Contorno para a identificação de trincas abertas (também denominadas de cavidades) tem sido reportada na literatura por diversos autores: Tanaka e Masuda (1986), Zabarás, Morellas e Schnur (1989), Bezerra e Saigal (1991, 1993), Pollard e Kassab (1992), Mitra e Das (1992), Kassab, Mosley e Daryapurkar (1994). Entretanto nesses trabalhos as trincas eram sempre consideradas abertas. No trabalho de Mellings, (1994) e Aliabadi e Melling, (1997), a formulação em *MECD* foi empregada, para a análise estática em 2D e 3D de trincas (abertas), entretanto não foi empregada nenhuma simulação com sensores piezelétricos e as falhas eram obtidas através da minimização dos erros aproximando-os dos valores obtidos com trincas reais através da técnica da análise inversa ou otimização (via minimização de um resíduo definido entre valor obtido e valor observado).

Nota-se que os algoritmos numéricos com a aproximação inversa do problema que são apresentados na literatura para a determinação de trincas são de difícil convergência mesmo com cargas em regime elasto-estático. No caso de carregamentos dinâmicos em regimes transientes e estacionárias, a convergência torna-se ainda mais complexa ainda (Bezerra, 1995). Tanaka, Nakamura e Nakano (1988) apresentaram um algoritmo para determinação de defeitos em elasto-dinâmica onde a dificuldade para se obter a convergência desejada fica evidente. Os autores aplicaram a aproximação inversa. Uma das grandes dificuldades encontradas é a obtenção das sensibilidades em relação aos parâmetros a otimizar (Rus e Gallego, 2007).

Usando a mesma metodologia de análise inversa, mas agora medindo as deformações estáticas através de *strain-gages*, o trabalho de Liang e Hwu (2000) apresentou o uso de redes neurais para se realizar a identificação em tempo real de furos (cavidades abertas) e trincas. Essas redes neurais executam um armazenamento de dados sobre a estrutura estudada de modo que quando um novo sinal é empregado, múltiplas comparações com resultados anteriores são realizadas até se apresentar uma resposta tanto para a determinação do tamanho quanto da posição da trinca ou furos.

Outro trabalho a ser citado é o trabalho de Tua, Quek e Wang (2004), eles empregaram sensores e atuadores piezelétricos para a realização da detecção de trincas através do exame das amplitudes das ondas horizontais (Lamb-waves). Uma comparação

com resultados experimentais também é disponibilizada na citada referência. Os resultados experimentais, encontrados neste último trabalho (Tua, Quek e Wang, 2004), serão usados como base de comparação na execução dos exemplos numéricos realizados nesta tese.

Nesta Tese é apresentada uma nova metodologia para a análise de detecção de trincas, onde é empregada a simulação direta da determinação da deformação sobre sensores piezelétricos, diferentemente, portanto, da metodologia clássica da análise inversa usada por diversos autores na literatura consultada. Diminui-se com isso muitas das dificuldades matemáticas inerentes da metodologia clássica e possibilita-se a análise de trincas fechadas e a análise dinâmica para problemas que antes apresentavam grande complexidade matemática.

A utilização do Método dos Elementos de Contorno Dual para a detecção precisa da variação da deformação sobre os sensores acoplados à estrutura das chapas analisadas é a chave da metodologia usada neste trabalho tanto para a análise estática quanto para a análise dinâmica.

3 – CONCEITOS FUNDAMENTAIS

3.1 – INTRODUÇÃO

Dentro do objetivo deste trabalho de determinação e propagação de trincas em estruturas, o estudo de alguns conceitos fundamentais é de muita importância para se entender como se pode avaliar, após a detecção de uma trinca, o risco de propagação da trinca e o conseqüente colapso da estrutura sob carga estática ou dinâmica. Embora este trabalho limite-se ao uso de técnicas da Mecânica da Fratura Elástica Linear (*MFEL*), alguns conceitos pertinentes à Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (*MFEP*) serão também apresentados neste capítulo. Após os conceitos fundamentais da *MFEL* e da *MFEP*, este trabalho aborda os fundamentos da determinação da trinca dentro de uma estrutura por meios de sensores piezelétricos e com o uso do *MECD*, considerando carregamentos estáticos e dinâmicos. O uso de materiais piezelétricos é também abordado, bem como, equações são apresentadas mostrando a relação entre a diferença de potencial gerada nestes sensores e os gradientes de deformação causados pela presença de trincas dentro das estruturas. Por fim, este capítulo apresenta um resumo dos fundamentos teóricos do *MEC*, do *MECD*, das Transformadas de Laplace usadas na análise dinâmica para a determinação de trincas e das singularidades provocadas pela adoção de elementos ponto a um quarto.

3.2 – CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA *MFEL*

A Mecânica da Fratura Elástica Linear trata dos problemas relacionados à fratura de materiais elásticos e lineares é usada para materiais predominantemente em regime elástico ou cujo comportamento inelástico seja supostamente desprezível ou muito localizado. Esta parte da Mecânica da Fratura é também chamada de Mecânica da Fratura Frágil ou Mecânica Clássica da Fratura. A primeira nomenclatura refere-se à característica inerente à fratura que deve se dar em materiais frágeis. A segunda nomenclatura mostra que esta parte da Mecânica da Fratura é a mais antiga e a mais desenvolvida e investigada tanto teórica quanto experimentalmente – pois até o ramo clássico desta ciência existe (Pastoukhov e Voorwald, 1995).

A linearidade também está no conceito da trinca linear (com relação à forma, geralmente a trinca é apresentada como um corte infinitamente fino). Além disso, nesse conceito da *MFEL* não são investigados com detalhes os processos não-lineares de deformação e acumulação de dano próximo à ponta da trinca (Callister, 2002) – região por sinal com forte presença de não-linearidade.

Portanto, os materiais frágeis podem ser analisados com bases na *MFEL*. Tais materiais são, entre outros, os materiais de alta resistência utilizados massivamente na indústria aeroespacial, aços de alta resistência e baixa liga, aços inoxidáveis trabalhados a frio, entre outros (Broek, 1989).

Um aspecto muito importante na análise da fratura elástica linear para materiais isotrópicos é a relação linear entre as componentes de tensão e as componentes de deformação, que é conhecida, geralmente, como lei de Hooke e, quando analisadas apenas em tração pura, são dadas por:

$$\varepsilon_x = \sigma_x / E \quad (3.1)$$

onde ε_x é o alongamento ou deformação, σ_x é a tensão, x é o índice que indica a direção e E é o módulo de elasticidade longitudinal na tração. Este alongamento na direção x é acompanhado por componentes laterais de deformação (contrações), expressas por:

$$\varepsilon_y = -\nu \sigma_x / E \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_z = -\nu \sigma_x / E \quad (3.3)$$

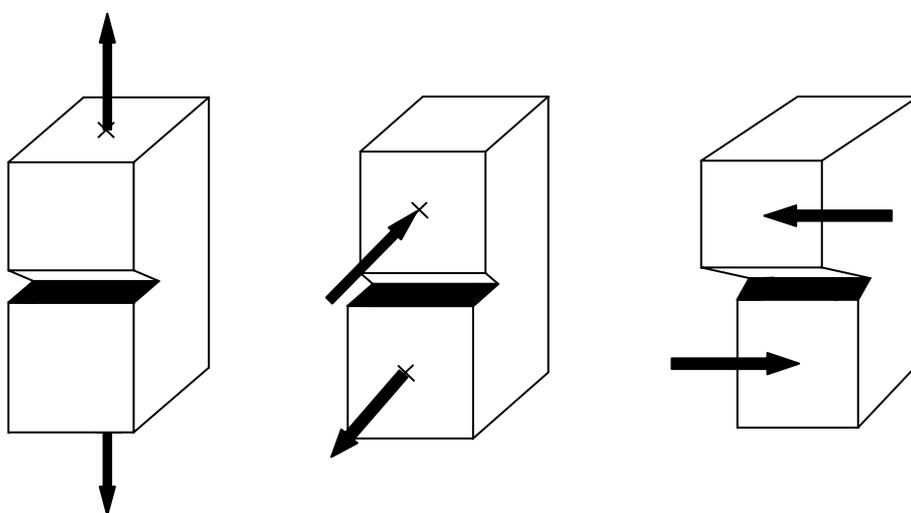
onde ν é uma constante chamada de coeficiente de Poisson. Para muitos materiais o coeficiente de Poisson pode ser tomado igual a 0,25. Para o aço estrutural, é usualmente considerado igual a 0,3 (Timoshenko e Goodier, 1980). Fora do escopo unidimensional, as relações entre tensões e deformações, expressas em notação indicial, para um corpo isotrópico, elástico e linear, são também chamadas de relações constitutivas, escritas como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2 G \varepsilon_{ij} \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda \delta_{ij}}{2 G (3 \lambda + 2 G)} \sigma_{kk} + \frac{\sigma_{ij}}{2 G} \quad (3.5)$$

onde $G = E / 2(1 + \nu)$ é o módulo de elasticidade transversal do material ou módulo de cisalhamento, $\lambda = \nu E / (1 + \nu)(1 - 2\nu)$ é a constante de Lamé e δ_{ij} é o delta de Kronecker.

O campo de tensões na ponta da uma trinca é de grande interesse a *MFEL*. Uma das mais simples hipóteses da mecânica dos sólidos – a superposição da ação das cargas estáticas – permite considerar os campos de tensão e de deformação de uma trinca 3D, sob carregamento qualquer, como uma função linear dos campos, correspondentes aos modos básicos de carregamento. A aplicação deste princípio, em problemas da mecânica da fratura, permite reduzi-los à três problemas nos chamados modos I, II e III (Pastoukhov e Voorwald, 1995) da Mecânica da Fratura, cuja representação encontra-se na Figura 3.1.



Modo I – Abertura

Modo II – Deslizamento

Modo III - Rasgamento

Figura 3.1 – Modos de Carregamento Básicos.

Portanto, na *MFEL*, um estado de tensão e deformação pode ser apresentado como uma superposição de três estados independentes dos modos I, II, III. Porém, o estudo desses casos fundamentais tem importância não somente auxiliar, mas também prática, principalmente o estudo do modo I (trincas ocasionadas por tensão normal) e modo II (trincas ocasionadas por tensão de cisalhante), mais encontrados em elementos estruturais e caracterizados ainda pelos menores valores críticos de carga (Pastoukhov e Voorwald, 1995). Devido a este fato, este trabalho enfoca nos modos I e II de carregamento.

3.2.1 - Estados Planos de Tensão e Deformação – EPT e EPD

Para entender as peculiaridades de singularidade e plasticidade na ponta da trinca numa fratura, faz-se necessário observar as equações que expressam as tensões na ponta de uma trinca. Ewalds e Wanhill (1984), Aliabadi e Rooke (1991), entre outros trazem o desenvolvimento matemático realizado por Westergaard em 1939 usado para encontrar o campo de tensões existente na ponta da trinca sujeitas à tração no modo I de carregamento. Considerando uma chapa infinita com trinca passante, central, com tamanho $2a$, sujeita a uma tensão de tração “ σ ” hipoteticamente longe da trinca, ou seja; no infinito. A Figura 3.2 mostra esta trinca e a orientação em r e θ , a partir da ponta da trinca, de um ponto representado pelo infinitésimo “ $dxdy$ ” e cujas tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} podem ser calculadas pelas seguintes expressões:

$$\sigma_x = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (3.6)$$

$$\sigma_y = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (3.7)$$

$$\tau_{xy} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (3.8)$$

$$\sigma_z = 0 \quad (\text{estado plano de tensão}) \quad (3.9)$$

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y) \quad (\text{estado plano de deformação}) \quad (3.10)$$

onde σ_i são as tensões normais nas direções x , y e z , τ_{xy} é a tensão cisalhante no plano xy , r é a distância do ponto à ponta da trinca e θ é o ângulo de orientação do ponto onde as tensões são calculadas.

Foi constatado que na *MFEL* as tensões na ponta da trinca apresentam uma singularidade devido a formulação em relação à distância r da ponta da trinca (ver Equações 3.6 – 3.8). Isto é, quando $r \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma \rightarrow \infty$. Esta singularidade nas tensões só ocorre devido à existência da própria trinca na peça. Entretanto, a tensão teoricamente infinita só ocorre em uma área infinitesimal, pois esta rapidamente se reduz a um valor finito a uma pequena distância da ponta da trinca. Entretanto, na realidade, em um material

real a tensão não pode ser infinita e, conseqüentemente, ocorrerá na ponta da trinca não uma tensão infinita, mas uma tensão não muito superior à tensão de escoamento do material além de estar associada a uma deformação plástica (Pastoukhov e Voorwald, 1995).

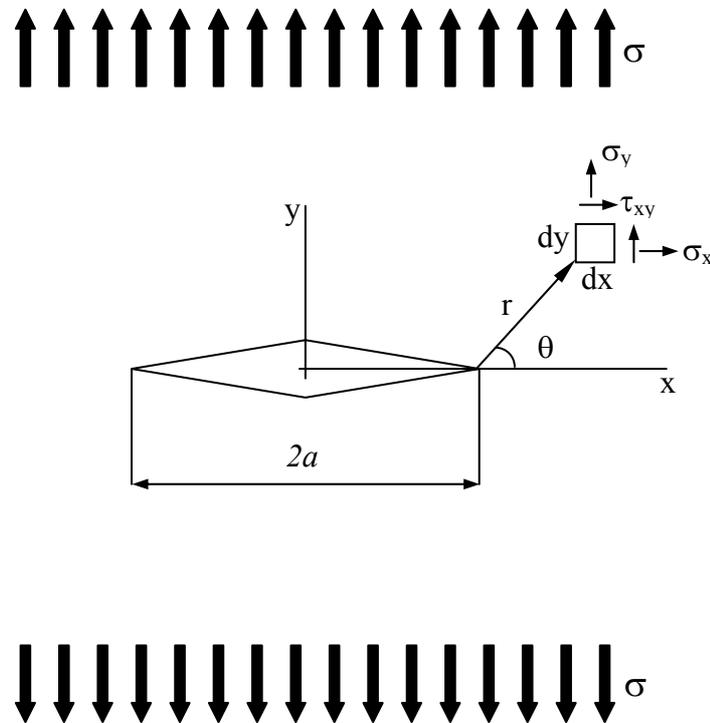


Figura 3.2 – Trinca central em uma chapa infinita.

A quantidade de deformação que ocorre na região da ponta da trinca, depende do estado de tensão e deformação daquela região. Verifica-se (Broek, 1989) que o estado predominante nesta região é dependente da espessura da peça. Para uma peça esbelta, isto é, para uma peça com uma espessura pequena em relação a sua largura e comprimento, o estado predominante é o estado plano de tensão (*EPT*). Já, para uma peça espessa, a característica do estado plano à frente da ponta da trinca torna-se o estado plano de deformação (*EPD*).

Os estados planos de tensão e deformação, denominados abreviadamente de *EPT* e *EPD*, respectivamente, se enquadram nos problemas bidimensionais da elasticidade e são, portanto, casos particulares de um problema originalmente tridimensional. Esses estados ocorrem também em situações de carregamento, forma do corpo, condições de contorno onde um efeito elástico (deformação ou tensão) deixa de existir numa terceira dimensão

(confinamento) ou mesmo quando este efeito elástico é desprezível (Maciel, 2003). Neste trabalho os Estados Planos de Tensão e de Deformação são considerados.

3.2.2 – Critério de Energia

Este trabalho se refere a estruturas trincadas e a primeira forma de análise de estruturas trincadas foi considerada por Griffith em 1920 (Ewalds e Wanhill, 1984). Griffith considerou o seguinte balanço de energia:

$$U = U_0 + U_a + U_\gamma - F \quad (3.11)$$

onde U = energia total do sistema; U_0 = energia elástica da chapa sem trinca; U_a = mudança na energia elástica causada pela introdução da trinca; U_γ = mudança na energia de superfície causada pela formação das superfícies da trinca e F = trabalho realizado pelas forças externas.

Com o desenvolvimento matemático das parcelas envolvidas na Equação (3.11), chega-se à seguinte definição da taxa de energia liberada por unidade de espessura, definida então como G (Ewalds e Wanhill, 1984):

$$G = \frac{d}{da}(F - U_a) \quad (3.12)$$

G também pode ser calculado através do diagrama força-deslocamento de uma chapa com uma trinca sob tração. Na Figura 3.3, o gráfico força-deslocamento para uma trinca de tamanho a é representado pela reta OA . Para uma trinca de tamanho $a + da$ o respectivo gráfico é dado pela reta OE . Supondo que a extensão da trinca passe de a para $a + da$ aconteça para uma carga de valor P_I . Se as extremidades da chapa estiverem fixadas, o deslocamento permanece constante e a carga cai do ponto A para o ponto B . Isto significa que há liberação de energia elástica representada pelo triângulo OAB (Broek, 1984).

Se a extensão da trinca se dá em nível de carga P_I constante, o deslocamento é acrescido de uma quantidade Δv . O trabalho realizado pelo carregamento é $P\Delta v$, que é igual a área $AEFC$. A energia elástica contida na chapa aumenta de OAC para OEF . O

aumento é dado pelo triângulo OAE . Esta energia tem que ser fornecida pelo carregamento. Como a área $AEFC$ é duas vezes AOE , sobra uma energia igual a OAE . Desconsiderando o pequeno triângulo AEB segue que $OAB = OAE$. Isto significa que a energia disponível para o crescimento de trinca é igual em ambos os casos (Broek, 1984).

Para o caso das extremidades fixas, a energia disponível é dada pela energia elástica. Para o caso com carregamento constante, a energia disponível é dada pelo carregamento. Os resultados são iguais, portanto G pode ser calculada pela energia elástica e é chamado de taxa de energia elástica liberada (Broek, 1984).

$$G = \left(\frac{\partial V}{\partial a} \right)_P = - \left(\frac{\partial V}{\partial a} \right)_v \quad (3.13)$$

onde V é a energia potencial e a primeira igualdade se refere a variação da energia elástica liberada a deslocamento constante e a segunda parcela se refere a variação da energia elástica liberada a carregamento constante.

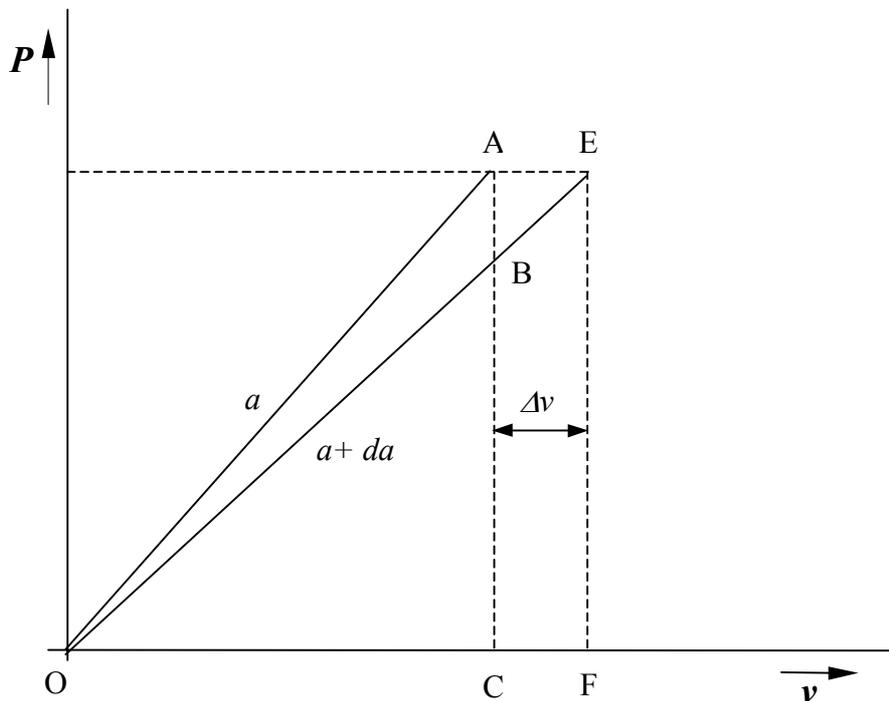


Figura 3.3 – Diagrama Força – Deslocamento para material linear elástico.

Para a resistência da trinca por unidade de espessura, definido como R tem-se:

$$R = \frac{d}{da}(U_\gamma) \quad (3.14)$$

Os parâmetros G e R da análise energética estão relacionados com a taxa de liberação de energia e resistência a fratura, respectivamente. Na fratura tem-se:

$$G = \frac{\pi \sigma^2 a}{E} = R \quad (3.15)$$

As curvas G e R são normalmente usadas para a determinação da fratura instável. Em peças reais o valor de G aumenta com o aumento do tamanho da trinca, enquanto que R permanece constante para estado plano de deformação. Para estado plano de tensão, principalmente para materiais com alta tenacidade, o valor de R aumenta com o crescimento da trinca, podendo ocasionar o crescimento estável da trinca. Na Figura 3.4 pode ser observado como a condição de fratura instável pode ser determinada. Claramente, pode-se perceber que a fratura instável ocorre quando a linha da curva G é tangente à curva R , isto é quando as duas curvas têm inclinações iguais. Como a inclinação de uma linha é descrita pela sua primeira derivada, a condição para instabilidade pode ser expressa por:

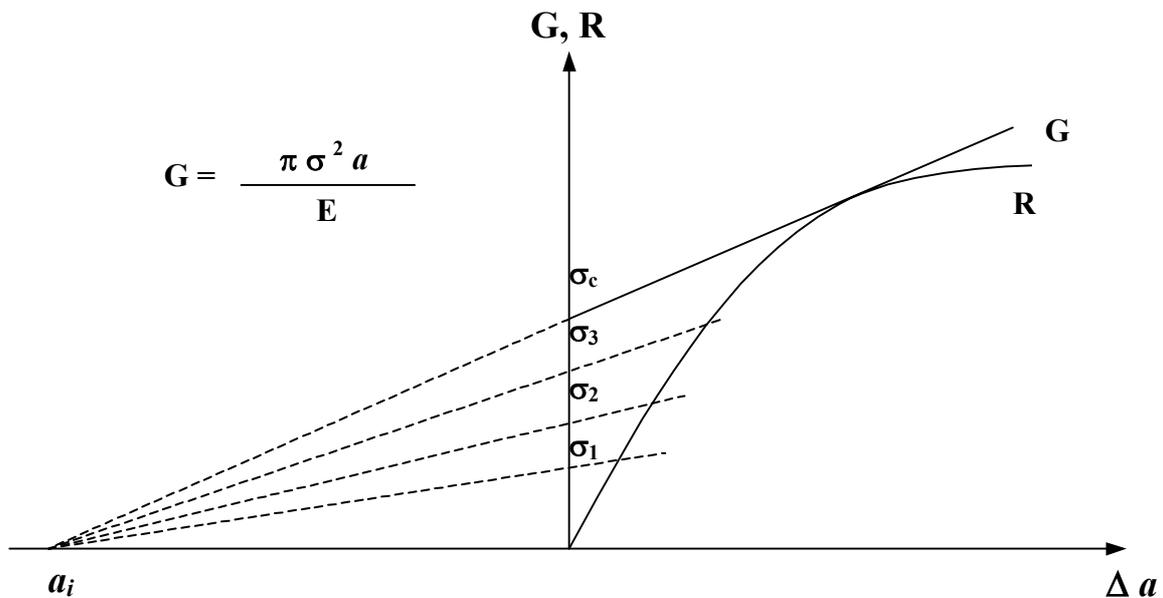


Figura 3.4 – Curvas G e R para Estado Plano de Tensão na *MFEL*.

$$G(a_i) = R(a_i) \quad (3.16)$$

$$\left(\frac{dG}{da}\right)_{a_i} = \left(\frac{dR}{da}\right)_{a_i} \quad (3.17)$$

Onde $G(a_i)$ refere-se à taxa de energia liberada por unidade de espessura da trinca quando a abertura a_i passa a $a_i + da_i$ e $R(a_i)$ é a resistência da trinca a este incremento de abertura de a_i para $a_i + da_i$. Na figura está representada a situação para um tamanho de trinca fixo a_i e com vários valores de tensão representados por σ_i . Nota-se que para tensões de magnitude σ_1 , σ_2 e σ_3 tem-se crescimento estável da trinca, mas para o valor crítico de tensão σ_c tem-se que as duas condições nas Equações (3.16) e (3.17) para crescimento instável da trinca são alcançadas e, portanto, a trinca se propaga.

Note na Figura 3.4, que as funções G são retas para chapas infinitas. Se β é um fator relativo à geometria da peça, a Equação (3.15) mais genérica seria $G = \beta^2 \sigma^2 \pi a / E$ (com $\beta = 1$ para chapas infinitas). Para estruturas finitas (reais) as linhas da curva G não são retas (Broek 1984).

3.2.3 - Fator de Intensidade de Tensão – FIT ou K

Em 1957 Irwin introduziu o conceito do Fator de Intensidade de Tensão (*FIT* ou K) definido para os modos I, II e III, como (Saouma 2000):

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{Bmatrix} = \lim_{r \rightarrow 0, \theta = 0} \sqrt{2\pi r} \begin{Bmatrix} \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

onde os valores das tensões são aqueles obtidos na vizinhança da ponta da trinca e K_i estão associados com modos de carregamentos aplicados a chapa trincada, com $i = I, II$ e III . Considerando o modo mais geral, os valores das tensões na vizinhança da trinca (Pastoukhov e Voorwald, 1995) podem ser apresentados pela seguinte expressão:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sum_{\alpha} K_{\alpha} \sigma_{ij}^{(\alpha)}(\theta) \pm \bar{O}(1) \quad (3.19)$$

onde $i, j = 1, 2$ ou 3 ; sendo o modo de fratura indicado por α (I, II, III). Os fatores K_I, K_{II}, K_{III} , dependem da carga externa, da geometria do corpo e da trinca. Estes são denominados de fatores de intensidade de tensão correspondentes aos modos geométricos I, II ou III de fratura, respectivamente, e são independentes das coordenadas (r, θ) . As expressões para $\sigma_{ij}^I(\theta), \sigma_{ij}^{II}(\theta)$ e $\sigma_{ij}^{III}(\theta)$ são funções adimensionais do ângulo polar θ , independentes da geometria do corpo e da carga externa. O termo de ordem $\bar{O}(1)$ significa um valor finito para $r \rightarrow 0$ e representa também um valor constante e independente do valor do raio. Estes termos de ordem podem também depender do valor do raio como veremos a seguir.

As componentes do deslocamento (Pastoukhov e Voorwald, 1995) podem ser apresentadas de forma análoga a Equação (3.19) por.

$$u_i = \frac{\sqrt{r}}{\mu\sqrt{2\pi}} \sum_{\alpha} K_{\alpha} \bar{u}^{(\alpha)}(\theta) \pm \bar{O}(r^{3/2}) \quad (3.20)$$

onde μ é uma constante do material; $\bar{u}^{(\alpha)}(\theta)$ são funções adimensionais e $\bar{O}(r^{3/2})$ para $r \rightarrow 0$, tem tendência a zero com $r^{3/2}$ ou mais rápido (Callister, 2002).

Analisando a Equação (3.20) para estados planos, modo I (Saouma 2000), usando a definição de fator de intensidade de tensão definido por Irwin, tem-se as expressões dos deslocamentos conforme as seguintes equações:

$$u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[k - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (3.21)$$

$$u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[k + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (3.22)$$

$$u_3 = 0 \quad (3.23)$$

onde μ é o módulo de elasticidade transversal e $k = (3 - 4\nu)$ para estado plano de deformação e $k = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ para estado plano de tensão.

As tensões para o modo I de carregamento tornam-se:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (3.24)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (3.25)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (3.26)$$

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (\text{estado plano de tensão}) \quad (3.27)$$

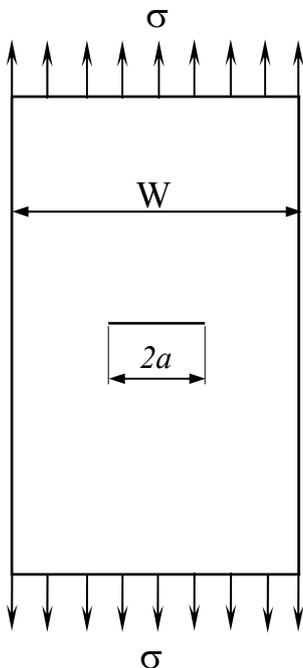
$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (\text{estado plano de deformação}) \quad (3.28)$$

Estas formulações são válidas para chapas infinitas. A geometria finita das peças tem um efeito nos valores do campo de tensão na ponta da trinca e estas equações devem ser modificadas pela adição de fatores de correções para possibilitar o uso destas em problemas reais. As tensões nas Equações (3.24) a (3.28) são agora dependentes do fator de intensidade de tensão K_I , o que não era claramente apresentado nas Equações (3.6) a (3.10) (Saouma, 2000). Uma fórmula geral para a correção nas expressões é:

$$K_I = \beta \sigma \sqrt{\pi a} f(a/W) \quad (3.29)$$

β e $f(a/W)$ na Equação (3.29), para algumas geometrias são determinados por análise numérica e estão disponíveis na literatura (Ewalds e Wanhill, 1984), como por exemplo:

a) Para chapa com trinca central:



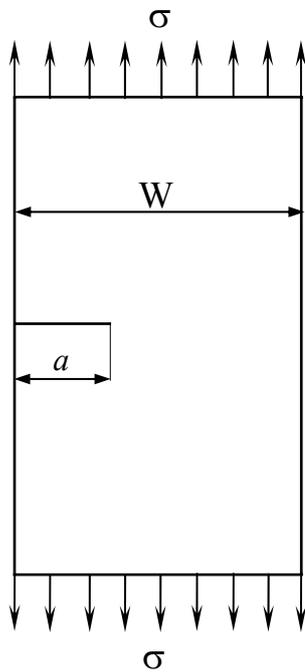
$$K_I = \beta \sigma \sqrt{\pi a} \quad (3.30)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\sec \pi a}{W}} \quad (3.31)$$

ou igualmente

$$\beta = \left[1 + 0.256 \left(\frac{a}{W} \right) - 1.152 \left(\frac{a}{W} \right)^2 + 12.2 \left(\frac{a}{W} \right)^3 \right] \quad (3.32)$$

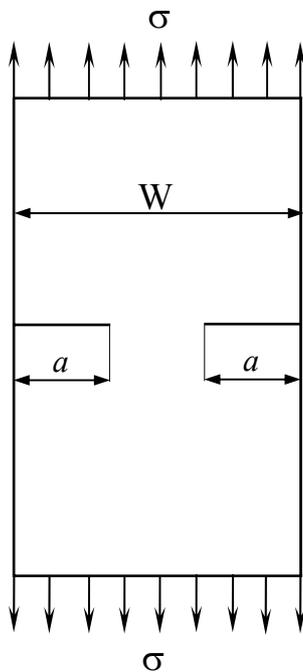
b) Chapa com trinca de borda:



$$K_I = \beta \sigma \sqrt{\pi a}$$

$$\beta = \left[1.12 - 0.231 \left(\frac{a}{W} \right) + 10.55 \left(\frac{a}{W} \right)^2 - 21.72 \left(\frac{a}{W} \right)^3 + 30.39 \left(\frac{a}{W} \right)^4 \right] \quad (3.33)$$

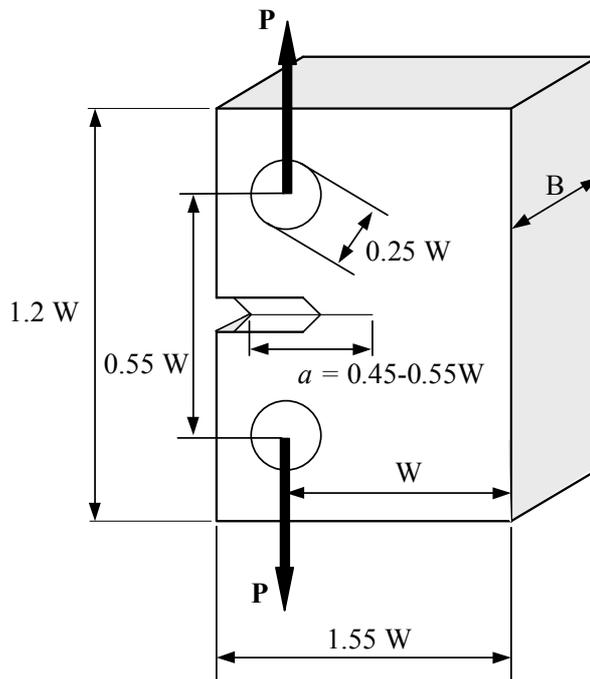
c) Chapa com trinca em borda dupla:



$$K_I = \beta \sigma \sqrt{\pi a}$$

$$\beta = \left[1.12 + 0.561 \left(\frac{a}{W} \right) - 0.205 \left(\frac{a}{W} \right)^2 + 0.471 \left(\frac{a}{W} \right)^3 - 0.190 \left(\frac{a}{W} \right)^4 \right] / \left[\sqrt{1 - \frac{a}{W}} \right] \quad (3.34)$$

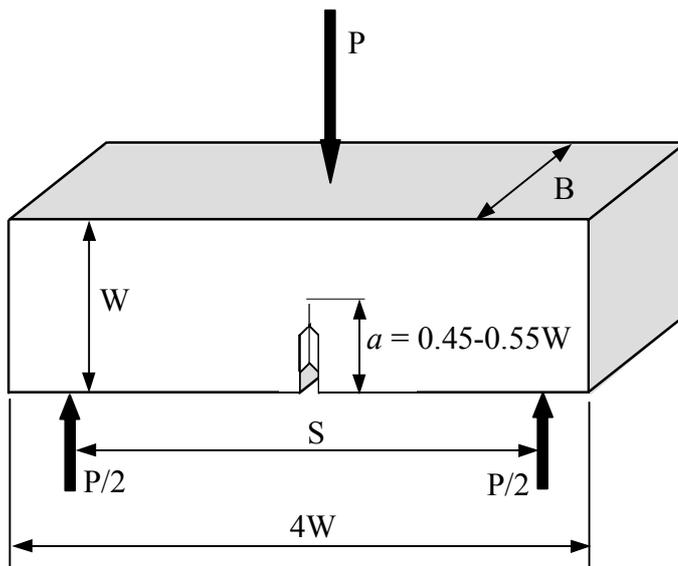
d) Ensaio de flexão e tração em espécime compacta:



$$K_I = \frac{P\beta}{B\sqrt{W}} \quad (3.35)$$

$$\beta = \left[29.6 \left(\frac{a}{W} \right)^{1/2} - 185.5 \left(\frac{a}{W} \right)^{3/2} + 655.7 \left(\frac{a}{W} \right)^{5/2} - 1017 \left(\frac{a}{W} \right)^{7/2} + 63.9 \left(\frac{a}{W} \right)^{9/2} \right] \quad (3.36)$$

e) Flexão entre três pontos:



$$K_I = \frac{P S \beta}{B (W)^{3/2}} \quad (3.37)$$

$$\beta = \left[2.9 \left(\frac{a}{W} \right)^{1/2} - 4.6 \left(\frac{a}{W} \right)^{3/2} + 21.8 \left(\frac{a}{W} \right)^{5/2} - 37.6 \left(\frac{a}{W} \right)^{7/2} + 38.7 \left(\frac{a}{W} \right)^{9/2} \right] \quad (3.38)$$

É possível avaliar aproximadamente a extensão da zona plástica. Na *MFEL* a zona plástica deve ser pequena em relação às dimensões da peça e não ter significativa influência na distribuição de tensão da zona elástica. Para se achar o tamanho da zona plástica, usa-se a condição de escoamento de Von Mises (Pastoukhov e Voorwald, 1995):

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \sigma_{ys}^2 \quad (3.39)$$

onde: σ_{ys} é a tensão de escoamento e $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ são as tensões principais dadas por:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \text{ e } \sigma_3 = \begin{cases} \nu (\sigma_1 + \sigma_2), & \text{para EPD} \\ 0 & , \text{para EPT} \end{cases} \quad (3.40)$$

Usando as Equações (3.24)-(3.28), os valores das tensões principais em função do fator de intensidade de tensão, para o modo I (análogo para os outros modos), são:

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (3.41)$$

$$\sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (3.42)$$

$$\sigma_3 = \frac{2 \nu K_I}{\sqrt{2 \pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{p/ EPD} \quad (3.43)$$

$$\sigma_3 = 0 \quad \text{p/ EPT} \quad (3.44)$$

A substituição desses valores no critério de escoamento de Von Mises resulta na relação entre o raio-vetor da zona plástica r e o ângulo polar θ , portanto:

$$\text{Para EPT: } r_p(\theta) = \frac{K_I^2}{4 \pi \sigma_{ys}^2} \left[\frac{3}{2} \text{sen}^2 \theta + \cos \theta + 1 \right] \quad (3.45)$$

$$\text{Para EPD: } r_p(\theta) = \frac{K_I^2}{4 \pi \sigma_{ys}^2} \left[\frac{3}{2} \text{sen}^2 \theta + (1 - 2 \nu)^2 (1 + \cos \theta) \right] \quad (3.46)$$

A diferença da forma e do tamanho da zona plástica nos casos de deformação plana e de tensão plana é significativa. No eixo da trinca ($\theta = 0$) tem-se:

Para *EPT*:
$$r_p(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_{ys}^2} e \quad (3.47)$$

Para *EPD*:
$$r_p(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_{ys}^2} (1 - 2\nu)^2 \quad (3.48)$$

A Figura 3.5 mostra a região de plastificação para o *EPT* e *EPD*, usando as fórmulas das Equações (3.45) e (3.46). Substituindo-se ainda o valor do coeficiente de Poisson médio para metais ($\nu = 1/3$), nas Equações (3.47) e (3.48) obtém-se que a zona plástica em deformação plana é nove vezes menor que a zona plástica em tensão plana. A principal causa dessa diferença é o efeito da restrição do estado tensão/deformação triaxial à deformação plana. O menor tamanho da zona plástica significa uma menor resistência à propagação da trinca e uma característica mais frágil em nível local da fratura sob condições de deformação plana (Pastoukhov e Voorwald, 1995).

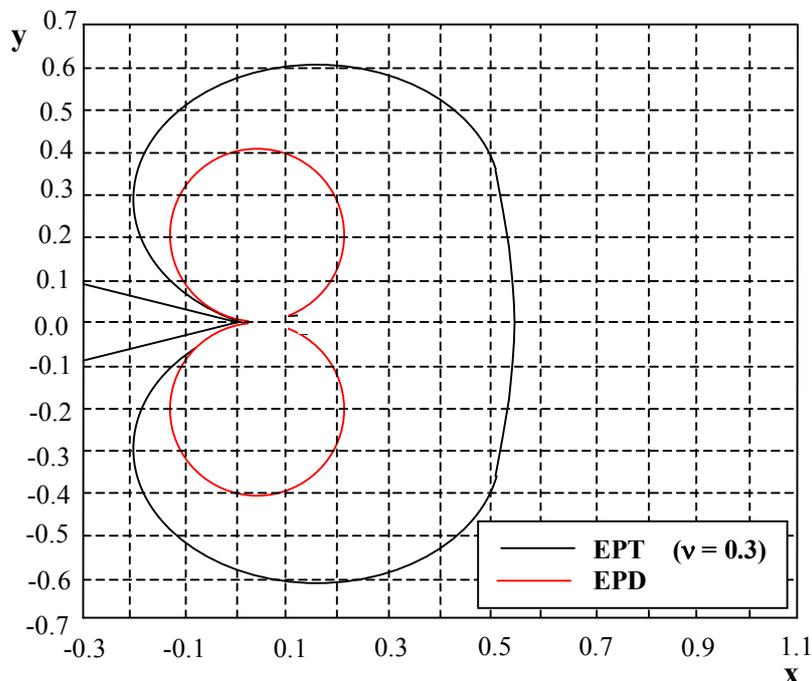


Figura 3.5 – Região de plastificação na ponta da trinca para *EPT* e *EPD*.

As Figuras 3.6a e 3.6b mostram a distribuição de tensão no eixo da trinca ($\theta = 0$) para *EPD*

e *EPT*. No eixo da trinca, $\theta = 0$, $\sigma_{xy}(0) = 0$, e $\sigma_{xx}(0) = \sigma_{yy}(0)$ são as tensões principais. A terceira componente principal de tensão é $\sigma_{zz}(0) = 0$ para *EPT* ou $\sigma_{zz}(0) = 2\nu\sigma_{yy}(0)$ para *EPD*. Utilizando então o critério de Von Mises (Equação (3.39)) chega-se a:

$$\text{Para } EPT: \quad \sigma_{yy}(0) = \frac{\sigma_{ys}}{(1-2\nu)} = 3\sigma_{ys} \quad (3.49)$$

$$\text{Para } EPD: \quad \sigma_{yy}(0) = \sigma_{ys} \quad (3.50)$$

Portanto, para o *EPD* o limite efetivo do escoamento cresce três vezes devido a restrição na deformação ao longo da espessura. Nas condições de *EPT* a componente σ_{xx} não tem influência no escoamento plástico e o limite de escoamento efetivo é igual ao limite de plastificação sob tração uniaxial (Pastoukhov e Voorwald, 1995). O parâmetro r_p (extensão da zona plástica) é uma grandeza importante para classificação da fratura. Se $r_p \rightarrow 0$ (zona plástica desprezível) a fratura tem característica frágil. Para $r_p \ll a$ (a zona plástica é pequena em comparação ao comprimento da trinca e as dimensões do corpo), a fratura pode ser considerada como “quase-frágil”. Para esses dois casos a *MFEL* apresenta uma boa aproximação com os resultados obtidos em ensaios experimentais (Pastoukhov e Voorwald, 1995). O papel da *MFEL* pode ser ainda ampliado para carregamentos cíclicos – o que será considerado na seção 3.3 deste trabalho.

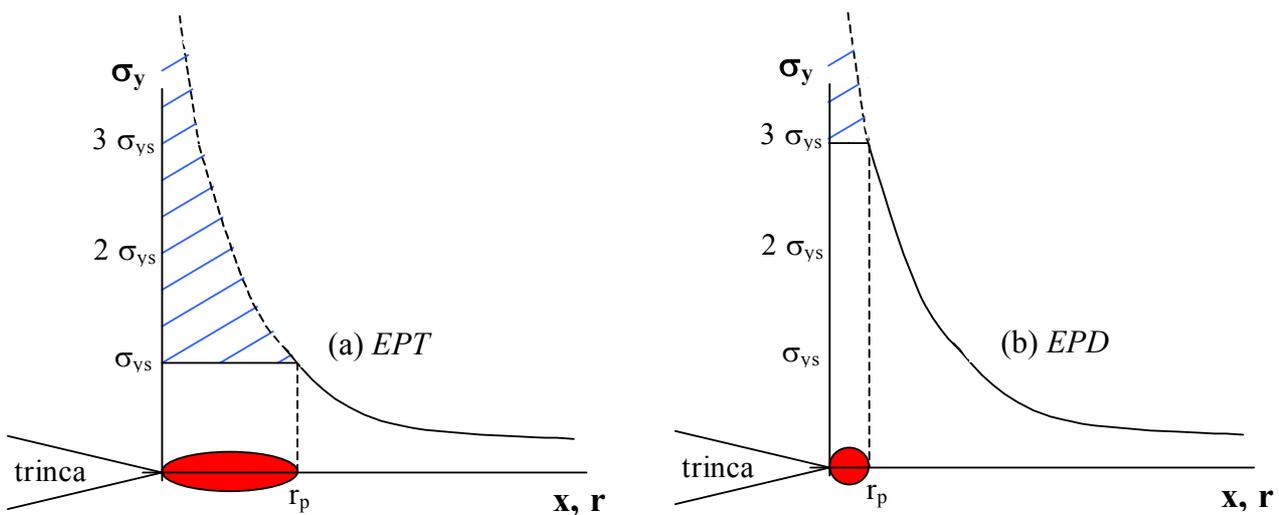


Figura 3.6 - Distribuição de Tensão na ponta da trinca para (a) *EPT* e (b) *EPD*

O estabelecimento da *MFEL* como uma forma confiável de se modelar trincas em

materiais frágeis se deu, principalmente, porque dois enfoques diferentes, (o enfoque energético e o enfoque das tensões) apresentaram resultados muito próximos. A correlação existente entre os parâmetros da análise pelo critério energético e da análise pelo campo de tensões é a dada pela relação seguinte:

$$G = \frac{K^2}{E} \quad (3.51)$$

O critério da análise pelo campo de tensões trouxe uma relação da intensidade do campo de tensão com a situação de fratura. Anteriormente, existia apenas um critério energético através da teoria de Griffith empregando o parâmetro G_C (G crítico), mas como ambos os critérios são válidos existe uma relação entre eles que pode ser mostrada para a situação de tração pura e para o modo I, onde a relação entre K_{IC} e G_{IC} se torna:

$$\text{Para EPT} \quad G_{IC} = \frac{K_{IC}^2}{E} \quad (3.52)$$

$$\text{Para EPT} \quad G_{IC} = \frac{K_{IC}^2}{E} (1 - \nu^2) \quad (3.53)$$

Na condição instável para o modo I de carregamento o valor de G é denominado de G_{IC} do mesmo modo que K é denominado K_{IC} . A vantagem do critério em tensões é que a condição de fratura está, agora, relacionada com um valor da tensão aplicada e um tamanho de trinca admissível. O valor desta constante pode ser determinado, através de experimentos, medindo a tensão de fratura para uma dada estrutura com uma trinca de tamanho conhecido. Pode ser então, avaliados valores de combinações de tamanho de trinca e tensões aplicadas para cada problema proposto (Broek, 1984). Isto tornou a aproximação pelo Fator de Intensidade de Tensão muito utilizada e diversos manuais foram escritos fornecendo relações entre valores de K_C para vários tipos de estruturas com diferentes tamanhos de trincas, orientações, formas, e carregamentos (Ewalds e Wanhill, 1984).

Graças a essa concordância dos resultados, os mesmos limites impostos ao valor do parâmetro G pelo método energético podem ser estendidos para o método do fator de intensidade de tensão para o parâmetro K . Deste modo, tem-se uma fase de propagação de trinca subcrítica até alcançar o valor limite para propagação instável da trinca. Estas situações são dadas pelas seguintes condições:

$$\beta \sigma_i \sqrt{\pi a_i} = K_i \quad (3.54)$$

onde os índices repetidos “i” não implica soma e

$$\beta \sigma_c \sqrt{\pi a_c} = K_c \quad (3.55)$$

Portanto a tensão de iniciação de propagação estável da trinca σ_i e a tensão para propagação instável da trinca σ_c são, respectivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_i = \frac{K_i}{\beta \sqrt{\pi a_i}} \\ \sigma_c = \frac{K_c}{\beta \sqrt{\pi a_c}} \end{array} \right. \text{ e} \quad (3.56)$$

Analisando as Equações (3.47) e (3.48) nota-se que o tamanho da zona plástica é dependente de K . Constata-se (Broek, 1984) também que a distribuição de tensão na ponta da trinca difere dependendo do estado plano à frente da mesma, alterando-se com isso também o valor de K . A variação de K com a espessura e , conseqüentemente, com o estado plano presente na peças, à frente da ponta da trinca, pode ser verificada na Figura 3.7.

O valor de K_{IC} é o menor valor que o parâmetro K_I pode alcançar. Mesmo ocorrendo um aumento da espessura este valor permanece constante e, por isso, pode ser tomado como uma propriedade do material. Muitos critérios de fratura utilizam este valor para projeto de estruturas, pois mesmo que a condição do problema não seja realmente esta, isto é *EPD*, este valor pode ser tomado como o valor mínimo para o material, trazendo assim um fator de segurança para o problema específico. Nota-se ainda que no *EPD* tem-se uma menor região de plastificação, essa condição é essencial para a validade da *MFEL* (Broek, 1984). Caso a plasticidade seja considerável deve-se utilizar uma outra metodologia de análise, como por exemplo, a Mecânica da Fratura Elasto-Plástica - *MFEP*.

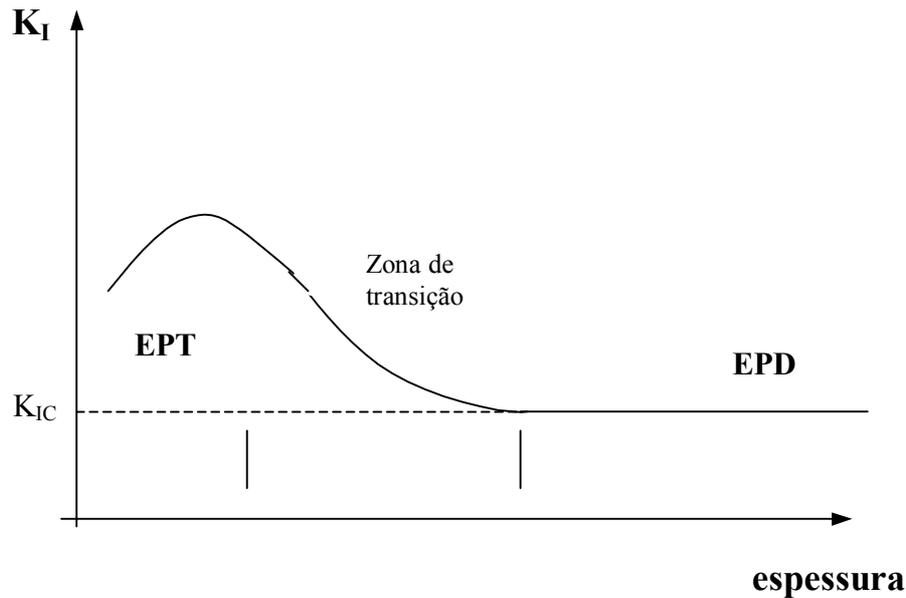


Figura 3.7 – Variação do valor de K_I com a espessura

Este trabalho limita-se à *MFEL*, pois boa parte das estruturas para aeronaves é de preferência leve, resistente e caracterizada por se aproximar mais do comportamento de materiais frágeis. Entretanto, para tentar ser mais completo, esta Tese também descreve, de maneira resumida, os principais conceitos da *MFEP*, pois há parâmetros da *MFEL* que podem ser determinados a partir de conceitos introduzidos pela *MFEP*. A próxima seção apresenta justamente esta forma de análise dentro da Mecânica da Fratura, a Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (*MFEP*).

A condição instável para o modo *I* de carregamento, como já mencionado anteriormente, é alcançada para estado plano de deformação. O *EPD* depende da espessura da peça em questão e de uma condição limite de espessura mínima para que o estado plano possa ser considerado como *EPD*, a espessura da peça “B” deve ser:

$$B > 2,5 \frac{K_{IC}^2}{\sigma_{ys}^2} \quad (3.57)$$

Esta fórmula é principalmente utilizada para a realização de ensaios experimentais, para a escolha das dimensões dos corpos de prova.

3.3 – MECÂNICA DA FRATURA ELASTO-PLÁSTICA - *MFEP*

Os principais conceitos da Mecânica da Fratura Elásto-Plástica (*MFEP*) são expostos aqui neste trabalho, não obstante os problemas aqui abordados empregam a *MFEL* (apropriada para boa parte das estruturas aeronáuticas que têm a preferência ao emprego de materiais leves e frágeis). Isto se deve ao fato de que alguns conceitos da *MFEP* são genéricos e estão intimamente relacionados com a Mecânica da Fratura Elástica Linear (*MFEL*) inclusive ajudando a se calcular parâmetros da *MFEL* com conceitos da *MFEP*. A *MFEL* foi originalmente desenvolvida para descrever o crescimento de trinca e fratura sob condições essencialmente elásticas, como o nome sugere. Entretanto, tais condições são razoavelmente satisfeitas apenas para fratura em estado plano de deformações de materiais metálicos com alta resistência e para fratura de materiais intrinsecamente frágeis como vidros, cerâmicas, pedras e gelo. Posteriormente, foi mostrado que a teoria poderia ser levemente alterada para se trabalhar com uma plastificação limitada na região da ponta da trinca. Porém para os casos onde a quantidade de deformação plástica não pode ser desconsiderada, isto é, para materiais com ductilidade mais acentuada, faz-se necessária a aplicação de outra metodologia para tratamento do problema da fratura. Para estes casos foi desenvolvida a Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (*MFEP*) (Broek, 1989).

A *MFEP* estende, significativamente, a descrição do comportamento da fratura além do regime elástico, mas também tem seus limites. De fato, a *MFEP* não pode ser aplicada quando ocorre uma deformação total da seção carregada, ou seja, quando ocorre o colapso plástico (Ewalds e Wanhill, 1984).

Nas situações onde a espessura é considerável e a deformação muito extensa, a *MFEL* não pode ser aplicada. Nestes casos a *MFEP* é então preferida. Pode-se imaginar que situações como estas não sejam corriqueiras, mas de fato, estas situações são de suma importância para algumas aplicações práticas. Em indústrias de geração de energia e de processamento de produtos químicos a maioria das trincas ocorre em partes com altas pressões, como vasos de pressão e tubulações de paredes espessas. Também nas indústrias petroquímicas e nucleares ocorrem trincas em estruturas de paredes espessas, apresentando zonas plásticas significativas tornando não apropriada a utilização da *MFEL*. Devido a este fato não é surpreendente que a maior parte da contribuição para o desenvolvimento da *MFEP* tenha advindo destas indústrias. Em contraposição, a *MFEL* é, principalmente,

aplicada à indústria aeroespacial, onde as estruturas têm que apresentar pesos reduzidos e são empregados materiais frágeis de alta resistência (Broek, 1989).

Os dois parâmetros mais difundidos na *MFEP* são a Integral-J e a abertura da ponta da trinca (*Crack Opening Displacement - COD*). Esses parâmetros serão explicados, detalhadamente, nas próximas seções. A extensão do critério de energia também tem uma metodologia equivalente para a *MFEP* e será abordada na próxima seção.

3.3.1 – Critério de Energia para a MFEP

Ocorrendo ou não deformação plástica significativa, respectivamente, na *MFEL* e na *MFEP*, o critério de energia pode ser usado para expressar a condição de fratura. Para a análise de uma estrutura real na *MFEL*, de acordo com a Equação (3.15), tem-se a seguinte expressão para a condição de fratura (Broek, 1989):

$$G = \frac{\beta^2 \pi \sigma^2 a}{E} = R \quad (3.58)$$

onde β é um fator adimensional relativo a geometria da peça trincada.

Quando existe a deformação plástica o fator β deve ser alterado, mas ainda continua existindo um fator de correção da geometria. Na *MFEP*, o fator β é substituído por um fator equivalente H e as denominações equivalentes a G e R , da *MFEL*, são alteradas para J e J_R , respectivamente, (Broek, 1989). O critério de instabilidade na *MFEP* equivalente à Equação (3.15) na *MFEL* passa a ser então:

$$J = H \sigma \varepsilon a = J_R \quad (3.59)$$

Na *MFEP*, J e J_R correspondem, respectivamente, à taxa de liberação de energia de deformação G e a resistência R da *MFEL*. O parâmetro J pode ser obtido como no caso de R da *MFEL*, porém considerando a deformação plástica e uma formulação integral, denominado de Integral-J. Tal integral, dependendo da situação apresenta o mesmo valor de R da *MFEL*, por isso existe uma equivalência de nomenclatura entre a *MFEL* e a *MFEP*. Nota-se ainda que na *MFEL* $\varepsilon = \sigma/E$, e que esta relação linear não é mais válida para a *MFEP*, e, portanto, faz se necessária uma nova relação entre tensão e deformação

para se utilizar a formulação equivalente àquela desenvolvida para a *MFEL* (Broek, 1989).

Na *MFEP*, a função mais conveniente para a relação tensão-deformação se ajustar ao comportamento elasto-plástico de um material real é a função potencial, conhecida como Equação de Ramberg-Osgood, normalmente apresentada como:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma^n}{F} \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl} \quad (3.60)$$

Os valores de n e F na Equação (3.60) são constantes inerentes ao material e são determinados experimentalmente. Usando esta relação entre tensão e deformação (adotando neste caso $H = \beta^2 \pi$) chega-se ao seguinte critério de fratura (Anderson, 1995):

$$J_{el} + J_{pl} = \frac{\beta^2 \pi \sigma^2 a}{E} + \frac{H \sigma^{n+1} a}{F} = J_R \quad (3.61)$$

Normalmente o valor relacionado com J_{el} é muito menor que o valor de J_{pl} , ($J_{el} \ll J_{pl}$), portanto J_{el} pode ser omitido na equação anterior e o critério dado pela Equação (3.61) passa a ser apenas expresso pela relação:

$$\frac{H \sigma^{n+1} a}{F} = J_R \quad (3.62)$$

Deste modo, a tensão para a ocorrência da fratura σ_{fr} pode ser determinada na *MFEP* como:

$$\sigma_{fr} = \left(\frac{J_R F}{H a} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (3.63)$$

A condição de fratura instável na *MFEP* segue os mesmos princípios da *MFEL* (descritos nas Equações (3.16) e (3.17)) e pode ser escrita como:

$$\left\{ \begin{array}{l} J(a_i) = J_R(a_i) \\ \left(\frac{dJ}{da} \right)_{a_i} = \left(\frac{dJ_R}{da} \right)_{a_i} \end{array} \right. \text{ e} \quad (3.64)$$

Do mesmo modo que na *MFEL* o valor de G apresenta um valor crítico G_{IC} o valor de J também apresenta um valor crítico J_{IC} na *MFEP*. Na Figura 3.8 temos a situação para um tamanho a_i de trinca fixo e com vários valores de tensão representados por σ_i . Nota-se que as funções de σ_i não são mais lineares em J como no caso da *MFEL* (em relação a G) e sim funções não-lineares. A condição instável, como na *MFEL*, é alcançada para estado plano de deformação (Broek, 1989). O *EPD* depende da espessura da peça em questão e uma condição limite de espessura (B) mínima para que o estado possa ser considerado como deformação plana na *MFEP* é a seguinte:

$$B > 25 \frac{J}{\sigma_{ys}} \quad (3.65)$$

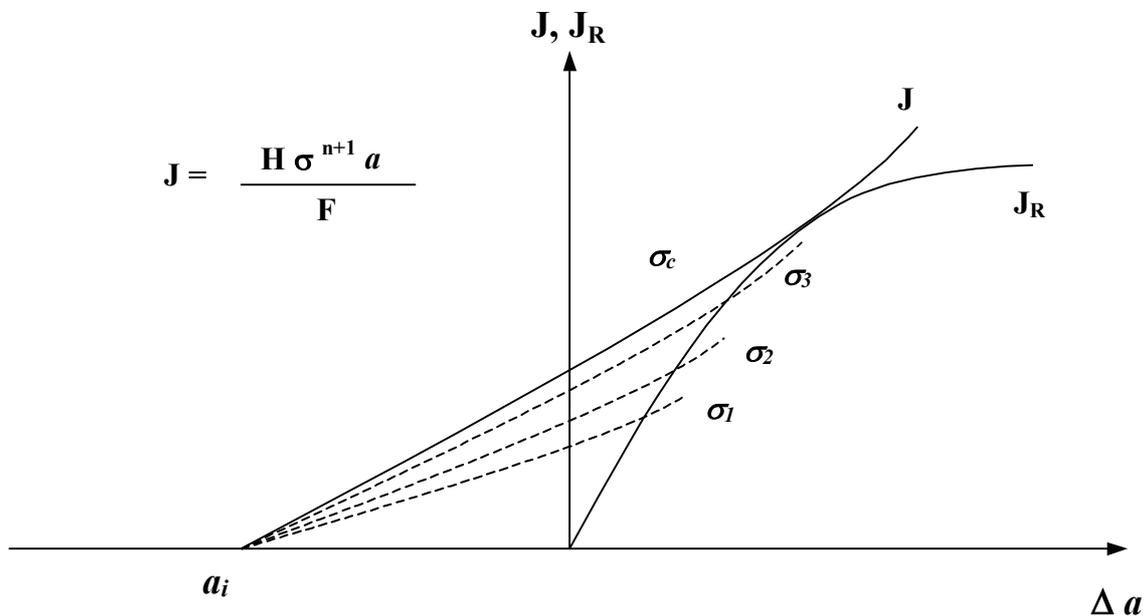


Figura 3.8 – Curvas J e J_R para Estado Plano de Tensão na *MFEP*.

Do mesmo modo que ocorreu na *MFEL* existem valores de tensões aplicadas que não levam a uma ruptura catastrófica na peça (valores de tensões $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ na Figura 3.8).

Porém, quando o valor da tensão aplicada alcança σ_c as condições da Equação (3.64) são satisfeitas e ocorre assim a fratura. O problema principal em relação a *MFEL* é a determinação do fator de correção H que se torna bem mais complexo que o β .

3.3.2 – Critérios de Avaliação da Trinca na *MFEP*

As análises desenvolvidas e disponíveis na literatura que consideram a zona de plastificação na ponta da trinca, normalmente, aumentam a dimensão da trinca como uma forma de aproximação dos resultados alcançados com os resultados obtidos experimentalmente. Os critérios mais citados são o de Irwin e Dugdale, que serão detalhados a seguir (Ewalds e Wanhill, 1984).

3.3.2.1 – Primeiro Critério de Dimensionamento da Zona Plástica

Este critério de dimensionamento da Zona Plástica foi formulado por Irwin. A análise de Irwin para a zona plástica se atenta ao fato de que a distribuição de tensão não pode simplesmente ser cortada ao nível da tensão de escoamento, como mostrado na Figura 3.6. Entretanto, para a validade da análise, existem várias restrições como (Ewalds e Wanhill, 1984):

- 1) A região de plastificação deve ser considerada circular.
- 2) Apenas a situação ao longo do eixo x ($\theta=0$) é considerada.
- 3) O material será considerado perfeitamente elasto-plástico, isto é a tensão não poderá exceder o valor da tensão de escoamento σ_{ys} .

Irwin afirmou que a ocorrência da plasticidade faz com que a trinca se comporte como se fosse mais longa do que seu tamanho físico real, isto é, os deslocamentos apresentados são maiores e a resistência à fratura menor do que no caso elástico.

A Figura 3.9 mostra o esquema da análise de Irwin para a zona plástica para o caso de estado de tensão plana em relação a distribuição de tensão elástica.

Percebe-se que a trinca é acrescida de um comprimento Δa . Para que toda a tensão seja considerada, a área A deve ser igual a $\sigma_{ys} \cdot \Delta a$. Então um valor de $\Delta a = r_p$ é encontrado para satisfazer o equilíbrio. Portanto, a análise de Irwin resulta em uma região

de plastificação duas vezes maior que a obtida pela primeira aproximação visualizada na Figura 3.6. Note que a distribuição de tensão caracterizada pelo fator de intensidade de tensão K ainda continua válida, apenas agora com um tamanho de trinca acrescido de Δa em relação ao tamanho real da trinca (Ewalds e Wanhill, 1984).

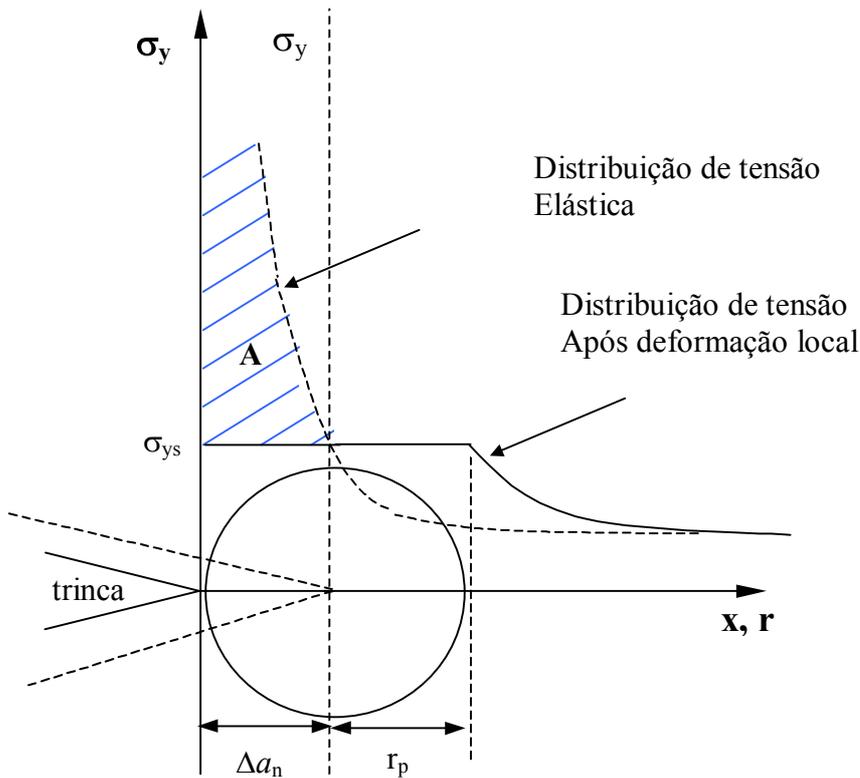


Figura 3.9 – Esquema da análise de Irwin e dimensionamento da zona plástica.

3.3.2.2 – Segundo Critério de Dimensionamento da Zona Plástica

Este critério de dimensionamento da Zona Plástica foi formulado por Dugdale (Ewalds e Wanhill, 1984). A análise de Dugdale assume que toda a deformação plástica ocorre numa zona fina à frente da trinca, diferentemente da análise de Irwin que sugeria uma região circular. Este comportamento, realmente, ocorre para alguns materiais, mas certamente, não para todos. Como na análise de Irwin, Dugdale também afirmou que a plasticidade faz com que a trinca se comporte como se fosse mais longa do que seu tamanho físico real. Entretanto, este comprimento adicional da trinca é tomado com sendo carregado com a tensão de escoamento como mostrado na Figura 3.10.

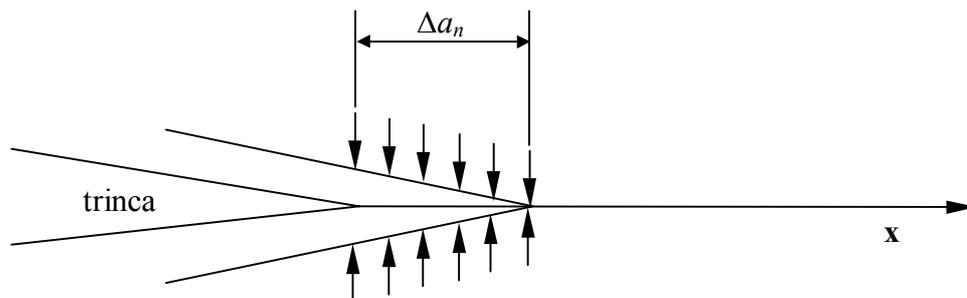


Figura 3.10 – Esquema da análise de Dugdale.

O critério de Dugdale leva em consideração a distribuição de tensão na ponta da trinca desenvolvida por Westergaard e por meio de um desenvolvimento matemático em séries chega a seguinte equação para o acréscimo do valor da trinca (Broek, 1989).

$$\Delta a_n = 0,393 \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad (3.66)$$

Este valor é um pouco maior que o valor encontrado por Irwin.

3.3.3 – Parâmetros Empregados na *MFEP*

A literatura existente sobre a *MFEP* é um pouco confusa, pois um dos principais parâmetros da *MFEP* utilizados, a Integral-J, se confunde muitas vezes com a taxa de liberação de energia, que para o caso da *MFEP* também tem a denominação de *J*, como já visto na seção 3.3.1. Outro parâmetro também, largamente, aceito é a abertura da ponta da trinca, o *COD* (*Crack Opening Displacement*) (Broek, 1989). Esses parâmetros foram propostos com a intenção de se eliminar a necessidade de se ter uma relação elástica linear para a tensão e deformação na região da ponta da trinca. Entretanto, esses parâmetros

também são válidos se esta relação for admitida, por isso, são parâmetros da Mecânica da Fratura empregados tanto para a *MFEL* como para a *MFEP*.

3.3.3.1 – Integral-J

A Integral-J, ou simplesmente J , invariante foi definida por Eshelby em 1956 (Broek, 1989) usando o teorema da conservação de energia. A fórmula da Integral-J num corpo bidimensional é descrita como:

$$J = \oint_{\Gamma} \left\{ W dy - T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} ds \quad (3.67)$$

onde: Γ é um contorno em volta da ponta da trinca e deve ser integrado no sentido anti-horário, W é a densidade de energia de deformação definida por $W = \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$, T é o vetor de força de superfície determinado por $T_i = \sigma_{ij} n_j$, com n_j sendo as componentes do vetor normal, perpendiculares ao contorno Γ , u é o vetor deslocamento e ds é um variação infinitesimal no contorno Γ . A Figura 3.11 mostra a representação da integral de linha (Broek, 1989).

Esta integral de linha tem o valor constante independente do caminho escolhido e foi usada para problemas de fratura pela primeira vez por Cherapanov e Rice em 1968 (Rice, 1968). Como a base para a Equação (3.67) é o teorema da conservação de energia, a Integral-J é uma quantidade relacionada à energia. Note que os dois termos no integrando, denominados de W e $T(\partial u/\partial x)$, têm, ambos, a dimensão de $\sigma\varepsilon$ (tensão vezes deformação), que é energia de deformação. Rice (1968) mostrou que a Integral-J, como definida em torno do contorno contendo a ponta da trinca (Figura 3.11), é igual a variação da energia potencial V para uma extensão de trinca de valor de “ da ”:

$$J = - \frac{\partial V}{\partial a} \quad (3.68)$$

Para um material linear elástico $-(\partial V/\partial a) = G$ - o que significa que para o caso linear elástico, a Integral-J é igual a taxa de energia elástica liberada, G , ou seja:

$$J = G \quad (3.69)$$

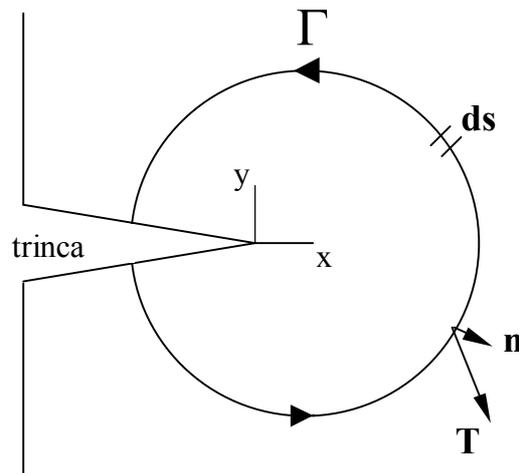


Figura 3.11 – Representação da Integral-J.

A Equação (3.68) também é válida para material elástico não-linear, a qual segue a mesma analogia do caso elástico linear e tem-se:

$$J = \left(\frac{\partial V}{\partial a} \right)_P = - \left(\frac{\partial V}{\partial a} \right)_v \quad (3.70)$$

aqui também pode-se chegar ao mesmo resultado com deslocamento constante ou carregamento constante. Entretanto para o caso não-linear as equações se tornam:

$$J = \left(\frac{\partial V}{\partial a} \right)_P = \int_0^P \left(\frac{\partial v}{\partial a} \right)_P dP = - \left(\frac{\partial V}{\partial a} \right)_v = - \int_0^P \left(\frac{\partial P}{\partial a} \right)_v dv \quad (3.71)$$

Estes casos são mostrados no diagrama de força – deslocamento da Figura 3.12, que é o equivalente não-linear elástico do diagrama da Figura 3.4.

Como na Figura 3.4, a taxa de liberação de energia é representada pela área entre as curvas de carregamento para a e $a + da$. Exceto pela pequena área do triângulo AEB , a área

tem o mesmo tamanho no caso para a extensão da trinca em da para deslocamento ou carga constante.

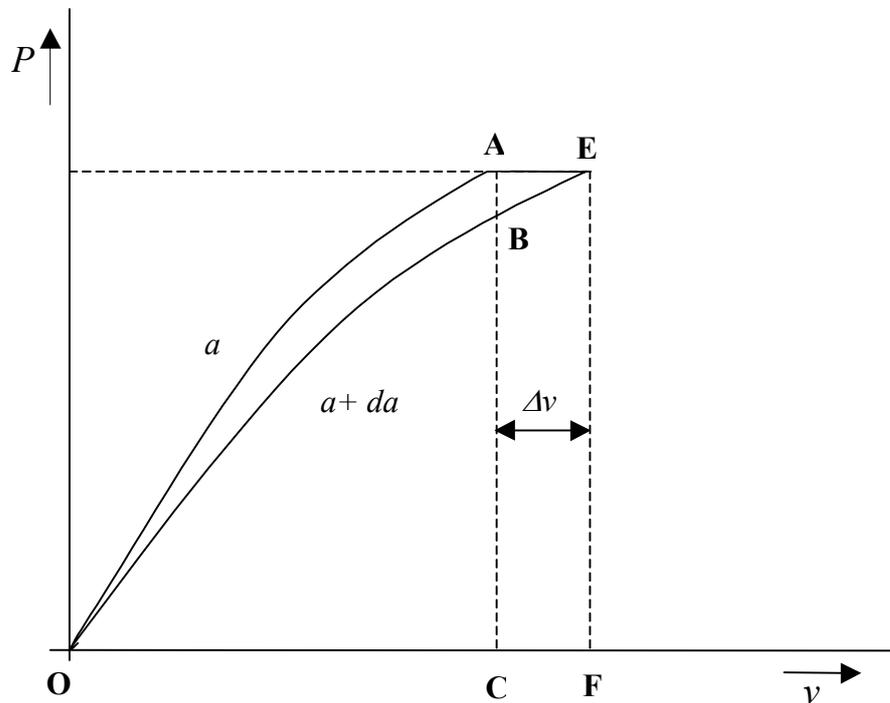


Figura 3.12 – Diagrama Força – Deslocamento para material não - linear elástico.

Deve ser enfatizado que a exigência, para o uso das Equações, (3.71) é de que a carga sobre o material deva descarregar ao longo da mesma curva de carregamento, isto é, o comportamento da curva tensão – deformação é “não-linear”, mas ainda elástico. Muitos problemas envolvendo plasticidade podem ser lidados com o tratamento do material como não-linear elástico através da teoria de deformação da plasticidade. Entretanto, muitas vezes em materiais reais as curvas de descarregamento não seguem a mesma curva do carregamento, e neste caso deve ser empregada a teoria incremental da plasticidade (Broek, 1984).

Esta é a essência para todos os problemas e limitações associados ao uso da Integral-J para o caso onde a plasticidade na ponta da trinca não pode ser ignorada. Claramente, se o descarregamento não for na mesma linha do carregamento, o cálculo da taxa de liberação de energia não é o valor da curva da Figura 3.12. Entretanto, J foi proposto como um critério de fratura mais geral do que o critério G , porque ele pode ser aplicado a casos onde o crescimento de trinca e a fratura estão associadas a uma considerável deformação plástica.

3.3.3.2 – Deslocamento de Abertura da Trinca - *Crack Opening Displacement - COD*

Este parâmetro da Mecânica da Fratura foi proposto em 1961 por Wells na tentativa de se incluir o efeito da deformação plástica na determinação do momento da fratura (Ewalds e Wanhill, 1984). Este critério também pode estar referenciado com as letras *CTOD* (Crack Tip Opening Displacement). O critério deformacional da propagação de trinca é análogo ao clássico critério de deformação máxima de alongamento, utilizado na resistência dos materiais para elementos estruturais. De forma geral, a fratura local, ou seja, a propagação da trinca é relacionada a uma medida de deformação na área, próxima da ponta da trinca, que atinge um valor crítico. Segundo este critério o estado de equilíbrio será extremo, se o parâmetro *COD* alcança o valor COD_c (Anderson, 1995).

$$COD = u_2^+ - u_2^- = 2u_2 = COD_c \quad (3.72)$$

onde u_2^+ e u_2^- são os deslocamentos das faces da trinca no ponto considerado para o critério de acordo com a Equação (3.21). Na Figura 3.13 pode ser visto a representação do *COD*.

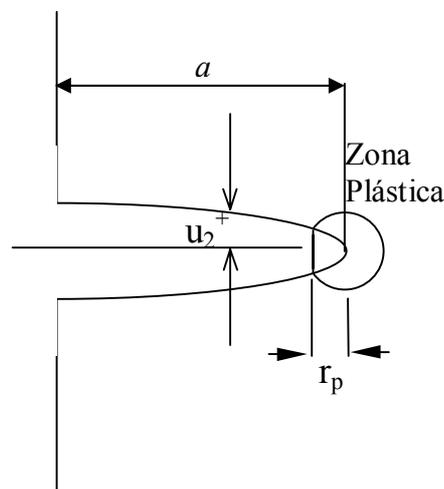


Figura 3.13 – Representação do cálculo de *COD*.

Em 1966, Buderkin e Stone desenvolveram a formulação para o valor de *COD* através do modelo de escoamento de Dugdale, encontrando (Saouma, 2000):

$$COD_C = \frac{8\sigma_{ys}a}{\pi E} \log \left\{ \sec \left(\frac{\pi \sigma}{2\sigma_{ys}} \right) \right\} \quad (3.73)$$

sendo “ a ” o tamanho inicial da trinca, “ σ_{ys} ” a tensão de escoamento do material, “ E ” o módulo de elasticidade do material.

Para as considerações na *MFEL* tem-se uma correlação para o modo I entre o valor de COD_{IC} e K_{IC} , representando os valores críticos destes parâmetros, que é dada por:

$$COD_{IC} = \frac{K_{IC}^2}{E \sigma_{ys}} \quad (3.74)$$

Considerando uma região de plastificação circular tem-se para o valor de COD_{IC} :

$$COD_{IC} = \frac{4}{\pi} \frac{K_{IC}^2}{E \sigma_{ys}} \quad (3.75)$$

Estas relações são importantes porque mostram que em regime elástico a aproximação pelo COD é compatível com os conceitos da *MFEL*. Entretanto, a aproximação pelo COD não será limitada à análise da *MFEL*, desde que a plasticidade da ponta da trinca seja levada em conta.

Dentro desta metodologia de cálculo, são encontrados modos diferentes para se chegar ao valor de K_I . Usando-se técnicas numéricas mais recentes, como o Método dos Elementos Finitos (*MEF*) e o Método dos Elementos de Contorno (*MEC*), o cálculo de K_I pode ser obtido levando-se em conta os valores dos deslocamentos em um ou dois nós que discretizem a ponta da trinca. A Figura 3.14 mostra uma modelagem de discretização de trinca empregado para cálculo de K_I através do Método dos Elementos de Contorno e o *Crack Opening Displacement (COD)* (Banerjee, 1981).

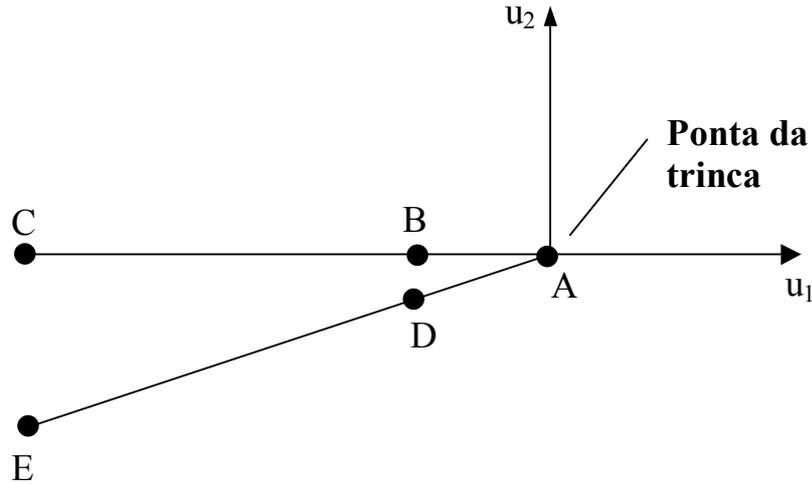


Figura 3.14 – Discretização da trinca para cálculo de K_I usando *COD* e *MEC*.

A Equação (3.76) leva em consideração uma discretização da trinca de forma não simétrica (Banerjee, 1993).

$$K_I = \frac{2\mu}{\alpha+1} \sqrt{\frac{2\pi}{l}} \left[(4u_2^B - u_2^D) + u_2^E - u_2^C \right] \quad (3.76)$$

onde: $u_2^B, u_2^D, u_2^E, u_2^C$ são deslocamentos nos pontos $A, B, C,$ e D (Figura 3.14) na direção y (direção da abertura da trinca) do ponto considerado, $\alpha = (3 - 4\nu)$ para *EPD* e $\alpha = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ para *EPT*. Quando a discretização da trinca é simétrica a fórmula na Equação (3.76) passa a ser:

$$K_I = \frac{2\mu}{\alpha+1} \sqrt{\frac{2\pi}{l}} (4u_2^B - u_2^C) \quad (3.77)$$

Pode-se também usar apenas um nó para o cálculo, então a formulação passa a ser:

$$K_I = \frac{\mu}{\alpha+1} \sqrt{\frac{2\pi}{l}} u_2^B \quad (3.78)$$

Essa metodologia é preferida, principalmente, quando se emprega o elemento singular ponto a um quarto que é capaz de simular singularidade na ponta da trinca e será

abordado na seção 3.7. A Figura 3.14 mostra uma trinca discretizada de modo a se calcular K_I via Equação (3.76). Para se usar a Equação (3.77) e (3.78) não é necessário discretizar os pontos D e E .

Na prática, existem algumas dificuldades relacionadas à aplicação do critério da abertura da ponta da trinca. A forma deformacional deste critério é uma base para a aplicação nas condições de escoamento desenvolvido. Entretanto, para o cálculo do COD são utilizadas, freqüentemente, as expressões envolvendo o Fator de Intensidade de Tensão (Equações (3.74) e (3.75)), que são estimativas da $MFEL$. Nesse caso, o parâmetro da abertura da ponta da trinca não tem nenhuma importância própria, sendo apenas um indicador do fator de intensidade de tensão. Para uma correta utilização, independente do fator de intensidade de tensão, o COD deve ser calculado pela análise geral do campo de deslocamento e/ou determinado pelas observações experimentais. Os ensaios são também necessários para o controle da integridade nas condições reais de funcionamento. As complicações metodológicas da determinação experimental do COD são desvantagens do uso desta metodologia, além das bases teóricas serem insuficientes. Na prática, é difícil determinar, exatamente, o ponto de separação entre a própria trinca e a zona plástica. A medição do COD é realizada, normalmente, numa seção mais conveniente, por exemplo, no centro da trinca, que demanda soluções especiais para relacionar o parâmetro medido e o aplicado no critério (Pastoukhov e Voorwald, 1995). Neste trabalho não se considera o COD , mas este enfoque é bastante usado, principalmente, nos centros de pesquisa da Inglaterra. Os conceitos aqui apresentados tanto sobre a Integral-J como sobre COD são, entretanto, importantes para se entender a formulação apresentada no próximo capítulo sobre os procedimentos numéricos em Elementos de Contorno para a obtenção do Fator de Intensidade de Tensão.

3.4 – MECÂNICA DA FRATURA PARA CARREGAMENTO CÍCLICO

Componentes de equipamento e estruturas civis, entre outras, freqüentemente operam sob carregamentos alternados suficientemente severos para proporcionar que a fratura por fadiga seja o critério de dimensionamento (Ewalds e Wanhill, 1984). Nas últimas três décadas os conceitos da $MFEL$ vêm sendo aplicados para avaliar a integridade estrutural dos equipamentos em operação na indústria nuclear. A previsão da vida dos

componentes, de acordo com esses conceitos, é baseada numa lei simples, que relaciona o crescimento infinitesimal da trinca “ da ” por ciclo de carga, ou seja, da/dN , e a variação do fator de intensidade de tensões, ΔK ($\Delta K = K_{max} - K_{min}$). A estimativa do crescimento de defeitos nos equipamentos em serviço nas indústrias naval, aeroespacial e automotiva é também realizada usando a relação $da/dN - \Delta K$. Entretanto, sua aplicabilidade é limitada aos casos onde as cargas flutuantes são moderadas e as zonas plásticas reduzidas quando comparadas às dimensões da trinca existente. Geralmente, quando as amplitudes de carregamento são elevadas, como nos casos de fadiga de baixo – ciclo, as zonas plásticas são significativas e a previsão da vida por meio da *MFEL* pode não ser válida. Para os casos onde as zonas plásticas não podem ser desconsideradas, foram realizadas muitas pesquisas por diferentes autores e observou-se que a correlação $da / dN - \Delta J$ fornece a previsão da propagação de trincas em regime elasto-plástico (Maneschy, 1998; Cruz, 1998) de maneira análoga àquela prevista pela equação $da/dN - \Delta K$ em condições linear elástica.

O crescimento da trinca por fadiga em estrutura sujeita a carregamentos cíclicos dificilmente é evitado, por isso, deve ser controlado (Broek, 1989). Os primeiros estudos da fadiga cíclica mostraram que a forma do ciclo simples não influi na vida de um elemento estrutural. O ciclo simples pode ser descrito, integralmente, por dois parâmetros independentes: a tensão máxima σ_{max} e a tensão mínima σ_{min} . Aplica-se ainda outros parâmetros dependentes desses dois como (Pastoukhov e Voorwald, 1995):

$$\text{Tensão média:} \quad \sigma_m = \frac{(\sigma_{max} + \sigma_{min})}{2} \quad (3.79)$$

$$\text{Amplitude de tensão:} \quad \sigma_a = \frac{(\sigma_{max} - \sigma_{min})}{2} = \sigma_{max} - \sigma_m \quad (3.80)$$

$$\text{Intervalo de tensão:} \quad \Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} = 2\sigma_a \quad (3.81)$$

$$\text{Razão de tensão:} \quad R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad (3.82)$$

O carregamento periódico uniaxial ou multiaxial é uma condição comum de operação e pode ser facilmente encontrado em elementos estruturais. O carregamento mais

comum encontrado é a flexão alternada (rotativa). Um exemplo disso é o eixo de um veículo que suporta carga quase constante, mas a rotação deste eixo faz o carregamento se alternar devido ao peso próprio do eixo, desta forma, na posição superior as fibras horizontais superiores estão sob compressão e as fibras inferiores estão sob tração. Geralmente, em peças rotativas de máquinas, esta é a principal causa de cargas cíclicas que podem gerar fratura por fadiga. Outras cargas cíclicas advêm ainda das condições de funcionamento dos equipamentos. Os regimes do tipo “carregamento-descarregamento” característicos de transientes cíclicos ao longo da vida de vasos de pressão, equipamentos da indústria da construção (como gruas), equipamentos de centrais nucleares (como as tubulações), etc... são exemplos característicos de carregamentos cíclicos que podem gerar fratura por fadiga (Pastoukhov e Voorwald, 1995).

3.4.1 – Descrição do Crescimento de Trinca por Fadiga usando K :

A principal questão envolvendo o crescimento de trinca por fadiga é: quanto tempo seria necessário para que uma trinca cresça de um certo tamanho inicial até um valor máximo permissível para aquela configuração, isto é, um tamanho de trinca no qual a falha do componente ou estrutura ainda pode ser evitada, ou em outras palavras, a trinca esteja no limite de ruptura. Existem três aspectos que devem ser considerados nesta questão:

- 1 – O tamanho de trinca inicial detectável pelos métodos de medição, a_d .
- 2 – O valor máximo admissível (crítico) para o tamanho da trinca naquela configuração, a_c .
- 3 – O período de tempo entre o crescimento da trinca de a_d até a_c .

O tamanho inicial de trinca detectável, a_d , corresponde ao valor mínimo detectável usando as técnicas de inspeção não destrutivas disponíveis. O valor máximo admissível (crítico) para o tamanho de trinca, a_c , pode ser determinado aplicando-se a análise da *MFEL* ou da *MFEP*. O terceiro aspecto requer o conhecimento da curva de crescimento da trinca, mostrada esquematicamente na Figura 3.15. Note que existe um valor inicial para a trinca “ a_0 ” que não é, necessariamente, o mesmo valor detectável “ a_d ”. Isto se dá porque em componentes e estruturas reais sempre existem defeitos ou descontinuidades que quando são muito pequenos não são detectáveis, mas serão os pontos de iniciação de trincas para posterior crescimento (Ewalds e Wanhill, 1984).

A Figura 3.15 ilustra curvas de crescimento de trinca por fadiga, uma para um alto valor de intervalo (Equação (3.81)) de tensão $\Delta\sigma_H$ e outra para um baixo valor de intervalo de tensão $\Delta\sigma_L$, ambas com o mesmo valor de razão de tensão R , Equação (3.82). Percebe-se que para um alto valor de intervalo de tensão, o tamanho da trinca cresce mais rapidamente e o valor do tamanho crítico da trinca “ a_c ” é menor para a ocorrência da fratura por fadiga. Apesar dessa diferença, foi constatado que as curvas $da/dN - \Delta K$, para ambos os casos são muito semelhantes. Como consequência disso, várias curvas de comprimento inicial “ a ” versus número de ciclos “ N ” podem ser reduzidas a uma simples curva (Maneschy, 1998), quando os dados são representados em termos da taxa de crescimento da trinca por ciclo de carregamento, da/dN e a flutuação do fator de intensidade de tensão, ΔK (um parâmetro que incorpora o efeito do comprimento da trinca e do valor do carregamento cíclico). A Figura 3.16 mostra como se reduzem as curvas para os dois casos mostrados na Figura 3.15. O gráfico da Figura 3.16 é desenhado em escala “*log-log*” logarítmica nos dois eixos e os dados obtidos com os valores para alto intervalo de tensão ($\Delta\sigma_H$) iniciam-se em valores, relativamente, elevados de $da/dN - \Delta K$. Os valores para baixo intervalo de tensão ($\Delta\sigma_L$) iniciam-se em valores mais baixos de $da/dN - \Delta K$, mas alcançam os mesmos valores que os verificados para um alto intervalo de tensão ($\Delta\sigma_H$). Esses dados, frequentemente, mostram uma tendência conhecida como tendência sigmoidal (Ewalds e Wanhill, 1984) – em referência à função em forma de “S”.

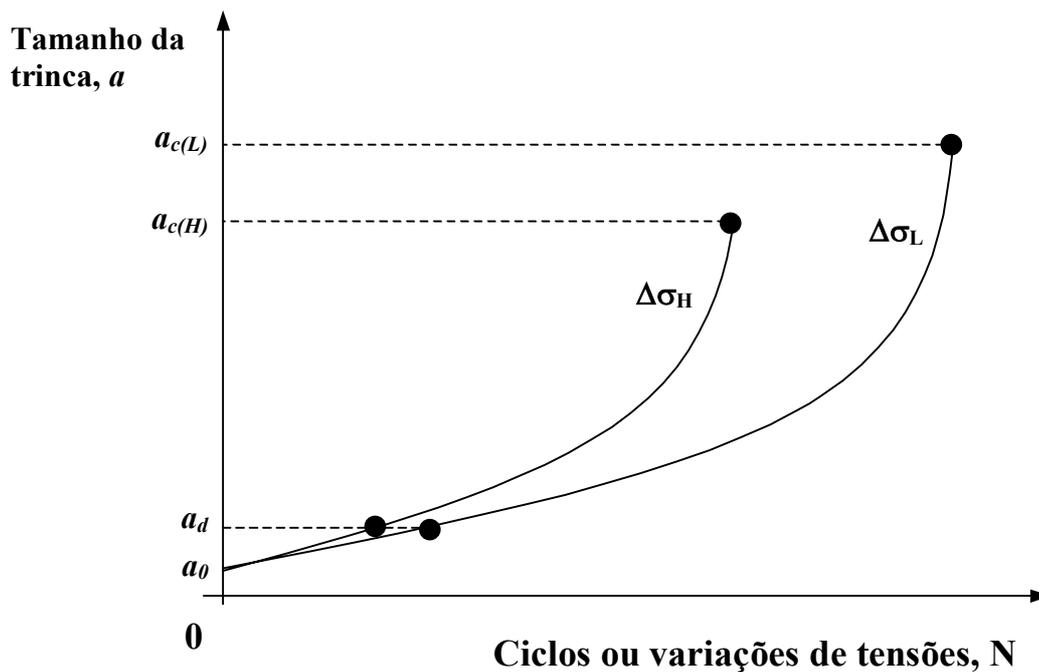


Figura 3.15 – Curva esquemática do crescimento de trinca por fadiga.

Como pode ser observado na Figura 3.16, a curva $\log(da/dN)$ versus $\log(\Delta K)$ apresenta três regiões distintas. Na Região I não ocorre crescimento da trinca e o fator de intensidade de tensão, abaixo do qual não ocorre o crescimento da trinca por fadiga é denominado de ΔK_{th} - ou fator limite de intensidade de tensão (o subíndice *th* refere-se a *threshold value* = valor limite em inglês). A ordem de grandeza de ΔK_{th} , para o aço, situa-se entre 6 e $17 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$. Na Região II, ocorre um crescimento aproximadamente linear entre “ $\log(da/dN)$ ” e “ $\log(\Delta K)$ ”. Já na Região III, ocorre um crescimento muito rápido da taxa da/dN a medida que o fator de intensidade de tensão máximo se aproxima do valor da intensidade de tensão crítica K_c . Esta região, normalmente, tem pouco interesse para o estudo da Mecânica da Fratura, pois, freqüentemente, quando se alcança esta região a peça está no final da sua vida útil.

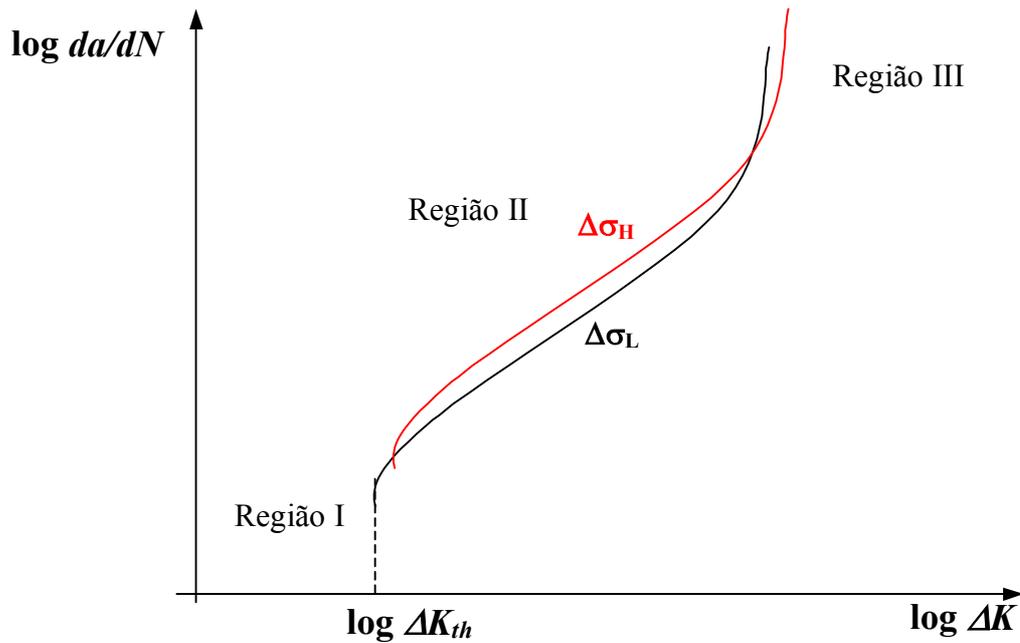


Figura 3.16 – Curva $\log(da/dN) - \log(\Delta K)$ para diferentes valores de $\Delta\sigma$.

Paris e Erdogan (1963) deram uma importante contribuição para o estudo da fadiga na Mecânica da Fratura quando propuseram uma correlação entre a taxa de crescimento a trinca e a variação do fator de intensidade de tensão, da seguinte forma:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (3.83)$$

onde C e m são constantes do material. A Equação (3.83) descreve adequadamente a Região II do gráfico da Figura 3.16, para taxas de crescimento entre 10^{-5} e 10^{-3} mm/ciclo e pode ser utilizada para prever as taxas de propagação de trincas por fadiga em componentes em serviço. A maior parte dos problemas de crescimento da trinca por fadiga em estruturas e componentes mecânicos aplicados em engenharia, ocorre nesta região (Pastoukhov e Voorwald, 1995).

Observou-se que aumentando a razão de ciclo R , para um mesmo K_{max} , o resultado é uma taxa de propagação da trinca mais elevada. Isto conduz a uma equação mais geral que a Equação (3.83) com a seguinte forma:

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K, R) \quad (3.84)$$

Um exemplo da equação funcional para taxa de crescimento da trinca por fadiga que inclui o fator de intensidade de tensão crítico, K_c e a razão $R=K_{min}/K_{max}$ de carga cíclica, é a equação de Forman proposta em 1967 segundo Pastoukhov e Voorwald (1995), e expressa pela seguinte equação:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C(\Delta K)^m}{(1-R)K_c - \Delta K} \quad (3.85)$$

Pela análise da Equação (3.85), verifica-se que da/dN torna-se infinito quando a trinca atinge o tamanho crítico, ou seja, $K_{max} \rightarrow K_c$, o que na prática, de fato ocorre.

A expressão da Equação (3.85) fornece bons resultados, ao menos para $R>0$, em ligas de alumínio, titânio e aço, empregados na indústria aeronáutica. Para valores $R<0$ pode-se afirmar que, os cálculos por meio da Equação de Forman (Equação (3.85)) de um modo geral, fornecem resultados conservativos.

Finaliza-se esta seção indicando que os fundamentos da Mecânica da Fratura para carregamentos estáticos e dinâmicos foram, respectivamente, abordados e enfatiza-se a grande importância que existe em bem se poder avaliar (de forma numérica ou não) os valores do Fator de Intensidade de Tensão para carregamento estático (K) e para carregamento dinâmico (ΔK). Tais valores podem ser determinados utilizando-se a relação que existe entre K e COD ou entre K e a Integral-J, esta última aproximação tem apresentado bom resultados (Barsoum, 1976; Blandford et al., 1981; Owen e Fawkes, 1983; Cruse, 1988; Cavalcanti, 1997; Medeiros, 2000; Leme et al. 2005C).

3.5 – DETERMINAÇÃO DA PRESENÇA DE TRINCAS

Outro aspecto muito importante deste trabalho é a técnica de determinação de trincas dentro de estruturas. A detecção de defeitos em partes estruturais sujeitas a carregamentos é de grande relevância na engenharia, principalmente no estudo de estruturas aeronáuticas. Esta detecção é normalmente realizada por meio de experimentos, e a análise numérica pode baratear em muito os custos onde o modelo numérico proporciona resultados bem satisfatórios (Bezerra, 1993) comparados aos ensaios não-

destrutivos que podem ser perigosos e caros.

Nota-se que com o avanço da tecnologia, novos tipos de materiais são aplicados e utilizados pela engenharia em vários aspectos da produção industrial. Um material que tem sua aplicação crescente é o denominado de material inteligente. Este tipo de material tem por característica básica que a sua reação depende da ação imposta sobre ele, de modo que, certa característica da estrutura como um todo possa ser mantida constante. Por exemplo, a rigidez de uma estrutura pode ser alterada pelo enrijecimento maior ou menor de um material conforme a solicitação imposta sobre ele. Outro exemplo seria a aplicação de materiais inteligentes para o monitoramento de peças. Este assunto vem sendo objeto de estudos de vários centros de pesquisa e empresas internacionais. O desenvolvimento dessa nova classe denominada de materiais inteligentes vem aprimorando o desempenho de estruturas aeronáuticas (Fukunada, Hu e Chang, 2002). Entre estes materiais destacam-se as fibras óticas e os materiais piezelétricos. O histórico do uso destes materiais na engenharia é recente, mas o número de artigos publicados sobre o assunto mostra que o interesse da comunidade científica é crescente.

A proposta de um monitoramento estrutural tem como foco principal proporcionar uma estrutura mais segura a um baixo custo. Sistema de monitoramento capaz de assegurar a integridade estrutural durante a fabricação ou em regime de serviço, poderia permitir uma atualização das informações sobre a estrutura e possibilitar um uso mais seguro e econômico da vida útil dessas partes. O impacto econômico de tais sistemas é significativo, baseado nos efeitos de redução dos custos de manutenção e de extensão da vida útil da estrutura por causa do monitoramento contínuo (Murayama et al, 2003). A utilização das fibras óticas esta ligada ao monitoramento, pois estes materiais podem ser instalados nas estruturas durante o processo de fabricação, proporcionando, depois, a possibilidade de monitoramento de diferentes propriedades importantes durante o serviço, tais como: tensões, deformações, temperatura, etc (Murayama et al, 2003). Outra característica importante das fibras óticas é a de que elas podem ser produzidas em pequenos diâmetros, podendo ser extremamente leves e são inertes às reações químicas e magnéticas (Ma e Asundi, 2000). As simulações numéricas dos resultados alcançados pelas fibras óticas podem ser verificadas em artigos publicados por Giaccari et al. (2005) e Muruyama et al. (2003) com alto nível de precisão quando comparados com os resultados experimentais.

Já os materiais piezelétricos foram ainda mais empregados quando comparados com as fibras óticas. Por esse motivo e por ser este o material usado nas simulações desta

tese de doutorado, este assunto será tratado de forma mais detalhada em um capítulo posterior.

Além dos materiais que podem ser utilizados para o monitoramento das estruturas, também foram propostos vários métodos para a detecção de trincas em estruturas. Dentro daqueles que enfocam a análise numérica do problema, destacam-se os que avaliam a detecção de trinca através da análise estática, dinâmica, com ou sem, aplicação de redes neurais (Tanaka, Nakamura e Nakano, 1988; Bezerra, 1993). Essas análises numéricas são normalmente implementadas por meio do *MEF* (Schunur e Zabarás, 1990) ou pelo *MEC* (Bezerra e Saigal, 1993). As trincas são simuladas pela modificação dos modelos. Dados experimentais podem ser comparados com os dados analíticos para determinação da localização e extensão do defeito. A efetividade de todos os métodos numéricos, entretanto, é dependente da precisão do modelo estrutural e esses modelos podem ser muito complicados, devido a alta complexidade das estruturas reais a serem modeladas. Com o modelo, várias respostas características da estrutura, tais como análise modal, resposta em tempo, resposta em frequência e resposta em impedância podem ser extraídas e analisadas (Zou, Tong e Steven, 2000). A seguir serão listadas algumas das metodologias existentes para a detecção de defeitos em peças.

3.5.1 – Análise Modal:

Com esta técnica de avaliação utilizam-se as informações dos parâmetros modais (frequências modais, forma de onda, amortecimento dos parâmetros modais) ou a combinação de alguns deles para realizar a detecção do defeito. A idéia básica destes métodos é que os parâmetros modais são funções das propriedades físicas da estrutura (massa, amortecimento e rigidez). Portanto, mudanças nas propriedades físicas, por exemplo, por causa do aparecimento de defeitos acarretará em uma mudança na propriedade modal. Usualmente, defeitos irão diminuir a massa e a rigidez da estrutura e aumentar a relação de amortecimento localmente. Dentre desses três parâmetros de propriedade estruturais, a massa é a menos sensível ao dano, enquanto que o amortecimento é o mais sensível ao aparecimento do defeito. Por causa da sua natural complexidade física, o amortecimento proporcional é frequentemente adaptado para os métodos de detecção de defeitos (Zou, Tong e Steven, 2000).

De acordo com as diferentes técnicas de detecção, os métodos de análise modal

podem ser divididos nas seguintes principais categorias: métodos da mudança da forma modal (Lam, Ko e Wong, 1995, Kim, Jeon e Lee, 1992), métodos da curvatura de forma modal (Salawu e Williams, 1994, Chance, Tomlinson e Worden, 1994), métodos de atualização baseados na sensibilidade (Schulz, Pai e Abdelnaser, 1996, Lim, 1995) e método da combinação dos parâmetros modais (Lam, Ko e Wong, 1998), entre outros.

A maioria destes grupos de métodos usa os modos de baixa frequência e pode descrever melhor o comportamento global da estrutura. Por isso, eles se prestam para uma inspeção não destrutiva de uma variedade de estruturas, porque medições superficiais em uma estrutura vibratória podem promover informações sobre a situação no interior da mesma sem os custos de desmontagens. Também, por causa da sua natureza global, estas técnicas permitem uma padronização dos locais de medição. Outra grande vantagem destes métodos é de que a informação modal é barata e fácil de ser extraída (Zou, Tong e Steven, 2000).

Entretanto, há muitas limitações para estes métodos. Primeiramente, alguns destes grupos podem detectar apenas formas particulares de defeitos nos seus esquemas de diagnósticos. Em segundo lugar, estes métodos, usualmente, empregam os parâmetros da estrutura sem defeito para realizar as comparações. Isto irá acarretar uma gama muito grande de informações para estruturas mais complexas. E em terceiro lugar, estes métodos falham em detectar pequenos defeitos (Zou, Tong e Steven, 2000).

3.5.2 – Domínio da Frequência:

Defeitos podem ser detectados através da resposta em frequência da estrutura. A base para estes métodos é a diminuição da rigidez estrutural produzida pelo aparecimento do defeito na estrutura, que em contrapartida acarreta uma diminuição das frequências naturais (Salawu, 1997).

A localização do defeito pode ser estimada através do grau de mudança na frequência natural, que por sua vez depende da posição do defeito para um modo particular de vibração. Em outras palavras, mudanças locais e distribuídas na rigidez produzem variações nas frequências naturais, que afetam cada modo, diferenciadamente, dependendo do local do defeito. Isto porque o defeito é um fenômeno local na maioria dos casos. Foi constatado também que as medições em alta frequência são mais efetivas para defeitos menores.

Como apenas as informações em frequência são requeridas para estes métodos, eles podem ser realizados de forma relativamente barata. Entretanto, as alterações nas frequências naturais isoladamente podem não ser suficientes para uma localização do defeito na estrutura. Os métodos no domínio da frequência são utilizados em baixas frequências para informações globais da estrutura ou em altas frequências para informações locais da mesma. Mas nenhuma dessas duas metodologias pode prover informações suficientes para detecção de defeitos tanto pequenos quanto grandes (Zou, Tong e Steven, 2000).

3.5.3 – Domínio do Tempo:

Basicamente, todos os métodos dessa categoria são relacionados porque usam a história no tempo. Estes métodos poderiam ser independentes da análise modal embora eles sejam usualmente combinados com os métodos no domínio da frequência. Os defeitos são estimados utilizando a história no tempo da entrada e a resposta de vibrações da estrutura. A grande vantagem desses métodos é que eles podem detectar defeitos em ambas as situações globais e locais dependendo da mudança das frequências de entrada (Zou, Tong e Steven, 2000).

3.5.4 – Domínio da Impedância:

Defeitos também podem ser detectados através das mudanças nos valores da impedância das estruturas. A base deste método de detecção é que cada parte da estrutura contribui para a impedância da estrutura em certo valor. Qualquer variação da integridade estrutural gerará uma alteração neste valor da impedância, isto é, a impedância se alterará com a variação da rigidez estrutural. Existem dois grupos básicos de técnicas neste domínio, a impedância mecânica e a impedância elétrica (Zou, Tong e Steven, 2000).

A impedância elétrica é a relação entre o valor eficaz da diferença de potencial entre os terminais em consideração, e o valor eficaz da corrente resultante num circuito. Já a impedância mecânica num sistema mecânico é o quociente complexo de uma força alternada aplicada, dividida pela velocidade linear alternada resultante, na direção da força e no seu ponto de aplicação. A componente real é chamada de resistência mecânica, e a componente imaginária se chama reatância mecânica. A unidade de impedância mecânica

é o *ohm* mecânico, ou dina segundo por centímetro (Kraus, 1992; Wikipedia, 2005).

As técnicas da impedância mecânica são baseadas na medição da impedância Z em um dado ponto da estrutura. A impedância Z é definida como:

$$Z = F/v \quad (3.86)$$

onde F é a força de entrada aplicada sobre a estrutura e v é a velocidade resultante da estrutura no mesmo ponto de aplicação da força (Cawley, 1984, Wong, Guan e King, 1993).

Similarmente à impedância mecânica, a técnica da impedância elétrica mede a variação da impedância elétrica, que é definida pela variação da voltagem aplicada pela corrente resultante na estrutura. Este grupo de métodos é capaz de monitoramento em tempo real e em múltiplas posições (Zou, Tong e Steven, 2000).

3.5.5 – Uso de Material Piezelétrico:

Devido ao acoplamento intrínseco entre os campos mecânicos e elétricos, materiais cerâmicos piezelétricos vêm sendo freqüentemente empregados como atuadores e sensores na determinação de defeitos em peças. Um material piezelétrico tem sua característica básica representada para geração de um campo elétrico quando este é submetido a um esforço mecânico, este efeito é denominado de efeito piezelétrico direto. O inverso também ocorre, isto é, sob um efeito de um campo elétrico o material apresenta uma deformação mecânica, e este efeito é denominado de efeito piezelétrico inverso (IEEE, 1978). Por causa das suas características tais como capacidade de processamento de forma adaptativa e alto diagnóstico, estes materiais também são empregados em transdutores subaquáticos e em aparelhos de imagem biomédicos, manipuladores robóticos, aparelhos de alta precisão, sensores e atuadores e para o controle de vibração e ruído. Este acoplamento existente no material piezelétrico acarreta dois efeitos distintos sobre o material.

As equações básicas que regem a resposta estática, eletro-elástica, de um corpo piezelétrico de volume Ω são as seguintes, expressas em notação indicial:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (3.87)$$

$$D_{i,i} - Q = 0 \quad (3.88)$$

onde: σ_{ij} ($i, j = x, y, z$), D_i , F_i e Q representam, respectivamente, o tensor de tensão, o deslocamento elétrico, a força de corpo na direção i e a carga do corpo (Xu e Rajapakse, 1998).

As equações constitutivas, as relações entre deslocamento e deformação e entre campo elétrico e campo potencial podem ser expressas para o efeito piezoeletrico inverso como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \gamma_{lm} - e_{ijk} E_k \quad (3.89)$$

e para o efeito piezoeletrico direto como:

$$D_i = e_{ijk} \gamma_{jk} + \epsilon_{ij} E_j \quad (3.90)$$

onde γ_{ij} é o tensor de deformação e E_i é o campo elétrico, C_{ijkl} , e_{ijk} e ϵ_{ij} são o módulo elástico (medido a um campo elétrico constante), os coeficientes piezoeletricos (medidos em campos de deformações e elétrico constantes) e as constantes dielétricas (medidas em um campo de deformação constante), respectivamente (Pan, 1999).

As Equações (3.89) e (3.90) podem ser agrupadas em apenas uma expressão:

$$\sigma_{iJ} = C_{iJKL} \gamma_{KL} \quad (3.91)$$

onde $i = 1, 2, 3$ e $J, K, L = 1, 2, 3, 4$.

Neste trabalho o material piezoeletrico será empregado nas simulações numéricas na forma de sensores para a detecção de trincas na peça. O efeito direto será empregado para a detecção dos defeitos e avaliação do estado da peça quando comparados aos valores encontrados para as peças sem os defeitos. O próximo capítulo mostrará as equações que serão empregadas para os sensores piezoeletricos para a realização da detecção nos casos estudados.

3.5.6 – Sensores Piezelétricos:

Os sensores piezelétricos são normalmente construídos de materiais poliméricos piezelétricos diferenciando-se dos atuadores que quase sempre são feitos de cerâmicas piezelétricas. As cerâmicas normalmente são preferidas para serem empregadas como atuadores pois a resposta do efeito direto deste tipo de material piezelétrico possibilita uma abrangência maior de valores de deslocamento. Já para materiais polímeros, este efeito de atuação é menor, mas a sua sensibilidade aos valores do campo de deformação é maior, ocasionando uma maior possibilidade de atuação dos materiais polímeros piezelétricos como sensores. Esses polímeros piezelétricos podem ser sensíveis a deformações ou a temperatura. Os modelos empregados para os sensores são usualmente feitos de espessuras reduzidas quando comparadas ao seu comprimento, com isso a análise de deformação pode ser reduzida ao plano $x - y$, simplificando em muito o equacionamento da resposta em tensão produzida pelo efeito direto piezelétrico.

Considerando então para o caso específico de um sensor em forma de disco de espessura h_p e raio a que é montado sobre uma chapa. Ignorando então o campo elétrico externo $E_i = 0$, isto faz com que a segunda parcela da Equação (3.90) seja anulada. Assim, avaliando apenas a deformação no plano $x - y$, as deformações escritas pela primeira parte da Equação (3.90) podem ser escritas através de coordenadas polares, onde as deformações γ_{jk} passam a ser escritas apenas pela componente radial e angular, respectivamente, ε_r e ε_θ . Com isso a equação constitutiva para o sensor (efeito piezelétrico direto) é simplificada, a partir da Equação (3.90), para:

$$D = d_{31}(\sigma_r + \sigma_\theta) = \frac{d_{31}E_p}{1-\nu_p}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) \quad (3.92)$$

Na Equação (3.92) foi considerado coordenadas polares e o *EPT*. Os valores de E_p e ν_p são o módulo de Young e o coeficiente de Poisson para o disco piezelétrico respectivamente (Lin e Yuan, 2001).

A carga elétrica Q acumulada pelo sensor piezelétrico pode ser neste caso calculada pela seguinte expressão:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \iiint \nabla \cdot D \, dV \quad (3.93)$$

Onde o produto do divergente pela equação do deslocamento elétrico pode ser integrado no volume do sensor para se obter a carga total acumulada no sensor.

Substituindo a Equação (3.92) na Equação (3.93) e aplicando o teorema de Gauss, tem-se:

$$Q = \frac{d_{31} E_p}{4\pi(1-\nu_p)} \iint (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) r \, dr \, d\theta \quad (3.94)$$

Lembrando que o Teorema de Gauss apenas diminui a dimensionalidade da integral tripla presente na Equação (3.93) reduzindo-a para uma integral dupla que aparece na Equação (3.94). Tratando-se o sensor piezelétrico como um capacitor de capacitância C_a , a voltagem de saída do sensor é, então, expressa como (Kraus, 1992):

$$V_{out} = \frac{Q}{C_a} = \frac{Q h_p}{\pi K_3 \varepsilon_0 a^2} \quad (3.95)$$

onde K_3 é a constante dielétrica relativa, $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$ é a permissividade dielétrica de um espaço livre. Substituindo a Equação (3.94) na Equação (3.95) tem-se:

$$V_{out} = \frac{d_{31} E_p h_p}{4 K_3 \varepsilon_0 (\pi a)^2 (1-\nu_p)} \iint (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) r \, dr \, d\theta \quad (3.96)$$

Assumindo que o sensor é suficientemente pequeno e que a deformação é constante dentro da área interna do sensor, tem-se:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \varepsilon_R \quad (3.97)$$

onde ε_R é a deformação no centro do sensor piezelétrico, com isso a Equação (3.96) pode ser aproximada por:

$$V_{out} = \frac{d_{31} E_p h_p \varepsilon_R}{4 K_3 \varepsilon_0 (\pi a)^2 (1 - \nu_p)} \quad (3.98)$$

Esse valor de tensão na saída do sensor pode ser agora aplicado para realização da detecção de falhas internas na chapa. Essa formulação, também, possibilita a utilização de métodos numéricos para a avaliação do defeito na peça. Desde que se possa determinar de forma precisa a deformação no interior da chapa, a saída em voltagem que o sensor apresenta pode ser simulada através do uso da Equação (3.98).

A Equação (3.98) será aplicada nos exemplos numéricos das simulações estáticas para cálculo dos valores de saída nos sensores, já que esta formulação não leva em conta a variação das constantes piezelétricas com a frequência de excitação de entrada (Lin e Yuan, 2001). A simplificação assumida pela Equação (3.97) nos permite também o emprego de sensores com formato retangular, considerado um valor de deformação médio no centro do sensor.

3.6 – MEF, MEC e MECD NA MECÂNICA DA FRATURA

Seguindo o avanço da tecnologia computacional, os principais métodos numéricos aplicados à engenharia na análise de tensões, também passaram a ser aplicados à Mecânica da Fratura. As soluções analíticas para os problemas na Mecânica da Fratura estavam limitadas a situações idealizadas com: (1) um domínio infinito, (2) um material homogêneo e, na maioria dos casos, isotrópico, e (3) condições de contorno relativamente simples. Para lidar com problemas práticos da Mecânica da Fratura em estruturas reais de tamanhos finitos, forma arbitrária, complicadas condições de contorno, e diferentes propriedades de material é necessário o uso de métodos numéricos (Atluri e Nakagaki, 1986).

Os métodos numéricos trouxeram significativa contribuição em todos os campos da engenharia civil, mecânica e aeroespacial. Dentre os principais métodos numéricos destacamos o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método das Diferenças Finitas (MDF) que se tornaram amplamente conhecidos e ganharam aceitação entre a comunidade científica de engenharia. Entretanto, uma das maiores dificuldades em usar esses poderosos métodos de análise é a demanda de grandes tempos para preparação dos dados e resolução dos sistemas de equações gerando com isso enormes custos computacionais.

Nas últimas quatro décadas (Banerjee, 1981, Brebbia e Dominguez, 1989, Aliabadi e Rooke, 1991) surgiu um novo método numérico muito versátil e poderoso para lidar com os problemas de engenharia, denominado de Método dos Elementos de Contorno (*MEC*). Entretanto, as bases utilizadas neste método já são conhecidas há mais de cem anos (Banerjee, 1981, Brebbia e Dominguez, 1989). De fato, algumas das formulações em integrais de contorno para a elasticidade, propagação de ondas em elasto-dinâmica e equações de fluxo potencial já existem na literatura pelo menos há setenta anos. Com a evolução dos computadores, nos anos sessenta, o *MEC* começou a ganhar popularidade inicialmente o método era conhecido como o “Método das Equações Integrais de Contorno”, posteriormente passou a ser denominado de “Método das Equações Integrais” (Banerjee, 1981), entre outros nomes. Mas o método firmou-se mesmo a partir da década de oitenta com o nome de “Método dos Elementos de Contorno (*MEC*)”. A partir daí, o método ganhou força como pode ser visto das muitas publicações e trabalhos científicos realizados em diversas áreas da engenharia e disponíveis na literatura. Uma variante deste método é o Método dos Elementos de Contorno Dual (*MECD*). O potencial do *MEC* e do *MECD* em algumas áreas da engenharia, incluindo a Mecânica da Fratura, mostra que ele pode ser mais adequado e pode fornecer resultados mais precisos com menor custo e tempo computacional.

Nas próximas seções serão apresentados os princípios do *MEF*, do *MEC* e do *MECD*, pois para a Mecânica da Fratura são atualmente os mais empregados e versáteis (Assan, 1999, Brebbia e Dominguez, 1989).

3.6.1 – Método dos Elementos Finitos - *MEF*

Os princípios do Método dos Elementos Finitos são expostos neste trabalho como informativo, não se inclui aqui explicações detalhadas deste método versátil, importante, e bastante estudado na literatura e que sem dúvida mereceria maior detalhamento. Como o trabalho aqui apresentado é totalmente realizado com o *MEC* a idéia é apenas mencionar os princípios do *MEF* para servir de comparação com os outros métodos *MEC* e *MECD*.

O *MEF* foi originalmente criado para analisar problemas no campo estrutural, onde foi amplamente desenvolvido e explorado na indústria aeroespacial nos anos cinquenta e sessenta (Assan, 1999). A resolução de muitos problemas em engenharia é extremamente difícil ou impossível através de métodos analíticos convencionais. No passado era comum

se fazer simplificações para se chegar à solução de um problema prático. Por causa das incertezas envolvidas em tais procedimentos, grandes fatores de segurança eram introduzidos. Com o advento dos computadores, entretanto, a ênfase na análise de problemas da engenharia foi transferida para os métodos numéricos, e entre eles o que mais se destaca é o *MEF* (Fenner, 1996).

O *MEF* envolve dividir sistemas físicos, tais como estruturas, sólidos ou fluídos, em pequenas sub-regiões ou elementos. Cada elemento é uma unidade essencialmente simples, da qual o comportamento pode ser analisado. As complexidades do sistema global são acomodadas usando um grande número de elementos, ao invés de se recorrer às sofisticadas matemáticas exigidas pelos métodos analíticos para representar tais complexidades. Uma das atrações principais do *MEF* é a facilidade com que se pode trabalhar com problemas envolvendo geometrias complexas. O preço que se deve pagar pela flexibilidade e simplicidade do elemento é a quantidade de trabalho computacional envolvida (Fenner, 1996).

O *MEF* normalmente utilizado prevê a divisão do contínuo em um número finito de pequenas regiões denominadas elementos finitos, transformando o meio contínuo em discreto. O conjunto de elementos forma a chamada malha de elementos finitos, que pode ser aumentada ou diminuída variando o tamanho dos elementos finitos. Cada elemento possui um conjunto de nós e funções de interpolação que aproximam o que ocorre dentro do elemento em termos do que se passa nos nós do elemento. Ao invés de buscar uma função admissível que satisfaça as condições de contorno para todo o domínio, no *MEF* as funções admissíveis são definidas no domínio de cada elemento finito. Para cada elemento finito i é montado um funcional Π_i que, somando aos dos demais elementos finitos, formam o funcional Π para todo o domínio (Assan, 1999):

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \Pi_i \quad (3.99)$$

onde n é o número total de elementos no domínio.

Para cada elemento i , a função aproximadora é formada por variáveis referidas aos nós do elemento (parâmetros nodais que podem ser geometria, deslocamentos, forças, etc.) e por funções denominadas de forma. Assim, a função aproximadora para elementos isoparamétricos w tem a forma:

$$w = \sum_{j=1}^m a_j \phi_j \quad (3.100)$$

onde m é o número de nós no elemento, a_j são parâmetros nodais e ϕ_j as funções de forma.

O funcional Π da Equação (3.99) é agora uma função dos parâmetros nodais a_j :

$$\Pi(a_j) = \sum_{i=1}^n \Pi_i(a_j) \quad (3.101)$$

A condição de estacionariedade da Equação (3.101) gera, portanto, um sistema de equações algébricas lineares, tal como:

$$\delta \Pi(a_j) = \sum_{i=1}^n \delta \Pi_i(a_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Pi_i(a_j)}{\partial a_j} = 0 \quad (3.102)$$

A solução do sistema de Equações (3.101) fornece os valores dos parâmetros nodais a_j que podem ser deslocamentos, forças internas, ou ambos, dependendo da formulação do Método dos Elementos Finitos que se utiliza (Fenner, 1996).

Se o campo de deslocamentos é descrito por funções aproximadoras e o princípio da mínima energia potencial é empregado, as incógnitas são as componentes dos deslocamentos nodais e o *MEF* é denominado de “Método dos Elementos Finitos, Modelo dos Deslocamentos” ou “Método dos Elementos Finitos, Modelo de Rigidez”. Se o campo de tensões ou esforços internos é representado por funções aproximadoras, as incógnitas são as tensões ou esforços internos nodais e o *MEF* é denominado de “Método dos Elementos Finitos, Modelo das Forças” ou “Método dos Elementos Finitos, Modelo da Flexibilidade” sendo utilizado o princípio da mínima energia complementar. Nos métodos mistos, as funções aproximadoras são expressas em termos de deslocamentos e forças internas ou tensões e são derivadas de princípios variacionais generalizados, como o princípio de Reissner (Assan, 1999).

A maioria dos códigos disponíveis utiliza o método dos deslocamentos. Este método utiliza a seguinte equação matricial para resolução das incógnitas:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (3.103)$$

onde \mathbf{K} é conhecida como matriz de rigidez, \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos nodais e \mathbf{p} é o vetor das cargas nodais. A matriz \mathbf{K} é calculada para cada elemento, e então se faz uma montagem para todo o domínio, chamando-se então a matriz resultante de matriz rigidez global do sistema. De forma análoga se procede para os vetores de deslocamento e carga. Uma das vantagens do *MEF* está justamente na manipulação da matriz global, pois se trata de uma matriz banda, que através de códigos computacionais específicos, pode trazer ganhos computacionais significativos na solução de problemas complexos (Fenner, 1996).

Para o caso do uso do *MEF* na Mecânica da Fratura, a singularidade existente na ponta da trinca na *MFEL* é difícil de modelar. Entretanto, a utilização de elementos especiais para discretização da malha nesta região faz o *MEF* apresentar valores condizentes aos valores conseguidos pelos métodos analíticos (Barsoum, 1976).

Programas comerciais como o ANSYS (1994), entre outros, e também pacotes de *MEF* desenvolvidos no meio acadêmico como o EF++, desenvolvido no Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília, podem ser usados para as aplicações em elasticidade conseguindo-se valores bem próximos aos comprovados por outros métodos.

Entre as desvantagens do uso do *MEF* na Mecânica da Fratura, destaca-se a dificuldade da atualização da malha para o acompanhamento da propagação da trinca. Outra dificuldade do *MEF* é a simulação das singularidades específicas na ponta da trinca na Mecânica da Fratura. Estes foram motivos, entre outros, que impulsionaram a utilização de um método mais recente no meio acadêmico para a resolução dos problemas relacionados com a fratura, o Método dos Elementos de Contorno.

3.6.2 – Método dos Elementos de Contorno - *MEC*

Os fundamentos teóricos do *MEF* são bastante conhecidos. O mesmo não acontece com o *MEC* que segundo Brebbia e Domingues (1989), surgiu como uma ferramenta alternativa para a análise numérica de problemas de engenharia. O *MEC* é apropriado para os casos onde se requer maior precisão nos resultados, como por exemplo, problemas com altos gradientes de tensão e deformação, domínio infinito, entre outros. Outra grande vantagem do *MEC* é não necessitar da discretização do domínio do corpo sob análise (Partridge, Brebbia e Wrobel, 1992). Com isso as malhas tornam-se mais simples e fáceis

de serem modificadas. Outra vantagem, para problemas sem termos de domínio, é a redução da dimensionalidade do problema. Geometrias tipicamente tridimensionais podem ser reduzidas a problemas com integrais de área. Problemas bidimensionais são reduzidos a integral de linha. Isso gera uma redução considerável do tempo necessário para a preparação dos dados (poupando o usuário), e se houver necessidade de atualizações subseqüentes na malha (caso de propagação de trinca), estas atualizações podem ser feitas com muita facilidade (Cruse, 1988; Bezerra, 1993).

O *MEC* calcula os valores das componentes de deslocamento (u^i) em qualquer ponto interno ou externo em termos de integrais no contorno Γ e no domínio Ω através de

$$c_j u_{ij} + \int_{\Gamma} T_{ij} u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij} t_j d\Gamma \quad (3.104)$$

onde u_k e p_k são, respectivamente, os deslocamentos e as forças de superfície no contorno, b_k são as forças de corpo e T_{ij} e U_{ij} são soluções fundamentais em deslocamentos e forças de superfície. Na Equação (3.103) a última integral pode ser desprezada se as forças de corpo forem desprezíveis – sobrando, portanto, na expressão acima, apenas as integrais de contorno. Para problemas da elasto-estática b_k pode ser desprezado. Para pontos no contorno ou no interior há diferentes valores da constante c_{ij} (Brebbia, Telles e Wrobel, 1984).

Em elasto-estática isotrópica, o *MEC* trabalha com as soluções fundamentais de Kelvin como funções de peso na formulação matemática mais genérica conhecida como “Método dos Resíduos Ponderados” (Brebbia e Domingues, 1989). Tais soluções de Kelvin para deslocamentos U_{ij} e forças de superfície T_{ij} em 2D, são, respectivamente:

$$U_{ij} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{lk} + r_{,l} r_{,k} \right] \quad (3.105)$$

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu) \delta_{lk} + 2r_{,l} r_{,k} \right] + (1-2\nu) (n_l r_{,k} - n_k r_{,l}) \right] \quad (3.106)$$

onde:

$$r_{,l} = \frac{\partial r}{\partial x_l} = \frac{x_j - x_i}{r}, \quad r_{,k} = \frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{y_j - y_i}{r},$$

$$r = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

e ν é o coeficiente de Poisson, δ_{lk} é o delta de Kronecker, μ é o módulo de elasticidade transversal, n é a normal à superfície de contorno Γ com componentes n_l e n_k no espaço 2D e x_i e y_i são as coordenadas de um ponto pertencente ao objeto em estudo no espaço 2D.

Na literatura, a Equação (3.104) é conhecida como *Identidade de Somigliana*. Para se resolver esta equação numericamente, discretiza-se o contorno Γ em elementos (elementos de contorno). Geralmente se considera no MEC elementos constantes, linear de 2 nós ou elementos mais precisos, quadráticos, de 3 nós. Os deslocamentos e as forças podem ser escritos em termos de funções de forma Φ e valores nodais u^j e p^j

$$u = \Phi u^j \quad \text{e} \quad p = \Phi p^j \quad (3.107)$$

A matriz das funções de interpolação Φ , para o caso de elementos quadráticos em 2D, é de dimensão 2×6 . Sendo u_l^j e p_l^j , respectivamente, deslocamentos e força nodais, a Equação (3.107) torna-se

$$u = u^j = \begin{Bmatrix} u_1^j \\ u_2^j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} = \Phi u^j \quad (3.108)$$

$$p = p^j = \begin{Bmatrix} p_1^j \\ p_2^j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_1^3 \\ p_2^3 \end{Bmatrix} = \Phi p^j$$

Com essa notação a Equação (3.104) quando discretizada passa a ser:

$$c_j u_{ij} + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma} T_{ij} \Phi \, d\Gamma \right\} u^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma} U_{ij} \Phi \, d\Gamma \right\} p^j + \sum_{s=1}^M \left\{ \int_{\Omega} U_{ij} b^j \, d\Omega \right\} \quad (3.109)$$

onde NE é o número de elementos no contorno Γ e M é o número de elementos no domínio. Essa discretização dentro do domínio nos problemas mais simples da elasto-estática normalmente pode ser desconsiderada, além do mais as incógnitas do problema estão no contorno (diferentemente do que ocorre no *MEF*). Na Equação (3.109), c^i é uma constante obtida após manuseio da integração da Equação (3.104) no sentido de valor principal de Cauchy. c^i é proporcional ao ângulo entre duas superfícies que chegam a um ponto e vale $\frac{1}{2}$ para contornos suaves num ponto (Brebbia e Domingues, 1989). Denominando-se ainda:

$$\bar{H}^{ij} = \sum_{t \in \Gamma_i} \int_{\Gamma_t} T_{ij} \Phi_q \, d\Gamma \quad \text{e} \quad G^{ij} = \sum_{t \in \Gamma_i} \int_{\Gamma_t} U_{ij} \Phi_q \, d\Gamma \quad (3.110)$$

Definindo ainda $H^{ij} = \bar{H}^{ij}$ para $i \neq j$ e $H^{ij} = \bar{H}^{ij} + c^i$ para $i = j$.

Com os termos H^{ij} e G^{ij} da matriz \mathbf{H} e da matriz \mathbf{G} , respectivamente, e desprezando a discretização no domínio (em problemas onde as forças de massa não são relevantes), a Equação (3.109) pode ser então reescrita, em termos matriciais, como:

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{p} \quad (3.111)$$

Note que \mathbf{u} e \mathbf{p} representam, respectivamente, os vetores de deslocamentos e de tensões no contorno. As matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} são alcançadas fazendo que o ponto de colocação (ponto fonte) seja tomado em cada nó que discretiza o contorno da peça e então é calculado a influência que forças e deslocamentos sobre este ponto causam sobre cada nó denominado então de ponto campo. Quando se realiza a análise para todos os pontos de colocação tem-se então a matriz \mathbf{H} e \mathbf{G} , onde a matriz \mathbf{H} usa a solução fundamental em tensão e a matriz \mathbf{G} em deslocamento. Introduzindo as condições de contorno (deslocamentos \bar{u} e forças \bar{p} , definidas em Γ) e fazendo um rearranjo na Equação (3.111) de forma a reposicionar os valores de \bar{u} e \bar{p} , com os seus respectivos termos multiplicadores de \mathbf{H} e \mathbf{G} , resulta, à direita da Equação (3.111), um vetor \mathbf{f} . Como resultado desta operação, após o rearranjo, ocorre também, à esquerda da Equação (3.111), uma matriz \mathbf{A} que multiplica as incógnitas

da Equação (3.111). Denominado este vetor de incógnitas de vetor x , obtém-se:

$$A x = f \quad (3.112)$$

É interessante notar que as incógnitas (u e p) no vetor x são deslocamentos e forças no contorno Γ e a matriz A é formada por linhas da matriz H e G dependendo das condições de contorno (\bar{u} e \bar{p}) dadas.

A resolução desse sistema de equações faz com que as incógnitas no contorno, ou forças ou deslocamentos, sejam obtidos e assim qualquer valor no interior do domínio pode ser calculado (Brebbia, Telles e Wrobel, 1984) pela Equação (3.108).

Também no *MEC* ocorreu o desenvolvimento de elementos especiais para a melhor representação das tensões na região próxima a ponta da trinca, região esta onde as tensões apresentam singularidade. A utilização desses elementos é descrita em uma seção posterior deste trabalho tanto para o *MEC* como para o *MEF* (Blandford, Ingraffea e Liggett, 1981).

Um método mais recente que o *MEC* e mais apropriado para certos tipos de problema é detalhado na próxima seção. Tal método foi denominado de Método dos Elementos de Contorno Dual (*MECD*). Este método será utilizado nos exemplos numéricos apresentados neste trabalho no capítulo 5.

3.6.3 – Método dos Elementos de Contorno Dual - *MECD*

Uma das primeiras aplicações do Método dos Elementos de Contorno para problemas de trincas foi realizada por Cruse (1972) e o autor relata uma precisão de 14 % (quatorze por cento) para a avaliação do fator de intensidade de tensão. Nos vinte e cinco anos seguintes o Método dos Elementos de Contorno se aprimorou e estabeleceu-se como uma técnica eficiente e precisa para avaliação do fator de intensidade de tensão e análise de crescimento de trincas no contexto da *MFEL*. O método também apresentou evoluções para se trabalhar com não-linearidades e com problemas com dependência do tempo. Uma revisão completa do Método dos Elementos de Contorno aplicado a Mecânica da Fratura pode ser encontrada em Aliabadi (1997-A).

O principal problema, em se tratando de estruturas com trincas resolvidos pelo Método dos Elementos de Contorno, residia no fato da introdução desta trinca no domínio para a simulação numérica. Este problema podia ser contornado de várias maneiras, como

por exemplo, considerando a trinca aberta, o que acarretaria na possibilidade de discretização dentro da peça, com esta, apresentando um vazio na região da trinca (Bezerra, 1993). Outra maneira de se contornar este problema era a da subdivisão do domínio fazendo com que a trinca pudesse ser representada com condições de contorno apropriadas para sua simulação (Blandford, Ingraffea e Liggett, 1981, Leme et al, 2005-c). Esta opção sempre acabava por colocar a trinca em contato com a superfície externa da peça, de modo a possibilitar a discretização da mesma em domínios diferentes. Uma terceira opção apresentada ainda para o Método dos Elementos de Contorno é a aplicação das funções de Green para a simulação da trinca (Erdogan, 1962).

Apesar destas simulações apresentarem resultados satisfatórios, todas elas possuíam limitantes quando se aproximavam da situação real em que a maioria das trincas se apresentam nas estruturas. Isto é, normalmente as trincas presentes em estruturas metálicas são defeitos internos que não possuem espaçamento entre as suas superfícies, não podendo assim ser consideradas abertas. Algumas vezes mesmo sendo elas abertas, se o carregamento for cíclico o fechamento da trinca acarreta tensões internas que não tinham como ser consideradas com a técnica da discretização da trinca aberta. Outro limitante era o fato do aumento exagerado do tempo computacional requerido para a resolução do sistema, caso fosse necessária a realização de muitas subdivisões do domínio para peças que não apresentavam simetria ou com a presença de múltiplas trincas.

O método da divisão do domínio em sub-regiões introduz um contorno artificial dentro da estrutura, que conecta a trinca ao contorno, de tal modo que o domínio é dividido em sub-regiões sem trincas. A principal desvantagem deste método é que esta introdução de condições de contorno artificiais não é única e por isso não pode ser implementada de forma automática para uma análise, por exemplo, onde se queira avaliar a propagação da trinca. Além disso, este método acarreta a geração de sistemas de equações muito grandes e maiores do que os que são encontrados em outras metodologias de análise (Portela, Aliabadi, e Rooke 1993).

Para a metodologia da simulação da trinca através das funções de Green, a limitação estava normalmente no fato de complicações numéricas muito grandes para a resolução dos problemas para múltiplas trincas. A utilização das Funções de Green é um método que considera a presença intrínseca da trinca no equacionamento do problema. Este método trás algumas complicações matemáticas devido ao fato das funções de Green terem que simular o efeito da trinca diretamente no equacionamento do problema. Outra

desvantagem deste método é que ele possibilita a simulação de apenas trincas retas, não podendo ser aplicado para o caso onde as trincas são curvas ou apresentam o crescimento de trinca de forma não reta (Salgado e Aliabadi, 1996).

A intenção de se executar, através do *MEC*, a implementação de múltiplas trincas internas e considerando superfícies fechadas, era um fator de estímulo muito grande que acabou resultando na nova metodologia denominada então de *MECD* (Portela, Aliabadi e Rooke, 1993). A dificuldade inicial era justamente na discretização das duas superfícies que formam a trinca. Estes nós na malha teriam a mesma posição geométrica ou seriam discretizados muito próximos um do outro trazendo um problema conhecido como singularidade na hora da aplicação da equação básica do *MEC*. Este problema foi superado no momento em que se aplicou uma equação diferente para os nós de uma das superfícies da trinca. Esta equação deveria ser linearmente independente para que o sistema de equações formado para a resolução do problema pudesse encontrar respostas para os graus de liberdade adicionados através da duplicação dos nós na posição da trinca.

O *MECD*, proposto por Portela, pode resolver problemas de trincas gerais nos modos I e II sem a necessidade de se subdividir a região em análise. Para isso, este método aplica a equação integral de contorno em deslocamento para uma das superfícies da trinca enquanto a equação integral de contorno em força é aplicada na outra superfície da trinca (Aliabadi, 1997-B).

As equações duais, nas quais o *MECD* está fundamentado, são equações integrais de contorno em deslocamento e forças. A equação integral de contorno de deslocamento pode ser derivada com o teorema do trabalho (Portela, 1980). Na ausência de forças de corpo e assumindo continuidade nos deslocamentos no ponto do contorno x' , a representação da integral de contorno para um deslocamento u_i no ponto qualquer x do corpo é dada por:

$$c_{ij}(x')u_j^i(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x)u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x)t_j(x) d\Gamma(x) \quad (3.113)$$

onde i e j denotam as coordenadas cartesianas; $T_{ij}(x', x)$ e $U_{ij}(x', x)$ representam as soluções fundamentais de Kelvin para forças de superfície e deslocamento respectivamente, para o ponto do contorno x . A distância entre os pontos x e x' é denominada de r . As integrais na Equação (3.113) são regulares enquanto $r \neq 0$. Quando $r \rightarrow 0$, as soluções fundamentais (Equações (3.105) e (3.106)) apresentam singularidades. Estas singularidades são fortes em

T_{ij} , ou seja; da ordem de $1/r$ e são fracas em U_{ij} , ou seja; da ordem de $\ln 1/r$. O primeiro termo na Equação (3.113) resulta do valor principal de Cauchy e os coeficientes $c_{ij}(x')$ são $\delta_{ij}/2$ para um contorno suave no ponto x' (δ_{ij} é o delta de Kronecker). A utilização da Equação (3.113) é a base para o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Na ausência de forças de corpo e assumindo continuidade de deformações e forças de superfície num contorno suave no ponto x' , as componentes das tensões σ_{ij} são dadas por:

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij}(x') + \int_{\Gamma} S_{ijk}(x', x) u_k(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} D_{ijk}(x', x) t_k(x) d\Gamma(x) \quad (3.114)$$

Na Equação (3.114) os termos S_{ijk} e D_{ijk} contêm as derivadas das soluções fundamentais T_{ij} e U_{ij} cujas expressões estão, respectivamente, nas Equações (3.105) e (3.106). As integrais na Equação (3.114) são regulares desde que $r \neq 0$. Quando a distância r tende a zero, S_{ijk} exibe uma hipersingularidade da ordem de $1/r^2$, enquanto que D_{ijk} exibe uma singularidade forte da ordem de $1/r$. A primeira integral na Equação (3.114) é denominada de integral de valor principal de Hadamard (Aliabadi, 1997-A, Aliabadi, 1998). Para um contorno suave as componentes das forças são dadas por:

$$\frac{1}{2} t_i(x') + n_i(x') \int_{\Gamma} S_{ijk}(x', x) u_k(x) d\Gamma(x) = n_i(x') \int_{\Gamma} D_{ijk}(x', x) t_k(x) d\Gamma(x) \quad (3.115)$$

onde n_i denota a componente i da normal unitária externa ao contorno no ponto x' . As Equações (3.113) e (3.115) constituem a base do Método de Elementos de Contorno Dual (Portela, Aliabadi e Rooke, 1992). Essas duas equações são linearmente independentes, deste modo, a resolução para a Equação (3.112) pode ser alcançada mesmo quando existir nós na mesma posição geométrica, como o que acontece quando existe a presença de trincas nas peças.

Neste trabalho, na tentativa de manter o mais simples possível a utilização do MECD, algumas estratégias de modelagem foram empregadas para a sua utilização. As seguintes características são observadas e apresentadas na Figura 3.17:

1. As trincas nos contornos e internas são modeladas com elementos descontínuos.

2. Elementos contínuos normais são empregados para a discretização do contorno da peça, exceto na junção com a trinca onde são empregados elementos semi-descontínuos.
3. A equação integral de contorno em deslocamento (Equação (3.113)) é aplicada ao contorno da peça e a uma das superfícies da trinca.
4. A equação integral de contorno em tração (Equação (3.115)) é aplicada na outra superfície da trinca.
5. Elementos especiais podem ser ainda empregados para discretização da ponta da trinca.

A aplicação de elementos descontínuos para as trincas estava relacionada a facilidade que estes elementos apresentam para se calcular as integrais de valores principais de Cauchy e Hadamard (Aliabadi, 1997-A), quando estas apresentam singularidades.

Os elementos semi-descontínuos entre a trinca e o contorno externo estavam ligados ao fato também da presença de cantos o que existe sempre que a trinca estiver em contato com o contorno externo. A aplicação ainda de elementos especiais se dá pelo fato da tentativa da melhor simulação do que ocorre com a tensão nesta posição. Este fato será melhor explicado na seção 3.7 deste trabalho.

Esta simples estratégia torna o *MECD* robusto e permite uma simulação eficiente de trincas internas e nos contornos, bem como a análise de propagação de trincas (Portela, Aliabadi e Rooke, 1993).

3.6.4 – Utilização da Transformada de Laplace no *MECD*

O Método dos Elementos de Contorno também foi empregado com sucesso na análise dinâmica. Aqui se faz um histórico da utilização do *MEC* na análise dinâmica.

A primeira formulação em integral de contorno para a análise dinâmica de sólidos foi apresentada por Cruze e Rizzo (1968) e desde então a sua formulação foi seguida por uma série de autores, tais como Aliabadi e Rooke (1991), Chirino, Gallego, Saez (1994), Brebbia e Nardini (2000), entre outros.

Esta formulação (Cruze e Rizzo, 1968) apresenta os resultados normalmente no domínio da frequência e raramente no domínio do tempo. Elas implicam na escolha da

faixa de frequência de interesse para se obter a resposta dinâmica do sistema. A resposta no domínio do tempo pode ainda ser obtida realizando-se uma transformação através do procedimento denominado de transformada inversa onde se usa a transformada de Laplace e algumas vezes a transformada de Fourier (Brebbia e Nardini, 2000).

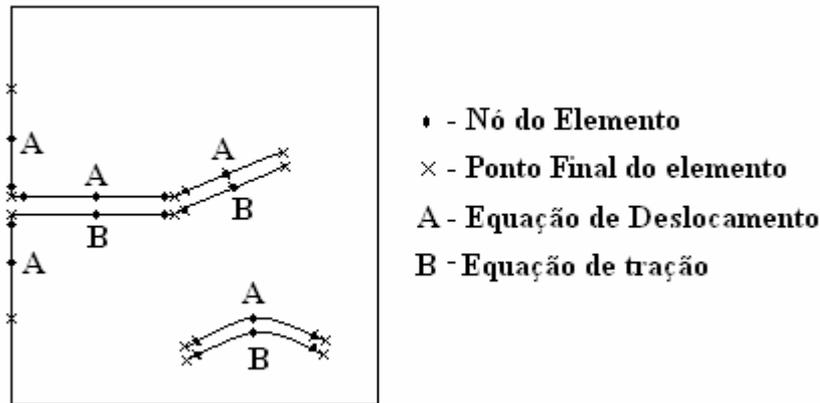


Figura 3.17 – Modelagem do problema de trinca para o uso do *MECD*.

O tema da Mecânica da Fratura dinâmica envolve a análise de estruturas com trinca quando o carregamento ou o tamanho da trinca se modificam rapidamente. Nestes casos os efeitos da inércia deverão ser levados em consideração. O quanto estes efeitos são significantes depende das condições de carregamento, das propriedades dos materiais e das configurações geométricas dos corpos em análise. A iniciação do crescimento rápido da trinca, o caminho e a velocidade de propagação da mesma são assuntos de interesse particular da mecânica da fratura dinâmica, e eles são controlados pelos fatores de intensidade de tensão dinâmicos (*FITD*) (Brebbia e Nardini, 2000).

Estruturas com trincas de formas arbitrárias e sujeitas a condição de contorno dependente do tempo podem apenas ser analisadas usando métodos numéricos. Dentre os diferentes métodos, o *MEC* é amplamente utilizado na mecânica da fratura, devido a alta precisão apresentada por este método (Cruse, 1988, Aliabadi e Rooke, 1991). Problemas com dependência do tempo podem ser resolvidos também pelo *MEC* pelo uso de métodos de domínio do tempo, como os métodos das Transformadas de Laplace e de Fourier, ou ainda pelo método da reciprocidade dual (Manolis e Beskos, 1988, Domingues, 1993). Comparações destas aproximações aplicadas à Mecânica da Fratura dinâmica podem ser encontradas em diversas publicações (Chirino, Gallego, Saez, 1994, Fedelinski, Aliabadi e

Rooke, 1995-A).

Neste trabalho será aplicada o método da Transformada de Laplace, pois este permite a análise de trincas para domínios finitos e infinitos apresentando sempre resultados precisos (Chirino, Gallego, Saez, 1994, Fedelinski, Aliabadi e Rooke, 1995-A).

A estrutura computacional para a implementação do método da Transformada de Laplace é relativamente simples e não requer muita memória computacional para armazenamento de grande quantidade de dados (Brebbia e Nardini, 2000).

Uma aplicação do método da Transformada de Laplace foi apresentada por Sládek e Sládek (1986), que analisou um domínio infinito elástico com trinca sujeito a carregamentos de impacto nas superfícies da mesma. O problema foi resolvido usando a equação integral de contorno em forças de superfície em termos das descontinuidades do deslocamento da trinca (Sládek e Sládek, 1986). Um sistema de coordenadas polar foi assumido e também considerou-se variações lineares do deslocamento ao longo do raio. O fator de intensidade de tensão dinâmico (*FITD*) foi calculado utilizando o deslocamento de abertura da trinca (*COD*). As influências do coeficiente de Poisson e da frequência foram estudadas para carregamentos harmônicos. Para carregamentos de impacto o *FITD* dependente do tempo foi obtido usando o método Durbin.

Os mesmos autores (Sládek e Sládek, 1987) usaram a integral de contorno em deslocamento para analisar problemas simétricos de chapas retangulares com trincas de canto sujeitas à diferentes carregamentos e tubos de paredes espessas sob pressão interna com trincas radiais localizadas nas paredes internas e externas. Os contornos foram discretizados usando elementos quadráticos e o *FITD* foi calculado através do *COD*. Por causa da simetria da estrutura e das condições de contorno apenas uma parte da estrutura precisou ser modelada. Um método similar foi usado por Yin e Ji (1988) para analisar uma chapa retangular com uma trinca central. A influência de diferentes tamanhos de trincas e diferentes carregamentos foram estudados. O *FITD* foi calculado usando-se também o *COD* com elementos ponto a um quarto (ver próxima seção) e a técnica da extrapolação. Zhang, Lee e Zang (1009) analisaram os problemas de trinca simétrica tridimensional de uma chapa retangular com trinca passante e trinca semicircular superficial em um cubo (Zou, Tong e Steven, 2000). O *FITD* foi calculado usando o *COD* de elementos singulares. Este tipo de elementos será explicado mais detalhadamente na próxima seção. As soluções dependentes do tempo foram obtidas usando o método Durbin. Este método de conversão das soluções do parâmetro de Laplace para o tempo será abordado ainda nesta seção, pois

será a metodologia empregada neste trabalho. Tanaka usou um método similar para calcular o *FITD* para uma chapa retangular com uma trinca (Tanaka et al., 1993). Os efeitos da variação do número de elementos no contorno e o número de parâmetros nos métodos de inversão de Durbin e Hosono para a transformada de Laplace foram estudados (Tanaka et al, 1993). Polyzos analisou chapas retangulares de materiais visco-elásticos com trincas centrais ou de canto inclinadas (Polyzos, Stamos e Beskos, 1994). O problema de trinca no modo I e II foi resolvido usando a técnica da sub-região. Fedelinski apresentou uma aplicação do *MECD* combinado com o Método da Reciprocidade Dual (Fedelinski, Aliabadi e Rooke, 1993, Fedelinski, Aliabadi e Rooke, 1994-A) e para o método no domínio de tempo para trincas estacionárias na estrutura sujeitas a carregamentos dinâmicos (Fedelinski, Aliabadi e Rooke, 1994-B, Fedelinski, Aliabadi e Rooke, 1995-B). Outros exemplos também podem ser encontrados em outra publicação (Fedelinski, Aliabadi e Rooke, 1996). A formulação apresentada neste último artigo é usada como base para as execuções posteriores realizadas neste trabalho.

3.7 – UTILIZAÇÃO DE ELEMENTOS ESPECIAIS

Para problemas da Mecânica da Fratura Elástica Linear (*MFEL*) bidimensional, a utilização de elementos especiais podem melhorar as respostas tanto no *MEF* (Cavalcanti, 1997) como no *MEC* (Medeiros, 2000). Antes de entendermos as funções especiais para elementos de contorno, convém observar as funções especiais que são usadas em elementos finitos. Para simular a singularidade de tensão na ponta da trinca, em elementos finitos planos, quadrático e isoparamétrico em 2D com 8 nós, Barsoum (1976) e Hensel e Shaw (1975) demonstram que a forma mais conveniente de se introduzir a singularidade $1/\sqrt{r}$, característica da tensão na ponta da trinca (Equações (3.6) a (3.8)), é com a manipulação das posições dos nós intermediários nas funções de forma do elemento. Normalmente estas funções de forma ϕ_i (em coordenadas naturais para o nó “i”, ou seja; $\xi_i \in [-1; 1]$ e $\eta_i \in [-1; 1]$) após a manipulação do nó intermediário para a posição de um quarto do lado do elemento (quater-point) toma a seguinte forma (Barsoum, 1976):

$$\phi_i = \left[(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) - (1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i) - (1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i) \right] \xi_i^2 \eta_i^2 / 4 + (1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi_i^2) \eta_i^2 / 2 + (1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta_i^2) \xi_i^2 / 2 \quad (3.116)$$

De fato, as tensões podem ser obtidas das deformações e estas das derivadas em relação às coordenadas (x, y) das funções de forma da Equação (3.116). Estas deformações são inversamente proporcionais ao Jacobiano entre os sistemas (x, y) e as coordenadas naturais (ξ, η) , jacobiano este que se torna nulo na ponta da trinca, ou seja; neste ponto a deformação vai ao infinito e a tensão mostra a singularidade desejada. O elemento de Barsoum (1976), com a função de forma da Equação (3.116) ficou conhecido na literatura como Elemento ponto a um quarto.

No *MEC*, o elemento mais utilizado para a discretização de problemas planos é o elemento quadrático. Para a coordenada natural em “i” $\xi_i \in [-1, 1]$, as funções de interpolação ϕ_i usadas na Equação (3.108) são do tipo quadráticas e unidimensionais. Note que o *MEC* em problemas 2D reduz de um a dimensionalidade do problema, portanto, para problemas 2D, são necessárias funções de interpolação unidimensionais em ξ .

$$\phi_i = (\xi^2 - 1)(\xi_i^2 - 1) + \xi_i^2 (\xi^2 + \xi \xi_i) / 2 \quad (3.117)$$

A representação gráfica para essas funções de forma tanto no *MEC* quanto no *MEF* é vista na Figura 3.18. No caso do *MEF*, a representação gráfica seria para o caso, por exemplo, de $\eta = 1$.

Para a Mecânica da Fratura, especialmente a *MFEL* a tentativa de criação de elementos especiais para a discretização da ponta da trinca é de grande interesse da comunidade científica envolvida no assunto. Estes elementos especiais para a ponta da trinca contêm uma singularidade no campo das deformações na ponta da trinca, como idealizado para o *MEF*, e esta é igual à singularidade teórica esperada. A utilização da mesma técnica de Barsoum (1976) para o elemento ponto a um quarto também foi aplicada para o *MEC* por Blandford (Blandford, Ingraffea e Liggett, 1981). A aplicação deste elemento aplicado ao *MEC* é detalhada na próxima seção.

3.7.1 – Elementos Ponto a um Quarto

Como pode ser notado nas Equações (3.105) e (3.106), os deslocamentos e as tensões no *MEC*, naturalmente, vão ao infinito quando um ponto campo e um ponto de

colocação se aproximam, isto é, $x_j = x_i$ e $y_j = y_i$ fazendo com que $r = 0$. Esta singularidade se deve ao fato de que as equações para deslocamento e tensões são inversamente proporcionais a distância da posição geométrica avaliada e a ponta da trinca. Esta singularidade é motivo de preocupação no *MEC* e diversas técnicas existem para a correta integração dos integrandos impróprios que aparecem na Equação (3.109).

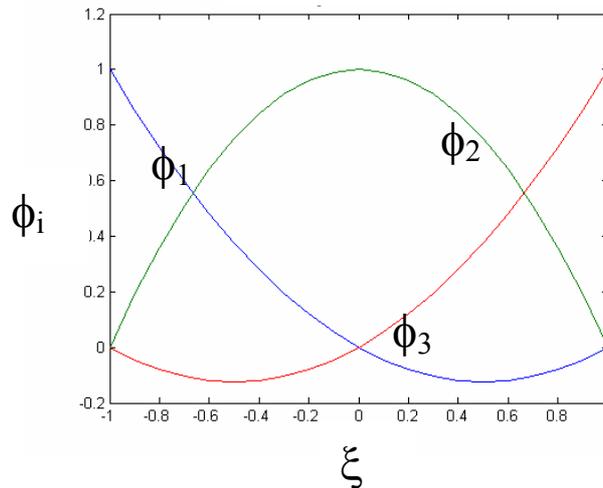


Figura 3.18 – Representação gráfica para a interpolação das funções de forma quadráticas.

Por outro lado, as soluções fundamentais propiciam ao *MEC* (mesmo com poucos elementos) a propriedade de bem capturar os elevados gradientes de tensão que ocorrem na ponta da trinca. Já no *MEF*, as singularidades são mais difíceis de serem representadas. Entretanto, tanto no *MEF* como no *MEC* a representação mais fiel das singularidades ocorre com o uso de elementos especiais na região da ponta da trinca. Elementos quadráticos são normalmente preferidos para a discretização de malhas de problemas 2D. Os elementos singulares mais usados na ponta da trinca, tanto no *MEF* quanto no *MEC*, são conhecidos como “*quarter-point elements*”, em português, elementos ponto a um quarto (Barsoum, 1976 e Blandford, Ingraffea e Liggett, 1981). A mudança do nó central para a posição de $\frac{1}{4}$ (ou “*quarter-point*”) do seu comprimento faz com que a representação da singularidade seja, consideravelmente, melhorada. Sem elemento ponto a um quarto a função de forma representada na Equação (3.116) para o *MEF* tem a seguinte expressão para um lado do elemento (i.e. $\eta = -1$)

Deslocamento:

$$u_j = u_j^1 - (u_j^3 - 4u_j^2 + 3u_j^1)r/L + (2u_j^1 - 4u_j^2 + 2u_j^3)r^2/L^2 \quad (3.118)$$

Deformações:

$$\varepsilon_j = \frac{du_j}{dr} = -(u_j^3 + 4u_j^2 + 3u_j^1)1/L + 4(u_j^3 - 2u_j^2 + u_j^1)r/L^2 \quad (3.119)$$

onde r é a distância até a ponta da trinca e L é o comprimento do elemento. Equações semelhantes seriam obtidas para outros lados fazendo-se $\xi = -l$ na Equação (3.116). Na Equação (3.119), nota-se que não há singularidade nas deformações ε quando $r \rightarrow 0$ (na ponta da trinca) - analogamente para as tensões que são proporcionais as deformações ε .

No *MEF*, a simples mudança de posição do nó intermediário cria singularidade na deformação (e na tensão) calculada a partir da derivada dos deslocamentos. O elemento ponto a um quarto utilizado no *MEF* tem as funções de forma do elemento quadrático normal da Equação (3.116). A mudança do nó intermediário para $1/4$ de L do elemento acarreta alterações no deslocamento e, conseqüentemente, na deformação (e tensão). De fato, na Equação (3.116), para $\eta = -l$, fazendo-se $\xi = (2\sqrt{Lr}/L - 1)$ (que corresponde ao nó deslocado para a posição de um quarto do comprimento total do elemento; $r = (1/4)L \rightarrow \xi=0$) obtemos deslocamento não-singular em função de r , mas a deformação ε (e tensão) torna-se singular na ponta da trinca. Ou seja:

Para o nó em $1/4$:

Deslocamento:

$$u_j = u_j^1 - (u_j^3 - 4u_j^2 + 3u_j^1)\sqrt{rL}/L + 2(u_j^3 - 2u_j^2 + u_j^1)r/L \quad (3.120)$$

Deformação:

$$\varepsilon_j = \frac{du_j}{dr} = -1/2(u_j^3 - 4u_j^2 + 3u_j^1)1/\sqrt{Lr} + 2(u_j^3 - 2u_j^2 + u_j^1)1/L \quad (3.121)$$

Observe que após a mudança do nó para $1/4$ de L , a deformação (e conseqüentemente a tensão). O termo $1/\sqrt{Lr}$ tende ao infinito quando $r \rightarrow 0$. Sendo $[K]$ a

matriz de rigidez, $\{u\}$ o vetor deslocamento e $\{p\}$ o vetor de forças externas, note que no *MEF*, $Ku=p$; ou seja, o vetor incógnito é de deslocamentos. No *MEF*, a partir do conhecimento dos deslocamentos, as deformações (e as tensões) são calculadas.

No *MEC* os deslocamentos (vetor u) e as forças de superfície (p) são calculados separadamente pelas Equações (3.105) e (3.106). Por isso é necessária uma transformação nas funções de forma das forças de superfície (p) para se obter a singularidade de tensão na ponta da trinca (Blandford, 1981). A mudança do nó do meio para a posição de um quarto do elemento não gera singularidade nos deslocamentos cuja função de interpolação é semelhante a do *MEF* para um lado – ver Equação (3.120). Entretanto uma correta representação da singularidade de tensão no *MEC* requer a modificação da função de forma para as forças de superfície ($p = [p_j]$) pelo fator $\sqrt{l/r}$ (Blandford, 1981). Para o nó 1, por exemplo:

$$p_j = p_j^1 \sqrt{l/r} - (p_j^3 - 4p_j^2 + 3p_j^1) + (2p_j^3 - 4p_j^2 + 2p_j^1) \sqrt{r/l} \quad (3.122)$$

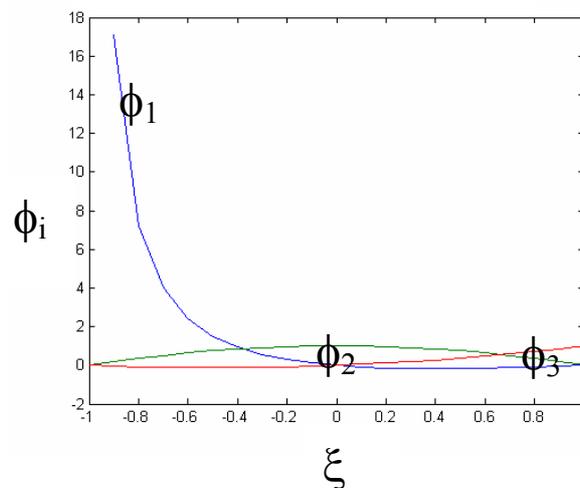


Figura 3.19 – Interpolação das funções de forma do elemento ponto a um quarto no *MEC*.

A Figura 3.19 mostra como ficam as funções de forma no caso do uso do elemento ponto a um quarto com a alteração nas funções de forma para cálculo das tensões no *MEC*.

Sem a aplicação deste fator o elemento ficou conhecido como elemento ponto a um quarto de deslocamento e com a utilização do fator $\sqrt{l/r}$ ficou conhecido como elemento ponto a um quarto de tração (Blandford, Ingraffea e Liggett, 1981).

4 – FORMULAÇÕES PARA DETERMINAR O *FIT* E A TRINCA

Neste capítulo as formulações desenvolvidas e computacionalmente implementadas neste trabalho são a seguir apresentadas. Inicialmente aborda-se a determinação do Fator de Intensidade de Tensão (*FIT*) via método dos elementos de contorno para carregamento estático e também para carregamento dinâmico. Tal formulação foi implementada em códigos computacionais de elementos de contorno.

Em seguida, neste capítulo são apresentadas as duas formulações que foram implementadas, também em códigos base de elementos de contorno, para a determinação da presença de trincas fechadas utilizando-se a técnica dos sensores piezelétricos com análises tanto estática quanto dinâmica.

Procurou-se mostrar as formulações adotadas nesta tese sem a preocupação de integrá-las num único código. O objetivo maior é demonstrar a eficiência (ou não) dos métodos numéricos adotados para alcançar os objetivos pretendidos, ou seja, determinar o *FIT* e a presença de trincas em estruturas bidimensionais.

A escolha, do tipo de análise (se estática ou dinâmica) que deve ser realizada para a determinação da trinca, depende da situação a que a estrutura está sujeita. Embora a análise estática seja mais simples e fácil de programar, muitas vezes ela não é suficiente para se obter respostas precisas para problemas onde o efeito da inércia do movimento desempenha papel significativo. Para se realizar essa escolha, vários fatos devem, portanto, ser considerados. A dependência dos valores de resposta em relação à frequência é um fator que pode ser limitante para a escolha da análise dinâmica. Outro fator a ser considerado é a variação da carga de excitação com o tempo, característica essa que muitas vezes impossibilita o uso satisfatório da análise estática.

4.1 – DETERMINAÇÃO DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO

4.1.1 – Para Carregamento Estático (*FIT*)

O Fator de Intensidade de Tensão (*FIT*) é um dos parâmetros de maior interesse para a Mecânica da Fratura, pois com ele se pode analisar a estabilidade de uma trinca. Casos para a determinação do *FIT* na análise estática já foram mostrado no capítulo anterior. Determinar o *FIT* de forma numérica é de grande interesse, pois a estabilidade da

trinca em estruturas complexas pode ser estudada através da determinação do *FIT* (Pastoukhov e Voorwald, 1995, Saouma, 2000, Ewalds e Wanhill, 1984, Broek, 1984). Neste trabalho apenas o *FIT* associado ao modo I foi desenvolvido – modo este mais utilizado na prática da engenharia.

Para a determinação do *FIT* foi utilizado um código básico em *MEC*, denominado de *MEC-I_{est}* retirado do livro de Domingues (1993). Entretanto, diversas alterações foram executadas no código para permitir uma melhor avaliação do *FIT*. Foi seguido enfoque da determinação do *FIT* pelo método da Integral-J e da equivalência que existe entre esta integral e o fator K, dado na equação abaixo:

$$K_I = \left(\frac{8\mu J}{1+k} \right)^{1/2} \quad (4.1)$$

sendo k uma constante que depende se a trinca está em estado plano de tensão ou de deformação, μ é o módulo de deformação transversal do material e K_I é o *FIT* para o modo I de abertura de trinca. A Integral-J está definida na Equação 3.66.

Nota-se que na equação da Integral-J, há um termo de derivação do vetor de deslocamento $\mathbf{u} = \{u_1; u_2\}^T$ em relação a “x” aqui representada como uma direção da abertura da trinca (ou longo do eixo x local). ds na Integral-J é um variação infinitesimal no contorno $\bar{\Gamma}$ - ver Figura 3.13. Para um estado plano, se o contorno Γ for dividido em “N” subintervalos $\bar{\Gamma} = \Sigma \bar{\Gamma}_i$, a Integral-J pode ser expressa (Owen e Fawkes, 1983; Cavalcanti, 1997; Medeiros, 2000) pelo somatório:

$$J = \sum_{i=1}^N \int_{\bar{\Gamma}_i} \left\{ \frac{1}{2} [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} dy - [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy}] \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} \end{Bmatrix} \right\} d\bar{\Gamma} \quad (4.2)$$

Primeiramente foi implementado o cálculo do vetor das derivadas ou vetor das sensibilidades do deslocamento em relação a “x” ; ou seja $\mathbf{u}_{,x} = \{\partial u_1 / \partial x; \partial u_2 / \partial x\}^T$. Este vetor aparece na Equação 4.2 e as sensibilidades são calculadas pela diferenciação implícita do vetor $\mathbf{u} = \{u_1; u_2\}^T$ que no *MEC* é dado pela equação 3.108. A diferenciação

implícita das equações integrais no *MEC* pode ser encontrada nas Referências (Saigal et al., 1989 e Bezerra, 1993 e 1995) e são usadas no cálculo do *FIT*. Para a obtenção destas sensibilidades faz-se necessário a diferenciação das soluções fundamental do *MEC*. Partindo-se da diferenciação da Equação (3.110), obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{H} \mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{G} \mathbf{p}) \quad (4.3)$$

Portanto

$$\mathbf{H}_{,x} \mathbf{u} + \mathbf{H} \mathbf{u}_{,x} = \mathbf{G}_{,x} \mathbf{p} + \mathbf{G} \mathbf{p}_{,x} \quad (4.4)$$

No *MEC* os valores dos vetores \mathbf{u} e \mathbf{p} são calculados no contorno do objeto sendo $\bar{\mathbf{u}}$ os valores prescritos dos deslocamentos e $\bar{\mathbf{p}}$ os valores prescritos das forças de superfície. Então a Equação (4.4) pode ser escrita como:

$$\mathbf{H}_{,x} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{H}_{,x} \mathbf{u} + \mathbf{H} \mathbf{u}_{,x} + \mathbf{H} \bar{\mathbf{u}}_{,x} = \mathbf{G}_{,x} \mathbf{p} + \mathbf{G}_{,x} \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{G} \mathbf{p}_{,x} + \mathbf{G} \bar{\mathbf{p}}_{,x} \quad (4.5)$$

Na Equação (4.5) os termos matriciais $\mathbf{H}_{,x} = [\mathbf{H}_{,x}^{ij}]$ e $\mathbf{G}_{,x} = [\mathbf{G}_{,x}^{ij}]$ são dados por:

$$\mathbf{H}_{,x}^{ij} = \sum_t \int_{\Gamma_t} T_{,x}^{ij} \Phi_q \, d\Gamma \quad \text{e} \quad \mathbf{G}_{,x}^{ij} = \sum_t \int_{\Gamma_t} U_{,x}^{ij} \Phi_q \, d\Gamma \quad (4.6)$$

As derivadas das soluções fundamentais $U_{,x}^{ij}$ e $T_{,x}^{ij}$ estão no Apêndice D.

Para os valores prescritos as derivadas são nulas (pois estes valores permanecem constantes ao longo da variação “ ∂x ” no tamanho da trinca). Rearranjando a Equação (4.5), pondo no lado esquerdo todos os valores incógnitos dos vetores $\mathbf{u}_{,x}$ e $\mathbf{p}_{,x}$ no contorno e do lado direito os valores prescritos e os valores já conhecidos de vetores \mathbf{u} e \mathbf{p} no contorno, a Equação (4.5) pode ser reescrita para se calcular $\mathbf{u}_{,x}$ e $\mathbf{p}_{,x}$:

$$\mathbf{H} \mathbf{u}_{,x} - \mathbf{G} \mathbf{p}_{,x} = \mathbf{G}_{,x} \mathbf{p} + \mathbf{G}_{,x} \bar{\mathbf{p}} - \mathbf{H}_{,x} \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{H}_{,x} \mathbf{u} \quad (4.7)$$

Formando então o seguinte sistema final que pode ser resolvido para as sensibilidades

$$A\mathbf{x}_{,x} = \mathbf{b} \quad (4.8)$$

Sendo A , a matriz definida na Equação (3.111), e $\mathbf{x}_{,x} = \{\mathbf{u}_{,x}; \mathbf{p}_{,x}\}^T$ é o vetor das incógnitas com as sensibilidades. Para a resolução deste sistema tem-se que a matriz A formada é sempre a mesma que a determinada na primeira resolução do problema pelo *MEC*. O vetor \mathbf{b} é o vetor das grandezas conhecidas. Isso faz com que o tempo para execução numérica da determinação das sensibilidades seja reduzido. Observa-se ainda que os vetores \mathbf{u} e \mathbf{p} que aparecem do lado direito da Equação (4.7) são valores determinados na primeira rodada para a solução do problema pelo *MEC*.

Este trabalho não desenvolveu rotinas de determinação do cálculo dos parâmetros da Mecânica da Fratura para carregamentos dinâmicos, mas a extensão da formulação aqui apresentada com o *MEC* e cálculos de sensibilidades das soluções fundamentais poderiam com pouco esforço adaptar-se para o cálculo do *FIT* dinâmico via $\Delta\mathbf{J}$.

A implementação da rotina para o cálculo da Integral-J, conforme descrito pelas Equações (4.1) a (4.8) para a determinação do *FIT* (Leme, et al, 2005a, Leme, et al, 2005b, Leme, et al, 2005c, Leme, et al, 2005d, Leme, et al, 2005e), serão exemplificados e comparados com outras formulações nos exemplos numéricos apresentados neste trabalho no próximo capítulo.

4.1.2 – Para Carregamento Dinâmico (*FITD*)

O *FITD* é importante na *MFEL*, mas o número de publicações neste assunto é bem menor que para o encontrado para o cálculo do *FIT*. Esse problema decorre da dificuldade de se implementar procedimentos para calcular o *FIFD* em códigos numéricos para análise dinâmica de estruturas. Entretanto, algumas aplicações podem ser encontradas na bibliografia (Fedelinski, Aliabadi e Rooke, 1995a, Fedelinski, Aliabadi e Rooke, 1996, Zhang, Lee e Zhang, 1990).

Neste trabalho o *FITD* é determinado através do *COD* (*Crack Opening Displacement*), usando-se elementos quadráticos especiais (com elementos de ponto a um quarto) para a discretização dos elementos situados na ponta da trinca. A rotina computacional para a determinação do *FITD* foi implementada no código *MECD-V_{din}*. A

Equação (3.76) é usada e o *COD* é calculado segundo a Equação (3.72) a partir dos deslocamentos destes nós. Os nós com os deslocamentos lidos correspondem aos nós do último elemento que discretiza a trinca.

4.2 – DETERMINAÇÃO DA PRESENÇA DA TRINCA POR ANÁLISE ESTÁTICA

A análise estática é mais comumente usada na engenharia e apresenta uma quantidade muito maior de referências bibliográficas (Aliabadi e Rooke, 1991, Aliabadi, 1997, Banerjee, 1981, Bezin, 1991, etc) se comparada à análise dinâmica. Quando as características do problema a ser analisado permitem o emprego da análise estática, a programação computacional é mais simples. A análise estática é de grande valia para a avaliação de alguns tipos de problemas como o crescimento de trinca e a determinação das deformações em estruturas, que não apresentem grandes variações devido aos efeitos de inércia e altas frequências de excitação. Vários problemas de engenharia são modelados dessa forma, entre eles, estruturas de pontes e edificações onde um valor médio de carga constate pode ser considerado durante a vida útil.

Para uma análise estática ser bem sucedida, é primordial que a exatidão dos resultados seja alcançada. O *MEC* sempre teve como uma de suas características uma grande exatidão nos resultados encontrados, e essa característica foi mantida no *MECD*. Portanto, a exatidão nos cálculos das deformações com o Método de Elementos de Contorno Dual (*MECD*) fez com que esta metodologia fosse empregada neste trabalho para a realização dos exemplos numéricos. Essa determinação precisa das deformações em conjunto com a formulação do efeito piezométrico para os sensores, possibilita a proposição de uma nova metodologia de monitoramento de estruturas, tanto em relação à propagação da trinca como também para a análise da presença destes defeitos em chapas (Leme et al, 2007a).

4.2.1 – A Metodologia Adotada para a Análise Estática

Para se assegurar a integridade estrutural e manter a segurança, o monitoramento em serviço é aplicado em muitas estruturas de engenharia. A situação do dano, isto é, a integridade estrutural pode ser determinada diretamente ou indiretamente. Na aproximação direta é verificado o tipo de dano, isto é, trincas, corrosão ou delaminação, aplicando uma

técnica de inspeção apropriada. As técnicas de inspeções utilizadas variam desde uma simples inspeção a olho nu até uma inspeção totalmente automatizada sobre a estrutura. Na aproximação indireta, a avaliação ou o comportamento estrutural é medido e comparado com a supostamente conhecida característica de resposta da estrutura sem defeito. É óbvio que nas duas aproximações, direta e indireta, a sensibilidade e a repetibilidade são características importantes na avaliação das medidas (Staszewski, Boller e Tomlinson, 2004).

A iniciação da trinca e seu crescimento são importantes tarefas a serem realizadas em sistemas e estruturas de materiais avançados. Este tipo de monitoramento é realizado em estruturas de veículos aeroespaciais, estruturas civis e em outros componentes mecânicos críticos de máquinas e equipamentos. A identificação da iniciação ou crescimento do dano ou trinca pode ser realizado pela medição de campos apropriados, tais como campos de deformação, campos elétricos, entre outros, que são afetados pelas mudanças geométricas e de propriedades do material. Uma aproximação eficiente é a medição do campo de deformação com a ajuda de um sensor de deformações, que é um indicativo da intensidade de tensão na ponta da trinca (Ali, Mohapatra e Gopalakrishnan, 2005).

Aproximações indiretas podem ser baseadas em: (a) medições de condutividade elétrica através da região do dano; (b) medições das mudanças interferométricas devido as variações dos índices refrativos ou variações nos coeficientes de acoplamentos optoacústicos no local do dano; (c) medições de termográficos infravermelhos e (d) medições dos campos elétricos pela introdução do efeito piezolétrico no sistema, que pertence à categoria conhecida como métodos da impedância eletromagnéticas (Ali, Mohapatra e Gopalakrishnan, 2005). Neste trabalho será aplicada esta última metodologia para o reconhecimento da presença da trinca bem como para o monitoramento do crescimento da mesma.

4.2.2 – *MECD* na Determinação da Presença da Trinca

De acordo com Liang (Liang e Hwu, 2001) é cada vez mais realizável e com maior precisão a execução da medição on-line das deformações estáticas pela aplicação de materiais inteligentes no meio científico. O uso de uma metodologia poderosa como o Método dos Elementos de Contorno Dual permite a estimativa numérica dos resultados, com precisão satisfatória, quando comparados aos resultados alcançados de forma

experimental. A presença da trinca em uma chapa altera de forma considerável os valores do campo de deformação nas proximidades da mesma e esta informação pode ser usada para a determinação da presença da trinca (Bezerra, 1993). O conhecimento prévio dos pontos, onde as trincas podem se iniciar nas estruturas, possibilita a escolha das melhores posições onde devem ser colocados os sensores para o monitoramento das peças. Normalmente as diferenças encontradas nos valores de saída apresentados por estes sensores, quando comparados com os valores conhecidos para as chapas sem defeitos, são usados para reconhecimento da posição e tamanho das trincas nos estudos de monitoramento contínuo das estruturas em uso (Bezerra, 1993 e 1995).

Neste trabalho o Método de Elementos de Contorno Dual (*MECD*) é aplicado juntamente com o efeito piezométrico acoplado do material para a proposição de uma nova metodologia para a detecção da trinca e monitoramento do seu crescimento, usando o conceito de micro sistemas elétrico mecânico (*MSEM*). Para materiais convencionais de engenharia, tais como metais e compósitos, o uso de sensores capacitivos *MSEM* é de particular interesse. O mecanismo de ação de tais sensores é baseado na propriedade piezométrica do material do sensor que produz uma variação na voltagem devido à deformação localizada devido à presença do defeito. Entretanto, devido a tamanho reduzido destes sensores, pode ser necessária uma série de posicionamento de sensores com o intuito de identificar o gradiente de tensão perto da região do defeito ou trinca procurada (Ali, Mohapatra e Gopalakrishnan, 2005).

O *MECD* apresentado por Portela (Portela, Aliabadi e Rooke, 1992) é capaz de analisar configurações envolvendo qualquer número de trincas, em cantos ou internas e para qualquer geometria de peças. A necessidade de se dividir o problema em diferentes regiões, comum em várias formulações de elementos de contorno, é evitada usando-se a equação de deslocamento quando o ponto de colocação está sobre a superfície da trinca e a equação dual de força de superfície quando o ponto de colocação está sobre o ponto da face oposta na trinca (Salgado e Aliabadi, 1996).

A equação integral de deslocamento foi apresentada pela Equação (3.113) no capítulo da revisão bibliográfica e é definida pela seguinte expressão notando, entretanto, a presença de forças de corpo na equação:

$$\begin{aligned}
c_{ij}(x')u_j(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x',x)u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x',x)t_j(x) d\Gamma(x)... \\
... + \int_{\Omega} U_{ij}(x',X)b_j(X) d\Omega(X)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

onde $T_{ij}(x',x)$ e $U_{ij}(x',x)$ representam as soluções fundamentais de Kelvin para força de superfície e deslocamento respectivamente, para o ponto do contorno x ; $u_j(x)$ e $t_j(x)$ são os deslocamentos e forças de superfície nos pontos do contorno x ; $b_j(X)$ são as forças de corpo agindo nos pontos X dentro do domínio Ω e c_{ij} é um coeficiente que pode ser determinado através de considerações de corpo rígido (Brebbia e Dominguez, 1989; Leme et al, 2007a).

A correspondente equação integral de contorno de força de superfície, também apresentada na revisão bibliográfica pela Equação (3.114), pode ser obtida pela diferenciação da Equação (3.122), aplicando-se a lei de Hooke e multiplicando pela normal externa ao contorno, resultando em:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}t_i(x') + n_i(x') \int_{\Gamma} S_{ijk}(x',x)u_k(x) d\Gamma(x) = n_i(x') \int_{\Gamma} D_{ijk}(x',x)t_k(x) d\Gamma(x)... \\
... + n_i(x') \int_{\Omega} D_{ijk}(x',X)b_k(X) d\Omega(X)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

onde os termos S_{ijk} e D_{ijk} contem as derivadas de T_{ij} e U_{ij} respectivamente e $n_i(x')$ denota a componente unitária da normal externa ao contorno no ponto x' .

Este código em *MECD* denominado de *MECD-I_{est}* foi disponibilizado pelo Prof. Aliabadi, orientador estrangeiro deste trabalho, quando da fase de desenvolvimento desta Tese no Imperial College, UK. Tal código serviu de base para as alterações executadas e, portanto, para a simulação da detecção da trinca por análise estática. O código permite a avaliação bidimensional de chapas finas com a presença de reforçadores. Estes reforçadores eram avaliados como forças de corpo no domínio e acrescentavam a última equação integral que aparece nas Equações (4.9) e (4.10). Estas equações normalmente não são aplicadas a problemas de elasticidade, mas aqui serão consideradas para a avaliação dos reforçadores. Na próxima subseção é abordada a implementação dos sensores piezelétricos, que apesar de serem partes com diferentes propósitos, comparados com os reforçadores, matematicamente podem ser considerados da mesma forma. O código em

MECD resultante desta complementação para avaliação da presença da trinca foi denominado de *MECD-II_{est}*.

4.2.2.1 – Equações dos Sensores

Os sensores colocados na chapa a ser analisada podem ser considerados, no Método dos Elementos de Contorno Dual (*MECD*), com o emprego das equações de compatibilidade. Esta parte do estudo foi apresentada por Aliabadi para o emprego de reforçadores em chapas finas (Aliabadi, 1998). Neste estudo foram considerados reforçadores conectados a chapa de modo contínuo ou discreto. Tais conectores de modo contínuo se referem a reforçadores colados à chapa ou construídos de modo que as forças de ligação se distribuíssem ao longo de toda a junção. Já os conectores de modo discreto se referem a conexões onde apenas algumas partes dos sensores estavam realmente conectadas à chapa, por exemplo, através de parafusos ou rebites. Estes tipos de conexões valem apenas para os reforçadores, os sensores são sempre considerados através de conexões contínuas, pois na realidade os sensores são colados sobre a chapa através de camadas adesivas (Leme et. al, 2007a). A chapa é considerada fina, de tal forma que as iterações entre as forças trocadas com os sensores podem ser tratadas como forças de corpo de ação e reação. Este tipo de tratamento também foi o empregado para os reforçadores.

As equações de deslocamento e forças de superfície para a chapa podem ser determinadas das Equações (4.9) e (4.10), e agora assumindo a presença de forças de corpo nas posições dos reforçadores e sensores. Ao invés de se ter forças distribuídas ao longo de todo o domínio do corpo, as forças de corpo presentes são apenas devido aos sensores e reforçadores. Portanto, consideradas somente sob as posições locais dos mesmos, reduz-se, com isso, as integrais de domínio presentes nas equações em integrais de linha unicamente sobre os locais dos sensores e reforçadores. Essa simplificação matemática ajuda em muito a resolução dos problemas de determinação de trincas com o uso do código *MECD-I_{est}* e *MECD-II_{est}* e não invalida a análise. Com isso, as equações de deslocamento e forças de superfície de uma chapa fina com N sensores conectados continuamente podem ser escritas respectivamente como:

$$\begin{aligned}
c_{ij}(x')u_j(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x',x)u_j(x)d\Gamma(x) &= \int_{\Gamma} U_{ij}(x',x)t_j(x)d\Gamma(x)... \\
&\dots + \frac{1}{h} \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_{Sn}} U_{ij}(x',X)b_j^{Sn}(X)d\Gamma_{Sn}(X)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}t_i(x') + n_i(x') \int_{\Gamma} S_{ijk}(x',x)u_k(x)d\Gamma(x) &= n_i(x') \int_{\Gamma} D_{ijk}(x',x)t_k(x)d\Gamma(x)... \\
&\dots + n_i(x') \frac{1}{h} \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_{Sn}} D_{ijk}(x',X)b_k^{Sn}(X)d\Gamma_{Sn}(X)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

onde Γ_{Sn} representa os locais onde estão dispostos os sensores, b_k^{Sn} representa as forças de ligação entre os sensores e a chapa e h é a espessura da chapa. Quando as integrações forem feitas sobre os reforçadores, a forma das Equações (4.11) e (4.12) são as mesmas apenas diferenciando que agora o contorno seria Γ_S se referindo aos reforçadores e as forças de corpo seriam denominadas de b_k^S .

Os reforçadores podem ser carregados nas suas extremidades através da aplicação de forças concentradas ou momentos. Nenhum carregamento externo é aplicado sobre os sensores e o carregamento distribuído agindo sobre cada sensor, devido à deformação da chapa, é usado para se computar o sinal de saída fornecido por cada sensor. A Figura 4.1 apresenta o sistema de forças e deslocamentos que serão considerados na análise. Na figura é apresentado um exemplo, onde, a chapa apresenta trações nos quatro lados, dois sensores simetricamente posicionados no seu interior e três reforçadores. As considerações aqui impostas são de pequenas deformações e a chapa considerada como fina. Isto simplifica a análise estática para o caso em que forças perpendiculares ao plano da chapa não estão presentes.

As deformações internas calculadas pelo código *MECD-I_{est}* com a presença de apenas reforçadores internos foram comprovadas e publicadas em vários artigos (Portela, Aliabadi e Rooke 1992, Salgado e Aliabadi, 1996). As considerações de deslocamentos e o efeito piezelétrico serão explicados mais detalhadamente a seguir para a implementação do código *MECD-II_{est}*.

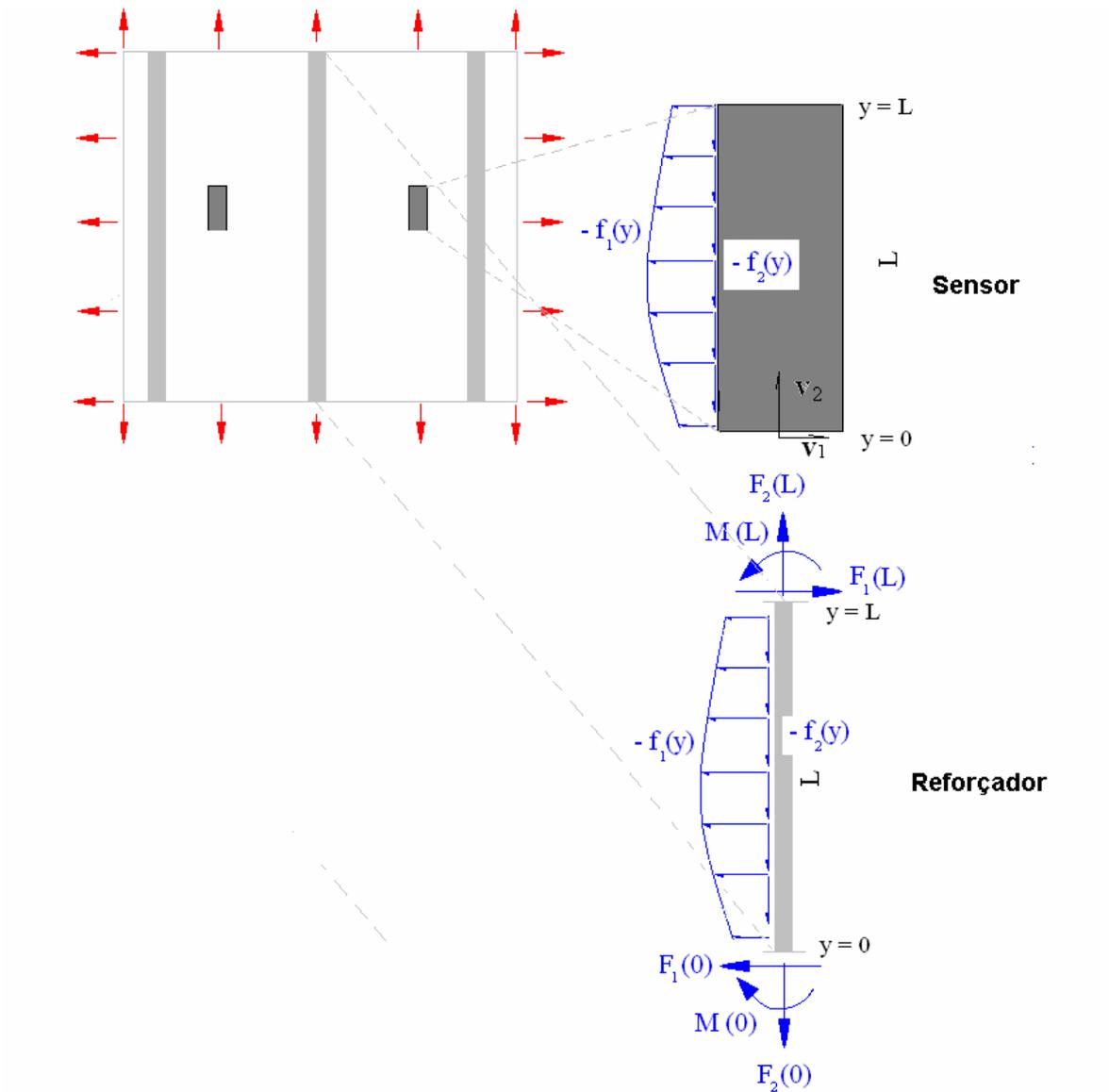


Figura 4.1 – Sistema de Forças e Deslocamentos Considerados na Análise.

4.2.2.2 – Modelagem dos Reforçadores, Sensores e Compatibilidade de Deslocamento

Considerando o problema de um reforçador isolado sujeito a um carregamento no plano conforme mostrado pela Figura 4.1. Forças distribuídas $f_i(y)$ agindo tanto na direção longitudinal e transversal. Forças concentradas $F_i(0)$ e $F_i(L)$ e momentos $M(0)$ e $M(L)$ agindo nas duas extremidades do reforçador. Se um reforçador está em equilíbrio sobre a ação destas forças, os deslocamentos relativos $\Delta v_j(y)$ são dadas por (Young, Rooke e Cartwright, 1992):

$$\begin{aligned}
\Delta v_1(y) &= v_1(y) - v_1(0) = \\
&= y\chi(0) + \frac{1}{A_S G_S} \left\{ yF_1(0) + \int_0^y (y-\eta) f_1(\eta) d\eta \right\} - \frac{1}{I_S E_S} \left\{ \frac{1}{2} y^2 M(0) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{6} y^3 F_1(0) + \int_0^y \frac{1}{6} (y-\eta)^3 f_1(\eta) d\eta \right\} \quad (4.13)
\end{aligned}$$

$$\Delta v_2 = v_2(y) - v_2(0) = \frac{1}{A_S E_S} \left\{ yF_2(0) + \int_0^y (y-\eta) f_2(\eta) d\eta \right\} \quad (4.14)$$

onde os índices 1 e 2 indicam as direções transversal e longitudinal respectivamente, y é um parâmetro de comprimento do sensor que pode ter variação de 0 a L , $v_j(0)$ e $\chi(0)$ são as translações e rotações de corpo rígido referentes ao ponto para $y=0$, A_S é a área da seção transversal do reforçador, I_S é o segundo momento de inércia da seção transversal do reforçador, E_S e G_S são o módulo de Young do material do reforçador e módulo de cisalhamento respectivamente.

Para o caso dos sensores a diferença para a consideração dos deslocamentos está no fato de que sobre os sensores não são aplicados forças concentradas nas suas extremidades. Resultando então nas seguintes equações para as direções transversal e longitudinal (Salgado e Aliabadi, 1996):

$$\begin{aligned}
\Delta v_1(y) &= v_1(y) - v_1(0) = \\
&= y\chi(0) + \frac{1}{A_S G_S} \int_0^y (y-\eta) f_1(\eta) d\eta - \frac{1}{I_S E_S} \int_0^y \frac{1}{6} (y-\eta)^3 f_1(\eta) d\eta \quad (4.15)
\end{aligned}$$

$$\Delta v_2 = v_2(y) - v_2(0) = \frac{1}{A_S E_S} \int_0^y (y-\eta) f_2(\eta) d\eta \quad (4.16)$$

Essas equações para os deslocamentos relativos são válidas para os reforçadores e sensores em equilíbrio. As seguintes equações devem ser satisfeitas para que o equilíbrio do sistema seja alcançado, para os reforçadores:

$$F_1(L) - F_1(0) - \int_0^L f_1(y) dy = 0 \quad (4.17)$$

$$F_2(L) - F_2(0) - \int_0^L f_2(y) dy = 0 \quad (4.18)$$

$$M(L) - M(0) - LF_1(0) = \int_0^L (L - y)f_1(y) dy \quad (4.19)$$

E para os sensores:

$$\int_0^L f_2(y) dy = 0 \quad (4.20)$$

$$\int_0^L f_1(y) dy = 0 \quad (4.21)$$

$$\int_0^L (L - y)f_1(y) dy = 0 \quad (4.22)$$

As condições de compatibilidade de deslocamentos para a região dos pontos dos reforçadores e sensores que estão conectados à chapa são baseadas na suposição que o deslocamento u_j de um ponto X' ($X' \in \Gamma_{Sn}$) sobre a chapa e u_j^{Sn} de um ponto correspondente sobre o enésimo reforçador ou sensor, tem que ser compatível com a deformação cisalhante da camada adesiva que conecta o reforçador ou o sensor à chapa (Young, Rooke e Cartwright, 1992). Eles são expressos em relação a um ponto de referencia X^0 situado em cada reforçador e sensor ($X^0 \in \Gamma_{Sn}$), resultando em N equações como:

$$\Delta u_j(X') - \Delta u_j^{Sn}(X') = \frac{h_{Ad}}{G_{Ad}} \Delta \tau_j^{Ad}(X') \quad (4.23)$$

onde h_{Ad} é a espessura da camada adesiva, G_{Ad} é o coeficiente de deformação cisalhante do material adesivo, τ_j^{Ad} é a tensão cisalhante no adesivo, $\Delta u_j(X') = u_j(X') - u_j(X^0)$, $\Delta u_j^{Sn}(X') = u_j^{Sn}(X') - u_j^{Sn}(X^0)$, $\Delta \tau_j^{Ad}(X') = \tau_j^{Ad}(X') - \tau_j^{Ad}(X^0)$. Para a linha do reforçador ou sensor, as tensões de cisalhamento no adesivo τ_j^{Ad} são iguais em valor as forças de ligação b_j^{Sn} divididas pela largura da linha do adesivo w_{Ad} . Este procedimento é aceitável devido ao fato de que tanto os reforçadores como os sensores têm a sua dimensão na largura bem menor que o seu comprimento, com isso, pode-se assumir que a variação dos

deslocamentos e deformações internas que acontecem nos reforçadores e sensores pode ser considerada como um valor médio sobre o eixo 2, isto é a força distribuída $f_2(y)$ ocorre no centro dos reforçadores e sensores. A equação de compatibilidade de deslocamento pode ser então escrita em termos das forças de corpo como (Salgado e Aliabadi, 1996):

$$\Delta u_j(X') - \Delta u_j^{Sn}(X') = \Phi \Delta b_j^{Sn}(X') \quad (4.24)$$

onde $\Delta b_j^{Sn}(X') = b_j^{Sn}(X') - b_j^{Sn}(X^0)$ e

$$\Phi = \frac{h_{Ad}}{w_{Ad} G_{Ad}} \quad (4.25)$$

é o coeficiente de deformação cisalhante do adesivo.

Se o ponto de referencia X^0 é tomado coincidindo com o início do reforçador ou sensor ($y = 0$), o deslocamento relativo Δu_j^{Sn} na Equação (3.16) pode ser expresso como uma função das incógnitas forças de interação b_j^{Sn} , usando as expressões das Equações (4.13) e (4.14) para o caso dos reforçadores e Equações (4.15) e (4.16) para o caso de sensores. As relações entre os deslocamentos relativos e as forças expressas em termos do sistema de coordenadas da chapa e dos sensores são dadas por:

$$\Delta u_i^{Sn} = \Theta_{ij}^{Sn} \Delta v_j^{Sn} \quad (4.26)$$

e

$$b_i^{Sn} = \Theta_{ij}^{Sn} f_j^{Sn} \quad (4.27)$$

Com Θ sendo a matriz de transformação igual a:

$$\Theta^{Sn} = \begin{bmatrix} \cos \varphi^{Sn} & -\sin \varphi^{Sn} \\ \sin \varphi^{Sn} & \cos \varphi^{Sn} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

onde φ^{Sn} é o ângulo entre a direção do deslocamento v_2 da chapa e o eixo longitudinal do reforçador ou sensor.

O deslocamento relativo da chapa $\Delta u_j(X') = u_j(X') - u_j(X^0)$, na Equação (4.24) pode finalmente ser escrito, com a ajuda da Equação (4.11), como:

$$\begin{aligned} \Delta u_j(X') = & \int_{\Gamma} [U_{ij}(X', x) - U_{ij}(X^0, x)] t_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} [T_{ij}(X', x) - T_{ij}(X^0, x)] u_j(x) d\Gamma(x) + \dots \\ & \dots + \frac{1}{h} \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_{Sn}} [U_{ij}(X', X) - U_{ij}(X^0, X)] b_j^{Sn}(X) d\Gamma_{Sn}(X) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Neste caso, o sistema para a solução do problema como um todo teria a adição de varias novas incógnitas. Essas incógnitas seriam as forças de corpo que apareceriam entre a chapa e os reforçadores e sensores, representados por b_j^{Sn} na última integral da Equação (4.21). Essas incógnitas seriam duas forças para cada nó presente nos sensores e reforçadores, uma força na direção transversal e outra na longitudinal para cada nó dos elementos usados para discretização dos sensores e reforçadores. Para se realizar a solução destes sistemas são então usadas as Equações (4.17), (4.18) e (4.19) para os reforçadores e Equações (4.20), (4.21) e (4.22) para os sensores, para então se ter o mesmo número de equações e graus de liberdade que o sistema produz (Salgado e Aliabadi, 1996). Pode-se então finalmente se resolver o sistema exposto pela Equação (3.113) mostrada na revisão bibliográfica, embora agora este sistema apresente um maior numero de linhas e uma maior número de graus de liberdade, devido ao fato da colocação dos sensores e reforçadores. O sistema de matrizes e vetores dado pela Equação (3.112) é aqui lembrado:

$$A x = f$$

4.2.2.3 – Efeito Piezelétrico

De acordo com a notação matricial da norma da IEEE (Institute of Electrical and Electronic Engineers, 1978), as equações constitutivas da acoplagem eletromecânica de um material linear piezelétrico são escritas como:

$$\text{Efeito piezelétrico direto:} \quad D = \varepsilon^T E + d\sigma \quad (4.30)$$

$$\text{Efeito piezelétrico inverso:} \quad \varepsilon = s^E \sigma + dE \quad (4.31)$$

onde D (carga / área) e E (voltagem / comprimento) são o deslocamento elétrico e campo elétrico respectivamente. ε e σ são as deformações e tensões mecânicas, d , ε^T e s^E são a constante de deformação piezoeétrica, permissividade dielétrica e constante de complacência, respectivamente. Os índices sobrescritos E e T indicam que os valores das constantes são obtidos para um campo elétrico e para um campo de tensão constantes, respectivamente.

Para a modelagem do sensor, de acordo com Lin (Lin e Yuan, 2001) e assumindo que o sensor é suficientemente pequeno para se considerar uma deformação constante no interior de sua área, a voltagem de saída pode ser escrita de acordo com o que foi visto na revisão bibliográfica através da Equação (3.98), e é aqui novamente reescrita:

$$V_{out} = \frac{d_{31} E_p h_p \varepsilon_R}{4 K_3 \varepsilon_0 (\pi a)^2 (1 - \nu_p)}$$

onde para os casos aqui apresentados tiveram os seguintes valores atribuídos aos coeficientes; d_{31} é o coeficiente de carga piezoeétrica igual a $130 \times 10^{-12} \text{ m V}^{-1}$, E_p é o módulo de Young igual a 76×10^9 , h_p é a espessura do sensor, K_3 é a constante dielétrica relativa igual a 1280, e ε_0 é a permissividade dielétrica para um espaço livre igual a $8,85 \times 10^{-12}$ para o sensor piezoeétrico *PKI-402* que foi empregado em todos os exemplos numéricos executados (Leme et al, 2007a).

4.3 – DETERMINAÇÃO DA PRESENÇA DA TRINCA POR ANÁLISE DINÂMICA

A análise dinâmica é muitas vezes necessária para uma avaliação precisa do dimensionamento e do monitoramento de partes móveis, pois muitas vezes a análise estática não pode ser aplicada devido às conseqüências que as simplificações necessárias trazem para o resultado alcançado. A análise dinâmica, como já esperado, é mais complexa que a análise estática, devido a isso, uma série de cuidados devem ser tomados para a implementação segura e correta dos códigos neste tipo de análise. Antes de partir para a utilização do código em análise dinâmica para a realização do monitoramento de trincas é necessário uma comprovação desses códigos para os resultados em exemplos simplificados, onde as respostas são bem conhecidas, fazendo com que os resultados

alcançados no monitoramento possam ser confiáveis. O trabalho de Tese apresenta um novo código no Método dos Elementos de Contorno Dual para chapas com a presença de reforçadores. Mas antes disso, será mostrado a formulação empregada para a análise dinâmica com o código básico em *MEC* (*MEC-II_{din}*) e também como o código final produzido por este trabalho em *MECD*, (*MECD-V_{din}*), evoluiu de um código mais básico, o *MECD-IV_{din}*.

4.3.1 – A Metodologia Adotada para a Análise Dinâmica

A equação geral do campo para a elásto-dinâmica pode ser escrita do seguinte modo segundo Domingues (Domingues, 1993):

$$c_1^2 \nabla \nabla u - c_2^2 \nabla x \nabla x u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -b \quad (4.32)$$

onde $c_1 = (\lambda + 2\mu/\rho)^{1/2}$ é a velocidade da onda longitudinal P; $c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$ é a velocidade da onda transversal S (Domingues, 1993); λ e μ são as constantes de Lamé; ρ é a densidade do corpo e ρb é o vetor da força de corpo e u é o vetor de deslocamento.

Para problemas dinâmicos em 2D as soluções fundamentais para o *MEC* são:

$$U_{ij} = \frac{1}{2\pi\rho c_2^2} [\psi \delta_{ik} - \chi r_{,l} r_{,k}] \quad (4.33)$$

e

$$T_{ij} = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r} \chi \right) \left(\delta_{ik} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,k} n_{,l} \right) - \frac{2}{r} \chi \left(n_{,k} r_{,l} - 2r_{,l} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} \right) - 2 \frac{d\chi}{dr} r_{,l} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} + \dots \right. \\ \left. \dots + \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{1}{r} \chi \right) r_{,l} n_{,k} \right] \quad (4.34)$$

Os valores das funções Ψ e χ para a análise 2D são dadas no Apêndice A (Domingues, 1993). Uma série de exemplos numéricos pode ser encontrada em Domingues (1993) fazendo uso desta formulação básica para a resolução de problemas dinâmicos. O código empregado na resolução dos problemas foi denominado de *MEC-II_{din}*.

O Método dos Elementos de Contorno Dual (*MECD*), como apresentado por Portela (Portela, Aliabadi e Rooke, 1992), também é capaz de analisar configurações envolvendo qualquer número de quinas e trincas internas e superficiais em qualquer geometria. A necessidade de dividir o problema em diferentes regiões, comumente aplicada em diferentes formulações dos Métodos dos Elementos de Contorno, pode ser evitada pela aplicação da equação de deslocamento quando o ponto de colocação está em uma das superfícies da trinca e a equação dual de força de superfície quando o ponto de colocação está na outra superfície da trinca. Isso permite que a singularidade, normalmente encontrada para se executar tal procedimento com a aplicação do *MEC* usual seja evitada, possibilitando uma resolução precisa e rápida para os problemas encontrados na prática (Salgado e Aliabadi, 1996). Esta colocação também é válida aqui para a resolução de problemas dinâmicos. Mas para isso deve ser feito o uso da Transformada de Laplace para a resolução dos problemas contendo trincas. A próxima subseção traz maiores informações sobre esta metodologia (Fedelinski, Aliabadi e Rooke, 1996).

4.3.2 – Uso da Transformada de Laplace

Uma das maneiras de se executar uma análise dinâmica através de métodos numéricos é a aplicação da transformada de Laplace sobre as equações que envolvem o domínio do tempo, transformando-as para o domínio de Laplace, resolvendo o problema e então retornando para o domínio do tempo a solução final.

O uso da Transformada de Laplace nos permite uma maneira mais simplificada de analisar os problemas e alcançar respostas pertinentes para as análises dinâmicas, que são normalmente mais complicadas que as análises estáticas.

A formulação para a análise dinâmica será apresentada a seguir. Considerando um corpo homogêneo, isotrópico linear elástico, ocupando um domínio Ω e limitado pelo contorno Γ , sujeito a forças dinâmicas. Condições iniciais nulas de deslocamento, velocidades e forças são assumidas. A Transformada de Laplace da Equação (4.29) para um ponto x do corpo ($x \in \Omega \cup \Gamma$), assumindo válida a teoria dos pequenos deslocamentos, é (Fedelinski, Aliabadi e Rooke, 1996):

$$(c_1^2 - c_2^2) \bar{u}_{i,jj}(x, s) + c_2^2 \bar{u}_{j,ii}(x, s) = s^2 \bar{u}_j(x, s) \quad (4.35)$$

com $i, j = 1, 2$; onde c_1 e c_2 são as velocidades das ondas longitudinais e transversais, respectivamente. $\bar{u}_i(x, s)$ é a componente da transformada do deslocamento do ponto x ; s é o parâmetro de Laplace; os índices i e j podem assumir valores 1 a 2 para problemas bidimensionais. A seguinte notação é usada neste trabalho: um índice precedido por uma vírgula, por exemplo, i denota diferenciação em relação à coordenada x_i ; a convenção de somatória é usada quando os índices são repetidos e uma barra sobre uma variável denota uma transformada de Laplace (Fedelinski, Aliabadi e Rooke, 1996).

A transformada de Laplace de uma função $f(x, \tau)$, que deve ser pelo menos contínua parcialmente no tempo τ , é definida como:

$$\ell[f(x, \tau)] = \bar{f}(x, s) = \int_0^{\infty} f(x, \tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (4.36)$$

As transformadas dos deslocamentos e forças de superfície satisfazem as seguintes condições de contorno:

$$\bar{u}_i(x, s) = \bar{p}_i(x, s), \quad x \in \Gamma_u \quad (4.37)$$

$$\bar{t}_i(x, s) = \bar{q}_i(x, s), \quad x \in \Gamma_t \quad (4.38)$$

onde $\bar{p}_i(x, s)$ e $\bar{q}_i(x, s)$ são as transformadas das condições de contorno prescritas de deslocamento e forças de superfície, respectivamente. Γ_u e Γ_t são partes do contorno Γ ($\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma$), onde os deslocamentos e as forças de superfície são conhecidos. A transformada de Laplace da relação constitutiva (Equação (3.4)) é:

$$\bar{\sigma}_{ij}(x, s) = \rho \left[(c_1^2 - 2c_2^2) \bar{u}_{m,m}(x, s) \delta_{ij} + c_2^2 (\bar{u}_{i,j}(x, s) + \bar{u}_{j,i}(x, s)) \right] \quad (4.39)$$

onde $\bar{\sigma}_{ij}(x, s)$ é a componente da transformada do tensor tensão; ρ é a densidade e δ_{ij} é o delta de Kronecker. O deslocamento do ponto x' pode ser determinado pela transformada dinâmica equivalente a identidade Somigliana (Cruse e Rizzo, 1968):

$$c_{ij}(x') \bar{u}_j(x', s) = \int_{\Gamma} \bar{U}_{ij}(x', x, s) \bar{t}_j(x, s) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \bar{T}_{ij}(x', x, s) \bar{u}_j(x, s) d\Gamma(x) \quad (4.40)$$

com $i, j = 1, 2$; onde $\bar{U}_{ij}(x', x, s)$ e $\bar{T}_{ij}(x', x, s)$ são as transformadas de Laplace das soluções fundamentais da elásto-dinâmica; $\bar{u}_j(x, s)$ e $\bar{t}_j(x, s)$ são as transformadas de Laplace dos deslocamentos e forças de superfície, respectivamente, no contorno; x' é ponto de colocação que pode ser um ponto do domínio ou do contorno; x é um ponto de integração (ponto do contorno); $c_{ij}(x')$ é uma constante, que depende da posição do ponto x' ; e a segunda integral da Equação (4.40) é denominada de integral de valor principal de Cauchy (Fedelinski, Aliabadi e Rooke, 1996).

Se o ponto de colocação x' pertencer a um dos pontos coincidentes da superfície da trinca a equação do deslocamento tem a forma de:

$$\frac{1}{2} \bar{u}_j(x', s) + \frac{1}{2} \bar{u}_j(x'', s) = \int_{\Gamma} \bar{U}_{ij}(x', x, s) \bar{t}_j(x, s) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \bar{T}_{ij}(x', x, s) \bar{u}_j(x, s) d\Gamma(x) \quad (4.41)$$

onde x'' é o ponto coincidente na superfície oposta da trinca.

A transformada das soluções fundamentais tem as seguintes formas (Cruse e Rizzo, 1968):

$$\bar{U}_{ij}(x', x, s) = \frac{1}{2\pi\mu} (\psi \delta_{ij} - \chi r_i r_j) \quad (4.42)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ij}(x', x, s) = \frac{1}{2\pi} & \left[\left(\psi_{,r} - \frac{\chi}{r} \right) \left(\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + r_j n_i \right) \right. \\ & - 2 \frac{\chi}{r} \left(r_i n_j - 2 r_i r_j \frac{\partial r}{\partial n} \right) \\ & - 2 \chi_{,r} r_i r_j \frac{\partial r}{\partial n} \\ & \left. + \frac{\lambda}{\mu} \left(\psi_{,r} - \chi_{,r} - \frac{\chi}{r} \right) r_i n_j \right] \quad (4.43) \end{aligned}$$

onde μ é o módulo transversal; λ é a constante de Lamé; r é a distância entre o ponto de colocação e o ponto de integração; n_i é a componente da normal externa ao ponto do contorno; as funções ψ , χ e suas derivadas com relação a distância r , denominadas de $\psi_{,r}$ e $\chi_{,r}$ são dadas no Apêndice A.

A transformada da força de superfície para um ponto x' , que pertença a um contorno suave é determinada pela seguinte equação integral de contorno:

$$\frac{1}{2} \bar{t}_j(x', s) = n_i(x') \left[\int_{\Gamma} \bar{U}_{kij}(x', x, s) \bar{t}_k(x, s) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \bar{T}_{kij}(x', x, s) \bar{u}_k(x, s) d\Gamma(x) \right] \quad (4.44)$$

com $k, i, j = 1, 2$; onde $\bar{U}_{kij}(x', x, s)$ e $\bar{T}_{kij}(x', x, s)$ são outras transformadas de Laplace das soluções fundamentais da elasto-dinâmica e a segunda integral da Equação (4.44) é denominada de integral de valor principal de Hadamard (Fedelinski, Aliabadi e Rooke, 1996).

Se o ponto de colocação x' pertencer a um dos pontos coincidentes da superfície da trinca a equação da força de superfície tem a forma de:

$$\frac{1}{2} \bar{t}_j(x', s) - \frac{1}{2} \bar{t}_j(x'', s) = n_i(x') \left[\int_{\Gamma} \bar{U}_{kij}(x', x, s) \bar{t}_k(x, s) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \bar{T}_{kij}(x', x, s) \bar{u}_k(x, s) d\Gamma(x) \right] \quad (4.45)$$

A transformada das soluções fundamentais das equações integrais de contorno de força de superfície tem as seguintes formas:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{kij}(x', x, s) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[2 \frac{\chi}{r} - \frac{\lambda}{\mu} \left(\psi_{,r} - \chi_{,r} - \frac{\chi}{r} \right) \right] \delta_{ij} r_{,k} \right. \\ \left. - \left(\psi_{,r} - \frac{\chi}{r} \right) (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) \right. \\ \left. + 2 \left(\chi_{,r} - 2 \frac{\chi}{r} \right) r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \quad (4.46) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\bar{T}_{kij}(x', x, s) = & \frac{\mu}{2\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[4 \left(\chi_{,rr} - 5 \frac{\chi_{,r}}{r} + 8 \frac{\chi}{r^2} \right) r_i r_j r_k \right. \right. \\
& - \left(\psi_{,rr} - \frac{\psi_{,r}}{r} - 3 \frac{\chi_{,r}}{r} + 6 \frac{\chi}{r^2} \right) (\delta_{ik} r_j + \delta_{jk} r_i) \\
& + 2 \left[2 \frac{\chi_{,r}}{r} - 4 \frac{\chi}{r^2} + \frac{\lambda}{\mu} \left(\chi_{,rr} - 2 \frac{\chi}{r^2} - \psi_{,rr} + \frac{\psi_{,r}}{r} \right) \right] \delta_{ij} r_k \left. \right] \\
& + 2 \left[2 \frac{\chi_{,r}}{r} - 4 \frac{\chi}{r^2} + \frac{\lambda}{\mu} \left(\chi_{,rr} - 2 \frac{\chi}{r^2} - \psi_{,rr} + \frac{\psi_{,r}}{r} \right) \right] r_i r_j n_k \\
& - \left(\psi_{,rr} - \frac{\psi_{,r}}{r} - 3 \frac{\chi_{,r}}{r} + 6 \frac{\chi}{r^2} \right) (r_j n_i + r_i n_j) r_k \\
& + \left[4 \frac{\chi}{r^2} + 4 \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\chi_{,r}}{r} + \frac{\chi}{r^2} - \frac{\psi_{,r}}{r} \right) + \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 \right. \\
& \times \left. \left(\chi_{,rr} + 2 \frac{\chi_{,r}}{r} - \psi_{,rr} - \frac{\psi_{,r}}{r} \right) \right] \delta_{ij} n_k \\
& \left. - 2 \left(\frac{\psi_{,r}}{r} - \frac{\chi}{r^2} \right) (\delta_{kj} n_i + \delta_{ki} n_j) \right\} \tag{4.47}
\end{aligned}$$

As equações integrais de contorno em deslocamento são aplicadas nos pontos de contorno que pertençam ao contorno externo e a uma das superfícies da trinca. As equações integrais de contorno em força de superfície são usadas para os pontos opostos da superfície da trinca (Fedelinski, Aliabadi e Rooke, 1996).

A variação espacial da transformada dos deslocamentos e tensões no contorno é aproximada usando elementos de contorno. Neste trabalho, foram empregados nos exemplos numéricos, os elementos quadráticos. Para o contorno externo foram utilizados elementos contínuos, para a junção das trincas existentes no contorno foram empregados elementos semi-descontínuos e para as trincas internas foram usados elementos descontínuos. O contorno do corpo foi dividido em M elementos de contorno cada um possuindo P nós (para elementos quadráticos $P = 3$). A variação dos valores do contorno é aproximada usando funções de forma $N^{mp}(\xi)$, que são dependentes dos tipos de elementos utilizados e da posição nodal. As formas discretizadas das equações de deslocamento e força de superfície são:

$$c_{ij}^l(x') \bar{u}_j^l(s) = \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P \left[\bar{t}_j^{mp}(s) \int_{-1}^1 \bar{U}_{ij}^l(\xi, s) N^{mp}(\xi) J^m(\xi) d\xi \right. \\ \left. - \bar{u}_j^{mp}(s) \int_{-1}^1 \bar{T}_{ij}^l(\xi, s) N^{mp}(\xi) J^m(\xi) d\xi \right] \quad (4.48)$$

com $l = 1, 2, \dots, L_1$ e

$$\frac{1}{2} \bar{t}_j^l(s) = n_i^l \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P \left[\bar{t}_k^{mp}(s) \int_{-1}^1 \bar{U}_{kij}^l(\xi, s) N^{mp}(\xi) J^m(\xi) d\xi \right. \\ \left. - \bar{u}_k^{mp}(s) \int_{-1}^1 \bar{T}_{kij}^l(\xi, s) N^{mp}(\xi) J^m(\xi) d\xi \right] \quad (4.49)$$

com $l = 1, 2, \dots, L_2$,

onde l é o número de nó de colocação; L_1 e L_2 são, respectivamente, os números de nós onde as equações de deslocamento e de força de superfície são aplicadas, $L_1 + L_2 = L$, onde L é o número total de nós; $J^m(\xi)$ é o Jacobiano e ξ é a coordenada local ($-1 \leq \xi \leq 1$). As equações de deslocamento e força de superfície discretizadas para os nós coincidentes da trinca têm formatos similares derivadas das Equações (4.41) e (4.45), respectivamente.

O sistema de equações de contorno, aplicados para todos os nós do contorno pode então ser escrito na forma de matriz do seguinte modo:

$$\bar{H} \bar{u} = \bar{G} \bar{t} \quad (4.50)$$

onde \bar{u} e \bar{t} contêm os valores nodais das transformadas dos deslocamentos e forças de superfície respectivamente no contorno; as matrizes \bar{H} e \bar{G} dependem das integrais das transformadas das soluções fundamentais \bar{T}_{ij} , \bar{T}_{kij} e \bar{U}_{ij} , \bar{U}_{kij} , respectivamente e das funções de interpolação e do Jacobiano. A integração dessas funções será mostrada na próxima subseção.

O sistema de matrizes é reordenado de acordo com o tipo das condições de contorno, de uma maneira similar ao aplicado para a elasto-estática. As novas matrizes \bar{A} e \bar{B} são obtidas das matrizes \bar{H} e \bar{G} ; \bar{x} e \bar{y} dos vetores \bar{u} e \bar{t} . A matriz \bar{A} é multiplicada

pelo vetor de incógnitas de transformadas dos deslocamentos e forças de superfície \bar{x} , e a matriz \bar{B} é multiplicada pelo vetor de transformadas das condições de contorno prescritas para se chegar ao seguinte sistema de equações:

$$\bar{A} \bar{x} = \bar{B} \bar{y} \quad (4.51)$$

ou

$$\bar{A} \bar{x} = \bar{f} \quad (4.52)$$

onde $\bar{f} = \bar{B} \bar{y}$ é um vetor conhecido.

A equação matricial (4.52) é resolvida para se obter as incógnitas das transformadas dos deslocamentos e forças de superfície para um parâmetro de Laplace particular. A transformada de Laplace das condições de contorno prescritas armazenada no vetor \bar{y} pode ser calculada analiticamente para simples variações temporais (Fedelinski, Aliabadi e Rooke, 1996).

Para se obter as incógnitas reais dos deslocamentos e tensões como função do tempo, as incógnitas devem ser calculadas para uma série de parâmetros de Laplace. As soluções finais dependente do tempo podem ser obtidas através de uma inversão numérica. Neste trabalho de doutorado foi empregado o método de Durbin (Durbin, 1974) para a inversão numérica de Laplace (ver Apêndice B).

4.3.2.1 - Comportamento das Transformadas das Soluções Fundamentais e suas Integrações

A integração das transformadas das soluções fundamentais requer um entendimento do comportamento na vizinhança do ponto de colocação. As soluções fundamentais podem ser expressas pelas funções ψ , χ e suas derivadas em relação a r como mostrado na seção anterior. Estas funções dependem das funções modificadas de Bessel de segundo tipo de ordem zero e primeira ordem (ver Apêndice A). Quando o parâmetro da função de Bessel $z = s r/c_\alpha$ tende a zero (s ou r tende a zero ou c_α tende ao infinito), as funções de Bessel tem as seguintes formas:

$$K_0(z) = -\ln\left(\frac{z}{2}\right) - \gamma + O[z^2 \ln(z)] \quad (4.53)$$

$$K_1(z) = \frac{1}{z} + \frac{z}{2} \left[\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma - \frac{1}{2} \right] + O[z^3 \ln(z)] \quad (4.54)$$

onde $\gamma = 0.5772156649$.

As funções ψ , χ e suas derivadas expressas pelas funções de Bessel para pequenos parâmetros, usadas nas Equações (4.42), (4.43), (4.45) e (4.46) também podem ser calculadas usando as fórmulas expostas no Apêndice C.

Substituindo os termos dominantes representados nas equações (C1) até (C6) dentro das transformadas das soluções fundamentais, definidas pelas equações (4.42), (4.43), (4.46) e (4.47) chega-se as soluções fundamentais da elasto-estática (Aliadadi e Rooke, 1991). Isto significa que as transformadas das soluções fundamentais tendem para as soluções estáticas, e que as soluções obtidas pelo método da transformada de Laplace são as soluções encontradas pela análise estática quando o parâmetro das funções de Bessel tende a zero. Entretanto, as soluções fundamentais da elasto-estática $U_{ij}(x', x)$ difere das transformadas das soluções $\bar{U}_{ij}(x', x, s)$ por uma constante por causa do termo $E_S + O[1]$ (Dominguez e Abascal, 1984). Este termo adicional não tem influência nas soluções para domínios finitos. Para domínios infinitos a solução estática é obtida se as trações aplicadas ao longo dos contornos internos estão em equilíbrio. Por isso, a solução estática pode ser obtida pelo seguinte método assumindo, por exemplo, uma densidade de massa pequena do material se extinguindo e com isso o parâmetro z das funções de Bessel tendendo a zero.

Como pode ser visto das equações (C1) a (C6) e (4.42), (4.43), (4.46) e (4.47), as singularidades das transformadas das soluções são as mesmas correspondentes as singularidades encontradas nas soluções fundamentais da elasto-estática. \bar{U}_{ij} e \bar{T}_{ij} apresentam singularidades do tipo $O[\ln(r)]$ e $O[1/r]$; \bar{U}_{kij} e \bar{T}_{kij} têm singularidades do tipo $O[1/r]$ e $O[1/r^2]$, respectivamente.

As transformadas das soluções fundamentais são regularizadas pela subforça de superfície da correspondente solução fundamental estática e posteriormente adicionando elas novamente. As equações de deslocamentos e forças de superfície regularizadas têm as seguintes formas:

$$\begin{aligned}
c_{ij}(x')\bar{u}_j(x',s) &= \int_{\Gamma} [\bar{U}_{ij}(x',x,s) - U_{ij}(x',x)] \bar{t}_j(x,s) d\Gamma(x) \\
&\quad - \int_{\Gamma} [\bar{T}_{ij}(x',x,s) - T_{ij}(x',x)] \bar{u}_j(x,s) d\Gamma(x) \\
&\quad + \int_{\Gamma} U_{ij}(x',x) \bar{t}_j(x,s) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} T_{ij}(x',x) \bar{u}_j(x,s) d\Gamma(x) \quad (4.55)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \bar{t}_j(x',s) &= n_i(x') \left[\int_{\Gamma} [\bar{U}_{kij}(x',x,s) - U_{kij}(x',x)] \bar{t}_k(x,s) d\Gamma(x) \right. \\
&\quad - \int_{\Gamma} [\bar{T}_{kij}(x',x,s) - T_{kij}(x',x)] \bar{u}_k(x,s) d\Gamma(x) \\
&\quad \left. + \int_{\Gamma} U_{kij}(x',x) \bar{t}_k(x,s) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} T_{kij}(x',x) \bar{u}_k(x,s) d\Gamma(x) \right] \quad (4.56)
\end{aligned}$$

onde U_{ij} , T_{ij} , U_{kij} e T_{kij} são as soluções fundamentais da elasto-estática. Visto que as transformadas e as soluções fundamentais são singulares, os cálculos desses valores e subseqüentes subtrações podem ocasionar grandes erros, particularmente para integração nos pontos próximos aos pontos de colocação. Para se obter resultados mais precisos, os termos dominantes das equações (4.53) e (4.54) são subtraídos das funções de Bessel. As exatas diferenças entre as transformadas e as soluções fundamentais estáticas são obtidas após modificações adicionais serem aplicadas sobre as funções ψ , $\psi_{,r}$, $\psi_{,rr}$, χ , e $\chi_{,rr}$. As diferenças que não são singulares de \bar{U}_{ij} , \bar{T}_{ij} , \bar{U}_{kij} e a singularmente fraca de \bar{T}_{kij} são integradas usando a quadratura Gaussiana. As soluções fundamentais são integradas da mesma maneira como na elasto-estática. Isto é, para integração ao longo do elemento que contem o ponto de colocação, a solução fundamental estática U_{ij} é integrada usando a quadratura Gaussiana logarítmica. As integrais T_{ij} são realizadas empregando a quadratura Gaussiana padrão, exceto para os termos da diagonal que são determinados empregando as condições de movimento de corpo rígido. As condições de movimento de corpo rígido são empregadas para todos os pontos de colocação exceto para aqueles pertencentes às superfícies da trinca coincidentes, que são realizadas analiticamente. As soluções fundamentais U_{kij} e T_{kij} são integradas analiticamente ao longo dos elementos retos

descontínuos que modelam as trincas (Portela, Aliabadi e Rooke, 1992). Quando o elemento não apresenta o nó de colocação, a integração é realizada numericamente, aplicando-se a subdivisão do elemento se necessário (Fedelinski, Aliabadi e Rooke, 1996). Uma série de exemplos numéricos pode ser encontrada na bibliografia (Fedelinski, Aliabadi e Rooke, 1996) utilizando este código dinâmico que foi tomado com base para o código desenvolvido neste trabalho. O código utilizado no trabalho de Fedelinski, Aliabadi e Rooke (1996) em *MECD* foi denominado de *MECD-IV_{din}*.

4.3.3 - Uso do *MECD* em Chapas com Reforçadores

O código *MECD-V_{din}* desenvolvido neste trabalho trouxe a possibilidade do emprego tanto de reforçadores como de sensores, já que a metodologia de análise para ambos pode ser de forma similar, tratada numericamente.

A formulação para a análise dinâmica é então agora abordada. Então será apresentado o Método de Elementos de Contorno Dual, no domínio da Transformada de Laplace, para a análise dinâmica da resposta de chapas com a presença de reforçadores para problemas em 2D. O uso da Transformada de Laplace já tinha sido realizado com sucesso em trabalhos anteriores (Fedelinski, Aliabadi e Rooke, 1996), mas a aplicação de reforçadores, como forças de corpo dentro do domínio de análise, traz complicações para o sistema de resolução que ainda não tinham sido abordados na bibliografia. A formulação é derivada do acoplamento da resposta dinâmica elástica em 2D do método de elemento de contorno em estado plano de tensão ou deformação da chapa com reforçadores e as equações de deslocamentos para uma viga isolada sujeita a carregamento dinâmico. As forças de interação, entre os reforçadores e a chapa, podem ser tratadas como forças de corpos distribuídas sobre a linha ao longo da região de contato. A implementação desse código, denominado de *MECD-V_{din}*, nunca tinha sido executada até este momento e o procedimento detalhado será descrito a seguir, e posteriormente, os resultados alcançados.

4.3.3.1 – Introdução

Chapas finas são estruturas amplamente analisadas e utilizadas na engenharia (Wen, Aliabadi e Yuong, 2000). A análise dinâmica é muitas vezes necessária e mais precisa que a análise estática e em muitos casos deve ser empregada, devido a não precisão dos resultados alcançados pela análise estática quando comparados com os resultados

experimentais. A aplicação do método dos elementos de contorno para a análise dinâmica em problemas de flexão de chapas foi apresentada pela primeira vez por Bezin (Bezin, 1991). Uma descrição completa dos recentes avanços na área da análise dinâmica empregando o *MEC* pode ser encontrada na referência (Aliabadi, 1998).

A aplicação das equações da dinâmica para uma viga isolada, juntamente com a utilização do *MECD* no domínio da Transformada de Laplace, nos permitirá avaliar o comportamento da estrutura com reforçadores quando esta é carregada com esforços dinâmicos. Este trabalho mostrará os primeiros resultados alcançados pela aplicação desta nova e inédita técnica computacional utilizando o Método de Elementos de Contorno Dual (*MECD*) com carregamento dinâmico em chapas com reforçadores, sob análise em 2D.

Primeiramente, serão derivadas as equações para vibrações longitudinais e laterais de uma viga isolada sobre carregamento externo harmônico. Então, com o uso de algumas condições de compatibilidade, serão desenvolvidas as equações de movimento para os pontos internos da chapa com a presença de reforçadores. É bom deixar claro, aqui, que o emprego ou não de reforçadores é apenas uma complicação no método, por isso, caso seja necessário, a retirada dos reforçadores poderia ser realizada sem qualquer alteração do código *MECD- V_{din}* , e estes resultados deveriam ser exatamente iguais aos encontrados com o *MECD- IV_{din}* .

4.3.3.2 – Equações Matemáticas para a Vibração de uma Viga Isolada

Neste trabalho será considerada uma chapa com reforçadores em ambos os lados como a mostrada na Figura 4.2. Este tipo de construção nos permite avaliar o problema em apenas duas dimensões porque a simetria da construção e o carregamento minimizam os deslocamentos fora do plano. O carregamento aplicado será apenas nas direções 1 e 2 mostradas na Figura 4.2 (a), possibilitando assim a análise precisa do problema apenas em 2D. As forças e momentos que serão considerados sobre os reforçadores são apresentados na Figura 4.1 (b).

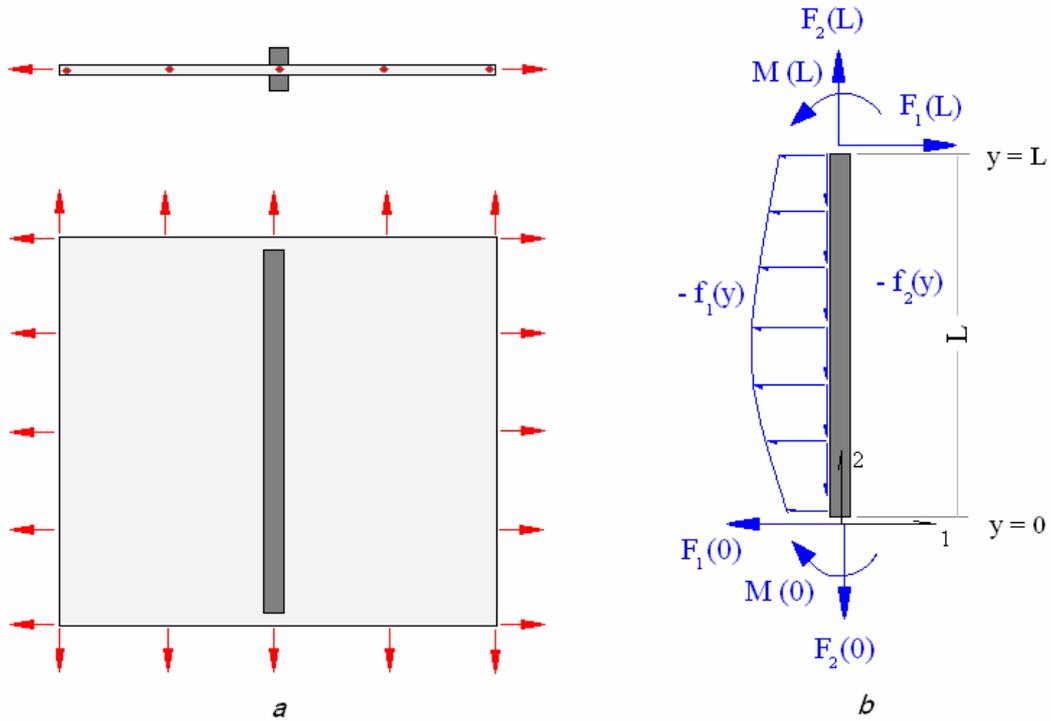


Figura 4.2 – (a) Forças aplicadas na chapa com reforçadores; (b) Forças e Momentos aplicados sobre os reforçadores.

Para a direção lateral (sobre o eixo 1 na Figura 4.2 – b) a equação diferencial do movimento assume a seguinte forma:

$$EJ \frac{\partial^4 u(y,t)}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial t^2} = p(y,t) \quad (4.57)$$

onde EJ é a rigidez a flexão da viga e ρ é a densidade da viga.

Se o carregamento for um carregamento harmônico então:

$$p(y,t) = p(y) \sin \omega t \quad (4.58)$$

onde

$$p(y) = F_1(0) - F_1(L) + f_1(y) \quad (4.59)$$

e ω é a frequência de análise.

Substituindo as Equações (4.55) e (4.56) em (4.54) e realizando alguns rearranjos pode-se obter a seguinte equação de movimento (Kolousek, 1973).

$$EJ \frac{d^4 u(y)}{dy^4} + \rho \omega^2 u(y) = p(y) \quad (4.60)$$

A resposta geral, para o sistema homogêneo, considerando $p(x) = 0$ para a equação acima é a seguinte:

$$u(y) = A \cos\left(\frac{\lambda y}{l}\right) + B \sin\left(\frac{\lambda y}{l}\right) + C \cosh\left(\frac{\lambda y}{l}\right) + D \sinh\left(\frac{\lambda y}{l}\right) \quad (4.61)$$

com

$$\lambda = l \left(\frac{\rho \omega^2}{EJ} \right)^{1/4} \quad (4.62)$$

onde l pode assumir valores de 0 a L .

Também se deve considerar a solução particular para a Equação (4.57), quando se é considerado algum valor para $p(y)$ diferente de zero.

As constantes de integração, A , B , C e D são calculadas através das condições de contorno. Neste caso é considerado um valor qualquer para a rotação e para o deslocamento no começo e fim da viga, que representa os reforçadores existentes no interior da chapa. Para este caso pode-se usar as seguintes relações para determinação das constantes (Meriam and Kreige, 1992):

$$-\frac{M(y)}{EJ} = u''(y) \quad (4.63)$$

e

$$-\frac{T(y)}{EJ} = u'''(y) \quad (4.64)$$

Derivando-se duas e três vezes a Equação (4.58) em relação a y e considerando que a resposta apresenta uma variação linear dentro do reforçador, tem-se respectivamente a segunda e terceira derivadas iguais a:

$$u''(y) = \frac{\lambda^2}{l^2} \left(-A \cos\left(\frac{\lambda y}{l}\right) - B \sin\left(\frac{\lambda y}{l}\right) + C \cosh\left(\frac{\lambda y}{l}\right) + D \sinh\left(\frac{\lambda y}{l}\right) \right) \quad (4.65)$$

e

$$u'''(y) = \frac{\lambda^3}{l^3} \left(A \sin\left(\frac{\lambda y}{l}\right) - B \cos\left(\frac{\lambda y}{l}\right) + C \sinh\left(\frac{\lambda y}{l}\right) + D \cosh\left(\frac{\lambda y}{l}\right) \right) \quad (4.66)$$

Então se tem finalmente, usando as condições de contorno para o início e fim do reforçador, isto é, $y = 0$ e $y = L$, os seguintes valores para as constantes de integração:

$$A = \frac{M(0) l^2}{EJ \lambda^2} + C \quad (4.67)$$

$$B = \frac{F_1(0) l^3}{EJ \lambda^3} + D \quad (4.68)$$

$$C = \left[\frac{M(L) l^2}{EJ \lambda^2} - \frac{F_1(0) l^3}{EJ \lambda^3} \sin \lambda - \frac{M(0) l^2}{EJ \lambda^2} \cos \lambda \right] \frac{1}{\cos \lambda - \cosh \lambda} - \frac{D \sin \lambda - \sinh \lambda}{\cos \lambda - \cosh \lambda} \quad (4.69)$$

$$D = \left[\frac{M(L) l^2}{EJ \lambda^2} - \frac{F_1(0) l^3}{EJ \lambda^3} \sin \lambda - \frac{M(0) l^2}{EJ \lambda^2} \cos \lambda \right] \frac{(-\sin \lambda - \sinh \lambda)}{2(\cos \lambda \cosh \lambda - 1)} + \left[\frac{F_1(0) l^3}{EJ \lambda^3} - \frac{M(0) l^2}{EJ \lambda^2} \sin \lambda - \frac{F_1(L) l^3}{EJ \lambda^3} \right] \frac{(\cos \lambda - \cosh \lambda)}{2(\cos \lambda \cosh \lambda - 1)} \quad (4.70)$$

Para a direção longitudinal (sobre o eixo 2 na Figura 4.2 – b) a equação diferencial do movimento tem a seguinte forma:

$$ES \frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial t^2} - p(y,t) = 0 \quad (4.71)$$

onde ES é a rigidez a tração ou compressão da viga e ρ é a densidade da viga. O sinal menos é devido a direção escolhida para o eixo 2.

Se o carregamento for um carregamento harmônico então:

$$p(y, t) = p(y) \sin \omega t \quad (4.72)$$

onde

$$p(y) = F_2(0) - F_2(L) + f_2(y) \quad (4.73)$$

Substituindo as Equações (4.64) e (4.65) em (4.63) e realizando alguns rearranjos pode-se obter a seguinte equação de movimento (Kolousek, 1973).

$$ES \frac{d^2 v(y)}{dy^2} + \rho \omega^2 v(y) = p(y) \quad (4.74)$$

A resposta geral, para o sistema homogêneo, considerando $p(x) = 0$ para a equação acima é a seguinte:

$$v(x) = G \cos\left(\psi \frac{y}{l}\right) + H \sin\left(\psi \frac{y}{l}\right) \quad (4.75)$$

com

$$\psi = l \left(\frac{\rho \omega^2}{ES} \right)^{1/2} \quad (4.76)$$

O mesmo procedimento deve ser agora realizado para se determinar a solução particular da Equação (4.74). As constantes de integração são igualmente calculadas através das condições de contorno para esta direção. Para esta direção têm-se agora as seguintes relações:

$$\frac{N(y)}{ES} = v'(y) \quad (4.77)$$

A primeira derivada da Equação (3.67) é:

$$v'(y) = \frac{\psi}{l} \left(-E \sin\left(\frac{\psi y}{l}\right) + F \cos\left(\frac{\psi y}{l}\right) \right) \quad (4.78)$$

Então usando as condições de contorno para início e fim do reforçador, isto é, $y = 0$ e $y = L$, tem-se respectivamente:

$$G = H \frac{\cos \psi}{\sin \psi} - \frac{F_2(L)}{ES} \frac{l}{\psi} \frac{1}{\sin \psi} \quad (4.79)$$

e

$$H = \frac{F_2(0)}{ES} \frac{l}{\psi} \quad (4.80)$$

Aplicando então os valores determinados nas equações de (4.67) a (4.70) e (4.79) e (4.80) para as constantes de A a D e G e H nas Equações (4.61) e (4.65) respectivamente, pode-se chegar a resposta do deslocamento do reforçador dentro da chapa para carregamentos aplicados a ambos. Deve-se notar que os valores $M(0)$, $M(L)$, $F_1(0)$, $F_1(L)$, $F_2(0)$, $F_2(L)$ são valores aplicados a extremidades dos reforçadores e serão considerados aqui como variáveis de entrada, podendo com isso, ocorrer variações destes valores para diferentes experimentos futuros.

4.3.3.3 – Comprovação do Código para Problemas sem Trinca

Como a resolução dos problemas dinâmicos com a presença de trinca em chapas com reforçadores é inédita, primeiramente, para a certeza de que o código está apontando respostas corretas, é necessária a execução de testes onde as respostas podem ser comparadas com resultados na bibliografia. Devido a isso, foi executada a comprovação para o código em problemas sem a presença de trinca. Esses problemas têm respostas determinadas e consagradas na bibliografia, utilizando os códigos *MEC-II_{din}* e *MECD-*

IV_{din} , podendo assim se executar uma comparação do código aqui desenvolvido, $MECD-V_{din}$, antes da aplicação das trincas.

Como já dito anteriormente, a análise dinâmica para chapas pode ser realizada com a ajuda do MEC no domínio da transformada de Laplace. Este procedimento já foi utilizado com sucesso por vários autores (Domingues, 1993; Aliabadi, 1998), mas a presença de reforçadores na análise dinâmica acarreta uma formulação que foi apresentada aqui pela primeira vez. Um resumo das equações empregadas será novamente mostrado: A equação integral de contorno em deslocamento para um ponto x' no contorno Γ para uma chapa finita é dada pela Equação (4.9):

$$c_{ij}(x')u_j(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x)u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x)t_j(x) d\Gamma(x) \dots$$

$$\dots + \iint_{\Omega} U_{ij}(x', X)b_j(X) d\Omega(X)$$

onde $T_{ij}(x', x)$ e $U_{ij}(x', x)$ são as soluções fundamentais de Kelvin para força de superfície e deslocamento, respectivamente, $u_j(x)$ e $t_j(x)$ são os deslocamentos e as forças de superfície nos pontos campo do contorno x , $b_j(X)$ são as forças de corpo agindo nos pontos internos X do domínio Ω e c_{ij} é um coeficiente que pode ser determinado através das considerações de movimento de corpo rígido (Aliabadi, 1991). A última integral da Equação (3.1) representa a ação das forças de corpo que os reforçadores terão em relação a chapa que estão conectados. Essas forças de corpo, devido a forma física dos reforçadores, podem ser consideradas confinadas em uma linha, fazendo com que a integral dupla de domínio possa ser avaliada como um somatório de integrais em linha relativas as iterações dos reforçadores com a chapa. Com isso a equação pode ser escrita como a Equação (4.11):

$$c_{ij}(x')u_j(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x)u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x)t_j(x) d\Gamma(x) \dots$$

$$\dots + \frac{1}{h} \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_{sn}} U_{ij}(x', X)b_j^{sn}(X) d\Gamma_{sn}(X)$$

onde Γ_{sn} representa as linhas onde os reforçadores são colocados sobre a chapa, b_k^{sn} representam as incógnitas das forças de ligação entre os reforçadores e a chapa e h é a espessura da chapa. Embora o formato dessa equação seja a mesma utilizada para a análise estática, a forma de resolução é diferente como já mostrado.

Para se poder realizar a resolução dos problemas via o *MECD*, se faz necessário assumir algumas condições. Uma delas é em relação a compatibilidade de deslocamentos entre os pontos de contato dos reforçadores com a chapa. As condições de compatibilidade de deslocamento para os pontos na região de contato com os reforçadores são baseadas na condição que o deslocamento u_j de um ponto X' dentro do domínio ($X' \in \Gamma_{Sn}$) na chapa e o deslocamento u_j^{Sn} do ponto correspondente no reforçador tem que ser compatível com a deformação transversal da camada adesiva que esta presente entre a chapa e o reforçador. Essas possíveis diferenças de deslocamentos podem ser expressas ainda em relação a um ponto de referência ($X^0 \in \Gamma_{Sn}$) a ser escolhido de modo a facilitar a resolução dos sistemas de equação proveniente de tais considerações. Deste modo podemos apresentar um sistema de equações que possui o seguinte aspecto mostrado pela Equação (4.20):

$$\Delta u_j(X') - \Delta u_j^{Sn}(X') = \frac{h_{Ad}}{G_{Ad}} \Delta \tau_j^{Ad}(X')$$

onde h_{Ad} é a espessura da camada adesiva, G_{Ad} é o coeficiente de deformação transversal do material adesivo, τ_j^{Ad} é a tensão cisalhante no adesivo e as seguintes relações matemáticas serão utilizadas na resolução dos sistemas de equações $\Delta u_j(X') = u_j(X') - u_j(X^0)$, $\Delta u_j^{Sn}(X') = u_j^{Sn}(X') - u_j^{Sn}(X^0)$, $\Delta \tau_j^{Ad}(X') = \tau_j^{Ad}(X') - \tau_j^{Ad}(X^0)$. Para o caso aqui estudado, serão empregados apenas reforçadores retos e para este caso a seguinte consideração é pertinente. As tensões cisalhantes que aparecem no adesivo τ_j^{Ad} são iguais ao valor das forças de corpo que aparecem na ligação b_j^{Sn} dividida pela espessura da camada adesiva w_{Ad} . Com essa consideração, podemos agora escrever as equações de compatibilidade de deslocamento entre reforçadores e chapa em termos das forças de corpo que aparecem na região de ligação, mostrado pela Equação (4.24):

$$\Delta u_j(X') - \Delta u_j^{Sn}(X') = \Phi_{Ad} \Delta b_j^{Sn}(X')$$

onde $\Delta b_j^{Sn}(X') = b_j^{Sn}(X') - b_j^{Sn}(X^0)$ e

$$\Phi_{Ad} = \frac{h_{Ad}}{w_{Ad} G_{Ad}}$$

é o coeficiente de deformação transversal da camada adesiva, apresentado pela Equação (4.25).

Se o ponto de referência X^0 for escolhido coincidentemente com o início de cada reforçador (isto é, $y=0$), os deslocamentos relativos Δu_j^{Sn} apresentados na Equação (4.11) podem ser expressos como uma função das incógnitas forças de corpo b_j^{Sn} , fazendo-se uso da Equação (4.61) para o caso do deslocamento transversal e Equação (4.75) para o deslocamento longitudinal dos pontos de contato. Ainda as relações entre os deslocamentos relativos e forças de corpo podem ser expressas em termos do sistema de coordenadas da chapa e dos reforçadores apresentados pelas equações (4.26) e (4.27):

$$\Delta u_i^{Sn} = \Theta_{ij}^{Sn} \Delta v_j^{Sn}$$

e

$$b_i^{Sn} = \Theta_{ij}^{Sn} f_j^{Sn}$$

A matriz de transformação foi mostrada na Equação (4.20):

$$\Theta^{Sn} = \begin{bmatrix} \cos \varphi^{Sn} & -\sin \varphi^{Sn} \\ \sin \varphi^{Sn} & \cos \varphi^{Sn} \end{bmatrix}$$

onde φ^{Sn} é o ângulo entre a direção x_2 da chapa e o eixo do reforçador (Aliabadi, 1998).

Com isso os deslocamentos relativos $\Delta u_j(X') = u_j(X') - u_j(X^0)$ podem ser finalmente escritos com o uso da Equação (4.29) do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \Delta u_j(X') = & \int_{\Gamma} [U_{ij}(X', x) - U_{ij}(X^0, x)] t_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} [T_{ij}(X', x) - T_{ij}(X^0, x)] u_j(x) d\Gamma(x) + \dots \\ & \dots + \frac{1}{h} \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_{Sn}} [U_{ij}(X', X) - U_{ij}(X^0, X)] b_j^{Sn}(X) d\Gamma_{Sn}(X) \end{aligned}$$

Ao escrever o sistema de equações dos deslocamentos na interface entre a chapa e os reforçadores utilizando a Equação (4.29), pode-se então resolver o sistema de equações resultante do *MECD* onde as incógnitas agora são além dos deslocamentos no contorno da estrutura, também as forças de corpo atuantes entre os reforçadores e chapa.

Para a resolução completa dos sistemas de equações precisa-se ter o mesmo número de equações e incógnitas. Para isso faz-se uso também na resolução do sistema as equações de equilíbrio que podem ser apresentadas para cada reforçador. Para que os reforçadores estejam em equilíbrio as seguintes devem ser satisfeitas:

$$F_1(L) - F_1(0) - \int_0^L f_1(y) dy = 0 \quad (4.81)$$

$$F_2(L) - F_2(0) - \int_0^L f_2(y) dy = 0 \quad (4.82)$$

$$M(L) - M(0) - LF_1(0) = \int_0^L (L - y)f_1(y) dy \quad (4.83)$$

Essas equações são similares as utilizadas na análise estática, mas agora as funções $f_i(y)$ são funções que variam também no tempo.

De posse de todas essas equações pode-se através do *MECD* chegar as resoluções dos problemas para chapas com a presença de reforçadores. Os exemplos numéricos mostram os resultados alcançados usando esta metodologia e comparações com resultados consagrados na literatura.

4.3.3.4 – Efeito Piezelétrico

Do mesmo modo que foi realizado na análise estática, aqui na análise dinâmica também, tem que ser simulado o efeito piezelétrico sobre os sensores. De acordo com a notação compacta matricial assumida pela IEEE, as equações constitutivas do efeito eletromecânico acoplado para uma relação linear de um material piezelétrico podem ser escritas como:

$$\text{Efeito Piezelétrico Direto:} \quad D = \varepsilon^T E + d\sigma \quad (4.84)$$

$$\text{Efeito Piezelétrico Inverso:} \quad \varepsilon = s^E \sigma + d' E \quad (4.85)$$

onde D (*carga / área*) e E (*voltagem / comprimento*) são o deslocamento elétrico e o campo elétrico, respectivamente. ε e σ são as deformações e as tensões mecânicas, d , ε^T e s^E são a constante de deformação piezelétrica, a permissividade dielétrica e a constante de conformidade, respectivamente. Os índices E e T indicam que os valores das constantes

são obtidos para um campo elétrico constante e um campo de tensão constante, respectivamente.

Para o modelo do sensor aqui empregado, seguindo o que foi desenvolvido no trabalho de (Lin, X. e Yuan, F. G., 2001), e assumindo que o sensor é suficientemente fino de modo a poder se considerar que ocorre uma deformação constante na espessura do sensor, a voltagem de saída, dependente da deformação, pode então ser escrita como:

$$V_{out} = \frac{d_{31} E_p h_p \varepsilon_R}{4K_3 \varepsilon_0 \pi A (1 - \nu_p)} \quad (4.86)$$

onde ε_R é agora a deformação calculada pelo código *MECD- V_{din}* , d_{31} é o coeficiente de carga de carga piezolétrica para este trabalho e o material escolhido para o sensor é igual a $130 \times 10^{-12} \text{ mV}^{-1}$, E_p é o módulo de Young para o material piezolétrico escolhido e é igual a 76×10^9 , h_p é a espessura considerada para o sensor, K_3 é a constante dielétrica relativa e é igual a 1280 , e ε_0 é a permissividade dielétrica do espaço livre e é igual a $8,85 \times 10^{-12}$ para o sensor do material piezolétrico PKI-402, que foi empregado nos ensaios e A é a área do sensor, agora não mais um círculo e sim um retângulo. O fator de ganho deste material para esta configuração do sensor é da ordem de 10^6 sobre a leitura da deformação.

Os exemplos numéricos escolhidos para a análise dinâmica foram determinados a partir de estruturas e exemplos utilizados em outras bibliografias, de modo a se ter alguma referência para os resultados, já que a análise dinâmica através do Método dos Elementos de Contorno em chapas finas com reforçadores era inédita. Exemplos similares principalmente referentes às dimensões das chapas e ao material empregado podem ser encontrados nas referências de Tua, Quek e Wang (2004) e Lin and Yuan (2001). Estas referências usaram as ondas longitudinais (“Lamb waves”) para determinar a presença da trinca em chapas, embora, nestes trabalhos foram registrados alguns problemas como regiões denominadas de regiões cegas às ondas empregadas na análise.

Através destes exemplos numéricos, poder-se-á, então, analisar mais uma metodologia a ser empregada na determinação da presença da trinca em chapas através da análise dinâmica usando o código *MECD- V_{din}* .

5 – EXEMPLOS NUMÉRICOS

5.1 – INTRODUÇÃO

Os exemplos numéricos apresentados neste capítulo têm por objetivo mostrar os resultados das formulações desenvolvidas no capítulo anterior e implementadas em códigos de Elementos de Contorno. Neste capítulo procurou-se uma divisão dos exemplos em dois grandes blocos. Primeiramente os resultados relativos a determinação estática e dinâmica dos Fatores de Intensidade de Tensão, i.e., *FIT* e *FITD* são apresentados. Em seguida são discutidos os exemplos de determinação da posição de trincas (simples e múltiplas) para painéis com e sem reforçadores e com carregamento estático e dinâmico.

Os códigos utilizados para a implementação dos algoritmos e a precisão que os métodos sugeridos alcançam são também discutidos.

Neste capítulo apresentação serão colocados exemplos numéricos que podem ser comparados com outros trabalhos publicados. Para os Fatores de Intensidade de Tensão compara-se os resultados com outros códigos computacionais de reconhecida validade no meio da engenharia e para a determinação das trincas comparam-se os resultados com os trabalhos de algumas referências, (Tua, Quek e Wang, 2004), de modo que os valores encontrados podem ser avaliados e conclusões podem ser retiradas dos exemplos.

Os exemplos numéricos aqui apresentados correspondem tanto à análise estática utilizando os códigos denominados de *MEC-I_{est}* e *MECD-II_{est}*, como para a análise dinâmica, com o código denominado de *MECD-V_{din}*.

5.2 – DETERMINAÇÃO DO *FIT* E DO *FITD*

5.2.1 – Exemplo 1 – Determinação do *FIT* para Chapa com Trinca de Canto, Análise Estática

Neste exemplo clássico da literatura é considerada uma trinca de canto (Saouma, 2000). A geometria da chapa é definida pelos parâmetros largura $W = 10 \text{ cm}$, e altura $h = 30 \text{ cm}$. O esquema para este exemplo é mostrado na Figura 5.1a. A trinca de tamanho a é avaliada para os valores igual a 1, 2, 3, 4 e 5 cm. O carregamento é de $\sigma = 100 \text{ kN/cm}^2$. O

modulo de Young para o painel é considerado $20500kN/cm^2$ e o coeficiente de Poisson de 0.3 . Na Figura 5.1b são mostrados os resultados alcançados utilizando uma ferramenta comercial (*ANSYS*) que é um código muito usado na engenharia que utiliza, entre outros métodos, o *MEF*. A implementação das rotinas para o calculo dos *FIT* foram implementadas no código *MEC-I_{est}*. Nos resultados apresentados (de forma gráfica) o erro zero (0) corresponde à solução analítica do problema e foi obtido por Keer e Freedman (1973) para uma abertura inicial de trinca. Neste exemplo, teve-se o cuidado de se estudar o desempenho dos métodos a proporção que a trinca cresce, ou seja, o valor de “*a*” da trinca se altera em relação ao restante da estrutura (diminuição do ligamento “*W - a*”). Keer e Freedman (1973) utilizaram a fórmula apresentada pelas Equações (3.29) e (3.32). Já para os resultados do *MEC*, empregam-se duas discretizações, a primeira com 29 e a segunda com 58 elementos quadráticos no contorno e com elementos ponto a um quarto na ponta da trinca. Estas discretizações resultam em 58 nós e 116 nós, e ainda 116 e 232 graus de liberdade respectivamente.

Pode-se notar que os resultados obtidos utilizando o *MEC-I_{est}*, empregando as malhas consideradas, são similares aos resultados obtidos com o *MEF* empregando mais de 2000 elementos e cerca de 4500 graus de liberdade. A Figura 5.2 - a e b mostram a malha empregada para o *MEC* e o *MEF*.

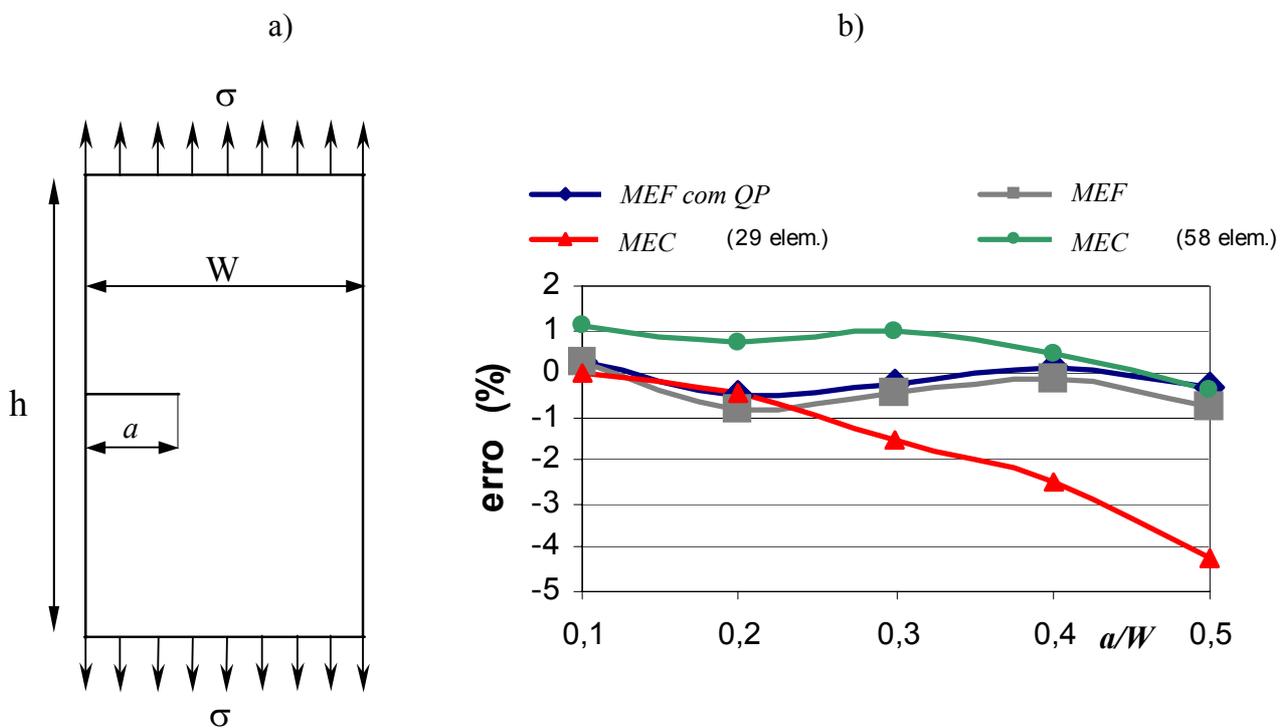


Figura 5.1 – Exemplo esquemático para trinca de canto e resultados.

Os resultados mostrados na Figura 5.1b apresentam 4 curvas, que são, os resultados para o *MEF* utilizando apenas elementos quadráticos, os resultados para o *MEF* utilizando a mesma malha, mas agora com elementos ponto a um quarto para a discretização da trinca, os resultados para o *MEC* com 29 elementos e finalmente os resultados para o *MEC* com 58 elementos.

Usando elementos ponto a um quarto os erros obtidos pelo *MEF* foram reduzidos para 0.3%. Os resultados obtidos com o *MEC-I_{est}* utilizando a Integral-J, a diferenciação implícita das soluções fundamentais e elementos ponto a um quarto, foram de 1.7 % para a malha que aparece na Figura 5.2a. Com o refinamento da malha, isto é, a utilização de 58 elementos os erros passaram a ser de 0.5 %.

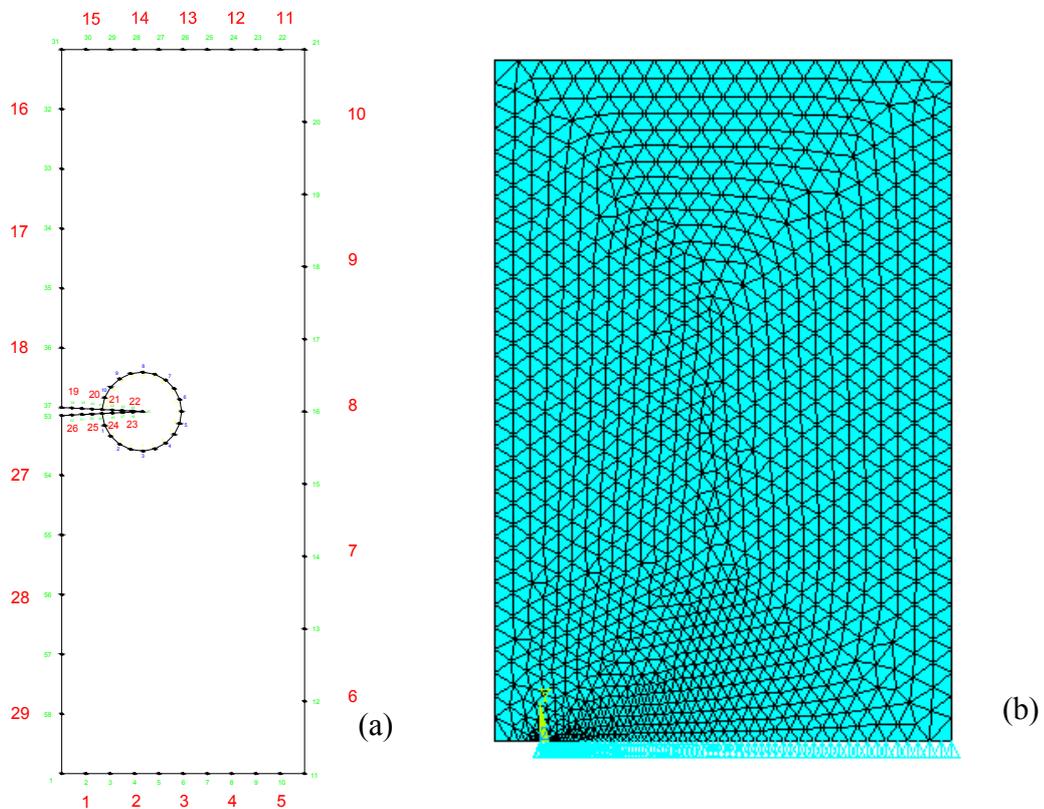


Figura 5.2 – Malhas utilizadas para a resolução do Exemplo-1: (a) *MEC* e (b) *MEF*

5.2.2 – Exemplo 2 – Determinação do *FIT* para Chapa com Duas Trinca de Canto, Análise Estática

Neste exemplo clássico da literatura, consideram-se duas trincas de canto (Saouma, 2000). A geometria da chapa é definida pelos parâmetros largura $W = 10 \text{ cm}$, e altura $h = 30 \text{ cm}$. O esquema para este exemplo é mostrado na Figura 5.3 - a. A trinca de tamanho a é

avaliada para os valores igual a 1, 2, 3, e 4 cm. O carregamento é de $\sigma = 100kN/cm^2$. O módulo de Young para o painel é considerado $20500kN/cm^2$ e o coeficiente de Poisson de 0.3. Na Figura 5.3b são mostrados os resultados alcançados utilizando uma ferramenta comercial (ANSYS) em *MEF* e o código *MEC-I_{est}*. O erro 0 (zero) é considerado para a solução analítica do problema obtida por Paris e Sih (1965) utilizando a fórmula apresentada pelas Equações (3.29) e (3.33).

Nota-se que os resultados obtidos utilizando o *MEC-I_{est}*, mesmo empregando as malhas consideradas, são na maioria das vezes melhores que os encontrados com o *MEF* empregando a mesma malha do exemplo anterior.

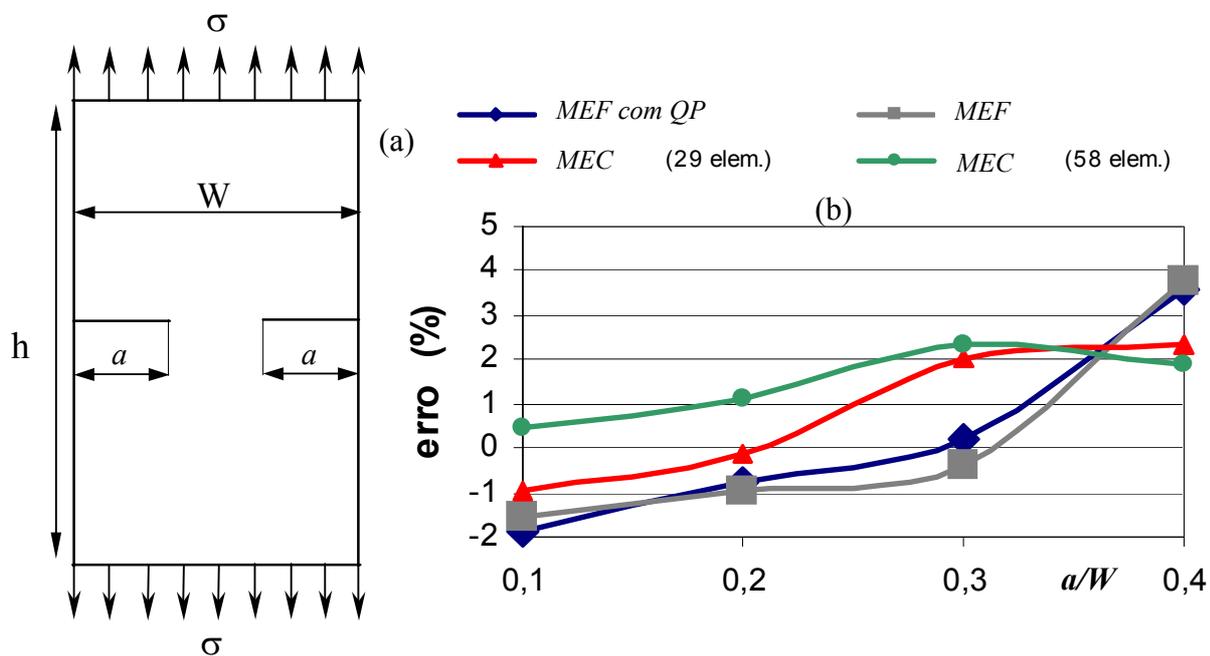


Figura 5.3 – Exemplo esquemático para duas trincas de canto e resultados.

5.2.3 – Exemplo 3 – Determinação do *FIT* para Chapa com Trinca de Central, Análise Estática

Neste exemplo da literatura é considerada uma trinca central (Saouma, 2000). A geometria da chapa é definida pelos parâmetros largura $W = 10\text{ cm}$, e altura $h = 30\text{ cm}$. O esquema para este exemplo é mostrado na Figura 5.4 - a. A trinca de tamanho a é avaliada para os valores igual a 1, 2, 3, e 4 cm. O carregamento é de $\sigma = 100kN/cm^2$. O módulo de Young para a chapa é considerado $20500kN/cm^2$ e o coeficiente de Poisson de 0.3. Na Figura 5.4 - b são mostrados os resultados alcançados utilizando uma ferramenta comercial (ANSYS) em *MEF* e o código *MEC-I_{est}*. O erro 0 é considerado para a solução

analítica do problema obtida por Paris & Sih (1965) utilizando a fórmula apresentada pelas Equações (3.29) e (3.31).

Pode-se notar que os resultados obtidos utilizando o *MEC-I_{est}*, mesmo empregando as malhas consideradas, foram similares aos encontrados com o *MEF* empregando a mesma malha do primeiro exemplo.

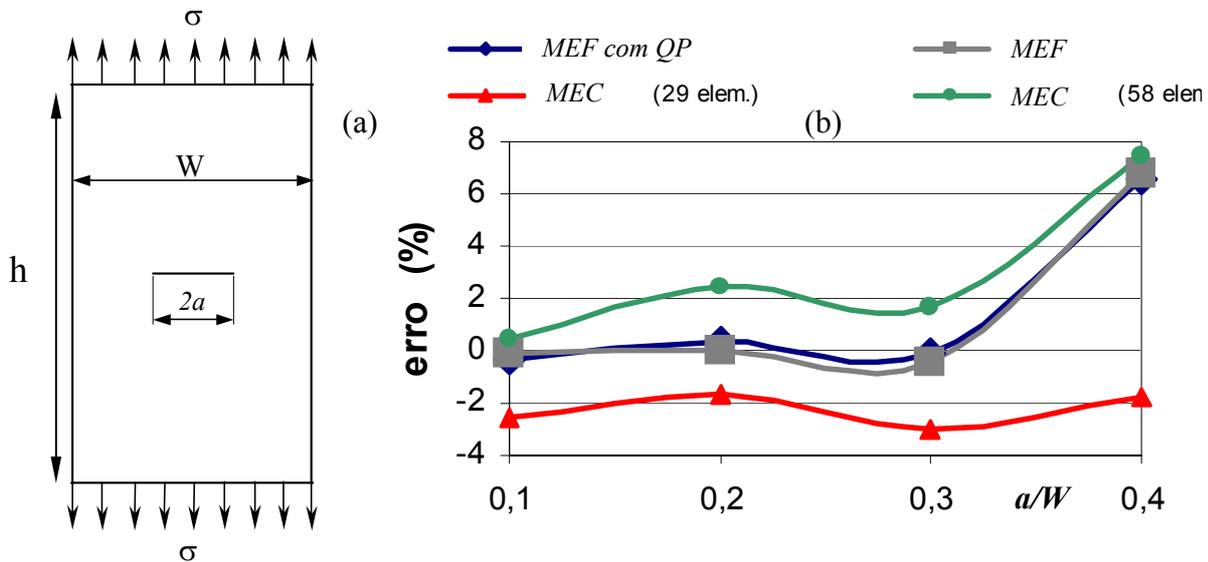


Figura 5.4 – Exemplo esquemático para trinca de centro e resultados

5.2.4 - Exemplo 4- Determinação do *FITD* - Chapa com e sem Reforçadores, Trinca Plana - Análise Dinâmica

Neste exemplo numérico mostra-se como o Fator de Intensidade de Tensão Dinâmico (*FITD*) de uma chapa com dois reforçadores se comporta com o aumento da distância dos reforçadores em relação à ponta da trinca. Este exemplo é um exemplo clássico no estudo estático da situação e sabe-se da bibliográfica que o *FITD* aumenta com o afastamento dos reforçadores em relação à ponta da trinca. O carregamento dinâmico aplicado à chapa corresponde a uma carga distribuída com intensidade unitária e frequência em Hz de $\omega = 0.001$. Na bibliografia são usados normalmente dois tipos básicos de análise uma para o K_I e outra para o K_{II} , que no caso seriam os Fatores de Intensidade de Tensão correspondendo ao modo I (abertura) e ao modo II (deslizamento). Para este exemplo, adota-se uma trinca plana para a determinação do *FITD* no Modo I, no próximo exemplo utiliza-se uma trinca inclinada para a determinação do *FITD* no Modo II.

A Figura 5.5 mostra a configuração da chapa para o exemplo da trinca plana aqui em questão. Na Figura 5.5 podem ser verificadas as condições de contorno empregadas para a análise do *FITD* no Modo I, bem como as forças aplicadas e a definição do tamanho da trinca ($2a$) e da distância do centro da trinca até os reforçadores (d). Para este exemplo os resultados são mostrados na Figura 5.6 onde se tem a variação da distância d de 0 até 3. Os valores mostrados para o *FITD* estão normalizados pelo valor K_0 que é o Fator de Intensidade de Tensão para a mesma chapa com trinca plana, mas correspondente ao carregamento análise estática.

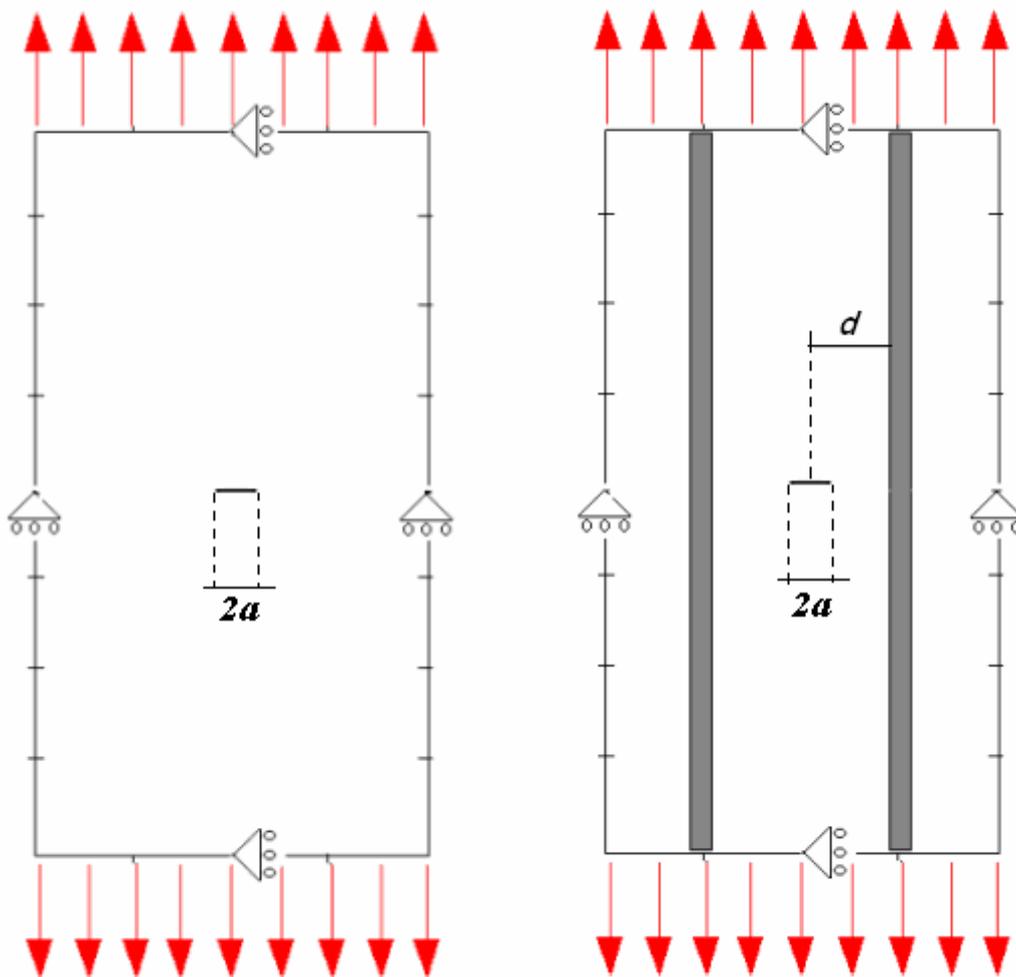


Figura 5.5 – Configuração da chapa na determinação do *FITD* no modo I.

Na análise dos resultados apresentados na Figura 5.6 pode-se constatar que o código também apresenta resultados pertinentes mesmo com a presença da trinca. Percebe-se que o valor do *FITD* para o caso da chapa sem o reforçador é o mais elevado e a

presença do reforçador diminui o nível do valor do *FITD* com a proximidade do mesmo em relação à ponta da trinca. Pode-se verificar também que para a análise dinâmica o *FITD* pode alcançar até praticamente 2,5 vezes o valor do *FIT* do caso estático quando a análise é feita sem o reforçado. Este valor cai para menos de 2 vezes quando se tem a presença do reforçador. Pode ainda ocorrer uma diminuição até níveis pouco maiores do que 1 com a proximidade do reforçador da ponta da trinca.

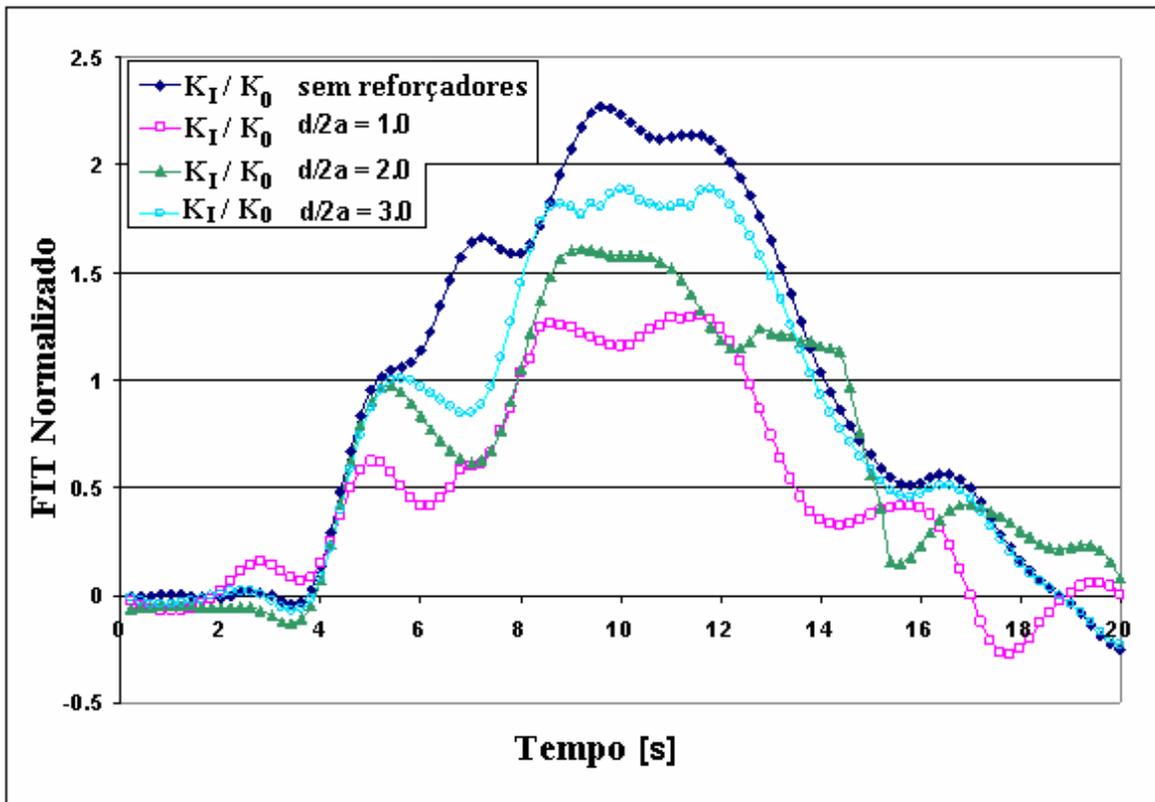


Figura 5.6 – Valores Normalizados do *FITD* no modo I para diferentes valores de $d/2a$.

5.2.5 - Exemplo 5 - Determinação do *FITD* - Chapa com e sem Reforçadores, Trinca Inclinada - Análise Dinâmica

A Figura 5.7 mostra a configuração da chapa para o exemplo da trinca inclinada para o exemplo aqui em questão. Na Figura 5.7 podem ser verificadas as condições de contorno empregadas para a análise do *FITD* no Modo I (exemplo anterior) e Modo II, bem como as forças aplicadas e a definição do tamanho da trinca ($2a$) e da distância do centro da trinca até os reforçadores (d). O carregamento dinâmico aplicado à chapa

corresponde a uma carga unitária distribuída e com frequência em Hz de $\omega = 0.001$. Para este exemplo os resultados são mostrados na figura 5.8 onde se tem a variação da distância d de 0 até 3. Os valores mostrados para o *FITD* estão normalizados pelo valor K_0 que é o Fator de Intensidade de Tensão para a mesma chapa com trinca inclinada, mas, sob análise estática.

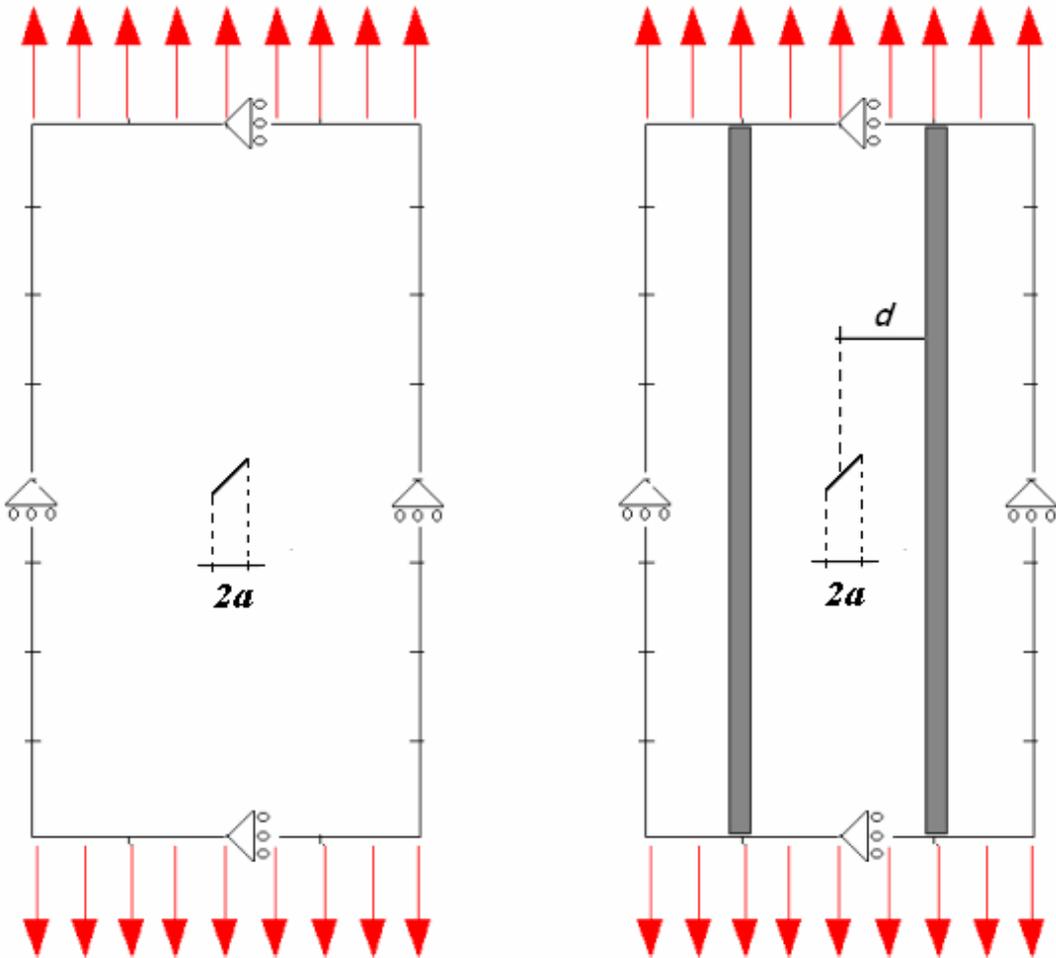


Figura 5.7 – Configuração da chapa na determinação do *FITD* no modo I e modo II.

Da análise dos resultados apresentados na Figura 5.21 pode-se constatar que o código *MECD-V_{din}* também apresenta resultados pertinentes mesmo com a presença da trinca inclinada. Percebe-se que o valor do *FITD* para o caso da chapa sem o reforçador é o mais elevado e a presença do reforçador diminui o nível do valor do *FITD* com a proximidade do mesmo em relação à ponta da trinca. Pode-se verificar também que para a análise dinâmica o *FITD* pode alcançar até praticamente 1,5 vezes o valor do *FIT* do caso

estático quando a análise é feita sem o reforçador. Este valor cai para próximo da igualdade quando se tem a presença do reforçador e pode ocorrer uma diminuição a níveis menores do que 1 com a proximidade do reforçador da ponta da trinca. Percebe-se também que o nível do *FITD* para o modo I é maior que para o modo II para este caso misto, o que era esperado, pois se sabe que o modo I é dominante nestes casos de trinca inclinada (Fedelinski, Aliabadi e Rooke, 1996).

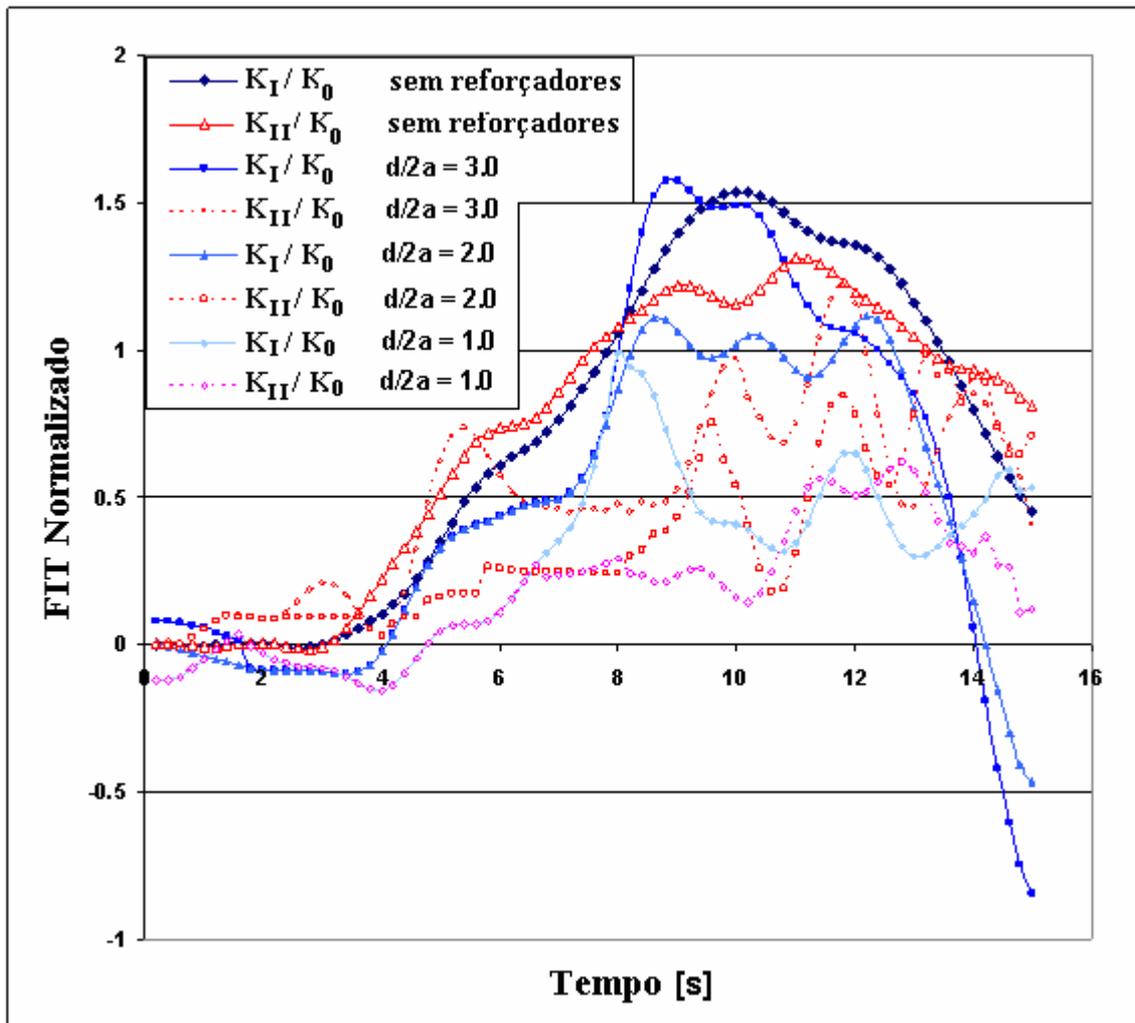


Figura 5.8 – Valores Normalizados do *FITD* - modos I e II para diferentes valores de $d/2a$.

Por meio destas análises iniciais dos *FITDs* realizadas para validação do código *MECD-V_{din}* constata-se que o uso do código dinâmico *MECD-V_{din}*, para o estudo de chapas com reforçadores, poderia representar avanço na análise de Fatores de Intensidade de Tensão. Esta sugestão é porque os casos dinâmicos são os mais corriqueiros em certas estruturas. O desenvolvimento de tais códigos pode melhorar as análises de estruturas

críticas e permitir avanços com maior segurança em novos projetos de estruturas, principalmente aqueles que empregam chapas finas como em fuselagens e asas de aviões.

5.3 – ANÁLISE ESTÁTICA - DETERMINAÇÃO DE TRINCAS

5.3.1 – Exemplo 6 – Detecção Estática da Trinca, Trinca Única

Em alguns trabalhos encontrados na bibliografia, a respeito da detecção de trincas através da utilização de materiais piezelétricos, são empregadas as ondas horizontais, conhecidas como Lamb Waves (Lin e Yuan, 2001; Tua, Quek e Wang, 2004) para executar a detecção. Estas ondas horizontais que se propagam dentro do material elástico podem ser empregadas para a realização da detecção da trinca. Apesar de alguns problemas serem relacionados com essa metodologia, como por exemplo, a presença de regiões cegas para estes sensores piezelétricos, o número de publicações é grande e mostra que esta metodologia é preferida para casos onde a detecção deve ser realizada de modo estático.

Aqui neste trabalho será empregado o *MECD* para a detecção do campo de deformação próximo a trinca através do posicionamento dos sensores piezelétricos. Os valores encontrados aqui serão comparados com casos similares apresentados na bibliografia e que empregaram outras metodologias para a detecção das trincas (Tua, Quek e Wang, 2004, Lin e Yang, 2001; Liang e Hwu, 2001).

A primeira coisa quando se trata de detecção de trincas através de sensores piezelétricos é a determinação do sinal nos sensores para a chapa no seu estado sem apresentar nenhum defeito. Este sinal será usado para comparação com o sinal quando a chapa apresentar algum defeito, como trincas ou outros defeitos advindos da utilização da peça. Para a detecção deste sinal da chapa sem defeito, o posicionamento dos sensores normalmente não tem influência no sinal de saída, isto é, para casos onde o carregamento ocasiona um campo de tensão uniforme dentro da chapa. A Figura 4.5 mostra uma chapa de alumínio carregada simetricamente à tração, com propriedades apresentadas na Tabela 5.1, e as várias posições onde foram empregados os sensores. Para cada posicionamento foram empregados 4 sensores e detectado o sinal proveniente de cada um deles. Para esta configuração foi usado o *MECD* com 24 elementos quadráticos e 48 nós para a discretização da chapa. Para cada sensor foram empregados oito elementos quadráticos para a detecção do gradiente de deformação existente na localidade específica da chapa.

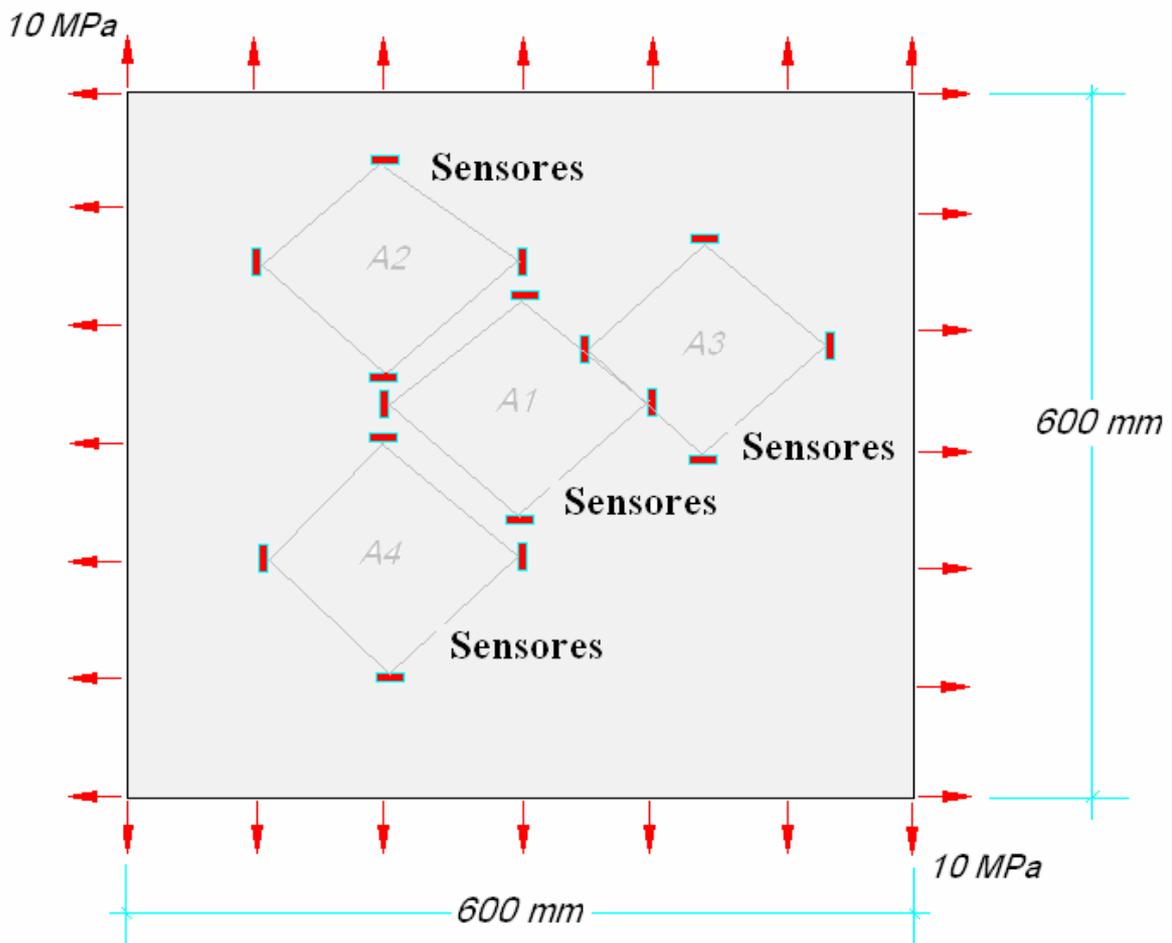


Figura 5.9 – Chapa de Alumínio com 4 diferentes posicionamentos dos sensores.

Tabela 5.1 – Propriedades Geométricas e do Material para a Chapa de Alumínio.

Dimensões (mm^3)	600 x 600 x 2
Módulo de Young, E (GPa)	72.5
Módulo de Cisalhamento, G (GPa)	27.25
Densidade, ρ ($kg\ m^{-3}$)	2700
Coefficiente de Poisson, ν	0.33

A Tabela 5.2 mostra as propriedades dos sensores de cerâmica PZT deste exemplo.

A Figura 5.10 apresenta os resultados para as voltagens de saídas provenientes dos quatro sensores nos quatro diferentes posicionamentos na chapa ($A1$, $A2$, $A3$, $A4$). A máxima diferença encontrada na voltagem de saídas dos sensores foi da ordem de 0,13% o que pode ser considerada como nula para qualquer posição do sensor sobre a chapa, quando esta não apresenta nenhum defeito.

Tabela 5.2 – Propriedades Geométricas e do Material para o Sensor de Cerâmica de PZT (PKI-402).

Dimensões (mm^3)	8 x 1 x 0.5
Módulo de Young, E_p (GPa)	76
Módulo de Cisalhamento, G_p (GPa)	29
Densidade, ρ_p ($kg\ m^{-3}$)	7600
Coefficiente de Poisson, ν_p	0.31
Constante Dielétrica Relativa K_3	1280
Coefficiente de Carga piezolétrica d_{31} , ($m\ V^{-1}$)	130 x 10 ⁻¹²
Espessura, h (cm)	0.05
Permissividade Dielétrica do Espaço Livre, ϵ_0 ($F\ m^{-1}$)	8.85 x 10 ⁻¹²

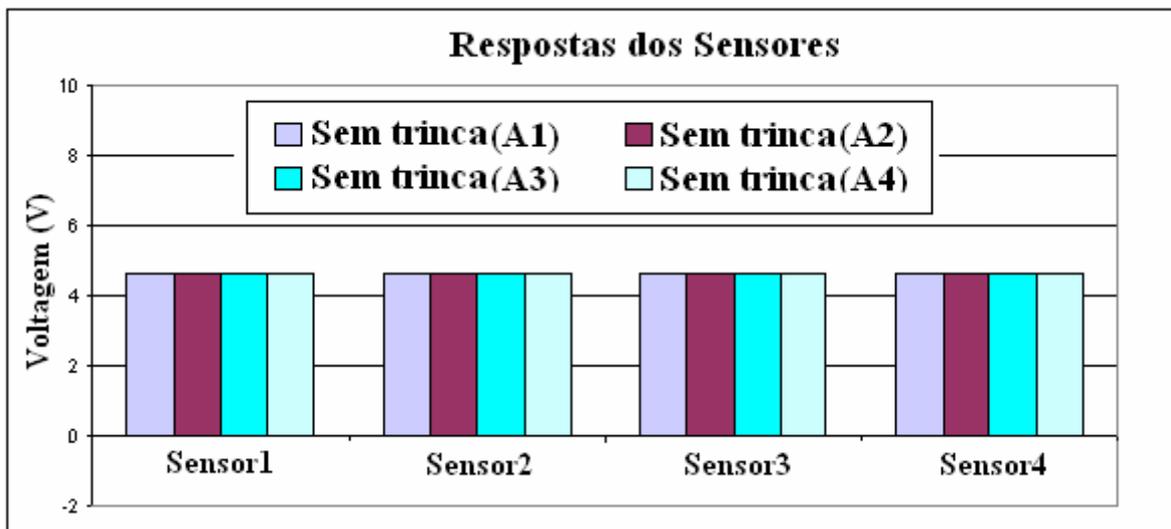


Figura 5.10 – Resposta dos sensores para diferentes posições na chapa.

Em todos os exemplos numéricos aqui apresentados é adotado um coeficiente de deformação transversal do adesivo (Φ) de 0,085. Outros valores também poderiam ser testados para realizar uma comparação entre diferentes materiais para o adesivo, caso isso fosse necessário. Como a intenção do trabalho aqui não era a pesquisa para diferentes materiais de adesivos, esse valor foi mantido constante em todos os exemplos (Leme et al, 2007a).

Para o primeiro exemplo numérico, com a presença da trinca, foi escolhido realizar a detecção do sinal nos sensores quando uma trinca de 2 mm era simulada dentro da chapa. Esta dimensão de trinca pode ser facilmente detectada por sensores em ensaios experimentais e esses valores podem ser encontrados facilmente na bibliografia (Tua, Quek e Wang, 2004, Lin e Yang, 2001; Liang e Hwu, 2001). A detecção da trinca é realizada através da determinação do campo de deformação estático resultante quando a chapa é sujeita a esforços externos. O campo de deformação é alterado dentro da chapa por causa da presença da trinca. Com a proximidade do sensor da região onde se encontra a trinca, o sinal de saída é alterado podendo-se com isso detectar-se a trinca. Neste primeiro exemplo com trinca foi usado a mesma configuração da chapa anterior, e a presença da trinca será realizada através do sensor1. A seqüência de posicionamentos dos sensores mostrada na Figura 5.11 representa uma seqüência de ensaios necessários para a detecção da posição da trinca.

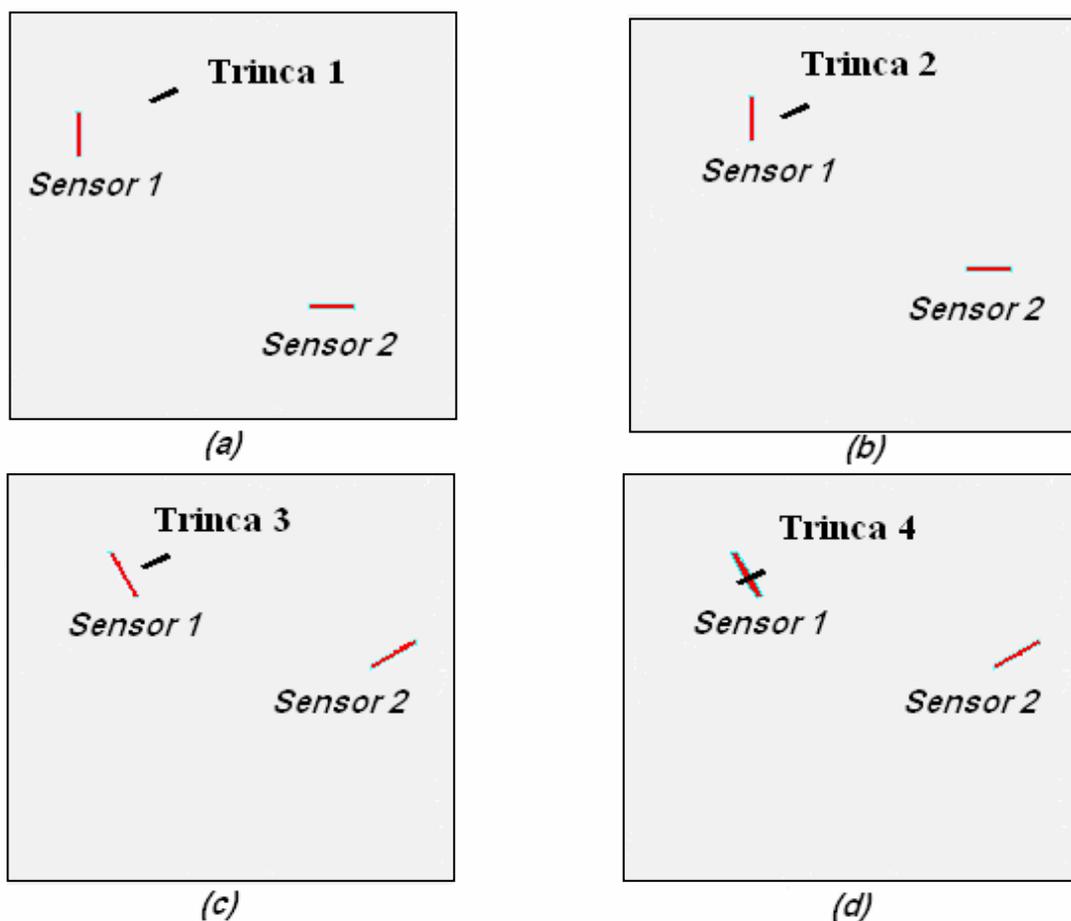


Figura 5.11 – Posicionamentos dos sensores para detecção da trinca.

Na parte (a) da Figura 5.11 pode-se notar o primeiro posicionamento dos sensores na chapa. Na prática esse primeiro posicionamento pode acarretar uma série de medições até que se encontre uma variação da medição da voltagem de saída de algum dos quatro sensores disponíveis no conjunto de medição. A partir da primeira variação na voltagem de saída sendo detectada, dependendo de qual sensor apresentar esta variação, as direções de movimentação são escolhidas. Na parte (b) da Figura 5.11 pode-se verificar que foi necessária uma movimentação para cima e para a direita, de modo que o sensor1, que detectou a presença do defeito, pudesse ser aproximado da trinca. Na parte (c) da Figura 5.11 nota-se que foi necessária uma rotação do conjunto dos sensores no sentido anti-horário e finalmente na parte (d) da Figura 5.11 verifica-se que o conjunto dos sensores foi movimentado de modo a que o sensor1 ficasse sobre a trinca, localizado exatamente sobre a metade do seu comprimento. Vale-se notar que sendo a trinca não superficial, isto é, no interior da chapa, não se pode ter uma visualização da sua dimensão em nenhum momento do procedimento. O que acontece é que esta seqüência de medições leva a uma medição crescente do valor da voltagem de saída registrada no sensor1 e a praticamente nenhuma variação nos outros sensores, desde que, é claro, não existam outras trincas presentes na chapa. Na realidade, então, é necessário um número maior de passos até a detecção da trinca, pois se assume que nem sempre será acertada a direção de movimentação necessária para o aumento da voltagem de saída. Caso uma diminuição do sinal de saída seja detectada durante o procedimento, significa que a direção escolhida está afastando o sensor da trinca. No exemplo da Figura 5.11 o primeiro sinal foi detectado há uma distância de aproximadamente três vezes o comprimento do sensor, e foi crescente até o sensor estar posicionado simetricamente sobre a trinca. A Figura 5.11 (a) até (d) mostra o procedimento de detecção da trinca, retirados os passos onde ocorreram erros de escolha da direção de movimentação. O ponto inicial de posicionamento do conjunto dos sensores pode ser visto na Figura 5.9 na posição *A1*. Foi verificado no final do procedimento que o maior sinal de saída é alcançado quando o sensor é posicionado perpendicularmente à trinca.

A Figura 5.12 mostra os valores de saída dos sensores apresentado para a chapa sem defeito e para a chapa com a trinca e os sensores posicionados na Figura 5.11, de (a) até (d). Pode-se verificar que o valor de saída da voltagem se alterada apenas para o sensor1, os demais permanecem sem apresentar variações. A variação alcançada para o posicionamento dos sensores mais próximos a trinca tem um aumento da ordem de até 50 % no valor do sinal sem a presença do defeito para a trinca de 2mm. Esta variação é um

valor razoável para se realizar uma detecção de trincas através dos sensores disponíveis na atualidade.

O procedimento realizado neste primeiro exemplo deixa claro que a detecção da trinca é possível através do uso dos sensores e que a simulação numérica através do uso do *MECD* apresenta resultados compatíveis com o esperado em ensaios experimentais. Percebe-se também, que o grau de precisão dos resultados alcançados permite uma determinação segura não apenas da dimensão da trinca como também da sua inclinação dentro da chapa. É óbvio, que para o sucesso dessa determinação, é necessária a aquisição de vários padrões e resultados provenientes de exemplos iniciais que servirão como valores comparativos para a determinação da dimensão da trinca.

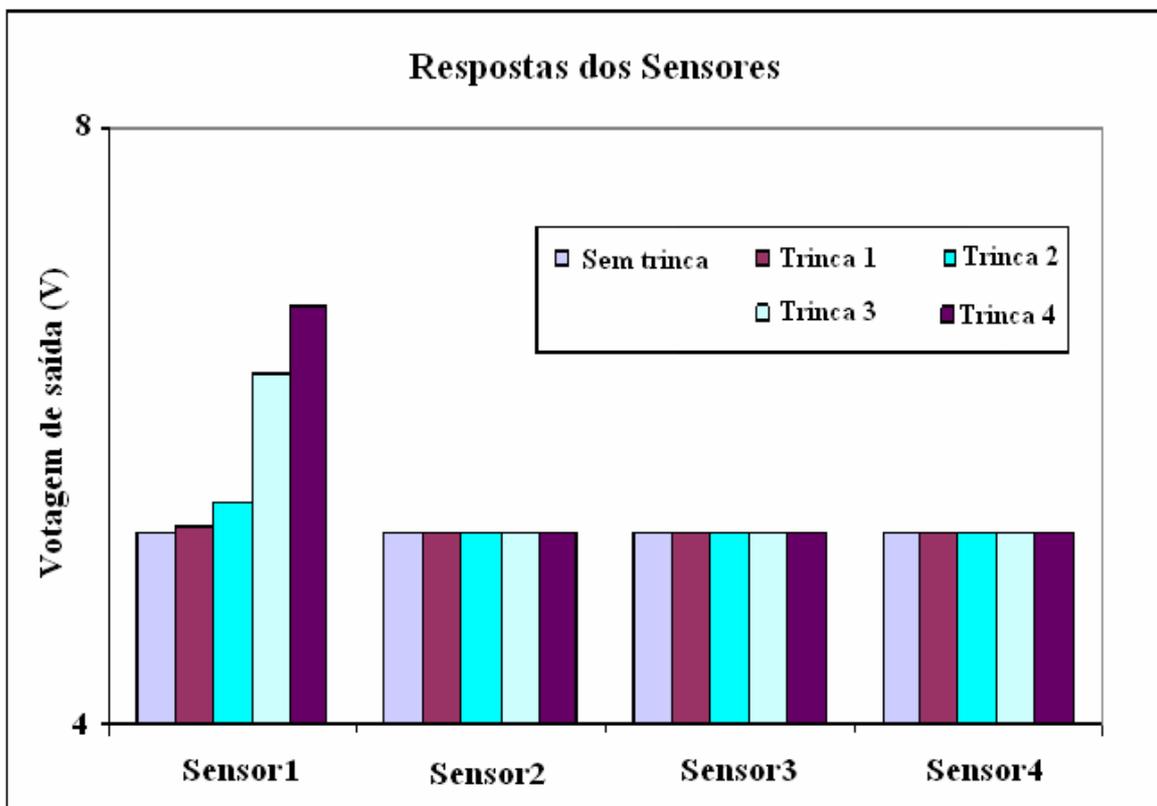


Figura 5.12 – Respostas dos sensores para detecção da trinca.

5.3.2 – Exemplo 7 – Detecção Estática da Trinca, Tamanho de Trinca Crescente

O quinto exemplo mostra a diferença dos sinais detectados pelo sensor quando se tem uma diferença na dimensão da trinca presente na chapa. A Figura 5.13 de (a) até (d) mostra o conjunto de sensores utilizados para realizar as detecções das diferentes

dimensões da trinca localizada sob o sensor4. Percebe-se que os valores de saída nos sensores são bem maiores quando comparados com os valores obtidos para se determinar a presença e a inclinação de uma trinca. Essa diferença de valores permite uma identificação imediata de qual o possível valor na dimensão da trinca já nas primeiras medições. O gráfico da Figura 5.14 mostra os diferentes valores de saída para o sensor4 quando este se localiza sobre uma trinca de diferentes dimensões.

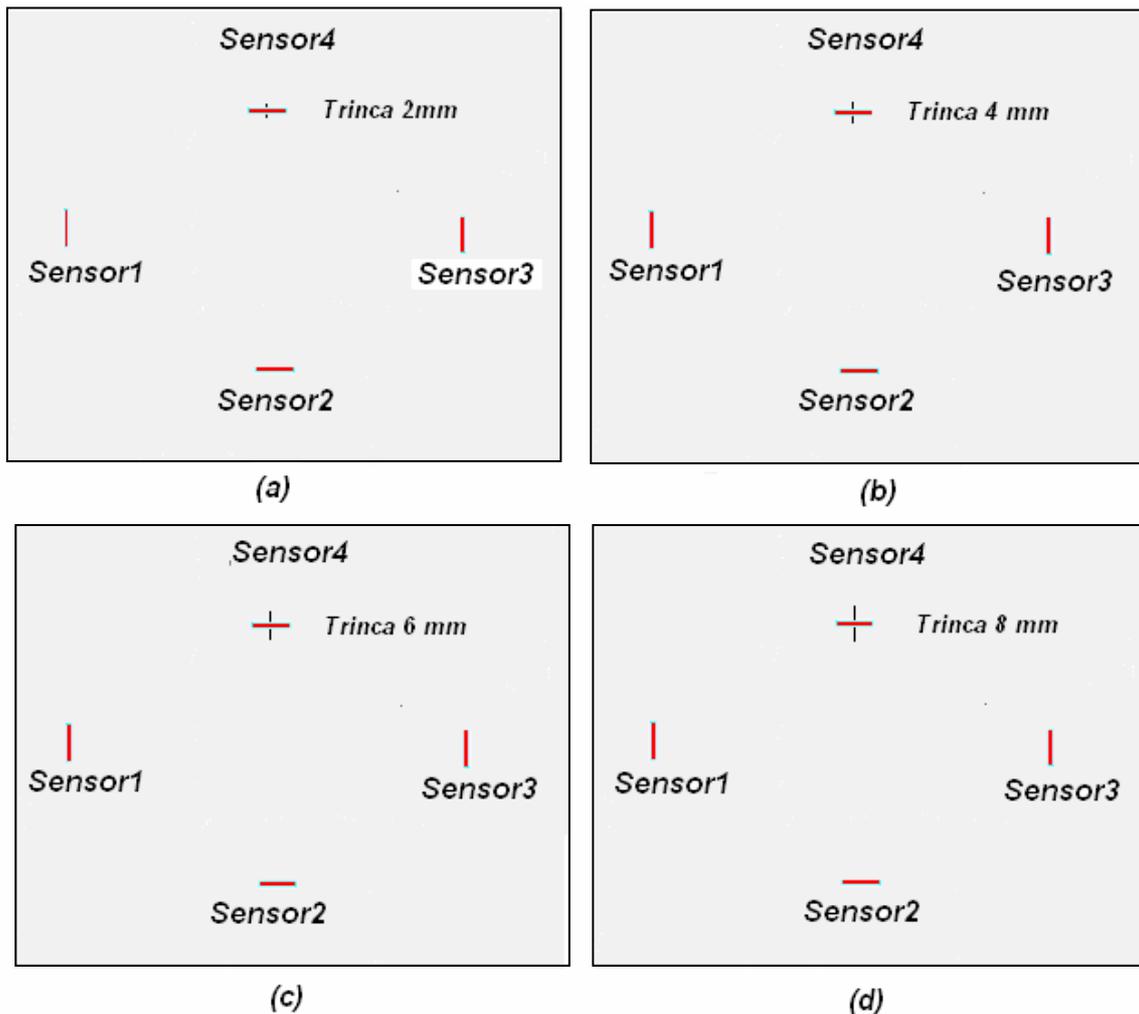


Figura 5.13 – Detecção de diferentes dimensões da trinca.

As dimensões da trinca variam de 2mm até 8mm. É válido notar que para a trinca de 2mm o valor de saída apresentado pelo sensor4 foi o mesmo que o valor alcançado pelo sensor1 no exemplo anterior, como esperado. Para cada milímetro acrescido no tamanho da trinca a diferença resposta da saída no sensor é de aproximadamente 1 (um) V. Este valor será denominado para alguns exemplos na análise estática como V_0 e será empregado para

apresentação de alguns gráficos. É óbvio que este valor é dependente das propriedades do material da chapa bem como do material dos sensores. Mas uma relação pode ser estabelecida para cada material e após um conhecimento prévio dessa proporção de variação pode-se estabelecer um parâmetro para reconhecimento da dimensão do defeito previamente.

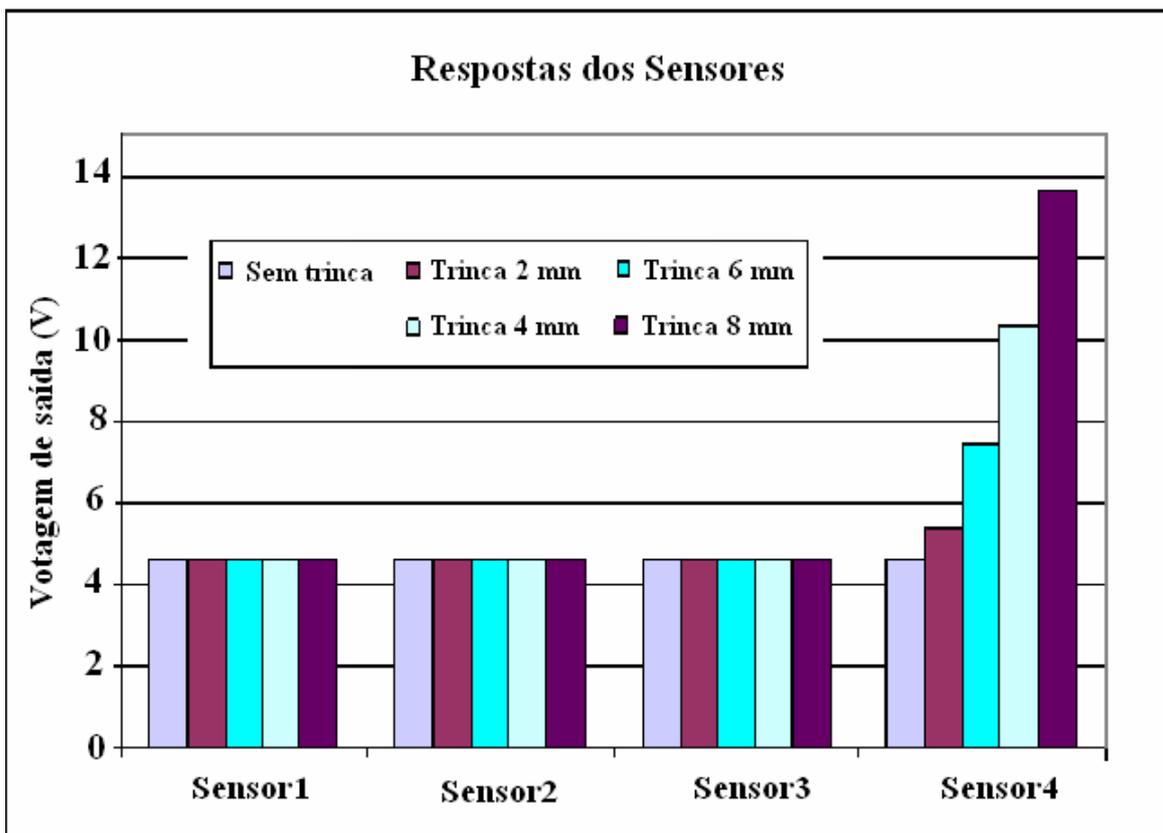


Figura 5.14 – Respostas dos sensores para detecção da dimensão da trinca.

5.3.3 – Exemplo 8 – Detecção Estática da Trinca, Propagação da Trinca

O sexto exemplo será aplicado em uma situação mais corriqueira, onde a chapa não tem simetria e pode apresentar diferentes estruturas internas, como por exemplo, vazios ou reforçadores. Essas variações são costumeiras em estruturas aeronáuticas, por exemplo, em fuselagens e asas. Nestas situações práticas normalmente é necessário que além da detecção da trinca também se faz necessário o acompanhamento do crescimento da trinca.

O *MECD* foi aplicado com sucesso por Salgado e Aliabadi (Salgado e Aliabadi, 1996) para previsão de crescimento de trincas múltiplas em chapas finas com reforçadores. Os mesmo exemplos mostrados naquele trabalho serão repetidos aqui, entretanto agora

com a simulação numérica das respostas dos sensores para uma tentativa de captação do sinal quando a trinca se propaga. Esta simulação pretende demonstrar que além da já apresentada possível detecção da presença de uma trinca em chapas, também é possível detectar-se o crescimento da mesma nessas chapas. A utilidade desta programação é de fácil reconhecimento, pois em áreas de engenharia como a aeronáutica, muitos sistemas devem ser continuamente monitorados e os resultados são estabelecidos através de muitas horas de ensaios experimentais. Deste modo, programações como está, depois de reconhecido a sua confiabilidade podem representar avanços enormes tanto em custos como em tempo de projetos de partes mecânicas.

Considerando o painel finito com reforçadores aderidos a sua estrutura através de parafusos e apresentando um orifício como mostrado na Figura 5.15. As dimensões são dadas em milímetros. A chapa, de espessura de 2,3mm, e os reforçadores são feitos de liga de alumínio, com denominação comercial de *A2024-T3* com as seguintes propriedades mecânicas: Módulo de Young: *78 500 MPa*; Coeficiente de Poisson: 0,32; Módulo de Elasticidade Transversal: *29000 MPa*. As propriedades da seção transversal dos reforçadores são: Área Transversal: *300mm²*; Segundo Momento de Inércia: *1800mm⁴*. Os parafusos são considerados rígidos nesta análise. Esta suposição pode ser tomada devido ao fato da estrutura do parafuso, normalmente de aço com elementos de liga, ser muito mais resistente que o material do reforçador e da chapa.

A Figura 5.16 mostra a mesma estrutura, mas agora com duas trincas simuladas na chapa, a primeira saindo do orifício circular e a segunda iniciando no centro da chapa emanando de um furo existente para a colocação do parafuso. Neste caso, o parafuso onde a presença da trinca foi constatada, seria simulado como inoperante e o reforçador do centro da estrutura teria sua parte central não atuante. A idéia, aqui, seria acompanhar a mudança no sinal dos sensores com o crescimento da trinca. Pode-se pensar que para esta realização na prática, já ter-se-ia, inicialmente, realizado a detecção das trincas e então executado a escolha do melhor posicionamento dos sensores. O painel é carregado à tração e o valor da tensão é de *10 MPa* aplicadas na parte de cima e de baixo da chapa. Os reforçadores são igualmente carregados nas suas extremidades. Outras situações também poderiam ser simuladas sem o menor problema, como por exemplo, os esforços diferenciados nas chapas e nos reforçadores, muito comuns em situações reais.

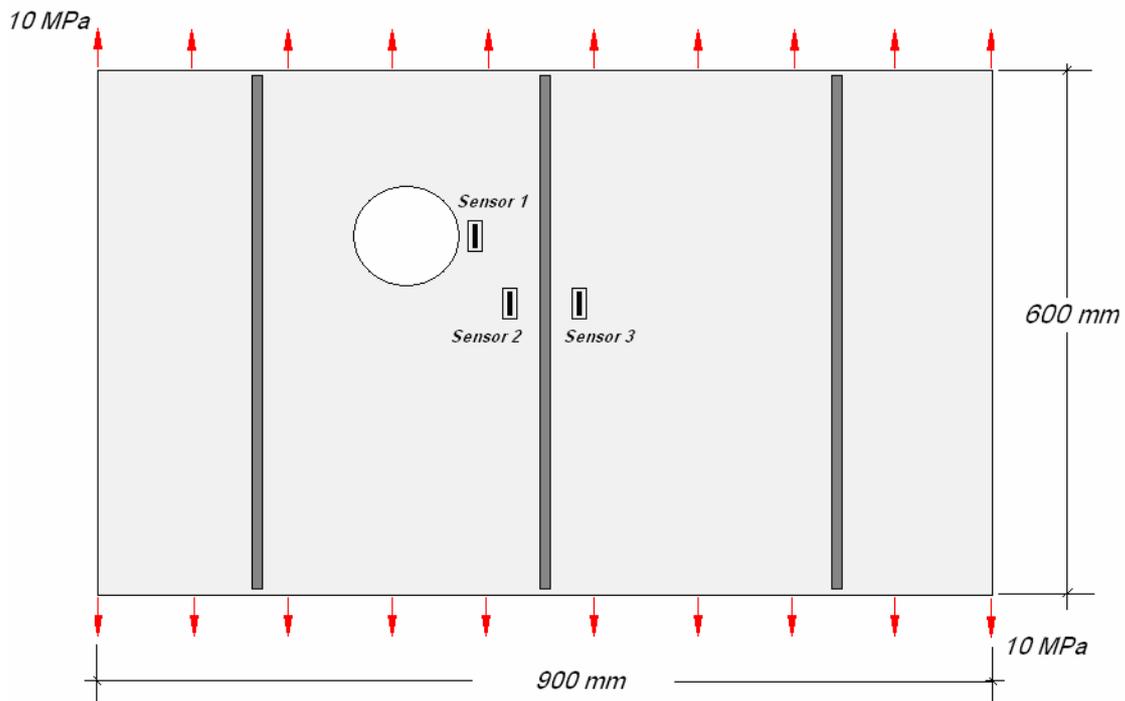


Figura 5.15 – Chapa de alumínio com reforçadores aparafusados.

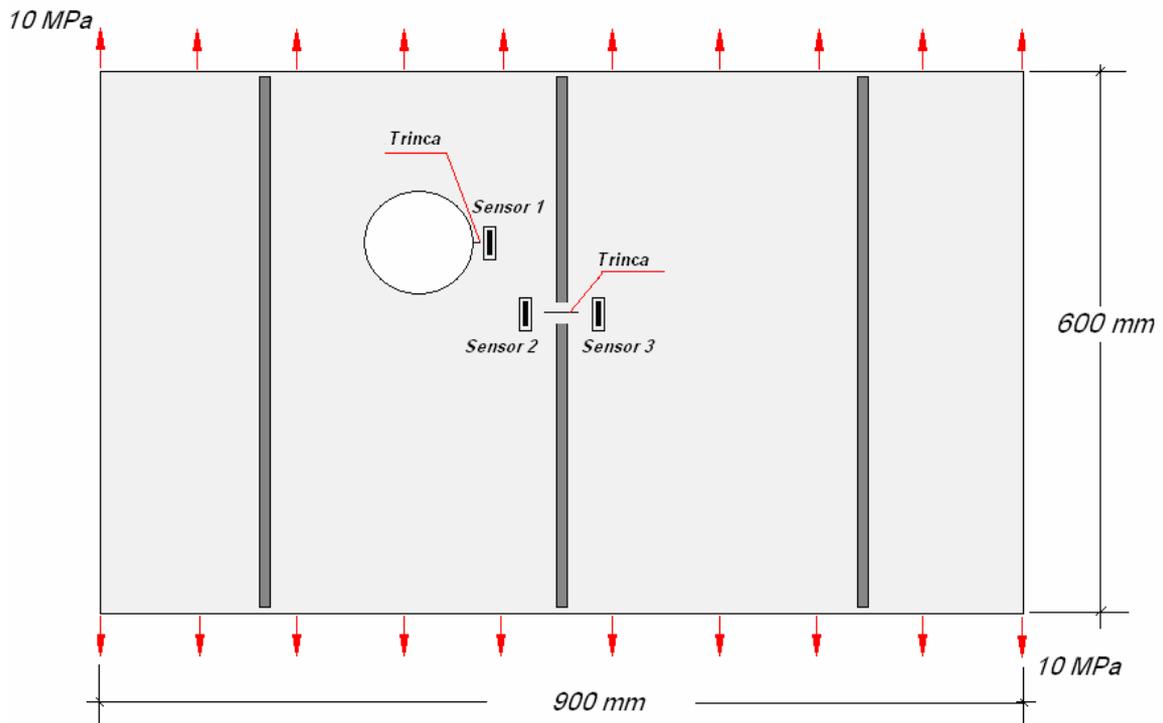


Figura 5.16 – Chapa de alumínio com reforçadores e duas trincas simuladas.

A Figura 5.17 mostra as diferenças nos sinais captados pelos sensores para o estado sem a presença da trinca e com a trinca. O valor V_0 é o valor de 1 V já mencionado

anteriormente. Este procedimento como já descrito na seção anterior pode levar vários passos até a detecção do posicionamento da trinca. Aqui, como a intenção agora é a demonstração da possibilidade de detecção do crescimento da trinca esses passos serão dispensados e o melhor posicionamento do sensor será considerado como descoberto. Da Figura 5.17 pode-se notar uma diferença nos valores detectados mesmo para o estado sem presença de defeito entre os sensores 1, 2 e 3, pois devido a presença do orifício o gradiente de deformação interno na chapa é diferente nas proximidades do orifício e longe dele. Então o sensor 1 que se encontra mais próximo do orifício apresenta níveis de deformações mais elevados que os sensores 2 e 3. Pequena diferença também pode ser notada na leitura dos sensores 2 e 3, mas esta diferença já é bem menor pois o distanciamento entre eles é muito menor que a distância de ambos em relação ao orifício. Ainda na Figura 5.17 pode-se também notar os valores obtidos após a simulação da trinca. Verifica-se que a presença das trincas nas posições centrais da chapa acaba por acarretar uma homogeneização do gradiente de tensão desta região e percebe-se que a diferença entre os estados sem a presença dos defeitos e com a presença dos defeitos pode ser facilmente detectada, como o esperado.

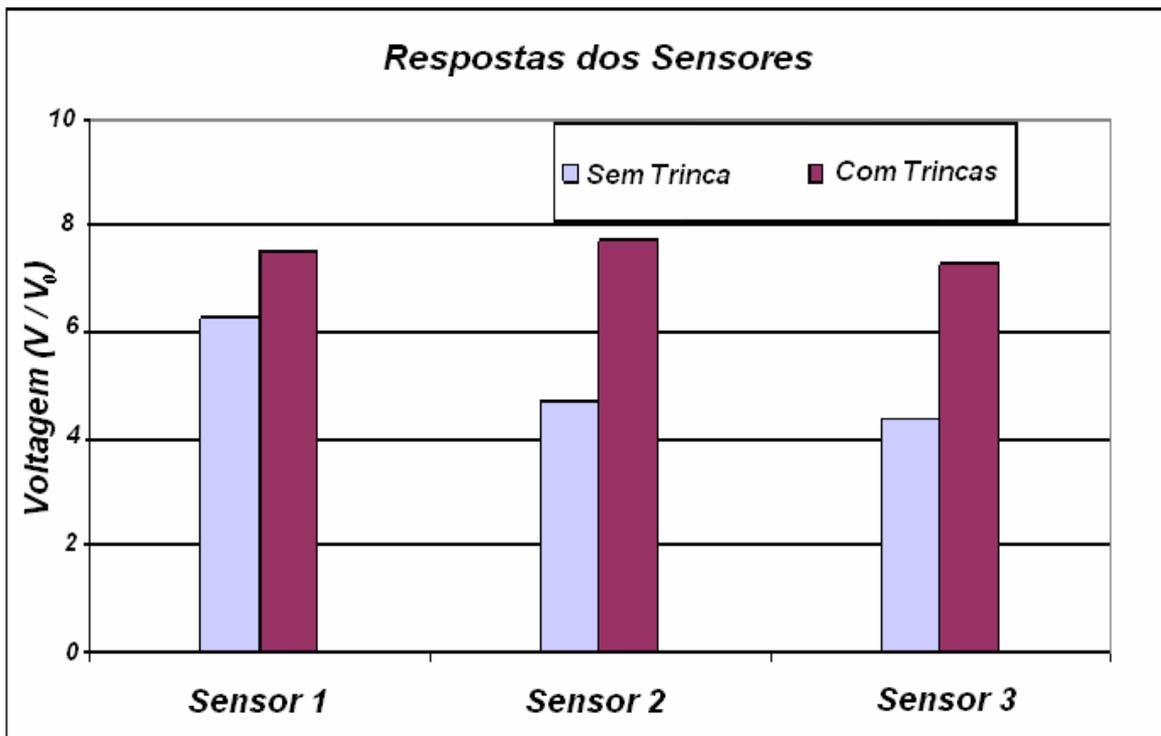


Figura 5.17 – Respostas dos sensores na detecção de trincas.

A análise que é feita aqui da propagação da trinca, é uma análise estática, isto é, a propagação da trinca é simulada através da equação de Paris (Equação 3.83) e o número de ciclo é calculado sem que haja consideração da parte dinâmica do processo. Esse procedimento é muito usado para previsão da vida útil de partes mecânicas, pois os códigos computacionais relacionados com este tipo de análise são muito mais fáceis de programar e apresentam resultados muito satisfatórios. Nos casos onde o efeito dinâmico pode ser desprezado esses códigos são os mais indicados.

Para o controle da propagação da trinca neste exemplo foram consideradas as seguintes propriedades: Coeficientes da equação de Paris: $C = 0.183 \times 10^{-11}$ e $m = 3.284$. A equação de Paris como já apresentada na parte da Revisão Bibliográfica pela Equação (3.83) é:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m$$

O crescimento da trinca por fadiga é simulado considerando a carga aplicada em ciclos à amplitude constante, e a relação de tensão $R = 0$. Neste caso a equação de Paris e a equação de Forman (Equação 3.85) apresentam os mesmos resultados. Neste exemplo foi empregado três incrementos de trinca pré-estipulados. E o caminho final para os incrementos de trinca é mostrado na Figura 5.18.

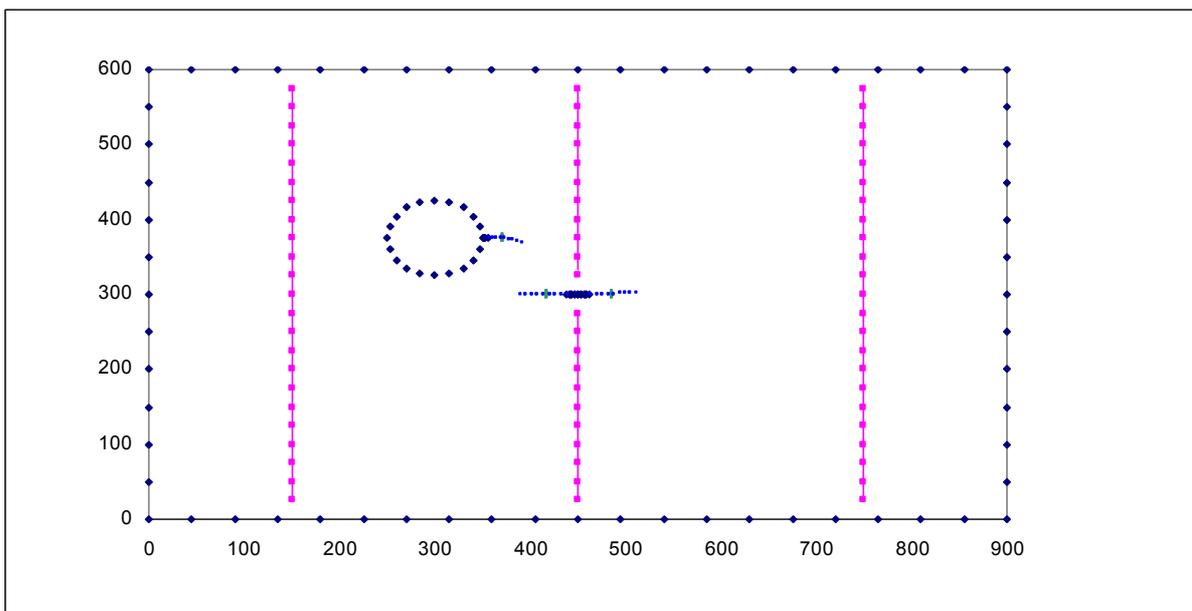


Figura 5.18 – Caminho da propagação das trincas no painel.

Na Figura 5.19 podem ser vistos os sinais provenientes dos sensores instalados sobre a chapa durante o procedimento de propagação das trincas. Estes sinais são plotados e comparados com o primeiro sinal da detecção da trinca. O crescimento da trinca pode ser precisamente monitorado já que os valores detectados pelos sensores apresentam grandes variações com um pequeno acréscimo do tamanho da trinca.

Neste exemplo percebe-se que a variação no sinal captado pelos sensores é muito maior quando a propagação da trinca ocorre se comparado ao sinal captado pela presença da trinca.

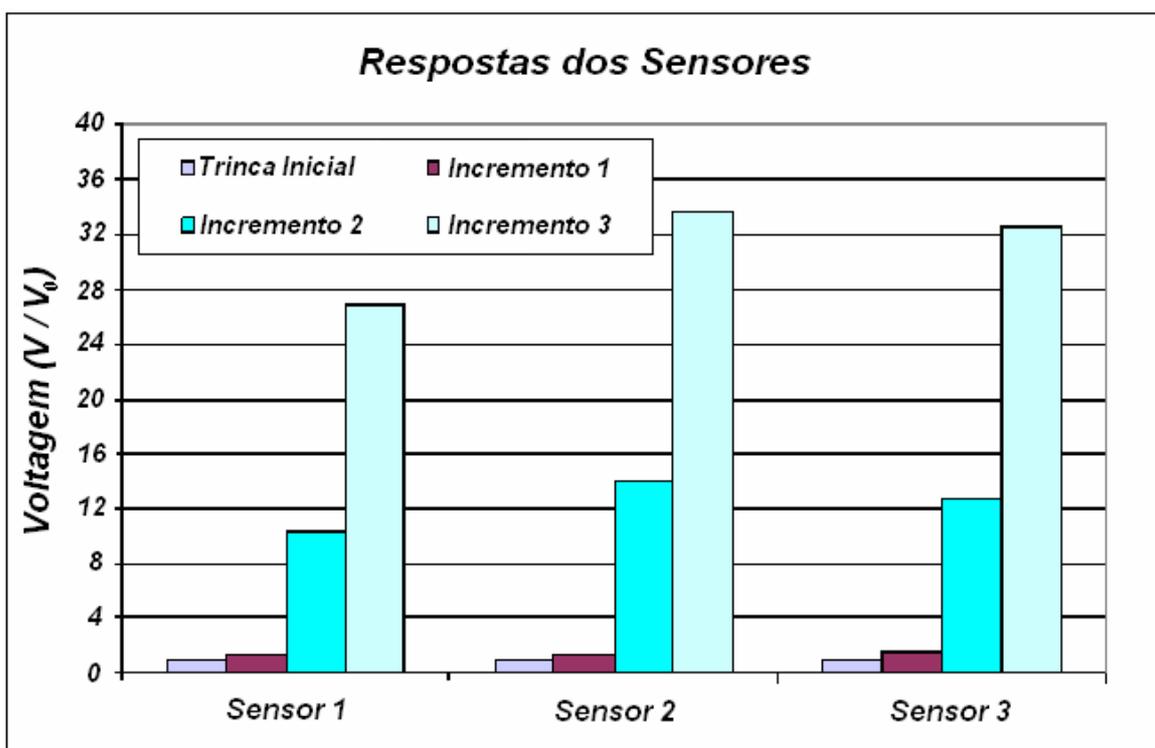


Figura 5.19 – Comportamento do sinal dos sensores com a propagação das trincas.

O cálculo preciso do gradiente de deformação interna da chapa permitido pela técnica do Método dos Elementos de Contorno Dual nos permite propor uma nova metodologia para simulação numérica de monitoramento de partes mecânicas sujeitas a trinca. Esta análise estática pode ser aplicada em estruturas para cálculo da vida útil e também cálculo de intervalos de manutenções periódicas.

5.4 – ANÁLISE DINÂMICA – VALIDAÇÃO

Antes de determinar a presença de trincas via análises dinâmicas, os próximos três exemplos (exemplo 9, 10 e 11) testam se a implementação da análise dinâmica no código de *MECD* está dando resultados esperados do ponto de vista da análise dinâmica.

5.4.1 – Exemplo 9 – Chapa com 1 Reforçador – Análise Dinâmica

O primeiro exemplo numérico aqui apresentado é o de uma chapa com apenas um reforçador posicionado, a princípio, no centro da chapa e depois variando sua posição dentro da mesma. Como neste exemplo a chapa é considerada fina, podemos resolver esse problema usando a consideração de estado plano de tensão e conseguir a resposta em apenas 2D. As diferentes posições do reforçador dentro da chapa podem ser vistas na Figura 5.20. As condições de contorno utilizadas para a resolução do problema também podem ser encontradas na mesma figura. Para a resolução deste exemplo foram empregados 12 elementos no contorno da peça e pelo menos três elementos internos em cada reforçador. O material utilizado na chapa e para o reforçador foi o aço. As propriedades do material da chapa e do reforçador podem ser vista na Tabela 5.3. As dimensões da chapa eram: largura de 20 m e altura de 40 m. Cada reforçador tinha a área transversal de 5 m². O carregamento dinâmico aplicado à chapa estava apenas na parte superior da mesma, com intensidade unitária. Para maior simplicidade da apresentação do problema e mais fácil visualização do resultado, as forças concentradas e momentos aplicados nos reforçadores tiveram amplitudes nulas. O gráfico da Figura 5.21 mostra os resultados alcançados para os diferentes posicionamentos dos reforçadores no interior da chapa. Para comparação dos resultados alcançados utilizando esse código e resultados que poderiam ser considerados corretos foi empregado um código estático já consagrado de *MEC* (Salgado e Aliabadi, 1996). A comparação dos resultados pode ser realizada quando, na aplicação do código dinâmico, a frequência aplicada ao problema seja reduzida de modo a se obter um valor mais próximo do resultado obtido com o código estático para o problema. Com isso, aplicando-se a frequência $\omega = 0.001$ deveria se obter resultados muito próximos com o código estático e dinâmico.

Tabela 5.3 – Propriedades Geométricas e do Material para a Chapa e Reforçador de Aço.

Dimensões (m)	20 x 40 x 0.10
Módulo de Young, E (GPa)	200
Módulo de Cisalhamento, G (GPa)	77
Densidade, ρ ($kg\ m^{-3}$)	8000
Coefficiente de Poisson, ν	0.3

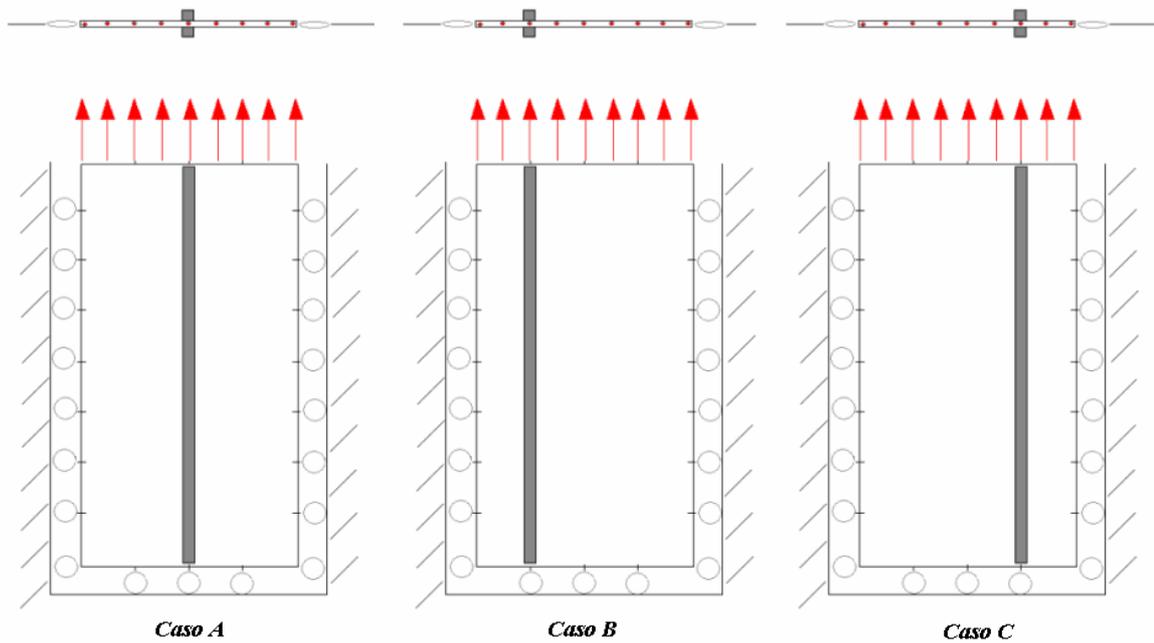


Figura 5.20 – Exemplos numéricos para diferentes posicionamentos dos reforçadores dentro da chapa.

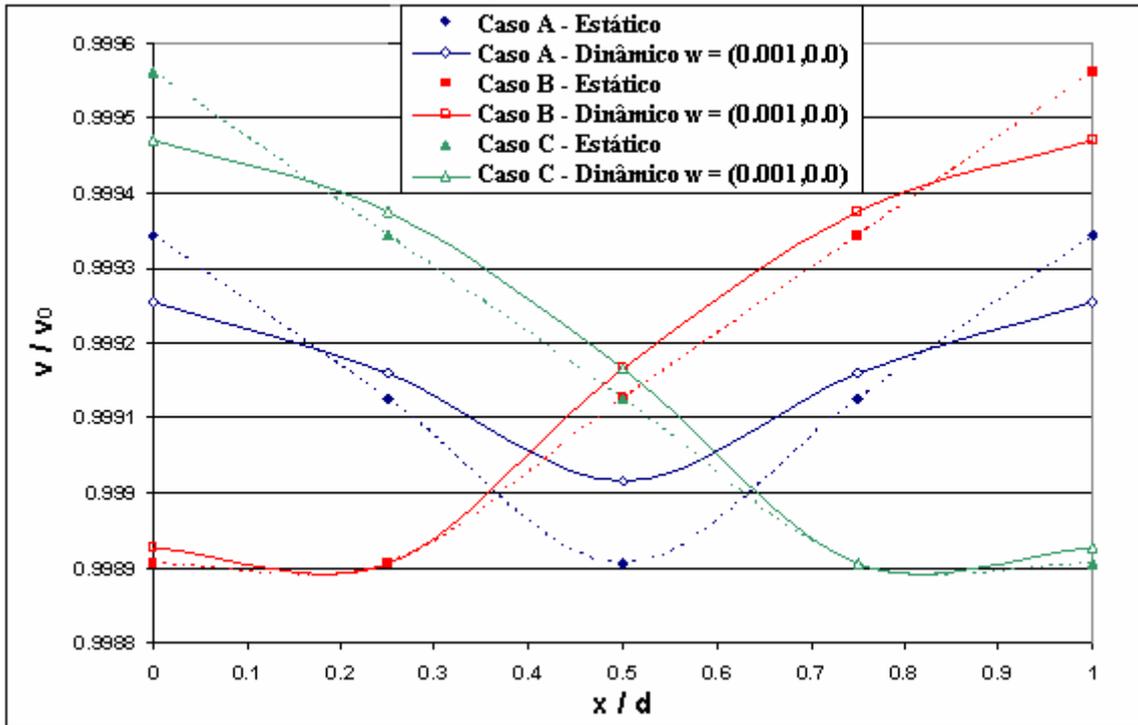


Figura 5.21 – Valores dos deslocamentos ao longo da parte superior da chapa com um reforçador usando os códigos estático e dinâmico.

As concordâncias nos deslocamentos para as curvas com os códigos dinâmicos e estáticos podem ser consideradas satisfatórias, considerando, que foi usado um valor pequeno para a frequência no caso do código dinâmico para se chegar a essa comparação com o resultado do código estático. Os deslocamentos apresentados no eixo y do gráfico da Figura 5.21 foram normalizados usando o valor v_0 que é igual ao deslocamento do nó central da parte superior da chapa sem o uso de reforçadores (sendo igual em valor à 0.4574 mm). O eixo x foi normalizado com a distância $d = 20.0 \text{ mm}$ fazendo com que x varie de 0 a 1, pois o lado da chapa mede 20 mm . Pequenas variações nos resultados estáticos e dinâmicos devem ser esperadas pela grande diferença na aproximação do problema, mas é nítida que a tendência dos resultados alcançada no código dinâmico estando concordante com os resultados do código estático para as diferentes posições dos reforçadores e isso mostra que o programa está correto e pode, então, ser avaliado para diferentes frequências a serem empregadas.

5.4.2 – Exemplo 10 – Chapa com 2 Reforçadores – Análise Dinâmica

O segundo exemplo numérico é uma chapa com dois reforçadores. As diferentes posições escolhidas para se realizar as medições dos deslocamentos podem ser vistas na

Figura 5.22. As condições de contornos empregadas neste exemplo também podem ser verificadas na Figura 5.22. Para este exemplo também foram empregados 12 elementos no contorno, e o material da chapa e dos reforçadores também é o aço. As propriedades também são as mesmas da Tabela 5.3. As dimensões da chapa e reforçadores também são as mesmas do exemplo anterior. O carregamento dinâmico aplicado à chapa estava apenas na parte superior da mesma, com intensidade unitária, igualmente como no primeiro exemplo.

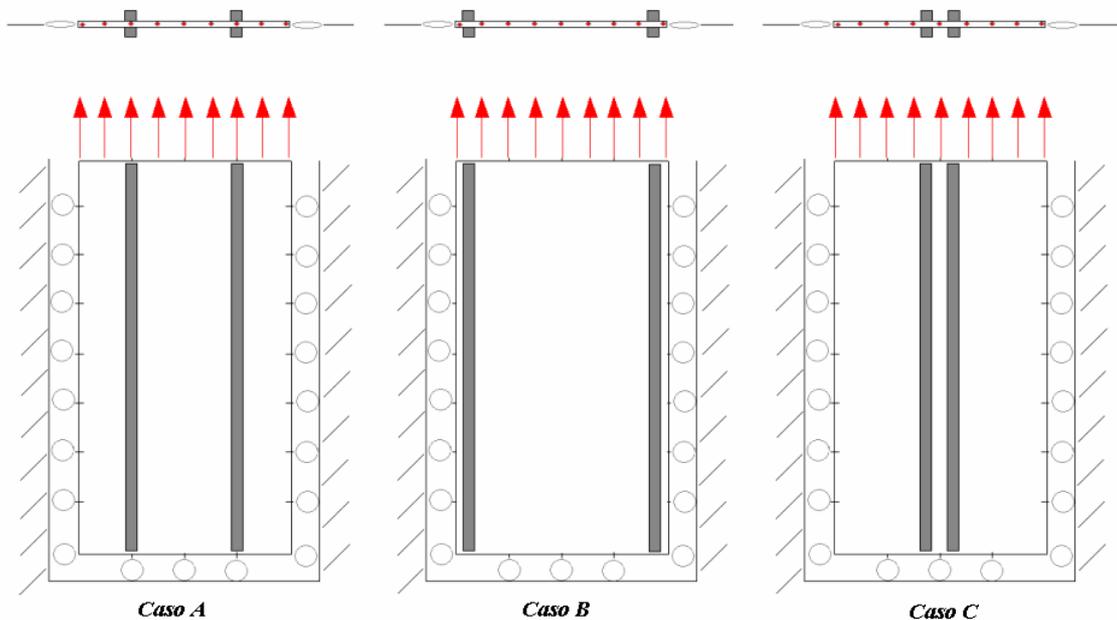


Figura 5.22 – Exemplos numéricos para diferentes posicionamentos dos reforçadores dentro da chapa.

O gráfico da Figura 5.23 mostra os resultados alcançados para os diferentes posicionamentos dos reforçadores no interior da chapa. Para comparação dos resultados alcançados utilizando esse código e resultados que poderiam ser considerados corretos foi empregado um código estático já consagrado de *MEC* (Salgado e Aliabadi, 1996). A comparação dos resultados pode ser realizada quando, na aplicação do código dinâmico faz-se com que a frequência aplicada ao problema seja reduzida de modo a se obter o mais próximo do resultado estático do problema. Com isso, aplicando-se a frequência $\omega = 0.001$ deveria se obter resultados muito próximos com o código estático e dinâmico.

As concordâncias nos deslocamentos para as curvas com os códigos dinâmicos e estáticos podem ser consideradas também satisfatórias, considerando que foi usado um valor

pequeno para a frequência no caso do código dinâmico para se chegar a essa comparação com o resultado do código estático. Podem ser visualizadas que todas as tendências são mantidas também para este caso com dois reforçadores no interior da chapa. Os deslocamentos apresentados no eixo y do gráfico da Figura 5.23 foram normalizados usando o valor v_0 que é igual ao deslocamento do nó central da parte superior da chapa sem o uso de reforçadores (sendo igual em valor à 0.4574 mm). O eixo x foi normalizado com a distância $d = 20.0 \text{ mm}$ fazendo com que x varie de 0 a 1, pois o lado da chapa mede 20 mm . Pode se perceber que a presença agora de dois reforçadores enrijecem mais a estrutura e com isso diminuem os valores dos deslocamentos, o que era esperado. As variações dos resultados utilizando o código dinâmico e estático ficam neste caso igual as variações para o exemplo com um reforçador, mostrando com isso também a coerência do código.

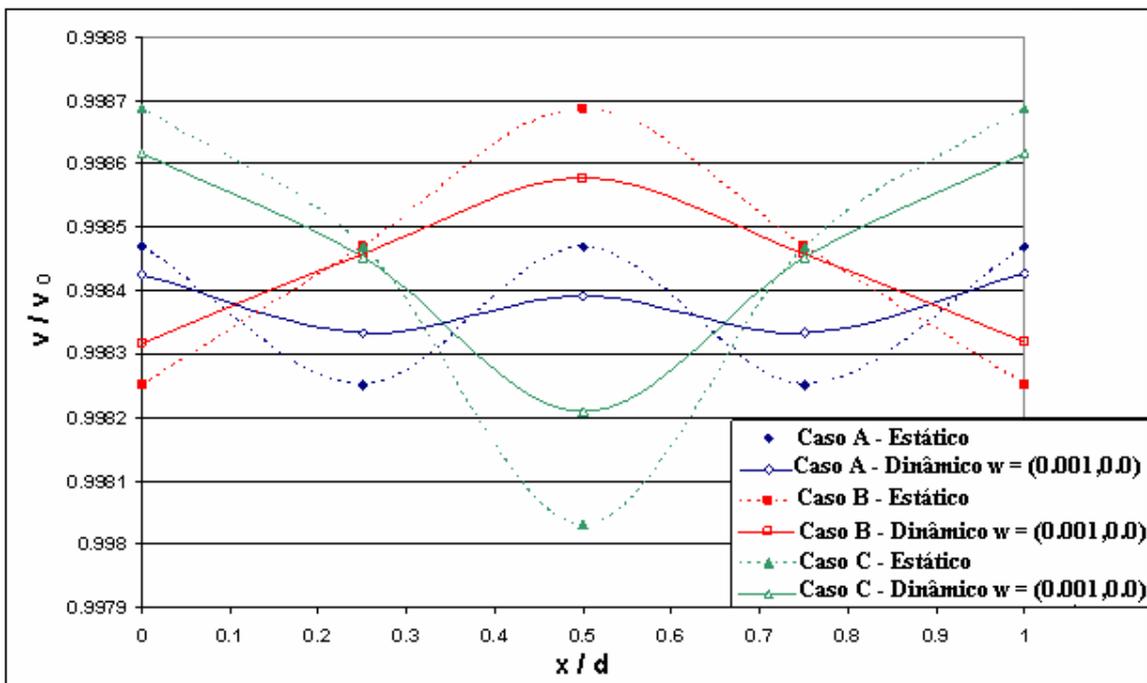


Figura 5.23 – Valores dos deslocamentos ao longo da parte superior da chapa com dois reforçadores usando os códigos estático e dinâmico.

5.4.3 – Exemplo 11 – Chapa com 3 Reforçadores – Análise Dinâmica

No terceiro e último exemplo para comprovação do código $MECD-V_{din}$ aqui desenvolvido, foi empregado as mesmas dimensões para a chapa, mas agora com três reforçadores dentro dela. As diferentes posições escolhidas para se realizar as medições

dos deslocamentos podem ser vista na Figura 5.24. As condições de contornos empregadas neste exemplo também podem ser verificadas na Figura 5.24. Para este exemplo também foram empregados 24 elementos no contorno, e o material da chapa e dos reforçadores também é o aço. As propriedades também são as mesmas da Tabela 5.3. As dimensões da chapa e reforçadores também são as mesmas dos exemplos anteriores. O carregamento dinâmico aplicado à chapa estava apenas na parte superior da mesma, com intensidade unitária, igualmente como nos primeiros exemplos.

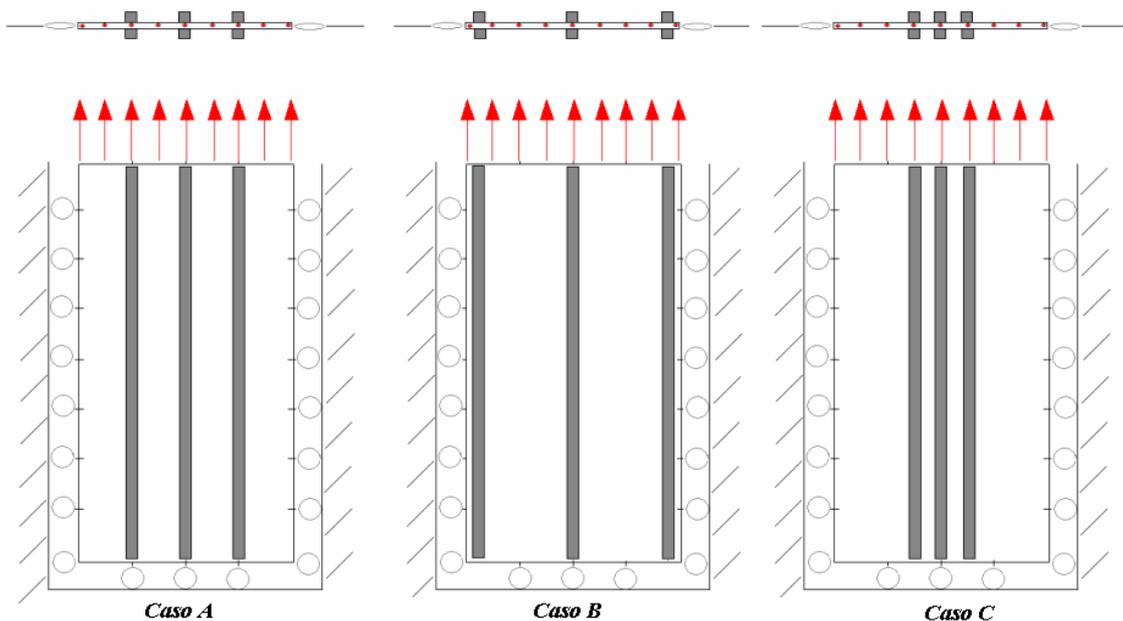


Figura 5.24 – Exemplos numéricos para diferentes posicionamentos dos reforçadores dentro da chapa.

O gráfico da Figura 5.25 mostra os resultados alcançados para os diferentes posicionamentos dos reforçadores no interior da chapa. Para comparação dos resultados alcançados utilizando esse código e resultados que poderiam ser considerados corretos foi empregado um código estático já consagrado de *MEC* (Salgado e Aliabadi, 1996). A comparação dos resultados pode ser realizada quando, na aplicação do código dinâmico faz-se com que a frequência aplicada ao problema seja reduzida de modo a se obter o mais próximo do resultado estático do problema. Com isso, aplicando-se a frequência $\omega = 0.001$ deveria se obter resultados muito próximos com o código estático e dinâmico.

As concordâncias nos deslocamentos para as curvas com os códigos dinâmicos e estáticos podem ser consideradas também satisfatórias considerando que foi usado um valor

pequeno para a frequência no caso do código dinâmico para se chegar a essa comparação com o resultado do código estático. Pode ser visualizado que todas as tendências são mantidas também para este caso com três reforçadores no interior da chapa. Os deslocamentos apresentados no eixo y do gráfico da Figura 5.25 foram normalizados usando o valor v_0 que é igual ao deslocamento do nó central da parte superior da chapa sem o uso de reforçadores (sendo igual em valor à 0.4574 mm). O eixo x foi normalizado com a distância $d = 20.0 \text{ mm}$ fazendo com que x varie de 0 a 1, pois o lado da chapa mede 20 mm . Pode se perceber que a presença agora de três reforçadores enrijecem mais a estrutura e com isso diminuem os valores dos deslocamentos, quando comparados com os dois primeiros exemplos, o que também era esperado. As variações dos resultados, utilizando o código dinâmico e estático, ficaram neste caso pouco menores que as variações para os exemplos com um reforçador e dois reforçadores, devido ao fato da melhor discretização do contorno (foi empregado o dobro do número de elementos), mostrando, com isso, também a coerência do código.

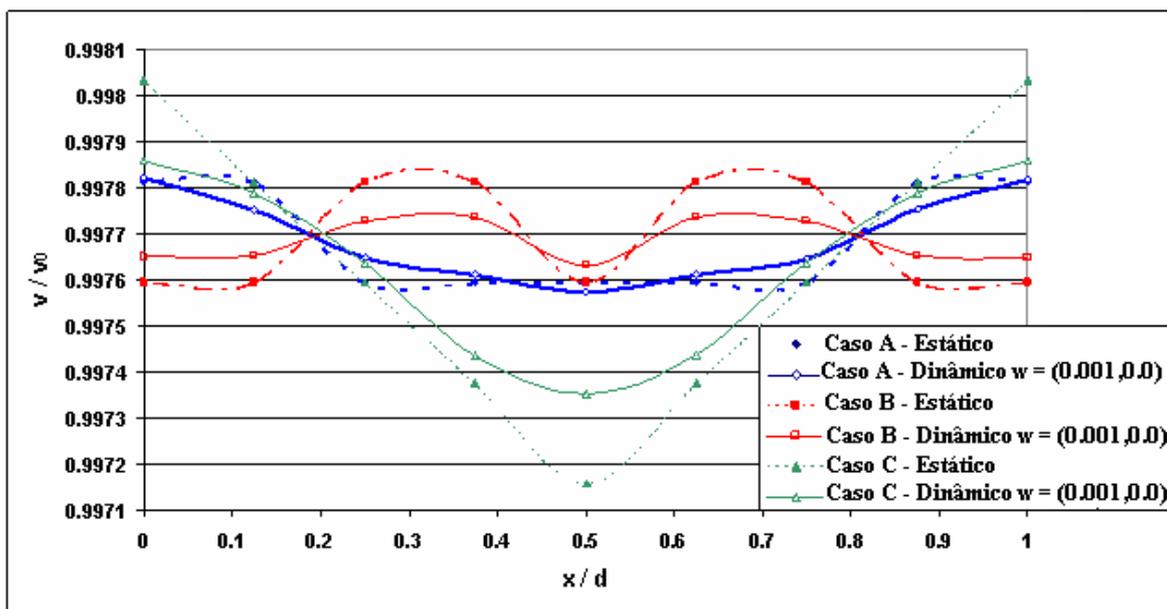


Figura 5.25 – Valores dos deslocamentos ao longo da parte superior da chapa com três reforçadores usando os códigos estático e dinâmico.

Com esses três exemplos escolhidos fica claro que as respostas, alcançadas pelo código dinâmico $MECD-V_{din}$, são satisfatórias em relação à determinação dos deslocamentos no interior e no contorno da chapa.

5.5 – ANÁLISE DINÂMICA - DETERMINAÇÃO DE TRINCAS

5.5.1 – Exemplo 12 – Detecção da Trinca, Trinca Plana – Análise Dinâmica

A Figura 5.26 mostra a chapa de alumínio e também os esforços externos empregados nos exemplos numéricos desta parte do trabalho. As características geométricas e as propriedades dos materiais da chapa e dos sensores podem ser vistas nas Tabelas 5.4 e 5.5 respectivamente. Para estes problemas foram empregados 24 elementos quadráticos no contorno da chapa e 4 elementos quadráticos para discretizar os sensores.

Tabela 5.4 – Propriedades Geométricas e do Material para a Chapa de Alumínio.

Dimensões (m)	600 x 600 x 2
Módulo de Young, E (GPa)	72.5
Módulo de Cisalhamento, G (GPa)	27.25
Densidade, ρ ($kg\ m^{-3}$)	2700
Coefficiente de Poisson, ν	0.33

Tabela 5.5 – Propriedades Geométricas e Propriedades do Material para os Sensores de PZT (PKI-402).

Dimensões (m)	8 x 1 x 0.5
Módulo de Young, E (GPa)	76
Módulo de Cisalhamento, G (GPa)	29
Densidade, ρ ($kg\ m^{-3}$)	7600
Coefficiente de Poisson, ν	0.31
Constante Dielétrica Relativa, K_3	1280
Coefficiente de Carga Piezelétrica, d_{31} (mV^{-1})	130×10^{-12}
Espessura, h (mm)	5
Permissividade Dielétrica do espaço livre, ϵ_0 (Fm^{-1})	8.85×10^{-12}

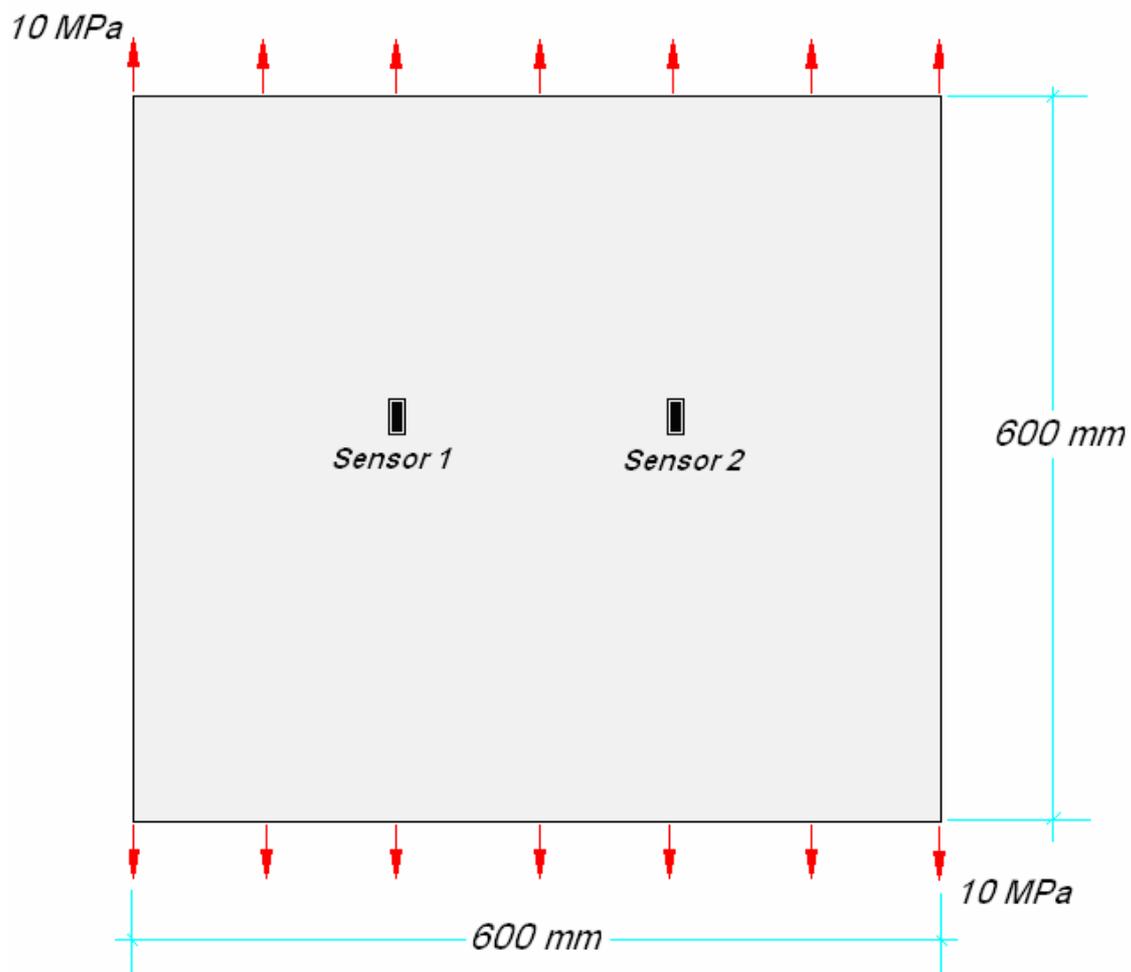


Figura 5.26 – Chapa de alumínio com dois sensores utilizada nos exemplos numéricos.

A Figura 5.27 mostra os resultados para o sinal de saída nos sensores, normalizados pelo valor V_0 que é o valor de saída encontrado para a chapa sem defeito na análise estática. Pode-se verificar devido à simetria do posicionamento dos sensores na chapa e do carregamento, que ambos se comportam da mesma maneira para o caso da chapa sem defeito, o que era esperado. Nota-se também, as frequências de ressonância da chapa situadas em torno de 75 Hz, 150 Hz e 225 Hz.

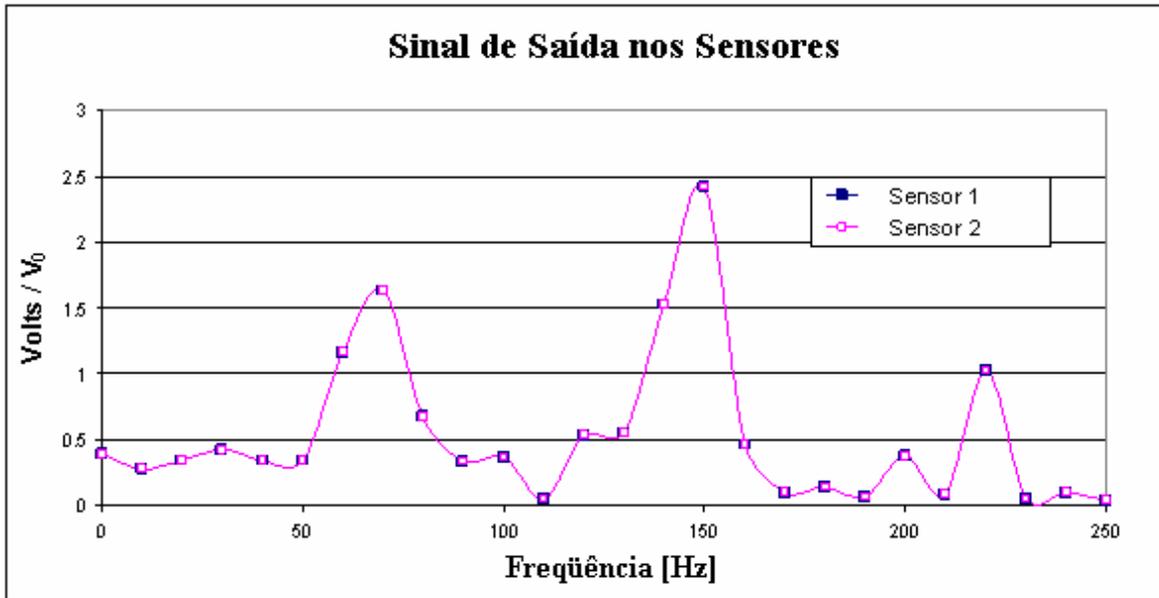


Figura 5.27 – Sinal de saída dos sensores para chapa sem defeito.

Para a determinação da presença da trinca na chapa através da análise dinâmica com o *MECD*, foi empregado em todos os exemplos aqui apresentados um coeficiente de deformação cisalhante do adesivo de 0,085. Este valor é uma característica do material escolhido para o adesivo e pode ser modificado para se testar diferentes materiais para o adesivo. As malhas do *MECD* empregadas nos problemas numéricos também foram mantidas as mesmas, de modo a se comparar os resultados apenas para a modificação de posicionamento da trinca dentro da chapa. A malha empregada foi de 28 elementos quadráticos e 56 nós para o contorno da chapa e 6 elementos e 12 nós para a discretização de cada sensor.

Para o exemplo com trinca foi, primeiramente, decidido o uso de uma trinca de 4 mm, devido ao fato de que esse valor foi empregado em outros estudos e também por se tratar de um pequeno valor que pode ocorrer na prática, também, em estruturas reais. A trinca reta de 4 mm pode ser, facilmente, detectada utilizando-se o campo de deformação dinâmico que é modificado na região onde a trinca está presente. Esta modificação pode ser detectada através de sensores empregados sobre a chapa. A percepção da trinca pelos sensores, obviamente, aumenta com a proximidade da mesma. A Figura 5.24 mostra dois posicionamentos diferentes para uma trinca dentro de uma chapa. Na parte esquerda da Figura 5.28 está uma trinca central, igualmente afastada dos sensores 1 e 2. Já na parte direita, a trinca está mais próxima do sensor 1 pois $d_1 < d_2$. Na Figura 5.29 podem ser vistos os sinais captados pelos sensores para ambos os casos. Nota-se, primeiramente, que

há um aumento do valor da tensão de saída sempre que existe a presença de uma trinca interna na chapa. Nota-se também, que este aumento é maior quando a trinca esta mais próxima ao sensor. A resposta dos sensores é a mesma para o caso onde a distancias $d1$ e $d2$ são iguais, como era esperado. Isto pode ser visto nas curvas superiores contínuas para cada sensor e que estão uma sobreposta a outra. As curvas contínuas inferiores são as curvas dos sinais de saída para os sensores quando a chapa não apresenta defeito. Ainda na Figura 5.25 as curvas tracejadas representam o caso onde a trinca não está no centro, isto é, $d1 < d2$. Para este caso, a resposta em voltagem, do sensor 1 é maior que a do sensor 2, pois o primeiro está mais próximo a região da trinca que o segundo.

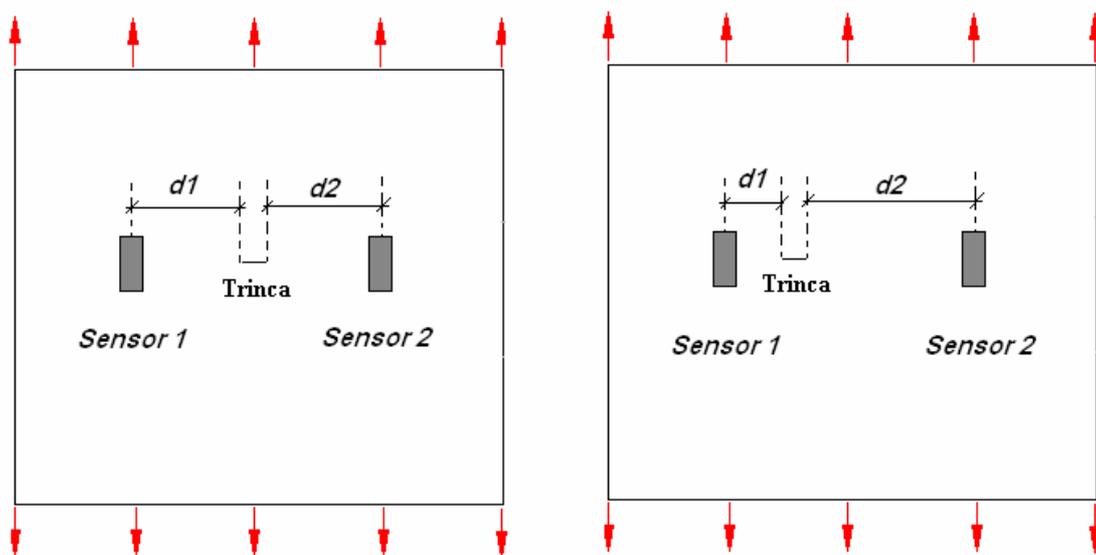


Figura 5.28 – Chapas de alumínio com trinca reta.

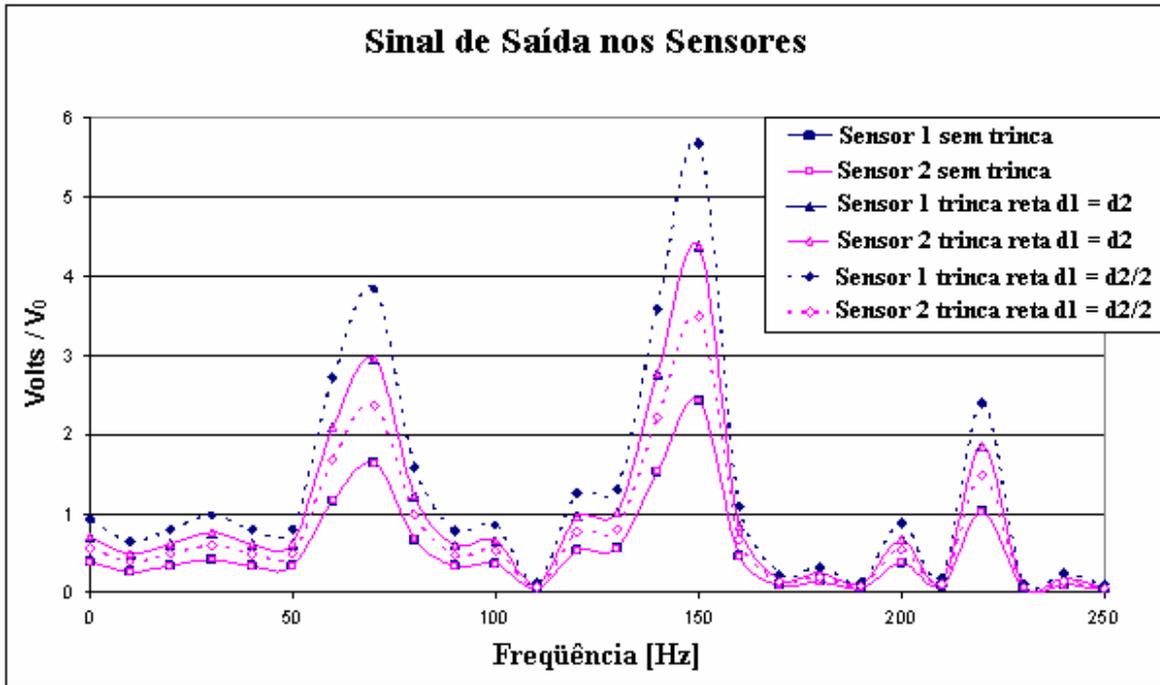


Figura 5.29 – Sinal de saída dos sensores para chapa com e sem trincas retas.

5.5.2 – Exemplo 13 – Detecção da Trinca, Trinca Inclinada – Análise Dinâmica

A Figura 5.30 mostra o exemplo com a trinca agora inclinada. O ângulo de inclinação escolhido foi de 45° . Sabe-se que este tipo de defeito causa menor deformação na região próxima a trinca, devido a divisão entre os fatores de intensidade de tensão no modo I e II existentes na proximidade das pontas das trincas (Fedelinski, Aliabadi e Rooke, 1996).

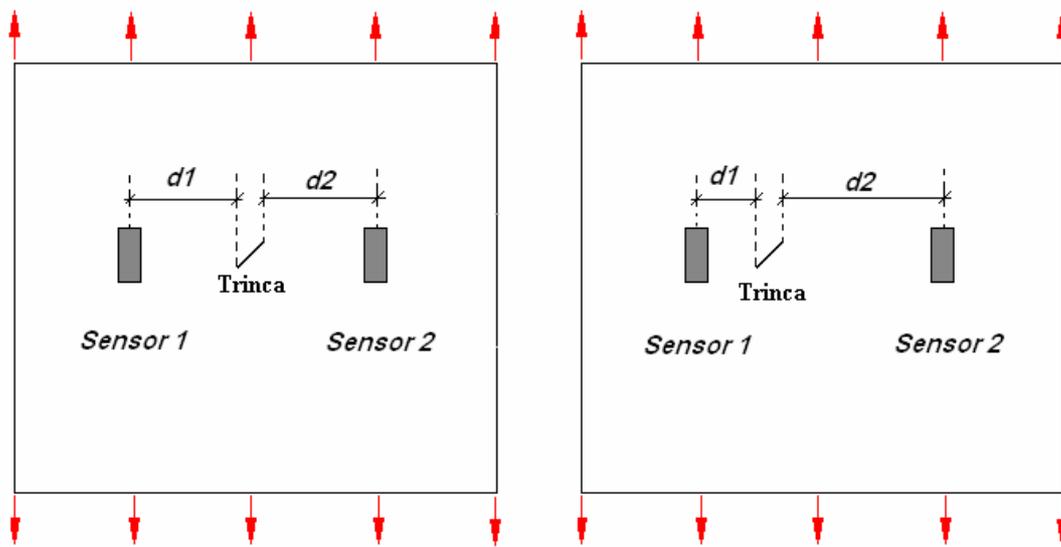


Figura 5.30 – Chapas de alumínio com trinca inclinada.

O gráfico da Figura 5.31 mostra os valores do sinal de saída captado pelos sensores 1 e 2. O comportamento da curva é o mesmo que o encontrado para trincas retas, porém, pode-se perceber um decréscimo no valor da intensidade do sinal, o que era esperado.

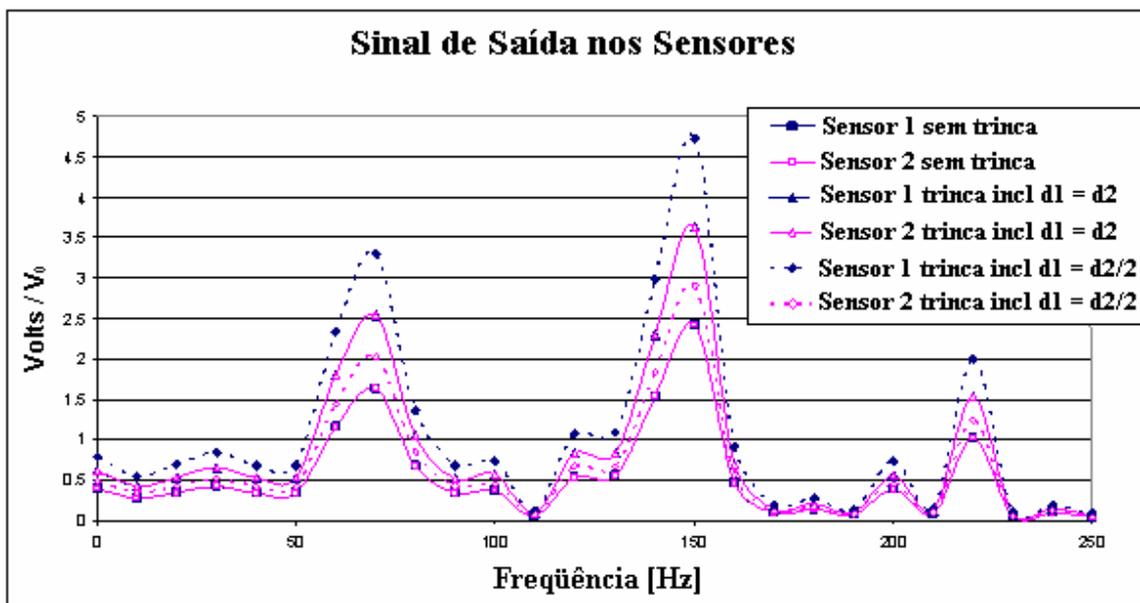


Figura 5.31 – Sinal de saída dos sensores para chapa com e sem trincas inclinadas.

O último gráfico da figura 5.32 mostra os dados para comparação entre os resultados obtidos com a trinca reta e com a trinca inclinada. Os dados mostrados são para ambas as trincas posicionadas no centro da chapa. Nota-se que a trinca reta para este caso apresenta valores de saída para os sensores maiores que os valores de saída encontrados pela trinca inclinada. Como para ambos os casos as trincas estão no centro das chapas, os sinais nos sensores 1 e 2 são o mesmo para cada caso, como o esperado.

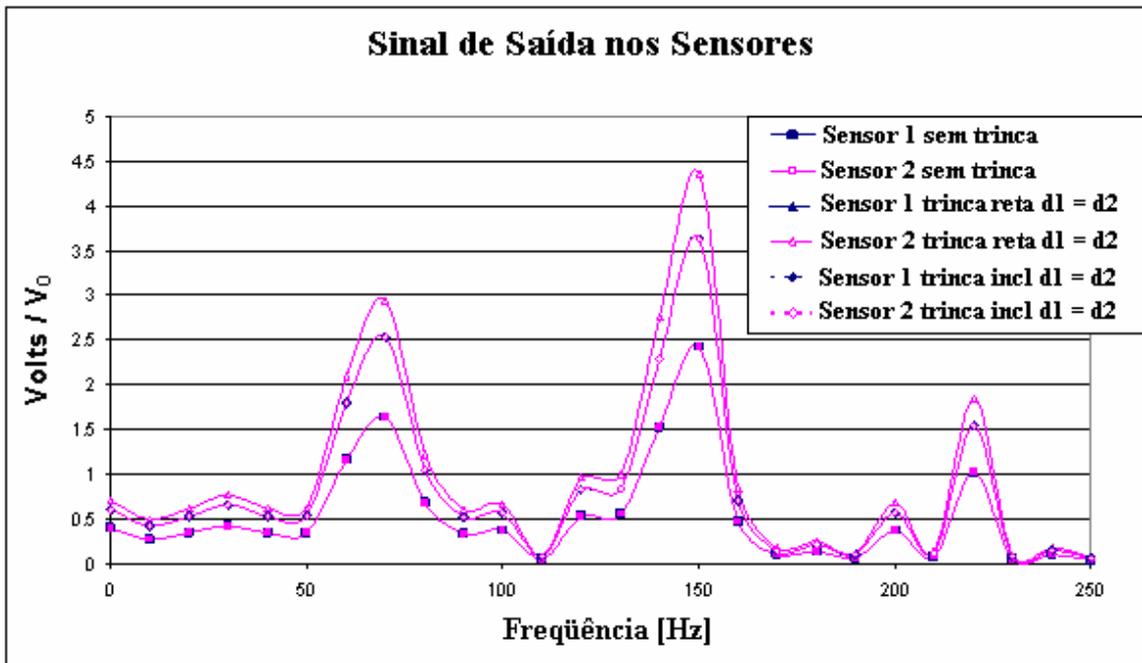


Figura 5.32 – Sinal de saída dos sensores para chapa com trincas retas e inclinadas.

Outros exemplos poderiam ser testados, como a variação da posição da trinca ou da sua dimensão, mas, a tendência da resposta do código *MECD-V_{din}* já pode ser retirada destes exemplos de pequena complexidade. A complexidade aumentada será uma das sugestões para trabalhos futuros que pode ser verificada no capítulo 6. Estas realizações para chapas finas com reforçadores, no momento, dificilmente, trariam algo muito esclarecedor, já que seria necessário o desenvolvimento também do mesmo exemplo usando outras ferramentas como o *MEF* ou exemplos experimentais, que não foram encontrados na bibliografia consultada.

6 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES

6.1 – INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta as conclusões e algumas sugestões para trabalhos futuros. Ao longo do desenvolvimento desta Tese algumas formulações numérico-computacionais foram desenvolvidas. Elas podem ser divididas em quatro principais implementações: (a) uma formulação inicial para o cálculo do Fator de Intensidade de Tensão sob carregamento estático usando o *MEC*; (b) uma formulação estática para a determinação da presença de trincas em painéis com e sem reforçadores usando o *MECD*; (c) uma formulação para a determinação do Fator de Intensidade de Tensão sob carregamento dinâmico usando o *MECD*; e (d) uma formulação dinâmica para a determinação da presença de trincas em painéis com e sem reforçadores usando o *MECD*. As conclusões tiradas estão divididas de acordo com as diferentes formulações numérico-computacionais implementadas nos diferentes programas produzidos. No final do capítulo algumas sugestões são apresentadas para trabalhos futuros.

6.2 – CONCLUSÕES

O primeiro código produzido, o *MEC-I_{est}* refere-se à determinação estática do Fator de Intensidade de Tensão (*FIT*). Os resultados alcançados com este código apresentaram-se bons quando comparados com outros resultados obtidos usando-se outras ferramentas computacionais existentes no mercado, como o Método dos Elementos Finitos (*MEF*). Nota-se que o uso do Método dos Elementos de Contorno (*MEC*) juntamente com a técnica da Integral-J, dentre outras técnicas disponíveis na literatura (Watwood, 1969; Barson, 1976; Blandford, Ingrassia e Liggett, 1981; Cavalcante, 1997, Medeiros, 2000) já produz bons resultados mesmo com malhas pouco refinadas. Os trabalhos anteriores que utilizaram o *MEC* para o cálculo do *FIT* (Medeiros, 2000) via técnica da Integral-J, não usaram as derivadas dos deslocamentos de forma analítica, o fizeram de forma aproximada via método das diferenças finitas. Neste trabalho implementou-se num código base as derivadas das soluções fundamentais e estas foram usadas no cálculo da Integral-J. A formulação apresentada mostra-se robusta tendo ainda a vantagem de usar malhas reduzidas quando comparado a outros métodos, como por exemplo, o Método dos

Elementos Finitos, que requer malhas mais refinadas. Como o código base, usado para a implementação do cálculo do *FIT* estático, vem da formulação direta do *MEC*, uma restrição da formulação é que as trincas necessitam da configuração aberta. Para o Fator de Intensidade de Tensão Dinâmica (*FITD*) usou-se o *COD* (*Crack Opening Displacement*) e também a Integral-J. Esta subrotina foi implementada num código base que usa a técnica do Método dos Elementos de Contorno Dual (*MECD*). Tanto para o *FIT* como para o *FITD* elementos quadráticos especiais (ponto a um quarto) foram usados na discretização dos elementos situados na ponta da trinca. A rotina computacional para a determinação do *FITD* foi implementada no código *MECD-V_{din}*. A rotina que calcula o *COD* usou os deslocamentos do último elemento que discretiza a trinca.

No segundo código, o *MECD-II_{est}*, para a análise estática, foi demonstrado que o *MECD* é uma ferramenta versátil na detecção de trincas. A sensibilidade na determinação da presença da trinca é muito grande devido à variação da quantidade de deformação que a trinca acarreta na região vizinha a ponta da trinca. Essa variação, no valor da deformação detectada pela metodologia específica do *MECD*, permite que uma determinação segura e precisa da dimensão e posicionamento da trinca seja executada. A determinação do valor característico de cada material ou estrutura pode ser determinada com a execução de uma bateria de ensaios. A partir daí, chega-se a uma determinação de como a presença da trinca modifica os sinais encontrados nos sensores em determinadas posições e como a dimensão da trinca modifica esses valores. Quanto maior for a dimensão da trinca, maior será a variação da voltagem de saída, e esta variação tem patamares diferenciados das variações encontradas quando se tem a mudança de posição da trinca isoladamente. No caso da análise estática, a avaliação da propagação da trinca foi executada com precisão. Tanto no caso da detecção como na propagação, a simulação do efeito piezométrico tem grande importância. A metodologia usada aqui tem certas restrições, principalmente ao fato da dimensão do sensor ter que ser reduzida, de modo que possa ser considerado um valor constante e único de resposta de saída apresentada pelo sensor. O código de *MECD* utilizado, *MECD-II_{est}*, partiu de um código base já existente *MECD-I_{est}*, onde foi implementado o emprego de sensores piezométricos, que com esse tipo de metodologia numérica é inédito.

O terceiro código, o *MECD-V_{din}*, agora para a análise dinâmica de chapas apresentando reforçadores, pode ser comprovado através de comparações com as respostas do código estático. A concordância nos resultados para chapas com até três reforçadores,

para os códigos estáticos e dinâmicos, mostrou que este código dinâmico apresenta coerência nas respostas e que para estes casos mais simples, pode ser considerado correto.

Ainda no código *MECD-V_{din}* é incluído a análise dinâmica e o emprego de sensores piezelétricos para detecção da trinca, esta parte foi sem dúvida a mais complexa e de maior dificuldade de se encontrar exemplos para comparação para sua validação. Entretanto, as respostas encontradas estão de acordo com estudos similares na área (Tua, Quek e Wang, 2004). A manutenção das frequências no padrão do sinal para chapas sem defeitos e chapas com pequenos defeitos foi constatado e apenas uma variação no aumento da amplitude de ressonância nestas frequências pode ser verificada nos resultados advindos da programação aqui realizada e de artigos que tratam do assunto.

O *MECD* utilizado para a execução da maioria dos códigos, na análise estática e dinâmica, é sem dúvida, o responsável pelo sucesso da programação aqui apresentada. A capacidade que o código tem para lidar com qualquer tipo e formato de trinca e a exatidão dos resultados alcançados fez com que a proposição do uso de sensores piezelétricos fosse sugerida. Este trabalho abordou as chapas finas, estruturas que são empregadas em várias áreas da engenharia, principalmente, na área de aviação.

Na análise estática, o modo de simulação do emprego do sensor piezelétrico exigia uma determinação precisa do valor da deformação no interior da chapa nas localidades onde os sensores estavam sendo empregados. A modelagem dos sensores não foi muito complexa, mas os resultados alcançados foram muito próximos do que se tem na prática. Pequenas variações nas posições e nas dimensões das trincas causaram variações detectáveis nos sensores, de modo que este tipo de análise pode ser bem sucedida para a detecção de trincas internas na estruturas. A verificação da propagação da trinca, através da análise estática para estruturas aeronáuticas, é um tema importante a ser estudado, pois normalmente, o monitoramento das partes em questão é realizado sem que estas estejam em uso. Com isso, as simulações numéricas de ensaios estáticos podem trazer melhorias consideráveis em termos de conhecimento prévio. Fazendo com que alterações em projetos possam ser simuladas antecipadamente de modo a se prever antecipadamente que conseqüências essas mudanças terão no projeto estrutural proposto.

Na análise dinâmica aqui apresentada, foi empregada a técnica da Transformada de Laplace juntamente com o *MECD*. Esta metodologia se mostrou muito propícia para este tipo de análise. A forma de variação escolhida para fazer a conversão do domínio do parâmetro da Transformada de Laplace para o domínio do tempo foi o método de Durbin

(1974). Os resultados alcançados podem ser considerados muito bons, quando comparados com os resultados obtidos pelo código estático para os mesmos problemas.

6.3 – SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

As sugestões para trabalhos futuros serão separadas em duas partes: Análise Estática e Análise Dinâmica.

Na análise estática, os resultados alcançados foram pertinentes quando comparados com resultados existentes na bibliografia. Os resultados ficaram próximos dos esperados, podendo a análise proposta ser considerada uma nova ferramenta, muito ágil para a execução do monitoramento em partes estruturais. Embora terminada esta fase do trabalho, percebe-se que outros aspectos poderão ser enfocados em trabalhos futuros, como por exemplo: (a) A alteração do material escolhido como ligante existente entre a chapa e os reforçadores e também sensores. (b) Para a ligação dos reforçadores com a chapa foi empregada a conexão contínua, realizada pelo material adesivo, mas para este procedimento também pode ser utilizada a conexão discreta, realizada por parafusos, possibilitando análises variadas do aperto aplicado nos parafusos. O código *MECD-II_{est}* utilizado permite a variação desses parâmetros, de modo a se ter uma gama de ensaios a serem realizados para verificação da precisão do código. (c) A aplicação de Redes Neurais (Neural Network) também pode ser executada com os dados advindos dos programas. A metodologia de rede neural, pode facilmente ser adaptada para ser empregada juntamente com a técnica proposta neste trabalho. Esta técnica de Redes Neurais nada mais é do que um aglomerado de informações e dados sobre as respostas dos sensores dentro da chapa, de modo a se ter um banco de dados de respostas de saída, possibilitando que novas medições sejam comparadas até que o padrão mais próximo seja alcançado e com isso definido o tamanho e a localização da trinca dentro da chapa. E finalmente (d) a execução de ensaios experimentais para comparação dos resultados que os programas estáticos apresentaram.

A análise dinâmica é inédita para com o uso do Método dos Elementos de Contorno Dual e para chapas com o uso de reforçadores e sensores. Devido a isso, comparações de resultados tornam-se mais complicadas. Entretanto, uma série de sugestões para trabalhos futuros torna-se possível. As mesmas sugestões aplicadas na análise estáticas são aqui também válidas, isto é, (a) variações do material do adesivo para a ligação contínua e (b)

aperto dos parafusos para a ligação discreta, (c) aplicação de Redes Neurais para confecção de bancos de dados de respostas dos sensores e (d) ensaios experimentais para comparação dos resultados. Contudo, outras sugestões podem ser propostas, como por exemplo, utilizar para a realização da análise dinâmica, não a Transformada de Laplace, mas sim a análise no domínio do tempo para a execução do Método de Elementos de Contorno Dual para a estrutura. Uma outra sugestão possível aqui na análise dinâmica seria a execução do mesmo trabalho agora com o Método dos Elementos Finitos. O *MEF*, como já mencionado anteriormente, é o método mais divulgado no meio acadêmico, por isso a existência de trabalhos similares pode ser encontrada. As ferramentas como *ANSYS* e *ABACUS* podem, com certeza, proporcionar a realização desses exemplos numéricos aqui propostos e com isso uma comparação direta poderia ser realizada. Apesar de não ter sido encontrada na bibliografia exemplos similares, a possibilidade de execução é óbvia com estas ferramentas. A última sugestão seria a de integrar todas as formulações aqui abordadas em apenas um código computacional, possibilitando assim que através do arquivo de entrada qualquer uma dessas análises disponíveis neste trabalho possa ser realizada, isto é, a análise estática e dinâmica para o Fator de Intensidade de Tensão e a determinação da presença da trinca na chapa analisada.

APÊNDICES

APÊNDICE A

A função ψ e suas derivadas são:

$$\psi = \left[-\frac{c_2}{c_1} K_1(z_1) + K_1(z_2) \right] \frac{1}{z_2} + K_0(z_2) \quad (\text{A1})$$

$$\frac{d\psi}{dr} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{c_2}{c_1} [K_0(z_1) z_1 + 2K_1(z_1)] \\ &- [K_0(z_2) z_2 + 2K_1(z_2)] - K_1(z_2) z_2^2 \end{aligned} \right\} \frac{1}{r z_2} \quad (\text{A2})$$

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} = \left\{ \begin{aligned} &-\frac{c_2}{c_1} [3K_0(z_1) z_1 + K_1(z_1)(z_1^2 + 6)] \\ &+ [3K_0(z_2) z_2 + K_1(z_2)(z_2^2 + 6)] \\ &+ [K_0(z_2) z_2 + K_1(z_2)] z_2^2 \end{aligned} \right\} \frac{1}{z_2 r^2} \quad (\text{A3})$$

A função χ e suas derivadas são:

$$\chi = -\left(\frac{c_2}{c_1} \right) \left[K_0(z_1) + \frac{2}{z_1} K_1(z_1) \right] + K_0(z_2) + \frac{2}{z_2} K_1(z_2) \quad (\text{A4})$$

$$\frac{d\chi}{dr} = \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \left[K_1(z_1) z_1 + 2 \left[K_0(z_1) + \frac{2}{z_1} K_1(z_1) \right] \right] \\ &- \left[K_1(z_2) z_2 + 2 \left[K_0(z_2) + \frac{2}{z_2} K_1(z_2) \right] \right] \end{aligned} \right\} \frac{1}{r} \quad (\text{A5})$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \chi}{d r^2} = & \left\{ - \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \left[K_0(z_1) z_1^2 + 3K_1(z_1) \right. \right. \\
& + 6 \left[K_0(z_1) + \frac{2}{z_1} K_1(z_1) \right] \left. \left. \right] + \left[K_0(z_2) z_2^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + 3K_1(z_2) z_2 + 6 \left[K_0(z_2) + \frac{2}{z_2} K_1(z_2) \right] \right] \right\} \frac{1}{r^2}
\end{aligned} \tag{A6}$$

onde K_0 e K_1 são as funções de Bessel modificadas de segunda espécie, de ordem zero e um, respectivamente (Abramowitz e Stegun, 1972); com $z_1 = s r / c_1$ e $z_2 = s r / c_2$.

APÊNDICE B

A inversão numérica da Transformada de Laplace é obtida usando o método de Durbin, que é baseado nos senos e cossenos da Transformada Rápida de Fourier (FFT) (Durbin, 1974).

Os valores de uma função Transformada $\bar{f}(s)$ são calculados para uma série de parâmetros de Laplace $s_k = a + i 2 k\pi/T$, onde a é uma constante, $i = \sqrt{-1}$ e T é um intervalo de tempo de interesse.

Os valores da função original $f(\tau)$ são obtidos em tempos periódicos $\tau_n = n\Delta\tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N-1$) da seguinte equação:

$$f(\tau_n) = \frac{2}{T} \exp(an\Delta\tau) \left\{ -\frac{1}{2} \Re[\bar{f}(a)] + \Re \left[\sum_{k=0}^{N-1} (A(k) + iB(k)W^{nk}) \right] \right\} \quad (\text{B1})$$

onde

$$A(k) = \sum_{l=0}^L \Re \left[\bar{f} \left(a + i(k + lN) \frac{2\pi}{T} \right) \right] \quad (\text{B2})$$

e

$$B(k) = \sum_{l=0}^L \Im \left[\bar{f} \left(a + i(k + lN) \frac{2\pi}{T} \right) \right] \quad (\text{B3})$$

e

$$W = \exp \left(i \frac{2\pi}{N} \right) \quad (\text{B4})$$

onde $\Re[]$ denota a parte real e $\Im[]$ denota a parte imaginária. A faixa usual do parâmetro aT é entre 5 e 10 e o produto LN é entre 50 e 5000.

APÊNDICE C

As funções ψ , χ e suas derivadas expressas pelas funções de Bessel para pequenos parâmetros, usadas nas Equações (4.42), (4.43), (4.45) e (4.46), tem as seguintes formas:

$$\begin{aligned} \psi = & -\frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \right] \ell n(r) - \frac{1}{2} \left[\ell n \left(\frac{s}{2c_2} \right) + \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \ell n \left(\frac{s}{2c_1} \right) \right] \\ & - \frac{1}{2} \gamma \left[1 + \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \right] - \frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \right] + O \left[z^2 \ell n(z) \right] \end{aligned} \quad (C1)$$

$$\chi = -\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \right] + O \left[z^2 \ell n(z) \right] \quad (C2)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{2r} \left[1 + \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \right] - \frac{z_2^2}{2r} \left[\ell n \left(\frac{z_2}{2} \right) + \gamma - \frac{1}{2} \right] + O \left[\frac{z^2}{r} \ell n(z) \right] \quad (C3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial r} = & \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \frac{z_1^2}{2r} \left[\ell n \left(\frac{z_1}{2} \right) + \gamma - \frac{1}{2} \right] \\ & - \frac{z_2^2}{2r} \left[\ell n \left(\frac{z_2}{2} \right) + \gamma - \frac{1}{2} \right] + O \left[\frac{z^2}{r} \ell n(z) \right] \end{aligned} \quad (C4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = & -\frac{1}{2r^2} \left[1 + \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \right] - \left\{ \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \frac{z_1^2}{2} \left[\ell n \left(\frac{z_1}{2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \gamma - \frac{1}{2} \right] + \frac{z_2^2}{2} \right\} \frac{1}{r^2} + O \left[\frac{z^2}{r^2} \ell n(z) \right] \end{aligned} \quad (C5)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} = & \left\{ -\left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \frac{z_1^2}{2} \left[\ell n \left(\frac{z_1}{2} \right) + \gamma - \frac{3}{2} \right] \right. \\ & \left. + \frac{z_2^2}{2} \left[\ell n \left(\frac{z_2}{2} \right) + \gamma - \frac{3}{2} \right] \right\} \frac{1}{r^2} + O \left[\frac{z^2}{r^2} \ell n(z) \right] \end{aligned} \quad (C6)$$

Os seguintes termos dominantes das funções têm as seguintes formas:

$$\begin{aligned}\psi &= -\frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \right] \ell n(r) + E_s + O[1] \\ \psi &= -\frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} \ell n(r) + E_s + O[1]\end{aligned}\tag{C7}$$

$$\begin{aligned}\chi &= -\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \right] + O \left[z^2 \ell n(z) \right] \\ \chi &= -\frac{1}{4(1-\nu)} + O \left[z^2 \ell n(z) \right]\end{aligned}\tag{C8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial r} &= -\frac{1}{2r} \left[1 + \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \right] + O \left[\frac{z^2}{r} \ell n(z) \right] \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} &= -\frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} \frac{1}{r} + O \left[\frac{z^2}{r} \ell n(z) \right]\end{aligned}\tag{C9}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} = O \left[\frac{z^2}{r} \ell n(z) \right]\tag{C10}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} &= -\frac{1}{2r^2} \left[1 + \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \right] + O \left[\frac{z^2}{r^2} \ell n(z) \right] \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} &= -\frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} \frac{1}{r^2} + O \left[\frac{z^2}{r^2} \ell n(z) \right]\end{aligned}\tag{C11}$$

e

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} = O \left[\frac{z^2}{r^2} \ell n(z) \right]\tag{C12}$$

onde

$$E_s = -\frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{s}{2c_2}\right) + \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \ln\left(\frac{s}{2c_1}\right) \right] \quad (\text{C13})$$

Os termos contendo $\ln(r)$, $1/r$ e $1/r^2$ são singulares quando $r \rightarrow 0$, e o termo E_s é singular quando $s \rightarrow 0$; os termos remanescentes que são de ordem $O[z^2 \ln(z)]$ não são singulares quando $z \rightarrow 0$.

APÊNDICE D

As derivadas das soluções fundamentais do MEC para o cálculo das sensibilidades na metodologia da diferenciação implícita são dadas por:

$$U_{ij,x} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu)\delta_{lk} \frac{r_{,x}}{r} - \frac{1}{r^2} (y_{i,x}y_j + y_i y_{j,x}) + \frac{2}{r^3} y_i y_j r_{,x} \right] \quad (D1)$$

$$\begin{aligned} T_{ij,x} = & -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left[(1-2\nu)(n_j y_{i,x} + n_{j,x} y_i - n_i y_{j,x} - n_{i,x} y_j) \right. \\ & - \left. \left\{ \frac{2y_i y_j}{2} (y_{k,x} n_k + y_k n_{k,x}) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{r^2} (y_{i,x} y_j + y_i y_{j,x}) y_k n_k - \frac{4y_i y_j}{r^3} y_k n_k r_{,x} \right\} \right] + \\ & + \frac{2}{4\pi(1-\nu)r^3} \left[(1-2\nu)(n_j y_i + n_i y_j) + \left((1-2\nu)\delta_{ij} + \frac{2y_i y_j}{r^2} \right) y_k n_k \right] r_{,x} \end{aligned}$$

onde $r_{,x} = (y_k y_{k,x})/r$ e $n_{i,x} = S^{-1} x_{i,\xi_x} - S^{-2} S_{,x} x_{i,\xi}$ e x e y são as coordenadas do ponto, $n_{i,x}$ é a derivada da normal em relação ao eixo x , S é o Jacobiano.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abramowitz M. e Stegun I. A. (1972), “Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.” Dover, New York.
- Ali R., Mohapatra D. R. e Gopalakrishnan S. (2005) “Constrained Piezoelectric Thin Film for Sensing of Subsurface Cracks.” *Smart Materials and Struc.*, vol. 14, p. 376 – 386.
- Aliabadi M. H. e Mellings S. C. (1997), “Boundary Element Formulation for Sensitivity Analysis and Crack Identification.” Computational Mechanics Publications, Ashurst, Southampton, UK.
- Aliabadi M. H. e Rooke D.P. (1991), “Numerical Fracture Mechanics.” Computational Mechanics Publications, Kluwer Academic Publishers, Southampton, UK.
- Aliabadi, M. H. (1997a), “Boundary Element Formulations in Fracture Mechanics.” *Applied Mechanics Reviews* vol. 50, p. 83–96.
- Aliabadi, M. H. (1997b), “A New Generation of Boundary Element Methods in Fracture Mechanics.” *International Journal of Fracture* vol. 86, p. 91–125.
- Aliabadi, M. H., (1998), “Plate Bending Analysis with Boundary Elements.” Computational Mechanics Publications, Southampton UK, Boston USA.
- Anderson T.L. (1995), “Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications.” CRC Press, New York, USA.
- ANSYS (1994). Analysis System - volumes 1 a 5. Houston, PA - USA.
- Assan A.E. (1999), “Método dos Elementos Finitos Primeiros Passos.” Editora da Unicamp, Campinas, Brasil.
- Atluri S.N. e Nakagaki M. (1986), “Computational Methods in the Mechanics of Fracture.” A Series of Handbooks. Elsevier Science Publishers B.V., New York, USA.
- Banerjee P.K. (1981), “The Boundary Element Methods in Engineering.” McGraw-Hill Book Company, London, UK.
- Barsoum R.S. (1976), “On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics.” *Intern. Journal for Numerical in Engineering*, vol. 10, p. 25 – 37.
- Bezerra, L.M. e Saigal, S. (1991), “Flaw Detection in Elastostatics with Boundary Element”. 22nd Midwestern Mechanics Conference. University of Missouri, USA.
- Bezerra L.M. (1993), “Inverse Elastoplastic Solution with Boundary Elements”. PhD. Thesis. Carnegie Mellon University. Pittsburg, PA, USA.

- Bezerra, L.M. e Saigal, S. (1993), “A Boundary Element Formulation for the Inverse Elastostatics Problem (IESP) of Flaw Detection.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 36, p. 2189-2202.
- Bezerra, L.M. e Saigal, S. (1994), “A Boundary Integral Formulation for the Inverse Problem of Detecting Open Cracks.” In: *Pressure Vessel and Piping Conference, 1994*, Minneapolis, Minnesota, USA: PVP'95 Conf. Proceedings. ASME, v. 280. p. 11-19.
- Bezerra L. M. (1995), “The Solution of Ill-posed Inverse Problems in Solid Mechanics and Nuclear Industry.” *Transaction of the 13th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Tecnology – SMiRT-13th*, Porto Alegre, Brazil.
- Bezin G. (1991). “A Boundary Integral Equation Method for Plane Flexure with Conditions Inside the Domain.” *Int. J. Numer. Methods Engng.*, vol.17, p.1467-1657.
- Bittencourt T. N. (1993), “Computer Simulation of Linear and Non-Linear Crack Propagation In Cementitious Materials, PhD. Thesis. Cornell University. USA.
- Blandford G.E., Ingraffea A.R. e Liggett J.A. (1981), “Two – Dimensional Stress Intensity Factor Computations Using the Boundary Element Method.” *International Journal for Numerical in Engineering*, vol. 17, p. 387 – 404.
- Brebbia, A. A., Telles, L. C., Wrobel, L. C. (1984), “Boundary Element Techniques.” Springer-Verlag, Berlin.
- Brebbia C.A. e Dominguez J. (1989), “Boundary Elements - An Introductory Course.” *Computational Mechanics Publications*, McGraw-Hill Book Company, Southampton, UK.
- Brebbia C.A. e Nardini D. (2000), “Dynamic Analysis in Solid Mechanics by an Alternative Boundary Element Procedure.” *Engineering Analysis with Boundary Elements* vol. 24, p. 513 – 518.
- Bröek D. (1984), “Elementary Engineering Fracture Mechanics.” Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- Broek D. (1989), “The Pratical Use of Fracture Mechanics.” Kluwer Academic Publishers, USA.
- Bryan K. e Vogelius M. (1992), “A Uniqueness Resuly Concerning the Identification of a Collection of Cracks from Finetely Many Electrostaic boundary Measurements” *SIAM J. Math Anal.*, vol. 23, p. 950 – 958.
- Callister W.D.Jr. (2002), “Ciência e Engenharia de Materiais: Uma Introdução.” LCT Editora, Rio de Janeiro, Brasil.

- Cavalcanti M.V.S. (1997), “Obtenção do Fator de Intensidade de Tensão Através de Várias Formulações Utilizando o Método dos Elementos Finitos.” Tese de Msc, Universidade de Brasília, Brasil.
- Cawley P. (1984), “The Impedance Method of Non-Destructive Inspection.” *Journal of ND¹ International* vol. 17, 59 - 65.
- Chance J., Tomlinson G. R. e Worden K. (1994), “A Simplified Approach to the Numerical and Experimental Modeling of the Dynamics of a Cracked Beam.” *Proceedings of the 12th International Modal Analysis Conference*, p. 778 - 785.
- Chirino F., Gallego R., Saez A. e Dominguez J. (1994), “A Comparative Study of Three Boundary Element Approaches to Transient Dynamic Crack Problems.” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 13, p. 11-19.
- Cruse T. A. e Rizzo F. J. (1968), “A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem.” *J Math Anal Appl*, vol. 22 p. 244–341.
- Cruse T. A. (1972), “Surface Cracks: Physical Problems and Computational Solutions.” J.L. Swedlow (ed.), *American Society of Mech. Engineers*, New York, 153–170.
- Cruse T. A. (1988), “Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics.” *Kluwer Academic Publisher*, Dordrecht, UK.
- Cruz J.R.B. (1998), “Procedimento Analítico para Previsão do Comportamento Estrutural de Componentes Trincados.” Tese de Doutorado, IPEN, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil.
- Deitel H.M. e Deitel P.J. (2001), “C++ How to Program.” *Prentice-Hall, Inc.* USA.
- Dominguez J. e Abascal. R. (1984), “On Fundamental Solutions for the Boundary Integral Equations Method in Static and Dynamic Elasticity.” *Engng Anal.* vol. 1, p. 128-134.
- Dominguez J. (1993), “Boundary Elements in Dynamics.” *Computational Mechanics Publications*, Southampton.
- Durbin F. (1974), “Numerical Inversion of Laplace Transforms: an Efficient Improvement to Dubner and Abate’s Method.” *Comput. J.* vol. 17, p. 371-376.
- Erdogan F. (1962), “On the Stress Distribution in Plates with Collinear Cuts Under Arbitrary Loads.” *Proc. 4th U.S. Nat. Conf. on Applied Mechanics*.
- Ewalds H.L. e Wanhill R.J.H. (1984), “Fracture Mechanics.” *Arnold Edition*, London, UK.
- Fedelinski P. Aliabadi M. H. e Rooke D. P. (1993), “The Dual Boundary Element Method in Dynamic Fracture Mechanics.” *Engng. Anal. Bound. Elem.* vol. 12, p. 203-210.

- Fedelinski P. Aliabadi M. H. e Rooke D. P. (1994a), "The Dual Boundary Element Method: J-integral for Dynamic Stress Intensity Factors." *International Journal of Fracture*, vol. 65, p. 369-381.
- Fedelinski P. Aliabadi M. H. e Rooke D. P. (1994b), "The Dual Boundary Element Method for Dynamic Analysis of Cracked Pin-Loaded Lugs." In: *Proc. Localized Damage III, Computer Aided Assessment and Control* (Edited by M. H. Aliabadi, A. Carpinteri, S. Kalinsky and D. J. Cartwright), p. 571-578. Computational Mechanics Publications, Southampton.
- Fedelinski P., Aliabadi M. H. e Rooke D. P. (1995a), "Boundary Element Formulations for the Dynamic Analysis of Cracked Structures." In: *Dynamics in Fracture Mechanics* (Edited by M. H. Aliabadi). Computational Mechanics Publications, Southampton.
- Fedelinski P. Aliabadi M. H. e Rooke D. P. (1995b), "A Single-Region Time-Domain BEM for Dynamic Crack Problems." *Int. J. Solids Struct.* vol. 32, p. 3555-3571.
- Fedelinski P. Aliabadi M. H. e Rooke D. P. (1996), "The Laplace Transform DBEM for Mixed-Mode Dynamic Crack Analysis." *Computers and Structures*, vol. 59, p. 1021-1031.
- Fenner R.T., (1996), "Finite Element Methods for Engineers." The Macmillan Press LTD, London, UK.
- Friedman A. E Vogelius M. (1989), "Determining Cracks by Boundary Measurements" *Indiana Univ. Math. Journal*, vol. 38, p. 527 – 556.
- Fukunada H., Hu N., Chang F-K. (2002), "Structure Damage Identification Using Piezoelectric Sensor." *Inter. Journal of Solids and Structures*, vol. 39, p. 393 – 418.
- Giaccari P., Dunkel G. R., Humbert L., Botsis J., Limberger H. G., Salathé R. P. (2005), "On a Direct Determination of Non-Uniform Internal Strain Fields Using Fiber Bragg Gratings." *Smart Materials and Structures*, vol. 14, p. 127 – 136.
- Halmshaw, R. (1987). "Non-destructive Testing." Vitória, Australia: Edward Arnold.
- Hehl M.E. (1987), "Linguagem de Programação Estruturada Fortran." McGraw-Hill, São Paulo, Brasil.
- Henshell, R.D. e Shaw, K.G. (1975). "Crack Tip Elements are Unecessary". *International Journal of Numerical Methods in Engineering*. Vol 9, p.495-509.
- Hull J.B. e John V.B. (1988). "Non-destructive Testing." New York: Springer-Verlag.
- Ingham, D.B e Wrobel, L.C. (1997), "Boundary Integral Formulation for Inverse Analysis". Computational Mechanics Publications. Southampton, UK.
- IEEE Piezoelectricity IEEE Standard 176 (1978), New York.

- Jamsa K. (1994), "C / C ++ 1001 Dicas." JC Editora, Rio de Janeiro, Brasil.
- Kassab, A. J., Mosley, F. J. e Daruapurkar, A. B. (1994) "Non-Destructive Detection of Cavities by na Inverse Elastotastic Boundary Element Method". Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 13, p. 44 – 55.
- Kane, J.H. e Saigal S. (1990), "Design – Sensitivity Analysis of Solids Using BEM." ASCE, p. 1703 – 1722.
- Keer, L. M. & Freedman, J. M. (1973), "Tensile Strip with Edge Cracks", International Journal of Engineering Science, Vol. 11, pp 1265-1275
- Kim J. H., Jeon H. S. e Lee C.W. (1992), "Application of the Modal Assurance Criteria for Detecting and Locating Structural Faults." Proceedings of 10th International Modal Analysis Conference, p. 536 - 540.
- Kolousek V. (1973), "Dynamics in Engineering Structures." Butterworths, London UK.
- Kraus J. D. (1992), "Eletromagnetics." McGraw – Hill, New York.
- Kubo, S. (1988). "Inverse Problems Related to the Mechanics and Fracture of Solids and Structures." JSME International Journal. Vol. 31, p. 157-166.
- Lam H. F., Ko J. M.e Wong C. W. (1995), "Detection of Damage Location Based on Sensitivity." Analysis Proceedings of the 13th International Modal Analysis Conference, 1499 - 1505.
- Lam H. F., Ko J. M. e Wong C. W. (1998), "Localization of Damaged Structural Connections Based on Experimental Modal and Sensitivity Analysis." Journal of Sound and Vibration vol. 210, 91 - 115.
- Leme S. P. L., Fiúza R., Bezerra L. M., Partridge P.W. (2005a), "Comparison of Finite and Boundary Element Results for the Stress Intensity Factors with Analytical Formulation in LEFM." International Conference on Boundary Element Techniques VI, Canada.
- Leme S. P. L., Fiúza R., Bezerra L. M., Partridge P.W. (2005b), "Comparing BEM and FEM Strategies for the Computation of the Stress Intensity Factor Using Singular and Non-Singular Elements." The tenth International Conference on Civil, Structural and Enviromental Engineering Computing, Rome, Italy
- Leme S. P. L., Fiúza R., Bezerra L. M., Partridge P.W. (2005c), "Comparing FEM, BEM and Analytical Formulations in the Evaluation of the Stress Intensity Factor in LEFM." 18th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology – SMIRT, Beijing, China.

- Leme S. P. L., Fiúza R., Bezerra L. M., Partridge P.W. (2005d), “Using Singular and Non-Singular Elements and BEM and FEM Strategies for the Computation of K_I in LEFM.” 18th International Congress of Mechanical Engineering, Ouro Preto, Brasil.
- Leme S. P. L., Fiúza R., Bezerra L. M., Partridge P.W. (2005e), “Elementos Singulares São Realmente Necessários para a Determinação Numérica do Fator de Intensidade de Tensão?” CILANCE – XXVI Iberian Latin-American Congresso n Computational Methods in Engineering, Guarapari, Espírito Santo, Brasil.
- Leme S. P. L., Aliabadi M. H., Bezerra L. M. e Partridge P. W. (2007a), “Dual Boundary Element Method to Detect the Presence of Cracks and Growth Using Static Strain for Health Monitoring.” *Journal of Structural Durability and Health Monitoring* (aprovado para publicação).
- Leme S. P. L., Aliabadi M. H. (2007b), “The Use of Dual Boundary Element Method in the Dynamic Analysis of Stiffened Plates.” (submetido para publicação).
- Leme S. P. L., Aliabadi M. H. (2007c), “Dual Boundary Element Method to Detect the Presence of Cracks Using Dynamic Strain Determination for Health Monitoring.” (submetido para publicação).
- Liang Y. C. e Hwu C. (2001), “On-line Identification of Holes / Cracks in Composite Structures.” *Smart Materials and Structures*, vol. 10, p. 599 – 609.
- Lim T. W. (1995), “Structural Damage Detection Using Constrained Eigenstructure Assignment.” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 18, 411 - 418.
- Lin X. e Yuan F. G. (2001), “Diagnostic Lamb Waves in an Integrated Piezoelectric Sensor / Actuator Plate: Analytical and Experimental Studies.” *Smart Materials and Structures* vol. 10, p. 907 – 913.
- Ma J. e Asundi A. (2000), “Structural Health Monitoring Using a Fiber Optic Polarimetric Sensor and Fiber Optic Curvature Sensor – Static and dynamic Test.” *Smart Materials and Structures*, vol. 10, p. 181 – 188.
- Maciel D.N. (2003), “Determinação dos Fatores de Intensidade de Tensão Estáticos e Dinâmicos via MEC com Integração Analítica em Coordenadas Locais.” Tese de Msc, Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, Brasil.
- Maneschy J.E. (1998), “Integral-J para Carregamentos Cíclicos.” Tese de Doutorado, Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, São Paulo, Brasil.
- Manolis G. D. e Beskos D. E. (1988), “Boundary Element Methods in Elastodynamics.” Unwin Hyman, London.

- Medeiros J.M.S. (2000), “Obtenção do Fator de Intensidade de Tensão Utilizando Várias Formulações com o Método dos Elementos de Contorno.” Tese de Msc, Universidade de Brasília, Brasil.
- Mellings, S. C. (1994) “Flaw Identification Using the Inverse Dual Boundary Element Method.” PhD Thesis, Wessex Institute of Technology, University of Portsmouth.
- Meriam J. L. e Kraige L.G. (1992), “Engineering Mechanics – Volume Two.” John Wiley & Sons, Inc., New York USA, 1992.
- Mitra A. K. E Das S. (1992), “Solution of Inverse Problems by Using the Boundary Element Method.” *Boundary Elements Technology VII*, p. 721 – 731.
- Murayama H., Kageyama K., Kamita T. e Igawa H.. (2003), “Structural Health Monitoring of a Full Scale Composite Structure with Fiber Optic Sensors.” *Advanced Composite Materials*, vol. 11, p. 287 – 297.
- Owen D. R. J. e Fawkes A. J. (1983), “Engineering Fracture Mechanics”. Pineridge Press Ltda. Swansea, UK.
- Pan E. (1999), “A BEM Analysis of Fracture Mechanics in 2D Anisotropic Piezoelectric Solids.” *Engineering Analysis with Boundary Elements* vol. 23, p. 67 – 76.
- Paris P. e Erdogan F. (1963), “A Critical Analysis of Crack Propagations Laws.” *Journal of Basic Engineering ASME*.
- Paris, P. C. & Sih, G. C. (1965), “Stress Analysis of Cracks, Fracture Toughness Testing and its Applications”, ASTM STP381
- Partridge P.W., Brebbia C.A. e Wrobel L.C. (1992), “The Dual Reciprocity Boundary Element Method.” *Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, Southampton, UK*.
- Pastoukhov V.A. e Voorwald H.J.C. (1995), “Introdução à Mecânica da Integridade Estrutural.” Editora Unesp, São Paulo, Brasil.
- Phan A., Gray L.J. e Kaplan T. (1999), “Highly Accurate Crack Tip Analysis.” Dept. of Civil and Environmental Engineering, University of Illinois, Urbana-Champaign, USA.
- Pollard J. E. E Kassab (1992), “Automated Solution of an Inverse Heat Conduction Problems for the Non-Destructive Detection of Sub-Surface Cavities Using Boundary Elements.” *Boundary Elements Technology VII*, p. 441 - 456.
- Polyzos D., Stamos A. A. e Beskos D. E. (1994), “BEM Computation of DSIF in Cracked Viscoelastic Plates.” *Commun. Numer. Meth. Engng* vol. 10, p. 81-87.
- Portela A., (1980), “Theoretical Basis of Boundary Solutions for Linear Theory of Structures, New Developments in Boundary Element Method.” (Edited by C. A.

- Brebbia), Proc. of the Second International Seminar on Recent Advances in Boundary Element Methods, p. 65-74 University of Southampton.
- Portela A., Aliabadi M. H. e Rooke D. P. (1992), "The Dual Boundary Element Method: Effective Implementation for Crack Problems." *Int. J. Numer. Meth. Engrng* vol. 33, p. 1269-1287.
- Portela, A., Aliabadi, M.H. e Rooke, D.P. (1993), "Dual Boundary Element Incremental Analysis of Crack Propagation." *Computers and Structures* vol. 46, p. 237–247.
- Rice J.R. (1968). "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks." *J. Appl. Mech.* 35, 379-386.
- Rus, G., Gallego, R. (2007), "Solution of Identification Inverse Problems in Elastodynamics Using Semi-Analytical Sensitivity Computation". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 31 p. 343–360
- Saigal S., Aithal R. e Kane J.H. (1989), "Conforming Boundary Elements in Plane Elasticity for Shape Design Sensitivity." *International Journal for Numerical in Engineering*, vol. 28, p. 2795 – 2811.
- Salawu O. S. e Williams C. (1994), "Damage location using vibration mode shapes." *Proceedings of the 12th International Modal Analysis Conference*, 933 - 939.
- Salawu O. S. (1997), "Detection of Structural Damage Through Changes in Frequency: A Review." *Engineering Structures* vol. 19, 718 – 723.
- Salgado N. e Aliabadi M. H. (1996), "The Application of Dual Boundary Element Method to the Analysis of Cracked Stiffened Panels." *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 54, p. 91 – 105.
- Saouma V.E. (2000), "Fracture Mechanics. Lecture Notes." Dept. of Civil Environmental and Architectural Engineering, University of Colorado, Boulder, USA.
- Schnur , D.S. e Zabarar N. (1990). *Finite Element Solution of Two-dimensional Inverse Elastic Problems Using Spatial Smoothing*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 30, p 57-75.
- Schulz M. J., Pai P. F. e Abdelnaser A. S., (1996), "Frequency Response Function Assignment Technique for Structural Damage Identification." *Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference*, 105 - 111.
- Shang, F., K. Meinhard e Abendroth M. (2003), "Finite Element Analyses of Three-Dimensional Crack Problems in Piezoelectric Structures". *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 70, p. 143–160.

- Sládek J. e Sládek V. (1986), "Dynamic Stress Intensity Factors Studied by Boundary Integro-Differential Equations." *Int. J. Numer. Meth. Engng* vol. 23, p. 919-928.
- Sládek J. e Sládek V. (1987), "A Boundary Integral Equation Method for Dynamic Crack Problems." *Engng Fracture Mech.* vol. 27, p. 269-277.
- Staszewski W., Boller C. e Tomlinson G. (2004), "Health Monitoring of Aerospace Structures – Smart Sensor Technologies and Signal Processing." John Wiley & Sons, Ltd. England.
- Tanaka M., Masuda Y. (1986), "Boundary Element Method Applied to some Inverse Problems" *Engineering Analysis.* vol. 3, p. 138-143.
- Tanaka M., Nakamura M., Aoki K. e Matsumoto T. (1993), "Computation of Dynamic Stress Intensity Factors Using the Boundary Element Method Based on Laplace Transform and Regularized Boundary Integral Equation." *JSME International Journal*, vol. 36, p. 252-258.
- Tanaka M., Nakamura M. e Nakano T. (1999), "Defectshape Identification by means of elastodynamics boundary element analysis and optimization techniques." *Advances in Boundary Elements.* Ed. C. A. Brebbia. Berlin: Springer - Verlag. vol. 3, p. 183-194.
- Timoshenko S.P. e Goodier J.N. (1980), "Theory of Elasticity." McGraw-Hill, NewYork, USA.
- Tua P. S., Quek S. T. e Wang Q. (2004), "Detection of Cracks in Plates Using Piezoactuated Lamb Waves." *Smart Materials and Structures*, vol. 13, p. 643 – 660.
- Vanderplaats G. N. (1981), "Structural Optimization – Past, Present and Future." *AIAA Journal*, vol. 20, n. 2, p. 992 – 1000.
- Xu X. L. e Rajapakse R. K. N. D. (1998), "Boundary Element Analysis of Piezoelectric Solids with Defects." *Composites Part B* vol. 29 B, p. 655 – 669.
- Wen P. H., Aliabadi M. H. e Young A. (2000), "Stiffened Cracked Plates Analysis by Dual Boundary Element Method" *International Journal of Fracture*, vol. 106, p. 245 – 258.
- Wessel, C., Cisilino A., Santi, O., Otegui, J., Chapetti M. (2001), "Numerical and experimental determination of three-dimensional multiple crack growth in fatigue". *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. p. 35 - 47.
- Wikipedia, Enciclopédia Livre, Londres 2005.
- Wong B. S., Guan T. C. e King L. M. (1993), "Mechanical Impedance Inspection of Composite Structures." *British Journal of ND* vol. 35, 3 - 9.
- Yin J. e Ji X. (1988), "Numerical Computation of Dynamic Stress Intensity Factors by the Boundary Element Method." *Engng Anal.* Vol. 5, p. 140-145.

- Young A., Rooke D. P. e Cartwright D. J. (1992), “Analysis of Patched and Stiffened Cracked Panels Using the Boundary Element Method.” *Int. Journal Solids Structures*. Vol. 29, p. 2201-2216.
- Zabaras, N., Morellas V. e Schnur D. (1989) “Spatially Regularised Solution of Inverse Elasticity Problems Using BEM.” *Communications in Applied Numerical Methods*, vol. 5, p. 547 – 553.
- Zhang X., Lee J. S. e Zhang Y. (1990), “Dynamic Analysis of Three-Dimensional Crack Problems.” In: *Proc. Computational Engineering with Boundary Elements*, vol. 2 *Solid and Computational Problems* (Edited by A. H. D. Cheng, C. A. Brebbia and S. Grill), p. 77-88. Computational Mechanics Publications, Southampton.
- Zou Y., Tong L. e Steven G. P. (2000), “Vibration-Based Model – Dependent Damage (Delamination) Identification and Health Monitoring for Composite Structures – a Review.” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 230 (2), p. 357 – 378.