Universidade de Brasília

Equações semilineares com potenciais que mudam de sinal com espectro negativo e positivo

Thafne Sirqueira Carvalho

Orientador: Dr. Ricardo Ruviaro

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de *Mestre em Matemática*

Brasília, 12 de Julho de 2024

Dedico esta dissertação a meus avós, Luzia Sirqueira Ferreira e Valdemar Gomes Ferreira.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus pela força em todos os momentos da minha vida. Por ter me sustentado e amparado nessa jornada acadêmica.

Aos meus avós, Luzia Sirqueira Ferreira e Valdemar Gomes Ferreira, pelo apoio incondicional, pelas conversas diárias, por terem sido minha base e me incentivarem nos estudos. Vocês tornaram esse sonho realizável.

A minhã mãe Edvane e minhas irmãs Thaila e Nathália por estarem ao meu lado. As minhas sobrinhas Erica Aylla, Lara, Clara e Helena por todo carinho e amor. Aos meus tios Rosiane e Flávio e minhas primas Vitória e Sarah que me acolheram em Brasília. A toda minha família pela torcida.

Ao meu orientador Ricardo Ruviaro, pela confiança, preocupação, incentivo e paciência em tirar todas as minhas dúvidas. Obrigada por fazer parte desse sonho, és um exemplo de orientador e pessoa, humano e admirável. Obrigada por toda ajuda e por tornar esse trabalho possível. Serei sempre grata por tudo.

Ao meu querido orientador da graduação, José Carlos de Oliveira Junior. Obrigada por ter sido uma grande inspiração e incentivador nesta caminhada. Agradeço imensamente por toda ajuda, amizade e por ter me animado sempre. És um exemplo de professor e pessoa, admiro muito o senhor e levarei seus ensinamentos por toda vida.

A todos os amigos do departamento de matemática da Unb. Talyta, Fabi, Tharles, Henrylla, Paul, Franchesca, Fabi, Ismael, além de muitos outros. obrigada pelos momentos de alegria, por tornarem a caminhada mais leve e prazerosa. Agradeço de modo especial meus amigos Ângelo, Samuel, Deyfila, Flávia e Jonatas por estarem sempre ao meu lado e ter me dado suporte todas as vezes que precisei. Vocês e todos do departamento se tornaram uma família em Brasília. Agradeço meus amigos do Maranhão e Araguaína que, de longe, sempre torceram por mim e estiveram presente. A minhas amigas do colina, Marta e Christe pelas conversas e risadas diárias e apoio de sempre.

A funcionária da secretaria Marta pela presteza e por ter me ajudado. Ao funcionário Joemir pelo excelente profissional, conversas e pela torcida.

A todos os professores colegiado de matemática da UFT e do colégio Celam. Em especial, Renata, Álvaro, Fernanda e Edinho. Obrigada pela torcida e por todo conhecimento compartilhado, são professores muito especiais.

À CAPES pelo apoio financeiro durante o mestrado. Por fim, agradeço a todos que de forma direta e indireta contribuíram para esta conquista.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência de solução não trivial para a equação não linear de Schrödinger

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N \qquad (P)$$

com $u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$, em que $N \geq 3$, e V é um potencial que muda de sinal e possui limite positivo no infinito. Primeiramente, obtemos uma solução positiva de energia mínima e uma solução nodal para o problema (P), com V satisfazendo condições definidas e f sendo uma função superlinear com crescimento subcrítico. A existência dessa solução foi garantida utilizando técnicas variacionais combinadas com o Princípio de Concentração e Compacidade de Lions. As provas baseiam-se na localização do ínfimo do funcional associado restrito a conjuntos do tipo Nehari.

Na sequência estudamos o mesmo problema, mas considerando agora V como sendo um potencial não periódico e a não linearidade f tendo comportamento assintoticamente linear no infinito. Neste caso, a mudança de sinal do V resulta que o espectro do operador $L = -\Delta + V$ tem ínfimo negativo. Para existência de uma solução fraca não trivial, utiliza-se a teoria espectral e pelas interações entre soluções transladadas do problema no infinito tem-se que o problema satisfaz a geometria do Teorema de Linking com a condição de Cerami.

Palavras-chave: Geometria do Passo da Montanha, Sequência de Cerami, Linking, Variedade de Nehari, Assintoticamente Linear.

Abstract

In this work, we study the existence of a non-trivial solution to the nonlinear Schrödinger equation

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) \text{ in } \mathbb{R}^N \tag{P}$$

with $u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ where $N \geq 3$ and V is a potential that changes sign and has a positive limit at infinity. First, we obtain a minimum energy positive solution and also a nodal solution to the problem (P), with V satisfying defined conditions and f being a superlinear function with subcritical growth. The existence of this solution was guaranteed using variational techniques combined with the Lions Principle of Concentration and Compactness. The proofs are based on the location of the infimum of the associated functional restricted to sets of the Nehari type.

Next, we study the same problem, but now considering V being a non-periodic potential and the nonlinearity f having asymptotically linear behavior at infinity. In this case, the change in sign of V results in the spectrum of the operator $L = -\Delta + V$ has negative infimum. For the existence of a nontrivial weak solution, spectral theory is used and through the interactions between translated solutions of the problem at infinity, the problem satisfies the geometry of the Linking Theorem with the Cerami condition.

Keywords: Mountain Pass Geometry, Cerami Sequence, Linking, Nehari Manifold, Assymptotically Linear.

Lista de Símbolos

$B_R(0)$	Bola aberta centrada em zero e raio R.
$B_R(x)$	Bola aberta centrada em x e raio R.
$u_n \to u$	Convergência forte (em norma).
$u_n \rightharpoonup u$	Convergência fraca.
$u_n \to u$, q.t.p em Ω	Convergência em quase todo ponto $x \in \Omega$.
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$	Gradiente da função u.
$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	Laplaciano de u.
$\mu(\Omega)$	Medida de Ω.
$supp \varphi$	Suporte da função φ.
$C^k(\mathbb{R}^N)$, para $k = 1, 2, \cdots$	Espaço das funções de classe C^k
$C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$	Espaço das funções suaves com suporte compacto em $\mathbb{R}^N$.
E^*	Dual do espaço E.
$L^p(\Omega)$	Espaço de Lebesgue das funções p-integráveis.
$L^p_{loc}(\Omega)$	Espaço das funções localmente integráveis em Ω.
$p^* = \frac{pN}{N-p}$	Expoente crítico de Sobolev.
$H^1(\mathbb{R}^N)$	Espaço de Sobolev $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.
$\|u\|_{H^1}$	Norma usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$.
$\|u\|_p$	Norma usual de $L^p(\mathbb{R}^N)$.
$\|u\|_{V_\infty}$	Norma com peso em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, apresentaremos os resultados mostrados nos artigos de Furtado, Maia e Medeiros [20] e Maia, Junior e Ruviaro [29] que, sob certas condições, garantem a existência de solução fraca não trivial $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ para o problema

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \quad \text{em } \mathbb{R}^N \tag{P}$$

em que $N \geq 3$ e a função f e o potencial V satisfazem certas hipóteses previamente estabelecidas.

Trabalharemos com o problema na sua forma variacional, associando ao problema (P) o funcional energia $I : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx$$

em que $F(u) = \int_0^u f(s)ds$, e assim, obteremos uma solução fraca para (P), a qual é um ponto crítico não trivial para I. Para obter os resultados traçados, deve-se considerar o problema limite

$$-\Delta u + V_\infty u = f(u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

com a finalidade de relacionar o nível do funcional energia do problema (P) com o daquele associado no infinito.

Este problema surge quando se procura soluções estacionárias de uma equação de Schrödinger não linear (veja por exemplo [7, 33]) dada por

$$ih\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi - f(|\psi|)\frac{\psi}{|\psi|}.$$

Assim, muitos autores têm estudado o problema (P) considerando diferentes hipóteses sobre o potencial V e não linearidades f. Trabalhos sobre a existência de soluções positivas para (P) quando o potencial V é limitado por baixo por uma constante positiva e f tem crescimento subcrítico, usando argumentos do Passo da Montanha são bem conhecidos ([3, 33]). Sobre a existência de soluções nodais em domínio ilimitado foi provado em [4]. No entanto, a existência de solução que muda de sinal para nosso problema (P) foi pouco explorada até o momento.

Liu, Su e Weth em [28] provaram a existência de soluções positiva, negativa e nodal para o problema (P) sem condição de periodicidade para as funções V e f. Jeanjean e Tanaka em [22] estabeleceram a existência de uma solução positiva para (P) em que $V(x) \geq \alpha > 0$ e f é assintoticamente linear no infinito, $f(s)s^{-1} \to a > 0$ quando $s \to +\infty$ com $a > \inf \sigma(-\Delta + V)$. No contexto do problema não autônomo, Kryszewski e Szulkin [24] e Pankov [31] provaram a existência de solução não trivial com $f(x,u)$ em (P), considerando V um potencial periódico e $f(x,s)$ superquadrática em s. Evéquoz e Weth em [18] estudaram a existência de soluções para o caso não autônomo utilizando o método de Nehari, considerando V não periódica e pode mudar de sinal, tem limite no infinito, a não linearidade F é superquadrática no infinito e a função $s \mapsto f(s)/s$ é estritamente crescente.

Seguindo essa linha, no presente trabalho estamos interessados em estudar a equação elíptica semilinear com um potencial que muda de sinal. Sendo assim, essa dissertação está estruturada em dois capítulos que garantem a existência de solução fraca não trivial para o problema (P). Na obtenção de nossos resultados, dependendo do comportamento do potencial V e da não linearidade f, utilizamos diferentes métodos, a saber os variacionais.

No Capítulo 1, estamos preocupados com a existência de uma solução positiva de energia mínima e adicionalmente uma solução nodal para o problema (P) com $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sendo um potencial que pode mudar de sinal satisfazendo condições adequadas e a não linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sendo uma função de classe C^1 e superlinear com crescimento subcrítico. Lembramos que uma solução u_1 de (P) é de energia mínima entre todas as soluções, ou seja,

$$I(u_1) = \min\{I(u) : u \neq 0 \text{ é a solução de } (P)\},$$

enquanto solução nodal é uma solução que muda de sinal.

A nossa principal dificuldade consiste na falta de compacidade do nosso funcional associado ao problema (P) em domínios ilimitados. Para superarmos esta dificuldade apresentaremos e provaremos uma versão do Lema de Concentração e Compacidade de Lions [27], aqui chamado de "Splitting".

Dessa forma, para obter uma solução positiva de energia mínima, aplicaremos os métodos variacionais combinados ao Lema de Concentração e Compacidade de Lions. As condições fornecidas pela não linearidade f garantem que o funcional I associado ao problema (P) possui a geometria do Passo da Montanha, a qual fornece uma sequência Palais-Smale. Além do mais, é importante destacar que o Splitting é utilizado para mostrar que tal sequência converge forte para uma solução não trivial.

Em seguida, localizamos o ínfimo do funcional I restrito ao conjunto de Nehari, o qual coincide com o nível do Passo da Montanha. Para atingir este objetivo, assumimos também que f satisfaz a conhecida condição superlinear de Ambrosetti-Rabinowitz e uma condição de monotonicidade. Com isso, verificamos que $u \neq 0$ é uma solução de energia mínima provando uma desigualdade estrita entre a energia do funcional I e a energia do funcional associado ao problema no infinito. Finalmente, pelo Princípio do Máximo Forte, u é uma solução positiva. Em relação a solução nodal aplicaremos o Teorema da Função Implícita. Como no caso anterior, comparamos os níveis de energia do funcional, no entanto, agora com o ínfimo de I restrito ao conjunto do tipo Nehari.

No Capítulo 2 estamos interessados em estudar o mesmo problema (P) em que V é um potencial contínuo e não periódico e que muda de sinal, com limite assintótico $V_\infty > 0$ no infinito e f uma função assintoticamente linear no infinito. Nesse caso, utilizaremos o Teorema de Linking [32] com a condição de Cerami como em [25], Proposição 2.10, e [12] para obter uma solução fraca não trivial $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ para o problema (P), uma vez que não é possível aplicar o Teorema do Passo da Montanha. Um dos obstáculos, está em provar a limitação da sequência de Cerami, já que estamos lidando com um problema assintoticamente linear e domínio não limitado.

Para obter a solução desejada utiliza-se a solução radial, contínua e positiva de energia mínima u_0 do problema limite

$$-\Delta w + V_\infty w = f(w), \quad \text{em } \mathbb{R}^N \tag{P_∞}$$

projetada em um subespaço vetorial de dimensão infinita de $H^1(\mathbb{R}^N)$ com codimensão finita. Além disso, foi crucial estimar as interações das transladadas de u_0 a fim de obter a geometria de Linking (Lema 2.3).

Apesar de ambos os capítulos tratarem do mesmo problema (P), é importante ressaltar as semelhanças e diferenças entre eles. O ponto comum é que o potencial V muda de sinal, o que traz grandes dificuldades, por exemplo, para lidar com a componente esquerda do funcional energia associado ao problema. Caso V fosse maior que zero, a expressão

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^2| + V(x)u^2)dx$$

seria uma norma. Porém, ao ocorrer uma mudança de sinal em $V = V^+ - V^-$ é necessário lidar com sua parte negativa.

No primeiro caso, contornamos essa dificuldade controlando a norma do V^- no espaço de Lebesgue $L^{N/2}$ por uma constante S (onde S é a melhor constante da imersão de Sobolev). Convém salientar que esse controle facilita a realização de algumas estimativas importantes. Por outro lado, no segundo capítulo, a mudança de sinal do potencial V implica necessariamente que o espectro seja negativo (hipótese (V_3)), o que impossibilita a aplicação do Teorema do Passo da Montanha. Considerando

$$E^- := \operatorname{span}\{\varphi_i,\ i = 1,2,\cdots,k\} \quad \text{e} \quad E^+ := \left(E^-\right)^\perp,$$

a impossibilidade decorre do fato de que na direção E^- o funcional é sempre negativo, enquanto na direção E^+ ele é positivo, e isto faz com que o método utilizado no primeiro caso seja ineficaz para o segundo capítulo. Portanto, se desejamos abordar o problema de maneira variacional, precisamos buscar outro tipo de teorema que forneça pontos críticos de funcionais.

Como o funcional associado I é indefinido, para contornar as dificuldades os autores Maia, Junior e Ruviaro [29] utilizam o Teorema de Linking para garantir existência de solução fraca não trivial para o problema (P). É conveniente decompor o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ em uma soma direta de dois subespaços E^+ e E^-, um deles de dimensão finita, e assumir uma condição de não quadraticidade em F (hipótese (f_3)). Diferentemente do capítulo anterior, não precisamos trabalhar com método de minimização na variedade de Nehari. Supondo que $s \mapsto f(s)/s$ é crescente para $s > 0$, conseguimos comparar os níveis de energia dos funcionais I e I_∞, e portanto, aplicar o Lema de Concentração e Compacidade de Lions.

Um fato importante diz respeito ao decaimento exponencial da solução do problema limite (P_∞), usado fortemente na comparação dos níveis de energia dos funcionais. Além do mais, com suas semelhanças e diferenças, é relevante destacar que os artigos [20] e [29] se complementam. Por um lado, a mudança de sinal do potencial implica em um espectro positivo, e de outro, negativo. Por essa razão, empregam-se diferentes métodos para obter a solução do problema (P). Enquanto no primeiro usamos o Teorema do Passo da Montanha, no segundo utilizamos o Teorema de Linking.

Destacamos que estudaremos os artigos na sua originalidade e essência, sem apresentarmos novos métodos, com enfraquecimento de hipóteses, exigência de menos regularidade na função f, dentre outros fatos que tratam da evolução dos problemas estudados. Além disso, no apêndice A apresentamos resultados importantes de Análise Funcional, Teoria da Medida e Equações Diferenciais Parciais utilizados ao longo do trabalho, além da Teoria Espectral e Lema de Lions. No apêndice B provamos um resultado técnico sobre convergência uniforme. No apêndice C mostramos o Teorema de Linking sob a condição de Cerami e no apêndice D demonstramos a diferenciabilidade do funcional I para o primeiro caso.

Capítulo 1

Solução Positiva e Nodal para uma Equação de Schrödinger não Linear com Potencial Indefinido

Neste capítulo, estudaremos a equação elíptica semilinear

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{P}$$

onde estamos preocupados com a existência de uma solução positiva de energia mínima e adicionalmente uma solução nodal para o problema (P). Considerando $V = V^+ - V^-$ e $V^{\pm} := \max\{\pm V, 0\}$, assumimos as seguintes hipóteses sobre o potencial V:

(V_0) $V \in L^t_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para algum $t > N/2$;

(V_1) $V^+_\infty := \lim\limits_{|x|\to\infty} V(x) > 0$;

(V_2) se denotarmos por S a melhor constante para a imersão de Sobolev $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, a saber

$$S := \inf\left\{\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} : u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \text{ e } \|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} = 1\right\},$$

então

$$\|V^-\|_{L^{N/2}(\mathbb{R}^N)} < S. \tag{1.1}$$

Após o trabalho de Lions [26], condições como (V_1) apareceram em muitos trabalhos com potenciais positivos ou de mudança de sinal [10, 13, 33]. Algumas condições relacionadas a

(V_2) já apareceram em [6, 13, 34] onde os autores consideraram o problema (P) ou algumas de suas variantes.

No que se refere à não linearidade de f, partimos do pressuposto de que

(f_0) $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$;

(f_1) existem $2 \leq q+1 < \eta+1 < 2^* := 2N/(N-2)$ tais que

$$\lim_{|s|\to 0} \frac{|f'(s)|}{|s|^{q-1}} = 0 \quad \text{e} \quad \limsup_{|s|\to\infty} \frac{|f'(s)|}{|s|^{\eta-1}} < +\infty;$$

(f_2) existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < \theta F(s) \leq sf(s), \quad \text{para todo} \quad s \neq 0;$$

(f_3) a função $s \mapsto f(s)/s$ é crescente em $(0,+\infty)$.

Condições $(f_0)-(f_1)$ e $(V_1)-(V_2)$ mostram que o problema (P) tem uma estrutura variacional. Mais especificamente, as soluções fracas do problema (P) são justamente os pontos críticos do funcional $I : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ de classe C^1, definido por

$$I(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx,$$

onde $F(s) := \int_0^s f(\tau)d\tau$.

Como um dos objetivos desse capítulo é mostrar a existência de uma solução positiva de energia mínima para o problema (P), enunciaremos abaixo nosso primeiro resultado de existência:

Teorema 1.1. Suponha que f satisfaça $(f_0)-(f_3)$ e V satisfaça $(V_0)-(V_2)$. Então o problema (P) tem uma solução positiva de energia mínima, desde que V satisfaça

$$V(x) \leq V_\infty^+, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N, \quad V \not\equiv V_\infty^+. \tag{V_3}$$

Note que não assumimos que V seja limitado inferiormente, diferentemente de [34]. Em nosso segundo resultado queremos obter uma solução de (P) que muda de sinal. Assim, precisamos impor a f uma condição mais forte, especificamente

$(\widehat{f_3})$ existem $\eta \leq \sigma \leq 2^*-1$ e $C > 0$ tais que

$$f'(s)s - f(s) \geq C|s|^{\sigma-1}s, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Podemos afirmar agora os nossos resultados de multiplicidade da seguinte forma.

Teorema 1.2. Suponha que f é ímpar e satisfaz $(f_0)-(f_2)$ e $(\widehat{f_3})$. Suponha também que V satisfaz $(V_0)-(V_2)$ e, para algum $\gamma < V_\infty^+ q/(q+1)$ ocorra

$$V(x) \leq V_\infty^+ - Ce^{-\gamma|x|}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N. \tag{$\widehat{V}_3$}$$

Então o problema (P) tem além de uma solução positiva de energia mínima uma solução que muda de sinal.

Exemplo 1.1. O potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dado por

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|^2}{1+|x|^2}, & \text{para } |x| > 1, \\ -\dfrac{1}{|x|^\alpha}, & \text{para } |x| \leq 1, \end{cases}$$

onde $0 < \alpha < 2$ satisfaz nossas hipóteses.

Observação 1.1. Como estamos interessados em encontrar solução positiva, quando necessário assumiremos que $f(s) = 0$, para todo $s \leq 0$.

Agora, vamos destacar alguns aspectos sobre as hipóteses mencionadas anteriormente. Em (V_0) temos que o potencial é localmente integrável, e isso nos permite verificar que o funcional está bem definido. Em (V_1) o potencial V possui limite assintótico V_∞^+ no infinito, essa condição desempenha um papel crucial na obtenção de algumas estimativas da prova do Lema de Concentração e Compacidade de Lions, além de ser empregada na demonstração da equivalência das normas. Já (V_2) é fortemente usada na equivalência das normas, limitação da sequência $(PS)_c$, geometria do Passo da Montanha e existência de ponto de máximo. Além do mais, $(\widehat{V}_3)$ e $(\widehat{f_3})$ nos auxiliam a obter algumas estimativas para mostrar a existência de solução nodal. Por outro lado, (f_1) diz respeito à condição de crescimento da função f, que será usada sempre que precisarmos estabelecer um crescimento de f e de sua primitiva F, a condição (f_2) usaremos para provar a limitação da sequência (u_n), geometria do Passo da Montanha, Splitting e na obtenção da solução de energia mínima, e por fim a condição (f_3) é usada para mostrar que a solução está projetada na variedade de Nehari de maneira única.

Neste capítulo, apresentaremos na Seção 1.1 a estrutura variacional utilizada, limitação da sequência Palais-Smale e uma versão do Lema de Concentração e Compacidade de Lions, que será fundamental na prova do Teorema 1.1. Na Seção 1.2, analisemos a geometria do Passo da Montanha e, em seguida, demonstraremos a existência de uma solução positiva de energia mínima para o problema. Finalmente, na Seção 1.3 dedicaremos à prova da existência de uma solução para (P) que muda de sinal.

1.1 Estrutura variacional

Nesta seção apresentamos a estrutura variacional para lidar com o problema (P) e também fornecemos algumas preliminares que serão úteis posteriormente. Como $(\widehat{f_3})$ implica (f_3), ao longo deste capítulo assumimos que f satisfaz $(f_0)-(f_3)$ e V satisfaz $(V_0)-(V_2)$. Denotamos por $\|u\|_p$ a $L^p(\mathbb{R}^N)$-norma de $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Antes de definirmos o nosso espaço E como sendo o espaço de Hilbert dotado de um produto interno, precisamos provar o seguinte resultado:

Lema 1.1. A forma quadrática

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V^+(x)u^2\right) dx$$

define uma norma em $H^1(\mathbb{R}^N)$ que é equivalente a usual.

Demonstração. Em vista da condição (V_1), existe $R > 0$, tal que

$$\nu := \frac{V_\infty^+}{2} \leq V^+(x) \leq \frac{3V_\infty^+}{2} = 3\nu, \quad \text{para todo } \ x \in \mathbb{R}^N \backslash B_R(0),$$

onde $B_R(0) := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$. Assim, a desigualdade de Hölder e a definição de S fornecem

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V^+(x)u^2\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{B_R(0)} V^+(x)u^2 dx + \int_{|x|\geq R} V^+(x)u^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \|V^+\|_{L^{N/2}(B_R(0))}\|u\|_{2^*}^2 + 3\nu \int_{|x|\geq R} u^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + S^{-1}\|V^+\|_{L^{N/2}(B_R(0))} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + 3\nu \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \\
&= (1+C_1) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + 3\nu \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \\
&\leq \max\{1+C_1, 3\nu\} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + u^2\right) dx,
\end{aligned}$$

com $C_1 := S^{-1}\|V^+\|_{L^{N/2}(B_R(0))}$.

Por outro lado, temos que

$$\int_{B_R(0)} u^2 dx \;\leq\; |B_R(0)|^{2/N} \left(\int_{B_R(0)} |u|^{2^*} dx \right)^{2/2^*} \;\leq\; C_2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx,$$

onde $C_2 := S^{-1}|B_R(0)|^{2/N}$ e $|B_R(0)|$ denota a medida de Lebesgue de $B_R(0)$.

Além disso, como $\nu \leq V^+(x) \leq 3\nu$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \backslash B_R(0)$ segue que $1 \leq V^+(x)/\nu \leq 3$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + u^2\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{B_R(0)} |u|^2 dx + \int_{|x|\geq R} |u|^2 dx \\
&\leq (1+C_2) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\nu} \int_{|x|\geq R} V^+(x) u^2 dx \\
&\leq \max\{1+C_2, \nu^{-1}\} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V^+(x) u^2\right) dx,
\end{aligned}$$

e o lema está provado. □

Tendo em vista o resultado acima podemos definir E como sendo o espaço de Hilbert $H^1(\mathbb{R}^N)$ dotado do produto interno

$$\langle u, v\rangle_E := \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u \cdot \nabla v + V^+(x) uv\right) dx, \quad \text{para todo } \; u, v \in E$$

e norma associada dada por

$$\|u\|_E^2 := \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V^+(x) u^2) dx, \quad \text{para todo } \; u \in E.$$

Como $\|\cdot\|_E$ é equivalente a normal usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$, a imersão $E \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ é contínua para qualquer $2 \leq p \leq 2^*$.

Notamos que de (f_1), dado qualquer $\delta > 0$ existe $C_\delta > 0$, tal que

$$|f(s)| \leq \delta |s|^q + C_\delta |s|^\eta, \quad \text{para todo } \; s \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

De fato, visto que $\lim\limits_{|s|\to 0} \dfrac{|f'(t)|}{|t|^{q-1}} = 0$, então dado $\delta > 0$, existe $R > 0$ com

$$|f'(t)| < \delta |t|^{q-1}, \; \text{ sempre que } \; |t| < R. \tag{1.3}$$

Por outro lado, como $\limsup\limits_{|t|\to\infty} \dfrac{|f'(t)|}{|t|^{\eta+1}} < +\infty$, dado $\beta > 0$, existe $M > 0$ com

$$|f'(t)| < \beta|t|^{\eta-1}, \text{ sempre que } |t| > M. \tag{1.4}$$

Por (1.3), (1.4) e pela continuidade da f, temos que

$$|f(s)| \leq \frac{\delta}{q}|s|^q + C_\delta|s|^\eta, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$|F(s)| \leq \frac{\delta}{q+1}|s|^{q+1} + \frac{C_\delta}{\eta+1}|s|^{\eta+1}, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Com isso, podemos concluir que o funcional $u \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx$ é finito, e portanto, está bem definido em E.

Além disso, como $V^- \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$, usando desigualdade de Hölder e a imersão contínua $E \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2dx \leq \|V^-\|_{N/2}\|u\|_{2^*}^2 \leq S^{-1}\|V^-\|_{N/2}\|u\|_E^2 < \infty, \tag{1.6}$$

para qualquer $u \in E$. Então, o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) := \frac{1}{2}\|u\|_E^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx, \tag{1.7}$$

está bem definido. Além do mais, temos que $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ (veja Apêndice D) com

$$I'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\nabla\varphi + V(x)u\varphi)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)\varphi dx, \quad \text{para todo } u,\varphi \in E.$$

Consequentemente, os pontos críticos do funcional I são exatamente as soluções fracas do problema (P).

Lembremos agora uma condição de compacidade bem conhecida. Seja E um espaço de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Suponha que existam $c \in \mathbb{R}$ e $(u_n) \subset \mathbb{R}$ tais que

$$I(u_n) \to c \text{ e } \|I'(u_n)\|_E \to 0,$$

então dizemos que (u_n) é uma sequência Palais-Smale no nível c para I, ou de forma abreviada, (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para I. Agora dizemos que I satisfaz a condição Palais-Smale no nível c, quanto toda sequência $(PS)_c$ para I possui subsequência convergente.

Lema 1.2. Se $(u_n) \subset E$ é uma sequência $(PS)_c$ para I, então (u_n) é limitada em E.

Demonstração. Como $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$, podemos usar (f_2) e (1.6) para obter

$$\begin{aligned}
c + o_n(1)\|u_n\|_E &= I(u_n) - \frac{1}{\theta} I'(u_n)u_n \\
&= \frac{1}{2}\|u_n\|_E^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u_n^2dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx - \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^2 dx \\
&\quad - \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_n^2dx + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx \\
&= \frac{1}{2}\|u_n\|_E^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u_n^2dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx - \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^2 dx \\
&\quad - \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} V^+(x)u_n^2dx + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u_n^2dx + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx \\
&= \frac{1}{2}\|u_n\|_E^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u_n^2dx - \frac{1}{\theta}\|u_n\|_E^2 + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u_n^2dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{\theta} f(u_n)u_n - F(u_n)\right)dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|_E^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u_n^2dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|_E^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\frac{\|V^-\|_{N/2}}{S}\|u_n\|_E^2 \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\left(1 - \frac{\|V^-\|_{N/2}}{S}\right)\|u_n\|_E^2,
\end{aligned}$$

onde $o_n(1)$ denota uma quantidade que se aproxima de zero quando $n \to \infty$. A desigualdade acima implica que (u_n) é limitada em E, pois vale (V_2). □

Para obter compacidade é importante considerar o problema limite associado a (P), nomeadamente o problema autônomo

$$-\Delta u + V_\infty^+ u = f(u), \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \tag{P_∞}$$

O funcional $I_\infty : E \to \mathbb{R}$ associado a (P_∞) é dado por

$$I_\infty(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2 + V_\infty^+ u^2\right)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx,$$

em que as soluções fracas de (P_∞) são os pontos críticos do funcional I_∞. Se $u \in E$ é ponto crítico de I_∞ necessariamente $I'_\infty(u)u = 0$. Portanto, seja $\mathcal{N}_\infty$ a variedade de Nehari de I_∞, ou seja

$$\mathcal{N}_\infty := \{u \in E\backslash\{0\} : I'_\infty(u)u = 0\}$$

e considere o problema de minimização relacionado

$$c_\infty := \inf_{u \in \mathcal{N}_\infty} I_\infty(u).$$

A proposição a seguir descreve o comportamento assintótico de toda solução positiva do problema (P_∞). Dessa forma, podemos observar que $\overline{u}$ decai para zero exponencialmente no infinito.

Proposição 1.1. O problema (P_∞) tem uma solução positiva e radialmente simétrica $\overline{u} \in E$ tal que $I_\infty(\overline{u}) = c_\infty$. Além disso, se a função f for ímpar, para qualquer $0 < \delta < \sqrt{V_\infty^+}$, existe uma constante $C = C(\delta) > 0$, tal que

$$\overline{u}(x) \leq Ce^{-\delta|x|}, \quad \text{para todo } \; x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.8}$$

Demonstração. Veja Berestycki-Lions [7], Teorema 1.

O próximo resultado é técnico e pode ser encontrado em [1], Lema 3.1.

Lema 1.3. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, $s \geq 2$ e $(g_n) \subset L^s(\Omega) \cap L^{2^*}(\Omega)$ uma sequência limitada em $L^{2^*}(\Omega)$ tal que $g_n(x) \to 0$ q.t.p. em Ω.

(i) Se f satisfaz (f_1), então

$$\int_\Omega |F(g_n + w) - F(g_n) - F(w)| = o_n(1),$$

para cada $w \in L^{\eta+1}(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$.

(ii) Se f satisfaz $(f_1) - (f_3)$, então

$$\int_\Omega |f(g_n + w) - f(g_n) - f(w)|^r = o_n(1), \quad \text{para todo } \; 1 < r \leq 2,$$

e $w \in L^2(\Omega) \cap L^{2^*}(\Omega)$.

Demonstração. Vamos provar o item (i). Dado $w \in L^{\eta+1}(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$F(g_n + w) - F(g_n) = \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} F(g_n + tw) \right) dt.$$

Como F é a primitiva de f, então

$$F(g_n + w) - F(g_n) = \int_0^1 f(g_n + tw) w dt,$$

portanto, de (1.2),

$$\begin{aligned}|F(g_n+w)-F(g_n)| &\leq \int_0^1 |f(g_n+tw)||w|dt\\ &\leq \int_0^1 (\delta|g_n+tw|^q|w|+C_\delta|g_n+tw|^\eta|w|)\,dt.\end{aligned}$$

Como $t\in[0,1]$, então $|g_n+tw|\leq|g_n|+|w|$. Portanto,

$$\begin{aligned}|F(g_n+w)-F(g_n)| &\leq \int_0^1 (\delta(|g_n|+|w|)^q|w|+C_\delta(|g_n|+|w|)^\eta|w|)dt\\ &\leq 2^q\delta|g_n|^q|w|+2^q\delta|w|^{q+1}+2^\eta C_\delta|g_n|^\eta|w|+2^\eta C_\delta|w|^{\eta+1}.\end{aligned}$$

Tomando $\delta_1=2^q\delta$ e $C_{\delta_1}=2^\eta C_\delta$, obtemos

$$|F(g_n+w)-F(g_n)|\leq\left(\delta_1|g_n|^q|w|+\delta_1|w|^{q+1}+C_{\delta_1}|g_n|^\eta|w|+C_{\delta_1}|w|^{\eta+1}\right).$$

Pela desigualdade triangular e (1.5), temos que

$$\begin{aligned}|F(g_n+w)-F(g_n)-F(w)| &\leq |F(g_n+w)-F(g_n)|+|F(w)|\\ &\leq \left(\delta_1|g_n|^q|w|+\delta_1|w|^{q+1}+C_{\delta_1}|g_n|^\eta|w|+C_{\delta_1}|w|^{\eta+1}\right)\\ &\quad+\frac{\delta}{q+1}|w|^{q+1}+\frac{C_\delta}{\eta+1}|w|^{\eta+1}.\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon>0$, usando a desigualdade de Young na expressão acima, segue que

$$\begin{aligned}|F(g_n+w)-F(g_n)-F(w)| &\leq \varepsilon|g_n|^{q+1}+C_\varepsilon|w|^{q+1}+\delta_1|w|^{q+1}+\varepsilon|g_n|^{\eta+1}+C_\varepsilon|w|^{\eta+1}\\ &\quad+C_{\delta_1}|w|^{\eta+1}+\frac{\delta}{q+1}|w|^{q+1}+\frac{C_\delta}{\eta+1}|w|^{\eta+1}\\ &= \varepsilon|g_n|^{q+1}+\left(C_\varepsilon+\delta_1+\frac{\delta}{q+1}\right)|w|^{q+1}+\varepsilon|g_n|^{\eta+1}\\ &\quad+\left(C_\varepsilon+C_{\delta_1}+\frac{C_\delta}{\eta+1}\right)|w|^{\eta+1}.\end{aligned}$$

Considere a função $G_{\varepsilon,n}$ dada por

$$G_{\varepsilon,n}(x)=\max\left\{|F(g_n+w)-F(g_n)-F(w)|-\varepsilon|g_n|^{\eta+1}(x)-\varepsilon|g_n|^{q+1}(x),0\right\}$$

que satisfaz

$$G_{\varepsilon,n}(x) \to 0, \ \text{ q.t.p em } \ \Omega.$$

Da definição de $G_{\varepsilon,n}(x)$ temos que

$$\begin{aligned} 0 \leq G_{\varepsilon,n}(x) \ &\leq \ \varepsilon|g_n|^{q+1} + \left(C_\varepsilon + \delta_1 + \frac{\delta}{q+1}\right)|w|^{q+1} + \varepsilon|g_n|^{\eta+1} \\ &\quad + \left(C_\varepsilon + C_{\delta_1} + \frac{C_\delta}{\eta+1}\right)|w|^{\eta+1} - \varepsilon|g_n|^{\eta+1} + \varepsilon|g_n|^{q+1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$0 \leq G_{\varepsilon,n}(x) \leq C_3|w|^{q+1} + C_4|w|^{\eta+1} \in L^1(\Omega).$$

já que $w \in L^{q+1}(\Omega) \cap L^{\eta+1}(\Omega)$. Portanto, pelo Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_\Omega G_{\varepsilon,n}(x)dx \to 0.$$

Mais uma vez, pela definição de $G_{\varepsilon,n}$ segue que

$$|F(g_n+w) - F(g_n) - F(w)| \leq \varepsilon|g_n|^{q+1} + \varepsilon|g_n|^{\eta+1} + C_5|G_{\varepsilon,n}|.$$

Lembrando que $|g_n|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C$ temos

$$\int_\Omega |F(g_n+w) - F(g_n) - F(w)| \leq C_5 \int_\Omega |G_{\varepsilon,n}| + C\varepsilon.$$

Assim, obtemos da seguinte desigualdade

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |F(g_n+w) - F(g_n) - F(w)| \leq C\varepsilon.$$

Para $\varepsilon \to 0$ temos que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |F(g_n+w) - F(g_n) - F(w)| \leq 0,$$

que implica em

$$\int_\Omega |F(g_n+w) - F(g_n) - F(w)| = o_n(1).$$

Provaremos agora o item (ii).

Pelo Teorema do Valor Médio existe $0<\xi<1$, tal que

$$\begin{aligned} |f(g_n+w)-f(g_n)| &= |f'(g_n+\xi w)w| \\ &= C(p)\left||g_n+\xi w|^{p-1}w\right| \\ &\leq C(p)[|g_n|+\xi|w|]^{p-1}|w| \\ &\leq C[|g_n|+|w|]^{p-1}|w|. \end{aligned}$$

Assim, fixados $R>0$ e $\varphi\in H^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos pela desigualdade de Hölder, pela imersão de Sobolev e pela limitação de (g_n), que

$$\begin{aligned} \left|\int_{|x|>R}|f(g_n+w)-f(g_n)|\varphi dx\right| &\leq C\int_{|x|>R}[|g_n|+|w|]^{p-1}|w||\varphi|dx \\ &\leq C\left[\|g_n\|_{L^{p+1}}+\|w\|_{L^{p+1}}\right]^{p-1}\|\varphi\|_{L^{p+1}}\left[\int_{|x|>R}|w|^{p+1}dx\right]^{\frac{1}{p+1}} \\ &\leq 2^{p-1}C\left[\|g_n\|^{p-1}_{L^{p+1}}+\|w\|^{p-1}_{L^{p+1}}\right]\|\varphi\|_{L^{p+1}}\left[\int_{|x|>R}|w|^{p+1}dx\right]^{\frac{1}{p+1}} \\ &\leq C\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\left[\int_{|x|>R}|w|^{p+1}dx\right]^{\frac{1}{p+1}}. \end{aligned}$$

Novamente pela desigualdade de Hölder e pela imersão de Sobolev, temos que

$$\begin{aligned} \left|\int_{|x|>R}f(w)\varphi dx\right| &\leq C(p)\int_{|x|>R}|w|^p|\varphi|dx \\ &\leq C(p)\left[\int_{|x|>R}||w|^p|^{\frac{p+1}{p}}dx\right]^{\frac{p}{p+1}}\|\varphi\|_{L^{p+1}} \\ &\leq C\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\left[\int_{|x|>R}|w|^{p+1}dx\right]^{\frac{p}{p+1}}. \end{aligned}$$

Como para cada $\varepsilon>0$ existe $R>0$ tal que

$$\int_{|x|>R}|w|^{p+1}dx<\varepsilon,$$

então, para todo $\varphi\in H^1(\mathbb{R}^N)$, usando as desigualdades acima, obtemos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{|x|>R}(f(g_n+w)-f(g_n)-f(w))\,\varphi dx\right| &\leq \int_{|x|>R}|f(g_n+w)-f(g_n)||\varphi|dx \\
&\quad +\int_{|x|>R}|f(w)||\varphi|dx \\
&\leq C\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\left[\int_{|x|>R}|w|^{p+1}dx\right]^{\frac{1}{p+1}} \\
&\quad +C\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\left[\int_{|x|>R}|w|^{p+1}dx\right]^{\frac{p}{p+1}} \\
&\leq C\varepsilon\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Afirmamos que

$$f(g_n+w)-f(g_n)\to f(w), \;\text{ em }\; L^s(B_R(0))=L^s(B), \tag{1.9}$$

onde $s:=\dfrac{p+1}{p}$.
Admitindo a nossa afirmação acima, obtemos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{|x|<R}(f(g_n+w)-f(g_n)-f(w))\,\varphi dx\right| &\leq \|\varphi\|_{L^{p+1}}\|f(g_n+w)-f(g_n)-f(w)\|_{L^s(B)} \\
&\leq C\varepsilon\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Resta-nos verificar (1.9). De fato, temos que $g_n+w\rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, assim, $g_n+w\to w$ em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$, para $1\leq q<2^*$. Logo,

$$g_n\to 0, \;\text{ em }\; L^q(B_R(0)),$$

$$(g_n+w)(x)-g_n(x)\to w(x), \;\text{ q.t.p }\; x\in B_R(0).$$

Daí, segue que

$$(g_n+w)(x)-g_n(x)\to w(x), \;\text{ q.t.p }\; x\in B_R(0). \tag{1.10}$$

Também,

$$|(g_n+w)(x)|,|w(x)|\leq g(x), \;\; g\in L^q_{loc}(\mathbb{R}^N),$$

e

$$|g_n(x)|\leq h(x), \;\; h\in L^q_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
|f(g_n+w)-f(g_n)-f(w)|^{\frac{p+1}{p}} &\leq C(p)\left(|g_n+w|^p+|g_n|^p+|w|^p\right)^{\frac{p+1}{p}} \\
&\leq 2^{\frac{p+1}{p}}C\left(|g_n+w|^{p+1}+|g_n|^{p+1}+|w|^{p+1}\right) \\
&\leq Cg(x)^{p+1}+Ch(x)^{p+1}.
\end{aligned}
$$

Se $1<p<2^*-1$ então $g,h\in L^{p+1}(B_R(0))$, daí, $g^{p+1},h^{p+1}\in L^1(B_R(0))$. Com isso, e usando (1.10), podemos usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtendo que

$$f(g_n+w)-f(g_n)\to f(w), \text{ em } L^s(B),$$

onde $s:=\dfrac{p+1}{p}$. O que conclui a prova o lema. □

Para provar que o funcional I satisfaz alguma condição de compacidade precisaremos da seguinte versão de um resultado devido a Struwe [36] (ver também [5]), referido como Lema de Concentração e Compacidade de Lions. Esse lema é crucial para demonstrar a convergência forte de uma sequência Palais-Smale.

Lema 1.4. (Splitting Lema) Seja $(u_n)\subset E$, tal que

$$I(u_n)\to c,\ \ I'(u_n)\to 0$$

e $u_n\rightharpoonup u_0$ fracamente em E. Então $I'(u_0)=0$ e temos

a) $u_n\to u_0$ fortemente em E, ou

b) existe $k\in\mathbb{N},(y_n^j)\in\mathbb{R}^N$ com $|y_n^j|\to\infty, j=1,\dots,\ k$, e soluções não triviais $u^1,\dots,u^k$ do problema (P_∞), tal que

$$I(u_n)\to I(u_0)+\sum_{j=1}^{k}I_\infty(u^j) \tag{1.11}$$

e

$$\left\|u_n-u_0-\sum_{j=1}^{k}u^j(\cdot-y_n^j)\right\|_E\to 0.$$

Demonstração. Em primeiro lugar, mostraremos que $I'(u_0)=0$. Da imersão compacta de E em $L^p_{loc}, 1\leq p<2^*$, como (u_n) é uma sequência limitada, existem uma subsequência de (u_n), que ainda denotada por (u_n) e $u_0\in E$ tais que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_0, \text{ em } E \\ u_n \to u_0, \text{ em } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N), \text{ para } 1 \leq p < 2^* \\ u_n(x) \to u_0(x), \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N \\ \nabla u_n(x) \to \nabla u_0(x), \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em E, fixamos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e consideramos $K = supp\varphi$, assim

$$f(u_n(x))\varphi(x) \to f(u_0(x))\varphi(x), \quad q.t.p. \ x \in K$$

e, por (1.2), vale que

$$|f(u_n(x))\varphi(x)| \leq \delta|u_n(x)|^q + C_\delta|u_n(x)|^\eta \leq h(x) \in L^1(K), \quad q.t.p. \ x \in K.$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n(x))\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0(x))\varphi(x)dx, \ \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{1.12}$$

Por outro lado, da convergência fraca de $u_n \rightharpoonup u_0$ em E, temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u_n\nabla\varphi + V(x)u_n\varphi)dx = \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u_0\nabla\varphi + V(x)u_0\varphi)dx. \tag{1.13}$$

Assim, de (1.12) e (1.13), segue que

$$\lim_{n\to\infty} I'(u_n)\varphi = I'(u_0)\varphi, \ \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Mas, por hipótese, $\lim_{n\to\infty} I'(u_n)\varphi = 0$. Logo,

$$I'(u_0)\varphi = 0, \ \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{1.14}$$

Passo 1. Suponha agora que a sequência (u_n) não converge forte para u_0.Definindo $u_n^1 := u_n - u_0$. Assim, temos que $u_n^1 \rightharpoonup 0$ em E. Mostraremos que

(a.1) $\|u_n^1\|_E^2 = \|u_n\|_E^2 - \|u_0\|_E^2 + o_n(1)$,

(b.1) $I_\infty(u_n^1) \to c - I(u_0)$,

(c.1) $I'_\infty(u_n^1) \to 0$.

De fato,

(a.1) Como $u_n \rightharpoonup u_0$ em E, então

$$\langle u_n, u_0 \rangle \to \langle u_0, u_0 \rangle = \|u_0\|_E^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|u_n^1\|_E^2 &= \|u_n - u_0\|_E^2 = \langle u_n - u_0, u_n - u_0 \rangle \\
&= \|u_n\|_E^2 - 2\langle u_n, u_0 \rangle + \|u_0\|_E^2 \\
&= \|u_n\|_E^2 - 2\|u_0\|_E^2 + \|u_0\|_E^2 + o_n(1) \\
&= \|u_n\|_E^2 - \|u_0\|_E^2 + o_n(1).
\end{aligned}$$

(b.1) Notamos primeiro que, desde que $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $u_n \to u_0$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty^+ u_n u_0 dx = \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty^+ u_0^2 dx + o_n(1).$$

Pela igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty^+ (u_n - u_0)^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty^+ u_n^2 - 2V_\infty^+ u_n u_0 + V_\infty^+ u_0^2) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty^+ u_n^2 - V_\infty^+ u_0^2) dx + o_n(1),
\end{aligned}$$

assim, notamos também que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty^+ (u_n - u_0)^2 - V(x)(u_n^2 - u_0^2)) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty^+ u_n^2 - V_\infty^+ u_0^2 - V(x) u_n^2 + V(x) u_0^2) dx + o_n(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty^+ - V(x))(u_n^2 - u_0^2) dx + o_n(1). \qquad (1.15)
\end{aligned}$$

Portanto, desde que $\lim\limits_{|x| \to \infty} V(x) = V_\infty^+$, para cada $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$, tal que

$$|V_\infty^+ - V(x)| < \varepsilon, \text{ em } \mathbb{R}^N \backslash B_R(0).$$

Seja $B_R := B_R(0)$, podemos usar a limitação de (u_n) e a desigualdade de Hölder, para obter

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N}(V_\infty^+ - V)(u_n^2-u_0^2)dx\right| &= \left|\int_{B_R}(V_\infty^+ - V)(u_n^2-u_0^2)dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R}(V_\infty^+ - V)(u_n^2-u_0^2)dx\right| \\
&\leq \int_{B_R}|V_\infty^+ - V||u_n^2-u_0^2|dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R}|V_\infty^+ - V||u_n^2-u_0^2|dx \\
&\leq \int_{B_R}|V_\infty^+ - V||u_n^2-u_0^2|dx + \varepsilon\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R}|u_n^2-u_0^2|dx \\
&\leq C_1\|u_n-u_0\|_{L^2(B_R)} + C_2\varepsilon = o_n(1). \qquad (1.16)
\end{aligned}
$$

Além disso, temos que

$$
\begin{aligned}
I_\infty(u_n^1) - I(u_n) + I(u_0) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n^1|^2 + V_\infty^+(u_n^1)^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N}F(u_n^1)dx \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n|^2 + V^+(x)u_n^2)dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V^-(x)u_n^2dx + \int_{\mathbb{R}^N}F(u_n)dx \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_0|^2 + V^+(x)u_0^2)dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V^-(x)u_0^2dx - \int_{\mathbb{R}^N}F(u_0)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla(u_n-u_0)|^2 - |\nabla u_n|^2 + |\nabla u_0|^2)dx \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(V_\infty^+(u_n-u_0)^2 - V(x)(u_n^2-u_0^2))dx \\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^N}(F(u_n-u_0) - F(u_n) + F(u_0))dx.
\end{aligned}
$$

Finalmente, como $u_n \rightharpoonup u_0$ em E, pelo Lema de Brezis-Lieb ([38], Lema 1.32),

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla(u_n-u_0)|^2 - |\nabla u_n|^2 + |\nabla u_0|^2)dx = o_n(1)$$

portanto, segue da convergência fraca, de (1.15) e o Lema 1.3(i) que

$$I_\infty(u_n^1) - I(u_n) + I(u_0) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(V_\infty^+ - V(x))(u_n^2-u_0^2)dx + o_n(1). \qquad (1.17)$$

Da equação (1.17) e (1.16) temos que $I_\infty(u_n^1) - I(u_n) + I(u_0) = o_n(1)$. Assim,

$$I_\infty(u_n^1) = I(u_n) - I(u_0) + o_n(1)$$

passando o limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$I_\infty(u_n^1) \to c - I(u_0)$$

como queríamos.

(c.1) Agora mostraremos que

$$I'_\infty(u_n^1) \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{1.18}$$

De fato, usando que $u_n^1 := u_n - u_0$, o Lema 1.4(a) e o Lema 1.3 (ii), temos que para toda função $h \in E$,

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= \langle I'_\infty(u_n), h\rangle \\
&= \langle I'_\infty(u_0 + u_n^1), h\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u_0 \nabla h + V_\infty^+ u_0 h + \nabla u_n^1 \nabla h + V_\infty^+ u_n^1 h\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0 + u_n^1) h dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u_0 \nabla h + V_\infty^+ u_0 h\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0) h dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u_n^1 \nabla h + V_\infty^+ u_n^1 h\right) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^1) h dx + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0) h dx + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^1) h dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0 + u_n^1) h dx \\
&= \langle I'_\infty(u_0), h\rangle + \langle I'_\infty(u_n^1), h\rangle + \int_{\mathbb{R}^N} \left(f(u_0) + f(u_n^1) - f(u_0 + u_n^1)\right) h dx \\
&= \langle I'_\infty(u_0), h\rangle + \langle I'_\infty(u_n^1), h\rangle + \int_{\mathbb{R}^N} \left(f(u_0) + f(u_n - u_0) - f(u_n)\right) h dx \\
&= \langle I'_\infty(u_0), h\rangle + \langle I'_\infty(u_n^1), h\rangle + o_n(1).
\end{aligned}$$

Agora usando o fato que (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ de I_∞ e (1.14), obtemos

$$\langle I'_\infty(u_n^1), h\rangle = \langle I'_\infty(u_n), h\rangle - \langle I'_\infty(u_0), h\rangle = o_n(1).$$

Portanto, obtemos que (u_n^1) é uma sequência $(PS)_c$ de I_∞. Portanto, $I'_\infty(u_n^1) \to 0$.

Como estamos supondo que $u_n^1 \rightharpoonup 0$ em E, vamos definir

$$\delta := \limsup_{n\to\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |u_n^1|^2 dx.$$

Vanishing. Se $\delta = 0$, segue do Lema de Lions (A.2, Apêndice A) que

$$u_n^1 \to 0, \text{ em } L^t(\mathbb{R}^N), \text{ para } 2 < t < 2^*.$$

Desde que $I'_\infty(u_n^1) \to 0$, e como (u_n^1) é uma sequência limitada, então $I'_\infty(u_n^1)u_n^1 \to 0$ quando $n \to \infty$, isto é,

$$I'_\infty(u_n^1)u_n^1 = \|u_n^1\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^1) u_n^1 dx \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Segue que

$$\|u_n^1\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^1)u_n^1 dx + o_n(1) = C\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^1|^{\eta+1}dx,$$

como $2 < \eta + 1 < 2^*$ e fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima temos que $\|u_n^1\|_E^2 \to 0$, o que implica que $u_n^1 \to 0$ em E, o que é uma contradição.

Non-vanishing. Supondo agora que $\delta > 0$, então existe uma sequência $(y_n^1) \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{B_1(y_n^1)} |u_n^1|^2 dx > \frac{\delta}{2}.$$

Definimos uma nova sequência $(v_n^1) \subset E$ por $v_n^1 := u_n^1(\cdot + y_n^1)$. Como (u_n^1) é limitada então (v_n^1) também o é, passando a uma subsequência, existe $u_1 \in E$ tal que

$$\begin{cases} v_n^1 \rightharpoonup u^1, \ \text{ em } \ E \\ v_n^1(x) \to u^1(x), \ \text{ q.t.p. em } \ \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Fazendo uma mudança de variável temos

$$\int_{B_1(y_n^1)} |u_n^1|^2 dx = \int_{B_1(0)} |u_n^1(x+y_n^1)|^2 dx = \int_{B_1(0)} |v_n^1|^2 dx > \frac{\delta}{2},$$

além disso, a convergência fraca e a imersão de Sobolev implicam que $v_n^1 \to u^1$ em $L^2(B_1(0))$ e, portanto,

$$\int_{B_1(0)} |u_n^1|^2 dx \geq \frac{\delta}{2}$$

de onde segue que $u^1 \not\equiv 0$. Como $u_n^1 \rightharpoonup 0$ em E, segue que (y_n^1) é uma sequência ilimitada. Portanto, a menos de subsequência, podemos assumir que $|y_n^1| \to \infty$. Agora vamos mostrar que $I'_\infty(u^1) = 0$. De fato, tome $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Sendo $|y_n^1| \to \infty$, então podemos encontrar n_0 tal que $\phi_n := \phi(x - y_n^1)$ em $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ para todo $n \geq n_0$, além disso, $\|\phi_n\|_E = \|\phi\|_E$. Como consequência de 1.18, temos que

$$\begin{aligned} |\langle I'_\infty(u^1), \phi\rangle| &= |\langle I'_\infty(v_n^1), \phi\rangle| + o_n(1) \\ &= |\langle I'_\infty(v_n^1(x+y_n^1)), \phi(x)\rangle| + o_n(1) \\ &= |\langle I'_\infty(v_n^1(x), \phi(x-y_n^1))\rangle| + o_n(1) \\ &= |\langle I'_\infty(v_n^1, \phi_n\rangle| + o_n(1) = o_n(1). \end{aligned}$$

Passo 2: Agora definimos $u_n^2 := u_n^1 - u^1(\cdot - y_n^1)$. Como feito para (u_n^1), podemos verificar isso (a.2) $\|u_n^2\|_E^2 = \|u_n\|_E^2 - \|u_0\|_E^2 - \|u^1\|_E^2 + o_n(1)$,

(b.2) $I_\infty(u_n^2) \to c - I(u_0) - I_\infty(u^1)$,

(c.2) $I'_\infty(u_n^2) \to 0$.

De fato, para o item $(a.2)$, temos que

$$\begin{aligned}\|u_n^2\|_E^2 &= \|u_n^1 - u^1(\cdot - y_n^1)\|_E^2 = \langle u_n^1 - u^1(\cdot - y_n^1), u_n^1 - u^1(\cdot - y_n^1)\rangle \\ &= \|u_n^1\|_E^2 - 2\langle u_n^1, u^1(\cdot - y_n^1)\rangle + \|u^1(\cdot - y_n^1)\|_E^2 \\ &= \|u_n\|_E^2 - \|u_0\|_E^2 - \|u^1\|_E^2 + o_n(1).\end{aligned}$$

Agora para $(b.2)$, temos que

$$\begin{aligned}I_\infty(u_n^2) - I_\infty(u_n^1) + I_\infty(u^1) &= \frac{1}{2}\|u_n^2\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n^2)dx \\ &- \frac{1}{2}\|u_n^1\|_E^2 + \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n^1)dx + \frac{1}{2}\|u^1\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u^1)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (F(u_n^1) - F(u^1) - F(u_n^2))dx\end{aligned}$$

e, utilizando a mesma ideia do Lema 1.3(i), podemos mostrar que que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(F(u_n^1) - F(u^1) - F(u_n^2))|dx \to 0,$$

e portanto o resultado segue.
Para a demonstração de $(c.2)$, utilizaremos os mesmos argumentos da verificação de que $I'_\infty(u_n^1) \to 0$. Se $\|u_n^2\| \to 0$, concluímos a demonstração. Caso contrário $(u_n^2) \rightharpoonup 0$ e não converge forte, podemos repetir o mesmo argumento anterior.

Agora procedemos por iteração. Observe que se u é um ponto crítico não trivial de I_∞ e $\overline{u}$ é uma solução de energia mínima do problema (P_∞), então temos por (f_2) que

$$I_\infty(u) \geq I_\infty(\overline{u}) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}f(\overline{u})\overline{u} - F(\overline{u})\right) dx = \beta > 0,$$

e portanto segue de $(b.2)$ acima que a iteração deve terminar em algum índice $k \in \mathbb{N}$. Isto conclui a prova. □

Apresentamos a seguir o resultado de compacidade que será utilizado na prova de nosso teorema principal.

Corolário 1.1. O funcional I satisfaz $(PS)_c$ para qualquer $0 < c < c_\infty$.

Demonstração. Seja $(u_n) \subset E$ tal que

$$I(u_n) \to c < c_\infty \ \text{ e } \ I'(u_n) \to 0.$$

Pelo Lema 1.2 temos que (u_n) é limitada em E e portanto, indo para uma subsequência se necessário, $u_n \rightharpoonup u_0$ em E. Do Lema 1.4 temos $I'(u_0) = 0$. Assim, concluímos a partir de (f_2) que

$$\begin{aligned} I(u_0) &= I(u_0) - \frac{1}{2} I'(u_0)u_0 \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} f(u_0)u_0 - F(u_0) \right) dx \geq 0. \end{aligned}$$

Se $u_n \not\to u_0$ em E, podemos usar o Lema 1.4 novamente para obter $k \in \mathbb{N}$ e soluções não triviais $u^1, \ldots, u^k$ de (P_∞) satisfazendo

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = c = I(u_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(u^j) \geq kc_\infty \geq c_\infty,$$

o que contradiz a hipótese. Por isso $u_n \to u_0$ fortemente em E e o corolário está provado. □

1.2 Solução positiva de energia mínima

Dedicamos esta seção à prova do Teorema 1.1, onde mostraremos a existência de uma solução positiva de energia mínima para o problema (P).

Como afirmado anteriormente, estamos procurando pontos críticos do funcional I. Assim, se $u \in E$ é um ponto crítico de I com $u \neq 0$, então $I'(u) = 0$. Dessa forma, necessariamente, u pertence ao conjunto

$$\mathcal{N} := \{u \in E \backslash \{0\} : I'(u)u = 0\},$$

onde $\mathcal{N}$ é denominado variedade de Nehari. O intuito é minimizar o funcional I sobre esse conjunto, em outras palavras, obter $u \in \mathcal{N}$ tal que

$$c_1 := \inf_{u\in\mathcal{N}} I(u).$$

Primeiramente, usando a condição (f_2), vamos mostrar que existe $C > 0$, tal que

$$F(s) \geq C|s|^\theta, \ \text{ para todo } \ s \in \mathbb{R}. \tag{1.19}$$

De fato, por (f_2)

$$0 < \theta F(s) \leq sf(s), \ \text{ para todo } \ s \neq 0 \ \text{ e } \ \theta > 2.$$

Caso 1. Considerando $s > R > 0$, obtemos

$$\int_R^s \frac{\theta}{t} dt \leq \int_R^s \frac{f(t)}{F(t)} dt, \ \ s > R > 0,$$

calculando os valores das integrais

$$\theta \ln t \Big|_R^s \leq \ln F(t) \Big|_R^s \Leftrightarrow \theta \left(\ln(s) - \ln(R)\right) \leq \left(\ln F(s) - \ln F(R)\right).$$

Das propriedades da função logaritmo, temos que

$$\theta \ln\left(\frac{s}{R}\right) \leq \ln\left(\frac{F(s)}{F(R)}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{s}{R}\right)^{\theta} \leq \ln\left(\frac{F(s)}{F(R)}\right)$$

assim, aplicando a função exponencial de ambos os lados da desigualdade

$$F(s) \geq s^{\theta} \frac{F(R)}{R^{\theta}} = Cs^{\theta}, \ \text{ em que } \ s > R > 0.$$

Caso 2. Caso $s < R < 0$. De modo análogo ao caso anterior,

$$\int_s^R \frac{\theta}{t} dt \geq \int_s^R \frac{f(t)}{F(t)} dt.$$

Sabendo que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, então

$$-\int_s^R \frac{\theta}{t} dt \geq -\int_s^R \frac{f(t)}{F(t)} dt \Leftrightarrow \int_R^s \frac{\theta}{t} \leq \int_R^s \frac{f(t)}{F(t)} dt$$

concluindo que

$$F(s) \geq Cs^{\theta}, \ \text{ em que } \ s < R < 0.$$

Portanto, mostramos que

$$F(s) \geq C|s|^{\theta}, \quad \text{para todo } \ s \in \mathbb{R}.$$

A seguir apresentamos algumas propriedades de c_1 e $\mathcal{N}$. O lema que demonstraremos abaixo diz que toda $u \in E \backslash \{0\}$ pode ser projetada na variedade de Nehari de maneira única.

Lema 1.5. Para qualquer $u \in E\backslash\{0\}$, existe um único $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}$ e o máximo da função $t \mapsto I(tu)$ para $t \geq 0$ é alcançado em $t = t_u$.

Demonstração. Dividiremos a prova deste lema em duas partes, apresentando primeiramente a existência e, em seguida, a unicidade. Lembre-se de que

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|_E^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx.$$

Existência: dado $u \in E\backslash\{0\}$ fixado, considere a função

$$\begin{array}{rcl} g:[0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & g(t) = I(tu). \end{array}$$

Por (1.19) e $\theta \in (2,2^*)$, temos que

$$g(t) \leq \frac{t^2}{2}\|u\|_E^2 - \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2dx - Ct^\theta \int_{\mathbb{R}^N} |u|^\theta dx \tag{1.20}$$

para $t > 0$. Concluímos que $g(t) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Por outro lado de (1.5), temos que

$$\begin{aligned} g(t) & \geq \frac{t^2}{2}\|u\|_E^2 - \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2dx - \varepsilon t^{q+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q+1}dx - C_\varepsilon t^{\eta+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\eta+1}dx \\ & \geq \frac{t^2}{2}\left(1 - \frac{\|V^-\|_{N/2}}{S}\right)\|u\|_E^2 - \varepsilon t^{q+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q+1}dx - C_\varepsilon t^{\eta+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\eta+1}dx \end{aligned}$$

desde que $2 < q+1 < \eta+1$, para $t > 0$ suficientemente pequeno, segue-se que $g(t) > 0$. Sendo g contínua, então g atinge um máximo, isto é, existe $t_u > 0$ tal que

$$I(t_u u) = g(t_u) = \max_{t \geq 0} I(tu).$$

Consequentemente, $g'(t_u) = 0$, implicando que $t_u u \in \mathcal{N}$.
Unicidade: mostraremos que t_u é único. Como $t_u u \in \mathcal{N}$, então $I'(t_u u)t_u u = 0$. Isto é,

$$(t_u)^2 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(t_u u)t_u u dx = 0$$

o que equivale a

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^2| + V(x)u^2)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(t_u u)u^2}{t_u u}dx.$$

Dessa forma,

$$\|u\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V^+(x)u^2)dx = \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(t_u u)u^2}{t_u u} dx. \tag{1.21}$$

Suponha agora que exista $s_u > 0$ tal que $s_u u \in \mathcal{N}$, ou seja, $I'(s_u u)s_u u = 0$. Então, de maneira análoga obtemos

$$\|u\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V^+(x)u^2)dx = \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(s_u u)u^2}{s_u u} dx. \tag{1.22}$$

Subtraindo (1.21) e (1.22), chegamos em

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(t_u u)u^2}{t_u u} - \frac{f(s_u u)u^2}{s_u u} \right) dx = 0.$$

Supondo, sem perda de generalidade que $t_u > s_u$, e como pela hipótese (f_3), $f(t)/t$ é crescente em $(0, +\infty)$, então concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(t_u u)u^2}{t_u u} - \frac{f(s_u u)u^2}{s_u u} \right) dx > 0,$$

o que é uma contradição. Portanto, segue que $t_u = s_u$. $\square$

O lema abaixo fornece condições sob as quais I satisfaz as hipóteses geométricas do Teorema do Passo da Montanha, mais especificamente,

Lema 1.6. Assuma que as condições $(f_1) - (f_2)$ são válidas. Então, existem $\rho, r > 0$ tais que

(i) $I(u) \geq \rho$, para todo $\|u\| = r$,

(ii) Existe $e \in E$ tal que $I(e) < 0$, se $\|e\| > r$.

Demonstração. (i) Note que, de (f_1) e (1.6), obtemos que

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_E^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|_E^2 - \frac{1}{2}\|V^-\|_{N/2}\|u\|_{2^*}^2 - C_1\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q+1}dx - C_2\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\eta+1}dx. \end{aligned}$$

Da imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^N)$, com $2 \leq t \leq 2^*$, temos que

$$
\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|_E^2 - \frac{1}{2S}\|V^-\|_{N/2}\|u\|_E^2 - \widetilde{C}_1\|u\|_E^{q+1} - \widetilde{C}_2\|u\|_E^{\eta+1} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\|V^-\|_{N/2}}{S}\right)\|u\|_E^2 - \widetilde{C}_1\|u\|_E^{q+1} - \widetilde{C}_2\|u\|_E^{\eta+1}.
\end{aligned}
$$

Como $\left(1 - \dfrac{\|V^-\|_{N/2}}{S}\right) > 0$ pela hipótese (V_2), tomando $\|u\|_E = r$ suficientemente pequeno existe $\rho > 0$ tal que

$$I(u) \geq \rho > 0, \ \text{ com } \ \|u\|_E = r.$$

(ii) De (1.19) e considerando $t > 0$, obtemos

$$I(tu) \leq \frac{t^2}{2}\|u\|_E^2 - \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2dx - Ct^\theta \int_{\mathbb{R}^N} |u|^\theta dx.$$

Portanto, desde que $\theta > 2$, concluímos que $I(tu) \to -\infty$, quando $t \to +\infty$. Assim, existe $t_0 > 0$ tal que $I(t_0u) < 0$. Fazendo $e = t_0u$ temos que $I(e) < 0$ com $\|e\|_E > r$. □

Dessa forma, usando (f_3) e os mesmos argumentos apresentados na prova de [38, Teorema 4.2], podemos provar que c_1 é positiva e que coincide com o nível do Passo da Montanha de I e tem a seguinte caracterização

$$c_1 = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) = \inf_{u\in E\setminus\{0\}}\max_{t\geq 0} I(tu) > 0, \tag{1.23}$$

onde $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1],E) : \gamma(0) = 0, I(\gamma(1)) < 0\}$.

A seguir, provaremos a relação entre c_1 e c_∞.

Proposição 1.2. Suponha que V satisfaz (V_3). Então

$$0 < c_1 < c_\infty.$$

Demonstração. Seja $\overline{u} \in \mathcal{N}_\infty$ dado pela Proposição 1.1, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\overline{u})\overline{u}dx = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla\overline{u}|^2 + V_\infty^+\overline{u}^2)dx. \tag{1.24}$$

Por outro lado, considere $t_{\overline{u}} > 0$ tal que $t_{\overline{u}}\overline{u} \in \mathcal{N}$. Afirmamos que $t_{\overline{u}} < 1$. De fato, usando a condição (V_3) e substituindo na igualdade (1.24), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} f(t_{\overline{u}}\overline{u})t_{\overline{u}}\overline{u}dx &= t_{\overline{u}}^2\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla\overline{u}|^2+V(x)\overline{u}^2)dx \\ &< t_{\overline{u}}^2\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla\overline{u}|^2+V_\infty^+\overline{u}^2)dx = t_{\overline{u}}^2\int_{\mathbb{R}^N} f(\overline{u})\overline{u}dx,\end{aligned} \tag{1.25}$$

implicando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(t_{\overline{u}}\overline{u})t_{\overline{u}}\overline{u}dx < t_{\overline{u}}^2\int_{\mathbb{R}^N} f(\overline{u})\overline{u}dx.$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima nas integrais por $\dfrac{\overline{u}^2}{\overline{u}^2}$ e, em seguida, divindo por $t_{\overline{u}^2}$ chegamos na seguinte equivalência

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(t_{\overline{u}}\overline{u})t_{\overline{u}}\overline{u}\cdot\overline{u}^2}{t_{\overline{u}}^2\overline{u}^2}dx - t_{\overline{u}}^2\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(\overline{u})\overline{u}\cdot\overline{u}^2}{t_{\overline{u}}^2\overline{u}^2}dx<0 \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(t_{\overline{u}}\overline{u})}{t_{\overline{u}}\overline{u}}\overline{u}^2dx - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(\overline{u})}{\overline{u}}\overline{u}^2dx<0$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{f(t_{\overline{u}}\overline{u})}{t_{\overline{u}}\overline{u}}-\frac{f(\overline{u})}{\overline{u}}\right)\overline{u}^2dx<0.$$

Esta desigualdade e (f_3) implicam que $t_{\overline{u}}<1$.

Segue de (1.23), (1.25) e do Lema 1.5 que

$$\begin{aligned}c_1\le\max_{t\ge0}I(t\overline{u})=I(t_{\overline{u}}\overline{u}) &= t_{\overline{u}}^2\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{2}\left(|\nabla\overline{u}|^2+V(x)\overline{u}^2\right)dx-\int_{\mathbb{R}^N}F(t_{\overline{u}}\overline{u})dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{2}f(t_{\overline{u}}\overline{u})t_{\overline{u}}\overline{u}-F(t_{\overline{u}}\overline{u})\right)dx.\end{aligned}$$

De (f_3), temos que $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$h(t):=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{2}f(t\bar{u})t\bar{u}-F(t\bar{u})\right)dx$$

é estritamente crescente. Portanto, concluímos que

$$c_1\le h(t_{\overline{u}})<h(1)=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{2}f(\overline{u})\overline{u}-F(\overline{u})\right)dx=c_\infty$$

e a proposição está provada. □

Agora estamos prontos para provar nosso primeiro resultado, que garante a existência de solução positiva de energia mínima para o nosso problema.

Demonstração do Teorema 1.1: Uma vez que I satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha, existe uma sequência $(u_n) \subset E$, tal que

$$I(u_n) \to c_1 \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0.$$

Pela Preposição 1.2 e o Corolário 1.1 existe $u \in E$ tal que a sequência (u_n) converge fortemente para a função u. Como $I \in C^1$, então $I(u_n) \to I(u)$. Pela unicidade do limite temos que

$$I(u) = c_1 = \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u).$$

Portanto, $I(u) = c_1 > 0$ e $I'(u) = 0$. Claramente, $u \neq 0$ e podemos concluir que u é uma solução de energia mínima de (P).

Para mostrar que u é não negativa, notamos primeiro que, como estamos interessados em soluções positivas, pela observação 1.1, podemos supor que $f(s) = 0$, para todo $s \leq 0$. Considerando u^- uma função teste, temos que $I'(u)u^- = 0$. Note que

$$I'(u)u^- = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla u^- + V(x)uu^-)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u^- dx.$$

Sabendo que $u = u^+ - u^-$, obtemos

$$\begin{aligned} I'(u)u^- &= \int_{\mathbb{R}^N} \left((-\nabla u^-)\nabla u^- + V(x)(-u^-)u^-\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(-u^-)u^- dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u^-|^2 + V(x)(u^-)^2\right) dx. \end{aligned}$$

Desde que $I'(u)u^- = 0$, então

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u^-|^2 + V(x)(u^-)^2\right) dx = 0.$$

Como $V(x) = V^+(x) - V^-(x)$, podemos reescrever a igualdade acima da seguinte maneira

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u^-|^2 + V^+(x)(u^-)^2\right) dx = -\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)(u^-)^2 dx$$

portanto, pela desigualdade (1.6) obtemos

$$\|u^-\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)(u^-)^2 dx \leq \frac{\|V^-\|_{N/2}}{S} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^-|^2 dx.$$

Consequentemente,

$$\|u^-\|_E^2 \leq \frac{\|V^-\|_{N/2}}{S}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u^-|^2dx + \frac{\|V^-\|_{N/2}}{S}\int_{\mathbb{R}^N}V^+(x)(u^-)^2dx = \frac{\|V^-\|_{N/2}}{S}\|u^-\|_E^2.$$

No entanto, uma vez que $\|V^-\|_{L^{N/2}(\mathbb{R}^N)} < S$, a desigualdade acima não pode ocorrer. Logo,

$$\left(1 - \frac{\|V^-\|_{N/2}}{S}\right)\|u^-\|_E^2 = 0,$$

daí segue que $u^- \equiv 0$. Portanto,

$$u = u^+ \geq 0.$$

A regularidade elíptica e o princípio do máximo forte, onde consideramos $L(u) = -\Delta u + V(x)u \geq 0$, implicam que $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$. De fato, como u não é constante (caso contrário, a constante seria zero, o que não pode ocorrer), então u é estritamente positiva. $\square$

Observação 1.2. Seja $u_1 \in E$ a solução dada pelo Teorema 1.1. Em vista da Proposição 1.2, podemos argumentar como em [21, Teorema 3.1] para concluir que u_1 tem o mesmo decaimento da solução $\bar{u}$ do problema limite, ou seja, para qualquer $0 < \delta < \sqrt{V_\infty^+}$, existe $C = C(\delta) > 0$ tal que

$$u_1(x) \leq Ce^{-\delta|x|}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{1.26}$$

1.3 Solução que muda de sinal

Nesta seção, vamos demonstrar a existência de uma solução nodal para o problema (P). Começamos apresentando o conjunto fechado

$$\mathcal{N}_\pm := \{u \in E : u^+ \not\equiv 0,\ u^- \not\equiv 0,\ I'(u^+)u^+ = 0 = I'(u^-)u^-\}.$$

De fato, considere uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}_\pm$ tal que $u_n \to u$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n^\pm|^2 + V(x)|u_n^\pm|^2)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^\pm)u_n^\pm dx.$$

Como $u_n^\pm \to u^\pm$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u^\pm|^2 + V(x)|u^\pm|^2)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u^\pm)u^\pm dx.$$

Logo, $I'(u^{\pm})u^{\pm} = 0$. Além disso, devemos ter $u^{\pm} \neq 0$, caso contrário, se $u^{\pm} = 0$ teríamos $I(u_n^{\pm}) \to I(u^{\pm}) = 0$, o que é absurdo, uma vez que $I(u_n^{\pm}) \geq c$. Dessa forma, concluímos que $\mathcal{N}_{\pm}$ é um conjunto fechado.

Note que qualquer solução de (P) que pertença a $\mathcal{N}_{\pm}$ muda de sinal e I é limitado inferiormente em $\mathcal{N}_{\pm}$. A prova da limitação inferior segue de forma análoga as contas feitas no Lema 1.2, supondo apenas por contradição que o funcional I não seja limitado inferiormente.

Lema 1.7. Existe $\rho > 0$, tal que

$$\|u^{\pm}\|_E \geq \rho, \quad \text{para todo } \; u \in \mathcal{N}_{\pm}. \tag{1.27}$$

Demonstração. Para toda $u \in \mathcal{N}_{\pm}$ obtemos

$$\|u_n^{\pm}\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^{\pm})u_n^{\pm} dx,$$

e, usando o crescimento da f, temos que

$$\|u_n^{\pm}\|_E^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} (\delta |u_n^{\pm}|^{q+1} + C_\delta |u_n^{\pm}|^{\eta+1}) dx.$$

Por outro lado, como $2 \leq q+1 < \eta+1$ e por (f_1), existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\delta |u|^{q+1} + C_\delta |u|^{\eta+1} \leq \delta\varepsilon |u|^2 + C_\delta |u|^{\eta+1},$$

assim,

$$\|u_n^{\pm}\|_E^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} \delta\varepsilon |u_n^{\pm}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} C_\delta |u_n^{\pm}|^{\eta+1} dx.$$

Pela imersão contínua de $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq t \leq 2^*$, segue que

$$\|u_n^{\pm}\|_E^2 \leq \varepsilon K \|u_n^{\pm}\|_E^2 + C\|u_n^{\pm}\|_E^{\eta+1},$$

o que implica em

$$(1-\varepsilon K)\|u_n^{\pm}\|_E^2 \leq C\|u_n^{\pm}\|_E^{\eta+1},$$

isto é, $\|u_n^{\pm}\|_E^{\eta-1} \geq (1-\varepsilon K)/C$. Portanto, concluímos que $\|u_n^{\pm}\|_E \geq \rho$. □

Considere o seguinte problema de minimização

$$c_2 := \inf_{u \in \mathcal{N}_{\pm}} I(u).$$

O lema a seguir será de fundamental importância para mostrarmos a seguinte relação $0 < c_2 < c_1 + c_\infty$.

Lema 1.8. Seja $F \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ uma função convexa e par, tal que $F(0) = 0$ e $f(s) = F'(s) \geq 0$ para todo $s \in [0, \infty)$. Então, para todo $u, v \geq 0$,

$$|F(u-v) - F(u) - F(v)| \leq 2(f(u)v + f(v)u). \tag{1.28}$$

Demonstração. Vamos considerar dois casos: $v \leq u$ e $u \leq v$. Primeiramente, se $0 < v \leq u$, pela convexidade de F, temos

$$\frac{F(v) - F(0)}{v - 0} \leq \frac{F(u) - F(0)}{u - 0}.$$

Tomando o lim sup e usando que $F(0) = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \limsup_{u \to 0} \frac{F(v)}{v} &\leq \limsup_{u \to 0} \frac{F(u) - F(0)}{u - 0} \\ &= F'(0) = f(0) \leq f(u). \end{aligned}$$

Isto é,

$$F(v) \leq v f(u). \tag{1.29}$$

Por outro lado, como $F \in C^2$, então $f' = F" \geq 0$, o que implica dizer que f é não decrescente. Definindo a função

$$\begin{aligned} g : [0,1] &\to \mathbb{R}^+ \\ t &\mapsto g(t) = F(u - tv) \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} |F(u-v) - F(u)| &= \left| \int_0^1 g'(t)dt \right| \leq \int_0^1 |g'(t)|dt = \int_0^1 |f(u-tv)(-v)|dt \\ &\leq \int_0^1 |f(u-tv)||(-v)|dt. \end{aligned}$$

Como $u - tv \geq 0$, temos que $f(u - tv) \geq 0$, e assim

$$|F(u-v) - F(u)| \leq v \int_0^1 f(u-tv)dt. \tag{1.30}$$

Por outro lado, como $u \geq u - tv$ então $f(u - tv) \leq f(u)$. Logo,

$$\int_0^1 f(u-tv)dt \leq \int_0^1 f(u)dt = f(u). \tag{1.31}$$

Pela desigualdade triangular, (1.29), (1.30) e (1.31) segue que

$$\begin{aligned} |F(u-v)-F(u)-F(v)| &\leq |F(u-v)-F(u)|+|F(v)| \\ &\leq vf(u)+vf(u) = 2vf(u). \end{aligned}$$

Agora, se $0 < u \leq v$, de maneira análoga ao caso anterior, obtemos

$$F(u) \leq uf(v).$$

Repetindo os mesmos argumentos, considerando $v-tu < v$ e f não decrescente segue que

$$|F(v-u)-F(v)| \leq uf(v).$$

Assim,

$$|F(v-u)-F(v)-F(u)| \leq |F(v-u)-F(v)|+|F(u)| \leq uf(v)+uf(v) = 2uf(v).$$

Por hipótese, F é uma função par, então $F(u-v) = F(v-u)$. Consequentemente,

$$|F(u-v)-F(u)-F(v)| \leq 2uf(v).$$

Portanto,

$$|F(u-v)-F(u)-F(v)| \leq 2(f(u)v+f(v)u).$$

□

Em nosso próximo resultado estabelecemos a relação entre c_2 e os demais níveis de energia c_1 e c_∞. Como f não é homogênea, os cálculos são mais elaborados.

Proposição 1.3. Suponha que V satisfaz (V_1) e $(\widehat{V_3})$. Então

$$0 < c_2 < c_1 + c_\infty. \tag{1.32}$$

Demonstração. Seja $\overline{u}$ uma solução de energia mínima do problema (P_∞) dada pela Proposição 1.1 e defina $\overline{u}_n(x) := \overline{u}(x-x_n)$, onde $x_n := (0,\ldots,0,n)$. Agora, considere u_1 uma solução positiva de energia mínima de (P) dado pelo Teorema 1.1. Para qualquer $\alpha,\beta > 0$ e $u_n = \alpha u_1 - \beta\overline{u}$ consideramos as funções

$$
\begin{aligned}
h^{\pm}(\alpha,\beta,n) \quad := \quad & \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\alpha u_1 - \beta \overline{u}_n)^{\pm}|^2 + V(x)|\alpha u_1 - \beta \overline{u}_n)^{\pm}|^2 dx \\
& - \int_{\mathbb{R}^N} f((\alpha u_1 - \beta \overline{u}_n)^{\pm})(\alpha u_1 - \beta \overline{u}_n)^{\pm} dx.
\end{aligned}
$$

Como u_1 é uma solução de energia mínima de (P), então $I'(u_1)u_1 = 0$, ou seja,

$$
\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_1^2| + V(x)u_1^2\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_1)u_1 dx. \tag{1.33}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla(u_1/2)|^2 + V(x)(u_1/2)^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_1/2)(u_1/2) dx \\
& \quad = \frac{1}{2^2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_1|^2 + V(x)u_1^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_1/2)(u_1/2) dx.
\end{aligned}
$$

Substituindo (1.33) na igualdade acima e usando a condição (f_3), temos que

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla(u_1/2)|^2 + V(x)(u_1/2)^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_1/2)(u_1/2) dx \\
& \quad = \frac{1}{2^2} \int_{\mathbb{R}^N} f(u_1)u_1 dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_1/2)(u_1/2) dx \\
& \quad = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(u_1)}{u_1} - \frac{f(u_1/2)}{(u_1/2)}\right)\left(\frac{u_1}{2}\right)^2 dx > 0.
\end{aligned} \tag{1.34}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla(2u_1)|^2 + V(x)(2u_1)^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(2u_1)(2u_1) dx \\
& \quad = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(u_1)}{u_1} - \frac{f(2u_1)}{2u_1}\right)(2u_1)^2 dx < 0.
\end{aligned} \tag{1.35}
$$

Afirmação 1. Para n suficientemente grande existe

$$
\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla(\overline{u}_n/2)|^2 + V(x)(\overline{u}_n/2)^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(\overline{u}_n/2)(\overline{u}_n/2) dx > 0, \tag{1.36}
$$

$$
\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla(2\overline{u}_n)|^2 + V(x)(2\overline{u}_n)^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(2\overline{u}_n)(2\overline{u}_n) dx < 0. \tag{1.37}
$$

Provamos apenas (1.36), uma vez que a outra desigualdade pode ser provada de forma análoga. Primeiro, observe que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla(\overline{u}_n/2)|^2 + V(x)(\overline{u}_n/2)^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(\overline{u}_n/2)(\overline{u}_n/2)dx = \gamma_1 + J_n, \tag{1.38}$$

onde

$$\gamma_1 := \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla(\overline{u}_n/2)|^2 + V_\infty^+(\overline{u}_n/2)^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(\overline{u}_n/2)(\overline{u}_n/2)dx$$

e

$$J_n := \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_\infty^+)\overline{u}_n^2 dx.$$

Segue-se de (f_3) que $\gamma_1 > 0$. Assim, basta verificar que $J_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Dado $\varepsilon > 0$ podemos usar (V_1) para obter $R > 0$ tal que $|V(x) - V_\infty^+| \leq \varepsilon$ para $|x| > R$. Por isso,

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus B_{R(0)}} (V(x) - V_\infty^+)\overline{u}_n^2 dx\right| &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus B_{R(0)}} |\overline{u}_n|^2 dx \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |\overline{u}_n|^2 dx = \varepsilon \|\overline{u}_n\|_2^2 = \varepsilon \|\overline{u}\|_2^2. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Lembramos agora que, como $\overline{u}$ é radialmente simétrica, pelo Lema Radial (veja [35]) existe $C > 0$ tal que

$$|\overline{u}(x)| \leq C|x|^{(1-N)/2}\|\overline{u}\|_{W^{1,2}(\mathbb{R})^N}, \quad \text{q.t.p. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Desde que $|x - x_n| \geq |x_n| - |x| \geq n - R$ em $B_R(0)$, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \left|\int_{B_R(0)} (V(x) - V_\infty^+)\overline{u}_n^2 dx\right| &\leq \|V(x) - V_\infty^+\|_{L^{N/2}(B_R(0))} \left(\int_{B_R(0)} (\overline{u}(x - x_n))^{2^*} dx\right)^{(N-2)/N} \\ &\leq \|V(x) - V_\infty^+\|_{L^{N/2}(B_R(0))} \left(\int_{B_R(0)} C|x - x_n|^{(1-N)/2}\|\overline{u}\|_{W^{1,2}}^{2^*} dx\right)^{(N-2)/N} \\ &\leq C_1 \left(\int_{B_R(0)} |x - x_n|^{-(N-1)(N-2)/2N}\|\overline{u}\|_{W^{1,2}}^{2^*} dx\right)^{(N-2)/N} \\ &\leq C_1 \left(\frac{1}{n - R}\right)^{(N-1)(N-2)/2N} \|\overline{u}\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2. \end{aligned}$$

A estimativa acima e (1.39) implica que $J_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Isso prova (1.36) e estabelece a afirmação.

Desde que $\overline{u}(x) \to 0$ como $|x| \to \infty$, segue de (1.34)-(1.37) que existe $n_0 > 0$, tal que

$$\begin{cases} h^+(1/2, \beta, n) & > 0 \\ h^+(2, \beta, n) & < 0, \end{cases}$$

para $n \geq n_0$ e $\beta \in [1/2,2]$. Agora, para todo $\alpha \in [1/2,2]$, temos

$$\begin{cases} h^-(\alpha,1/2,n) & >0 \\ h^-(\alpha,2,n) & <0, \end{cases}$$

Portanto, podemos aplicar uma variante do Teorema do Valor Médio devido a Miranda [30], para obter $\alpha^*,\beta^* \in [1/2,2]$ tal que $h\pm(\alpha^*,\beta^*,n)=0$, para qualquer $n \geq n_0$. Então,

$$\alpha^* u_1 - \beta^* \overline{u} \in \mathcal{N}_\pm, \quad \text{para } \; n \geq n_0.$$

Tendo em vista a definição de c_2,

$$c_2 = \inf_{u\in\mathcal{N}_\pm} I(u) \leq \inf_{\frac{1}{2}\leq\alpha,\beta\leq 2} I(\alpha u_1 - \beta\overline{u}_n) \leq \sup_{\frac{1}{2}\leq\alpha,\beta\leq 2} I(\alpha u_1 - \beta\overline{u}_n)$$

basta mostrar que

$$\sup_{\frac{1}{2}\leq\alpha,\beta\leq 2} I(\alpha u_1 - \beta\overline{u}_n) < c_1 + c_\infty,$$

para algum $n \geq n_0$, pois $\sup_{\frac{1}{2}\leq\alpha,\beta\leq 2} I(\alpha u_1 - \beta\overline{u}_n) = I(\alpha^* u_1 - \beta^*\overline{u}_n)$.

Para fazer isso, calculamos

$$\begin{aligned} I(\alpha u_1 - \beta\overline{u}_n) = & \ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla(\alpha u_1)|^2 + |\nabla(\beta\overline{u}_n)|^2\right) dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\left((\alpha u_1)^2 + (\beta\overline{u}_n)^2\right) dx \\ - & \ \alpha\beta \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_1 \nabla\overline{u}_n + V(x) u_1 \overline{u}_n) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(\alpha u_1 - \beta\overline{u}_n) dx \\ \pm & \int_{\mathbb{R}^N} F(\alpha u_1) dx. \end{aligned}$$

Como u_1 é uma solução positiva de (P), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_1 \nabla\overline{u}_n + V(x) u_1 \overline{u}_n) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_1)\overline{u}_n dx \geq 0,$$

e portanto,

$$\begin{aligned} I(\alpha u_1 - \beta\overline{u}_n) \leq & \left\{ I(\alpha u_1) + \int_{\mathbb{R}^N} F(\alpha u_1) dx \right\} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla(\beta\overline{u}_n)|^2 + V(x)(\beta\overline{u}_n)^2\right) dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^N} F(\alpha u_1 - \beta\overline{u}_n) dx \pm \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty^+ (\beta\overline{u}_n)^2 dx \pm \int_{\mathbb{R}^N} F(\beta\overline{u}_n) dx \\ = & \ I(\alpha u_1) + I_\infty(\beta\overline{u}_n) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(V(x) - V_\infty^+\right)(\beta\overline{u}_n)^2 dx - J_{\alpha,\beta,n}, \end{aligned} \tag{1.40}$$

onde

$$J_{\alpha,\beta,n} := \int_{\mathbb{R}^N} (F(\alpha u_1 - \beta \overline{u}_n) - F(\alpha u_1) - F(\beta \overline{u}_n))\,dx.$$

Afirmação 2. Para algum $n \geq n_0$, temos

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(V(x) - V_\infty^+\right)(\beta \overline{u}_n)^2 dx - J_{\alpha,\beta,n} < 0. \tag{1.41}$$

Se isso for verdade podemos usar (1.40) para concluir que

$$I(\alpha u_1 - \beta \overline{u}_n) < I(\alpha u_1) + I_\infty(\beta \overline{u}_n).$$

Como $I_\infty(\beta \overline{u}_n) = I_\infty(\beta \overline{u})$ obtemos

$$\sup_{\frac{1}{2}\leq \alpha,\beta \leq 2} I(\alpha u_1 - \beta \overline{u}_n) \leq \sup_{\alpha \geq 0, \beta \geq 0} I(\alpha u_1 - \beta \overline{u}_n) < \sup_{\alpha \geq 0} I(\alpha u_1) + \sup_{\beta \geq 0} I_\infty(\beta \overline{u}) = c_1 + c_\infty,$$

o que conclui a prova da proposição.

Resta provar a Afirmação 2. Começamos por notar que, tendo em conta $(\widehat{V}_3)$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(V(x) - V_\infty^+\right)(\beta \overline{u}_n)^2 dx &= \frac{\beta^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(V(x+x_n) - V_\infty^+\right)\overline{u}(x)^2 dx \\
&\leq -C_2 \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\gamma|x+x_n|}\overline{u}(x)^2 dx.
\end{aligned}$$

Como $|x+x_n| \leq |x| + |x_n| = |x| + n$, então $e^{-\delta|x+x_n|} \geq e^{-\delta|x| - \delta n}$. Assim, de (1.8) segue que

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(V(x) - V_\infty^+\right)(\beta \overline{u}_n)^2 dx \leq -C_2 e^{-\gamma n}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\gamma|x|}\overline{u}(x)^2 dx = -C_3 e^{-\gamma n} < 0. \tag{1.42}$$

Por outro lado, segue do Lema 1.8 e (1.2) que

$$\begin{aligned}
|J_{\alpha,\beta,n}| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} f(\alpha u_1)\overline{u}_n + f(\beta \overline{u}_n)u_1 dx \\
&\leq C_4 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_1^q \overline{u}_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_1^\eta \overline{u}_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_1 \overline{u}_n^q dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_1 \overline{u}_n^\eta dx\right).
\end{aligned}$$

Definindo $A_n := B_{n/(q+1)}(0)$ podemos usar a desigualdade de Hölder, para obter

$$\begin{aligned}
\int_{A_n} u_1^q \overline{u}_n dx &\leq \left(\int_{A_n} u_1^{q+1} dx\right)^{q/(q+1)} \left(\int_{A_n} \overline{u}_n^{q+1} dx\right)^{1/(q+1)} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_1^{q+1} dx\right)^{q/(q+1)} \left(\int_{A_n} \overline{u}_n^{q+1} dx\right)^{1/(q+1)},
\end{aligned}$$

sendo $\overline{u}_n(x) = \overline{u}(x - x_n)$ e usando (1.8) podemos escrever

$$\int_{A_n} u_1^q \overline{u}_n dx \leq C_5 \left(\int_{A_n} e^{-\delta(q+1)|x-x_n|} dx \right)^{1/(q+1)}.$$

Desde que $|x_n - x| \geq |x_n| - |x| = n - |x|$, temos

$$\begin{aligned} \int_{A_n} u_1^q \overline{u}_n dx &\leq C_5 e^{-\delta n} \left(\int_{A_n} e^{\delta(q+1)|x|} dx \right)^{1/(q+1)} \\ &= C_6 e^{-\delta n} \left(\int_0^{n/(q+1)} e^{\delta(q+1)r} r^{N-1} dr \right)^{1/(q+1)}. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Recordamos agora que, para qualquer valor fixo $t > 0$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{tr} r^{N-1} dr = e^{tr} P(r),$$

onde

$$P(r) := \frac{r^{N-1}}{t} - \frac{(N-1)}{t^2} r^{N-2} + \frac{(N-1)(N-2)}{t^3} r^{N-3} + \cdots + (-1)^{N+1} \frac{(N-1)!}{t^N}.$$

Portanto, tomando $t := \delta(q+1)$, obtemos que

$$\int_0^{n/(q+1)} e^{\delta(q+1)r} r^{N-1} dr = e^{\delta n} P(n/(q+1)) = C_7 e^{n\delta} + C_8,$$

onde C_7 e C_8 depende apenas de δ. Com isto,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{n/(q+1)} e^{\delta(q+1)r} r^{N-1} dr \right)^{1/(q+1)} &= (C_7 e^{n\delta} + C_8)^{1/(q+1)} \\ &\leq 2^{1/(q+1)} (C_7^{1/(q+1)} e^{\frac{n\delta}{q+1}} + C_8^{1/(q+1)}) = K_1 e^{n\delta/(q+1)} + K_2. \end{aligned}$$

A estimativa acima e (1.43) fornecem

$$\begin{aligned} \int_{A_n} u_1^q \overline{u}_n dx &\leq C_6 e^{-\delta n} \left(\int_0^{n/(q+1)} e^{\delta(q+1)r} r^{N-1} dr \right)^{1/(q+1)} \\ &= C_6 e^{-\delta n} (K_1 e^{n\delta/(q+1)} + K_2) \\ &\leq C_9 \left(e^{-\delta n} e^{\delta n/(q+1)} + e^{-\delta n} \right) \\ &\leq C_{10} e^{-\delta n \left(\frac{q}{q+1} \right)}. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Analogamente, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N\setminus A_n} u_1^q \overline{u}_n dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus A_n} u_1^{q+1} dx\right)^{q/(q+1)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (\overline{u}(x-x_n))^{q+1} dx\right)^{1/(q+1)} \\
&\leq C_{11} \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus A_n} e^{-\delta(q+1)|x|} dx\right)^{q/(q+1)} \\
&= C_{12} \left(\int_{n/(q+1)}^{\infty} e^{-\delta(q+1)r} r^{N-1} dr\right)^{q/(q+1)} \\
&\leq C_{13} e^{-\delta n\left(\frac{q}{q+1}\right)}. \qquad (1.45)
\end{aligned}
$$

Portanto, (1.44) e (1.45) implicam que

$$
\int_{\mathbb{R}^N} u_1^q \overline{u}_n dx \leq C_{14} e^{-\delta n\left(\frac{q}{q+1}\right)}. \qquad (1.46)
$$

Desde que $q < \eta$ podemos proceder como acima para obter $C_{15} > 0$, tal que

$$
\max\left\{\int_{\mathbb{R}^N} u_1^{\eta} \overline{u}_n dx, \int_{\mathbb{R}^N} u_1 \overline{u}_n^q dx, \int_{\mathbb{R}^N} u_1 \overline{u}_n^{\eta} dx\right\} \leq C_{15} e^{-\delta n\left(\frac{q}{q+1}\right)}.
$$

A estimativa acima, (1.46), (1.43) e (1.42), implicam que

$$
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(V(x) - V_\infty^+\right)(\beta \overline{u}_n)^2 dx - J_{\alpha,\beta,n} \leq -C_3 e^{-\gamma n} + C_{16} e^{-\delta n\left(\frac{q}{q+1}\right)}.
$$

Já que $\gamma < \sqrt{V_\infty^+} q/(q+1)$, podemos escolher $0 < \delta < \sqrt{V_\infty^+}$ suficientemente perto de $\sqrt{V_\infty^+}$ de tal maneira que $\gamma < \delta q/(q+1)$. Segue para esta escolha e para a expressão acima que (1.41) é satisfeito para n grande o suficiente. Isso conclui a prova da Afirmação 2. $\square$

Proposição 1.4. Existe uma sequência (u_n) em $\mathcal{N}_\pm$ satisfazendo

$$
I(u_n) \to c_2 \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0. \qquad (1.47)
$$

Demonstração. Desde que I é limitado inferiormente em $\mathcal{N}_\pm$, podemos aplicar o Princípio Variacional de Ekeland para obter uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}_\pm$ satisfazendo

$$
c_2 \leq I(u_n) \leq c_2 + \frac{1}{n}
$$

e

$$
I(v) \geq I(u_n) - \frac{1}{n}\|v - u_n\|_E, \quad \text{para todo} \quad v \in \mathcal{N}_\pm. \qquad (1.48)
$$

Como $I(u_n)$ é convergente, temos que (u_n) é limitada em E. Para cada $\varphi \in E$ fixo e $n \in \mathbb{N}$, introduziremos as funções $h_n^{\pm} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} h_n^{\pm}(t,s,l) := & \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n + t\varphi + su_n^+ + lu_n^-)^{\pm}|^2 dx \\ + & \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|(u_n + t\varphi + su_n^+ + lu_n^-)^{\pm}|^2 dx \\ - & \int_{\mathbb{R}^N} f((u_n + t\varphi + su_n^+ + lu_n^-)^{\pm})(u_n + t\varphi + su_n^+ + lu_n^-)^{\pm} dx. \end{aligned}$$

Considerando a função ζ dada por

$$\begin{aligned} \zeta : \mathbb{R}^3 & \to E \\ (t,s,l) & \mapsto \zeta(t,s,l) = u_n + t\varphi + sun_n^+ + lu_n^- \end{aligned}$$

e o funcional

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^{\pm}|^2 + V(x)|u^{\pm}|^2) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u^{\pm}) u^{\pm} dx$$

de classe C^1. Temos que $h_n^{\pm}(t,s,l) = J \circ \zeta$ também é de classe C^1.

Note que $h_n^{\pm}(0,0,0) = 0, (\partial h_n^+/\partial l)(0,0,0) = 0$ e $(\partial h_n^-/\partial s)(0,0,0) = 0$. De fato, desde que

$$h_n^{\pm}(0,0,0) = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n^{\pm}|^2 + V(x)|u_n^{\pm}|^2) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^{\pm}) u_n^{\pm} dx$$

e $(u_n) \subset \mathcal{N}_{\pm}$ temos que $h_n^{\pm}(0,0,0) = 0$. Agora, vamos mostrar que $(\partial h_n^+/\partial l)(0,0,0) = 0$. Temos que

$$\begin{aligned} (\partial h_n^+/\partial l)(0,0,0) &= 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^+| \nabla u_n^- dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_n^+ u_n^- dx \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}^N} f'(u_n^+) u_n^+ u_n^- dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^+) u_n^- dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analogamente, para $(\partial h_n^-/\partial s)(0,0,0) = 0$, temos que

$$\begin{aligned} (\partial h_n^-/\partial s)(0,0,0) &= 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^-| \nabla u_n^+ dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_n^- u_n^+ dx \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}^N} f'(u_n^-) u_n^- u_n^+ dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^-) u_n^+ dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Além disso, lembrando que $I'(u_n^+) u_n^+ = 0$ obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_n^+}{\partial s}(0,0,0) &= 2\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n^+|^2+V(x)(u_n^+)^2)dx\\ &\quad -\int_{\mathbb{R}^N}(f'(u_n^+)(u_n^+)^2-f(u_n^+)(u_n^+))dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}(f(u_n^+)(u_n^+)-f'(u_n^+)(u_n^+)^2)dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}^N}(f'(u_n^+)(u_n^+)^2-f(u_n^+)(u_n^+))dx.\end{aligned}$$

Aplicando a condição $(\widehat{f_3})$ na expressão acima temos que

$$(f'(u_n^+)u_n^+-f(u_n^+))u_n^+ \geq C|u_n^+|^{\sigma-1}(u_n^+)^2.$$

Portanto,

$$\frac{\partial h_n^+}{\partial s}(0,0,0) \leq -C\int_{\mathbb{R}^N}|u_n^{\pm}|^{\sigma+1}dx. \tag{1.49}$$

Afirmação 1. Existe $C_1>0$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u_n^{\pm}|^{\sigma+1}dx \geq C_1>0.$$

Para provar a afirmação, primeiro notamos que (u_n) é limitada em E. Além disso, para qualquer dado $\delta>0$, podemos usar (1.2), $I'(u_n^+)u_n^+=0$ e (1.6), para obter $C_\delta>0$ tal que

$$\left(1-\frac{\|V^-\|_{N/2}}{S}\right)\|u_n^+\|_E^2 \leq \delta\int_{\mathbb{R}^N}|u_n^+|^{q+1}dx+C_\delta\int_{\mathbb{R}^N}|u_n^+|^{\eta+1}dx.$$

Argumentando por contradição, supomos que a menos de subsequência, $\int_{\mathbb{R}^N}|u_n^+|^{\sigma+1}dx \to 0$. Já que (u_n) é limitada em E e $2\leq q+1<\eta+1\leq\sigma+1$, podemos usar a interpolação para concluir que o lado direito da expressão acima vai para zero, contradizendo (1.27). O mesmo pode ser feito para u_n^- e, portanto, a afirmação é válida.
Segue de (1.49) e a afirmação acima que

$$\frac{\partial h_n^+}{\partial s}(0,0,0)<0.$$

Da mesma forma, temos que

$$\frac{\partial h_n^-}{\partial l}(0,0,0)<0.$$

Portanto, pelo Teorema da Função Implícita, podemos obter $\delta_n > 0$ e duas funções de classe C^1, $s_n, l_n : (-\delta_n, \delta_n) \to \mathbb{R}$ tais que $s_n(0) = l_n(0) = 0$, e

$$h_n^{\pm}(t, s_n(t), l_m(t)) = 0, \ \ t \in (-\delta_n, \delta_n). \tag{1.50}$$

Isso mostra que

$$u_n + t\varphi + s_n(t)u_n^+ l_n(t)u_n^- \in \mathcal{N}_{\pm}, \ \text{ para todo } \ t \in (-\delta_n, \delta_n).$$

Afirmação 2. Existe $C_2 > 0$ tal que

$$|s_n'(0)| \leq C_2, \ \ |l_n'(0)| \leq C_2.$$

Na verdade, ao usar (1.50) temos

$$\begin{aligned} s_n'(0) &= \frac{(\partial h_n^+/\partial t)(0,0,0)}{(\partial h_n^+/\partial s)(0,0,0)} \\ &= -\frac{2\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u_n^+ \nabla \varphi + V(x)u_n^+\varphi)dx - \int_{\mathbb{R}^N}(f'(u_n^+)u_n^+ + f(u_n^+))\varphi dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}(f'(u_n^+)(u_n^+)^2 - f(u_n^+)u_n^+)dx}. \end{aligned}$$

Assim, de (1.50) e a limitação de (u_n) em E segue que $|s_n'(0)| \leq C_2$ para algum $C_2 > 0$. Um argumento semelhante pode ser aplicado para a sequência $(l_n'(0))$.

Agora, de (1.48), temos

$$I(u_n + t\varphi + s_n(t)u_n^+ + l_n(t)u_n^-) - I(u_n) \geq -\frac{1}{n}\|t\varphi + s_n(t)u_n^+ + l_n(t)u_n^-\|_E, \tag{1.51}$$

para todo $t \in (-\delta_n, \delta_n)$.

Afirmação 3. Temos que

$$I'(u_n)\varphi \geq -\frac{1}{n}\|\varphi\|_E - \frac{C_3}{n}. \tag{1.52}$$

Se isso for verdade, segue que

$$\|I'(u_n)\|_E \leq \frac{C_4}{n},$$

passando o limite quando $n \to \infty$, segue a prova.

Resta provar a Afirmação 3. Seja $w_n := t\varphi + s_n(t)u_n^+ + l_n(t)u_n^-$ e observe que, desde $I'(u_n)u_n^{\pm} = I'(u_n^{\pm})u_n^{\pm} = 0$, temos que

$$I(u_n + w_n) - I(u_n) = I'(u_n)w_n + r(t,n) = tI'(u_n)\varphi + r(t,n), \tag{1.53}$$

onde $r(t,n) = o(\|t\varphi + s_n(t)u_n^+ + l_n(t)u_n^-\|_E)$ quando $t \to 0$. Essa expressão e (1.51) implicam que

$$I'(u_n)\varphi + \frac{r(t,n)}{t} \geq -\frac{1}{n}\|\varphi\|_E - \frac{1}{n}\left\|\frac{s_n(t)}{t}u_n^+ + \frac{l_n(t)}{t}u_n^-\right\|_E.$$

Logo, pela limitação de (u_n) e a Afirmação 2, temos que

$$I'(u_n)\varphi + \frac{r(t,n)}{t} \geq \frac{1}{n}\|\varphi\|_E - \frac{C_3}{n}, \tag{1.54}$$

para qualquer $t > 0$. Usando novamente a Afirmação 2, concluímos que

$$\frac{r(t,n)}{t} = \frac{r(t,n)}{\|t\varphi + s_n(t)u_n^+ + l_n(t)u_n^-\|_E} \cdot \frac{\|t\varphi + s_n(t)u_n^+ + l_n(t)u_n^-\|_E}{t} = o(1),$$

quando $t \to 0$. Tomando $t \to 0^+$ em (1.54) temos (1.52) e portanto a proposição está provada. □

Com base nas duas proposições anteriores, estamos prontos para demonstrar nosso segundo resultado, o qual assegura a existência de solução nodal.

Demonstração do Teorema 1.2: Seja $(u_n) \subset \mathcal{N}_\pm$ a sequência dada pela Proposição 1.4. Sabendo que (u_n) é limitada em E, então, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em E com $I'(u_0) = 0$. Tendo em vista o Lema 1.4, temos $u_n \to u_0$ fortemente em E ou existem $u^1, \ldots, u^k$ soluções não triviais de (P_∞) satisfazendo o Lema 1.4(b). Como

$$I(u_n) \to I(u_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(u^j)$$

e

$$I(u_n) \to c_2,$$

pela unicidade do limite temos

$$c_2 = I(u_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(u^j).$$

Desde que $I(u_0) \geq 0$, se tivéssemos $k \geq 2$ então

$$c_2 \geq 2c_\infty > c_\infty + c_1.$$

No entanto, sabemos que $0 < c_2 < c_1 + c_\infty$. Além do mais, como $c_1 < c_\infty$ devemos ter $k \leq 1$. Suponha que $u_0 \equiv 0$. Neste caso, como $c_2 > 0$, temos que $k = 1$ e portanto

$$\|u_n - u^1(\cdot - y_n^1)\|_E \to 0.$$

Uma vez que $|y_n^1| \to \infty$ e $(u_n) \subset \mathcal{N}_\pm$, da convergência acima e (1.27) implicam que $(u^1)^\pm \in \mathcal{N}_\infty$. Por isso,

$$c_1 + c_\infty > c_2 = I_\infty(u^1) = I_\infty((u^1)^+) + I_\infty((u^1)^-) \geq 2c_\infty$$

contradizendo $c_1 < c_\infty$. Então $u_0 \not\equiv 0$. Podemos usar $c_2 < c_1 + c_\infty$ novamente para concluir que $k = 0$, isto é, $u_n \to u_0$ fortemente em E. De fato, se $u_n \nrightarrow u_0$ então $u^1 \not\equiv 0$. Logo,

$$c_2 \geq I(u_0) + I_\infty(u^1) \geq c_1 + c_\infty$$

o que contradiz a desigualdade $c_2 < c_1 + c_\infty$. Dessa forma, (u_n) converge fortemente para u_0. Segue de (1.27) que $u_0 \in \mathcal{N}_\pm$ é uma solução nodal de (P), assim

$$I(u_0) = c_2 \text{ e } I'(u_0) = 0.$$

□

Capítulo 2

Um Problema Indefinido em $\mathbb{R}^N$ Não Periódico e Assintoticamente Linear

O objetivo desse capítulo é mostrar a existência de uma solução não trivial para o problema

$$-\Delta u+V(x)u=f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N \tag{P}$$

com potencial contínuo não periódico V que muda de sinal, com limite assintótico $V_\infty>0$ no infinito e uma função f assintoticamente linear no infinito.

Consideraremos o problema elíptico (P) com $N\geq 3$, $u\in E:=H^1(\mathbb{R}^N)$ e V um potencial satisfazendo as seguintes condições:

(V_1) $V\in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ e $-V_0\leq V(x)<V_\infty$, onde $V_0,V_\infty>0$;

(V_2) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} V(x)=V_\infty$;

(V_3) $0\notin\sigma(L)$ e $\inf\sigma(L)<0$, onde $\sigma(L)$ é o espectro do operador $L=-\Delta+V$;

(V_4) $V(x)\leq V_\infty-C_1e^{-\gamma|x|}$, onde $C_1>0$ e $0<\gamma<\sqrt{V_\infty}$.

As condições que impomos sobre a não linearidade f são:

(f_1) $f\in C^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{f(s)}{s}=0$;

(f_2) $\lim\limits_{|s|\to+\infty}\dfrac{|f(s)|}{|s|}=m>V_\infty$ e $\dfrac{|f(s)|}{|s|}<m$, para todo $s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

(f_3) Se $F(s):=\displaystyle\int_0^s f(t)dt$ e $Q(s):=\dfrac{1}{2}f(s)s-F(s)$, para todo $s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$F(s)\geq 0,\ \ Q(s)>0 \quad \text{e} \quad \lim_{s\to\infty}Q(s)=+\infty;$$

(f_4) Existem $C_2 > 0$ e $1 < p_1 \leq p_2$ tais que $p_1, p_2 < 2^* - 1$ e

$$|f^{(k)}(s)| \leq C_2(|s|^{p_1-k} + |s|^{p_2-k})$$

para $k \in \{0,1,2,3\}$ e $s \in \mathbb{R}$;

(f_5) A função $s \mapsto f(s)/s$ é crescente em $s \in (0,+\infty)$.

Observação 2.1. A condição (f_4) pode ser considerada apenas para $k \in \{0,1\}$, como em [23].

Exemplo 2.1. Se considerarmos $f(s) = \dfrac{ms^3}{1+s^2}$, $s \in \mathbb{R}$, com $m > V_\infty$, é possível mostrar que f satisfaz as hipóteses $(f_1)-(f_5)$.

De fato, usando a hipótese da não linearidade, segue que

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{ms^3}{1+s^2} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{ms^2}{1+s^2} = 0,$$

o que implica que a condição (f_1) é satisfeita. Também temos que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|f(s)|}{|s|} = \lim_{|s|\to\infty} \left|\frac{ms^3}{1+s^2}\right| \cdot \frac{1}{|s|} = \lim_{|s|\to\infty} m\frac{|s|^3}{|1+s^2|} \cdot \frac{1}{|s|} = m$$

e

$$\frac{|f(s)|}{|s|} = \left|\frac{ms^3}{1+s^2}\right| \cdot \frac{1}{|s|} = \frac{m|s|^3}{|1+s^2|} \cdot \frac{1}{|s|} = m\frac{|s|^2}{|1+s^2|} < m,$$

pois $\dfrac{|s|^2}{|1+s^2|} < 1, \forall s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Assim, a condição (f_2) também é válida. Para mostrar (f_3), definimos $F(s)$ e $Q(s)$ como

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt = \int_0^s \frac{mt^3}{1+t^2}dt = \frac{m}{2}(s^2 - \log(s^2+1))$$

e

$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{1}{2}f(s)s - F(s) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{ms^3}{1+s^2}\right)s - \frac{m}{2}(s^2 - \log(s^2+1)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{ms^4}{1+s^2}\right) - \frac{m}{2}(s^2 - \log(s^2+1)) \end{aligned}$$

passando $Q(s)$ ao limite quando $s \to \infty$, temos

$$\lim_{s\to\infty} Q(s) = \lim_{s\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{ms^4}{1+s^2}\right) - \frac{m}{2}(s^2 - \log(s^2+1))\right] = \infty,$$

verificando a condição (f_3). Agora vamos verificar que o exemplo, satisfaz a condição (f_4). De fato, para $k = 0$, temos dois casos a considerar:
Se $s > 1$, então

$$|f(s)| = \left|\frac{ms^3}{1+s^2}\right| \leq \left|\frac{ms^3}{s^2}\right| = m|s| \leq C(|s|^{p_1} + |s|^{p_2}).$$

Se $s < 1$ e tomando $p_1 \in (1, min\{2^* - 1, 2\})$, obtemos

$$|f(s)| = \left|\frac{ms^3}{1+s^2}\right| \leq m|s|^3 \leq C(|s|^{p_1} + |s|^{p_2}).$$

Quando $k = 1$ e considerando $s > 1$, temos

$$\begin{aligned}
|f'(s)| &= \left|m\frac{(3s^2+s^4)}{(1+s^2)^2}\right| \leq \left|m\frac{(3s^2+s^4)}{s^4}\right| \\
&= \left|\frac{3m}{s^2} + m\right| \leq |3m+m| = |4m| \leq C(|s|^{p_1-1} + |s|^{p_2-1}).
\end{aligned}$$

Da mesma forma, se $s < 1$, temos

$$\begin{aligned}
|f'(s)| &= \left|m\frac{(3s^2+s^4)}{(1+s^2)^2}\right| \leq \left|\frac{ms^2}{1+s^2}(3+s^2)\right| \\
&= \left|\frac{s^2}{1+s^2}(3m+ms^2)\right| \leq \left|\frac{s^2}{1+s^2}(3m+m)\right| \\
&\leq C\left|\frac{s^2}{1+s^2}\right| = C\left|\frac{s^3}{1+s^2}\frac{1}{s}\right| \\
&\leq C|s^3|\left|\frac{1}{s}\right| \leq C(|s|^{p_1} + |s|^{p^2})\left|\frac{1}{s}\right| = C(|s|^{p_1-1} + |s|^{p_2-1}).
\end{aligned}$$

De forma análoga, quando $k = 2, 3$, tem-se

$$|f^{(2)}(s)| \leq C(|s|^{p_1-2} + |s|^{p_2-2})$$

$$|f^{(3)}(s)| \leq C(|s|^{p_1-3} + |s|^{p_2-3}).$$

Agora, para mostrar que $f(s)/s$ é crescente para $s \in (0,+\infty)$ devemos ter $f'(s)s - f(s) > 0$. Ou seja,

$$f'(s)s - f(s) = \frac{m(3s^2+s^4)}{(1+s^2)^2}s - \frac{ms^3}{1+s^2} = \frac{m(3s^3+s^5)(1+s^2)-ms^3}{(1+s^2)} = \frac{ms^5(1+s^2)}{1+s^2} > 0,$$

para $s \in (0,+\infty)$. Portanto, as condições $(f_1)-(f_5)$ são satisfeitas.

Exemplo 2.2. O potencial

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, \text{ se } |x| < R \\ -V_0 \leq V(x) \leq V_\infty, \text{ se } R \leq |x| \leq 2R \\ V_\infty \text{ se } |x| > 2R, \end{cases}$$

onde $V_0 = \dfrac{\lambda_1(1)}{R^2} > 0$ é uma constante e $\lambda_1(1)$ é o primeiro autovalor do operador $(-\Delta, H_0^1(B_1(0)))$.

O resultado principal deste capítulo é o seguinte teorema.

Teorema 2.1. Sob as hipóteses $(V_1)-(V_4)$ e $(f_1)-(f_5)$, o problema (P) tem uma solução fraca não trivial $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Agora, iremos abordar alguns pontos relacionados às hipóteses do problema. A condição (V_1) é importante para obter a equivalência das normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{V_\infty}$, além de ser utilizada na demonstração da geometria de Linking. Já (V_2) é aplicada em várias ocasiões, por exemplo, no problema de autovalor e convergências que provam a limitação da sequência de Cerami. A hipótese (V_3) desempenha um papel fundamental neste capítulo, pois nos diz que o espectro do operador $L = -\Delta + V$ tem ínfimo negativo. Por fim, (V_4) é usada para obter uma estimativa que fornece uma comparação entre os níveis de energia c e c_∞.

As hipóteses $(f_1),(f_2)$ e (f_3) são utilizadas na prova da limitação da sequência de Cerami. Além do mais, usamos (f_2) na demonstração da geometria de Linking, assegurando a aplicação do Teorema da Convergência Dominada e (f_3) na prova do resultado principal deste capítulo. Empregamos (f_4) na demonstração de uma lema auxiliar, e por último, a hipótese (f_5) é utilizada uma única vez no trabalho para concluir o máximo do funcional $I_\infty(tu_0)$ é atingindo quando $t = 1$.

Neste capítulo, apresentaremos na Seção 2.1 a estrutura variacional do funcional I associado ao problema (P). A Seção 2.2 tem como objetivo demonstrar a limitação da sequência de Cerami. Por último, na Seção 2.3 nos dedicamos a provar a existência de solução fraca não trivial para o problema (P), utilizando a geometria de Linking e o Lema de Concentração e Compacidade de Lions.

2.1 Estrutura variacional

Para obter a formulação fraca do problema,

$$-\Delta u+V(x)u=f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{P}$$

considere uma sequência $(v_m)\subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Multiplicando (v_m) em ambos os lados de (P) e integrando, obtemos

$$-\int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}\Delta u v_m dx+\int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}V(x)uv_m dx=\int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}f(u)v_m dx.$$

Pela fórmula de Green ([17], Teorema 3, Apêndice C), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}\nabla u\nabla v_m dx+\int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}V(x)uv_m dx=\int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}f(u)v_m dx, \ \ \forall v_m\in C_0^\infty.$$

Sabendo que $H_0^1(\mathbb{R}^N)$ é denso em $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, existe uma sequência $(v_m)\subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $v_m\to v\in H_0^1(\mathbb{R}^N)$. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}[\nabla u\nabla v+V(x)uv]dx=\int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}f(u)v dx,$$

que representa a formulação fraca do problema (P). Dizemos que $u\in H^1(\mathbb{R}^N)$ é solução fraca do problema (P) quando vale a igualdade acima.

Seja $E=H^1(\mathbb{R}^\mathbb{N})$, o funcional energia $I:E\to\mathbb{R}$ associado à equação (P) é dado por

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2+V(x)u^2\right)dx-\int_{\mathbb{R}^N}F(u)dx,$$

com $u\in E$. É bem conhecido que pelas hipóteses (V_2) e (V_3) que o problema de autovalor

$$-\Delta u+V(x)u=\lambda u, \quad u\in L^2(\mathbb{R}^N) \tag{2.1}$$

tem uma sequência de autovalores $\lambda_1<\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_k<0$. Pois, dada uma função mensurável localmente limitada V(x) tal que $\liminf\limits_{|x|\to\infty}V(x)>0$, pelo Teorema 30 de [16], tomando $\varepsilon=1$, por exemplo, o espectro do operador $-\Delta+V(x)$ em $(-\infty,V_\infty-1)$ consiste num número finito de autovalores de multiplicidade finita. Lembrando que a multiplicidade do autovalor corresponde a dimensão do autoespaço associado a λ. Denotamos por φ_i a autofunção correspondendo ao autovalor λ_i, $i \in \{1,2,\cdots,k\}$, em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Considerando

$$E^- := \text{span}\{\varphi_i,\ i = 1,2,\cdots,k\} \quad \text{e} \quad E^+ := \left(E^-\right)^{\perp},$$

em que E^- representa o espaço gerado por todas as combinações lineares de $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$ e E^+ corresponde aos elementos que são ortogonais a E^-, onde vemos que $E = E^+ \oplus E^-$. Seja $V \in L^\infty$, pelo Teorema A.11, o espectro essencial do operador $-\Delta + V$ é o intervalo $[V_\infty, +\infty)$, e isto implica que $\dim E^- < \infty$, uma vez que cada λ_i tem multiplicidade finita.

Podemos provar que $\dim E^- < \infty$ da seguinte forma. Suponha que $\dim E^- = \infty$. Dado $\xi < V_\infty$, podemos escolher uma sequência de autofunções $\{\varphi_{in}; n \in \mathbb{N}\}$, tal que

$$\varphi_{in} \in \ker(-\Delta + V(x) - \lambda_n I); \|\varphi_{in}\|_2 = 1 \ \text{ e } \ \int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} \varphi_{in}\varphi_{im}dx = 0, \forall m,n \in \mathbb{N} \ \text{ com } \ m \neq n.$$

Assim, como $\dim E^- = \infty$, temos que $\{\varphi_{in}; n \in \mathbb{N}\}$ são linearmente independente. Por outro lado, para cada $g \in E^-$, existe um número finito de números reais $c_1,\cdots,c_k$, tal que

$$g = \sum_{n=1}^{k} c_n \varphi_{in}.$$

Portanto, $\varphi_{in} \in H^1(\mathbb{R}^\mathbb{N})$ e

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} (|\nabla g|^2 + V g^2)dx &= \int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} (-\Delta g + V g) g dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} \left(\sum_{m=1}^{k} c_m \lambda_m \varphi_{im}\right)\left(\sum_{n=1}^{k} c_n \varphi_{in}\right) dx \\
&= \sum_{m,n=1}^{k} c_m c_n \lambda_m \int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} \varphi_{im}\varphi_{in} dx \\
&= \sum_{n=1}^{k} \lambda_n c_n^2 \leq \xi \sum_{n=1}^{k} c_n^2 = \xi \int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} g^2 dx.
\end{aligned}$$

Pelo Lema A.4, temos que $\dim E^- < \infty$. O que é uma contradição.

Tendo feitas essas considerações, toda função $u \in E$ pode ser escrita como $u = u^+ + u^-$ unicamente, onde $u^+ \in E^+$ e $u^- \in E^-$. Assim, usando os argumentos do Lema 1.2 em [15], podemos introduzir um novo produto interno $\langle \cdot,\cdot \rangle$ em E, a saber,

$$\langle u,v \rangle = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + V(x)uv)dx, & \text{se } u,v \in E^+, \\ \displaystyle -\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + V(x)uv)dx, & \text{se } u,v \in E^-, \\ 0, & \text{se } u \in E^+ \text{ e } v \in E^-. \end{cases}$$

tal que a norma correspondente $\|\cdot\|$ é equivalente a $\|\cdot\|_E$, a norma usual em $E = H^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, o funcional I pode ser escrito como

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx$$

para toda função $u = u^+ + u^- \in E$. Chamamos a atenção ao fato de que, como $\lambda_i \neq 0$ para todo $i \in \{1,2,\cdots,k\}$, segue de (2.1) e da definição de φ_i que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^+(x)v^-(x)dx = 0 \tag{2.2}$$

para toda função $u^+ \in E^+$ e $v^- \in E^-$. De fato, para todo $u^+ \in E^+$ e $v^- \in E^-$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u^+ \nabla v^- + u^+ v^-)dx = 0,$$

pois $E^+ = (E^-)^\perp$. Por [15], Lema 1.2, se $u^+ \in E^+$ e $v^- \in E^-$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|u^+\|^2 - \|v^-\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(u^+ + v^-)|^2 + V(x)(u^+ + v^-)^2)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^+|^2 + V(x)(u^+)^2)dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u^+ \nabla v^- + V(x)u^+ v^-)dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v^-|^2 + V(x)(v^-)^2)dx
\end{aligned}$$

e isso implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u^+ \nabla v^- + V(x)u^+ v^-)dx = 0. \tag{2.3}$$

Da equação (2.1), temos que

$$-\Delta\varphi_i + V(x)\varphi_i = \lambda_i \varphi_i \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla\varphi_i \nabla u^+ + V(x)\varphi_i u^+)dx = \lambda_i \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_i u^+ dx, \forall u^+ \in E^+.$$

Pela igualdade (2.3), para $\lambda_i \neq 0$ temos $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_i u^+ dx = 0$ e assim, por linearidade, $\int_{\mathbb{R}^N} u^+ v^- dx = 0, u^+ \in E^+, v^- \in E^-$. Logo, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^+(x)v^-(x)dx = 0.$$

Lembremos a definição de sequência de Cerami. Seja E um espaço de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Dizemos que $(u_n) \subset E$ é uma sequência de Cerami no nível c

para I, ou seja, (u_n) é uma sequência $(Ce)_c$ quando existe $c \in \mathbb{R}$ tais que

$$I(u_n) \to c \ \text{ e } \ \|I'(u_n)\|_{E^*}(1+\|u_n\|) \to 0.$$

Além disso, dizemos que I satisfaz a condição de Cerami no nível c, quando toda sequência $(Ce)_c$ para I, possui subsequência convergente, isto é, $u_{n_k} \to u$ em E.

2.2 Limitação das sequências de Cerami

Nesta seção, nosso objetivo é limitar a sequência de Cerami, uma vez que esse resultado é necessário para demonstrar o Teorema 2.1. Assim, supondo por contradição que $\|u_n\| \to \infty$ utilizaremos o Lema 2.1 para concluir que nenhum dos dois casos podem ocorrer.

Uma consequência das hipóteses (f_1) e (f_2) é que, dado $\varepsilon > 0$ e $2 \leq p \leq 2^*$, existe $C_\varepsilon > 0$, tal que

$$|F(s)| \leq \varepsilon|s|^2 + C_\varepsilon|s|^p \quad \text{e} \quad |f(s)| \leq \varepsilon|s| + C_\varepsilon|s|^{p-1} \tag{2.4}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. De fato, pelas hipóteses (f_1) e (f_2), dado $\varepsilon > 0$, existem $R, \delta > 0$ com $R > \delta$ tal que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = 0 \Rightarrow \left|\frac{f(t)}{t}\right| \leq \varepsilon \Rightarrow |f(t)| \leq \varepsilon|t|, \ \text{ sempre que } \ |t| < \delta \tag{2.5}$$

e

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|f(t)|}{|t|} = m \Rightarrow \left|\frac{f(t)}{t}\right| \leq m \Rightarrow |f(t)| \leq m|t|, \ \text{ sempre que } \ \delta \leq |t| \leq R.$$

Assim, temos

$$|f(t)| \leq \varepsilon|t| + m|t|, \ \text{ sempre que } \ |t| > R. \tag{2.6}$$

Para os valores de t tais que $|t| > R$, vale $|t| = \dfrac{1}{|t|^{p-2}}|t|^{p-1} < \dfrac{|t|^{p-1}}{R^{p-2}}$. Portanto, (2.6) se torna

$$|f(t)| \leq \varepsilon|t| + \frac{m}{R^{p-2}}|t|^{p-1}, \ \text{ sempre que } \ |t| > R. \tag{2.7}$$

Por outro lado, para valores de t em que $\delta \leq |t| \leq R$, obtemos

$$|f(t)| \leq m|t| = \frac{m}{|t|^{p-2}}|t|^{p-1} \leq \frac{m}{\delta^{p-2}}|t|^{p-1}, \ \text{ sempre que } \ \delta \leq |t| \leq R. \tag{2.8}$$

Segue de (2.5), (2.7) e (2.8) que

$$|f(t)| \leq \varepsilon|t| + \left(\frac{m}{R^{p-2}} + \frac{m}{\delta^{p-2}}\right)|t|^{p-1}, \ \text{ para todo } \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Chamando $C_\varepsilon := \left(\dfrac{m}{R^{p-2}} + \dfrac{m}{\delta^{p-2}}\right)$ e, em seguida, integrando a desigualdade (2.9), obtemos

$$\begin{aligned} |F(s)| &= \left|\int_0^s f(t)dt\right| \\ &\leq \int_0^s |f(t)|dt \\ &\leq \int_0^s (\varepsilon|t| + C_\varepsilon|t|^{p-1})dt = \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + \frac{C_\varepsilon}{p}|s|^p, \ \text{ para todo } \ s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Lema 2.1. Se (v_n) é uma sequência limitada em E, então (v_n) satisfaz um dos seguintes casos:

(i) vanishing: para todo $r > 0$, $\limsup\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |v_n|^2 dx = 0$

ou

(ii) nonvanishing: existem $r, \eta > 0$ e uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ tais que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B(y_n,r)} |v_n|^2 dx > \eta.$$

Demonstração. Mostraremos que se o item (i) não for satisfeito, então obrigatoriamente teremos que o item (ii) é verificado. De fato, suponha que exista $r > 0$, tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |v_n|^2 dx \neq 0.$$

Logo pela definição de limite, temos que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |v_n|^2 dx \geq M.$$

Portanto existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, tal que

$$M - \frac{1}{n} < \int_{B(y_n,r)} |v_n|^2 dx.$$

Tomando $\eta = M/2$ e o lim sup, obtemos que

$$\eta < \limsup_{n\to\infty} \int_{B(y_n,r)} |v_n|^2 dx.$$

$\square$

Lema 2.2. Seja $(u_n) \subset E$ uma sequência tal que

$$I(u_n) \to c > 0 \ \text{ e } \ \|I'(u_n)\|_{E^*}(1+\|u_n\|) \to 0, \ \text{ quando } \ n \to +\infty.$$

Então (u_n) possui uma subsequência limitada.

Demonstração. Suponha por contradição que $\|u_n\| \to \infty$. Considere $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$ e note que $\|v_n\| = 1$. A sequência (v_n) é limitada, porém mostraremos que os itens (i) e (ii), do Lema 2.1, não serão válidos. Primeiramente, suponha que (ii) vale para a sequência (v_n). Escreva $f(s) = ms + (f(s) - ms) = ms + f_\infty(s)$. Pela equivalência das normas, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\|w\| \le C_1 \|w\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \le C_2 \|w\|, \text{ para toda função } w \in E. \tag{2.10}$$

Seja $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ a sequência dada pela hipótese (ii). Como a sequência (u_n) é de Cerami e considerando $\varphi_n(x) = \varphi(x - y_n)$ para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos de (2.10)

$$|I'(u_n)\varphi_n| \le \|I'(u_n)\|_{E^*}\|\varphi_n\| \le C_1 \|I'(u_n)\|_{E^*}\|\varphi_n\|_E = C_1\|I'(u_n)\|_{E^*}\|\varphi\|_E \to 0.$$

Como $\|u_n\| \to \infty$, a medida do conjunto $\Omega_n := \{x \in \mathbb{R}^N; |u_n(x)| \neq 0\}$ é positiva. Portanto,

$$\begin{aligned} o_n(1) &= \frac{1}{\|u_n\|} I'(u_n)\varphi_n = \langle v_n^+ - v_n^-, \varphi_n \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_n)}{\|u_n\|}\varphi_n dx \\ &= \langle v_n^+ - v_n^-, \varphi_n \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} m v_n \varphi_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f_\infty(u_n)}{\|u_n\|}\varphi_n dx \\ &= \langle v_n^+ - v_n^-, \varphi_n \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} m v_n \varphi_n dx - \int_{\Omega_n} \frac{f_\infty(u_n)}{u_n} v_n \varphi_n dx. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Considere $\tilde{v}_n(x) = v_n(x + y_n)$ e $\tilde{u}_n(x) = u_n(x + y_n)$. Note que $(\tilde{v}_n)$ é limitada em E. De fato, de (2.10) segue que

$$\|\tilde{v}_n\| \le C_1 \|\tilde{v}_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = C_1 \|v_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \le C_2 \|v_n\| = C_2.$$

Logo, a menos de subsequência,

$$\begin{cases} \tilde{v}_n \rightharpoonup \tilde{v}, \ \text{em } E, \\ \tilde{v}_n \to \tilde{v}, \ \text{em } L^2_{loc}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{2.12}$$

Seja $K = \text{supp}(\varphi)$. Pela hipótese (f_2), $\dfrac{|f(\cdot)|}{|\cdot|}$ é uma função limitada em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ com $\dfrac{|f(\cdot)|}{|\cdot|} \leq m$. De (2.12), existe uma função $h \in L^1(K)$ tal que $|\tilde{v}_n(x)| \leq h(x)$ q.t.p. em K. Assim, lembrando que $f_\infty(s) = f(s) - ms$, obtemos

$$\left|\frac{f_\infty(\tilde{u}_n)}{\tilde{u}_n}\tilde{v}_n\varphi\right| = \frac{|f_\infty(\tilde{u}_n)|}{|\tilde{u}_n|}|\tilde{v}_n||\varphi| \leq 2mh(x)\varphi \in L^1(K). \tag{2.13}$$

Observamos que $\tilde{v} \neq 0$, pois, por (ii) do Lema 2.1 e (2.12),

$$\int_{B(0,r)} \tilde{v}^2 dx = \limsup_{n\to\infty} \int_{B(0,r)} \tilde{v}_n^2 dx = \limsup_{n\to\infty} \int_{B(y_n,r)} v_n^2 dx > \eta > 0.$$

Pela hipótese (f_1), $\dfrac{f_\infty(s)}{s} \to 0$ se $|s| \to \infty$. Logo, de (2.13) e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f_\infty(u_n)}{u_n} v_n \varphi_n dx = \int_K \frac{f_\infty(\tilde{u}_n)}{\tilde{u}_n}\tilde{v}_n\varphi dx = \int_K \frac{f_\infty(\tilde{v}_n\|\tilde{u}_n\|)}{\tilde{v}_n\|\tilde{u}_n\|}\tilde{v}_n\varphi dx \to 0. \tag{2.14}$$

Assim, de (2.11), (2.12), (2.14) e do Teorema da Mudança de Variável, tem-se que

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= \frac{1}{\|u_n\|} I'(u_n)\varphi_n \\
&= \langle v_n^+ - v_n^-, \varphi_n\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} m v_n \varphi_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f_\infty(u_n)}{\|u_n\|}\varphi_n dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla v_n^+ \nabla \varphi_n + V(x) v_n^+ \varphi_n\right) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla v_n^- \nabla \varphi_n dx + V(x) v_n^- \varphi_n\right) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} m v_n \varphi_n dx - o_n(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla v_n^+ \nabla \varphi(x-y_n) + V(x) v_n^+ \varphi(x-y_n)\right) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n^- \nabla \varphi(x-y_n) dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) v_n^- \varphi(x-y_n) dx - \int_{\mathbb{R}^N} m v_n \varphi_n dx - o_n(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla \tilde{v}_n^+ \nabla \varphi + V(x+y_n)\tilde{v}_n^+ \varphi\right) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla \tilde{v}_n^- \nabla \varphi + V(x+y_n)\tilde{v}_n^- \varphi\right) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} m\tilde{v}_n \varphi dx.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Caso 1: (y_n) é uma sequência limitada. Por (2.10),

$$\|\tilde{u}_n\| \geq \frac{C_1}{C_2}\|\tilde{u}_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \frac{C_1}{C_2}\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \geq \frac{1}{C_2}\|u_n\|$$

que tende para infinito, quando $n \to \infty$. Segue de (2.12) que

$$0 \neq |\tilde{v}(x)| = \lim_{n\to\infty} |\tilde{v}_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{|\tilde{u}_n(x)|}{\|\tilde{u}_n\|}, \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

com $\mu(\Omega) > 0$ e $\Omega \subset B(0,r)$. Visto que $\|\tilde{u}_n\| \to \infty$, temos $\tilde{u}_n(x) \to \infty$ q.t.p. em Ω. Assim, a hipótese (f_3) e o Lema de Fatou nos fornecem

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} f(u_n)u_n - F(u_n)\right) dx &= \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} f(\tilde{u}_n)\tilde{u}_n - F(\tilde{u}_n)\right) dx \\
&\geq \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} f(\tilde{u}_n)\tilde{u}_n - F(\tilde{u}_n)\right) dx \\
&\geq \int_{\Omega} \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} f(\tilde{u}_n)\tilde{u}_n - F(\tilde{u}_n)\right) dx \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Todavia, isso contradiz o fato de

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} f(u_n)u_n - F(u_n)\right) dx = I(u_n) - \frac{1}{2} I'(u_n)u_n = c + o_n(1).$$

Logo, (ii) não é verdade neste caso.

Caso 2: $|y_n| \to \infty$. Neste caso, a hipótese (V_2) garante que $V(x+y_n)$ converge para V_∞ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, quando $n \to \infty$. De (2.15),

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= \int_K \left(\nabla \tilde{v}_n^+ \nabla \varphi + (V_\infty + o_n(1))\tilde{v}_n^+ \varphi\right) dx + \int_K \left(\nabla \tilde{v}_n^- \nabla \varphi + (V_\infty + o_n(1))\tilde{v}_n^- \varphi\right) dx \\
&\quad - \int_K m\tilde{v}_n \varphi dx.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Assim, o argumento segue análogo ao caso em que (y_n) é limitada. Portanto, o Caso 2 também não vale, implicando que a hipótese (ii) não é válida para a sequência (v_n).

Por outro lado, suponha que a hipótese (i) é satisfeita para a sequência (v_n). Como a sequência (u_n) é de Cerami, $\|I'(u_n)\|_{E^*}^2 \|u_n\|^2 \to 0$ quando $n \to \infty$. Isto é, $\|I'(u_n)\|_{E^*}^2 \|u_n^+\|^2 + \|I'(u_n)\|_{E^*}^2 \|u_n^-\|^2 \to 0$. Assim, $I'(u_n)u_n^- \to 0$ e $I'(u_n)u_n^+ \to 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= I'(u_n)\frac{u_n^+}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{\|u_n\|} I'(u_n)v_n^+ \\
&= \frac{1}{\|u_n\|}\left(\langle u_n^+ - u_n^-, v_n^+\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)v_n^+ dx\right) \\
&= \|v_n^+\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(u_n)}{u_n} v_n v_n^+\right) dx
\end{aligned} \tag{2.17}$$

e

$$\begin{aligned} o_n(1) &= I'(u_n)\frac{u_n^-}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{\|u_n\|}I'(u_n)v_n^- \\ &= -\|v_n^-\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{f(u_n)}{u_n}v_nv_n^-\right)dx. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Subtraindo a equação (2.18) de (2.17), temos

$$\begin{aligned} o_n(1) &= \|v_n^+\|^2 + \|v_n^-\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{f(u_n)}{u_n}v_n(v_n^+ - v_n^-)\right)dx \\ &= \|v_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{f(u_n)}{u_n}v_n(v_n^+ - v_n^-)\right)dx \\ &= 1 - \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{f(u_n)}{u_n}v_n(v_n^+ - v_n^-)\right)dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{f(u_n)}{u_n}v_n(v_n^+ - v_n^-)\right)dx \to 1. \tag{2.19}$$

Por imersão, existe uma constante $\mu_0 > 0$, tal que

$$\|w\|^2 \geq \mu_0\|w\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \tag{2.20}$$

para todo $w \in E$. Dado $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\mu_0$, pela hipótese (f_1), existe $\delta > 0$, tal que

$$\frac{|f(s)|}{|s|} \leq \varepsilon, \text{ sempre que } 0 \neq |s| < \delta.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto $\tilde{\Omega}_n = \{x \in \mathbb{R}^N;\ |u_n(x)| < \delta\}$. Então, de (2.20) e da desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}_n}\left(\frac{f(u_n)}{u_n}v_n(v_n^+ - v_n^-)\right)dx &\leq \varepsilon\int_{\tilde{\Omega}_n}|v_n||v_n^+ - v_n^-|dx \\ &\leq \varepsilon\left(\|v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|v_n^+\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|v_n^-\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) \\ &\leq 2\varepsilon\|v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{\mu_0}\|v_n\|^2 = \frac{2\varepsilon}{\mu_0} < 1, \end{aligned}$$

De (2.19), concluímos que

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\tilde{\Omega}_n}\left(\frac{f(u_n)}{u_n}v_n(v_n^+ - v_n^-)\right)dx > 0. \tag{2.21}$$

Já que a função $\dfrac{|f(\cdot)|}{|\cdot|}$ é limitada, pela desigualdade de Hölder com expoente $p/2 > 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N\setminus\tilde{\Omega}_n}\left(\frac{f(u_n)}{u_n}v_n(v_n^+ - v_n^-)\right)dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus\tilde{\Omega}_n}\left|\frac{f(u_n)}{u_n}v_n(v_n^+ - v_n^-)\right|dx \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^N\setminus\tilde{\Omega}_n}|v_n||v_n^+ - v_n^-|dx \\
&= C\int_{\mathbb{R}^N\setminus\tilde{\Omega}_n}1\cdot|v_n|^2dx \\
&\leq C\mu(\mathbb{R}^N\setminus\tilde{\Omega}_n)^{\frac{p-2}{p}}\|v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2}{p}}.
\end{aligned}$$

A afirmação (i) e o Lema de Lions garantem que $\|v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0$. Portanto, a menos de subsequência, de (2.21), obtemos

$$\mu(\mathbb{R}^N\setminus\tilde{\Omega}_n) \to \infty. \tag{2.22}$$

Agora, consideramos dois subconjuntos disjuntos de $\mathbb{R}^N\setminus\tilde{\Omega}_n$. Pela hipótese (f_3), existe $R > 0$ tal que, se $|s| > R$,

$$\frac{1}{2}f(s)s - F(s) > 1.$$

Sem perda de generalidade, assumimos $0 < \delta < R$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $A_n := \{x \in \mathbb{R}^N; |u_n(x)| > R\}$ e assim

$$\begin{aligned}
c + o_n(1) &= I(u_n) - \frac{1}{2}I'(u_n)u_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right)dx \\
&\geq \int_{A_n}\left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right)dx > \mu(A_n),
\end{aligned}$$

o que implica que a sequência $(\mu(A_n))$ é limitada. Considere também $B_n := \{x \in \mathbb{R}^N; \delta \leq |u_n(x)| \leq R\}$. Como $B_n = (\mathbb{R}^N\setminus\tilde{\Omega}_n)\setminus A_n$, temos

$$\mu(\mathbb{R}^N\setminus\tilde{\Omega}_n) = \mu(A_n) + \mu(B_n).$$

Segue de (2.22) e da limitação da sequência $(\mu(A_n))$ que

$$\mu(B_n) \to \infty. \tag{2.23}$$

Como o intervalo $[\delta, R]$ é compacto e as funções f e F são contínuas, temos pela hipótese (f_3) que $\overline{\delta} := \inf_{s\in[\delta,R]} \left(\frac{1}{2}f(s)s - F(s)\right) > 0$. Assim, de (2.23),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right) dx &\geq \int_{B_n} \left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right) dx \\ &\geq \overline{\delta} \int_{B_n} 1 dx \\ &= \overline{\delta}\mu(B_n) \to \infty. \end{aligned}$$

Isso novamente contradiz o fato de

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right) dx = I(u_n) - \frac{1}{2}I'(u_n)u_n = c + o_n(1).$$

Logo, (i) também não vale para a sequência (v_n). Concluímos que, a menos de subsequência, (u_n) é limitada. $\square$

2.3 Um ponto crítico não trivial

A seguir verificaremos que o funcional I satisfaz a geometria do Teorema de Linking sob a condição de Cerami e demonstraremos nosso resultado principal.

Teorema 2.2. (Teorema de Linking sob a condição $(Ce)_c$) Seja $E = E^+ \oplus E^-$ um espaço de Banach com dim $E^- < \infty$. Sejam $R > \rho > 0$ e $u \in E^+$ um elemento fixo tal que $\|u\| = \rho$. Defina o seguinte

$$\begin{aligned} M &:= \{w = tu + v^- : \|w\| \leq R,\ t \geq 0,\ v^- \in E^-\}, \\ M_0 &:= \{w = tu + v^- : v^- \in E^-, \|w\| = R,\ t \geq 0 \text{ ou } \|w\| \leq R,\ t = 0\}, \\ N_\rho &:= \{w \in E^+ : \|w\| = \rho\}. \end{aligned}$$

Seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ tal que

$$b := \inf_{N_\rho} I > a := \max_{M_0} I.$$

Então, $c \geq b$ e existe uma sequência de Cerami no nível c para o funcional I, onde

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{w\in M} I(\gamma(w)),\ \ \Gamma := \{\gamma \in C(M, E) :\ \gamma|_{M_0} = Id\}.$$

Primeiramente, considere o seguinte problema limite

$$-\Delta w + V_\infty w = f(w), \text{ em } \mathbb{R}^N \tag{P_∞}$$

e o funcional energia associado à equação (P_∞) dado por

$$I_\infty(w) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w|^2 + V_\infty w^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(w)dx := \frac{1}{2}\|w\|^2_{V_\infty} - \int_{\mathbb{R}^N} F(w)dx$$

para $w \in E$ e $\|\cdot\|_{V_\infty}$ equivalente a norma $\|\cdot\|$. Seja $u_0 \in E$ uma solução radial, contínua e positiva da equação (P_∞) tal que $I_\infty(u_0) = c_\infty = \inf_{w\in M} I_\infty(w) > 0$. Desde que $V_\infty < m$, a existência de u_0 é provado em [7, Teorema 1].

Para simplificar a notação, dados $w \in E$ e $y \in \mathbb{R}^N$, escreveremos $w^+(\cdot - y)$ (ou $w^-(\cdot - y)$) nos referindo à projeção em E^+ (respectivamente, em E^-) da função transladada $w(\cdot - y)$.

Observação 2.2. Sejam w e v funções em $L^2(\mathbb{R}^N)$, Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} w(x-y)v(x)dx \to 0, \text{ quando } |y| \to \infty.$$

De fato, como $w, v \in L^2(\mathbb{R}^N)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\int_{B_R^c(0)} w^2(x)dx < \varepsilon \text{ e } \int_{B_R^c(0)} v^2(x)dx < \varepsilon. \tag{2.24}$$

De (2.24) e da desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \left|\int_{B_R^c(0)} w(x-y)v(x)dx\right| &\leq \left(\int_{B_R^c(0)} w^2(x-y)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_R^c(0)} v^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} w^2(z)dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_R^c(0)} v^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &< \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|w\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Escolhendo agora $y \in \mathbb{R}^N$ com $|y|$ suficientemente grande de tal forma que $B_R(y) \cap B_R(0) = \emptyset$, isto é, $B_R(y) \subset B_R^c(0)$, obtemos de (2.24)

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{B_R(0)} w(x-y)v(x)dx\right| &\leq \left(\int_{B_R(0)} w^2(x-y)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_R(0)} v^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{B_R(y)} w^2(z)dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_R(0)} v^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{B_R^c(0)} w^2(z)dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} v^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&< \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

Assim, de (2.25) e (2.26), segue que

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} w(x-y)v(x)dx\right| &= \left|\int_{B_R(0)} w(x-y)v(x)dx + \int_{B_R^c(0)} w(x-y)v(x)dx\right| \\
&\leq \left|\int_{B_R(0)} w(x-y)v(x)dx\right| + \left|\int_{B_R^c(0)} w(x-y)v(x)dx\right| \\
&< \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}) \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

para $|y|$ suficientemente grande. Como $\varepsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente, o lema está provado.

Para $R > 0$ e $y \in \mathbb{R}^N$, considere

$$M = \{w = tu_0^+(\cdot - y) + v^-;\ \|w\| \leq R,\ t \geq 0,\ v^- \in E^-\}$$

e

$$M_0 = \{w = tu_0^+(\cdot - y) + v^-;\ v^- \in E^-, \|w\| = R,\ t \geq 0 \text{ ou } \|w\| \leq R,\ t = 0\}.$$

Lema 2.3. Existem $R > 0$ e $y \in \mathbb{R}^N$, com R e $|y|$ suficientemente grandes, tais que

$$I|_{M_0} \leq 0.$$

Demonstração. O subconjunto M_0 é igual a uma união disjunta de M_1 e M_2 onde

$$M_1 = \{w = tu_0^+(\cdot - y) + v^-;\ v^- \in E^-, \|w\| \leq R,\ t = 0\}$$

e

$$M_2 = \{w = tu_0^+(\cdot - y) + v^-;\ v^- \in E^-, \|w\| = R,\ t > 0\}.$$

Como $M_1 \subset E^-$, temos que $I(w) \leq 0$ para qualquer $w \in M_1$. De fato, como $w \in E^-$, temos que

$$I(w) \quad = \quad \frac{1}{2}\|w^+\|^2 - \frac{1}{2}\|w^-\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(w)dx \leq 0.$$

Agora, vamos mostrar que $I(w) \leq 0$ dados $R > 0$ e $w \in M_2$ com $\|w\| = R$. Escrevendo

$$w = \|w\|\frac{w}{\|w\|} = \|w\|u(w) = \|w\|(\lambda(w)u_0^+(\cdot - y) + v^-(w)),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
I(w) &= I(\|w\|u(w)) \\
&= \frac{1}{2}\|\|w\|\lambda(w)u_0^+(\cdot - y)\|^2 - \frac{1}{2}\|\|w\|v^-(w)\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(\|w\|u(w))dx \\
&= \frac{1}{2}\|w\|^2\lambda^2(w)\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - \frac{1}{2}\|w\|^2\|v^-(w)\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(\|w\|u(w))dx \\
&= \frac{1}{2}\|w\|^2\left\{\lambda^2(w)\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - \|v^-(w)\|^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(Ru(w))}{(Ru(w))^2}u^2(w)dx\right\}.
\end{aligned}$$

Para simplificar a notação, escrevemos λ, u e v^- ao invés de $\lambda(w)$, $u(w)$ e $v^-(w)$, respectivamente. Além disso, temos que $\lim\limits_{s\to\infty} \frac{F(s)}{s^2} = \frac{1}{2}m$ e $\left|\frac{F(s)}{s^2}\right| \leq \frac{m}{2}$, para todo $s \neq 0$. De fato, pela regra de L'Hopital e pela hipótese (f_2) temos que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{F(s)}{s^2} = \lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{2s} = \frac{m}{2}.$$

Novamente de (f_2), segue que $|f(s)|/|s| < m \Rightarrow |f(s)| < m|s|$. Logo,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(s)}{s^2}\right| &= \left|\frac{1}{s^2}\int_0^s f(t)dt\right| \\
&\leq \frac{1}{|s|^2}\int_0^s |f(t)|dt \\
&< \frac{1}{|s|^2}\int_0^s m|t|dt = \frac{1}{2|s|^2}m|s|^2 = \frac{m}{2}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\left|\frac{F(Ru)}{(Ru)^2}\right|u^2 \leq \frac{m}{2}u^2 \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

e, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{F(Ru)}{(Ru)^2} - \frac{m}{2}\right)u^2dx = 0 \qquad (2.28)$$

para todo $u \in E$ tal que $\|u\| = 1$. Como M_2 está contido em um subespaço de dimensão finita de E, $w = \|w\|u \in M_2$ com $\|u\| = 1$, então o limite (2.28) é uniforme em u (veja Apêndice B). Além disso, lembrando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0^+(x-y)v^- dx = 0,$$

segue que

$$\begin{aligned}
I(w) &= \frac{1}{2}\|w\|^2 \left\{ \lambda^2 \|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - \|v^-\|^2 - m\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx + o_R(1) \right\} \\
&= \frac{1}{2}\|w\|^2 \left\{ \lambda^2 \|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - \|v^-\|^2 - m\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda u_0^+(x-y) + v^-)^2 dx + o_R(1) \right\} \\
&= \frac{1}{2}\|w\|^2 \left\{ \lambda^2 \|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - \|v^-\|^2 - m\lambda^2 \int_{\mathbb{R}^N} (u_0^+)^2(x-y) dx \right. \\
&\quad \left. - m\int_{\mathbb{R}^N} (v^-)^2 dx + o_R(1) \right\} \\
&\leq \frac{1}{2}\|w\|^2 \left\{ \lambda^2 \left[\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - m\int_{\mathbb{R}^N} (u_0^+)^2(x-y) dx \right] + o_R(1) \right\}. \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

Pela hipótese (V_1), $V(x) \leq V_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, segue que

$$\begin{aligned}
\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_0^+(x-y)|^2 + V(x)(u_0^+)^2(x-y) \right) dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_0^+(x-y)|^2 + V_\infty (u_0^+)^2(x-y) \right) dx \\
&= \|u_0^+(\cdot - y)\|_{V_\infty}^2 \\
&\leq \|u_0(\cdot - y)\|_{V_\infty}^2. \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

Agora, como I_∞ é invariante por translação, então u_0 e $u_0(\cdot - y)$ são pontos críticos do funcional de I_∞. Portanto, $I'_\infty(u_0(\cdot - y))u_0(\cdot - y) = 0$, isto é,

$$\|u_0(\cdot - y)\|_{V_\infty}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0(x-y))u_0(x-y) dx. \qquad (2.31)$$

De (2.30) e (2.31),

$$\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0(x-y))u_0(x-y) dx. \qquad (2.32)$$

Substituindo (2.32) em (2.29) e, em seguida, somando e substituindo a integral $m\int_{\mathbb{R}^N} u_0^2(x-y)dx$, obtemos

$$
\begin{aligned}
I(w) &\leq \frac{1}{2}\|w\|^2\left\{\lambda^2\left[\|u_0^+(\cdot-y)\|^2 - m\int_{\mathbb{R}^N}(u_0^+)^2(x-y)dx\right] + o_R(1)\right\}\\
&\leq \frac{1}{2}\|w\|^2\left\{\lambda^2\left[\int_{\mathbb{R}^N} f(u_0(x-y))u_0(x-y)dx - m\int_{\mathbb{R}^N}(u_0^+)^2(x-y)dx\right] + o_R(1)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\|w\|^2\left\{\lambda^2\left[\int_{\mathbb{R}^N} f(u_0(x-y))u_0(x-y)dx - m\int_{\mathbb{R}^N} u_0^2(x-y)dx\right.\right.\\
&\quad \left.\left. +m\int_{\mathbb{R}^N}[u_0^2(x-y)-(u_0^+)^2(x-y)]dx\right] + o_R(1)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\|w\|^2\left\{\lambda^2\left[\int_{\mathbb{R}^N} f(u_0(z))u_0(z)dz - m\int_{\mathbb{R}^N} u_0^2(z)dz\right.\right.\\
&\quad \left.\left. +m\int_{\mathbb{R}^N}[u_0^2(x-y)-(u_0^+)^2(x-y)]dx\right] + o_R(1)\right\}. \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

Neste momento, estimamos as seguintes integrais:

$$
\int_{\mathbb{R}^N} f(u_0(z))u_0(z)dz - m\int_{\mathbb{R}^N} u_0^2(z)dz \qquad (2.34)
$$

e

$$
\int_{\mathbb{R}^N}[u_0^2(x-y)-(u_0^+)^2(x-y)]dx. \qquad (2.35)
$$

Como u_0 é radial e contínua, a função $\dfrac{f(u_0(\cdot))}{u_0(\cdot)}$ assume seu máximo, digamos em $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Assim, já que, pela hipótese $(f_2), |f(s)/s| < m$ para todo $s \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} f(u_0(z))u_0(z)dz - m\int_{\mathbb{R}^N} u_0^2(z)dz &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{f(u_0(z))}{u_0(z)} - m\right)u_0^2(z)dz\\
&\leq \left(\frac{f(u_0(x_0))}{u_0(x_0)} - m\right)\int_{\mathbb{R}^N} u_0^2(z)dz\\
&= \left(\frac{f(u_0(x_0))}{u_0(x_0)} - m\right)\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} < -\gamma,
\end{aligned}
$$

onde $\gamma = \dfrac{1}{2}\left(m - \dfrac{f(u_0(x_0))}{u_0(x_0)}\right)\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} > 0$. Em outras palavras, existe $\gamma > 0$ tal que

$$
\int_{\mathbb{R}^N} f(u_0(z))u_0(z)dz - m\int_{\mathbb{R}^N} u_0^2(z)dz < -\gamma. \qquad (2.36)
$$

Para (2.35), como $\int_{\mathbb{R}^N} u_0^+(x-y)u_0^-(x-y)dx = 0$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}[u_0^2(x-y)-(u_0^+)^2(x-y)]dx &= \int_{\mathbb{R}^N}\{[u_0^+(x-y)+u_0^-(x-y)]^2-(u_0^+)^2(x-y)\}dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}[(u_0^+)^2(x-y)+(u_0^-)^2(x-y)-(u_0^+)^2(x-y)]dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}(u_0^-)^2(x-y)dx. \qquad (2.37)\end{aligned}$$

Afirmação 1: A integral $\int_{\mathbb{R}^N}(u_0^-)^2(x-y)dx \to 0$ quando $|y| \to \infty$. Na verdade, uma vez que $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ é uma base de autofunções do subespaço E^-, A observação 2.2 e a hipótese (V_1) garantem que, dado $\varepsilon > 0$, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, existe $M_i > 0$ tal que se $|y| \geq M_i$, então

$$\langle u_0(x-y), \varphi_i\rangle = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_0(x-y)\nabla\varphi_i(x)dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u_0(x-y)\varphi_i(x)dx < \varepsilon.$$

De fato, tomando $\overline{M} = \max\{M_1, \cdots, M_n\}$, segue que, para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\langle u_0(x-y), \varphi_i\rangle < \varepsilon \;\text{ se }\; |y| \geq \overline{M}. \qquad (2.38)$$

Como $u_0^-(\cdot - y) \in E^-$ é uma combinação linear dos vetores $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$, digamos

$$u_0^-(x-y) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i(y)\varphi_i(x).$$

Segue de (2.38) que existe $\widetilde{M} > 0$ tal que, se se $|y| \geq \widetilde{M}$, então

$$\begin{aligned}\|u_0^-(\cdot - y)\|^2 &= \langle u_0(\cdot - y), u_0^-(\cdot - y)\rangle\\ &= \langle u_0(\cdot - y), \sum_{i=1}^{n}\xi_i(y)\varphi_i(\cdot)\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n}\xi_i(y)\langle u_0(\cdot - y), \varphi_i(\cdot)\rangle\\ &< \varepsilon n\max\{|\xi_1(y)|, \cdots, |\xi_n(y)|\}. \qquad (2.39)\end{aligned}$$

Afirmação 2: Existe uma constante $C > 0$, que não depende de y, tal que

$$\max\{|\xi_1(y)|, \cdots, |\xi_n(y)|\} < C \;\text{ para todo }\; y \in \mathbb{R}^N. \qquad (2.40)$$

De fato, como dim $E^- < \infty$, pela equivalência de normas em espaços de dimensão finita, existe $D > 0$, que não depende de y, tal que

$$\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i(y)\varphi_i(x)\|_{V_\infty}^2 \geq D\left(\max\{|\xi_1(y)|,\cdots,|\xi_n(y)|\}\right)^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|u_0\|_{V_\infty}^2 \geq \|u_0^-(\cdot - y)\|_{V_\infty}^2 &= \|\sum_{i=1}^{n}\xi_i(y)\varphi_i(x)\|_{V_\infty}^2 \\ &\geq D\left(\max\{|\xi_1(y)|,\cdots,|\xi_n(y)|\}\right)^2. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Isso prova a Afirmação 2, se tomarmos $C = \dfrac{\|u_0\|_{V_\infty}}{\sqrt{D}} > 0.$

Agora, substituindo (2.40) em (2.39), obtemos que

$$\|u_0^-(\cdot - y)\|^2 < \varepsilon n C$$

para $|y| \geq \widetilde{M}$. Como as normas $\|\cdot\|_{V_\infty}$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes em E, segue que $\|u_0^-(\cdot - y)\|_{V_\infty} \to 0$ quando $|y| \to \infty$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N}(u_0^-)^2(x-y)dx &= \frac{1}{V_\infty}\int_{\mathbb{R}^N}V_\infty(u_0^-)^2(x-y)dx \\ &\leq \frac{1}{V_\infty}\left[\int_{\mathbb{R}^N}V_\infty(u_0^-)^2(x-y)dx + \int_{\mathbb{R}^N}\nabla(u_0^-)^2(x-y)dx\right] \\ &= \frac{1}{V_\infty}\|u_0^-(\cdot - y)\|_{V_\infty}^2 \to 0, \text{ quando } |y| \to \infty, \end{aligned} \tag{2.42}$$

concluindo a demonstração da Afirmação 1. □

Substituindo (2.36), (2.37) e (2.42) em (2.33), obtemos

$$\begin{aligned} I(w) &\leq \frac{1}{2}\|w\|^2\Big\{\lambda^2\Big[\int_{\mathbb{R}^N}f(u_0(z))u_0(z)dz - m\int_{\mathbb{R}^N}u_0^2(z)dz \\ &\quad + m\int_{\mathbb{R}^N}(u_0^-)^2(x-y)dx\Big] + o_R(1)\Big\} \\ &\leq \frac{1}{2}\|w\|^2\left\{\lambda^2\left[-\gamma + o_{|y|}(1)\right] + o_R(1)\right\} \end{aligned} \tag{2.43}$$

para $|y|$ e R suficientemente grandes. Para concluir a demonstração do lema vamos analisar os casos para os valores de λ.

Como $w = \|w\|(\lambda u_0^+(\cdot - y) + v^-)$ e, pela hipótese (f_3), F é uma função não negativa, temos

$$\begin{aligned} I(w) &= \frac{1}{2}\|w\|^2(\lambda^2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - \|v^-\|^2) - \int_{\mathbb{R}^N} F(w)dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|w\|^2(\lambda^2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - \|v^-\|^2). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Como $\|\lambda u_0^+(\cdot - y) + v^-\|^2 = 1$, segue que

$$\lambda^2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 + \|v^-\|^2 = 1.$$

Então, a equação (2.44) se torna

$$\begin{aligned} I(w) &\leq \frac{1}{2}\|w\|^2(\lambda^2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - \|v^-\|^2) \\ &= \frac{1}{2}\|w\|^2(\lambda^2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 + \lambda^2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - \lambda^2\|u_0^+(\cdot - y\| - \|v^-\|^2) \\ &= \frac{1}{2}\|w\|^2(2\lambda^2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - 1). \end{aligned}$$

Pela equivalência das normas e invariância por translação da norma $\|\cdot\|_{V_\infty}$, existe $C > 0$, que não depende de y, tal que $2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 \leq C\|u_0(\cdot - y)\|_{V_\infty}^2 = C\|u_0\|_{V_\infty}^2$. Assim, para

$$\lambda^2 < \frac{1}{C\|u_0\|_{V_\infty}^2} \leq \frac{1}{2\|u_0^+(\cdot - y)\|^2},$$

temos $I(w) < 0$, e o lema está provado para tais valores de λ. Se, por outro lado, $\lambda^2 \geq \dfrac{1}{C\|u_0\|_{V_\infty}^2} := k_0 > 0$, escolhemos $y \in \mathbb{R}^N$ com $|y|$ suficientemente grande para que $-\gamma + o_{|y|}(1) < -\dfrac{\gamma}{2}$. Logo, a desigualdade (2.43) se torna

$$I(w) \leq \frac{1}{2}\|w\|^2\left[-\lambda^2\frac{\gamma}{2} + o_R(1)\right].$$

Como $-\lambda^2 \leq -k_0$, escolhendo R suficientemente grande para que $-k_0\dfrac{\gamma}{2} + o_R(1) \leq 0$, obtemos

$$I(w) \leq \frac{1}{2}\|w\|^2\left[-\lambda^2\frac{\gamma}{2} + o_R(1)\right] \leq \frac{1}{2}\|w\|^2\left[-k_0\frac{\gamma}{2} + o_R(1)\right] \leq 0,$$

e o lema está provado para os valores de λ tais que $\lambda^2 \geq k_0$. Isso conclui a demonstração do lema. □

A fim de obter a compacidade de uma sequência de Cerami para o funcional, usaremos uma versão do Lema de Concentração e Compacidade de Lions. Note que toda sequência $(Ce)_e$ para I é também uma sequência $(PS)_e$ para I. Assim, o lema a seguir é semelhante ao Splitting anterior (Lema 1.4), porém aplicando a definição de sequência de Cerami ao invés de sequência Palais-Smale. Dessa forma, omitiremos a demonstração deste caso.

Lema 2.4. **(Splitting Lema)** Seja (u_n) uma sequência limitada em E, tal que

$$I(u_n) \to c \ \text{ e } \ \|I'(u_n)\|_{E^*}(1+\|u_n\|) \to 0.$$

Então, a menos de subsequência, existe uma solução u_0 de (P) e temos

a) $u_n \to u_0$ fortemente em E, ou

b) existe $k \in \mathbb{N}, (y_n^j) \in \mathbb{R}^N$ com $|y_n^j| \to \infty, j = 1, \ldots,\ k$, e soluções não triviais $u^1, \ldots, u^k$ do problema (P_∞), tal que

$$I(u_n) \to I(u_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(u^j) \tag{2.45}$$

e

$$\left\| u_n - u_0 - \sum_{j=1}^{k} u^j(\cdot - y_n^j) \right\|_E \to 0.$$

Considerando que c representa o nível minimax do Linking do funcional associado a (P) e c_∞ o nível minimax do Passo da Monhanha do funcional associado a (P_∞), o lema a seguir nos fornece uma comparação entre os níveis de energia dos funcionais I e I_∞. Este resultado juntamente com o Lema 2.4 nos possibilita mostrar que toda sequência de Cerami para I possui uma subsequência que converge forte.

Lema 2.5. Vale que

$$c < c_\infty := \inf\{I_\infty(w);\ w \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\},\ I'_\infty(w) = 0\}.$$

Para provar este resultado precisaremos de alguns lemas auxiliares. Os dois primeiros podem ser encontrados em [14], Lemas 3.3 e 3.5. Apresentamos a prova de cada um deles.

Lema 2.6. Existe $\mu \in (1,2]$ com a seguinte propriedade: para qualquer $C_3 \geq 1$, existe uma constante $C_4 > 0$ tal que a desigualdade

$$|F(u+v) - F(u) - F(v) - f(u)v - f(v)u| \leq C_4\,|uv|^\mu$$

é verdadeira para todo $u, v \in \mathbb{R}$ com $|u|, |v| \leq C_3$.

Demonstração. Seja $p := p_1$ e $\mu := \min\left\{\frac{1}{2}(p+1), 2\right\}$. Observe que (f_4) implica que $\left|f^{(k)}(u)\right| \leq C|u|^{p-k}$ se $0 < |u| \leq C_3$. Consideremos o caso em que $u, v > 0$. Assim,

$$
\begin{aligned}
&|F(u+v) - F(u) - F(v) - f(u)v - f(v)u| \\
&\quad = \left|\int_0^u (f(s+v) - f(v) - f'(s)v - f(s))ds\right| \\
&\quad = \left|\int_0^u \int_0^v (f'(s+r) - f'(r) - f'(s))drds\right| \\
&\quad = \left|\int_0^u \int_0^v \int_0^r (f''(s+t) - f''(t)dtdrds\right| \\
&\quad = \left|\int_0^u \int_0^v \int_0^r \int_t^{s+t} f'''(w)\,dw\,dt\,dr\,ds\right| \\
&\quad \leq \left|\widetilde{C} \int_0^u \int_0^v \int_0^r \int_t^{s+t} w^{p-3}\,dw\,dt\,dr\,ds\right| \\
&\quad \leq \left|\widetilde{C}_1 \int_0^u \int_0^v \int_0^r [(s+t)^{p-2} - t^{p-2}]dtdrds\right| \\
&\quad \leq \left|\widetilde{C}_2 \int_0^u \int_0^v [(s+r)^{p-1} - r^{p-1} - s^{p-1}]drds\right| \\
&\quad \leq \left|\widetilde{C}_3 \int_0^u [(s+v)^p - v^p - vs^{p-1} - s^p]ds\right| \\
&\quad \leq |\widetilde{C}_4[(u+v)^{p+1} - u^{p+1} - v^{p+1} - u^p v - uv^p]| \\
&\quad \leq C_4|uv|^{\mu}.
\end{aligned}
$$

em que $C_4 := \max\{\widetilde{C}_j\}, j = 1, \cdots, 4$. Isso conclui a demonstração do lema. □

Lema 2.7. Se $\mu_2 > \mu_1 \geq 0$, existe $C > 0$ tal que, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$,

$$
\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_1|x-x_1|} e^{-\mu_2|x-x_2|}\,dx \leq Ce^{-\mu_1|x_1-x_2|}.
$$

Demonstração. Como

$$
\begin{aligned}
&\mu_1|x_1 - x_2| + (\mu_2 - \mu_1)|x - x_2| \\
&\quad \leq \mu_1(|x - x_1| + |x - x_2|) + (\mu_2 - \mu_1)|x - x_2| \\
&\quad = \mu_1|x - x_1| + \mu_2|x - x_2|,
\end{aligned}
$$

passando a integral e aplicando exponencial de ambos os lados da desigualdade, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_1|x-x_1|}e^{-\mu_2|x-x_2|}\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_1|x_1-x_2|}e^{-(\mu_2-\mu_1)|x-x_2|}\,dx = Ce^{-\mu_1|x_1-x_2|},$$

e o lema segue. □

Notamos que o conjunto M definido no Teorema 2.2 é fechado, limitado e está contido em um espaço de dimensão finita, ou seja, no espaço $\mathbb{R}u_0^+(\cdot-y)\oplus E^-$. Portanto, M é um conjunto compacto, o que implica que, para todo $y\in\mathbb{R}^N$, existe $w_y = v_y^- + t_y u_0^+(\cdot-y)\in M$ satisfazendo

$$\max_{w\in M} I(w) = I(v_y^- + t_y u_0^+(\cdot-y)),$$

já que I é um funcional contínuo.

O resultado a seguir mostra que os valores t_y são limitados uniformemente em y por constantes positivas se $|y|$ é suficientemente grande.

Lema 2.8. Existem $A,B\in\mathbb{R}$, que não dependem de y, tais que $0<A\leq t_y\leq B$ para $|y|$ suficientemente grande.

Demonstração. Como $w_y = v_y^- + t_y u_0^+(\cdot-y)\in M$ e o número $R>0$ dado pelo Lema 2.3, que não depende de y, tem-se

$$\begin{aligned} R^2 \geq \|w_y\|^2 &= \|v_y^-\|^2 + t_y^2\|u_0^+(\cdot-y)\|^2 \\ &\geq t_y^2\|u_0^+(\cdot-y)\|^2 + t_y^2\|u_0^-(\cdot-y)\|^2 - t_y^2\|u_0^-(\cdot-y)\|^2 \\ &= t_y^2(\|u_0(\cdot-y)\|^2 - \|u_0^-(\cdot-y)\|^2). \end{aligned}$$

Como foi provado em (2.42), podemos tomar $|y|$ suficientemente grande para que $\|u_0^-(\cdot-y)\|^2 \leq \frac{C}{2}\|u_0\|_{V_\infty}^2$, onde $C>0$ não depende de y e satisfaz $\|u_0(\cdot-y)\|^2 \geq C\|u_0\|_{V_\infty}^2$. Assim,

$$\begin{aligned} R^2 &\geq t_y^2(\|u_0(\cdot-y)\|^2 - \|u_0^-(\cdot-y)\|^2) \\ &\geq t_y^2\left(C\|u_0\|_{V_\infty}^2 - \frac{C}{2}\|u_0\|_{V_\infty}^2\right) \\ &= \frac{t_y^2 C}{2}\|u_0\|_{V_\infty}^2, \end{aligned}$$

isto é, temos $t_y^2 \leq \dfrac{2R^2}{C\|u_0\|_{V_\infty}^2} := B^2$. Por outro lado, por (2.4) com $2<p<2^*$, para $\varepsilon>0$ ainda a ser escolhido, existe $C_\varepsilon>0$ tal que, se $u\in E^+$ com $\|u\|=\rho>0$, então

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \geq \frac{1}{2}\rho^2 - \varepsilon\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 - C_\varepsilon\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p. \tag{2.46}$$

Pelas imersões de Sobolev e pela equivalência das normas, existem constantes $C_5, C_6 > 0$ que tornam (2.46) em

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\rho^2 - \varepsilon C_5\|u\|^2 - C_6\|u\|^p = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon C_5\right)\rho^2 - C_6\rho^p. \tag{2.47}$$

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $D_\varepsilon := \frac{1}{2} - \varepsilon C_5 > 0$. Escolhendo $\rho > 0$ suficientemente pequeno de modo que $D_\varepsilon\rho^2 - C_6\rho^p > 0$, isto é, $0 < \rho < \left(\frac{D_\varepsilon}{C_6}\right)^{\frac{1}{p-2}}$, obtemos

$$I(u) \geq D_\varepsilon\rho^2 - C_6\rho^p := \rho_0 > 0 \tag{2.48}$$

para todo $u \in E^+$ com $\|u\| = \rho$, onde ρ_0 não depende de y. Assim, tomamos $t_0 > 0$, que não depende y, suficientemente pequeno de modo que $\|t_0u_0^+(\cdot - y)\| \leq \rho < R$ para concluir que $I(t_0u_0^+(\cdot - y)) \geq \rho_0 > 0$. Consequentemente,

$$I(v_y^- + t_yu_0^+(\cdot - y)) = \max_{w\in M} I(w) \geq I(t_0u_0^+(\cdot - y)) \geq \rho_0,$$

isto é,

$$\begin{aligned}\frac{t_y^2}{2}\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 - \frac{1}{2}\|v_y^-\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(v_y^- + t_yu_0^+(x-y))dx \\ = I(v_y^- + t_yu_0^+(\cdot - y)) \geq \rho_0.\end{aligned}$$

Logo, como F é uma função não negativa,

$$\frac{t_y^2}{2}\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 \geq \rho_0.$$

Isto mostra que

$$t_y^2 \geq \frac{2\rho_0}{C\|u_0\|_{V_\infty}^2} := A^2,$$

onde $C > 0$ não depende de $|y|$ e satisfaz $\|u_0^+(\cdot - y)\|^2 \leq C\|u_0\|_{V_\infty}^2$. O lema está provado. $\square$

A seguir, vamos provar o Lema 2.5.

Demonstração do Lema 2.5: Por simplicidade, vamos denotar $u_{0,y}(x) := u_0(x-y)$ e C denotará constantes positivas, que não são necessariamente as mesmas. Pela definição dos funcionais I e I_∞, temos

$$\begin{aligned}
I(v_y^- + t_y u_{0,y}^+) &= \frac{t_y^2}{2}\|u_{0,y}^+\|^2 - \frac{1}{2}\|v_y^-\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(v_y^- + t_y u_{0,y}^+(x))dx \\
&\leq \frac{t_y^2}{2}\|u_{0,y}\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(t_y u_{0,y})dx - \frac{t_y^2}{2}\|u_{0,y}^-\|^2 \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \Big(F(t_y u_{0,y}) - F(v_y^- + t_y u_{0,y}^+)\Big)\, dx \qquad (2.49)\\
&\leq I_\infty(t_y u_{0,y}) + \frac{t_y^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_\infty)\, u_{0,y}^2(x)dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \Big(F(v_y^- - t_y u_{0,y}^-) + F(t_y u_{0,y}) - F(v_y^- + t_y u_{0,y}^+)\Big)\, dx,
\end{aligned}$$

uma vez que F é não negativa. Vamos estimar a última integral na desigualdade acima. Chamando $w_y^- = v_y^- - t_y u_{0,y}^-$, queremos estimar

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N}(F(v_y^- - t_y u_{0,y}^-) + F(t_y u_{0,y}) - F(v_y^- + t_y u_{0,y}^+))dx\right| \\
&\qquad = \left|\int_{\mathbb{R}^N}(F(v_y^- - t_y u_{0,y}^-) + F(t_y u_{0,y}) - F(v_y^- - t_y u_{0,y}^- + t_y u_{0,y}^- + t_y u_{0,y}^+))dx\right| \\
&\qquad = \left|\int_{\mathbb{R}^N}\big(F(w_y^-) + F(t_y u_{0,y}(x)) - F(w_y^- + t_y u_{0,y}(x))\big)\, dx\right| := \mathcal{I}_y.
\end{aligned}$$

Para isso, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_y &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |(F(w_y^-) + F(t_y u_{0,y}) - F(w_y^- + t_y u_{0,y}))|dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |(F(w_y^- + t_y u_{0,y}) - F(w_y^-) - F(t_y u_{0,y}))|dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |F(w_y^- + t_y u_{0,y}) - F(w_y^-) - F(t_y u_{0,y}) - f(w_y^-) t_y u_{0,y} \\
&\qquad - f(t_y u_{0,y}) w_y^- + f(w_y^-) t_y u_{0,y} + f(t_y u_{0,y}) w_y^-|dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \big|F(w_y^-) + F(t_y u_{0,y}) - F(w_y^- + t_y u_{0,y}) - f(w_y^-) t_y u_{0,y} - f(t_y u_{0,y}) w_y^-\big|\, dx \\
&\qquad + t_y \int_{\mathbb{R}^N} |f(w_y^-)||u_{0,y}|dx + \int_{\mathbb{R}^N} |f(t_y u_{0,y})||w_y^-|dx. \qquad (2.50)
\end{aligned}$$

Uma vez que $w_y^- = v_y^- - t_y u_{0,y}^- \in M$ e, portanto, $\|w_y^-\|^2 \leq R^2$. Além disso, w_y^- pode ser escrito como combinação linear das autofunções $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$, pois $v_y^-, u_{0,y}^- \in E^-$. Como $\dim E^- < \infty$, podemos repetir as estimativas em (2.41) com w_y^- no lugar de $u_{0,y}^-$ e usando o Lema 2.8 para mostrar que existe uma constante $C > 0$, que não depende de y, tal que

$$\begin{aligned}
|w_y^-(x)| &= |v_y^-(x) - t_y u_{0,y}^-(x)| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{k}(\eta_i(y)\varphi_i(x) - t_y \sum_{i=1}^{k}\zeta_i(y)\varphi_i(x)\right| \\
&\leq \left|\sum_{i=1}^{k}(\eta_i(y) - B\zeta_i(y))\varphi_i(x)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k}|\eta_i(y) - B\zeta_i(y)||\varphi_i(x)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k}(|\eta_i(y)| + |-B\zeta_i(y)|)|\varphi_i(x)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k}(\max\{|\eta_i(y)|\} + B\max\{|\zeta_i(y)|\})|\varphi_i(x)| \\
&= C\sum_{i=1}^{k}|\varphi_i(x)| \leq C\sum_{i=1}^{k}\sup_{\mathbb{R}^N}|\varphi_i(x)| := D,
\end{aligned} \tag{2.51}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $D > 1$ também satisfaz $|u_{0,y}(x)| \leq D$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ já que $u_{0,y} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então aplicamos o Lema 2.6 e a hipótese (f_2) para obter uma constante $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_y &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\left|F(w_y^- + t_y u_{0,y}) - F(w_y^-) - F(t_y u_{0,y}) - f(w_y^-)t_y u_{0,y} - f(t_y u_{0,y})w_y^-\right|dx \\
&\quad + t_y\int_{\mathbb{R}^N}|f(w_y^-)||u_{0,y}|dx + \int_{\mathbb{R}^N}|f(t_y u_{0,y})||w_y^-|dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N}C|w_y^-|^\mu|t_y u_{0,y}|^\mu dx + mt_y\int_{\mathbb{R}^N}|w_y^-||u_{0,y}|dx + m\int_{\mathbb{R}^N}|t_y u_{0,y}||w_y^-|dx \\
&= Ct_y^\mu\int_{\mathbb{R}^N}|w_y^-|^\mu|u_{0,y}|^\mu dx + mt_y\int_{\mathbb{R}^N}|w_y^-||u_{0,y}|dx + mt_y\int_{\mathbb{R}^N}|w_y^-||u_{0,y}|dx \\
&= Ct_y^\mu\int_{\mathbb{R}^N}|w_y^-|^\mu|u_{0,y}|^\mu dx + 2mt_y\int_{\mathbb{R}^N}|w_y^-||u_{0,y}|dx,
\end{aligned} \tag{2.52}$$

onde $\mu > 1$ é dado pelo Lema 2.6. Agora, tomando $\xi = \lambda_i < 0 < V_\infty$ no Teorema A.12, vemos que qualquer autofunção φ_i, $i = 1, \cdots, k$, satisfaz

$$|\varphi_i(x)| \leq Ce^{-\delta|x|}, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

para algum $\sqrt{V_\infty} < \delta < \sqrt{V_\infty - \lambda_k}$. Assim, da primeira desigualdade em (2.51), tem-se para $|y|$ suficientemente grande

$$|w_y^-(x)| \leq Ce^{-\delta|x|}, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Como u_0 é uma solução radial positiva do problema (P_∞), dada por Berestycki e Lions em [7], temos que $|u_0(x)| \leq Ce^{-\sqrt{V_\infty}|x|}$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Segue do Lema 2.7 que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |w_y^-||u_{0,y}|dx \leq C\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\delta|x|}e^{-\sqrt{V_\infty}|x-y|}dx \leq Ce^{-\sqrt{V_\infty}|y|}. \tag{2.53}$$

Analogamente, pelo Lema 2.7, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |w_y^-|^\mu|u_{0,y}|^\mu dx \leq C\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\delta\mu|x|}e^{-\mu\sqrt{V_\infty}|x-y|}dx \leq Ce^{-\mu\sqrt{V_\infty}|y|} \leq Ce^{-\sqrt{V_\infty}|y|}, \tag{2.54}$$

pois $\mu > 1$. As estimativas (2.53) e (2.54) aplicada em (2.52) implicam que

$$\mathcal{I}_y \leq Ce^{-\sqrt{V_\infty}|y|}, \tag{2.55}$$

onde a constante $C > 0$ não depende de y já que t_y é uniformemente limitada pelo Lema 2.8. Agora, vamos estimar a integral

$$\frac{t_y^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_\infty)\, u_{0,y}^2(x)dx.$$

Pela hipótese (V_4), segue que

$$\begin{aligned} \frac{t_y^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_\infty)\, u_{0,y}^2(x)dx &= \frac{t_y^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V(x+y) - V_\infty)\, u_0^2(x)dx \\ &\leq -Ce^{-\gamma|y|} \end{aligned} \tag{2.56}$$

para $|y|$ suficientemente grande, onde $C > 0$ não depende de y. Assim, segue de (2.55) e (2.56) que (2.49) pode ser escrito como

$$I(v_y^- + t_y u_{0,y}^+) \leq I_\infty(t_y u_{0,y}) - Ce^{-\gamma|y|} + Ce^{-\sqrt{V_\infty}|y|}.$$

Portanto, pela hipótese (V_4), $0 < \gamma < \sqrt{V_\infty}$, obtemos

$$I(v_y^- + t_y u_{0,y}^+) < \max_{t \geq 0} I_\infty(tu_0),$$

para $|y|$ suficientemente grande. A hipótese (f_5) garante que o máximo $\max\limits_{t\geq 0} I_\infty(tu_0)$ é atingido exatamente quando $t=1$, uma vez que u_0 é ponto crítico não trivial do problema (P_∞). De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I_\infty(tu) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{\|tu\|^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} F(tu)dx\right] \\
&= t\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(tu)udx \\
&= t\int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx - \int_{\mathbb{R}^N} f(tu)udx \\
&= t\int_{\mathbb{R}^N} \left[f(u) - \frac{f(tu)}{t}\right] udx \\
&= t\int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{f(u)}{u} - \frac{f(tu)}{tu}\right] u^2dx.
\end{aligned}$$

Pela hipótese (f_5), temos que $f(u)/u$ é estritamente crescente em $(0,+\infty)$. Dessa forma, se $t>1$ então $tu>u$. O que implica em

$$\frac{f(tu)}{tu} > \frac{f(u)}{u},$$

portanto, $\frac{d}{dt}I_\infty(tu) < 0$. Por outro lado, se $0<t<1$ então $tu<u$. Logo,

$$\frac{f(tu)}{tu} < \frac{f(u)}{u}$$

implica que $\frac{d}{dt}I_\infty(tu) > 0$. Portanto, $I_\infty(u) = \max\limits_{t>0} I_\infty(tu)$.

Como u_0 é uma solução de energia mínima para (P_∞), segue da definição do valor $c>0$ que

$$c \leq \max_{w\in M} I(w) = I(v_y^- + t_y u_{0,y}^+) < \max_{t\geq 0} I_\infty(tu_0) = I_\infty(u_0) = c_\infty,$$

e o lema está provado. $\square$

Por fim, apresentaremos a prova do resultado principal deste capítulo.

Demonstração do Teorema 2.1: Como vimos anteriormente, para $R>0$ e $y\in\mathbb{R}^N$ temos

$$\begin{aligned}
M &= \{w = tu_0^+(\cdot - y) + v^-;\ \|w\|\leq R,\ t\geq 0,\ v^-\in E^-\}, \\
M_0 &= \{w = tu_0^+(\cdot - y) + v^-;\ v^-\in E^-, \|w\| = R,\ t\geq 0 \text{ ou } \|w\|\leq R,\ t=0\} \text{ e} \\
N_\rho &= \{w\in E^+ : \|w\| = \rho > 0\}.
\end{aligned}$$

Mostraremos que $\inf\limits_{N_\rho} I > \max\limits_{M_0} I$. Pelo Lema 2.3, temos que $I|_{M_0} \leq 0$, e isso implica que $\max\limits_{M_0} I \leq 0$. Portanto, é suficiente mostrar que $\inf\limits_{N_\rho} I > 0$. De (2.48) temos que $I(w) > 0$ se $w \in E^+$ com $\|w\| = \rho > 0$. Então $\inf\limits_{N_\rho} I > 0$ e, dessa forma, $\inf\limits_{N_\rho} I > \max\limits_{M_0} I$.

Assim, pelo Teorema 2.2, existe uma sequência de Cerami (u_n) para o funcional I no nível $c > 0$. A menos de subsequência, (u_n) é limitada pelo Lema 2.2. Portanto, $u_n \rightharpoonup u$ para algum $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Pelo Lema 2.5, $c < c_\infty$ e segue pelo Lema de Concentração e Compacidade de Lions (Splitting Lema) que, de fato, a menos de subsequência, $u_n \to u$ fortemente em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

De fato, temos que $I'(u) = 0$, consequentemente

$$I(u) = I(u) - \frac{1}{2}I'(u)u = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} f(u)u - F(u) \right) dx > 0,$$

pela hipótese (f_3). Então, se a convergência forte $u_n \to u$ não valesse, o Splitting forneceria $k \geq 1$ soluções não triviais, $w_1, \cdots, w_k$ do problema (P_∞) tais que

$$c + o_n(1) = I(u_n) = I(u) + \sum_{i=1}^{k} I_\infty(w_i) + o_n(1) \geq kc_\infty + o_n(1).$$

Isso significa que $c \geq c_\infty$, contradizendo o Lema 2.5. Portanto, $u_n \to u$ e já que I é um funcional de classe C^1 , $I(u) = c > 0$ com $I'(u) = 0$ e, portanto, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca não trivial do problema (P). A prova do teorema está concluída. $\square$

Apêndice A

Resultados Importantes

Neste apêndice enunciaremos os principais lemas e teoremas utilizados no decorrer deste trabalho. Para isso, lembraremos algumas definições e resultados importantes de Teoria da Medida, Análise Funcional e Equações Diferenciais Parcais, além da teoria espectral para operadores auto-adjuntos, espectro, autovalores e autofunções de um operador linear. Destaca-se que os resultados aqui apresentados neste apêndice não serão demonstrados.

A.1 Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

Teorema A.1. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável e (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge q.t.p. em Ω para uma função mensurável f de valor real. Se existe uma função integrável g tal que

$$|f_n| \leq g, \text{ q.t.p. em } \Omega, \forall n \in \mathbb{N},$$

então f é integrável e vale que

$$\int_\Omega f dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n dx.$$

Demonstração. Veja [2], Teorema 5.6 □

Além do mais, relembremos outros conceitos de Teoria da Medida utilizados no trabalho.

Lema A.1. (Lema de Fatou) Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em $M^+(X,\Sigma)$, então

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu,$$

em que $M^+(X,\Sigma)$ corresponde ao conjunto das funções mensuráveis não negativas em X que possuem integral finita.

Demonstração. Veja [2], Lema 4.8. $\square$

Teorema A.2. (Teorema de Vainberg) Seja (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e seja $f \in L^p(\Omega)$ tal que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. Então, existe uma subequência (f_{n_k}) e uma função $h \in L^p(\Omega)$; tal que

a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω;

b) $f_{n_k}(x) \leq h(x)$ q.t.p. em Ω.

Demonstração. Veja [9], Teorema 4.9.

A.2 Lema de Lions

Lema A.2. Seja $r > 0$ e $2 \leq q < 2^*$. Se u_n é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e se

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u_n|^q dx \to 0, \ \text{ quando } \ n \to \infty,$$

então $u_n \to 0$, em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $2 < p < 2^*$.

Demonstração. Veja [38], Lema 1.21.

A.3 Espaços L^p

Nesta seção, definiremos os espaços L^p e enunciaremos uma desigualdade bastante utilizada ao longo do trabalho, a desigualdade de Hölder. Esta seção teve como base as seguintes bibliografias [2, 8].

Definição A.1. Seja (X,Σ,μ) um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. O conjunto de todas as funções mensuráveis de X em $\mathbb{K}$, tais que

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p dx\right)^{1/p} < \infty$$

será denotado por $L^p(X,\Sigma,\mu)$.

Definição A.2. Dado $1 < p < +\infty$, dizemos que $p' \in \mathbb{R}$, tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

é o expoente conjugado de p. Além disso, $p' = +\infty$ quando $p = 1$.

Teorema A.3. (Desigualdade de Hölder) Sejam $p, q > 1$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ e (Ω, Σ, μ) um espaço de medida. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Lema A.3. (Desigualdade de Young) Sejam p e p' números reais satisfazendo $1 < p < \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Então para todos A e B não negativos e para todo $\delta > 0$, vale a desigualdade

$$AB \leq \delta A^p + C_\delta B^{p'}.$$

Definição A.3. Seja $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis que são limitadas μ-quase sempre, isto é, existem um conjunto $N \in \Sigma$ e um número real K tais que $\mu(N) = 0$ e $|f(x)| \leq K$ para todo $x \notin N$. Se $f \in L(X, \Sigma, \mu)$ definimos

$$S_f(N) = \sup\{|f(x)| : x \notin N\} \quad \text{e} \quad \|f\|_\infty = \inf\{S_f(N) : N \in \Sigma \ \text{ e } \ \mu(N) = 0\}.$$

Isto é, $L^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{R}; f \ \text{ é mensurável e } \ \|f\|_\infty < \infty\}$.

Definição A.4. Dizemos que uma função $f : X \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é localmente integrável em X quando f é integrável a Lebesgue em todo compacto $K \subset X$, ou seja,

$$\int_K |f| dx < \infty.$$

O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^p_{loc}(X)$.

A.4 Espaço de Sobolev

Nesta seção, abordaremos a definição do Espaço de Sobolev e suas imersões, as quais são fortemente utilizadas no decorrer do trabalho. Os conceitos aqui apresentados podem ser encontrados nas seguintes bibliografias [9, 17].

Definição A.5. Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e um multi-índice α, dizemos que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ é a α-ésima derivada fraca de u se

$$\int_\Omega u(x)D^\alpha \varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definição A.6. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos o espaço de Sobolev

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq k\},$$

como sendo o espaço das funções $u \in L^p(\Omega)$ cuja derivada fraca também está em $L^p(\Omega)$.

Teorema A.4. O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.

Observação A.1. Quando $p = 2$, denotaremos $W^{k,2}(\Omega) := H^k(\Omega)$, em particular, para $k = 1$ temos

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ para } i = 1, \ldots, n\right\},$$

que é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)dx\right)^{1/2}.$$

Definição A.7. Se $1 \leq p < n$, o número p^* abaixo é conhecido como expoente crítico de Sobolev

$$p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Definição A.8. Sejam X e Y dois espaços normados com $X \subseteq Y$. Dizemos que X está imerso continuamente em Y se existe $C > 0$ tal que

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \forall x \in X.$$

Denotamos $X \hookrightarrow Y$. Equivalentemente, é o mesmo que dizer que a aplicação identidade $i : X \to Y$ dada por $i(x) = x$, é contínua.

Definição A.9. Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados com $X \hookrightarrow Y$. Dizemos que a imersão de X em Y é compacta se a aplicação identidade $i : X \to Y$ for compacta. Nesse caso dizemos que X está imerso compactamente em Y e escrevemos :$X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$. Analogamente, se toda sequência $(u_m) \subset X$ limitada possui subsequência convergente em Y.

Teorema A.5. (Imersões contínuas) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, então:

i) $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$, para todo $2 \leq p < \infty$ e $N = 1,2$;

ii) $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$, para todo $2 \leq p \leq 2^*$ e $N \geq 3$.

Teorema A.6. (Imersões compactas) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado, então:

i) $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$, para todo $1 \leq p < \infty$ e $N = 1,2$;

ii) $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$, para todo $1 \leq p < 2^*$ e $N \geq 3$.

A.5 Princípio Variacional de Ekeland

O resultado a seguir pode ser encontrado em [38] no Teorema 2.4 ou em [19].

Teorema A.7. Seja (X,d) um espaço métrico completo e $I : X \to (-\infty, +\infty]$ um funcional semicontínuo inferiormente. Suponhamos que I seja limitado inferiormente e sejam $\varepsilon > 0, \lambda > 0$ e $v \in X$, tais que

$$I(v) \leq \inf_{u \in X} I(u) + \frac{\varepsilon}{2}$$

existe $u_\varepsilon \in X$ de modo que:

i) $I(u_\varepsilon) \leq I(v)$;

ii) $d(v, u_\varepsilon) \leq \dfrac{1}{\lambda}$;

iii) $I(u_\varepsilon) < I(w) + \varepsilon\lambda d(u_\varepsilon, w)$, para $w \in X$ e $w \neq u_\varepsilon$.

A.6 Princípio do Máximo Forte

Essa seção está baseada na bibliografia [17].

Definição A.10. Considere Ω um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^N$. Dizemos que um operador diferencial parcial L é uniformemente elíptico se existe uma constante $\theta > 0$, tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta(x)|\xi|^2$$

para todo $x \in \Omega$ e $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Seja L um operador uniformemente elíptico na forma não divergente

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} + cu$$

com coeficientes a^{ij}, b^i e c contínuos e, sem perda de generalidade, assuma que $a^{ij} = a^{ji}$. Com essas hipóteses, enunciemos uma versão do Princípio do Máximo Forte considerando o termo de ordem zero sendo não negativo.

Teorema A.8. Assuma que $u \in C^2(\Omega) \cap C)\overline{\Omega}$ e $c \geq 0$ em Ω. Suponha também que Ω seja conexo, então:

i) se $Lu \leq 0$ em Ω e u atinge máximo não negativo sobre $\overline{\Omega}$, em um ponto interior, então u é constante em Ω;

ii) similarmente, se $Lu \geq 0$ em Ω e u atinge mínimo não positivo sobre $\overline{\Omega}$, em um ponto interior, então u é constante em Ω.

A.7 Teoria Espectral

Nesta seção, apresentamos conceitos e teoremas fundamentais relacionados a teoria espectral, sobretudo ao espectro de um operador auto-adjunto de Schödinger, encontrado em [37].

Definição A.11. Seja $L : D(L) \subset H \to H$ um operador linear cujo domínio $D(L)$ é um subespaço denso de H. O operador adjunto $L^* : D(L^*) \subset H \to H$ é definido como:

$$v \in D(L^*) \iff \begin{cases} v \in H \;\text{ e existe um elemento }\; w \in H \\ \text{tal que }\; \langle Lu, v\rangle = \langle u, v\rangle \;\text{ para todo }\; u \in D(L). \end{cases}$$

e

$$L^* v = w \;\text{ para todo }\; v \in D(L^*)$$

onde w é o (único, pela densidade de $D(L)$ em H) elemento associado a v na definição de $D(L^*)$. O operador L é considerado auto-adjunto $\iff L = L^*$ no sentido de que $D(L) = D(L^*)$ e $L^* v = Lv$ para todo $v \in D(L^*)$.

Definição A.12. Dado $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, definimos o operador de Schrödinger $S : D(S) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ gerado pelo potencial V por

$$D(S) = H^2(\mathbb{R}^N) \;\text{ e }\; Su = -\Delta u + Vu \;\text{ para }\; u \in H^2(\mathbb{R}^n).$$

Teorema A.9. Para $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, o operador de Schrödinger $S : D(S) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ gerado pelo potencial V é auto-adjunto.

Demonstração. Veja [37], Teorema 3.8. □

Definição A.13. Seja $L : D(L) \subset H \to H$ um operador auto-adjunto. Seu conjunto resolvente é

$$\rho(L) = \{\lambda \in \mathbb{R}; L - \lambda I : D(L) \to H \text{ é um isomorfismo}\}$$

e seu espectro o conjunto

$$\sigma(L) = \mathbb{R} \backslash \rho(L).$$

Os elementos de $\rho(L)$ são chamados valores regulares de L. O espectro pontual é dado pelo conjunto

$$\sigma_p(L) = \{\lambda \in \mathbb{R}; ker(L - \lambda I) \neq \{0\}\}$$

e seus elementos são chamados autovalores de L. O espectro discreto de L é o conjunto

$$\sigma_d(L) = \{\lambda \in \sigma_p(L); dim\, ker(L - \lambda I) < \infty \text{ e } \lambda \text{ é um ponto isolado de } \sigma_p(L)\}.$$

e seu complemento em $\sigma(L)$ é chamado espectro essencial,

$$\sigma_e(L) = \sigma(L) \backslash \sigma_d(L).$$

Observação A.2. Para qualquer $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ considerando

$$\Lambda = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx;\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = 1 \right\},$$

esse número Λ caracteriza o ínfimo do espectro de S. Além do mais, $\Lambda \geq -\|V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$. De fato,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx \geq -\|V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx.$$

Teorema A.10. Seja $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então,

i) $\sigma(S) \subset [\Lambda, \infty)$

ii) $\Lambda \in \sigma(S)$.

Demonstração. Veja [37], Teorema 3.10 □

Observação A.3. Conforme o teorema acima, o espectro do operador S nunca está vazio e, em particular, $\Lambda = \inf \sigma(S)$.

Lema A.4. Seja $V \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$. Para $\varepsilon > 0$, seja X um subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx \leq (l-\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \text{ para todo } u \in X.$$

Então, $dimX < \infty$.

Demonstração. Veja [37], Lema 3.14. □

O teorema a seguir é relativo ao espectro essencial do operador S.

Teorema A.11. Seja $V \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$, então $\sigma_e(S) \subset [l, +\infty)$. Em particular, se V satisfaz

$$V_\infty := \lim_{R \to +\infty} V(x),$$

temos $\sigma_e(S) \subset [V_\infty, +\infty)$.

Demonstração. veja [37], Teorema 3.15. □

Note que pelo teorema a seguir, abaixo do espectro essencial de S as autofunções decaem exponencialmente.

Teorema A.12. Seja $V \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ e considere $\xi < V_\infty$. Para qualquer $\mu \in (0, \sqrt{V_\infty - \xi})$, existe uma constante C, dependendo apenas de ξ e μ, tal que

$$|u(x)| \leq C\|u\|_\infty e^{-\mu|x|}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N,$$

desde que $u \in ker(S - \lambda u)$, para algum $\lambda \leq \xi$.

Demonstração. Veja [37], Teorema 3.19. □

Apêndice B

Convergência Uniforme

A convergência a seguir será usada fortemente no Lema 2.3. Considere ∂B_1 a fronteira de B_1, onde B_1 é a bola aberta de raio um em um espaço de dimensão finita gerado pelas funções $u_0^+(\cdot - y), \phi_1, \cdots, \phi_n$.

Lema B.1. Vale que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{m}{2} - \frac{F(Ru)}{(Ru)^2} \right) u^2 dx = 0,$$

uniformemente para $u \in \partial B_1$.

Demonstração. De fato, para cada $R = k \in \mathbb{N}$, considere $J_k : \partial B_1 \to \mathbb{R}$ o funcional dado por $J_k(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{m}{2} - \frac{F(ku)}{(ku)^2} \right) u^2 dx$. A continuidade da função F mostra que J_k é um funcional contínuo para cada k fixo. A hipótese (f_2) e a equivalência das normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_E$ mostram que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$0 \le J_k(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{m}{2} - \frac{F(ku)}{(ku)^2} \right) u^2 dx \le m\|u\|_E^2 \le C$$

para todo $u \in \partial B_1$. A continuidade do funcional J_k no conjunto compacto ∂B_1 garante que, para cada k fixo, o funcional J_k assume seu máximo em $u_k \in \partial B_1$. Considere (u_k) a sequência desses máximos. Como $\|u_k\| = 1$ para cada k e o espaço gerado pelas funções $u_0^+(\cdot - y), \phi_1, \cdots, \phi_k$ é de dimensão finita, existe $\overline{u} \in \partial B_1$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_k \to \overline{u} \tag{B.1}$$

fortemente na norma $\|\cdot\|$. Para toda $u \in \partial B_1$ e para cada k, temos $0 \le J_k(u) \le J_k(u_k)$, isto é,

$$0 \le \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{m}{2} - \frac{F(ku)}{(ku)^2} \right) u^2 dx \le \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{m}{2} - \frac{F(ku_k)}{(ku_k)^2} \right) u_k^2 dx \tag{B.2}$$

para toda u e para cada k. Tomando o limite $k \to \infty$, primeiramente, note que

$$u_k(x) \to \overline{u}(x), \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Assim, se $\overline{u}(x) \neq 0$, segue que $|k\overline{u}(x)| \to \infty$ quando $k \to \infty$. Portanto, a hipótese (f_2) garante que

$$\left(\frac{m}{2} - \frac{F(ku_k(x))}{(ku_k(x))^2}\right) u_k(x)^2 \to 0 \tag{$B.3$}$$

quando $k \to \infty$, pois o primeiro termo converge para zero e u_k é limitado. Se $\overline{u}(x) = 0$, então o primeiro termo é limitado e também temos $(B.3)$. Pela convergência forte em $(B.1)$, existe uma função $\overline{h} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de subsequência,

$$0 \leq \left(\frac{m}{2} - \frac{F(ku_k(x))}{(ku_k(x))^2}\right) u_k(x)^2 \leq m|u_k^2(x)| \leq m\overline{h}(x) \in L^1(\mathbb{R}^N). \tag{$B.4$}$$

Finalmente, por $(B.3)$ e $(B.4)$, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{m}{2} - \frac{F(ku_k)}{(ku_k)^2}\right) u_k^2 dx = 0.$$

Logo, fazendo $k \to \infty$ em $(B.2)$, temos

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{m}{2} - \frac{F(ku)}{(ku)^2}\right) u^2 dx = 0$$

uniformemente em $u \in \partial B_1$. $\square$

Apêndice C

Teorema de Linking

Neste apêndice, apresentaremos algumas definições e resultados necessários para demonstrar o Teorema de Linking. Para isso, usamos como referência as bibliografias [11, 38].

Definição C.1. Uma retração de um espaço topológico X em um subespaço Y é uma aplicação contínua $R : X \to Y$, tal que $R(y) = y$, para todo $y \in Y$.

Denotando $B^N := \{x \in \mathbb{R}^N; |x| \leq 1\}$ a bola unitária em $\mathbb{R}^N$ e $S^{N-1} := \{x \in \mathbb{R}^N; |x| = 1\}$ a esfera unitária, temos

Teorema C.1. Não existe retração contínua de B^N em S^{N-1}.

Teorema C.2. Seja X um espaço de Banach, M um espaço métrico, M_0 um subespaço fechado de M e $\Gamma_0 \subset C(M_0, X)$. Defina

$$\Gamma := \{\gamma \in C(M,X) : \gamma|_{M_0} \in \Gamma_0\}.$$

Se $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$ saisfaz

$$+\infty > c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in M} \varphi(\gamma(u)) > a := \sup_{\gamma_0} \sup_{u \in M_0} \varphi(\gamma_0(u))$$

então, para todo $\varepsilon \in (0, (c-a)/2), \delta > 0$ e $\gamma \in \Gamma$, tais que

$$\sup_M (\varphi \circ \gamma) \leq c + \varepsilon,$$

existe $u \in X$, tal que

a) c-$2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon$,

b) $\operatorname{dist}(u, \gamma(M)) \leq 2\delta$,

c) $(1+\|u\|)\|\varphi'(u)\|_{X^*} < 8\varepsilon/\delta$.

Teorema C.3. Sob as hipóteses do teorema anterior, existe uma sequência $(u_n) \subset X$ satisfazendo

$$\varphi(u_n) \to c \quad \text{e} \quad (1+\|u\|)\|\varphi'(u)\|_{X^*} \to 0.$$

Em particular, se φ satisfaz a condição $(Ce)_c$, então c é um valor crítico de φ.

Demonstração. Pelo Teorema A.2, para cada $\varepsilon \in (0,(c-1)/2)$ existe $u \in X$, tal que

$$c-2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c+2\varepsilon \quad \text{e} \quad (1+\|u\|)\|\varphi'(u)\|_{X^*} \leq 8\varepsilon/\delta.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $\varepsilon = (c-a)/2n$. Então, existe $u_n \in X$, tal que

$$c - \frac{c-a}{n} \leq \varphi(u_n) \leq c + \frac{c-a}{n}$$

e

$$(1+\|u_n\|)\|\varphi'(u_n)\|_{X^*} \leq \frac{8(c-a)}{n\delta}.$$

Assim, quando $n \to +\infty$, temos

$$\varphi(u_n) \to c \;\; \text{e} \;\; (1+\|u_n\|)\|\varphi'(u_n)\|_{X^*} \to 0.$$

□

Teorema C.4. (Teorema de Linking sob a condição $(Ce)_c$) Seja $X = Y \oplus Z$ um espaço de Banach com $\dim Y < \infty$. Seja $\rho > r > 0$ e seja $z \in Z$ tal que $\|z\| = r$. Defina

$$\begin{aligned} M &:= \{u = y+\lambda z : \|u\| \leq \rho, \lambda \geq 0, y \in Y\}; \\ M_0 &:= \{u = y+\lambda z : y \in Y, \|u\| = \rho \;\text{ e }\; \lambda \geq 0 \;\text{ ou }\; \|u\| \leq \rho \;\text{ e }\; \lambda = 0\}; \\ N &:= \{u \in Z : \|u\| = r\}. \end{aligned}$$

Seja $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$, tal que

$$b := \inf_N \varphi > a := \max_{M_0} \varphi.$$

Se φ satisfaz a condição $(Ce)_c$ com

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in M} \varphi(\gamma(u)) \;\; \text{e} \;\; \Gamma := \{\gamma \in C(M,X) : \gamma|_{M_0} = id\},$$

então c é um valor crítico de φ.

Demonstração. Para aplicar o Teorema C.3, devemos verificar que $c \geq b$. Assim, vamos provar que para todo $\gamma \in \Gamma, \gamma(M) \cap N \neq \emptyset$. Denote por P a projeção de X sobre Y tal que $PZ = 0$ e por R a retração de $Y \oplus \mathbb{R}_z \backslash \{z\}$ sobre M_0. Se $\gamma(M) \cap N = \emptyset$, então a aplicação

$$\begin{aligned} r : M &\rightarrow M_0 \\ u &\mapsto R(P\gamma(u) + \|(I-P)\gamma(u)\| r^{-1} z) \end{aligned}$$

é uma retração de M sobre M_0. De fato, para $u = y + \lambda z \in M_0$ segue que

$$\begin{aligned} r(u) &= R(P\gamma(u) + \|(I-P)\gamma(u)\| r^{-1} z) \\ &= R(P\gamma(y+\lambda z) + \|(I-P)\gamma(y+\lambda z)\| r^{-1} z) \\ &= R(P(y+\lambda z) + \|y+\lambda z - P(y+\lambda z)\| r^{-1} z) \\ &= R(y + \|y+\lambda z - y\| r^{-1} z) \\ &= R(y + \lambda \|z\| r^{-1} z) = y + \lambda z = u, \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois M é homeomórfico a uma bola de dimensão finita (Teorema C.1). Logo, $\gamma(M) \cap N \neq \emptyset$. Assim, existe $v \in \gamma(M) \cap N$ tal que para todo $\gamma \in \Gamma$,

$$\max_M (\varphi \circ \gamma) \geq \varphi(\gamma(u)) = \varphi(v) \geq \inf_N \varphi = b$$

Assim,

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in M} \varphi(\gamma(u)) \geq b.$$

Pelo Teorema C.3, existe uma sequência de Cerami em que c é um valor crítico de φ. $\square$

Apêndice D

Diferenciabilidade do Funcional I

O objetivo desse apêndice é mostrar que o funcional I, definido no Capítulo 1, é de classe C^1. Para isso, revisemos alguns conceitos de diferenciabilidade, que podem ser encontrados nas bibliografias [19, 38].

Definição D.1. Dado um espaço de Banach X e um funcional $I : X \to \mathbb{R}$, dizemos que I possui Derivada de Gateaux no ponto $u \in X$ quando existir um funcional linear $T_0 \in X'$, tal que

$$\lim_{t\to 0} \frac{I(u+tv) - I(u) - T_0 v}{t} = 0, \text{ para todo } v \in X.$$

Quando existe, T_0 é dita a Derivada de Gateaux de I, que é única e vamos denotá-la por $DI(u)$.

Definição D.2. Dado um espaço de Banach X e um funcional $I : X \to \mathbb{R}$, dizemos que I possui Derivada de Fréchet no ponto $u \in X$ quando existir um funcional linear $T \in X'$, tal que

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Tv}{\|v\|} = 0.$$

Quando existe, T é dita a Derivada de Fréchet de I, que é única e vamos denotá-la por $I'(u)$.

Definição D.3. Se A é um conjunto aberto em X, dizemos que I é de classe C^1 em A ou que $I \in C^1(A,\mathbb{R})$ quando a derivada de Fréchet de I existir em todo ponto $u \in A$ e a aplicação $I' : A \to X'$ é contínua.

Observação D.1. Todo funcional Fréchet diferenciável também é Gateaux diferenciável.

Proposição D.1. Se I possui derivada de Gateaux contínua em A, então $A \in C^1(A,\mathbb{R})$.

Agora mostraremos que o funcional $I : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx$$

é de classe C^1, isto é, a derivada de Gateaux existe e é contínua. Para isso, considere os seguintes funcionais auxiliares

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx \quad \text{e} \quad J_2(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx,$$

onde $I(u) = J_1(u) - J_2(u)$. Para esse fim, provaremos que os funcionais J_1 e J_2 são de classe C_1.

Proposição D.2. O funcional $I(u) : H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx$$

é de classe C^1 e possui derivada dada por

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração. Dividiremos a prova em casos. Primeiramente, mostremos que o funcional J_1 definido por

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx$$

é de classe C^1 e possui derivada dada por

$$J_1'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Assim, vamos calcular a Derivada de Gateaux DJ_1. Sejam $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{J_1(u+tv) - J_1(u)}{t} &= \frac{1}{2t}\left[\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u + tv|^2 + V(x)|u+tv|^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx\right] \\
&= \frac{1}{t}\left[\frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v|^2 + V(x)v^2)dx + t\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx\right].
\end{aligned}$$

Portanto, a derivada de Gateaux $DJ_1(u)$ existe, e é dada por

$$DJ_1(u)v = \lim_{t \to 0}\frac{J_1(u+tv) - J_1(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx.$$

Além do mais, segue que

$$|DJ_1(u)v| = |\langle u,v\rangle_E| \leq \|u\|\|v\|,$$

onde a norma em E é equivalente a norma em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Mostraremos agora que o operador DJ_1 é contínuo. Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$. Assim, para cada $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|v\| \leq 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\|J_1(u_n) - DJ_1(u)\|_{E^*} &= \sup_{\|v\|\leq 1} |DJ_1(u_n)v - DJ_1(u)v| \\
&= \sup_{\|v\|\leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_n - u)\nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(u_n - u)v dx \right| \\
&= \sup_{\|v\|\leq 1} |DJ_1(u_n - u)v| \\
&\leq \sup_{\|v\|\leq 1} \|u_n - u\|\|v\| = \|u_n - u\| \to 0
\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Logo, concluímos que o operador DJ_1 é contínuo, portanto, o funcional J_1 é de classe C^1. Agora, verificaremos que o funcional J_2, dado por

$$J_2(u) = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v dx$$

é de classe C^1 e possui derivada dada por

$$J_2'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v dx, \;\; \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Para isso, calculemos a Derivada de Gateaux de DJ_2. Seja $x \in \mathbb{R}$ e $t \in [0,1]$ defina

$$\begin{aligned}
g : [0,1] &\to \mathbb{R} \\
g(s) &\mapsto F(u(x) + stv(x))
\end{aligned}$$

em que $g(0) = F(u(x)),\ g(1) = F(u(x) + tv(x))$ e $g'(s) = f(u(x) + stv(x))tv(x)$. Como g é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, pelo Teorema do Valor Médio existe $\lambda \in [0,1]$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{g(1) - g(0)}{t} &= \frac{F(u(x) + tv(x)) - F(u(x))}{t} \\
&= f(u(x) + \lambda(x)tv(x))v(x).
\end{aligned}$$

Da condição de crescimento da função f e sabendo que $(a+b)^p \leq 2^p(a^p+b^p)$, obtemos

$$|f(u(x)+\lambda(x)tv(x)| \leq 2^q\delta(|u(x)|^q+|v(x)|^q)+2^\eta C_\delta(|u(x)^\eta+|v(x)|^\eta).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(u(x)+tv(x))-F(u(x))}{t}\right| &= |f(u(x)+\lambda(x)tv(x))v(x)| \\
&\leq [\delta|u(x)+\lambda(x)tv(x)|^q+C_\delta|u(x)+\lambda(x)tv(x)|^\eta]\,|v(x)| \\
&\leq [2^q\delta(|u(x)|^q+|v(x)|^q)+2^\eta C_\delta(|u(x)|^\eta+|v(x)|^\eta)]\,|v(x)| \\
&= 2^q\delta(|u(x)|^q+|v(x)|^q)|v(x)|+2^\eta C_\delta(|u(x)|^\eta+|v(x)|^\eta)|v(x)|.
\end{aligned}$$

Da desigualdade de Hölder e a continuidade das imersões de $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$, com $p \in [2,2^*]$, temos que $2^q\delta(|u(x)|^q+|v(x)|^q)|v(x)|+2^\eta C_\delta(|u(x)|^\eta+|v(x)|^\eta)|v(x)| \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned}
DJ_2(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{J_2(u+tv)-J_2(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(u(x)+tv(x))-F(u(x))}{t}dx \\
&= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} f(u(x)+\lambda(x)tv(x))v(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(u(x))v(x)dx,
\end{aligned}$$

e assim, existe a derivada de Gateaux de J_2, que é dada por

$$J_2'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} f(u(x))v(x)dx, \ \ \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Mostraremos que o operador DJ_2 é contínuo. Considere uma sequência $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Como a imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ é contínua, então $u_n \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Do Teorema de Vainberg, existe uma subsequência de (u_n) e uma função $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$u_n(x) \to u(x), \ \text{ q.t.p. em } \ \mathbb{R}^N$$

e

$$|u_n(x)| \leq g(x), \ \text{ q.t.p. em } \ \mathbb{R}^N.$$

Como f é contínua, temos que

$$f(u_n(x)) \to f(u(x)), \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

assim,

$$f(u_n(x))v(x) \to f(u(x))v(x), \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Novamente, pelo crescimento da função f obtemos

$$|f(u_n(x))v(x)| \leq \delta|u_n(x)|^q|v(x)| + C_\delta|u_n(x)|^\eta|v(x)| \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)vdx \to \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx,$$

ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)vdx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx\right| \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Seja $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\|v\| \leq 1$, temos que

$$\|DJ_2(u_n) - DJ_2(u)\| \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Dessa forma, $DJ_2(u_n) \to DJ_2(u)$. Concluimos que o funcional J_2 é contínuo, portanto, é de classe C^1.

Como definido anteriormente, $I(u) = J_1(u) - J_2(u)$, assim, como I possui Derivada de Gateaux e é contínua, provamos que I é um funcional de classe C^1, como queríamos provar. $\square$

Bibliografia

[1] Alves, C. O., Carrião, P. C., and Medeiros, E. S. (2004). Multiplicity of solutions for a class of quasilinear problem in exterior domains with Neumann conditions. *Abstr. Appl. Anal.*, 3:251–268.

[2] Bartle, R. G. (1996). *The elements of integration*. John Wiley & Sons.

[3] Bartsch, T. and Qiang Wang, Z. (1995). Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on $\mathbb{R}^n$. *Comm. Partial Differential Equations*, 20(9-10):1725–1741.

[4] Bartsch, T. and Wang, Z. Q. (1996). On the existence of sign changing solutions for semilinear Dirichlet problems. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 7(1):115–131.

[5] Benci, V. and Cerami, G. (1987). Positive solutions of some nonlinear elliptic problems in exterior domains. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 99(4):283–300.

[6] Benci, V. and Cerami, G. (1990). Existence of positive solutions of the equation $-\delta u + a(x)u = u^{(N+2)(N-2)}$ in $\mathbb{R}^n$. *J. Funct. Anal.*, 88(1):90–117.

[7] Berestycki, H. and Lions, P. L. (1983). Nonlinear scalar field equations. I: Existence of a ground state. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 82(4):313–345.

[8] Botelho, G., Pellegrino, D., and Teixeira, E. (2015). *Fundamentos de análise funcional*. SBM.

[9] Brezis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, volume 2. Springer, Nova York.

[10] Cao, D. (1993). Multiple solutions for a Neumann problem in an exterior domain. *Commu. Partial Differential Equations*, 18(3-4):687–700.

[11] Cardoso, M. B. (2020). Equações elípticas assintoticamente lineares com potencial que muda de sinal.

[12] Cerami, G. (1978). An existence criterion for the critical points on unbounded manifolds. *Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*, 112(2):332–336.

[13] Chen, J. and Li, S. (2003). Existence and multiplicity of nontrivial solutions for an elliptic equation on $\mathbb{R}^n$ with indefinite linear part. *Manuscripta Math.*, 111(2):221–239.

[14] Clapp, M. and Maia, L. A. (2016). A positive bound state for an asymptotically linear or superlinear Schrödinger equation. *J. Differential Equations*, 260(4):3173–3192.

[15] Costa, D. G. and Tehrani, H. (2003). Existence and multiplicity results for a class of Schrödinger equations with indefinite nonlinearities. *Adv. Differential Equations*, 8(11):1319–1340.

[16] Egorov, Y. V. and Kondratiev, V. A. (1996). *On spectral theory of elliptic operators*, volume 89. Birkhäuser.

[17] Evans, L. C. (2010). *Partial differential equations*, volume 19. American Mathematical Society.

[18] Evéquoz, G. and Weth, T. (2012). Entire solutions to nonlinear scalar field equations with indefinite linear part. *Adv. Nonlinear Stud.*, 12(2):281–314.

[19] Figueiredo, G. (2015). Uma introdução a teoria dos pontos críticos.

[20] Furtado, M. F., Maia, L. A., and Medeiros, E. S. (2008). Positive and nodal solutions for a nonlinear Schrödinger equation with indefinite potential. *Adv. Nonlinear Stud.*, 8(2):353–373.

[21] Gongbao, L. and Shusen, Y. (1989). Eigenvalue problems for quasilinear elliptic equations on $\mathbb{R}^n$. *Comm. Partial Differential Equations*, 14(8-9):1291–1314.

[22] Jeanjean, L. and Tanaka, K. (2002). A positive solution for an asymptotically linear elliptic problem on $\mathbb{R}^n$ autonomous at infinity. *ESAIM: Control Optim. Calc. Var.*, 7:597–614.

[23] Khatib, A. and Maia, L. A. (2018). A positive bound state for an asymptotically linear or superlinear Schrödinger equation in exterior domains. *Communications on Pure & Applied Analysis*, 17(6).

[24] Kryszewski, W. and Szulkin, A. (1998). Generalized linking theorem with an application to a semilinear Schrödinger equation. *Adv. Differential Equations*, 3(3):441–472.

[25] Li, G. and Wang, C. (2011). The existence of a nontrivial solution to a nonlinear elliptic problem of linking type without the Ambrosetti-Rabinowitz condition. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 36(2):461–480.

[26] Lions, P. L. (1984a). The concentration-compactness principle in the calculus of variations. the locally compact case. I. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1(4):223–283.

[27] Lions, P. L. (1984b). The concentration-compactness principle in the calculus of variations. the locally compact case. II. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1(2):109–145.

[28] Liu, Z., Su, J., and Weth, T. (2006). Compactness results for Schrödinger equations with asymptotically linear terms. *J. Differential Equations*, 231(2):501–512.

[29] Maia, L. A., Junior, J. O., and Ruviaro, R. (2017). A non-periodic and asymptotically linear indefinite variational problem in $\mathbb{R}^n$. *Indiana University Mathematics Journal*, 66:31–54.

[30] Miranda, C. (1940). Un'osservazione su un teorema di brouwer. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 2(3):5–7.

[31] Pankov, A. (2005). Periodic nonlinear Schrödinger equation with application to photonic crystals. *Milan J. Math*, 73:259–287.

[32] Rabinowitz, P. H. (1978). Some critical point theorems and applications to semilinear elliptic partial differential equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 5(1):215–223.

[33] Rabinowitz, P. H. (1992). On a class of nonlinear Schrödinger equations. *Z. Angew. Math. Phys.*, 43(2):270–291.

[34] Sirakov, B. (2000). Existence and multiplicity of solutions of semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 11(2):119–142.

[35] Strauss, W. A. (1977). Existence of solitary waves in higher dimensions. *Comm. Math. Phys.*, 55:149–162.

[36] Struwe, M. (1984). A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities. *Math. Z.*, 187(4):511–517.

[37] Stuart, C. (1998). An introduction to elliptic equations em $\mathbb{R}^n$. *Nonlinear Funct. Anal. Applic. Differential Equations*, pages 237–285.

[38] Willem, M. (1996). *Minimax theorems*. Springer Science & Business Media, Boston.