UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

MATEUS DE CARVALHO MAIA

Sistemas Formais como Formalizações de Conceitos: Da Desinterpretação aos Resultados Limitativos

BRASÍLIA

2023

MATEUS DE CARVALHO MAIA

Sistemas Formais como Formalizações de Conceitos: Da Desinterpretação aos Resultados Limitativos

Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da UnB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Filosofia.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo A. Freire

BRASÍLIA

2023

MATEUS DE CARVALHO MAIA

Sistemas Formais como Formalizações de Conceitos: Da Desinterpretação aos Resultados Limitativos

Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da UnB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Filosofia.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo A. Freire

Data de aprovação: ___/___/___

Banca examinadora:

____

Rodrigo A. Freire

(Orientador)

____

Alexandre Costa-Leite

(Examinador)

____

Edgar L. B. Almeida

(Examinador)

DEDICATÓRIA

Para Hering Moreira Maia, meu pai, a quem prometi um dia ser mestre.

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas contribuíram para que esta dissertação pudesse ser feita. Ainda que correndo o risco de ser injusto ao não citar alguém, agradeço aos meus pais, Hering Moreira Maia e Raquel Medeiros de Carvalho, que durante toda a minha vida me proporcionaram um ambiente em que eu pudesse focar apenas em estudar. Sou grato aos meus avós, Antônio José de Carvalho e Elza da Conceição Medeiros de Carvalho, que sempre cuidaram de mim como um filho. Agradeço à minha namorada, Talita Camilo Lemos, que esteve ao meu lado durante os processos mais difíceis desse período. Não posso deixar de citar o meu orientador e grande amigo Rodrigo Freire, que me ajuda desde o primeiro dia em que nos conhecemos, ao longo da graduação em Filosofia. Por fim, faço questão de citar nominalmente o professor Edgar Almeida, que foi responsável por me ajudar a retomar os meus estudos durante momentos sombrios.

I have no answer for you, Little Lamb

I can help you out

But I cannot help you in.

(Paul McCartney)

RESUMO

Os avanços da lógica moderna, em parte atribuídos ao filósofo alemão Gottlob Frege, nos permitiram o pleno desenvolvimento da noção intuitiva de axiomática clássica para os rigorosos e precisos objetos teóricos que são os sistemas formais axiomáticos. A evolução técnica dessas construções, entretanto, afastou de seus elementos básicos, tais como a sua própria linguagem, a fundamentação metafísica que garantiria a passagem do nível sintático para o nível semântico. De todo modo, os Teoremas da Incompletude de Gödel nos sugerem que existe um âmbito da noção de verdade que escapa e, portanto, que não pode ser capturado apenas pelo aparato formal das teorias axiomáticas. Tal coisa é um indicativo de que os sistemas formais podem ser vistos como formalizações de conceitos, e que esse âmbito de significado deve desempenhar um papel importante para a fundamentação desses objetos. Desse modo, o presente trabalho tem como motivação a investigação acerca do desencontro entre a camada de significado e a camada sintática dos sistemas formais. É trivial a constatação de que os sistemas formais são relevantes e indispensáveis para inúmeras áreas da ciência moderna, como a matemática e a computação, por exemplo; sendo assim, torna-se pertinente o estudo que tem como foco entender melhor a natureza dessas construções, para além do seu uso instrumental e sintático.

Palavras-chave: Sistemas Formais. Formalização. Teoremas de Gödel.

ABSTRACT

The advances of modern logic, in part attributed to the German philosopher Gottlob Frege, allowed us to fully develop the intuitive notion of classical axiomatic into the rough and precise theoretical objects that are the formal axiomatic systems. However, the technical evolution of these constructions moved away from their basic elements, such as their own language, the metaphysical grounding that would guarantee the passage from the syntactic to the semantic. Nevertheless, Gödel's Incompleteness Theorems suggest that there is a scope of the notion of truth that escapes and, hence, that cannot be captured only by the formal apparatus of axiomatic theories. This is an indication that formal systems can be seen as formalizations of concepts, and that this scope of meaning must play an important role in the foundation of these objects. Therefore, the present work is motivated by the investigation about this mismatch between the layer of meaning and the syntactic layer of formal systems. It is impossible to deny the importance and relevance of formal systems to a lot of areas, such as mathematics and computing, for instance; thus, it is, indeed, necessary the study that aims to understand better the nature of these objects, going beyond of its instrumental and syntactic use.

Keywords: Formal Systems. Formalization. Gödel’s Theorems.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A concepção de axiomática inicial remonta aos tempos antigos de grandes nomes gregos, como é o caso de Euclides e seus *Elementos*. O desenvolvimento de objetos teóricos complexos, os quais chamamos de *sistemas formais axiomáticos* – ou apenas *sistemas formais* –, contudo, se deu no decorrer dos séculos e alcançou a sua forma atual a partir dos trabalhos de filósofos e matemáticos, como o alemão Gottlob Frege, na passagem para o século XX. Esse processo que moldou a axiomática clássica em sua versão moderna – a fim de responder as inúmeras questões fundacionais que emergiram durante o caminho – afastou de seus alicerces o *significado* e a *interpretação* que antes se faziam presentes.

Nesse sentido, a motivação que direciona os caminhos deste trabalho é uma investigação acerca da *natureza* dos sistemas formais, buscando entender como se deu esse evento de *desinterpretação*, que separou o seu *âmbito elusivo* de sua *construção sintática*[1], e, primordialmente, se esse afastamento, de fato, *resolve* as questões que, em princípio, a motivou. Assim sendo, à luz desses processos, construiremos uma argumentação em favor da visão de que os sistemas formais modernos – quaisquer que sejam – *podem* ser vistos como *formalizações de conceitos*; e, portanto, devem possuir um âmbito de significado que desempenhe um papel ativo em sua fundamentação. Isto posto, esses artefatos que são tão relevantes para o desenvolvimento de toda a ciência moderna, estarão em pauta no decorrer de todo este texto.

Desse modo, o desenvolvimento tem seu início no capítulo intitulado *Sistemas Formais*. A partir da distinção de conceitos pertinentes, como a própria noção de *investigação filosófica* e *investigação matemática*, intentamos conduzir o leitor ao cerne da discussão de maneira a dar propósito ao percurso que está por vir. Em seguida, tendo como referência as construções de Joseph Shoenfield em *Mathematical logic* (2018)[2], abordaremos os pormenores de como se constitui um sistema formal, nunca deixando de lado a visão *filosófica* – a qual somos adeptos – desse processo. Isto é, iniciaremos tendo como objetivo não somente expor a visão

[1] Termos que devem ser esclarecidos no decorrer do primeiro capítulo de desenvolvimento.
[2] Sendo a edição original publicada em 1967.

moderna – *técnica* – de sistemas formais, como, também, introduziremos a concepção que defendemos de que essas construções emergem a partir da *formalização de conceitos*, o que acarretará na distinção entre *âmbito pré-teórico* e *âmbito teórico*, presente no capítulo.

Somente com o nosso entendimento aprofundado sobre a visão moderna dos sistemas formais, podemos olhar para o seu *hipotético* âmbito de significado. Destaca-se, todavia, como esse passo é complexo, visto a argumentação de Arno Viero em *Sistemas Axiomáticos Formalizados: A Questão da Desinterpretação e da Formalização da Axiomática* (2011), que aborda o relevante *movimento de desinterpretação* que, ao longo dos séculos, revolucionou a construção dos sistemas formais enquanto afastou de seus pilares as *interpretações* metafísicas. Ou seja, a evolução histórica dos sistemas formais os transforma em objetos puramente sintáticos. Para lidar com questões fundacionais que emergiam sobre tais assuntos, diversos pensadores *separaram* o âmbito conceitual de seu núcleo técnico. Tal coisa, portanto, torna o questionamento acerca do *significado* dos sistemas formais ainda mais difícil; haja vista que, por definição, são apenas objetos sintáticos.

Em decorrência desse fato, o próximo capítulo, intitulado *O Processo Histórico de Desinterpretação*, tem como meta principal expor de maneira objetiva[3] esse tema que possui interesse independente, que é o caminho filosófico da desinterpretação dos sistemas formais. Trata-se, portanto de um convite a retornar ao passado e a aprofundar a investigação que perpetua toda a tradição filosófica acerca da própria matemática, que caminhou a ponto de a axiomática clássica de Euclides evoluir até o que hoje conhecemos como sistemas formais. Tal como já foi dito, um dos principais nomes da lógica formal moderna é o alemão Gottlob Frege; de todo modo, para que a sua visão *logicista* seja entendida e justificada *filosoficamente*, devemos iniciar o caminho por Platão e Aristóteles, o que nos possibilitará entender a visão de Immanuel Kant e o rumo oposto que John Stuart Mill propôs.

Tendo como referências primárias as obras *Filosofia da Matemática* (2018)[4] de Stewart Shapiro, e *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic* (2002)[5]

---

[3] E resumida, haja vista a complexidade historiográfica do tema enquanto objeto próprio de estudo.

[4] Sendo a edição original publicada em 2000.

[5] Sendo a edição original publicada em 1968.

de Jean Van Heijenoort, o movimento final do capítulo buscará expor a visão *formalista* de David Hilbert, que busca unir os avanços técnicos de lógicos como Frege e escapar dos problemas metafísicos que emergiram desses desenvolvimentos. Frege e Hilbert possuem a *concepção* de sistemas formais como ponto central em suas respectivas obras; todavia, enquanto Frege *interpreta* e, por conseguinte, *fundamenta* esses objetos na própria lógica, Hilbert almeja que o critério de *verdade* seja identificado com aquilo que se pode *demonstrar* formalmente. Assim sendo, ao fim desse capítulo, somaremos o entendimento acerca da constituição moderna de sistemas formais[6] com o detalhamento histórico do movimento de desinterpretação, que alcança seu auge com o *Programa de Hilbert*. O eventual sucesso do Programa de Hilbert marcaria o golpe final contra a visão clássica de teorias formais interpretadas – além de afastar por completo questões acerca do seu âmbito de significado. Entretanto, podemos antecipar que tal coisa não aconteceu; e no capítulo que se segue apresentaremos essa conclusão.

O terceiro e último capítulo de desenvolvimento, denominado *Teoremas de Gödel e Princípios da Lógica Clássica*, possui como primeiro movimento explorar as consequências da visão formalista do Programa de Hilbert para a fundamentação metafísica dos sistemas formais, que tem em seu núcleo os *Teoremas da Incompletude* de Kurt Gödel. A constatação de que a *verdade lógica em geral*[7] não pode ser totalmente *reduzida* a demonstrações formais, tal como ensina Gödel, nos diz que, aparentemente, *existe* um âmbito da semântica que escapa das formulações sintáticas.

Destaca-se, então, que os Teoremas de Gödel são componentes essenciais desta dissertação, pois são eles que nos sugerem que o processo de desinterpretação – que se ergue para lidar com problemas fundacionais[8] – não é capaz, nos moldes de Hilbert, de *domesticar*, por completo, o significado dos sistemas formais em geral; o que, por sua vez, corrobora com a visão aqui defendida de que esses objetos *podem*

---

[6] Presente no capítulo anterior.

[7] Aqui nos referimos aos sistemas formais como um todo, e não apenas à lógica clássica de primeira ordem.

[8] Tal como exposto no capítulo *O Processo Histórico de Desinterpretação*.

ser vistos como formalizações de conceitos – e que *não* é o caso que esses conceitos *sempre* são capturados e reduzidos, sem perdas[9], pelo âmbito teórico e técnico.

De todo modo, é notório que os Teoremas de Gödel não se aplicam, diretamente, a sistemas formais como a lógica clássica de primeira ordem[10]. Poder-se-ia, então, afirmar que, para esses sistemas formais, é legítimo ignorar o âmbito pré-teórico e de significado em detrimento do âmbito teórico, pois não há supostas *perdas* no que se refere à fundamentação[11]. À vista disso, para respondermos a essa visão, deveremos introduzir o entendimento alternativo de que é concebível que a *formalização* seja *completa* – ou *total* – para alguns conceitos[12]. Entretanto, como passo essencial e propedêutico, deveremos antes ser capazes de apresentar um *conceito* por trás da lógica – enquanto sistema formal –; além de argumentar que se trata de um *conceito particular* como outros. Somente tendo feito isso, poderemos avançar em nossa compreensão.

Sintetizando, então, o que foi dito, como parte última do movimento do capítulo, abordaremos a argumentação de Newton da Costa, presente na obra *Ensaio Sobre os Fundamentos da Lógica* (1994), em favor da tese de que a lógica clássica, também, possui alicerces em um conceito particular. Note, outra vez, que essa etapa do capítulo somente ganha corpo com base nas conclusões anteriores dos Teoremas de Gödel. Desde o início, defendemos a visão de que os sistemas formais emergem a partir da formalização de conceitos, entretanto, qual seria o conceito da lógica[13]? Sendo a lógica, por sua vez, um sistema formal no sentido técnico do termo[14], deveríamos ser capazes de responder esse questionamento; questionamento esse que, em geral[15], diga-se de passagem, é legitimado pelo próprio Teorema de Gödel.

---

[9] Afinal, se tal coisa fosse possível, poder-se-ia defender, dentre outras coisas, que o âmbito teórico é *sempre total*, pois *captura* por completo o conceito pré-formalização.

[10] Haja vista a demonstração existente da Completude para a lógica clássica de primeira ordem.

[11] Afinal, dentro dessa visão, o âmbito pré-teórico não desempenha nenhum papel de fundamentação; tudo o que *precisa* e *pode* ser investigado está no âmbito teórico.

[12] Portanto, o Teorema da Completude, dentro da nossa proposta de entendimento, não estaria afirmando que *não há nada além do formal* para alguns sistemas formais, mas sim que o processo de formalização *pode* ser *total* – ou *completo*.

[13] Deveremos dizer *qual* lógica estamos nos referindo, além do motivo de escolhermos esta e não outra.

[14] E sendo coerente a nossa visão de que sistemas formais podem ser vistos como formalizações de conceitos.

[15] Isto é, para demais sistemas formais.

À vista disso, a partir da tese de Newton da Costa, em adição com o restante do conteúdo do capítulo, deveremos não somente apresentar esses princípios basilares da lógica[16], como, igualmente, tirá-los de seu pedestal absoluto, a fim de concluir que se tratam de descrições de um *conceito particular*, e, por conseguinte, um forte indício em favor de que sistemas formais – inclusive a lógica – possuem um *âmbito de significado* que não se perdeu com o movimento de desinterpretação[17] – e, portanto, desempenha algum papel em sua fundamentação. Tendo dito isso, destaca-se que o capítulo tem como referências primárias as elaborações técnicas presentes em *Mathematical Logic* (2018) de Shoenfield; *Computabilidade e Lógica* (2012)[18] de George Boolos, John Burguess e Richard Jeffery; e *Tópicos em Lógica de Primeira Ordem* (2019) de Rodrigo Freire. O capítulo contará, também, com a apresentação de alguns teoremas relevantes, tais como o *Teorema do Ponto Fixo*; o *Teorema da Indefinibilidade da Verdade*; *os Teoremas da Incompletude de Gödel*; dentre outros.

Para terminar, apresentaremos nossas conclusões tendo em vista os percursos dos capítulos de desenvolvimento. Neste ponto, espera-se haver alcançado um esclarecimento não somente da natureza dos sistemas formais modernos, como também da ontologia metafísica que está nos alicerces dessas construções. A somatória das seguintes asserções *limitativas*: (i) os Teoremas da Incompletude nos sugerem que *há* algo além do formal na concepção de *verdade lógica em geral*[19]; e (ii) os princípios lógicos clássicos não são *absolutos*, mas sim *descrições* de uma visão metafísica particular de mundo – a concepção metafísica de mundo de Aristóteles[20]; oferece-nos uma conclusão: (iii) o processo histórico de desinterpretação não expurga dos sistemas formais seu âmbito de significado sem nenhum contraponto. Sistemas formais podem ser vistos como formalizações de conceitos, sendo que a camada de significado deve desempenhar um papel ao pleno desenvolvimento e fundamentação dos sistemas formais, não podendo, portanto, ser negligenciada.

[16] Ou seja, esses *conceitos* por trás da lógica.
[17] Em outras palavras, que não pode ser abandonado sem nenhum pesar.
[18] Sendo a edição original publicada em 1974.
[19] Outra vez, ressaltamos o fato de estarmos nos referindo à noção de validade geral de todo e qualquer sistema formal.
[20] Chamamos estas duas asserções de *limitativas*, pois elas apontam para além dos âmbitos formal e clássico; estabelecendo, portanto, *limites*.

2 SISTEMAS FORMAIS

2.1 ALÉM DO CONTEXTO SIMBÓLICO

No decorrer deste capítulo, abordaremos diversos assuntos que adentram discussões acerca do *sentido* e *significado* de sistemas formais em geral. De todo modo, é crucial que antes de podermos, efetivamente, falar sobre tais coisas, nos questionemos sobre as razões que nos conduzem até aqui. Isto é, talvez seja relevante esclarecer o porquê, ou seja, o motivo de nos interessarmos por estas coisas – *significado* e *sistemas formais*. Sendo assim, cabe perguntar, por que deveríamos nos preocupar com qualquer evento além do sentido simbólico e sintático desses objetos complexos os quais estamos chamando de *sistemas formais*?

É notório que boa parte – se não todos – desses questionamentos carreguem consigo séculos de discussões, debates e produções filosóficas, acarretando, inclusive, uma inclinação por parte de algumas correntes a, até mesmo, abandonar qualquer tipo de investigação acerca do sentido de teorias e sistemas formais[21]. Por outro lado, muitos outros grandes nomes na tradição defendem não somente a necessidade dessa busca como também que esta resultaria em uma resposta positiva, ou seja, que sistemas formais possuem uma associação com *verdade* e *significado*[22]. Sendo assim, o objetivo a partir de agora é percorrer algumas das questões mais relevantes que emergem ao se investigar *filosoficamente* estes objetos.

Ainda que em poucas linhas, alguns assuntos já foram comentados o suficiente a ponto de demandarem um esclarecimento mais aprofundado. Dessa forma, de modo bastante sutil, é preciso comentar um primeiro conceito, que diz respeito ao que foi chamado de *investigação filosófica*. Sobre esse aspecto, não seria um absurdo pensar que cada um dos leitores apresentaria uma definição distinta dessa expressão, sendo o caso, evidentemente, que algumas propriedades se farão presentes a quase todas, enquanto outras, mais peculiares, a somente uma ou duas propostas de

[21] Abordaremos estas correntes adiante, dando ênfase no movimento conhecido como *Formalismo*, este que tende a abandonar o contexto semântico e ontológico de sistemas formais em favor do seu significado puramente simbólico e axiomático.

[22] Voltaremos com mais detalhes ao comentar a visão de Platão acerca da matemática e, também, ao analisarmos o movimento do *Logicismo* encabeçado por Gottlob Frege.

definição. É manifesto que temos em mãos uma questão complicada em decorrência de sua própria natureza e conteúdo[23].

O filósofo alemão Hegel em *Introdução à História da Filosofia* (1988) chama a filosofia de “ciência objetiva da verdade” (HEGEL, 1988, p. 336). À vista disso, em se tratando de nossos interesses e propósitos neste capítulo, podemos estabelecer um ponto pacífico em comum para chamarmos uma investigação de *filosófica*: *compromisso com alguma concepção de verdade*. Portanto, ao falarmos sobre a possibilidade de *investigar-se filosoficamente* os sistemas formais, estamos dizendo, dentre outras coisas, que é preciso analisar sistemas formais à luz de alguma concepção de verdade. Isto é, de algum modo, devemos investigar como esses objetos formais e sintático-linguísticos se relacionam com algum conceito de verdade – e qual seria esse conceito, ou seja, por que esse conceito e não outro?

Percebam que, já nesse ponto, estamos de algum modo associando *conceitos* a *sistemas formais*. Já nesse início, estamos pulando a questão original acerca do sentido, isto é: por que deveríamos nos questionar se os sistemas formais possuem algum significado? Não parece contraintuitivo que um objeto sintático-linguístico qualquer, sem sentido exposto além do simbólico, não possua relação alguma com *verdade*. Grande parte dos leitores, supõe-se, não se questiona sobre a relação que as regras do futebol possuem com a concepção aristotélica de mundo presente em sua metafísica. As regras de um jogo, seja ele futebol ou xadrez, possuem como parâmetro apenas e exclusivamente a si próprias. Nada externo, ou anterior, deveria dizer algo sobre o seu funcionamento. A partir do momento em que é estabelecida – por convenção pragmática –, a regra é absoluta e determina o andamento da prática do jogo, sem requerer um âmbito fundacional anterior. Seria o caso que sistemas formais compartilham essas mesmas características?

Ressaltemos, antes de mais nada, que não estamos dizendo, literalmente, que defender o esvaziamento semântico de sistemas formais os colocam no mesmo patamar que um caderninho de regras de futebol. Na realidade, parece estranho, inclusive, colocar todo e qualquer sistema formal na mesma prateleira de importância.

---

[23] Afinal, ao nos questionarmos sobre o que é uma *investigação filosófica* deveríamos, ao menos, poder dizer o que é *filosofia*, algo que, apesar dos séculos de esforços de diversos pensadores, permanece sem unanimidade.

Intuitivamente, muitos defenderiam – sem precisar falar em *significado* – que um sistema axiomático, como a lógica clássica de primeira ordem ou a teoria de conjuntos Zermelo-Fraenkel possui *relevância* distinta de um amontoado consistente qualquer de fórmulas[24]. Como explicar essa *suposta* diferença entre sistemas formais? Mais uma vez, vê-se necessário dar um passo atrás para que possamos avançar de forma desejada.

Diante disso, certos termos relevantes permanecem sem esclarecimento. Falamos a respeito dos *sistemas formais*, e temos usado esta expressão sem uma definição prévia mais precisa. Ademais, ao questionarmos sobre a possibilidade de terem algum tipo de sentido, estamos associando tais construções a algum *conceito de verdade* – outra expressão que permanece misteriosa aos nossos olhares mais criteriosos. Estas palavras, quais sejam, *conceitos* e *sistemas formais*, merecem nossa dedicação a partir de agora.

Iniciemos falando sobre sistemas formais. Apresentemos, a seguir, uma primeira abordagem acerca desses objetos, tendo como referência a exposição de Joseph Shoenfield em *Mathematical logic* (2018) sobre a constituição de sistemas formais. Tal como Shoenfield, temos como horizonte a visão de que sistemas formais podem ser tratados como *formalizações de conceitos*. Contudo, adotaremos uma distinção adicional – distinção esta que Shoenfield, um matemático, pressupõe não-textualmente em sua obra. Trata-se, portanto, da adoção da existência de dois âmbitos distintos ao se falar em elaboração de sistemas formais; os quais chamaremos de *âmbito pré-teórico* e *âmbito teórico*. O âmbito pré-teórico é o passo preliminar, onde o sistema formal ainda não existe enquanto um objeto concreto – isto é, onde lida-se com o conceito em sua forma *elusiva*. Por sua vez, é somente no âmbito teórico que lidamos, efetivamente, com a construção técnica que chamamos de sistemas formais. Essa distinção é relevante, pois a etapa pré-teórica carrega consigo preocupações inatas acerca do significado e de como se dá essa *tradução* entre conceito-original e axiomas, enquanto a etapa teórica tem por método o

[24] Neste instante, não precisamos falar em significado para defender tal observação, pois seria razoável o entendimento de que um sistema como a lógica clássica de primeira ordem possui relevância pragmática superior perante outras construções aleatórias, haja vista, por exemplo, as suas aplicações práticas em ciências empíricas. De todo modo, talvez seja necessário abordar a questão do significado para justificar estas aplicações, o que foge do ponto neste primeiro momento.

distanciamento de interpretações subjacentes; ou seja, *stricto sensu*, a etapa teórica é, por definição, independente da etapa pré-teórica[25].

2.2 ÂMBITO PRÉ-TEÓRICO: SISTEMAS FORMAIS E CONCEITOS

Sem dúvida é algo crucial que qualquer tipo de discussão sobre a natureza dos sistemas formais parta de um esclarecimento e de um entendimento preciso sobre o que de fato *são* esses objetos. O primeiro ponto que devemos ressaltar diz respeito ao caráter essencialmente sintático dessas construções. Perante um olhar técnico de um observador imparcial, não existem diferenças *ontológicas*[26] entre sistemas formais distintos. De todo modo, tal como mencionado acima, não é intuitivo o nivelamento de importância entre todo e qualquer sistema formal. Contudo, para abordar essa questão em um primeiro nível, não precisamos partir para uma busca *filosófica* pelo *sentido* ou *significado* dos sistemas formais. Devemos nos ater, antes de mais nada, ao processo de *formalização* de um conceito; processo este que, tal como defendemos, em sua parte sintática, nos entrega um sistema formal.

Sistemas formais são construções obtidas em um contexto de *investigação matemática* acerca de algum objeto – seja este objeto matemático ou não[27]. Façamos, então, novamente a pergunta: e o que seria isto que estamos chamando de *investigação matemática*? A expressão "*investigação matemática*", naturalmente, nos remonta à Grécia Antiga, em particular à produção de Euclides e seus *Elementos*. Arno Aurélio Viero em *Sistemas Axiomáticos Formalizados* (2011) destaca que:

[25] Além disso, a não adoção dessa distinção pode acarretar em antinomias conceituais, levando em conta que a etapa teórica, ao lidar com um objeto concreto e sintaticamente construído com base em regras e critérios bem definidos, é menos transigente com diversas indeterminações facilmente encontradas na etapa pré-teórica, decorrentes do caráter elusivo do conceito pré-formalização.

[26] Na realidade, nesse primeiro olhar puramente técnico, não faz sentido sequer associar uma palavra como *ontologia* a sistemas formais.

[27] É natural que objetos e conceitos matemáticos se façam mais presentes nessas discussões. De todo modo, é crucial que fique claro que poderíamos falar sobre qualquer tipo de objeto. Os exemplos matemáticos, em particular da aritmética, emergirão com maior frequência neste texto pelo simples fato de serem exemplos mais conhecidos e elaborados no decorrer da tradição, além de se tratarem de *conceitos abstratos* relevantes. Nossa investigação acerca de sistemas formais não deve, em essência, se restringir aos sistemas formais que abordam, exclusivamente, a matemática.

> Os matemáticos gregos foram os primeiros a utilizar procedimentos dedutivos para obtenção e justificação de seus resultados. O recurso à demonstração como elemento indispensável na aquisição do conhecimento matemático foi mais uma contribuição dos gregos para a civilização ocidental. (VIERO, 2011, p. 15).

Viero chama de *método axiomático* o método de investigação matemática que tende a ser o ideal "quando se trata de compreender os aspectos lógicos e epistemológicos da atividade matemática" (VIERO, 2011, p. 07). Assim, no contexto matemático, tal método traduz as concepções aristotélicas de como uma ciência deveria ser. E é nos *Elementos,* de Euclides, que o método axiomático ganha notoriedade a ponto de ser considerado um dos mais expressivos até os dias de hoje. Sobre Euclides e o método axiomático, completa Viero:

> [...] o princípio que norteou Euclides na apresentação axiomática da geometria é, basicamente, o mesmo utilizado hoje em dia na axiomatização das mais diversas disciplinas matemáticas, inclusive a lógica. A ideia básica da axiomatização é a de organizar os enunciados e os conceitos, relativos a um domínio qualquer do conhecimento, de acordo com as conexões de demonstrabilidade e definibilidade. [...] Os Elementos de Euclides nada mais é do que a implementação destes princípios a um domínio específico da matemática com um nível de eficiência e sofisticação a ponto de, durante séculos, ser considerado o modelo de rigor a ser obtido nas mais diversas áreas da matemática. (VIERO, 2011, p. 17).

Sendo assim, com base no que foi dito, podemos destacar, de modo bastante objetivo, um elemento fundamental para que uma investigação seja associada com a prática matemática: *a necessidade de uma demonstração*. Nesse sentido, esclarece Joseph Shoenfield em *Mathematical Logic* (2018):

> A característica notável da matemática, em oposto a outras ciências, é o uso da demonstração em vez da observação. […] Um matemático pode, em certas ocasiões, usar a observação; por exemplo, ele pode medir os ângulos de diversos triângulos e concluir que a soma dos ângulos é sempre 180°. Todavia, ele aceitará tal coisa como uma lei da matemática apenas quando for provada. (SHOENFIELD, 2018, p. 01).[28]

[28] Tradução nossa do original: *The conspicuous feature of mathematics, as opposed to other sciences, is the use of proof instead of observations. […] A mathematician may, on occasions, use observation; for example, he may measure the angles of many triangles and conclude that the sum of*

Desse modo, a concepção central que guia o desenvolvimento de uma investigação matemática é o *rigor que emana da necessidade de se buscar uma prova*, *uma demonstração* – nos moldes do que isso significa dentro de um contexto matemático[29] – *para os seus conceitos básicos*. Chamamos, então, de *sistemas formais* a parte *sintática* de teorias *axiomático-dedutivas*, teorias estas que prezam por alguns conceitos primordiais, sendo estes a *clareza* e o *rigor metodológico*. Shoenfield, outra vez em *Mathematical Logic* (2018), partindo de uma distinção entre *sistemas axiomáticos* e *sistemas formais*, sendo o primeiro sua parte semântica, exemplifica e esclarece esse processo:

> Nós podemos agora descrever o que um matemático faz como se segue. Ele nos apresenta certos conceitos básicos e certos axiomas sobre estes conceitos. Ele, então, nos explica estes conceitos até que os entendamos suficientemente bem a ponto de ver que os axiomas são verdadeiros. Ele, então, passa a definir conceitos derivados e a provar teoremas tanto sobre os conceitos básicos quanto sobre os derivados. O completo edifício o qual ele constrói [...] é chamado de sistema axiomático. (SHOENFIELD, 2018, p. 02).[30]

Os sistemas axiomáticos, nos moldes do que apresenta Shoenfield, surgem ao *formalizarmos conceitos*, tendo como princípio a ideia de investigação matemática. A partir de uma análise desse objeto e de um melhor entendimento de sua essência, formulam-se leis gerais. Dentre todo esse emaranhado de leis que serão obtidas, deve-se selecionar aquelas que "sentimos serem evidentes[31] a partir da natureza dos conceitos envolvidos" (SHOENFIELD, 2018, p. 01)[32], e toma-las como *axiomas*[33]; ou

---

the angles is always 180°. However, he will accept this as a law of mathematics only when it has been proved.

[29] Apresentaremos, ainda neste capítulo, uma definição precisa do que é uma prova ou demonstração dentro do contexto formal. Contudo, ressaltamos que, nesse primeiro momento, esse *rigor* apenas guia uma noção um pouco menos formal e mais intuitiva do que é prova e demonstração.

[30] Tradução nossa do original: *We may now describe what a mathematician does as follows. He presents us with certain basic concepts and certain axiom about these concepts. He then explains these concepts to us until we understand them sufficiently well to see that the axioms are true. He then proceeds to define derived concepts and to prove theorems about both basic and derived concepts. The entire edifice which he constructs […] is called an axiom system.*

[31] Falar, por sua vez, em *evidência* é algo que deve ser feito com cautela. Abordaremos este tópico na seção 2.5 ao investigarmos o processo histórico de estabelecimento dos sistemas formais.

[32] Tradução nossa do original: *which we feel are evident from the nature of the concepts involved*.

[33] Reduzindo, portanto, a quantidade de leis.

seja, conceitos básicos que aceitamos como verdade e a partir dos quais definiremos tudo o que se segue.

Os axiomas, portanto, enquanto *caracterizações evidentes e intuitivas* do conceito analisado – segundo a própria terminologia de Shoenfield – dentro do sistema axiomático, podem ser vistos de duas formas distintas:

i) Um objeto concreto, uma frase.
ii) O *real* significado da frase[34].

Em um primeiro olhar ingênuo para essas duas possibilidades de interpretação, podemos ser levados a crer que (ii), não somente é a melhor forma, como também é aquilo que de fato importa ao se falar em axiomas. Entretanto, entender que um axioma *é*, ou, se preferir, que *deve ser entendido* como o *real significado daquilo que se busca capturar* é tentar entender algo *abstrato* por intermédio de outra coisa também *abstrata*. O propósito dos sistemas axiomáticos, e da investigação matemática, é trazer clareza a conceitos, fazendo com que a escolha por (ii) torne-se problemática, pois traz para *dentro* do sistema formal a abstração do conceito original que deveria ser esclarecida por um axioma – algo concreto que, dentro da teoria, pós-formalização, recebe uma abordagem sintática[35]. De todo modo, podemos expor esse raciocínio em defesa de (i) de modo positivo. Então, façamos tal coisa.

Para que escolhamos ver axiomas enquanto objetos concretos – ou seja, enquanto uma *frase* em uma folha de papel – devemos atentar-nos a um fato crucial: É requerido que a escolha da linguagem artificial – utilizada para a *tradução* desse conceito *intuitivo* em um axioma de um sistema axiomático –, seja adequada para o conceito de modo tal que a sua própria estruturação sintática *reflita* o devido significado (semântico) do axioma[36]. Portanto, “podemos estudar os conceitos do

[34] Destaquemos que estamos utilizando a própria terminologia de Shoenfield.
[35] Ou seja, estaríamos misturando elementos do âmbito pré-teórico com elementos do âmbito teórico.
[36] Ressaltemos, outra vez, que estamos argumentando em um contexto preliminar da formalização através do método axiomático. Não possuímos em mãos, portanto, um sistema formal enquanto um objeto concreto e sintático-linguístico. Shoenfield não traça uma linha clara entre essas duas etapas, as quais chamamos de *pré-teórica* e *teórica*; sendo a primeira o passo preliminar em que lidamos com o conceito em sua forma ainda abstrata e a segunda a construção técnica que chamamos

sistema axiomático estudando a estrutura das frases que expressam os axiomas" (SHOENFIELD, 2018, p. 02)[37].

Além disso, tal como explicitado, boa parte dos conceitos investigados através desse método, que envolve sistemas axiomáticos, são abstratos e suficientemente complexos por si só – sejam esses conceitos matemáticos ou não. Buscar o entendimento de tais coisas, representando-as de *outro* modo também abstrato, não irá nos proporcionar, *prima facie*, um esclarecimento melhor do que aquele que já possuíamos com o conceito em seu estado natural. Por sua vez, ao entendermos os axiomas, *dentro* dos sistemas formais, como objetos concretos, isto é, frases, o estudo dos axiomas passa a ser uma forma de abordar o *abstrato* (conceito) de modo *concreto* (objeto sintático).[38]

A partir dessas distinções, começamos a ver tomar forma a separação conceitual entre sistemas axiomáticos e sistemas formais proposta por Shoenfield:

> O estudo dos axiomas e teoremas enquanto frases é chamado de estudo sintático dos sistemas axiomáticos; o estudo do significado destas frases é chamado de estudo semântico dos sistemas axiomáticos. [...] Nós devemos sempre considerar axiomas e teoremas enquanto frases, e, portanto, objetos sintáticos; [...] Para nos guiar em nosso estudo sintático, nós introduziremos a noção de um sistema formal. [...] um sistema formal é a parte sintática de um sistema axiomático[39]. (SHOENFIELD, 2018, p. 03).[40]

---

de sistemas formais. À vista disso, o problema de (ii) pode ser entendido como uma *imposição* sobre o âmbito teórico de elementos do âmbito pré-teórico.

[37] Tradução nossa do original: *we can study the concepts of the axiom system by studying the structure of the sentences expressing the axioms*.

[38] Isto é, o âmbito pré-teórico desempenha um papel relevante no processo de formalização, contudo, não deve *absorver* o âmbito teórico. Uma não separação entre essas duas etapas, poderia nos entregar algo *mais complexo* do que o conceito pré-formalização – o que, por sua vez, não faria sentido perante o objetivo primário da formalização do conceito, que é *esclarecer*.

[39] Um outro ponto que devemos esclarecer, a fim de evitar ambiguidades futuras, é que muitas vezes, visando uma leitura mais fluida do texto, nos referimos aos sistemas formais de um modo mais geral, abordando, assim, tanto o seu lado puramente sintático quanto o seu lado conceitual ou semântico. Ou seja, em contextos gerais, adotamos que "*sistema axiomático*" e "*sistema formal*" são sinônimos – sendo que, em casos específicos, utilizaremos a distinção adequada.

[40] Tradução nossa do original: *The study of axioms and theorems as sentences is called the syntactical study of axiom systems; the study of the meaning of these sentences is called the semantical study of axiom systems. […] We shall always consider axioms and theorems to be sentences, and hence syntactical objects; […] To guide us in our syntactical study, we introduce the notion of a formal system. […] a formal system is the syntactical part of an axiom system.*

Um sistema axiomático, portanto, é constituído, basicamente, de duas partes: a *sintática*, composta pelo aparato formal axiomático dedutivo (sistemas formais), e a *semântica*, que podemos entender, em linhas gerais, como sendo o estudo das suas classes de modelos. Desse modo, com o nosso objetivo em mente de esclarecer esse objeto intitulado *sistemas formais*, voltemo-nos, agora com a devida justificação, para uma definição mais precisa. Voltemo-nos, por fim, para a sua sintaxe.

2.3 ÂMBITO TEÓRICO: A SINTAXE DOS SISTEMAS FORMAIS

Nosso caminho em busca de um entendimento acerca da natureza dos sistemas formais, invariavelmente, nos conduziria até uma investigação mais precisa sobre sua sintaxe. É dentro do contexto sintático que esses objetos ganham forma concreta, nos permitindo uma investigação clara sobre o que de fato são. Tal como Shoenfield destaca em sua argumentação, a análise sintática dos sistemas axiomáticos, quando realizada de maneira adequada[41], garante um modo rigoroso e seguro de abordar conceitos abstratos e complexos. Um sistema formal, enquanto elemento sintático dos sistemas axiomáticos, dentro do âmbito prático da matemática e da ciência, não é desprendido da realidade, seja essa a realidade física do mundo real ou a conceitual da matemática. De algum modo, os sistemas formais, com seus axiomas, teoremas e demonstrações, *relacionam-se* com o conceito original não-formalizado. Nicolas Goodman em *Mathematics as an objective science* (1979) destaca que:

> De fato, a maioria dos ramos da matemática lança claramente luz direta sobre alguma parte da natureza. A geometria lida com o espaço. A teoria da probabilidade nos ensina sobre processos aleatórios. A teoria dos grupos ilumina a simetria. A lógica descreve as inferências racionais. Muitas partes da análise foram criadas para estudar processos físicos particulares e continuam indispensáveis para o estudo destes processos. [...] Trata-se de uma realidade prática que nossos melhores teoremas nos dão informações sobre o mundo concreto. (GOODMAN, 1979, p. 550).[42]

---

[41] Logo em seguida abordaremos o que seria isso na visão de Shoenfield.

[42] Tradução nossa do original: *As a matter of fact, most branches of mathematics cast light fairly directly on some part of nature. Geometry concerns space. Probability theory teaches us about random processes. Group theory illuminates symmetry. Logic describes rational inference. Many parts of analysis were created to study particular physical processes and are still indispensable for the study of*

Para indagar, portanto, essa *aparente* relação entre sistemas axiomáticos – e, por conseguinte, sistemas formais – e o conceito investigado, é crucial que a sintaxe seja colocada em pauta. A sintaxe, ou seja, aquilo que de mais *formal* possuem sistemas axiomáticos, não é, por sua vez, estabelecida sem critérios ou, até mesmo, sem preocupações que escapam do escopo técnico da questão. É justamente por conta de tal coisa *não* ser o caso, que nós podemos, como defende Shoenfield, fazer uso do âmbito sintático – supostamente mais bem compreendido – para *entender* o âmbito semântico, que é *abstrato* e mais *complexo*. Ainda na terminologia de Shoenfield, a sintaxe precisa *refletir* o conceito[43]; e, por conta disso, devemos abordar seu primeiro elemento: a linguagem.

A primeira parte de um sistema formal é a sua linguagem. Linhas acima, falamos sobre uma "*maneira adequada*" para lidar com a sintaxe dos sistemas axiomáticos, e agora podemos esclarecer essa afirmação. Isto posto, usamos linguagens artificiais para os sistemas formais. Essa escolha se dá por conta do fato de que as linguagens artificiais são *moldadas* e *elaboradas* especificamente para esse fim. Tal como foi dito, o estudo sintático somente faz sentido quando a sintaxe dos sistemas formais é concebida para que *reflita* o significado das frases. É dentro desse contexto que as linguagens artificiais ganham força. Além disso, as linguagens artificiais, de modo notável, são mais precisas e seguras – para um âmbito matemático-científico – do que as linguagens naturais[44], as quais são constituídas durante processos históricos complexos e longos e refletem muito mais do que o puro significado de conceitos, como, por exemplo, questões culturais e pragmáticas.

Tendo estabelecido tal coisa, o primeiro elemento de uma linguagem é a sua lista de símbolos. Tratando-se de linguagens artificiais para contextos matemático-

---

those processes. […] It is a practical reality that our best theorems give information about the concrete world.

[43] Pontuemos, outra vez, que pressupomos uma distinção implícita na obra de Shoenfield. Ao falarmos que a sintaxe deve *refletir* o conceito, estamos olhando para o âmbito pré-teórico da formalização do conceito. Dentro do âmbito teórico, esta concepção deve ser vista apenas como uma *motivação*, e nunca como algo, de fato, presente na sintaxe. Falamos sobre âmbito pré-teórico e âmbito teórico, em diversos momentos, simultaneamente, pois faz parte da visão defendida nesta dissertação que, ainda que separados, cada um desempenha um papel em prol do outro. De todo, tomaremos o cuidado, no decorrer do texto, de sempre deixar explícito sobre o que estamos falando.

[44] Ainda que tal coisa seja obtida ao custo de uma menor expressividade perante línguas naturais.

científicos, é corriqueiro que a maioria dessas linguagens possua uma quantidade *infinita* de símbolos, sendo que qualquer sequência finita de símbolos de uma linguagem é chamada de *expressão*. De todo modo, se levarmos em conta que estamos lidando com infinitos símbolos, a maioria das expressões de uma linguagem são, naturalmente, sem sentido. Considerando, portanto, o conjunto das expressões significativas de uma linguagem, destacaremos aquelas que são *declarativas*, isto é, aquelas que *afirmam um fato*. À vista disso, entenderemos que, em cada linguagem, algumas de suas expressões significativas devem ser designadas como *fórmulas* – de modo esperado, escolheremos as expressões declarativas, que afirmam e atestam um fato, como sendo as *fórmulas* de uma linguagem.

Em contextos específicos, isto é, ao lidarmos com a elaboração real de um sistema formal particular, convém ir além e estabelecer até mesmo algumas distinções relevantes dentro do conceito de *fórmula*, tal como observado na obra *Computabilidade e Lógica* (2012), dos autores George Boolos, John Burguess e Richard Jeffery, na qual é explicitada a diferença entre *fórmulas fechadas* e *fórmulas abertas*:

> Intuitivamente, *fórmulas* são apenas sequências de símbolos que correspondem a sentenças gramaticalmente bem formadas do português. Aqueles que [...] correspondem a sentenças do português que constituem um enunciado completo, suscetível de ser verdadeiro ou falso, são chamadas fórmulas *fechadas*. Aquelas que [...] correspondem a sentenças do português envolvendo xs e ys e zs não identificados, os quais teriam que ser identificados antes que as sentenças pudessem ser pronunciadas verdadeiras ou falsas, são chamadas fórmulas *abertas*. (BOOLOS, 2012, p. 137)

Todas essas distinções e definições são postuladas visando o maior rigor e clareza da estruturação sintática da linguagem do sistema formal. Muitas outras noções são passíveis de definição e trazem consigo avanços relevantes. Contudo, por hora, não deveremos nos alongar nesse processo. Assim sendo, em símbolos, dado um sistema formal S:

$$\mathcal{L}(S)$$

é a representação de sua linguagem. Por conseguinte, “consideramos uma linguagem como sendo completamente definida quando seus símbolos e fórmulas estão definidos. Isso torna uma linguagem um objeto puramente sintático” (SHOENFIELD, 2018, p. 04)[45]. Dando continuidade, portanto, aos elementos de um sistema formal, o próximo item a ser enumerado são os *axiomas*. Muito já se falou sobre axiomas – e muito mais poderia ser dito. Não obstante, dentro deste contexto sintático que temos em pauta, exigiremos apenas que os axiomas sejam fórmulas fechadas da linguagem do sistema formal em questão. Isto é, os axiomas deverão ser frases declarativas, justamente aquelas que *afirmam* um fato e são passíveis de serem verdadeiras ou falsas[46]. A partir de agora, resta apenas um elemento essencial para que um sistema formal ganhe contorno: precisamos de *regras* para que possamos obter novas frases – que preservam a veracidade do conceito em estudo – a partir das frases assumidas como axiomas; ou seja, gostaríamos que nosso sistema formal fosse capaz de *afirmar* novas coisas com base em tudo o que se assumiu como primitivo.

Com fundamento em nossa argumentação até aqui, fica evidente a necessidade de um *método* para a obtenção de novas frases. Um dos principais objetivos de se formalizar um conceito através de um sistema axiomático é construir um artefato teórico capaz de nos proporcionar um melhor entendimento sobre o conceito original. Por conseguinte, o terceiro elemento de um sistema formal deve ser suas *regras de inferência*. As regras de inferência, ou, simplesmente, regras, estabelecem a possibilidade de se concluir *teoremas* (frases), a partir dos axiomas (frases). Sendo assim, cada regra estabelece uma certa condição sob a qual uma fórmula, essa que podemos chamar de *conclusão*, pode ser *inferida* de outras fórmulas, essas que chamaremos de *premissas* da regra em questão[47].

Com tudo isso em mente, afirmamos que um sistema formal, costumeiramente, é obtido ao se formalizar algum ou alguns conceitos, sejam estes conceitos

---

[45] Tradução nossa do original: *We consider a language to be completely specified when its symbols and formulas are specified. This makes a language a purely syntactical object*.

[46] Ainda que, por definição, os axiomas sejam sempre tidos como *verdadeiros* dentro do sistema formal ao qual pertencem.

[47] Sendo que, em seguida, destacaremos como se dá esta relação entre *conclusão* e *premissas*.

matemáticos ou não. Esse processo de formalização – em seu *âmbito teórico*, isto é, técnico e não mais *elusivo* – pode ser descrito de modo sucinto em dois passos:

- Desenvolve-se uma linguagem simbólica com o objetivo de se eliminar as ambiguidades e amplificar a compreensão.
- Faz-se a *desinterpretação* dos termos envolvidos com o uso de axiomas e regras sintáticas para eliminar algum *significado* implícito ao objeto pré-formalização.[48]

Isto posto, se lidávamos, por exemplo, com a aritmética, um sistema axiomático que, de modo concreto, a formaliza não carrega (mais) consigo – em seu âmbito teórico – o significado subjacente de termos como *números* ou *funções* em sua estruturação sintática. Todos esses elementos são separados do sistema formal, ainda que se fizessem presentes no âmbito pré-teórico da formalização do conceito. Por conseguinte, o que temos em mãos, no âmbito teórico, é um objeto puramente formal e *desinterpretado*, que, a partir de regras, transforma frases em outras frases.

Um sistema formal, portanto, é composto por uma linguagem, axiomas e regras de inferência – todos devidamente formulados a partir da linguagem do sistema. O que se ganha, primordialmente, ao se fazer uso do método axiomático é o rigor e a clareza de um objeto concreto (sintático), que – se levarmos em conta o âmbito pré-teórico – é capaz de falar sobre conceitos abstratos e complexos. Perceba que somente dentro de um sistema formal diversas questões relevantes podem ser levantadas. Somente ao se formalizar um conceito qualquer poderemos nos questionar sobre sua *consistência*, sobre sua *decidibilidade*, além de nos indagarmos acerca de sua *correção* e *completude*, por exemplo. A aritmética, o caso que citamos anteriormente, não é, ela própria, *consistente* ou qualquer outra coisa do gênero. O

[48] Isto é, aqui marca-se a separação concreta entre âmbito pré-teórico e âmbito teórico.

sistema formal que, supostamente, caracteriza a aritmética[49] – seja isto o que for – é que poderá possuir *ou não* alguns destes predicados[50].

Um último detalhe que precisamos nos ater antes de avançarmos, diz respeito a isso que estamos chamando de *teoremas*. O que é, então, um *teorema*? Definiremos, portanto, *teorema* com base em três critérios:

Seja S um sistema formal qualquer

i) Os *axiomas* de S são teoremas de S.
ii) Se todas as *premissas* de uma regra de inferência de S são teoremas de S, então a *conclusão* da regra em questão é um teorema de S.
iii) Nada mais é teorema de S.

Por conseguinte, entenderemos que os teoremas de S são suas fórmulas que seguem os critérios (i), (ii) e (iii).

Falando de outro modo:

Considere C_0 o conjunto de axiomas de S – fórmulas estas que são teoremas por conta de (i). Podemos obter, agora, o conjunto C_1; conjunto das fórmulas que são conclusões de regras cujas premissas são elementos de C_0 – e são teoremas por conta de (ii). Da mesma forma, o conjunto C_2 é o conjunto das fórmulas que são conclusões de regras cujas premissas são elementos de C_0 e C_1 – e, igualmente, teoremas com base no critério (ii). Podemos, então, continuar este mesmo processo e obter os demais conjuntos C_3, C_4, C_5, ...

[49] Sendo a teoria Zermelo-Fraenkel com axioma da escolha a opção natural para este papel.
[50] O que, mais uma vez, justifica a nossa indagação original acerca da possibilidade dessa caracterização conceitual, presente trivialmente no âmbito pré-teórico, se propagar, de algum modo, até o sistema formal concreto, no âmbito teórico.

Seja C_ω o conjunto de fórmulas obtidas a partir do uso de regras de inferências cujas premissas são todas elementos de C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, ..., trata-se, portanto, de um conjunto de teoremas, outra vez, com base em (ii). Continuando esse mesmo procedimento, obter-se-á, à vista do critério (ii) e através de uma definição por *indução generalizada*, todos os teoremas de S, e nada mais[51].

Sabemos, agora, exatamente o que queremos dizer ao chamar uma fórmula de *teorema*. Em resumo de tudo que foi dito, a definição é dada por *indução generalizada*, isto é, entendemos que os axiomas são teoremas e se as premissas de uma regra são teoremas, então a conclusão obtida também o é. Ou seja, um teorema é uma frase obtida dentro do sistema formal a partir de uma *demonstração*[52]. Assim sendo, Luiza Ramos na dissertação intitulada *A demanda por demonstrações de consistência nos fundamentos da matemática* (2019) destaca que:

> Portanto, uma vez formalizada, uma teoria pode ser entendida como um sistema de símbolos, com os quais escrevemos frases; e uma escolha de frases tomadas como axiomas, com as quais deduzimos outras frases a partir de regras que operam no nível da sintaxe. (RAMOS, 2019, p. 20).

É natural que o nosso entendimento sobre a natureza de sistemas formais e sua sintaxe tenha caminhado de modo relevante até aqui. Esse progresso, por sua vez, nos proporciona novas possibilidades de questionamentos, afinal, é esperado que com o avanço do tema, outros pontos, ainda mais específicos, requeiram novas definições. Uma outra questão que podemos colocar agora, diz respeito à noção de *teorema* que expomos anteriormente. Sabemos o que *é* um teorema, entretanto, será o caso que *sabemos* o que são *todos* os teoremas de um sistema formal? A primeira coisa a ser comentada diz respeito ao que queremos dizer ao falar em *saber*. Não podemos confundir e diluir o problema em noções de epistemologia que vão além do nosso assunto. Sendo assim, apresentemos a afirmação que queremos investigar:

---

[51] Pelo critério (iii).
[52] Termo que será esclarecido, em seu sentido técnico, a seguir.

a) Uma fórmula A de um sistema formal S é um teorema de S, se e somente se, existe uma *demonstração* de A em S.

Percebam que a validade da afirmação (a) nos garantiria, dentre outras coisas, concluir que *todo teorema tem uma demonstração*. Isso é relevante, pois, nos atestaria que *sabemos* o que são *todos* os teoremas, afinal, nós os definimos com base em (i), (ii) e (iii) por intermédio de uma indução generalizada. Resta, por fim, antes de iniciarmos a demonstração de (a), nos debruçarmos sobre a própria noção de *prova* ou *demonstração*[53] que colocamos em pauta o tempo todo. Apresentemos, de modo preciso e sucinto, a definição de uma *prova-demonstração* dentro de um sistema formal.

Entenderemos, portanto, que uma *prova* ou uma *demonstração* de uma fórmula A em um sistema formal S[54] é uma sequência *finita* de fórmulas $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$, sequência essa que chamaremos de P, em que cada uma das F_i dessa sequência ou é um axioma de S, ou é obtida através de uma regra de inferência de S cujas premissas precedem essa mesma fórmula na demonstração. Por conseguinte, sendo A a última fórmula dessa sequência, entenderemos que P é uma *prova* ou *demonstração* de A em S. Em símbolos:

$$\underbrace{(F_1, F_2, \ldots, F_n)}_{P} \vdash_S A$$

Sabendo, agora, precisamente o que queremos dizer ao falar em *prova* ou *demonstração*, voltemo-nos, portanto, para (a), a fim de demonstrar que *todo teorema tem uma prova*.

[53] Termos estes que utilizamos como sinônimos.

[54] Aqui fazemos a suposição de que S é um sistema formal cujas regras de inferência são todas *finitas*, o que significa dizer que todas as suas regras de inferência possuem uma quantidade finita de premissas.

Demonstração de (a):

Uma fórmula A de um sistema formal S é um teorema de S, se e somente se, existe uma *prova* de A em S.

Perceba que, em decorrência de (i), (ii) e (iii), toda fórmula em uma prova é um teorema. Sendo assim, é válido que:

existe uma prova de A em $S \Longrightarrow A$ é um teorema de S.

No que se refere ao outro lado da equivalência, perceba que, se A é um axioma, por (i), A é ele próprio uma demonstração em S e, portanto, possui uma prova em S. Por sua vez, sendo A a conclusão de uma regra de inferência cuja sequência de fórmulas é $(B_1, B_2, \dots, B_n)$, dada a hipótese de indução de que a definição vale para tudo menos complexo do que A, por (ii), cada um dos B_i possui uma prova. Ao colocarmos cada uma das provas dos B_i em sequência, com A ao fim dessa mesma sequência, nós teremos em mãos uma prova de A em S:

$$(B_1^{\vdash}, B_2^{\vdash}, \dots, B_n^{\vdash}) \vdash_S A$$ [55]

Sendo assim, é válido que:

A é um teorema de $S \Longrightarrow$ existe uma prova de A em S.

[55] Aqui, fazemos uso do sobrescrito "⊢" para representar que não estamos, simplesmente, colocando na sequência as fórmulas B_i, mas sim as suas respectivas demonstrações.

Por conseguinte, está atestado que *todo* teorema possui uma prova – nos moldes do que estas palavras significam dentro desse contexto.

2.4 EXEMPLO: FORMALIZAÇÃO DA ARITMÉTICA DE PEANO

Voltemo-nos, agora, para a introdução de um exemplo de formalização de um conceito por intermédio do método dos sistemas axiomáticos. Buscaremos, no decorrer deste tópico, evidenciar um pouco do que viemos expondo no decorrer deste capítulo. Escolhemos a Aritmética de Peano, pois é um sistema formal que será utilizado no decorrer deste trabalho. Assim sendo, trata-se de uma oportunidade de não somente listar uma série de axiomas para referência técnica posterior, como, também, exemplificar, ainda que de modo preliminar, a concepção de que sistemas formais são formalizações de conceitos.

Destaquemos, outra vez, que se trata de um assunto de interesse independente e com desenvolvimentos que vão além do que se pretende, nesta seção, fazer. À vista disso, pontuemos *Interpretation and Truth in Set Theory* (2018), de Rodrigo Freire; e *Análise de uma Fundamentação da Verdade de Sentenças Aritméticas* (2019), de Edgar L. B. Almeida, como referências completas para o aprofundamento devido ao assunto; além, é claro, de serem as referências primárias para a breve exposição a seguir.

2.4.1 Âmbito Pré-Teórico

Desde o início deste texto, temos como visão que os sistemas formais surgem a partir do processo de *formalização de conceitos*. Isto posto, ao abordarmos uma axiomatização – um sistema formal escrito em primeira ordem – para algo como a aritmética, o que devemos, em princípio, responder[56] é: qual o conceito que estamos investigando matematicamente? Foi estabelecido que uma *investigação matemática* é uma investigação onde busca-se a fundamentação a partir das noções de *prova* e

[56] Ou, ao menos, ter como diretriz.

demonstração, e não, por exemplo, a partir das noções de *intuição* e *auto evidência*. Dado um conceito, em um âmbito pré-teórico – isto é, antes de possuirmos, de fato, um sistema formal enquanto objeto concreto – deve-se investigar esse conceito a fim de sermos capazes de formular princípios que serão descritos em axiomas. Dentro desse âmbito pré-teórico, o conceito está presente e desempenha um papel relevante para a fundamentação do sistema formal[57].

À vista disso, tendo como horizonte esse questionamento, faremos uso da argumentação desenvolvida por Rodrigo Freire em *Interpretation and Truth in Set Theory* (2018), e diremos que o conceito por trás de qualquer axiomatização da aritmética – em particular a que apresentaremos na seção seguinte – é o *conceito de estrutura aritmética*. Rodrigo Freire defende que existem *princípios diretivos* que descrevem esse *conceito* de estrutura. Perceba, portanto, que não estamos falando de *uma* estrutura, mas sim de um *conceito* de estrutura que é dado pelos princípios diretivos da aritmética. Ainda em *Interpretation and Truth in Set Theory* (2018), Rodrigo Freire, na página 202, apresenta-nos os princípios:

1) *Cada número é denotado por um único numeral*, *que é um objeto sintático obtido pela repetição de um símbolo primitivo. Cada numeral denota um número único*.
2) *Dados dois numerais* s *e* t, *a soma dos números denotados por* s *e* t *é denotada pelo numeral obtido pela repetição do símbolo primitivo determinado por* t *sobre* s.
3) *Dados dois numerais* s *e t*, *o produto dos números denotados por* s *e* t *é denotado pelo numeral obtido pela repetição da repetição* s *determinada por* t.

Desse modo, esses princípios diretivos *descrevem* um conceito de estrutura aritmética, e, quaisquer estruturas – agora em sentido *concreto* – que se conformem com esses princípios serão estruturas que *realizam* de modo adequado o *conceito* de

[57] Ainda que, tal como já foi dito, a partir da constituição concreta do sistema formal, ou seja, no âmbito teórico, o conceito e o significado subjacente são abandonados e não mais desempenham um papel de fundamentação.

estrutura aritmética. Esse *conceito* de estrutura aritmética, dado pelos critérios (1), (2) e (3), é o conceito que é alvo de investigação matemática e, por conseguinte, é formalizado em um sistema formal.

Perceba que os critérios (1), (2) e (3) parecem descrever uma concepção razoável de aritmética. Em linhas gerais, esses princípios diretivos afirmam que os números são representados por *numerais*, que, por sua vez, nada mais são do que objetos sintáticos constituídos mecanicamente por repetições em sequência de um mesmo símbolo primitivo.

$$| \quad || \quad ||| \quad |||| \quad ||||| \quad |||||| \quad \ldots$$

Esta *representação* se dá de modo unívoco, isto é, cada número denota um e somente um numeral.

$$| \mapsto 1$$

$$|| \mapsto 2$$

$$||| \mapsto 3$$

$$|||| \mapsto 4$$

$$||||| \mapsto 5$$

$$|||||| \mapsto 6$$

$$\vdots$$

Além disso, as operações elementares da aritmética – quais sejam, a soma e a multiplicação[58] – correspondem a operações mecânicas com numerais. O ato de somar números, corresponde ao algoritmo de *agrupar* numerais, sendo este novo

[58] Podemos, também, adicionar a função sucessor.

agrupamento de símbolos primitivos correspondente a um novo numeral e, pelo critério (1), a um único número.

$$1 + 2 \mapsto | + || = |||$$

$$||| \mapsto 3$$

$$\therefore 1 + 2 = 3$$

De maneira análoga, a multiplicação corresponde ao algoritmo de agrupar fileiras de numerais; ou, em outras palavras, ao algoritmo de *repetir* um dos numerais, sendo essa *repetição* controlada pelo outro numeral – o que nos entrega um numeral que, também por (1), representa um único número[59].

$$2 \cdot 3 \mapsto || \cdot ||| = || + || + || = ||||||$$

$$|||||| \mapsto 6$$

$$\therefore 2 \cdot 3 = 6$$

A partir desse conceito – isto é, desses princípios que determinam um *conceito de estrutura aritmética* –, podemos voltar a nossa atenção à tarefa de descrever propriedades e comportamentos que a proposta de formalização deve respeitar. Perceba como, dentro do âmbito pré-teórico, o conceito desempenha um papel muito relevante para a construção do sistema formal. No âmbito pré-teórico, as noções de *número*, *soma*, *produto*, *sucessor*, dentre outras, possuem uma conotação específica – que é aquilo determinado pelos princípios diretivos.

À vista disso, tendo como referência essa breve apresentação, podemos partir para o âmbito teórico. Note, contudo, que, dentro do âmbito teórico, o conceito não mais existe como elemento da teoria. Enquanto no nível pré-teórico o conceito está

[59] De maneira similar, pensando na sucessão, trata-se do algoritmo que pega um numeral e adiciona a essa sequência mais uma repetição do símbolo primitivo, algo que também, por (1), corresponde a um único número.

presente e desempenha um papel relevante para a constituição da teoria, a partir do momento em que se constitui a teoria como objeto concreto o conceito deixa de desempenhar qualquer tipo de papel fundacional[60].

Apresentemos, portanto, a formalização, enquanto uma teoria de primeira ordem, da *Aritmética de Peano*.

2.4.2 Âmbito Teórico

Por se tratar de uma teoria de primeira ordem, devemos explicitar apenas seus axiomas e símbolos *não-lógicos* para que a teoria em questão esteja estabelecida. Com isso assumido, garantimos parte dos elementos de um sistema formal.

Considere P o sistema formal que caracteriza a Aritmética de Peano.

Símbolos não-lógicos de P:

- A constante 0.
- O símbolo de função unária S, que representa a *função sucessor*.
- Os símbolos de função binária $\cdot$ e $+$, que, respectivamente, representam o *produto* e a *soma*.
- O predicado binário $<$, que representa a *ordem*.

Axiomas não-lógicos de P[61]:

- Axioma 1: $(Sx \neq 0)$.
- Axioma 2: $(Sx = Sy \rightarrow x = y)$.
- Axioma 3: $(x + 0 = x)$.

[60] O que, por sua vez, acarretará em consequências – consequências estas que serão exploradas no decorrer do texto.

[61] Ressaltemos o fato de que, tal como em *Computabilidade e Lógica* (2012), “fazemos uso de uma convenção tradicional, segundo a qual ao exibir sentenças da linguagem da aritmética que começam com uma cadeia de um ou mais quantificadores universais, podemos nos omitir de escrever os quantificadores, escrevendo somente as fórmulas abertas que vêm depois deles.” (BOOLOS, 2012, p. 266).

- Axioma 4: $(x + Sy = S(x + y))$.
- Axioma 5: $(x \cdot 0 \ = 0)$.
- Axioma 6: $\left(x \cdot Sy = \left((x \cdot y) + x\right)\right)$.
- Axioma 7: $\neg(x < 0)$.
- Axioma 8: $\left((x < Sy) \leftrightarrow \left((x < y) \vee (x = y)\right)\right)$.
- Axioma 9 (*axioma-esquema da indução*): $\left(A_x \wedge \forall_X(A \rightarrow A_x[S_X])\right) \rightarrow A$.

Regras de inferência de P:

- *Expansão*: conclui $(B \vee A)$ de A.
- *Contração*: conclui A de $(A \vee A)$.
- *Associatividade*: conclui $\left((A \vee B) \vee C\right)$ de $\left(A \vee (B \vee C)\right)$.
- *Corte*: conclui $(B \vee C)$ de $(A \vee B)$ e $(\neg A \vee C)$.
- *Introdução do Existencial*: se x não ocorre livre em B, conclui $(\exists xA \rightarrow B)$ de $(A \rightarrow B)$.

Desse modo, temos, finalmente, o sistema formal P, que é uma teoria de primeira ordem que caracteriza a Aritmética de Peano. Uma questão que deixaremos em aberto é: será que essa caracterização é total? Isto é, será o caso de que essa lista de axiomas captura *totalmente* o conceito pré-formalização? Adiantemos que responderemos a esse questionamento na seção 4.2.5, presente no terceiro capítulo de desenvolvimento.

2.5 UM PRIMEIRO OLHAR PARA O MOVIMENTO DE DESINTERPRETAÇÃO

A partir da análise da sintaxe dos sistemas formais é possível avançar o nosso entendimento acerca da *natureza* desses objetos. De todo modo, é pertinente destacar que, em um primeiro olhar, tais construções *não possuem* outro tipo de *significado* além dos simbólico e sintático entrelaçados entre si. Linhas acima, argumentamos que os sistemas formais surgem ao se formalizar um conceito e, evidentemente, sua estipulação não está desconectada do objeto pré-formalização, tal como Shoenfield destaca incansáveis vezes. Seria razoável, pensar-se-ia, associar o *significado* do conceito aos símbolos que dão sentido ao sistema formal[62]. Ao observarmos o *Axioma 3* da proposta de formalização da Aritmética de Peano, isto é,

$$(x + 0 \ = x)$$

parece intuitivo pensar que esses símbolos falam sobre isso que conhecemos como números naturais. De fato, é o caso, pré-teoricamente, que o resultado da soma de qualquer número natural com zero seja o próprio número natural em questão. Entretanto, um sistema formal, visto apenas como tal, não fala sobre esses *números* que conhecemos intuitivamente. Todos os símbolos presentes na expressão "$(x + 0 \ = x)$" são definidos dentro de um contexto específico e todo o significado que estes *aparentam* ter, são dados obtidos *fora* do sistema formal, como é o caso da nossa experiência prévia com a aritmética não-formalizada.

Para alguém que tenha estudado matemática básica em algum país ocidental, esses símbolos, sem dúvida, sugerem certas conotações[63]. Associamos um sentido ao símbolo "$+$", do mesmo modo que ao nome próprio "0". Imagine, contudo, um estudante de matemática e lógica que viveu e foi alfabetizado em uma sociedade com linguagem e simbologia completamente diferentes das que conhecemos em qualquer lugar do mundo. Esse estudante conhece, por hipótese, o conceito de função, de variável, de prova, e os demais elementos fundamentais das disciplinas matemáticas. O estudante, ao se deparar com a mesma expressão citada, conhecendo as funcionalidades da lógica e matemática básica – aprendida em sua língua materna desconhecida –, poderá entender, conforme introduzido aos símbolos e ao observar a estipulação das regras do sistema formal P, que "$+$" se trata de uma função binária

[62] Algo que deturparia a visão de Shoenfield. Ainda que Shoenfield se refira a termos como *evidência* e *intuição*, em momento algum faz uso de tais concepções para *fundamentar* algum sistema formal. Shoenfield apenas destaca, com clareza, como o processo pragmático da prática matemática *molda* a estipulação de sistemas formais.

[63] Ainda que podendo variar um pouco de contexto para contexto.

que respeita certos axiomas, do mesmo modo que "0" é uma constante que designa um e somente um objeto do domínio.

Esse estudante hipotético será capaz de compreender todo o funcionamento desse sistema formal sem possuir *nenhum* tipo de conhecimento prévio acerca dos símbolos ou, até mesmo, do conceito pré-formalização. Ainda que não possamos dizer o que *é* o significado dos sistemas formais[64] – ou até mesmo se possuem algo nesse sentido –, não parece razoável, dentro do contexto moderno, que seja, *apenas*, o significado do conceito, pois esse significado, pelo exemplo acima, é dispensável para o pleno uso e aplicação do sistema formal enquanto objeto sintático. De todo modo, tal conclusão nos diz muito mais sobre a *funcionalidade* de um sistema formal moderno do que sobre qualquer outra questão fundacional. Observemos tal coisa.

Um sistema formal, como estamos defendendo, surge no contexto de formalização de um conceito, ou alguns conceitos, como exemplificamos com a Aritmética de Peano. Desse modo, se lidamos com um conceito qualquer, um sistema axiomático que o formaliza, a partir da sua constituição concreta, não carrega consigo o significado subjacente de seus termos internos. O que temos em mãos é um objeto puramente sintático e *desinterpretado* que, a partir de determinadas definições, produz *novas frases*. Para entendermos esse processo, intitulado por Arno Aurélio Viero, outra vez em *Sistemas Axiomáticos Formalizados* (2011), como "movimento de desinterpretação" (VIERO, 2011, p. 41), precisamos nos ater, ainda que de modo superficial, aos eventos enfrentados pelos matemáticos no início do século XIX que modificaram as concepções da axiomática clássica para esta que conhecemos hoje.

Durante boa parte da história da matemática, o exemplo de rigor a ser seguido em uma teoria matemático-científica era o trabalho de Euclides em *Elementos*. É natural, portanto, que coloquemos o surgimento das geometrias não-euclidianas no século XIX como possuindo papel central na quebra desse paradigma. Ainda assim, outros fatores influenciaram de modo significativo esse movimento, como é o caso do avanço da álgebra na primeira metade do século XIX. Assim descreve Viero:

> Através do recurso a variáveis era possível o estabelecimento de fatos bastante gerais a respeito de uma dada classe de elementos. A grande

[64] Dado o desenvolvimento moderno dos sistemas formais.

> descoberta realizada pelos algebristas ingleses foi a ideia de que, através do recurso à simbolização, seria possível a caracterização de certas propriedades que não deveriam ter sua aplicabilidade restrita a domínios numéricos específicos. [...] A partir do momento em que se dissocia o simbolismo de sua interpretação natural, a liberdade de manipulação algébrica aumenta consideravelmente [...]. (VIERO, 2011, p. 33).

Portanto, tal concepção influenciou uma mudança não somente na álgebra – que até então era tida como uma aritmética simbolizada –, como, também, no entendimento crescente na matemática de que a validade das afirmações deveria *independer* da interpretação dos símbolos envolvidos, voltando sua atenção para as *regras* que os regem. Outro ponto que desempenhou papel fundamental nesse movimento foi a preocupação, dentro da análise, com o rigor de inúmeros conceitos básicos que não possuíam uma definição exata e precisa.

No início do século XIX, os matemáticos responsáveis pela análise começaram a tratar toda essa falta de *rigor* como uma situação incabível. Podemos pontuar, portanto, a principal característica desse processo, ocorrido dentro da análise, como sendo o recuso sucessivo e uma desconfiança geral a qualquer tipo de apelo à *intuição*. Por conseguinte, algumas conclusões que, de antemão, eram aceitas sem uma demonstração rigorosa, a partir desse momento, exigiriam austeros processos de provas, tendo como pilar os conceitos básicos, agora definidos de modo firme. Tal como pode-se imaginar, “fatos até então considerados *óbvios* passaram a ser objeto de demonstração” (VIERO, 2011, p. 34)[65].

Um terceiro elemento que também desempenhou um papel capital para o movimento de desinterpretação, influenciando, portanto, diretamente o surgimento do conceito da axiomática formal moderna, foi o resgate do interesse da assim chamada geometria projetiva, outra vez no início do século XIX. Em decorrência de peculiaridades inerentes à própria área, pesquisadores compreenderam, prematuramente, que seria benéfico a estipulação de alguns elementos que não eram envoltos em bases intuitivas. Isso poderia gerar estranheza, levando em conta que, até então, era a *intuição* que garantia a legitimidade dos princípios fundacionais matemáticos e científicos. Todavia, como foi constatado, a adoção de elementos

[65] Ênfase nossa.

contra-intuitivos proporcionou resultados significativos. Um grande exemplo a ser comentado foi a descoberta do *princípio da dualidade*, tal como elucida Viero:

> [...] a introdução de um ponto no infinito, definido como ponto de interseção de retas paralelas, tornou possível uma simetria notável entre os fatos estabelecidos a respeito de pontos e de linhas retas. Isto permitiu a formulação e utilização do chamado princípio da dualidade. Assim, dado um teorema qualquer, poderíamos intersubstituir uniformemente os termos ‘ponto’ e ‘reta’ e, com isto, obter um novo teorema denominado dual do primeiro. [...] O impacto causado pela descoberta do princípio da dualidade foi imenso. [...] A sua descoberta foi decisiva para o surgimento da axiomática formal. (VIERO, 2011, p. 35).

A consequência natural desse tipo de resultado foi o entendimento crescente, até mesmo em outros ramos além da geometria projetiva, de que a adoção de conceitos que não se respaldam na intuição, não é, em princípio, um problema, e em alguns casos pode gerar avanços relevantes. Por conseguinte, observou-se um espontâneo *esvaziamento* semântico dos axiomas de uma teoria, visto que pelo próprio exemplo do princípio da dualidade – que permitia a troca irrestrita dos termos *reta* e *ponto* dentro de teoremas –, o sentido e o significado pré-formalização dos conceitos parecem ser descartáveis. Desse modo, podemos observar o início de uma guinada dos matemáticos rumo à separação do conceito pré-formalização e o seu correlato formal e sintático dentro de um sistema formal[66], além de um natural desprendimento da necessidade de se fazer uso da *intuição* para fundamentar certas decisões. Sendo assim, torna-se claro que “o esvaziamento do conteúdo significativo das proposições seria uma estratégia interessante na obtenção de novos resultados” (VIERO, 2011, p. 36).

Assim sendo, podemos sintetizar tudo o que já foi explicitado e enumerar os três elementos que possuímos em mãos:

- A generalização das afirmações por meio do uso de uma linguagem independente de interpretações fixadas;

[66] Ou seja, a adoção – ainda que não-textualmente – da distinção que chamamos aqui de nível pré-teórico e teórico.

- A busca por rigor e demonstração dos conceitos básicos e fundacionais;
- O desprendimento à intuição e o esvaziamento semântico dos axiomas;

Observando o que cada um desses elementos citados trouxe consigo nessa caminhada – que culminaria na mudança da concepção da axiomática clássica, baseada no trabalho de Euclides –, a obtenção de geometrias que não adotassem o postulado das paralelas pode ser enxergada como um passo natural dentro desse movimento histórico. As assim chamadas *geometrias não-euclidianas*, podem ser entendidas como o quarto elemento crucial para o avanço do movimento de desinterpretação do século XIX. A partir disso, diz Viero:

> Para alguns, a descoberta de tal fato [as geometrias não-euclidianas] atestava mais uma vez o fracasso da intuição na constituição do conhecimento matemático e, a partir de então, não seria possível atribuir qualquer significado ao conceito de evidência. (VIERO, 2011, p. 36).

Outra consequência do advento das geometrias não-euclidianas foi justamente a necessidade de se *entender* com exatidão o que as diferenciavam da geometria clássica, o que, por sua vez, implicou em um processo de *reformulação*, o mais completo possível, da geometria de Euclides. Não é de se espantar que esse movimento, cujos princípios respaldam-se nas características já citadas, tenha chegado à conclusão de que a axiomática desenvolvida por Euclides – referência à época de como um trabalho matemático-científico deveria ser – não correspondia às novas exigências de rigor, precisão e metodologia que os matemáticos tanto buscavam. Além disso, destaca-se a constatação de que a geometria euclidiana não era a única possível, tendo em vista que o seu aparente patamar privilegiado decorreu de seu suposto apoio à intuição e à evidência. Por isso, tal privilégio não passava de uma imprecisão de suas concepções fundacionais e, dentro da visão desse movimento histórico, do equívoco da axiomática clássica – personificada pelos *Elementos*, de Euclides – em se prender às *interpretações dos conceitos*, ou seja, em seu caráter *contentual*. À vista disso, conclui Viero:

> Os desenvolvimentos da época exigiam um novo padrão de rigor na prática matemática e como o método axiomático é o método matemático por excelência, uma nova concepção de axiomática foi surgindo para satisfazer as exigências do momento. As mudanças na concepção clássica que possibilitaram o surgimento da axiomática formal é o que denomino de 'movimento de desinterpretação'. [...] A desinterpretação da axiomática é o resultado de um processo complexo que surge gradualmente como uma nova maneira de entender os diversos componentes do método axiomático. (VIERO, 2011, p. 41)

Tendo como contexto tudo o que foi exposto, percebe-se que a associação irrestrita do significado do conceito pré-formalização com o hipotético sentido dos axiomas dos sistemas formais é problemática a partir da visão moderna de teorias formais, observação esta que ganha força e precisão – tanto histórica quanto técnica – com base no que foi dito. Por sua vez, é inegável que, nos moldes do que defende Shoenfield, existe uma relação entre as duas coisas, ainda que, por conta do modo como os sistemas axiomáticos evoluíram, essa relação não deva ser entendida como baseada na *intuição* e *evidência* de que certos axiomas são *melhores* dadas as circunstâncias da realidade.

Iniciamos este capítulo pressupondo e apresentando o que hoje se entende como sistemas formais. Expusemos a visão de dualidade acerca desses objetos, isto é, o âmbito pré-teórico e teórico, contudo, caímos no problema decorrente da desinterpretação que *separa* drasticamente essas duas camadas. A fim de buscarmos avançar nessa questão, isto é, para que possamos dar prosseguimento às nossas investigações, devemos, então, buscar entender esse processo histórico, denominado como *movimento de desinterpretação*, indagando suas origens que datam anteriores ao século XIX. Devemos, portanto, entender o que motivou e oportunizou um ambiente de mudança em favor da desinterpretação, além de, naturalmente, nos questionarmos sobre o que ganhamos com tal movimento. Isto posto, iniciemos o próximo capítulo acerca do processo histórico que proporcionou a fundamentação *filosófica* necessária para o caminho da desinterpretação dos sistemas formais.

3 O PROCESSO HISTÓRICO DE DESINTERPRETAÇÃO

3.1 UM OLHAR PARA A HISTÓRIA

Dentro deste capítulo, buscaremos avançar o nosso entendimento sobre o *movimento histórico de desinterpretação* que atingiu o seu ápice em meados do século XIX – tal como abordado preliminarmente na seção 2.5 do capítulo anterior –, transformando as concepções modernas de sistemas formais no que, hoje, de fato são. Essa abordagem histórica é relevante, pois é de demasia importância entender o contexto em que esse movimento surge; isto é, deve-se buscar aprofundar *como* o movimento se legitima. Em outras palavras, é crucial que se saiba o *que* esse processo buscava responder, para que possamos encarar as suas conclusões como o que são: frutos de um longo e complexo processo histórico.

No decorrer do capítulo passado, expusemos a visão moderna de sistemas formais, que tem na *desinterpretação* de sua sintaxe a maior discrepância conceitual perante a concepção clássica de axiomática. Isto posto, falar sobre sistemas formais sem abordar o seu caráter essencialmente mecânico e sintático é impossível. De todo modo, trata-se de uma questão que tem suas origens rastreáveis até as primeiras indagações fundacionais acerca da matemática – sejam essas questões referentes à própria noção de *verdade matemática*, ou, até mesmo, no que concerne a sua *aplicação ao mundo físico*.

Foi estabelecido que os sistemas formais surgem da *investigação matemática* de conceitos, ou seja, a partir do momento em que se busca estabelecer conhecimentos sobre esses conceitos tendo como fundamentação a noção de *demonstração* e *prova*. À vista disso, este capítulo debruça-se em um assunto de interesse independente e próprio, e pretende expor uma parte do caminho histórico do desenvolvimento da filosofia da matemática – que proporcionou a legitimidade necessária para a desinterpretação desses objetos. Abordaremos, portanto, alguns autores selecionados, de modo a traçar uma linha de esclarecimento perceptível do processo. Assim sendo, o capítulo tem como principal meta apresentar a fundamentação filosófica do movimento de desinterpretação, partindo de Platão e Aristóteles, até Frege e Hilbert.

3.2 PLATÃO E ARISTÓTELES

A busca por fundamentação dentro da matemática é, provavelmente, tão antiga quanto a própria prática da matemática. Um dos principais pontos de interesse, que evocam uma necessidade de se entender as bases desse campo, é a questão: como pode um objeto *abstrato* e *ideal*, de algum modo, dizer algo sobre a realidade física? É trabalho, portanto, do filósofo da matemática se debruçar sobre esses pontos. Assim dirá Stewart Shapiro em *Filosofia da Matemática* (2018):

> Dadas as extensas interações existentes o filósofo deve pelo menos começar com a hipótese de que existe um *relacionamento* entre o conteúdo da matemática (seja ela qual for) e o conteúdo da ciência (seja o que for também), e que não é nenhum acidente que a matemática se aplique à realidade material. (SHAPIRO, 2019, p. 60)[67].

Por sua vez, falar em *fundamentação* da matemática nos leva de modo natural à Grécia Antiga. Ainda que, nos dias atuais, muitos pesquisadores problematizem a visão (eurocêntrica), tradicionalmente aceita nos manuais, de que a filosofia *surge* na Grécia, com um *romper* do *Mito* em favor da *Razão*[68], é inquestionável que, dado o acesso que possuímos aos escritos antigos, é na Grécia Antiga que encontramos a gênese disso que hoje chamamos de *filosofia* e, até mesmo, *fundamentação da matemática*. À vista disso, a obra de Platão, em particular a sua concepção da *ontologia das Formas*, é fundamental para o entendimento de posições modernas, como é o caso, por exemplo, do *Logicismo* encabeçado por Frege.

Platão tem como cenário o desencontro entre a realidade do mundo físico-material e as ideias que somos capazes de conceber. É evidente que, ainda que possamos projetar conceitos como *Justiça*, *Beleza* e *Virtude* – para ficarmos em poucos casos –, o que encontramos à nossa volta na realidade é *distinto* e, por fim, *imperfeito* perante as abstrações idealizadas. Desse modo, a questão que ecoa é: por

[67] Ênfase nossa.
[68] Citemos, aqui, como referência desta posição questionadora, o trabalho de Maria Michela Sassi em *Os inícios da filosofia: Grécia* (2015).

que não somos capazes de encontrar esses ideais perfeitos no mundo físico, ainda que sejamos capazes de os conceber? A solução de Platão é o entendimento de que existem dois reinos distintos e separados: o reino das *Formas* e o mundo do *Devir*. O reino das Formas é onde todos esses conceitos existem. Para Platão, é lá que *a própria Justiça*, *a própria Beleza* e *a própria Virtude* – citando apenas os exemplos acima – de fato existem. Sendo assim, um objeto qualquer é tido como *belo* na medida em que *participa* ou se *assemelha* da *própria Beleza*, presente apenas no reino das Formas. Enquanto isso, o mundo material, esse que Platão denomina de mundo do *Devir*, é que seria mutável e corruptível, diferentemente das Formas que são eternas e absolutas.

O acesso que temos ao mundo do Devir é trivial, afinal, é a realidade que temos ao nosso redor, essa que percebemos e conhecemos através dos sentidos. Contudo, no que se refere às Formas, Platão acredita que as *conhecemos* através da alma, devido a sua integração em uma vida passada ao reino do *Ser*. O filósofo grego, portanto, entende que o ato de *aprender* é, na prática, um *relembrar*, ou *rememorar*, a vida passada em que a alma possuía acesso direto ao reino do *Ser*; isto é, das *Formas*. Essa visão é claramente observada no *Mênon*, quando Sócrates em sua argumentação leva um escravo, sem conhecimentos prévios, a concluir um teorema sobre propriedades geométricas, atestando, por conseguinte, a sua tese de que o escravo, em sua alma, já havia *acessado* anteriormente esse saber.

> Sendo então a alma imortal e tendo nascido muitas vezes, e tendo visto tanto as coisas <que estão> aqui quanto as <que estão> no Hades, enfim todas as coisas, não há o que não tenha aprendido; de modo que não é nada de admirar, tanto com respeito à virtude quanto ao demais, ser possível a ela rememorar aquelas coisas justamente que já antes conhecia. Pois, sendo a natureza toda congênere e tendo a alma aprendido todas as coisas, nada impede que, tendo <alguém> rememorado uma só coisa – fato esse precisamente que os homens chamam aprendizado –, essa pessoa descubra todas as outras coisas, se for corajosa e não se cansar de procurar. Pois, pelo visto, o procurar e o aprender são, no seu total, uma rememoração. (PLATÃO, Mênon, 81c-d).

A concepção que se pode extrair dos diálogos é que o mundo material (o mundo do Devir) é estabelecido para que sejamos instigados a ir além dos nossos sentidos, partindo em direção ao reino do Ser (às Formas). É dentro desse contexto, portanto, que a matemática possui papel crucial para Platão; afinal, é por intermédio da matemática que a alma é *elevada* para além do mundo físico, encontrando, então, o eterno mundo do Ser. A matemática, em particular a geometria, é um caso paradigmático dentro da visão de Platão da separação entre o mundo físico e o mundo ideal. Os conceitos matemáticos são, em geral, inalcançáveis no mundo material. Falamos sobre *círculos perfeitos*, *linhas retas*, dentre outras definições, porém, nenhuma dessas coisas podem ser encontradas na realidade. Lidamos somente com representações *imperfeitas* de todos esses conceitos.

Tal como se pode imaginar, para Platão, a *verdade* das expressões matemáticas é objetivamente determinada, e independe de modo absoluto do matemático. Dessa maneira, o filósofo defende que o conteúdo da matemática *existe* no reino do Ser, independentemente do conhecimento ou existência prévia de qualquer outra coisa no mundo do Devir – como é o caso dos seres humanos, por exemplo. Ao fim do Livro VI da *República*, Platão nos apresenta uma metáfora que esclarece a sua visão do lugar da matemática na sua ontologia e, além disso, entrega-nos uma proposta de explicação acerca do modo como esses objetos ideais relacionam-se com o mundo físico.

> Examina agora de que maneira se deve cortar a seção inteligível. [...] Suponho que sabes que aqueles que se ocupam da geometria, da aritmética e ciências desse gênero, admitem o par e o ímpar, as figuras, [...] e outras doutrinas irmãs destas, segundo o campo de cada um. Estas coisas dão-nas por sabidas, e, quando as usam como hipóteses, não acham que ainda seja necessário prestar contas disto a si mesmos nem aos outros, uma vez que são evidentes para todos. E, partindo daí e analisando todas as fases, e tirando as consequências, atingem o ponto a cuja investigação se tinham abalançado. [...] Logo, sabes também que se servem de figuras visíveis e estabelecem acerca delas os seus raciocínios, sem contudo pensarem neles, mas naquilo com que se parecem; fazem os seus raciocínios por causa do quadrado em si [...], mas não daquela cuja imagem traçaram [...]. Aquilo que eles modelam ou desenham, de que existem as sombras e os reflexos na água, servem-se disso como se fossem imagens, procurando ver o que não pode avistar-se, senão pelo pensamento. [...] Portanto, era isto o que eu queria dizer com a classe do inteligível, que a alma é obrigada a servir-se de hipóteses ao procurar investigá-la, sem ir ao princípio, pois não pode elevar-se acima das hipóteses, mas utilizando como imagens os próprios originais dos quais eram feitas as imagens pelos objetos da seção inferior, pois esses também, em comparação com as sombras, eram considerados como mais claros. (PLATÃO, A república, 510b-511a).

Desse modo, dentro da concepção de Platão, a geometria, assim como as demais áreas da matemática, *fala*, isto é, *explica* o mundo físico pelo simples fato de que os próprios objetos físicos são *reflexos* dos objetos matemáticos, sendo esses últimos, por sua parte, reflexos das Formas[69]. Há, por conseguinte, uma cisão entre o *mundo matemático* e o *mundo material*[70]. Por conta disso, o conhecimento da matemática não se dá por intermédio dos sentidos, mas sim mediante o *pensamento*. Através dos sentidos percebemos as coisas do mundo material, entretanto, não existem *círculos perfeitos*, *linhas retas perfeitas*, etc., dentro da dimensão do Devir. A verdade matemática, em resumo, além de absoluta e determinada, para Platão, não é alcançada pelos sentidos, mas somente pelo pensamento.

A relação entre o mundo físico e a matemática consiste em um *aproximar*, visto que os objetos materiais apenas se *assemelham* aos objetos matemáticos. Isso torna possível que a verdade matemática, conhecida através do pensamento, diga algo também sobre o mundo do Devir – cabendo ao matemático o entendimento da natureza *não-nativa* dessa relação, dado que a verdade matemática pertence ao reino do Ser. Comentando, por fim, especificamente, a visão de Platão sobre a aritmética e a álgebra, destaca-se que o filósofo mantém o seu posicionamento *realista*[71] e afirma que as proposições da álgebra e da aritmética possuem valoração definida e independente de qualquer outra coisa. Além disso, Platão defende que essas proposições, tal como a geometria, não falam sobre o *mundo físico*, mas sim sobre um domínio de objetos abstratos; no caso da álgebra, os *números*.

Isto posto, torna-se evidente que a concepção que Platão possui acerca da matemática é intrinsicamente conectada à sua visão sobre a metafísica, em particular à sua ontologia das Formas. Aristóteles, discípulo mais famoso de Platão, iguala-se

[69] Portanto, ainda que possa haver controvérsias, assumimos a interpretação de que, para Platão, os objetos matemáticos são distintos das Formas. Tal ponto é relevante ser destacado, pois, como esclarece Shapiro, “Platão tomou pelo menos alguns objetos matemáticos como sendo Formas. Há indicações de que durante o seu tardio período neo-pitagórico Platão tomou todas as Formas como sendo matemáticas.” (SHAPIRO, 2019, p. 88).

[70] Afinal, ainda que possa haver discussões sobre a separação entre Formas e objetos matemáticos, seja qual for a interpretação, ambos se dão no domínio do Ser, e, por sua vez, separados do mundo do Devir.

[71] Shapiro esclarece (SHAPIRO, 2019, p. 92) que se trata de um realismo tanto no que se refere ao valor de verdade quanto em ontologia. Acerca do que o autor entende por *realismo*, podemos definir *realismo em ontologia* como “o ponto de vista de que pelo menos alguns objetos matemáticos existem objetivamente, independentemente do matemático” (SHAPIRO, 2019, p. 49); por sua vez, o *realismo em valor de verdade* é a posição de que “as proposições matemáticas têm valores de verdade objetivos, independentes das mentes, linguagens, etc., dos matemáticos” (SHAPIRO, 2019, p. 54).

ao seu mestre no fato de que a sua filosofia da matemática é um reflexo de sua metafísica, contudo, distingue-se de Platão ao se opor à separação entre o mundo material e o reino do Ser. Para Aristóteles, as Formas, ou *Universais*, existem; entretanto, a sua existência não se dá de maneira independente – em um outro reino – dos objetos. As Formas (aristotélicas) existem, precisamente, nos objetos individuais do mundo físico. Revisitando o exemplo anterior acerca da *Beleza*, para Aristóteles, a Beleza seria aquilo que todas as coisas *belas* possuem *em comum*, e não um conceito *eterno* e *imutável* em um outro reino que serve de baliza para que um objeto seja tido como belo. Perceba a conclusão curiosa de que, dentro da visão de Aristóteles, se fosse possível destruir todas as coisas belas, a *própria Beleza* deixaria de existir, pois não restaria nada no mundo que a pudesse instanciar – sendo a mesma conclusão para qualquer outra Forma[72].

Falando, portanto, da geometria, Aristóteles explica os objetos matemáticos de modo análogo à sua percepção sobre as Formas. O filósofo defende que os objetos matemáticos surgem a partir de *abstrações* dos objetos físicos e, por conseguinte, não existem separadamente em um reino distinto. Para Aristóteles, o matemático é capaz de *selecionar* (*abstrair*) certas características dos objetos físicos e, então, observar com mais detalhes conceitos como *circunferência*, *linha reta*, etc., que, de alguma maneira, já existiam nesses objetos materiais. Shapiro, por sua vez, complementa que:

> Esta separação é psicológica, ou talvez lógica. Ela diz respeito a como pensamos sobre objetos físicos. Para Aristóteles, o erro de Platão foi concluir que os objetos geométricos são metafisicamente separados das suas individualizações físicas, apenas porque os matemáticos conseguem ignorar certos aspectos físicos do conteúdo matemático. (SHAPIRO, 2019, p. 103).

A questão que se levanta a partir desses pontos diz respeito ao que Aristóteles entende por *abstração*. A primeira interpretação possível é o entendimento *literal* de que os objetos matemáticos são originados no ato de se *analisar cuidadosamente* um objeto físico. Perceba que, dentro dessa visão, os objetos matemáticos não existem

---

[72] Perceba como esse entendimento é condizente com a visão moderna de estruturas de primeira ordem – algo que será definido com mais detalhes no decorrer do texto. Aristóteles parece defender uma visão de extensões acerca de conceitos (predicados).

anteriormente ao ato de abstrair do matemático. Além disso, não poderiam continuar a existir sem os objetos físicos que os originaram, tornando a sua existência sempre condicionada ao objeto-original e, portanto, dependente ontologicamente. Os números naturais, por exemplo, *existem* enquanto abstrações de coleções de objetos físicos. Essa interpretação carrega algumas vantagens, contudo, a principal crítica pode ser sintetizada na seguinte fala de Shapiro:

> Uma consequência infeliz (para não dizer condenável) desta descrição é que um número natural não existe a menos que exista uma coleção de objetos físicos com aquele tamanho. Analogamente, um objeto geométrico, tal como um polígono dado, só existe se houver um objeto físico que tem aquela forma. (SHAPIRO, 2019, p. 104-105).

Seria possível, portanto, um crítico moderno dessa interpretação afirmar que boa parte dos números naturais sequer existem. Afinal, é difícil imaginar coleções arbitrariamente grandes de objetos que podem ser perceptíveis *empiricamente* ao matemático a ponto de que seja possível abstrair desses conjuntos números naturais também arbitrariamente grandes. O mesmo, é claro, poderia ser argumentado acerca de polígonos complexos que são comumente estudados na geometria. Outra crítica relevante que se pode fazer à *abstração*, vista nesses moldes, é o entendimento de que o processo de abstrair *todas as diferenças* de objetos distintos, com o fim de se obter a sua Forma aristotélica, nos impossibilitaria de distinguir os próprios objetos entre si. Isso, porque a definição de abstração – dentro desse contexto – é precisamente *retirar*, ou *ignorar* em pensamento, tudo que os diferencia, o que, por sua vez, tornaria impossível a concepção de uma coleção de objetos maior do que um, pois somente seríamos capazes de *perceber* os *objetos-abstraídos* enquanto uma única e indistinguível unidade – algo que, sem dúvida, parece problemático em diversos sentidos.

Em vista disso, uma aparente vantagem dessa interpretação é a atraente conclusão de que a matemática, em geral, é *objetivamente* verdadeira e fala sobre objetos reais – tornando a sua relação com a realidade trivial. Dentro dessa concepção, os objetos matemáticos são tais que *descrevem* e *refletem* de modo preciso a realidade[73]. As proposições matemáticas, portanto, são *objetivamente* verdadeiras em decorrência de o mundo ser como é, além de falarem sobre objetos (matemáticos) que são reais. Aqui, encontramos, tal como em Platão[74], um realismo – com bases empíricas – tanto em valor de verdade quanto em ontologia.

Uma segunda forma de entender a abstração defendida por Aristóteles, no contexto da matemática, consistiria na rejeição ao realismo ontológico. Dentro dessa abordagem, os objetos matemáticos são tidos como um *mecanismo ficcional* que o matemático faz uso durante a prática matemática, com o fim de esclarecer e maximizar o entendimento sobre determinadas propriedades. A conclusão inevitável dessa interpretação é o entendimento de que os objetos matemáticos não existem para além do uso específico dos matemáticos.

> Considera-se, mais uma vez, uma esfera de latão. O geômetra não abstrai do latão para chegar à esfera geométrica. Ele simplesmente ignora o latão e só considera as propriedades do objeto físico que resultam do fato de ele ser esférico. [...] um geômetra supõe tipicamente que há um objeto geométrico que tem todas e somente as propriedades que atribuímos à esfera [...] Aristóteles observa, todavia, que a postulação de objetos geométricos é inofensiva, visto que a esfera física real também possui todas aquelas propriedades que atribuímos à esfera postulada. Precisa e literalmente, o geômetra fala só de objetos físicos (embora não “como físicos”). Todavia, é inofensivo pretender que a esfera geométrica é separada. Por outras palavras, os objetos da geometria são ficções úteis. (SHAPIRO, 2019, p. 107).

Por fim, seja qual for a interpretação adotada, é evidente como a visão de Aristóteles sobre a matemática é um reflexo da sua visão de como o mundo é – metafisicamente. O empirismo de Aristóteles proporciona uma resposta ao questionamento de como pode a matemática falar sobre o mundo físico, sendo ela própria um objeto teórico e, em certo sentido, ideal. A matemática se aplica ao mundo material (e é objetivamente verdadeira) pelo simples fato de que ela não passa de uma *descrição* de certas propriedades que já existem no mundo. A geometria é verdadeira, pois tem sua fundamentação nos objetos físicos que *atestam* as suas proposições; do mesmo modo, isso acontece com a aritmética, que lida com os números, que nada mais são do que abstrações de conjuntos de objetos presentes

[73] Afinal, são gerados através da própria realidade.
[74] Ressaltando, de modo natural, as diferenças marcantes que já foram expostas.

na realidade. Aristóteles foge do problema de Platão ao negar e rejeitar a existência de dois reinos, tornando, por conseguinte, a sua filosofia da matemática bastante atrativa para alguns.

3.3 KANT E MILL

A filosofia da matemática de Immanuel Kant surge em um contexto de embate entre *racionalistas* e *empiristas*. O movimento racionalista, encabeçado por nomes como Descartes, Spinoza, Leibniz, dentre outros, parte da tese principal de que a *fundamentação*[75] do nosso conhecimento se dá na razão – em detrimento da experiência. Podemos, aqui, citar o famoso argumento inicial de Descartes em suas *Meditações Metafísicas* (2005)[76] como um exemplo de como a noção de *experiência* é problemática perante um racionalista:

> Tudo o que recebi até o presente como mais verdadeiro e seguro, aprendi-o dos sentidos ou pelos sentidos; ora, algumas vezes experimentei que tais sentidos eram enganadores, e é de prudência *jamais* confiar inteiramente naqueles que uma vez nos enganaram. (DESCARTES, 2005, p. 31).[77]

Para os racionalistas, descendentes da filosofia de Platão, a matemática é o modelo-último de como deve se dar o desenvolvimento das demais ciências, justamente pelo fato de a matemática ter na *demonstração* – que independe da experiência – o seu método. Tal coisa pode ser facilmente observada tanto nas *Meditações*, de Descartes, quanto na *Ética*, de Spinoza, sendo essa última uma tentativa de duplicar o método axiomático clássico observado em Euclides e seus *Elementos*. No que se refere ao empirismo, corrente atrelada ao pensamento de Aristóteles e liderada por nomes como John Locke, George Berkeley e David Hume,

[75] Deve-se destacar esse termo, digo, "*fundamentação*", pois algumas correntes menos radicais do racionalismo podem aceitar que alguns conhecimentos são obtidos, também, pela experiência, contudo, a *fundamentação*, ou, simplesmente, os *alicerces* desses conhecimentos se dão sempre, em última instância, na razão.
[76] Originalmente escrito pelo autor em 1641.
[77] Ênfase nossa.

a concepção base é de que o conhecimento é obtido e, também, fundamentado através da experiência. Hume em *Tratado da Natureza Humana* (2009)[78] destaca que:

> Assim como a ciência do homem é o único fundamento sólido para as outras ciências, assim também o único fundamento sólido que podemos dar a ela deve estar na experiência e na observação. [...] Embora devamos nos esforçar para tornar todos os nossos princípios tão universais quanto possível, rastreando ao máximo nossos experimentos, de maneira a explicar todos os efeitos pelas causas mais simples e em menor número, ainda assim é certo que *não podemos ir além da experiência*. (HUME, 2009, p. 22-23).[79]

Fica evidente, portanto, como o papel da *experiência* é fundamentalmente distinto em cada uma das correntes. Dentro da concepção empirista, a matemática é tida também como derivada e originada da experiência e a partir (e somente) daquilo que os sentidos podem capturar. Os números advêm da nossa experiência sensorial de aglomerados de quantidades específicas de objetos; os elementos da geometria, do mesmo modo, são oriundos das nossas percepções sensoriais acerca da forma de objetos presentes no mundo físico; e assim por diante. Por conseguinte, *não existem* objetos matemáticos em um sentido platônico; há apenas aquilo que se pode observar e perceber empiricamente.

De todo modo, ainda que racionalistas e empiristas discordem acerca da concepção originária da matemática, ambos tendem a concordar[80] que a matemática é um relacionamento entre ideias, e que a partir do momento em que se estabelecem essas *primeiras-ideias* – seja através da razão ou dos sentidos – o desenvolvimento subsequente é desconectado de demais informações provenientes da experiência. Isto é, em contextos gerais, empiristas e racionalistas classificam as verdades matemáticas como *a priori*, ou seja, independentes da experiência, e, por conseguinte, *necessárias*.

O racionalista lida com a necessidade da matemática de modo muito simples, afinal, é uma corrente derivada do platonismo. Os racionalistas enxergam as expressões matemáticas como sendo frutos de percepções puras da razão, como, por

---

[78] Publicado originalmente em 1739.
[79] Ênfase nossa.
[80] Deixando de lado algumas versões radicais dos movimentos.

exemplo, a ideia de *extensão pura*. Perceba como qualquer *contingência* no desenvolvimento da prática matemática é pragmática ou psicológica, ou seja, é entrelaçada ao matemático. A matemática, nessa interpretação, é necessária e objetivamente determinada. Por outro lado, o empirista sofre para justificar sua posição sem apelar aos recursos platônicos dos racionalistas.

Como explicar a *necessidade* da matemática dentro do empirismo? Uma primeira proposta de resolução, seria o entendimento de que as expressões básicas da matemática são verdadeiras por definição. O problema evidente dessa concepção, tal como apontaria um racionalista, recai sobre o fato de que a matemática perde o seu patamar epistemológico superior perante outros objetos do conhecimento humano. Torna-se, então, difícil justificar a *relevância* e *aplicabilidade* da matemática para as demais ciências empíricas. Uma segunda abordagem, por outro lado, consistiria em apelar a Aristóteles. Desse modo, o empirista argumentaria que as ideias básicas da matemática são *extraídas* a partir da análise (empírica) de determinadas propriedades de objetos físicos, e a matemática, por conseguinte, seria o estudo da relação entre essas ideias. Dentro dessa visão, portanto, o matemático se preocupa *de modo indireto* com relações físicas entre objetos materiais.

Kant buscou, dentro da sua filosofia da matemática, sintetizar uma visão híbrida entre *racionalismo* e *empirismo*, comportando a *necessidade* da verdade matemática junto com a sua, aparente, *aprioricidade* – sem deixar de lado, é claro, a sua aplicabilidade para as demais ciências da natureza. O ponto chave da argumentação do filósofo alemão consiste no entendimento de que a matemática é *sintética* e *a priori*. De todo modo, antes de darmos continuidade a tese principal de Kant, convém uma digressão a fim de alcançarmos um melhor esclarecimento acerca destas distinções relevantes que são apresentadas em suas obras.

Iniciemos, portanto, com a separação entre *analítico* e *sintético*. Kant em *Prolegômenos a toda a metafísica futura* (1988)[81] aponta que:

> Ora, seja qual for a origem dos juízos ou a natureza da sua lógica, existe neles, quanto ao conteúdo, uma diferença em virtude da qual são ou simplesmente *explicativos*, sem nada acrescentar ao conteúdo do conhecimento, ou *extensivos*, aumentando o conhecimento dado; os

[81] Publicado originalmente em 1783

> primeiros podem chamar-se juízos *analíticos*, e os segundos, *sintéticos*. [...] Os juízos analíticos nada dizem no predicado que não esteja já pensado realmente no conceito do sujeito, embora não de modo tão claro e com consciência uniforme. Quando digo: todos os corpos são extensos, não alarguei minimamente o meu conceito de corpo, mas analisei-o apenas, porque extensão estava pensada realmente no conceito já antes do juízo, embora não expressamente mencionada; o juízo é, portanto, analítico. Pelo contrário, a proposição: alguns corpos são pesados, contém no predicado alguma coisa que não está verdadeiramente pensada no conceito geral de corpo, aumenta pois o meu conhecimento, ao acrescentar algo ao meu conceito; deve, portanto, chamar-se um juízo sintético. (KANT, 1988, p. 24-25)

À vista disso, um *juízo analítico*, para Kant, nada mais é do que um *desdobrar* do conceito que ali já estava, enquanto o *juízo sintético* é aquele que adiciona algo proveniente de fora (para além) do próprio conceito em mãos. No que se refere à distinção entre *a priori* e *a posteriori*, ressaltemos que é um conceito epistemológico, e fala, portanto, sobre o modo como aprendemos determinadas proposições. *A priori* significa *anterior* à experiência, isto é, trata-se de uma proposição que independe do conhecimento sobre o mundo para que a sua verdade seja atestada. Em contrapartida, *a posteriori* significa posterior à experiência, ou seja, é uma proposição que tem a sua verdade dependente e fundamentada pela experiência. Para Kant, todos os juízos analíticos são *a priori*, enquanto os juízos sintéticos podem ser tanto *a posteriori* quanto *a priori*.

> Todos os juízos analíticos se baseiam inteiramente no princípio de contradição e são, por natureza, conhecimentos *a priori*, quer os conceitos que lhes servem de matéria sejam ou não empíricos. [...] Há juízos sintéticos *a posteriori*, cuja origem é empírica; mas também os há que são certos *a priori* e proveem do puro entendimento e da razão. (KANT, 1988, p. 25-26)

Tendo como base a definição dos termos, parece razoável o entendimento de que os juízos analíticos sejam *a priori*, afinal, são verdadeiros por conta da definição do próprio conceito analisado. De maneira similar, afirmar que juízos sintéticos são *a posteriori* não carrega nenhuma grande estranheza para a maioria dos leitores. O que chama atenção, aqui, é justamente a possibilidade, estabelecida por Kant, de juízos sintéticos *a priori*, sendo os representantes mais chamativos dessa classe os juízos matemáticos. Para Kant, portanto, a matemática não é analítica, pois produz sínteses. Além disso, essas *sínteses* possuem necessidade tal que não podem ser extraídas da experiência, mas sim por intermédio da razão; tornando-as, por conseguinte, *a priori*. A crítica especializada, em geral, não apresentou grande resistência à *aprioricidade* das verdades matemáticas defendida por Kant. Contudo, a tese do filósofo alemão de que os juízos matemáticos são sintéticos exigiu uma maior elaboração.

> Deve, antes de mais, observar-se que as proposições matemáticas genuínas são sempre juízos *a priori* e não empíricos, porque têm em si uma necessidade que não pode ser tirada da experiência. [...] Poder-se-ia, antes de mais, pensar que a proposição $7 + 5 = 12$ é uma simples proposição analítica, que resulta do conceito de uma soma de sete e de cinco, em virtude do princípio da contradição. Mas, olhando de mais perto, descobre-se que o conceito da soma de 7 e 5 não contém mais nada senão a reunião de dois números num só, sem que se pense minimamente o que seja esse único número, que compreende os dois. O conceito de doze de nenhum modo está pensado pelo simples fato de eu pensar essa reunião de sete e de cinco, [...] É preciso ultrapassar estes conceitos, recorrer à intuição que corresponde a um dos dois números, [...] Alarga-se assim realmente o seu conceito por meio desta proposição $7 + 5 = 12$ e junta-se ao primeiro conceito um novo, que nele não estava pensado. (KANT, 1988, p. 27-28).

É inegável a relevância da obra de Kant para o desenvolvimento posterior da filosofia – e não somente da filosofia da matemática. Sua tese de que as verdades matemáticas são sintéticas e *a priori* parece dar conta da natureza *necessária* desses juízos, além da notória relação destes com as demais ciências da natureza. Kant buscou delimitar o caminho para o desenvolvimento do pensamento filosófico futuro. Todavia, sua ambiciosa empreitada lidou com diversas críticas, algumas anacrônicas em decorrência do desenvolvimento moderno da lógica formal e da matemática – desenvolvimento esse que põe em xeque noções básicas como a sua distinção entre matemática e lógica, sendo a primeira sintética e a segunda analítica[82]. De todo modo, a principal crítica que os empiristas fizeram a Kant diz respeito ao seu apelo à noção de *intuição*, que valida os juízos sintéticos[83]. Isto posto, fugir da *intuição kantiana*

---

[82] Em uma concepção moderna, o próprio exemplo de Kant para defender a natureza de síntese das verdades matemáticas, ou seja, que na soma $7 + 5 = 12$ o resultado *vem de fora* dos números somados, é algo questionável, levando em conta a definição padrão de números que respeita a hierarquia conjuntista de pertencimento, e a própria definição da soma com base na função sucessor. De todo modo, estamos analisando Kant por uma lente não disponível em sua época e, portanto, cometendo um anacronismo.

[83] Shapiro comenta esta questão brevemente: “Kant não fala de demonstração em aritmética. Permite que algumas leis aritméticas sejam analíticas, mas talvez necessitemos da intuição para determinar que nem todo o número primo maior do que 100 é composto. O ponto aqui é que ele

motivou os trabalhos dos empiristas subsequentes, restando para os adeptos dessa corrente duas estratégias: (i) entender a matemática como analítica, ou (ii) entender a matemática como empírica. Observemos parte da argumentação do empirista radical John Stuart Mill em favor de (ii).

John Stuart Mill é um dos maiores representantes do empirismo em sua forma mais dura. O filósofo britânico, enquanto um *naturalista*, isto é, alguém que defende que os seres humanos pertencem inteiramente à cadeia causal observada pelas ciências empíricas, opõe-se a Kant e seus adeptos e afirma que a mente humana não transcende o âmbito físico-material e, portanto, não compactua com a possibilidade de conhecimentos científicos *relevantes*[84] que sejam anteriores, ou independentes, à experiência, ou seja, *a priori*. A mente humana, para Mill, é parte da natureza, assim como todo o restante das coisas.

No capítulo V do livro *Sistema de Lógica Dedutiva e Indutiva* (1974)[85], Mill apresenta a distinção entre *proposições verbais* e *proposições reais*, algo análogo aos conceitos de *analítico* e *sintético* de Kant, e, também, às *relações de ideias* e *relações de fato* de Hume:

> Uma proposição essencial, pois, é aquela que é puramente verbal, que afirma de uma coisa, sob um determinado nome, apenas o que é afirmado dela pelo fato de chamá-la por aquele nome, e que, portanto, ou não dá nenhuma informação, ou a dá com respeito ao nome, não à coisa. Proposições não-essenciais, ou proposições acidentais, ao contrário, podem ser chamadas proposições reais, em oposição às verbais. Elas predicam de uma coisa algum fato não implicado na significação do nome empregado para designá-la, algum atributo não conotado por esse nome. (MILL, 1974, p. 141).

As proposições verbais, portanto, tal como delimita Mill, são verdadeiras em virtude da definição dos termos envolvidos e, por sua vez, nada dizem sobre o mundo. O filósofo, desse modo, contrariando a tese kantiana, sustenta a concepção de que as asserções matemáticas são *proposições reais* e, por conseguinte, *sintéticas* – na

---

certamente defenderia que necessitamos da intuição para estabelecer a afirmação da *existência*. Em sistemas lógicos contemporâneos, [...] $\neg\forall x Px$ implica $\exists x \neg Px$. Para empregar um anacronismo bárbaro, se a interpretação precedente de Kant fosse correta, ele consideraria esta inferência como envolvendo a intuição. Isto é, a inferência em questão poderia levar de uma verdade analítica a uma verdade sintética." (SHAPIRO, 2019, p. 121).

[84] Explicaremos essa noção de *relevância* dentro do contexto de Mill.

[85] Publicado originalmente em 1843.

terminologia de Kant – e empíricas (*a posteriori*). A verdade matemática, dentro dessa visão radical milliana, assim como todo o restante do conhecimento que tem valor[86], é fruto de generalizações da observação empírica, algo que Mill chama de *indução enumerativa*.

É a partir, também, da sua concepção epistemológica de indução enumerativa que Mill explica os objetos matemáticos, como, por exemplo, as figuras geométricas e os números. Consequentemente, o filósofo dispensa a possibilidade de se aceitar a existência, no sentido platônico, dos objetos matemáticos. O problema natural que essa visão enfrenta é a dificuldade de explicar a relação entre a realidade e as definições matemáticas, que parecem nunca corresponder de modo exato aos seus representantes no mundo material. À vista disso, Mill estabelece que os objetos geométricos são *idealizações* de figuras reais e empíricas; idealizações essas que representam *possibilidades* de construções. Assim elucida Shapiro:

> [...] Mill defende que a geometria não lida com objetos existentes. Portanto, estritamente falando, a geometria euclidiana é uma obra de ficção. As figuras postuladas são "representantes fictícios". Todavia, visto que as figuras geométricas aproximam figuras desenhadas e objetos naturais, as proposições geométricas são verdadeiras (acerca da natureza) na medida em que as figuras e objetos reais se aproximam das idealizações. Se medimos os ângulos de um triângulo desenhado, acharemos a soma *aproximadamente* igual a dois ângulos retos. (SHAPIRO, 2019, p. 141).

Portanto, outra vez com base na noção de indução enumerativa, Mill enxerga as proposições da geometria como generalizações que são validadas desde muito tempo pela nossa própria experiência – o que justificaria a sua aplicação ao mundo físico, ainda que com ressalvas. De modo similar, no que se refere à aritmética e aos números, Mill segue Aristóteles ao negar a existência de números enquanto termos singulares que denotam um objeto único. O filósofo britânico entende os números como *números de coleções* de objetos empíricos; ao falarmos do numeral dois, por exemplo, denotamos todos os *pares* de objetos no mundo material; processo igual se aplica aos demais numerais – sempre tendo em mente a indução enumerativa.

[86] Ou seja, que não é *vazio* e verdadeiro em detrimento de definição – as proposições verbais.

Por conseguinte, a consequência natural dessa concepção é o entendimento de que as proposições da aritmética são *reais* – na terminologia de Mill –, e, em última análise, empíricas. Vários argumentos podem ser levantados para indagar as posições de Mill, sendo assim, um ponto relevante a se comentar diz respeito a como as nossas experiências sensoriais mostram-se limitadas para entender certos conceitos primordiais da matemática. A visão de Mill sobre os numerais parece não capturar números grandes ou somas contendo numerais grandes. Como poderíamos justificar com a experiência o conhecimento de uma soma como $265.254.284 + 584.165.874 = 849.420.158$, ou, ainda mais importante, como justificar o Princípio da Indução Matemática?

Em símbolos, o Princípio da Indução Matemática pode ser formalizado do seguinte modo:

$$\Big(\big(P0 \wedge \forall x\big((Nx \wedge Px) \rightarrow Px + 1\big)\big) \rightarrow \forall x(Nx \rightarrow Px)\Big)$$

Isto é, se uma propriedade P vale para 0 e, dado um número natural qualquer, vale para ele e seu sucessor, conclui-se que P vale para todos os números naturais. Como justificar esse princípio – que é possivelmente um dos mais relevantes da aritmética – pela experiência? Onde encontramos, na experiência, algo que, de fato, justifique essa concepção?[87]

Já no que se refere aos números, um adepto de Mill poderia responder a essa questão afirmando que certos conceitos da matemática, como é o caso da definição dos números, não são *descrições* perfeitas da natureza, mas sim construções obtidas através de *idealizações possíveis* acerca da experiência sensorial de determinados

[87] Ressaltemos que, ao abordar essa questão, outra vez em *Filosofia da Matemática* (2019), Shapiro comenta a estratégia de entender a aritmética dentro da geometria, e, assim, fundamentar o Princípio da Indução no seu análogo geométrico Princípio de Arquimedes – escapando, em tese do problema. Para Shapiro, contudo, tal coisa não seria suficiente. "Mesmo que o nosso milliano possa relacionar o Princípio de Indução Matemática e o Princípio de Arquimedes, isto não constitui grande tábua de salvação. [...] Visto que não temos qualquer experiência com conjuntos infinitos de pontos ou objetos, não parece haver qualquer base para estes princípios na indução enumerativa." (SHAPIRO, 2019, p. 151-152).

objetos, sob óticas *ideais*. Dado esse entendimento, a experiência continua sendo a baliza para as proposições matemáticas, contudo, sempre em um contexto de *aproximação*. Por conseguinte, para Mill, “muitas proposições matemáticas nem sequer são verdadeiras, quanto mais absolutamente verdadeiras e indubitáveis, e para não dizer conhecíveis *a priori*” (SHAPIRO, 2019, p. 148).

As distinções entre as filosofias da matemática de Kant e Mill tornam-se cada vez mais gritantes. Para fugir da *intuição kantiana*, Mill e seu empirismo radical apelam a termos também passíveis de questionamento, como é o caso da concepção de que a matemática tem, na sua base, *idealizações*. A necessidade da matemática, explicada pelo sintético *a priori* de Kant, dá lugar à necessidade *psicológica* de Mill, visto que o filósofo britânico defende que a matemática apenas *parece* necessária, já que a nossa experiência de longa data – e que confirma por aproximação as proposições matemáticas – não concebe idealizar algo distinto. Um caminho a se percorrer, agora, é saltar no tempo e investigar a opção que foge tanto da *intuição* kantiana quanto do empirismo *radical* milliano. Observemos, então, a estratégia (i); isto é, a opção de ver a matemática como *analítica* e, portanto, como *lógica*.

3.4 LOGICISMO

A visão de Kant sobre a matemática, em particular sobre a geometria e a aritmética, permaneceu um desafio para os filósofos subsequentes. As contrapropostas empiristas, nos moldes do que apresentamos na seção anterior acerca de Mill, não se mostraram suficientes para que a *intuição kantiana* pudesse ser abandonada sem nenhum pesar. Kant foi categórico ao fazer suas distinções: analítico e sintético; *a priori* e *a posteriori*; geometria e aritmética; matemática e lógica. A corrente *logicista* de filosofia da matemática busca escapar do sintético *a priori* de Kant sem apelar ao empirismo, como o de John Stuart Mill. A ideia fundamental desse movimento é aproximar e corresponder aquilo que Kant separou ao entender a matemática como sintética e a lógica – de seu tempo – como analítica. Dentro do Logicismo, a matemática, ou ao menos parte dela, é *analítica*[88], justamente pelo fato

[88] Em seguida, apresentaremos o que termos como este querem dizer dentro deste movimento.

de *ser* lógica. Para entendermos essa corrente, e o que essas afirmações feitas até aqui querem dizer, precisamos falar sobre dois pensadores: o alemão Gottlob Frege e o britânico Bertrand Russell.

3.4.1 Gottlob Frege

O filósofo alemão Gottlob Frege possui papel central no desenvolvimento do pensamento moderno, seja em contextos puramente filosóficos ou em âmbitos técnicos da lógica matemática contemporânea. Frege defendeu, ao contrário de Kant, que a matemática, em específico a aritmética, era analítica, pois poderia ser totalmente definida e demonstrada em termos lógicos básicos; considerando, por conseguinte, a verdade matemática como verdade lógica[89]. O primeiro passo, contudo, para avançarmos em sua argumentação, é nos atermos aos detalhes e entendermos a sua crítica às noções de *analítico* e *sintético* e *a priori* e *a posteriori* de Kant – noções essas, segundo Frege, impregnadas com *psicologismos*.

Parte relevante do trabalho de Frege consistiu em *despsicologizar* conceitos e noções lógicas e filosóficas. Em seu texto *Der Gedanke*, traduzido para *The Thought* (1956), Frege argumenta que o dever da lógica, enquanto *lei do pensamento*, não é, tal como se pode supor, descrever o *modo* como as pessoas pensam. Assim dirá Frege:

> Poder-se-ia, muito bem, interpretar a expressão ‘lei do pensamento’ pela analogia com ‘lei da natureza’ e então considerar características gerais do pensamento enquanto ocorrências mentais. Uma lei do pensamento, nestes moldes, seria uma lei psicológica. À vista disso, levar-se-ia a crer que a lógica lida com os processos mentais do pensamento e com as leis psicológicas de acordo com as quais isto ocorre. Isto seria desentender o papel da lógica. (FREGE, 1956, p. 325).[90]

---

[89] Ambas *analíticas* e *a priori*, no significado específico de Frege.

[90] Tradução nossa do original: *People may very well interpret the expression ‘law of thought’ by analogy with ‘law of nature’ and then have in mind general features of thinking as a mental occurrence. A law of thought in this sense would be a psychological law. And so they might come to believe that logic deals with the mental process of thinking and with the psychological laws in accordance with wich this takes place. That would be misunderstanding the task of logic.*

Trata-se, portanto, de uma visão que afasta o subjetivo (psicológico) do conteúdo da lógica, que, na visão de Frege, tem como princípio determinar *leis gerais* que podem servir de *guia* para o pensamento racional. Por conseguinte, parafraseando o autor, o *papel da lógica* é *normativo* e não *descritivo*. De maneira similar, Frege questiona as definições apresentadas por Kant. Para Frege, Kant associou a distinção analítico-sintético a *representações*, que nada mais são do que *cópias* das coisas *elas-mesmas* em nossas mentes – já que, como defende Kant em sua filosofia, não possuímos acesso direto aos *objetos-eles-próprios*. Kant define uma proposição – da forma sujeito-predicado[91] – como sendo analítica, se e somente se, o conceito que desempenha o papel de sujeito *contém* o conceito que desempenha o papel de predicado[92]. Frege teme que essa definição possa ser contaminada por psicologismos, pois possui na sua base a ideia de *representações mentais*. Frege em *The foundations of arithmetic* (1980)[93] propõe uma modificação na distinção kantiana de analítico-sintético, apresentando uma proposta de definição com embasamento puramente lógico.

> Estas distinções entre *a priori* e *a posteriori*, sintético e analítico, falam, ao meu ver, não sobre o conteúdo do juízo emitido, mas sim sobre a sua justificação. Onde não há justificação, perde-se a possibilidade de se traçar estas distinções. [...] Quando uma proposição é chamada de *a posteriori* ou analítica, do meu modo, isto não é um juízo sobre as condições, psicológicas, fisiológicas e físicas, [...] é um juízo sobre a fundamentação-última sobre a qual recai a justificação que permite a proposição ser verdadeira. [...] O problema consiste, na realidade, em encontrar a demonstração da proposição, e a seguir até as verdades mais básicas. Se, no decorrer deste processo, nós encontrarmos apenas leis lógicas gerais e definições, então a verdade é analítica [...] Se, contudo, é impossível apresentar a prova sem fazer uso de verdades que não são de natureza lógica geral, mas pertencentes à esfera de alguma ciência, então a proposição é sintética. Para uma verdade ser *a posteriori*, deve ser impossível construir sua prova sem fazer apelo aos fatos, i. e., para verdades que não podem ser demonstradas e não são gerais, pois contêm asserções sobre objetos particulares. Todavia, se, ao contrário, sua prova pode ser derivada

[91] Outro avanço relevante atribuído a Frege é o entendimento de que as proposições não são restritas a frases do tipo sujeito-predicado. Sobre isso, pontua Shapiro: "Uma das inovações de Frege foi desalojar os filósofos da dominância da forma sujeito-predicado das proposições. Ao contrário, ele pensou cada proposição como decomponível em função e argumento de uma variedade de maneiras, uma noção que importou da matemática." (SHAPIRO, 2019, p. 158).

[92] Ignoremos aqui qualquer possível problema envolvendo essa visão de que os conceitos possuem *partes*, afinal, toda a noção de Kant parte do pressuposto de que é possível alguns conceitos *pertencerem* a outros.

[93] Publicado originalmente em 1950.

> exclusivamente de leis gerais, as quais sequer precisam ou admitem demonstração, então a verdade é *a priori*. (FREGE, 1980, § 3).[94]

Frege, portanto, afasta os *psicologismos*, que poderiam inviabilizar a sua concepção de *pureza* da verdade aritmética[95], das distinções kantianas de analítico e sintético e *a priori* e *a posteriori*. O filósofo descarta a necessidade de se analisar o conteúdo das proposições para que estas possam ser classificadas em algumas das definições acima. A única coisa que deve ser observada, a fim de se classificar uma proposição dada, é a sua demonstração. À vista disso, tem-se que:

- Uma proposição é *analítica*, no sentido de Frege, se e somente se, sua demonstração envolve exclusivamente leis lógicas gerais e definições.
- Uma proposição é *sintética*, no sentido de Frege, se e somente se, sua demonstração faz uso de verdades particulares.
- Uma demonstração de uma proposição é *a priori*, no sentido de Frege, se e somente se, sua fundamentação-última se dá apenas em verdades gerais.
- Uma demonstração de uma proposição é *a posteriori*, no sentido de Frege, se e somente se, sua fundamentação-última faz uso de verdades particulares.

---

[94] Tradução nossa do original: *Now these distinctions between a priori and a posteriori, synthetic and analytic, concern, as I see it, not the content of the judgement but the justification for making the judgement. Where there is no such justification, the possibility of drawing the distinctions vanishes. […] When a proposition is called a posteriori or analytic in my sense, this is not a judgement about the conditions, psychological, physiological and physical, […] it is a judgement about the ultimate ground upon which rests the justification for holding it to be true. […] The problem becomes, in fact, that of finding the proof of the proposition, and of following it up right back to the primitive truths. If, in carrying out this process, we come only on general logical laws and on definitions, then the truth is an analytic one, […] If, however, it is impossible to give the proof without making use of truths which are not of a general logical nature, but belong to the sphere of some special science, then the proposition is a synthetic one. For a truth to be a posteriori, it must be impossible to construct a proof of it without including an appeal to facts, i. e., to truths which cannot be proved and are not general, since they contain assertions about particular objects. But if, on the contrary, its proof can be derived exclusively from general laws, which themselves neither need nor admit of proof, then the truth is a priori.*

[95] Tal como pontua Jairo José da Silva em *Filosofias da matemática* (2007): "Frege engajou-se numa luta sem quartel contra filosofias que, segundo ele, comprometiam o caráter puro da verdade aritmética; em particular os empiristas, [...] e os psicologistas, para os quais os números são entidades mentais e as verdades aritméticas dependem de leis empíricas que regulam nossos processos mentais, isto é, leis da psicologia." (DA SILVA, 2007, p. 126-127).

Com as modificações – e críticas – de Frege às definições de Kant estando devidamente esclarecidas, podemos avançar em sua visão de filosofia da matemática. O Logicismo de Frege é revolucionário não somente por aquilo que o filósofo alemão argumentou, mas, primordialmente – atrevo-me a dizer –, pelo avanço que esse percurso proporcionou para a lógica e filosofia da contemporaneidade. O espírito da tese de Frege é deveras simples: a verdade da aritmética é a verdade lógica. É notório, contudo, que o arsenal lógico-técnico disponível em seu tempo era incapaz de expressar um campo como a aritmética – algo que, poder-se-ia conjecturar, levou nomes relevantes, como o de Immanuel Kant, a estabelecerem distinções sólidas entre matemática e lógica. Para concluir que a aritmética era analítica, e alcançar o seu objetivo, Frege precisou, em um primeiro momento, refazer as definições de analiticidade, e, talvez o mais difícil, apresentar um sistema lógico formal que, de fato, expressasse e definisse as noções primitivas da aritmética[96].

O caminho de Frege poderia levar a lugares muito interessantes. Sendo a lógica, quase que de maneira unânime entre os pensadores, tida como analítica, a existência de um sistema lógico que expressasse, definisse e provasse todas as noções que fundamentam a aritmética, implicaria na conclusão – tão desejada por Frege – de que a aritmética era, por sua vez, também analítica. O sucesso do programa logicista de Frege resultaria na solução do uso da *intuição kantiana* para fundamentar verdades sintéticas, além de afastar as visões empiristas que respaldam a aritmética em generalizações da experiência sensível. No livro *Filosofias da matemática* (2007), Jairo José da Silva sintetiza o caminho fregeano.

> Aparentemente essas definições constituem notável melhora com relação às definições [analítico e sintético, *a priori* e *a posteriori*] originais de Kant. Desde que, claro saibamos o que sejam verdades lógicas, e em que contexto devemos buscar e analisar as demonstrações em função das quais as proposições são classificadas como uma ou outra coisa. [...] Para resolver esses problemas Frege criou a lógica moderna. Sua estratégia consistia em fornecer um sistema de lógica [...] O passo seguinte seria definir todas as noções e termos aritméticos nessa linguagem e demonstrar todas as verdades aritméticas nesse sistema lógico. Se isso pudesse ser feito, pensava Frege, estaria demonstrado que a aritmética é analítica, ou seja, pura lógica. (DA SILVA, 2007, p. 128).

[96] Além de, naturalmente, aprofundar a visão acerca do que é um sistema lógico formal.

À vista disso, iniciemos uma análise, um pouco mais detalhada, sobre a construção do Logicismo de Frege, tendo em mente o seu objetivo de definir os conceitos primitivos da aritmética em termos puramente lógicos. Frege inicia sua jornada a partir de uma das noções mais básicas da aritmética: a contagem – contudo, uma contagem sem números. *Contar* sem números, em um primeiro olhar, pode parecer estranho. De todo modo, trata-se da ideia de que é possível determinar se duas coleções de objetos – de qualquer natureza – possuem o mesmo *tamanho*, ou, na terminologia de Frege, possuem o *mesmo número*.

Frege estabelece o assim chamado *Princípio de Hume*, que consiste na ideia geral de que dadas duas coleções é possível determinar se elas possuem o *mesmo número* criando uma *correspondência bijetiva* entre as duas – isto é, para cada objeto de uma coleção relaciona-se um, e somente um, objeto da outra. Frege era um realista tanto em ontologia quanto em valor de verdade. O filósofo não somente acreditava que as asserções matemáticas possuem valor determinado como também que os números existem de modo independente. Entretanto, dentro da visão de Frege, os números são entendidos como atributos de conceitos, ou seja, os números são, em termos modernos, propriedades de segunda-ordem – propriedades que se aplicam à propriedades.

Consideremos o conceito A como "*não ser idêntico a si mesmo*". Para Frege, esse conceito não possui extensão, tendo em vista que todo objeto é idêntico a si próprio. Frege define o número zero como sendo o número do conceito A. Em símbolos:

$$0 = NxAx$$

Isto é, 0 é igual ao número do conceito A. Perceba como a ideia de número de Frege não se aplica à extensão de A, mas ao próprio A, ou seja, ao próprio conceito. O Princípio de Hume pode ser, agora, apresentado do seguinte modo:

Sejam φ e ψ dois conceitos.

$$(Nx\varphi x = Nx\psi x \Leftrightarrow \varphi \sim \psi)$$

Ou seja, o número de φ é igual ao número de ψ, se e somente se, existe uma correspondência bijetiva entre φ e ψ.

Em seguida, Frege apresenta a noção de *sucessor*.

- n é sucessor de m, na sequência dos números naturais, se e somente se existe um conceito que se aplica a exatamente n objetos, e quando removemos um, restam m objetos.

Consideremos, agora, B o conceito "*ser idêntico a zero*". Frege entende que o conceito B é satisfeito por apenas uma coisa, isto é, o próprio número zero. O filósofo, então, define o número 1 como sendo o número do conceito B. Em símbolos:

$$1 = NxBx$$

Ou seja, 1 é igual ao número do conceito B. De modo similar, poder-se-ia definir o numeral dois como sendo o número do conceito "*ser idêntico a zero ou ser idêntico a um*". A construção de Frege para os casos gerais se dá da seguinte maneira:

Seja n um número qualquer presente na série dos números naturais, dado o conceito "*membro da série dos números naturais terminada em* n", em símbolos:

$$S_n$$

Isto é, dado um objeto a qualquer, $S_n a$ é o caso, se e somente se, a é um número natural menor ou igual a n. Frege argumenta que o número do conceito S_n é o sucessor de n; ou seja, o número de S_n é $n+1$. A conclusão que se chega, a partir do que defende Frege, é a de que existem infinitos números naturais. O último passo seria, por fim, apresentar uma definição, de fato, de número natural. Como podemos dizer que um n é um número natural? A ideia de Frege é que a definição seja dada com base na concepção de que os números naturais são obtidos a partir de zero e pela função de sucessor. Em termos mais precisos:

- n é um número natural, se e somente se, n cai sob cada conceito que é satisfeito por zero e é fechado por sucessão.

$$Nn \Leftrightarrow \left(\forall F\left(F0 \wedge \forall d \forall d'\big((Fd \wedge (d' = d+1) \rightarrow Fd'\big)\right) \rightarrow Fn\right)$$

Dois problemas podem ser pontuados nesse instante. A primeira questão é o questionamento acerca da legitimidade, enquanto lei lógica, do Princípio de Hume. Parte crucial da empreitada de Frege é definir a aritmética usando apenas recursos lógicos; de todo modo, pode-se indagar se o Princípio de Hume – crucial para o desenvolvimento até aqui – goza da generalidade comumente observada nas leis lógicas. Isto é, o Princípio de Hume aparenta exigir um contexto específico para ser aplicado, algo que, naturalmente, não parece ser o caso com qualquer outra lei lógica. Assim argumenta Jairo José da Silva:

> Tudo estaria em ordem não fosse o fato de que o princípio de Hume não pertence à lógica, pois não tem a generalidade que caracteriza os princípios lógicos. A razão é esta: chamemos de 0 o número do conceito "$x \neq x$" [...]. Seja 1 o número do conceito "$x = 0$"; pelo princípio de Hume $0 \neq 1$. 2 é, por definição, o número de "$x = 0$ ou $x = 1$". É fácil de ver que $0 \neq 2$ e $1 \neq 2$. E assim sucessivamente; ou seja, o princípio de Hume permite mostrar que existem *infinitos* números. Ora, um princípio lógico não pode valer, como o princípio de Hume, *apenas* em contextos infinitos. Logo, ele *não* é um princípio lógico. (DA SILVA, 2007, p. 129-130).

O segundo problema, por sua vez, fora observado pelo próprio Frege, e consiste no fato de que o Princípio de Hume não é capaz de apresentar um critério geral de identidade para os números. Isto é, somente a partir do Princípio de Hume não somos capazes de distinguir os números de demais objetos quaisquer, algo que seria de crucial importância para a filosofia da matemática de Frege, levando em conta que o filósofo era um realista em ontologia e acreditava na existência dos objetos aritméticos, em particular dos números.

> O Princípio de Hume determina identidades da forma "o número de F $=$ o número de G", onde F e G são quaisquer conceitos, mas não determinam o valor de verdade de frases na forma "o número de $F = t$", onde t é um termo singular arbitrário. Em particular, o Princípio de Hume não determina se o número 2 é idêntico a um conjunto dado, ou a Júlio César. (SHAPIRO, 2019, p. 163).

Essa questão, conhecida na tradição pelo nome de *Problema de Júlio César*, é abordada por Frege *identificando* e *especificando*, de fato, os números naturais. O caminho do filósofo alemão, a fim de realizar essa tarefa, parte da concepção básica – e que está presente em toda a sua obra – de que *todo* conceito possui extensão; ou seja, o pensador associa, de modo *irrestrito*, extensões e conceitos. Tal como já foi dito, Frege era um realista em ontologia, contudo, é preciso esclarecer o que a *existência* dos números naturais significa em sua filosofia da matemática.

Frege enxergava os números naturais enquanto *objetos lógicos* que existiam dentro do *contexto* da aritmética – ciência esta que, tal como o seu Logicismo pregava, poderia ser definida apenas com recursos da lógica pura. E esses *objetos lógicos* nada mais são do que extensões de conceitos. Dado um conceito qualquer C, a extensão de C, isto é, $ext(C)$, é o que Frege chama de um objeto lógico.

Por sua vez, o número correspondente a um conceito qualquer C é a extensão do conceito "*possuir uma correspondência bijetiva com a extensão de* C". Isto é, em resumo, trata-se da extensão do conceito "*possuir o mesmo número que* C". Em símbolos:

$$NxCx = ext\big(X; (X \sim C)\big)$$

Portanto, a partir da *abstração* de conceitos, somos capazes de obter suas respectivas extensões, e a estas coleções de extensões, podemos associar números. O número zero é o número do conceito satisfeito por nenhum objeto; o número um é o número do conceito satisfeito por todas as coleções de apenas um único objeto; o número dois é o número do conceito satisfeito por todas as coleções de apenas dois objetos; e assim sucessivamente. Perceba como, a partir de agora, ao nos depararmos com um termo singular arbitrário, somos capazes de determinar se se trata de um número natural:

- Um termo singular qualquer é um número natural, se e somente se, existe um conceito do qual ele é o número.

Considerando a propriedade "*ser um número natural*", em símbolos "$Num(X)$", o qual lê-se "X *é um número natural*", pode-se formular, de modo mais formal, a definição de Frege como se segue:

$$\forall X\left(Num(X) \Leftrightarrow \exists C; \forall x\left(X(x) \leftrightarrow \big(x \sim ext(C)\big)\right)\right)$$

Ou seja, em terminologias modernas, podemos dizer que X é um número natural, se e somente se, X é uma classe cujos elementos x são exatamente aqueles que são equipotentes com algum conceito C. Em outras palavras, X é um número natural apenas quando é o número de algum conceito.

Paul McCartney, por conseguinte, não é um número natural, pois não é o número de algum conceito – até onde se sabe. A partir dessas noções, consideravelmente simples, diga-se de passagem, é possível deduzir a aritmética e, portanto, entende-la como analítica e *a priori*; afinal, todas as noções primitivas da aritmética são definíveis, tal como acredita Frege, usando apenas recursos da lógica pura. Todo o programa logicista de Frege aparenta resultar em um estrondoso sucesso. Entretanto, ainda existem caminhos a serem percorridos dentro dessa corrente. Sendo assim, para finalizarmos essa breve exposição do Logicismo, devemos, agora, nos voltar para o segundo elemento crucial dessa jornada, afinal, é impossível falar sobre o Logicismo sem abordar o filósofo britânico Bertrand Russell e o paradoxo por ele formulado.

3.4.2 O Paradoxo de Russell

Em 1893 Frege publica *Grundgesetze der Arithmetik*, traduzido para o inglês como *The basic laws of arithmetic* (1967), ou seja, *As leis básicas da aritmética*. Essa obra representava para o filósofo alemão os resultados de uma vida dedicada à *verdade*, tal como ressalta Bertrand Russell: "Enquanto penso sobre atos de integridade e graça, percebo que não há nada no meu conhecimento que se compare à dedicação de Frege à verdade." (VAN HEIJENOORT, 2002, p.127)[97]. A partir de tudo o que foi exposto anteriormente, Frege, de modo rigoroso e preciso, construiu sua teoria capaz de expressar a aritmética em termos puramente lógicos. De todo modo, uma carta escrita por Bertrand Russell em 16 de junho de 1902, e enviada para o próprio Frege, evidenciaria uma contradição em um dos princípios mais fundamentais da teoria logicista fregeana; Russell apontou que a famosa Lei Básica V derivava uma contradição.

A Lei Básica V consistia em dois princípios, *Princípio da Extensionalidade* e *Princípio da Abstração*, os quais podemos apresenta-los em linguagem formal moderna do seguinte modo:

- *Princípio da Extensionalidade*: $x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$

[97] Tradução nossa do original: *As I think about acts of integrity and grace, I realize that there is nothing in my knowledge to compare with Frege's dedication to truth*.

- *Princípio da Abstração*: $\exists x \forall z (z \in x \leftrightarrow Pz)$[98]

Para sermos ainda mais exatos, o problema consistia no *Princípio da Abstração* presente na Lei Básica V. O Princípio representa a concepção básica da filosofia da matemática de Frege de que a aritmética lida com conceitos e suas extensões. Além disso, tal como vimos no desenvolvimento de sua argumentação, existe, para Frege, uma associação irrestrita entre conceitos e extensões: dado um conceito, pode-se construir a sua extensão.

Lendo o Princípio da Abstração, ou seja:

$$\exists x \forall z (z \in x \leftrightarrow Pz)$$

O Princípio, em suma, expressa que, dado um conceito qualquer P, tem-se a extensão de P.

Observemos, a seguir, a tradução de parte da carta enviada por Russell ao seu colega alemão, presente no livro *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic* (2002), de Jean Van Heijenoort, traduzida do original em alemão para inglês e publicada com a autorização do próprio Russell:

> Há um ano e meio, tenho estado familiarizado com o seu *Grundgesetze der Arithmetik*; contudo, é somente agora que tenho sido capaz de encontrar o tempo para o estudo minucioso que eu pretendia fazer do seu trabalho. Encontro-me inteiramente em concordância com você em todos os pontos essenciais, particularmente quando você rejeita qualquer elemento psicológico na lógica [...] Fui conduzido sozinho a visões que são as mesmas inclusive nos detalhes. Há apenas um ponto onde eu encontrei uma dificuldade. Você afirma que uma função pode, também, atuar como um elemento indeterminado. Eu costumava acreditar nisto, entretanto, esta visão

[98] Além do fato já observado de que essa formulação é uma releitura moderna da Lei Básica V, no que se refere ao Princípio da Abstração, é relevante pontuar o detalhe de que o Princípio, na realidade, não desempenha o papel de um axioma dentro da teoria de Frege, mas sim de um *axioma-esquema*, pois o predicado P nada mais é do que uma *reserva de espaço* para algum conceito qualquer que seria definido em cada situação, o que justifica a não-obviedade da contradição, afinal, dependendo de como se define P, nenhuma contradição é derivada, algo que será comentado adiante.

> mostra-se duvidosa para mim em decorrência da seguinte contradição. Seja ω o predicado: ser um predicado que não predica de si próprio. Pode ω predicar de si mesmo? A partir de cada resposta, conclui-se o seu oposto. Portanto, nós devemos concluir que ω não é um predicado. Do mesmo modo, não existem classes (enquanto uma totalidade) daquelas classes que, cada qual tomada como uma totalidade, não pertencem a si próprias. A partir disto eu concluo que sob certas circunstâncias uma coleção definível não forma uma totalidade. (VAN HEIJENOORT, 2002, p. 124-125).[99]

Russell, de maneira simples e direta, expõe o problema, que ficou conhecido na tradição como o Paradoxo de Russell[100], ao construir um conceito, um P qualquer, como sendo "*não predicar de si próprio*". Em símbolos:

$$\exists x \forall z (z \in x \leftrightarrow z \notin z)$$

Aos nos questionarmos se x pertence a si mesmo, somos levados a uma contradição, e torna-se evidente a inconsistência do Princípio da Abstração:

$$(x \in x \leftrightarrow x \notin x)$$

O resultado é devastador para a teoria de Frege, tal como o próprio filósofo ressalta em sua carta resposta escrita em 22 de junho de 1902 e endereçada para Russell – carta esta que também se faz presente no livro *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic* (2002), de Jean Van Heijenoort:

---

99 Tradução nossa do original: *For a year and Half I gave been acquainted with your Grundgesetze der Arithmetik, but it is only now that I have been able to find the time for the thorough study I intended to make of your work. I find myself in complete agreement with you in all essentials, particularly when you reject any psychological element in logic […] I have been led on my own to views that are the same even in the details. There is just one point where I have encountered a difficulty. You stat that a function, too, can act as the indeterminate element. This I formerly believed, but now this view seems doubtful to me because of the following contradiction. Let ω be the predicate: to be a predicate that cannot be predicated of itself. Can ω be predicated of itself? From each answer its opposite follows. Therefore we must conclude that ω is not a predicate. Likewise there is no class (as a totality) of those classes which, each taken as a totality, do not belong to themselves. From this I conclude that under certain circumstances a definable collection does not form a totality.*

100 Deve-se destacar que o famoso matemático Ernst Zermelo afirmava ter descoberto a inconsistência do Princípio da Abstração, de modo independente de Russell, cerca de um ano antes.

> [...] Sua descoberta da contradição causou-me a maior surpresa e, quase diria, consternação, pois abalou a base sobre a qual eu pretendia construir a aritmética. Parece, portanto, que nem sempre é permitido transformar a generalização de uma igualdade em uma igualdade de cursos-de-valores, e que a minha Lei V é falsa [...]. Devo refletir mais sobre o assunto. É de demasiada seriedade, já que, com a perda da minha Lei V, tanto os fundamentos da minha aritmética quanto os únicos fundamentos possíveis da aritmética parecem desaparecer. [...] De todo modo, sua descoberta é muito notável e, talvez, resultará em um grande avanço na lógica, por mais indesejável que possa se mostrar à primeira vista. (VAN HEIJENOORT, 2002, p. 127-128).[101]

O Paradoxo de Russell marca o fim do Logicismo fregeano – ao menos nos moldes do que tanto desejava Frege. Seria o caso, portanto, de que a verdade matemática não pode ser entendida enquanto verdade lógica? Será que Kant estava correto ao delimitar drasticamente distinções entre matemática e lógica? A resposta para ambas as questões, provavelmente, não pode ser dada de modo tão simples, seja por aqueles que diriam que "sim", ou por aqueles que diriam que "não". O avanço de Frege não foi rejeitado por conta da inconsistência da Lei Básica V. O Princípio da Abstração, formulado de maneira irrestrita, de fato, é contraditório, contudo, instâncias específicas da lei são perfeitamente razoáveis e utilizadas em sistemas lógicos modernos, como é o caso do *axioma da compreensão-separação*, presente em qualquer formulação padrão da teoria de conjuntos Zermelo-Fraenkel:

$$\forall y \exists x \forall z \Big(z \in x \leftrightarrow \big((z \in y) \land Pz \big) \Big)$$

Note que, agora, não estamos extraindo extensões de conceitos de maneira irrestrita. O axioma da compreensão-separação, instância particular do Princípio da Abstração, separa *pedaços* de um conjunto *dado previamente* a partir de algum

[101] Tradução nossa do original: *[…] Your discovery of the contradiction caused me the greatest surprise and, I would almost say, consternation, since it has shaken the basis on which I intended to build arithmetic. It seems, then, that transforming the generalization of an equality into an equality of courses-of-values is not always permitted, that my Rule V is false […]. I must reflect further on the matter. It is all the more serious since, with the loss of my Rule V, not only the foundations of my arithmetic, but also the sole possible foundations of arithmetic, seem to vanish. […] In any case your discovery is very remarkable and will perhaps result in a great advance in logic, unwelcome as it may seem at first glance.*

conceito. O erro de Frege, tal como destaca Russell em sua carta, é acreditar que se pode obter uma *totalidade* a partir de *qualquer* conceito concebido. Sendo assim, parte, ao menos, da "*solução*", é o entendimento primordial de que nem todo conceito possui extensão; e, por conseguinte, tais coisas não podem ser tratadas como iguais. Nada disso, entretanto, *resolve* o Paradoxo[102]. O Princípio da Abstração continua sendo intuitivo – perante a prática matemática – e, se aceito, continuará resultando em inconsistências. Talvez a verdade matemática – se é que essa expressão denota algo – seja lógica, todavia, Russell e o Paradoxo nos mostram que tal coisa não pode acontecer nos moldes do que pretendia Frege.

3.5 FORMALISMO

A última corrente que abordaremos neste capítulo, isto é, o *Formalismo*, trata-se de um nome que denota algumas diferentes filosofias da matemática. Cada variante do Formalismo carregará em seus alicerces diferenças conceituais relevantes, sendo algumas mais sutis do que outras. De todo modo, antes de comentarmos suas peculiaridades, devemos destacar, justamente, aquilo que possuem em comum. O Formalismo é conhecido por ser uma filosofia da matemática feita por – *e para* – matemáticos. De maneira geral, parece bastante condizente com a prática da matemática, seja em níveis básicos ou avançados, que a atividade do matemático consista em *manipular* símbolos conforme determinadas regras[103]. À vista disso, o elemento compartilhado entre os diferentes tipos de Formalismo é a visão de que a matemática é *essencialmente* manejo de caracteres.

Ainda assim, falar em manipulação de símbolos de acordo com regras não é suficiente para distinguir o Formalismo de outras correntes, como é o caso, inclusive, do Logicismo fregeano. Podemos conceber, sem grandes dificuldades ou contorcionismos teóricos, que Frege concordaria que a matemática é, também, um

[102] Afinal, não parece fazer sentido falar em *resolver* paradoxos. Um paradoxo, de modo geral, é entendido como uma conclusão *absurda* de premissas *razoáveis*. Não se trata, portanto, de uma simples contradição, oriunda, por exemplo, de uma fórmula mal pensada ou um erro tipográfico. Por definição, um paradoxo legítimo não pode ser *resolvido*.

[103] Inclusive o próprio ensino da matemática elementar, muitas vezes, consiste em aprender regras que nos permitem modificar símbolos.

ato de manusear símbolos conforme regras. A diferença, portanto, se dá na fundamentação metafísica que cada vertente nos entrega para essa mesma asserção.

Frege enxerga a matemática como *lógica*, um sistema formal que descreve a matemática, de fato, consiste em manipular caracteres perante regras – regras, por sua vez, lógicas. Um logicista, nos moldes de Frege, olha para um sistema formal e vê um objeto teórico que *descreve* determinados princípios metafísicos – visto que, em última análise, a matemática deveria ser fundada em princípios lógicos puros, princípios esses que devem ser *verdadeiros*. A matemática, enquanto um sistema axiomático formal, possui sentido e significado para um logicista. Por outro lado, o formalista olha para o mesmo sistema formal e não enxerga nada além de um objeto teórico que transforma frases em outras frases de acordo com regras mecânicas. A matemática, para o logicista, é sobre princípios lógicos; a matemática, para o formalista, não é, e tampouco precisaria ser, sobre algo *além* do exercício formal.

A prática e o desenvolvimento da matemática, muitas vezes, consistem na introdução e adoção de símbolos e conceitos que não possuem interpretações – e denotações – tão claras e evidentes como, por exemplo, os intuitivos números naturais[104]. A prática matemática não pode – e não quer – esperar a justificação filosófica para as suas bases. O Formalismo, portanto, é uma saída deveras atraente para o matemático, pois retira de seus ombros o peso e a necessidade de se atribuir significado e justificar seus recursos técnicos. Percebe-se agora, tal como já foi dito, que o Formalismo é um movimento naturalmente pensado e executado *para* matemáticos.

3.5.1 Formalismo de Termos

Entrando, finalmente, nos *formalismos*, o primeiro tipo que abordaremos é denominado como *Formalismo de Termos*. Essa concepção filosófica defende que a matemática fala sobre símbolos e caracteres. Ou seja, dentro do Formalismo de

[104] O que, é claro, não significa que a fundamentação de objetos como os números naturais é livre de qualquer dificuldade. O ponto é que certas entidades, como *números irracionais*, *números imaginários*, *pontos ideais no infinito*, etc., não possuem uma denotação ou uma referência tão intuitiva quanto a ideia de um conjunto que é obtido através da aplicação da sucessão.

Termos, encontramos uma identificação dos elementos matemáticos – tais como números, conjuntos, funções, etc. – com os seus nomes, isto é, com os seus respectivos símbolos. Por conseguinte, para os adeptos dessa visão:

$$7 = \text{“}7\text{”}$$

Ou seja, o número natural 7 nada mais é do que o numeral “7”. Perceba, contudo, que, ao falarmos que o Formalismo de Termos diz que a matemática *é sobre* caracteres, concluímos, por inferência lógica, que a matemática, antes de mais nada, é sobre algo. Portanto, o Formalismo de Termos defende que a matemática *tem conteúdo*, e que as suas asserções são verdadeiras ou falsas. Um ponto crucial para se analisar o Formalismo de Termos, principalmente no que se refere aos argumentos contrários à sua tese, diz respeito ao que Shapiro enfatiza ao dizer que a corrente “propõe respostas simples a (aparentemente) difíceis problemas metafísicos e epistemológicos com a matemática” (SHAPIRO, 2019, p. 206). Assim completa o autor acerca dessa concepção:

> A matemática é acerca de quê? Números, conjuntos, e assim por diante. O que são estes números, conjuntos, e assim por diante? São caracteres linguísticos. Como se torna conhecida a matemática? O que é conhecimento matemático? É conhecimento de como os caracteres se relacionam uns com os outros, e como são manipulados na prática matemática. (SHAPIRO, 2019, p. 206).

A simplicidade do Formalismo de Termos, ainda que atraente por afastar as questões metafísicas e epistemológicas que assustam alguns matemáticos, também pode ser o seu tendão de Aquiles. Consideremos uma proposição matemática muito simples:

$$1 = 1$$

Perceba que é razoável pensar que se trata de uma asserção verdadeira. Como poderia o formalista de termos entender, isto é, explicar essa verdade? Logo de cara, devemos descartar a opção de dizer que “$1 = 1$” expressa que a primeira marca é igual à segunda, pois é evidente que as manchas não são as mesmas. Um segundo caminho para esse formalista, seria afirmar que a equação diz que as manchas possuem a mesma *forma*. A questão que emerge de modo natural é: mas o que são essas “*formas*”? Essa resposta parece pressupor a existência de certas entidades as quais estamos chamando de *formas*.

Poderíamos elaborar um pouco mais a segunda opção e fazer uso da distinção moderna, presente na linguística, entre *tipos* e *sinais*. Os *sinais* são objetos concretos, podendo ser feitos de tinta, grafite, ou, até mesmo, *pixels* em uma tela. Os sinais podem ser criados e destruídos. Por sua vez, os *tipos* são as formas abstratas dos *sinais*, e, portanto, não podem ser destruídos empiricamente. Na palavra “*Frege*”, observamos duas ocorrências do *tipo* “*e*”, sendo esse *tipo* a forma abstrata do *pixel* na tela, ou mancha de tinta no papel, dos dois *sinais* que o compartilham na palavra em questão. Voltando para a equação anterior, o formalista de termos poderia dizer que a matemática é sobre *tipos*, e que “$1 = 1$” expressa que o *tipo* “1” é igual a si mesmo, sendo um caso particular da lei da identidade.

Entretanto, um argumento muito simples pode ser feito para se questionar essa visão filosófica.

Consideremos a seguinte equação:

$$\big((1 + 3) = (4 + 0)\big)$$

Note que um adepto do Formalismo de Termos, nos moldes do que foi esclarecido, tem grandes dificuldades em explicar a, aparente, verdade dessa simples expressão aritmética. Perceba que os símbolos “$1 + 3$” e “$4 + 0$” não são os mesmos, e sequer os seus respectivos *tipos* são iguais. De modo igual, esse formalista não pode alegar que as expressões em questão denotam o *mesmo número*, pois nada disso está disponível na ontologia do formalista de termos; visto que somente o que a matemática lida, para essa filosofia, são os *caracteres*, e não quaisquer outros objetos extralinguísticos. Aqui fica claro como a *simplicidade* do Formalismo de Termos é, por vezes, um grande problema. A fuga, tão desejada, dos problemas metafísicos e epistemológicos que cercam a matemática, ao que tudo indica, não pode ser feita com base nessas versões de Formalismo.

3.5.2 Formalismo de Jogos

O outro segmento elementar do Formalismo é o, assim chamado, *Formalismo de Jogos*. Dentro dessa visão, faz-se uma analogia da matemática com a prática de algum jogo, tal como é o xadrez. O Formalismo de Jogos enxerga a matemática como um *jogo* envolvendo símbolos da linguagem matemática. A ideia primordial de qualquer versão do Formalismo de Jogos é que a prática matemática consiste em manipular caracteres conforme regras, regras essas que são completamente alheias a qualquer tipo de fundamentação metafísica ou epistemológica. Do mesmo modo que um praticante de xadrez não se questiona ou busca fundamentação metafísica para os seus movimentos em um tabuleiro, o formalista de jogos acredita que o matemático não deve se preocupar com mais nada além da própria precisão ao se aplicar alguma regra matemática.

Dentro do Formalismo de Jogos, encontramos vertentes *radicais* e *moderadas*. Ainda que ambas concordem com a ideia central, a distinção se dá no fato de que as versões radicais afirmam que os símbolos matemáticos nada significam ou denotam, tornando, portanto, inadequada a associação das proposições matemáticas com verdade ou falsidade, visto que não possuem sentido. Por outro lado, as versões moderadas podem conceber algum significado para os símbolos da matemática, entretanto, enfatizam que esse (possível) significado nada interfere na prática matemática, ou seja, é irrelevante[105]. Aqui observamos como os formalismos de termos e de jogos se separam: o primeiro diz que a matemática é, precisamente, sobre seus caracteres, e o segundo despreza qualquer tipo de interpretação dos símbolos

[105] Para a prática.

matemáticos, incluindo a interpretação do Formalismo de Termos de identificar o caractere com ele próprio.

Apesar das diferenças conceituais relevantes, Shapiro acusa o Formalismo de Jogos de, tal como o Formalismo de Termos, buscar responder questões difíceis com respostas fáceis:

> A matemática é acerca de quê? Nada. O que *são* números, conjuntos, e por aí adiante? Eles não existem, ou é como se pudessem não existir. Como é conhecida a matemática? Em que consiste o conhecimento matemático? É conhecimento das regras do jogo, ou conhecimento de que certos movimentos de acordo com estas regras foi feito. A equação “$2^{10} = 1024$” e o teorema de que para cada número natural x há um número primo $y > x$ [...], indicam o resultado de uma certa partida jogada de acordo com as regras da aritmética. (SHAPIRO, 2019, p. 209-210).

A crítica natural a se fazer perante uma tese com base no Formalismo de Jogos pode ser sintetizada em uma única questão: por que, então, a matemática é relevante? O Formalismo de Jogos, principalmente em suas versões mais radicais, busca afastar os problemas metafísicos e epistemológicos que emergem ao se investigar as bases da matemática, exorcizando qualquer tipo de significado subjacente à matemática. Um jogador de futebol não questiona ao juiz, durante uma partida, o motivo de não poder usar suas mãos para marcar um gol. As regras de um jogo não demandam justificações, demandam apenas que sejam seguidas. O problema ao se fazer tal coisa com a matemática se dá no fato de que a matemática não parece ter a mesma relevância – seja metafísica, epistemológica ou científica – que algum jogo qualquer.

Além de exterminar a relevância metafísica e epistemológica da matemática, o Formalismo de Jogos tem grandes dificuldades em explicar como um jogo – com regras postuladas sem qualquer relação com *verdade* ou *significado* – pode ser tão útil para as ciências empíricas. É evidente que não buscamos aplicações úteis de jogos às ciências[106], sendo assim, o Formalismo de Jogos parece ser incapaz de responder a razão de tal coisa ser o caso para a matemática. Em resumo, podemos sintetizar as críticas ao formalismo de jogos em dois pontos: (i) essa visão empobrece

[106] E se por ventura isso vem a acontecer, a primeira coisa que se faz é investigar como essa aplicação se dá, por exemplo, traduzindo o jogo em alguma expressão matemática; expressão esta que, por sua vez, pode ser útil em alguma ciência.

a matemática de seu suposto patamar privilegiado perante as demais áreas do conhecimento; e (ii) – talvez o mais importante – afastar ou ignorar os problemas metafísicos e epistemológicos dos fundamentos da matemática não faz com que eles deixem de existir.

3.5.3 Se-então-ismo

As críticas ao Formalismo de Jogos em congruência com os avanços na elaboração de sistemas formais axiomáticos – avanços esses em grande parte decorrentes da obra de Frege – resultaram em uma derivação do Formalismo de Jogos *moderado*, o qual chamaremos de *Se-então-ismo*, sendo essa nomenclatura uma tradução livre do termo original em inglês "*If-thenism*"[107]. O Se-então-ismo recebe as críticas referentes as dificuldades que o Formalismo de Jogos possui em explicar a aplicabilidade da matemática e entrega uma mudança considerável de perspectiva. Sendo a matemática esse *jogo* a partir de determinadas regras, a total arbitrariedade dessas regras incapacita o matemático de explicar a relevância da própria matemática, em detrimento de outros jogos. À vista disso, o Se-então-ismo sugere estabelecer como o critério para as *regras do jogo matemático*, não arbitrariedades, mas sim a constituição de *consequências lógicas*.

A visão, portanto, do adepto do Se-então-ismo é, em concordância com as demais vertentes do Formalismo, ignorar ou rejeitar as interpretações das linguagens matemáticas, mas ainda trabalhar com a seguinte hipótese conceitual: dada qualquer interpretação para a linguagem em pauta, *se* os axiomas são verdadeiros, *então* os teoremas também devem ser verdadeiros nessa mesma interpretação. Ou seja, o trabalho do matemático resume-se a apresentar *consequências lógicas* dos axiomas sem que sejam relevantes as suas *interpretações*.

Neste instante, podemos observar onde o Se-então-ismo aproxima-se e afasta-se do Logicismo fregeano. O Se-então-ismo concorda com a tese do Logicismo de que deve existir *preservação da verdade* das regras de inferência e, por conseguinte,

---

[107] Essa corrente também pode receber a nomenclatura alternativa de "*Dedutivismo*", de todo modo, adotaremos o nome "*Se-então-ismo*" para evitar qualquer ambiguidade, visto que "*Dedutivismo*" já é utilizado em outras áreas da filosofia.

das demonstrações dos sistemas formais. Contudo, difere da visão original de Frege ao entender que os axiomas não precisam de interpretação, algo impensável para Frege, que acreditava que os princípios (axiomas) da aritmética, por exemplo, eram *lógicos* e possuíam fundamentação metafísica na verdade lógica. Isto é, tanto o Logicismo quanto o Se-então-ismo defendem que a matemática consiste no ato de se obter consequências lógicas de sistemas formais; entretanto, o logicista enxerga esse sistema formal como um objeto *interpretado*, e a demonstração como *verdadeira metafisicamente*; enquanto o se-então-ista *ignora* a interpretação do sistema formal, e entende por *preservação da verdade* uma demonstração formal. Em outras palavras, uma demonstração *sintática* e *mecânica*.

Percebe-se, deste modo, como essa visão requer um entendimento avançado das noções modernas de demonstração formal e sistemas formais. Somente dentro de um sistema formal axiomático rigoroso – tal como abordamos no capítulo passado – esse formalismo pode se realizar. Observemos uma reconstrução da visão do Se-então-ismo fazendo uso de terminologias modernas.

Seja φ uma consequência lógica de Γ, sendo Γ um conjunto finito de axiomas. Dado alguma interpretação, o Se-então-ismo entende que:

- Se cada um dos axiomas em Γ são verdadeiros;
- Se $\Gamma \vdash \varphi$;
- Então, φ é verdadeiro, nesta mesma interpretação, e o conteúdo de φ é o fato de que $\Gamma \vdash \varphi$.

Se considerarmos, por exemplo, Γ os axiomas da aritmética, φ, portanto, é um teorema da aritmética. O Se-então-ismo faz uso da visão tradicional, pós-Frege, de que a lógica é neutra no que se refere ao conteúdo, e deixa de lado a interpretação dos temos não-lógicos dos sistemas formais, voltando-se, completamente, para as inferências lógicas elas próprias. Desse modo, nas palavras de Shapiro, o Se-então-ismo responde as questões filosóficas pertinentes da seguinte maneira:

> De que trata a matemática? Nada, ou pode ser considerada como sendo sobre nada. O que é conhecimento matemático? É conhecimento do que se segue de quê. O conhecimento matemático é conhecimento *lógico*. Como se aplica um ramo da matemática? Encontrando interpretações que tornam verdadeiros os seus axiomas. (SHAPIRO, 2019, p. 216-217).

À vista disso, fica evidente como a corrente do Se-então-ismo foi a que mais se aproximou em associar a matemática ao *formal*, nos moldes descritos até aqui. É bem capaz que sem os avanços de Frege nada disso seria possível, contudo, tal como é de se esperar, o desenvolvimento dos sistemas formais e da visão formalista perante a matemática não se encerrou por aqui. Avancemos, agora, para o último tema deste capítulo e falemos sobre o matemático David Hilbert e o seu *finitismo* presente no intitulado *Programa de Hilbert*.

3.5.4 Programa de Hilbert

Os desenvolvimentos na matemática e na lógica formal no início do século XX alcançaram patamares robustos. Com o avanço da clareza e rigor na constituição de sistemas formais axiomáticos – que, por princípio, *descrevem* partes de campos da ciência, como alguma área da matemática –, tornou-se possível uma mudança na investigação fundacional, que, agora, voltava-se para os próprios sistemas formais. Ou seja, o matemático começava a olhar para os sistemas formais de modo mais atencioso, e percebia a possibilidade de se provar coisas *sobre* sistemas formais, com a esperança de trazer clareza também para o *assunto* original desses objetos teóricos. O âmbito onde se fala e prova coisas *sobre* sistemas formais pode ser chamado de *metamatemática*. O matemático e filósofo[108] alemão David Hilbert possui papel central nesses desenvolvimentos. As suas obras expressam um amadurecimento complexo das três visões formalistas já apresentadas. O Formalismo de Hilbert, o qual podemos

[108] Destaquemos que chamamos Hilbert de "*filósofo*", pois ainda que fosse um matemático no sentido acadêmico da palavra, é responsável por toda uma corrente de pensamento sobre as fundações da matemática. Assim sendo, consideramos razoável o chamarmos de *filósofo*, haja vista sua *filosofia da matemática*.

sintetizar na nomenclatura *Programa de Hilbert*, implicará grandes consequências tanto para a filosofia da matemática quanto para a própria filosofia da lógica.

O Programa de Hilbert ganha força e motivação em um contexto no qual os inúmeros avanços da matemática traziam consigo diversas questões, tais como paradoxos e antinomias[109], para os seus fundamentos, implicando, por sua vez, uma crescente incerteza perante os métodos matemáticos[110]. O objetivo central de Hilbert, portanto, era, precisamente, trazer a clareza total e final para os métodos matemáticos. Em 1925 no texto intitulado *Über das Unendliche* traduzido para *On the Infinite* e presente no livro *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic* (2002), Hilbert categoricamente afirma:

> Contudo, há um modo completamente satisfatório de escapar dos paradoxos sem cometer qualquer traição contra a nossa ciência. As considerações que nos levam a descobrir este modo e os objetivos para os quais queremos avançar são os seguintes: (1) Nós devemos investigar cuidadosamente as maneiras de formação de noções e os modos de inferência que são frutíferos; devemos nutri-los e apoiá-los e torná-los utilizáveis, onde quer que haja a menor promessa de sucesso. Ninguém deverá nos expulsar do paraíso que Cantor criou para nós. (2) É necessário fazer inferências em qualquer lugar que seja tão confiável quanto a teoria elementar dos números, a qual ninguém questiona e onde contradições e paradoxos somente emergem do nosso próprio descuido. (VAN HEIJENOORT, 2002, p. 375-376).[111]

Hilbert, tal como fica exposto, acreditava veementemente que o segredo para o desenvolvimento pleno da matemática, sem abandonar os métodos tradicionais e indispensáveis para a sua prática moderna, seria a rigorosa axiomatização dos seus diversos campos, com o fim de se obter sistemas formais, que, por sua vez, poderiam

---

[109] Um bom exemplo é o já citado anteriormente Paradoxo de Russell.

[110] Sendo essa incerteza algo totalmente justificável, afinal, os significativos avanços contrastavam com os inúmeros problemas, tornando, portanto, razoável o questionamento do matemático e do filósofo acerca da legitimidade dos métodos que proporcionavam tanto triunfos matemáticos quanto paradoxos e antinomias.

[111] Tradução nossa do original: *But there is a completely satisfactory way of escaping the paradoxes without committing treason against our science. The considerations that lead us to discover this way and the goals toward which we want to advance are these: (1) We shall carefully investigate those ways of forming notions and those modes of inference that are fruitful; we shall nurse them, support them, and make them usable, wherever there is the slightest promise of success. No one shall be able to drive us from the paradise that Cantor created for us. (2) It is necessary to make inferences everywhere as reliable as they are in ordinary elementary number theory, which no one questions and in which contradictions and paradoxes arise only through our carelessness.*

ser alvo de investigações na metamatemática. O núcleo do Programa de Hilbert consiste na ideia de *aritmética finitária*. Diferente do que se pode imaginar, a aritmética finitária, para Hilbert, possuía significado e conteúdo. As proposições da aritmética finitária seriam aquelas acerca de números naturais, entretanto, contendo apenas quantificadores *limitados*. Estamos falando, portanto, de todas as frases do tipo "$2 + 4 = 6$", "$1921 - 65 \neq 13$", "$Existe\ um\ número\ x < 100\ tal\ que\ x\ é\ um\ número\ primo$", e assim por diante. Hilbert entende a aritmética finitária como a parte *concreta* da matemática. Elaboremos esses conceitos, respeitando as definições do autor, de maneira mais precisa:

- Um quantificador é *limitado*, se e somente se, possui como escopo coleções finitas de números naturais.
- Um quantificador é *ilimitado*, se e somente se, possui como escopo coleções infinitas de números naturais[112].

Deste modo,

- Uma asserção é *finitária*, nos moldes de Hilbert, se e somente se, possui exclusivamente quantificadores *limitados*.[113]

A aritmética finitária, portanto, é composta por expressões significativas acerca dos números naturais, isto é, o seu conteúdo são os números naturais. Todavia, Hilbert foge de visões como as do Logicismo de Frege para falar sobre a natureza dos números naturais enquanto se aproxima de Kant. Hilbert defende, nos moldes do Formalismo de Termos, que os números sejam entendidos como os caracteres

[112] Destaquemos o fato de que ao falarmos sobre o "*escopo*" dos quantificadores, estamos abordando o nível semântico, e não sintático. "*Escopo*", aqui, refere-se ao domínio onde avalia-se as fórmulas quantificadas. O domínio pode possuir *infinitos* indivíduos, acarretando na conclusão de que um quantificador que percorre esse domínio é, na terminologia de Hilbert, *ilimitado*. De modo esperado, um domínio também pode possuir uma quantidade *finita* de indivíduos, o que torna um quantificador que percorre esse outro domínio, segundo Hilbert, *limitado*.

[113] Assim sendo, o grande ponto das asserções finitárias é que, por serem constituídas por quantificadores limitados, podem ser *verificadas* com processos algorítmicos, isto é, são computáveis.

concretos, frutos da *intuição* imediata e que está na base de todo o pensamento. Nota-se, desse modo, que, para Hilbert, Kant estava correto ao distinguir a lógica da matemática, pois o próprio conteúdo da aritmética finitária é anterior e *pré-requisito* para o pensamento da lógica. Não parece, entretanto, que Hilbert identifica os números aos seus símbolos físicos, tal como um formalista de termos radical o faria. O matemático alemão parece ter muito mais em mente uma concepção de *tipos*[114] abstrata dos símbolos, ainda que os caracterize como *concretos* – sendo assim, algo próximo da intuição kantiana.

Enquanto a aritmética finitária é a parte *concreta* e *significativa* da matemática, o seu oposto é o que Hilbert chama de *matemática ideal*, composta, de modo sucinto, por todos os demais campos da matemática[115]. O papel, entretanto, da matemática ideal é servir de *instrumento* para a aritmética finitária. Hilbert defende um tipo de Formalismo de Jogos para o tratamento da matemática ideal, descartando, por conseguinte, qualquer tipo de significado subjacente aos seus axiomas e regras de inferência. A matemática ideal deve ser vista e desenvolvida como um jogo formal do mais alto padrão, exigindo, portanto, níveis de precisão e rigor impecáveis.

Ainda que sem atribuir significado ao jogo formal da matemática ideal, Hilbert estabelece um critério básico que deve nortear todo o seu desenvolvimento. Ao formalizarmos algum campo da matemática – correspondente ao âmbito não-finitário da matemática, e, portanto, ideal – não devemos ser capazes de derivar alguma expressão que se equivalha a uma proposição finitária (concreta) que seja falsa. De modo equivalente, o único critério que deve guiar o jogo formal da matemática ideal – esta que serve de instrumento para a aritmética finitária – é a *consistência*. A matemática ideal, formal, e sem significado, deve ser *conservativa* sobre a aritmética finitária, essa que possui significado e conteúdo.

Consideremos o sistema formal axiomático F – construído com base no que foi apresentado no primeiro capítulo – uma formalização de algum campo da matemática. Hilbert diria que F possui total legitimidade para *servir* a matemática, enquanto instrumento formal e sem sentido além do simbólico, se e somente se, não é o caso

[114] Sendo esta concepção explicada na seção 3.5.1.

[115] Isto é, neste grande conjunto intitulado por *matemática ideal*, encontraríamos todas as outras asserções que escapam da aritmética finitária por possuírem, por exemplo, quantificadores ilimitados.

que exista uma demonstração de uma fórmula φ, como, por exemplo, "$1 \neq 1$" – que corresponde a uma asserção falsa da aritmética finitária – a partir dos axiomas de F.

Seja Σ^F o conjunto de axiomas de F. F é consistente, se e somente se:

$$\Sigma^F \nvdash (1 \neq 1)$$

Em outras palavras, isso seria dizer que não existe uma sequência finita de fórmulas, de tamanho $n + 1$:

$$A_1^F, \dots, A_n^F, (1 \neq 1)$$

Sendo cada uma das fórmulas dessa sequência axiomas de Σ^F ou obtidas a partir das anteriores, já presentes na sequência, por regras de inferência.

O passo final, portanto, do Programa de Hilbert seria, depois da formalização de todos os campos da matemática, a demonstração *finitária* – isto é, dentro da aritmética finitária – da consistência desses sistemas formais. Assim elucida Shapiro:

> Uma vez que isto seja realizado para uma teoria T [qualquer], teremos alcançado a meta epistêmica. Temos a máxima confiança que a utilização de T não nos trará contradição, nem irá produzir qualquer proposição finitária falsa. [...] Se T é uma formalização da teoria cantoriana de conjuntos, então uma vez que temos uma demonstração finitária de consistência, *sabemos* com certeza máxima que não seremos expulsos do paraíso. (SHAPIRO, 2019, p. 237-238).

O Programa de Hilbert é, sem nenhum questionamento, uma das formas mais elegantes e complexas do Formalismo. O seu sucesso garantiria, dentre outras coisas, a total segurança do matemático em fazer matemática à sua maneira, e não *ao modo dos filósofos*, como é o caso em algumas outras correntes de filosofia da matemática. O Programa de Hilbert faz uma identificação da *verdade matemática* com a *demonstração lógica formal*. O significado, portanto, dos sistemas formais – o que, naturalmente, inclui a lógica clássica de primeira ordem – deve ser entendido como aquilo que ele demonstra em um contexto puramente simbólico. Do mesmo modo que o sucesso do Formalismo à moda de Hilbert nos possibilitaria concluir diversas coisas, o seu fracasso também nos entregará valiosas lições.

Contudo, para concluirmos o Programa de Hilbert, devemos nos ater aos trabalhos do filósofo, lógico e matemático austríaco Kurt Friedrich Gödel, que, com os seus *Teoremas da Incompletude*, nos apresenta um âmbito da verdade lógica em geral que aparenta *escapar* do formal. Iniciemos, portanto, o próximo e último capítulo de desenvolvimento.

4 TEOREMAS DE GÖDEL E PRINCÍPIOS DA LÓGICA CLÁSSICA

4.1 SOBRE AQUILO QUE ESCAPA AO FORMAL

Com os avanços dos capítulos precedentes, pudemos esboçar o processo – histórico e técnico – que transformou a concepção clássica de teorias e sistemas formais nessa que conhecemos hoje; além de entender a sua fundamentação filosófica. Sistemas formais tornaram-se objetos cada vez mais precisos, até o ponto de expurgarem de si quaisquer *interpretações* que ainda resistissem em seu interior, deixando, quando muito, que desempenhassem um papel puramente pragmático ou, até mesmo, motivacional para a teoria. O Programa de Hilbert representa esse tipo de raciocínio em sua forma mais sólida. O sucesso dessa empreitada significaria, dentre outras coisas, a dispensabilidade da busca por sentido e significado dos sistemas formais. Mas o que de fato representa dizer tal coisa?

Em linhas gerais, estaria estabelecido que o processo de *formalização* de conceitos é *total* em todos os casos; isto é, a partir do momento em que se adentra o âmbito teórico, o âmbito pré-teórico pode ser abandonado por inteiro em virtude da construção concreta que é o sistema formal enquanto objeto sintático-linguístico. Concluiríamos que o conceito estaria *totalmente* capturado pelo sistema formal – e, por conseguinte, não mais desempenharia um papel relevante em sua fundamentação. É evidente, entretanto, que se pode olhar para algo como o Programa de Hilbert de diversas formas, ainda assim, a que nos interessa diz respeito à possibilidade de se obter uma resposta *definitiva* para a questão acerca do sentido e significado dos sistemas formais. O Programa de Hilbert nos entregaria, em um hipotético sucesso, uma resposta para o questionamento, isto é, saberíamos, com certeza, que *não é necessário para a fundamentação algo além do formal*. Ou, em uma formulação positiva, que *tudo que importa para saber é o que está no formal*.

Ao falarmos sobre sistemas formais *em geral*, podemos diminuir o impacto dessa afirmação. Portanto, devemos encará-la com um olhar mais íntimo, tendo em mente não a visão *abstrata* de sistemas formais, mas sim *aqueles* que mais nos interessam. Tenhamos em mente, por exemplo, a teoria de conjuntos Zermelo-

Fraenkel[116]. A teoria de conjuntos representa um dos maiores avanços das ciências formais modernas, e, tanto em seu nível pré-teórico quanto no teórico, é relacionada a conceitos relevantes como a própria concepção de *conjuntos*[117]; além de ser alicerce de diversas outras construções importantes para a humanidade, tal como a aritmética e tudo aquilo que se baseia nela.

Perceba, contudo, que a teoria de conjuntos, enquanto sistema formal, não se distingue de qualquer outra teoria formal. A teoria de conjuntos possuiria o mesmo significado que todo sistema formal: *nenhum*[118]. Todo o processo de séculos que culminou nas formulações modernas de seus axiomas seria irrelevante para distingui-la de um sistema formal escrito como um exemplo aleatório em algum curso de lógica[119]; algo decorrente do longo processo de desinterpretação. Intuitivamente, poder-se-ia dizer que uma parte considerável dos leitores tende a não concordar com esse nivelamento; todavia, o Programa de Hilbert nos obrigaria a apelar para âmbitos pragmáticos ou psicológicos para responder a essa inquietação. As *verdades* da teoria de conjuntos, ou seja, aquilo que esse sistema formal atesta em seus teoremas e demonstrações, não possuiriam patamar epistémico diferente das demonstrações do sistema formal do exemplo aleatório acima.

A partir desse breve exemplo, fica mais claro o verdadeiro impacto do Programa de Hilbert. Saberíamos que *todo* conceito pode ser *totalmente* capturado por sistemas formais[120]. Devemos ressaltar, evidentemente, que uma resposta, ainda que negativa, é uma resposta. Isto posto, nos restaria lidar com todas essas implicações. Todavia, o Programa de Hilbert nunca alçou o voo desejado por todos os seus idealizadores, e tal coisa se dá no fato de que em 1931, Kurt Gödel publica o artigo *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I* (1931), também traduzido para o inglês como *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica And Related Systems I* (1931), onde apresenta o que hoje se conhece como os *Teoremas da Incompletude de Gödel*.

---

116 A qual, a partir de agora, abreviaremos chamando apenas de *teoria de conjuntos*.

117 E todos os demais conceitos derivados a partir disso.

118 Para efeito de fundamentação.

119 Desde que esse sistema novo, ainda que simples, respeitasse as regras sintáticas para se constituir um sistema formal.

120 E, portanto, seria necessário apenas investigar os próprios sistemas formais; abdicando, por sua vez, sem *nenhum* pesar, de seu nível pré-teórico.

Este capítulo, portanto, terá como primeira parte a apresentação desses teoremas[121], que serão vistos não somente como o *nêmesis* do Programa de Hilbert, mas também como aquilo que nos *aponta* que *existe* algo nos sistemas formais, em geral, que *escapa* do formal. A segunda e última parte deste capítulo fará uso das conclusões da primeira etapa em adição à argumentação de Newton da Costa em *Ensaio Sobre os Fundamentos da Lógica* (1994), o que deverá nos proporcionar o entendimento de que não somente *existe* algo que foge do formal, como que a própria lógica clássica de primeira ordem[122] é[123], também, obtida e fundamentada através de um *conceito*, isto é, uma visão particular de mundo. Iniciemos, por fim, falando sobre Gödel e os Teoremas da Incompletude.

4.2 OS TEOREMAS DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL

4.2.1 Teorema do Ponto Fixo

O *Teorema do Ponto Fixo* se mostra, implicitamente, presente em outros grandes resultados em lógica[124], como nos *Teoremas de Gödel* e o *Teorema da Indefinibilidade da Verdade*, demonstrado por Tarski. Podendo ser formulado da seguinte maneira:

Se $\gamma(x)$ é uma fórmula, com uma variável livre, de S, então existe uma sentença A de S, tal que: $S \vdash A \Leftrightarrow \gamma(\ulcorner A \urcorner)$.

Tal coisa significa, simplesmente, dizer que, dado um predicado γ qualquer em S, para todas as sentenças de S, vale que S prova a sentença: γ é verdadeiro para $\ulcorner A \urcorner$, sendo "$\ulcorner A \urcorner$" a sentença A em *menção*, e não em *uso*, isto é, é a citação da

[121] E demais teoremas auxiliares.
[122] A qual, abreviaremos chamando apenas de *lógica clássica*.
[123] Deveremos, também, explicitar as motivações em escolher falar *desta* lógica.
[124] De 1ª ordem.

frase; é um modo de tratar a frase como um objeto, ou seja, $\ulcorner A \urcorner$ deverá ser visto como um nome próprio de A[125].

Sendo assim, pretende-se mostrar que:

Para algum A:

$$S \vdash A \Leftrightarrow \gamma(\ulcorner A \urcorner)$$

4.2.1.1 Demonstração

Queremos uma A que satisfaça:

- $S \vdash \gamma(\ulcorner A \urcorner) \Leftrightarrow A$
- $S \vdash \gamma(\ulcorner A \urcorner) \Leftrightarrow \exists x\big(x = \ulcorner A \urcorner \wedge \gamma(x)\big)$

Entretanto, definir A como $\exists x\big(x = \ulcorner A \urcorner \wedge \gamma(x)\big)$ é problemático, pois o próprio A já aparece na expressão, o que, evidentemente, não é razoável. Buscaremos, então, A como sendo a *diagonalização* de uma B, sendo essa *função diagonalização* uma função que associa fórmulas a fórmulas. Devemos procurar uma A da forma $D(B)$, onde B é uma fórmula com uma variável y.

Tem-se, então, que:

- $D(B) \equiv B(\ulcorner B \urcorner) \equiv \exists y\big(y = \ulcorner B \urcorner \wedge B(y)\big)$

Sendo assim,

- $S \vdash \gamma(\ulcorner A \urcorner) \Leftrightarrow \exists x\big(x = \ulcorner A \urcorner \wedge \gamma(x)\big)$
- $S \vdash \gamma(\ulcorner A \urcorner) \Leftrightarrow \exists x\big(x = \ulcorner D(B) \urcorner \wedge \gamma(x)\big)$

---

[125] Esse conceito será melhor esclarecido na seção 4.2.3.3, onde abordaremos a *numeração de Gödel*.

De todo modo, a função diagonalização de B pode ser entendida como uma relação binária Δ:

- $S \vdash \gamma(\ulcorner A \urcorner) \Leftrightarrow \exists x\big(\Delta(\ulcorner B \urcorner,\ x) \wedge \gamma(x)\big)$

É logicamente válido que:

- $S \vdash \gamma(\ulcorner A \urcorner) \Leftrightarrow \exists y \Big(y = \ulcorner B \urcorner \wedge \exists x\big(\Delta(y,\ x) \wedge \gamma(x)\big)\Big)$

Estipulamos que $\exists x\big(\Delta(y,\ x) \wedge \gamma(x)\big)$ é $B(y)$. Portanto:

- $S \vdash \gamma(\ulcorner A \urcorner) \Leftrightarrow \exists y\big(y = \ulcorner B \urcorner \wedge B(y)\big)$

Por definição:

- $S \vdash \gamma(\ulcorner A \urcorner) \Leftrightarrow A$

De fato, verifica-se que:

- $S \vdash A \Leftrightarrow \exists y\big(y = \ulcorner B \urcorner \wedge B(y)\big)$

Já é conhecido que $B(y)$ é $\exists x\big(\Delta(y,\ x) \wedge \gamma(x)\big)$:

- $S \vdash A \Leftrightarrow \exists y \Big(y = \ulcorner B \urcorner \wedge \exists x\big(\Delta(y,\ x) \wedge \gamma(x)\big)\Big)$

Temos que:

- $S \vdash A \Leftrightarrow \exists x\big(\Delta(\ulcorner B \urcorner, x) \wedge \gamma(x)\big)$

Neste ponto, devemos enumerar a segunda pressuposição com relação a S que é necessário estabelecer: É preciso que S seja capaz de expressar a função diagonalização como uma relação binária. Isto é, existe um $\Delta(y, x)$ tal que para cada C em S:

$$S \vdash \Delta(\ulcorner C \urcorner, x) \Leftrightarrow \ulcorner D(C) \urcorner = x$$

Note que, mais uma vez, essa é uma pressuposição que não somente é intuitiva como, também, é obtida facilmente em qualquer sistema formal que possua um mínimo de capacidade expressiva.

Considerando a pressuposição acima, pode-se inferir que:

- $S \vdash A \Leftrightarrow \exists x(\ulcorner D(B) \urcorner = x \wedge \gamma(x))$

Por consequência lógica:

- $S \vdash A \Leftrightarrow \gamma(\ulcorner D(B) \urcorner)$

Todavia, foi definido que A seria a diagonalização de um B. Por conseguinte, conclui-se:

$$S \vdash A \Leftrightarrow \gamma(\ulcorner A \urcorner)$$

Portanto, A satisfaz a condição desejada.

Tendo observado tais coisas, façamos agora a demonstração do *Teorema da Indefinibilidade da Verdade*, apresentado originalmente por Tarski, que também será relevante nas seções a seguir:

4.2.2 Teorema da Indefinibilidade da Verdade

Suponha que $T(x)$ seja uma definição de verdade de S em S.

Deste modo,

- $S \vdash T(\ulcorner A \urcorner) \Leftrightarrow A$, para todas as sentenças A.
- Pelo Teorema do Ponto Fixo:

Dado uma fórmula qualquer $\gamma(x)$, com uma variável livre, existe uma sentença B, tal que $S \vdash B \Leftrightarrow \gamma(\ulcorner B \urcorner)$.

Existe, portanto, uma sentença B, tal que $S \vdash B \Leftrightarrow \neg T(\ulcorner B \urcorner)$.

Entretanto, pela hipótese inicial:

- $S \vdash T(\ulcorner B \urcorner) \Leftrightarrow B$

Portanto, por consequência tautológica:

- $S \vdash B \Leftrightarrow \neg B$

Sendo assim, não pode haver definição de verdade de S em S

Tendo apresentado esses dois teoremas, voltemo-nos para o *Primeiro Teorema de Gödel*.

4.2.3 O Primeiro Teorema de Gödel

Os Teoremas de Gödel representam um dos resultados mais relevantes da matemática, da lógica e também da filosofia no século XX, implicando diversas consequências e conclusões em cada uma das áreas. Iniciaremos falando sobre o *Primeiro Teorema de Gödel*. A ideia por trás do Primeiro Teorema é apresentar uma frase que é *verdadeira*[126], porém não é *demonstrável* em um sistema formal para alguma teoria matemática. Um ponto inicial que devemos comentar diz respeito ao fato de o teorema não exigir muito desse sistema formal, justamente por isso, usaremos em nossa abordagem o sistema Q, entendido como *Aritmética Minimal*, explicitado nas páginas 266 e 267 de *Computabilidade e Lógica* (2012), com a substituição e acréscimo de axiomas apresentadas na página 276, outra vez de *Computabilidade e Lógica* (2012). Com as devidas modificações apontadas acima, o sistema Q torna-se a *Aritmética de Robinson*, que será o sistema formal que teremos como referência mental a partir de agora.

4.2.3.1 Lista de axiomas não-lógicos da Aritmética de Robinson

- Axioma 1: $x = 0 \vee \exists y x = y'$
- Axioma 2: $0 \neq x'$
- Axioma 3: $x' = y' \rightarrow x = y$

[126] Até para o Programa de Hilbert.

- Axioma 4: $x + 0 = x$
- Axioma 5: $x + y' = (x + y)'$
- Axioma 6: $x \cdot 0 = 0$
- Axioma 7: $x \cdot y' = (x \cdot y) + z$
- Axioma 8: $x < y \leftrightarrow \exists z(z' + x = y)$

4.2.3.2 Um olhar para o Primeiro Teorema de Gödel

À vista disso, o Primeiro Teorema nos diz que não é possível obter uma axiomatização *completa* dessa teoria – no caso, Q, ou de qualquer teoria que a contenha –, além de evidenciar que não é cabível identificar, de modo irrestrito e absoluto[127], *verdade* com *demonstração formal*. O raciocínio de Gödel pode ser comparável com o *Paradoxo do Mentiroso*, que consiste na frase:

Esta sentença é falsa.

O Paradoxo do Mentiroso demanda, para sua formulação, predicação da verdade e autorreferência. De maneira similar, Gödel constrói, dentro do sistema formal, uma frase intuitivamente enunciada como:

Eu não sou demonstrável na teoria.

Perceba que, sendo essa frase demonstrada dentro da teoria, estaríamos diante de um sistema que prova uma falsidade. Por outro lado, assumindo a preservação da verdade da teoria, além do fato de que os axiomas são verdadeiros; isto é, adotando a correção que acarreta na consistência, saberíamos que essa frase

[127] Ou seja, exatamente como pretendia o Programa de Hilbert.

não deve ser demonstrada[128]. Sendo esse o caso, temos em mãos uma frase *verdadeira* que não é provada na teoria – evidenciando a sua similaridade com o Paradoxo do Mentiroso. É notório, contudo, que, para além dessa versão intuitiva, devemos esclarecer mais algumas coisas.

O primeiro ponto a se comentar diz respeito ao fato de que temos como objeto sistemas formais que falam sobre números, e a frase acima expressa uma propriedade metateórica, isto é, a propriedade de "*ser demonstrável*". Tendo em vista tal coisa, Gödel provou ser possível atribuir um *nome próprio*, dentro do sistema, para cada uma das fórmulas do próprio sistema, algo conhecido como *numeração de Gödel*. Em adição, é necessário definir a relação de demonstração dentro do sistema, e, fazendo uso do Teorema do Ponto Fixo, mostrar que existe uma tal frase referente à predicação de *não-dedução de si própria*. Levando em conta que provamos previamente o Teorema da Indefinibilidade da Verdade, poderemos, também, fazer uso da hipótese de que a teoria é consistente para avançarmos no Primeiro Teorema de Gödel[129]. Iniciemos, portanto, falando sobre a *numeração de Gödel*, tendo em vista a explicitação abstrata de Rodrigo Freire em *Tópicos em Lógica de Primeira Ordem* (2019), presente na página 57.

4.2.3.3 Numeração de Gödel

Tal como foi comentado acima, o avanço dos trabalhos de Gödel demandava uma forma de trazer para *dentro* da teoria conceitos e expressões metateóricas. Gödel, portanto, encontrou um modo de resolver essa situação através de uma *codificação*, algo hoje chamado de *numeração de Gödel*. Observemos tal coisa com mais detalhes.

Podemos supor que cada uma das fórmulas que temos em pauta, constituídas com base em algum estoque de símbolos, está associada, de maneira unívoca, a um nome próprio, também desse mesmo estoque. Destaquemos que esse processo é

[128] Ressaltemos o fato de que o Programa de Hilbert desejava, justamente, considerar *apenas* a consistência. Aqui, portanto, estamos pressupondo mais do que Hilbert, pois trata-se de uma primeira abordagem ao teorema.
[129] Sendo essa estratégia uma versão alternativa da demonstração original elaborada por Gödel.

bastante intuitivo até quando se tem em mente a linguagem natural, haja vista que podemos utilizar as aspas para transformar uma frase em um nome próprio de si, e, portanto, falar sobre essas frases – já que agora tornaram-se um objeto.

Deste modo,

- Se A é uma fórmula, então $\ulcorner A \urcorner$ é a representação de seu nome próprio.

Consideremos y um pronome,

- Se A é uma fórmula, entenderemos $A_y[\ulcorner A \urcorner]$ como a diagonalização de A.

Seja Γ um conjunto de fórmulas contendo axiomas da igualdade para o símbolo de relação "=". Consideremos z e w pronomes diferentes e D uma fórmula. Podemos entender D com z e w a representação da diagonalização em Γ, se e somente se, a partir de Γ, pode-se deduzir, para qualquer fórmula A:

$$\forall w\ (D_z[\ulcorner A \urcorner] \leftrightarrow z = \ulcorner A_y[\ulcorner A \urcorner] \urcorner)$$

A partir dessa contextualização, iniciemos a demonstração do Primeiro Teorema de Gödel.

4.2.3.4 Demonstração

Um sistema formal contendo Q ou é consistente ou é negação-completo.

Definição:

- Uma teoria qualquer T é negação-completa, se e somente se, para toda frase A em sua linguagem, vale que: $T \vdash A$ ou $T \vdash \neg A$.

Apresentaremos duas possibilidades de se demonstrar esse teorema, sendo a primeira uma formulação próxima do que o próprio Gödel nos ensinou, e a segunda uma versão que faz uso diretamente do Teorema da Indefinibilidade da Verdade. Iniciemos pela versão de Gödel.

Consideremos T um sistema formal que contenha Q e um predicado $P(p,x)$, que expressa a relação "*p é uma demonstração de x em T*". Em adição, consideremos β um ponto fixo correspondente à expressão $\neg\exists p;\ P(p,x)$[130]. Dado o Teorema do Ponto Fixo, sabe-se que:

- $T \vdash \beta \leftrightarrow \neg\exists p;\ P(p,\ulcorner \beta \urcorner)$

Supondo que $T \vdash \beta$, obter-se-á:

- $T \vdash \neg\exists p;\ P(p,\ulcorner \beta \urcorner)$
- $T \vdash \exists p;\ P(p,\ulcorner \beta \urcorner)$

Por conseguinte, se T é consistente, então não deduz β. Entretanto, isso é dizer que se T é consistente, então β é verdadeira. Se T prova $\neg\beta$, então prova uma falsidade. À vista disso, conclui-se que se T não prova falsidades, então é consistente e negação-incompleta.

Assim sendo, conclui-se a demonstração nos moldes próximos de Gödel. De todo modo, podemos apresentar um segundo argumento sem fazer a pressuposição de que T não prova falsidades; pressupondo, portanto, apenas a consistência. Observemos tal coisa.

Haja vista a definição de uma teoria T ser negação-completa, podemos apresentar um método de decisão para a teoria nos seguintes moldes: levando em conta que para toda frase na linguagem da teoria, ou a sua afirmação ou a sua

[130] É válido ressaltar que, desse modo, β diz "*eu não sou demonstrável em T*".

negação são provadas na teoria, precisaríamos buscar simultaneamente uma dedução para cada uma. Sendo o sistema consistente, somente uma das buscas apresentará resultados, e, portanto, encerrará a procura. A frase encontrada será teorema e a outra não. Por conseguinte, possuímos um método de decisão para as frases de T e a propriedade de uma frase ser teorema é computável. Assim sendo, pode-se concluir a demonstração do Primeiro Teorema com base no Teorema da Indefinibilidade da Verdade, de Tarski, que diz que uma teoria consistente não é capaz de expressar a propriedade de "*ser teorema*" nela mesma.

Por fim,

- Sendo T negação-completa, então T é decidível. Entretanto, pelo Teorema da Indefinibilidade da Verdade, T, se consistente, não pode ser decidível. Logo, T, se consistente, não é negação-completa.

4.2.4 O Segundo Teorema de Gödel

O Segundo Teorema exigirá um sistema formal mais expressivo do que Q, esse que temos como referência até então. Será necessário um sistema que contenha *indução*. De todo modo, tal coisa não implicará muita demanda, pois pode-se apenas adicionar o axioma-esquema da indução em Q, o que, naturalmente, nos entregará o sistema P, isto é, a *Aritmética de Peano*, – explicitado na secção 2.4, do capítulo *Sistemas Formais*. Além disso, nossa apresentação do Segundo Teorema fará uso do *Teorema de Löb*. Iniciemos, portanto, por esse teorema, tendo como orientação a demonstração de Rodrigo Freire, outra vez em *Tópicos em Lógica de Primeira Ordem* (2019), presente nas páginas 58 e 59.

4.2.4.1 Teorema de Löb

Consideremos P uma fórmula, Γ um estoque de fórmulas e y um pronome diferente de x, sendo que y ocorre livre em P – e não há nenhuma outra ocorrência livre em P. Podemos, então, dizer que P é uma fórmula de dedutibilidade em Γ, se e somente se, quaisquer fórmulas A e B satisfazem as seguintes condições:

1) Se A é dedutível a partir de Γ, então $P_y[\ulcorner A \urcorner]$ também é.
2) $P_y[\ulcorner A \urcorner] \rightarrow P_y\left[\ulcorner P_y[\ulcorner A \urcorner] \urcorner\right]$ é dedutível a partir de Γ.
3) $P_y[\ulcorner A \rightarrow B \urcorner] \rightarrow \left(P_y[\ulcorner A \urcorner] \rightarrow P_y[\ulcorner B \urcorner]\right)$ é dedutível a partir de Γ.

À vista disso, enunciemos o Teorema de Löb:

Considere P uma fórmula de demonstrabilidade nos moldes acima. Dado qualquer fórmula A em Γ[131]:

$$\Gamma \vdash P_y[\ulcorner A \urcorner] \rightarrow A \Leftrightarrow \Gamma \vdash A.$$

Perceba que $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \vdash P_y[\ulcorner A \urcorner] \rightarrow A$ é válido por consequência tautológica. Devemos nos ater, portanto, à outra implicação. Consideremos, então, uma sentença B tal que:

$$\Gamma \vdash B \leftrightarrow P_y[\ulcorner B \urcorner] \rightarrow A$$

Note que essa sentença B expressa algo como "*se eu sou dedutível, então A*". O Teorema do Ponto Fixo é o que irá nos garantir a existência dessa sentença, a qual representaremos por B. Assim sendo, tem-se que $\Gamma \vdash B \rightarrow P_y[\ulcorner B \urcorner] \rightarrow A$, pela escolha de B. Com base na condição (1), tem-se que $\Gamma \vdash P_y[\ulcorner B \rightarrow (P_y[\ulcorner B \urcorner] \rightarrow A) \urcorner]$; de maneira análoga, pela condição (3) $\Gamma \vdash P_y[\ulcorner B \urcorner] \rightarrow P_y[\ulcorner P_y[\ulcorner B \urcorner] \rightarrow A \urcorner]$. Com os olhos ainda na condição (3), temos que:

[131] Sendo Γ um estoque qualquer de fórmulas contendo axiomas da igualdade.

$$\Gamma \vdash P_y[\ulcorner B \urcorner] \rightarrow (P_y[\ulcorner P_y[\ulcorner B \urcorner] \urcorner] \rightarrow P_y[\ulcorner A \urcorner])$$

Fazendo uso da condição (2) e de consequências tautológicas, pode-se eliminar o termo do meio, haja vista que já é implicado pelo antecedente em Γ. Assim sendo, obtém-se:

$$\Gamma \vdash P_y[\ulcorner B \urcorner] \rightarrow P_y[\ulcorner A \urcorner]$$

Considerando, agora, a hipótese de que $\Gamma \vdash P_y[\ulcorner A \urcorner] \rightarrow A$, é possível concluir, por intermédio de consequência tautológica, que $\Gamma \vdash P_y[\ulcorner B \urcorner] \rightarrow A$. Sabemos, então, que B é equivalente dedutivamente a $P_y[\ulcorner B \urcorner] \rightarrow A$; além disso, sabe-se que, em decorrência da condição (1), $\Gamma \vdash B$ e $\Gamma \vdash P_y[\ulcorner B \urcorner]$. É conhecido, também, que, pela própria escolha do ponto fixo B, $\Gamma \vdash B \rightarrow (P_y[\ulcorner B \urcorner] \rightarrow A)$. Por conseguinte, A sendo consequência tautológica de B, $P_y[\ulcorner B \urcorner]$ e $B \rightarrow (P_y[\ulcorner B \urcorner] \rightarrow A)$:

$$\Gamma \vdash A$$

Desse modo, terminamos a exposição do Teorema de Löb, e podemos, finalmente, apresentar a demonstração do Segundo Teorema de Gödel.

4.2.4.2 Demonstração

Seja T um sistema formal consistente e P uma fórmula de dedutibilidade para T. À vista disso, $T \nvdash \neg P(\ulcorner \perp \urcorner)$.

Iniciemos supondo que $T \vdash \neg P(\ulcorner \perp \urcorner)$. Por consequência tautológica, obteremos que $T \vdash P(\ulcorner \perp \urcorner) \rightarrow \perp$. Pelo Teorema de Löb, sabe-se que $T \vdash \perp$, e, por conseguinte, T é inconsistente. Aplicando contraposição, concluiremos que sendo T consistente, nossa hipótese é falsa.

4.2.5 Um forte golpe contra o Programa de Hilbert

Os Teoremas da Incompletude de Gödel, conforme exposto nas páginas anteriores, desferem um golpe poderoso contra a concepção formalista de filosofia da matemática, ao menos nos moldes do Programa de Hilbert. Os Teoremas de Gödel, dentre outras coisas, deixam claro a limitação que um sistema formal, com um mínimo de capacidade expressiva, possui no que se refere a provar a sua própria consistência em termos finitários – algo indispensável para Hilbert, por exemplo[132]. Assim pontua Shapiro:

> O teorema de incompletude levanta assim dúvidas sobre qualquer filosofia da matemática (formalista ou outra) que requeira um sistema dedutivo único para toda a aritmética – um método formal único para derivar todas as verdades da aritmética. [...] Este resultado representa um problema para o programa de Hilbert. Seja PA [Aritmética de Peano] uma formalização da aritmética (ideal), digamos a teoria clássica dos números naturais. O programa de Hilbert requer uma *demonstração finitária* da consistência de PA. Mas o segundo teorema de incompletude diz que se PA é de fato consistente, então uma simples afirmação de consistência de PA não é derivável em PA, e muito menos na porção finitária de PA. O mesmo acontece para qualquer outro sistema formal, desde que contenha uma certa dose de aritmética. O programa de Hilbert requer uma demonstração finitária de que o sistema dedutivo é consistente, e, todavia, ao que parece, a consistência não pode ser demonstrada no próprio sistema, e muito menos num subsistema mais seguro. (SHAPIRO, 2019, p. 240-241).

De todo modo, olhando para além do que os Teoremas de Gödel dizem sobre a visão de Hilbert, percebemos claramente que esses resultados nos apontam para a impossibilidade de se entender a noção de *verdade*, dentro de sistemas formais, como *demonstração formal*. Todo o longo processo histórico de desinterpretação dos sistemas formais parece falhar em sua tentativa de afastar – por completo e sem danos – o *significado* do núcleo das teorias dedutivas modernas. Os Teoremas de Gödel nos ensinam que algo *foge* do escopo formalista. Entretanto, deixemos o

[132] Além disso, tal coisa responde a nossa questão deixada em aberto na seção 2.4.2.

restante dessa discussão para depois, pois devemos, antes, abordar outro argumento. Iniciemos, agora, a parte final deste capítulo, observando a tese de Newton da Costa acerca da possibilidade de se *dialetizar* os Princípios da Lógica Clássica – e o que isso representa para a nossa concepção de *formalização de conceitos*.

4.3 OS PRINCÍPIOS DA LÓGICA CLÁSSICA

4.3.1 Formalização de Conceitos

Falou-se, desde o início deste texto, que sistemas formais surgem a partir da *formalização* ou *axiomatização* de um determinado conceito. Desse modo, podemos gerar diversas teorias formais tendo como base inúmeros assuntos: matemática, física, biologia, sociologia, economia, e assim por diante. Toda e qualquer teoria formal possui *alguma* lógica em sua base. Entretanto, notemos que a *lógica*, ela própria, não existe apenas em um nível metateórico e abstrato – que dá *forma* para os demais sistemas. A lógica, seja ela qual for, também é um sistema formal no sentido tradicional e técnico do termo, entretanto, tal como defende Newton da Costa em *Ensaio Sobre os Fundamentos da Lógica* (1994), a sua axiomatização se dá em um nível *primário*, pois não faz uso de outra ciência; além de desempenhar um papel *fundacional* perante as demais teorias formais. Nas palavras do autor:

> A axiomatização da lógica, por seu turno, não pode ser secundária, ou seja, não pode pressupor outra ciência. [...] qualquer axiomática da lógica, feita com o intuito de fundá-la, de caracterizá-la, deve ser independente de outras disciplinas: deve ser *primária*. [...] Assim, em resumo, o caráter primário de qualquer axiomática da lógica decorre da própria natureza dessa ciência: ela deve servir de fundamento para todas as outras. (DA COSTA, 1994, p. 21-22).[133]

Encontramos, então, um aparente caráter *dual* na lógica, pois além de ser alicerce fundacional para os sistemas formais, não deixa de ser, ela própria, um sistema formal; que, por definição, seria fundamento de si mesmo. Poderíamos tentar

---

[133] Ênfase nossa.

abordar esse suposto problema sem grandes alardes, e dizer que a lógica enquanto *teoria concreta*, formaliza a *lógica* enquanto *conceito* ou *metateoria*. Afinal, o que temos em mente é a lógica enquanto sistema formal, tal como descreve, outra vez, Newton da Costa:

> O resultado da axiomatização de A é a obtenção de um sistema axiomático S, do qual A é uma das possíveis “realizações”. [...] Elaborado S, o passo seguinte, para a investigação de suas propriedades relevantes, consiste na sua formalização: escolhem-se símbolos convenientes, e as regras de formação, que explicitam as combinações simbólicas de S dotadas de sentido, bem como as regras de inferência, que nos permitem obter novos arranjos simbólicos a partir de outros dados, são enunciados de modo preciso. Então S converte-se numa espécie de jogo grafomecânico, realizado com símbolos fixos e mediante regras bem definidas. [...] O produto oriundo da formalização, isto é, o sistema grafomecânico obtido, denomina-se *formalismo* ou *sistema formal*. (DA COSTA, 1994, p. 22).

Perceba, contudo, que somente ao estabelecer essa distinção não estamos resolvendo a situação, pois, em princípio, estaríamos dizendo apenas que a teoria concreta da lógica formaliza a lógica enquanto metateoria. A questão que devemos nos perguntar, então, é: como a concepção de *formalização de conceitos* se aplica a uma lógica? Em outras palavras, sendo os sistemas formais axiomatizações de conceitos, e a lógica um sistema formal, qual é o conceito axiomatizado por trás da lógica? Por sua vez, esse questionamento pressupõe, de modo natural, que se sabe *qual* é a lógica que estamos falando, e aqui precisamos enunciar uma assunção crucial: faremos uso da visão moderna, e já presente na obra de Newton da Costa, de que não existe uma *única* lógica, mas sim várias.

A visão, a qual Newton da Costa chama de *dogmática*, de que somente uma única lógica – isto é, a lógica *tradicional*, ou *clássica* – é passível de exercer esse papel *primeiro* e *fundacional* perante os demais sistemas formais, é inadequada ao observarmos a evolução das ciências formais, que nos proporcionou o surgimento de inúmeras lógicas distintas e com predicados tão surpreendentes quanto a lógica clássica. À vista disso, teremos como referência a concepção *dialética* – na terminologia de Newton da Costa – de que a lógica clássica é *uma* das oriundas do que o autor chama de *Princípios Pragmáticos da Razão*, que nada mais são do que princípios gerais que “regulam a razão” (DA COSTA, 1994, p. 42); ou seja, que nos possibilitam *formular* e *escolher* qual lógica será mais adequada para determinado fim ou assunto.

Podemos organizar a argumentação de Newton da Costa, em defesa da tese dialética, em dois grandes movimentos principais: primeiro, apresentação dos Princípios Pragmáticos da Razão; segundo, *dialetização*[134] dos Princípios da Lógica Clássica. Com essas etapas concluídas, o filósofo brasileiro pretende expor não somente que a lógica clássica não é unívoca e absoluta, perante os Princípios Pragmáticos, mas, também, que se trata de uma lógica, como outras, que é fruto da *formalização* de um conceito – sendo esse justamente o ponto que mais nos interessa. Assim dirá da Costa:

> Portanto, a lógica quando encarada como ciência que serve de fundamento às outras, é o estudo das categorias mais gerais da razão e de seus princípios, princípios estes que regem o pensamento objetivo. [...] Todavia, tanto as categorias lógicas como as leis que as governam não são imutáveis nem fixas. Nesta concepção, [...] há várias lógicas, de idêntica maneira que há diversas geometrias. As categorias racionais, inclusive as lógicas, evoluem e suas relações mútuas se modificam no decurso da história [...] Consequência da historicidade da razão é a sua índole dialética: em princípio, qualquer codificação das categorias e das leis lógicas é *dialetizável*. (DA COSTA, 1994, p. 41).[135]

Note, portanto, que estamos nos aproximando do assunto desejado, isto é, do *conceito* sobre o qual a lógica é formulada. Perceba que todo o processo histórico de desinterpretação dos sistemas formais afasta o conceito da teoria axiomática de tal modo que podemos ser levados a crer que não existe algo além do sintático-formal. Agora deve estar evidente o motivo de os Teoremas de Gödel somarem à argumentação de Newton da Costa, afinal, são os próprios Teoremas que nos demonstram que os sistemas formais em geral não são capazes de comportarem apenas em seu aparato técnico as noções de significado e verdade. Existe um âmbito que escapa ao formal, nos dizem os Teoremas de Gödel; e tal coisa não se restringe somente aos sistemas formais *secundários*[136], mas, em princípio, à própria lógica,

---

[134] Ou seja, apresentar uma argumentação em defesa da sua não validade absoluta.
[135] Ênfase nossa.
[136] Ou seja, na terminologia de Newton da Costa, axiomatizações que pressupõem outras teorias.

sendo esta, por sua vez, uma formalização de um conceito específico – e não absoluto – e que pode ser *dialetizado*. Comentemos tal coisa com mais detalhes.

Deve-se destacar que o papel dos Teoremas de Gödel é garantir essa argumentação para o caso geral, ou seja, para os demais sistemas formais *relevantes*[137]. Poder-se-ia argumentar que a lógica clássica[138], ela própria, escapa dos Teoremas da Incompletude, haja vista o *Teorema da Completude da Lógica Clássica de Primeira Ordem*. O ponto que merece ser aprofundado é que parece razoável o entendimento de que a *formalização* de conceitos, em alguns casos, é *total*. Por conseguinte, é somente à vista da tese de Newton da Costa que completamos o argumento desta dissertação. Falemos mais sobre isso.

O Teorema da Completude pode ser expresso do seguinte modo:

Para qualquer fórmula A de uma teoria T, vale que A é um teorema de T, se e somente se, A é válido em T.

O Teorema da Completude corrobora – em um primeiro contexto – com a visão de separação *total* entre âmbito pré-teórico e teórico, pois estaria garantindo que a *validade* da lógica clássica é aquilo que o sistema formal, de fato, demonstra. Todavia, os Teoremas de Gödel nos dizem que tal propriedade não se preserva para quaisquer teorias formais *secundárias*[139]; em particular para aquelas capazes de falar sobre a aritmética. Isto posto, é a partir de Newton da Costa que a visão sobre o Teorema da Completude pode ser alterada, nos possibilitando o entendimento de que *uma* lógica também é fruto da formalização de conceitos[140]. Sem a *dialetização* da lógica – no caso, a *clássica* – estaríamos sujeitos ao entendimento questionável de que a lógica nada mais é do que um jogo formal e sem significado. Desejamos observar o Teorema da Completude de modo distinto. Nesse contexto novo, o teorema expressaria não

[137] Isto é, aqueles que possuem capacidade expressiva significativa, e, portanto, que, em geral, caem nos pré-requisitos para serem enquadrados nos Teoremas de Gödel.
[138] Outra vez, destaquemos que estamos nos referindo à lógica clássica de primeira ordem.
[139] Dentro da terminologia de Newton da Costa.
[140] Sendo esse conceito tão particular e limitado quanto qualquer outro.

que o âmbito de sentido é irrelevante, mas sim que a *formalização* do conceito é *total*, em virtude do que a lógica clássica, de fato, descreve[141].

De todo modo, essa argumentação deve esperar, pois, para que faça sentido, devemos, antes, abordar a tese de Newton da Costa. A lógica, portanto, que teremos como objeto é a lógica clássica, pelo simples fato de ter exercido, durante séculos, o papel *último* de fundamentação do pensamento racional. A dialetização dos Princípios da Lógica Clássica deverá ser suficiente para corroborar com a ideia de que o mesmo pode ser aplicado em qualquer outra lógica. Assim sendo, iniciemos apresentando os Princípios Pragmáticos da Razão, segundo o filósofo Newton da Costa.

4.3.2 Os Princípios Pragmáticos da Razão

Os Princípios Pragmáticos da Razão podem ser enunciados do seguinte modo:

1) O princípio da *sistematização*:
   - *A razão sempre se expressa por meio de uma lógica*.

2) O princípio da *unicidade*:
   - *Em um contexto específico, a lógica subjacente é única*.

3) O princípio da *adequação*:
   - *A lógica subjacente a um contexto específico será aquela que melhor se adaptar a ele*.

Newton da Costa apresenta esses três princípios com o objetivo de descrever o modo como o progresso nas ciências e no pensamento racional aparenta se dar. O filósofo deixa claro, contudo, que não se trata de uma definição exata e imutável, haja vista a própria característica histórica e dialética das ciências e também da lógica, que se moldaram conforme novas indagações e resultados foram surgindo no decorrer do tempo. Por conseguinte, tratam-se de princípios de natureza abstrata e não formal,

[141] Apresentaremos essa argumentação a seguir.

que nos possibilitam entender a maneira que uma lógica se torna adequada – ou não – perante um objeto (um conceito) em um contexto específico.

O princípio da sistematização busca estabelecer que os usos científicos da razão exigem organização através de alguma lógica; isto é, que as *regras* sejam designadas e conhecidas previamente. Por sua vez, o princípio da unicidade é aquele que protege essas mesmas regras de serem alteradas, a partir do momento em que são fixadas em um contexto. Por fim, o princípio da adequação é o que determina que a escolha da lógica se dê com base no objeto; ou seja, deve se dar de modo tal que o sistema de categorias racionais – e das leis universais que regulamentam essas categorias – seja o mais adequado perante o objeto em questão. Nas palavras do próprio autor:

> A justificação dos princípios pragmáticos é a seguinte: sem os dois primeiros, não há comunicação nem ciência, como hoje as entendemos. [...] Falando figuradamente, não se pode participar de um jogo desconhecendo-se suas regras. [...] *A fortiori*, não há ciência sem lógica subjacente. Quanto ao princípio da adequação, sua justificativa se condensa em se advertir que procuramos constantemente conhecer e explicar a realidade de forma cômoda, simples, e [...] econômica. Os esquemas complicados e mal adaptados à sistematização científica da realidade tendem a ser substituídos por outros; este fato, sobejamente comprovado pela história da ciência, legaliza o terceiro princípio pragmático. (DA COSTA, 1994, p. 47-48).

Entretanto, é válido ressaltar que um *dogmático* ainda poderia argumentar que concorda com os Princípios Pragmáticos, contudo, acredita que somente a lógica clássica emana dessas diretrizes; sendo, portanto, a *única* e *verdadeira* lógica. Para responder esse argumento, devemos entrar no segundo movimento da tese de Newton da Costa, que é a exposição dos Princípios Fundamentais que regem o pensamento que se respalda na lógica clássica. É preciso, desse modo, finalmente, evidenciar e interrogar o *conceito* que, segundo essa visão, origina a lógica clássica, para que, então, seja possível demonstrar – em discordância da concepção dogmática – que não se tratam de formulações *puras* da razão em sua *forma perfeita*, mas sim de *leis* em conformidade com uma visão de mundo particular; ou, para ser mais exato, com uma *metafísica* particular.

Destaquemos, outra vez, a relevância desse passo. O movimento de desinterpretação dos sistemas formais nos deixa cegos perante o *conceito* das teorias axiomáticas[142]. A evolução que molda a axiomática clássica – uma teoria interpretada – em sua versão moderna, afasta de seu âmbito teórico tudo aquilo que poderíamos associar com *significado* e *verdade*. O longo processo histórico de desinterpretação, que culmina no Programa de Hilbert, apresenta-nos os sistemas formais como sendo *jogos sintáticos*, sem qualquer tipo de sentido além do simbólico. Entretanto, a resposta que obtemos com os Teoremas de Gödel, ainda que negativa para o Programa de Hilbert, é positiva para outra coisa: existe um aspecto da verdade lógica em geral que não se deixa capturar por processos de dedução formal.

Tendo tal coisa em mente, é perceptível que se formos capazes de (i) apresentar as leis que fundamentam a lógica clássica – um sistema formal primário, e que fundamenta outros sistemas formais –, e (ii) mostrar que essas leis são dialetizáveis, então estaremos mostrando que (iii) a própria lógica, ou seja, o sistema formal mais básico de todos[143], possui um âmbito conceitual específico – e não algo geral como a própria *formalização da razão* – que não foi perdido com o processo de desinterpretação.

Tendo esse caminho em mente, voltemo-nos a apresentação da argumentação de Newton da Costa, ainda em *Ensaio Sobre os Fundamentos da Lógica* (1994).

4.3.3 Os Princípios Fundamentais da Lógica Clássica

Discorrer sobre as *leis fundamentais* da lógica clássica é sem dúvida uma tarefa árdua, e pode acarretar em incontáveis pontos de discordância. Entretanto, Newton da Costa parte de um local que – salvo algumas exceções – mostra-se pacífico perante filósofos e historiadores. O brasileiro, então, defende que a lógica clássica tem suas raízes rastreadas até o pensamento de Aristóteles, ou, para ser mais

[142] Pois separa bruscamente o âmbito pré-teórico do âmbito teórico.

[143] Ao declararmos que a lógica, no caso, a lógica clássica, é o sistema formal mais *básico*, estamos nos referindo ao fato de ser uma teoria formal que não possui qualquer axioma não-lógico. Deixemos, contudo, evidenciado que esta é uma afirmação em um âmbito elusivo, haja vista que, enquanto sistema formal em seu nível sintático, qualquer caracterização da lógica clássica terá de utilizar alguns axiomas – lógicos – como não-lógicos.

específico, até sua metafísica. É de conhecimento comum que fora justamente o aluno mais famoso de Platão o responsável por organizar e sintetizar um dos primeiros sistemas lógicos[144] de que se tem conhecimento, isto é, a assim chamada *lógica aristotélica* – ou teoria do silogismo.

É provável que as afirmações acima não despertem grandes inquietações nos mais variados leitores, afinal, tal como foi dito, Aristóteles é comumente indicado como o *pai* da lógica clássica. De todo modo, para além das similaridades, a lógica de Aristóteles possui uma propriedade radicalmente distinta da lógica clássica moderna. Destaquemos que, do mesmo modo que a axiomática de Euclides se tratava de uma teoria totalmente interpretada, a lógica postulada por Aristóteles também é uma teoria *sobre algo*: a saber, sua metafísica. Assim sendo, para o filósofo grego, as concepções de metafísica e lógica colidem. Newton da Costa esclarece tal visão:

> Para o Estagirita, as leis lógicas são leis do ser. Por trás do mundo das aparências, das mudanças, há a realidade imutável do ser, cujas categorias determinam a forma do discurso e a atividade racional. Nas próprias coisas é que se localiza o substrato que torna legais as conexões lógicas. A razão não opera legitimamente senão quando respeita e reflete a ordem real do ser. (DA COSTA, 1994, p. 76-77).

Perceba como, provavelmente, Aristóteles não teria dificuldade ou até mesmo hesitaria em responder *sobre o que* é sua lógica. Em contrapartida, as formulações modernas da lógica clássica não carregam, em sua estruturação sintática, qualquer tipo de interpretação pré-vinculada. Ainda assim, tal como defende Newton da Costa, a lógica clássica, respalda-se nos mesmos pressupostos – que antes de serem *lógicos* são *metafísicos* – que o sistema aristotélico; pressupostos estes que podem ser condensados em três leis lógicas. Observemos o que diz Newton da Costa:

> Em síntese, a lógica se funda numa concepção metafísica de mundo. Os princípios da identidade, da contradição e do terceiro excluído, por exemplo, constituem, primariamente, leis do ser. Decorrem de uma doutrina estática do real: o ser é fixo e permanente; daí, ser sempre idêntico a si mesmo (princípio da identidade), não pode ser e não ser ao mesmo tempo (lei da contradição) e dever ser ou não ser, sem outra alternativa (*tertium non*

[144] Para evitarmos quaisquer anacronismos, deixemos claro que este termo não está sendo utilizado em seu significado técnico.

> *datur*). Tais princípios constituem leis ontológicas e, secundariamente, normas lógicas. (DA COSTA, 1994, p. 77).

É evidente que fundamentar a lógica com base nessas três leis acarreta em um patamar de confiança privilegiado. Podemos formular esses três princípios em linguagem de primeira ordem, com igualdade, do seguinte modo:

Seja A uma fórmula,

Princípio da Identidade:

$$\forall x(x = x)$$

Princípio da Não-Contradição:

$$\forall x \neg(Ax \land \neg Ax)$$

Princípio do Terceiro-Excluído:

$$\forall x(Ax \lor \neg Ax)$$

É notório que em qualquer formulação clássica da lógica de primeira ordem, essas três sentenças serão válidas. A tese que defende Newton da Costa é que essa validade trivialmente conhecida não é decorrente de uma *necessidade absoluta*; ou seja, as três leis fundamentais não são descrições *puras* da razão e derivadas do fato de *a realidade ser tal como é*. Isso é o caso quando já temos um contexto definido: a saber, uma realidade estática como é a metafísica aristotélica. Se fixarmos a ontologia de Aristóteles, é facilmente observável como a lógica clássica respeita os Princípios Pragmáticos da Razão. De todo modo, tal coisa apenas nos diz que a lógica clássica é a que melhor se adequa a essa concepção, e não que a concepção é ela própria *única* e a representação *perfeita* e *final* da realidade.

As formulações modernas dos sistemas axiomáticos, o que inclui a lógica de primeira ordem, afastam de tal modo a ontologia aristotélica do coração dos sistemas formais que somos levados a crer que as leis lógicas – os axiomas lógicos – possuem um patamar privilegiado em relação aos axiomas não-lógicos, esses que são de interpretação e validade dependentes de cada contexto. Tal coisa de fato é o caso, desde que se esteja falando da *lógica clássica*. Em qualquer sistema clássico as três leis fundamentais possuirão um papel de destaque, o que, entretanto, não pode ser confundido com validade absoluta. A validade dessas leis, é, também, *limitada* – assim como sugerem os Princípios Pragmáticos da Razão.

Defenderemos, portanto, em conformidade com Newton da Costa, que as três leis lógicas representam, outra vez na terminologia de Rodrigo Freire em *Interpretation and Truth in Set Theory* (2018), *princípios diretivos* que capturam um conceito: a própria metafísica aristotélica; ou, sendo ainda mais específico, o *conceito de estrutura de primeira ordem*. Perceba, entretanto, que, de maneira similar ao que foi explicitado na seção 2.4.1[145], aqui não estamos dizendo que esses princípios diretivos[146] descrevem *uma* estrutura, mas sim o *conceito geral* de estrutura de primeira ordem. Observemos tal coisa com mais detalhes, tendo como referência técnica as elaborações presentes na página 18 de *Mathematical logic* (2018), e também na página 138 de *Computabilidade e Lógica* (2012). À vista disso, podemos definir os elementos de uma estrutura de primeira ordem.

Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem. Uma estrutura $\mathcal{a}$ para $\mathcal{L}$, isto é, uma $\mathcal{L}$-estrutura, consiste nas seguintes coisas:

(i) *Um conjunto não-vazio* $|\mathcal{a}|$; *que deve ser entendido como o domínio ou o universo de* $\mathcal{a}$.

(ii) *Extensões para os símbolos de predicado*. *Para cada símbolo de predicado* P *de aridade* n *em* $\mathcal{L}$, *tem-se que*:

$$P_n^{\mathcal{a}} \subseteq |\mathcal{a}|_1 \times |\mathcal{a}|_2, \dots, \times |\mathcal{a}|_n$$

(iii) *Denotações para os símbolos de constante. Para cada símbolo de constante* a *em* $\mathcal{L}$, *tem-se que*:

[145] Onde abordamos os princípios diretivos da aritmética.
[146] No caso, as três leis lógicas.

$$a^a \in |a|$$[147]

Perceba, então, como as três leis lógicas nada mais são do que os princípios diretivos que descrevem a noção geral – o conceito – de estrutura. O Princípio da Identidade é o que garante que os indivíduos do domínio – ou *universo* – de uma dada estrutura são fixos e imutáveis (iguais a si mesmos e diferentes dos outros). De maneira análoga, o Princípio da Não-Contradição nos diz que uma sequência de n indivíduos não pode pertencer e não pertencer à extensão de um predicado de aridade n; assim como, para qualquer predicado de aridade n, uma sequência de n indivíduos do domínio pertence ou não pertence à sua extensão (Princípio do Terceiro-Excluído). As três leis fundacionais da lógica clássica são descrições da metafísica de Aristóteles, e, tal como exposto, descrevem o *conceito geral de estrutura* – sendo esse o conceito que defenderemos estar por trás da lógica clássica. O conceito geral de estrutura de primeira ordem é uma representação da visão de mundo metafísico de Aristóteles – o que, por sua vez, legitima a tese de Newton da Costa.

Tendo dito isso, iniciemos, portanto, a tarefa de observar as três leis fundamentais, sobre as quais a lógica clássica se respalda enquanto sistema formal, perante uma lente crítica. Ou, na terminologia de Newton da Costa, voltemo-nos a tarefa de *dialetizar* os princípios da lógica clássica. É válido, contudo, comentar o que exatamente queremos dizer ao falar em *dialetizar* tais coisas. Em momento algum pretendemos – ou pretendeu da Costa – *invalidar* as três leis lógicas. O objetivo é simplesmente mostrar que não são absolutas, isto é, que *podem* ser questionadas em algum contexto. Nosso raciocínio é similar ao ato de procurar uma estrutura de primeira ordem que não satisfaça uma determinada sentença. A visão que almejamos questionar é aquela que afirma que a lógica clássica é a *única* e *verdadeira* lógica que se origina dos Princípios Pragmáticos da Razão, e que estaria fundamentada na *própria realidade* – e não em um conceito particular de realidade. Sendo tal coisa o caso, não seríamos capazes de *sequer* levantar suspeita contra os princípios em questão. Todavia, ao sermos capazes de questiona-los, ou melhor, *dialetiza-los*, estamos mostrando, dentre outras coisas, que esses princípios são, também, relativos

[147] Em decorrência do nosso interesse momentâneo, não estamos considerando o caso de símbolos de funções.

a um contexto – ou, na metáfora, a uma estrutura[148]. À vista disso, iniciemos pelo *Princípio da Identidade*.

4.3.3.1 Princípio da Identidade

O princípio em questão afirma que todo e qualquer objeto é *idêntico* ou *igual*[149] a si mesmo – de maneira absoluta e imutável. Naturalmente, parece razoável pensar que esse pilar clássico da metafísica aristotélica é, de fato, *verdadeiro* tendo como referência o nosso mundo. Isto é, em um primeiro olhar, o Princípio da Identidade aristotélico parece descrever uma concepção muito próxima do que é a realidade. O princípio parece preservar a intuição que temos de que *eu sou igual a mim mesmo*, assim como *você é igual a si próprio*. De todo modo, essa primeira intuição pode ser indagada sem grandes problemas.

Pode-se listar uma quantidade considerável de paradoxos que são obtidos ao se aceitar, sem restrições, o Princípio da Identidade. Ao adaptarmos a versão clássica do *Paradoxo do Navio de Teseu*, podemos observar um cenário no qual o Princípio da Identidade não se aplica, de modo absoluto, sequer a nós mesmos. Considerando o fato de que seres humanos são compostos por células, e que diariamente uma quantidade específica de células morre e essas células são trocadas por outras, podemos concluir que existirá um dado momento em que possuiremos nenhuma das células desse dia estipulado como ponto de partida. Por conseguinte, perante a nossa constituição física e corpórea, não somos iguais a nós mesmos – pois possuímos um corpo *totalmente* diferente.

Todas essas questões, portanto, referentes ao fato de que existe a *mudança* na realidade, corroboram para a conclusão de que o princípio em questão não é absoluto, ou, simplesmente, não advém de uma ontologia que descreve *perfeitamente*[150] a realidade. Newton da Costa argumenta que o Princípio da Identidade é fruto de uma metafísica *estática*, como é o caso da metafísica de

[148] No caso, ao conceito geral de estrutura de primeira ordem.
[149] Aqui adotamos os dois termos como sinônimos.
[150] E de maneira inequívoca.

Aristóteles; metafísica essa que, tal como a geometria de Euclides, entende que o ser *é* o que *é*, e tal coisa é *imutável* – o que, ao que tudo indica, não é absoluto.

Por conseguinte, o Princípio da Identidade não possui a validade universal que, costumeiramente, é associada a ele. O princípio é oriundo de uma metafísica particular, a qual, como defende Newton da Costa, descreve satisfatoriamente – segundo os Princípios Pragmáticos da Razão – objetos estáticos e absolutos, como são os objetos da geometria euclidiana, e não os objetos e os seres da realidade física na qual vivemos. Portanto, somente podemos concluir que se trata de uma lei fundamental da lógica clássica que se respalda tendo como alicerce a visão de mundo da metafísica de Aristóteles – e não o mundo que entendemos como realidade. Isto posto, voltemo-nos, agora, para o Princípio da Não-Contradição.

4.3.3.2 Princípio da Não-Contradição

Aristóteles formula, no livro Γ da Metafísica (2006) o Princípio da Não-Contradição de três modos distintos, os quais Jan Lukasiewicz, em *On the principle of contradiction in Aristotle* (1971), intitula de: *formulação ontológica*, *formulação lógica* e *formulação psicológica*. Observemos, a seguir, as três formulações desta lei lógica[151]:

- Formulação Ontológica:
  - *A nenhum objeto pode uma característica pertencer e não pertencer ao mesmo tempo*.

- Formulação Lógica:
  - *Duas proposições contraditórias não são verdadeiras ao mesmo tempo*.

- Formulação Psicológica:
  - *Dois atos de crença (que constituem fatos psíquicos) correspondentes a proposições contraditórias não podem coexistir na mesma consciência*.

[151] As três formulações apresentadas são reformulações mais precisas de Lukasiewicz das escritas originalmente por Aristóteles.

Iniciemos pela formulação psicológica. De modo geral, essa afirmação defende que um agente não pode conter crenças correspondentes a proposições contraditórias. Note, contudo, que tal coisa não somente é intuitiva como parece acontecer com considerável frequência. As pessoas pensam de forma variada, e a contradição é parte natural desse processo. Esse é, inclusive, um dos grandes motivos da lógica moderna exigir separação conceitual da psicologia, pois a lógica vista como *organização do modo como as pessoas pensam* é, dentre outras coisas, contraditória[152]. Não obstante, em busca de evidenciar ainda mais como a formulação psicológica é problemática, consideremos o seguinte cenário:

Considere o seguinte:

João da Silva, um jovem atleta, sofre um acidente gravíssimo e é levado para o hospital, onde fica internado na UTI. Dentre as muitas consequências que o acidente proporcionou a João, deve-se destacar a perda de memória, que inclui o próprio nome. Ou seja, João não tem consciência de que se chama "*João*".

Enquanto está internado, João perde e retoma a consciência por diversas vezes. Em um destes momentos em que está acordado, João observa tudo o que está ao seu redor. Ele vê as paredes brancas, a maca, os aparelhos, e conclui a seguinte coisa: *Eu estou internado*.

Portanto,

- João entende a frase "*Eu estou internado*" e crê que a frase é verdadeira. Logo, João crê na proposição expressa pela frase $\langle \gamma, \varphi \rangle$[153].

Depois de alguns dias, João percebe que certas pessoas, as quais ele não reconhece, que visitam seu quarto, sempre comentam entre si que um tal "João da

[152] O que acarreta na sua trivialidade, haja vista que estamos em um contexto clássico.
[153] Sendo "γ" o *próprio João*, e "φ" o predicado referente a "*estar internado*".

Silva” sempre foi muito forte, saudável e resistente; isto é, um atleta no auge de sua forma. Ouvindo tais coisas, João conclui o seguinte: *João não está internado*.

Portanto,

- João entende a frase “*João não está internado*” e crê que a frase é verdadeira. Logo, João crê na proposição expressa pela frase $\langle \gamma, \neg\varphi \rangle$[154].

Perceba como nesse cenário, sem quaisquer suposições arrojadas ou absurdas, *existe* um agente que crê em $\langle \gamma, \varphi \rangle$ e $\langle \gamma, \neg\varphi \rangle$. Ou seja, diferentemente do que defende a formulação psicológica do Princípio da Não-Contradição, parece sim ser possível que, em uma mesma consciência, coexistam crenças referentes a proposições contraditórias. Por fim, pode-se concluir que a formulação psicológica não é absoluta.

Voltando, agora, para as formulações ontológica e lógica, o que é importante que fique claro é que, para Aristóteles, as duas formulações são equivalentes. O que, além de ser bastante coerente, pensando na metafísica do filósofo grego, é outro forte indício da nossa afirmação inicial de que a lógica clássica se respalda em uma metafísica. Perceba que a lógica aristotélica tem como plano de fundo a ontologia de sua metafísica. Desse modo, a formulação lógica é simplesmente um *reflexo*, uma *consequência direta* da formulação ontológica. Assim sendo, “frisaremos que, para Aristóteles, elas [formulações lógica e ontológica] são verdadeiras pela circunstância de o mundo ser como é (metafisicamente)” (DA COSTA, 1994, p. 102).

Portanto, para o filósofo grego, o mundo é tal que possui uma ontologia expressa pela sua metafísica, o que gera respaldo filosófico para a sua lógica. À vista disso, para Aristóteles, O Princípio da Não-Contradição – em sua formulação ontológica-lógica – é uma *lei final* e, por conseguinte, *indemonstrável*. Entretanto, falar em *lei indemonstrável* gera inúmeros questionamentos. Sobre esse ponto, elucida Newton da Costa:

---

[154] Sendo “γ” o *próprio João*, e “$\neg\varphi$” o predicado referente a “*não estar internado*”.

> A lógica atual evidencia que não há princípio último e indemonstrável. O conceito de demonstrabilidade é relativo: uma proposição não é demonstrável ou indemonstrável em si mesma, porém em relação a outras. Há sistematizações da lógica usual em que as formas rigorosas do princípio da contradição são demonstradas e há sistematizações em que algumas delas são utilizadas como proposições primitivas, isto é, não demonstradas. (DA COSTA, 1994, p. 102).

Ainda assim, algum defensor moderno da tese aristotélica poderia argumentar e dizer que essa é uma operação a nível da linguagem, e que, na metalinguagem, na qual o princípio é de fato utilizado como mecanismo dedutivo, tal princípio é operado como um pressuposto primitivo. Newton da Costa responde a essa assunção:

> Tal maneira de equacionar o problema é enganadora; em primeiro lugar, porque a metalinguagem é suscetível de axiomatização, e a escolha dos axiomas, como sabemos, afigura-se quase arbitrária; em segundo, quem assim equaciona a questão parece acreditar em alguma doutrina da demonstração totalmente diversa da estabelecida pelos lógicos contemporâneos e que deveria ser, antes de mais nada, explicitada em termos claros e precisos. (DA COSTA, 1994, p. 102).

Perceba, desse modo, que não faria sentido falar em uma lei demonstrável ou indemonstrável em si mesma, isso somente se dá em relação a outras leis, outros princípios. Ou seja, sequer dentro da própria lógica clássica existe uma unanimidade em favor da tese de *indemonstrabilidade* de Aristóteles; o que, por sua vez, corrobora com o nosso entendimento de que se trata de uma lei não-absoluta. Tendo dito isso, falemos, finalmente, da última lei: o Princípio do Terceiro-Excluído.

4.3.3.3 Princípio do Terceiro-Excluído

Entramos, por fim, na última lei fundamental da lógica clássica, o Princípio do Terceiro-Excluído. O argumento de Newton da Costa para evidenciar a sua não concordância com a validade absoluta dessa lei é muito simples, e, até mesmo, similar ao apresentado no tópico anterior. O pensador brasileiro nos conduz ao fato de que o próprio desenvolvimento da ciência moderna demandou sistemas lógicos distintos da lógica tradicional, sendo que, inclusive, alguns deles não adotam o Princípio do Terceiro-Excluído como lei fundacional. Ainda que algum *dogmático* – sempre na terminologia de da Costa – insistisse na tese de que os Princípios Pragmáticos da Razão legitimam *apenas* a lógica clássica, este teria dificuldade em explicar o surgimento de teorias axiomáticas modernas que não se adequam à sistematização tradicional.

O avanço da ciência em campos que lidam tanto com macro quanto com micro matérias exigiu – tal como sugerem os Princípios Pragmáticos – que novos sistemas fossem estipulados para que melhor se adequassem aos assuntos em questão. A lógica clássica, portanto, tornou-se *ineficiente* ou, em outros casos, *imprópria* para determinadas áreas, como, por exemplo, certos ramos da física quântica. Sistemas axiomáticos *polivalentes* – isto é, que possuem mais de dois valores de verdade; além das lógicas *intuicionistas* – que rejeitam o Princípio do Terceiro-Excluído como esquema geral[155], são alguns dos exemplos relevantes que evidenciam a não unanimidade das leis fundacionais clássicas – em particular, o Princípio do Terceiro-Excluído.

Desse modo, torna-se evidente como os Princípios da Identidade, da Não-Contradição e do Terceiro-Excluído podem, tal como defende Newton da Costa, ser *dialetizados*; isto é, questionados, revisados, e não são necessidades universais acerca da realidade. À vista disso, finaliza da Costa:

> Logo, as leis lógicas, quando encaradas como leis que se relacionam à realidade, são hipóteses. E a sua aceitação, no contexto total da ciência, depende de fatores pragmáticos; elas servem para conferir forma ao contexto científico e, em geral, ao contexto racional. (DA COSTA, 1994, p. 112).

Assim sendo, seguindo a argumentação de Newton da Costa, consegue-se expor como os princípios básicos da lógica clássica não são universais, mas sim válidos tendo como premissa uma metafísica particular. Fica evidente, portanto, que é essa metafísica que entrega respaldo filosófico para o sentido que vai além do simbólico da lógica clássica, e não a *própria razão humana*, ou o fato de,

[155] Mas podem aceitar instâncias particulares do mesmo.

parafraseando Aristóteles, *o mundo ser como é*. Finalmente, está evidenciado como a concepção de formalização de conceitos também se aplica às lógicas – em particular, à lógica clássica.

5 CONCLUSÃO

Ao longo de cada uma das páginas desta dissertação, um objeto em específico tornou-se alvo de nossas investigações: os sistemas formais. Nossos olhares, contudo, foram guiados e motivados tendo como parâmetro o processo histórico de desinterpretação, e como esse evento modificou a concepção clássica das teorias axiomáticas. Buscamos, no decorrer dos capítulos, desenvolver com cuidado essa relação, explicitando tanto questões técnicas – como a própria constituição moderna dos sistemas formais –, quanto assuntos de natureza conceitual – como a fundamentação filosófica do movimento de desinterpretação. Desde o início, tínhamos como horizonte a tentativa de entender melhor o papel do *significado* dentro das teorias formais modernas, e, ao fim deste trabalho, acreditamos ter avançado nesse sentido de modo positivo.

Nossa estratégia consistiu em iniciar apresentando a visão atual dos sistemas formais, expondo de cara para o leitor a dificuldade que se encontra ao tentar responder questões inerentes ao ato de se investigar qualquer objeto – como é o caso da questão acerca do *sentido* e *significado*. Tendo como referência a literatura disponível, no decorrer do primeiro capítulo de desenvolvimento, buscamos organizar conceitualmente a visão técnica da elaboração e constituição dos sistemas formais, de modo tal que o leitor pudesse entender como o progresso das ciências formais afastou desses objetos o âmbito de significado que, anteriormente, se fazia presente. Note, portanto, que a escolha por iniciar já pela concepção moderna de sistemas formais, dentre outros motivos, visou que a questão fosse construída de maneira orgânica. Isto é, que o problema fosse *gerado*, e não, simplesmente, *apresentado*.

Ao fim do primeiro capítulo, acumulamos um esclarecimento sobre a constituição dos sistemas formais enquanto objetos sintático-linguísticos, além de expor a concepção de que essas construções são oriundas a partir do processo de *formalização de conceitos*. Ademais, também ao fim dessa unidade, somos introduzidos ao movimento de desinterpretação, tendo como primeira abordagem o seu impacto no contexto matemático e no desenvolvimento das ciências formais. À vista disso, partimos para o segundo capítulo de desenvolvimento, agora, convidando o leitor para uma imersão maior no passado, de modo que possamos adentrar o movimento de desinterpretação tendo como objetivo expor a sua fundamentação filosófica. Ao longo de todo o segundo capítulo, reconstruímos visões importantes – que percorrem séculos – de renomados autores, tendo sempre como princípio a clareza e como meta básica embasar esse movimento para além de um contexto estrito e técnico da matemática. O caminho da desinterpretação deve ser visto como processo histórico e edificado no decorrer da tradição filosófica.

Desse modo, o segundo capítulo se encerra nos entregando uma visão ampla da fundamentação filosófica do caminho que moldou a axiomática moderna, e deixa em aberto a conclusão da filosofia da matemática de David Hilbert. Isto posto, é a partir dessa deixa que iniciamos o terceiro e último capítulo de desenvolvimento. O terceiro capítulo tem como meta principal responder ao Programa de Hilbert de modo que se evidencie algo crucial: o processo de desinterpretação não afasta impunemente o âmbito de significado das elaborações modernas dos sistemas formais. Essa conclusão é trazida pelos Teoremas da Incompletude de Gödel, que são partes essenciais da argumentação desta dissertação. À luz dos Teoremas de Gödel, como última etapa do capítulo, adentramos no segundo ponto de investigação, agora olhando para a hipótese de que *todo* sistema formal é resultado da *formalização* de um conceito; sendo a lógica clássica de primeira ordem o objeto em análise.

Assim sendo, organizemos a argumentação até aqui: os Teoremas de Gödel nos indicam que a concepção de *verdade* lógica em geral[156] não pode ser identificada, irrestritamente, com a noção de demonstração formal; o que, por sua vez, é um forte indicativo de que o próprio *significado* dos sistemas formais não se perdeu ou foi afastado por completo pelo avanço do movimento de desinterpretação. Por conseguinte, a nossa ideia de que os sistemas formais emergem da *formalização* de conceitos parece ganhar força. De todo modo, a falta de um conceito *aparente* por trás da lógica clássica de primeira ordem – que também é um sistema formal – se torna um impeditivo dessa tese. Nesse ponto, Newton da Costa incrementa a nossa argumentação. O filósofo e lógico brasileiro defende que a lógica clássica não é a *única* e *verdadeira* lógica, mas sim *uma* lógica dentre as muitas possíveis. Essa afirmação, contudo, somente pode ser concebida se soubermos (i) *qual* é esse

[156] Pontuemos, mais uma vez, que, ao utilizar essa expressão, ou seja "*verdade lógica em geral*", estamos nos referindo à noção de validade *em geral* de todo e qualquer sistema formal, e não, apenas, da *lógica ela própria*.

conceito que a lógica clássica formaliza; e (ii) se pudermos mostrar que se tratam de conceitos particulares e de validade limitada.

Newton da Costa, portanto, apresenta a metafísica aristotélica como *conceito* fundacional para a lógica clássica; ou seja, é a metafísica do Estagirita que garante o respaldo filosófico para as leis básicas da lógica tradicional – e não a auto evidência e o fato de o mundo ser tal como é. Sendo o caso de termos o conceito por trás da lógica clássica, estaríamos caminhando para a conclusão desejada de que até mesmo a lógica – uma formalização primária e que serve de fundamentação para outros sistemas formais[157] – é, ela própria, a *formalização de um conceito particular*, e, por conseguinte, dotada de algum significado; a saber: a visão metafísica de mundo de Aristóteles. O passo final dessa argumentação, nos moldes do que defende da Costa, é, precisamente, a *dialetização* desses princípios diretivos[158], que podem ser condensados em três leis lógicas: o Princípio da Identidade, o Princípio da Não-Contradição e o Princípio do Terceiro-Excluído.

Seguindo os passos do filósofo brasileiro, completamos o capítulo final do desenvolvimento com a argumentação em favor da *dialetização* das leis fundacionais da lógica clássica. Concluímos, portanto, que se tratam de leis que não são *absolutas* e *indubitáveis*, mas sim frutos de uma visão particular de mundo: a visão aristotélica da realidade. A lógica clássica se enquadra, portanto, dentro da visão de formalização de conceitos, pois, enquanto sistema formal, é a formalização *total* de um *conceito* e de uma *visão de mundo*[159] – visão esta que não é *absoluta* e *indubitável*. Os Teoremas de Gödel já haviam nos entregado esse entendimento para os sistemas formais *em geral*. É devido, por conseguinte, a Newton da Costa, a garantia de que o mesmo vale, também, para as lógicas. Essa conclusão, em adição a todos os demais capítulos da dissertação, nos possibilita um entendimento mais preciso acerca da natureza dos sistemas formais.

[157] Na terminologia do próprio Newton da Costa.

[158] Aqui, outra vez, fazemos uso da nomenclatura adotada por Rodrigo Freire em *Interpretation and Truth in Set Theory* (2018).

[159] Afirmação essa validada e justificada pelos Princípios Pragmáticos da Razão. As três leis fundacionais da lógica clássica são as que mais se adequam e melhor se aplicam, perante os Princípios Pragmáticos da Razão, tendo como conceito a visão de mundo da metafísica aristotélica. As três leis *descrevem* a visão de estrutura de primeira ordem dentro da lógica clássica, o que, portanto, justifica filosoficamente a nossa visão defendida perante o Teorema da Completude.

Percorremos diversos caminhos ao investigarmos atentamente esses objetos. Ainda assim, terminamos este texto sabendo que o processo de desinterpretação não expurga dos sistemas formais, em sua totalidade e sem prejuízos, as noções de *sentido* e *significado* que, em um primeiro olhar, parecem escapar por entre os dedos. À vista disso, cabe-nos a conclusão final de que a axiomática moderna é fruto da visão de formalização de conceitos, e, desse modo, não pode ignorar o seu âmbito de significado, pois trata-se de uma camada que garante o respaldo filosófico para qualquer sistema formal – até mesmo a lógica.

6 REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Edgar. **Análise de uma Fundamentação da Verdade de Sentenças Aritméticas**. Brasília: Revista de Filosofia Moderna e Contemporânea, v. 6, p. 57-94, 2019.

ARISTÓTELES; BINI, EDSON. **METAFÍSICA**. EDIPRO, 2006.

AYER, Alfred Jules. **Language, Truth, and Logic**. London: Gollancz, 2nd Edition, 1956.

BÉZIAU, Jean-Yves. **Universal Logic**. in: Logica'94 – Proceedings of the 8th International Symposium, T.Childers & O.Majer (eds). Ptage, p. 73-93, 1994.

BOOLOS, George Stephen; BURGUESS, John Patton; JEFFREY, Richard Carl. **Computabilidade e Lógica**. São Paulo: Unesp, 2012.

DA COSTA, Newton. **Ensaio Sobre os Fundamentos da Lógica**. Editora Hucitec, 2. Ed, 1994.

DA SILVA, Jairo José. **Filosofias da matemática**. Unesp, 2007.

DESCARTES, René. **Meditações metafísicas**. Tradução de Maria Ermantina de Almeida Prado Galvão. 2005.

FREGE, Gottlob. **The basic laws of arithmetic: Exposition of the system**. Univ of California Press, 1967.

FREGE, Gottlob. **The foundations of arithmetic: A logico-mathematical enquiry into the concept of number**. Northwestern University Press, 1980.

FREGE, Gottlob. **The thought: a logical inquiry**. Mind, JSTOR, v, 65, n 259, p. 289-311, 1956.

FREIRE, Rodrigo. **Interpretation and Truth in Set Theory**. In: Carnielli, W.; Malinowski, J.. (Org.). Contradictions, from Consistency to Inconsistency. 1ed.: Springer International Publishing, v. 47, p. 183-205, 2018.

FREIRE, Rodrigo. **Tópicos em Lógica de Primeira Ordem**. Brasília: Lógica no Avião, 2019.

GOODMAN, Nicolas D. **Mathematics as an objective science**. The American Mathematical Monthly, v. 86, n. 7, p. 540-551, 1979.

GÖDEL, Kurt. **On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica And Related Systems I 1** (1931). In: Godel's Theorem in Focus. Routledge, 2012. p. 17-47.

GÖDEL, Kurt. **Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I**. Monatshefte für mathematik und physik, v. 38, n. 1, p. 173-198, 1931.

HEGEL, Georg Wilhelm Friedrich. **Introdução à história da filosofia**. In: Os Pensadores: Hegel. São Paulo. Nova Cultura, 1988.

HUME, David. **Tratado da natureza humana**. 2a Edição. Unesp, 2009.

HRBACEK, Karel. **Introduction to Set Theory**. New York: Marcel Dekker, 3. Ed, 1999.

KANT, Immanuel. **Prolegômenos a toda a metafísica futura**. Lisboa: Edições 70, 1988.

KRIPKE, Saul Aaron. **O Nomear e a Necessidade**. Lisboa: Gradiva, 2012.

LUKASIEWICZ, Jan; WEDIN, Vernon. **On the principle of contradiction in Aristotle**. The Review of Metaphysics, p. 485-509, 1971.

MILL, John Stuart. **Sistema de Lógica Dedutiva e Indutiva**. Col. Os Pensadores. São Paulo: Abril Cultural, 1974.

PLATÃO, **Mênon**. Tradução de Maura Iglésias. Ed. PUC Rio e Edições Loyola. S. Paulo, 2001.

PLATÃO, **A república**. Tradução de Maria Helena da Rocha Pereira. v. 9, 1987.

PRIEST, Graham. **In Contradiction**. Oxford University Press, 2. Ed, 2006.

RAMOS, Luiza. **A demanda por demonstrações de consistência nos fundamentos da matemática**. 2019.

RUSSELL, Bertrand. **On Denoting**. Mind, JSTOR, v, 14, n 56, p. 479-493, 1905.

RUSSELL, Bertrand. **Principles of Mathematics**. London: Routledge, 2009.

SASSI, Maria Michela. **Os inícios da filosofia: Grécia**. 2015.

SHAPIRO, Stewart. **Filosofia da Matemática**. Leya, 2018.

SHAPIRO, Stewart et al. (Ed.). **The Oxford handbook of philosophy of mathematics and logic**. OUP USA, 2005.

SHOENFIELD, Joseph R. **Mathematical logic**. AK Peters/CRC Press, 2018.

VAN HEIJENOORT, Jean. **From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic**, 1879-1931. Harvard University Press, 2002.

VIERO, Arno. **Sistemas Axiomáticos Formalizados: A Questão da Desinterpretação e da Formalização da Axiomática**. 2011.