



**Universidade de Brasília**

# **Equações semilineares envolvendo medidas**

**Marcio Henrique Ferreira de Oliveira**

Orientador: Prof. Dr. Luís Henrique de Miranda

Departamento de Matemática  
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de  
*Mestre em Matemática*

Brasília, 09 de fevereiro de 2024



Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Equações semilineares envolvendo medidas

por

Marcio Henrique Ferreira de Oliveira\*

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade  
de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 09 de fevereiro de 2024.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Luís Henrique de Miranda – MAT/UnB

---

Prof. Dr. Willian Cintra da Silva – MAT/UnB

---

Prof. Dr. Adilson Eduardo Presoto – DM/UFSCAr

\* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.



Ficha catalográfica elaborada automaticamente,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

HO48e HENRIQUE FERREIRA DE OLIVEIRA, MARCIO  
EQUAÇÕES SEMILINEARES ENVOLVENDO MEDIDAS / MARCIO  
HENRIQUE FERREIRA DE OLIVEIRA; orientador Luís Henrique de  
Miranda. -- Brasília, 2024.  
116 p.

Dissertação(Mestrado em Matemática) -- Universidade de  
Brasília, 2024.

1. Problema de Dirichlet . 2. Equação diferencial  
elíptica. 3. Equação diferencial semilinear. 4. Medida de  
Radon. I. de Miranda, Luís Henrique , orient. II. Título.



Dedico este trabalho à minha mãe, minha maior incentivadora.





## Agradecimentos

Primeiramente, expresso minha profunda gratidão à minha mãe, Gercina Leão: Seu amor incondicional, apoio constante e incentivo foram pilares essenciais ao longo de toda a minha jornada acadêmica.

Durante os anos dedicados ao mestrado, tanto nas aulas presenciais quanto nas virtuais, tive o privilégio de compartilhar momentos enriquecedores com pessoas incríveis que tornaram esta jornada mais leve e significativa.

Agradeço às minhas queridas amigas de Montes Claros: Silvana Leal, Mariana Andrade e Maiara Santos. Eu amo vocês!

Agradeço de coração aos meus amigos, amigas e professores da Unimontes, que proporcionaram experiências incríveis durante a graduação. Em especial, destaco Igor Medeiros, Mateus Ângelo, Deivson Ferreira, Patrícia Almeida, professor Daniel Oliveira e professora Dayane Andrade. A Genilson Soares, meu sincero agradecimento por tudo e pelo que representa em minha vida.

Sou grato pela companhia e alegria compartilhada com meus amigos *gamers*, Mayara Araújo, Raíssa Queiroz, Samuel Monção e os irmãos Léo e Ciara.

Às amigadas do mestrado, Henrylla Vitória, Daniel Abreu, Talita Matias, Millena Andrade, Marina Merch e, de forma especial, Jadde Thaine e Saulo Henrique, agradeço pela presença marcante em minha jornada, especialmente durante nossa estadia em Brasília.

Aos amigos de Brasília, Ewerton Duarte, João Miguel, Lucas Neves, José Bete, Cássio Sousa e Virgílio Luiz, meu sincero reconhecimento pela amizade e apoio.

Não poderia deixar de mencionar a importância do meu orientador de mestrado, professor Luís Henrique de Miranda, pela sua paciência, orientação e crença no sucesso deste trabalho. Agradeço também aos professores Willian Cintra e Adilson Presoto, cujas contribuições foram significativas para esta pesquisa.

Agradeço de todo coração a Marcio José de Oliveira, meu companheiro que amo tanto, pelo amor e suporte incondicionais.

Por fim, expresso minha gratidão à FAPDF e ao CNPq pelo apoio financeiro que tornou possível a realização deste trabalho.



## Resumo

O objetivo central deste trabalho, baseado nas pesquisas desenvolvidas por Haïm Brezis, Moshe Marcus, Augusto Ponce e Adilson Presoto, é investigar as propriedades das soluções para o problema de Dirichlet semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

para a densidade  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ , medida de Radon finita, onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , um domínio com fronteira suave, e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua satisfazendo certas hipóteses.

Faremos também um estudo comparativo entre as densidade  $\mu \in L^1(\Omega)$  e  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ . Neste último cenário, veremos que o problema pode nem sempre admitir solução.



## Abstract

The main purpose of the present work is to investigate properties for solutions to a class of nonlinear Dirichlet problems

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = \mu & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where the density  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  is a finite Radon measure,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  is a bounded smooth domain and  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is a continuous function satisfying certain properties.

Our approach is based on contributions due to Haïm Brezis, Moshe Marcus, Augusto Ponce and Adilson Presoto, We will also carry out a comparative study between the densities  $\mu \in L^1(\Omega)$  and  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ . In this last scenario, we will see that the problem may not always admit a solution.



# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Medidas: definição e propriedades . . . . .	5
1.1.1 Espaços $L^p(\Omega)$ . . . . .	11
1.1.2 Espaço das medidas de Radon . . . . .	14
1.1.3 Decomposição de medidas . . . . .	21
1.2 Espaços de Sobolev . . . . .	24
1.2.1 Definições e propriedades fundamentais . . . . .	24
1.2.2 Propriedades dos Espaços de Sobolev e do Problema de Dirichlet . . . . .	29
<b>2 Problema de Dirichlet linear</b>	<b>37</b>
2.1 $\mu \in L^1(\Omega)$ e $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ . . . . .	37
2.2 Propriedades com $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ . . . . .	44
<b>3 Problema de Dirichlet não linear</b>	<b>55</b>
3.1 $\mu \in W^{-1,2}(\Omega)$ . . . . .	55
3.2 $\mu \in L^1(\Omega)$ . . . . .	74
3.3 $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ . . . . .	77
3.4 caso especial $g(u) = e^u - 1$ e $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ . . . . .	105
<b>Bibliografia</b>	<b>115</b>





# Introdução

Neste estudo, nosso principal objetivo é determinar condições para existência de soluções para várias classes associadas de problemas de Dirichlet semilineares. A fundamentação teórica desta análise é baseada, principalmente, nas pesquisas pioneiras de Haïm Brezis, Moshe Marcus, Augusto Ponce e Adilson Presoto, consulte [7], [19] e [21].

Ao longo de todo o trabalho consideraremos  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um subconjunto aberto, limitado e com fronteira suave do espaço  $\mathbb{R}^N$ , isto é, um domínio suave. Além disso, denotaremos por  $\mathcal{M}(\Omega)$  o espaço das medidas de Radon finita.

Nossa investigação inicial é centrada no problema de Dirichlet linear com densidade  $\mu$

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

De acordo com a teoria clássica de Equações Diferenciais Parciais elípticas, sabemos que o problema de Dirichlet linear apresentado admite solução quando  $\mu \in C^\infty(\overline{\Omega})$  ou  $\mu \in L^p(\Omega)$ ,  $2 \leq p \leq +\infty$ , consulte o Capítulo 6 em [10] para mais detalhes.

Nesta discussão, demonstraremos a existência e unicidade de solução, no sentido das distribuições, para o problema de Dirichlet linear quando  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ . Em particular, a existência e unicidade de solução distribucional para o caso  $\mu \in L^1(\Omega)$  decorre do fato de as funções integráveis definirem medidas de Radon finita com sinal, tais medidas são absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue.

O próximo passo, é o estudo do problema de Dirichlet com não linearidade  $g(u)$  e densidade  $\mu$ , dado por

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, não decrescente e satisfaz a condição do sinal, isto é,  $g(t)t \geq 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Em particular,  $g(0) = 0$ . Vamos analisar a existência e unicidade para as densidades  $\mu \in W^{-1,2}(\Omega)$ ,  $\mu \in L^1(\Omega)$  e  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ . É importante destacar

que neste último cenário o problema pode nem sempre admitir solução distribucional. Por exemplo, considerando a medida de Dirac  $\mu = \delta_{x_0}$  e a semilinearidade  $g(u) = |u|^{p-1}u$ , com  $p$  suficientemente grande, mostraremos que o Problema de Dirichlet não admite solução distribucional.

A organização deste trabalho será da seguinte maneira.

No Capítulo 1, apresentaremos conceitos e resultados preliminares acerca da Teoria da Medida, Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais Elípticas. Na Seção 1.1, definiremos  $\sigma$ -álgebra de Borel, a função medida e o espaço munido de uma medida, denominado espaço com medida. Além disso, apresentaremos algumas propriedades e exemplos úteis para o desenvolvimento deste trabalho. Na Seção 1.1.1, definiremos os espaços  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$  e veremos propriedades relevantes deste espaço, como a norma e a convergência. Na Seção 1.1.2, será apresentada o espaço das medidas de Radon finitas que equivale ao espaço da medidas de Borel com sinal finitas. Um resultado interessante desta subseção é que toda função integrável define uma medida de Radon finita com sinal. Para finalizar, definiremos a convergência na topologia forte e na topologia fraca para medidas, denominaremos convergência fraca também por convergência vaga. Na Seção 1.1.3, estamos interessados em decompor uma medida de Radon finita no sentido do Teorema de Decomposição de Jordan, veja [11, Theorem 3.4].

Ainda sobre o Capítulo 1, na Seção 1.2 apresentamos algumas definições, propriedades e existências de soluções para Equações Diferenciais Parciais Elípticas que serão fundamentais nos argumentos utilizados neste trabalho. Na Seção 1.2.1, encontram-se definições, propriedades e imersões acerca dos Espaços de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  e  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Na Seção 1.2.2 constam alguns resultados sobre convergência, existência de soluções e regularidade para Equações Diferenciais Elípticas. Além disso, apresentaremos nesta subseção uma versão adaptada para o clássico Princípio do Máximo Fraco no sentido das distribuições.

No Capítulo 2, estudaremos o problema Dirichlet linear com dado  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ . Na Seção 3.3, definiremos o espaço das funções teste e a solução distribucional para o problema, baseado em [16]. Veremos uma estimativa a priori para a função  $u \in L^1(\Omega)$  que será útil ao longo de toda a dissertação. Mais ainda, munido das ferramentas de Análise Funcional, mostraremos a existência e unicidade para o problema. Por fim, apresentaremos uma caracterização que fornece uma alternativa para a definição de solução distribucional e para o espaço das funções testes. A Seção 2.2 é composta de uma série de propriedades envolvendo o problema linear com fonte integrável ou em medida. Por exemplo, uma versão alternativa para a desigualdade de Kato e uma consequência do Princípio do Máximo Fraco adaptado para solução distribucional. Para finalizar a seção, serão apresentadas propriedades envolvendo o caso em que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

No Capítulo 3, abarcaremos o problema de Dirichlet semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde na Seção 3.1, utilizando o processo de minimização, veremos a existência de solução no sentido distribucional para  $\mu \in W^{-1,2}(\Omega) = \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)'$ . Na Seção 3.2, para obter a existência de solução para o problema não linear com dado  $\mu \in L^1(\Omega)$  utilizaremos a técnica de aproximação. Nesta seção, considerando  $g$  uma função Lipschitz, também mostraremos, via Teorema de Stampacchia, a existência de solução neste caso particular.

A essência desta dissertação encontra-se na Seção 3.3, na qual veremos que nem todo problema semilinear com densidade  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  admite solução no sentido das distribuições. Iniciaremos com um exemplo clássico de não existência envolvendo a medida de Dirac. Em seguida, definiremos as boas medidas para o problema com não linearidade  $g(u)$ , que são medidas de Radon para os quais o problema admite solução distribucional. Algumas propriedades acerca das boas medidas serão apresentadas neste trabalho, destacando-se entre elas: dado uma medida  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  qualquer, mostraremos que o problema com não linearidade  $g(u)$ , satisfazendo as hipóteses apresentadas, sempre admite solução para alguma medida  $\mu^* \in \mathcal{M}(\Omega)$ , denominada medida reduzida. Para finalizar a seção, enunciaremos o Teorema de Vázquez que caracteriza as boas medidas para o problema de Dirichlet semilinear com domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e indicaremos ao leitor sugestão de bibliografia para o estudo do problema com  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , com  $N \geq 3$ .

Por fim, na Seção 3.4 demonstraremos a versão do Teorema de Vázquez adaptado para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde caracterizaremos as boas medidas para este problema. A demonstração utiliza-se de resultados importantes, como o Teorema de Brezis e Merle.



# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo apresentaremos os resultados essenciais acerca da Teoria da Medida, Equações Diferenciais Parciais Elípticas e Espaços de Sobolev para o desenvolvimento deste trabalho.

### 1.1 Medidas: definição e propriedades

Considere  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um conjunto aberto, limitado e suave. É sabido que  $\Omega$  munido com a norma euclidiana é um espaço topológico localmente compacto, isto é, dado  $x \in \Omega$  existe um conjunto aberto  $U$  e um compacto  $K$  satisfazendo

$$x \in U \subseteq K \subset \Omega.$$

Denotaremos por  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  a coleção formada de todos os subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , também conhecida por conjuntos das partes de  $\mathbb{R}^n$ . Iniciaremos com algumas definições e resultados importantes para o desenvolvimento do trabalho.

**Definição 1.1.** Diremos  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  é uma  $\sigma$ -álgebra sobre  $\mathbb{R}^n$  se satisfaz

- i.  $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$ ;
- ii. Se  $A \in \mathcal{A}$ , então  $\mathbb{R}^n/A \in \mathcal{A}$ ;
- iii. Dado uma sequência  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ , temos  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$ .

Os exemplos a seguir de  $\sigma$ -álgebra são clássicos.

**Exemplo 1.2.** As coleções  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$  e  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  são exemplos de  $\sigma$ -álgebras sobre  $\mathbb{R}^n$ .

A  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}^N$  é a menor  $\sigma$ -álgebra sobre  $\mathbb{R}^N$  que contém os conjuntos abertos de  $\mathbb{R}^N$ . Tais conjuntos são ditos *borealianos* e a coleção destes denota-se por  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ . Para

mais informações sobre  $\sigma$ -álgebra, recomendamos o estudo do Capítulo 2 de [11].

Note que  $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$  e considere a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\Omega$ , dada por

$$\mathcal{B}(\Omega) = \{\Omega \cap A \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\}.$$

Como consequência de um exercício clássico de Teoria da Medida, esta é a menor  $\sigma$ -álgebra de Borel que contém os abertos de  $\Omega$ .

A  $\sigma$ -álgebra de Borel servirá como domínio para a classe funções definidas a seguir.

**Definição 1.3.** Uma **medida** sobre  $\mathcal{B}(\Omega)$  é uma função  $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$  que satisfaz

**M1.**  $\mu(\emptyset) = 0$

**M2.** se  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\Omega)$  é uma sequência de subconjuntos disjuntos de  $\mathbb{R}^N$ , então

$$\mu \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(U_k)$$

Também conhecida por **aditividade enumerável**, a propriedade (M2) implica na propriedade **aditividade finita**:

**M2'.** se  $U_1, \dots, U_k$  são subconjuntos disjuntos de  $\Omega$ , então

$$\mu \left( \bigcup_{j=1}^k U_j \right) = \sum_{j=1}^k \mu(U_j)$$

A dupla  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$  é dita **espaço mensurável**, se  $\mu$  é uma medida sobre  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$  diremos que  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$  é um **espaço com medida de Borel**.

**Definição 1.4.** Considere  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$  um espaço com medida.

- i. Se  $\mu(\Omega) < +\infty$ , diremos que  $\mu$  é finita.
- ii. A medida  $\mu$  é dita  $\sigma$ -finita se  $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$ , com  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$  uma sequência de borelianos, e  $\mu(U_k) < +\infty$  para todo  $k$ .
- iii. Se para cada  $U \in \mathcal{B}(\Omega)$  com  $\mu(U) = +\infty$ , existir  $F \in \mathcal{B}(\Omega)$  com  $F \subset U$  e  $0 < \mu(F) < +\infty$ , então  $\mu$  é dita semifinita.

Considere  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$  um espaço com medida. Dado  $U \in \mathcal{B}(\Omega)$ , se  $\mu(U) = 0$  diremos que  $U$  é  $\mu$ -nulo ou que possui medida nula (com respeito a medida  $\mu$ ).

As medidas satisfazem as seguintes propriedades.

**Teorema 1.5.** Considere  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$  um espaço com medida.

i. (*monotonicidade*) Se  $E, F \in \mathcal{B}(\Omega)$  e  $E \subset F$ , então

$$\mu(E) \leq \mu(F);$$

ii. (*subaditividade*) Se  $(E_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\Omega)$ , então

$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(E_k);$$

iii. (*continuidade inferior*) Se  $(E_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\Omega)$  de modo que  $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset \dots$ , então

$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(E_k);$$

iv. (*continuidade superior*) Se  $(E_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\Omega)$  e  $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset \dots$  com  $\mu(E_1) < +\infty$ , então

$$\mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(E_k).$$

*Demonstração.* Veja [11, Theorem 1.8]. □

Generalizando a ideia de medida, podemos definir medidas que atingem valores negativos, denominadas medidas com sinal.

**Definição 1.6.** Seja  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$  um espaço mensurável, a função  $\nu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [-\infty, +\infty]$  é dita **medida com sinal** sobre  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$  se satisfaz as propriedades

**M1.**  $\nu(\emptyset) = 0$ ;

**M2.** se  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de subconjuntos disjuntos de  $\Omega$ , então

$$\nu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu(U_k),$$

onde a convergência é absoluta, desde que seja convergente.

**S1.**  $\nu$  pode assumir no máximo um dos valores  $\pm\infty$ .

**Definição 1.7.** Uma função  $\nu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow (-\infty, +\infty)$  é dita **medida com sinal finita** quando as propriedades (M1) e (M2) se verificam, isto é,  $\nu$  atinge valores reais finitos.

Ao longo do trabalho utilizaremos a medida de Lebesgue em diversos contextos.

**Exemplo 1.8** (Medida de Lebesgue). Um exemplo clássico de medida positiva é a medida de Lebesgue que está associada a duas  $\sigma$ -álgebras importantes:  $\sigma$ -álgebra de Borel gerada por abertos de  $\mathbb{R}^N$  e a  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue gerada pela identidade de Caratheodóry, denotadas, respectivamente, por  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$  e  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ .

Ao longo do texto, denotaremos a medida de Lebesgue por

$$|E| \quad \text{ou} \quad \int_E 1 \, dx,$$

para todo  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ . Denotaremos  $\int f$  invés de  $\int f(x) \, dx$  para indicar que estamos integrando a função  $f$  com respeito a medida de Lebesgue.

Os próximos teoremas, que serão referenciados em discussões posteriores, são dispositivos fundamentais para a argumentação das propriedades envolvendo decomposição de medidas.

**Teorema 1.9** (Decomposição de Hahn). Dado  $\mu$  uma medida com sinal sobre  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ , existem conjuntos  $\Omega^+$  e  $\Omega^-$ , ambos subconjuntos de  $\Omega$ , denominados, respectivamente, conjunto positivo e negativo, tais que

- i.  $\mu(E) \geq 0$ , para todo  $E \subset \Omega^+$  mensurável;
- ii.  $\mu(F) \geq 0$ , para todo  $F \subset \Omega^-$  mensurável;
- iii.  $\Omega^+ \cup \Omega^- = \Omega$  e  $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$ .

*Demonstração.* Veja [11, Theorem 3.2]. □

**Definição 1.10.** Diremos que duas medidas  $\mu_1$  e  $\mu_2$  sobre  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$  são mutuamente singulares quando existem  $E, F \in \mathcal{B}(\Omega)$  tais que

- i.  $E \cup F = \Omega$  e  $E \cap F = \emptyset$ ;
- ii.  $E$  é  $\mu_2$ -nulo e  $F$  é  $\mu_1$ -nulo.

**Notação:**  $\mu_1 \perp \mu_2$ .

A Decomposição de Hahn de  $\Omega$  para  $\mu$  não é única, uma vez que existem conjuntos  $\mu$ -nulos que podem ser considerados em  $\Omega^+$  ou em  $\Omega^-$ . No entanto, uma consequência deste resultado é a Decomposição de Jordan para  $\mu$ .

**Teorema 1.11** (Decomposição de Jordan). Se  $\mu$  é uma medida com sinal sobre a  $\sigma$ -álgebra  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ , então existem únicas medidas positivas  $\mu_1$  e  $\mu_2$  tais que  $\mu = \mu_1 - \mu_2$  e  $\mu_1 \perp \mu_2$



*Demonstração.* Veja [11, Theorem 3.4].  $\square$

A partir de agora veremos alguns conceitos e exemplos envolvendo medidas atômicas e não atômicas. As definições são baseadas em [14, Subsection 2.1.6, Definition 1] e são amplamente utilizadas no contexto de Problemas de Dirichlet não lineares com densidade em medida. O principal objetivo desta definição é, futuramente, utilizá-las para decompor medidas de Radon com sinal finita em uma parte atômica e uma não atômica.

**Definição 1.12.** Seja  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$  um espaço com medida. Um conjunto mensurável  $A$  é dito **átomo** da medida  $\mu$  se, e somente se,  $\mu(A) > 0$  e para todo  $B \subset A$ , com  $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ , tem-se  $\mu(B) = \mu(A)$  ou  $\mu(B) = 0$ .

**Definição 1.13.** Dado  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$  um espaço com medida, diremos que  $\mu$  é uma medida **atômica** se admite átomo. Caso contrário, é dita **não atômica**.

**Definição 1.14.** Considere  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$  espaço com medida e  $I$  um conjunto enumerável. Diremos que  $\mu$  é **puramente atômica** se, e somente se, existem átomos  $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{B}(\Omega)$  satisfazendo

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

**Exemplo 1.15.** Considere  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \delta_x)$  um espaço com medida de Dirac e  $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ . Note que

$$\delta_x(A) = \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se  $x \in A$ , temos  $\delta_x(A) = 1$ , caso contrário,  $\delta_x(A) = 0$ .

Logo, conjunto unitário  $A = \{x\}$  é um átomo.

Além disso,

$$\delta_x(\mathbb{R}^N) = \chi_{\mathbb{R}^N}(x) = 1.$$

Dado  $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ , se  $x \in B$ , então  $\delta_x(B) = \delta_x(\mathbb{R}^N) = 1$ . Caso contrário, tem-se  $\delta_x(B) = 0$ . Isso significa que  $\mathbb{R}^N$  é também um átomo, conseqüentemente,  $\delta_x$  é puramente atômica.

**Exemplo 1.16.** Considere espaço com medida de Lebesgue  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), |\cdot|)$ . A medida de Lebesgue não admite átomos.

*Demonstração.* Com efeito, dados  $A \in \mathcal{B}(\Omega)$  tal que  $0 \in A$  e  $r > 0$ . Considere  $B[0, r]$  a bola fechada centrada na origem de  $\mathbb{R}^N$  e raio  $r > 0$ . Defina  $A_r = A \cap B[0, r]$  e a função

$$\begin{aligned} \Phi : [0, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\mapsto \Phi(r) = \begin{cases} |A_r|, & r \neq 0 \\ 0, & r = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Note que para  $s < r$ , temos  $A_s \subset A_r$ .

Agora, fixado  $r > 0$  e dados  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  seqüências de números positivos de modo que

$$r_n \nearrow r \quad \text{e} \quad s_n \searrow r.$$

Temos,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{r_n} = \{0\} \quad \text{e} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{s_n} = A_r.$$

Uma vez que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|A_{r_n}| \leq |\Omega| < +\infty$ , pelas continuidades inferior e superior da medida de Lebesgue, são válidas

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} |A_{r_n}| &= |A_r| \\ \lim_{s \rightarrow +\infty} |A_{s_n}| &= |A_r| \end{aligned}$$

Portanto,  $\Phi$  é contínua em  $(0, +\infty)$ .

Agora mostremos a continuidade na origem. Suponhamos que  $r_n \rightarrow 0^+$ , ainda pelo Teorema 1.5, tem-se

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{r_n} = \{0\} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |A_{r_n}| = |A \cap \{0\}| = 0.$$

Como  $\Omega$  é limitado, temos  $A$  também limitado. Seja agora uma seqüência  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  não decrescente de números positivos tal que  $t_n \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Para algum  $n_0 \in \mathbb{N}$ , vale

$$A_{s_{n_0}} = A \cap B[0, s_{n_0}] = A.$$

Daí,  $\Phi(s_{n_0}) = \Phi(A) = |A|$  e  $\Phi(0) = 0$ . Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $s \in (0, s_{n_0})$  de tal modo que

$$\Phi(0) < \Phi(s) < \Phi(s_{n_0}),$$

ou seja,

$$0 < |A \cap B[0, s]| < |A|.$$

Como  $(A \cap B[0, s]) \subset A$  e  $|A \cap B[0, s]| > 0$ , então  $A$  não é um átomo. Pela arbitrariedade de  $A \subset \mathcal{B}(\Omega)$ , a medida de Lebesgue não admite átomo.  $\square$

### 1.1.1 Espaços $L^p(\Omega)$

Para introduzir os estudos acerca dos espaços  $L^p(\Omega)$  enunciaremos a seguinte definição.

**Definição 1.17** (Função Lebesgue mensurável). Considere  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremos que  $f$  é mensurável (à Lebesgue) se, para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ , o conjunto

$$\{x \in \Omega \mid f(x) > \alpha\} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N).$$

Assumiremos algumas propriedades clássicas dos espaços  $(L^p(\Omega), dx)$ , com  $1 \leq p \leq +\infty$ . Por simplicidade, denotaremos  $L^p(\Omega)$  invés de  $(L^p(\Omega), dx)$ .

**Definição 1.18.** Diremos que uma função mensurável  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  pertence ao espaço  $L^1(\Omega)$  quando

$$\int_{\Omega} |f| \, dx < +\infty.$$

**Definição 1.19.** Dado  $1 < p < +\infty$ , definimos o conjunto

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

**Definição 1.20.** Uma função mensurável  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  pertence ao espaço  $L^\infty(\Omega)$  quando existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|f(x)| \leq C \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Para  $1 \leq p < +\infty$  adotaremos, por simplicidade,  $\int_{\Omega} |f|^p$  para denotar  $\int_{\Omega} |f|^p \, dx$ .

**Observação 1.21.** 1. A função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{L^1(\Omega)} : L^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f| \end{aligned}$$

define uma norma no espaço  $L^1(\Omega)$ .

2. Dado  $1 < p < \infty$ , então

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

define uma norma em  $L^p(\Omega)$ .

3. A função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)} : L^\infty(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C > 0 \mid |f(x)| \leq C \text{ q.t.p em } \Omega\} \end{aligned}$$

define uma norma no espaço  $L^\infty(\Omega)$ .

*Demonstração.* Veja [6, Section 4.2]. □

**Definição 1.22.** Seja  $1 < p < +\infty$ , denota-se por  $q$  o **expoente conjugado** de  $p$  quando

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Quando  $p = 1$ , define-se seu expoente conjugado por  $q = +\infty$ .

Uma propriedade dos espaços  $L^p$  que será utilizada com frequência é

**Teorema 1.23** (Desigualdade de Hölder). Dado  $1 \leq p \leq +\infty$ , considere  $f \in L^p(\Omega)$  e  $g \in L^q(\Omega)$ . Então,  $fg \in L^1(\Omega)$  e

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

*Demonstração.* Veja [6, Theorem 4.6]. □

**Proposição 1.24.** Se  $f \in L^\infty(\Omega)$ , então  $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$  q.t.p em  $\Omega$ .

*Demonstração.* De fato, como  $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = C$ , pela definição de ínfimo, existe uma sequência decrescente de números reais  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $C_n \rightarrow C = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$  e para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se  $|f(x)| \leq C_n$  q.t.p em  $\Omega$ . Portanto, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $E_n \subset \Omega$  com medida nula de modo que  $|f(x)| \leq C_n$  para todo  $x \in \Omega/E_n$ . Considerando  $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ , então  $E$  possui medida de Lebesgue nula, afinal é união enumerável de conjuntos de medida nula. Daí, para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in \Omega/E$  obtemos

$$|f(x)| \leq C_n,$$

fazendo  $n \rightarrow +\infty$  na desigualdade acima o resultado segue.  $\square$

Se  $f$  é um elemento do espaço  $L^p(\Omega)$ ,  $1 < p \leq +\infty$ , e sendo  $\Omega$  um conjunto limitado de  $\mathbb{R}^N$ , então  $f \in L^r(\Omega)$  para todo  $1 \leq r \leq p$ . Mais ainda, a proposição a seguir estima a norma de  $f$  no espaço  $L^r(\Omega)$ .

**Proposição 1.25.** Considere  $1 \leq r \leq p < +\infty$ . Para todo  $u \in L^p(\Omega)$ , tem-se

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Donde  $C = C(|\Omega|, r) > 0$ .

*Demonstração.* De fato, seja  $f \in L^p(\Omega)$ . Aplicando a desigualdade de Hölder para os expoentes  $\frac{p}{r}$  e  $\frac{p}{p-r}$ , temos

$$\int_{\Omega} |f|^r \leq \left( \int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{r}{p}} |\Omega|^{\frac{p-r}{p}},$$

ou seja,

$$\|f\|_{L^r(\Omega)}^r \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^r |\Omega|^{\frac{p-r}{p}}.$$

Portanto,

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} |\Omega|^{\frac{p-r}{pr}}.$$

Basta tomar  $C = |\Omega|^{\frac{p-r}{pr}} > 0$  e o resultado segue.  $\square$

Em termos de convergência, podemos aproximar uma função  $u \in L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , por funções em  $L^\infty(\Omega)$ .

**Proposição 1.26.** Considere  $u \in L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < +\infty$  e  $\varepsilon > 0$ . Existe  $u_m \in L^\infty(\Omega)$  com  $|u_m| \leq m$  e  $\|u - u_m\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$ .

*Demonstração.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , defina a função

$$u_n(x) = \begin{cases} n, & n \leq u(x) \\ u(x), & -n \leq u(x) \leq n \\ -n, & u(x) \leq -n \end{cases}$$

Como  $u \in L^p(\Omega)$ , pela [11, Proposition 2.20], existe  $E \subset \Omega$  Lebesgue mensurável tal que  $|\Omega/E| = |\Omega|$  e  $|u(x)| < +\infty$ , para todo  $x \in \Omega/E$ .

Fixado  $x_0 \in \Omega/E$ , tome  $n_0$  de modo que  $n_0 > |u(x_0)|$ . Para todo  $n \geq n_0$ , temos

$$|u_n(x_0) - u(x_0)| = 0.$$

Logo,  $u_n(x_0) \rightarrow u(x_0)$  para todo  $x_0 \in \Omega/E$ , ou seja,  $u_n \rightarrow u$  q.t.p em  $\Omega$ .

Além disso, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|u_n - u|^p \leq 2^p |u|^p.$$

Além disso,

$$\int_{\Omega} |u|^p < +\infty.$$

Portanto, quando  $n \rightarrow +\infty$ , pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [11, Theorem 2.24], obtemos

$$\|u - u_n\|_{L^p(\Omega)}^p \rightarrow 0.$$

Consequentemente  $\|u - u_n\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ , pela definição de convergência, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq N$ , temos

$$\|u - u_n\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

□

Uma consequência da Proposição 1.26 é que toda função  $u \in L^1(\Omega)$  pode ser aproximada por uma sequência de funções  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^\infty(\Omega)$ , em especial,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ .

**Corolário 1.27.** Seja  $u \in L^1(\Omega)$ , então existe uma sequência  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $L^2(\Omega)$  tal que  $u_n \rightarrow u$  em  $L^1(\Omega)$ .

## 1.1.2 Espaço das medidas de Radon

Adotaremos a definição de Medida de Radon sobre  $\Omega$  conforme [11], ou seja, uma medida de Radon com sinal  $\mu$  é uma medida de Borel com sinal finita sobre todos os compactos de  $\Omega$ . Denotaremos  $\mathcal{M}(\Omega)$  o espaço das Medidas de Radon com sinal munido da norma da variação total definida por

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = \sup \{ \mu(A) - \mu(B) \mid A, B \in \mathcal{B}(\Omega) \}$$

onde  $\mathcal{B}(\Omega)$  é a  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $\Omega$ .

**Proposição 1.28.** A função  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}(\Omega)} : \mathcal{M}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  define uma norma em  $\mathcal{M}(\Omega)$ .

*Demonstração.* De fato, verifiquemos que a função  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$  define uma norma em  $\mathcal{M}(\Omega)$ . Se  $A = B = \emptyset$ , então  $\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \geq 0$ . Suponha agora que  $\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = 0$ , mostremos que  $\mu$  é a

medida nula.

Tomando  $B = \emptyset$ , conseqüentemente  $\mu(A) \leq 0$  para todo  $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ . Agora, se  $A = \emptyset$ , temos  $-\mu(B) \leq 0$  para todo  $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ , daí  $\mu(B) \geq 0$ . Isso significa que  $\mu \equiv 0$ .

Seja  $t \in \mathbb{R}$ , com  $t \geq 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|t\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} &= \sup \{t\mu(A) - t\mu(B) \mid A, B \in \mathcal{B}(\Omega)\} \\ &= t \sup \{\mu(A) - \mu(B) \mid A, B \in \mathcal{B}(\Omega)\} \\ &= t\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}. \end{aligned}$$

O caso contrário pode ser obtido invertendo os papéis entre A e B, desse modo, para  $t < 0$ , temos  $-t > 0$ , daí

$$\begin{aligned} \|t\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} &= \sup \{t\mu(A) - t\mu(B) \mid A, B \in \mathcal{B}(\Omega)\} \\ &= \sup \{-t\mu(B) - t\mu(A) \mid A, B \in \mathcal{B}(\Omega)\} \\ &= |t| \sup \{\mu(B) - \mu(A) \mid A, B \in \mathcal{B}(\Omega)\} \\ &= |t|\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \end{aligned}$$

Logo, para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\|t\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = t\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$ .

Para a Desigualdade Triangular, considere também  $\nu \in \mathcal{M}(\Omega)$  e  $A, B \in \mathcal{B}(\Omega)$  quaisquer, assim

$$\begin{aligned} (\mu + \nu)(A) - (\mu + \nu)(B) &= \mu(A) - \mu(B) + \nu(A) - \nu(B) \\ &\leq \sup \{\mu(A) - \mu(B) \mid A, B \in \mathcal{B}(\Omega)\} + \\ &\quad + \sup \{\nu(A) - \nu(B) \mid A, B \in \mathcal{B}(\Omega)\} \\ &= \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} + \|\nu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Tomando o supremo em  $(\mu + \nu)(A) - (\mu + \nu)(B)$ , segue

$$\sup \{(\mu + \nu)(A) - (\mu + \nu)(B) \mid A, B \in \mathcal{B}(\Omega)\} \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} + \|\nu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.$$

Daí vem a desigualdade desejada

$$\|\mu + \nu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} + \|\nu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.$$

E a afirmação segue. □

Munidos da Decomposição de Hahn e de Jordan, no próximo lema apresentaremos uma norma equivalente para o espaço  $\mathcal{M}(\Omega)$ .

**Lema 1.29.** Seja  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ , então

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = \mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega) = |\mu|(\Omega).$$

*Demonstração.* Considere  $\Omega^+$  e  $\Omega^-$  a Decomposição de Hahn de  $\Omega$ , onde  $\Omega^+ \cup \Omega^- = \Omega$  e  $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$ , veja Teorema 1.9.

Além disso, seja  $\mu^+$  e  $\mu^-$  a Decomposição de Jordan de  $\mu$ , isto é,  $\mu^+ \perp \mu^-$  e  $\mu = \mu^+ - \mu^-$ , confira Teorema 1.11.

Inicialmente, relembramos que  $\mu^+$  e  $\mu^-$  são medidas positivas. Dados  $A, B \in \mathcal{B}(\Omega)$ , temos

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A \cap \Omega^+) + \mu(A \cap \Omega^-) \\ &= \mu^+(A) - \mu^-(A) \\ &\leq \mu^+(A) \leq \mu^+(\Omega). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} -\mu(B) &= \mu^+(B) - \mu^-(B) \\ &\leq \mu^-(B) \leq \mu^-(\Omega). \end{aligned}$$

Daí, para todos  $A, B \in \mathcal{B}(\Omega)$

$$\mu(A) - \mu(B) \leq \mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega),$$

por consequência, obtemos

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \leq \mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega).$$

Observemos

$$\mu^+(\Omega) = \mu(\Omega^+) \quad \text{e} \quad \mu^-(\Omega) = -\mu(\Omega^-).$$

Agora, dados quaisquer  $A, B \in \mathcal{B}(\Omega)$ ,

$$\mu(A) - \mu(B) \leq \mu(\Omega^+) - \mu(\Omega^-) = \mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega).$$



Em particular, já que  $\Omega^+, \Omega^- \in \mathcal{B}(\Omega)$ , temos

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = \mu^+(\Omega) - \mu^-(\Omega) = |\mu|(\Omega). \quad \square$$

Veremos que uma função  $f$  integrável, isto é,  $f \in L^1(\Omega)$ , define uma medida de Radon. Para tanto, trataremos de funções simples definidas em espaços mensuráveis e suas propriedades.

**Definição 1.30** (Função simples em espaços mensuráveis). Uma função  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é dita **função simples** se existem  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  e  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\Omega)$ , dois a dois disjuntos, tais que

$$\Omega = A_1 \cup \dots \cup A_n \quad \text{e} \quad \psi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i},$$

onde  $\chi_{A_i}$  denota a função característica em  $A_i$ .

O Teorema a seguir garante a aproximação de qualquer função integrável por funções simples.

**Teorema 1.31.** Se  $f \in L^1(\Omega)$ , então existe uma sequência de funções mensuráveis  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfazendo

$$0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq \phi_n \leq \dots \leq f$$

de modo que  $\phi_n(x) \rightarrow f(x)$  pontualmente em  $\Omega$  e  $\phi_n \rightarrow f$  uniformemente em compactos.

*Demonstração.* Consulte a demonstração em [11, Theorem 2.1] e [22, Theorem 11.20].  $\square$

Uma propriedade das funções integráveis é que podemos definir uma medida de Radon finita com sinal.

**Proposição 1.32.** Dado  $f \in L^1(\Omega)$ , defina

$$\begin{aligned} \lambda_f : \mathcal{B}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ U &\longmapsto \lambda_f(U) = \int_{\Omega} f \chi_U = \int_U f \end{aligned}$$

define uma medida de Borel finita com sinal, isto é, medida de Radon com sinal. Mais ainda,

$$\|\lambda_f\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

*Demonstração.* Tomando  $U = \emptyset$ , pela definição da função  $\lambda_f$ , temos  $\lambda_f(\emptyset) = 0$ .

Agora, considere uma sequência de conjuntos disjuntos  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\Omega)$ , assim

$$\lambda_f \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k \right) = \int_{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k} f.$$

Além disso,

$$\int_{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k} f = \int_{\Omega} \chi_{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k} f = \int_{\Omega} \sum_{k \in \mathbb{N}} \chi_{U_k} f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} \chi_{U_k} f.$$

Por fim,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} \chi_{U_k} f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{U_k} f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_f(U_k).$$

Logo,  $\lambda_f$  é uma medida com sinal. Tendo em vista que  $f \in L^1(\Omega)$ , temos

$$|\lambda_f(\Omega)| = \left| \int_{\Omega} f \right| \leq \int_{\Omega} |f| < +\infty.$$

Logo  $\lambda_f(\Omega) < +\infty$ , isto é, a medida é finita.

Agora, pela definição

$$\|\lambda_f\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = \sup_{A, B \in \mathcal{B}(\Omega)} \{ \lambda_f(A) - \lambda_f(B) \}.$$

Logo,

$$\|\lambda_f\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = \sup_{A, B \in \mathcal{B}(\Omega)} \left\{ \int_A f - \int_B f \right\}.$$

Agora vamos analisar a igualdade obtida acima. Para tanto, basta notar que

$$\begin{aligned} \lambda_f(A) &= \int_A f^+ - \int_A f^- \\ &= \lambda_f^+(A) - \lambda_f^-(A) \end{aligned}$$

e utilizar o argumento visto no Lema 1.29.

Portanto, tomando  $\Omega^+ = [f \geq 0]$  e  $\Omega^- = [f < 0]$ , temos

$$\|\lambda_f\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = \int_{[f > 0]} f - \int_{[f < 0]} f = \|f\|_{L^1(\Omega)}. \quad \square$$

**Observação 1.33.** Pela definição de integral, a medida  $\lambda_f$  satisfaz

$$\int_{\Omega} \psi \, d\lambda_f = \int_{\Omega} \psi f$$

para toda função simples mensurável  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Em especial, pelo Teorema 1.31, estendemos a igualdade anterior para  $\psi \in L^1(\Omega)$ .

A partir de agora, por abuso de notação, identificaremos a medida  $\lambda_f$  com sua densidade  $f$ , isto é,

$$\lambda_f \equiv f$$

como visto no Lema 1.29.

Baseado no Lema 1.29, podemos também caracterizar a norma da variação total do seguinte modo:

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = \mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega) = |\mu|(\Omega).$$

Para finalizar esta seção, definiremos convergências forte e fraca no espaço das medidas de Radon, apresentaremos certas propriedades sobre o espaço  $\mathcal{M}(\Omega)$  e sua norma. Por fim, enunciaremos uma versão para do Teorema de Representação de Riesz para medidas de Radon.

**Definição 1.34.** Seja  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ , diremos que a sequência  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\Omega)$  converge **fortemente** a  $\mu$  quando

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mu_n - \mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = 0.$$

**Definição 1.35.** Considere  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ , diremos que a sequência  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\Omega)$  converge **fracamente**, ou vagamente, para  $\mu$  no sentido de medidas se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \phi \, d\mu_n = \int_{\Omega} \phi \, d\mu$$

para toda função  $\phi$  contínua com suporte compacto, isto é,  $\phi \in C_c(\Omega)$ .

**Proposição 1.36.** Dado  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ , se  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  uma sequência de funções integráveis que converge fortemente em  $\mathcal{M}(\Omega)$  para  $\mu$ , então  $\mu = f$  para alguma função  $f \in L^1(\Omega)$ .

*Demonstração.* Como  $f_k \rightarrow \mu$  em  $\mathcal{M}(\Omega)$ , dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\|f_m - f_n\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = \|f_m - f_n\|_{L^1(\Omega)}.$$

Por definição, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $K \in \mathbb{N}$  de modo que para  $m, n > K$ , vale  $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{M}(\Omega)} < \varepsilon$ . Pela igualdade obtida anteriormente, vem

$$\|f_m - f_n\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon,$$

isso significa que a sequência  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  é Cauchy em  $L^1(\Omega)$ , sendo  $L^1(\Omega)$  um espaço de Banach, existe  $f \in L^1(\Omega)$  tal que  $f_k \rightarrow f$  em  $L^1(\Omega)$ , isto é,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_A f_k = \int_A f$$

para todo  $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ .

Desse modo, para qualquer boreliano  $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ ,

$$\mu(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_A f_k = \int_A f = \lambda_f(A),$$

e a demonstração segue pela identificação  $\lambda_f \equiv f$ .  $\square$

A norma da variação total é fracamente semicontínua inferiormente com respeito a convergência vaga.

**Proposição 1.37.** Se  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência em  $\mathcal{M}(\Omega)$  convergindo vagamente para  $\mu$  no sentido de medida sobre  $\Omega$ , então

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\mu_n\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.$$

*Demonstração.* Omitiremos a demonstração desse resultado, mas remetemos o leitor à [19, Proposition 2.6] para os detalhes e as ferramentas necessárias para o completo entendimento.  $\square$

Uma vez que  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um espaço localmente compacto Hausdorff, existe um isomorfismo isométrico entre o espaço de Radon  $\mathcal{M}(\Omega)$  e o espaço das distribuições  $(C_0^\infty(\Omega))'$ .

**Teorema 1.38** (Representação de Riesz para medidas de Radon). Dado  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  e  $f \in C_0(\Omega)$ . Defina o funcional

$$\begin{aligned} I_\mu : C_0(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto I_\mu(f) = \int_\Omega f \, d\mu. \end{aligned}$$

Então, a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : \mathcal{M}(\Omega) &\longrightarrow (C_0(\Omega))' \\ \mu &\longmapsto \mathcal{I}(\mu) = I_\mu \end{aligned}$$

é um isomorfismo isométrico.

*Demonstração.* Para mais detalhes, veja [11, Section 7.3], em especial o [11, Theorem 7.17].  $\square$

### 1.1.3 Decomposição de medidas

O intuito dessa seção é apresentar condições necessárias para decompor unicamente uma medida de Radon. Munidos da Decomposição de Jordan, veja Teorema 1.11, a seguir demonstraremos um importante teorema a ser utilizado com o objetivo de decompor uma medida de Radon finita.

**Teorema 1.39.** Sejam  $\mu$  uma medida de Radon finita num espaço mensurável  $X$  e  $\mathcal{Z}$  uma coleção de subconjuntos mensuráveis de  $X$  satisfazendo

- (D1)  $\mathcal{Z}$  é fechado por interseções e uniões enumeráveis;
- (D2) Se  $A' \subset A$  é mensurável e  $A \in \mathcal{Z}$ , então  $A' \in \mathcal{Z}$ .

Então existe uma única decomposição em medida de Radon

$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$

tal que  $\mu_1(A) = 0$  para todo elemento  $A \in \mathcal{Z}$  e existe  $W \in \mathcal{Z}$  tal que  $\mu_2$  se anula fora de  $W$ .

*Demonstração.* A demonstração consistirá em duas partes: inicialmente consideraremos  $\mu$  uma medida de Radon positiva e posteriormente uma medida com sinal.

Seja  $\mu \in \mathcal{M}(X)$  positiva, para todo  $A \in \mathcal{Z}$ , temos  $\mu(A) \leq \mu(X) < +\infty$ . Defina

$$s = \sup\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{Z}\}, \quad (1.1)$$

evidentemente,  $s \leq \mu(X)$ . Pela definição de supremos, tome  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}$  uma sequência satisfazendo

$$\mu(W_n) \longrightarrow s.$$

Denote  $W = \cup_{n \in \mathbb{N}} W_n$ . Observe que  $\mu(W) = s$ , pois para cada  $n \in \mathbb{N}$ , vale

$$s \geq \mu(W) \geq \mu(W_n),$$

fazendo  $n \longrightarrow +\infty$  na equação anterior

$$s \geq \mu(W) \geq \lim_n \mu(W_n) = s. \quad (1.2)$$

Sendo  $\mu$  uma medida de Radon finita, as restrições  $\mu_1$  e  $\mu_2$  definidas a seguir também os são:

$$\mu_1 = \mu|_{X \setminus W} \quad \text{e} \quad \mu_2 = \mu|_W.$$

Logo,  $\mu = \mu_1 + \mu_2$ .

Afirmamos que  $\mu_1(B) = 0$  para todo elemento  $B \in \mathcal{Z}$ . Com efeito, suponha que exista  $B_0 \in \mathcal{Z}$ , satisfazendo  $\mu_1(B_0) > 0$ , ou seja,

$$\mu_1(B_0) = \mu(B_0 \cap (X \setminus W)) > 0, \quad (1.3)$$

como  $W$  e  $X \setminus W$  são conjuntos disjuntos, temos  $B_0 \cup W = (B_0 \cap (X \setminus W)) \cup W$  e utilizando (1.2) e (1.3), obtemos

$$\mu(B_0 \cup W) = \mu((B_0 \cap (X \setminus W)) \cup W) = \mu(B_0 \cap (X \setminus W)) + \mu(W) > \mu(W) = s.$$

Mas por hipótese, item (D1),  $B_0 \cup W \in \mathcal{Z}$  e  $\mu(B_0 \cup W) > s$  o que contradiz a definição de  $s$  (1.1).

Além disso, observe que  $\mu_2$  se anula fora de  $W \in \mathcal{Z}$ , pois  $\mu_2(W^c) = \mu(W^c \cap W) = 0$ . Portanto, fica demonstrado para o caso em que  $\mu$  é uma medida positiva.

Nessa próxima parte, considere  $\mu$  uma medida de Radon finita com sinal sobre  $X$ . Pelo Teorema de Decomposição de Jordan, ver Teorema 1.11, existem únicas medidas positivas  $\nu$  e  $\omega$ , mutualmente singulares, tais que

$$\mu = \nu - \omega.$$

Vamos aplicar a primeira parte desta demonstração para as medidas  $\nu$  e  $\omega$ . Assim, podemos escrever  $\nu = \nu_1 + \nu_2$  e  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ , onde, por construção,  $\nu_1$  e  $\omega_1$  se anulam em conjuntos de  $\mathcal{Z}$  e existem  $W_1, W_2 \in \mathcal{Z}$  de modo que  $\nu_2$  se anula fora  $W_1$  e  $\omega_2$  se anula fora de  $W_2$ . Agora defina

$$\bar{\mu}_1 = \nu_1 - \omega_1 \quad \text{e} \quad \bar{\mu}_2 = \nu_2 - \omega_2.$$

Note que  $\bar{\mu}_1$  e  $\bar{\mu}_2$  são mutualmente singulares e pela construção,  $\bar{\mu}_1$  se anula em elementos de  $\mathcal{Z}$ . Defina  $W_0 = W_1 \cup W_2$ , por hipótese, item (D1),  $W_0 \in \mathcal{Z}$  uma vez que  $W_1, W_2 \in \mathcal{Z}$ , além disso,  $\bar{\mu}_2$  se anula fora de  $W_0$ , de fato

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_2(W_0^c) &= \nu_2(W_0^c) - \omega_2(W_0^c) \\ &= \nu_2((W_1 \cup W_2)^c) - \omega_2((W_1 \cup W_2)^c) \\ &= \nu_2(W_1^c \cap W_2^c) - \omega_2(W_1^c \cap W_2^c) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim  $\mu = \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2$  é uma tal decomposição.

Mostraremos que a decomposição é única. Suponha exista  $\bar{\nu} = \bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2$  medida de Radon

finita, satisfazendo as hipóteses deste teorema, tal que

$$\mu = \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 = \bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2.$$

Considere  $A_0$  o conjunto de  $\mathcal{Z}$  ao qual  $\bar{\nu}_2$  se anula fora dele. É claro que para os elementos de  $\mathcal{Z}$ , vale  $\bar{\mu}_1 = \bar{\nu}_1$ . Vamos mostrar que, em geral,  $\bar{\mu}_1 = \bar{\nu}_1$  e  $\bar{\mu}_2 = \bar{\nu}_2$ . Sejam  $W_0, A_0 \in \mathcal{Z}$  os conjuntos para os quais  $\bar{\mu}_2$  e  $\bar{\nu}_2$  se anulam fora, respectivamente, consideremos também  $E$  um subconjunto mensurável de  $X$ . Temos

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_1(E) &= \bar{\mu}_1(E \cap (X \setminus W_0)) + \bar{\mu}_1(E \cap W_0) \\ &= \bar{\mu}_1(E \cap (X \setminus W_0)) \\ &= \bar{\mu}_1(E \cap (X \setminus W_0) \cap (X \setminus A_0)) + \bar{\mu}_1(E \cap (X \setminus W_0) \cap A_0) \\ &= \bar{\mu}_1(E \cap (X \setminus W_0) \cap (X \setminus A_0)) \\ &= \mu(E \cap (X \setminus W_0) \cap (X \setminus A_0)). \end{aligned}$$

Vale observar que  $E \cap W_0$  e  $E \cap (X \setminus W_0) \cap A_0$  são elementos de  $\mathcal{Z}$  pelo item (D2) e  $\bar{\mu}_1$  se anula nesses conjuntos. De modo análogo, mostra-se que  $\bar{\nu}_1(E) = \mu(E \cap (X \setminus W_0) \cap (X \setminus A_0))$ , logo,  $\bar{\mu}_1 = \bar{\nu}_1$ , conseqüentemente,  $\bar{\mu}_2 = \bar{\nu}_2$ .  $\square$

**Observação 1.40.** À luz do teorema anterior, faremos uma observação muito importante e não tanto trivial. Considere  $X = \Omega$  e  $\mathcal{Z}$  a coleção de todas as uniões enumeráveis de subconjuntos unitários de  $\Omega$ . Evidentemente a família  $\mathcal{Z}$  satisfaz as hipóteses ((D1)) e ((D2)). Então, dado qualquer medida de Radon finita  $\mu$ , podemos decompor  $\mu$  unicamente do seguinte modo:

$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$

Considere a sequência  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}$  e  $W = \cup_{n \in \mathbb{N}} W_n$ . Para todo conjunto mensurável  $A \in \mathcal{Z}$ , a interseção  $A \cap W$  consiste em união enumerável de conjuntos unitários disjuntos. Daí, para  $i \in \mathbb{N}$ , pelo Teorema anterior, temos

$$\begin{aligned} \mu_2(A \cap W) &= \mu_2 \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\} \right) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_2(\{x_i\}) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{x_i} \alpha_i \end{aligned}$$

onde  $x_i \in \Omega$  e  $\alpha_i = \mu(\{x_i\}) = \mu_2(\{x_i\})$ .

Sendo  $\mu$  uma medida finita, é importante ressaltar que existe uma quantidade enumerável de  $x \in \Omega$  tal que  $\mu(\{x\}) \neq 0$ .

Portanto,

$$\mu = \mu_1 + \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i \delta_{x_i}$$

Note que a medida  $\mu_2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i \delta_{x_i}$  é **puramente atômica**, mais ainda, se anula fora do conjunto

$$W = \{x \in \Omega \mid \mu(\{x\}) > 0\} \in \mathcal{Z}.$$

Já a medida  $\mu_1$  é **não atômica** com  $\mu(A) = 0$ , para todo  $A \in \mathcal{Z}$ .

## 1.2 Espaços de Sobolev

Nesta seção, revisaremos alguns resultados clássicos sobre espaços de Sobolev e existência de solução para certas classes de Equações Diferenciais Parciais, por exemplo, o problema de Neumann. Além disso, vamos apresentar uma estimativa que será útil para o desenvolvimento dos capítulos seguintes.

### 1.2.1 Definições e propriedades fundamentais

Nesta seção, nos dedicamos ao estudo do espaço de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$ , com  $1 \leq p < \infty$ . Para isso, considere  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um conjunto aberto, limitado e com fronteira suave.

**Definição 1.41.** Dado  $u \in C^1(\Omega)$ , seu **gradiente** é definido por

$$\nabla u(x) = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Apresentaremos o conceito de derivada fraca de uma função localmente integrável, que é uma função localmente integrável que permite realizar a integração por partes. Posteriormente, introduziremos a definição de espaços de Sobolev.

**Definição 1.42.** Seja  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ . Uma função  $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  é dita **derivada fraca** de  $u$  se, e somente se, para cada  $i = 1, \dots, N$ , tem-se

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x) \, dx = - \int_{\Omega} v(x) \phi(x) \, dx$$



para toda função teste  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ .

Denotaremos por  $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

**Definição 1.43.** Dado  $1 \leq p \leq \infty$ . Definimos o **espaço de Sobolev**  $W^{1,p}(\Omega)$  por

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \text{ para todo } i = 1, \dots, N \right\}.$$

Para todo  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , considere o espaço  $W^{1,p}(\Omega)$  equipado com a norma induzida

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \begin{cases} \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}, & \text{se } 1 \leq p < +\infty, \\ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{se } p = +\infty. \end{cases}$$

**Proposição 1.44.** O espaço  $W^{1,p}(\Omega)$  munido com a norma  $\| \cdot \|_{W^{1,p}(\Omega)}$  é um espaço de Banach.

*Demonstração.* Confira a demonstração em [10, Chapter 5, Section 2, Theorem 2].  $\square$

**Definição 1.45.** Dado  $1 \leq p < +\infty$ , denotamos por  $W_0^{1,p}(\Omega)$  o fecho de  $C_c^\infty(\Omega)$  com a norma de  $W^{1,p}(\Omega)$ .

Desse modo, diremos que uma função  $u$  pertence ao espaço  $W_0^{1,p}(\Omega)$  se, e somente se, existe uma sequência  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0$$

Em termos simples, podemos interpretar o espaço  $W_0^{1,p}(\Omega)$  como sendo o conjunto das funções  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  que se anulam em  $\partial\Omega$ , ver [13, Theorem 4.5].

**Definição 1.46.** Considere  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $1 \leq p \leq +\infty$ . Dado  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , diremos que  $u_n$  converge a  $u$  no espaço  $W^{1,p}(\Omega)$  quando

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0$$

e denotaremos por  $u_n \rightarrow u$  em  $W^{1,p}(\Omega)$ .

**Observação 1.47** (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg). Uma vez que  $\Omega$  é um subconjunto limitado de  $\mathbb{R}^N$ . Dados  $1 \leq p < N$  e  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , tem-se

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = C \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

para cada  $q \in [1, p^*]$ , donde  $C = C(N, p, q, \Omega) > 0$ . Confira, [10, Chapter 5, Section 6, Theorem 3].

Por consequência, o Teorema citado apresenta e define uma norma equivalente para o Espaço de Sobolev  $W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p < N$  definida por

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Daqui em diante, quando se tratar do espaço  $W_0^{1,p}(\Omega)$  adotaremos a norma equivalente.

**Observação 1.48.** Uma vez que  $W_0^{1,2}(\Omega)$  é um espaço de Hilbert, logo é um espaço reflexivo. Além disso, para  $2 < p < +\infty$ , o espaço  $W_0^{1,p}(\Omega)$  é subespaço fechado de  $W^{1,p}(\Omega)$  que é Banach reflexivo, logo  $W_0^{1,p}(\Omega)$  é reflexivo, veja [6, Proposition 3.20]

Neste momento, revisaremos as imersões em espaços de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ . Observamos que, embora essas ferramentas sejam frequentemente utilizadas neste trabalho, as suas demonstrações serão omitidas por não serem o foco principal. Entre esses resultados, destacamos o Teorema de compacidade de Rellich-Kondrachov.

**Definição 1.49** (Imersão contínua). Considere  $X$  e  $Y$  espaços vetoriais normados tais que  $X \subset Y$ . Para todo  $x \in X$ , se existe uma constante  $C > 0$  de modo que

$$\|x\|_Y \leq C \|x\|_X$$

dizemos que  $X$  está **imerso continuamente** em  $Y$  e denotamos por  $X \hookrightarrow Y$ .

**Exemplo 1.50.** Um exemplo de imersão contínua é dada na Proposição 1.25: Se  $1 < r \leq p$ , então  $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ .

**Definição 1.51** (Imersão Compacta). Considere  $X$  e  $Y$  espaços vetoriais normados com  $X \hookrightarrow Y$ . Diremos que  $X$  está **imerso compactamente** em  $Y$  quando toda sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  limitada admite subsequência  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  que converge em  $Y$ .

Notação:  $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ .

**Teorema 1.52** (Imersões contínuas para  $W^{1,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ ). Seja  $1 \leq p < +\infty$ .

i) Se  $p < N$ , então

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \text{para todo } q \in [1, p^*],$$

$$\text{onde } p^* = \frac{Np}{N-p}.$$

Em particular, para  $N > 2$ , temos que  $2^* = \frac{2N}{N-2}$  e

$$W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \text{para todo } q \in [1, 2^*].$$

ii. Se  $p = N$ , tem-se

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \text{para todo } q \in [1, +\infty);$$

*Demonstração.* Ver [17, Theorem 4.15] ou [1, Theorem 4.12]. □

**Teorema 1.53** (Compacidade de Rellich-Kondrachov). Se  $q \leq p < N$ . Então,

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$$

para cada  $1 \leq q < p^*$ .

*Demonstração.* Ver [10, Chapter 5, Section 7, Theorem 1]. □

O próximo teorema é uma ferramenta essencial para determinar o gradiente de uma composição  $H(u)$  onde  $H$  é uma função localmente Lipschitz e  $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ .

**Teorema 1.54** (Regra da Cadeia Localmente Lipschitz). Considere  $1 \leq p < +\infty$ . Se  $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  e  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é localmente Lipschitz, então a composição  $H(u) \in W^{1,p}(\Omega)$  e

$$\nabla(H(u)) = H'(u)\nabla u \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Se  $H(0) = 0$  e  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , então a composição  $H(u)$  é um elemento do espaço  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

*Demonstração.* Veja [12, Theorem 7.8] ou [19, Exercise 4.6]. □

A seguir, uma aplicação da regra da Cadeia localmente Lipschitz.

**Exemplo 1.55.** Seja  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Defina  $\phi_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\phi_\varepsilon(s) = \frac{s}{(s^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}}.$$

Então,

$$\nabla(\phi_\varepsilon \circ u) = \phi'_\varepsilon(u) \cdot \nabla u. \quad (1.4)$$

Mais ainda,

$$(\phi_\varepsilon \circ u) \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

*Demonstração.* Inicialmente notemos que  $\phi_\varepsilon(0) = 0$ . Além disso, para todo  $s \in \mathbb{R}$ ,  $h'$  é limitada:

$$\begin{aligned} h'(s) &= \frac{(s^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} - s^2(s^2 + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}}}{((s^2 - \varepsilon)^{\frac{1}{2}})^2} \\ &= \frac{s^2 + \varepsilon - s^2}{s^2 + \varepsilon} \\ &= \frac{\varepsilon}{(s^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Sejam  $s, r \in \mathbb{R}$ , temos

$$\begin{aligned} |h(s) - h(r)| &= \left| \frac{s}{(s^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} - \frac{r}{(r^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \right| \\ &\leq \left| \frac{s}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} - \frac{r}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right| \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} |s - r| \end{aligned}$$

Logo,  $h$  é uma função Lipschitz contínua. Pela Regra da Cadeia Localmente Lipschitz, como  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , então

$$\nabla(\phi_\varepsilon \circ u) = \phi'_\varepsilon(u) \cdot \nabla u \quad \text{e} \quad (\phi_\varepsilon \circ u) \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad \square$$

O Teorema do Traço relaciona a regularidade de  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , com a regularidade da restrição de  $u$  na fronteira  $\partial\Omega$ .

**Teorema 1.56** (Teorema do Traço). Considere  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio suave e  $1 \leq p < +\infty$ . Então, existe um operador contínuo

$$Tr : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega),$$

denominado **operador traço**, tal que

(i)  $Tr(u) = u|_{\partial\Omega}$ , se  $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ;

(ii) Para cada  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , vale a estimativa:

$$\|Tr(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

onde  $C = C(p, \Omega) > 0$ .

*Demonstração.* Veja [10, Chapter 5, Section 5, Theorem 1] ou [19, Proposition 15.1].  $\square$

**Definição 1.57.** Diremos que  $Tr(u)$  é o **traço de  $u$  sobre  $\partial\Omega$** .

## 1.2.2 Propriedades dos Espaços de Sobolev e do Problema de Dirichlet

Nesta seção apresentaremos alguns resultados envolvendo espaços de Sobolev  $W_0^{1,q}(\Omega)$  e regularidade de soluções de equações diferenciais parciais elípticas. Tendo em vista o foco deste trabalho, as demonstrações de alguns resultados serão omitidas, no entanto, apresentaremos referência para que o leitor possa complementar o estudo sobre o assunto.

Iniciaremos apresentando algumas propriedades acerca do espaço  $W_0^{1,q}(\Omega)$ . Provemos, agora, que o limite forte de uma subsequência  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset W_0^{1,q}(\Omega)$ , com  $1 \leq q \leq N$ , dada pelo Teorema de compacidade Rellich-Kondrachov também pertence ao espaço  $W_0^{1,q}(\Omega)$ :

**Proposição 1.58.** Suponha  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W_0^{1,q}(\Omega)$ ,  $1 < q < +\infty$ , uma sequência limitada que converge fracamente para  $u \in L^q(\Omega)$ . Então,  $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$  e vale

$$\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\nabla u_n\|_{L^q(\Omega)}.$$

*Demonstração.* Sendo  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  limitada em  $W_0^{1,q}(\Omega)$ , a menos de subsequência,  $u_n \rightharpoonup \tilde{u}$  em  $W_0^{1,q}(\Omega)$  [6, Theorem 3.18]. Particularmente,  $u_n \rightharpoonup \tilde{u}$  fracamente em  $L^q(\Omega)$  e pelo Teorema de Representação de Riesz [6, Theorem 4.11] para toda  $\phi \in (L^q(\Omega))'$ :

$$\langle \phi, u_n \rangle \longrightarrow \langle \phi, \tilde{u} \rangle \quad \text{em } \mathbb{R},$$

isto é, para todo elemento  $v \in L^{q'}(\Omega)$ , com  $q'$  expoente conjugado de  $q$ , vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v u_n = \int_{\Omega} v \tilde{u}.$$

Além disso, por hipótese, uma vez que  $u_n \rightharpoonup u$  fracamente em  $L^q(\Omega)$ ,

$$\langle \phi, u_n \rangle \longrightarrow \langle \phi, u \rangle \quad \text{em } \mathbb{R},$$

de modo análogo, para quaisquer  $v \in L^{q'}(\Omega)$  temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v u_n = \int_{\Omega} v u.$$

Combinando os limites encontrados, para  $v \in L^{q'}(\Omega)$  vale:

$$\int_{\Omega} v \tilde{u} - \int_{\Omega} v u = 0,$$

daí

$$\int_{\Omega} v(\tilde{u} - u) = 0,$$

Note que a ultima igualdade verifica-se para toda função  $v \in L^{q'}(\Omega)$ , isto é,  $\tilde{u} = u$  q.t.p em  $\Omega$ . Logo,  $u \in W^{1,q}(\Omega)$  e pela semicontinuidade inferior da norma em  $L^q(\Omega)$ , obtemos

$$\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \|\nabla u_n\|_{L^q(\Omega)}. \quad \square$$

O seguinte lema é uma ferramenta que será importante para mostrarmos o Princípio do Máximo Fraco.

**Lema 1.59.** Dada uma função  $\phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$  não negativa, então existe uma sequência  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$  de funções não negativas tais que

- (I)  $\phi_n \rightarrow \phi$  uniformemente em  $\bar{\Omega}$ .
- (II)  $(\nabla \phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada em  $\bar{\Omega}$  e converge a  $\nabla \phi$  pontualmente em  $\Omega$ .

*Demonstração.* Consideremos  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Classe  $C^2$ , limitada, que se anula numa vizinhança de 0 e satisfaz as seguintes propriedades

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = 1 \quad (1.5)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} H(t) = -1. \quad (1.6)$$

Além disso, a derivada de  $H$  satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t H'(t) = 0. \quad (1.7)$$

Agora, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , defina

$$\phi_n = H(n\phi)\phi,$$

onde  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Mostraremos que  $\phi_n \rightarrow \phi$  uniformemente em  $\Omega$ . Inicialmente, por construção  $\phi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ . Daí, por (1.5) e sabendo que  $H$  se anula numa vizinhança de 0,

quando  $n \rightarrow +\infty$ , obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} H(n\phi)\phi = \phi.$$

Mostremos agora que  $\nabla\phi_n \rightarrow \nabla\phi$  pontualmente em  $\Omega$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , vale

$$\nabla\phi_n = \nabla[H(n\phi)\phi] = H(n\phi)\nabla\phi + [n\phi H'(n\phi)]\nabla\phi. \quad (1.8)$$

Uma vez que  $\phi \geq 0$  em  $\Omega$ , temos  $\phi = \phi^+ - \phi^- = \phi^+$  e uma vez que  $\phi$  satisfaz  $\nabla\phi^+ \equiv 0$  onde  $\phi \equiv 0$ , então

$$\nabla\phi = 0 \text{ em } \Omega \cap \{\phi = 0\}.$$

Tendo em vista (1.8), isso implica em

$$\nabla\phi_n = 0 \text{ em } \Omega \cap \{\phi = 0\}.$$

Pelas propriedades (1.5) e (1.7):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \nabla\phi_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} [H(n\phi)\nabla\phi + (n\phi H'(n\phi))\nabla\phi] \\ &= \nabla\phi. \end{aligned}$$

Mostremos agora a limitação na norma euclidiana.

$$\begin{aligned} \|\nabla\phi_n\| &= \|H(n\phi)\nabla\phi + [n\phi H'(n\phi)]\nabla\phi\| \\ &\leq |H(n\phi)|\|\nabla\phi\| + |n\phi H'(n\phi)|\|\nabla\phi\| \\ &\leq [ |H(n\phi)| + |n\phi H'(n\phi)| ] \|\nabla\phi\|. \end{aligned}$$

Pela definição de  $H$ , existe  $c_1 > 0$  tal que  $|H(t)| \leq c_1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Além disso, por (1.7) e sendo derivada  $H'$  uma função contínua, então satisfaz  $tH'(t) \leq c_2$ , para algum  $c_2 > 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} \|\nabla\phi_n\| &\leq [ |H(n\phi)| + |n\phi H'(n\phi)| ] \|\nabla\phi\| \\ &\leq (c_1 + c_2) \|\nabla\phi\| \end{aligned}$$

Uma vez que  $\nabla\phi$  é contínua em  $(\overline{\Omega})^N$ , então existe  $c_3 > 0$  tal que  $\|\nabla\phi\| \leq c_3$ .

Por fim, para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$\|\nabla\phi_n\| \leq (c_1 + c_2)c_3 = C. \quad \square$$

A seguir, apresentaremos uma versão adaptada do Princípio do Máximo Fraco para solução distribucional.

**Proposição 1.60** (Princípio do Máximo Fraco). Consideremos uma função  $v \in W_0^{1,1}(\Omega)$ . Se para toda função  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$  não negativa em  $\Omega$  vale

$$-\int_{\Omega} v \Delta \phi \leq 0.$$

Então, para toda  $\zeta \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$  com  $\zeta \geq 0$  em  $\Omega$ , tem-se

$$-\int_{\Omega} v \Delta \zeta \leq 0.$$

Além disso,

$$v \leq 0 \quad \text{q.t.p em } \Omega$$

*Demonstração.* Como  $v \in W_0^{1,1}(\Omega)$ , pela definição de derivada fraca:

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \phi = -\int_{\Omega} v \Delta \phi \leq 0,$$

para toda função não negativa  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ .

Agora, dada  $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\zeta \geq 0$  em  $\Omega$ , pelo Lema 1.59, existe  $\phi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ , com  $\phi_n \geq 0$  em  $\Omega$  tal que

$$\begin{aligned} \phi_n &\longrightarrow \phi && \text{uniformemente em } \Omega; \\ \nabla \phi_n &\longrightarrow \nabla \zeta && \text{pontualmente em } \Omega; \\ \|\nabla \phi_n(x)\| &\leq C && \text{para todo } x \in \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema do Traço em  $W_0^{1,1}(\Omega)$ , veja Teorema 1.56, e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$-\int_{\Omega} v \Delta \zeta = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \zeta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \phi_n.$$

Mas,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \phi_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \phi_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \phi_n$$

Logo,

$$-\int_{\Omega} v \Delta \zeta = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \phi_n \leq 0.$$



Consequentemente, obtemos

$$v \leq 0 \quad \text{q.t.p em } \Omega. \quad \square$$

A regularidade da solução dada pelo Problema de Neumann, que será discutida a seguir, será empregada para estabelecer a condição de fronteira para o problema de Dirichlet linear no próximo capítulo.

**Teorema 1.61** (Problema de Neumann). Se  $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$  e  $g \in C^\infty(\partial\overline{\Omega})$ . Então o problema

$$\begin{cases} \Delta\zeta = f & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial\zeta}{\partial\eta} = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

admite solução  $\zeta \in C^\infty(\overline{\Omega})$  se, e somente se

$$\int_{\Omega} f = \int_{\partial\Omega} g \, d\sigma.$$

*Demonstração.* Confira a demonstração em [12, Theorem 3.6]. □

A partir deste ponto, apresentaremos alguns resultados clássicos relacionados à regularidade dos problemas de Dirichlet, tanto linear quanto não linear.

**Teorema 1.62.** Para toda função  $h \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta v = h & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.9)$$

admite uma solução  $v \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ .

*Demonstração.* Veja [10, Chapter 6, Section 3, Theorem 6]. □

A seguir, aduziremos uma série de estimativas a priori sobre a regularidade das soluções para o problema Dirichlet, tanto linear quanto semilinear, com densidade  $r$ -integrável, isto é, um elemento do espaço  $L^r(\Omega)$ . Estes resultados, que são fundamentados nas Regularidades de Stampacchia e de Stampacchia-Calderón-Zygmund, foram adaptadas para o contexto desta dissertação. Para manter a concisão do texto, as demonstrações serão omitidas. No entanto, a bibliografia com demonstrações será indicada para consulta e estudo do(a) leitor(a) interessado(a).

Para o caso linear, temos as seguintes estimativas:

**Teorema 1.63** (Stampacchia-Calderón-Zygmund). Se  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  satisfaz o problema de Dirichlet linear

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

com densidade  $\mu \in L^r(\Omega)$ , com  $r > N$ . Então  $v \in L^\infty(\Omega)$  e vale

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|\mu\|_{L^r(\Omega)},$$

para alguma constante  $C > 0$  dependendo de  $r, N$  e  $\Omega$ .

*Demonstração.* Veja [19, Lemma 5.2], considerando o campo  $\operatorname{div} F = 0$ . □

Para o entendimento do próximo resultado, recomendamos ao leitor que consulte a definição de solução distribucional para o Problema de Dirichlet Linear, veja Definição 2.1.

**Teorema 1.64** (Regularidade de Stampacchia-Sobolev). Suponha  $u$  solução distribucional do problema de Dirichlet linear com densidade  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ . Então, para  $1 \leq q \leq \frac{N}{N-1}$ , tem-se  $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$  e vale

$$\|u\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq C\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)},$$

para uma constante  $C = C(q, N, \Omega) > 0$ .

*Demonstração.* Veja [19, Proposition 5.1]. □

A estimativa para o caso não linear é uma consequência do Teorema 1.63.

**Corolário 1.65** (Regularidade de Stampacchia não linear). Considere  $\mu \in L^r(\Omega)$ ,  $r > \frac{N}{2}$ , e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função

(H1) contínua;

(H2) não decrescente;

(H3) que satisfaz a Condição do Sinal, isto é,  $g(t)t \geq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Então, toda solução  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = \mu, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

é limitada.

*Demonstração.* A demonstração é uma adaptação sugerida em [4, Theorem 6.7].  $\square$

Para finalizar a seção, apresentamos o Teorema de Stampacchia que será utilizado para mostrar a existência e unicidade de solução para o Problema de Dirichlet não linear com densidade  $\mu \in L^2(\Omega)$ .

**Teorema 1.66** (Stampacchia). Sejam  $H$  um espaço de Hilbert,  $\alpha, \beta > 0$  e  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e linear com respeito a segunda entrada tal que

1.  $|a(u_1, v) - a(u_2, v)| \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_H \|v\|_H$ , para todo  $u_1, u_2, v \in H$ ;
2.  $a(u_1, u_1 - u_2) - a(u_2, u_1 - u_2) \geq \beta \|u_1 - u_2\|_H^2$ , para todo  $u_1, u_2 \in H$ .

Então, para toda  $\phi \in H'$  existe um único  $u \in H$  tal que  $a(u, v) = \phi(v)$  para todo  $v \in H$ .

*Demonstração.* Consulte [4, Theorem 4.3].  $\square$



# Capítulo 2

## Problema de Dirichlet linear

Dado  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio aberto, suave e limitado. Neste capítulo introduziremos o **problema de Dirichlet linear** com densidade  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Denominaremos a densidade  $\mu$  também por **fonte** ou **dado**.

Na primeira seção, mostraremos a existência e unicidade de solução, a menos de um conjunto de medida nula, para o problema linear. Particularmente, abarcaremos também o estudo caso  $\mu \in L^1(\Omega)$ . Por fim, na próxima seção, apresentaremos algumas propriedades relevantes para o estudo do problema de Dirichlet não linear com dado em medida.

Enfatizamos que, neste Capítulo, a densidade  $\mu$  é menos regular do que a densidade  $\mu$  apresentada no Teorema 1.63.

### 2.1 $\mu \in L^1(\Omega)$ e $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$

Dado  $\mu$  uma medida de Radon com sinal. Neste trabalho adotaremos a noção de solução fraca, conforme introduzida por Littman, Stampacchia e Weinberger [16, capítulo 5], esta abordagem será utilizada para estudar o problema de Dirichlet linear com dado  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ . Neste contexto, nos referiremos ao conceito mais amplo de solução fraca por solução no **sentido distribucional**, ou das distribuições. Considere a equação abaixo:

$$-\Delta u = \mu \quad \text{em } \Omega. \tag{P_0}$$

Para isso, consideremos inicialmente a seguinte classe de funções testes admissíveis para solução da equação de Poisson:

$$C_0^\infty(\bar{\Omega}) = \{ \zeta \in C^\infty(\bar{\Omega}) \mid \zeta = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \}.$$

**Definição 2.1.** Dado  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ . Uma solução para o **Problema de Dirichlet Linear** (P<sub>0</sub>) com densidade  $\mu$  é uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz

- i)  $u \in L^1(\Omega)$ ;
- ii) para toda função  $\zeta \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ , tem-se

$$-\int_{\Omega} u \Delta \zeta = \int_{\Omega} \zeta d\mu.$$

Descreveremos abaixo, formalmente, como a formulação acima se relaciona com a condição  $u = 0$  em  $\partial\Omega$ . Como  $\Omega$  tem fronteira suave, se  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$  é solução fraca do problema (P<sub>0</sub>) e satisfaz o item (ii), para toda  $\zeta \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ , tem-se

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} u \Delta \zeta &= \int_{\Omega} \zeta d\mu \\ &= \int_{\Omega} \zeta (-\Delta u) \\ &= -\int_{\Omega} \zeta \Delta u, \end{aligned}$$

isto é,  $\int_{\Omega} u \Delta \zeta = \int_{\Omega} \zeta \Delta u$ .

Consequentemente, pelo Teorema da Divergência [12, capítulo 2] e  $\zeta \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ , segue

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (u \Delta \zeta - \zeta \Delta u) \\ &= \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} - \zeta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} d\sigma - \int_{\partial\Omega} \zeta \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} d\sigma. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Novamente, formalmente, para cada  $g \in C^\infty(\partial\bar{\Omega})$  e  $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ , pelo Teorema 1.61, existe  $\zeta \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$  satisfazendo o Problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta\zeta = f & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial\zeta}{\partial\eta} = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

Uma vez que  $g$  não se anula necessariamente sobre  $\partial\Omega$ , afinal, as funções testes podem admitir derivada direcional não trivial sobre a fronteira. Por (2.1) deduzimos que  $u = 0$  sobre  $\partial\Omega$ .

Portanto,  $u = 0$  sobre  $\partial\Omega$  no problema  $(P_0)$ . Daí, obtemos

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (P_1)$$

Agora vamos provar a existência de soluções para o problema  $(P_1)$ , para isso precisaremos do Teorema 1.63 e de ferramentas de Análise Funcional que serão mencionadas ao longo do texto.

**Proposição 2.2.** Para toda  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ , o problema linear de Dirichlet com densidade  $\mu$  admite solução  $u$  que satisfaz

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq C\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \quad (2.3)$$

para alguma constante  $C = C(\Omega) > 0$ .

*Demonstração.* Considere  $N < r < +\infty$  e defina o conjunto

$$V = \{\Delta\zeta \mid \zeta \in C_0^\infty(\bar{\Omega})\}. \quad (2.4)$$

Pela imersão contínua  $C_0^\infty(\bar{\Omega}) \hookrightarrow L^r(\Omega)$  e pela linearidade do Laplaciano, segue que  $V$  é um subespaço vetorial de  $L^r(\Omega)$ . Para todo  $\Delta\zeta \in V$ , defina

$$\begin{aligned} T: V &\rightarrow \mathbb{R} \\ \Delta\zeta &\mapsto T(\Delta\zeta) = \int_{\Omega} \zeta \, d\mu. \end{aligned}$$

Observe que  $T$  é linear. Com efeito, dados  $\zeta, \psi \in V$  e  $a \in \mathbb{R}$ , temos

$$\begin{aligned} T(\Delta\zeta + a\Delta\psi) &= \int_{\Omega} (\zeta + a\psi) \, d\mu \\ &= \int_{\Omega} \zeta \, d\mu + \int_{\Omega} a\psi \, d\mu \\ &= \int_{\Omega} \zeta \, d\mu + a \int_{\Omega} \psi \, d\mu \\ &= T(\Delta\zeta) + aT(\Delta\psi). \end{aligned}$$

Além disso,  $T$  está bem definida. Suponha  $\Delta\zeta = \Delta\psi$ , então

$$0 = \Delta\zeta - \Delta\psi = \Delta(\zeta - \psi).$$

Assim, pela linearidade de  $T$

$$\begin{aligned} 0 &= T(0) \\ &= T(\Delta(\zeta - \psi)) \\ &= \int_{\Omega} (\zeta - \psi) \, d\mu \\ &= \int_{\Omega} \zeta \, d\mu - \int_{\Omega} \psi \, d\mu. \end{aligned}$$

Isto implica em

$$\int_{\Omega} \zeta \, d\mu = \int_{\Omega} \psi \, d\mu,$$

ou seja

$$T(\Delta\zeta) = T(\Delta\psi).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} T(\Delta\zeta) &= \int_{\Omega} \zeta \, d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} |\sup_{x \in \bar{\Omega}} \zeta(x)| \, d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} \|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)} \, d\mu \\ &= \|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$T(\Delta\zeta) \leq \|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}. \quad (2.5)$$



Como  $\Delta\zeta \in L^r(\Omega)$ ,  $\frac{N}{2} < r < +\infty$ , denotemos  $-\Delta\zeta = f$ . Assim,  $\zeta \in W_0^{1,2}(\Omega)$  satisfaz o problema de Dirichlet linear

$$\begin{cases} -\Delta\zeta = f & \text{em } \Omega \\ \zeta = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então,  $\zeta$  satisfaz as hipóteses da Regularidade de Stampacchia, pois  $f \in L^r(\Omega)$ ,  $r > \frac{N}{2}$ . Disso e pela desigualdade obtida em (2.5)

$$|T(\Delta\zeta)| \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \|\Delta\zeta\|_{L^r(\Omega)}, \quad (2.6)$$

onde  $C > 0$ .

Portanto,  $T$  é um funcional linear contínuo.

Aplicando a forma analítica do Teorema de Helly e Hahn–Banach, veja [6, Theorem 1.1], o funcional  $T$  admite uma extensão linear contínua  $\bar{T} : L^r(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ . Mais ainda, pelo Teorema de Representação de Riesz, confira [6, Theorem 4.11], para toda  $f \in L^r(\Omega)$ , existe uma única função  $u \in L^{r'}(\Omega)$ , com  $r'$  expoente conjugado de  $r$ , satisfazendo

$$\bar{T}(f) = \int_{\Omega} u f.$$

Além disso,

$$\|\bar{T}\|_{(L^r(\Omega))'} = \|u\|_{L^{r'}(\Omega)}. \quad (2.7)$$

Assim para todo  $\Delta\zeta \in V$ , temos

$$-\int_{\Omega} \zeta \, d\mu = \bar{T}(\Delta\zeta) = \int_{\Omega} u \Delta\zeta$$

Portanto,  $u$  satisfaz o problema  $(P_1)$  com densidade  $\mu$ . Por (2.6), segue

$$\|u\|_{L^{r'}(\Omega)} \leq C \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$$

Pela Proposição 1.25, temos  $L^{r'}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$  e a estimativa segue

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq C \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$$

com  $C = C(\Omega) > 0$ , □

Agora vamos mostrar a unicidade, a menos de um conjunto de medida nula, para problema de Dirichlet  $(P_1)$ .

**Proposição 2.3.** Se  $u_1$  e  $u_2$  satisfazem o problema de Dirichlet linear com densidade  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ . Então  $u_1 = u_2$  q.t.p em  $\Omega$ .

*Demonstração.* Como  $u_1$  e  $u_2$  satisfazem o problema de Dirichlet linear com densidade  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ , para toda  $\zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ , vale

$$-\int_{\Omega} u_1 \Delta \zeta = \int_{\Omega} \zeta d\mu = -\int_{\Omega} u_2 \Delta \zeta.$$

Assim,

$$-\int_{\Omega} u_1 \Delta \zeta + \int_{\Omega} u_2 \Delta \zeta = -\int_{\Omega} (u_1 - u_2) \Delta \zeta = 0.$$

Além disso, para toda  $h \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta \zeta = h & \text{em } \Omega \\ \zeta = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.8)$$

admite solução  $\zeta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , conforme Teorema 1.62.

Daí, para cada  $h \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , temos

$$\int_{\Omega} (u_1 - u_2) h = 0. \quad (2.9)$$

Tomemos uma sequência  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $h_n(x) \rightarrow \text{sgn}(u_1(x) - u_2(x))$  pontualmente. Observe que  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$  e  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada, pois converge. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [11, Theorem 2.24], temos

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (u_1 - u_2) h_n = \int_{\Omega} |u_1 - u_2|. \quad (2.10)$$

Por propriedades da integral de Lebesgue,  $u_1 = u_2$  q.t.p em  $\Omega$ . □

Por fim, em particular, é válido observar que as proposições apresentadas neste capítulo também se verificam quando  $\mu \in L^1(\Omega)$ . Além disso, um modo alternativo e direto para demonstrar existência e unicidade de solução do problema estudado nessa seção pode ser encontrado em [20, Proposition 3.2] a qual o autor organiza a demonstração de existência e unicidade para este problema em duas etapas, sendo elas:

1. Densidade  $\mu \in L^1(\Omega)$ . Por argumento de aproximação, considera-se uma sequência de funções  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^\infty(\Omega)$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mu_n\|_{L^1(\Omega)} = \|\mu\|_{L^1(\Omega)}.$$

Relembramos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o problema de Dirichlet não linear com densidade  $\mu \in L^\infty(\Omega)$  admite solução no sentido da distribuições.

2. Densidade  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ . Dado uma sequência  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  o problema de Dirichlet semilinear com densidade  $\mu_n \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$  admite solução distribucional. Além disso, a sequência considerada é limitada em  $L^1(\Omega)$  e converge fracamente para  $\mu$  em  $\mathcal{M}(\Omega)$ . Assim, o argumento da demonstração segue também por aproximação.

Para finalizar esta seção, mostremos uma noção de equivalência de solução para  $(P_1)$ .

**Teorema 2.4.** Dado  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ . A função  $u \in L^1(\Omega)$  é solução para  $(P_1)$  no sentido da Definição 2.1 se, e somente se,  $u \in W^{1,1}(\Omega)$  e

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi = \int_{\Omega} \phi \, d\mu,$$

para toda  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ .

*Demonstração.* Suponha que  $u \in L^1(\Omega)$  seja solução para o Problema de Dirichlet linear no sentido da Definição 2.1. Então, pela definição de derivada distribucional, veja Seção 1.3 em [18], tem-se

$$-\int_{\Omega} u \Delta \phi = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi = \int_{\Omega} \phi \, d\mu$$

para toda  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ , afinal,  $C_c^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\overline{\Omega})$ . Além disso, pelo Teorema 1.64, temos  $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ .

Reciprocamente, seja  $u \in W^{1,1}(\Omega)$  e satisfazendo

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi = \int_{\Omega} \phi \, d\mu,$$

para toda  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Pela definição de Derivada Distribucional

$$-\int_{\Omega} u \Delta \phi = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi$$

para toda  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ .

Além disso, pelo Lema 1.59, considere  $\zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$  e a sequência  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$  tal que

$\phi_n \rightarrow \zeta$  uniformemente em  $\overline{\Omega}$  e  $(\nabla\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada em  $\overline{\Omega}$  e converge pontualmente em  $\Omega$ . Assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi_n = \int_{\Omega} \phi_n \, d\mu.$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi_n = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \zeta$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \phi_n \, d\mu = \int_{\Omega} \zeta \, d\mu.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \zeta = \int_{\Omega} \zeta \, d\mu$$

e  $u$  é solução no sentido da Definição 2.1. □

## 2.2 Propriedades com $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$

Nesta seção, vamos explorar alguns resultados que envolvem a solução distribucional do problema de Dirichlet com fonte em medida.

A próxima propriedade fornece uma versão alternativa para a desigualdade de Kato quando  $\Delta u \in \mathcal{M}(\Omega)$ , ou seja, quando  $\Delta u$  é uma medida de Radon com sinal, cf. [9]. Uma consequência deste resultado combinado com o Princípio do Máximo Fraco será apresentada em seguida.

**Proposição 2.5.** Sejam  $u, f \in L^1(\Omega)$  tais que para toda função  $\zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$  com  $\zeta \geq 0$  em  $\Omega$ , tem-se

$$-\int_{\Omega} u \Delta \zeta \leq \int_{\Omega} f \zeta.$$

Definindo

$$[u \geq 0] = \{x \in \Omega \mid u(x) \geq 0\}.$$

Então, dado a decomposição  $u = u^+ - u^-$ , vale

$$-\int_{\Omega} u^+ \Delta \zeta \leq \int_{[u \geq 0]} f \zeta,$$

em outras palavras,  $\Delta u^+ \leq f \chi_{[u \geq 0]}$ .

*Demonstração.* Defina o truncamento

$$S_\varepsilon(s) = \begin{cases} 1, & \text{se } s \geq \varepsilon \\ \frac{s}{\varepsilon}, & \text{se } -\varepsilon \leq s \leq \varepsilon \\ -1, & \text{se } s \leq -\varepsilon. \end{cases}$$

Inicialmente, observemos que  $S_\varepsilon(u^+) \in L^\infty(\Omega)$ , pela Regra da Cadeia Localmente Lipschitz, temos  $S_\varepsilon(u^+) \in W_0^{1,q}(\Omega)$ , com  $1 < q < \frac{N}{N-1}$ . Logo,  $S_\varepsilon(u^+) \in W_0^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , para  $1 < q < \frac{N}{N-1}$ .

Além do mais, tomando uma sequência  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ . Assim q.t.p em  $\mathbb{R}$ , temos

$$\lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} S_{\varepsilon_n}(s) = \begin{cases} 0, & \text{se } s < 0 \\ 1, & \text{se } s \geq 0, \end{cases}$$

ou seja, quando  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , tem-se  $S_{\varepsilon_n}(s) \rightarrow \chi_{\{s \in \mathbb{R} | s \geq 0\}}$  q.t.p em  $\mathbb{R}$ .

Considere a decomposição  $u = u^+ - u^-$  e para cada  $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$  tal que  $\eta \geq 0$  em  $\Omega$ , tome  $\zeta_\varepsilon = S_\varepsilon(u^+)\eta$ . Pelo suporte compacto de  $\eta$ , temos  $\zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ . Portanto, por hipótese, para  $\zeta_\varepsilon$  vale

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \zeta_\varepsilon \leq \int_{\Omega} f \zeta_\varepsilon.$$

Pela Regra da Cadeia Localmente Lipschitz (1.54):

$$\begin{aligned} \nabla \zeta_\varepsilon &= \nabla(S_\varepsilon(u^+)\eta) \\ &= S_\varepsilon(u^+)\nabla\eta + \eta S'_\varepsilon(u^+)\nabla u^+. \end{aligned}$$

Além disso, q.t.p em  $\Omega$  vale

$$\nabla u \cdot \nabla \zeta_\varepsilon = S_\varepsilon(u^+)\nabla u \cdot \nabla \eta + \eta S'_\varepsilon(u^+)\nabla u \cdot \nabla u^+$$

e  $\nabla u \cdot \nabla u^+ = |\nabla u^+|^2$ . Logo,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \zeta_\varepsilon = \int_{\Omega} S_\varepsilon(u^+)\nabla u \cdot \nabla \eta + \int_{\Omega} \eta S'_\varepsilon(u^+)|\nabla u^+|^2.$$

Uma vez que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_\varepsilon(u) = \chi_{[u \geq 0]} \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Então,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\nabla u \cdot \nabla \eta) S_\varepsilon(u^+) = (\nabla u \cdot \nabla \eta) \chi_{[u \geq 0]} \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Por outro lado,

$$|S_\varepsilon(u^+) \nabla u \cdot \nabla \eta| \leq |\nabla u| |\nabla \eta|.$$

Como  $u$  satisfaz  $-\Delta u = v$  no sentido distribucional para alguma medida  $v \in \mathcal{M}(\Omega)$ , temos  $u \in L^1(\Omega)$  e pela Regularidade de Stampacchia linear  $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$  para  $1 < q < \frac{N}{N-1}$ .

Relembre que  $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ , em particular  $\eta \in L^\infty(\Omega)$ , logo  $\nabla \eta \in (C_c^\infty(\Omega))^N$ , isto é,  $|\nabla \eta| \in L^\infty(\Omega)$ .

Combinando as informações anteriores sobre  $u$  e  $\eta$ , obtemos  $|\nabla u| |\nabla \eta| \in L^1(\Omega)$ .

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \eta) S_\varepsilon(u^+) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \eta) \chi_{[u \geq 0]} = \int_{\Omega} \nabla u^+ \cdot \nabla \eta.$$

Novamente pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f \zeta_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f S_\varepsilon(u^+) \eta = \int_{\Omega} f \eta \chi_{[u \geq 0]},$$

Por fim, para toda  $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$  tal que  $\eta \geq 0$  em  $\Omega$ , combinando os resultados obtidos

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \eta \leq \int_{[u \geq 0]} f \eta.$$

Como  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , sabemos que  $u^+ = \max\{0, u\} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , segue

$$-\int_{\Omega} u^+ \Delta \eta = \int_{\Omega} \nabla u^+ \cdot \nabla \eta,$$

isto é,

$$-\int_{\Omega} u^+ \Delta \eta \leq \int_{[u \geq 0]} f \eta.$$

□

No próximo capítulo, além de empregar o corolário a seguir na construção da medida reduzida, também obteremos outros resultados por meio de sua aplicação.

**Corolário 2.6** (Princípio da Comparação). Sejam  $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas e não decrescentes satisfazendo  $g_1 \leq g_2$  q.t.p em  $\mathbb{R}$ . Dados  $u_1, u_2 \in L^1(\Omega)$  tais que  $g_1(u_1), g_2(u_2) \in L^1(\Omega)$ . Suponha

$$-\int_{\Omega} (u_2 - u_1) \Delta \zeta + \int_{\Omega} [g_2(u_2) - g_1(u_1)] \zeta \leq 0$$

para toda função teste  $\zeta \in C_0^2(\overline{\Omega})$  com  $\zeta \geq 0$  em  $\Omega$ . Então, vale

$$u_2 \leq u_1 \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

*Demonstração.* Defina  $u = u_2 - u_1$  e  $f = g_2(u_2) - g_1(u_1)$ . Aplicando a Proposição 2.5 para  $u$  e  $f$  definidos assim, temos:

$$-\int_{\Omega} (u_2 - u_1)^+ \Delta \zeta \leq -\int_{[u_2 - u_1 \geq 0]} (g_2(u_2) - g_1(u_1)) \zeta.$$

Porém, se  $u_2 \geq u_1$ , então  $g_2(u_2) \geq g_2(u_1) \geq g_1(u_1)$ .

Em particular

$$-\int_{[u_2 - u_1 \geq 0]} (g_2(u_2) - g_1(u_1)) \zeta \leq 0.$$

Logo

$$-\int_{\Omega} (u_2 - u_1)^+ \Delta \zeta \leq 0.$$

Pelo Princípio do Máximo Fraco, ver Proposição 1.60, segue:

$$(u_2 - u_1)^+ \leq 0 \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Logo,  $u_2 \leq u_1$  q.t.p em  $\Omega$ . □

Agora vamos explorar propriedades específicas para o caso  $N = 2$ , onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é um domínio suave. Os resultados subsequentes serão aplicados em discussões do Capítulo 3. Introduziremos com uma notação complementar.

**Definição 2.7.** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio suave,  $\rho > 0$  e  $w \in L^1(\Omega)$ . Definimos a função

$$\begin{aligned} \bar{w} : \Omega \times (0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \rho) &\longmapsto \bar{w}(x, \rho) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial B(x, \rho)} w \, d\sigma \end{aligned}$$

A prova do próximo resultado será omitida devido à sua complexidade técnica. Para os leitores interessados, a demonstração pode ser encontrada em [21].

**Proposição 2.8.** Considere  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um aberto, limitado e suave. Sejam  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  e uma função  $w \in L^1(\partial\Omega)$  de modo que  $-\Delta w = \mu$  em  $\Omega$  no sentido distribucional, isto é,

$$-\int_{\Omega} w \Delta \zeta = \int_{\Omega} \zeta \, d\mu$$

para toda  $\zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ . Então, fixado  $x \in \Omega$ , vale:

$$\bar{w}(x, r) - \bar{w}(x, s) = \frac{1}{2\pi} \int_r^s \frac{\mu(B(x, \rho))}{\rho} d\rho.$$

*Demonstração.* Veja [21, Lema 2.47]. □

Munidos da propriedade anterior, vamos mostrar o resultado.

**Proposição 2.9.** Sejam  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  e  $w \in L^1(\Omega)$  tal que

$$-\int_{\Omega} w \Delta \zeta = \int_{\Omega} \zeta d\mu$$

para toda  $\zeta \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$ . Então, para cada  $x \in \Omega$ , vale

$$\frac{1}{2\pi} \liminf_{r \rightarrow 0^+} \mu(B(w, r)) \leq \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\overline{w(x, r)}}{\ln(\frac{1}{r})} \leq \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{w}}{\ln(\frac{1}{r})} \leq \frac{1}{2\pi} \limsup_{r \rightarrow 0^+} \mu(B(x, r)).$$

*Demonstração.* Pelo Proposição 2.8, dado  $x \in \Omega$ , para cada  $0 < s < \rho_0(x)$  fixado, vale

$$\begin{aligned} \bar{w}(x, r) - \bar{w}(x, s) &= \frac{1}{2\pi} \int_r^s \frac{1}{\rho} \mu(B(x, \rho)) d\rho \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_r^s \frac{1}{\rho} \sup_{0 < \rho < s} \mu(B(x, \rho)) d\rho \\ &= \frac{1}{2\pi} \sup_{0 < \rho < s} \mu(B(x, \rho)) \int_r^s \frac{1}{\rho} d\rho \\ &= \frac{1}{2\pi} \sup_{0 < \rho < s} \mu(B(x, \rho)) \ln\left(\frac{s}{r}\right). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \bar{w}(x, r) - \bar{w}(x, s) &= \frac{1}{2\pi} \int_r^s \frac{1}{\rho} \mu(B(x, \rho)) d\rho \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int_r^s \frac{1}{\rho} \inf_{0 < \rho < s} \mu(B(x, \rho)) d\rho \\ &= \frac{1}{2\pi} \inf_{0 < \rho < s} \mu(B(x, \rho)) \int_r^s \frac{1}{\rho} d\rho. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2\pi} \inf_{0 < \rho < s} \mu(B(x, \rho)) \ln\left(\frac{s}{r}\right) \leq \bar{w}(x, r) - \bar{w}(x, s).$$



Combinando as duas últimas desigualdades

$$\frac{1}{2\pi} \inf_{0 < \rho < s} \mu(B(x, \rho)) \ln\left(\frac{s}{r}\right) \leq \bar{w}(x, r) - \bar{w}(x, s) \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{0 < \rho < s} \mu(B(x, \rho)) \ln\left(\frac{s}{r}\right).$$

Dividindo por  $\ln(1/r) = -\ln(r)$ ,  $r < 1$ , temos

$$\frac{1}{2\pi} \inf_{0 < \rho < s} \mu(B(x, \rho)) \frac{\ln(s) - \ln(r)}{\ln(1/r)} \leq \frac{\bar{w}(x, r) - \bar{w}(x, s)}{\ln(1/r)} \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{0 < \rho < s} \mu(B(x, \rho)) \frac{\ln(s) - \ln(r)}{\ln(1/r)}.$$

Agora, tomando o limite quando  $r \rightarrow 0^+$ , vale

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \inf_{0 < \rho < s} \mu(B(x, \rho)) \frac{\ln(r) - \ln(s)}{\ln(r)} &= \frac{1}{2\pi} \inf_{0 < \rho < s} \mu(B(x, \rho)); \\ \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \sup_{0 < \rho < s} \mu(B(x, \rho)) \frac{\ln(r) - \ln(s)}{\ln(r)} &= \frac{1}{2\pi} \sup_{0 < \rho < s} \mu(B(x, \rho)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2\pi} \inf_{0 < \rho < s} \mu(B(x, \rho)) \leq \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{w}(x, s) - \bar{w}(x, r)}{\ln(r)} \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{0 < \rho < s} \mu(B(x, \rho)).$$

isto é,

$$\frac{1}{2\pi} \inf_{0 < \rho < s} \mu(B(x, \rho)) \leq \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{w}(x, r)}{\ln(1/r)} \leq \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{w}(x, r)}{\ln(1/r)} \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{0 < \rho < s} \mu(B(x, \rho)).$$

Por fim, basta tomar  $s \rightarrow 0^+$  e o resultado segue.  $\square$

Sob a hipótese de que  $\Delta w \in L^1(\Omega)$ , isto é,  $\Delta w$  é absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue, obtemos da Proposição 2.9 o seguinte corolário.

**Corolário 2.10.** Dados  $x \in \Omega$  e  $w \in L^1(\Omega)$ . Se  $\Delta w \in L^1(\Omega)$ , então

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{w}(x, r)}{\ln(1/r)} = 0.$$

*Demonstração.* Fixado  $x \in \Omega$ , temos

$$\liminf_{r \rightarrow 0^+} \mu(B(w, r)) = 0$$

e

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \mu(B(x, r)) = 0$$

Por fim, segue do Proposição 2.9

$$\liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{w}(x, r)}{\ln(1/r)} = \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{w}(x, r)}{\ln(1/r)} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{w}(x, r)}{\ln(1/r)} = 0.$$

□

No Capítulo 3, um elemento importante para mostrar existência de solução para o problema de Dirichlet com fonte  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  e semilinearidade exponencial, por exemplo,  $g(u) = e^u - 1$ , é o Teorema de Brezis-Merle e suas implicações. No entanto, tendo em vista o caráter técnico, a prova será omitida.

**Teorema 2.11** (Brezis e Merle). Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e  $u$  solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

com  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ . Dado  $\delta \in (0, 4\pi)$ , vale

$$\int_{\Omega} e^{\frac{4\pi - \delta}{\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}} |u|} \leq \frac{4\pi^2}{\delta} (\text{diam } \Omega)^2.$$

*Demonstração.* Veja [8] e [21, Teorema 2.17].

□

Antes de enunciar uma consequência do Teorema de Brezis e Merle, vamos considerar o lema a seguir.

**Lema 2.12.** Dados  $r > 0$  e  $B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^2$ , seja  $w \in W_0^{1,q}(B(x_0, r))$ ,  $1 \leq q < 2$  tais que

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{em } B(x_0, r) \\ w = g & \text{sobre } \partial B(x_0, r), \end{cases}$$

e  $g \in W^{1-\frac{1}{q},q}(\partial B(x_0, r))$ . Então

$$\|w\|_{L^\infty(B(x_0, r))} \leq K \|w\|_{L^q(B(x_0, r))},$$

com  $K = K(q, r) > 0$ .

*Demonstração.* A demonstração é uma combinação de Theorem 8.12, Theorem 2.6 e Theorem 8.15 em [12] com  $\text{Tr}(g)$  no lugar de  $\phi$ .  $\square$

Em particular, neste estudo, estamos interessados em uma das consequências deste teorema. É importante destacar que a prova do corolário utiliza-se a desigualdade do operador Traço, veja Teorema 1.56, que dá significado aos valores das funções de Sobolev sobre a fronteira. Confira também o Capítulo 15 em [19] e Seção 5.5 em [10].

**Corolário 2.13.** Sejam  $\mu$  uma medida de Radon e uma função integrável  $u$  solução distribucional de

$$-\Delta u = \mu,$$

Dados  $r > 0$  e  $\varepsilon > 0$ . suponha que para todo  $x \in \Omega$ , tenhamos

$$\mu(B(x, r) \cap \Omega) \leq 4\pi - \varepsilon.$$

Então, para  $\Omega' \Subset \Omega$ , existe  $C = C(\|u\|_{L^1(\Omega)}, \varepsilon, r, \Omega', \Omega) > 0$  tal que

$$e^u \in L^1(\Omega') \quad \text{e} \quad \|e^u\|_{L^1(\Omega')} \leq C.$$

*Demonstração.* Uma vez que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é aberto e  $\Omega' \Subset \Omega$ , podemos obter uma cobertura finita de  $\Omega'$  por bolas abertas  $B(x_i, r_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , compactamente contidas em  $\Omega$  tais que

$$\Omega' \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, r_i)$$

com  $x_i \in \Omega$ .

Para cada  $i = 1, \dots, k$  considere  $v$  e  $w$  soluções para os problemas:

$$\begin{cases} -\Delta v = \mu & \text{em } B(x_i, r_i) \\ v = 0 & \text{sobre } \partial B(x_i, r_i) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{em } B(x_i, r_i) \\ w = u & \text{sobre } \partial B(x_i, r_i) \end{cases}.$$

No sentido distribucional, vale

$$-\Delta(v + w) = -\Delta v - \Delta w = \mu,$$

e sobre  $\partial B(x_i, r_i)$ , pelo Teorema do Traço:

$$v + w = u \quad \text{sobre } \partial B(x_i, r_i).$$

Segue da equivalência obtida no Teorema 2.4 que  $u \in W^{1,1}(B(x_i, r_i))$ .

Pela Regularidade de Sobolev, veja Teorema 1.64, temos

$$\|u\|_{W_0^{1,1}(B(x_i, r_i))} \leq C_1 \|\mu\|_{\mathcal{M}(B(x_i, r_i))},$$

com  $C_1 = C_1(q, N, B(x_i, r_i)) > 0$ . E munidos da imersão do traço, confira a Seção 15.1 em [19], vale

$$\|u\|_{L^1(\partial B(x_i, r_i))} \leq C_2 \|u\|_{W_0^{1,1}(B(x_i, r_i))},$$

donde  $C_2 = C_2(q, B(x_i, r_i)) > 0$ . Daí, combinando essas duas estimativas, obtemos

$$u \in L^1(\partial B(x_i, r_i))$$

Pela Fórmula de Poisson, fazendo  $u = v + w$  q.t.p em  $\partial B(x_i, r_i)$ , o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu & \text{em } B(x_i, r_i) \\ u = v + w & \text{sobre } \partial B(x_i, r_i) \end{cases} \quad (2.11)$$

admite solução.

Uma versão adaptada do [12, Theorem 8.17] ao nosso caso, para  $q > 1$ , obtemos

$$\|w\|_{L^\infty(B(x_i, \frac{r_i}{2}))} \leq K \|w\|_{L^q(B(x_i, \frac{3r_i}{4}))}$$

com  $K > 0$  dependendo de  $q$  e  $r_i$ . Daí,

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^\infty(B(x_i, \frac{r_i}{2}))} &\leq K \|w\|_{L^q(B(x_i, \frac{3r_i}{4}))} \\ &= K \|u - v\|_{L^q(B(x_i, \frac{3r_i}{4}))} \\ &= K \|u\|_{L^q(B(x_i, \frac{3r_i}{4}))} + K \|v\|_{L^q(B(x_i, \frac{3r_i}{4}))}. \end{aligned}$$

Além disso, dado  $1 < q < 2$ , temos  $1 > \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$  e estamos nas hipóteses do Teorema 1.64 para  $v$ , solução distribucional do Problema de Dirichlet linear com densidade  $\mu \in \mathcal{M}(B(x_i, \frac{3r_i}{4}))$ , assim

$$\|v\|_{W_0^{1,q}(B(x_i, \frac{3r_i}{4}))} \leq C \|\mu\|_{\mathcal{M}(B(x_i, \frac{3r_i}{4}))}.$$

E por imersão  $W_0^{1,q}(B(x_i, \frac{3r_i}{4})) \hookrightarrow L^{q^*}(B(x_i, \frac{3r_i}{4}))$ , com  $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{2}$ , temos

$$\|v\|_{L^q(B(x_i, \frac{3r_i}{4}))} \leq \|v\|_{W_0^{1,q}(B(x_i, \frac{3r_i}{4}))}$$

Combinando as desigualdades anteriores, obtém-se

$$\|v\|_{L^q(B(x_i, \frac{3r_i}{4}))} \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(B(x_i, \frac{3r_i}{4}))}.$$

Consequentemente,

$$\|w\|_{L^\infty(B(x_i, \frac{r_i}{2}))} \leq K\|u\|_{L^q(B(x_i, \frac{3r_i}{4}))} + K\|\mu\|_{\mathcal{M}(B(x_i, \frac{3r_i}{4}))}, \quad (2.12)$$

donde  $K = K(\Omega) > 0$ , tendo que vista que  $1 < q < 2$  fora fixado. Agora,

$$\begin{aligned} \int_{B(x_i, \frac{r_i}{2})} e^{|u|} &= \int_{B(x_i, \frac{r_i}{2})} e^{|v+w|} \\ &\leq \int_{B(x_i, \frac{r_i}{2})} e^{|v|} e^{|w|} \\ &\leq \int_{B(x_i, \frac{r_i}{2})} e^{|v|} e^{K(\|u\|_{L^q(B(x_i, \frac{3r_i}{4}))} + \|\mu\|_{\mathcal{M}(B(x_i, \frac{3r_i}{4}))})} \\ &\leq \tilde{K}_0 \int_{B(x_i, \frac{r_i}{2})} e^{|v|}. \end{aligned}$$

Observe que a penúltima desigualdade é obtida pela constante encontrada em (2.12), portanto,  $\tilde{K}_0 = \tilde{K}_0(\|u\|_{L^1(\Omega)}, r_i)$ . Mais ainda,

$$\int_{B(x_i, \frac{r_i}{2})} e^{|v|} \leq \int_{B(x_i, r_i)} e^{|v|},$$

ou seja,

$$\int_{B(x_i, \frac{r_i}{2})} e^{|u|} \leq \tilde{K}_0 \int_{B(x_i, r_i)} e^{|v|}.$$

Pelo Teorema de Brezis e Merle, ver Teorema 2.11, para todo  $\delta \in (0, 4\pi)$ , temos

$$\int_{B(x_i, \frac{r_i}{2})} e^{\frac{4\pi-\delta}{\|\mu\|_{\mathcal{M}(B(x_i, r_i))}} |u|} \leq \frac{4\pi}{\delta} (\text{diam}\Omega)^2.$$

Tomando  $\varepsilon = \delta > 0$  e munido da hipótese  $\mu(B(r_i, x_i) \cap \Omega) = \mu(B(r_i, x_i)) \leq 4\pi - \delta$ , temos

$$\int_{B(x_i, r_i/2)} e^{|u|} \leq \tilde{K}_0 \int_{B(x_i, r_i/2)} e^{\frac{4\pi-\delta}{\|\mu\|_{\mathcal{M}(B(x_i, r_i))}} |v|} \leq \tilde{K}_0 \frac{4\pi}{\delta} (\text{diam}\Omega)^2 \leq \tilde{K},$$

com  $\tilde{K} = \tilde{K}(\|u\|_{L^1(\Omega)}, \varepsilon, r_i)$ . Por fim, como  $\Omega' \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, r_i)$ , segue

$$\int_{\Omega'} e^{|u|} \leq \sum_{i=1}^k \int_{B(x_i, \frac{r_i}{2})} e^{|u|} \leq \tilde{K},$$

e a constante  $\tilde{K} > 0$  depende de  $\|u\|_{L^1(\Omega)}$ ,  $\varepsilon$ ,  $r$ ,  $\Omega'$  e  $\Omega$ . □

# Capítulo 3

## Problema de Dirichlet não linear

Considere  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio suave, isto é, um subconjunto aberto, limitado e com fronteira suave. Neste capítulo, estudaremos o Problema de Dirichlet semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{P}_2)$$

para diferentes casos de densidade  $\mu$ .

Este capítulo está estruturado da seguinte maneira: na primeira seção, trataremos do caso  $\mu \in W^{-1,2}(\Omega) = (W_0^{1,2}(\Omega))'$ . Na segunda, consideraremos o caso  $\mu \in L^1(\Omega)$ . Na terceira seção, abordaremos o caso em que a densidade é uma medida de Radon finita, ou seja,  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ . Para finalizar, na última seção, estudaremos um caso particular do problema de Dirichlet semilinear com  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

Salvo menção contrária, suporemos que a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(H1) é contínua;

(H2) é não decrescente;

(H3) satisfaz a Condição do Sinal, isto é,  $g(t)t \geq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Em particular, pelas hipóteses (H1) e (H3), segue do Teorema do Valor Médio que a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(P1) satisfaz  $g(0) = 0$ .

### 3.1 $\mu \in W^{-1,2}(\Omega)$

Sejam  $\mu \in W^{-1,2}(\Omega)$  e uma função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo as hipóteses (H1) - (H3).

**Definição 3.1.** Suponha que  $g(u) \in L^1(\Omega)$ . Definimos a solução fraca de  $(P_2)$  como sendo uma função  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  satisfazendo

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} g(u)v = \langle \mu, v \rangle$$

para toda  $v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ .

Inicialmente, por uma abordagem variacional, justificaremos que a equação

$$-\Delta u + g(u) = \mu \quad \text{em } \Omega,$$

com  $u = 0$  sobre  $\partial\Omega$  é a equação de Euler-Lagrange no espaço de Sobolev  $W_0^{1,2}(\Omega)$  referente a um funcional

$$\begin{aligned} E : W_0^{1,2}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ E(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} G(u) - \langle \mu, u \rangle, \end{aligned} \quad (3.1)$$

conforme descrito a seguir.

Com efeito, devido ao Teorema de representação de Riesz-Fréchet em espaços de Hillbert, veja [6, Theorem 5.5], para todo  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  podemos representar unicamente o funcional  $\mu \in W^{-1,2}(\Omega)$  por  $\mu \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , por abuso de notação, utilizaremos a mesma notação, isto é, denotaremos

$$\langle \mu, u \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \mu.$$

No funcional  $E$ , a função  $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  é definida por

$$G(t) = \int_0^t g(s) \, ds.$$

Veremos que funcional  $E$  é de classe  $C^1$ , cuja derivada é

$$\langle E'(u), v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} g(u)v - \langle \mu, v \rangle.$$

Ressaltamos que a função  $G$  definida acima é sempre não negativa. De fato, pela Condição do Sinal, tem-se  $g(s) \geq 0$  para todo  $s \in [0, t]$ , logo:

$$G(t) = \int_0^t g(s) \, ds \geq 0.$$



Agora, se  $t < 0$ , vale

$$G(t) = \int_0^t g(s) \, ds = - \int_t^0 g(s) \, ds \geq 0,$$

pois  $g(s) \leq 0$  no intervalo  $[t, 0]$ .

O principal resultado dessa seção consiste em mostrar que para toda  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , existe  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  que minimiza o funcional  $E$ , ou seja,  $u$  é ponto crítico de  $E$ .

Para tanto, mostraremos que o funcional  $E$  associado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

é limitado inferiormente. Por fim, munido de resultados de Análise Funcional, mostraremos que o ínfimo do funcional é atingido em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Consequentemente,  $E$  admite ponto crítico e o problema  $(P_2)$  possui solução fraca.

Iniciaremos com a Desigualdade de Young considerando parâmetro  $\varepsilon > 0$ . Esta estimativa é frequentemente utilizada para provar a desigualdade de Hölder.

**Lema 3.2** (Desigualdade de Young). Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $\varepsilon > 0$

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

*Demonstração.* Sabemos que

$$(a - b)^2 \geq 0$$

então,  $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ . Daí, dado  $\varepsilon > 0$ , temos

$$\begin{aligned} ab &= (2\varepsilon)^{\frac{1}{2}} a \cdot \frac{b}{(2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq \frac{1}{2} \left( 2\varepsilon a^2 + \frac{b^2}{2\varepsilon} \right) \\ &= \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}. \end{aligned}$$

Logo,  $ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$ . □

O próximo lema garante a limitação inferior do funcional  $E$ .

**Lema 3.3.** Se  $\mu \in W^{-1,2}(\Omega)$ , então para toda  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$  tem-se

$$\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 \leq C \left( E(v) + \|\mu\|_{W^{-1,2}(\Omega)} \right),$$

com  $C = C(N, \Omega) > 0$ .

*Demonstração.* Relembramos que  $G(v) \geq 0$  q.t.p em  $\Omega$ , para toda função  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ .

Logo,

$$E(v) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \int_{\Omega} v\mu$$

daí,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \leq E(v) + \int_{\Omega} v\mu. \quad (3.2)$$

Uma vez que  $\mu \in W^{-1,2}(\Omega)$ , existe  $A = \|\mu\|_{W^{-1,2}(\Omega)} > 0$  de modo que

$$|\langle \mu, u \rangle| \leq A \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré,

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

com  $c_1 = c_1(\text{diam}(\Omega)) > 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 &= \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq c_1^2 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq (c_1^2 + 1) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= C_1 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= C_1 \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

onde  $C_1 = (c_1^2 + 1) > 0$ . Agora, isolando  $\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2$  na desigualdade anterior, obtemos

$$\frac{1}{C_1} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \leq \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2.$$

Substituindo em (3.2), vem

$$\frac{1}{2C_1} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 \leq E(v) + A \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)},$$

ou seja,

$$\frac{1}{2C_1} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \leq E(v) + A \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}. \quad (3.3)$$

Pela Desigualdade de Young com  $p = q = 2$ , para todo  $\varepsilon > 0$ , temos

$$\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \varepsilon \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon},$$

substituindo em (3.3):

$$\frac{1}{2C_1} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \leq E(v) + A \left( \varepsilon \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \right)$$

o que implica em

$$\left( \frac{1}{2C_1} - A\varepsilon \right) \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \leq E(v) + \frac{A}{4\varepsilon}.$$

Lembrando que  $A = \|\mu\|_{W^{-1,2}(\Omega)}$  e tomando  $\varepsilon > 0$  de modo que  $A\varepsilon = \frac{1}{4C_1}$ , vem

$$\frac{1}{4C_1} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \leq E(v) + \frac{1}{4C_1} \|\mu\|_{W^{-1,2}(\Omega)}.$$

Isolando  $\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2$ ,

$$\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \leq 4C_1 E(v) + \|\mu\|_{W^{-1,2}(\Omega)} \leq C_2 \left( E(v) + \|\mu\|_{W^{-1,2}(\Omega)} \right)$$

com  $C_2 = \max\{4C_1, 1\}$  e o resultado segue tomando  $C = C_2 > 0$  que depende de  $N$  e  $\Omega$ :

$$\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 \leq C \left( E(v) + \|\mu\|_{W^{-1,2}(\Omega)} \right). \quad \square$$

Agora, vejamos a existência de ponto crítico para o funcional  $E$  definido em (3.2).

**Proposição 3.4.** Se  $\mu \in W^{-1,2}(\Omega)$ , então existe  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  tal que

$$E(u) \leq E(v)$$

para toda função  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ .

*Demonstração.* Segue do Lema 3.3 que o funcional  $E$  é inferiormente limitado, isso garante a existência da sequência minimizante. Considere agora  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$  tal sequência, isto é,

$$\lim_n E(u_n) = \inf_{v \in W_0^{1,2}(\Omega)} E(v).$$

Afirmamos que

$$\begin{aligned} E(u) &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \left( \int_{\Omega} |\nabla u_{n_k}|^2 + \int_{\Omega} G(u_{n_k}) - \langle \mu, u_{n_k} \rangle \right) \\ &= \liminf_{k \rightarrow +\infty} E(u_{n_k}). \end{aligned}$$

Estudaremos cada parcela da soma acima individualmente, em seguida, completaremos a demonstração da afirmação.

Para a primeira, aplicando o Lema 3.3 para a sequência  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$\|u_n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 \leq C \left( \inf_{v \in W_0^{1,2}(\Omega)} E(v) + \|\mu\|_{W^{-1,2}(\Omega)} \right).$$

Por isso, a sequência  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ .

Sendo  $W_0^{1,2}(\Omega)$  um espaço de Banach reflexivo, pelo [6, Theorem 3.18], existe  $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$  tal que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{fracamente em } W_0^{1,2}(\Omega). \quad (3.4)$$

Por outro lado, aplicando o Teorema de Rellich-Kondrachov, veja Teorema 1.53, para a sequência  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , existe  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  e uma subsequência  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$u_{n_k} \rightarrow u \quad \text{em } L^2(\Omega).$$

Pela unicidade do limite fraco  $u = u_0$  q.t.p em  $\Omega$ .

Em particular,

$$u_{n_k} \rightarrow u \quad \text{em } L^2(\Omega). \quad (3.5)$$

Agora, pela Proposição 1.58, vale

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|\nabla u_{n_k}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.6)$$

Vejamos para a segunda parcela

$$\int_{\Omega} G(u) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} G(u_{n_k}). \quad (3.7)$$

A demonstração será realizada em duas partes. Primeiramente, suponhamos  $u_{n_k} \geq 0$  pontualmente em  $\Omega$ . Para qualquer  $s \in [0, u]$ , pela Condição do Sinal,  $g(s) \geq 0$ . Podemos

escrever

$$\begin{aligned}
 \liminf_{k \rightarrow +\infty} G(u_{n_k}) &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^{u_{n_k}} g(s) \, ds \\
 &= \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) \chi_{[0, u_{n_k}]}(s) \, ds \\
 &\geq \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) \chi_{[0, u]}(s) \, ds. \\
 &= \int_0^u g(s) \, ds \\
 &= G(u).
 \end{aligned}$$

Agora, se  $u_{n_k} < 0$  pontualmente em  $\Omega$ , teremos  $g(s) < 0$  para todo  $s \in [u, 0]$ . Daí,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{u_{n_k}} g(s) \, ds &= - \int_{n_k}^0 g(s) \, ds \\
 &= \int_{n_k}^0 -g(s) \, ds.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_0^{u_{n_k}} g(s) \, ds &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{u_{n_k}}^0 -g(s) \, ds \\
 &= \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} -g(s) \chi_{[u_{n_k}, 0]}(s) \, ds
 \end{aligned}$$

donde usamos o seguinte fato

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \chi_{[u_{n_k}, 0]}(s) = \chi_{[u, 0]}(s)$$

q.t.p em  $\mathbb{R}$ . No entanto, sabendo que  $u_{n_k} \rightarrow u$  q.t.p em  $\Omega$  e  $u < 0$  pontualmente, segue

$$\begin{aligned}
 \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_0^{u_{n_k}} g(s) \, ds &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} -g(s) \chi_{[u_{n_k}, 0]}(s) \, ds \\
 &= \int_0^u g(s) \, ds \\
 &= G(u).
 \end{aligned}$$

Por fim, para última parcela, tendo em vista que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em } W_0^{1,2}(\Omega)$$

se, e somente se, para todo funcional  $\phi \in W^{-1,2}(\Omega)$ , tem-se

$$\langle \phi, u_n \rangle \longrightarrow \langle \phi, u \rangle \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

Em particular, vale para  $\mu \in W^{-1,2}(\Omega)$ , isto é,

$$\langle \mu, u_{n_k} \rangle \longrightarrow \langle \mu, u \rangle \quad \text{em } \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Assim, combinando as estimativas (3.6), (3.7) e (3.8), segue

$$\begin{aligned} E(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} G(u) - \langle \mu, u \rangle \\ &\leq \frac{1}{2} \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla u_{n_k}|^2 + \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} G(u_{n_k}) - \limsup_{k \rightarrow +\infty} \langle \mu, u_{n_k} \rangle \\ &= \liminf_{k \rightarrow +\infty} \left( \int_{\Omega} |\nabla u_{n_k}|^2 + \int_{\Omega} G(u_{n_k}) - \langle \mu, u_{n_k} \rangle \right) \\ &= \liminf_{k \rightarrow +\infty} \langle E, u_{n_k} \rangle \\ &= \inf_{v \in W_0^{1,2}(\Omega)} E(v). \end{aligned}$$

Por outro lado, uma vez que  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  e pela definição de ínfimo

$$E(u) \geq \inf_{v \in W_0^{1,2}(\Omega)} E(v).$$

Isso significa que o ínfimo é atingido

$$E(u) = \inf_{v \in W_0^{1,2}(\Omega)} E(v). \quad \square$$

É sabido que, ao menos formalmente, os pontos críticos do funcional  $E : W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$  são soluções fracas do problema (P<sub>2</sub>), isto é,

$$\langle E'(u), v \rangle = 0 \quad \text{para toda função } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Isso equivale a

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} g(u)v - \langle \mu, v \rangle = 0,$$

ou ainda,

$$\langle E'(u), v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} g(u)v - \langle \mu, v \rangle.$$

Voltando ao funcional

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} G(u) - \langle \mu, u \rangle.$$

No próximo resultado daremos os detalhes para este fato.

**Proposição 3.5.** Se  $\mu \in W^{-1,2}(\Omega)$  é um minimizante do funcional  $E$ , então  $g(u) \in L^1(\Omega)$  e para toda função  $v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  tem-se

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} g(u)v = \langle \mu, v \rangle.$$

*Demonstração.* A demonstração seguirá em duas etapas, sendo a primeira delas uma afirmação.

*Etapa 1 (Afirmação):* Para toda função teste  $v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  com  $v \equiv 0$  no conjunto  $[|u| > \theta] \subset \Omega$  para algum natural  $\theta \geq 0$ , a equação de Euler-Lagrange é satisfeita.

Com efeito, dado  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , denotaremos inicialmente

$$\begin{aligned} E_1(u) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \\ E_2(u) &= \int_{\Omega} G(u) \\ E_3(u) &= \langle \mu, u \rangle = \int_{\Omega} \mu u. \end{aligned}$$

Assim,  $E(u) = E_1(u) + E_2(u) - E_3(u)$ . Daí,

$$\begin{aligned} E_1(u+tv) - E_1(u) &= \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} |\nabla(u+tv)|^2 - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right) \\ &= |\nabla u|^2 + 2t \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + t^2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \\ &= \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + t \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v, \end{aligned}$$

para  $E_2$ , temos

$$\begin{aligned} E_2(u+tv) - E_2(u) &= \int_{\Omega} G(u+tv) - \int_{\Omega} G(u) \\ &= \int_{\Omega} G(u+tv) - G(u). \end{aligned}$$

Por fim, para  $E_3$ :

$$\begin{aligned} E_3(u+tv) - E_3(u) &= \langle \mu, u+tv \rangle - \langle \mu, u \rangle \\ &= \langle \mu, tv \rangle \\ &= t \langle \mu, v \rangle \\ &= t \int_{\Omega} \mu v \end{aligned}$$

Agora, para todo  $t \in \mathbb{R}/\{0\}$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{E(u+tv) - E(u)}{t} &= \frac{E_1(u+tv) + E_2(u+tv) - E_3(u+tv) - (E_1(u) + E_2(u) - E_3(u))}{t} \\ &= \frac{E_1(u+tv) - E_1(u) + E_2(u+tv) - E_2(u) - E_3(u+tv) + E_3(u)}{t} \\ &= \frac{\frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + t \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} G(u+tv) - G(u) - t \langle \mu, v \rangle}{t} \\ &= \frac{t}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \frac{G(u+tv) - G(u)}{t} - \langle \mu, v \rangle. \end{aligned}$$

Sendo  $g$  uma função contínua e  $G$  sua primitiva, temos  $G' \equiv g$  pontualmente em  $\mathbb{R}$  e vale

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(u+tv) - G(u)}{t} = G'(u)v = g(u)v \quad \text{q.t.p em } \Omega. \quad (3.9)$$

Como  $G$  é contínua em compactos e diferenciável em abertos de  $\mathbb{R}$ , pelo Teorema do Valor Médio, existe  $\xi \in [u, u+tv]$  tal que

$$G'(\xi) = \frac{G(u+tv) - G(u)}{t} = g(\xi)v.$$

Daí,

$$\left| \frac{G(u+tv) - G(u)}{t} \right| = |g(\xi)||v|.$$

Sabendo que  $\xi \in [u, u+tv]$ , temos  $|\xi| \leq \max\{u, u+tv\}$ , daí

$$\begin{aligned} |\xi| &\leq \max\{u, u+tv\} \\ &\leq |u| + t|v|. \end{aligned}$$



Relembramos que  $v$  se anula no conjunto  $[|u| > \theta]$ , para algum  $\theta \geq 0$ , assim

$$|u| + t|v| \leq \theta + t\|v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Logo,

$$|g(\xi)||v| \leq \sup \{ |g(\xi)| \mid |\xi| \leq \theta + t\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \} \|v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Consequentemente,

$$\left| \frac{G(u+tv) - G(u)}{t} \right| \leq \sup \{ |g(\xi)| \mid |\xi| \leq \theta + t\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \} \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Fazendo  $t \rightarrow 0$  na desigualdade anterior, obtemos

$$\left| \frac{G(u+tv) - G(u)}{t} \right| \leq C. \quad (3.10)$$

Onde usamos fortemente o fato de que  $v$  se anula em  $[|u| > \theta]$  para obter a limitação acima. Pela convergência pontual em  $t$  obtida em (3.9) e pela limitação (3.10), estamos nas hipóteses do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [11, Theorem 2.24], aplicando-o

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{G(u+tv) - G(u)}{t} = \int_{\Omega} g(u)v.$$

Definindo agora,

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \psi(t) = E(u+tv). \end{aligned}$$

Note que por construção,  $\psi$  é diferenciável em  $t = 0$  e

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= E'(u+tv) \\ &= E'(u+tv)v \end{aligned}$$

onde  $\psi'(0) = E$ . Por fim, como  $\psi(0) = E(u)$  e  $u$  minimiza o funcional  $E$ , então  $u$  satisfaz a equação de Euler-Lagrange com função teste  $v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  que se anula em  $[|u| > \theta]$  com  $\theta \geq 0$ .

*Etapa 2:* Dado a função  $v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , vamos aproximar  $v$  por uma sequência de funções  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  que satisfazem a afirmação (Etapa 1).

Para isso, tomemos uma sequência de números positivos  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de modo que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k = 0.$$

Consideremos também uma função  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  suave e com suporte compacto satisfazendo  $\text{supp}H \subset [-1, 1]$ , isto é,  $H \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  e  $|H(t)| \leq 1$ . Defina, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$v_k = H(\alpha_k u)v.$$

De início, observemos que pela Regra da Cadeia localmente Lipschitz, veja Teorema 1.54, obtemos  $v_k \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Além disso,  $v_k \in L^\infty(\Omega)$  uma vez que  $v_k$  se anula em  $\{|\alpha_k u| > 1\}$ . Logo,  $v_k \in W_0^{1,2} \cap L^\infty(\Omega)$ .

Pela Etapa 1, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , a função  $v_k$  satisfaz a Equação de Euler-Lagrange dada por

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v_k + \int_{\Omega} g(u)v_k = \langle \mu, v_k \rangle. \quad (3.11)$$

Dado  $t = 0$ , suponha  $H(0) = 1$ , então  $(v_k)_k$  converge a  $v$  em  $W^{1,2}(\Omega)$ . De fato, como  $H \in C_c^\infty(\Omega)$ , então existe uma constante  $M > 0$  de modo que  $|H'(t)| \leq M$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Agora,

$$\nabla v_k = \nabla (H(\alpha_k u)v),$$

e aplicando, novamente, a Regra da Cadeia localmente Lipschitz:

$$\begin{aligned} \nabla (H(\alpha_k u)v) &= \nabla H(\alpha_k u)v + H(\alpha_k u)\nabla v \\ &= \alpha_k v H'(\alpha_k u)\nabla u + H(\alpha_k u)\nabla v. \end{aligned}$$

Para todo  $k \in \mathbb{N}$ , vale  $|H(\alpha_k u)'| \leq M$ . Além disso,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} H(\alpha_k u) = H(0) = 1,$$

pois  $\alpha_k \rightarrow 0$  ao tomar  $k \rightarrow +\infty$ . Consequentemente:

$$\begin{aligned} \alpha_k v H'(\alpha_k u)\nabla u &\rightarrow (0, 0, \dots, 0) \\ H(\alpha_k u)\nabla v &\rightarrow \nabla v. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \nabla v_k = \nabla v \quad \text{q.t.p em } \Omega. \quad (3.12)$$

Além disso, sendo  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  uma sequência de números positivos limitada, existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha_k \leq \alpha$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} |\nabla v_k| &= |\alpha_k H'(\alpha_k u) v \nabla u + H(\alpha_k u) \nabla v| \\ &\leq |\alpha_k v H'(\alpha_k u) \nabla u| + |H(\alpha_k u) \nabla v| \\ &= \alpha_k |v| M |\nabla u|^2 + |H(\alpha_k u)| |\nabla v|^2 \\ &\leq \alpha M \|v\|_{L^\infty(\Omega)} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 \\ &\leq C \end{aligned}$$

onde  $C = C(M, \|v\|_{L^\infty(\Omega)}, |\nabla u|^2, |\nabla v|^2) > 0$  que não depende de  $k \in \mathbb{N}$ . Logo,

$$|\nabla v_k|^2 \leq C^2. \quad (3.13)$$

Por (3.12) e (3.13) estamos na hipótese do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [11, Theorem 2.24], aplicando-o

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla v_k|^2 = \int_{\Omega} |\nabla v|^2.$$

Portanto,  $\|\nabla v_k\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ , isto é,  $v_k$  converge a  $v$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ .

Agora, voltando na igualdade (3.11), obtemos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} g(u) v_k = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \langle \mu, v \rangle. \quad (3.14)$$

O próximo passo é mostrar que  $g(u) \in L^1(\Omega)$ . Como visto na Proposição 3.4, ser um elemento de  $L^\infty(\Omega)$  não é uma condição necessária para o minimizante  $u$ . Posto isto, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , podemos definir a função  $u_k = H(\alpha_k u)u$  que se anula em  $[|u| > 1/\alpha_k]$ . Destarte,  $u_k$  satisfaz as hipóteses da afirmação (Etapa 1), logo,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u_k + \int_{\Omega} g(u) u_k = \langle \mu, u_k \rangle.$$

Ainda considerando  $v = u$ , vamos mostrar que  $g(u) \in L^1(\Omega)$ . Para isso, tomaremos  $H \in C_c^\infty(\Omega)$  uma função truncamento não negativa. Daí, se  $u \geq 0$ , para cada  $k$  natural, temos  $H(\alpha_k u)u \geq 0$  e  $H(\alpha_k u)u < 0$ , caso contrário. Isso significa que  $u_k$  e  $u$  possuem o mesmo sinal, por Consequência da Condição do Sinal  $g(u)$  e  $u_k$  também.

Considere a sequência não negativa  $(g(u)u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Pelo Lema de Fatou, veja [6, Lemma 4.1],

e por (3.14):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(u)u &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} g(u)u_k \\ &= - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u + \langle \mu, v \rangle \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \langle \mu, v \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\Omega} g(u)u \leq \langle \mu, v \rangle.$$

Logo  $g(u)u \in L^1(\Omega)$ . Em posse disso, mostremos que  $g(u) \in L^1(\Omega)$ . Suponha inicialmente que pontualmente tenhamos  $|u(x)| \leq 1$ , então

$$|g(u(x))| \leq \sup_{|t| \leq 1} g(t).$$

Caso contrário, se  $|u(x)| > 1$  pontualmente, temos

$$|g(u(x))| = \frac{g(u(x))u(x)}{|u(x)|},$$

onde o numerador é positivo pela Condição do Sinal. Tendo em vista que  $\frac{1}{|u(x)|} < 1$  e pela igualdade anterior, obtemos

$$|g(u(x))| < g(u(x))u(x) \quad \text{em } \Omega.$$

Combinando os dois casos anteriores, para cada  $x \in \Omega$ , vale:

$$|g(u)| \leq \sup_{|t| \leq 1} |g(t)| \chi_{\{|u| \leq 1\}} + \chi_{\{|u| > 1\}} g(u)u,$$

como  $\chi_{\{|u| > 1\}} g(u)u \leq g(u)u$ , segue

$$|g(u)| \leq \sup_{|t| \leq 1} |g(t)| \chi_{\{|u| \leq 1\}} + g(u)u.$$

Portanto,  $g(u) \in L^1(\Omega)$  como queríamos.

Agora, retomando para uma função  $v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  qualquer, temos

$$|g(u)v_k| \leq |g(u)| \|H\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Fazendo  $k \rightarrow +\infty$ , sabemos que  $g(u)v_k \rightarrow g(u)v$ . Por outro lado, como  $g(u) \in L^1(\Omega)$ , a pela estimativa anterior  $|g(u)||H\|_{L^\infty(\Omega)}\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \in L^1(\Omega)$ . Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [11, Theorem 2.24],

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(u)v_k = \int_{\Omega} g(u)v$$

daí a equação de Euler-Lagrange é estabelecida:

$$\int_{\Omega} g(u)v = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \langle \mu, v \rangle. \quad \square$$

Antecedendo o próximo resultado, faz-se necessário realizar a seguinte observação.

**Observação 3.6.** Como  $C_0^\infty(\bar{\Omega}) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ , notemos que  $u$  é solução do problema (P<sub>2</sub>) uma vez que para toda função  $\phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ , pela definição de derivada distribucional, veja Seção 1.3 em [18], vale

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = - \int_{\Omega} u \Delta \phi.$$

Logo,  $u$  satisfaz

$$- \int_{\Omega} u \Delta \phi + \int_{\Omega} g(u)v = \int_{\Omega} v \mu.$$

Um caso particular da Proposição 3.5 ocorre quando consideramos  $g$  satisfazendo (H2), (H3) e é Lipschitziana, isto é, dados  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , existe  $C > 0$  de modo que

$$|g(t_1) - g(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|.$$

Com estas hipóteses, a existência e unicidade de solução para o Problema de Dirichlet não linear decorre do Teorema de Stampacchia, veja Teorema 1.66.

**Proposição 3.7.** Se  $\mu \in L^2(\Omega)$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é Lipschitz contínua satisfazendo (H2) e (H3). Então, existe  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  tal que  $g(u) \in L^2(\Omega)$  e para todo  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , tem-se

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} g(u)v = \int_{\Omega} v \mu.$$

*Demonstração.* Para toda função  $v \in W_0^{1,2}$  tem-se

$$\left| \int_{\Omega} g(u)v \right| \leq \int_{\Omega} |g(u)||v|$$

Pela desigualdade de Hölder com  $p = q = 2$  e pela imersão contínua  $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ , vem

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |g(u)| |v| &= \left( \int_{\Omega} |g(u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|g(u)\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_1 \|g(u)\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \end{aligned}$$

onde  $C_1 > 0$  e a integral está bem definida se, e somente se,  $g(u) \in L^2(\Omega)$ . Agora, defina,

$$\begin{aligned} a : W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} g(u)v. \end{aligned}$$

Via Teorema de Stampacchia vamos mostrar que existem  $\mu \in W^{-1,2}(\Omega)$  e uma única função  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  satisfazendo

$$a(u, v) = \langle \mu, v \rangle, \quad (3.15)$$

para todo  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Para isso fixemos  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , assim a aplicação

$$\begin{aligned} a(u, \cdot) : W_0^{1,2}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} g(u)v \end{aligned}$$

é linear e contínua. Com efeito, sejam  $v, w \in W_0^{1,2}(\Omega)$  e  $\beta \in \mathbb{R}$ , temos

$$\begin{aligned} a(u, v + \beta w) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v + \beta w) + \int_{\Omega} g(u)(v + \beta w) \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \beta \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w + \int_{\Omega} (g(u)v + \beta g(u)w) \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} g(u)v + \beta \left( \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w + \int_{\Omega} g(u)w \right) \\ &= a(u, v) + \beta a(u, w). \end{aligned}$$

Portando  $a(u, \cdot)$  é linear. Agora, para todo  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , vale

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} g(u)v \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \right| + \left| \int_{\Omega} g(u)v \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| + C_1 \|g(u)\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder com expoentes  $p = q = 2$  e pela escolha da norma equivalente em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| \leq C_2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = C_2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)},$$

onde  $C_2 > 0$ .

Uma vez que  $g$  é uma função Lipschitziana,  $|g(u)| \leq C|u|$  e  $g(0) = 0$ , para todo  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , existe  $C > 0$  de modo que  $|g(u) - g(0)|^2 \leq C|u - 0|^2$ , ou seja,  $g(u) \in L^2(\Omega)$ . Seguindo,

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq C_2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + C_1 \|g(u)\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \\ &\leq C_3 \left( \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|g(u)\|_{L^2(\Omega)} \right) \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \\ &\leq C_3 \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}, \end{aligned}$$

onde  $C_3 = \max\{C_1, C_2\}$ . Tendo em vista que  $a(u, \cdot)$  é um funcional limitado, logo, é contínuo.

Agora, verifiquemos que o funcional  $a(u, \cdot)$  satisfaz as hipóteses do Teorema de Stampacchia. Para tanto, consideremos  $u_1, u_2 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , então

$$\begin{aligned} |a(u_1, v) - a(u_2, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla v - \int_{\Omega} (g(u_1) - g(u_2))v \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla v| + \int_{\Omega} |g(u_1) - g(u_2)| |v|. \end{aligned}$$

Aplicando Hölder com  $p = q = 2$

$$\int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2) \nabla v| \leq C_4 \|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

e pela norma equivalente em  $W_0^{1,2}(\Omega)$  adotada, segue

$$\|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = C_5 \|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

Por outro lado, sendo  $g$  Lipschitz contínua e com argumento análogo ao anterior:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |g(u_1) - g(u_2)| |v| &\leq C \int_{\Omega} |u_1 - u_2| |v| \\ &\leq C_6 \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_7 \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}, \end{aligned}$$

com  $C_6 > 0$  e  $C_7 > 0$ . Destacamos que no último passo utilizamos a imersão  $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ .

Por fim, combinando as desigualdade obtidas e evidenciando  $\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$ , obtemos

$$\begin{aligned} |a(u_1, v) - a(u_2, v)| &\leq C_8 \left( \|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \right) \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \\ &\leq C_9 \|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}, \end{aligned}$$

com  $C_8 = \max\{C_5, C_7\} > 0$  e  $C_9 > 0$  e  $a$  satisfaz a primeira condição do Teorema de Stampacchia.

Agora, verifiquemos a segunda condição do Teorema de Stampacchia para o funcional  $a$ , dados  $u_1, u_2 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , temos

$$\begin{aligned} a(u_1, u_1 - u_2) - a(u_2, u_1 - u_2) &= \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla(u_1 - u_2) + \int_{\Omega} g(u_1)(u_1 - u_2) \\ &\quad - \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla(u_1 - u_2) - \int_{\Omega} g(u_2)(u_1 - u_2) \\ &= \int_{\Omega} \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla(u_1 - u_2) \\ &\quad + \int_{\Omega} [g(u_1) - g(u_2)](u_1 - u_2). \end{aligned}$$

Uma vez que  $g$  é não decrescente, supondo  $u_1 > u_2$ , temos  $u_1 - u_2 > 0$  e  $g(u_1) \geq g(u_2)$ , logo  $[g(u_1) - g(u_2)](u_1 - u_2) \geq 0$ . Caso contrário, se  $u_1 < u_2$ , então  $u_1 - u_2 < 0$  e  $[g(u_1) - g(u_2)](u_1 - u_2) > 0$ , pois  $g(u_1) - g(u_2) \leq 0$ . Logo,

$$\int_{\Omega} [g(u_1) - g(u_2)](u_1 - u_2) \geq 0.$$

Utilizando este fato, temos

$$a(u_1, u_1 - u_2) - a(u_2, u_1 - u_2) \geq \int_{\Omega} \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla(u_1 - u_2).$$



Agora,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla(u_1 - u_2) &= \int_{\Omega} (\nabla(u_1 - u_2))^2 \\ &= \|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L^2\Omega}^2 \\ &= C_{10} \|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

onde  $C_{10} = C_{10}(N, \Omega) > 0$  e a última igualdade se dá, novamente, pela adoção da norma equivalente em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , isto significa

$$a(u_1, u_1 - u_2) - a(u_2, u_1 - u_2) \geq C_{10} \|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2,$$

ou seja,  $a$  satisfaz a segunda condição do Teorema de Stampacchia

Portanto, uma vez que  $u$  fora previamente fixado, o funcional  $a(u, \cdot)$  satisfaz as hipóteses do Teorema de Stampacchia, isto é, existe um único  $\mu \in W^{-1,2}(\Omega)$  satisfazendo a igualdade (3.15).

Para finalizar, observemos que todo elemento  $\mu \in L^2(\Omega)$  pode ser interpretado como um elemento do espaço  $W^{-1,2}(\Omega)$ , também denotado por  $\mu$ , agindo sobre  $z \in W_0^{1,2}(\Omega)$  do seguinte modo:

$$\langle \mu, z \rangle = \int_{\Omega} \mu z.$$

Portanto, combinando (3.15) e esta observação, o resultado segue.  $\square$

Considerando a observação feita no fim da proposição anterior, apresentamos uma proposição que será utilizada nas demonstrações de problemas de Dirichlet semilinear:

**Proposição 3.8.** Se  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  é solução fraca do problema de Dirichlet (P<sub>2</sub>) com densidade  $\mu \in L^2(\Omega)$ , então

$$\int_{\Omega} \mu \operatorname{sgn} u \geq 0.$$

*Demonstração.* Para toda função teste  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , é válido

$$\int_{\Omega} \mu v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v. \quad (3.16)$$

Tomemos agora uma função localmente Lipschitz, não decrescente,  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que se anula em 0 e sua derivada é limitada, isto é,  $|H'(t)| \leq C$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Pela Regra da Cadeia, confira Teorema 1.54, para  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , temos  $H(u) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Em particular, tomando

$v = H(u)$  em (3.16), temos

$$\int_{\Omega} \mu H(u) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla H(u).$$

Por outro lado, novamente por Teorema 1.54, temos  $\nabla H(u) = H'(u)\nabla u$ . Daí,

$$\int_{\Omega} \mu H(u) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot (H'(u)\nabla u) = \int_{\Omega} H'(u)|\nabla u|^2.$$

Consequentemente,

$$\int_{\Omega} \mu H(u) \geq 0.$$

Basta tomar uma sequência de funções reais  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , com  $H_n$  satisfazendo as mesmas condições de  $H$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , de tal modo que  $H_n(u) \rightarrow \text{sgn } u$  pontualmente em  $\mathbb{R}$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ . Tendo em vista que  $|H_n(u)| \leq 1$ , aplicando o Teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \mu H_n(u) = \int_{\Omega} \mu \text{sgn } u \geq 0.$$

□

### 3.2 $\mu \in L^1(\Omega)$

Vamos estudar o comportamento do problema de Dirichlet não linear

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{P}_2)$$

quando o dado  $\mu$  é um elemento do espaço  $L^1(\Omega)$ .

A definição de solução fraca para o problema de Dirichlet semilinear  $(\text{P}_2)$  é uma adaptação do caso linear  $(\text{P}_0)$ .

**Definição 3.9.** Considere  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ . Dizemos que  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é solução do problema de Dirichlet não linear com densidade  $\mu$  se

- i.  $u \in L^1(\Omega)$  e  $g(u) \in L^1(\Omega)$ ;
- ii. para toda função  $\zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ , tem-se

$$-\int_{\Omega} u \Delta \zeta + \int_{\Omega} g(u) \zeta = \int_{\Omega} \zeta \, d\mu.$$

O problema de Dirichlet (P<sub>2</sub>) com semilinearidade Lipschitz e integrável admite solução.

**Proposição 3.10.** Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função Lipschitz contínua não-decrescente. Para toda função  $\mu \in L^1(\Omega)$ , o problema (P<sub>2</sub>) com não linearidade  $g$  e densidade  $\mu$  admite solução.

*Demonstração.* Tendo em vista o Corolário 1.27, seja  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$  de modo que  $\mu_n \rightarrow \mu$  em  $L^1(\Omega)$  e para cada  $n \in \mathbb{N}$ , suporemos  $u_n \in W_0^{1,2}$  soluciona o problema

$$\begin{cases} -\Delta u_n + g(u_n) = \mu_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.17)$$

Vamos mostrar que a sequência  $(g(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge em  $L^1(\Omega)$ .

Dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , temos  $u_m, u_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$  satisfazendo (3.17). Assim, obtemos

$$\begin{cases} -\Delta(u_m - u_n) = \mu_m - \mu_n - (g(u_m) - g(u_n)) & \text{em } \Omega \\ u_m - u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.18)$$

Note que a equação acima é um problema de Dirichlet linear com densidade  $-(g(u_m) - g(u_n)) + \mu_m - \mu_n \in L^2(\Omega)$ . De fato, sendo  $g$  Lipschitz contínua e existe  $C > 0$  tal que

$$|g(u_n) - g(0)| \leq C|u_n|,$$

daí

$$\begin{aligned} |g(u_n) - g(0)|^2 &\leq (C|u_n| + |g(0)|)^2 \\ &= C^2|u_n|^2 + 2C|u_n||g(0)| + |g(0)|^2 \\ &\leq C_1(|u_n|^2 + |g(0)|^2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} |g(u_n)|^2 \leq C \left( \int_{\Omega} (|u_n|^2 + |g(0)|^2) \right) < \infty.$$

Multiplicando a primeira equação de (3.18) por  $\text{sgn}(u_m - u_n)$ , obtemos

$$-\Delta(u_m - u_n) \text{sgn}(u_m - u_n) = (\mu_m - \mu_n) \text{sgn}(u_m - u_n) - [(g(u_m) - g(u_n))] \text{sgn}(u_m - u_n)$$

e integrando

$$-\int_{\Omega} \Delta(u_m - u_n) \text{sgn}(u_m - u_n) = \int_{\Omega} [(\mu_m - \mu_n) - (g(u_m) - g(u_n))] \text{sgn}(u_m - u_n).$$

Aplicando a Proposição 3.8,

$$\int_{\Omega} [(\mu_m - \mu_n) - (g(u_m) - g(u_n))] \operatorname{sgn}(u_m - u_n) \geq 0,$$

consequentemente

$$\int_{\Omega} (\mu_m - \mu_n) \operatorname{sgn}(u_m - u_n) - \int_{\Omega} (g(u_m) - g(u_n)) \operatorname{sgn}(u_m - u_n) \geq 0,$$

assim

$$\int_{\Omega} (\mu_m - \mu_n) \operatorname{sgn}(u_m - u_n) \geq \int_{\Omega} (g(u_m) - g(u_n)) \operatorname{sgn}(u_m - u_n).$$

Suponhamos que  $u_m > u_n$ , ou seja,  $u_m - u_n > 0$  e sendo  $g$  monótona não-decrescente  $g(u_m) - g(u_n) \geq 0$ , logo  $(g(u_m) - g(u_n)) \operatorname{sgn}(u_m - u_n) \geq 0$ .

Por outro lado, caso  $u_m - u_n < 0$ , teríamos  $g(u_m) - g(u_n) \leq 0$  e  $(g(u_m) - g(u_n)) \operatorname{sgn}(u_m - u_n) \geq 0$ . De qualquer modo, obtemos  $(g(u_m) - g(u_n)) \operatorname{sgn}(u_m - u_n) = |g(u_m) - g(u_n)|$ .

Logo,

$$\int_{\Omega} (g(u_m) - g(u_n)) \operatorname{sgn}(u_m - u_n) \geq 0$$

e por (3.2), obtemos

$$\|g(u_m) - g(u_n)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\mu_m - \mu_n\|_{L^1(\Omega)}.$$

Pela Proposição 2.2, dados  $m, n \in \mathbb{N}$  vale a estimativa:

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|_{L^1(\Omega)} &\leq C \|\mu_m - \mu_n - (g(u_m) - g(u_n))\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq C \|\mu_m - \mu_n\|_{L^1(\Omega)} + C \|g(u_m) - g(u_n)\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq C \|\mu_m - \mu_n\|_{L^1(\Omega)} + C \|\mu_m - \mu_n\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq 2C \|\mu_m - \mu_n\|_{L^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

donde a última desigualdade é devido a (3.2). Portanto

$$\|u_m - u_n\|_{L^1(\Omega)} \leq 2C \|\mu_m - \mu_n\|_{L^1(\Omega)}.$$

Tendo em vista que  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge em  $L^1(\Omega)$ , em particular  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é Cauchy em  $L^1(\Omega)$ , temos  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy em  $L^1(\Omega)$ , isto é, existe  $u \in L^1(\Omega)$  limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . De modo análogo, como  $(g(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  é Cauchy em  $L^1(\Omega)$ , existe  $v \in L^1(\Omega)$  de modo que

$$g(u_{n_k}) \rightarrow v$$

em  $L^1(\Omega)$ .

Mostraremos agora que  $v = g(u)$ . De fato, pela recíproca do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [19, Proposition 4.9], existe uma subsequência, digamos  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$  de modo que  $u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$  q.t.p em  $\Omega$ , ou seja, existe  $A \subset \Omega$  com  $\text{med}(A) = 0$  e para todo elemento  $x \in \Omega/A$  ocorre

$$u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$$

e pela continuidade de  $g$ :

$$g(u_{n_k}(x)) \rightarrow g(u(x))$$

q.t.p em  $\Omega$ . Por outro lado, existe uma subsequência  $(g(u_{n_{k_l}}))_{l \in \mathbb{N}} \subset (g(u_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$  de modo que

$$g(u_{n_{k_l}}(x)) \rightarrow v(x)$$

q.t.p em  $\Omega$ . Logo, pela unicidade do limite  $v = g(u)$ , de modo que, do argumento anterior  $g(u_n) \rightarrow g(u)$  em  $L^1(\Omega)$ . Por fim, para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ , vale

$$-\int_{\Omega} u_n \Delta \zeta + \int_{\Omega} g(u_n) \zeta = \int_{\Omega} \zeta \mu_n.$$

Tomando  $n \rightarrow \infty$ , pelas convergências em  $L^1(\Omega)$  a função  $u \in L^1(\Omega)$  é solução do problema de Dirichlet não-linear com densidade  $\mu \in L^1(\Omega)$ .  $\square$

Um caso mais geral da Proposição 3.10 é considerar a função  $g$  satisfazendo as hipóteses (H1) - (H3).

**Proposição 3.11.** Seja  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função satisfazendo as hipóteses (H1) - (H3). Para toda função  $\mu \in L^1(\Omega)$ , o problema (P<sub>2</sub>) com não linearidade  $g$  e densidade  $\mu$  admite solução.

*Demonstração.* A demonstração é análoga a prova apresentada na Proposição 3.10. Contudo, a distinção consiste na existência de solução para o problema aproximado que é dada pela Proposição 3.5.  $\square$

### 3.3 $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$

O problema de Dirichlet não linear apresenta características intrigantes. De maneira surpreendente, Bénéilan e Brezis demonstraram que existem diferenças significativas quando consideramos  $\mu \in L^1(\Omega)$  e  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ , veja [3]. Na verdade, se  $\mu$  é mutualmente singular com relação à medida de Lebesgue, então nem sempre o problema de Dirichlet admite solução distribucional. O exemplo a seguir ilustra este resultado.

**Exemplo 3.12.** Considere  $\Omega = B(0, 1)$  subconjunto de  $\mathbb{R}^N$  com  $N \geq 3$ . Se  $p \geq \frac{N}{N-2}$ , então o problema de Dirichlet não linear

$$\begin{cases} -\Delta u + |u|^{p-1}u = \delta_0 & \text{em } B(0, 1), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B(0, 1) \end{cases}$$

não admite solução distribucional em  $B(0, 1)$ .

*Demonstração.* Inicialmente, mostremos que a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(t) = |t|^{p-1}t$ , com  $p \geq \frac{N}{N-2}$ , satisfaz as hipóteses (H1) - (H3). De fato, uma vez que  $p - 1 \geq \frac{N}{N-2} - 1$ , tem-se

$$p - 1 \geq \frac{2}{N-2} \geq 0.$$

afinal,  $N \geq 3$ . Daí, para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|t|^{p-1}t$  é um produto de funções contínuas, logo, contínua e (H1) é satisfeita.

Observe que

$$g'(t) = \begin{cases} pt^{p-1} & \text{se } t \geq 0 \\ p(-t)^{p-1} & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

ou seja,  $g'(t) \geq 0$ , isso significa que  $g$  é não decrescente e satisfaz a hipótese (H2).

Por fim, note que para todo  $t \in \mathbb{R}$ , vale

$$g(t)t = |t|^{p-1}t^2 \geq 0,$$

e (H3) é satisfeita.

Agora, suponha que a equação

$$-\Delta u + |u|^{p-1}u = \delta_0$$

admitisse solução no sentido distribucional em  $B(0, 1)$ . Então, existe  $u \in L^1(\Omega)$  satisfazendo

$$-\int_{B(0,1)} u \Delta \zeta + \int_{B(0,1)} g(u) \zeta = \int_{B(0,1)} \zeta d\delta_0,$$

para toda  $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ , de tal modo que  $g(u) \in L^1(\Omega)$ , isto é,

$$\int_{B(0,1)} |u|^{p-1}|u| = \int_{B(0,1)} |u|^p < +\infty.$$

E dado  $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  de modo que  $\text{supp}\zeta \subset B(0, 1)$ , poderíamos construir a sequência

$$\begin{aligned} \zeta_n : B(0, 1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \zeta_n(x) = \zeta(nx). \end{aligned}$$

De modo que, por construção, vale que  $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tomemos  $\zeta_n$  como função teste, daí

$$-\int_{B(0,1)} u \Delta \zeta_n + \int_{B(0,1)} |u|^{p-1} u \zeta_n = \int_{B(0,1)} \zeta_n \, d\delta_0.$$

Integrando com respeito a medida de Dirac, temos

$$\int_{B(0,1)} \zeta_n \, d\delta_0 = \zeta_n(0) = \zeta(0).$$

Assim, poderíamos tomar  $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  tal que  $\zeta(0) \neq 0$ . Combinando as últimas igualdades, teríamos

$$-\int_{B(0,1)} u \Delta \zeta_n + \int_{B(0,1)} |u|^{p-1} u \zeta_n \neq 0. \quad (3.19)$$

Ademais, para cada  $x \in B(0, 1)$ , tem-se  $|u(x)|^{p-1} u(x) \zeta_n(x) = |u(x)|^{p-1} u(x) \zeta(nx)$ . Pelo suporte de  $\zeta$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u(x)|^{p-1} u(x) \zeta_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} |u(x)|^{p-1} u(x) \zeta(nx) = 0 \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Além disso,

$$\int_{B(0,1)} |u|^{p-1} u = \int_{B(0,1)} |u|^p < +\infty,$$

e

$$||u|^p \zeta_n(x)| \leq |u|^p.$$

Consequentemente, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [11, Theorem 2.24],

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B(0,1)} |u|^{p-1} u \zeta_n = 0. \quad (3.20)$$

Agora,

$$\int_{B(0,1)} u \Delta \zeta_n = \int_{B(0,1/n)} u \Delta \zeta_n = n^2 \int_{B(0,1/n)} u \Delta \zeta_n.$$

Dáí,

$$\begin{aligned} \left| \int_{B(0,1)} u \Delta \zeta_n \right| &= \left| n^2 \int_{B(0,1)} u(x) \Delta \zeta(nx) \right| \\ &\leq n^2 \int_{B(0,1)} |u(x)| |\Delta \zeta(nx)|, \end{aligned}$$

aplicando a desigualdade de Hölder com expoentes  $p$  e  $q$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , temos

$$n^2 \int_{B(0,1/n)} |u(x)| |\Delta \zeta(nx)| \leq n^2 \left( \int_{B(0,1/n)} |u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{B(0,1/n)} |\Delta \zeta(nx)|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3.21)$$

Por mudança de variável, considere  $y = nx$ . Como  $x \in B(0, 1/n)$ , temos  $y \in B(0, 1)$ , assim

$$\int_{B(0,1/n)} |\Delta \zeta(nx)|^q = \int_{B(0,1)} |\Delta \zeta(y)|^q |nI|^{-N} dy,$$

donde,

$$|nI| = \det \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}_{N \times N} = n^N,$$

é o determinante da matriz Jacobiana. Seguindo,

$$\int_{B(0,1/n)} |\Delta \zeta(nx)|^q |nI|^{-N} dy = \int_{B(0,1)} |\Delta \zeta(y)|^q n^{-N} dy.$$

Substituindo em (3.21):

$$n^2 \int_{B(0,1/n)} |u(x)| |\Delta \zeta(nx)| \leq n^{2-\frac{N}{q}} \left( \int_{B(0,1/n)} |u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{B(0,1)} |\Delta \zeta(y)|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Afirmamos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2-\frac{N}{q}} \left( \int_{B(0,1/n)} |u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{B(0,1)} |\Delta \zeta(y)|^q \right)^{\frac{1}{q}} = 0.$$



Por hipótese,  $p \geq \frac{N}{N-2}$ , logo  $q \leq \left(\frac{N}{N-2}\right)' = \frac{N}{N-N+2} = \frac{N}{2}$ . Assim,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2-\frac{N}{q}} = 0.$$

Além disso, como  $|u|^p \in L^1(\Omega)$ ,

$$\int_{B(0,1/n)} |u(x)|^p \leq \int_{\Omega} |u|^p < +\infty.$$

Como

$$\int_{B(0,1)} |\Delta \zeta|^q \leq C,$$

com  $C > 0$  e a afirmação segue. Isso contradiz (3.19), logo, a equação dada não admite solução  $u$  no sentido das distribuições.  $\square$

Visto o exemplo anterior queremos investigar melhor quais são as "boas medidas" que garantem existência de solução distribucional para  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ .

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{P}_3)$$

onde a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(H1) é contínua;

(H2) é não decrescente;

(H3) satisfaz a Condição do Sinal, isto é,  $g(t)t \geq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Em particular,  $g(0) = 0$ .

Diremos que  $\mu$  é uma boa medida para (P<sub>3</sub>) quando este admitir solução.

**Definição 3.13.** Seja  $\mu$  uma medida de Radon finita, diremos que  $\mu$  é uma boa medida para o problema (P<sub>3</sub>) se, e somente se, o problema (P<sub>3</sub>) admite solução no sentido das distribuições.

Além disso, vale a seguinte estimativa acerca da não linearidade.

**Lema 3.14.** Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, não decrescente, satisfazendo a condição do sinal. Dado  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ , se  $u$  é solução de (P<sub>3</sub>), então

$$\|g(u)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.$$

*Demonstração.* Considere  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^\infty(\Omega)$  satisfazendo

$$\begin{aligned} g_n &\longrightarrow g(u) \quad \text{pontualmente em } \Omega; \\ \|\mu_n\|_{L^1(\Omega)} &\leq C; \\ \mu_n &\rightharpoonup \mu \quad \text{vagamente.} \end{aligned}$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu_n - g_n \in L^1(\Omega)$  e o problema

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \mu_n - g_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

admite  $u_n \in L^1(\Omega)$  como solução, conforme a Proposição 3.10. Pela Proposição 3.5, a solução  $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  e considere  $S_\varepsilon \in W_0^{1,2}(\Omega)$  dada por

$$S_\varepsilon(t) = \begin{cases} -1, & \text{se } t < -\varepsilon \\ \frac{t}{\varepsilon}, & \text{se } -\varepsilon \leq t < \varepsilon \\ 1, & \text{se } t \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Tomando  $S_\varepsilon$  como função teste na equação de Euler-Lagrange:

$$\int_{\Omega} S_\varepsilon(u) d\mu = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla S_\varepsilon(u) + \int_{\Omega} g(u) S_\varepsilon(u) \quad (3.22)$$

Note que  $S_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ , logo  $S_\varepsilon \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  e aplicando a Regra da Cadeia, veja Teorema 1.54, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla S_\varepsilon(u) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot (S'_\varepsilon(u) \nabla u) \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 S'_\varepsilon(u). \end{aligned}$$

Donde

$$S'_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, observemos que  $S'_\varepsilon(u) \geq 0$  e sendo  $|\nabla u|^2 \geq 0$ , vem

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 S'_\varepsilon(u) \geq 0.$$

Combinando essa informação com (3.22), segue

$$\int_{\Omega} S_{\varepsilon}(u) d\mu \geq \int_{\Omega} g(u) S_{\varepsilon}(u).$$

Por outro lado, sendo  $S_{\varepsilon}$  não decrescente e limitada, com  $|S_{\varepsilon}(t)| \leq 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} S_{\varepsilon}(u) d\mu &\leq \left| \int_{\Omega} S_{\varepsilon} d\mu \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |S_{\varepsilon}| d|\mu| \\ &= \int_{\Omega} d|\mu| \\ &= \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} g(u) S_{\varepsilon} \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.$$

Por fim, considerando  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Fazendo  $n \rightarrow +\infty$ , vem

$$S_{\varepsilon_n} \rightarrow \operatorname{sgn}(u) \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [11, Theorem 2.24]

$$\int_{\Omega} g(u) S_{\varepsilon_n}(u) \rightarrow \int_{\Omega} g(u) \operatorname{sgn}(u)$$

e como  $g$  satisfaz a condição do sinal, vale  $g(u) \operatorname{sgn}(u) = |g(u)|$ . Portanto,

$$\|g(u)\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |g(u)| \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)},$$

e a estimativa segue. □

Quando o problema de Dirichlet  $(P_3)$  admitir solução, denotaremos  $\mathcal{G}$  a coleção das boas medidas.

**Definição 3.15.** Dado  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ . Definimos

$$\mathcal{G} = \{\mu \in \mathcal{M}(\Omega) \mid \mu \text{ é uma boa medida para o problema } (P_3)\}$$

A propriedade a seguir, garante que conjunto das boas medidas é fechado com respeito convergência forte, isto é, na norma da variação total.

**Proposição 3.16.** O conjunto  $\mathcal{G}$  é fechado com respeito a convergência forte em  $\mathcal{M}(\Omega)$ .

*Demonstração.* Considere  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$  uma sequência de boas medidas de modo que  $\mu_n \rightarrow \mu$  fortemente em  $\mathcal{M}(\Omega)$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considere  $u_n$  a solução distribucional associada a boa medida  $\mu_n$  do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_n + g(u_n) = \mu_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Lema 3.14, dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\|g(u_m) - g(u_n)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\mu_m - \mu_n\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.$$

Como  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge forteente em  $\mathcal{M}(\Omega)$ , da desigualdade obtida, segue que  $(g(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy em  $L^1(\Omega)$ .

Por outro lado, como  $-\Delta(u_m - u_n) = \mu_m - \mu_n - (g(u_m) - g(u_n)) \in \mathcal{M}(\Omega)$ , combinando a Proposição 2.2 com a estimativa anterior

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|_{L^1(\Omega)} &\leq C \|-\Delta(u_m - u_n)\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \\ &= \|(\mu_m - \mu_n) - (g(u_m) - g(u_n))\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \\ &\leq \|(\mu_m - \mu_n)\|_{\mathcal{M}(\Omega)} + \|g(u_m) - g(u_n)\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq 2\|(\mu_m - \mu_n)\|_{\mathcal{M}(\Omega)}, \end{aligned}$$

ou seja,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é também Cauchy em  $L^1(\Omega)$ .

Portanto, existem  $u, v \in L^1(\Omega)$  tais que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{e} \quad g(u_n) \rightarrow v \quad \text{em } L^1(\Omega).$$

Vamos mostrar que  $v = g(u)$  q.t.p em  $\Omega$ . Sabendo que  $u_n \rightarrow u$  em  $L^1(\Omega)$ , pela recíproca do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue existe uma subsequência  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de modo que  $u_{n_k} \rightarrow u$  q.t.p em  $\Omega$ . Além disso, sendo  $g$  uma função contínua, temos

$$g(u_{n_k}) \rightarrow g(u) \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Com raciocínio análogo, como  $g(u_n) \rightarrow v$  em  $L^1(\Omega)$ , existe uma subsequência  $(g(u_{n_j}))_{j \in \mathbb{N}}$  tal que  $g(u_{n_j}) \rightarrow v$  q.t.p em  $\Omega$  quando  $j \rightarrow +\infty$ . Por argumento da diagonal e unicidade do limite:  $v = g(u)$  q.t.p em  $\Omega$ .

Agora, para toda  $\zeta \in C_0^2(\overline{\Omega})$ , valem

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow +\infty} - \int_{\Omega} u_{n_k} \Delta \zeta &= - \int_{\Omega} u \Delta \zeta \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} g(u_{n_k}) \zeta &= \int_{\Omega} g(u) \zeta.\end{aligned}$$

Em particular, uma vez que  $\mu_n \rightharpoonup \mu$  vagamente em  $\mathcal{M}(\Omega)$ , temos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \zeta \, d\mu_{n_k} = \int_{\Omega} \zeta \, d\mu.$$

Consequentemente, para toda  $\zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ ,

$$- \int_{\Omega} u_{n_k} \Delta \zeta + \int_{\Omega} g(u_{n_k}) \zeta = \int_{\Omega} \zeta \, d\mu.$$

Portanto,  $u$  é solução distribucional do problema enunciado.  $\square$

Agora veremos que o Problema de Dirichlet admite solução distribucional quando a semilinearidade possui boas propriedades. Na verdade, para toda medida de Radon, o Problema de Dirichlet com semilinearidade contínua, limitada, não decrescente que se anula na origem admite solução distribucional.

**Lema 3.17.** Considere  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  e  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, limitada, não decrescente de modo que  $h(0) = 0$ . Então existe  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , com  $1 < p < \frac{N}{N-1}$ , solução distribucional do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + h(u) = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

satisfazendo as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} &\leq c_1 \\ \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} &\leq c_2.\end{aligned}$$

com  $c_1 = c_1(p, N, \Omega, \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}) > 0$  e  $c_2 = c_2(p, N, \Omega, \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}) > 0$

*Demonstração.* A demonstração seguirá em dois passos, o primeiro consideraremos  $\mu \in L^1(\Omega)$  e  $(\mu_n)_n$  em  $L^\infty(\Omega)$  tal que  $\mu_n \rightarrow \mu$  em  $L^1(\Omega)$ . O segundo, tomaremos  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  e uma sequência  $(\mu_n)_n \subset L^\infty(\Omega)$  convergindo a  $\mu$  fracamente em  $\mathcal{M}(\Omega)$ .

**PASSO 1:** Seja  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^\infty(\Omega)$  tal que  $\mu_n \rightarrow \mu$  em  $L^1(\Omega)$  e vale

$$\|\mu_n\|_{L^1(\Omega)} \leq c \|\mu\|_{L^1(\Omega)}.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$  solução do problema dada pela Proposição 3.4:

$$\begin{cases} -\Delta u_n + h(u_n) = \mu_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (D_n)$$

Inicialmente, definiremos:  $\mu_0 \equiv 0$ , função nula em  $L^1(\Omega)$ , que está associada a solução  $u_0 \equiv 0 \in L^1(\Omega)$ .

Dados  $m, n \in \mathbb{N}$  com  $m \neq n$ , para toda  $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla \phi + \int_{\Omega} h(u_n) \phi &= \int_{\Omega} \mu_n \phi \\ \int_{\Omega} \nabla u_m \cdot \nabla \phi + \int_{\Omega} h(u_m) \phi &= \int_{\Omega} \mu_m \phi. \end{aligned}$$

Fazendo a diferença entre as igualdade acima, vem

$$\int_{\Omega} (\nabla u_n - \nabla u_m) \cdot \nabla \phi + \int_{\Omega} (h(u_n) - h(u_m)) \phi = \int_{\Omega} (\mu_n - \mu_m) \phi. \quad (3.23)$$

Consideremos

$$\phi_\varepsilon = \frac{u_n - u_m}{((u_n - u_m)^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}},$$

sabemos do Exemplo 1.55 que  $\phi_\varepsilon \in W_0^{1,2}(\Omega)$  e tomando-a como função teste em (3.23):

$$\int_{\Omega} (\nabla u_n - \nabla u_m) \cdot \nabla \phi_\varepsilon + \int_{\Omega} (h(u_n) - h(u_m)) \phi_\varepsilon = \int_{\Omega} (\mu_n - \mu_m) \phi_\varepsilon.$$

Agora, aplicando a Regra da Cadeia (1.4) em  $\nabla \phi_\varepsilon$ , obtemos

$$\int_{\Omega} (\nabla u_n - \nabla u_m) \cdot \nabla \phi_\varepsilon = \int_{\Omega} \varepsilon \frac{|\nabla u_n - \nabla u_m|^2}{((u_n - u_m)^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \geq 0,$$

daí

$$\int_{\Omega} (h(u_n) - h(u_m)) \phi_\varepsilon \leq \int_{\Omega} (\mu_n - \mu_m) \phi_\varepsilon. \quad (3.24)$$

Além disso, para quase todo  $x \in \Omega$ , tem-se  $\phi_\varepsilon \rightarrow \text{sign}(u_m - u_n)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  e vale a seguinte estimativa

$$|\phi_\varepsilon| = \frac{|u_n - u_m|}{((u_n - u_m)^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \leq 1, \quad (3.25)$$

isto é,  $\phi_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ . Uma vez que

$$\int_{\Omega} |\phi_\varepsilon| \leq \int_{\Omega} 1 = |\Omega| < +\infty. \quad (3.26)$$

Mais ainda  $\phi_\varepsilon$  é uniformemente limitada em  $L^1(\Omega)$ .

Consequentemente, para quase todo  $x \in \Omega$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$(h(u_n) - h(u_m))\phi_\varepsilon \rightarrow (h(u_n) - h(u_m))\text{sign}(u_n - u_m). \quad (3.27)$$

Note que  $(h(u_n) - h(u_m))\phi_\varepsilon$  é uniformemente limitado em  $L^1(\Omega)$ . De fato, por (3.25), segue

$$|(h(u_n) - h(u_m))\phi_\varepsilon| \leq |(h(u_n) - h(u_m))|.$$

Sabendo que para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $h(u_n) - h(u_m) \in L^1(\Omega)$ . Além disso, sendo  $h$  limitada, existe  $M > 0$  tal que  $h(s) \leq M$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ , temos

$$\int_{\Omega} |(h(u_n) - h(u_m))\phi_\varepsilon| \leq \int_{\Omega} |h(u_n) - h(u_m)| \quad (3.28)$$

$$\leq \int_{\Omega} |h(u_n)| + |h(u_m)| \quad (3.29)$$

$$\leq \int_{\Omega} 2M = 2M|\Omega|. \quad (3.30)$$

Munido da convergência (3.27) e da limitação (3.28), aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [11, Theorem 2.24]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (h(u_n) - h(u_m))\phi_\varepsilon = \int_{\Omega} (h(u_n) - h(u_m))\text{sign}(u_n - u_m). \quad (3.31)$$

Novamente por (3.27), fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  obtemos

$$(\mu_n - \mu_m)\phi_\varepsilon \rightarrow (\mu_n - \mu_m)\text{sign}(u_n - u_m) \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Também por hipótese  $\mu_n - \mu_m \in L^1(\Omega)$ , para todo  $m, n \in \mathbb{N}$ , segue de (3.28)

$$\int_{\Omega} |(\mu_n - \mu_m)\phi_\varepsilon| \leq \int_{\Omega} |\mu_n - \mu_m| \leq +\infty.$$

Agora, aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [11, Theorem 2.24]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (\mu_n - \mu_m) \phi_{\varepsilon} = \int_{\Omega} (\mu_n - \mu_m) \text{sign}(u_n - u_m). \quad (3.32)$$

Segue de (3.31) e (3.32) tomando o limite em (3.24) quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , vem

$$\int_{\Omega} (h(u_n) - h(u_m)) \text{sign}(u_n - u_m) \leq \int_{\Omega} (\mu_n - \mu_m) \text{sign}(u_n - u_m).$$

Sendo  $h$  uma função não decrescente tal que  $h(0) = 0$ , mostraremos que  $h(t)t \geq 0$ . De fato, se  $t < 0$ , então  $h(t) < h(0) = 0$ . Agora, supondo  $t > 0$ , então  $h(t) > h(0) = 0$ . Daí,  $\text{sign}(h(t)) = \text{sign}(t)$  e a afirmação segue. Daí,

$$(h(u_n) - h(u_m)) \text{sign}(u_n - u_m) = |h(u_n) - h(u_m)|$$

Além disso, pela Proposição 3.8

$$\int_{\Omega} (\mu_n - \mu_m) \text{sign}(u_n - u_m) = \int_{\Omega} |\mu_n - \mu_m|.$$

Por fim, utilizando as duas igualdades anteriores e retomando em (3.3):

$$\int_{\Omega} |h(u_n) - h(u_m)| \leq \int_{\Omega} |\mu_n - \mu_m|,$$

ou seja,

$$\|h(u_n) - h(u_m)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\mu_n - \mu_m\|_{L^1(\Omega)}.$$

Mas, por hipótese,  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge em  $L^1(\Omega)$ , portanto é Cauchy em  $L^1(\Omega)$ . Isso implica que  $(h(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  também é Cauchy em  $L^1(\Omega)$ , logo existe  $\tilde{h} \in L^1(\Omega)$  limite de  $h(u_n)$ .

Agora, as estimativas. Consideremos  $\mu_0$  e  $u_0$ . Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos  $h(u_0) = h(0) = 0$  e

$$\int_{\Omega} |h(u_n) - h(u_0)| \leq \int_{\Omega} |\mu_n - \mu_0|,$$

ou seja, para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$\|h(u_n)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\mu_n\|_{L^1(\Omega)}.$$

Uma vez que  $\mu_n \rightarrow \mu$  em  $L^1(\Omega)$ , existe uma constante  $k_1 > 0$  satisfazendo

$$\int_{\Omega} |\mu_n| \leq k_1 \|\mu\|_{L^1(\Omega)},$$



ou seja,  $\|\mu_n\|_{L^1(\Omega)} \leq k_1 \|\mu\|_{L^1(\Omega)}$ .

Definindo  $h_n = \mu_n - h(u_n)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\begin{cases} -\Delta u_n = h_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por Stampacchia, ver Teorema 1.63, para todo  $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$ , vale

$$\begin{aligned} \|\nabla u_n\|_{L^q(\Omega)} &\leq c \|h_n\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq c \|\mu_n - h(u_n)\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq c \left( \|u_n\|_{L^1(\Omega)} + \|h(u_n)\|_{L^1(\Omega)} \right) \\ &\leq 2c \|\mu\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq C \|\mu\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Logo, existe  $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$  de modo que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } W_0^{1,q}(\Omega); \quad (3.33)$$

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em } L^p(\Omega), \quad 1 \leq p < q^*; \quad (3.34)$$

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{q.t.p em } \Omega. \quad (3.35)$$

Já que  $W_0^{1,q}(\Omega)$  reflexivo, a menos de subsequência,  $(u_n)_{n_k}$  converge fracamente a  $u$  em  $W_0^{1,q}(\Omega)$ , confira [6, Theorem 3.18].

Além disso, utilizamos o Teorema de Rellich-Khondrachov para obter a convergência (3.34). Já a convergência (3.35) segue da Recíproca do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, confira [19, Proposition 4.9].

*Afirmção 1:*  $h(u_n) \longrightarrow h(u)$  em  $L^1(\Omega)$ . Com efeito, uma vez que  $u_n \longrightarrow u$  pontualmente em  $\Omega$  (3.35) e como  $h$  é limitada por  $M > 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$|h(u_n)| \leq M \quad \text{e} \quad M \in L^1(\Omega).$$

Sendo  $h$  uma função contínua

$$h(u_n) \longrightarrow h(u)$$

pontualmente em  $\Omega$ . Estamos nas hipóteses do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [11, Theorem 2.24] para  $h$ , aplicando:

$$h(u_n) \longrightarrow h(u)$$

em  $L^1(\Omega)$ . Pela unicidade do limite em  $L^1(\Omega)$ , temos:  $h(u) = \tilde{h}$ . Além disso, para todo  $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla \zeta + \int_{\Omega} h(u_n) \zeta = \int_{\Omega} \mu_n \zeta.$$

assim, como  $\mu \longrightarrow \mu$  em  $L^1(\Omega)$ :

$$\lim_n \int_{\Omega} \mu_n \zeta = \mu \zeta.$$

e  $h(u_n) \longrightarrow h(u)$  em  $L^1(\Omega)$ , temos

$$\lim_n \int_{\Omega} h(u_n) \zeta = \int_{\Omega} h(u) \zeta.$$

Por fim, para todo  $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\lim_n \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla \zeta = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \zeta.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \zeta + \int_{\Omega} h(u) \zeta = \int_{\Omega} \mu \zeta.$$

Assim,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^q \leq \liminf_n \int_{\Omega} |\nabla u_n|^q \leq C \|\mu\|_{L^1(\Omega)}$$

**PASSO 2:** Agora, suponhamos  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  e  $\tilde{\mu}_n \in L^\infty(\Omega)$  tal que  $\tilde{\mu}_n \rightharpoonup \mu$  fracamente em  $\mathcal{M}(\Omega)$ , onde mais uma vez definiremos  $\mu_0 \equiv 0$ , com solução  $u_0 \equiv 0$  associada.

Com argumento análogo ao PASSO 1, obtemos

$$\int_{\Omega} |h(u_n) - h(u_m)| \leq \int_{\Omega} |\mu_n - \mu_m|,$$

em particular

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |h(u_n)| &= \int_{\Omega} |h(u_n) - h(u_0)| \\
 &\leq \int_{\Omega} |\mu_n - \mu_0| \\
 &= \int_{\Omega} |\mu_n| \\
 &= \|\mu_n\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \\
 &\leq k_1 \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

Dado que  $u_n$  é solução distribucional do problema

$$-\Delta u_n = h_n = \mu_n - h(u_n),$$

temos  $-\Delta u_n \in \mathcal{M}(\Omega)$  uma vez que  $\mu_n - h(u_n) \in \mathcal{M}(\Omega)$ . Mas, pelo Proposição 2.2, existe uma constante  $k_2 > 0$ , que não depende de  $n \in \mathbb{N}$ , satisfazendo

$$\begin{aligned}
 \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} &\leq k_2 \|h_n\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \\
 &\leq k_2 \|\mu_n - h(u_n)\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \\
 &\leq k_2 (\|\mu_n\|_{\mathcal{M}(\Omega)} + \|h(u_n)\|_{\mathcal{M}(\Omega)}) \\
 &\leq 2k_2 \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

Analogamente, existe uma constante  $k_3 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\begin{aligned}
 \|u_n\|_{L^{p^*}(\Omega)} &\leq k_3 \|h_n\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \\
 &\leq 2k_3 \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

Assim, existe  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  de modo que para todo  $1 \leq p \leq q^*$  vale

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } W_0^{1,q}(\Omega) \quad (3.36)$$

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } L^{q^*}(\Omega) \quad (3.37)$$

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em } L^p(\Omega) \quad (3.38)$$

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{q.t.p em } \Omega. \quad (3.39)$$

Com argumento similar a *Afirmção 1*, vale

$$h(u_n) \longrightarrow h(u) \quad \text{em } L^1(\Omega). \quad (3.40)$$

Consideremos  $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ , sabendo que  $\mu_n \rightharpoonup \mu$  fracamente em  $\mathcal{M}(\Omega)$ , por definição

$$\lim_n \int_{\Omega} \zeta \mu_n = \int_{\Omega} \zeta d\mu. \quad (3.41)$$

Agora, pelas convergências (3.36), (3.37), (3.38) e do resultado (3.40), temos

$$\lim_n \left( \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \zeta \right) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \zeta + \int_{\Omega} h(u) \zeta,$$

daí e por (3.41), para toda função  $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ , segue

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \zeta + \int_{\Omega} h(u) \zeta = \int_{\Omega} \zeta d\mu.$$

Pelas convergências (3.36), (3.37), (3.38) e pela propriedade de semi continuidade inferior da norma:

$$\begin{aligned} \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} &\leq \liminf_n \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq 2k_2 \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \\ &= c_1, \end{aligned}$$

com  $c_1 = c_1(p, N, \Omega, \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}) > 0$ .

Por fim, como vale (3.37), com argumento análogo ao resultado obtido na desigualdade anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} &\leq \liminf_n \|u_n\|_{L^{p^*}(\Omega)} \\ &\leq 2k_3 \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \\ &= c_2, \end{aligned}$$

com  $c_2 = c_2(p, N, \Omega, \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}) > 0$ . □

Apesar do problema de Dirichlet semilinear com densidade  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  nem sempre admitir solução, mostraremos a seguir que existe uma boa medida  $\mu^*$ , a ser construída, denominada **medida reduzida** para qual o problema admite solução.

Para tanto, assumiremos as seguintes noções de subsolução e supersolução, no sentido distribucional, para o Problema de Dirichlet semilinear (P<sub>3</sub>).

**Definição 3.18.** Uma **subsolução** para o problema  $(P_3)$  é uma função  $\underline{u} \in L^1(\Omega)$  de modo que  $g(\underline{u}) \in L^1(\Omega)$  e

$$-\int_{\Omega} \underline{u} \Delta \zeta + \int_{\Omega} g(\underline{u}) \zeta \leq \int_{\Omega} \zeta d\mu,$$

para toda  $\zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$  tal que  $\zeta \geq 0$  em  $\Omega$ .

**Definição 3.19.** Uma função  $\bar{u} \in L^1(\Omega)$  é dita **supersolução** para  $(P_3)$  se satisfizer  $g(\bar{u}) \in L^1(\Omega)$  e

$$-\int_{\Omega} \bar{u} \Delta \zeta + \int_{\Omega} g(\bar{u}) \zeta \geq \int_{\Omega} \zeta d\mu,$$

para toda  $\zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$  tal que  $\zeta \geq 0$  em  $\Omega$ .

Munidos das definições acima, nosso objetivo agora é construir e definir a medida reduzida. Para tanto, introduziremos o Lema de Dini.

**Lema 3.20** (Dini). Seja  $X \subset \mathbb{R}$  compacto. Dado uma sequência de funções contínuas  $g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  que converge monotonamente para  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ , também contínua, então a convergência é uniforme.

*Demonstração.* Veja [15, Teorema 5, Capítulo X, Seção 2] ou [2, Theorem 2.8.6].  $\square$

O resultado a seguir será fortemente utilizado na construção da medida reduzida, bem como em outras justificativas abordadas neste estudo. A argumentação empregada na demonstração deste lema foi identificada em [7, Proposition 1], por esse motivo, é de tal importância que decidimos destacá-la como um lema, enfatizando assim sua aplicação, que é de grande relevância para conclusão das demonstrações.

**Lema 3.21.** Sejam  $g_n, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas. Suponha que  $g_n \rightarrow g$  uniformemente em compactos de  $\mathbb{R}$ . Dados  $v_n, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $v_n \rightarrow v$  q.t.p em  $\Omega$ , então

$$g_n(v_n) \rightarrow g(v) \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

*Demonstração.* Consideremos  $E \subset \Omega$  tal que  $|E| = 0$ ,  $|v_n(x)| < +\infty$  e  $v_n(x) \rightarrow v(x)$  q.t.p em  $\Omega/E$ .

Fixe  $x \in \Omega/E$  e considere  $C_x = C(x) > 0$  tal que

$$|v_n(x)| \leq C_x \quad \text{e} \quad |v(x)| \leq C_x$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Observe que  $v_n(x) \in [-C_x, C_x]$  e  $v(x) \in [-C_x, C_x]$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Mais,  $g$  é uniformemente contínua em  $[-C_x, C_x]$  e  $g_n \rightarrow g$  uniformemente em  $[-C_x, C_x]$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , tome  $\delta > 0$  de modo que

$$|s - t| < \delta \quad s, t \in [-C_x, C_x],$$

então,

$$|g(s) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considere  $n_0 = n_0(x, \varepsilon)$  tal que para todo  $n \geq n_0$ , tem-se

$$|v_n(x) - v(x)| < \delta.$$

e  $n_1 = n_1(x, \varepsilon)$  tal que para  $n \geq n_1$ , vale

$$|g_n(s) - g(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para  $s \in [-C_x, C_x]$ .

Agora, para  $n \geq \bar{n} = \max\{n_0, n_1\}$ , temos

$$\begin{aligned} |g_n(v_n(x)) - g(v(x))| &\leq |g_n(v_n(x)) - g(v_n(x))| + |g(v_n(x)) - g(v(x))| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

afinal,  $v_n(x) \in [-C_x, C_x]$  e  $|v_n(x) - v(x)| < \delta$ .

Portanto,

$$g_n(v_n(x)) \longrightarrow g(v(x)) \quad \text{para todo } x \in \Omega/E.$$

□

Agora veremos a construção da medida reduzida.

**Proposição 3.22.** Considere a sequência  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de funções contínuas tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se  $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  contínua,  $g_n(0) = 0$ , não decrescente e limitada. Suponha que  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfaça

$$g_1(t) \leq \cdots \leq g_n(t) \leq g_{n+1}(t) \leq \cdots$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ , de modo que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) = g(t).$$

Dado qualquer medida  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ , seja  $u_n$  a única solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_n + g_n(u_n) = \mu & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{A}_n)$$

Então,  $u_n \rightarrow u$  q.t.p em  $\Omega$  e  $u_{n+1} \leq u_n$ , ou seja,  $u_n \downarrow u^*$  em  $\Omega$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , onde  $u^*$  é a maior subsolução do problema (P<sub>3</sub>), isto é, dado  $v$  é uma subsolução qualquer, então  $v \geq u^*$  q.t.p em  $\Omega$ . Mais ainda, para toda função  $\zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ , vale

$$\left| \int_{\Omega} u^* \Delta \zeta \right| \leq 2 \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)}$$

e

$$\int_{\Omega} g(u^*) \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.$$

Por fim, existe  $\mu^* \in \mathcal{M}(\Omega)$  tal que  $-\Delta u^* + g(u^*) = \mu^*$  no sentido distribucional.

*Demonstração.* Dado  $i \leq j$ , considere  $u_i$  solução de (A<sub>i</sub>) e  $u_j$  solução de (A<sub>j</sub>), ambas dadas pelo Lema 3.17. Por hipótese, temos  $g_i \leq g_j$  e dado  $\zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ ,  $\zeta \geq 0$  em  $\Omega$ , temos

$$\int_{\Omega} u_i \Delta \zeta + \int_{\Omega} g_i(u_i) \zeta = \int_{\Omega} u_j \Delta \zeta + \int_{\Omega} g_j(u_j) \zeta, \quad (3.42)$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} (u_i - u_j) \Delta \zeta + \int_{\Omega} (g_i(u_i) - g_j(u_j)) \zeta = 0. \quad (3.43)$$

Sabemos do Corolário 2.6 que  $u_i \leq u_j$  q.t.p em  $\Omega$ . Logo,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência não decrescente.

Agora, pela Lema 3.14, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\|g_n(u_n)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \quad (3.44)$$

e

$$\|\Delta u_n\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \leq 2 \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.$$

Segue da Proposição 2.2:

$$\|u_n\|_{L^1(\Omega)} \leq C \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.$$

Seja  $u^* : \Omega \rightarrow (-\infty, +\infty)$ , onde  $u^*(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x)$  pontualmente. Pela última desigualdade e pelo Lema de Fatou, obtemos

$$\|u^*\|_{L^1(\Omega)} \leq C \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} < +\infty.$$

Mais ainda, notando que

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \mu - g_n(u_n) & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

e combinando (3.44) com a Regularidade de Stampacchia-Sobolev, veja Teorema 1.64, com  $1 < q < \frac{N}{N-1}$ , temos

$$\|u_n\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq 2C \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.$$

Logo,  $u_n \rightarrow u^*$  em  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < q^*$ . Por outro lado, pelo Lema de Dini, veja Lema 3.20, a sequência  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $g$  em compactos. Além do mais, vimos que  $u_n \rightarrow u$  q.t.p em  $\Omega$ . Logo, estamos nas hipóteses do Lema 3.21 para  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , daí

$$g_n(u_n) \rightarrow g(u^*) \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Assim, por (3.44) e pelo Lema de Fatou,  $g(u^*) \in L^1(\Omega)$  e

$$\int_{\Omega} |g(u^*)| \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}. \quad (3.45)$$

Agora, tendo em vista que  $u_n$  é solução de  $(A_n)$ , temos

$$-\int_{\Omega} u_n \Delta \zeta + \int_{\Omega} g_n(u_n) \zeta = \int_{\Omega} \zeta \, d\mu$$

para toda  $\zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ .

Porém, como  $u_n \rightarrow u^*$  em  $L^1(\Omega)$ ,  $g_n(u_n) \rightarrow g(u^*)$  q.t.p em  $\Omega$  e sabendo que  $g_n(u_n) \geq 0$  q.t.p em  $\Omega$ , pelo Lema de Fatou

$$-\int_{\Omega} u^* \Delta \zeta + \int_{\Omega} g(u^*) \zeta \leq \int_{\Omega} \zeta \, d\mu, \quad (3.46)$$

para toda  $\zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$  tal que  $\zeta \geq 0$  em  $\Omega$ . Em particular,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u^* \Delta \zeta \right| &\leq \|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)} \left( \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} + \int_{\Omega} g(u^*) \right) \\ &\leq 2\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, defina o funcional

$$I : C_0^\infty(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$$



tal que

$$I(\zeta) = - \int_{\Omega} u^* \Delta \zeta + \int_{\Omega} g(u^*) \zeta. \quad (3.47)$$

Observe que  $I$  é um funcional linear. Pelas desigualdade (3.45) e (3.46), temos

$$|I(\zeta)| \leq 2 \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)},$$

para toda  $\zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ .

Uma vez que  $C_0(\Omega)$  é o fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  com a norma uniforme, podemos estender  $I$  para  $I^* : C_0(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que

$$|I^*(\zeta)| \leq 2 \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{e} \quad I^*|_{C_0^\infty(\overline{\Omega})} \equiv I.$$

Segue do Teorema de Representação de Riesz para medidas de Radon, veja Teorema 1.38, existe uma única  $\mu^* \in \mathcal{M}(\Omega)$  tal que

$$I(\zeta) = \int_{\Omega} \zeta \, d\mu^*, \quad (3.48)$$

para toda  $\zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ .

Portanto, combinando (3.47) e (3.48), obtemos

$$- \int_{\Omega} u^* \Delta \zeta + \int_{\Omega} g(u^*) \zeta = \int_{\Omega} \zeta \, d\mu^*,$$

para toda  $\zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ . Isto significa que  $u^*$  é uma solução para  $(P_3)$  com densidade  $\mu^*$ .

Suponha agora que  $v$  é uma subsolução qualquer de  $(P_3)$ . No sentido distribucional, temos

$$-\Delta v + g_n(v) \leq -\Delta v + g(v) \leq \mu.$$

Aplicando o Corolário 2.6, obtemos  $v \leq u_n$  q.t.p em  $\Omega$ . Tomando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$v \leq u^* \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Portanto,  $u^*$  é a maior subsolução para o problema. □

**Observação 3.23.** Note que a demonstração Proposição 3.22 independe da escolha da sequência de truncamento  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Por exemplo, poderíamos considerar o truncamento

$$g_n(t) = \begin{cases} g(t), & \text{se } -n \leq g(t) \leq n \\ n, & \text{se } g(t) > n \\ -n, & \text{se } g(t) < -n \end{cases}$$

que satisfaz as hipóteses da sequência  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dada no enunciado.

**Observação 3.24.** Pode-se mostrar que a medida  $\mu^*$  construída na Proposição 3.22, dita **medida reduzida** de  $\mu$ , é a maior boa medida menor do que ou igual a  $\mu$ , veja [7, Theorem 1].

O lema a seguir desempenhará um papel fundamental no estudo das boas medidas para o problema de Dirichlet não linear.

**Lema 3.25.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considere  $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  função contínua e não decrescente. Suponha que a sequência  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfaça, para todo  $t \in \mathbb{R}$ :

$$g_1(t) \leq \cdots \leq g_n(t) \leq g_{n+1}(t) \leq \cdots$$

$$\text{onde } \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) = g(t).$$

Se  $\mu$  é uma boa medida para o problema de Dirichlet não linear com solução  $u$  e seja  $u_n$  dada por

$$\begin{cases} -\Delta u_n + g_n(u_n) = \mu & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então,  $u_n \rightarrow u$  em  $W_0^{1,1}(\Omega)$  e  $g_n(u_n) \rightarrow g(u)$  em  $L^1(\Omega)$ .

*Demonstração.* No sentido distribucional, temos

$$-\Delta u_n + g_n(u_n) = \mu \quad \text{e} \quad -\Delta u + g(u) = \mu,$$

assim

$$-\Delta(u_n - u) + g_n(u_n) = g(u), \tag{3.49}$$

no sentido das distribuições.

Além disso, ainda no sentido das distribuições, temos

$$-\Delta(u_n - u) + g_n(u_n) - g_n(u) = g(u) - g_n(u).$$

Sabendo que  $u \in L^1(\Omega)$  é solução do problema de Dirichlet com não linearidade  $g(u) \in L^1(\Omega)$  e pelo fato de  $0 \leq g_n(u) \leq g(u)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos  $g_n(u) \in L^1(\Omega)$  e

$$g(u) - g_n(u) \in L^1(\Omega).$$

Então estamos lidando com um problema de Dirichlet com não linearidade  $g_n(u_n) - g_n(u)$  e densidade  $\bar{\mu}_n = g(u) - g_n(u) \in L^1(\Omega)$ , logo podemos aplicar a estimativa obtida no Lema 3.14, daí para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\|g_n(u_n) - g_n(u)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|g(u) - g_n(u)\|_{L^1(\Omega)}. \quad (3.50)$$

Vamos mostrar que  $\|g_n(u_n) - g_n(u)\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$ .

Inicialmente, pelo Lema de Dini, confira Lema 3.20, a sequência  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $g$  em compactos de  $\mathbb{R}$ . Aliado ao Lema 3.21, segue que  $g_n(u_n) \rightarrow g(u)$  pontualmente em  $\Omega$ , afinal sendo  $\mu$  uma boa medida, a conclusão segue análogo ao argumento utilizado na Proposição 3.22,  $u_n \downarrow u$  q.t.p em  $\Omega$ .

Mais ainda, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$|g(u) - g_n(u)| \leq |g(u)| + |g_n(u)|.$$

Porém

$$|g_n(u)| \leq |f(u)| \in L^1(\Omega),$$

onde  $f(u) = |g(u)| + |g_1(u)|$ .

Por hipótese, fixado  $u(x)$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(u(x)) = g(u(x)) \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Assim, estamos nas hipóteses do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, veja [11, Theorem 2.24], para a sequência  $(g_n(u) - g(u))_{n \in \mathbb{N}}$ , vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n(u) - g(u)\|_{L^1(\Omega)} = 0.$$

Logo, combinando o limite acima com a desigualdade obtida em (3.50), obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n(u_n) - g_n(u)\|_{L^1(\Omega)} = 0,$$

em outras palavras  $g_n(u_n) \rightarrow g(u)$  em  $L^1(\Omega)$ .

Portanto, retomando em (3.49), no sentido distribucional, temos

$$-\Delta(u_n - u) = g(u) - g_n(u_n).$$

Pela Regularidade de Stampacchia-Sobolev, veja Teorema 1.64,

$$\|u_n - u\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} \leq C \|g(u) - g_n(u_n)\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0,$$

e o resultado segue. □

Utilizaremos a definição a seguir para comparar medidas, este é um processo relevante para estabelecer existência de solução.

**Definição 3.26.** Sejam  $\mu_1$  e  $\mu_2$  medidas de Radon finitas. Denotaremos  $\mu_2 \leq \mu_1$  sempre que  $\mu_2(E) \leq \mu_1(E)$ , para todo  $E \subset \Omega$  mensurável.

Dados uma boa medida  $\mu_1$  e uma medida qualquer  $\mu_2 \in \mathcal{M}(\Omega)$ . Suponha que  $\mu_2 \leq \mu_1$ , no sentido da definição anterior, então o problema (P<sub>3</sub>) com densidade  $\mu_2$  admite solução.

**Teorema 3.27.** Sejam  $\mu_1$  uma boa medida para o problema (P<sub>3</sub>) e  $\mu_2 \in \mathcal{M}(\Omega)$ . Se  $\mu_2 \leq \mu_1$ , então  $\mu_2$  é uma boa medida.

*Demonstração.* Sejam  $u_{i,n}$ ,  $i = 1, 2$ , solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_{i,n} + g_n(u_{i,n}) = \mu_i & \text{em } \Omega \\ u_{i,n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

dadas pelo Lema 3.17. Para todo  $n \in \mathbb{N}$  a função  $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e a sequência  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfaz

$$\begin{aligned} g_1 &\leq g_2 \leq \dots \leq g_n \leq g_{n+1} \\ g_n(t) &\rightarrow g(t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pelo Lema de Dini, veja Lema 3.20, sendo a sequência  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monótona, então  $g_n \rightarrow g$  uniformemente em compactos.

Por hipótese  $\mu_2 \leq \mu_1$ , conseqüentemente

$$-\Delta u_{1,n} + g_n(u_{1,n}) \geq -\Delta u_{2,n} + g_n(u_{2,n}).$$

Pela Proposição 2.6, para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$u_{2,n} \leq u_{1,n} \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Sendo a sequência  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  não decrescente, temos

$$g_n(u_{2,n}) \leq g_n(u_{1,n}). \quad (3.51)$$

Tendo em vista que  $\mu_1$  é uma boa medida para o problema (3.3) com solução  $u_{1,n}$ , pelo Lema 3.25 garantimos as seguintes convergências:

$$u_{1,n} \longrightarrow u_1 \text{ em } W_0^{1,1}(\Omega) \quad (3.52)$$

$$g_n(u_{1,n}) \longrightarrow g(u_1) \text{ em } L^1(\Omega). \quad (3.53)$$

Consideremos agora  $u_2^*$  solução distribucional de

$$\begin{cases} -\Delta u_2^* + g(u_2^*) = \mu_2^* & \text{em } \Omega \\ u_2^* = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Afirmamos que  $g_n(u_{2,n}) \longrightarrow g(u_2^*)$  em  $L^1(\Omega)$ . De fato, com o mesmo argumento dado na prova da Proposição 3.22, temos  $u_{2,n} \downarrow u_2^*$  q.t.p em  $\Omega$ .

Em particular, aplicando o Lema de Dini, veja Lema 3.20, combinado com o Lema 3.21, obtemos

$$g_n(u_{2,n}) \longrightarrow g(u_2^*) \quad \text{q.t.p em } \Omega. \quad (3.54)$$

Como  $g_n(u_{1,n}) \longrightarrow g(u_1^*)$  em  $L^1(\Omega)$ , pela recíproca do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [19, Proposition 4.9], existe uma função  $H \in L^1(\Omega)$  tal que

$$|g_n(u_{1,n})| \leq H + g(u_1^*).$$

Queremos determinar  $G \in L^1(\Omega)$  de modo que  $|g_n(u_{2,n})| \leq G$  q.t.p em  $\Omega$ .

Se  $g_n(u_{2,n}) \geq 0$ , munidos de (3.51), obtemos

$$0 \leq g_n(u_{2,n}) \leq g_1(u_{1,n}) \leq 1 + g(u_1^*)$$

Por outro lado

$$\int_{\Omega} |g_n(u_{2,n})| \leq \|\mu_2\|_{L^1(\Omega)},$$

afinal

$$-\Delta u_{2,n} + g_n(u_{2,n}) = \mu_2$$

no sentido distribucional. Então,

$$\int_{\Omega} |g(u_1^*)| \leq \|\mu_2\|_{L^1(\Omega)}.$$

Assim, note

$$g(u_2^*) \leq g(u_{2,n}).$$

Se  $g(u_{2,n}) \leq 0$ , tem-se

$$-g(u_{2,n}) \leq g(u_2^*).$$

Desse modo

$$G = |H| + |g(u_1^*)| + |g(u_2^*)|.$$

Logo,

$$|g_n(u_{2,n})| \leq G \in L^1(\Omega).$$

Disso, combinado com (3.54) e com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue a afirmação segue. Novamente pelo mesmo argumento da Proposição 3.22, segue

$$u_{2,n} \longrightarrow u_2^* \quad \text{em } L^1(\Omega). \quad (3.55)$$

Por fim, para toda  $\phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ , vale

$$\int_{\Omega} u_{2,n} \Delta \phi + \int_{\Omega} g_n(u_{2,n}) \phi = \int_{\Omega} \phi d\mu_2.$$

Por (3.55) e pela afirmação anterior, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u_{2,n} \Delta \phi &= \int_{\Omega} u_2^* \Delta \phi \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} g_n(u_{2,n}) \phi &= \int_{\Omega} g(u_2^*) \phi. \end{aligned}$$

Portanto, passando o limite obtemos que

$$\int_{\Omega} u_2^* \Delta \phi + \int_{\Omega} g(u_2^*) \phi = \int_{\Omega} \phi d\mu_2,$$

de modo que  $\mu_2$  é uma boa medida. □

O resultado a seguir, é uma consequência interessante da proposição anterior. Em particular, podemos aplicá-lo no seguinte sentido: dado  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  e a decomposição de Jordan  $\mu = \mu^+ - \mu^-$ , se  $\mu^+$  é uma boa medida para o problema  $(P_3)$ , então  $\mu^-$  também o é.

**Proposição 3.28.** Se  $\mu \leq 0$ , então  $\mu$  é uma boa medida para  $(P_3)$ .

*Demonstração.* Se  $\mu \equiv 0$ , medida nula, basta considerar  $u = 0$ , teremos  $g(0) = 0$ , logo o problema  $(P_3)$  admite solução e  $\mu$  é uma boa medida. Se  $\mu < 0$ , basta usar o Teorema 3.27 e o resultado segue.  $\square$

Uma propriedade relevante das boas medidas é dada a seguir, sua demonstração utiliza fortemente o fato da medida reduzida  $\mu^*$  ser a maior boa medida menor do que ou igual a  $\mu$  no sentido da Definição 3.26.

**Proposição 3.29.** Se  $\mu_1, \mu_2$  são boas medidas para  $(P_3)$ , então  $\sup\{\mu_1, \mu_2\} = \mu$  é uma boa medida.

*Demonstração.* Sendo  $\mu = \sup\{\mu_1, \mu_2\}$ . Temos

$$\mu_1 \leq \mu \quad \text{e} \quad \mu_2 \leq \mu.$$

Considere  $\mu^*$  a medida reduzida de  $\mu$ , isto é,  $\mu^*$  é a maior boa medida que satisfaz

$$\mu^* \leq \mu.$$

Assim,

$$\mu_1 \leq \mu^* \quad \text{e} \quad \mu_2 \leq \mu^*$$

isto é,

$$\mu = \sup\{\mu_1, \mu_2\} \leq \mu^*$$

Segue do Teorema 3.27 que  $\mu$  é uma boa medida.  $\square$

A esta altura o leitor pode estar se perguntando sob quais condições o problema  $(P_3)$  admite solução distribucional. Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , o problema  $(P_3)$  foi investigado pelo matemático Juan Luis Vázquez a qual propôs uma caracterização para as boas medidas para o problema  $(P_3)$ . A seguir apresentamos as ferramentas necessárias e o teorema de existência de solução proposto por Vázquez em [23].

A definição de valores críticos é um conceito técnico e específico para o Problema de Dirichlet semilinear com fonte em medida. Este conceito, enunciado em [23], é uma ferramenta essencial para caracterizar as boas medidas.

**Definição 3.30** (Valores críticos). Para cada função  $g$ , associaremos um par de **valores críticos**,  $c^-(g)$  e  $c^+(g)$  dados por

$$\begin{aligned} c^+(g) &= \sup \left\{ c \geq 0 \mid g^+ \left( \frac{c}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{|x|} \right) \right) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2) \right\} \\ c^-(g) &= \inf \left\{ c \leq 0 \mid g^+ \left( \frac{c}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{|x|} \right) \right) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2) \right\}, \end{aligned}$$

onde  $g^+(t) = \sup g(t)$ .

Á luz do Teorema de decomposição para medidas de Radon, veja Teorema 1.39, podemos decompor  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , do seguinte modo:

$$\mu = \mu_1 + \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i \delta_{x_i},$$

onde  $x_i \in \Omega$  e  $\mu_i = \mu(\{x_i\})$ . Em que  $\mu_2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i \delta_{x_i}$  é dita **puramente atômica** e  $\mu_1$  é **não atômica**. Além disso, as medidas são mutualmente singulares, isto é,  $\mu_1 \perp \mu_i$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

Veremos que a existência de solução para  $(P_3)$  consiste em determinar os coeficientes  $\mu_i$  e verificar a condição de subcriticalidade, veja a próxima definição.

**Definição 3.31** (Subcriticalidade). Se a medida  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$  satisfizer

$$c^- \leq \mu_i \leq c^+,$$

isto é, se os coeficientes do ponto de massa  $\mu_i$  não excedem os valores críticos, diremos que  $\mu$  é **subcrítico** com respeito a  $g$ .

Em posse da definição de subcriticalidade, enunciaremos o caso geral do Teorema de Vázquez:

**Teorema 3.32** (Teorema de Vázquez - caso geral). Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio. Uma medida  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  é uma boa medida para o problema  $(P_3)$  se, e somente se,  $\mu$  é subcrítico com respeito a  $g$ .

*Demonstração.* A prova deste teorema, embora seja de natureza técnica, não será apresentada aqui. No entanto, para aqueles que desejam explorar este teorema e aprofundar neste tópico recomendamos a leitura de [23].

Por fim, em resumo, podemos caracterizar as boas medidas para o problema  $(P_3)$  pela



decomposição:

$$\mu = \mu_1 + \sum_{i \in \mathbb{N}} \min\{\mu_i, c^+\} \delta_{x_i},$$

onde  $x_i \in \Omega$  e  $\mu_i = \mu(\{x_i\})$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ . □

Para o estudo do problema (P<sub>3</sub>), com  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ , sugerimos o estudo de [3] e [5].

### 3.4 caso especial $g(u) = e^u - 1$ e $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$

Considere  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio com fronteira suave. Na Seção 3.1, mostramos que o problema de Dirichlet (P<sub>3</sub>) com semilinearidade  $\mu \in W^{-1,2}(\Omega)$  admite solução. Tendo em vista que  $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ , com  $1 < p < +\infty$  e sendo  $L^p(\Omega)$  um espaço de Banach reflexivo para  $1 < p < +\infty$ , então

$$(L^p(\Omega))' \hookrightarrow W^{-1,2}(\Omega).$$

Isso significa que o problema (P<sub>3</sub>) com  $\mu \in L^p(\Omega)$  também admite solução distribucional com  $1 < p < +\infty$ .

Na Seção 3.2, discutimos que o problema de Dirichlet não linear com densidade  $\mu \in L^1(\Omega)$  admite solução distribucional.

No entanto, a existência de solução distribucional pode não ser garantida quando a fonte é uma medida de Radon finita, isto é,  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ , conforme visto na Seção 3.3.

Desse modo, considerando  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , o intuito desta seção é estudar a existência de solução para o problema semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{P}_5)$$

com dado  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ .

A abordagem adotada é inspirada na tese [21] e faz uso de argumentos do utilizados na demonstração do referenciado Teorema de Vázquez, veja [23].

Agora, determinaremos as boas medidas para o problema de Dirichlet (P<sub>5</sub>) em  $\mathbb{R}^2$ . Inicialmente notemos que a função  $g$  dada por

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto g(t) = e^t - 1 \end{aligned}$$

é uma função contínua e não-decrescente, uma vez que  $g'(t) = e^t \geq 0$ . Além disso,  $g(0) = 0$  e quando  $t < 0$ , temos  $-t > 0$ , assim

$$e^t = \frac{1}{e^{-t}} < 1.$$

Logo,  $e^t - 1 < 0$ . Agora, se  $t > 0$ , temos  $e^t > 1$ , conseqüentemente  $e^t - 1 > 0$ , isto é,  $g$  satisfaz a Condição do Sinal.

O Teorema a seguir é um caso especial do Teorema 3.32 com semilinearidade  $g(u) = e^u - 1$ . Sua demonstração é inspirada em [23] e [21].

**Teorema 3.33.** O problema  $(P_5)$  admite solução distribucional, se e somente se, a densidade satisfaz

$$\mu = \mu_1 + \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i \delta_{x_i},$$

para todo  $x_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mu_i = \mu(\{x_i\}) \leq 4\pi$ , isto é,

$$\mu = \mu_1 + \sum_{i \in \mathbb{N}} \min\{\mu_i, 4\pi\} \delta_{x_i}.$$

*Demonstração.* Inicialmente, determinaremos os valores críticos  $c^+(g)$  e  $c^-(g)$ . Primeiro, note

$$\begin{aligned} g\left(\frac{c}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) &= e^{\frac{c}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right)} - 1 \\ &= \left(e^{\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)}\right)^{\frac{c}{2\pi}} \\ &= \left(\frac{1}{|x|}\right)^{\frac{c}{2\pi}} - 1 \\ &= \frac{1}{|x|^{\frac{c}{2\pi}}} - 1 \\ &= \frac{1 - |x|^{\frac{c}{2\pi}}}{|x|^{\frac{c}{2\pi}}}. \end{aligned}$$

Localmente, para a bola aberta centrada na origem de  $\mathbb{R}^2$  e raio  $R > 0$ , denotada por  $B(0, R)$  temos

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R)} \left| g\left(\frac{c}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) \right| &= \int_{B(0,R)} \left| e^{\frac{c}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right)} - 1 \right| \\ &= \int_{B(0,R)} \left| \frac{1 - |x|^{\frac{c}{2\pi}}}{|x|^{\frac{c}{2\pi}}} \right|. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Integração por Coordenadas Polares [11, Theorem 2.49], com  $|x| = t$ , temos

$$\begin{aligned} \int_0^R \int_{S(0,t)} \left| \frac{1 - t^{\frac{c}{2\pi}}}{t^{\frac{c}{2\pi}}} t \right| ds dt &= \int_0^R \left| \frac{t - t^{\frac{c}{2\pi} + 1}}{t^{\frac{c}{2\pi}}} \right| ds dt \\ &= C \int_0^R \left| t^{1 - \frac{c}{2\pi}} - t \right| dt \\ &= C \left| \frac{t^{2 - \frac{c}{2\pi}}}{2 - \frac{c}{2\pi}} \Big|_0^R - \frac{t^2}{2} \Big|_0^R \right| \\ &= C \left| \frac{R^{2 - \frac{c}{2\pi}}}{2 - \frac{c}{2\pi}} - \frac{R^2}{2} \right| \end{aligned}$$

com  $C = |S(0, t)| > 0$ . Portanto,

$$\int_{B(0,R)} \left| g\left(\frac{c}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) \right| = \left| \frac{R^{2 - \frac{c}{2\pi}}}{2 - \frac{c}{2\pi}} - \frac{R^2}{2} \right| \quad (3.56)$$

Considere agora  $g^+\left(\frac{c}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) = \sup g^+\left(\frac{c}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)$ , daí

$$g^+\left(\frac{c}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$$

se e somente se,

$$\sup g^+\left(\frac{c}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2).$$

Assim, a integral

$$\int_{B(0,R)} \left| g^+\left(\frac{c}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) \right| = \left| \frac{R^{2 - \frac{c}{2\pi}}}{2 - \frac{c}{2\pi}} - \frac{R^2}{2} \right| \quad (3.57)$$

está bem definida localmente, se e somente se,

$$2 - \frac{c}{2\pi} > 0,$$

ou seja, para qualquer número real  $0 \leq c < 4\pi$ . Tomando o supremo de tais valores reais, temos

$$c^+(g) = \sup_{0 \leq c < 4\pi} \left\{ g^+ \left( \frac{c}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{|x|} \right) \right) \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2) \right\} = 4\pi.$$

Determinaremos agora  $c^-(g)$ . Com desenvolvimento análogo, localmente é válido:

$$\int_{B(0,R)} \left| g^+ \left( \frac{c}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{|x|} \right) \right) \right| = \left| \frac{R^{2-\frac{c}{2\pi}}}{2-\frac{c}{2\pi}} - \frac{R^2}{2} \right|$$

Agora, vale observe que para qualquer número real  $c < 0$ , a integral acima está bem definida, isto é,

$$c^-(g) = \inf_{c \leq 0} \left\{ g^+ \left( \frac{c}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{|x|} \right) \right) \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2) \right\} = -\infty$$

Ademais, do Teorema 3.27 a medida  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  é uma boa medida para  $(P_5)$  se, e somente se, a parte positiva  $\mu^+$  é também uma boa medida. Considerando a subcriticalidade de  $\mu$  com respeito a  $g(u) = e^u - 1$ , então  $\mu(\{x\}) \leq 4\pi$ , se e somente se,  $\mu^+(\{x\}) \leq 4\pi$  para todo  $x \in \Omega$ . Portanto, para a demonstração desse teorema podemos considerar somente a parte positiva de  $\mu$ , isto é,  $\mu^+$ . A Demonstração seguirá em 3 passos, sendo o Passo 3 a demonstração da recíproca.

**PASSO 1:** Suponha que exista  $\varepsilon > 0$  tal que  $\mu(\{x\}) \leq 4\pi - \varepsilon$ , para  $x \in \Omega$ . Pelo Lema de Urysohn, podemos construir uma sequência de funções  $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ , de modo que para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se  $0 \leq \zeta_n \leq 1$  e  $\zeta_n = 1$  no conjunto

$$\bar{\Omega}_{\frac{1}{n}} = \left\{ x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considere  $\mu_n = \zeta_n \mu$  e  $u_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$  solução distribucional do problema:

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \mu_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

para todo  $x \in \Omega$ . Considere  $r > 0$  e  $\varepsilon > 0$  satisfazendo

$$\mu_n(B(x,r) \cap \Omega) \leq 4\pi - \varepsilon.$$

Em virtude de  $\overline{\Omega}_{\frac{1}{n}} \Subset \Omega$ , segue do Corolário 2.13:

$$e^{u_n} \in L^1(\overline{\Omega}_{\frac{1}{n}}),$$

em outras palavras,

$$e^{u_n} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega). \quad (3.58)$$

Observe agora que para cada  $n \in \mathbb{N}$  a função  $\zeta_n$  se anula no conjunto  $\Omega/\overline{\Omega}_{\frac{1}{n}}$ , isto é, próximo da fronteira de  $\Omega$ . Tendo em vista que  $-\Delta u_n = \zeta_n \mu$ , então  $u_n$  é harmônica no conjunto  $\Omega/\overline{\Omega}_{\frac{1}{n}}$ . Logo, para algum  $n \in \mathbb{N}$ , sendo  $u_n$  uma função harmônica, pelo Princípio do Máximo Fraco,  $u_n$  atinge seu máximo na fronteira, logo é limitada em  $\Omega/\overline{\Omega}_{\frac{1}{n}}$ . Combinando este fato com (3.58), obtemos

$$e^{u_n} \in L^1(\Omega).$$

Portanto, o problema de Dirichlet semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u_n + e^{u_n} - 1 = \mu_n + e^{u_n} - 1 & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{P}_n)$$

admite solução, uma vez que  $\mu_n + e^{u_n} - 1 \in L^1(\Omega)$  é uma boa medida. Como  $e^{u_n} - 1 \geq 0$ , temos  $\mu_n \leq \mu_n + e^{u_n} - 1$  e  $\mu_n$  é também uma boa medida para o problema  $(\text{P}_n)$ , segue do Teorema 3.27.

Agora, tomando  $n \rightarrow +\infty$ , afirmamos que  $\mu_n \rightarrow \mu$  fortemente em  $\mathcal{M}(\Omega)$ . De fato, pelo Teorema de Decomposição de Jordan, veja Teorema 1.11, podemos decompor  $\mu_n$  do seguinte modo:

$$\mu_n = \mu \zeta_n = \mu^+ \zeta_n - \mu^- \zeta_n,$$

pela unicidade da decomposição, tem-se  $\mu_n^+ = \mu^+ \zeta_n$  e  $\mu_n^- = \mu^- \zeta_n$ .

Agora, tendo em vista o Proposição 3.28, podemos considerar apenas a parte positiva da medida, assim

$$(\mu - \mu_n)^+ = \mu^+(1 - \zeta_n).$$

Pela construção da sequência  $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , para todo  $x \in \Omega$  vale:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \zeta_n(x) = 0,$$

em particular,  $\mu^+$ -q.t.p em  $\Omega$ .

Uma vez que  $|\zeta_n| < 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então

$$|1 - \zeta_n| \leq 1 + |\zeta_n| < 2.$$

Logo,  $1 - \zeta_n \in L^1(\Omega, \mu^+)$ . Agora, estamos nas hipóteses do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para a sequência  $(1 - \zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  com respeito a medida  $\mu^+$ , assim

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (1 - \zeta_n) d\mu^+ = 0.$$

Por fim, como afirmado:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mu - \mu_n\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_{\Omega} (1 - \zeta_n) d\mu^+ \right) = 0.$$

Pelo Proposição 3.16, sucede que  $\mu$  é uma boa medida para o problema  $(P_n)$ .

**PASSO 2:** Agora, suporemos que  $\mu(\{x\}) \leq 4\pi$  para todo  $x \in \Omega$ . Este passo consistirá em duas afirmações.

**Afirmção 1:** Sejam  $x_1, \dots, x_k \in \Omega$  de modo que  $\mu(\{x_i\}) \geq 2\pi$  para cada  $i = 1, \dots, k$ . Então, o conjunto  $A = \{x_1, \dots, x_k\}$  é finito.

Com efeito, inicialmente observemos que  $|\mu|(A) \leq |\mu|(\Omega) < +\infty$ . Se existisse  $(i_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset (i)_{i \in \mathbb{N}}$ , tal que  $\mu(\{x_{i_j}\})_{j \in \mathbb{N}} \geq 2\pi$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ , teríamos

$$\begin{aligned} |\mu|(A) &= |\mu|\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\}\right) \\ &\geq |\mu|\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{x_{i_j}\}\right) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} |\mu|(\{x_{i_j}\}) \\ &\geq \sum_{j \in \mathbb{N}} 2\pi \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

que é uma contradição.

**Afirmção 2:** Dado  $0 < \alpha < 1$ , existe  $\varepsilon > 0$  satisfazendo  $\alpha\mu(\{x\}) \leq 4\pi - \varepsilon$  para todo  $x \in \Omega$ . De fato, pela Afirmção 1, se  $x \in \Omega/A$  temos

$$\alpha\mu(\{x\}) \leq 2\pi\alpha. \quad (3.59)$$

Caso,  $x \in A$ , vale

$$\alpha\mu(\{x\}) \leq 4\alpha\pi,$$

somando e subtraindo  $4\pi$  na desigualdade anterior:

$$\alpha\mu(\{x\}) \leq 4\alpha\pi + 4\pi - 4\pi = 4\pi - 4\pi(1 - \alpha) \quad (3.60)$$

Já que  $0 < \alpha < 1$ , tomemos  $\varepsilon = 4\pi(1 - \alpha) > 0$ . Disso e pelas desigualdades (3.59) e (3.60), para todo  $x \in \Omega$ , obtemos

$$\alpha\mu(\{x\}) \leq 4\pi - \varepsilon.$$

Logo, segue do Passo 1 que a medida  $\alpha\mu$  é uma boa medida para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u_n + e^{u_n} - 1 = \mu_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Por fim, tomando uma sequência  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n - 1 = 0,$$

mostremos que  $\alpha_n\mu \rightarrow \mu$  fortemente em  $\mathcal{M}(\Omega)$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Por certo, pelo Teorema de Decomposição de Jordan, novamente considerando apenas a parte positiva, temos

$$\alpha_n\mu - \mu = (\alpha_n - 1)\mu^+$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\alpha_n\mu - \mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_{\Omega} (\alpha_n - 1) d\mu^+ \right) \\ &= \mu^+(\Omega) \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n - 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, como o conjunto das boas medidas é fechado com respeito a convergência forte, segue  $\mu$  é uma boa medida para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u_n + e^{u_n} - 1 = \mu_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

**PASSO 3:** Reciprocamente, suponha que exista  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  boa medida para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e que para algum  $x_0 \in \Omega$ , fixado, tenhamos  $\mu(\{x_0\}) > 4\pi$ .

Desse modo, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  satisfazendo

$$4\pi < \lambda < \mu(\{x_0\}).$$

Agora, considere a medida  $\lambda \delta_{x_0}$ . Dado  $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ , suponha  $x_0 \in A$ , então  $\delta_{x_0}(A) = 1$  e

$$\lambda = \lambda \delta_{x_0}(A) < \mu(\{x_0\}) \leq \mu(A).$$

Por outro lado, se  $x_0 \notin A$ , vale que  $\delta_{x_0}(A) = 0$ , por consequência  $\lambda \delta_{x_0}(A) = 0$ . Sabendo que  $\mu(A) \geq 0$ , então

$$\mu(A) \geq \lambda \delta_{x_0}(A) = 0.$$

Agora, segue diretamente do Teorema 3.27 que  $\lambda \delta_{x_0}$  é uma boa medida para o problema

$$\begin{cases} -\Delta v + e^v - 1 = \lambda \delta_{x_0} & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.61)$$

com  $v$  solução distribucional.

Ademais, seja  $w$  a solução distribucional para o problema de Dirichlet linear com densidade  $\lambda \delta_{x_0} \in \mathcal{M}(\Omega)$ :

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda \delta_{x_0} & \text{em } \Omega \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.62)$$

Combinando esses dois problemas:

$$\begin{cases} -\Delta v + \Delta w = -e^v + 1 & \text{em } \Omega \\ v - w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Tendo em vista que  $-e^v + 1 \in L^1(\Omega)$  e  $\Delta(v - w) \in L^1(\Omega)$ , pelo Corolário 2.10 obtemos

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{v}(x_0, r) - \bar{w}(x_0, r)}{\ln(1/r)} = 0. \quad (3.63)$$



Como  $w \in L^1(\Omega)$ ,  $-\Delta w = \lambda \delta_{x_0}$  no sentido distribucional e  $x_0 \in B(x_0, r)$ , as seguintes propriedades se verificam para o problema (3.62):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \liminf_{r \rightarrow 0^+} \lambda \delta_{x_0}(B(x_0, r)) &= \frac{\lambda}{2\pi} \liminf_{r \rightarrow 0^+} \delta_{x_0}(B(x_0, r)) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \limsup_{r \rightarrow 0^+} \lambda \delta_{x_0}(B(x_0, r)) &= \frac{\lambda}{2\pi} \limsup_{r \rightarrow 0^+} \delta_{x_0}(B(x_0, r)) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi}. \end{aligned}$$

Logo,  $\liminf_{r \rightarrow 0^+} \lambda \delta_{x_0}(B(x_0, r)) = \limsup_{r \rightarrow 0^+} \lambda \delta_{x_0}(B(x_0, r))$ .

Retomando em  $4\pi < \lambda < \mu(\{x_0\})$ , temos  $\frac{\lambda}{2\pi} > 2$ . Além disso, devido ao resultado anterior:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{w}(x_0, r)}{\ln(1/r)} = \frac{1}{2\pi} \lambda \delta_{x_0}(B(x_0, r)) = \frac{\lambda}{2\pi} > 2.$$

Agora, em posse de (3.63), segue:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{v}(x_0, r)}{\ln(1/r)} - \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{w}(x_0, r)}{\ln(1/r)} \\ &= \frac{\bar{v}(x_0, r)}{\ln(1/r)} - \frac{\lambda}{2\pi}. \end{aligned}$$

Portanto,  $\frac{\bar{v}(x_0, r)}{\ln(1/r)} = \frac{\lambda}{2\pi} > 2$ .

Por outro lado, seja  $2 < \beta < \frac{\lambda}{2\pi}$ , então existe  $r_0 > 0$  de modo que para todo  $r < r_0$  vale:

$$\frac{\bar{v}(x_0, r)}{\ln(1/r)} \geq \beta.$$

Fixando  $\delta < r_0$  e integrando em coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, \delta)} e^v &= \int_0^\delta \left( \int_{\partial B(x_0, \rho)} e^v \, d\sigma \right) \, d\rho \\ &= \int_0^\delta \left( \int_{\partial B(x_0, \rho)} \frac{2\pi\rho}{2\pi\rho} e^v \, d\sigma \right) \, d\rho \\ &= 2\pi \int_0^\delta \left( \int_{\partial B(x_0, \rho)} \frac{\rho}{2\pi\rho} e^v \, d\sigma \right) \, d\rho \\ &= 2\pi \int_0^\delta \left( \rho \int_{\partial B(x_0, \rho)} \frac{1}{2\pi\rho} e^v \, d\sigma \right) \, d\rho. \end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Jensen,

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^\delta \left( \rho \int_{\partial B(x_0, \rho)} \frac{1}{2\pi\rho} e^v \, d\sigma \right) \, d\rho &\geq 2\pi \int_0^\delta \rho e^{\bar{v}(x_0, \rho)} \, d\rho \\ &\geq 2\pi \int_0^\delta \rho e^{\beta \ln(1/\rho)} \, d\rho \\ &= 2\pi \int_0^\delta \rho \left( e^{\ln(1/\rho)} \right)^\beta \, d\rho \\ &= 2\pi \int_0^\delta \rho \left( \frac{1}{\rho} \right)^\beta \, d\rho \\ &= 2\pi \int_0^\delta \frac{1}{\rho^{\beta-1}} \, d\rho \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

pois  $2 < \beta \leq \frac{\lambda}{2\pi}$ . Contradizendo o fato de  $e^v \in L^1(B(x_0, \delta))$ . □

# Bibliografia

- [1] Adams, R. A. and Fournier, J. J. (2003). *Sobolev Spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2 edition.
- [2] Bartle, R. G. and Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to Real Analysis*. Wiley, 4 edition.
- [3] Bénilan, P. and Brezis, H. (2003). Nonlinear problems related to the thomas-fermi equation. *Journal of Evolution Equations*, 3:673–770.
- [4] Boccardo, L. and Croce, G. (2013). *Elliptic Partial Differential Equations*. De Gruyter, Berlin, Boston.
- [5] Brezis, H. (1981-1982). Problèmes elliptiques et paraboliques non linéaires avec données mesures. *Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) dit aussi Séminaire Goulaouic-Schwartz*.
- [6] Brezis, H. (2010). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York.
- [7] Brezis, H., Marcus, M., and Ponce, A. C. (2007). *Chapter 4. Nonlinear Elliptic Equations with Measures Revisited*, pages 55–110. Princeton University Press, Princeton.
- [8] Brezis, H. and Merle, F. (1991). Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of  $-\delta(u) = v(x)e^u$  in two dimensions. *Communications in Partial Differential Equations*, 16(8-9):1223–1253.
- [9] Brezis, H. and Ponce, A. C. (2013). Kato's inequality when  $\delta u$  is a measure.
- [10] Evans, L. C. (2010). *Partial differential equations*. American Mathematical Society, Providence, R.I.
- [11] Folland, G. (2013). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley.
- [12] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S. (2001). *Strong Solutions*, pages 219–257. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- [13] Heinonen, J., Kilpeläinen, T., and Martio, O. (2012). *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications.
- [14] Kadets, V. (2018). *A Course in Functional Analysis and Measure Theory*. Universitext. Springer.

- [15] Lima, E. L. (2014). *Curso de Análise, Volume 1*. Projeto Euclides, 1 edition.
- [16] Littman, W., Stampacchia, G., and Weinberger, H. F. (1963). Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, 17(1-2):43–77.
- [17] Lopez-gomez, J. (2013). *Linear Second Order Elliptic Operators*. World Scientific Publishing Company.
- [18] Medeiros, L. A. d. J. and Milla Miranda, M. A. (2019). *Espaços de Sobolev*. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática.
- [19] Ponce, A. (2016). *Elliptic PDEs, Measures and Capacities. From the Poisson Equation to Nonlinear Thomas-Fermi Problems*. European Mathematical Society.
- [20] Ponce, A. C. (2017). Selected problems on elliptic equations involving measures.
- [21] Presoto, A. E. (2011). *Soluções Limites para Problemas Elípticos Envolvendo Medidas*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas.
- [22] Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, 3rd edition.
- [23] Vazquez, J. L. (1983). On a semilinear equation in  $\mathbb{R}^2$  involving bounded measures. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 95(3-4):181–202.