Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Residual Nilpotente de Grupos Finitos

por

Eliana Carla Rodrigues

Brasília

2023

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Residual Nilpotente de Grupos Finitos

por

Eliana Carla Rodrigues

sob orientação do

Prof. Dr. Emerson Ferreira de Melo

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, PPGMat–UnB, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutora em Matemática.

Agradecimentos

A todos os meus familiares. Em especial, minha mãe Eva, meu pai Paulo e meu irmão Carlos. À Duda e Nala, por alegrem meus dias. A vocês todo o meu amor e gratidão.

Ao Professor Emerson Ferreira de Melo, pela orientação, paciência e dedicação.

Aos meus amigos de longa data, Lais, Éder e Nadya. Vocês são meus irmãos de alma, agradeço por estarem sempre presentes na minha vida e por tanto carinho e cuidado.

Aos amigos que fiz durante o doutorado, em especial ao Alan, pela amizade, companheirismo e toda a ajuda para que a vida se tornasse mais leve. À Anna Carolina, por me apoiar e ser minha companheira de estudos nas disciplinas de segunda área. Ao Diego, por ser minha dupla na disciplina de Grupos Finitos II. À Bruna e ao Ricardo, pelos vários finais de semana de estudos. À Maria Edna, pelos estudos para a qualificação de primeira área, por todas as conversas e por todo o apoio emocional. Ao Marcos, pelo companheirismo, cuidado, pelas conversas, pelas ajudas com o tex e com todos os problemas técnicos do meu novo lar. Ao Irving, Victor, Gabriel e Thiago, por serem os melhores companheiros de sala.

À minha terapeuta, Nayara Alves, por me acompanhar nos momentos mais difíceis.

Aos professores Hílton, Rione e Cleuda, da Escola de Yoga Clássico. Os ensinamentos que aprendi na Escola ajudaram a me manter firme na execução deste trabalho.

Aos professores Cátia e Raimundo, que tanto contribuíram para a minha formação.

Aos professores Manuela Souza, Jhone Caldeira, Martino Garonzi e Alex Carrazedo. Pelas correções, sugestões e contribuições para a versão final deste trabalho.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás - Campus Formosa, pela concessão de afastamento integral das minhas atividades docentes por um ano.

A todos os funcionários do Departamento de Matemática - UnB.

À Universidade de Brasília, pela infraestrutura e todos recursos oferecidos para a realização deste trabalho.

Dedicatória

À minha mãe, Eva.

Resumo

Seja A um grupo agindo por automorfismos sobre um grupo finito G. O objetivo deste trabalho é demonstrar que propriedades do residual nilpotente de $C_G(a)$, onde $a \in A$, estão relacionadas às correspondentes propriedades do residual nilpotente de G. Considerando um grupo diedral $D = \langle \alpha, \beta \rangle$, gerado por duas involuções α e β, agindo coprimamente por automorfismos sobre um grupo finito G de tal forma que $C_G(\alpha\beta) = 1$, mostramos que a ordem e o posto de $\gamma_\infty(G)$ são limitados, respectivamete, em função de $|D|$ e da ordem e do posto de $\gamma_\infty(C_G(\alpha))$ e $\gamma_\infty(C_G(\beta))$. Agora sejam um p-grupo finito P agindo por automorfismos sobre um grupo finito G de tal forma que $C_G(M) = 1$, onde M é um subgrupo maximal de P, e todos os elementos em $P \backslash M$ tem ordem p. Mostramos que se $\gamma_\infty(C_G(x))$ tem ordem no máximo m para qualquer $x \in P \backslash M$, então $\gamma_\infty(G)$ tem ordem limitada em função de m e da ordem de P. Além disso, se $\gamma_\infty(C_G(x))$ tem posto no máximo r para qualquer $x \in P \backslash M$, então $\gamma_\infty(G)$ tem posto limitado em função de m e da ordem de P. Por fim, consideramos um grupo de Frobenius FH com núcleo F e complemento H, agindo coprimamente por automorfismos sobre um grupo finito G de tal forma que $C_G(F) = 1$ e mostramos que se $\gamma_\infty(C_G(H))$ tem ordem no máximo m, então $\gamma_\infty(G)$ tem ordem limitada apenas em função da ordem do complemento H e da ordem de $\gamma_\infty(C_G(H))$. Além disso, o posto de $\gamma_\infty(G)$ é limitado apenas em termos da ordem do complemento H e do posto de $\gamma_\infty(C_G(H))$.

Abstract

Let A be a group acting by automorphisms on a finite group G. The goal of this work is to prove that properties of nilpotent residual of $C_G(a)$ where $a \in A$ are related with correspondents properties of nilpotent residual of G. Considering a dihedral group $D = \langle \alpha, \beta \rangle$, generated by two involutions α and β, acting coprimely on a finite group G such that $C_G(\alpha\beta) = 1$, we prove that the order and rank of $\gamma_\infty(G)$ are limited, respectively, in terms of $|D|$ and the order and rank of $\gamma_\infty(C_G(\alpha))$ e $\gamma_\infty(C_G(\beta))$. In the case where a finite p-group P acts by automorphisms on a finite group G in such a way that $C_G(M) = 1$, where M is a maximal subgroup of P and all elements in $P \backslash M$ have order p. We will prove that if $\gamma_\infty(C_G(x))$ has order at most m for any $x \in P \backslash M$, then $\gamma_\infty(G)$ has $(m, |P|)$-bounded order. Moreover if $\gamma_\infty(C_G(x))$ has rank at most r for any $x \in P \backslash M$, then $\gamma_\infty(G)$ has $(r, |P|)$-bounded rank. Finally, we consider a Frobenius group FH with kernel F and complement H, acting coprimely by automorphisms on a finite group G in such a way that $C_G(F) = 1$. We will prove that if $\gamma_\infty(C_G(H))$ has order at most m, then the order of $\gamma_\infty(G)$ is bounded only by the order of complement H and the order of $\gamma_\infty(C_G(H))$. Moreover, the rank of $\gamma_\infty(G)$ is bounded only in terms of the order of complement H and the rank of $\gamma_\infty(C_G(H))$.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

Seja G um grupo finito e φ um elemento do grupo de automorfismos de G. Denotamos por $C_G(\varphi)$ o subgrupo dos pontos fixos de φ em G, ou seja,

$$C_G(\varphi) = \{x \in G; x^{\varphi} = x\}.$$

Quando este subgrupo é trivial, dizemos que φ é livre de pontos fixos em G. De maneira análoga, quando consideramos A um subgrupo do grupo de automorfismos de G, o centralizador de A em G é definido por

$$C_G(A) = \{x \in G; x^{\varphi} = x, \text{para todo } \varphi \in A\}.$$

No caso em que $C_G(A) = 1$, dizemos que A é livre de pontos fixos em G.

Seja G um grupo finito e considere φ um automorfismo de G cuja ordem é um número primo. Existem muitos resultados que mostram como a estrutura do subgrupo $C_G(\varphi)$ exerce influência sobre a estrutura do grupo G. Por exemplo, se φ tem ordem dois e é livre de pontos fixos, então G é abeliano. Outro resultado bastante conhecido é o Teorema de Thompson [30], o qual afirma que se um grupo finito G admite um automorfismo livre de pontos fixos de ordem prima, então G é nilpotente.

Motivado pelo Problema 17.72 do Kourovka Notebook [17] proposto por Mazurov em 2010, o qual citamos abaixo, o caso em que um grupo de Frobenius FH, com núcleo F e complemento H, age sobre um grupo finito G de tal forma que a ação do núcleo F é livre de pontos fixos vem ganhando destaque. Recorde que um grupo de Frobenius $A = FH$, com núcleo F e complemento H, pode ser caracterizado como um grupo finito

A que é o produto semidireto de um subgrupo normal F por H tal que $C_F(h) = 1$ para todo $h \in H^{\#}$.

Problema 17.72 do Kourovka Notebook [17]: Seja FH um grupo de Frobenius com núcleo F e complemento H. Suponha que FH aja sobre um grupo finito G de modo que GF seja um grupo de Frobenius com núcleo G e complemento F.

i) A classe de nilpotência de G é limitada em termos da ordem de H e da classe de nilpotência de $C_G(H)$?

ii) O expoente de G é limitado em termos da ordem de H e do expoente de $C_G(H)$?

O primeiro item do Problema 17.72 foi resolvido por N. Yu. Makarenko e P. Shumyatsky em 2010 [24]. O segundo item continua sem resposta. No entanto, foi provado em [16], por E. I. Khukhro, N. Yu. Makarenko e P. Shumyatsky, que se considerarmos que o grupo de Frobenius FH tem núcleo cíclico e que FH age sobre G de tal forma que $C_G(F) = 1$ e $C_G(H)$ tem expoente e, então o expoente de G é limitado em termos de e e da ordem de FH. A partir desse trabalho os autores propuseram os Problemas 18.66 e 18.67 na Edição 18 do Kourovka Notebook.

O Problema 18.66 considera o caso em que o grupo finito G admita a ação de um grupo de Frobenius FH com núcleo F e complemento H de tal forma que o grupo GF também é um grupo de Frobenius com núcleo G complemento F e pergunta se o comprimento derivado de G pode ser limitado em termos da ordem de H e do comprimento derivado de $C_G(H)$.

O Problema 18.67 considera um grupo de Frobenius FH com núcleo F e complemento H agindo por automorfismos sobre um grupo finito G de tal forma que $C_G(F) = 1$ e pergunta se é possível limitar o expoente de G em termos da ordem de F e do expoente de $C_G(H)$.

Recorde que o posto de um grupo finito G é o menor número $r = \mathbf{r}(G)$ tal que todo subgrupo de G pode ser gerado por no máximo r elementos. Quando se considera que o núcleo F age livre de pontos fixos sobre G, E. I. Khukhro, N. Yu. Makarenko e P. Shumyatsky mostraram, em 2014, o seguinte teorema sobre a estrutura de G.

Teorema 2.1.8[Teorema 2.7 [16]] *Suponha que um grupo finito G admita um grupo de Frobenius de automorfismos FH com núcleo F e complemento H tal que $C_G(F) = 1$. Então:*

a) $|G| = |C_G(H)|^{|H|}$;

b) o posto de G é limitado em termos da $|H|$ e do posto de $C_G(H)$;

c) se $C_G(H)$ é nilpotente, então G é nilpotente.

Recentemente, em 2019, E. de Melo e J. Caldeira [2] mostraram o seguinte teorema que limita a classe de nilpotência de G no caso em que temos a ação de um grupo de Frobenius supersolúvel.

Teorema 0.0.1 *Seja FH um grupo de Frobenius supersolúvel com núcleo F e complemento H. Suponha que FH aja sobre um grupo finito G de tal forma que $C_G(F) = 1$ e $C_G(H)$ é nilpotente de classe c. Então a classe de nilpotência de G é limitada em termos de c e da ordem de FH.*

No caso em que o grupo de Frobenius não é supersolúvel esse resultado não é verdadeiro. Isso pode ser visto no Exemplo 5.10 em [16] no qual os autores consideram um grupo de Frobenius de ordem 12, que não é supersolúvel, agindo sobre um grupo finito G e mostram que a classe de nilpotência de G não pode ser limitada.

Em 2013 P. Shumyatsky [29] considerou um grupo diedral agindo sobre G e demonstrou os seguintes resultados.

Teorema 2.2.5 *Seja $D = \langle \alpha, \beta \rangle$ um grupo diedral gerado por duas involuções α e β. Se D age sobre um grupo finito G de tal forma que $C_G(\alpha\beta) = 1$, então $G = C_G(\alpha)C_G(\beta)$ e* $|G| = |C_G(\alpha)||C_G(\beta)|$.

Teorema 2.2.7 *Seja $D = \langle \alpha, \beta \rangle$ um grupo diedral gerado por duas involuções α e β. Se D age sobre um grupo finito G de tal forma que $C_G(\alpha\beta) = 1$ então o posto de G é limitado em termos de $\boldsymbol{r}(C_G(\alpha))$ e $\boldsymbol{r}(C_G(\beta))$.*

Em 2018 E. de Melo e J. Caldeira [4] demonstraram as seguintes generalizações.

Teorema 0.0.2 *Seja A um grupo finito e M é um subgrupo normal de A. Suponha que todos os elementos em $A \backslash M$ tem ordem p. Se A age sobre um p'-grupo finito G de tal forma que $C_G(M) = 1$ e $C_G(x)$ é nilpotente para todo $x \in A \backslash M$, então G é nilpotente.*

No caso particular em que A é um p-grupo os autores limitaram a classe de nilpotência e provaram o seguinte resultado.

Teorema 0.0.3 *Seja P um p-grupo finito e M um subgrupo normal de P. Suponha que todos os elementos em $P \backslash M$ tenham ordem p. Se P age sobre um grupo finito G de tal forma que $C_G(M) = 1$ e $C_G(x)$ é nilpotente de classe no máximo c para todo $x \in P \backslash M$, então G é nilpotente com classe limitada em termos de c e $|P|$.*

Vamos usar a expressão $(a, b, ...)$-limitado para abreviar "limitado superiormente apenas em termos de $a, b, ...$ ". Lembre que o residual nilpotente de G, denotado por $\gamma_\infty(G)$, é o subgrupo obtido pela interseção de todos os subgrupos normais de G cujos quocientes são nilpotentes. Em [5] E. de Melo, A. S. Lima e P. Shumyatsky provaram os seguintes teoremas.

Teorema 3.0.1 *Sejam q um número primo e A um q-grupo finito de expoente q agindo por automorfismos sobre um q'-grupo finito G. Suponha que A tenha ordem pelo menos q^3 e $|\gamma_\infty(C_G(a))| \leqslant m$ para qualquer $a \in A^\#$. Então $\gamma_\infty(G)$ tem ordem (m, q)-limitada.*

Teorema 3.0.2 *Sejam q um número primo e A um q-grupo finito de expoente q agindo por automorfismos sobre um q'-grupo finito G. Suponha que A tenha ordem pelo menos q^3 e $\mathbf{r}(\gamma_\infty(C_G(a))) \leqslant r$ para qualquer $a \in A^\#$. Então $\gamma_\infty(G)$ tem posto (r, q)-limitado.*

O resultado abaixo, apresentado em [3] por de Melo, mostra que sob as mesmas hipóteses dos teoremas acima é possível melhorar a limitação da ordem de $\gamma_\infty(G)$ de modo que não dependa da ordem do grupo A.

Teorema 3.0.4 *Sejam q um número primo e A um q-grupo finito de expoente q agindo por automorfismos sobre um q'-grupo finito G. Suponha que A tem ordem pelo menos q^3 e $|\gamma_\infty(C_G(a))| \leqslant m$ para qualquer $a \in A^\#$. Então $\gamma_\infty(G)$ tem ordem m-limitada.*

Motivados por esses resultados, vamos considerar a ação de um grupo supersolúvel sobre um grupo finito G e estudar como se comporta a ordem e o posto do residual nilpotente de G. Com o objetivo de generalizar os resultados anteriores para grupos de automorfismos supersolúveis, iniciamos a apresentação de novos resultados com a demonstração do seguinte resultado técnico.

Teorema 4.0.1 *Seja A um grupo supersolúvel e B um subgrupo normal de A, cuja ordem é um primo q. Suponha que exista um conjunto de geradores $x_1, \ldots, x_t$ de A tais que cada subgrupo $A_i = \langle B, x_i \rangle$ é um grupo de Frobenius ou um q-grupo abeliano elementar de posto 2. Assuma que A aja coprimamente sobre um grupo finito G de tal forma que $C_N(B) = \langle C_N(A_1), \ldots, C_N(A_t) \rangle$ para qualquer subgrupo N, de G, que é A-invariante .*

a) Se $C_G(x)$ é nilpotente para qualquer $x \in \{A_1^{\#}, \dots, A_t^{\#}\}$, então G é nilpotente.

b) Se $\gamma_\infty(C_G(x))$ tem ordem no máximo m para qualquer $x \in \{A_1^{\#}, \dots, A_t^{\#}\}$, então $\gamma_\infty(G)$ tem ordem $(m, |A|)$-limitada.

c) Se $\gamma_\infty(C_G(x))$ tem posto no máximo r para qualquer $x \in \{A_1^{\#}, \dots, A_t^{\#}\}$, então $\gamma_\infty(G)$ tem posto $(r, |A|)$-limitado.

Com esse resultado obtemos dois corolários que enunciamos a seguir.

Teorema 4.0.2 *Seja $D = \langle \alpha, \beta \rangle$ um grupo diedral gerado por duas involuções α e β. Suponha que D age coprimamente sobre um grupo finito G de tal forma que $C_G(\alpha\beta) = 1$.*

a) Se $\gamma_\infty(C_G(\alpha))$ e $\gamma_\infty(C_G(\beta))$ têm ordem no máximo m, então $\gamma_\infty(G)$ tem ordem $(m, |D|)$-limitada.

b) Se $\gamma_\infty(C_G(\alpha))$ e $\gamma_\infty(C_G(\beta))$ têm posto no máximo r, então $\gamma_\infty(G)$ tem posto $(r, |D|)$-limitado.

Teorema 4.0.3 *Seja P um p-grupo finito e M um subgrupo maximal de P. Assuma que todos os elementos em $P \backslash M$ tem ordem p. Suponha que P aja sobre um grupo finito G de tal forma que $C_G(M) = 1$.*

a) Se $\gamma_\infty(C_G(x))$ tem ordem no máximo m para qualquer $x \in P \backslash M$, então $\gamma_\infty(G)$ tem ordem $(m, |P|)$-limitada.

b) Se $\gamma_\infty(C_G(x))$ tem posto no máximo r para qualquer $x \in P \backslash M$, então $\gamma_\infty(G)$ tem posto $(r, |P|)$-limitado.

O Teorema 4.0.1 também pode ser aplicado ao caso em que um grupo de Frobenius supersolúvel age por automorfismos sobre um grupo finito G. No entanto, provamos o teorema abaixo que mostra que o resultado vale para grupos de Frobenius que não são necessariamente supersolúveis e, além disso, que as propriedades do residual nilpotente de G não dependem da ordem do núcleo de Frobenius.

Teorema 5.0.1 *Seja FH um grupo de Frobenius com núcleo F e complemento H. Suponha que FH aja sobre um grupo finito G de tal forma que $C_G(F) = 1$. Então:*

a) $|\gamma_\infty(G)|$ é limitado em termos da $|H|$ e $|\gamma_\infty(C_G(H))|$;

b) o posto de $\gamma_\infty(G)$ *é limitado em termos da* $|H|$ *e do posto de* $\gamma_\infty(C_G(H))$.

Este trabalho será dividido em cinco capítulos. No Capítulo 1 daremos algumas definições e resultados clássicos da Teoria de Grupos que serão utilizados ao longo do texto. No Capítulo 2 estudamos grupos de Frobenius e grupos diedrais agindo por automorfismos, sendo que o objetivo é demonstrar o Teorema 2.1.8, o Teorema 2.2.5 e o Teorema 2.2.7. No Capítulo 3 estudamos propriedades como posto e a ordem do residual nilpotente de um grupo finito G quando consideramos a ação de um q-grupo finito A de expoente q agindo por automorfismos sobre um q'-grupo finito G e demonstramos os Teoremas 3.0.1, 3.0.2 e 3.0.4. No Capítulo 4 provamos o Teorema 4.0.1 e seus corolários. Por fim, no capítulo 5 provamos o Teorema 5.0.1. Os resultados dos capítulos 4 e 5 possuem preprint e serão submetidos em breve.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

O objetivo deste capítulo é apresentar definições e propriedades de Teoria de Grupos que serão úteis para o desenvolvimento deste trabalho. O leitor interessado pode consultar [8], [25], [26].

1.1 Definições básicas e propriedades

Definição 1.1.1 *a) Dizemos que uma sequência finita* $\{H_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ *de subgrupos de* G *é uma* ***série*** *se*

$$1 = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n = G.$$

Os subgrupos $H_0, H_1, \ldots, H_n$ *são chamados* ***termos*** *da série e os subgrupos quocientes* $H_i/H_{i-1}, 0 \leqslant i \leqslant n$ *são os* ***fatores*** *da série;*

b) Uma série de subgrupos de um grupo G

$$1 = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n = G.$$

é uma ***série normal*** *de* G *se temos* $H_i \trianglelefteq G$*, para cada* $0 \leqslant i \leqslant n$.

c) A sequência de subgrupos definida indutivamente por

$$\gamma_1(G) = G \text{ e } \gamma_i(G) = [\gamma_{i-1}(G), G]$$

*é chamada **série central inferior**;*

*d) A interseção termos da série central inferior de G é chamado **residual nilpotente** e é denotado por $\gamma_\infty(G)$.*

Proposição 1.1.2 (Corolário 2.5.6 [15]) *Se um grupo G é gerado por d elementos, então $\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)$ é gerado por d^n elementos, para cada n.*

Definição 1.1.3 *a) Um fator H/K de uma série de G é dito ser um **fator central** de G se K é normal em G e $H/K \leqslant Z(G/K)$;*

*b) G é dito **nilpotente** se possui uma série cujos fatores são centrais. Tal série é chamada **série central**;*

*c) O tamanho da menor série central de G é chamado **classe de nilpotência**;*

*d) G é dito **solúvel** se possui uma série cujos fatores são abelianos;*

*e) G é dito **supersolúvel** se possui uma série normal cujos fatores são cíclicos.*

Definição 1.1.4 *Seja G um grupo finito. O **radical solúvel** de G, denotado por $R(G)$, é o maior subgrupo normal solúvel de G.*

Definição 1.1.5 *Seja π um conjunto de números primos. Um inteiro positivo n é dito um **π-número** se todo divisor primo de n pertence a π.*

Definição 1.1.6 *Seja H um subgrupo de G. Dizemos que H é um **π-subgrupo** de G se $|H|$ é um π-número.*

Proposição 1.1.7 *Se G é um grupo finito, então G contém um único π-subgrupo normal maximal, o qual é denotado por $O_\pi(G)$.*

Definição 1.1.8 *O **subgrupo de Fitting**, $F(G)$, de um grupo finito G é o produto de todos os subgrupos normais nilpotentes de G.*

Note que, pela proposição abaixo, temos que se G é um grupo finito, então $F(G)$ é um grupo nilpotente.

Proposição 1.1.9 (Lema 1.1 [8]) *Se H e K são subgrupos normais nilpotentes de um grupo finito G, então HK também é um subgrupo normal nilpotente de G.*

Definição 1.1.10 *Defina os subgrupos $F_i(G)$ recursivamente como $F_0(G) = 1$ e*

$$F_i(G)/F_{i-1}(G) = F(G/F_{i-1}(G))$$

para cada inteiro $i \geqslant 1$. A série formada por estes subgrupos é denominada ***série de Fitting*** *de G.*

Se G é um grupo solúvel, o menor número inteiro $h = h(G)$ tal que $F_h(G) = G$ é denominado ***altura de Fitting*** *de G.*

Todo grupo finito possui uma série normal cujos fatores são solúveis ou um produto direto de grupos simples não abelianos. Em [18], E. I. Khukhro e P. Shumyatsky definem o comprimento não solúvel de um grupo finito G como o número mínimo de fatores não solúveis em uma série desse tipo.

Definição 1.1.11 *Considere uma série normal, de um grupo finito G, onde cada um dos seus fatores é solúvel ou produto direto de grupos simples não abelianos, definimos o* ***comprimento não solúvel*** *$\lambda(G)$, como o menor número de fatores não solúveis.*

Proposição 1.1.12 (Corolário 1.2 [18]) *O comprimento não solúvel $\lambda(G)$ de um grupo finito G não excede o máximo das alturas de Fitting dos subgrupos solúveis de G.*

Lema 1.1.13 (Lema dos Três Subgrupos) *Seja G um grupo, H, K, L subgrupos de G e N um subgrupo normal de G tal que $[H, K, L], [L, H, K] \leqslant N$, então $[K, L, H] \leqslant N$.*

Definição 1.1.14 *Seja G um grupo finito solúvel e denote $p_1, \ldots, p_k$ primos distintos divisores da ordem de G. Seja Q_i um p'-subgrupo de Hall de G, então $\{Q_1, \ldots, Q_k\}$ é chamado* ***sistema de Sylow*** *de G.*

Definição 1.1.15 *Seja $\{Q_1, \ldots, Q_k\}$ um sistema de Sylow de um grupo finito solúvel G. Então o subgrupo*

$$N = \bigcap_{i=1}^{k} N_G(Q_i)$$

é chamado ***normalizador de sistema*** *de G.*

Definição 1.1.16 *Sejam $K \lhd H \leqslant G$ e $L \leqslant G$. Dizemos que L* ***cobre*** *H/K se $HL = KL$, ou equivalentemente, se $H = K(H \cap L)$.*

Teorema 1.1.17 (Teorema de P. Hall) *Se N é um normalizador de sistema de um grupo finito solúvel G, então N cobre os fatores princiais centrais de G.*

Definição 1.1.18 *O **posto** de um grupo finito que é dado por*

$$\mathbf{r}(G) = \sup\{d(H) \mid H \leqslant G\},$$

onde $d(G)$ é o número mínimo de geradores de G.

É interessante notar que nem sempre o número de geradores de um subgrupo de G é menor do que o número de geradores de G. Veja por exemplo o grupo simétrico S_6, para o qual temos $d(S_6) = 2$ e $d(H) = 3$, onde $H = \langle (12), (34), (56) \rangle$. Um exemplo desse fenômeno na família de p-grupos é o produto entrelaçado $G = C_2 \wr C_4$. Neste caso, o grupo base B do produto entrelaçado G é tal que $B \cong C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$. Então $G = B \rtimes C_4$ e temos que $d(G) = 2$ e $d(B) = 4$.

1.2 p-grupos

Nesta seção apresentaremos uma introdução à importante classe dos p-grupos finitos.

Definição 1.2.1 *Seja p um primo. Um grupo G no qual todo elemento tem sua ordem igual a uma potência de p é chamado um **p-grupo**.*

Proposição 1.2.2 *Qualquer p-grupo finito é um grupo nilpotente.*

O ***subgrupo de Frattini*** $\Phi(G)$ de um grupo finito G é definido como a interseção de todos os seus subgrupos maximais. Caso G não possua nenhum subgrupo maximal, definimos $\Phi(G) = G$. Quando G é um p-grupo finito, veremos no teorema a seguir que o subgrupo de Frattini nos mostra uma informação importante sobre a quantidade mínima de geradores de G. Denote por $\mathbb{F}_p$ um corpo finito com p elementos.

Teorema 1.2.3 (Teorema da Base de Burnside) *Seja G um p-grupo finito. Então:*

a) $G/\Phi(G)$ é um p-grupo abeliano elementar e consequentemente pode ser visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}_p$;

b) *o conjunto* $\{x_1, \ldots, x_d\}$ *é um conjunto mínimo de geradores para* G *se, e somente se,* $\{x_1\Phi(G), \ldots, x_d\Phi(G)\}$ *é uma base para* $G/\Phi(G)$*;*

c) *o número mínimo* $d = d(G)$ *de geradores do grupo* G *coincide com a dimensão de* $G/\Phi(G)$ *como um* $\mathbb{F}_p$*-espaço vetorial. Ou seja,* $|G : \Phi(G)| = p^d$*.*

Definição 1.2.4 *Um* p*-grupo* G *é dito extraespecial se é não abeliano,* $G' = Z(G)$ *e* $|Z(G)| = p$*.*

1.3 Automorfismos de grupos

Vamos usar a notação g^α para denotar a imagem de g sob a ação de um automorfismo α.

Definição 1.3.1 *Seja* G *um grupo e* α *um elemento do grupo de automorfismos de* G*. Dizemos que* α *é* ***livre de pontos fixos*** *se*

$$C_G(\alpha) = 1,$$

onde $C_G(\alpha) = \{g \in G; g^\alpha = g\}$*.*

De maneira análoga, temos a seguinte definição.

Definição 1.3.2 *Seja* G *um grupo e* A *um subgrupo do grupo de automorfismos de* G*. O* ***centralizador*** *de* A *em* G *é definido como* $C_G(A) = \{g \in G; g^\alpha = g \text{ para todo } \alpha \in A\}$ *e dizemos que* A *é* ***livre de pontos fixos*** *em* G*, sempre que* $C_G(A) = 1$ *.*

Teorema 1.3.3 (Teorema 1.48 [9]) *Um grupo finito admitindo um automorfismo que deixa apenas o elemento identidade fixo é necessariamente solúvel.*

Teorema 1.3.4 (Thompson [8]) *Se* G *admite um automorfismo livre de pontos fixos de ordem prima, então* G *é nilpotente.*

Definição 1.3.5 *Seja* A *um grupo que age por automorfismos sobre um grupo finito* G*, dizemos que* A *age coprimamente sobre* G *se* $(|A|, |G|) = 1$*.*

Se A é um grupo de automorfismos de um grupo G, o subgrupo gerado pelos elementos da forma $g^{-1}g^{\alpha}$ com $g \in G$ e $\alpha \in A$ é denotado por $[G, A]$. O subgrupo $[G, A]$ é A-invariante e normal em G. Além disso, vamos denotar por $\pi(G)$ o conjunto de números primos divisores da ordem de G.

O próximo resultado é uma coleção de fatos sobre ação coprima. As demonstrações destes resultados podem ser encontradas em [8].

Proposição 1.3.6 *Seja A um grupo de automorfismos de um grupo finito G tal que $(|G|, |A|) = 1$. Então:*

(a) $G = C_G(A)[G, A]$;

(b) $[G, A, A] = [G, A]$;

(c) A deixa invariante algum p-subgrupo de Sylow de G para cada primo $p \in \pi(G)$;

(d) $C_{G/N}(A) = C_G(A)N/N$ para qualquer subgrupo normal A-invariante N de G;

(e) se G é nilpotente e A é um grupo abeliano não cíclico, então $G = \prod_{a \in A^{\#}} C_G(a)$.

Como elementos de grupos, dizemos que um automorfismo α de um grupo G é um π-automorfismo se sua ordem é divisível apenas pelos primos do conjunto π, e é um π'-autmomorfismo se nenhum dos primos em π divide sua ordem.

Teorema 1.3.7 (Thompson, Teorema 5.3.11 [8]) *Um p-grupo finito P possui um subgrupo característico C com as seguintes propriedades:*

a) $cl(C) \leqslant 2$ e $C/Z(C)$ é abeliano elementar;

b) $[P, C] \subseteq Z(C)$;

c) $C_P(C) = Z(C)$;

d) Todo p'-automorfismo não trivial de P induz um automorfismo não trivial de C.

Um subgrupo característico C de um p-grupo P que satisfaz as condições do teorema acima é chamado ***subgrupo crítico***.

1.4 Representações de grupos

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados acerca da teoria de representação de grupos finitos. Nosso objetivo é apresentar o Teorema de Clifford, o qual será usado nos capítulos seguintes. Mais informações sobre este assunto podem ser encontradas em [8].

A partir de agora, vamos considerar V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ e denotar por $GL(V)$ o grupo de transformações lineares invertíveis de V. Um homomorfismo

$$\sigma : G \to GL(V)$$

é chamado uma ***representação*** do grupo G. Quando σ é injetivo, dizemos que a representação é ***fiel***. A representação será dita ***irredutível*** se 0 e V são os únicos subespaços $\sigma(G)$-invariantes de V, caso contrário σ é dita ***redutível***. Além disso, uma representação será dita ***completamente redutível*** se

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r,$$

onde cada V_i é um subespaço não nulo, invariante por σ, e a restrição $\sigma|_{V_i}$ de σ a cada um desses subespaços é uma representação irredutível.

Apresentamos agora o Teorema de Maschke, o qual é um critério suficiente para que uma dada representação seja completamente redutível.

Teorema 1.4.1 (Maschke) *Seja σ uma representação de G sobre V e assuma que a característica de $\mathbb{F}$ é zero ou coprima com a ordem de G. Então σ é completamente redutível.*

O Teorema de Maschke nos diz que para conhecer as representações de um grupo, basta conhecermos suas representações irredutíveis. Uma aplicação desse teorema é o seguinte resultado.

Teorema 1.4.2 (Teorema 3.3.3 [9]) *Seja P um p-grupo abeliano elementar e seja Q um q-subgrupo abeliano não cíclico de $Aut(P)$, onde p e q são primos distintos. Então*

$$P = \prod_{x \in Q^{\#}} C_P(x).$$

Em particular, P é gerado por seus subgrupos $C_P(x)$, com $x \in Q^{\#}$.

Agora apresentamos o Teorema de Clifford. Esse teorema apresenta uma maneira de ver como se dá a decomposição de V sobre a ação de um subgrupo normal de G. Uma demonstração desse resultado pode ser encontrada em [[8], Teorema 3.4.1].

Teorema 1.4.3 (Clifford) *Sejam V um G-módulo e H um subgrupo normal de G. Então V é a soma direta de subespaços V_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, os quais são H-invariantes e satisfazem as seguintes condições:*

i) *$V_i = X_{i1} \oplus X_{i2} \oplus \cdots \oplus X_{it}$, onde cada X_{ij} é um H-submódulo irredutível, $1 \leqslant i \leqslant n$, t é independente de i e X_{ij}, $X_{i'j'}$ são H-submódulos isomórficos se, e somente se $i = i'$;*

ii) *Para qualquer H-submódulo U, temos $U = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r$; onde $U_i = U \cap V_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Em particular, qualquer H-submódulo irredutível de V está contido em algum dos V_i;*

iii) *Para qualquer $x \in G$, a aplicação $\pi(x) : V_i \mapsto V_i x$ é uma permutação do conjunto $S = \{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$ e π induz uma representação permutacional transitiva de G sobre S. Além disso, $HC_G(H)$ está contido no núcleo de π.*

Os subespaços V_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ são chamados ***componentes de Wedderburn*** de V com respeito a H.

1.5 Grupos de Frobenius

Nesta seção faremos um estudo introdutório aos grupos de Frobenius. A referência utilizada aqui será [8].

Definição 1.5.1 *Dado um grupo G, dizemos que um subgrupo H é* ***disjunto de seus conjugados*** *se $H^x \cap H = 1$ ou $H^x \cap H = H$ para todo $x \in G$. Neste caso, H é dito* ***complemento*** *de G.*

Definição 1.5.2 *Seja H um subgrupo não trivial de um grupo finito G. Dizemos que G é um* ***grupo de Frobenius*** *com complemento H, se H é disjunto de seus conjugados e é seu próprio normalizador em G.*

Um ***grupo de Frobenius*** também pode ser visto como um grupo de permutações transitivo sobre um conjunto finito tal que nenhum elemento não trivial fixa mais do que um ponto e algum elemento não trivial fixa um ponto. Recorde que um grupo de permutações G agindo sobre um conjunto Ω é dito ser ***tansitivo*** sobre Ω sempre que dados w, w' em Ω existe x em G tal que $wx = w'$.

Uma forma de caracterizar os grupos de Frobenius a partir da estrutura de seu complemento é dada no seguinte teorema.

Teorema 1.5.3 *Sejam F um grupo finito e H um subgrupo de $Aut(F)$. Suponha que para todo elemento não trivial $h \in H$ temos $C_F(h) = 1$. Então o produto semidireto $G = F \rtimes H$ é um grupo de Frobenius com núcleo F e complemento H.*

Prova: Primeiramente vamos mostrar que H é seu próprio normalizador em G. Note que dado $x \in G$ temos $H^x = H^f$, para algum $f \in F$, pois $G = FH$. Suponha que $H^f = H$ para algum $f \in F$, então $[f, h] \in H$ para todo $h \in H$. Por outro lado, como F é normal em G, temos que $[f, h] \in F$. Logo $[f, h] = 1$, pois $F \cap H = 1$, ou seja, $f^h = f$ para todo $h \in H$. Portanto $f \in C_F(H) = 1$.

Agora vamos mostrar que $H \cap H^f = 1$ ou $H \cap H^f = H$ para todo $f \in F$. Suponha que $H \cap H^f \neq 1$ e seja $h \in H \cap H^f$. Temos que $[f, h] \in H \cap F = 1$. Portanto $f \in C_F(h) = 1$, ou seja, $H \cap H^f = H$. ■

Seja G um grupo finito, H um subgrupo de G e $S = \{Hx_i;\ x_i \in G,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ o conjunto formado pelas classes laterais de H em G. Para cada $x \in G$ e cada $1 \leqslant i \leqslant n$, definimos a permutação π_x do conjunto S por

$$\pi_x(Hx_i) = H(x_i x)$$

e definimos a aplicação π_H que leva cada $x \in G$ em π_x. Temos que π_H é um homomorfismo de G no grupo de permutações do conjunto S.

O próximo teorema é um resultado de Frobenius e com ele vamos conseguir entender melhor a estrutura dos grupos de Frobenius.

Teorema 1.5.4 (Teorema 2.7.5, [8]) *Seja G um grupo de Frobenius com complemento H. Considere o subconjunto $S = \{Hx_i;\ x_i \in G,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ das classes laterais de H em G e o homomorfismo π_H. Então o subconjunto de G consistindo da identidade e dos* *elementos x tais que π_x não fixam nenhum ponto de S formam um subgrupo normal K cuja ordem é $|G : H|$.*

A este subgrupo normal K é dado o nome de ***núcleo de Frobenius*** e o subgrupo H é chamado de ***complemento de Frobenius***.

A estrutura de um grupo de Frobenius é dada pelo seguinte resultado cuja demonstração pode ser encontrada em [8].

Teorema 1.5.5 *Seja G um grupo de Frobenius com complemento H e núcleo K. Então:*

i) $G = HK$ com $H \cap K = 1$, isto é, G é o produto semidireto de K por H;

ii) $|H|$ divide $|K| - 1$;

i) todo elemento de $H^{\#}$ induz por conjugação um automorfismo de K o qual fixa apenas o elemento identidade de K;

iv) K é nilpotente e é abeliano se $|H|$ é par;

v) $C_G(y) \subseteq K$, para todo y em $K^{\#}$.

CAPÍTULO 2

GRUPOS DE FROBENIUS E GRUPOS DIEDRAIS AGINDO COMO GRUPOS DE AUTOMORFISMOS

Recentemente, devido ao problema 17.72 proposto por Mazurov no Kourovka Notebook [17] foi dada atenção ao caso em que um grupo de Frobenius FH age por automorfismos sobre um grupo finito G. No caso em que o núcleo F age livre de pontos fixos foi possível obter que algumas propriedades de G são, de certo modo, parecidas com as correspondentes propriedades de $C_G(H)$, dependendo em alguns casos do grupo H. Apresentaremos alguns desses resultados na seção 2.1.

Uma pergunta natural é se podemos obter resultados semelhantes quando outros grupos agem por automorfismos sobre G . Isso é respondido de forma afirmativa, na seção 2.2, quando consideramos um grupo diedral agindo por automorfismos sobre um grupo finito G.

Agora vamos apresentar algumas definições e resultados que serão utilizados nas próximas seções.

Definição 2.0.1 *Um subgrupo H de um grupo finito G é chamado* ***subgrupo de Carter*** *se é nilpotente e autonormalizante, ou seja, $N_G(H) = H$.*

Teorema 2.0.2 (Teorema 20.1.4 [13]) *Um grupo finito solúvel G tem pelo menos um subgrupo de Carter e quaisquer dois subgrupos de Carter são conjugados.*

Teorema 2.0.3 (Teorema 0.11 [1]) *Seja G um grupo finito. Se G admite um grupo nilpotente de automorfismos F tal que $C_G(F) = 1$, então G é solúvel.*

2.1 Grupos de Frobenius agindo como grupos de automorfismos

O objetivo desta seção é estabelecer uma conexão entre posto, ordem e nilpotência de G e $C_G(H)$ para um grupo finito G admitindo um grupo de Frobenius de automorfismos FH, com núcleo F e complemento H, de modo que a ação de F sobre G é livre de pontos fixos. Este resultado, provado por Khukhro, Makarenko e Shumyatsky em [16], mostra que as ordens de G e $C_G(H)$ satisfazem a equação $|G| = |C_G(H)|^{|H|}$, o posto de G é limitado em termos da ordem de H e do posto de $C_G(H)$, além disso, G é nilpotente se $C_G(H)$ é nilpotente.

Sejam Q um subgrupo de $Aut(G)$ e N um subgrupo normal Q-invariante de G. Em muitas situações é importante saber quando os pontos fixos de Q em G/N são cobertos pelos pontos fixos de Q sobre G, ou seja, quando temos $C_{G/N}(Q) = C_G(Q)N/N$. Um resultado já conhecido é que se assumirmos $(|N|, |Q|) = 1$, então $C_{G/N}(Q) = C_G(Q)N/N$. Quando não assumirmos a hipótese de coprimalidade, a igualdade $C_{G/N}(Q) = C_G(Q)N/N$ pode não ser verdadeira. Contudo, existem alguns casos importantes em que isso vale. Um desses casos é o seguinte lema.

Lema 2.1.1 (Lema 2.2 em [16]) *Seja G um grupo finito admitindo um grupo nilpotente de automorfismos F tal que $C_G(F) = 1$. Se N é um subgrupo normal F-invariante de G, então $C_{G/N}(F) = 1$.*

Prova: Como F é um subgrupo de Carter de GF, segue que NF/N é um subgrupo de Carter de G/N. Suponha que $C_{G/N}(F) \neq 1$, então existe um subgrupo não trivial H/N de G/N tal que F age trivialmente sobre H/N. Temos que $N_{HF}(F) = F$ e por hipótese F é nilpotente, então F é subgrupo de Carter de HF. Passando para o quociente, NF/N é um subgrupo de Carter de HF/N. Assim, como NF/N é subgrupo normal de HF/N temos $HF/N = N_{HF/N}(NF/N) = NF/N$ e então $H = N$, o que é uma contradição ao fato de H/N não ser trivial. Portanto, $C_{G/N}(F) = 1$. ■

O próximo teorema é um resultado de Khukhro, no qual ele considera a ação de um grupo de Frobenius FH sobre um grupo finito G e mostra que sob a condição de coprimalidade entre as ordens do núcleo F e do subgrupo normal N, os pontos fixos de H em G/N são cobertos pelos pontos fixos de H sobre G.

Teorema 2.1.2 (Teorema 1 [14]) *Suponha que um grupo finito G admita um grupo de Frobenius de automorfismos FH com núcleo F e complemento H. Se N é um subgrupo normal FH-invariante de G tal que $C_N(F) = 1$ e $(|N|, |F|) = 1$, então $C_{G/N}(H) = C_G(H)N/N$.*

O teorema a seguir mostra que é possível melhorar esse resultado e retirar a hipótese de coprimalidade entre as ordens do subgrupo normal e do núcleo de Frobenius. A demonstração do resultado é obtida reduzindo o caso em questão ao caso apresentado no teorema anterior, em que as ordens são coprimas.

Teorema 2.1.3 (Teorema 2.3 [16]) *Suponha que um grupo finito G admita um grupo de Frobenius de automorfismos FH com núcleo F e complemento H. Se N é um subgrupo normal FH-invariante de G tal que $C_N(F) = 1$, então $C_{G/N}(H) = C_G(H)N/N$.*

Prova: Como F é o núcleo de Frobenius, segue que ele é um grupo nilpotente. Daí, pelo Teorema 2.0.3 temos que N é solúvel. Considere uma FH-série normal e não refinável de G

$$G > N = N_1 > N_2 > \cdots > N_k > N_{k+1} = 1.$$

Os quocientes N_i/N_{i+1} são abelianos elementares. Vamos aplicar indução sobre k para encontrar um elemento de $C_G(H)$ em qualquer classe $gN \in C_{G/N}(H)$. Para $k > 1$ considere o quociente G/N_k e o grupo de automorfismos induzidos FH. Pelo Lema 2.1.1, temos $C_{G/N_k}(F) = 1$. Por indução existe $c_1N_k \in C_{G/N_k}(H) \cap gN/N_k$. Então a prova do passo de indução seguirá do caso $k = 1$.

Seja $k = 1$. Temos que $N = N_k$ é um p-grupo para algum primo p. Seja $F = F_p \times F_{p'}$, onde F_p é um p-subgrupo de Sylow de F. Como $C_N(F_{p'})$ é F_p-invariante, segue que $C_N(F_{p'}) = 1$. De fato, suponha que $C_N(F_{p'}) \neq 1$, então o p-grupo F_p tem pontos fixos não triviais no p-grupo $C_N(F_{p'})$. Agora seja $n \in C_{C_N(F_{p'})}(F_p)$, então $n \in N$ satisfaz $n^x = n$ para todo $x \in F_{p'}$ e $n^y = n$ para todo $y \in F_p$. Daí $n^{xy} = n$, ou seja, $n \in C_N(F)$ e assim $C_{C_N(F_{p'})}(F_p) \subseteq C_N(F) = 1$, contrariando a suposição de $C_{C_N(F_{p'})}(F_p)$ ter pontos fixos, logo $C_N(F_{p'}) = 1$. Agora note que as hipóteses do teorema também valem para G com o grupo de Frobenius automorfismos $F_{p'}H$ satisfazendo a condição adicional $(|N|, |F_{p'}|) = 1$. Então podemos aplicar o Teorema 2.1.2 para obter um ponto fixo. ■

Lema 2.1.4 (Lema 2.4 [16]) *Suponha que um grupo finito G admite um grupo de Frobenius de automorfismos FH com núcleo F e complemento H tal que $C_G(F) = 1$. Então $G = \langle C_G(H)^f; f \in F\rangle$.*

Prova: Pelo Teorema 2.0.3 o grupo G é solúvel. Considere uma série normal, não refinável e FH-invariante

$$G = G_1 > G_2 > \cdots > G_k > G_{k+1} = 1. \tag{2.1}$$

É suficiente provar que cada fator da $S = G_i/G_{i+1}$ da série é coberto por $\langle C_{G_i}(H)^f; f \in F\rangle$, ou seja,

$$\langle C_{G_i}(H)^f; f \in F\rangle G_{i+1}/G_{i+1} = G_i/G_{i+1}.$$

Pelo Teorema 2.1.3, isso é equivalente a

$$\langle C_S(H)^f; f \in F\rangle = S.$$

Pelo Lema 2.1.1, temos $C_S(F) = 1$, então o Teorema de Clifford 1.4.3 pode ser aplicado para mostrar que $C_S(H) \neq 1$. Para isso, vamos precisar do lema a seguir.

Lema 2.1.5 (Lema 2.5 [16]) *Cada fator S de 2.1 é um $\mathbb{F}_pH$-módulo livre para o primo p apropriado.*

Prova: Para demonstrar este resultado, provaremos uma redução ao caso coprimo considerado no Lema 2 de [14]. Sejam S um p-grupo abeliano elementar e $F = F_p \times F_{p'}$, onde F_p é um p-subgrupo de Sylow de F. Como na prova do Teorema 2.1.3 devemos ter $C_S(F_p') = 1$. Refinando S por uma série normal, não refinável e $F_{p'}H$- invariante obtemos fatores que são $\mathbb{F}_pF_{p'}H$-módulos irredutíveis. Tendo a condição adicional de que p não divide $F_{p'}$, podemos aplicar o Lema 2 de [14] e obter que cada um destes fatores é um $\mathbb{F}_pH$-módulo livre. Portanto S também é um $\mathbb{F}_pH$-módulo livre. ■

Agora vamos retomar a demonstração do Lema 2.1.4. Pelo Lema 2.1.5, S é um $\mathbb{F}_pH$-módulo livre, ou seja, $S = \bigoplus_{h\in H} Th$ para algum $\mathbb{F}_pH$-submódulo T. Portanto temos $C_S(H) \neq 0$ pois $0 \neq \sum_{h\in H} th \in C_S(H)$ para qualquer $0 \neq t \in T$. Como a série 2.1 é não refinável, o $\mathbb{F}_p H$-módulo S é irredutível. Portanto,

$$0 \neq \langle C_S(H)^{HF} \rangle = C_S(H)^F = S.$$

Lema 2.1.6 (Lema 2.6 [16]) *Suponha que um grupo finito G admita um grupo de Frobenius de automorfismos FH com núcleo F e complemento H tal que $C_G(F) = 1$. Então para cada primo p dividindo a $|G|$ existe um único p-subgrupo de Sylow de G que é FH-invariante.*

Prova: Relembre que tanto G quanto GF são solúveis. Como F é um subgrupo de Carter de GH ele contém um normalizador de sistema de G. Pelo Teorema de P. Hall, Teorema 1.1.17, um normalizador de sistema cobre todos os fatores centrais de qualquer série principal de GF. Como F é nilpotente, segue que F é um normalizador de sistema. Além disso, F normaliza um único p-subgrupo de Sylow. De fato, se P e P^g são dois p-subgrupos de Sylow normalizados por F, então P é normalizado por F e $F^{g^{-1}}$. Então F e $F^{g^{-1}}$ são subgrupos de Carter do $N_G(P)$ e $F = F^{g^{-1}n}$ para algum $n \in N_G(P)$, donde $g^{-1}n = 1$ pois $N_G(F) = C_G(F) = 1$. Então $P^g = P^n = P$. Como F é normal em HF, a unicidade de P implica que ele também é H-invariante. ■

Vamos precisar de um teorema que foi provado, para grupos solúveis, por Kovács [21] e para grupos arbitrários, de maneira independente, por Guralnick [11] e por Lucchini [23].

Teorema 2.1.7 (Teorema 1 [23]) *Seja G um grupo finito. Se cada subgrupo de Sylow de G pode ser gerado por d elementos, então G pode ser gerado por $d+1$ elementos.*

Agora apresentamos o resultado principal desta seção.

Teorema 2.1.8 (Teorema 2.7 [16]) *Suponha que um grupo finito G admite um grupo de Frobenius de automorfismos FH com núcleo F e complemento H tal que $C_G(F) = 1$. Então:*

a) $|G| = |C_G(H)|^{|H|}$;

b) *o posto de G é limitado em termos da $|H|$ e do posto de $C_G(H)$;*

c) *se $C_G(H)$ é nilpotente, então G é nilpotente.*

Prova:

a) É suficiente provar esta igualdade para cada fator $S = G_i/G_{i+1}$ da série normal, não refinável e FH-invariante $G = G_1 > G_2 > \cdots > G_k > G_{k+1} = 1$, pois $|C_G(H)| = \prod_i |C_{G_i/G_{i+1}}(H)|$ pelo Teorema 2.1.3. Pelo Lema 2.1.5, S é um $\mathbb{F}_pH$-módulo livre, ou seja, $S = \oplus_{h\in H} Th$ para algum $\mathbb{F}_pH$-submódulo T. Logo $C_G(H) = \{\sum_{h\in H} th; t \in T\}$ e $|C_G(H)| = |T|$, portanto $|S| = |T|^{|H|}$.

b) Pelo Teorema 2.1.7, temos que o posto de um grupo finito solúvel é limitado em termos do posto máximo dos seus subgrupos de Sylow. Seja P um FH-invariante p-subgrupo de Sylow de G, dado pelo Lema 2.1.6. Sabemos que o posto de um p-grupo de automorfismos de um p-grupo finito U é limitado em termos do posto de U. Seja U um subgrupo crítico de Thompson de P; temos que U é um subgrupo característico de classe de nilpotência no máximo 2 contendo seu centralizador em P. Então o posto de P é limitado em termos do posto de U. Como a classe de nilpotência de U é no máximo 2, o posto de U é limitado em termos do posto de $S = U/\Phi(U)$. O grupo S pode ser considerado como um $\mathbb{F}_pFH$-módulo o qual é um $\mathbb{F}_pH$-módulo livre se aplicarmos repetidamente o Lema 2.1.5 a uma série não refinável de $\mathbb{F}_pFH$-submódulos de $U/\Phi(U)$. Pelo mesmo argumento da prova do item (a), o posto de S é igual a $|H|r(C_S(H))$. Pelo Teorema 2.1.3, $C_S(H)$ é coberto por $C_G(H)$; logo o posto de S é no máximo $|H|r(C_G(H))$.

c) Primeiramente lembramos que em qualquer ação de um grupo de Frobenius FH com ação não trivial de F o complemento H age fielmente. De fato, o núcleo K que não contém F deve interceptar H trivialmente: $K \cap H$ age trivialmente sobre $F/(K \cap F) \neq 1$ e portanto tem pontos fixos não triviais sobre F, pois a ação é coprima. Suponha que $C_G(H)$ é nilpotente. Vamos provar que G é nilpotente, por contradição, considerando um contra exemplo de ordem minimal GFH. Recorde que G é solúvel. Suponha que G não é nilpotente; então é fácil encontrar uma seção FH-invariante de G, a qual vamos denotar por VU, de tal forma que U e V são grupos abelianos elementares de ordens coprimas, V é normal em $VUFH$, e U age fielmente sobre V com $C_V(U) = 1$. Note que $C_{VU}(F) = 1$ pelo Lema 2.1.1. Em particular, F age não trivialmente sobre VU e portanto H age fielmente sobre VU. Como $C_{VU}(H)$ é coberto por $C_G(H)$, pelo Teorema 2.1.3, segue que $C_{VU}(H)$ é nilpotente. Então podemos trocar G por UV, e F por sua imagem nesta ação sobre UV, daí pela minialidade do nosso contra exemplo devemos ter $G = VU$.

Pelo Teorema 2.1.3, $C_{VU}(H) = C_V(H)C_U(H)$. Além disso, como U e V têm ordens coprimas, a nilpotência de $C_{VU}(H)$ implica que ele é abeliano; em outras palavras, $C_U(H)$ centraliza $C_V(H)$. Note que $C_U(H) \neq 1$, pelo Lema 2.1.4.

Seja V um p-grupo abeliano elementar; podemos considerar V como um $\mathbb{F}_pUFH$-módulo. Note que V é um $\mathbb{F}_pH$ módulo livre, pelo Lema 2.1.5. Vamos estender o corpo base $\mathbb{F}_p$ a um corpo finito $\overline{\mathbb{F}_p}$ que é o corpo de decomposição de UFH e obter um $\overline{\mathbb{F}_p}UFH$-módulo $\tilde{V} = V \otimes_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}_p}$. Algumas das propriedades de V mencionadas acima são herdadas por $\tilde{V}$:

(V1) $\tilde{V}$ é um $\overline{\mathbb{F}_p}U$-módulo fiel;

(V2) $C_{\tilde{V}}(U) = 0$;

(V3) $C_U(H)$ age trivialmente sobre $C_{\tilde{V}}(U)$;

(V4) $C_{\tilde{V}}(F) = 0$;

(V5) $\tilde{V}$ é um $\overline{\mathbb{F}_p}H$-módulo livre.

Considere uma série não refinável de $\overline{\mathbb{F}_p}UFH$-submódulos

$$\tilde{V} = V_1 > V_2 > \cdots > V_k > V_{k+1} = 0. \tag{2.2}$$

Seja W um dos fatores desta série; ele é um $\overline{\mathbb{F}_p}UFH$-submódulo livre. Note que $C_W(F) = 0$ pelo Lema 2.1.1, e podemos ainda considerar $\tilde{V}$ como um grupo finito aditivo sobre o qual F age livre de pontos fixos pela propriedade (V4). Pelo mesmo motivo, W é um $\overline{\mathbb{F}_p}H$-módulo livre, pelo Lema 2.1.5.

Seja

$$W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_t$$

a decomposição de W na soma direta das componentes de Wedderburn W_i com respeito a U. Sobre cada um dos W_i o grupo U é representado por multiplicação por escalar. Vamos considerar a ação transitiva de FH sobre o conjunto $\Omega = \{W_1, \ldots, W_t\}$.

Para concluir a demonstração vamos precisar do seguinte lema.

Lema 2.1.9 (Lema 2.8 [16]) *Todas as órbitas de H sobre Ω, exceto possivelmente uma, são regulares (ou seja, de comprimento $|H|$).*

Prova: Note que H permuta transitivamente as F-órbitas sobre Ω. Seja Ω_1 uma dessas F-órbitas e seja H_1 o estabilizador de Ω_1 em H. Se $H_1 = 1$, então todas as H-órbitas são regulares, assim vamos assumir que $H_1 \neq 1$. Afirmamos que H_1 tem exatamente uma órbita não regular sobre Ω_1 (na verdade, um ponto fixo).

Seja $\overline{F}$ a imagem de F em sua ação sobre Ω_1. Se $\overline{F} = 1$, então Ω_1 consiste de uma única componente de Wedderburn, sob a qual U age por multiplicação por escalar, e age não trivialmente pela propriedade (V2). Então F age trivialmente sobre o quociente não trivial de U pelo correspondente núcleo, o que contradiz o Lema 2.1.1. Então $\overline{F} \neq 1$ e pela observação no início da demonstração, $\overline{F}H_1$ é um grupo de Frobenius com complemento H_1.

Seja S o estabilizador de um ponto em Ω_1 em $\overline{F}H_1$. Como$|\Omega_1| = |F : \overline{F} \cap S| = |\overline{F}H_1 : S|$ e as ordens $|\overline{F}|$ e $|H_1|$ são coprimas, S contém um conjugado de H_1; sem perda de generalidade assumimos que $H_1 \leqslant S$. Qualquer outro estabilizador de um ponto é igual a S^f para $f \in \overline{F} \setminus S$. Afirmamos que $S^f \cap H_1 = 1$, o que é equivalente a $S^f \cap H_1^{f^{-1}} = 1$. Mas note que todos os conjugados H_1^x para $x \in \overline{F}$ são distintos, disjuntos e suas uniões contém todos os elementos de $\overline{F}H_1$ de ordens dividindo $|H_1|$; o mesmo é verdade para os conjudados de H_1 em S. Portanto os únicos conjugados de H_1 que intersectam S são H^s para $s \in S$.

As H-órbitas de elementos de uma H_1-órbita regular são H-órbitas regulares. Então existe uma H-órbita não regular sobre Ω (a H-órbita do ponto fixo de H_1 sobre Ω_1).

■

Considere qualquer H-órbita regular sobre Ω, a qual vamos denotar por $\{W_h; h \in H\}$. Seja $X = \bigoplus_{h\in H} W_h$. Então, como antes, $C_X(H) = \{\sum_{h\in H} xh; x \in W_1\}$. Note que $C_U(H)$, como um subgrupo de U, age sobre cada W_h por multiplicação por escalar e centraliza $C_X(H)$ pela propriedade (V3), então obtemos que $C_U(H)$ deve agir trivialmente sobre X.

A soma dos W_i sobre todas as H-órbitas regulares é um $\overline{\mathbb{F}}_pH$-módulo livre. Como $\tilde{V}$ também é um $\overline{\mathbb{F}}_pH$-módulo livre pela propriedade (V5), então pelo Lema 2.1.9 a soma Y dos W_i sobre a única, possivelmente remanescente, H-órbita não regular deve também ser um $\overline{\mathbb{F}}_pH$-módulo livre. Seja $Y = \bigoplus_{h\in H} Zh$ para algum $\overline{\mathbb{F}}_pH$-submódulo Z. Então, como antes, $C_Y(H) = \{\sum_{h\in H} yh; y \in Z\}$. O subgrupo $C_U(H)$ age sobre cada W_i por multiplicação por escalar. Como Y é a soma sobre uma H-órbita e H centraliza $C_U(H)$, todos os W_i na H-órbita são $\overline{\mathbb{F}}_pC_U(H)$-módulos isomorfos. Logo $C_U(H)$ age por multiplicação por escalar em todo Y. Como $C_U(H)$ centraliza $C_Y(H)$ pela propriedade (V3), segue que $C_U(H)$ deve agir trivialmente sobre Y.

Como resultado, $C_U(H)$ age trivialmente sobre W. Como isso é verdade para cada fator de (2.2) e a ordem de U é coprima com a característica p (ou com a ordem de $\tilde{V}$) segue que $C_U(H)$ age trivialmente sobre $\tilde{V}$, contrariando a propriedade (V1). Esta contradição completa a prova.

■

2.2 Grupos diedrais agindo como grupos de automorfismos

Como vimos na seção anterior, vários resultados foram obtidos quando um grupo de Frobenius age por automorfismos sobre um grupo finito. Nesta seção veremos que as técnicas apresentadas na seção anterior podem ser aplicadas ao estudo de ações por grupos que não são necessariamente grupos de Frobenius. Mais especificamente, em seu artigo [29] Shumyatsky considerou um grupo diedral D, gerado por duas involuções α e β, agindo sobre um grupo finito G de tal modo que $C_G(\alpha\beta) = 1$. Embora um grupo diedral seja grupo de Frobenius apenas quando o produto $\alpha\beta$ tem ordem ímpar, Shumyatsky mostou que todos os principais resultados obtidos em [16] podem ser extendidos para o caso de grupos diedrais, mesmo quando consideramos que o produto $\alpha\beta$ tem ordem par.

O objetivo desta seção é mostrar que dado um grupo diedral $D = \langle\alpha, \beta\rangle$, gerado por duas involuções α e β, agindo por automorfismos sobre um grupo finito G de tal forma que $C_G(\alpha\beta) = 1$, então $G = C_G(\alpha)C_G(\beta)$, $|G| = |C_G(\alpha)||C_G(\beta)|$ e o posto de G é limitado em função do posto dos centralizadores $C_G(\alpha)$ e $C_G(\beta)$.

Lema 2.2.1 (Lema 2.2 [29]) *Seja G um grupo finito de ordem ímpar e α um automorfismo de ordem 2 de G. Seja I o conjunto de todos os $x \in G$ tais que $x^\alpha = x^{-1}$. Então:*

a) $G = C_G(\alpha)I = IC_G(\alpha)$*;*

b) $[G, \alpha] = \langle I \rangle$*;*

c) se R *é um subgrupo de* G *contendo* $C_G(\alpha)$*, então* R *é* α*-invariante.*

Lema 2.2.2 (Lema 2.3 [29]) *Seja* G *um* p*-grupo finito admitindo um grupo nilpotente de automorfismos* A *tal que* $C_G(A) = 1$*. Seja* B *o* p'*-subgrupo maximal de* A*. Então* $C_G(B) = 1$*.*

Lema 2.2.3 (Lema 2.6 [29]) *Seja* $D = \langle \alpha, \beta \rangle$ *um grupo diedral gerado por duas involuções* α *e* β*. Para cada primo* $p \in \pi(G)$ *existe um único* p*-subgrupo de Sylow* D*-invariante em* G*.*

Lema 2.2.4 (Lema 2.7 [29]) *Se* N *um subgrupo normal e* D*-invariante de* G*, então* $C_{G/N}(\alpha\beta) = 1, C_{G/N}(\alpha) = C_G(\alpha)N/N$ *e* $C_{G/N}(\beta) = C_G(\beta)N/N$*.*

Teorema 2.2.5 *Seja* $D = \langle \alpha, \beta \rangle$ *um grupo diedral gerado por duas involuções* α *e* β*. Suponha que* D *age sobre um grupo finito* G *de tal forma que* $C_G(\alpha\beta) = 1$*, então* $G = C_G(\alpha)C_G(\beta)$ *e* $|G| = |C_G(\alpha)||C_G(\beta)|$*.*

Prova: Por hipótese $C_G(\alpha\beta) = 1$, então segue que a interseção entre $C_G(\alpha)$ e $C_G(\beta)$ deve ser trivial. Para mostrar que $G = C_G(\alpha)C_G(\beta)$, primeiro vamos considerar o caso particular em que G é um p-grupo abeliano elementar e provar que G é soma direta de $C_G(\alpha)$ e $C_G(\beta)$. Para este caso, considere inicialmente que p é um número ímpar e defina $N = C_G(\alpha)C_G(\beta)$. Pelo Lema 2.2.1(c) o subgrupo N é α-invariante e β-invariante. Logo, N é D-invariante. Pelo Lema 2.2.4 α e β agem livre de pontos fixos sobre G/N. Então pelo Lema 2.2.1(a) segue que α e β agem sobre G/N levando cada elemento em seu inverso. Logo $\alpha\beta$ age trivialmente sobre G/N. Por outro lado, pelo Lema 2.2.4 $C_{G/N}(\alpha\beta) = 1$. Portanto $G = N$.

Agora vamos considerar o caso em que $p = 2$. Como na demonstração do Lema 2.2.4, seja K o subgrupo maximal de ordem ímpar de $\langle \alpha\beta \rangle$. Então $C_G(K) = 1$ e o grupo $K\langle \alpha \rangle$ é um grupo de Frobenius. Pelo Teorema 2.1.8 temos $|G| = |C_G(\alpha)|^2$ e por um argumento de simetria, temos $|G| = |C_G(\beta)|^2$. Assim, $|C_G(\alpha)| = |C_G(\beta)|$ e $|G| = |C_G(\alpha)||C_G(\beta)|$. Como $C_G(\alpha) \cap C_G(\beta) = 1$, segue que $G = C_G(\alpha)C_G(\beta)$.

Agora considere o caso em que G não é abeliano elementar. Como G é solúvel, temos que G possui um subgrupo normal próprio D-invariante N. Argumentando por indução sobre a ordem de G podemos assumir que $N = C_N(\alpha)C_N(\beta)$ e $G/N = C_{G/N}(\alpha)C_{G/N}(\beta)$. Comparando as ordens destes grupos, temos que $|G| = |C_G(\alpha)||C_G(\beta)|$ e como $C_G(\alpha) \cap C_G(\beta) = 1$, segue que $G = C_G(\alpha)C_G(\beta)$.

■

Vamos usar a expressão $(a, b, ...)$-limitado para abreviar "limitado superiormente apenas em termos de $a, b, ...$ ". Para provar o próximo teorema vamos precisar do seguinte resultado.

Proposição 2.2.6 (Lema 4.2 [27]) *Sejam H e G p-grupos finitos para algum primo p e $r = \mathbf{r}(G)$ o posto de G. Se H age fielmente sobre G então o posto de H é r-limitado.*

Teorema 2.2.7 *Seja $D = \langle \alpha, \beta \rangle$ um grupo diedral gerado por duas involuções α e β. Se D age sobre um grupo finito G de tal forma que $C_G(\alpha\beta) = 1$ então o posto de G é limitado em termos de $\mathbf{r}(C_G(\alpha))$ e $\mathbf{r}(C_G(\beta))$.*

Prova: Seja r_0 o posto máximo dos subgrupos de Sylow de G. Pelo Teorema 2.1.7 temos que $\mathbf{r}(G) \leqslant 1 + r_0$ e pelo Lema 2.2.3 existe p-subgrupo de Sylow D-invariante em G, o qual vamos denotar por P. Pela Proposição 2.2.6, o posto de um p-grupo de automorfismos de um p-grupo finito U é limitado em termos do posto de U. Seja U um subgrupo crítico de P, pelo Teorema 1.3.7 temos que U é um subgrupo característico de classe de nilpotência no máximo 2 contendo seu centralizador em P. Então o posto de P é limitado em termos do posto de U. Como $U = C_U(\alpha)C_U(\beta)$, concluímos que U pode ser gerado por no máximo $\mathbf{r}(C_U(\alpha)) + \mathbf{r}(C_U(\beta))$ elementos e o resultado segue. ■

CAPÍTULO 3

ORDEM E POSTO DO RESIDUAL NILPOTENTE DE GRUPOS FINITOS

É bem conhecido que os centralizadores de automorfismos coprimos possuem influência sobre a estrutura do grupo sobre o qual agem. Como exemplo deste fato podemos citar o resultado demonstrado por Ward [32] no qual ele considera que A é um q-grupo abeliano elementar de posto pelo menos 3, agindo sobre um grupo finito G de tal forma que $C_G(a)$ é nilpotente para qualquer $a \in A^{\#}$, e prova que o grupo G é nilpotente. Posteriormente Shumyatsky [28] mostrou que sob as mesmas hipóteses acima, se $C_G(a)$ é nilpotente de classe no máximo c para qualquer $a \in A^{\#}$, então o grupo G é nilpotente de classe (c, q)-limitada. Recentemente, de Melo e Shumyatsky [6] mostraram que o resultado acima continua sendo verdadeiro para o caso em que o grupo A não é necessariamente abeliano.

O objetivo deste capítulo é estudar grupos finitos que admitem a ação de um q-grupo finito de expoente q e ordem pelo menos q^3. Neste sentido, os primeiros resultados que vamos apresentar são os teoremas a seguir, obtidos por de Melo, Souza e Shumyatsky [5]. Ressaltamos que as demonstrações de alguns lemas técnicos foram ajustadas, pois as demonstrações apresentavam lacunas, embora os resultados estivessem corretos. Neste sentido, foi possível olhar para as limitações inicialmente apresentadas nesses lemas e observar que um parâmetro era desnecessário.

Teorema 3.0.1 *Sejam q um número primo e A um q-grupo finito de expoente q agindo por automorfismos sobre um q'-grupo finito G. Suponha que A tenha ordem pelo menos q^3 e $|\gamma_\infty(C_G(a))| \leqslant m$ para qualquer $a \in A^{\#}$. Então $\gamma_\infty(G)$ tem ordem (m, q)-limitada.*

Teorema 3.0.2 *Sejam q um número primo e A um q-grupo finito de expoente q agindo por automorfismos sobre um q'-grupo finito G. Suponha que A tenha ordem pelo menos q^3 e $\mathbf{r}(\gamma_\infty(C_G(a))) \leqslant r$ para qualquer $a \in A^\#$. Então $\gamma_\infty(G)$ tem posto (r,q)-limitado.*

Uma vez demonstrados esses resultados, de Melo e Shumyatsky [7] verificaram que é possível limitar a ordem de $\gamma_\infty(G)$ apenas em função de m, quando se considera a hipótese adicional de que o q-grupo A é abeliano elementar. Foi demonstrado o seguinte teorema.

Teorema 3.0.3 (Teorema 1.1 em [7]) *Sejam q um número primo e A um q-grupo abeliano elementar finito de ordem pelo menos q^3 agindo por automorfismos sobre um q'-grupo finito G. Suponha que $|\gamma_\infty(C_G(a))| \leqslant m$ para qualquer $a \in A^\#$. Então $\gamma_\infty(G)$ tem ordem m-limitada.*

Posteriormente, de Melo [3] estendeu esse resultado mostrando que é possível retirar a hipótese de que A é um q-grupo abeliano elementar e obteve o teorema abaixo.

Teorema 3.0.4 (Teorema 1.1 em [3]) *Sejam q um número primo e A um q-grupo finito de expoente q agindo por automorfismos sobre um q'-grupo finito G. Suponha que A tem ordem pelo menos q^3 e $|\gamma_\infty(C_G(a))| \leqslant m$ para qualquer $a \in A^\#$. Então $\gamma_\infty(G)$ tem ordem m-limitada.*

Este capítulo será dividido em três seções. Na primeira seção vamos apresentar os resultados técnicos necessários para demonstrar dos Teoremas 3.0.1 e 3.0.2 e na segunda seção vamos apresentar as demonstrações desses resultados. Na terceira seção vamos apresentar as demonstrações dos Teoremas 3.0.3 e 3.0.4.

3.1 Demonstrações dos resultados técnicos dos Teoremas 3.0.1 e 3.0.2

Nesta seção apresentaremos os lemas técnicos que serão necessários para a demonstração dos Teoremas 3.0.1 e 3.0.2.

Por questão de organização, agora vamos enunciar alguns resultados que são em sua maioria recentes e que serão usados nas demonstrações seguintes.

Lema 3.1.1 (Lema 1.4 [19]) *Um grupo finito solúvel de posto r tem altura de Fitting r-limitada.*

Teorema 3.1.2 (Teorema A [10]) *Qualquer grupo simples não abeliano pode ser gerado por uma involução e um 2-subgrupo de Sylow.*

Teorema 3.1.3 (Teorema 1 [20]) *Todo grupo simples finito não abeliano G é gerado por uma involução e um elemento de ordem prima.*

Teorema 3.1.4 (Teorema 1.1 [22]) *Seja G um grupo finito tal que $G/Z(G)$ tem posto r. Então o posto de G' é r-limitado.*

Lema 3.1.5 (Lema 1.6 [19]) *Suponha que um grupo Q aja por automorfismos sobre um grupo G. Se $Q = \langle q_1, \ldots, q_n \rangle$, então $[G, Q] = [G, q_1] \cdots [G, q_n]$.*

Lema 3.1.6 *Sejam $N, H_1, \ldots, H_l$ subgrupos de um grupo G sendo N um subgrupo normal. Se $K = \langle H_1, \ldots, H_l \rangle$, então $[N, K] = [N, H_1] \cdots [N, H_l]$.*

Vamos denotar por B um subgrupo de ordem q do $Z(A)$. Considere que A age sobre um q'-grupo $G = PH$, onde P e H são subgrupos A-invariantes tais que P é um p-subgrupo normal para um primo p e H é um p'-subgrupo nilpotente. Note que A contém exatamente $q + 1$ subgrupos de ordem q^2 contendo B.

Lema 3.1.7 *Sejam $A_1, \ldots, A_{q+1}$ os subgrupos de ordem q^2 de A contendo B. Então $C_P(B) = \prod C_P(A_i)$ e $C_H(B) = \prod C_H(A_i)$.*

Prova: Vamos denotar por $\overline{A}$ o grupo quociente A/B. Como $\overline{A}$ não é cíclico e os centralizadores $C_P(B)$ e $C_H(B)$ são A-invariantes, segue que $C_P(B) = \prod C_{C_P(B)}(\overline{a})$ e $C_H(B) = \prod C_{C_H(B)}(\overline{a})$, onde $\overline{a} \in \overline{A}$. Uma forma alternativa de expressar isso é escrever $C_P(B) = \prod C_P(A_i)$ e $C_H(B) = \prod C_H(A_i)$.

■

Lema 3.1.8 *Suponha que P é abeliano. Então $[P, C_H(B)]$ está contido em $\prod[C_P(a), C_H(a)]$, onde este produto é tomado sobre todos os $a \in A^{\#}$.*

Prova: Pelo Lema 3.1.7 temos $C_H(B) = \prod C_H(A_i)$ e $P = \prod_{a \in A_i^{\#}} C_P(a)$ para cada i. Pelo Lema 3.1.6, $[P, C_H(B)] = \prod[P, C_H(A_i)]$. Como P é abeliano, para cada i temos $[P, C_H(A_i)] = \prod[C_P(a), C_H(a)]$ onde o produto é tomado sobre todos os $a \in A_i^{\#}$. Em particular, $[P, C_H(A_i)] = \prod[C_P(a), C_H(a)]$.

■

Lema 3.1.9 *Se* $[C_P(a), C_H(a)] = 1$ *para qualquer* $a \in A^{\#}$*, então* $[P, H] = 1$.

Prova: Primeiro vamos considerar o caso em que P é abeliano. Pelo Lema 3.1.8, $[P, C_H(B)] = 1$. Vamos provar que $[C_P(B), H] = 1$. Usando a notação do Lema 3.1.7 temos que $C_P(B) = \prod C_P(A_i)$ e $H = \prod_{a \in A_i^{\#}} C_H(a)$ para cada i. Como P é abeliano, temos que $[C_P(B), H] = \prod[C_P(A_i), H]$. Então $[C_P(A_i), H] = 1$, pois $[C_P(A_i), C_H(a)] = 1$ para qualquer $a \in A_i^{\#}$. Logo $[C_P(B), H] = 1$. O parágrafo anterior mostra que $C_P(B) \leqslant Z(G)$ e $C_H(B)$ centraliza P. Se H é abeliano, então $C_G(B) \leqslant Z(G)$. Assim, B age livre de pontos fixos sobre $G/Z(G)$ e então $G/Z(G)$ é nilpotente, pelo Teorema 1.3.4. Consequentemente, G é nilpotente e, então, no caso em que P e H são abelianos, temos $[P, H] = 1$.

Suponha que H não é abeliano. Pelo parágrafo anterior, $[P, Z(G)] = 1$. Considerando a ação de $H/Z(G)$ sobre P e argumentando por indução sobre a classe de nilpotência de H, concluímos que $[P, H] = 1$. Então, no caso em que P é abeliano, o lema está provado.

Agora vamos considerar que P não é abeliano. Considere a ação de HA sobre $P/\Phi(P)$. Pelo parágrafo anterior, $[P, H] \leqslant \Phi(P)$. Daí, $P = C_P(H)[P, H] \leqslant C_P(H)\Phi(P)$, o que implica $P = C_P(H)$ e $[P, H] = 1$.

■

Nos dois lemas a seguir foram feitos ajustes na demonstração original apresentada em [5]. Nesse artigo foi considerado que se a ordem de $[C_P(a), C_H(a)]$ é m-limitada, então as ordens de $\langle C_P(B)^H \rangle$ e $[P, H]$ são (m, q)-limitadas. No entanto, a ordem de $[C_P(a), C_H(a)]$ não é simplesmente limitada por um parâmetro m, ela depende de p. Assim, supondo que $|[C_P(a), C_H(a)]| = p^s$ provamos que as ordens dos grupos $\langle C_P(B)^H \rangle$ e $[P, H]$ são potências de p cujo expoente é limitado em função de s e q. Nesse sentido, foram feitas as reformulações abaixo.

Lema 3.1.10 *Suponha que $P = [P, H]$. Assuma que $|[C_P(a), C_H(a)]| = p^s$ para qualquer $a \in A^\#$. Então $|\langle C_P(B)^H \rangle| = p^t$, onde t é um número (s, q)-limitado.*

Prova: Pelo Lema 3.1.7 temos $C_P(B) = \prod C_P(A_i)$, onde $A_1, \ldots, A_{q+1}$ são os subgrupos de A cuja ordem é q^2 e contém B. Primeiro vamos provar que a ordem de $C_P(B)$ é uma potência de p cujo expoente é um número (s, q)-limitado. É suficiente limitar a ordem de $C_P(A_i)$ para cada i. Para cada $a \in A_i$ vamos denotar por P_a e H_a os centralizadores $C_P(a)$ e $C_H(a)$, respectivamente. Temos que P_a é normal em $C_G(a)$. Seja $D_a = C_{P_a}(H_a)$ e $D_i = \cap_{a \in A_i} D_a$. O índice de D_a em P_a é no máximo p^s, pois $|[P_a, H_a]| = p^s$ e então o índice de D_i em $C_P(A_i)$ é menor ou igual a $p^{s|A_i|}$. Seja $x \in D_i$. Considerando que $H = \prod_{a \in A_i^\#} H_a$, temos que $[x, H] = 1$. Então $x = 1$, pois $P = [P, H]$. Daí segue que D_i é trivial para cada i. Portanto $C_P(A_i)$ tem ordem p^j, onde j é um número (s, q)-limitado para qualquer i.

Como $H = \prod_{a \in A_i^\#} H_a$, temos que $[C_P(A_i), H] = \prod_{a \in A_i^\#} [C_P(A_i), H_a]$ e $|[C_P(A_i), H]| \leqslant p^{s|A_i|}$, pois $|[C_P(A_i), H_a]| \leqslant p^s$. Daí, como $[C_P(B), H] = \prod_i [C_P(A_i), H]$, segue que $|[C_P(B), H]| \leqslant p^{s|A_i|(q+1)}$. Portanto $|\langle C_P(B)^H \rangle| = p^t$, onde t é um número (s, q)-limitado.

∎

Lema 3.1.11 *Suponha que $|[C_P(a), C_H(a)]| = p^s$ para qualquer $a \in A^\#$. Então $|[P, H]| = p^j$, onde j é um número (s, q)-limitado.*

Prova: Podemos assumir que $P = [P, H]$. Note que se N é um subgrupo normal de P tal que $[N, H] = 1$, então $N \leqslant Z(P)$. De fato, neste caso temos $[P, N] \leqslant N$ e então $[P, [N, H]] = 1$ e $[H, [P, N]] = 1$. Logo, pelo Lema dos Três Subgupos, temos $[N, [P, H]] = 1$.

Para um subgrupo normal A-invariante M de P e $a \in A^\#$, vamos escrever $j_a(P/M)$ para a ordem de $[C_{P/M}(a), C_H(a)]$ e escreveremos $j_a(P)$ quando M é trivial. Defina $k(P) = \sum_{a \in A^\#} j_a(P)$. Temos que $k(P)$ é menor ou igual a $p^s|A|$. Por indução sobre $k(P)$, vamos provar que a classe de nilpotência de P é no máximo $t = 2k(P)+1$. Se $k(P) = q^3-1$ (o menor valor possível para $k(P)$ - ele ocorre se, e somente se, $[C_P(a), C_H(a)] = 1$, para qualquer $a \in A^\#$), então P é trivial, pelo Lema 3.1.9, pois $P = [P, H]$. Além disso, se P é abeliano não há nada para provar. Suponha que P não é abeliano. Então $[Z_2(P), H] \neq 1$ e daí, pelo Lema 3.1.9, $[C_{Z_2(P)}, C_H(a)] \neq 1$ para algum $a \in A^\#$. Portanto $k(P/Z_2(P)) <$

$k(P)$. Por indução, $P/Z_2(P)$ tem classe de nilpotência no máximo $2(k(P)-1)+1$ e então a classe de nilpotência de P é no máximo $2k(P)+1$.

Temos que $|P|$ é limitada em termos de $|P/P'|$ e da classe de nilpotência de P. Portanto, pelo parágrafo anterior, para provar o lema é suficiente provar que a ordem de P/P' é p^j, onde j é um número (s,q)-limitado. Em particular, sem perda de generalidade, podemos assumir que P é abeliano.

Pelo Lema 3.1.10 o subgrupo $\langle C_P(B)^H\rangle$ tem ordem p^j, onde j é um número (s,q)-limitado e como P é abeliano, concluímos que ele é normal em G. Podemos passar para o quociente $G/\langle C_P(B)^H\rangle$ e sem perda de generalidade, assumir que $C_P(B)=1$.

Pelo Lema 3.1.8, $[P,C_H(B)]$ tem ordem menor ou igual a $p^{s|A|}$. Portanto é suficiente provar que $[P,H]=[P,C_H(B)]$. Vamos primeiramente supor que H é abeliano. Então $[P,C_H(B)]$ é normal em G e passando para o quociente podemos assumir que $[P,C_H(B)]=1$. Então $C_G(B)=C_H(B)$ pertence a $Z(G)$ e, assim, $G/Z(G)$ admite um automorfismo livre de pontos fixos de ordem prima q. Pelo Teorema de Thompson 1.3.4, $G/Z(G)$ é nilpotente. Portanto, G é nilpotente e $[P,H]=1$, como queríamos.

Suponha que H não é abeliano. Vamos provar que $[P,Z(H)]=[P,C_{Z(H)}(B)]$. O subgrupo $[P,Z(H)]$ é normal em G. Logo, passando para o quociente $G/[P,Z(G)]$ podemos considerar a ação de $H/Z(H)$ sobre P e argumentando por indução sobre a classe de nilpotência de H, temos $[P,H]=[P,C_H(B)]$.

■

Para demonstrar o próximo resultado vamos usar o seguinte lema cuja demonstração pode ser encontrada em [12].

Lema 3.1.12 (Lema 2.7 em [12]) *Se D é um grupo de automorfismos coprimos de um grupo simples finito, então D é cíclico.*

Lema 3.1.13 *Seja D um q-grupo não cíclico de ordem q^2 agindo sobre um q'-gupo $N=S_1\times\cdots\times S_t$ o qual é um produto direto de t grupos simples não abelianos. Suponha que $\mathbf{r}(\gamma_\infty(C_N(d)))\leqslant r$ para qualquer $d\in D^\#$. Então t é um número (r,q)-limitado e cada fator direto S_i tem posto no máximo r.*

Prova: Primeiramente vamos provar que cada fator direto S_i tem posto no máximo r. De fato, se S_i é D-invariante, então S_i está contido em $C_N(d)$ para algum $d\in D^\#$ e assim, por hipótese, $\mathbf{r}(S_i) \leqslant r$. Suponha que S_i não é D-invariante. Escolha $d \in D^{\#}$ tal que $S_i^d \neq S_i$. Seja $S = S_i \times S_i^d \cdots \times S_i^{d^{q-1}}$. Temos que $C_S(d)$ é exatamente o subgrupo diagonal de S e assim $C_S(d)$ é isomorfo a S_i. Logo, concluímos que $\mathbf{r}(S_i) \leqslant r$.

Agora vamos provar que t é (r,q)-limitado. Seja $N = K_1 \times \cdots \times K_s$, onde cada K_i é um subgrupo normal minimal D-invariante. Então cada K_i é um produto de no máximo $|D|$ fatores simples e assim $t \leqslant |D|s$. Portanto é suficiente limitar s.

Seja S_j um fator direto de K_i. Se S_j é D-invariante, então S_j está contido em $C_N(d)$ para algum $d \in D^{\#}$. Se S_j não é D-invariante, então podemos escolher $d \in D^{\#}$ tal que $S_i^d \neq S_i$. Agora note que $C_S(d)$ é exatamente o subgrupo diagonal de $S_i \times S_i^d \cdots \times S_i^{d^{q-1}}$ e então $C_S(d)$ é isomorfo a S_j. Em outras palavras, para cada i existe $d \in D^{\#}$ tal que $C_{K_i}(d)$ contém um subgrupo isomorfo a algum S_j. Portanto, $\gamma_\infty(C_{K_i}(d))$ tem ordem par. Como $\mathbf{r}(\gamma_\infty(C_N(d))) \leqslant r$, segue que $\gamma_\infty(C_{K_i}(d))$ pode ter ordem par para no máximo r índices i. Levando em conta que existem apenas $|D|-1$ elementos não triviais em D, deduzimos que $s \leqslant (|D|-1)r$. ■

Definição 3.1.14 *Dizemos que um grupo finito G é **metanilpotente** se $\gamma_\infty(G) \leqslant F(G)$.*

Lema 3.1.15 *Seja G um grupo finito metanilpotente. Seja P um p-subgrupo de Sylow de $\gamma_\infty(G)$ e H um p'-subgrupo de Hall de G. Então $P = [P,H]$.*

Prova: Passando ao quociente $G/O_{p'}(G)$, podemos assumir que $P = \gamma_\infty(G)$. Seja P_1 um p-subgrupo de Sylow de G. Então $G = PH$. Agora P_1/P é normal em G/P, pois G/P é nilpotente. Também temos $P \leqslant P_1$, logo P_1 é normal em G. Segue que $\gamma_\infty(G) = [P_1,H]$, pois em um grupo nilpotente todos os elementos coprimos comutam. Pela Proposição 1.3.6(b), temos $[P_1,H,H] = [P_1,H] = P$ e então $P = [P_1,H] = [P,H]$. ■

3.2 Demonstrações dos Teoremas 3.0.1 e 3.0.2

Agora vamos assumir as hipóteses do Teorema 3.0.2. Então A é um grupo finito de expoente primo q e ordem pelo menos q^3 agindo sobre um q'-grupo finito G de tal forma que $\mathbf{r}(\gamma_\infty(C_G(a)) \leqslant r$ para qualquer $a \in A$. Queremos mostrar que $\mathbf{r}(\gamma_\infty(G))$ é (r,q)-

limitado. Note que podemos assumir que A tem ordem q^3, pois A contém um subgrupo de ordem q^3 e podemos substituir, se necessário, A por este subgrupo.

Prova do Teorema 3.0.2: Suponha que G seja solúvel. Neste caso, pelo Lema 3.1.1 $C_G(a)$ tem altura de Fitting r-limitada para qualquer $a \in A^{\#}$. Logo, G tem altura de Fitting (r,q)-limitada e podemos usar indução sobre $h(G)$. No caso em que $h(G) = 2$ a prova seguirá do Lema 3.1.11. De fato, sejam P um p-subgrupo de Sylow de $\gamma_\infty(G)$ e H um p'-subgrupo de Hall A-invariante de G. Pelos Lemas 3.1.11 e 3.1.15 o posto de $P = [P, H]$ é (r,q)-limitado. Suponha que G tenha altura de Fitting $h > 2$ e seja $N = F_2(G)$ o segundo termo da série de Fitting de G. Temos que a altura Fitting de $G/\gamma_\infty(N)$ é $h-1$ e $\gamma_\infty(N) \leqslant \gamma_\infty(G)$. Daí, por indução, temos que $\gamma_\infty(G)/\gamma_\infty(N)$ tem posto (r,q)-limitado. Agora o resultado segue, pois $\mathbf{r}(\gamma_\infty(G)) \leqslant \mathbf{r}(\gamma_\infty(G)/\gamma_\infty(N)) + \mathbf{r}(\gamma_\infty(N))$.

Agora consideremos G não solúvel. Pela Proposição 1.1.12 temos que $\lambda(C_G(a))$ é r-limitado para qualquer $a \in A^{\#}$, pois seus subgupos solúveis têm altura de Fitting r-limitada. Portanto, $\lambda(G)$ é (r,q)-limitado e podemos usar indução sobre $\lambda(G)$. Primeiro vamos assumir que $G = G'$ e $\lambda(G) = 1$. Como $G = G'$, segue que $G/R(G)$ é o produto de grupos simples não abelianos, onde $R(G)$ é o radical solúvel de G. Pelo que foi feito anteriormente, $\gamma_\infty(R(G))$ tem posto (r,q)-limitado. Podemos considerar quociente por $\gamma_\infty(R(G))$ e assumir que $R(G)$ é nilpotente, ou seja, $R(G) = F(G)$. Agora queremos mostrar que o posto de $[F(G), G]$ é (r,q)-limitado. É suficiente considerar o caso em que $F(G) = P$, onde P é um p-subgrupo de Sylow de $F(G)$. Note que se s é um primo diferente de p e H é um s-subgrupo de Sylow A-invariante de G, então $\mathbf{r}(\gamma_\infty(PH))$ é (r,q)-limitado, pois PH é solúvel. Vamos precisar da seguinte observação sobre grupos simples finitos.

Lema 3.2.1 *Sejam K um grupo simples finito não abeliano e p um número primo. Existe um primo s diferente de p tal que K é gerado por dois s-subgrupos de Sylow.*

Prova: Se $p \neq 2$, podemos usar o Teorema 3.1.2 e K é gerado por uma involução e um 2-subgrupo de Sylow. Podemos então tomar $s = 2$. Se $p = 2$, podemos usar o Teorema 3.1.3 e escrever $K = \langle i, a \rangle$, onde $|i| = 2$ e $|a|$ é um primo ímpar. Temos $K = \langle a, a^i \rangle$ pois ele é um subgrupo a-invariante e i-invariante, logo é normal. Portanto K é gerado por dois elementos de ordem prima e o resultado segue. ■

Pelo Lema 3.1.13, o quociente $G/F(G)$ é um produto de um número (r,q)-limitado de subgrupos A-invariantes $K_1 \times \cdots \times K_s$, onde K_i é um produto de no máximo $|A|$ grupos simples não abelianos. Logo, sem perda de generalidade podemos assumir que $G/F(G)$ é o produto de grupos simples não abelianos isomorfos. Pelo Lema 3.2.1 temos que G/P é gerado pela imagem de dois s-subgrupos de Sylow H_1 e H_2, onde s é um primo diferente de p. Por outro lado, H_1 e H_2 são conjugados de um s-subgrupo de Sylow A-invariante de G. Segue que $[P, H_1]$ e $[P, H_2]$ tem posto (r, q)-limitado.

Seja $H = \langle H_1, H_2 \rangle$. Então $G = PH$. Como $G = G'$, segue que $G = [P, H]H$ e $[P, G] = [P, H]$. Pelo Lema 3.1.6, temos $[P, H] = [P, H_1][P, H_2]$ e, portanto, o posto de $[P, H]$ é (r, q)-limitado. Passando para o quociente $G/[P, G]$, podemos assumir que $P = Z(G)$. Então estamos na situação em que $G/Z(G)$ tem posto (r, q)-limitado. Pelo Teorema 3.1.4, o posto de G' também é (r, q)-limitado. Levando em conta que $G = G'$, concluímos que o posto de G é (r, q)-limitado.

Agora consideremos o caso em que $G \neq G'$. Seja $G^{(l)}$ o último termo da série derivada de G. O argumento do parágrafo anterior mostra que $\mathbf{r}(G^{(l)})$ é (r, q)-limitado. Consequentemente, $\mathbf{r}(\gamma_\infty(G))$ é (r, q)-limitado, pois $G/G^{(l)}$ é solúvel e $\gamma_\infty(G^{(l)}) \leqslant \gamma_\infty(G)$. Isso prova o teorema no caso em que $\lambda(G) \leqslant 1$.

Assuma que $\lambda(G) \geqslant 2$. Seja T um subgrupo característico de G tal que $\lambda(T) = \lambda(G) - 1$ e $\lambda(G/T) = 1$. Por indução, o posto de $\gamma_\infty(T)$ é (r, q)-limitado. Temos que $\lambda(G/\gamma_\infty(T)) = 1$. Portanto, o resultado segue, pois $\mathbf{r}(\gamma_\infty(G)) \leqslant \mathbf{r}(G/\gamma_\infty(T)) + \mathbf{r}(\gamma_\infty(T))$.

3.3 Demonstrações dos Teoremas 3.0.3 e 3.0.4

Agora vamos assumir as hipóteses do Teorema 3.0.3, ou seja, A um q-grupo abeliano elementar finito de ordem pelo menos q^3 agindo por automorfismos sobre um q'-grupo finito G de tal forma que $|\gamma_\infty(C_G(a))| \leqslant m$ para qualquer $a \in A^\#$. Queremos mostrar que $\gamma_\infty(G)$ tem ordem m-limitada. Como A contém subgrupos de ordem q^3, substituindo, se necessário, A por um desses subgrupos vamos assumir que A tem ordem q^3. Além disso, pelo Teorema 3.0.1 $\gamma_\infty(G)$ tem ordem (m, q)-limitada, assim, sem perda de generalidade, podemos assumir que $m < q$.

Vamos precisar dos seguintes resultados.

Lema 3.3.1 (Lema 2.3 em [7]) *Sejam q um primo e A um grupo abeliano elementar de ordem pelo menos q^2 agindo por automorfismos sobre um q'-grupo G. Sejam $A_1, \ldots, A_s$*

os subgrupos de índice q em A. Então $[G, A]$ é gerado pelos subgrupos $[C_G(A_i), A]$.

Lema 3.3.2 *Seja A um grupo de automorfismos de um grupo finito G e seja N um subgrupo normal de G contido em $C_G(A)$. Então $[G, A, N] = 1$. Em particular, se $G = [G, A]$, então $N \leqslant Z(G)$.*

Prova: Por hipótese, $[N, G, A] = [A, N, G] = 1$. Então, pelo Lema dos Três Subgrupos, $[G, A, N] = 1$ e o resultado segue. ∎

Lema 3.3.3 (Lema 2.5 em [7]) *Sejam q um número primo e m um inteiro positivo tais que $m \leqslant q$. Seja A um grupo abeliano elementar de ordem q^2 agindo sobre um q'-grupo finito G de tal forma que o índice de $R(C_G(a))$ em $C_G(a)$ é no máximo m para qualquer $a \in A^{\#}$. Então $[G, A]$ é solúvel.*

Teorema 3.3.4 (Ward [32]) *Se A um p-grupo abeliano elementar de ordem p^3 agindo sobre um p'-grupo G de tal forma que $C_G(a)$ é nilpotente, para todo $a \in A^{\#}$, então G é nilpotente.*

Teorema 3.3.5 (Teorema 2.4.1 em [15]) *Seja G um grupo finito. Se o índice do centro de G é igual a n, então o subgrupo comutador de G também é finito e sua ordem é n-limitada.*

Lema 3.3.6 *O subgrupo $[G, A]$ é nilpotente.*

Prova: Nossa prova será por contradição. Suponha que G seja um contraexemplo de ordem minimal. Pelo Lema 3.3.3, o subgrupo $[G, A]$ é solúvel. Seja V um subgrupo normal minimal A-invariante de G. Temos que V é um p-grupo abeliano elementar e G/V é um r-grupo para um primo $r \neq p$. Escrevemos $G = VH$, onde H é um A-invariante r-subgrupo de Sylow de G tal que $H = [H, A]$. Pelo Lema 3.3.1, temos que H é gerado pelos subgrupos $[C_H(A_i), A]$. Assim, H centraliza $[V, A]$ pois $[C_V(A_i), A]$ e $[C_H(A_j), A]$ têm ordens coprimas para cada $1 \leqslant i, j \leqslant s$. Daí, $[V, A] \leqslant Z(G)$ e pela minimalidade concluímos que $[V, A] = 1$ e $V = C_V(A)$. Então, pelo Lema 3.3.2, $V \leqslant Z(G)$, pois V é um subgrupo normal de G e $G = [G, A]$. Isso é uma contradição e o resultado está provado. ∎

Lema 3.3.7 *Se G é solúvel, então $\gamma_\infty(G) = \gamma_\infty(C_G(A))$.*

Prova: Vamos fazer a demonstração por indução sobre altura de Fitting de G. Primeiramente suponha que G seja metanilpotente. Seja P um p-subgrupo de Sylow de $\gamma_\infty(G)$ e H um p'-subgrupo de Hall A-invariante de G. Pelo Lema 3.1.15, temos que $\gamma_\infty(G) = [P, H] = P$. É suficente mostrar que $P \leqslant \gamma_\infty(C_G(A))$. Então, sem perda de generalidade, vamos assumir que $G = PH$. Agora observe que $\gamma_\infty(C_G(a)) = [C_P(a), C_H(a)]$ para qualquer $a \in A^\#$.

Vamos provar que $P = [C_P(A), C_H(A)]$. Note que A age trivialmente sobre $\gamma_\infty(C_G(a))$ para qualquer $a \in A^\#$, pois $m < q$. Daí, $\gamma_\infty(C_G(a)) \leqslant C_P(A)$ para qualquer $a \in A^\#$. Para $a, b \in A$, temos que $[\gamma_\infty(C_G(a)), C_H(b)] \leqslant [C_P(A), C_H(b)] \leqslant \gamma_\infty(C_G(b))$. Vamos mostrar que $P = C_P(A)$.

Primeiramente vamos assumir que P é abeliano. Note que o subgrupo $N = \prod_{a\in A^\#} \gamma_\infty(C_G(a))$ é normal em G. Como N é A-invariante, obtemos que A age sobre G/N de tal forma que $C_G(a)$ é nilpotente para qualquer $a \in A^\#$, então pelo Teorema 3.3.4, temos que G/N é nilpotente. Portanto, $P = \prod_{a\in A^\#} \gamma_\infty(C_G(a))$. Em particular, $P = C_P(A)$.

Agora vamos considerar o caso em que P não é abeliano e considerar a ação de A sobre $G/\Phi(P)$. Pelo que foi feito acima, $P\Phi(P) = C_P(A)\Phi(P)/\Phi(P)$, o que implica que $P = C_P(A)$.

Como $P = C_P(A)$ é um subgrupo normal de G, pelo Lema 3.3.2, temos que $[H, A]$ centraliza P. Portanto $P = [C_P(A), C_H(A)]$, pois $H = [H, A]C_H(A)$. Isso completa a demonstração para grupos metanilpotentes.

Se G é solúvel e tem peso de Fitting $h > 2$, consideramos o grupo quociente $G/\gamma_\infty(F_2(G))$ o qual tem altura de Fitting $h - 1$. Temos que $\gamma_\infty(F_2(G)) \leqslant \gamma_\infty(G)$. Portanto, $\gamma_\infty(G) = \gamma_\infty(C_G(A))$.

■

Sob nossas hipóteses, temos que $[G, A]$ é nilpotente e $C_G(A)$ tem um subgrupo normal nilpotente de índice no máximo $m!$. Como $G = [G, A]C_G(A)$, o índice de R em G é no máximo $m!$. Pelo Lema 3.3.11, a ordem de $\gamma_\infty(R)$ é no máximo m. Podemos passar para o quociente $G/\gamma_\infty(R)$ e, sem perda de generalidade, assumir que R é nilpotente. Se $G = R$, o resultado está provado. Vamos assumir que $R < G$ e usar indução sobre o índice de R em G. Como $[G, A] \leqslant R$, segue que cada subgrupo de G contendo R é A-invariante. Se T é qualquer subgrupo normal próprio de G que contém R, por indução, a ordem de $\gamma_\infty(T)$ é m-limitada e o teorema segue. Assim, vamos assumir que G/R é isomorfo a um quociente de $C_G(A)$ e, então, por ser simples, G/R tem ordem no máximo m.

Seja $\pi = \pi(m!)$ o conjunto de primos até m e $N = O'_\pi(G)$. Temos que G/N é um π-grupo e $N \leqslant F(G)$. Assim, pelo Teorema de Schur-Zassenhaus o grupo G tem um π-subgrupo A-invariante K tal que $G = NK$. Seja $K_0 = O_\pi(G)$.

Primeiro vamos supor que $K_0 = 1$. Então G é o produto semidireto de N por $K = C_K(A)$. Para um automorfismo $a \in A^\#$, temos que $[C_N(a), K] \leqslant \gamma_\infty(C_G(a))$, pois as ordens de $C_N(a)$ e K são coprimas. Agora, note que $[C_N(a), K]$ é um subgrupo de $\gamma_\infty(C_G(a))$ e então ele deve ser um π-grupo. Além disso, por ser um subgrupo de N, o subgrupo $[C_N(a), K]$ deve ser um π'-grupo. Assim, devemos ter $[C_N(a), K] = 1$ para cada $a \in A^\#$. Como N é um produto de todos os centralizadores $C_N(a)$, segue que $[N, K] = 1$. Como $K_0 = 1$ e K é um π-grupo, segue que $K = 1$ e assim $G = N$ é um grupo nilpotente.

De forma geral não devemos ter necessariamente que $K_0 = 1$. No entanto, considerando o quociente G/K_0 e levando em consideração o parágrafo anterior, temos que $G = N \times K$. Em particular, $\gamma_\infty(G) = \gamma_\infty(K)$ e, sem perda de generalidade, podemos assumir que G é um π-grupo. Segue que o número de primos divisores da ordem de R é m-limitado e podemos usar indução sobre esse número. Vamos agora provar o teorema com a hipótese adicional de que $G = G'$ e em seguida faremos o caso geral.

Suponha que R seja um π-grupo para algum primo $p \in \pi$. Note que se s é um primo diferente de p e H é um s-subgrupo de Sylow A-invariante em G, então, pelo Lema 3.3.7, temos $\gamma_\infty(RH) \leqslant \gamma_\infty(C_G(A))$, pois RH é solúvel.

Pelo Lema 3.2.1 e do fato de G/R ser um grupo simples, temos que G/R é gerado pela imagem de dois s-subgrupos de Sylow H_1 e H_2, onde s é um primo diferente de p. Ambos os subgrupos RH_1 e RH_2 são solúveis e A-invariantes, pois $[G, A] \leqslant R$. Portanto, $[R, H_1]$ e $[R, H_2]$ estão contidos em $\gamma_\infty(C_G(A))$.

Seja $H = \langle H_1, H_2 \rangle$. Temos que $G = RH$ e como $G = G'$, segue que $G = [R, H]H$ e $[R, G] = [R, H]$. Temos que $[R, H] = [R, H_1][R, H_2]$ e portanto a ordem de $[R, H]$ é m-limitada. Passando para o quociente $G/[R, G]$, podemos asumir que $R = Z(G)$. Assim, estamos na situação em que $G/Z(G)$ tem ordem no máximo m e, pelo Teorema de Schur-Baer 3.3.5, levando em consideração que $G = G'$, concluímos que a ordem de G

é m-limitada.

Agora suponha que $\pi(R) = \{p_1, \ldots, p_t\}$, onde $t \geqslant 2$. Para cada $i = 1, \ldots, t$ vamos considerar o quociente $G/O_{p_i'}(G)$. O parágrafo acima mostra que a ordem de $G/O_{p_i'}(G)$ é m-limitada. Como t também é m-limitado, o resultado segue.

Assim, no caso em que $G = G'$ o teorema está provado. Agora vamos considerar o caso em que $G \neq G'$. Seja $G^{(l)}$ o último termo da série derivada de G. O paráráfo anterior mostra que $|G^{(l)}|$ é m-limitada. Consequentemente, $|\gamma_\infty(G)|$ é m-limitada, pois $G/G^{(l)}$ é solúvel e $G^{(l)} \leqslant \gamma_\infty(G)$.

Agora vamos assumir as hipóteses do Teorema 3.0.4, ou seja, A é um q-grupo finito de expoente q agindo por automorfismos sobre um q'-grupo finito G. Além disso, A tem ordem pelo menos q^3 e $|\gamma_\infty(C_G(a))| \leqslant m$ para qualquer $a \in A^\#$. Queremos mostrar que $\gamma_\infty(G)$ tem ordem m-limitada.

Se A contém um subgrupo abeliano de ordem q^3, o resultado segue do Teorema 3.0.3. Logo, vamos assumir que todos os subgrupos de ordem q^3 são não abelianos. Além disso, como A contém subgrupos de ordem q^3, vamos substituir, se necessário, A por um desses subgrupos e assumiremos que A é um grupo extraespecial de ordem q^3. Para simplificar a notação vamos denotar por B o centro de A, e como A é extraespecial temos $A' = Z(A)$ e $|Z(A)| = q$. Note que B está contido em todos os subgrupos de ordem q^2 de A e todos os centralizadores $C_G(a)$, para $a \in A^\#$, são B-invariantes e $C_G(B)$ é A-invariante.

Lema 3.3.8 *Sejam A_i os subgrupos de A cujas ordens são q^2 e contém B. Suponha que $G = [G, B]$. Então G é gerado pelos subgrupos $[C_G(a), B]$, onde $a \in A_i - B$.*

Lema 3.3.9 *O subgrupo $[G, B]$ é nilpotente.*

Prova: A demosntração será feita por contradição. Pelo Lema 3.3.3, o subgrupo $[G, B]$ é solúvel. Suponha que G seja um contraexemplo de ordem minimal. Seja V um subgrupo normal minimal A-invariante de G. Temos que V é um p-grupo abeliano elementar e G/V é um r-grupo para um primo $r \neq p$. Vamos escrever $G = VH$, onde H é um r-subgrupo de Sylow A-invariante de G tal que $H = [H, B]$. Pela minimalidade, também temos $V = [V, H]$, de modo que $C_V(H) = 1$.

Sejam $A_1, \ldots, A_{q+1}$ os subgrupos de ordem q^2 que contêm B. Para cada $a \in A^\#$, vamos denotar por V_a e H_a os centralizadores $C_V(a)$ e $C_H(a)$, respectivamente. Temos que V_a é normal em $C_G(a)$. Seja $E_a = [H_a, B]$. Note que $V_aE_a \leqslant F(C_G(a))$, pois $[C_G(a), B] \leqslant F(C_G(a))$. Pelo Lema 3.3.8, temos que $H = \langle E_x; x \in A_i \backslash B \rangle$ para qualquer A_i. Então $[C_V(A_i), H] = 1$ para qualquer A_i. Como $C_G(B)$ é gerado pelos subgrupos $C_G(A_i)$, obtemos que $[C_V(B), H] = 1$. Daí, pela minimalidade de G, temos que $C_V(B) = 1$. Note que E_a centraliza $C_V(a)$ para qualquer $a \in A^{\#}$, mas existe $a \in A^{\#}$ tal que E_a age não trivialmente sobre V. Nosso objetivo é obter uma contradição decorrente dessas suposições.

Agora vamos considerar V como um F_pHA-módulo e estender o corpo base a um corpo finito que é um corpo de decomposição para HA. Obtemos um kHA-módulo $\tilde{V} = V \otimes_{\mathbb{F}_p} k$. Muitas das propriedades de V, mencionadas acima são herdadas por $\tilde{V}$. Em particular, $C_{\tilde{V}}(H) = 0$, e E_a centraliza $C_{\tilde{V}}(a)$, para qualquer $a \in A^{\#}$.

Considere uma série não refinável de kHA-submódulos

$$\tilde{V} = V_1 > V_2 > \cdots > V_n > V_{n+1} = 0.$$

Seja W um dos fatores dessa série. Temos que W é um kHA-módulo irredutível não trivial. Se $c \in H$ age trivialmente em cada W descrito anteriormente, então c age trivialmente sobre $\tilde{V}$, pois a ordem de H é coprima com a característica p do corpo k. Portanto, sem perda de generalidade, podemos assumir que H não centraliza W.

Pelo Teorema de Clifford 1.4.3, W é a soma direta

$$W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_t$$

das componentes de Wedderburn W_i com respeito a H, as quais são kH-módulos transitivamente permutados por A. Além disso, sobre cada um dos W_i, o centro de H é representado por multiplicação por escalar.

Vamos denotar por Ω o conjunto das componentes de Wedderburn $\{W_1, \ldots, W_t\}$. Como H não centraliza W, podemos escolher uma componente de Wedderburn W_1 sobre a qual H age não trivialmente. Então, para obter uma contradição é suficiente provar que H age trivialmente sobre W_1.

■

Lema 3.3.10 *Seja $a \in A$. O subgrupo H age trivialmente sobre a soma das componentes* *em qualquer $\langle a\rangle$-órbita regular em Ω.*

Prova: Seja $e \in E_a$ e considere a $\langle a\rangle$-órbita regular $\{W_j, W_j^a, \ldots, W_j^{a^{q-1}}\}$. Note que $a \notin B$, pois $C_V(B) = 1$. Seja $A_1 = \langle a, B\rangle$. Temos que $|A_1| = q^2$.

O elemento e deixa invariante todas as componentes W^{a_i}, pois $e \in H$. Por outro lado, e fixa todo elemento da forma $w_j + w_j^a + \cdots + w_j^{a^{q-1}}$, o qual pertence a $C_W(a)$. Portanto, e age trivialmente sobre todas as componentes $W_j^{a^i}$.

Agora note que, para cada $x \in A_i\backslash B$, a $\langle x\rangle$-órbita $\{W_j, W_j^x, \ldots, W_j^{x^{q-1}}\}$ também é regular, pois $C_V(B) = 1$ (cada componente W_j deve ser B-invariante). Portanto, qualquer elemento de E_x age trivialmente sobre W_j. Então H age trivialmente sobre todas as componentes $W_j^{a^i}$, pois H é gerado pelos subgrupos E_x tais que $x \in A_i\backslash B$.

■

Pelo lema acima, temos que $W_1^a = W_1$ para qualquer $a \in A^\#$. Recorde que A não é abeliano e $B = A' = Z(A)$. Seja A_1 um subgrupo de ordem q^2 que contém B. Os centralizadores $C_G(x)$ tais que $x \in A_1\backslash B$ são permutados por A, pois $C_G(x)^a = C_G(x^a)$ e $x^a = x[x, a]$. Então $C_{W_1}(a) \neq 0$ para qualquer $a \in A_1\backslash B$, pois $W_1 = \langle C_{W_1}(x); x \in A_1\backslash B\rangle$ e o subgrupos $C_{W_1}(x)$ são permutados por A.

Pela minimalidade, temos que $[N, B] = 1$ para qualquer subgrupo próprio normal A-invariante N de H. Então H é um r-grupo extraespecial, ou seja, H é um grupo abeliano elementar ou tem classe de nilpotência 2, e $H' = Z(H) = \phi(H)$ é abeliano elementar.

Para provar que H age trivialmente sobre W_1, é suficiente provar que cada subgrupo E_a age trivialmente sobre W_1. Seja $a \in A^\#$ tal que E_a não age trivialmente sobre W_1. Se E_a não é abeliano, então $E_a' \leqslant Z(H)$ e age trivialmete sobre $C_{W_1}(a)$. Portanto E_a' age trivialmente sobre W_1 pois $Z(H)$ age por multiplicação por escalar sobre W_1. De fato, se E_a não é abeliano, então E_x não é abeliano para qualquer $x \in \langle a, B\rangle\backslash B$, pois tais subgrupos são permutados por A. Além disso, como $C_{W_1}(x) \neq 0$ para qualquer $x \in \langle a, B\rangle\backslash B$, temos que $Z = \langle E_a'; x \in \langle a, B\rangle\backslash B$ age trivialmente sobre W_1. Como Z é um subgrupo normal A-invariante de H, podemos fatorar por Z e assumir que E_a é abeliano. No entanto, nesse caso, B age livre de pontos fixos sobre W_1E_a e então, pelo Teorema de Thompson 1.3.4, W_1E_a é nilpotente, o que significa que E_a age trivialmente sobre W_1, o que é uma contradição e a prova está completa.

Lema 3.3.11 *Se G é solúvel, então $\gamma_\infty(G) = \gamma_\infty(C_G(B))$.*

Prova: Vamos usar indução sobre a altura de Fitting h de G. Suponha que G é metanilpotente. Seja P um p-subgrupo de Sylow de $\gamma_\infty(G)$ e H um p'-subgrupo de Hall A-invariante de G. Pelo Lema 3.1.15 temos que $P = [P, H]$. É suficiente mostrar que $P \leqslant \gamma_\infty(C_G(B))$. Desta forma, sem perda de generalidade podemos assumir que $G = PH$. Agora observamos que $\gamma_\infty(C_G(a)) = [C_P(a), C_H(a)]$ para qualquer $a \in A^{\#}$.

Vamos provar que $P = [C_P(B), C_H(B)]$. Sejam $A_1, \ldots, A_{q+1}$ os subgrupos de ordem q^2 de A. Note que cada A_i age trivialmente sobre $\gamma_\infty(C_G(a))$ para qualquer $a \in A_i^{\#}$, pois $q > m$. Logo $\gamma_\infty(C_G(a)) \leqslant C_P(A_i)$ para qualquer $a \in A_i^{\#}$. Em particular, temos que $\gamma_\infty(C_G(B)) \leqslant C_P(A)$ pois $\gamma_\infty(C_G(B))$ é A-invariante.

Primeiro vamos assumir que P é abeliano. Dados $a, b \in A_i$, temos

$$[[C_P(a), C_H(a)], C_H(b)] \leqslant [C_P(A_i), C_H(b)] \leqslant [C_P(b), C_H(b)].$$

Por outro lado, $H = \prod_{b \in A_i^{\#}} C_H(b)$. Assim, o subgrupo $N = \prod_{a \in A^{\#}} [C_P(a), C_H(a)]$ é um subgrupo normal. Como N é A-invariante, temos que A age sobre G/N de tal forma que $C_G(a)$ é nilpotente para qualquer $a \in A^{\#}$. Então G/N é nilpotente pelo Lema 3.1.9. Logo $P = \prod_{a \in A^{\#}} [C_P(a), C_H(a)]$. Em particular, $P = C_P(B)$.

Agora vamos assumir que P não é abeliano e considerar a ação de B sobre $P/\Phi(P)$. Pelo que vimos acima, $P/\Phi(P) = C_P(B)\Phi(P)/\Phi(P)$. Então temos que $P = C_P(B)\Phi(P)$, o que implica que $P = C_P(B)$.

Temos que $[B, P, H] = [P, H, B] = 1$, pois $P = C_P(B)$ é um subgrupo normal de G e então $[[H, B], P] = 1$, pelo Lema dos Três Subgrupos 1.1.13. Assim temos $P = [C_P(B), C_H(B)]$, pois $H = C_H(B)[H, B]$.

Se G é um grupo solúvel e sua altura de Fitting é $h > 2$, então consideramos o grupo quociente $G/\gamma_\infty(F_2(G))$ que tem altura de Fitting $h - 1$ e $\gamma_\infty(F_2(G)) \leqslant \gamma_\infty(G)$. Portanto, por indução, temos $\gamma_\infty(G) = \gamma_\infty(C_G(B))$. ∎

Recorde que, sob nossas hipóteses, $[G, B]$ é nilpotente e $C_G(B)$ tem um subgrupo normal nilpotente de índice no máximo $m!$. Seja R o radical solúvel de G. Como $G = [G, B]C_G(B)$, o índice de R em G é no máximo $m!$. Pelo Lema 3.3.11, temos que a ordem de $\gamma_\infty(R)$ é no máximo m. Passando ao quociente $G/\gamma_\infty(R)$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que R é nilpotente. Se $R = G$, não há nada a provar. Então vamos assumir que $R < G$ e usar indução sobre o índice de R em G. Como $[G, B] \leqslant R$, segue que cada subgrupo de G contendo R é A-invariante. Se T é qualquer subgrupo próprio normal de G contendo R, por indução, a ordem de $\gamma_\infty(T)$ é m-limitada e o teorema segue. Dessa forma, podemos assumir que G/R é um grupo simples não abeliano. Sabemos que G/R é isomorfo a um quociente de $C_G(B)$, e então, sendo simples, G/R tem ordem no máximo m.

Seja $\pi(m!)$ o conjunto de primos até no máximo m. Seja $N = O'_\pi(G)$. Temos que G/N é um π-grupo e $N \leqslant F(G)$. Pelo Teorema de Schur-Zassenhaus, o grupo G tem um π-subgrupo A-invariante K tal que $G = NK$. Seja $K_0 = O_\pi(G)$.

Suponha que $K_0 = 1$, então G é o produto semidireto de N por $K = C_K(A)$. Para um automorfismo $a \in A^\#$, temos que $[C_N(a), K] \leqslant \gamma_\infty(C_G(a))$, pois $C_N(a)$ e K têm ordens coprimas. Por outro lado, $[C_N(a), K]$ é um π-subgrupo, por ser um subgrupo de $\gamma_\infty(C_G(a))$. Concluímos que $[C_N(a), K] = 1$ para cada $a \in A^\#$. Como N é o produto de todos os centralizadores $C_N(a)$, segue que $[N, K] = 1$. Como $K_0 = 1$ e K é um π-gupo, temos que $K = 1$ e então $G = N$ é um grupo nilpotente.

De maneira geral K_0 não necessariamente precisa ser trivial. Contudo, considerando o quociente G/K_0 e levando em consideração o parágrafo anterior, temos $G = N \times K$. Em particular, $\gamma_\infty(G) = \gamma_\infty(K)$, e, sem perda de generalidade, podemos asumir que G é um π-grupo. Segue que o número de primos divisores da $|R|$ é m-limitado e podemos usar indução sobre esse número. Primeiramente vamos demonstrar o teorema adicionando a hipótese de que $G = G'$.

Suponha que R seja um p-grupo para algum primo $p \in \pi$. Note que se s é um primo diferente de p e H é um s-subgrupo de Sylow A-invariante de G, então pelo Lema 3.3.11 temos $\gamma_\infty(RH) \leqslant \gamma_\infty(C_G(B))$, pois RH é solúvel.

Pelo Lema 3.2.1 e do fato de que G/R é simples, temos que G/R é gerado pela imagem de dois s-subgrupos de Sylow H_1 e H_2, onde s é um primo diferente de p. Ambos os subgrupos RH_1 e RH_2 são solúveis e B-invariantes, pois $[G, B] \leqslant R$. Logo $[R, H_1]$ e $[R, H_2]$ estão contidos em $\gamma_\infty(C_G(B))$.

Seja $H = \langle H_1, H_2 \rangle$. Temos que $G = RH$. Como estamos assumindo que $G = G'$, segue que

$$G = [R, H]H \text{ e } [R, G] = [R, H].$$

Temos $[R, H] = [R, H_1][R, H_2]$, então a ordem de $[R, H]$ é m-limitada. Passando para o quociente $G/[R, H]$, podemos assumir que $R = Z(G)$. Pelo Teorema 3.3.5 a ordem de G' também é m-limitada. Considerando que estamos assumindo que $G = G'$, concluímos que a ordem de G é m-limitada.

Agora suponha que $\pi(R) = \{p_1, \ldots, p_t\}$, onde $t \geqslant 2$. Para cada $i = 1, \ldots, t$, considere o quociente $G/O_{p_i'}(G)$. Pelo parágrafo anterior, temos que a ordem de $G/O_{p_i'}(G)$ é m-limitada. Como t também é m-limitado, o resultado segue.

Agora vamos considerar o caso em que $G \neq G'$. Seja $G^{(l)}$ o último termo da série derivada de G. O parágrafo anterior mostra que $|G^{(l)}|$ é m-limitada. Consequentemente, $|\gamma_\infty(G)|$ é m-limitada, pois $G/G^{(l)}$ é solúvel e $G^{(l)} \leqslant \gamma_\infty(G)$.

CAPÍTULO 4

RESIDUAL NILPOTENTE DE GRUPOS FINITOS COM UM GRUPO SUPERSOLÚVEL DE AUTOMORFISMOS

No Capítulo 2, vimos que ao considerar a ação de um grupo diedral $D = \langle \alpha, \beta \rangle$ sobre um grupo finito G de tal modo que $C_G(\alpha\beta) = 1$, foi demonstrado em [29] que a ordem e o posto de G são, respectivamente, limitados em função da ordem e do posto de $C_G(\alpha)$ e $C_G(\beta)$.

Recentemente, em [4] foi considerado o caso em que A é um grupo finito e M é um subgrupo normal de A tal que todos os elementos em $A \backslash M$ tem ordem p. Supondo que A age sobre um p'-grupo finito G de tal forma que $C_G(M) = 1$ e que $C_G(x)$ é nilpotente para todo $x \in A \backslash M$, foi provado que G é nilpotente.

O objetivo deste capítulo é estudar o residual nilpotente de grupos finitos admitindo um grupo supersolúvel de automorfismos e obter novos resultados que generalizam os teoremas apresentados nos artigos [29] e [4]. As generalizações destes resultados serão demonstradas como corolários do seguinte resultado.

Teorema 4.0.1 *Sejam A um grupo supersolúvel e B um subgrupo normal de A, cuja ordem é um primo q. Suponha que exista um conjunto de geradores $x_1, \ldots, x_t$ de A tais que cada subgrupo $A_i = \langle B, x_i \rangle$ é um grupo de Frobenius ou um q-grupo abeliano elementar de posto 2. Assuma que A aja coprimamente sobre um grupo finito G de tal forma que $C_N(B) = \langle C_N(A_1), \ldots, C_N(A_t) \rangle$ para qualquer subgrupo N, de G, que é A-invariante .*

a) Se $C_G(x)$ é nilpotente para qualquer $x \in \{A_1^{\#}, \ldots, A_t^{\#}\}$, então G é nilpotente.

b) Se $\gamma_\infty(C_G(x))$ tem ordem no máximo m para qualquer $x \in \{A_1^\#, \ldots, A_t^\#\}$, então $\gamma_\infty(G)$ tem ordem $(m, |A|)$-limitada.

c) Se $\gamma_\infty(C_G(x))$ tem posto no máximo r para qualquer $x \in \{A_1^\#, \ldots, A_t^\#\}$, então $\gamma_\infty(G)$ tem posto $(r, |A|)$-limitado.

Corolário 4.0.2 *Seja $D = \langle \alpha, \beta \rangle$ um grupo diedral gerado por duas involuções α e β. Suponha que D age coprimamente sobre um grupo finito G de tal forma que $C_G(\alpha\beta) = 1$.*

a) Se $\gamma_\infty(C_G(\alpha))$ e $\gamma_\infty(C_G(\beta))$ têm ordem no máximo m, então $\gamma_\infty(G)$ tem ordem $(m, |D|)$-limitada.

b) Se $\gamma_\infty(C_G(\alpha))$ e $\gamma_\infty(C_G(\beta))$ têm posto no máximo r, então $\gamma_\infty(G)$ tem posto $(r, |D|)$-limitado.

Corolário 4.0.3 *Sejam P um p-grupo finito e M um subgrupo maximal de P. Assuma que todos os elementos em $P \backslash M$ têm ordem p. Suponha que P aja sobre um grupo finito G de tal forma que $C_G(M) = 1$.*

a) Se $\gamma_\infty(C_G(x))$ tem ordem no máximo m para qualquer $x \in P \backslash M$, então $\gamma_\infty(G)$ tem ordem $(m, |P|)$-limitada.

b) Se $\gamma_\infty(C_G(x))$ tem posto no máximo r para qualquer $x \in P \backslash M$, então $\gamma_\infty(G)$ tem posto $(r, |P|)$-limitado.

Note que quando consideramos um grupo diedral ou um p-grupo agindo coprimamente por automorfismos sobre um grupo finito G, conforme mencionado nos corolários anteriores, o ponto importante é a forma como G é gerado. Em todos esses casos, as hipóteses do Teorema 4.0.1 são satisfeitas.

4.1 Demonstrações dos resultados técnicos

Ao longo desta seção, vamos assumir as hipóteses do Teorema 4.0.1. Vamos considerar A um grupo supersolúvel e B um subgrupo normal de A cuja ordem é um número primo q. Suponha que exista um conjunto de geradores $x_1, \ldots, x_t$ de A de tal forma que cada subgrupo $A_i = \langle B, x_i \rangle$ seja um grupo de Frobenius ou um q-grupo abeliano elementar de posto 2. Assuma que A aja coprimamente sobre um grupo finito G de tal maneira que $N = \langle C_N(A_1), \dots, C_N(A_t)\rangle$ para qualquer subgrupo A-invariante N. Além disso, assuma que $G = PH$ onde P e H são A-invariantes, P é um p-grupo normal e H é um p'-grupo nilpotente. Note que $C_G(B) = \langle C_G(A_1), \dots, C_G(A_t)\rangle$ pois $C_G(B)$ é A-invariante.

Lema 4.1.1 *Seja FH um grupo de Frobenius com núcleo F e complemento H. Se FH age coprimamente sobre um grupo finito solúvel G, então $G = C_G(F)\langle C_G(H^f);\ f \in F\rangle$. Se G é nilpotente, então $G = C_G(F)\prod_{f\in F} C_G(H^f)$.*

Prova: Como G é solúvel, podemos considerar uma série normal não refinável FH-invariante

$$G = G_1 > G_2 > \cdots > G_k > G_{k+1} = 1$$

tal que cada fator $S = G_i/G_{i+1}$ é abeliano. Note que é suficiente provar que

$$C_{G_i/G_{i+1}}(F)\langle C_{G_i}(H^f); f \in F\rangle G_{i+1}/G_{i+1} = G_i/G_{i+1},$$

isto é, $C_S(F)\langle C_S(H^f); f \in F\rangle = S$. Assim podemos supor que G é um grupo abeliano. Note que $G = C_G(F)\oplus[G, F]$. Logo, podemos considerar que $G = [G, F]$. Em particular, podemos assumir que $C_G(F) = 1$. Daí o resultado segue do Lema 2.1.4.

Agora considere que G é nilpotente de classe c. Se G é abeliano, então é imediato que $G = C_G(F)\prod_{f\in F} C_G(H^f)$. Assim podemos assumir que $c \geqslant 2$ e usar indução sobre a classe de nilpotência de G. Denote por $\bar{N}$ a imagem de qualquer subgrupo N de G em $G/Z(G)$. Pela hipótese de indução, segue que $\bar{G} = C_{\bar{G}}(F)\prod_{f\in F} C_{\bar{G}}(H^f)$. Então $G = Z(G)C_G(F)\prod_{f\in F} C_G(H^f)$. Como $Z(G)$ é abeliano, segue que $Z(G) = C_{Z(G)}(F)\prod_{f\in F} C_{Z(G)}(H^f)$. Por outro lado, $C_{Z(G)}(H^f)$ está contido em $C_G(H^f)$ e no centro de G. Portanto, $G = C_G(F)\prod_{f\in F} C_G(H^f)$. ■

O próximo lema é uma consequência imediata dos Lemas 1.3.6 e 4.1.1, pois P e H são nilpotentes.

Lema 4.1.2 *Temos que $C_P(B) = \prod C_P(A_i)$ e $C_H(B) = \prod C_H(A_i)$. Além disso, para qualquer i, temos $P = \prod_{a\in A_i^\#} C_P(a)$ e $H = \prod_{a\in A_i^\#} C_H(a)$.*

Os próximos lemas são usados para demonstrar a Proposição 4.0.1. Suas demonstrações usam as mesmas técnicas do Capítulo 3 e serão apresentadas aqui com as adaptações necessárias às hipóteses que estamos considerando.

A partir de agora, vamos denotar por $D^{\#}$ o conjunto $\{A_1^{\#}, \ldots, A_t^{\#}\}$ e por $|D^{\#}|$ o número de elementos de $D^{\#}$.

Lema 4.1.3 *Se P é abeliano, então $[P, C_H(B)]$ está contido em $\prod[C_P(a), C_H(a)]$, onde o produto é tomado sobre todo $a \in D^{\#}$.*

Prova: Pelo Lema 4.1.2, temos que $C_H(B) = \prod C_H(A_i)$ e $P = \prod_{a\in A_i^{\#}} C_P(a)$ para cada i. Pelo Lema 3.1.6, $[P, C_H(B)] = \prod [P, C_H(A_i)]$. Aplicando o Lema 4.1.2 novamente e usando o fato de que P é abeliano, temos $[P, C_H(A_i)] = \prod_{a\in A_i^{\#}}[C_P(a), C_H(A_i)]$ para cada i. Em particular, $[P, C_H(A_i)] = \prod_{a\in A_i^{\#}}[C_P(a), C_H(a)]$. ■

Lema 4.1.4 *Se $[C_P(a), C_H(a)] = 1$ para qualquer $a \in D^{\#}$, então $[P, H] = 1$.*

Prova: Primeiro vamos considerar o caso em que P é abeliano. Pelo Lema 4.1.3, temos $[P, C_H(B)] = 1$. Agora vamos mostrar que $[C_P(B), H] = 1$. Pelo Lema 4.1.2 segue que $C_P(B) = \prod C_P(A_i)$ e $H = \prod_{a\in A_i^{\#}} C_H(a)$ para cada i. Como P é abeliano, concluímos que $[C_P(B), H] = \prod [C_P(A_i), H]$. Por outro lado, $[C_P(A_i), C_H(a)] = 1$ para qualquer $a \in A_i^{\#}$. Então $[C_P(A_i), H] = 1$. Logo, $[C_P(B), H] = 1$.

O primeiro parágrafo mostra que $C_P(B) \leqslant Z(G)$ e $C_H(B)$ centraliza P. Se H é abeliano, então $C_G(B) \leqslant Z(G)$. Logo, B age livre de pontos fixos sobre $G/Z(G)$ e assim, pelo Teorema de Thompson 1.3.4, segue que $G/Z(G)$ é nilpotente. Consequentemente, G é nilpotente e, então, no caso em que P e H são nilpotentes, temos que $[P, H] = 1$.

Considere que H não é abeliano. Pelo caso abeliano, segue que $[P, Z(H)] = 1$. Considerando a ação de $H/Z(H)$ sobre P e argumentando por indução sobre a classe de nilpotência de H concluímos que $[P, H] = 1$. Assim, no caso em que P é abeliano, o lema está provado.

Agora assuma que P não é abeliano e considere a ação de HA sobre $P/\Phi(P)$. Pelo parágrafo anterior, $[P, H] \leqslant \Phi(P)$. Então $P = C_P(H)[P, H] \leqslant C_P(H)\Phi(P)$ e assim concluímos que $P = C_P(H)$ e $[P, H] = 1$. ■

Lema 4.1.5 *Seja $P = [P, H]$. Se $|[C_P(a), C_H(a)]| = p^s$ para qualquer $a \in D^{\#}$, então $|\langle C_P(B)^H\rangle| = p^t$ onde t é um número $(s, |D^{\#}|)$-limitado.*

Prova: Note que pelo Lema 4.1.2 temos $C_P(B) = \prod C_P(A_i)$, onde $A_i = \langle B, x_i \rangle$. Primeiro vamos provar que a ordem de $C_P(B)$ é uma potência de p tal que o expoente é um número $(s, |D^{\#}|)$-limitado. É suficiente mostrar que, para cada i, $C_P(A_i)$ tem ordem p^j, onde j é um número $(s, |D^{\#}|)$-limitado. Para cada $a \in A_i$ vamos denotar $P_a = C_P(a)$ e $H_a = C_H(a)$. Temos que P_a é normal em $C_G(a)$. Seja $D_a = C_{P_a}(H_a)$ e $D_i = \cap_{a \in A_i} D_a$. O índice de D_a em P_a é no máximo p^s, pois $|[C_P(a), C_H(a)]| = p^s$ e então o índice de D_i em $C_P(A_i)$ é no máximo $p^{s|A_i|}$. Tome $x \in D_i$. Considerando que $H = \prod_{a \in A_i^{\#}} H_a$, deduzimos que $[x, H] = 1$. Daí $x = 1$, pois $P = [P, H]$. Logo D_i é trivial para cada i. Portanto $C_P(A_i)$ tem ordem no máximo $p^{s|A_i|}$, para cada i.

Como $H = \prod_{a \in A_i^{\#}} H_a$, segue que

$$[C_P(A_i), H] = \prod_{a \in A_i^{\#}} [C_P(A_i), H_a].$$

Daí, $|[C_P(A_i), H]| \leqslant p^{s|A_i|}$, pois $|[C_P(a), C_H(a)]| = p^s$. Pelo Lema 4.1.2, temos que $C_P(B) = \prod C_P(A_i)$, então $[C_P(B), H] = \prod_i [C_P(A_i), H]$. Logo $|[C_P(B), H]| \leqslant p^{s|D^{\#}|}$ e assim $|\langle C_P(B)^H \rangle| = p^t$ onde t é um número $(s, |D^{\#}|)$-limitado.

■

Lema 4.1.6 *Se $[C_P(a), C_H(a)]$ tem ordem p^s para qualquer $a \in D^{\#}$, então $[P, H]$ tem ordem p^j, onde j é um número $(s, |D^{\#}|)$-limitado.*

Prova: Podemos assumir que $P = [P, H]$. Primeiramente vamos provar que se N é um subgrupo normal de P tal que $[N, H] = 1$, então $N \leqslant Z(P)$. De fato, temos $[P, N] \leqslant N$ e assim, $[P, [N, H]] = 1$ e $[H, [P, N]] = 1$. Portanto, pelo Lema dos Três Subgrupos 1.1.13, temos $[N, [P, H]] = 1$.

Note que $|P|$ é limitada em termos de $|P/P'|$ e da classe de nilpotência de P. Primeiramente vamos limitar a classe de nilpotência de P.

Sejam M um subgrupo normal A-invariante de P e $a \in D^{\#}$. Defina $j_a(P/M) = |[C_{P/M}(a), C_H(a)]|$. Se M for trivial, vamos escrever simplesmente $j_a(P)$. Defina $k(P) = \sum_{a \in D^{\#}} j_a(P)$. Argumentando por indução sobre $k(P)$ vamos mostrar que a classe de nilpotência de P é no máximo $2k(P)+1$. Note que o menor valor possível para $k(P)$ é $|D^{\#}|$ e esse valor ocorre se, e somente se, $j_a(P) = 1$ para qualquer $a \in D^{\#}$. Se $k(P) = |D^{\#}|$, o resultado segue do Lema 4.1.4, pois $P = [P, H]$. Suponha que $k(P) > |D^{\#}|$. Se P

é abeliano, não há nada para provar, então suponha que P não é abeliano. Usando o resultado do parágrafo anterior, temos $[Z_2(P), H] \neq 1$. Assim, pelo Lema 4.1.4, segue que $[C_{Z_2(P)}(a), C_H(a)] \neq 1$ para algum $a \in D^{\#}$. Portanto, $k(P/Z_2(P)) < k(P)$. Por indução, a classe de nilpotência de $P/Z_2(P)$ é no máximo $2(k(P)-1)+1$ e então a classe de nilpotência de P é no máximo $2k(P)+1$.

Agora temos que provar que a ordem de P/P' é p^j, onde j é um número $(s, |D^{\#}|)$-limitado. Em particular, sem perda de generalidade, vamos assumir que P é abeliano.

Pelo Lema 4.1.5 o subgrupo $\langle C_P(B)^H \rangle$ tem ordem p^j, onde j é um número $(s, |D^{\#}|)$-limitado pois P é abeliano. Assim, temos que $\langle C_P(B)^H \rangle$ é normal em G e então podemos passar ao quociente $G/\langle C_P(B)^H \rangle$ e assumir, sem perda de generalidade, que $C_P(B) = 1$.

Pelo Lema 4.1.3, $[P, C_H(B)]$ tem ordem menor ou igual a $p^{s|D^{\#}|}$. Logo é suficiente provar que $[P, H] = [P, C_H(B)]$. Suponha que H seja abeliano. Então $[P, C_H(B)]$ é normal em G e passando ao quociente, podemos assumir que $[P, C_H(B)] = 1$. Assim $C_G(B) = C_H(B)$ pertence a $Z(G)$ e $G/Z(G)$ admite um automorfismo livre de pontos fixos de ordem prima q. Pelo Teorema de Thompson 1.3.4, $G/Z(G)$ é nilpotente. Portanto, G é nilpotente e $[P, H] = 1$.

Suponha que H não seja abeliano. Pelo parágrafo anterior, $[P, Z(H)] = [P, C_{Z(H)}(B)]$. Note que $[P, Z(H)]$ é normal em G, então passando ao quociente $G/[P, Z(H)]$ podemos considerar a ação de $H/Z(H)$ sobre P e argumentando por indução sobre a classe de nilpotência de H segue que $[P, H] = [P, C_H(B)]$. ■

4.2 Demonstração do Teorema 4.0.1

Agora vamos recordar as hipóteses do Teorema 4.0.1. A é um grupo supersolúvel e B é um subgrupo normal de A, cuja ordem é prima. Existe um conjunto de geradores $x_1, \ldots, x_t$ de A tais que cada subgrupo $A_i = \langle B, x_i \rangle$ ou é um grupo de Frobenius, ou é um grupo abeliano elementar de posto 2 e A age coprimamente sobre um grupo finito G de tal forma que $C_N(B) = \langle C_N(A_1), \ldots, C_N(A_t) \rangle$ para qualquer subgrupo A-invariante N. Primeiro vamos provar o item (a): Se $C_G(x)$ é nilpotente para qualquer $x \in \{A_1^{\#}, \ldots, A_t^{\#}\}$, então G é nilpotente.

Nosso argumento será por contradição. Como consequência da classificação dos grupos simples finitos, se B é um grupo de automorfismos de G cuja ordem é coprima com a ordem de G e $C_G(B)$ é nilpotente ou tem ordem ímpar, então G é solúvel (veja por exemplo [31]). Assuma que G não é nilpotente e seja G um contraexemplo minimal. Sabemos que G é solúvel e assim $G = PH$, onde P é o único p-subgrupo abeliano elementar normal minimal para um primo p e H é um q-subgrupo de Sylow abeliano A-invariante de G para primos $q \neq p$. Agora note que temos uma contradição, pelo Lema 4.1.4. Portanto G é nilpotente.

Agora vamos dar uma prova detalhada para o Teorema 4.0.1(c). A prova do Teorema 4.0.1(b) pode ser obtida por adaptações na prova do Teorema 4.0.1(c).

Assumindo as hipóteses do Teorema 4.0.1(c) vamos considerar que $\mathbf{r}(\gamma_\infty(C_G(a))) \leqslant r$ par qualquer $a \in D^\#$ e queremos provar que $\mathbf{r}(\gamma_\infty(G))$ é $(r, |A|)$-limitado.

Suponha que G seja solúvel. Neste caso, $C_G(a)$ tem altura de Fitting r-limitado para qualquer $a \in D^\#$, pelo Lema 3.1.1. Logo G tem altura de Fitting $(r, |A|)$-limitado e podemos usar indução sobre $h(G)$. No caso em que $h(G) = 2$, a prova é imediata pelo Lema 4.1.6. De fato, sejam P um p-subgrupo de Sylow de $\gamma_\infty(G)$ e H um p'-subgrupo de Hall A-invariante de G. Então pelos Lemas 4.1.6 e 3.1.15 o posto de $P = [P, H]$ é $(r, |A|)$-limitado. Portanto o posto de $\gamma_\infty(G)$ é $(r, |A|)$-limitado. Suponha que a altura de Fitting de G é $h > 2$ e seja $N = F_2(G)$ o segundo termo da série de Fitting de G. A altura de Fitting de $G/\gamma_\infty(N)$ é $h - 1$ e $\gamma_\infty(N) \leqslant \gamma_\infty(G)$. Assim, por indução temos que $\gamma_\infty(G)/\gamma_\infty(N)$ tem posto $(r, |A|)$-limitado. Logo, o resultado segue pois, $\mathbf{r}(\gamma_\infty(G)) \leqslant \mathbf{r}(\gamma_\infty(G)/\gamma_\infty(N)) + \mathbf{r}(\gamma_\infty(N))$.

Agora vamos considerar o caso em que G não é solúvel. Lembre que $\lambda(C_G(a))$ é r-limitado para qualquer $a \in A^\#$ pela Proposição 1.1.12, pois seus subgrupos solúveis têm altura de Fitting r-limitado. Logo, $\lambda(G)$ é $(r, |A|)$-limitado e podemos usar indução sobre $\lambda(G)$.

Primeiramente vamos assumir que $G = G'$ e $\lambda(G) = 1$. Como $G = G'$, segue que $G/R(G)$ é um produto de grupos simples não abelianos, onde $R(G)$ é o radical solúvel de G. Pelo argumento acima, $\gamma_\infty(R(G))$ tem posto $(r, |A|)$-limitado. Podemos quocientar por $\gamma_\infty(R(G))$ e assimir que $R(G)$ é nilpotente, isto é, que $R(G) = F(G)$.

Agora queremos mostrar que o posto de $[F(G), G]$ é $(r, |A|)$-limitado. Note que é suficiente considerar o caso em que $F(G) = P$, onde P é um p-subgrupo de Sylow de $F(G)$. Note que se s é um primo diferente de p e H é um s-subgrupo de Sylow A-invariante de G, então $\mathbf{r}(\gamma_\infty(PH))$ é $(r, |A|)$-limitado, pois PH é solúvel.

Pelo Lema 3.1.13, o quociente $G/F(G)$ é um produto de um número $(r, |A|)$-limitado de subgrupos normais A-invariantes $K_1 \times \cdots \times K_s$, onde K_i é um produto de no máximo $|A|$ grupos simples não abelianos. Logo, sem perda de generlidade, podemos assumir que $G/F(G)$ é um produto de grupos simples não abelianos isomorfos. Usando o Lema 3.2.1, podemos deduzir que G/P é gerado pela imagem de dois s-subgrupos de Sylow H_1 e H_2, onde s é um primo diferente de p. Por outro lado, H_1 e H_2 são conjugados de um s-subgrupo de Sylow A-invariante em G. Segue que $[P, H_1]$ e $[P, H_2]$ têm posto $(r, |A|)$-limitado.

Seja $H = \langle H_1, H_2 \rangle$. Temos que $G = PH$. Como $G = G'$, segue que $G = [P, H]H$ e $[P, G] = [P, H]$. Pelo Lema 3.1.6, temos $[P, H] = [P, H_1][P, H_2]$ e, portanto, o posto de $[P, H]$ é $(r, |A|)$-limitado. Passando ao quociente $G/[P, G]$ podemos asumir que $P = Z(G)$. Então estamos na situação em que $G/Z(G)$ tem posto $(r, |A|)$-limitado. Pelo Teorema 3.1.4 o posto de G' também é $(r, |A|)$-limitado. Levando em consideração que $G = G'$, concluímos que o posto de G é $(r, |A|)$-limitado.

Agora vamos considerar o caso em que $G \neq G'$. Seja $G^{(l)}$ o último termo da série derivada de G. O argumento do parágrafo anterior mostra que $\mathbf{r}(G^{(l)})$ é $(r, |A|)$-limitado. Consequentemente, $\mathbf{r}(\gamma_\infty(G))$ é $(r, |A|)$-limitado pois $G/G^{(l)}$ é solúvel e $\gamma_\infty(G^{(l)}) \leqslant \gamma_\infty(G)$. Isto prova o teorema no caso particular em que $\lambda(G) \leqslant 1$.

Assuma que $\lambda(G) \geqslant 2$. Seja T um subgrupo característico de G tal que $\lambda(T) = \lambda(G) - 1$ e $\lambda(G/T) = 1$. Por indução, o posto de $\gamma_\infty(T)$ é $(r, |A|)$-limitado. Como $\lambda(G/\gamma_\infty(T)) = 1$ o resultado segue, pois $\mathbf{r}(\gamma_\infty(G)) \leqslant \mathbf{r}(G/\gamma_\infty(T)) + \mathbf{r}(\gamma_\infty(T))$.

4.3 Demonstrações dos Corolários

Prova do Corolário 4.0.2: Seja $D = \langle \alpha, \beta \rangle$ o grupo diedral gerado por duas involuções α e β. Suponha que D aja coprimamente sobre um grupo finito G de tal forma que $C_G(\alpha\beta) = 1$. Foi mostrado no Teorema 2.2.5 que $N = C_N(\alpha)C_N(\beta)$ para qualquer subgrupo D-invariante N. Seja $F = \langle \alpha\beta \rangle$. Se $|F|$ é prima, então pelo Teorema de Thompson 1.3.4 temos que G é nilpotente. Assuma que $|F|$ não é um número primo. Dessa forma, podemos considerar um subgrupo normal B de D cuja ordem é prima e então D/B age sobre $C_G(B)$. Logo, $C_G(B) = C_{C_G(B)}(\alpha)C_{C_G(B)}(\beta)$. Em particular, definindo $A_1 = \langle B, \alpha \rangle$ e $A_2 = \langle B, \beta \rangle$, temos que A_1 e A_2 são grupos de Frobenius se $|B|$

é ímpar ou um 2-grupo abeliano elementar se $|B| = 2$ e então podemos escrever $C_G(B) = C_G(\langle B, \alpha\rangle)C_G(\langle B, \beta\rangle)$. Além disso, note que, por indução sobre $|D|$, temos $|\gamma_\infty(C_G(B))|$ é $(m, |D|)$-limitada, pois D/B age sobre $C_G(B)$ e F/B age livre de pontos fixos sobre $C_G(B)$. Portanto, temos que $C_G(a)$ tem ordem $(m, |D|)$-limitada para $a \in \{A_1^\#, A_2^\#\}$. Assim, pelo Teorema 4.0.1, segue que $\gamma_\infty(G)$ tem ordem $(m, |D|)$-limitada.

Prova do Corolário 4.0.3: Sejam P um p-grupo finito e M um subgrupo maximal de P. Assuma que todos os elementos em $P\backslash M$ têm ordem p. Suponha que P age sobre um grupo finito G de tal forma que $C_G(M) = 1$. Note que no caso em que $|P| = p^2$, o subgrupo maximal M tem ordem p e age livre de pontos fixos sobre G. Então, pelo Teorema de Thompson 1.3.4, G é nilpotente. Assim, sem perda de generalidade, vamos assumir que $|P| \geqslant p^3$. Seja Z um subgrupo de ordem p de $Z(P) \cap M$ e denote por X o conjunto $P\backslash M$. Para qualquer $x \in X$, vamos denotar por B_x o p-subgrupo abeliano elementar $Z\langle x\rangle$. Temos que B_x é um p-grupo abeliano elementar de ordem p^2 e que $B_x\backslash Z \subseteq X$.

Lema 4.3.1 *Temos que* $G = \langle C_G(x);\ x \in X\rangle$.

Prova: Vamos provar por indução sobre $|P|$. Se $|P| = p^2$, então P é um p-grupo abeliano elementar. Daí, é imediato que $G = \langle C_G(x);\ x \in X\rangle$.

Agora suponha que $|P| = p^n \geqslant p^3$. Seja $x \in X$ e considere o p-subgrupo abeliano elementar B_x. Então, $G = \langle C_G(a);\ a \in B_x\backslash\{1\}\rangle$. Como $B_x\backslash Z \subseteq X$, é suficiente provar que $C_G(Z)$ é gerado por pontos fixos de elementos de X. Por outro lado, o subgrupo $C_G(Z)$ é P-invariante e então admite a ação natural pelo p-grupo P/Z. Além disso, M/Z age livre de pontos fixos sobre $C_G(Z)$. Portanto, o resultado segue por indução pois $|P/Z| = p^{n-1}$. ■

Como uma consequência do lema acima, temos que $C_G(Z) = \langle C_G(B_x);\ x \in X\rangle$. Além disso, note que $|\gamma_\infty(C_G(Z))|$ é $(m, |P|)$-limitada por indução sobre $|P|$, pois P/Z age sobre $C_G(Z)$ e M/Z age livre de pontos fixos sobre $C_G(Z)$. Note que $C_G(x)$ tem ordem $(m, |P|)$-limitada para todo $a \in \{B_x^\#; x \in X\}$, daí pelo Teorema 4.0.1, segue que $\gamma_\infty(G)$ tem ordem $(m, |P|)$-limitada.

CAPÍTULO 5

RESIDUAL NILPOTENTE DE GRUPOS FINITOS COM UM GRUPO DE FROBENIUS DE AUTOMORFISMOS

No Capítulo 2 vimos que ao considerar a ação de um grupo de Frobenius FH sobre um grupo finito G de tal forma que $C_F(G) = 1$ e $C_G(H)$ é nilpotente, foi mostrado em [16] que G também é nilpotente. Em [2], foi demonstrado que sob as mesmas hipóteses, se $C_G(H)$ é nilpotente de classe c, então a classe de nilpotência de G é limitada em função de c e da ordem de FH. Lembrando que quando FH não é supersolúvel não é possível limitar a classe de nilpotência em termos do $C_G(H)$ e da classe c, pelo Exemplo 5.10 em [16].

Neste capítulo vamos estudar o residual nilpotente de grupos finitos admitindo um grupo de Frobenius de automorfismos e generalizar o resultado apresentado em [2].

Vamos provar o seguinte teorema.

Teorema 5.0.1 *Seja FH um grupo de Frobenius com núcleo F e complemento H. Suponha que FH aja sobre um grupo finito G de tal forma que $C_G(F) = 1$. Então:*

a) $|\gamma_\infty(G)|$ é limitada em termos da $|H|$ e $|\gamma_\infty(C_G(H))|$;

b) o posto de $\gamma_\infty(G)$ é limitado em termos da $|H|$ e do posto de $\gamma_\infty(C_G(H))$.

5.1 Demonstração do resultado técnico

O próximo resultado foi demonstrado em [19].

Lema 5.1.1 *Sejam p um primo, P um p-grupo finito e Q um p'-grupo de automorfismos de P.*

a) Se $|[P,q]| \leqslant m$ para todo $q \in Q$, então $|Q|$ e $|[P,Q]|$ são m-limitadas.

b) Se $r([P,q]) \leqslant m$ para todo $q \in Q$, então $r(Q)$ e $r([P,Q])$ são m-limitados.

Agora vamos demonstrar a seguinte proposição técnica, a qual é o principal resultado dessa seção.

Proposição 5.1.2 *Seja FH um grupo de Frobenius. Suponha que FH aja sobre um q-grupo Q para algum primo q. Seja V um $\mathbb{F}_pQFH$-módulo irredutível, onde $\mathbb{F}_p$ é um corpo de característica p que não divide $|Q|$. Suponha que F aja livre de pontos fixos sobre o produto semidireto VQ. Se $|[C_V(H), C_Q(H)]| = p^s$, então $|[V,Q]| = p^t$ onde t é um número $(s, |H|)$-limitado.*

Primeiro vamos fazer algumas observações. Sem perda de generalidade podemos assumir que $V = [V,Q]$. Pelo Lema 1.3.6(a) temos que $V = C_V(Q) \oplus [V,Q]$. Então $C_V(Q) = 0$. Pelo Teorema de Clifford, V é a soma direta

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$$

das componentes de Wedderburn V_i com respeito a Q, as quais são $\mathbb{F}_pQ$-módulos transitivamente permutados por FH. Vamos denotar por Ω o conjunto das componentes de Wedderburn $\{V_1, \ldots, V_t\}$. Vamos dividir a prova em uma sequência de passos.

(1) Podemos assumir que Q age fielmente sobre V.

Prova: Suponha que $Ker(Q \text{ em V}) \neq 1$ e seja $\overline{Q} = Q/Ker(Q \text{ em V})$. Pelo Lemma 1.3.6(d) temos que $C_{\overline{Q}}(F) = 1$ e $\overline{C_Q(H)} = C_{\overline{Q}}(H)$. Então $|[C_V(H), C_Q(H)]| = |[C_V(H), C_{\overline{Q}}(H)]|$ e assim podemos assumir que Q age fielmente sobre V. ■

(2) Podemos assumir que $Q = \langle c^F \rangle$ para qualquer elemento $1 \neq c \in C_{Z(Q)}(H)$ de ordem prima q.

Prova: Como $Z(Q)$ é um subgrupo FH-invariante, temos que $C_Q(H) \cap Z(Q) \neq 1$ pelo Lema 2.1.4. Então escolhemos um elemento não trivial $c \in C_Q(H) \cap Z(Q)$ cuja ordem é q. Considere $\langle c^{FH} \rangle = \langle c^F \rangle$, o subgrupo minimal FH-invariante contendo c. Como V é irredutível, temos que $V = [V, \langle c^F \rangle]$. Então podemos assumir que $Q = \langle c^F \rangle$. ■

(3) $V = [V, c] \cdot [V, c^{f_1}] \cdots [V, c^{f_n}]$ *onde* n *é um número* $(s, |H|)$*-limitado.*

Prova: Como $Ker(C_Q(H)$ em $C_V(H)) = Ker(C_Q(H)$ em $V)$ temos que $C_Q(H)$ está imerso no grupo de automorfismos de $[C_V(H), C_Q(H)]$. Pelo Lema 5.1.1, $C_Q(H)$ tem posto s-limitado, e assim pelo Lema 2.1.8, temos que Q tem posto $(s, |H|)$-limitado. Logo, existe um número n que é $(s, |H|)$-limitado tal que $Q = \langle c, c^{f_1}, \ldots, c^{f_n}\rangle$. Então, pelo Lema 3.1.5 o resultado segue. ∎

(4) A proposição segue.

Prova: Pelo item (3) é suficiente limitar $|[V, c]|$. Seja Ω_1 uma F-órbita de Ω e $W = \sum_{U \in \Omega_1} U$. Note que $[W, c] \neq 0$, pois caso contrário teríamos $[W^h, c] = 0$ para todo $h \in H$ e portanto $[V, c] = 0$. Além disso, note que $[W, c] = \sum_{U \in \Omega_1} [U, c]$.

Seja $U \in \Omega_1$ tal que $[U, c] \neq 0$. Então $C_U(c) = 0$ e assim $C_{U^h}(c) = 0$ para cada $h \in H$. Além disso, $U^h = [U^h, c]$ para cada $h \in H$.

Seja H_1 o estabilizador de Ω_1 em H. Primeiro vamos supor que $H_1 = 1$. Então $Stab_H(U) = 1$ e portanto a soma $X = \sum_{h \in H} U^h$ é direta. Daí,

$$C_X(H) = \{\sum_{h \in H} v^h \ : \ v \in U\}.$$

Segue que $|U| = |C_X(H)|$. Como $C_X(H) = [C_X(H), c] \leqslant [C_V(H), C_Q(H)]$, obtemos que $|U|$ é no máximo p^s e então $|X| = |C_X(H)|^{|H|}$ é no máximo $p^{s|H|}$. De fato, provamos que cada componente U tal que $[U, c] \neq 0$ produz um elemento de $[C_V(H), C_Q(H)]$. Então $|[W, c]| = \sum_{U \in \Omega_1} |[U, c]|$ é no máximo p^s e assim $|[V, c]|$ é no máximo $p^{s|H|}$.

Agora suponha que H_1 seja um subgrupo próprio não trivial de H. Afirmamos que H_1 tem exatamente uma órbita não regular em Ω_1.

Sejam $S = Stab_{FH_1}(U)$ e $F_1 = F \cap S$. Temos que $|F : F_1| = |\Omega_1| = |FH_1 : S|$ e assim $|S : F_1| = |H_1|$. Como $(|F_1|, |H_1|) = 1$, existe um complemento S_1 de F_1 em S com $|H_1| = |S_1|$. Então passando, se necessário, a um conjugado de U em Ω, podemos assumir que $S = F_1 H_1$, ou seja, U é H_1-invariante. Agora considere $x \in F$ e $1 \neq h \in H_1$ tais que $U^{xh} = U^x$. Temos $[h, x] \in F_1$ e assim $F_1 x = F_1 x^h = (F_1 x)^h$. Isso implica a existência de um elemento $g \in F_1 x \cap C_F(h)$. Agora a ação de Frobenius de H_1 em F implica que $x \in F_1$. Ou seja, para cada $x \in F \backslash F_1$ temos $Stab_{H_1}(U^x) = 1$. Isso prova a afirmação.

Agora se $Stab_{H_1}(U) = H_1$, então $|U| = |C_U(H_1)|^{|H_1|}$, pelo Teorema 2.1.8(a), pois $Stab_{FH_1}(U) = F_1 H_1$ é um grupo de Frobenius e $C_U(F_1) = 1$. Se $Stab_{H_1}(U) = 1$, então a soma $X_1 = \sum_{h \in H_1} U^h$ é direta. Daí,

$$C_{X_1}(H_1) = \{\sum_{h \in H_1} v^h \ : \ v \in U\}.$$

Como no parágrafo anterior, obtemos que $|X_1| = |C_U(H_1)|^{|H_1|}$. Agora, seja T um transversal de H_1 em H. Neste caso,

$$C_V(H) = \{\sum_{t \in T} v^t \ : \ v \in C_W(H_1)\}.$$

Temos $|[C_V(H), c]| = \sum_{t \in T} |[C_W(H_1), c]^t|$ e então $|[C_W(H_1), c]|$ é no máximo p^s. Portanto $|[W, c]|$ é no máximo $p^{s|H_1|}$ e consequentemente $|[V, c]|$ é no máximo $p^{s|H|}$. ■

5.2 Demostração do Teorema 5.0.1

Agora vamos dar uma prova detalhada para o Teorema 5.0.1(b). A prova do Teorema 5.0.1(a) pode ser obtida por adaptações na prova do Teorema 5.0.1(a).

Vamos assumir as seguintes hipóteses. Seja FH um grupo de Frobenius com núcleo F e complemento H. Suponha que FH aja sobre um grupo finito G de tal forma que $C_G(F) = 1$. Além disso, assuma que $G = PQ$ onde P e Q são subgrupos FH-invariantes tais que P é um p-grupo normal para um primo p e Q é um p'-grupo nilpotente. Se $|[C_P(H), C_Q(H)]| = p^s$, então vamos provar que $|\gamma_\infty(G)| = p^t$ onde t é um número $(s, |H|)$-limitado. Note que $\gamma_\infty(G) = [P, Q]$.

Considere uma FH-série normal não refinável

$$P = P_1 > P_2 > \cdots > P_k > P_{k+1} = 1.$$

Note que os fatores P_i/P_{i+1} são abelianos elementares. Seja $V = P_k$. Como $C_V(Q) = 1$, temos que $V = [V, Q]$. Podemos também assumir que Q age fielmente sobre V. Pela Proposição 5.1.2, obtemos que $|V| = p^j$, onde j é um número $(s, |H|)$-limitado. Agora vamos provar que $k \leqslant s$. Seja $S = P_i/P_{i+1}$. Se $[C_S(H), C_Q(H)] = 1$, então $[S, Q] = 1$ pelo Lema 2.1.8. Como $C_P(Q) = 1$, concluímos que cada fator contém uma imagem não trivial de um elemento de $[C_P(H), C_Q(H)]$. Então, $k \leqslant s$ e podemos usar indução sobre k para obter um número $(s, |H|)$-limitado t tal que $|[P, Q]| = p^t$.

Observamos que, até agora, as demonstrações de vários dos resultados que limitam a classe de nilpotência necessitam passar ao recurso das álgebras de Lie. Neste sentido, ressaltamos que nossos resultados generalizam alguns desses teoremas sem passar pelas álgebras de Lie.

5.3 Considerações Finais

Ao longo deste trabalho, vimos que quando um grupo A age por automorfismos sobre um grupo finito G de modo que $C_G(A) = 1$ podemos obter algumas informações sobre a estrutura de G, uma vez conhecidas algumas propriedades de A.

Além dos resultados já apresentados ao longo desses capítulos, e uma vez que no Teorema 5.0.1 conseguimos limitar a ordem de G apenas em função das ordens de H e $\gamma_\infty(C_G(H))$, e o posto de G apenas em função da ordem de H e do posto de $\gamma_\infty(C_G(H))$, a pergunta que surge naturalmente é se é possível melhorar o resultado do Corolário 4.0.2, ou seja, se é possível demonstrar o seguinte resultado.

Problema: Seja $D = \langle \alpha, \beta \rangle$ um grupo diedral gerado por duas involuções α e β. Suponha que D aja sobre um grupo finito G de tal maneira que $C_G(\alpha\beta) = 1$. Então:

a) a ordem de $\gamma_\infty(G)$ é limitada em termos das ordens de $\gamma_\infty(C_G(\alpha))$ e $\gamma_\infty(C_G(\beta))$;

b) o posto de $\gamma_\infty(G)$ é limitado em termos do posto de $\gamma_\infty(C_G(\alpha))$ e $\gamma_\infty(C_G(\beta))$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Vissarion Viktorovich Belyaev and Brian Hartley, *Centralizers of finite nilpotent subgroups in locally finite groups*, Algebra and Logic **35** (1996), no. 4, 217–228.

[2] Jhone Caldeira and Emerson de Melo, *Supersolvable frobenius groups with nilpotent centralizers*, Journal of Pure and Applied Algebra **223** (2019), no. 3, 1210–1216.

[3] Emerson de Melo, *Nilpotent residual and fitting subgroup of fixed points in finite groups*, Journal of Group Theory **22** (2019), no. 6, 1059–1068.

[4] Emerson de Melo and Jhone Caldeira, *On finite groups admitting automorphisms with nilpotent centralizers*, Journal of Algebra **493** (2018), 185–193.

[5] Emerson de Melo, Aline de Souza Lima, and Pavel Shumyatsky, *Nilpotent residual of fixed points*, Archiv der Mathematik **111** (2018), no. 1, 13–21.

[6] Emerson de Melo and Pavel Shumyatsky, *Finite groups and their coprime automorphisms*, Proceedings of the American Mathematical Society **145** (2017), no. 9, 3755–3760.

[7] ______, *Fitting subgroup and nilpotent residual of fixed points*, Bulletin of the Australian Mathematical Society **100** (2019), no. 1, 61–67.

[8] Daniel Gorenstein, *Finite groups*, vol. 301, American Mathematical Soc., 2007.

[9] ______, *Finite simple groups: An introduction to their classification*, Springer Science & Business Media, 2013.

[10] Robert Guralnick, *Generation of simple groups*, Journal of Algebra **103** (1986), no. 1, 381–401.

[11] ______, *On the number of generators of a finite group*, Archiv der Mathematik **53** (1989), no. 6, 521–523.

[12] Robert Guralnick and Pavel Shumyatsky, *Derived subgroups of fixed points*, Israel Journal of Mathematics **126** (2001), no. 1, 345–362.

[13] Mikhail Ivanovich Kargapolov and Jurij Ivanovič Merzljakov, *Fundamentals of the theory of groups*, vol. 62, Springer, 1979.

[14] Evgenii Khukhro, *Fixed points of the complements of frobenius groups of automorphisms*, Siberian Mathematical Journal **51** (2010), no. 3, 552–556.

[15] ______, *Nilpotent groups and their automorphisms*, vol. 8, Walter de Gruyter, 2011.

[16] Evgenii Khukhro, Natalia Makarenko, and Pavel Shumyatsky, *Frobenius groups of automorphisms and their fixed points*, Forum Mathematicum, vol. 26, Walter de Gruyter GmbH, 2014, pp. 73–112.

[17] Evgenii Khukhro and Victor Mazurov, *Unsolved problems in group theory. the kourovka notebook*, arXiv preprint arXiv:1401.0300 (2014).

[18] Evgenii Khukhro and Pavel Shumyatsky, *Nonsoluble and non-p-soluble length of finite groups*, Israel Journal of Mathematics **207** (2015), no. 2, 507–525.

[19] ———, *Finite groups with engel sinks of bounded rank*, Glasgow Mathematical Journal **60** (2018), no. 3, 695–701.

[20] Carlisle King, *Generation of finite simple groups by an involution and an element of prime order*, Journal of Algebra **478** (2017), 153–173.

[21] László Kovács, *On finite soluble groups*, Mathematische Zeitschrift **103** (1968), no. 1, 37–39.

[22] Leonid Kurdachenko and Pavel Shumyatsky, *The ranks of central factor and commutator groups*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 154, Cambridge University Press, 2013, pp. 63–69.

[23] Andrea Lucchini, *A bound on the number of generators of a finite group*, Archiv der Mathematik **53** (1989), no. 4, 313–317.

[24] Natalia Makarenko and Pavel Shumyatsky, *Frobenius groups as groups of automorphisms*, Proceedings of the American Mathematical Society **138** (2010), no. 10, 3425–3436.

[25] Derek JS Robinson, *A course in the theory of groups*, vol. 80, Springer Science & Business Media, 2012.

[26] John S Rose, *A course on group theory*, Courier Corporation, 1994.

[27] Pavel Shumyatsky, *Involutory automorphisms of finite groups and their centralizers*, Archiv der Mathematik **71** (1998), no. 6, 425–432.

[28] ———, *Finite groups and the fixed points of coprime automorphisms*, Proceedings of the American Mathematical Society **129** (2001), no. 12, 3479–3484.

[29] ———, *The dihedral group as a group of automorphisms*, Journal of Algebra **375** (2013), 1–12.

[30] John Thompson, *Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **45** (1959), no. 4, 578.

[31] Yan Ming Wang and Zhong Mu Chen, *Solubility of finite groups admitting a coprime order operator group*, Boll. Un. Mat. Ital. A (7) **7** (1993), no. 3, 325–331.

[32] JN Ward, *On finite groups admitting automorphisms with nilpotent fixed-point group*, Bulletin of the Australian Mathematical Society **5** (1971), no. 2, 281–282.

LISTA DE SÍMBOLOS

G	Um grupo.
$C_G(H)$	Centralizador de H em G.
$N_G(H)$	Normalizador de H em G.
$G^{(n)}$	n-ésimo termo da série derivada de G.
$\gamma_n(G)$	n-ésimo termo da série central inferior de G.
$H \leqslant G$	Subgrupo de G.
$N \trianglelefteq G$	Subgrupo Normal de G.
$[x, y]$	$x^{-1}y^{-1}xy$.
$[G, H]$	Comutador de H e G
$\mathbb{F}_p$	Corpo com p elementos.
$\|G\|$	Ordem de G.
$[G : H]$	Índice de H em G.
$\langle X \rangle$	Subgrupo gerado pelos elementos do conjunto X.
$\Phi(G)$	Subgrupo de Frattini de G.
$O_\pi(G)$	Produto dos π-subgrupos normais de G, onde π é um conjunto de primos.
$h(G)$	Altura de Fitting de G.
$F(G)$	Subgrupo de Fitting.
$F_n(G)$	n-ésimo termo da série de Fitting de G.
$A^\#$	O conjunto dos elementos não triviais de A