



**Universidade de Brasília**

**Analisando a pandemia de  
COVID-19  
através dos modelos SIR e SECIAR**

**Manoel Fernando dos Reis**

Orientador: Dr. Mauro Moraes Alves Patrão

Departamento de Matemática  
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de  
*Mestre em Matemática*

Brasília, 12 de abril de 2023



Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# **Analisando a pandemia de COVID-19 através dos modelos SIR e SECIAR**

por Manoel Fernando dos Reis\*

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade  
de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

**MESTRE EM MATEMÁTICA**

Brasília, 12 de abril de 2023.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Mauro Moras Alves Patrão (Orientador)

---

Prof. Dra. Laércio José dos Santos – MAT/UFJF(Membro)

---

Prof. Dr. Yuri Dumaresq Sobral – MAT/UnB (Membro)

\* O autor foi bolsista do CAPES durante a elaboração desta dissertação.



## Agradecimentos

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a todos que me apoiaram durante o processo de elaboração deste trabalho. Em primeiro lugar, sou extremamente grato ao meu orientador, cuja orientação, incentivo, conselhos e sabedoria foram fundamentais para a realização deste trabalho. E espero levar muito disso na minha docência.

Gostaria de dedicar um agradecimento especial aos meus familiares e amigos, que estiveram presentes em todos os momentos deste processo. Seu apoio emocional e incentivo foram fundamentais para que eu pudesse concluir este trabalho com sucesso.

Gostaria também de agradecer ao departamento de Matemática, pelo apoio e suporte durante todo o período em que estive matriculado no programa. Aos funcionários da universidade, que sempre estiveram disponíveis e prestativos em todos os momentos, sou grato por sua ajuda.

Por fim, gostaria de agradecer a todos os meus colegas e professores, que compartilharam seus conhecimentos e experiências comigo. Suas contribuições foram valiosas para o desenvolvimento deste trabalho e para minha formação acadêmica.



## Resumo

A presente dissertação se propõe a responder as seguintes questões. Mesmo em um cenário que não se desenvolva uma vacina eficaz nos próximos anos, a estratégia de isolamento social e reabertura repetidas vezes reduz o número de óbitos? E por que a SARS (2002) e a MERS (2012) não causaram tantos problemas quanto a pandemia de COVID-19? Utilizamos ideias de teoria de controle e o clássico modelo SIR para responder a primeira pergunta, enquanto que, para responder a segunda pergunta, é necessário introduzir uma extensão desse modelo, que denominamos de SECIAR, e descrever sua dinâmica global.





## Abstract

The present dissertation aims to answer the following questions. Even in a scenario where an effective vaccine is not developed in the coming years, does the strategy of social isolation and repeated reopening reduce the number of deaths? And why did SARS (2002) and MERS (2012) not cause as many problems as the COVID-19 pandemic? We use ideas from control theory and the classic SIR model to answer the first question, while to answer the second question, it is necessary to introduce an extension of this model, which we call SECIAR, and describe its global dynamics.



# Conteúdo

|   |             |
|---|-------------|
| <b>Lista de Figuras</b>   | <b>xiii</b> |
| <b>Introdução</b>   | <b>1</b>    |
| 0.1 Introdução . . . . .  | 1           |
| <b>1 Sistemas Dinâmicos</b>   | <b>5</b>    |
| 1.1 Equações Diferenciais . . . . .                                   | 5           |
| 1.1.1 Equações Autônomas . . . . .                                    | 5           |
| 1.1.2 Existência e Unicidade das Soluções . . . . .                   | 6           |
| 1.1.3 Dependência Contínua das Condições Iniciais . . . . .           | 10          |
| 1.1.4 Equações Não Autônomas . . . . .                                | 12          |
| 1.2 Dinâmica das Equações Diferenciais . . . . .                      | 15          |
| <b>2 Álgebra Linear</b>   | <b>23</b>   |
| 2.1 Routh-Hurwitz . . . . .   | 23          |
| 2.2 M - matrizes . . . . .  | 36          |
| <b>3 Modelagem Epidemiológica</b>                                     | <b>43</b>   |
| 3.1 O modelo SIR . . . . .  | 43          |
| 3.1.1 Pressupostos do modelo SIR . . . . .                            | 43          |
| 3.1.2 Imunidade de rebanho e número de reprodução no SIR . . . . .    | 45          |
| 3.2 Controle no modelo SIR . . . . .                                  | 47          |
| 3.3 O modelo SECIAR . . . . .   | 49          |
| 3.3.1 Pressupostos do modelo SECIAR . . . . .                         | 49          |
| 3.3.2 Imunidade de rebanho e número de reprodução no SECIAR . . . . . | 51          |
| <b>Conclusão</b>  | <b>61</b>   |
| <b>Bibliografia</b>   | <b>63</b>   |

Apêndice A Apêndice

65

# Lista de Figuras

|      |   |    |
|------|---|----|
| 3.1  | Modelo SIR . . . . .                                | 43 |
| 3.2  | Tempo Médio . . . . .                               | 45 |
| 3.3  | Gráfico SIR . . . . .                               | 45 |
| 3.4  | Sobreposição das curvas azuis e vermelhas . . . . . | 48 |
| 3.5  | Teoria de controle modelo SIR . . . . .             | 48 |
| 3.6  | Efeito de um segundo isolamento social . . . . .    | 49 |
| 3.7  | Fluxograma SECIAR . . . . .                         | 50 |
| 3.8  | Dinâmica do modelo SECIAR . . . . .                 | 51 |
| 3.9  | Compactos positivamente invariantes . . . . .       | 53 |
| 3.10 | Posição de $S_1$ e $S_2$ . . . . .                  | 56 |
| 3.11 | Retrato de fase modelo SECIAR . . . . .             | 60 |



# Introdução

## 0.1 Introdução

Um século após a denominada *gripe espanhola* de 1918, o mundo foi novamente sacudido por uma grande pandemia que afetou a vida de quase todos os seres-humanos. Diferentemente de outras pandemias recentes, a COVID-19 obrigou um intenso distanciamento social para o seu controle, paralisando boa parte da economia e gerando grandes mudanças no estilo de vida das pessoas. A principal razão mencionada para intensificar o distanciamento social foi produzir o *achatamento da curva* de infecções, evitando o colapso do sistema de saúde e salvando vidas. Uma segunda razão oferecida é ganhar tempo para a obtenção de uma vacina segura e eficaz, também evitando mortes. Dadas todas as consequências sociais e econômicas do distanciamento social, surgiram diversas afirmações sobre a suposta inutilidade de tal medida, divulgadas amplamente na mídia. Claramente essas afirmações se mostrariam incorretas caso alguma vacina segura e eficaz fosse disponibilizada em tempo hábil para permitir a imunização da maioria da população. Entretanto, caso não se desenvolva uma vacina nos próximos anos, parece intuitivo que as afirmações estariam corretas, de modo que o isolamento social seria importante apenas para evitar o colapso do sistema de saúde até atingirmos a denominada *imunidade de rebanho*, tão mencionada na mídia e nas revistas científicas, como por exemplo em [3]. Um dos objetivos do presente trabalho é mostrar que esse ponto de vista intuitivo está equivocado e que a estratégia de isolamento social e reabertura repetidas vezes de fato reduz o número de óbitos no longo prazo, mesmo sem o desenvolvimento de uma vacina. Outra questão que a presente dissertação se propõe a responder, e que aparece na mídia desde o início da pandemia de COVID-19, é a razão da necessidade do distanciamento social intenso para o controle da pandemia de COVID-19, uma vez que essa medida não foi necessária no controle das outras pandemias recentes, mesmo as causadas por coronavírus semelhantes, como a SARS (2002) e a MERS (2012).

Para respondermos as duas perguntas, iremos trabalhar com modelos matemáticos epidemiológicos. Essa área de estudo já existia no século XVIII como dito em [5], onde

D. Bernoulli foi um dos precursores ao publicar um artigo em 1760 intitulado "Essai d'une Nouvelle Analyse de la Mortalité Causée par la Petite Vérole" ("Uma Tentativa de uma Nova Análise da Mortalidade Causada pela Varíola"), que apresentava sua pesquisa sobre a doença. Nesse artigo Bernoulli propôs um modelo matemático para analisar a mortalidade por varíola e estimar a eficácia da inoculação, uma técnica precursora da vacinação. Ele usou dados históricos de mortalidade por varíola em Paris, França, para construir seu modelo. O modelo de Bernoulli considerou uma "coorte virtual" de 1.300 crianças recém-nascidas, seguindo seu destino ao longo dos anos. Bernoulli usou as taxas de mortalidade por idade e o número de crianças infectadas para calcular a probabilidade de sobrevivência e a expectativa de vida em cada idade. Ele também considerou o impacto da inoculação na mortalidade por varíola. Com base em seu modelo, Bernoulli concluiu que a inoculação reduziu significativamente a mortalidade por varíola.

Outro modelo que vale mencionar é o de W.O. Kermack e A.G. McKendrick apresentado no artigo "A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics" de 1927 [9], provavelmente o mais influente para a modelagem matemática de doenças infecciosas [5]. O modelo desenvolvido pelos autores assume que a população é homogênea em termos de susceptibilidade e que a doença pode ser transmitida diretamente de uma pessoa para outra. Eles também supõem que uma única infecção confere imunidade completa e que a taxa de recuperação e a taxa de mortalidade são constantes ao longo do tempo. Usando essas premissas, Kermack e McKendrick desenvolveram uma série de equações diferenciais que descrevem como a proporção de indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados muda ao longo do tempo. Eles descobriram que existe um valor crítico para a densidade populacional, abaixo do qual nenhuma epidemia pode ocorrer. Acima desse valor crítico, pequenas mudanças na taxa de infectividade podem levar a grandes epidemias e uma epidemia, em geral, chega ao fim antes que a população suscetível seja exaurida.

O modelo de Kermack e McKendrick, também conhecido como modelo SIR (Suscetíveis, Infectados, Removidos), será abordado no capítulo 3 dessa dissertação a qual é dividida em três capítulos e a conclusão, além da presente introdução. A dissertação tem sua inspiração no artigo [15] de minha autoria e do orientador Dr. Mauro Patrão, e ela possui maior rigor matemático, por isso seus dois primeiros capítulos possuem as teorias matemáticas necessárias para analisar os modelos epidemiológicos abordados na dissertação. O primeiro capítulo é sobre sistemas dinâmicos, que é dividido em duas seções: a primeira é uma análise das equações diferenciais e a segunda seção trabalha com a dinâmica e condições que um sistema de equações precisa para ser estável. O segundo capítulo é sobre álgebra linear, pois uma das condições de estabilidade de um sistema envolve a matriz Jacobiana do sistema, esse capítulo também é dividido em duas seções, a



---

primeira aborda o Teorema de Routh-Hurwitz e em sua demonstração foi usado uma novidade teórica, que é um argumento de continuidade que não usa variável complexa, em um dos artigo referência dessa seção [14], foi identificado e corrigido um erro; e a segunda seção trabalha com M-matrizes, um conjunto de matrizes que facilitam na aplicação do Teorema de Routh-Hurwitz. No terceiro capítulo e o maior deles, como dito antes, relembramos as principais características do clássico modelo SIR e, também, usamos o modelo SIR e algumas ideias de teoria de controle para demonstrar que "a estratégia de isolamento social e reabertura repetidas vezes de fato reduz o número de óbitos no longo prazo". Na última parte do capítulo três, para demonstrar "a razão da necessidade do distanciamento social intenso para o controle da pandemia de COVID-19", introduzimos uma extensão do modelo SIR, que denominamos de SECIAR, e descrevemos genericamente sua dinâmica global. Finalmente, apresentamos nossas conclusões.



# Capítulo 1

## Sistemas Dinâmicos

O capítulo de Sistemas Dinâmicos vai apresentar resultados necessários para analisarmos os modelos epidemiológicos. Primeiramente, vai abordar teoria referente a propriedades das equações diferenciais e depois vai abordar a dinâmica das equações. Foram usados de base para esse capítulo os livros [7] e [16].

### 1.1 Equações Diferenciais

#### 1.1.1 Equações Autônomas

As Equações Autônomas são equações que não dependem explicitamente do tempo, elas são descritas matematicamente como

$$x' = V(x),$$

a função  $V$  é chamada de campo de vetores

$$V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

com  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $V$  é de classe  $C^1$ , em que cada ponto  $x$  de  $U$  é associado o vetor de  $V(x) \in \mathbb{R}^n$ . Desse modo, as soluções para a equação são curvas  $x(t)$  tangentes ao campo de vetores cuja derivada é dada pelo valor  $V(x)$  desse campo.

A matriz jacobiana de um campo de vetores  $V = (V_1, \dots, V_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $x = (x_1, \dots, x_n)$  é a matriz  $n \times n$  dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial V_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = DV_x.$$

Já a norma de  $DV_x$  é dada por

$$|DV_x| = \sup_{|w|=1} DV_x(w)$$

Uma propriedade sobre o campo de vetores é a seguinte:

**Proposição 1.1.** Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  e  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma solução de  $x' = V(x)$ . Dado qualquer  $a \in \mathbb{R}$  e a função

$$\begin{aligned} \mu_a : I - a &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\rightarrow \mu(t + a), \end{aligned}$$

onde  $I - a = \{s - a : s \in I\}$ . Então qualquer  $\mu_a$  também é solução.

*Demonstração.* Primeiro temos que

$$\mu'_a(t) = [\mu_a(t + a)]' = V(\mu(t + a)),$$

Como o sistema é autônomo, ou seja, não depende de  $t$ , segue que

$$\mu'_a(t) = V(\mu(t + a)) = V(\mu_a(t)).$$

□

Logo, não é restrição tomar a condição inicial  $t_0 = 0$  e a partir de agora  $x(t_0)$  será igual a  $x(0) = x_0$ . Vamos apresentar dois resultados principais de sistemas autônomos que informam: primeiro que o sistema possui solução e a solução é única e, segundo, que as soluções dependem continuamente das condições iniciais.

### 1.1.2 Existência e Unicidade das Soluções

Antes de apresentar o teorema de Existência e Unicidade, precisamos de alguns resultados, sendo um deles referente a funções *Lipschitz*.

**Definição 1.1.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto. Uma função  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é denominada *Lipschitz* em  $U$  se existe uma constante  $K$  tal que

$$|F(y) - F(x)| \leq K|y - x|$$

para todo  $x, y \in U$ .  $K$  é chamada de constante de *Lipschitz* de  $F$ .

**Lema 1.1.** Suponha que a função  $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$ . Então  $V$  é localmente *Lipschitz*.

*Demonstração.* Seja  $x_0 \in U$  e  $\epsilon > 0$  tão pequeno que a bola fechada  $B_\epsilon(x_0)$  de raio  $\epsilon$  e centro em  $x_0$  esteja contida em  $U$ . Seja  $K$  um limite superior para  $|DV_x|$  em  $B_\epsilon(x_0)$ , o limite existe, pois  $DV_x$  é contínua e  $B_\epsilon(x_0)$  é compacta. Como conjunto  $B_\epsilon(x_0)$  é convexo, podemos pegar  $y$  e  $z \in B_\epsilon(x_0)$  quaisquer, que existe o segmento de reta que conecta  $y$  à  $z$  dado por  $y + sw \in B_\epsilon(x_0)$ , onde  $w = z - y$  e  $0 \leq s \leq 1$ . Seja  $\psi(s) = V(y + sw)$ . Pela regra da cadeia temos

$$\psi'(s) = DV_{y+sw}(w).$$

Além disso

$$\begin{aligned} V(z) - V(y) &= \psi(1) - \psi(0) \\ &= \int_0^1 \psi'(s) ds = \int_0^1 DV_{y+sw}(w) ds. \end{aligned}$$

Logo temos que

$$|V(z) - V(y)| \leq \int_0^1 K|w| ds = K|z - y|.$$

□

Também é necessário uma teoria de convergência uniforme.

**Lema 1.2.** Suponha que  $G_k : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  seja uma sequência de funções contínuas definidas em um intervalo fechado  $I$  que satisfaz: Dado  $\epsilon > 0$ , existe algum  $N > 0$  tal que para todo  $p, q > N$

$$\max_{t \in I} |G_p(t) - G_q(t)| < \epsilon.$$

Então existe uma função contínua  $G : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$\max_{t \in I} |G_k(t) - G(t)| \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Além disso, para qualquer  $t$  com  $|t| \leq a$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t G_k(s) ds = \int_0^t G(s) ds.$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada no apêndice. □

Agora já podemos enunciar e demonstrar o primeiro teorema.

**Teorema 1.1.** [Teorema da Existência e Unicidade] Seja  $x \in U$  e suponha que  $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$ . Então para todo  $x \in U$ , existe um número  $a > 0$  tal que para todo  $y \in B_a(x)$ , bola aberta centrada em  $x$  de raio  $a$ , a solução  $y(t)$  do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y'(t) &= V(y(t)) \\ y(0) &= y \end{aligned}$$

é única e definida para todo  $t \in (-a, a)$ .

*Demonstração.* Para a demonstração, tome  $B_{2\rho}(x)$  a bola fechada de raio  $2\rho$  centrada em  $x$ ,  $K$  é a constante de Lipschitz de  $V$  em  $B_{2\rho}(x)$ ,  $|V(x)| \leq M$  em  $B_{2\rho}(x)$ , e por fim,  $a < \min\left\{\rho, \frac{\rho}{M}, \frac{1}{K}\right\}$  e  $I = [-a, a]$ . Primeiro iremos provar a existência da solução. Vamos definir recursivamente uma sequência de funções  $G_k(t)$  tais que todas elas estejam bem definidas e pertençam a  $B_{2\rho}(x)$ . Seja  $G_0(t) = y$ , para  $t \in I$ . Temos que

$$G_1(t) = y + \int_0^t V(G_0(s)) ds = y + tV(y).$$

Como  $|t| \leq a$  e  $|V(y)| \leq M$ , segue que

$$|G_1(t) - y| = |t||V(y)| \leq aM \leq \rho,$$

A última desigualdade segue por definição de  $a$ . Logo  $G_1(t) \in B_{2\rho}(x)$  para todo  $t \in I$ . Por indução, assumamos que  $G_k(t)$  é bem definida e que  $|G_k(t) - y| \leq \rho \forall t \in I$ . Então temos:

$$G_{k+1}(t) = y + \int_0^t V(G_k(s)) ds.$$

Como  $G_k(t) \in B_{2\rho}(x)$ , então a integral está bem definida:

$$|G_{k+1}(t) - y| \leq \int_0^t |V(G_k(s))| ds \leq \int_0^t M ds \leq Ma \leq \rho.$$

Então  $G_{k+1}(t) \in B_{2\rho}(x)$ , para  $t \in I$ .

Outra propriedade dessa sequência de funções é que existe uma constante  $L \geq 0$  tal que, para todo  $k \geq 0$ ,

$$|G_{k+1}(t) - G_k(t)| \leq (aK)^k L.$$

De fato, seja  $L$  o máximo de  $|G_1(t) - G_0(t)|$  com  $|t| \leq a$ , logo  $L \leq aM$ . Temos que

$$|G_2(t) - G_1(t)| = \left| \int_0^t [V(G_1(s)) - V(G_0(s))] ds \right| \leq \int_0^t K |G_1(s) - G_0(s)| ds \leq aKL.$$

Assumindo por indução que, para algum  $k \geq 2$ , vale

$$|G_k(t) - G_{k-1}(t)| \leq (aK)^{k-1} L$$

para  $|t| \leq a$ , então temos

$$\begin{aligned} |G_{k+1}(t) - G_k(t)| &\leq \int_0^t |V(G_k(s)) - V(G_{k-1}(s))| ds \leq K \int_0^t |(G_k(s) - G_{k-1}(s))| ds \\ &\leq (aK)(aK)^{k-1}L = (aK)^k L. \end{aligned}$$

Com isso é possível mostrar que a sequência de funções  $G_0, G_1, \dots$  converge uniformemente para uma função contínua  $y(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tomando  $\alpha = aK$ , então  $\alpha < 1$  por definição. E, para qualquer  $\epsilon > 0$ , podemos escolher  $N$  grande o suficiente tal que, para qualquer  $r > s > N$  temos

$$\begin{aligned} |G_r(t) - G_s(t)| &\leq \sum_{k=N}^{\infty} |G_{k+1}(t) - G_k(t)| \\ &\leq \sum_{k=N}^{\infty} \alpha^k L \leq \epsilon, \end{aligned}$$

ou seja, pelo lema de análise, a sequência converge uniformemente como queríamos. Pela identidade

$$G_{k+1}(t) = y + \int_0^t V(G_k(s)) ds,$$

Aplicando os limites em ambos os lados, encontramos

$$\begin{aligned} y(t) &= y + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t V(G_k(s)) ds \\ &= y + \int_0^t (\lim_{k \rightarrow \infty} V(G_k(s))) ds \\ &= y + \int_0^t V(y(s)) ds. \end{aligned}$$

Portanto  $y(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfaz a forma integral da equação diferencial, logo é solução da própria equação, em particular, segue que  $y(t) : I \rightarrow B_{2\rho}(x)$  é  $C^1$ .

Agora vamos mostrar a unicidade da solução. Suponha que  $y, z : I \rightarrow B_{2\rho}(x)$  sejam duas soluções para a equação diferencial que satisfaz  $y(0) = z(0) = y_0$ , onde, como acima,  $I$  é o intervalo fechado  $[-a, a]$ . Vamos mostrar que  $y(t) = z(t) \forall t \in I$ . Seja

$$Q = \max_{t \in I} |y(t) - z(t)|.$$

Esse máximo é atingido em um ponto  $t_1 \in I$ . Então

$$\begin{aligned} Q = |y(t_1) - z(t_1)| &= \left| \int_0^{t_1} (y'(s) - z'(s)) ds \right| \leq \int_0^{t_1} |V(y(s)) - V(z(s))| ds \\ &\leq \int_0^{t_1} K |y(s) - z(s)| ds \leq aKQ. \end{aligned}$$

Como  $aK < 1$ , isso é impossível a não ser que  $Q = 0$ . Portanto  $x(t) = z(t)$ .  $\square$

### 1.1.3 Dependência Contínua das Condições Iniciais

Para mostrar o segundo resultado, é necessário introduzir um novo conceito, o fluxo da equação diferencial, que ao invés de ver as soluções como curvas em função do tempo, o foco será soluções em função das condições iniciais. Primeiramente, dado qualquer  $x \in U$ , representamos  $\mu_x(t)$  como a solução com condição inicial

$$\begin{aligned}\mu_x(0) &= x \\ \mu_x : I &\rightarrow \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

**Definição 1.2.** Dado qualquer  $t \in \mathbb{R}$  definimos o fluxo  $\phi_t(x)$  como

$$\begin{aligned}\phi_t : U_t &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow \mu_x(t),\end{aligned}$$

onde  $U_t = \{x \in U : t \in I\}$ .

Podemos também denotar o fluxo como  $\phi(t, x)$ . Além desse novo conceito, precisamos de um teorema para estabelecer que as soluções dependem continuamente das condições iniciais. Vamos começar com uma desigualdade que será usada na demonstração do próximo teorema.

**Lema 1.3.** [Desigualdade de Gronwall] Seja  $w : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e não negativa. Tome  $C \geq 0$  e  $K \geq 0$  de tal forma que

$$w(t) \leq C + \int_0^t K w(s) ds$$

para todo  $t \in [0, \alpha]$ . Então, para todo  $t$  nesse intervalo, vale

$$w(t) \leq C e^{Kt}.$$

*Demonstração.* Primeiramente, suponha que  $C > 0$ . Seja

$$W(t) = C + \int_0^t K w(s) ds > 0.$$

Então  $w(t) \leq W(t)$ . Derivando  $W(t)$ , encontramos

$$W'(t) = K w(t) \Rightarrow \frac{W'(t)}{W(t)} = \frac{K w(t)}{W(t)} \leq K.$$

Por isso

$$\frac{d}{dt}(\log W(t)) \leq K \Rightarrow \log W(t) \leq \log W(0) + Kt$$

por integração. Sendo  $W(0) = C$ , temos ao aplicar a exponencial



$$W(t) \leq Ce^{Kt} \Rightarrow w(t) \leq W(t) \leq Ce^{Kt}.$$

Se  $C = 0$ , podemos aplicar o argumento acima para uma sequência de positivos  $c_i$  que tende para 0 quando  $i \rightarrow \infty$ .  $\square$

O teorema é o seguinte:

**Teorema 1.2.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e suponha que  $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tenha uma constante de Lipschitz  $K$ . Seja  $y(t)$  e  $z(t)$  soluções de  $x' = V(x)$  que permaneçam em  $U$  e sejam definidas no intervalo  $[t_0, t_1]$ . Então, para todo  $t \in [t_0, t_1]$ , temos

$$|y(t) - z(t)| \leq |y(t_0) - z(t_0)|e^{K(t-t_0)}.$$

*Demonstração.* Seja

$$f(t) = |y(t) - z(t)|.$$

Como

$$y(t) - z(t) = y(t_0) - z(t_0) + \int_{t_0}^t (V(y(s)) - V(z(s)))ds,$$

temos que

$$f(t) \leq f(t_0) + \int_{t_0}^t Kf(s)ds.$$

Aplicando a Desigualdade de Gronwall 1.3 para a função  $w(t) = f(t + t_0)$ , temos

$$\begin{aligned} w(t) = f(t + t_0) &\leq f(t_0) + \int_{t_0}^{t+t_0} Kf(s)ds \\ &= f(t_0) + \int_0^t Kw(\tau)d\tau \end{aligned}$$

logo  $f(t) \leq f(t_0)e^{K(t-t_0)}$ , que é o que queríamos.  $\square$

Finalmente temos nosso resultado.

**Corolário 1.1.** [Dependência contínua das condições iniciais] Seja  $\phi_t(x)$  o fluxo do sistema  $x' = V(x)$  onde  $V(x)$  é  $C^1$ . Então  $\phi$  é uma função contínua de  $x$ .

*Demonstração.* Seja  $y \in B_x^\delta$  bola aberta centrada em  $x$  de raio  $\delta$ , e tome  $\epsilon = \delta e^{Kt}$ , então temos

$$|y - x| < \delta \Rightarrow |\phi_t(y) - \phi_t(x)| < \delta e^{Kt} = \epsilon.$$

$\square$

Outras propriedades das equações, são as propriedades do fluxo  $\phi_t(x)$ .

**Proposição 1.2.** Seja o  $\phi_t(x)$  o fluxo de  $x' = V(x)$  com  $x(0) = x_0$  e  $(t, x) \in \mathbb{R} \times U : t \in I$ , então vale as seguintes propriedades

1.  $\phi_0(x) = x$
2.  $\phi_s \circ \phi_t(x) = \phi_{s+t}(x)$  para quaisquer  $s, t \in \mathbb{R}$
3.  $\phi_t(x)$  é contínua em relação a  $x$  e a  $t$
4. Se  $V(x)$  é de classe  $C^1$ , então  $DV_x$  é solução de  $\frac{\partial}{\partial t}(D\phi_t(x_0)) = DV_{\phi_t(x_0)}D\phi_t(x_0)$

*Demonstração.* 1.  $\phi_0(x) = \mu_x(0) = x$ .

2. Dado  $t$ , defina  $\beta(s) = \phi_{s+t}(x) = \mu_x(s+t)$ , temos  $\beta(0) = \phi_t(x)$ , também temos que  $\beta(s)$  é solução, pois  $\mu_x(s+t)$  é solução. Pelo teorema da unicidade da solução temos  $\beta(s) = \mu_{\phi_t(x)}(s) = \phi_s(\phi_t(x))$ .  $\square$

A terceira a quarta propriedade, para serem demonstradas, precisam do conceito de sistemas não autônomos.

### 1.1.4 Equações Não Autônomas

Diferente das equações autônomas, as equações não autônomas dependem explicitamente do tempo, sua descrição matemática pode ser feita da seguinte forma:

Seja  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto, e seja  $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função que é  $C^1$  em  $x$ , mas somente contínua em  $t$ . Seja  $(t_0, x_0) \in U$ . Um sistema diferencial não autônomo é da seguinte forma:

$$x'(t) = V(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Os sistemas não autônomos podem ser transformados em sistemas autônomos onde a variável extra  $t$  pode ser inserida apropriadamente da seguinte forma. Seja  $x'(t) = V(t, x)$

$$V : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad U \text{ aberto em } \mathbb{R}^{n+1}$$

Considere

$$W : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$(t, x) \rightarrow (1, V(t, x))$$

e  $y' = W(y)$  a equação autônoma de dimensão  $\mathbb{R}^{n+1}$  com tempo inicial  $t_0 = 0$ , tome  $y = (s, x)$ , com  $s \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  e

$$\begin{aligned} s' &= 1 \rightarrow s(t) = t, \text{ para todo } t \\ x' &= V(s, x) \Leftrightarrow x' = V(t, x) \end{aligned}$$

Dessa forma é possível mostrar que vale o teorema de existência e unicidade para sistemas não autônomos e também que as soluções dos sistemas não autônomos são contínuas com respeito as condições iniciais.

A seguinte proposição vai ser usada para provar a propriedade 3 de 1.2. Mas antes definimos

**Definição 1.3.** A equação variacional ao longo da solução  $x(t)$  da equação  $x' = V(x)$  é

$$w' = DV_{x(t)}w.$$

Um sistema não autônomo, onde  $DV_{x(t)}$  é a matriz jacobiana de  $V$  num ponto  $x(t)$ .

**Proposição 1.3.** Seja  $w(t, \xi)$  a solução da equação variacional que satisfaz  $w(0, \xi) = \xi$  onde  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Se  $\xi$  e  $x_0 + \xi$  pertencem a  $U$ , então tome  $y(t, \xi)$  uma solução do sistema de equação autônoma  $x' = V(x)$  que satisfaz  $y(0) = x_0 + \xi$ . Por fim, seja  $I$  o intervalo fechado contendo 0 em que  $x(t)$  é definida. Então

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{|y(t, \xi) - x(t) - w(t, \xi)|}{|\xi|}$$

converge uniformemente para 0 para  $t \in I$ .

*Demonstração.* As integrais que  $x(t)$ ,  $y(t, \xi)$  e  $w(t, \xi)$  satisfazem são:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t V(x(s))ds, \\ y(t, \xi) &= x_0 + \xi + \int_0^t V(y(s, \xi))ds, \\ w(t, \xi) &= \xi + \int_0^t DV_{x(s)}(w(s, \xi))ds. \end{aligned}$$

Destas obtemos que para  $t \geq 0$ ,

$$|y(t, \xi) - x(t) - w(t, \xi)| \leq \int_0^t |V(y(s, \xi)) - V(x(s)) - DV_{x(s)}(w(s, \xi))|ds.$$

A aproximação de Taylor de  $V$  em um ponto  $z$  é da forma

$$V(y) = V(z) + DV_z(y - z) + R(z, y - z),$$

onde

$$\lim_{y \rightarrow z} \frac{R(z, y - z)}{|y - z|} = 0$$

uniformemente em  $z$ , para  $z$  contido em um conjunto compacto. Tomando  $y = y(s, \xi)$  e  $z = x(s)$ , da linearidade de  $DV_{x(s)}$  temos

$$|y(t, \xi) - x(t) - w(t, \xi)| \leq \int_0^t |DV_{x(s)}(y(s, \xi) - x(s) - w(s, \xi))| ds \\ + \int_0^t |R(x(s), y(s, \xi) - x(s))| ds.$$

Seja  $N = \max\{|DV_{x(s)}| : s \in I\}$ .

$$|y(t, \xi) - x(t) - w(t, \xi)| \leq N \int_0^t |y(s, \xi) - x(s) - w(s, \xi)| ds \\ + \int_0^t |R(x(s), y(s, \xi) - x(s))| ds.$$

Fixando  $\epsilon > 0$  e pegando  $\delta_0 > 0$  tão pequeno tal que

$$|R(x(s), y(s, \xi) - x(s))| \leq \epsilon |y(s, \xi) - x(s)|$$

se  $|y(s, \xi) - x(s)| \leq \delta_0$  e  $s \in I$ . Do Teorema 1.2 existem constantes  $K \geq 0$  e  $\delta_1 > 0$  tal que

$$|y(s, \xi) - x(s)| \leq |\xi| e^{Ks} \leq \delta_0$$

se  $|\xi| \leq \delta_1$  e  $s \in I$ . Assumindo que  $|\xi| \leq \delta_1$ , pela equação anterior, temos que, para  $t \in I$

$$|y(t, \xi) - x(t) - w(t, \xi)| \leq N \int_0^t |y(s, \xi) - x(s) - w(s, \xi)| ds \\ + \int_0^t \epsilon |\xi| e^{Ks} ds,$$

então

$$|y(t, \xi) - x(t) - w(t, \xi)| \leq N \int_0^t |y(s, \xi) - x(s) - w(s, \xi)| ds + C\epsilon |\xi|$$

para alguma constante  $C$  dependente somente de  $K$  e do tamanho de  $I$ . Aplicando a desigualdade de Gronwall 1.3 obtemos

$$|y(t, \xi) - x(t) - w(t, \xi)| \leq \epsilon C e^{Nt} |\xi|.$$

Como  $\epsilon$  é qualquer número positivo, isso mostra que  $\frac{|y(t, \xi) - x(t) - w(t, \xi)|}{|\xi|} \rightarrow 0$  uniformemente em  $t \in I$ .  $\square$

Agora já podemos provar a terceira propriedade.

**Teorema 1.3.** O fluxo  $\phi(t, x)$  do sistema autônomo  $x' = V(x)$  é uma função de classe  $C^1$ , isso é,  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  e  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  existem e são contínuas em  $t$  e  $x$ .

*Demonstração.* Como  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  é  $V(\phi_t(x))$ , logo é contínua. Para calcular  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ , temos para um pequeno  $\xi$ ,

$$\phi(t, x_0 + \xi) - \phi(t, x_0) = y(t, \xi) - x(t).$$

Pela proposição anterior, isso implica que  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  é a aplicação linear  $\xi \rightarrow w(t, \xi)$ . Já a continuidade advém da continuidade das condições iniciais do sistema  $w(t, \xi)$ .  $\square$

A quarta propriedade do Teorema 1.2 é um resultado do teorema anterior.

**Corolário 1.2.**  $D\phi_t(x)$  é solução da equação diferencial  $\frac{\partial}{\partial t}(D\phi_t(x_0)) = DV_{\phi_t(x_0)}D\phi_t(x_0)$ , com condição inicial  $D\phi_t(x_0) = I$

*Demonstração.* Note que para cada  $t$  a derivada  $D\phi_t(x)$  do fluxo  $\phi_t(x)$  é o mesmo que  $\frac{\partial \phi_t}{\partial x}$ , logo, pelo teorema anterior, temos que  $D\frac{\partial \phi_t(x_0)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}D\phi_t(x_0)$ , e portanto segue pela regra da cadeia

$$\frac{\partial}{\partial t}(D\phi_t(x_0)) = D\frac{\partial \phi_t(x_0)}{\partial t} = DV_{\phi_t(x_0)}D\phi_t(x_0)$$

$\square$

Essas propriedades trazem consequências relevantes para o comportamento das equações diferenciais, as quais serão vistas na próxima parte deste capítulo.

## 1.2 Dinâmica das Equações Diferenciais

O conceito de fluxo permite analisar as soluções como funções das condições iniciais, que agora iremos chamar de trajetórias.

**Definição 1.4.** A trajetória de  $\phi(t, x)$  que passa pelo ponto  $x_0 \in U$  no tempo  $t = 0$  é o movimento através da curva  $\Gamma_{x_0} = \{x \in U \mid x = \phi(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$ . Como o ponto  $x_0$  é um ponto qualquer, denotamos a trajetória simplesmente como  $\Gamma$ .

Um resultado consequente das propriedades 1.2 é que se duas trajetórias se interceptam, significa que elas coincidem a menos de translação no tempo.

**Proposição 1.4.** Suponha que  $x, y \in U$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ , são tais que  $\phi_a(x) = \phi_b(y)$ . Então  $\phi_t(x) = \phi_{t+b-a}(y)$ , com  $t \in I$

*Demonstração.* Se  $\phi_a(x) = \phi_b(y) \Rightarrow$

$$\phi_t(x) = \phi_{(t-a)+a}(x) = \phi_{t-a}(x) \circ \phi_a(x) = \phi_{t-a} \circ \phi_b(y) = \phi_{t-a+b}(y).$$

$\square$

E o caso de uma trajetória se auto-interceptar significa que ela é periódica.

**Corolário 1.3.** Suponha que  $x \in U$  e  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a \neq b$  são tais que  $\phi_a(x) = \phi_b(x)$ . Então  $\phi_t(x) = \phi_{t+b-a}(x)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Assim temos três tipos de trajetórias: a periódica, descrita no corolário anterior, a regular que é obtida quando, para tempos diferentes, a função está em pontos diferentes ( $a \neq b \Rightarrow \phi_a(x) \neq \phi_b(x)$ ), e, por fim, a trajetória estacionária, descrita na proposição seguinte:

**Proposição 1.5.** Se  $\phi_t(x) = x$  para todo  $t \in I$  se e só se  $V(x) = 0$  e, nesse caso,  $x$  é denominado *ponto de equilíbrio*.

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ )  $\mu_x(t) = \phi_t(x) = x \Rightarrow V(\mu_x(t)) = \mu'_x(t) = 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Como a curva  $x$  é constante em relação ao tempo, logo  $x'(t) = 0$  e portanto é solução de  $V(x) = 0$ , segue pelo teorema da unicidade 1.1.2 que ela satisfaz as condições iniciais.  $\square$

Além do ponto de equilíbrio, temos outro tipo de ponto necessário para a análise da dinâmica. Mas antes de introduzi-lo é necessário um resultado sobre o intervalo em que a função é definida.

**Teorema 1.4.** Seja  $\phi : A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua com:

$$\phi'_t(x) = V(\phi_t(x)), \quad \phi_0(x) = x_0,$$

onde  $A$  é a união variando em  $x$  de

$$(a_x, b_x) \times \{x\},$$

onde  $(a_x, b_x)$  é o intervalo maximal da solução  $x(t)$  com condição inicial  $x_0$ , e seja

$$\phi_t(x) \in K \text{ compacto } \forall (t, x) \in A \cap \mathbb{R}^+ \times \{x\},$$

então

$$A \cap \mathbb{R}^+ \times \{x\} = \mathbb{R}^+ \times \{x\}.$$

*Demonstração.* Seja  $I = [0, a)$  tal que  $A \cap \mathbb{R}^+ \times \{x\} = I \times \{x\}$ . Suponha que  $a < \infty$ , tome  $t_n \rightarrow a$  tal que  $\phi_{t_n}(x) \rightarrow \bar{x} \in K$ . Pelo Teorema 1.1 podemos escolher  $\epsilon > 0$  tal que  $\phi_{t_n}(x)$  está definido em  $(-\epsilon, \epsilon) \times B_\epsilon(\bar{x}) \subset A$ . Assim, existe  $N > 0$  tal que  $t_n + \epsilon > a$  e  $\tilde{x} = \phi_{t_n}(x) \in B_\epsilon(\bar{x})$ . Temos que  $\phi_t(\tilde{x}) = \phi_{t+t_n}(x)$ , para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Logo  $\phi_t(x)$  está definido para  $t \in [0, a] \cup (-\epsilon + t_n, \epsilon + t_n) = [0, \epsilon + t_n]$ , contradição.  $\square$

Agora podemos definir um novo tipo de ponto.

**Definição 1.5.** Um ponto  $p \in U$  é um  $\omega$ -limite ponto da trajetória  $\phi(t; x)$  do sistema  $x' = V(x)$  se a sequência  $t_n \rightarrow \infty$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x) = p$ .

**Definição 1.6.** O conjunto de todos os  $\omega$ -limite pontos de uma trajetória  $\Gamma$  é chamado de *conjunto  $\omega$ -limite* e é denotado por  $\omega(\Gamma)$ .

Um importante resultado desse conjunto é a seguinte.

**Teorema 1.5.**  $\omega(\Gamma)$  é um subconjunto fechado de  $U$ .

*Demonstração.* Segue da definição 1.5 que  $\omega(\Gamma) \subset U$ . Para mostrar que  $\omega(\Gamma)$  é um subconjunto fechado de  $U$ , pegamos  $p_n$  uma sequência de ponto em  $\omega(\Gamma)$  com  $p_n \rightarrow p \in \mathbb{R}^n$  e mostraremos que  $p \in \omega(\Gamma)$ . Seja  $x_0 \in \Gamma$  e para cada  $n = 1, 2, \dots$  existe uma sequência  $t_k^{(n)} \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(t_k^{(n)}, x_0) = p_n. \quad (1.1)$$

Além disso, podemos assumir que  $t_k^{(n+1)} > t_k^{(n)}$ , se necessário podemos pegar uma subsequência de  $t_k^{(n)}$  que satisfaça essa propriedade. A equação 1.1 implica que para todo  $n \geq 2$ , existe uma sequência de inteiros  $K(n) > K(n-1)$  tal que para todo  $k \geq K(n)$ ,

$$|\phi(t_k^{(n)}, x_0) - p_n| < \frac{1}{n}.$$

Seja  $t_n = t_{K(n)}^{(n)}$ . Então  $t_n \rightarrow \infty$  e pela desigualdade triangular,

$$|\phi(t_n, x_0) - p| \leq |\phi(t_n, x_0) - p_n| + |p_n - p| \leq \frac{1}{n} + |p_n - p| \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto  $p \in \omega(\Gamma)$ . □

Esse conjunto satisfaz outra propriedade

**Proposição 1.6.** Se  $\Gamma$  está contida em um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ , então  $\omega(\Gamma)$  é subconjuntos compacto, não-vazio e conexo de  $U$ .

*Demonstração.* Se  $\Gamma \subset K$ , sendo  $K$  um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ , e  $\phi(t_n, x_0) \rightarrow p \in \omega(\Gamma)$  e  $K$  é compacto, então  $p \in K$ , pois  $\phi(t_n, x_0) \in \Gamma \subset K$ . Então,  $\omega(\Gamma) \subset K$  e como todo subconjunto fechado de um compacto é compacto, logo  $\omega(\Gamma)$  é compacto. Além disso,  $\omega(\Gamma) \neq \emptyset$ , pois a sequência de pontos  $\phi(n, x_0) \in K$  contém uma subsequência convergente que converge para um ponto em  $\omega(\Gamma) \subset K$ . Por fim, suponha que existam dois conjuntos fechados, não-vazios e disjuntos  $A$  e  $B$  tal que  $\omega(\Gamma) = A \cup B$ . Como  $A$  e  $B$  são ambos limitados, eles estão a uma distância finita  $\delta$  um do outro.

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} |x - y|.$$

Sabendo que os pontos de  $A$  e  $B$  são pontos  $\omega$ -limite de  $\Gamma$ , existe um  $t$  arbitrariamente grande tal que  $\phi(t, x_0)$  está a uma distância menor que  $\frac{\delta}{2}$  de  $A$  e existe um  $t$  arbitrariamente grande tal que a distância de  $\phi(t, x_0)$  a  $A$  é maior que  $\frac{\delta}{2}$ . Como a distância  $d(\phi(t, x_0), A)$  de  $\phi(t, x_0)$  a  $A$  é uma função contínua em relação a  $t$ , segue que existe uma sequência  $t_n \rightarrow \infty$  tal que  $d(\phi(t_n, x_0), A) = \frac{\delta}{2}$ . Visto que  $\phi(t_n, x_0) \subset K$  existe uma subsequência convergente para um ponto  $p \in \omega(\Gamma)$  com  $d(p, A) = \frac{\delta}{2}$ . Segue que  $d(p, B) \geq d(A, B) - d(p, A) = \frac{\delta}{2}$  implica que  $p \notin A$  e  $p \notin B$ , ou seja,  $p \notin \omega(\Gamma)$ , o que é uma contradição, portanto  $\omega(\Gamma)$  é conexo.  $\square$

**Definição 1.7.** Um subconjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  é denominado *positivamente invariante* se  $\phi_t(x) \in U$  para todo  $x \in U$  e para todo  $t > 0$ . Em outras palavras, todas as trajetórias começando em  $U$  permanecerão em  $U$  para todo tempo futuro.

A próxima definição aborda um tipo de função.

**Definição 1.8.** Uma função suave  $L : U \rightarrow \mathbb{R}^+$  é denominada *função de Lyapunov em  $U$*  sempre que  $L' = \nabla L \cdot V \leq 0$  em  $U$ , onde  $V$  é o campo de vetores.

Observe que o conjunto  $L'^{-1}(0) = \{x : L'(x) = \nabla L(x) \cdot V(x) = 0\}$  claramente contém todos os pontos de equilíbrio de  $V$ .

**Proposição 1.7.** Se  $U \subset \mathbb{R}^n$  é compacto e positivamente invariante e existe uma função  $L$  de Lyapunov em  $U$ , então os pontos  $\omega$ -limite de pontos de  $U$  pertencem a  $L'^{-1}(0)$ .

*Demonstração.* Sejam  $x \in U$  e  $y$  um ponto  $\omega$ -limite de  $x$ . Temos que existe  $t_n \rightarrow \infty$  tal que  $\phi_{t_n}(x) \rightarrow y$ . Além disso, temos que  $l(t) = L(\phi_t(x))$  é tal que

$$\begin{aligned} l'(t) &= \nabla L(\phi_t(x)) \cdot \phi'_t(x) \\ &= \nabla L(\phi_t(x)) \cdot V(\phi_t(x)) \\ &= L'(\phi_t(x)) \leq 0 \end{aligned}$$

Suponha que  $L'(y) < 0$ , então existem  $r > 0$  e  $c < 0$  tais que  $L'(z) < c$  para todo  $|z - y| < r$ . Para todo  $t, \tau > 0$ , temos que

$$|\phi_\tau(x) - \phi_t(x)| \leq \int_t^\tau |V(\phi_z(x))| dz \leq M|\tau - t|$$



onde  $M = \max\{|V(z)| : z \in U\}$ . Se  $|\phi_t(x) - y| < \frac{r}{2}$  e  $\tau \in \left[t, t + \frac{r}{2M}\right]$ , então

$$|\phi_\tau(x) - y| \leq |\phi_\tau(x) - \phi_t(x)| + |\phi_t(x) - y| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

Logo

$$l\left(t + \frac{r}{2M}\right) - l(t) = \int_t^{t + \frac{r}{2M}} L'(\phi_\tau(x)) d\tau < c \frac{r}{2M} < 0$$

Pela definição de limite, existe  $n_0$  tal que  $|\phi_{t_n}(x) - y| < \frac{r}{2}$ , para todo  $n \geq n_0$ , de modo que

$$l\left(t_n + \frac{r}{2M}\right) - l(t_n) < \frac{cr}{2M}$$

para todo  $n \geq n_0$ . Considere  $t_{n_k}$  tal que  $t_{n_k} > t_{n_{k-1}} + \frac{r}{2M}$ . Logo

$$\begin{aligned} l(t_{n_k}) &= l(t_{n_k}) - l\left(t_{n_{k-1}} + \frac{r}{2M}\right) + l\left(t_{n_{k-1}} + \frac{r}{2M}\right) - l(t_{n_{k-1}}) \\ &\quad + l(t_{n_{k-1}}) - l\left(t_{n_{k-2}} + \frac{r}{2M}\right) + l\left(t_{n_{k-2}} + \frac{r}{2M}\right) - l(t_{n_{k-2}}) \\ &\quad + l(t_{n_{k-2}}) - l\left(t_{n_{k-3}} + \frac{r}{2M}\right) + \cdots + l\left(t_{n_1} + \frac{r}{2M}\right) - l(t_{n_1}) + l(t_{n_1}) \\ &\leq 0 + \frac{cr(k-1)}{2M} + l(t_{n_1}) \end{aligned}$$

pois  $l(t_{n_i}) - l\left(t_{n_{i-1}} + \frac{r}{2M}\right) \leq 0$ , uma vez que  $t_{n_i} > t_{n_{i-1}} + \frac{r}{2M}$ .

Se  $k > 1 - \frac{2Ml(t_{n_1})}{cr}$ , então  $l(t_{n_k}) < 0$ , o que é uma contradição, pois  $l(t) \geq 0$ . Logo  $L'(y) = 0$ .  $\square$

O resultado seguinte é uma consequência imediata da teoria da variedade centro-estável.

**Proposição 1.8.** Se a matriz jacobiana  $J$  num dado ponto de equilíbrio  $x$  possui um auto-valor com parte real positiva, então existem uma bola aberta  $A$  centrada em  $x$  e um conjunto  $F \subset A$  tal que  $A - F$  é denso em  $A$  e tal que toda trajetória que permanece em  $A$  para tempos positivos está contida em  $F$  para tempos positivos.

*Demonstração.* Pode ser encontrada na referência [4], página 281, Theorem 5.6.  $\square$

O resultado seguinte é uma consequência quase imediata do Teorema de Pugh-Shub. Uma matriz é hiperbólica, quando a parte real de todos os seus auto-valores é não nula.

**Teorema 1.6.** Se o conjunto dos pontos de equilíbrio de um campo  $V$  é dado pelo eixo  $x_1$ , então a matriz jacobiana num ponto de equilíbrio é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & K \end{bmatrix}$$

onde  $k$  é uma matriz  $1 \times (n-1)$  e  $K$  é uma matriz  $(n-1) \times (n-1)$ . Além disso, se a matriz  $K$  é hiperbólica, então existem uma vizinhança  $A$  da origem, uma vizinhança  $B$  do ponto de equilíbrio e um homeomorfismo  $c : A \rightarrow B$  tal que

$$\phi_t = c \circ e^{tJ} \circ c^{-1}$$

ou seja, onde a dinâmica do fluxo não-linear  $\phi_t$  é conjugada à dinâmica do fluxo linear  $e^{tJ}$ .

*Demonstração.* A demonstração do Teorema de Pugh-Shub pode ser encontrada na referência [6], página 39, Theorem 4.1.  $\square$

Um ponto de equilíbrio  $x \in U$  é denominado *estável* quando, dada uma vizinhança  $A$  de  $x$ , existe uma outra vizinhança  $B$  de  $x$  tal que  $\phi_t(B) \subset A$  para todo  $t \geq 0$ , ou seja, todas as trajetórias partindo de  $B$  permanecem dentro de  $A$ . Um ponto de equilíbrio é denominado *instável*, quando ele não é estável.

**Proposição 1.9.** Os pontos de equilíbrio do fluxo linear  $e^{tJ}$  são estáveis se todos os autovalores de  $K$  tem parte real negativa e são instáveis se um dos autovalores de  $K$  tem parte real positiva.

*Demonstração.* Como a primeira coluna de  $J$  é igual a zero, segue que  $e^{tJ}$  deixa a primeira coordenada de  $x$  constante, de modo que o eixo  $x_1$  é o conjunto dos pontos de equilíbrio.

Se todos os autovalores de  $K$  têm parte real negativa, vamos primeiro mostrar que  $0$  é um ponto de equilíbrio estável. Podemos analisar a dinâmica em  $\mathbb{C}^n$ , pois se  $0$  é um ponto de equilíbrio estável em  $\mathbb{C}^n$ , então  $0$  é um ponto de equilíbrio estável em  $\mathbb{R}^n$ . De fato, dada uma vizinhança  $A$  de  $0$  em  $\mathbb{R}^n$ , temos que  $A + Ai$  é uma vizinhança de  $0$  em  $\mathbb{C}^n$ . Então existe uma vizinhança da forma  $B + Bi$  de  $0$  em  $\mathbb{C}^n$  tal que

$$e^{tJ}(B + Bi) = e^{tJ}B + e^{tJ}Bi \subset A + Ai$$

para todo  $t \geq 0$ , o que implica que  $e^{tJ}B \subset A$  para todo  $t$ . Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $J$  está na forma de Jordan. De fato, existe uma matriz invertível  $P$  tal que  $PJP^{-1}$  está na forma de Jordan. Logo

$$Pe^{tJ}x = Pe^{tJ}P^{-1}Px = e^{tPJP^{-1}}Px$$

Como  $P$  é invertível, segue que  $A$  é uma vizinhança de 0 se e só se  $PA$  é uma vizinhança de 0. Segue que 0 é um ponto de equilíbrio estável de  $e^{tJ}$  se e só se 0 é um ponto de equilíbrio estável de  $e^{tPJP^{-1}}$ . De fato, dada uma vizinhança  $A$  de 0, existe uma outra vizinhança  $B$  de 0 tal que  $e^{tJ}B \subset A$  para todo  $t \geq 0$  se e só se dada uma vizinhança  $PA$  de 0, existe uma outra vizinhança  $PB$  de 0 tal que  $e^{tPJP^{-1}}PB \subset PA$  para todo  $t \geq 0$ .

Supondo que  $J = D + N$ , onde  $D$  é a matriz diagonal com os autovalores de  $J$  e  $N$  é uma matriz nilpotente, temos que

$$e^{tJ} = e^{t(D+N)} = e^{tN}e^{tD}$$

uma vez que as matrizes  $D$  e  $N$  comutam. Como  $e^{tN}$  tem entradas polinomias e como  $e^{tD}$  é a matriz diagonal com entradas  $e^{t\lambda}$ , onde  $\lambda$  é autovalor de  $J$ , segue que a primeira coluna de  $e^{tJ}$  é igual à primeira coluna da matriz identidade, enquanto as demais entradas tendem para zero quando  $t$  tende para o infinito, uma vez que todos os autovalores de  $K$  tem parte real negativa. Segue então que existem  $T$  e  $r$  positivos tais que

$$e^{tJ}(B(1,0) \cap A) \subset A$$

para todo  $t > T$ , onde  $B(r,0)$  é a bola aberta de raio  $r$  centrada na origem. Afirmamos que existe  $B \subset B(r,0)$  uma vizinhança de 0 tal que

$$e^{tJ}B \subset A$$

para todo  $t \geq 0$ . Caso contrário, existiria uma sequência  $x_n \rightarrow 0$  e uma sequência  $t_n \in [0, T]$  tal que  $e^{t_n J}x_n \notin A$ . Pela compacidade de  $[0, T]$  existe uma subsequência  $t_{n_k} \rightarrow t \in [0, T]$ , de modo que

$$e^{t_{n_k} J}x_{n_k} \rightarrow e^{tJ}0 = 0 \notin A$$

o que é uma contradição. Dada uma vizinhança  $A_1$  de um ponto de equilíbrio  $(x_1, 0, \dots, 0)$ , temos que  $A = A_1 - (x_1, 0, \dots, 0)$  é uma vizinhança de 0, de modo que existe uma vizinhança  $B$  de 0 tal que  $e^{tJ}B \subset A$  para todo  $t \geq 0$ . Segue que  $B_1 = B + (x_1, 0, \dots, 0)$  é

uma vizinhança de  $(x_1, 0, \dots, 0)$  tal que

$$e^{tJ}B_1 = e^{tJ}B + (x_1, 0, \dots, 0) \subset A + (x_1, 0, \dots, 0) = A_1$$

para todo  $t \geq 0$ , mostrando que  $(x_1, 0, \dots, 0)$  é estável.

Finalmente, suponha que exista um auto-valor  $\lambda$  de  $K$  com parte real positiva e considere  $v$  um auto-vetor complexo associado não-nulo. Temos que  $e^{tJ}v = e^{t\lambda}v$ , de modo que

$$e^{tJ}\operatorname{Re} v = \operatorname{Re} (e^{tJ}v) = \operatorname{Re} (e^{t\lambda}v)$$

e também que

$$e^{tJ}\operatorname{Im} v = \operatorname{Im} (e^{tJ}v) = \operatorname{Im} (e^{t\lambda}v)$$

pois  $e^{tJ}$  tem entradas reais. Como as entradas não nulas de  $e^{t\lambda}v$  tendem para o infinito, quando  $t$  tende para o infinito, segue que  $e^{tJ}u$ , com  $u = \operatorname{Re} v$  ou  $u = \operatorname{Im} v$ , tende para o infinito, quando  $t$  tende para o infinito. Como  $v$  pode ser escolhido tão pequeno quanto se queira, sempre existe  $u + (x_1, 0, \dots, 0)$  numa dada vizinhança de  $(x_1, 0, \dots, 0)$  tal que

$$e^{tJ}(u + (x_1, 0, \dots, 0)) = e^{tJ}u + (x_1, 0, \dots, 0)$$

tende para o infinito, quando  $t$  tende para o infinito, mostrando que  $(x_1, 0, \dots, 0)$  é instável.  $\square$

# Capítulo 2

## Algebra Linear

Nesse capítulo terá resultados de álgebra linear que apresentam condições necessárias e suficientes que os coeficientes do polinômio característico devem satisfazer para que todos os autovalores tenham parte real negativa, ou seja, ser um sistema com a parte linear estável como visto na última proposição do capítulo anterior. Na primeira parte do capítulo iremos ver o teorema chamado de Teste Routh-Hurwitz, ele sozinho já dá as condições que os coeficientes de um polinômio característico de grau qualquer devem satisfazer. Todavia, no sistema *SECIAR* essas condições ficam muito complicadas de resolver. Por sorte, a matriz jacobiana do sistema *SECIAR* é um tipo específico de matriz chamadas de  $M$  – *matrizes* que permitem simplificar essas condições e os resultados que garantem essa simplificação serão explanados na segunda parte desse capítulo. Na primeira seção foram usados de referência os artigos [14], [11] e [2]. Já na segunda seção foram usados os livros [12], [1] e [8], além do artigo [18].

### 2.1 Routh-Hurwitz

Buscou-se nesse trabalho fazer uma demonstração mais simples do Teorema de Routh-Hurwitz, sem necessitar de quaisquer resultados de análise complexa. O artigo base da demonstração [11] menciona que existe um argumento de continuidade para a demonstração, ao qual costuma-se usar de resultados de análise complexa. Nessa dissertação conseguimos um argumento de continuidade novo que não necessita de análise complexa. Para aplicarmos esse novo argumento é necessário um resultado, este resultado diz que as raízes de um polinômio mônico dependem continuamente dos coeficientes. No qual o artigo de referência [14] foi encontrado um erro relacionado a esse resultado, que é o conjunto definido pelas raízes de um polinômio com a ordem lexicográfica munido de uma métrica definida ser um espaço métrico completo. Mas isso não é verdade, pois a

ordem lexicográfica não é fechada. Para demonstrarmos o resultado da dependência dos coeficientes, vamos trabalhar com um polinômio da seguinte forma:

$$p(z) = s^n - a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

um polinômio de grau  $n$  qualquer, e considere os coeficientes como um vetor em  $\mathbb{C}^n$ :

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Do teorema fundamental da álgebra, sabemos que  $p(z)$  tem  $n$  raízes. Denotaremos essas raízes como  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ . E definiremos o vetor das raízes em  $\mathbb{C}^n$  como:

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Pela fórmula de Viète temos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} a_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \\ a_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \dots + \lambda_{n-1} \lambda_n \\ &\vdots \\ a_n &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n, \end{aligned}$$

Assim podemos construir uma aplicação contínua que leva o vetor das raízes para o vetor dos coeficientes.

$$T(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (a_1, \dots, a_n),$$

que é sobrejetiva em decorrência do teorema fundamental da álgebra e pela fórmula de Viète. Nosso objetivo vai ser encontrar uma aplicação contínua que leva o vetor dos coeficientes no vetor das raízes. Para isso primeiro vamos construir o espaço das raízes a menos de permutações.

$$\sigma(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)}),$$

$$\tilde{\lambda} = \{\sigma\lambda : \sigma \in P\},$$

onde  $P$  é o conjunto das permutações do conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Note que:

$$T(\sigma\lambda) = T(\lambda).$$

**Definição 2.1.** Denotaremos o conjunto  $\tilde{\mathbb{C}}^n$  como o conjunto formado pela permutação das raízes  $\tilde{\lambda}$ .

A seguir iremos trazer algumas definições referente ao conjunto  $\tilde{\mathbb{C}}^n$ .

**Definição 2.2.** A distância no conjunto  $\tilde{\mathbb{C}}^n$  pode ser definida como:

$$d(\tilde{\lambda}, \tilde{\rho}) = \min_{\sigma} \max_i |\lambda_{\sigma(i)} - \rho_i|.$$

Assim temos que

$$d(\tilde{\lambda}, \tilde{0}) = \max_i |\lambda_i|.$$

**Definição 2.3.** Um subconjunto  $\tilde{\Omega} \subset \tilde{\mathbb{C}}^n$  é limitado se  $d(\tilde{\lambda}, \tilde{0}) \leq R$ , para todo  $\tilde{\lambda} \in \tilde{\Omega}$

Uma propriedade de uma sequência limitada em  $\tilde{\mathbb{C}}^n$  é a seguinte:

**Lema 2.1.** Se uma sequência  $\{\tilde{\lambda}^k\}$  é limitada, então existe  $\tilde{\lambda}^0 \in \tilde{\mathbb{C}}^n$  e existe  $\tilde{\lambda}^{k_l}$  tal que  $\tilde{\lambda}^{k_l} \rightarrow \tilde{\lambda}^0$ .

*Demonstração.* Como  $\max |\lambda_i^k| \leq R$ , para todo  $\tilde{\lambda}^k$ , então existem  $\lambda^0 \in \mathbb{C}^n$  e  $\lambda^{k_l} \rightarrow \lambda^0$ , de modo que  $\tilde{\lambda}^{k_l} \rightarrow \tilde{\lambda}^0$ .  $\square$

Uma propriedade que temos é que uma sequência de vetores  $\tilde{\lambda}^k \rightarrow \tilde{\lambda}$ , se e somente se existe  $\sigma_k \in P$  tal que  $\sigma_k \lambda^k \rightarrow \lambda$ . Segue da definição de distância.

**Definição 2.4.** Definiremos uma aplicação  $\tilde{T}$  da seguinte forma

$$\tilde{T} : \tilde{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$$\tilde{\lambda} \rightarrow \tilde{T}(\tilde{\lambda}) = a$$

$$\tilde{T}(\tilde{\lambda}) = T(\lambda).$$

Essa aplicação é injetiva, pois  $\tilde{T}(\tilde{\lambda}^k) = T(\lambda^k) = T(\sigma_k \lambda^k)$ , como  $T$  é contínua  $T(\sigma_k \lambda^k) \rightarrow T(\lambda) = \tilde{T}(\tilde{\lambda})$ .

Agora para mostrar que as raízes de um polinômio mônico dependem continuamente dos coeficientes é suficiente que a inversa de  $\tilde{T}$ , que chamaremos de  $\tilde{S}$ , seja contínua.

**Definição 2.5.** Definimos a inversa de  $\tilde{S}$  como

$$\tilde{S} : \mathbb{C}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}^n$$

$$a \rightarrow \tilde{S}(a) = \tilde{\lambda}$$

$$\tilde{T} \circ \tilde{S} = I_{\mathbb{C}^n}$$

$$\tilde{S} \circ \tilde{T} = I_{\tilde{\mathbb{C}}^n}$$

Primeiro temos o seguinte Lema:

**Lema 2.2.**  $d(\tilde{S}(a), \tilde{0}) \leq \max\{1, \sum_{j=1}^n |a_j|\}$

*Demonstração.* Primeiro temos que

$$|\lambda_i|^n \leq \sum_{j=1}^n |a_j| |\lambda_i|^{n-j}, \quad (2.1)$$

pois

$$\begin{aligned} \lambda_i^n - a_1 \lambda_i^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_i^n &= +a_1 \lambda_i^{n-1} - \dots - (-1)^n a_n \\ \Rightarrow |\lambda_i|^n &\leq |a_1| |\lambda_i|^{n-1} + \dots + |a_n| |\lambda_i|^0 \\ &\leq \sum_{j=1}^n |a_j| |\lambda_i|^{n-j}. \end{aligned}$$

Assim temos dois casos, o primeiro que  $|\lambda_i| \leq 1$ , isso implica que  $|\lambda_i| \leq \max\{1, \sum_{j=1}^n |a_j|\}$ .

O segundo caso é  $|\lambda_i| \geq 1$ . Dividindo 2.1 por  $|\lambda_i|^{n-1}$ , temos

$$\begin{aligned} |\lambda_i| &\leq \sum_{j=1}^n |a_j| |\lambda_i|^{1-j} \\ &\leq \sum_{j=1}^n |a_j| \leq \max\{1, \sum_{j=1}^n |a_j|\}. \end{aligned}$$

□

Com esse lema podemos provar a continuidade de  $\tilde{S}$ .

**Teorema 2.1.**  $\tilde{S} : \mathbb{C}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}^n$  é contínua.

*Demonstração.* Caso contrário, existem  $a^k \rightarrow a$  e  $\delta > 0$  tais que  $d(S(a^k), S(a)) > \delta > 0$ , de onde temos que:

$$d(\tilde{S}(a^k), \tilde{0}) \leq \max\{1, \sum_{j=1}^n |a_j^k|\},$$

Logo, existem  $\tilde{\lambda}^0$  e  $\tilde{S}(a^{k_l}) \rightarrow \tilde{\lambda}^0$ . Mas  $a^{k_l} = \tilde{T}(\tilde{S}(a^{k_l})) \rightarrow \tilde{T}(\tilde{\lambda}^0)$ , de modo que  $\tilde{T}(\tilde{\lambda}^0) = a$  e  $\tilde{\lambda}^0 = \tilde{S}(a)$ . Logo  $\tilde{S}(a^{k_l}) \rightarrow \tilde{S}(a)$ , o que é uma contradição. □



Outro resultado sobre polinômios necessário para o argumento de continuidade é a seguinte propriedade:

**Lema 2.3.** Se  $p_\eta(s)$  é uma família de polinômios de grau menor do que  $n$  na variável  $s$ , cujos coeficientes dependem de  $\eta$  e tais que, para todo  $s$  fixado,  $p_\eta(s)$  tende para  $p(s)$ , polinômio de grau menor do que  $n$ , quando  $\eta$  tende para  $\eta^*$ , então os coeficientes de  $p_\eta(s)$  tendem para os coeficientes de  $p(s)$ .

*Demonstração.* Para fazer a demonstração vamos denotar por  $V$  a matriz de Vandermonde para descrever tais polinômios

$$V = \begin{bmatrix} s_1^{n-1} & \cdots & s_1 & 1 \\ s_2^{n-1} & \cdots & s_2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_n^{n-1} & \cdots & s_n & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  são valores distintos quaisquer. Assim, podemos escrever esses polinômios como:

$$\begin{bmatrix} p_\eta(s_1) \\ p_\eta(s_2) \\ \vdots \\ p_\eta(s_n) \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} c_1^\eta \\ c_2^\eta \\ \vdots \\ c_n^\eta \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} p(s_1) \\ p(s_2) \\ \vdots \\ p(s_n) \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

onde  $(c_1^\eta, c_2^\eta, \dots, c_n^\eta)$  são os coeficientes de  $p_\eta(s)$  que dependem de  $\eta$  e  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  são os coeficientes de  $p(s)$ . Como  $V$  tem inversa  $V^{-1}$ ; que pode ser visto no apêndice, então vale que:

$$V^{-1} \begin{bmatrix} p_\eta(s_1) \\ p_\eta(s_2) \\ \vdots \\ p_\eta(s_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^\eta \\ c_2^\eta \\ \vdots \\ c_n^\eta \end{bmatrix},$$

sabendo que

$$V^{-1} \begin{bmatrix} p_\eta(s_1) \\ p_\eta(s_2) \\ \vdots \\ p_\eta(s_n) \end{bmatrix} \rightarrow V^{-1} \begin{bmatrix} p(s_1) \\ p(s_2) \\ \vdots \\ p(s_n) \end{bmatrix},$$

quando  $\eta \rightarrow \eta^*$ , então

$$\begin{bmatrix} c_1^\eta \\ c_2^\eta \\ \vdots \\ c_n^\eta \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

ou seja, os coeficientes de  $p_\eta(s)$  convergem para os coeficientes de  $p(s)$ .  $\square$

Antes de apresentarmos o Teorema de Routh-Hurwitz, vamos definir a matriz de Routh.

**Definição 2.6.** Considere um polinômio de grau  $n$  com coeficientes reais:

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0.$$

Com  $a_n \neq 0$  e  $a_i \in \mathbb{R}$ , definimos a matriz  $n$  de Routh usando os coeficientes  $a_i$  do polinômio:

$$H_j = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

As duas primeiras filas são rotuladas como  $s^n$  e  $s^{n-1}$ , e são geradas pelos coeficientes dos polinômios

$$\begin{aligned} p_1(s) &= a_n s^n + a_{n-2} s^{n-2} + \dots \\ p_2(s) &= a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-3} s^{n-3} + \dots \end{aligned}$$

Com  $p_1(s) + p_2(s) = p(s)$ , os elementos a direita de  $a_0, a_1$  serão 0s. A terceira fila é rotulada como  $s^{n-2}$  e é gerada pelos coeficientes do polinômio  $p_3(s) = p_1(s) - q_1(s)p_2(s)$  onde  $q_1(s) = \frac{a_n s}{a_{n-1}}$ , por exemplo:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{n-2} - \frac{a_{n-3} a_n}{a_{n-1}}; \\ x_2 &= a_{n-4} - \frac{a_{n-5} a_n}{a_{n-1}}. \end{aligned}$$

As demais linhas serão geradas pelos coeficientes dos polinômios construídos da seguinte forma:

$$p_{k+2}(s) = p_k(s) - q_k(s)p_{k+1}(s) \text{ para } k = 1, \dots, n-1.$$

O polinômio  $p_k(s)$  se escreve como:

$$p_k(s) = c_k s^{n-k+1} + \dots$$

onde  $c_k$  é o coeficiente líder da  $k$ -ésima linha denominada  $s^{n-k+1}$  com  $c_1 = a_n$  e  $c_2 = a_{n-1}$ . E, por fim,  $q_k(s)$  é da forma:

$$q_k(s) = s \frac{c_k}{c_{k+1}} \text{ para } k = 1, \dots, n-1.$$

Se nenhum  $c_k$  se anular, então  $c_n$  e  $c_{n+1}$  serão as duas últimas linhas da matriz denominadas  $s^1$  e  $s^0$ , respectivamente.

Antes de apresentar o teste de Routh-Hurwitz, vamos a mais duas definições.

**Definição 2.7.** A inércia de um polinômio  $p(s)$  é o triplo de inteiros

$$n_-(p), n_0(p), n_+(p)$$

onde  $n_-(p)$  indica a quantia de raízes de  $p(s)$  com parte real negativa,  $n_0(p)$  com parte real nula e  $n_+(p)$  com parte real positiva.

**Definição 2.8.** Um polinômio  $p(s)$  é estável se todos as suas raízes tem parte real negativa.

Agora vamos ao teste de Routh-Hurwitz.

**Teorema 2.2.** Um polinômio não constante  $p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$ , com  $a_n \neq 0$  e  $a_i \in \mathbb{R}$  é estável se e somente se  $a_{n-1}$  não é 0,  $a_n$  e  $a_{n-1}$  têm o mesmo sinal e o polinômio de grau  $n-1$

$$g(s) = p(s) - \frac{a_n}{a_{n-1}} (a_{n-1} s^n + a_{n-3} s^{n-2} + a_{n-5} s^{n-4} + \dots)$$

$$g(s) = a_{n-1} s^{n-1} + (a_{n-2} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-3}) s^{n-2} + a_{n-3} s^{n-3} + \dots$$

é estável.

Antes de demonstrarmos o teorema, vamos a um Corolário.

**Corolário 2.1.** Teste de Routh-Hurwitz clássico. O polinômio  $p(s)$  é estável se e somente se os elementos da primeira coluna da matriz de Routh têm o mesmo sinal.

*Demonstração.* Vamos mostrar por indução que vale o resultado. Para  $n = 1$ , temos  $p(s) = a_1s + a_0$ , o teste vale, pois a matriz de Routh é

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & 0 \end{bmatrix}$$

o polinômio é estável se e somente se  $a_1$  e  $a_0$  tem o mesmo sinal.

Suponha que vale para  $n - 1$  e  $g(s)$  seja estável, ou seja, sua matriz de Routh tem os elementos da primeira coluna com o mesmo sinal, note que a matriz de Routh de  $g(s)$  é a mesma de  $p(s)$  a menos a primeira linha. Então se  $p(s)$  é estável pelo Teorema 2.2  $a_n$  e  $a_{n-1}$  tem sinais iguais, logo a primeira coluna da matriz de Routh de  $p(s)$  tem todos os elementos com o mesmo sinal. E se a primeira coluna da matriz de Routh de  $p(s)$  tem os elementos com sinal igual, então  $a_n$  e  $a_{n-1}$  tem sinal igual e como o corolário vale para  $n - 1$ , logo  $g(s)$  é estável e pela Teorema 2.2 isso significa que  $p(s)$  é estável.  $\square$

Esse corolário é o resultado mais clássico sobre a estabilidade de um polinômio. O Teorema 2.2 que iremos demonstrar a seguir permite fazer inferência também sobre a quantia de raízes de parte real positiva.

*Demonstração.* Assuma que  $a_{n-1} \neq 0$ . Definimos o polinômio  $g_\eta$  de grau  $n$  dependente de  $\eta \in \mathbb{R}$  como:

$$\begin{aligned} g_\eta(s) &:= p(s) - \eta s(a_{n-1}s^n + a_{n-3}s^{n-2} + \dots + a_0) \\ &= (a_n - \eta a_{n-1})s^n + a_{n-1}s^{n-1} + (a_{n-2} - \eta a_{n-3})s^{n-3} + \dots + a_0 \end{aligned}$$

$$g_\eta = p(s) - \eta s p_{par}(s) \text{ se } n \text{ é ímpar,}$$

$$g_\eta = p(s) - \eta s p_{ímpar}(s) \text{ se } n \text{ é par.}$$

Para  $\eta = 0$  temos  $g_\eta = p$  e  $\eta = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \eta_*$  temos  $g_\eta = g = g\eta_*$ .

Primeiro mostraremos que os polinômios  $g_\eta$  têm as mesmas raízes imaginárias, contando a multiplicidade. Suponha que  $n$  é par, e  $g_\eta$  é a soma dos polinômios pares e ímpares.

$$g_\eta = [p_{par} - \eta s p_{ímpar}] + p_{ímpar}.$$

Temos que  $i_\theta$  é uma raiz com a parte real nula de  $g_\eta$  com multiplicidade  $k$  se é uma raiz com multiplicidade  $k$  de ambas as partes par e ímpar. Isso ocorre, pois no eixo dos

valores imaginários a parte par  $p_{par} - \eta sp_{impar}$  tem apenas valores reais e a parte ímpar  $p_{impar}$  apenas valores imaginários, logo o polinômio se anula com  $i\theta$  somente se ambas as partes se anulam. E vale para  $-i\theta^k$ , porque os coeficientes são reais, logo  $i\theta$  e  $-i\theta$  são raízes de  $p_{par}$  e  $p_{impar}$ , sendo assim, podemos colocar o fator quadrático  $(s - i\theta)(s + i\theta)$  em evidência que não muda a paridade em escrever o polinômio  $g_\eta(s)$  como a soma de polinômios pares e ímpares.

$$g_\eta = (s - i\theta)(s + i\theta)([p_{par}^1 - \eta sp_{impar}^1] + p_{impar}^1),$$

onde 1 representa um índice. Pelo mesmo argumento descrito anteriormente,  $i\theta$  é raiz tanto de  $p_{par}^1$  como de  $p_{impar}^1$ . Seguindo esse raciocínio, por indução vai valer que

$$g_\eta = (s - i\theta)^k (s + i\theta)^k ([p_{par}^k - \eta sp_{impar}^k] + p_{impar}^k).$$

Logo, as raízes puramente imaginárias independem de  $\eta$ , porque se  $p_{impar}$  se anula, então  $-\eta sp_{impar}$  é nulo e por consequência  $p_{par}$  é nulo, logo  $p(s)$ ,  $g(s)$  e  $g_\eta(s)$  possuem as mesmas raízes puramente imaginárias. Quando  $n$  é ímpar, segue o mesmo resultado se tomarmos  $g_\eta = [p_{impar} - \eta sp_{par}] + p_{par}$ .

Quando  $\eta$  converge para  $\eta^* = \frac{a_n}{a_{n-1}}$  a inércia de  $g_\eta(s)$  muda, pois  $g_\eta(s)$  perde um grau, ou seja, tem uma raiz a menos. Veremos que essa é a única mudança de inércia, pois  $n - 1$  raízes de  $g_\eta(s)$  convergem continuamente para as raízes de  $g(s)$  quando  $\eta$  converge para  $\eta^*$ , logo elas não cruzam o eixo imaginário, já que  $\eta$  não interfere nas raízes puramente imaginárias.

A mudança de inércia de  $g_\eta(s)$  vai ocorrer devido a uma raiz que o módulo vai se aproximar de infinito quando  $\eta$  se aproxima de  $\eta^*$  e também não cruzará o eixo das raízes puramente imaginárias. Para demonstrar tais afirmações, primeiro precisamos mostrar que ara todo  $\eta \in [-|\eta^*|, |\eta^*|] = I$  existe  $L > 0$  tal que  $|r_\eta| \geq L$  para todo  $\eta \in I$ , onde  $r_\eta$  é uma raiz de  $g_\eta$ .

Isso é verdade, pois caso contrário, suponha que exista  $r_{\eta_k} \rightarrow 0$  tal que  $\eta_k \in I$  e  $g_{\eta_k}(r_{\eta_k}) = 0$ , temos que  $g_\eta(0) = a_0$  e pela desigualdade do valor médio segue que:

$$\begin{aligned} |g_{\eta_k}(r_{\eta_k}) - g_{\eta_k}(0)| &\leq |r_{\eta_k}| \sup_{t \in [0,1]} |g'_{\eta_k}(tr_{\eta_k})| \\ &\leq |r_{\eta_k}| \sup_{(\eta,s) \in I \times D} |g'_{\eta_k}(s)| = |r_{\eta_k}| M, \end{aligned}$$

com  $D = \{s : |s| \leq 1\}$  logo  $|a_0| \leq |r_{\eta_k}| M$  para todo  $k$  de modo que  $|a_0| = 0$ , o que é uma contradição.

Como  $(a_n - \eta a_{n-1})$  é o coeficiente líder de  $g_\eta(s)$ , podemos reescrever o polinômio da seguinte forma:

$$g_\eta(s) = (a_n - \eta a_{n-1})(s - r_\eta^n)(s - r_\eta^{n-1}) \cdots (s - r_\eta^1),$$

onde  $r_\eta^i$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , são as  $n$  raízes que dependem de  $\eta$ . Podemos descrever os coeficientes  $a_{n-1}$  e  $a_0$  satisfazendo as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} -(a_n - \eta a_{n-1})(r_\eta^n + r_\eta^{n-1} + \cdots + r_\eta^1) &= a_{n-1} \\ (a_n - \eta a_{n-1})(-1)^n (r_\eta^n)(r_\eta^{n-1}) \cdots (r_\eta^1) &= a_0 \end{aligned}$$

Dessas igualdade, dividindo  $a_0$  por  $a_{n-1}$  e tirando o módulo chegamos em:

$$\left| \frac{a_0}{a_{n-1}} \right| = \frac{|r_\eta^n| |r_\eta^{n-1}| \cdots |r_\eta^1|}{|r_\eta^n + r_\eta^{n-1} + \cdots + r_\eta^1|},$$

Organizando o índice da raízes tal que  $|r_\eta^1| \geq |r_\eta^2| \geq \cdots \geq |r_\eta^n|$ , temos que

$$\frac{|r_\eta^n| \cdots |r_\eta^2|}{n} \leq \frac{|r_\eta^n| |r_\eta^{n-1}| \cdots |r_\eta^1|}{|r_\eta^n + r_\eta^{n-1} + \cdots + r_\eta^1|}.$$

Logo

$$\frac{|r_\eta^i| L^{n-2}}{n} \leq \frac{|r_\eta^n| \cdots |r_\eta^2|}{n} \leq \left| \frac{a_0}{a_{n-1}} \right|.$$

Isso implica que

$$|r_\eta^i| \leq \frac{n}{L^{n-2}} \left| \frac{a_0}{a_{n-1}} \right|,$$

para todo  $i = 2, 3, \dots, n$  e para todo  $\eta \in I$ .

Sendo  $r_\eta^1$  a maior raiz em módulo, ela satisfaz a igualdade

$$r_\eta^1 = \frac{-a_{n-1}}{a_n - \eta a_{n-1}} - (r_\eta^n + r_\eta^{n-1} + \cdots + r_\eta^2).$$

$$\left( \frac{a_n - \eta a_{n-1}}{-a_{n-1}} \right) r_\eta^1 = 1 + \frac{(a_n - \eta a_{n-1})}{-a_{n-1}} \sum_{i=2}^n r_\eta^i$$

temos que  $\sum_{i=2}^n r_\eta^i$  é limitado e  $\frac{(a_n - \eta a_{n-1})}{-a_{n-1}} \rightarrow 0$  quando  $\eta \rightarrow \eta^*$ , portanto

$$(a_n - \eta a_{n-1}) \frac{r_\eta^1}{-a_{n-1}} \rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow \eta^*.$$

Portanto,  $r_\eta^1$  converge continuamente para  $\frac{-a_{n-1}}{a_n - \eta a_{n-1}}$  e o módulo desse converge para  $\infty$ , quando  $\eta \rightarrow \eta^*$ .

Também ocorre a seguinte convergência por  $\sum_{i=2}^n r_\eta^i$  ser limitado:

$$(a_n - \eta a_{n-1})(s - r_\eta^1) \rightarrow a_{n-1}, \quad \eta \rightarrow \eta^*,$$

pois

$$\begin{aligned} (a_n - \eta a_{n-1})(s - r_\eta^1) &= (a_n - \eta a_{n-1})s - (a_n - \eta a_{n-1})r_\eta^1 \\ &= (a_n - \eta a_{n-1})s + a_{n-1} + (a_n - \eta a_{n-1}) \left( \sum_{i=2}^n r_\eta^i \right). \end{aligned}$$

Da última convergência, podemos deduzir que

$$(s - r_\eta^n) \cdots (s - r_\eta^2) = \frac{g_\eta(s)}{(a_n - \eta a_{n-1})(s - r_\eta^1)} \rightarrow \frac{g(s)}{a_{n-1}}, \quad \eta \rightarrow \eta^*,$$

mais precisamente, os coeficientes do polinômio  $\frac{g_\eta(s)}{(a_n - \eta a_{n-1})(s - r_\eta^1)}$  como visto no lema

**2.3**, vão convergir para os coeficientes do polinômio  $\frac{g(s)}{a_{n-1}}$ . Como são polinômios mônicos, podemos usar o Teorema **2.1** para concluir que as raízes  $r_\eta^i \rightarrow r^i$  quando  $\eta \rightarrow \eta^*$ , onde  $r^i$  são raízes de  $g(s)$ . Portanto, temos  $n - 1$  raízes de  $g_\eta(s)$  convergindo continuamente para as raízes de  $g(s)$  e uma raiz convergindo continuamente para  $\frac{-a_{n-1}}{a_n - \eta a_{n-1}}$  quando  $\eta$  converge para  $\eta^*$ .

Como as raízes do eixo imaginário são fixas, a raiz que vai para infinito é estável se  $a_{n-1}$  e  $a_n - \eta a_{n-1}$  têm o mesmo sinal, tomando  $\eta = 0$ , podemos concluir que  $a_n$  e  $a_{n-1}$  têm o mesmo sinal para que a raiz seja estável. □

Note que se  $a_n$  e  $a_{n-1}$  têm sinais diferentes, então a raiz cujo o módulo tende para o infinito tem parte real positiva, então podemos concluir que toda mudança de sinal dos elementos da primeira coluna da matriz de Routh indica a quantia de raízes com parte real positiva.

O corolário seguinte apresenta explicitamente as condições do Teorema de Routh-Hurwitz para os casos em que o grau do polinômio é menor ou igual a quatro e o coeficiente do termo de maior grau é igual a 1.

$$p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, 4$$

**Corolário 2.2.** As condições Teorema de Routh-Hurwitz são dadas por:

$$\begin{aligned} n &= 1, & a_0 &> 0 \\ n &= 2, & a_0, a_1 &> 0 \\ n &= 3, & a_0, a_1, a_2 &> 0 & \text{ e } & a_1 a_2 > a_0 \\ n &= 4, & a_1, a_2, a_3, a_4 &> 0 & \text{ e } & a_2 a_3 > a_1 & \text{ e } & a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_0 \end{aligned}$$

*Demonstração.* Para  $n = 1$ ,  $p(s) = s + a_0$ , temos que

$$H_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a_0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow a_0 > 0$$

Para  $n = 2$ ,  $p(s) = s^2 + a_1 s + a_0$ , temos que

$$H_2 = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow a_0, a_1 > 0$$

Para  $n = 3$ ,  $s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$ , temos que

$$H_3 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 & 0 \\ a_1 - \frac{a_0}{a_2} & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow a_0, a_2 > 0 \text{ e } a_1 - \frac{a_0}{a_2} > 0 \Rightarrow a_1 a_2 > a_0 \Rightarrow a_1 > 0$$

Para  $n = 4$ ,  $s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$  temos que

$$H_4 = \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ \frac{a_3 a_2 - a_1}{a_3} & a_0 & 0 \\ \frac{a_1(a_3 a_2 - a_1) - a_3^2 a_0}{a_3 a_2 - a_1} & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow a_0, a_3 > 0 \text{ e } \frac{a_3 a_2 - a_1}{a_3} > 0 \Rightarrow a_3 a_2 > a_1,$$



também temos

$$\frac{a_1(a_3a_2 - a_1) - a_3^2a_0}{a_3a_2 - a_1} > 0 \Rightarrow a_1 > 0 \Rightarrow a_2 > 0.$$

Por último temos  $a_1a_3a_2 - a_1^2 - a_3^2a_0 > 0 \Rightarrow a_1a_2a_3 > a_1^2 + a_3^2a_0$ .

□

Por fim, temos para o caso particular de um polinômio de grau 3 um corolário.

**Corolário 2.3.** Dado o polinômio  $p(s) = s^3 + bs^2 + cs + d$  e considere:

$$\begin{aligned} e_0 &= 1 + b + c + d \\ e_1 &= 3 + b - c - 3d \\ e_2 &= 3 - b - c - 3d \\ e_3 &= 1 - b + c - d \end{aligned}$$

Todas as raízes de  $p(s)$  tem valor absoluto menor do que um se e só se  $e_0, e_1, e_2, e_3 > 0$  e  $e_2e_1 > e_3e_0$ .

*Demonstração.* Considere o seguinte polinômio

$$q(z) = (z - 1)^3 p\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)$$

Primeiro afirmamos que todas as raízes de  $p(s)$  tem valor absoluto menor do que um se e só se todas raízes de  $q(z)$  tem parte real negativa. De fato, temos que a função

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{z + 1}{z - 1} \\ &= (z + 1) \frac{\bar{z} - 1}{|z - 1|^2} \\ &= \frac{|z|^2 - z + \bar{z} - 1}{|z - 1|^2} \end{aligned}$$

está definida para  $|z| < 1$  e tem imagem em  $\text{Re } \lambda < 0$ , uma vez que

$$\text{Re } \frac{|z|^2 - z + \bar{z} - 1}{|z - 1|^2} = \frac{|z|^2 - 1}{|z - 1|^2}$$

Além disso, temos que a função

$$z = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$$

está definida para  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ , tem imagem em  $|z| < 1$ , uma vez que

$$\begin{aligned} |\lambda - 1|^2 &= |\lambda|^2 - (\lambda + \bar{\lambda}) + 1 \\ &> |\lambda|^2 + (\lambda + \bar{\lambda}) + 1 \\ &= |\lambda + 1|^2 \end{aligned}$$

e é a inversa da função anterior. Desenvolvendo os produtos, temos que

$$q(z) = e_0 z^3 + e_1 z^2 + e_2 z + e_3$$

Uma condição necessária para que todas as raízes de  $p(s)$  tenham valor absoluto menor do que um é que  $e_0 = p(1) > 0$ . Escrevendo

$$q(z) = e_0 \left( z^3 + \frac{e_1}{e_0} z^2 + \frac{e_2}{e_0} z + \frac{e_3}{e_0} \right)$$

o resultado segue aplicando o Teorema de Routh-Hurwitz no caso  $n = 3$ .  $\square$

## 2.2 M - matrizes

Nesse seção iremos analisar um típico específico de matriz, chamadas de *M - matrizes*. Nosso interesse em estudá-las é na possibilidade de diminuir a dificuldade de encontrar as condições para que todos os seus autovalores sejam negativos. Faz parte da definição de *M - matrizes* as matrizes serem quadradas não negativas, então primeiro segue a definição.

**Definição 2.9.**  $A$  é uma matriz quadrada não negativa se todas as suas entradas são não negativas, isso é  $A \geq 0$  se  $a_{ij} \geq 0 \forall i, j$ .

Nessa seção também será importante matrizes com todas as entradas maiores que 0 a qual chamaremos de:

**Definição 2.10.**  $A$  é uma matrix quadrada positiva se todas as suas entradas são positivas, isso é  $A > 0$  se  $a_{ij} > 0 \forall i, j$ .

Um outro aspecto para definir uma *M - matriz* é:

**Definição 2.11.** O raio espectral de  $A$  é  $\rho(A) = \max |\lambda|$  onde  $\lambda$  é um autovalor de  $A$ .

Por fim, temos um conjunto ao qual as *M - matrizes* pertencem.

**Definição 2.12.**  $Z_n$  é o conjunto das matrizes quadradas em  $\mathbb{R}^{n \times n}$  que, a menos da diagonal, suas entradas são não positivas, isto é, toda  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  com  $a_{ij} \leq 0 \forall i \neq j$ .

Agora temos finalmente a definição de  $M$  - matrizes, matriz que pertence à  $Z_n$ , mas com a restrição da diagonal obrigatoriamente ter valores positivos.

**Definição 2.13.**  $A$  é uma  $M$  - matrizes se  $A = \alpha I - P$ ,  $P \geq 0$ ,  $\alpha > \rho(P)$ .

Iremos provar algumas propriedades para matrizes positivas que servirão para mostrar as mesmas propriedades para matrizes não negativas e essas propriedades serão necessárias para os demais resultados de  $M$  - matrizes, já que a matriz  $P$  na definição de  $M$  - matrizes é uma matriz não negativa.

**Teorema 2.3.** Se  $A_{n \times n}$  é uma matrix quadrada positiva, isto é,  $A > 0$  então

1.  $\rho(A)$ , o raio espectral de  $A$ , é um autovalor;
2.  $A$  tem um par próprio da forma  $(\rho(A), v)$ , com  $v > 0$ , que satisfaz  $Av = \rho(A)v$ .

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, podemos assumir  $\rho(A) = 1$ . Seja  $(\lambda, x)$  um par próprio qualquer de  $A$  com  $|\lambda| = 1$ , temos que

$$|x| = |\lambda||x| = |\lambda x| = |Ax| \leq |A||x| = A|x|.$$

Logo  $|x| \leq A|x|$ . Mostraremos que apenas a igualdade é válida.

Seja  $y = A|x| - |x|$ , Suponhamos que  $y \neq 0$ , então para alguma coordenada de  $y$ , vale  $y_i > 0$  e por  $A > 0$  temos  $Ay > 0$ . Como  $A|x| > 0$ , então existe um  $\epsilon > 0$  tal que  $Ay > \epsilon A|x|$ , segue que

$$A(A|x| - |x|) > \epsilon A|x| \implies A(A|x|) > A|x|(\epsilon + 1) \implies \frac{A(A|x|)}{1 + \epsilon} > A|x|$$

Definindo  $B = \frac{A}{1 + \epsilon}$ , temos  $B(A|x|) > A|x|$ , como ambos são maiores que 0, então ao multiplicarmos por  $B$  sucessivamente ambos os lados da desigualdade, ela se mantém e assim temos uma sequência  $\dots B^k(A|x|) > \dots > B^3(A|x|) > B^2(A|x|) > B(A|x|) > (A|x|)$  e portanto  $B^k(A|x|) > (A|x|) \forall k \in \mathbb{N}$ .

Mas  $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0$ , pois  $\rho(B) = \rho\left(\frac{A}{1 + \epsilon}\right) = \frac{1}{1 + \epsilon} < 1$ , então aplicando o limite temos  $0 > A|x|$  o que é um absurdo. Portanto  $y = A|x| - |x| = 0$  e portanto  $|x|$  é um autovetor positivo de  $A$  que chamaremos de  $v$  associado com o autovalor  $1 = \rho(A)$ .  $\square$

O próximo teorema é referente a unicidade do autovalor no raio espectral.

**Teorema 2.4.** Se  $A_{n \times n} > 0$  então  $\rho(A)$  é o único autovalor de  $A$  no raio espectral.

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, assumamos  $\rho(A) = 1$ . Se  $(\lambda, x)$  é um autovalor associado com um autovetor com  $|\lambda| = 1$ , então

$$0 < |x| = A|x| \text{ e } 0 < |x_k| = (A|x|)_k = \sum_{j=1}^n a_{kj}|x_j|.$$

Também é verdade que  $|x_k| = |\lambda||x_k| = |(\lambda x)_k| = \left| \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j \right|$ , temos então:

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j \right| = \sum_{j=1}^n a_{kj}|x_j| = \sum_{j=1}^n |a_{kj}x_j|.$$

Que é o caso da igualdade na desigualdade triangular, portanto para vetores não nulo existem números  $a_j > 0$  tal que  $a_{kj}x_j = a_j(a_{k1}x_1)$ , ou equivalentemente,  $x_j = \pi_j x_1$  com  $\pi_j = \frac{a_j a_{k1}}{a_{kj}} > 0$ .

Então se  $|\lambda| = 1$ , implica que  $x = x_1 p$ , onde  $p = (1, \pi_1, \dots, \pi_n)^T > 0$ , segue que

$$\lambda x = Ax \implies \lambda p = Ap = |Ap| = |\lambda p| = |\lambda|p = p \implies \lambda = 1,$$

portanto 1 é o único autovalor de  $A$  no raio espectral.  $\square$

Esse autovalor  $\rho(A)$  vai ser chamado de raiz de Perron com um autovetor correspondente  $p$  que será chamado de vetor de Perron. Há um resultado para o vetor de Perron.

**Proposição 2.1.** Não há autovetores não negativos para  $A > 0$ , exceto o vetor de Perron  $p$  e seus múltiplos positivos.

*Demonstração.* Se  $(\lambda, y)$  é um par próprio de  $A$  tal que  $y \geq 0$ , e se  $x > 0$  é um vetor de Perron para  $A^T$ , então  $x^T y > 0$ , assim  $\rho(A)x^T = X^T A \implies \rho(A)x^T y = x^T A y = \lambda x^T y \implies \rho(A) = \lambda$ .  $\square$

O Próximo teorema vai trazer uma fórmula muito importante para os próximos resultados.

**Teorema 2.5.** Fórmula de Collatz-Wielandt. A raiz de Perron de  $A_{n \times n} > 0$  é dada por

$$r = \max_{x \in N} f(x), \text{ onde}$$

$$f(x) = \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \neq 0}} \frac{[Ax]_i}{x_i} \text{ e } N = \{x | x \geq 0 \text{ com } x \neq 0\}.$$

*Demonstração.* Se  $\xi = f(x)$  para  $x \in N$ , então  $0 \leq \xi x \leq Ax$ . Seja  $p$  e  $q^T$  o vetor de Perron da direita e o da esquerda respectivamente de  $A$  associada com a raiz de Perron  $r$ , temos que:

$$\xi x \leq Ax \implies \xi q^T x \leq q^T Ax = r q^T x \implies \xi \leq r \implies f(x) \leq r \quad \forall x \in N.$$

Como  $f(p) = r$  e  $p \in N$  segue que  $r = \max_{x \in N} f(x)$ .  $\square$

Agora será mostrados as mesmas propriedades, mas para as matrizes não negativas.

**Teorema 2.6.** Para  $A_{n \times n} \geq 0$  com  $r = \rho(A)$ , vale as seguintes afirmações:

1.  $r$  é um autovalor de  $A$  e  $r$  pode ser igual a 0;
2.  $Az = rz$  para algum  $z \in N = \{x | x \geq 0 \text{ com } x \neq 0\}$ ;
3.  $r = \max_{x \in N} f(x)$ , onde

$$f(x) = \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \neq 0}} \frac{[Ax]_i}{x_i} \text{ e } N = \{x | x \geq 0 \text{ com } x \neq 0\}.$$

*Demonstração.* Considere uma sequência de matrizes positivas  $A_k = A + (1/k)E > 0$ , onde  $E$  é a matriz com todas as entradas igual a 1 e sejam  $r_k > 0$  e  $p_k > 0$  a raiz e vetor de Perron de  $A_k$ , respectivamente. O conjunto  $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$  é limitado, pois está contido em uma esfera em  $\mathbf{R}^n$  de raio 1. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, a sequência  $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$  possui ao menos uma subsequência convergente.

$$\{p_k\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow z, \text{ onde } z \geq 0 \text{ com } z \neq 0.$$

Como  $A_1 > A_2 > \dots > A$ , então a sequência dos autovalores de Perron é  $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r$  que é uma sequência monótona limitada por  $r$ , logo convergente para um  $r^*$ , onde  $r^* \geq r$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$ , assim temos:

$$Az = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k p_k = \lim_{k \rightarrow \infty} r_k p_k = r^* z \implies r^* \text{ é autovalor de } A, \text{ logo } r^* \leq r.$$

Portanto  $r^* = r$  e  $Az = rz$  com  $z > 0$ , assim (i) e (ii) estão provados. Para (iii) seja  $q_k^T > 0$  o vetor a esquerda de Perron de  $A_k$ . Para todo  $x \in N$  e  $k > 0$  temos que

$$0 \leq f(x)x \leq Ax \leq A_k x \implies f(x)q_k^T x \leq q_k^T A_k x = r_k q_k^T x \implies f(x) \leq r_k \implies f(x) \leq r.$$

Desde que  $f(z) = r$  e  $z \in N$ , segue que  $\max_{x \in N} f(x) = r$ .  $\square$

É possível definir as  $M$ -matrizes de várias formas equivalentes. No resultado seguinte iremos mostrar somente as equivalências necessárias para demonstrar o resultado que buscamos nessa seção.

**Teorema 2.7.** Se  $A \in Z_n$  as afirmações a seguir são equivalentes

1.  $A = \alpha I - P, P \geq 0, \alpha > \rho(P)$ ;
2.  $A$  é não singular, ou seja,  $\rho(A) \neq 0$ , e  $A^{-1}x > 0$  para todo  $x > 0$ ;
3.  $Ax \geq 0 \implies x \geq 0$ ;
4. Existe um vetor positivo  $x \in \mathbb{R}^n$  com  $Ax > 0$ .

*Demonstração.* (1  $\implies$  2). Dividindo  $A$  por  $\alpha$  temos  $\frac{A}{\alpha} = I - \frac{P}{\alpha}$ . Como  $\rho(\frac{P}{\alpha}) < 1$ , então a série  $I + \frac{P}{\alpha} + \frac{P^2}{\alpha^2} + \dots$  converge, tendo como limite  $(1 - \frac{P}{\alpha})^{-1} = \frac{A^{-1}}{\alpha}$ , portanto, como a série é formada pelas somas de matrizes não negativas, então  $A^{-1} \geq 0$ .

(2  $\implies$  3) Suponha que  $Ax = y \geq 0$ , então  $x = A^{-1}y$  e portanto  $x \geq 0$  já que  $A^{-1}$  e  $y$  são não negativos.

(3  $\implies$  1) Seja  $A = \alpha I - P$ , para algum  $P \geq 0$  e  $\alpha > 0$ , e  $v$  é o vetor de Perron de  $P$ , então  $v > 0$  e  $Pv = \rho(P)v$ . Se  $\alpha \leq \rho(P)$ , então  $A(-v) = (\rho(P) - \alpha)v \geq 0$  o que contradiz 3.

(1  $\implies$  4) Seja  $x$  o vetor de Perron de  $P$ , assim temos  $Ax = \alpha x - \rho(P)x = (\alpha - \rho(P))x$ , como  $x > 0$  e por hipótese  $\alpha - \rho(P) > 0$ , então  $Ax > 0$ .

(4  $\implies$  1) Tome  $A = D - Q$ , onde  $D$  é uma matriz diagonal. Seja  $x > 0$  o vetor que satisfaz 4, assim temos  $Dx - Qx > 0$ , como  $Dx > Qx$ , existe  $C < D$  diagonal tal que  $Cx = Qx$ . Agora tome  $\alpha > 0$  tal que  $I\alpha > D$  e tome

$$P = \alpha I - D + Q \text{ e } R = \alpha I - C + Q$$

Como  $P$  e  $R$  são maiores ou iguais a 0, podemos aplicar a fórmula de Collatz-Wielandt para encontrar seu raio espectral, além disso,  $Rx = \alpha x - Cx + Qx = \alpha Ix$ , portanto  $\rho(R) = \alpha$ . Como  $P = R + C - D$ , então

$$\rho(P) = \max_{y \in N} \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ y_i \neq 0}} \frac{[Py]_i}{y_i} = \max_{y \in N} \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ y_i \neq 0}} \frac{[Ry + Cy - Dy]_i}{y_i} < \max_{y \in N} \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ y_i \neq 0}} \frac{[Ry]_i}{y_i},$$

pois  $Cx - Dx < 0$ , para todo  $y \in N$  logo  $\rho(P) < \alpha$ , e assim  $A = D - Q = \alpha I - (\alpha I - D + Q) = \alpha I - P$ .  $\square$

Por fim, temos o resultado que buscamos, junto de um lema necessário para sua demonstração.

**Lema 2.4.** Seja  $A$  uma  $M$ -matriz e suponha que  $B$  e  $A^{-1}B \in Z_n$ . Então  $B$  é  $M$ -matriz se, e somente se,  $A^{-1}B$  é uma  $M$ -matriz.

*Demonstração.*  $\implies$   $B$  é uma  $M$ -matriz então existe  $x$  positivo tal que  $Bx > 0$  pelo teorema anterior. Como  $A$  é  $M$ -matriz então  $A^{-1}Bx > 0$ , e portanto existe um vetor positivo  $x > 0$  tal que  $A^{-1}Bx > 0$ , logo  $A^{-1}B$  é uma  $M$ -matriz.

$\Leftarrow$   $A^{-1}B \in Z_n$  é uma  $M$ -matriz, assim  $B^{-1}A$  é não negativa, e como  $A^{-1}$  é não negativa, então  $B^{-1}A^{-1}A = B^{-1}$  é não negativa, e portanto  $B$  é uma  $M$ -matriz.  $\square$

**Proposição 2.2.** Seja  $H$  é uma matriz com entradas não negativas e  $A$  é uma  $M$ -matriz, então todos os autovalores da diferença  $-B = H - A$  tem parte real menor do que zero se e só se todos os autovalores do quociente  $HA^{-1}$  tem valor absoluto menor do que um.

*Demonstração.* Como  $-B = H - A$ , então  $B = A - H \in Z_n$ , e o raio espectral da da abcissa dos autovalores de  $-B$ ,  $\rho_a(-B)$ , é menor que 0, se e somente se  $B$  é uma  $M$ -matriz, pois:  $A$  é  $M$ -matriz  $\Leftrightarrow A = I\alpha - P$ , com  $P \geq 0$  e  $\alpha > \rho(P)$ , logo  $B$  é  $M$ -matriz  $\Leftrightarrow B = I\alpha - (P + H)$  com  $\alpha > \rho(P + H) \Leftrightarrow \rho(P + H) - \alpha < 0 \Leftrightarrow \rho_a(-B) < 0$ .

Como  $A^{-1}H$  é não negativa e  $A^{-1}B = I - A^{-1}H$  também pertence a  $Z_n$ , pelo lema anterior 2.4 temos que  $B$  é uma  $M$ -matriz se e somente se  $I - A^{-1}H$  é uma  $M$ -matriz, e como  $A^{-1}H$  é não negativa, e  $I = \alpha I$ , com  $\alpha = 1$ , então  $B$  é uma  $M$ -matriz se e só se  $A^{-1}H < 1$ . O resultado segue, pois:

$$\rho(A^{-1}H) = \rho(AA^{-1}HA^{-1}) = \rho(HA^{-1}).$$

$\square$





# Capítulo 3

## Modelagem Epidemiológica

O presente capítulo é dividido em três partes: a primeira relembramos as principais características do modelo SIR e também os conceitos de imunidade de rebanho e de número de reprodução inicial. Na segunda é feita uma abordagem de teoria de controle no modelo SIR. A última parte do capítulo e a maior, é introduzido um novo modelo chamado de SECIAR, que é uma extensão do modelo SIR, onde é descrita genericamente sua dinâmica global. Foi usado como base o livro [10].

### 3.1 O modelo SIR

#### 3.1.1 Pressupostos do modelo SIR

O SIR é um exemplo de modelo compartimental, no qual a população é dividida em compartimentos em que os indivíduos possuem características epidemiológicas distintas, e que pode ser visualizado através do fluxograma abaixo:



Figura 3.1 Modelo SIR

O compartimento  $S$  representa a classe dos indivíduos suscetíveis à infecção, já o compartimento  $I$  representa os infectados, e supõe-se que já se tornam automaticamente infectantes, enquanto o compartimento  $R$  representa os removidos, que são os que se recuperaram ou que infelizmente faleceram. Uma vez removidos, os indivíduos não participam mais do processo de contágio. Devido ao horizonte temporal da evolução da doença ser de meses ou até semanas, pode-se desconsiderar o crescimento demográfico,

de modo que se supõe que a população é constante. As letras  $S, I, R$  podem, então, também representar os percentuais dos indivíduos em cada compartimento, de sorte que  $S + I + R = 1$ .

Uma vez que  $R = 1 - S - I$ , podemos descrever o modelo SIR através de duas equações envolvendo as variáveis  $S$  e  $I$ , dadas por:

$$\begin{aligned} S' &= -\beta SI \\ I' &= \beta SI - \gamma I \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde  $S'$  e  $I'$  denotam as respectivas taxas de variação temporais instantâneas.

O produto  $\beta SI$  fornece a taxa de variação temporal instantânea de novos infectados, também chamada de incidência, em que a constante  $\beta$  é proporcional ao número de encontros aleatórios em pares por unidade de tempo e é proporcional à probabilidade de contágio a cada encontro, enquanto o produto  $SI$  é igual à probabilidade de se encontrar aleatoriamente um par com um suscetível e um infectado.

Já o produto  $\gamma I$  fornece a taxa de variação temporal instantânea de indivíduos infectados que são removidos. Essa taxa de remoção é equivalente a supor que a densidade da distribuição de probabilidade do tempo em que um indivíduo permanece infectado é dada pela exponencial  $\gamma e^{-\gamma t}$ , onde o significado da constante  $\gamma$  é dado pela seguinte proposição.

**Proposição 3.1.** O tempo médio com que os indivíduos permanecem infectados é dado por  $\frac{1}{\gamma}$ .

*Demonstração.* A densidade da distribuição de probabilidade do tempo que uma pessoa permanece infectada será denotada por  $f(t)$ . Supõe-se que  $f(t) = 0$ , para  $t$  negativo, e que  $f(t) = \gamma e^{-\gamma t}$  para  $t$  positivo. O tempo médio que as pessoas permanecem infectadas é, por definição, dado pela seguinte integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t \gamma e^{-\gamma t} dt = \frac{1}{\gamma}$$

cujo valor final é obtido após uma integração por partes.  $\square$

Observe que reta tangente ao gráfico  $\gamma e^{-\gamma t}$  em  $t = 0$  é dada por  $\gamma - \gamma^2 t$  e passa pelos pontos  $(0, \gamma)$  e também  $(1/\gamma, 0)$ .

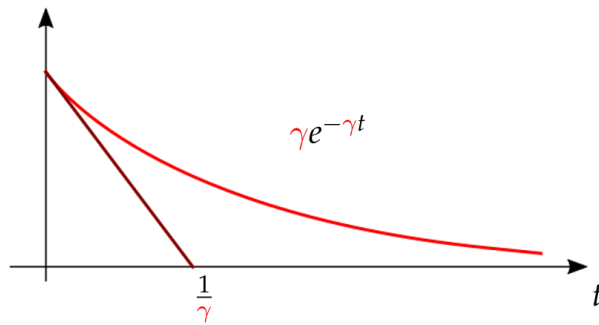


Figura 3.2 Tempo Médio

### 3.1.2 Imunidade de rebanho e número de reprodução no SIR

A partir das equações do modelo SIR, é possível mostrar que o percentual de infectados  $I$  é a seguinte função explícita do percentual de suscetíveis  $S$ .

**Proposição 3.2.** Temos que

$$I = -S + \frac{\gamma}{\beta} \log S + \text{constante}$$

*Demonstração.* Se dividirmos a segunda equação pela primeira temos:

$$\frac{dI}{dS} = \frac{I'}{S'} = \frac{\beta SI - \gamma I}{-\beta SI} = -1 + \frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{S}$$

de modo que o enunciado da proposição segue, integrando-se em relação  $S$  a equação acima.  $\square$

De fato, para cada valor da constante acima, temos uma função diferente, cujos gráficos são as curvas vermelhas ilustradas na figura abaixo:

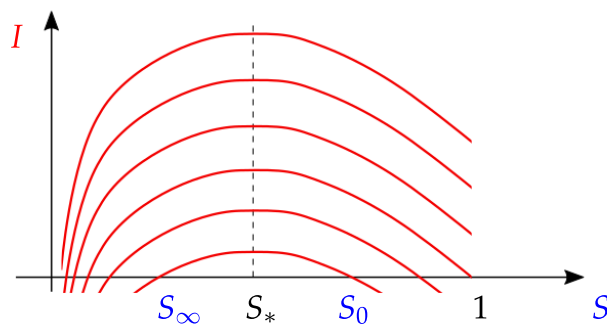


Figura 3.3 Gráfico SIR

Variando o valor da constante, as curvas vermelhas são transladadas verticalmente, de forma que a constante é determinada pela proporção inicial  $S_0$  de suscetíveis, como demonstrado na proposição abaixo. Partindo de um determinado  $S_0$ , as variáveis  $S$  e  $I$  evoluem seguindo a respectiva curva vermelha da direita para a esquerda, uma vez que  $S' < 0$  sempre que  $I > 0$ , de modo que  $S$  é decrescente em relação ao tempo. Observe também que, quando  $I = 0$ , tanto  $S$  quanto  $I$  são constantes em relação ao tempo. A proporção inicial por sua vez determina a proporção final  $S_\infty$  de suscetíveis no longo prazo do horizonte temporal do modelo, como também é ilustrado na figura 3.3. Quando o vírus é novo entre os humanos, como o COVID-19, na denominada "primeira onda", o valor de  $S_0$  é igual a 1.

**Proposição 3.3.** Temos que

$$\text{constante} = S_0 - \frac{\gamma}{\beta} \log S_0$$

*Demonstração.* Como  $I = 0$ , quando  $S = S_0$ , segue que

$$0 = -S_0 + \frac{\gamma}{\beta} \log S_0 + \text{constante}$$

o que demonstra a proposição, isolando-se a constante.  $\square$

Como todas as curvas vermelhas são obtidas por translações verticais de uma delas, todas atingem um máximo de percentual de infectados num mesmo percentual de suscetíveis, denotado por  $S_*$  na figura acima. Esse percentual de suscetíveis é um divisor de águas importante no modelo, pois  $S_\infty$  sempre está à esquerda de  $S_*$ . Se  $S_0$  está à direita de  $S_*$  a epidemia evolui na curva vermelha da direita para esquerda até se aproximar do  $S_\infty$ . Por outro lado, se  $S_0$  está à esquerda de  $S_*$ , então  $S_0$  é igual a  $S_\infty$  e não haverá mais contágio comunitário, o que é denominado de *imunidade de rebanho*.

**Proposição 3.4.** Temos que

$$S_* = \frac{\gamma}{\beta}$$

*Demonstração.* Sabemos que  $I$  atinge seu valor máximo quando  $\frac{dI}{dS} = 0$ , de modo que

$$-1 + \frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{S_*} = 0$$

o que demonstra a proposição, isolando-se a  $S_*$ .  $\square$

Observe que a imunidade de rebanho não é o mesmo que imunidade biológica, uma vez que um percentual  $S_0$  positivo de pessoas suscetíveis pode permanecer estável no longo prazo. A imunidade de rebanho é portanto um conceito de dinâmica epidemiológica, que surge devido ao balanço entre as taxas de contágio em rebanho, afetadas pelo valor de  $\beta$ , e o tempo médio que as pessoas permanecem infectantes, afetado pelo valor de  $\gamma$ .

A imunidade de rebanho está estreitamente relacionada a um outro conceito epidemiológico que também se tornou famoso por conta da pandemia, o denominado *número de reprodução inicial*, denotado usualmente por  $R_0$ . O número de reprodução é definido como o número médio de suscetíveis que um infectado contamina, dado pelo produto do número médio de suscetíveis que um infectado contamina por unidade de tempo, expressado por  $\beta S_0$ , pelo tempo médio que as pessoas permanecem infectantes, dado por  $\frac{1}{\gamma}$ , de modo que:

$$R_0 = \frac{\beta S_0}{\gamma}$$

**Proposição 3.5.** Temos que existe imunidade de rebanho se e só se  $R_0 < 1$ .

*Demonstração.* Primeiro observe que  $R_0 = S_0/S_*$ . Por um lado, se  $R_0 > 1$ , então  $S_0 > S_*$ , e nesse caso não teríamos imunidade de rebanho. Por outro lado, se  $R_0 < 1$ , então  $S_0 < S_*$ , e agora teríamos imunidade de rebanho  $\square$

Agora estamos prontos para responder a primeira pergunta: mesmo que não se desenvolva uma vacina eficaz nos próximos anos, a estratégia de isolamento social e reabertura repetidas vezes reduz o número de óbitos?

## 3.2 Controle no modelo SIR

Diferentemente do resto da natureza, os seres humanos são capazes de responder racionalmente aos desafios trazidos por uma epidemia. Quando um surto é identificado, podemos quase que imediatamente tomar certas medidas para alterar os valores das constantes do modelo, como medidas de isolamento social e de higienização, que diminuem o valor de  $\beta$ , pois reduzem tanto o número de encontros aleatórios em pares por unidade de tempo, quanto a probabilidade de contágio a cada encontro. Existem diversas medidas que promovem o distanciamento social, desde campanhas de esclarecimento governamentais ao decretamento do denominado *lockdown*, produzindo diferentes reduções no valor de  $\beta$ . Esse comportamento racional dos seres humanos transformam a natureza da análise do modelo SIR, que deixa de ser visto como um sistema dinâmico puro e passa a ser encarado como um sistema de controle, como explicaremos a seguir.

Para simplificar a exposição, vamos imaginar que podemos alternar apenas entre duas situações, uma sem e outra com isolamento social. Podemos então alternar a constante  $\beta$  entre seu valor original e um novo valor reduzido, que vamos denotar por  $\tilde{\beta}$ . Isso nos permite, por sua vez, alternar o limiar  $S_*$  entre seu valor original e um novo valor aumentado, uma vez que  $S_*$  é inversamente proporcional a  $\beta$ . Vamos denotar esse novo limiar por  $\tilde{S}_*$ , lembrando que ele é o novo percentual de suscetíveis onde o percentual de infectados atinge (ou atingiria se for maior do que um) o máximo nas novas curvas que determinam a relação entre essas variáveis  $S$  e  $I$  durante evolução da epidemia, e que são ilustradas em azul na figura 3.4:

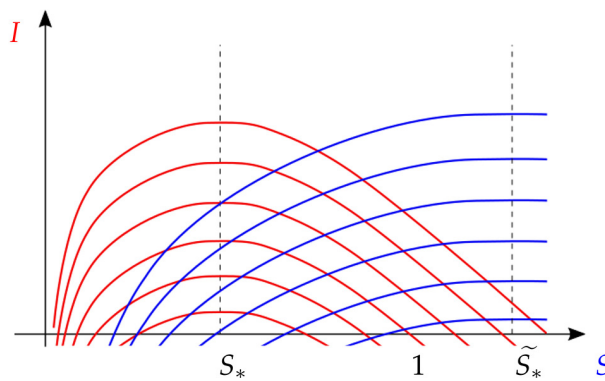


Figura 3.4 Sobreposição das curvas azuis e vermelhas

A evolução da epidemia, com o processo de controle através do isolamento social, é ilustrada pela curva verde nas quatro figuras abaixo:

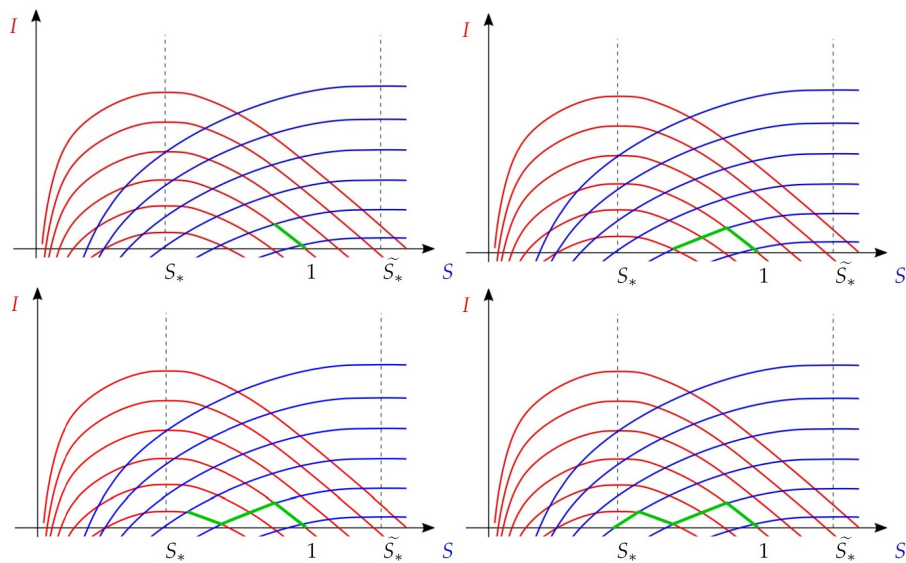


Figura 3.5 Teoria de controle modelo SIR

No início, a epidemia evolui por uma curva vermelha, sem isolamento social, pois as autoridades temem seus custos econômicos. Após a gravidade da doença ser reconhecida, e com o risco do colapso do sistema de saúde, o isolamento social passa a acontecer e a epidemia passa a evoluir por uma curva azul. Após os casos serem consideravelmente reduzidos e devido aos custos econômicos e sociais do isolamento social, o isolamento social é retirado, e a epidemia volta a evoluir por uma curva vermelha. Nesse ponto, o colapso do sistema de saúde já pode ter sido evitado e a pergunta que surge é: mesmo que nunca se desenvolva uma vacina minimamente eficaz, é recomendável aplicar novamente o isolamento social ou não faria diferença em termos de vidas salvas? E a resposta é: vale muito a pena! Observe que se adotarmos novamente o isolamento social, a epidemia passa novamente a evoluir por uma curva azul e, após passarmos o limiar original  $S_*$ , obtemos a imunidade de rebanho, mesmo que o isolamento social agora seja retirado. Por outro lado, se não adotássemos novamente o isolamento social, seguiríamos por uma curva vermelha e também obteríamos a imunidade de rebanho, mas com muito mais pessoas infectadas e portanto muito mais sequelas e muito mais vidas perdidas desnecessariamente, como ilustra a comparação das duas figuras abaixo, sem e com um segundo lockdown:

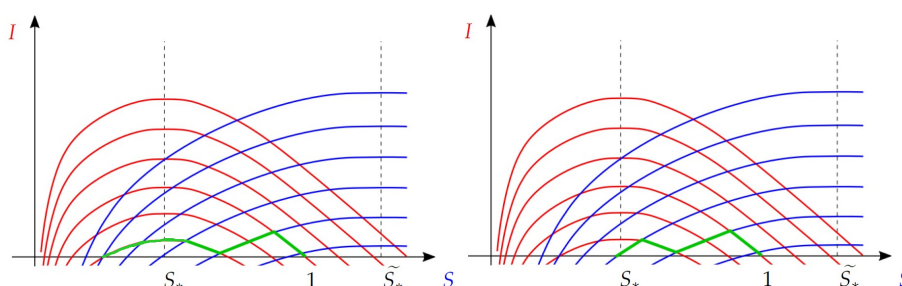


Figura 3.6 Efeito de um segundo isolamento social

Na próxima seção, vamos tentar responder a segunda e última pergunta deste trabalho: por que a SARS (2002) e a MERS (2012) não causaram tantos problemas quanto a pandemia de COVID-19?

## 3.3 O modelo SECIAR

### 3.3.1 Pressupostos do modelo SECIAR

Para respondermos à última pergunta da introdução é necessária uma extensão do modelo SIR, que nos permita mostrar por que está sendo tão mais difícil e custoso controlar a epidemia de COVID-19, em relação as outras epidemias, mesmo as provocadas por

outros coronavírus. O modelo SECIAR é uma extensão do SIR, onde acrescentamos três novos compartimentos, e que pode ser visualizado através do fluxograma 3.7:

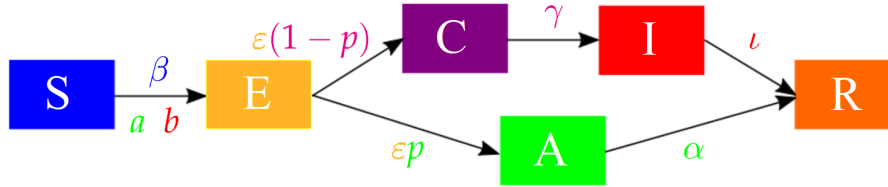


Figura 3.7 Fluxograma SECIAR

Os indivíduos do compartimento  $S$  dos suscetíveis, ao se infectarem, entram no compartimento  $E$  dos expostos, onde os indivíduos estão infectados, mas ainda não são infectantes. Após um tempo médio  $1/\varepsilon$ , uma proporção  $p$  dos indivíduos do compartimento  $E$  dos expostos entra no compartimento  $A$  dos assintomáticos, enquanto uma proporção complementar  $1-p$  entra no compartimento  $C$  dos pré-sintomáticos (do inglês *carrier*). Nesses dois compartimentos, os indivíduos passam a ser infectantes, mas não apresentam sintomas. Após um tempo médio  $1/\gamma$ , os indivíduos do compartimento  $C$  dos pré-sintomáticos entram no compartimento  $I$  dos sintomáticos, os indivíduos permanecem infectantes e agora apresentam sintomas. Após um tempo médio  $1/\iota$ , no caso dos indivíduos do compartimento  $I$  dos sintomáticos, e após um tempo médio  $1/\alpha$ , no caso dos indivíduos do compartimento  $A$  dos assintomáticos, os indivíduos desses dois compartimentos entram no compartimento  $R$  dos removidos.

A taxa do percentual de novos infectados por unidade de tempo é a soma da parcela  $\beta SC$ , em razão ao contágio pelos indivíduos do compartimento  $C$  dos pré-sintomáticos, da parcela  $b\beta SI$ , devido ao contágio pelos indivíduos do compartimento  $I$  dos sintomáticos e, finalmente, da parcela  $a\beta SA$ , devido ao contágio pelos indivíduos do compartimento  $A$  dos assintomáticos. O valor da constante  $a$  pode ser bem menor do que 1, uma vez que os indivíduos assintomáticos podem ter uma carga viral muito reduzida, enquanto o valor da constante  $b$  é 1 antes da epidemia ser identificada e passa a ser bem menor do que 1 após o surto ser identificado, quando a maioria dos indivíduos sintomáticos passam a ser isolados ou a se auto-isolar.



O modelo SECIAR é então descrito pelas cinco equações abaixo, envolvendo as variáveis  $S$ ,  $E$ ,  $C$ ,  $I$  e  $A$ :

$$\begin{aligned}
 S' &= -\beta S(C + bI + aA) \\
 E' &= \beta S(C + bI + aA) - \varepsilon E \\
 C' &= (1-p)\varepsilon E - \gamma C \\
 I' &= \gamma C - \iota I \\
 A' &= p\varepsilon E - \alpha A
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

### 3.3.2 Imunidade de rebanho e número de reprodução no SECIAR

O retrato de fases do modelo SECIAR É parecido com a do SIR? Vamos mostrar que, para efeitos práticos, o modelo SECIAR tem uma dinâmica muito parecida com a do SIR, como ilustrado pela figura abaixo:

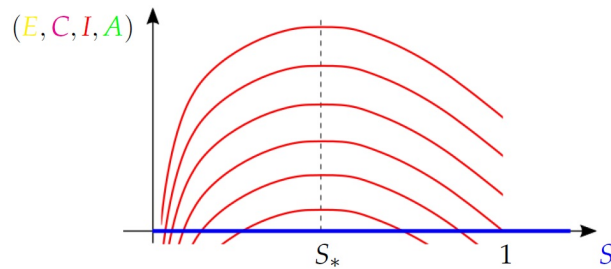


Figura 3.8 Dinâmica do modelo SECIAR

Observe que a variável  $S$  permanece representada no eixo horizontal, enquanto que as dimensões  $E$ ,  $C$ ,  $I$  e  $A$  estão todas representadas pelo mesmo eixo na vertical, de modo a facilitar a comparação entre as dinâmicas do SECIAR e do SIR. Ainda que agora não exista uma expressão explícita para a relação entre as variáveis, podemos mostrar que novamente existe um limiar  $S_*$  para a imunidade de rebanho tal que, se  $S_0$  está à direita de  $S_*$ , a epidemia evolui na curva vermelha da direita para esquerda até se aproximar de  $S_\infty$  à esquerda de  $S_*$ , atingindo a imunidade de rebanho. Mais do que isso, podemos mostrar que  $R_0 = S_0/S_*$ , de modo que obtemos a mesma relação entre o número de reprodução e o limiar da imunidade de rebanho, que é dado pela seguinte expressão:

$$S_* = \frac{1}{\beta \left( (1-p) \left( \frac{1}{\gamma} + \frac{b}{\iota} \right) + \frac{pa}{\alpha} \right)}.$$

Observe que o compartimento  $E$  dos expostos não influencia o limiar da imunidade de rebanho  $S_*$ , tendo papel apenas na dinâmica transiente do modelo.

Para mostrarmos porque a descrição acima é verdadeira, iniciamos a análise da dinâmica global do modelo SECIAR através das chamadas funções de Lyapunov 1.8.

**Proposição 3.6.** Temos que

$$L = 3S + 3E + 2C + I + 2A$$

é uma função de Lyapunov para o modelo SECIAR. Além disso, temos que conjunto dos pontos de equilíbrio do modelo SECIAR é dado pelo eixo  $S$  e cada trajetória do modelo SECIAR se aproxima de um único ponto de equilíbrio  $S_\infty$  do eixo  $S$  no futuro distante.

*Demonstração.* Observe que o conjunto dos pontos de equilíbrio do modelo SECIAR é dado pelo eixo  $S$ , uma vez que  $S'$ ,  $E'$ ,  $C'$ ,  $I'$  e  $A'$  se anulam simultaneamente se e só se  $E$ ,  $C$ ,  $I$  e  $A$  se anulam simultaneamente. Além disso, uma função de Lyapunov para o modelo SECIAR é dada por

$$L = 3S + 3E + 2C + I + 2A$$

uma vez que  $\nabla L = (3, 3, 2, 1, 2)$ , de modo que

$$\begin{aligned} L' &= -3\beta S(C + bI + aA) \\ &+ 3\beta S(C + bI + aA) - 3\varepsilon E \\ &+ 2(1-p)\varepsilon E - 2\gamma C \\ &+ \gamma C - \iota I \\ &+ 2p\varepsilon E - 2\alpha A \\ &= -\varepsilon E - \gamma C - \iota I - 2\alpha A \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

como queríamos. Isso mostra que qualquer semi-espaco dado por  $L = 3S + 3E + 2C + I + 2A \leq c$ , onde  $c$  é uma constante, é positivamente invariante. Além disso, é fácil ver que o ortante positivo, onde  $S$ ,  $E$ ,  $C$ ,  $I$  e  $A$  são positivos, também é positivamente invariante, de modo que a interseção de qualquer semi-espaco  $L \leq c$  com o ortante positivo representado na figura 3.9, além de ser claramente compacta, também é positivamente invariante.

Novamente, pela Proposição 1.7, segue que os pontos limites estão contidos na imagem inversa de  $L' = 0$ . No caso do SECIAR, isso ocorre se e só se  $E$ ,  $C$ ,  $I$  e  $A$  se anulam simultaneamente, portanto todos os pontos limites do modelo SECIAR estão contidos no

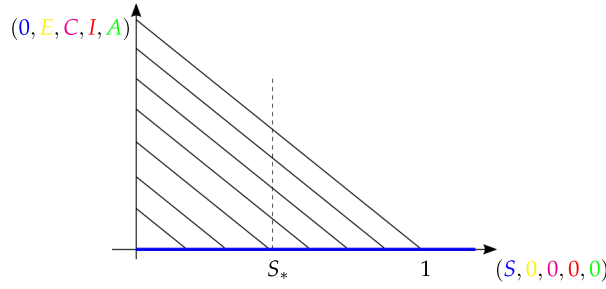


Figura 3.9 Compactos positivamente invariantes

seguimento de reta  $S$ , de modo que todas as trajetórias do modelo SECIAR se aproximam do eixo  $S$  no futuro distante. Além disso, como  $S' \leq 0$ , segue que  $S$  é uma função positiva e não-crescente do tempo, de modo que cada trajetória do modelo SECIAR se aproxima de um único ponto de equilíbrio  $S_\infty$  do eixo  $S$  no futuro distante.  $\square$

Para completar a descrição da dinâmica global do modelo SECIAR, precisamos primeiro analisar a dinâmica local desse modelo próximo ao eixo  $S$  através da análise dos autovalores da matriz Jacobiana, definida no apêndice, em cada um dos seus pontos.

**Proposição 3.7.** Temos que

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta S_0 & -\beta S_0 b & -\beta S_0 a \\ 0 & -\varepsilon & \beta S_0 & \beta S_0 b & \beta S_0 a \\ 0 & \varepsilon(1-p) & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\iota & 0 \\ 0 & \varepsilon p & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

é a matriz Jacobiana do modelo SECIAR no ponto  $S_0$  do eixo  $S$ . Um ponto de equilíbrio é estável se está à esquerda de  $S_*$  e é instável se está à direita de  $S_*$ . Além disso, com exceção de  $S_*$  e de no máximo dois outros pontos à direita dele, existe uma vizinhança do ponto de equilíbrio onde a dinâmica do modelo SECIAR é conjugada à dinâmica linear dada por  $J$ .

*Demonstração.* Primeiro a matriz Jacobiana para o SECIAR é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} -\beta(aA + bI + C) & 0 & -\beta S_0 & -\beta S b & -\beta S a \\ \beta(aA + bI + C) & -\varepsilon & \beta S & \beta S b & \beta S a \\ 0 & \varepsilon(1-p) & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\iota & 0 \\ 0 & \varepsilon p & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

Assim como no SIR, estamos interessados nos pontos  $S_0$  que pertencem ao eixo  $S$ , de modo que  $E = C = I = A = 0$ , obtendo:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta S_0 & -\beta S_0 b & -\beta S_0 a \\ 0 & -\varepsilon & \beta S_0 & \beta S_0 b & \beta S_0 a \\ 0 & \varepsilon(1-p) & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\iota & 0 \\ 0 & \varepsilon p & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

Podemos escrever:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & K \end{bmatrix}$$

onde  $k$  é uma matriz  $1 \times 4$ , enquanto  $K$  será agora uma matriz  $4 \times 4$ , dada por:

$$K = \begin{bmatrix} -\varepsilon & \beta S_0 & \beta S_0 b & \beta S_0 a \\ \varepsilon(1-p) & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\iota & 0 \\ \varepsilon p & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

Para acharmos os autovalores de  $K$ , é necessário o cálculo do seu polinômio característico, que é dado por:

$$p_K(\lambda) = \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4$$

onde

$$\begin{aligned} a_1 &= \varepsilon + \gamma + \iota + \alpha \\ a_2 &= \varepsilon \alpha + \gamma \alpha + \iota \alpha + \varepsilon \gamma + \varepsilon \iota + \gamma \iota - \beta S_0 \varepsilon [(1-p) + pa] \\ a_3 &= \varepsilon \gamma \alpha + \varepsilon \iota \alpha + \gamma \iota \alpha + \varepsilon \gamma \iota - \beta S_0 \varepsilon [(1-p)(\gamma b + \iota + \alpha) + pa(\gamma + \iota)] \\ a_4 &= \varepsilon \gamma \iota \alpha - \beta S_0 \varepsilon [(1-p)\alpha(\gamma b + \iota) + \gamma \iota pa] \end{aligned}$$

Algumas propriedades desse polinômio é que  $a_1 > 0$  e  $a_2, a_3, a_4$  são funções afins de  $S_0$ . Achar explicitamente os autovalores em termos de  $S_0$  agora, é mais complicado, já que estes são soluções de uma equação quártica. Mas podemos obter indiretamente informações sobre a parte real desses autovalores, já que queremos utilizar o Teorema de Pugh-Shub 1.6. Para determinar os pontos em que  $K$  deixa de ser hiperbólica, primeiro observamos que claramente, quando  $a_4 = 0$ , existe um autovalor nulo. Nesse ponto, isolando  $S_0$  temos:

$$S_0 = S_* = \frac{1}{\beta \left( (1-p) \left( \frac{1}{\gamma} + \frac{b}{\iota} \right) + \frac{pa}{\alpha} \right)}$$

Esse será justamente o limiar para a imunidade de rebanho para o modelo SECIAR. Claramente, pela Proposição 1.8, segue que os pontos de equilíbrio à direita de  $S_*$  são instáveis, uma vez que a matriz  $K$ , e portanto a matriz  $J$ , possui um autovalor real positivo quando  $S_0 > S_*$ , pois, nesse caso, temos que  $p_K(0) = a_4 < 0$  e o coeficiente da maior potência de  $p_K(\lambda)$  é igual a um. Mostrar que os pontos de equilíbrio à esquerda de  $S_*$  são estáveis é bem mais extenso e será deixado para o final. Antes vamos determinar quais são os outros pontos onde a matriz  $K$  deixa de ser hiperbólica. É possível mostrar que pode haver apenas mais dois valores de  $S_0$  diferentes de  $S_*$  onde a matriz  $K$  perde a hiperbolicidade. Primeiro temos que nosso polinômio possui ao menos duas raízes com parte real não nula, uma vez que, do contrário, ele poderia ser escrito de modo:

$$p_K(\lambda) = (\lambda^2 + b_0)(\lambda^2 + c_0)$$

com  $b_0, c_0 > 0$ , então nosso polinômio teria a forma abaixo:

$$p_K(\lambda) = \lambda^4 + (b_0 + c_0)\lambda^2 + b_0c_0$$

o que implicaria que  $a_1 = 0$ , o que não é verdade, pois  $a_1 > 0$ . Então supondo que nosso polinômio possua duas raízes puramente imaginárias ele teria a forma abaixo:

$$\begin{aligned} p_K(\lambda) &= (\lambda^2 + b_0)(\lambda^2 + c_1\lambda + c_0) \\ &= \lambda^4 + c_1\lambda^3 + (b_0 + c_0)\lambda^2 + b_0c_1\lambda + b_0c_0 \end{aligned}$$

Disso segue que:

$$a_1 = c_1, \quad a_2 = b_0 + c_0, \quad a_3 = b_0c_1, \quad a_4 = b_0c_0$$

de modo que

$$b_0 = \frac{a_3}{a_1}, \quad c_0 = \frac{a_4a_1}{a_3}$$

o que implica que

$$a_2 = b_0 + c_0 = \frac{a_3}{a_1} + \frac{a_4a_1}{a_3}$$

Com isso temos que os coeficientes formam uma equação de segundo grau em  $S_0$ :

$$a_3a_2a_1 = a_3^2 + a_4a_1^2$$

a qual pode ter no máximo duas raízes reais  $S_1$  e  $S_2$ . Vamos mostrar que esses dois pontos, se existirem, estão à direita de  $S_*$ , como ilustrado pela figura 3.10:

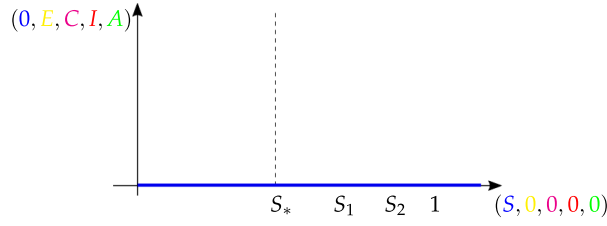


Figura 3.10 Posição de S1 e S2

Para demonstrar isso, vamos mostrar que todos os autovalores de  $K$  tem parte real negativa quando  $S_0 < S_*$  e, para isso, vamos utilizar o Teorema de Routh-Hurwitz 2.2, que apresenta condições necessárias e suficientes que os coeficientes do polinômio característico devem satisfazer para que todos os autovalores tenham parte real negativa. Porém esse critério é de difícil aplicação no nosso caso, uma vez que ele se torna mais complicado conforme o grau do polinômio aumenta e conforme as expressões dos coeficientes se tornam mais complicadas. Entretanto, a matriz  $K$  é uma M-matriz, então pela proposição 2.2 podemos simplificar o problema. Vamos escrever a matriz  $K$  como a seguinte diferença:

$$K = \begin{bmatrix} -\varepsilon & \beta S_0 & \beta S_0 b & \beta S_0 a \\ \varepsilon(1-p) & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\iota & 0 \\ \varepsilon p & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta S_0 & \beta S_0 b & \beta S_0 a \\ \varepsilon(1-p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ \varepsilon p & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \iota & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

onde

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \beta S_0 & \beta S_0 b & \beta S_0 a \\ \varepsilon(1-p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ \varepsilon p & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \iota & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

de modo que

$$LM^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta S_0}{\gamma} & \frac{\beta S_0 b}{\iota} & \frac{\beta S_0 a}{\alpha} \\ (1-p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde  $L$  é uma matriz com entradas não negativas e  $M$  é uma matriz diagonal com entradas diagonais positiva. Pela proposição 2.2 determinar quando todos os autovalores da diferença  $K = L - M$  têm parte real negativa é o mesmo que determinar quando todos os autovalores do quociente  $LM^{-1}$  tem valor absoluto menor do que um, que se mostra um problema mais simples. De fato, primeiro determinamos o polinômio

característico de  $LM^{-1}$ , que é dado por:

$$p_{LM^{-1}}(\lambda) = \lambda \left( \lambda^3 - \lambda \left( \frac{p\beta S_0 a}{\alpha} + \frac{(1-p)\beta S_0}{\gamma} \right) - \frac{(1-p)\beta S_0 b}{\iota} \right)$$

Uma das raízes desse polinômio é nula e, para mostrar que as demais raízes tem valor absoluto menor do que um, vamos utilizar o corolário 2.3 do Teorema de Routh-Hurwitz. Dado o polinômio  $p(\lambda) = \lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$  e considere:

$$\begin{aligned} e_0 &= 1 + b + c + d \\ e_1 &= 3 + b - c - 3d \\ e_2 &= 3 - b - c - 3d \\ e_3 &= 1 - b + c - d \end{aligned}$$

Todas as raízes de  $p(\lambda)$  têm valor absoluto menor do que um se e só se  $e_0, e_1, e_2, e_3 > 0$  e  $e_2 e_1 > e_3 e_0$ . No nosso caso, temos que:

$$\begin{aligned} b &= 0 \\ c &= - \left( \frac{p\beta S_0 a}{\alpha} + \frac{(1-p)\beta S_0}{\gamma} \right) \\ d &= - \frac{(1-p)\beta S_0 b}{\iota} \end{aligned}$$

de modo que

$$e_1 = e_2 = 3 - c - 3d > 3 > 0$$

e também que

$$\begin{aligned} e_2 e_1 &= (3 - c - 3d)^2 \\ &= 9 + c^2 + 9d^2 - 3c - 9d - 3c + 3dc - 9d + 3dc \\ &> 9 + c^2 + 9d^2 \\ &> 1 + c^2 - d^2 + 2c \\ &= (1 + c - d)(1 + c + d) \\ &= e_3 e_0 \end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$e_3 = 1 + c - d > 1 + c + d = e_0$$

de modo que  $e_3 > 0$  quando  $e_0 > 0$ . Segue então que  $e_0 > 0$  se e só se todos os autovalores do quociente  $LM^{-1}$  têm valor absoluto menor do que um, o que é equivalente a todos os autovalores da diferença  $K = L - M$  terem parte real negativa. Pelas definições, essa condição é dada por

$$e_0 = 1 - \left( \frac{p\beta S_0 a}{\alpha} + \frac{(1-p)\beta S_0}{\gamma} \right) - \frac{(1-p)\beta S_0 b}{\iota} > 0$$

Isolando  $S_0$  na desigualdade acima, segue que a desigualdade é equivalente a  $S_0 < S_*$ , como afirmamos. Se definirmos  $R_0 = \frac{S_0}{S_*}$ , temos que

$$R_0 = \frac{(1-p)\beta S_0}{\gamma} + \frac{(1-p)b\beta S_0}{\iota} + \frac{pa\beta S_0}{\alpha}$$

□

Um subconjunto de um espaço topológico é denominado *genérico* se é a interseção enumerável de subconjuntos abertos e densos. A probabilidade de se sortear aleatoriamente um ponto de um subconjunto genérico é igual a um, desde que a medida de probabilidade seja absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue. O resultado a seguir completa a descrição da dinâmica global do modelo SECIAR.

**Proposição 3.8.** Para todo  $\delta > 0$ , o subconjunto do ortante positivo tal que as trajetórias partindo desse conjunto possuem  $S_\infty < S_* + \delta$  é aberto e denso. Em particular, o subconjunto do ortante positivo tal que as trajetórias partindo desse conjunto possuem  $S_\infty \leq S_*$  é genérico.

*Demonstração.* Vamos denotar a primeira componente do fluxo  $\phi_t(x)$  do modelo SECIAR por  $S_t(x)$ , que é uma função positiva e decrescente em relação ao tempo. Segue que  $S_t(x) \rightarrow S_\infty(x)$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . Pela Proposição 3.6, temos que

$$\phi_t(x) \rightarrow \phi_\infty(x) = (S_\infty(x), 0, 0, 0, 0)$$

quando  $t \rightarrow \infty$ . Para todo  $\delta > 0$ , denote por  $N(\delta)$  o subconjunto do ortante positivo tal que todas as trajetórias partindo desse conjunto possuem  $S_\infty < S_* + \delta$ . Queremos mostrar que  $N(\delta)$  é aberto e denso.

Para mostrar que  $N(\delta)$  é aberto, considere  $x_0 \in N(\delta)$ , de modo que  $S_\infty(x_0) < S_* + \delta$ . Então existe  $T > 0$  tal que  $S_T(x_0) < S_* + \delta$ . Como  $\phi_T$  é um homeomorfismo, existe uma vizinhança aberta  $B$  se  $x_0$  tal que  $S_T(x) < S_* + \delta$  para todo  $x \in B$ . Como  $S_t(x)$  é



decrecente em relação ao tempo, segue que  $S_\infty(x) < S_* + \delta$  para todo  $x \in B$ , de modo que  $B \subset N(\delta)$ , mostrando  $N(\delta)$  é aberto.

Para mostrar que  $N(\delta)$  é denso, considere  $x_0 \notin N(\delta)$  e  $B$  uma bola aberta centrada em  $x_0$  e de raio  $r > 0$ . Segue que  $S_\infty(x_0) \geq S_* + \delta$ , de modo que  $S_0(x_0) > S_* + \delta$ , uma vez que  $S_t(x)$  é decrescente em relação ao tempo. Além disso, para todo  $x \in B$ , temos que  $S_0(x) < S_0(x_0) + r$ , de modo que  $S_\infty(x) < S_0(x_0) + r$ . Agora observe que, para todo ponto no eixo  $S$  tal que  $S_0 \in [S_* + \delta, S_0(x_0) + r]$ , existem uma bola aberta  $A$  centrada nesse ponto e um conjunto  $F \subset A$  tal que  $A - F$  é denso em  $A$  e tal que toda trajetória que permanece em  $A$  para tempos positivos está contida em  $F$  para tempos positivos. De fato, isso segue da Proposição 1.8, uma vez que, pela demonstração da Proposição 3.7, a matriz  $K$ , e portanto a matriz  $J$ , possui um autovalor real positivo, quando  $S_0 > S_*$ . Como  $[S_* + \delta, S_0(x_0) + r]$  é compacto, existe uma família finita  $\{A_1, \dots, A_k\}$  dessas vizinhanças tal que  $[S_* + \delta, S_0(x_0) + r] \subset A_1 \cup \dots \cup A_k$ . Podemos escolher essa família de modo que se  $x \in A_i$  e  $y \in A_{i+2}$ , então  $S_0(x) > S_0(y)$ . Como  $S_\infty(x_0) \in [S_* + \delta, S_0(x_0) + r]$ , temos que  $\phi_\infty(x_0) \in A_{i_1}$ , para algum  $i_1$ . Segue então que  $\phi_{T_1}(x_0) \in A_{i_1}$ , para algum  $T_1 > 0$ . Como  $\phi_{T_1}$  é um homeomorfismo, segue então que  $\phi_{T_1}(B) \cap (A_{i_1} - F_{i_1}) \neq \emptyset$ , de modo que existe  $x_1 \in B$  tal que  $\phi_{T_1}(x_1) \in A_{i_1} - F_{i_1}$ . Logo  $S_\infty(x_1) < S_* + \delta$  ou  $\phi_\infty(x_1) \in A_{i_2}$ , para algum  $i_2 > i_1$ . Se a segunda possibilidade for verdadeira, segue que  $\phi_{T_2}(x_1) \in A_{i_2}$ , para algum  $T_2 > 0$ . Como  $\phi_{T_2}$  é um homeomorfismo, segue então que  $\phi_{T_2}(B) \cap (A_{i_2} - F_{i_2}) \neq \emptyset$ , de modo que existe  $x_2 \in B$  tal que  $\phi_{T_2}(x_2) \in A_{i_2} - F_{i_2}$ . Logo  $S_\infty(x_2) < S_* + \delta$  ou  $\phi_\infty(x_2) \in A_{i_3}$ , para algum  $i_3 > i_2 > i_1$ . Como sempre podemos repetir esse argumento quando a segunda possibilidade é verdadeira e como a família  $\{A_1, \dots, A_k\}$  é finita, vai existir um  $x_k \in B$  tal que  $S_\infty(x_k) < S_* + \delta$ , de modo que  $x_k \in N(\delta)$ , mostrando que  $N(\delta)$  é denso.

Em particular, temos que o subconjunto do ortante positivo tal que as trajetórias partindo desse conjunto possuem  $S_\infty \leq S_*$  é genérico, pois esse subconjunto é claramente a interseção enumerável dos  $N(\frac{1}{n})$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

A figura abaixo ilustra a descrição qualitativa e genérica do retrato de fases do modelo SECIAR, que é bastante semelhante ao do modelo SIR: A expressão acima do limiar da imunidade de rebanho pode ser usada para fornecer uma possível explicação do porquê a SARS e a MERS não causaram tantos problemas quanto a pandemia de COVID-19.

$$S_* = \frac{1}{\beta \left( (1-p) \left( \frac{1}{\gamma} + \frac{b}{\iota} \right) + \frac{pa}{\alpha} \right)}$$

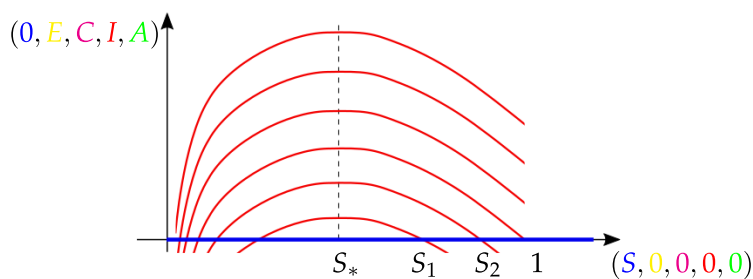


Figura 3.11 Retrato de fase modelo SECIAR

Antes da identificação de uma epidemia, o  $\beta$  é elevado e  $b = 1$ , pois as pessoas confundem a doença com um resfriado. Após a epidemia ser declarada, o  $\beta$  se reduz um pouco e  $b$  se reduz bastante, pois os indivíduos sintomáticos passam a ser isolados ou a se auto-isolar. Essas medidas afetaram pouco a economia, mas podem ter sido suficientes para fazer com que o limiar  $S_*$  se tornasse suficientemente grande, permitindo-se atingir a imunidade de rebanho sem grandes custos. Isso foi possível no caso da SARS e da MERS, mas não no caso da COVID-19, porque o tempo médio  $1/\gamma$  em que os indivíduos permanecem pré-sintomáticos é consideravelmente menor nas epidemias anteriores do que na pandemia de COVID-19. No caso da COVID-19, a única forma de tornar  $S_*$  suficientemente grande é reduzir ainda mais o valor de  $\beta$ , o que obriga a tomar medidas mais intensas de isolamento social e de higienização, causando todo o transtorno que estamos vivendo.

# Conclusão

No primeiro e segundo capítulo da dissertação, foi feita a teoria matemática para analisar os modelos epidemiológicos do capítulo 3. Através do modelo SIR, no capítulo 3, relembramos que a imunidade de rebanho pode ser alcançada com diferentes proporções de suscetíveis, desde que elas estejam à esquerda de um dado limiar que depende dos parâmetros do modelo. Em seguida, utilizando ideias de teoria de controle, mostramos que é possível alcançar a imunidade de rebanho com um valor de suscetíveis próximo ao desse limiar, salvando vidas e diminuindo o número de pessoas com sequelas. Isso pode ser alcançado através de uma estratégia de isolamento social e reabertura repetidas vezes, mostrando que tal estratégia é importante não apenas para evitar o colapso do sistema saúde, mas salva vidas e diminui o número de pessoas com sequelas no longo prazo, mesmo sem a obtenção de uma eventual vacina segura e eficaz.

Na última parte do capítulo 3, introduzimos uma extensão do modelo SIR, que denominamos SECIAR, incorporando três novos compartimentos, dos expostos, dos pré-sintomáticos e dos assintomáticos. Mostramos que sua dinâmica global se parece muito com a do SIR, de modo que quase todas as trajetórias partem à direita e chegam à esquerda de um limiar para a imunidade de rebanho, que depende dos parâmetros do modelo. Com esse limiar, é possível mostrar o possível papel dos pré-sintomáticos na maior dificuldade em se controlar a pandemia de COVID-19 quando comparada com as anteriores, uma vez que o tempo médio em que um indivíduo permanece pré-sintomático na COVID-19 é muito maior do que nas outras pandemias, mesmo as causadas por coronavírus como a SARS (2002) e a MERS (2012). O papel desses denominados *propagadores silenciosos* foi bem evidenciado na literatura sobre o assunto e evidenciados na mídia, como por exemplo em [13].



# Bibliografia

- [1] Berman, A. and Plemmons, R. J. (1994). *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [2] Bodson, M. (2019). Explaining the routh-hurwitz criterion.
- [3] Britton, T., Ball, F., and Trapman, P. (2020). A mathematical model reveals the influence of population heterogeneity on herd immunity to sars-cov-2. *Science*, 369(6505):846–849.
- [4] Chua, L., Shilnikov, A., Shilnikov, L., and Turaev, D. (1998). *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics - Part I*. World Scientific Publishing Company, Singapore.
- [5] Foppa, I. M. (2016). *A historical introduction to mathematical modeling of infectious diseases*. Seminal Papers in Epidemiology. Academic Press.
- [6] Hirsch, M., Pugh, C., and Shub, M. (1977). *Invariant Manifolds*. Springer, New York.
- [7] Hirsch, M., Smale, S., and Devaney, R. (2013). *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Elsevier, San Diego.
- [8] Horn, R. A., Horn, R. A., and Johnson, C. R. (1994). *Topics in matrix analysis*. Cambridge university press.
- [9] Kermack, W. O. and McKendrick, A. G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the royal society of london. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character*, (115):700–721.
- [10] Martcheva, M. (2015). *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. Springer, New York.
- [11] Meinsma, G. (1995). Elementary proof of the routh-hurwitz test. *Systems Control Letters*, 25(4):237–242.
- [12] Meyer, C. D. (2023). *Matrix analysis and applied linear algebra. With solutions to problems*. Siam.
- [13] Moghadas, S., Fitzpatrick, M., Sah, P., Pandey, A., Shoukat, A., Singer, B., and Galvani, A. (2020). The implications of silent transmission for the control of covid-19 outbreaks. *PNAS*, 117(30):17513–17515.

- 
- [14] Naulin, R. and Pabst, C. (1994). The roots of a polynomial depend continuously on its coefficients. *Revista Colombiana de Matemáticas*, (28):35–37.
- [15] Patrão, M. and Reis, M. (2020). Analisando a pandemia de covid-19 através dos modelos sir e seciar. *Biomatemática*, (30):111–140.
- [16] Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical System*. Springer, New York.
- [17] Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis (Vol. 3)*. McGraw-hill, New York.
- [18] van den Driessche, P. and Watmough, J. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, 180(1-2):29–48.

# Apêndice A

## Apêndice

Nesse apêndice iremos ver a demonstração do lema 1.2 e que a matriz de Vandermonde tem inversa, onde foi usado de base o livro [17].

Vamos começar com o lema que vai envolver convergência uniforme.

**Definição A.1.** Dizemos que uma sequência de funções  $\{f_n\}, n = 1, 2, 3, \dots$ , converge uniformemente em  $\mathbb{R}^n$  para uma função  $f$  se para todo  $\epsilon > 0$  existe um inteiro  $N$  tal que  $n \geq N$  implica que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Teorema A.1.** A Sequência de funções  $\{f_n\}$ , definida em  $\mathbb{R}^n$ , converge uniformemente em  $\mathbb{R}^n$  se e somente se para cada  $\epsilon > 0$  existe um inteiro  $N$  tal que para  $m \geq N, n \geq N, x \in \mathbb{R}^n$  implica que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

*Demonstração.* Suponha que  $\{f_n\}$  converge uniformemente em  $\mathbb{R}^n$ , e seja  $f$  a função limite. Então existe um inteiro  $N$  tal que  $n \geq N, x \in \mathbb{R}^n$  implica

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2},$$

dessa forma

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

se  $m \geq N, n \geq N, x \in \mathbb{R}^n$ .

Por outro lado, temos que a sequência  $\{f_n\}$  converge, para qualquer  $x$ , para um limite que chamaremos de  $f(x)$ . Logo a sequência  $\{f_n\}$  converge em  $\mathbb{R}^n$ , para  $f$ . Agora precisamos mostra que a convergência é uniforme. Seja  $\epsilon > 0$ , escolhendo  $N$  tal que

$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$  com  $m \geq N$ ,  $n \geq N$ . Fixando  $n$  e pegando o limite  $m \rightarrow \infty$ . Como  $f_m(x) \rightarrow f(x)$  quando  $m \rightarrow \infty$ , isso nos dá que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

para todo  $n \geq N$  e todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . □

**Teorema A.2.** Suponha que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$   $x \in \mathbb{R}^n$ . Seja  $M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f_n(x) - f(x)|$ . Então  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $\mathbb{R}^n$  se e somente se  $M_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Se  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $\mathbb{R}^n$  então existe um  $N$  tal que  $n \geq N$  implica que  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \Leftrightarrow M_n \rightarrow 0$ . □

**Teorema A.3.** Suponha que  $\{f_n\}$  é uma sequência de funções definida em  $\mathbb{R}^n$  e suponha que  $|f_n(x)| \leq M_n$ , ( $x \in \mathbb{R}^n, n = 1, 2, 3, \dots$ ). Então  $\sum f_n$  converge uniformemente em  $\mathbb{R}^n$  se  $\sum M_n$  converges.

*Demonstração.* Se  $\sum M_n$  converge, então para um  $\epsilon > 0$  arbitrário,

$$\left| \sum_{i=n}^m f_i(x) \right| \leq \left| \sum_{i=n}^m M_i \right| < \epsilon,$$

$x \in \mathbb{R}^n$ ), para  $m$  e  $n$  grande o suficiente. □

**Teorema A.4.** Suponha que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $x$  um limite ponto de  $\mathbb{R}^n$  e suponha que  $\lim_{t \rightarrow x} f_n(t) = A_n$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Então  $\{A_n\}$  converge e  $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ . Em outras palavras, a conclusão é que  $\lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} f_n(t)$ .

*Demonstração.* Seja  $\epsilon > 0$ . Pela convergência uniforme de  $\{f_n\}$  existe  $N$  tal que  $n \geq N$ ,  $m \geq N, t \in \mathbb{R}^n$  implica que  $|f_n(t) - f_m(t)| < \epsilon$ . Tomando  $t \rightarrow x$  obtemos  $|A_n - A_m| < \epsilon$  para  $n \geq N$ ,  $m \geq N$ , de modo que  $\{A_n\}$  é uma sequência de Cauchy e portanto converge, digamos que para  $A$ . Assim,

$$|f(t) - A| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - A_n| + |A_n - A|.$$

Escolhes  $n$  tal que  $|f(t) - f_n(t)| < \frac{\epsilon}{3}$  para todo  $t \in E$  e tal que  $|A_n - A| < \frac{\epsilon}{3}$ . Então, para esse  $n$  escolhemos uma vizinhança  $V$  de  $x$  tal que  $|f_n(t) - A_n| < \frac{\epsilon}{3}$ , se  $t \in V \cap E$ ,  $t \neq x$  temos  $|f(t) - A| < \epsilon$ . □

**Corolário A.1.** Se  $\{f_n\}$  é uma sequência de funções contínuas em  $\mathbb{R}^n$  e se  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $\mathbb{R}^n$ , então  $f$  é uma função contínua em  $\mathbb{R}^n$ .



*Demonstração.* Como  $\{f_n\}$  é uma seqüência de funções contínuas, então para uma seqüência  $x_k \rightarrow a$  em  $\mathbb{R}^n$ , temos que  $\lim_{x_k \rightarrow a} f_n(x_k) = f_n(a) \Rightarrow$

$$\lim_{x_k \rightarrow a} f(x_k) = \lim_{x_k \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x_k \rightarrow a} f_n(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = f(a).$$

□

**Lema A.1. 1.2** Suponha que  $G_k : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  é uma seqüência de funções contínuas definidas em um intervalo fechado  $I$  que satisfaz: Dado  $\epsilon > 0$ , existe algum  $N > 0$  tal que para todo  $p, q > N$

$$\max_{t \in I} |G_p(t) - G_q(t)| < \epsilon.$$

Então existe uma função contínua  $G : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$\max_{t \in I} |G_k(t) - G(t)| \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Além disso, para qualquer  $t$  com  $|t| \leq a$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t G_k(s) ds = \int_0^t G(s) ds.$$

*Demonstração.* As duas primeiras desigualdades provem da definição da seqüência de funções contínuas  $G_k$  convergir uniformemente para a função contínuas  $G$ . Para demonstrar a igualdade da integral, seja  $\epsilon_k = \sup |G_k(s) - G(s)|$ ,  $s \in I$ . Como  $G - \epsilon_k \leq G \leq G + \epsilon_k$ , então a integral inferior e superior satisfazem

$$\int_0^t (G_k(s) - \epsilon_k) ds \leq \int_{-} G(s) ds \leq \int_{-} G(s) ds \leq \int_0^t (G_k(s) + \epsilon_k) ds.$$

Portanto  $0 \leq \int_{-} G(s) ds - \int_{-} G(s) ds < 2\epsilon_k [s(t) - s(0)]$ . Quando  $\epsilon_k \rightarrow 0$  e  $k \rightarrow \infty$ , a integral inferior e a superior de  $G(s)$  é igual, logo a integral de  $G(s)$  está bem definida e

$$\left| \int_0^t G(s) ds - \int_0^t G_k(s) ds \right| < \epsilon_k [s(t) - s(0)]$$

para  $k$  grande e segue que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t G_k(s) ds = \int_0^t G(s) ds$  □

Agora veremos sobre a Matriz de Vandermonde.

**Teorema A.5.** matriz

$$V = \begin{bmatrix} s_1^{n-1} & \cdots & s_1 & 1 \\ s_2^{n-1} & \cdots & s_2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_n^{n-1} & \cdots & s_n & 1 \end{bmatrix},$$

possui inversa.

*Demonstração.* iremos mostrar que seu determinante é diferente de 0, isso é verdade pois podemos descrever o determinante de  $V$  como sendo  $\det|V| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (s_i - s_j)$ . A prova é por indução. Temos que para o caso  $2 \times 2$

$$V = \begin{bmatrix} s_1 & 1 \\ s_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det|V| = s_1 - s_2$ . Agora vamos provar para a matriz  $n \times n$  supondo que vale para a matriz  $n-1 \times n-1$ , seja  $c_i$  a coluna  $i$  então a multiplicamos por  $-s_n$  e somamos com  $c_{i-1}$ . Fazendo esse processo para todas as colunas temos que

$$\det|V| = \begin{vmatrix} s_1^{n-1} & \cdots & s_1 & 1 \\ s_2^{n-1} & \cdots & s_2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_n^{n-1} & \cdots & s_n & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_1^{n-2}(s_1 - s_n) & \cdots & s_1 - s_n & 1 \\ s_2^{n-2}(s_2 - s_n) & \cdots & s_2 - s_n & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Pelo Teorema de Laplace eliminando a última linha e a última coluna, obtemos

$$\det|V| = \begin{vmatrix} s_1^{n-2}(s_1 - s_n) & \cdots & s_1(s_1 - s_n) & s_1 - s_n \\ s_2^{n-2}(s_2 - s_n) & \cdots & s_2(s_2 - s_n) & s_2 - s_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{n-1}^{n-2}(s_{n-1} - s_n) & \cdots & s_{n-1}(s_{n-1} - s_n) & s_{n-1} - s_n \end{vmatrix}$$

Como temos a linha 1 multiplicada por  $(s_1 - s_n)$ , a linha 2 por  $(s_2 - s_n)$  e sucessivamente até a linha  $n-1$  multiplicada por  $(s_{n-1} - s_n)$ , pela propriedade de ter uma linha multiplicada por um escalar, podemos reescrever o determinante de  $S$  como sendo:

$$\det|V| = (s_1 - s_n)(s_2 - s_n) \cdots (s_{n-1} - s_n) \begin{vmatrix} s_1^{n-2} & \cdots & s_1 & 1 \\ s_2^{n-2} & \cdots & s_2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{n-1}^{n-2} & \cdots & s_{n-1} & 1, \end{vmatrix}$$

$$\log \det|V| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (s_i - s_j)$$

□

