



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
CAMPUS DARCY RIBEIRO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Mailton Rego Almeida

Conjugação no Grupo F de Thompson

Brasília/DF

2023



CONJUGAÇÃO NO GRUPO F DE THOMPSON

Mailton Rego Almeida

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática, da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.
Orientador: Alex Carrazedo Dantas

Brasília/DF

2023

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Conjugação no Grupo F de Thompson

por

Mailton Rego Almeida *

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade
de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 07 de março de 2023.


Comissão Examinadora:



Prof. Dr. Alex Carrazedo Dantas - MAT/UnB (Orientador)



Prof. Dr. Emerson Ferreira de Melo – MAT/UnB (Membro)



Prof. Dr. Altair Santos de Oliveira Tosti – UENP (Membro)

Este trabalho é dedicado as minhas duas estruturas, mãe e pai, vocês têm grande parcela nesta nova conquista.

Agradecimentos

Aqui quero agradecer a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para que eu chegasse até aqui.

Primeiramente à Deus, que permitiu que tudo isso acontecesse, até chegar aqui foram vários anos de luta e tenho certeza que ele sempre esteve do meu lado a cada segundo.

Agradeço à minha família pelo apoio e incentivo que serviram de alicerce para as minhas realizações. Em especial, agradeço aos meus pais, Dirce e Gerson, que estiveram ao meu lado durante essa caminhada e me acolheram e apoiaram nos momentos em que eu mais precisei. A minha mãe que por muitas vezes me deu esperança para seguir. Ao meu pai que me deu a segurança e força nessa caminhada.

Ao Alex Carrazedo, meu professor e orientador, por toda a dedicação, compromisso, paciência e ensinamentos. Tenho admiração por sua sabedoria e didática, as quais me ajudaram bastante na elaboração desta dissertação.

Aos meus amigos Juan Fernando e Daniel Elias por todos os obstáculos que passamos juntos e pelos ensinamentos que aceleraram meu amadurecimento que foram fundamentais para chegar até aqui. Nossas resenhas nas horas vagas eram as melhores.

Aos meus amigos Argélio, Eliana, Ana Clara e Gabriel por todo o acolhimento e carinho durante todos dos desafios que passei em Campinas-SP.

Aos meus colegas da UnB, nossos estudos em grupos foram decisivas para agilizar e facilitar o meu aprendizado.

Por fim, agradeço a Capes pelo financiamento durante o mestrado até chegar a elaboração deste trabalho.

O fim é melhor do que o começo.

Eclesiastes, 7.8

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é descrever uma solução do Problema da Conjugação no Grupo F de Thompson, segundo o artigo (GILL; SHORT, 2013). Nessa solução, o grupo F é visto como um grupo de homeomorfismos lineares em uma quantidade finita de partes do intervalo $[0, 1]$ nele mesmo. Em paralelo, também serão dadas duas apresentações para F , em que uma é finita e outra infinita.

Palavras-chave: Grupo F de Thompson. Homeomorfismos lineares por partes. Problema da Conjugação.

Abstract

The main objective of this work is to describe a solution of the Conjugacy Problem in Thompson's Group F , according to the article (GILL; SHORT, 2013). In this solution, the group F is represented as a group of piecewise linear homeomorphisms from the interval $[0, 1]$ to itself. In parallel, two presentations for F will also be given, where one is finite and the other infinite.

Keywords: Thompson's Group F ; Piecewise linear homeomorphisms; Conjugacy Problem.

Lista de ilustrações

Figura 1	– Gráficos de A e B	12
Figura 2	– Diagrama de funções	15
Figura 3	– Diagrama de funções	16
Figura 4	– Diagramas de funções	16
Figura 5	– Diagrama de funções	23
Figura 6	– Diagrama de funções	25
Figura 7	– Gráficos de A e B	28
Figura 8	– Diagramas retangulares de A e B	28
Figura 9	– Diagrama retangular de AB^{-1}	29
Figura 10	– Diagramas retangulares de $A^{-1}BA$ e $A^{-2}BA^2$	29
Figura 11	– Diagrama retangular de X_n	29
Figura 12	– Árvore S	30
Figura 13	– Árvore binária enraizada	31
Figura 14	– Árvore \mathcal{T} de intervalos diádicos padrões	32
Figura 15	– \mathcal{T} -árvore \mathcal{T}_3	32
Figura 16	– Acento circunflexo	33
Figura 17	– Diagrama de árvore (R, S)	34
Figura 18	– Diagrama de árvore reduzido de A	35
Figura 19	– Diagrama de árvore reduzido de B	35
Figura 20	– Diagrama de árvore reduzido de X_n	36
Figura 21	– Multiplicando (R_1, S_1) por (R_2, S_2)	37
Figura 22	– Expansão dos diagramas de árvores para multiplicação	37
Figura 23	– Diagrama de árvore (R'_1, S'_2)	37
Figura 24	– Multiplicação dos diagramas de árvores das funções A^{-1} e C	38
Figura 25	– Multiplicação dos diagramas de árvores das funções CA^{-1} e A	38
Figura 26	– Diagramas de árvores das funções ACA^{-1} e A^2CA^{-2}	39
Figura 27	– \mathcal{T} -árvore S	40
Figura 28	– Diagrama	40
Figura 29	– \mathcal{T} -árvore R	41
Figura 30	– \mathcal{T} -árvore R'	41
Figura 31	– Gráfico da função g	47
Figura 32	– Gráfico da função f	48
Figura 33	– Multiplicação dos diagramas de árvores dos elementos B e A^{-1}	50
Figura 34	– Multiplicação dos diagramas de árvores dos elementos $A^{-1}B$ e B	51
Figura 35	– Diagrama de árvore do elemento $BA^{-1}B$	51
Figura 36	– Função f	52

Figura 37 – Função encurralada	53
Figura 38 – Duas funções finitas equivalentes.	56
Figura 39 – Gráfico da função f	57
Figura 40 – Função f	64

Lista de símbolos

\emptyset	Conjunto vazio
$ S $	Cardinalidade do conjunto S
$X \subseteq Y$	X é um subconjunto de conjunto Y
$H \leq G$	H é um subgrupo do grupo G
$H < G$	H é um subgrupo próprio do grupo G
$H \triangleleft G$	H é um subgrupo normal do grupo G
$H \lesssim G$	H é um subgrupo imerso no grupo G
gH	Classe lateral à esquerda de H em G contendo g
$ G : H $	Índice de H em G
$[x, y]$	$xyx^{-1}y^{-1}$
$\langle X \rangle$	Menor subgrupo de G contendo o subconjunto X
\overline{X}	Menor subgrupo normal de G contendo o subconjunto X
$H \cong G$	H é isomorfo a G
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$	Conjunto dos números naturais, inteiros e reais
\mathbb{R}_+	Conjunto dos números reais positivos
$\langle X \mid R \rangle$	Grupo apresentado por geradores X e relações R
\mathbb{Z}_n	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$\text{Hom}(H, G)$	Conjunto dos homomorfismos de H para G
$\text{Map}(H, G)$	Conjunto das funções de H para G
G/H	Grupo quociente de G por H
$f(x)$	Imagem de x sobre a função f

Sumário

	INTRODUÇÃO	12
1	PRELIMINARES	15
1.1	Grupos Livres	15
1.1.1	Definição e Propriedades Elementares	15
1.1.2	Existência de $\mathcal{F}(X)$	17
1.2	Apresentações de Grupos	20
1.2.1	Conceitos Básicos	20
1.2.2	Homomorfismos Induzidos	23
1.3	Problema da Conjugação	25
2	GRUPO F DE THOMPSON	27
2.1	Definição do Grupo F de Thompson	27
2.2	Diagramas de árvores	29
2.2.1	Definição de diagrama de árvore	29
2.2.2	Multiplicação de diagramas de árvores	36
2.3	Apresentação para F	39
3	CONJUGAÇÃO NO GRUPO F DE THOMPSON	47
3.1	Conceitos iniciais	47
3.2	Definição de Σ	48
3.3	Definição de Δ	53
3.3.1	A função encurralada mínima	53
3.3.2	Definição de Δ	56
3.4	Prova do Teorema A	59
4	APÊNDICE	64
4.1	Definições e resultados básicos	64
4.2	Resultados Complementares	72
	REFERÊNCIAS	80

Introdução

Em suas famosas notas não publicadas de 1967 (THOMPSON, 1965), Richard Thompson introduziu três grupos que agora são mais comumente denotados por $F \lesssim T \lesssim V$. Sua motivação era encontrar soluções negativas para o Problema de von Neumann. Esses grupos ficaram conhecidos como Grupos F , T e V de Thompson. Neste trabalho estudamos o Grupo F de Thompson. Os elementos de F podem ser vistos de duas maneiras, como homeomorfismos do intervalo $[0, 1]$ ou como diagramas de árvores.

O Grupo F de Thompson é formado dos homeomorfismos $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que existe uma partição finita $\{x_0 = 0, x_1, \dots, x_n = 1\} \subset \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ (Racionais Diádicos) com f linear em cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n - 1$, e nos pontos $x \in [0, 1]$ que a derivada de f existe tem-se que $f'(x) \in \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ (potências inteiras de 2). Destacamos dois elementos $A, B : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ de F

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}; & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{4}; & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 2x - 1; & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad B(x) = \begin{cases} x; & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{4}; & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ x - \frac{1}{8}; & \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{7}{8} \\ 2x - 1; & \frac{7}{8} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Os gráficos das funções de A e B estão na Figura 1.

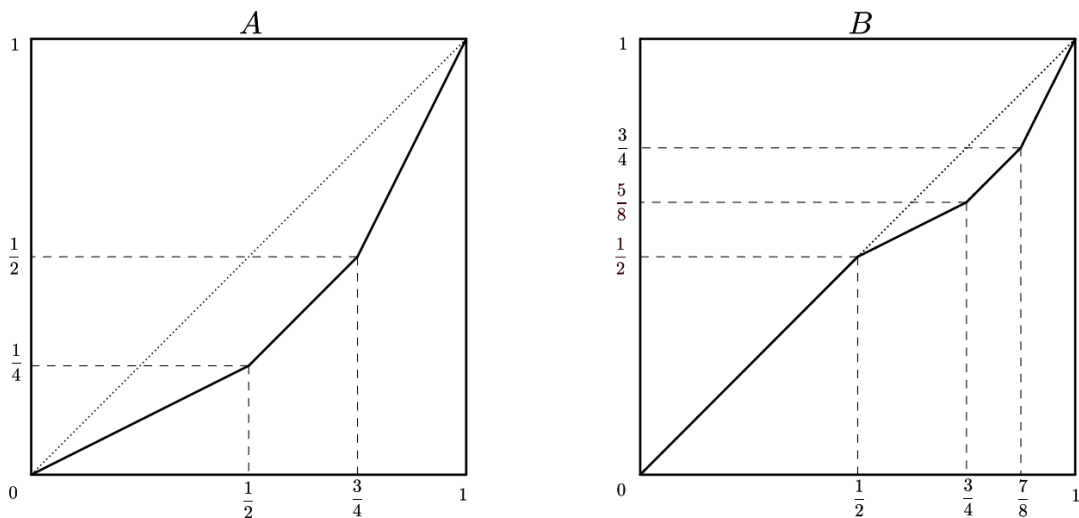


Figura 1 – Gráficos de A e B

Os elementos A e B de F não foram escolhidos de forma aleatória, tais elementos geram F . Mais do que isso, a partir de A e B é possível determinar duas apresentações bem conhecidas

de F , são elas

$$\langle A, B \mid [AB^{-1}, A^{-1}BA], [AB^{-1}, A^{-2}BA^2] \rangle$$

e

$$\langle X_0, X_1, X_2, \dots \mid X_k^{-1}X_nX_k = X_{n+1} \text{ para } k < n \rangle$$

em que na última apresentação $X_0 = A$ e $X_n = A^{-(n-1)}BA^{n-1}$ para $n \geq 1$. Observamos que a primeira é uma apresentação finita e a outra infinita.

O objetivo principal deste trabalho é estudar a solução do Problema da Conjugação em F feita por (GILL; SHORT, 2013). O Problema da Conjugação para um grupo G é o problema de determinar, quando dois elementos g e h em G são conjugados ou não em G . Em (GILL; SHORT, 2013), os autores resolveram o Problema da Conjugação em F considerando seus elementos como homeomorfismos de $[0, 1]$. O grupo $PLF(0, 1)$, é o grupo dos homeomorfismos lineares por partes do intervalo $(0, 1)$ que são crescentes e que tem uma quantidade finita de pontos nos quais a função não é diferenciável. Uma vez que todo elemento de F leva o 0 para 0 e 1 para 1, podemos mergulhar F em $PLF(0, 1)$. Uma solução para o Problema da Conjugação em $PLF(0, 1)$ foi dada em (BRIN; SQUIER, 2001) por Brin-Squier, no qual eles construíram um invariante Σ que depende da função, e apresentaram a solução a partir desse invariante. Essa solução para o Problema da Conjugação em $PLF(0, 1)$ não é solução para o Problema da Conjugação em F . Em (GILL; SHORT, 2013), os autores mergulharam F em $PLF(0, 1)$ e utilizaram o invariante Σ para construir mais um invariante, o invariante Δ . Com os invariantes Σ e Δ , eles apresentaram a solução do Problema da Conjugação de F , na qual está enunciado no Teorema A.

Adiantamos que, Σ é uma tripla ordenada $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ que dependem da função e o Δ é uma lista de classes de equivalências de tuplas de números reais que também dependem da função. Os invariantes Σ e Δ não são difíceis de calcular, no Capítulo 3 estudamos sobre esses invariantes.

Teorema A. *Sejam f, g dois elementos de F . Então, f e g são conjugados em F se, e somente se, acontece $(\Sigma^f, \Delta_f) = (\Sigma^g, \Delta_g)$.*

Vale destacar que essa não é a primeira solução do Problema da Conjugação em F . Em particular o Problema da Conjugação em F foi resolvido primeiramente por (GUBA; SAPIR, 1997), usando Diagram Groups. Mais recentemente, [(BELK; MATUCCI, 2008) (BELK; MATUCCI, 2014)], fizeram outra solução usando Strand Diagrams. (KASSABOV; MATUCCI, 2012) também resolveu o Problema da Conjugação e o Problema da Conjugação simultânea. A solução estudada aqui feita por (GILL; SHORT, 2013) é diferente de todas essas, pois é construída sobre os invariantes geométricos introduzidos por (BRIN; SQUIER, 2001).

No Capítulo 1, estudamos apresentações de grupos oportunando abordar, no Capítulo 2, as duas apresentações mais conhecidas do Grupo F de Thompson. Aqui, usamos como referência principal (JOHNSON et al., 1997). Na primeira seção abordamos grupos livres, que é

essencial para falar de apresentações de grupos. Na segunda seção abordamos apresentações de grupos. Na última seção, é dado um breve comentário sobre o Problema de Conjugação.

No Capítulo 2, abordamos o Grupo F de Thompson, no qual o objetivo principal é entender melhor o grupo F e suas características, além de abordar duas apresentações para esse grupo. Isso nos concede melhores condições para falar sobre o Problema da Conjugação em F no Capítulo 3. Na primeira seção, definimos F , e damos alguns exemplos de elementos de F . Na segunda seção, vemos outra forma de representar os elementos de F , a saber, como diagramas de árvores. Na última seção, duas apresentações para F são abordadas, sendo uma finita e outra infinita. Aqui usamos como referência principal (CANNON; FLOYD; PARRY, 1996).

No Capítulo 3, abordamos o objetivo principal desse trabalho. Descrevemos uma solução para o Problema de Conjugação no Grupo F de Thompson. Esse capítulo é dividido em 4 seções. Na primeira seção, falamos sobre os conceitos iniciais e os resultados que desejamos obter. Na segunda seção, definimos o invariante Σ . Na terceira seção, definimos o invariante Δ e na última seção provamos o resultado principal do capítulo, que é o Teorema A. Aqui usamos como referências principais (GILL; SHORT, 2013) e (BRIN; SQUIER, 2001).

O Apêndice é um complemento do Capítulo 3. Optamos por fazer Apêndice, visando deixar o trabalho completo. Essencialmente trabalhamos com o grupo $PLF(0, 1)$. Vemos algumas definições extras e fazemos algumas adaptações convenientes. Na primeira seção, apresentamos definições e resultados básicos para a construção da função $\sigma^y[g]$, onde g é um elemento de $PLF(0, 1)$ e y um elemento de uma órbita de g . Na segunda seção, apresentamos os resultados complementares. A principal referência foi (BRIN; SQUIER, 2001).

1 Preliminares

Neste capítulo falaremos sobre Grupo Livres, Apresentações de Grupo e Problema da Conjugação.

1.1 Grupos Livres

A noção de grupo livre é fundamental para a teoria de apresentação de grupo. Grosseiramente falando, um grupo \mathcal{F} é chamado livre se existe um subconjunto X com a propriedade que cada elemento de \mathcal{F} pode ser escrito de forma única como produto de elementos de X e seus inversos.

1.1.1 Definição e Propriedades Elementares

Definição 1. Um grupo \mathcal{F} é chamado livre sobre um conjunto $X \subseteq \mathcal{F}$ se, dado qualquer grupo G e qualquer função $\theta : X \rightarrow G$, existe um único homomorfismo $\theta' : \mathcal{F} \rightarrow G$ estendendo θ , isto é, tendo a propriedade de que $\theta'(x) = \theta(x)$ para todo $x \in X$, ou que o diagrama abaixo é comutativo. O conjunto X é chamado base de \mathcal{F} e a cardinalidade $|X|$ o posto de \mathcal{F} , escrevemos $p(\mathcal{F})$.

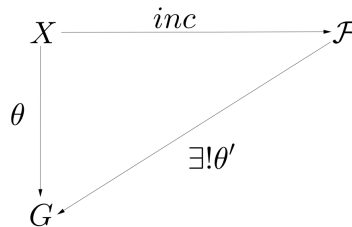


Figura 2 – Diagrama de funções

Observação 1. Sejam \mathcal{F} um grupo arbitrário, $X \subseteq \mathcal{F}$, e G qualquer grupo. Tomando $\text{Hom}(\mathcal{F}, G)$ o conjunto dos homomorfismos de \mathcal{F} para G , $\text{Map}(X, G)$ o conjunto das funções de X para G , e

$$\begin{aligned}
 \rho : \text{Hom}(\mathcal{F}, G) &\longrightarrow \text{Map}(X, G) \\
 \phi &\longmapsto \text{inc}\phi = \phi|_X
 \end{aligned}$$

a restrição da função. Então,

$$\begin{aligned}
 \rho \text{ é sobrejetivo} &\Leftrightarrow \forall \theta \text{ existe } \theta' \text{ como na Definição 1,} \\
 \rho \text{ é injetivo} &\Leftrightarrow \theta', \text{ se existe, é único.}
 \end{aligned}$$

Lema 1. Se \mathcal{F} é grupo livre sobre X , então X gera \mathcal{F} .

Prova: Seja $H = \langle X \rangle := \cap \{K \leq \mathcal{F} \mid K \supseteq X\}$, e seja $\theta : X \rightarrow H$ a inclusão, com $\theta' : \mathcal{F} \rightarrow H$ a correspondente extensão. Tomando $\iota : H \rightarrow \mathcal{F}$ a inclusão de H em \mathcal{F} , vemos na Figura 3 que $\iota\theta'$ estende $\iota\theta = inc$. Mas então, resulta na função identidade $1_{\mathcal{F}}$. Por unicidade, $\iota\theta' = 1_{\mathcal{F}}$, de onde $\mathcal{F} = Im 1_{\mathcal{F}} = Im \iota\theta' = Im \theta' \subseteq H$. \square

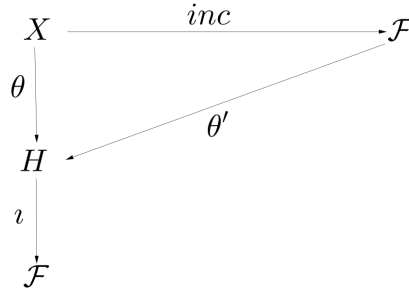


Figura 3 – Diagrama de funções

Proposição 1. Se \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 são grupos livres sobre, respectivamente, X_1, X_2 e $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{F}_2$, então $|X_1| = |X_2|$.

Prova: Aplicando a Observação 1 acima com $G = \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ o grupo de ordem 2. Uma vez que $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{F}_2$, $|Hom(\mathcal{F}_1, \mathbb{Z}_2)| = |Hom(\mathcal{F}_2, \mathbb{Z}_2)|$, de onde $|Map(X_1, \mathbb{Z}_2)| = |Map(X_2, \mathbb{Z}_2)|$. Mas, para qualquer conjunto B, C de cardinalidades b, c respectivamente $|Map(B, C)| = c^b$. Então, neste caso, $2^{|X_1|} = 2^{|X_2|}$, e o resultado segue tomando *logs* na base 2. \square

Proposição 2. Se $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ são grupos livres sobre, respectivamente, X_1, X_2 , e $|X_1| = |X_2|$, então $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{F}_2$.

Prova: Assumindo que $|X_1| = |X_2|$, então existe uma bijeção $\lambda : X_1 \rightarrow X_2$. Sejam α, β extensões que fazem os diagramas abaixo comutarem:

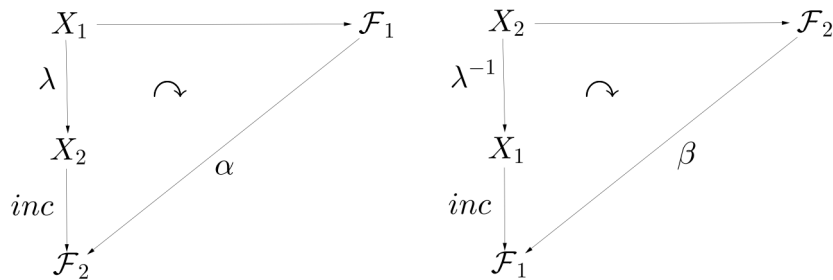


Figura 4 – Diagramas de funções

Agora, para todo $x_1 \in X_1$, $\beta\alpha(x_1) = \beta(\lambda(x_1)) = inc\lambda^{-1}(\lambda(x_1)) = inc(x_1) = x_1$, tal que $\beta\alpha : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_1$ estende $inc : X_1 \rightarrow \mathcal{F}_1$. Portanto, $\beta\alpha = 1_{\mathcal{F}_1}$ e analogamente $\alpha\beta = 1_{\mathcal{F}_2}$. Logo, α é um isomorfismo. \square

1.1.2 Existência de $\mathcal{F}(X)$

Seja X qualquer conjunto abstrato. Vamos descrever um processo para construir um grupo livre $\mathcal{F}(X)$ tendo X como uma base.

Passo 1: Primeiro escolhamos um conjunto disjunto de X com a mesma cardinalidade: Por razões de notação, denotamos este conjunto por $X^{-1} = \{x^{-1} | x \in X\}$, onde x^{-1} é meramente um símbolo (mais tarde esses elementos vão ser os inversos dos elementos de X), e consideramos a união $X^\pm := X \cup X^{-1}$.

Tomando $\widehat{W}_n = (X^\pm)^n$ o conjunto de palavras de comprimento $n \geq 0$ em X^\pm , que são apenas n -tuplas de elementos de X^\pm . Disso,

- \widehat{W}_0 consiste somente de $()$, a palavra vazia, usualmente escrevemos 1
- \widehat{W}_1 consiste somente de $(x), (x^{-1})$ onde $x \in X$, e assim assemelha com X^\pm
- \widehat{W}_2 consiste de pares $(x, y), x, y \in X^\pm$ e assim por diante.

Agora, descartamos todas as n -tuplas $(x_1, x_2, \dots, x_n), n \geq 2$, tais que existe $1 \leq i < n$ com $x_{i+1} = x_i^{-1}$. As palavras remanescentes, ou seja, as palavras sem essa propriedade, são chamadas reduzidas: seja W_n o conjunto de palavras reduzidas de comprimento n .

Por fim, definimos $\mathcal{F}(X) = \bigcup_{n \geq 0} W_n$

Passo 2: Consideramos agora a seguinte operação

Dado,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_l) \in W_l \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in W_m \quad (1.1)$$

expresse

$$xy = (x_1, \dots, x_{l-r}, y_{r+1}, \dots, y_m) \quad (1.2)$$

onde r é o maior valor de $k \geq 0$ para qual nenhum dos $(x_i, y_1), (x_{i-1}, y_2), \dots, (x_{l-k}, y_k)$ é reduzida. Esta condição garante que $xy \in W_{l+m-2r}$. Pode-se ver que $r \leq \min(l, m)$ e a igualdade pode acontecer.

Como $\mathcal{F}(X)$ é fechado para essa operação, resta verificar os outros axiomas de grupo. O elemento 1 é a identidade, e

$$(x_1, \dots, x_l)^{-1} = (x_l^{-1}, \dots, x_1^{-1})$$

interprete $(x^{-1})^{-1} = x$ quando $x \in X$. Para a associatividade, sejam x, y, xy como feito em 1.1 e 1.2, e sejam

$$z = (z_1, \dots, z_n) \in W_n, \quad yz = (y_1, \dots, y_{m-s}, z_{s+1}, \dots, z_n) \in W_{m+n-2s}$$

Então, temos que mostrar

$$(xy)z = x(yz) \quad (1.3)$$

Se qualquer um dos x, y ou z for 1, a igualdade já é satisfeita, então podemos assumir que $l, m, n \geq 1$. Há três casos a considerar

Caso 1: $r + s < m$. Aqui, $m - s > 0$ uma vez que $r \geq 0$, disso, ambos os lados de 1.3 são iguais a

$$(x_1, \dots, x_{l-r}y_{r+1}, \dots, y_{m-s}, z_{s+1}, \dots, z_n) \in W_{l+m+n-2r-2s}$$

Caso 2: $r + s = m$. Agora, $m - s - r = 0$ então, ambos os lados de 1.3 são iguais ao produto

$$(x_1, \dots, x_{l-r})(z_{s+1}, \dots, z_n)$$

Caso 3: $r + s > m$. Aqui considerando

$$\beta = (y_1, \dots, y_{m-s}), \quad \gamma = (y_{m-s+1}, \dots, y_r), \quad \delta = (y_{r+1}, \dots, y_m)$$

então, γ tem comprimento ≥ 1 por hipótese, e notemos que:

$$y = \beta\gamma\delta, \text{ o que não é ambíguo pelo Caso 1, assim como}$$

$$x = \alpha\gamma^{-1}\beta^{-1}, \text{ onde } \alpha = (x_1, \dots, x_{l-r}) \text{ e}$$

$$z = \delta^{-1}\gamma^{-1}\varepsilon, \text{ onde } \varepsilon = (z_{s+1}, \dots, z_n)$$

Então,

$$(xy)z = (\alpha\delta)(\delta^{-1}\gamma^{-1}\varepsilon) = \alpha(\gamma^{-1}\varepsilon),$$

e

$$x(yz) = (\alpha\gamma^{-1}\beta^{-1})(\beta\varepsilon) = (\alpha\gamma^{-1})\varepsilon$$

Uma vez que α e γ^{-1} são adjacentes na palavra reduzida x , não há cancelamento na formação dos seus produtos, e similarmente com γ^{-1} e ε (em z), de onde $\alpha(\gamma^{-1}\varepsilon) = (\alpha\gamma^{-1})\varepsilon$ pelo Caso 1. Portanto, concluímos que 1.3 é válido para todo caso.

Passo 3: Agora, vamos usar a bijeção

$$\widehat{W}_1 = W_1 \longrightarrow X^\pm$$

$$(x) \longmapsto x$$

para simplificar a notação removendo parênteses e vírgulas. Então, x^{-1} naturalmente é identificado com o elemento inverso de x , e tendo em vista as regras como $x^{-1}xy = y$ e $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, as definições acima de produto e inversa estão de acordo com as convenções de notação padrão. Palavras reduzidas são aquelas para qual nenhum cancelamento no sentido usual é possível. Mantemos a notação de comprimento como no Passo 1, e escrevemos $l(w) = n$ se $w \in W_n$. Notemos que $X \subseteq \mathcal{F}(X)$, e que $\langle X \rangle$ contém X^{-1} (por inversão) e então todo W_n (por

ser fechado), conseqüentemente gera $\mathcal{F}(X)$.

Passo 4: Por fim, devemos mostrar que $\mathcal{F}(X)$ é livre sobre X . Para um dado G , e uma dada $\theta : X \rightarrow G$, definimos

$$\theta'(1) = 1, \quad \theta'(x) = \theta(x) \text{ e } \theta'(x^{-1}) = (\theta(x))^{-1} \text{ para } x \in X$$

e

$$\theta'(x_1 \dots x_l) = \theta'(x_1) \dots \theta'(x_l), \text{ para } x_1 \dots x_l \in W_l$$

É claro que θ' estende θ e que pode haver no máximo um homomorfismo com essas propriedades, pois X gera $\mathcal{F}(X)$. Falta provar que $\theta'(xy) = \theta'(x)\theta'(y)$, com x, y, xy como em 1.1 e 1.2, acima. Pela definição de xy , (x_{l-i+1}, y_i) é reduzido para $1 \leq i \leq r$, então $y_i = (x_{l-i+1})^{-1}$, e $\theta'(y_i) = \theta'(x_{l-i+1})^{-1}$ para todo i , pela definição de θ' em palavras de comprimento 1. Segue da definição de θ' em palavras longas que

$$\begin{aligned} \theta'(x)^{-1} \theta'(xy) \theta'(y)^{-1} &= \theta'(x_l)^{-1} \dots \theta'(x_{l-i+1})^{-1} \theta'(y_r)^{-1} \dots \theta'(y_1)^{-1} \\ &= \theta'(y_1) \dots \theta'(y_r) \theta'(y_r)^{-1} \dots \theta'(y_1)^{-1} = 1 \end{aligned}$$

como queríamos.

Teorema 1. *O grupo $\mathcal{F}(X)$ de palavras reduzidas em X^\pm é livre sobre X .*

Prova: Segue do Passo 4 da Existência de $\mathcal{F}(X)$. \square

Esse resultado tem duas conseqüências importantes que fornecem uma caracterização interna de grupos livres e um ponto de partida para a teoria de apresentação, respectivamente.

Proposição 3. *Um grupo \mathcal{F} é livre sobre um subconjunto X se, e somente se,*

(i) X gera \mathcal{F} ; e

(ii) Nenhuma palavra reduzida em X^\pm de comprimento positivo é igual a 1.

Prova: Seja $\theta' : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}$ o homomorfismo que estende a inclusão $\theta : X \rightarrow \mathcal{F}$. Por um lado, suponhamos que (i) e (ii) valem, então (i) e (ii) são respectivamente equivalentes a afirmação que θ' é sobrejetivo e injetivo. Por outro lado, se \mathcal{F} é livre sobre X , a extensão $\phi' : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}(X)$ da inclusão $\phi : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ é claramente uma inversa de θ' , pelo Lema 1. Como ao passo que θ' tem inversa, deve ser um isomorfismo. Portanto,

$$\mathcal{F} \text{ é livre sobre } X \Leftrightarrow \theta' \text{ é uma bijeção} \Leftrightarrow (i) \text{ e } (ii) \text{ são satisfeitos. } \square$$

Proposição 4. *Todo grupo é isomorfo a um grupo quociente de algum grupo livre.*

Prova: Dado um grupo G , seja X um conjunto de geradores de G (o qual sempre existe, basta tomar $X = G$ por exemplo). Então, seja $\theta' : \mathcal{F}(X) \rightarrow G$ a extensão da inclusão $\theta : X \rightarrow G$. Agora, $Im\theta' = G$, uma vez que $\langle X \rangle = G$, de modo que se $K = Ker\theta'$, então

$$G = Im\theta' \cong \mathcal{F}(X)/K. \quad \square$$

O próximo exemplo é um exemplo de grupo livre dado por (ROBINSON, 2012).

Exemplo 1. Considerando as funções complexas α e β do plano complexo dada por

$$\alpha(z) = z + 2 \quad e \quad \beta(z) = \begin{cases} \frac{z}{2z+1}; & z \neq -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}; & z = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Estas funções são claramente bijeções, então elas geram um grupo \mathcal{F} de permutações do plano complexo: Afirmamos que \mathcal{F} é livre sobre $\{\alpha, \beta\}$. De fato, para ver isso, observamos que uma potência diferente de zero de α leva o interior do círculo unitário $|z| = 1$ para o exterior e uma potência diferente de zero de β leva o exterior do círculo unitário para o interior com o 0 removido (a segunda afirmação é mais fácil ver a partir da equação $\beta(\frac{1}{z}) = 1/(z+2)$). A partir disso, é fácil ver que nenhuma palavra reduzida não trivial em $\{\alpha, \beta\}$ pode ser igual a 1. Logo, segue da Proposição 3 que \mathcal{F} é livre sobre $\{\alpha, \beta\}$.

1.2 Apresentações de Grupos

1.2.1 Conceitos Básicos

Seguindo (JOHNSON et al., 1997) vamos definir aqui uma ordem em \mathcal{F} , onde $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)$ é grupo livre sobre X .

Definição 2. Seja $<$ uma ordem que torna X^\pm um conjunto bem-ordenado, e sejam

$$x = x_1 \dots x_l \quad y = y_1 \dots y_m \quad x \neq y$$

palavras reduzidas em \mathcal{F} . Então, escrevamos $x < y$ se $l < m$, ou $l = m$ e $x_r < y_r$ em X^\pm , onde $r = \min\{i \mid x_i \neq y_i\}$.

Exemplo 2. Considerando o grupo livre de posto 2 com $X = \{x, y\}$, e seja X^\pm ordenado por: $x < y < x^{-1} < y^{-1}$. Então, os primeiros 24 elementos de \mathcal{F} são:

$$1 < x < y < x^{-1} < y^{-1} < x^2 < xy < xy^{-1} < yx < y^2 < yx^{-1} < x^{-1}y < x^{-2} < x^{-1}y^{-1} < \\ y^{-1}x < y^{-1}x^{-1} < y^{-2} < x^3 < x^3 < x^2y < x^2y^{-1} < xyx < xy^2 < xyx^{-1} < xy^{-1}x$$

Agora, suponhamos que:

- X é um conjunto;
- $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)$ é um grupo livre sobre X ;
- R é um subconjunto de \mathcal{F} ;
- $N = \bar{R}$ é o fecho normal de R em \mathcal{F} ; e
- G é um grupo quociente \mathcal{F}/N .

Definição 3. Com as notações acima, escrevemos $G = \langle X \mid R \rangle$ e chamamos isso uma apresentação livre, ou simplesmente uma apresentação de G . Os elementos de X são chamados geradores e os de R relatores definidores.

Definição 4. Um grupo G é chamado finitamente apresentado se $G = \langle X \mid R \rangle$ com X e R finitos.

Observação 2.

1. Isso torna preciso a notação que o $x \in X$ gera G , que cada r em R é igual a 1 em G , e que G é o "maior" grupo com essa propriedade. Notemos o abuso de notação em referir x e r como elementos de G . Isso é feito por conveniência. É sempre claro a partir do contexto para qual grupo (\mathcal{F} ou G) uma dada palavra em X^\pm pertence.
2. Algumas vezes é conveniente substituir R em $\langle X \mid R \rangle$ por um conjunto de equações $R = 1$, ou seja, $\{r = 1 \mid r \in R\}$, chamado relatores definidores de G . Uma relação definidora pode até tomar a forma " $u = v$ ", onde $u, v \in \mathcal{F}(X)$, correspondendo ao relator definidor uv^{-1} .

Exemplo 3. $\langle X \mid \ \rangle$ é uma apresentação de um grupo livre de posto $|X|$.

Exemplo 4. Vamos mostrar que $\langle x, y \mid x^3, y^2, x^{-1}y^{-1}xy \rangle$ é uma apresentação do grupo cíclico de ordem 6.

Tomando $X = \{x, y\}$ e seja \mathcal{F} ordenado como no Exemplo 2 acima. Considerando H o fecho normal \bar{S} de $S = \{x^3, y^2, x^{-1}y^{-1}xy\}$ (o fecho normal \bar{X} de qualquer subconjunto X de um grupo G é o menor subgrupo normal $\bar{X} = \cap\{N \triangleleft G \mid N \supseteq X\}$ de G contendo X). Afirmamos que $|\mathcal{F} : H| = 6$. Primeiro, consideramos o grupo cíclico $\mathbb{Z}_6 = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ de ordem 6, e a função

$$\begin{aligned} \theta : \{x, y\} &\longrightarrow \mathbb{Z}_6 = \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} \\ x &\longmapsto a^2 \\ y &\longmapsto a^3 \end{aligned}$$

Se θ' é a extensão de θ para \mathcal{F} (ver Definição 1), então

$$\begin{aligned}\theta'(yx^{-1}) &= \theta'(y)\theta'(x^{-1}) = \theta(y)\theta(x)^{-1} = a^3a^{-2} = a \\ \theta'(x^3) &= \theta'(x)\theta'(x)\theta'(x) = \theta(x)\theta(x)\theta(x) = a^2a^2a^2 = a^6 = 1 \\ \theta'(y^2) &= \theta'(y)\theta'(y) = \theta(y)\theta(y) = a^3a^3 = a^6 = 1 \\ \theta'(x^{-1}y^{-1}xy) &= \theta'(x^{-1})\theta'(y^{-1})\theta'(x)\theta'(y) = \theta(x)^{-1}\theta(y)^{-1}\theta(x)\theta(y) = a^{-2}a^{-3}a^2a^3 = 1\end{aligned}$$

A primeira das equações mostra que $a \in \text{Im}\theta'$, conseqüentemente θ' é sobrejetiva, e as outras três mostram que $S \subseteq \text{Ker}\theta'$, assim $H = \bar{S} \leq \text{Ker}\theta'$, uma vez que $\text{Ker}\theta' \triangleleft \mathcal{F}$. Combinando esses fatos e usando o Teorema do Isomorfismo, temos

$$|\mathcal{F} : H| = |\mathcal{F} : \text{Ker}\theta'| |\text{Ker}\theta' : H| \geq |\mathcal{F} : \text{Ker}\theta'| = |\text{Im}\theta'| = 6$$

Por outro lado, os elementos $x' = xH, y' = yH$ geram \mathcal{F}/H , comutam, e tem ordens dividindo 3 e 2 respectivamente. Por isso, qualquer elemento de \mathcal{F}/H é igual a uma das seis palavras

$$1, x', x'^2, y', x'y', x'^2y',$$

isto é, qualquer elemento de \mathcal{F} está em uma das seis classes laterais

$$H, xH, x^2H, yH, xyH, x^2yH$$

Mas, uma vez que $|\mathcal{F} : H| \geq 6$ e essas seis classes laterais são distintas, duas a duas concluímos que $|\mathcal{F} : H| = 6$. Com isso, concluímos que $\mathcal{F}/H \cong \mathbb{Z}_6$. Portanto, essa é uma apresentação do grupo cíclico \mathbb{Z}_6 .

Exemplo 5. A apresentação $\langle x, y \mid x^2, y^3, (xy)^2 \rangle$ é uma apresentação de S_3 ; grupo das permutações de três elementos.

Tomando novamente $X = \{x, y\}$ e seja \mathcal{F} ordenado como no Exemplo 2 acima. Seja $S = \{x^2, y^3, (xy)^2\}$ um subconjunto de \mathcal{F} e considerando $H = \bar{S}$, onde \bar{S} é o fecho normal de S em \mathcal{F} e a função

$$\begin{aligned}\theta : \{x, y\} &\longrightarrow S_3 \\ x &\longmapsto (12) \\ y &\longmapsto (123).\end{aligned}$$

Se θ' é a extensão de θ para \mathcal{F} (ver Definição 1), então

$$\begin{aligned}\theta'(x) &= \theta(x) = (12) \\ \theta'(y) &= \theta(y) = (123) \\ \theta'(x^2) &= \theta'(x)\theta'(x) = (12)(12) = 1 \\ \theta'(y^3) &= \theta'(y)\theta'(y)\theta'(y) = (123)(123)(123) = 1 \\ \theta'((yx)^2) &= \theta'(y)\theta'(x)\theta'(y)\theta'(x) = (12)(123)(12)(123) = 1\end{aligned}$$

Notemos que $(12), (123) \in Im\theta'$, logo θ' é sobrejetora e temos que $S \subseteq Ker\theta'$. Disso, $H = \overline{S} \leq Ker\theta'$ uma vez que $Ker\theta' \triangleleft \mathcal{F}$. Usando esses fatos junto com o Teorema do Isomorfismo

$$|\mathcal{F} : H| = |\mathcal{F} : Ker\theta'| |Ker\theta' : H| \geq |\mathcal{F} : Ker\theta'| = |Im\theta'| = 6$$

temos que $x' = xH, y' = yH$ gera \mathcal{F}/H e também as ordens deles dividem 2 e 3 respectivamente. Os candidatos a elementos de \mathcal{F}/H são

$$1, x', y', y'^2, x'y', y'x', x'y'^2, y'^2x'$$

pois $x'y' = y'^2x'$ e $y'x' = x'y'^2$

Portanto, $|\mathcal{F} : H| = 6$, e assim $Ker\theta' = H$, conseqüentemente $\mathcal{F}/H \cong S_3$. Isso mostra que $\langle x, y \mid x^2, y^3, (xy)^2 \rangle$ é uma apresentação de S_3 .

Proposição 5. *Todo grupo tem uma apresentação, e todo grupo finito é finitamente apresentado.*

Prova: Sejam G um grupo e $X \subseteq G$ um conjunto de geradores para G ($X = G$, por exemplo), e seja $\theta' : \mathcal{F}(X) \rightarrow G$ o homomorfismo dado Proposição 4, então $G = \langle X | Ker\theta' \rangle$. Isso mostra a primeira parte. Para a segunda parte, seja G um grupo finito, então o mesmo ocorre para X . Logo, $|\mathcal{F}(X) : Ker\theta'|$ é finito e $\mathcal{F}(X)$ é finitamente gerado. Isso implica que $Ker\theta'$ é finitamente gerado. Suponhamos que $Ker\theta'$ seja gerado pelo conjunto finito B . Assim, $\langle B \rangle = Ker\theta' \triangleleft \mathcal{F}(X), \langle B \rangle = \overline{B}$, e então $G = \langle X | B \rangle$, o qual é uma apresentação finita. \square

1.2.2 Homomorfismos Induzidos

Lema 2. *Sejam \mathcal{F}, G, H grupos e $v : \mathcal{F} \rightarrow G, \alpha : \mathcal{F} \rightarrow H$ homomorfismos tais que*

(i) $Im v = G$

(ii) $Ker v \subseteq Ker\alpha$

Então, existe um homomorfismo $\alpha' : G \rightarrow H$ tal que $\alpha'v = \alpha$.

Prova: Desejamos provar a existência de $\alpha' \in Hom(G, H)$ tal que o diagrama abaixo comuta.

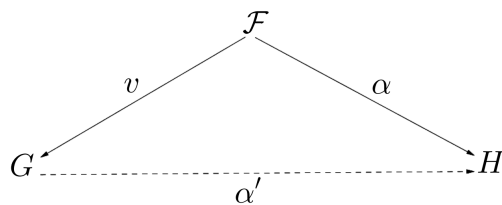


Figura 5 – Diagrama de funções

Dado $g \in G$, escolhemos $f \in \mathcal{F}$ tal que $v(f) = g$ e definimos $\alpha'(g) = \alpha(f)$. Tal f existe pelo item (i) e vejamos que α' é bem definida.

Tomando f, f' tais que

$$g = v(f') = v(f) \Leftrightarrow v(f'f^{-1}) = 1 \Leftrightarrow f'f^{-1} \in \text{Ker}(v) \Rightarrow f'f^{-1} \in \text{Ker}\alpha, \text{ por (ii)} \\ \Rightarrow \alpha(f') = \alpha(f)$$

O valor de $\alpha(f)$ é então independente da escolha de $f \in v^{-1}(g)$ e assim, α' é bem definida. Vamos mostrar que α' é homomorfismo.

Sejam $g, g' \in G$ e $f, f' \in \mathcal{F}$ tais que $v(f) = g, v(f') = g'$. Uma vez que v é um homomorfismo, $v(ff') = gg'$, e

$$\alpha'(gg') = \alpha(ff') = \alpha(f)\alpha(f') = \alpha'(g)\alpha'(g')$$

onde a primeira igualdade vem da definição de α' , e a segunda é pelo fato de α ser homomorfismo. Isso prova o resultado.

Finalmente, $f \in v^{-1}(v(f))$ para cada $f \in \mathcal{F}$, de modo que o valor de α' em $v(f)$ é justamente $\alpha(f)$. Isso mostra que $\alpha'v = \alpha$ e a prova está completa. \square

Como consequências imediatas disso, obtemos os resultados para qual respectivamente descrevem grupos quocientes e homomorfismos no contexto de apresentações;

Proposição 6. (von Dyck) Se $G = \langle X \mid R \rangle$ e $H = \langle X \mid S \rangle$, onde $R \subseteq S \subseteq \mathcal{F}(X)$, então existe um epimorfismo $\phi : G \rightarrow H$ fixando todo $x \in X$ e tal que $\text{Ker}\phi = \overline{S \setminus R}$. Por outro lado, todo grupo quociente de $G = \langle X \mid R \rangle$ tem uma apresentação $\langle X \mid S \rangle$ com $S \supseteq R$.

Prova: Considerando $v : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)/\overline{R} = G$ e $\alpha : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)/\overline{S} = H$ os mapas naturais. Notemos que $\text{Im } v = G$ e $\text{Ker } v \subseteq \text{Ker } \alpha$. Aplicando o Lema 2 temos que existe um homomorfismo $\alpha' : G \rightarrow H$. Observamos que α' fixa todo $x \in X$ (uma vez que v e α fazem isso) e α' é sobrejetora assim como $\alpha = \alpha'v$, e

$$\text{Ker}\alpha' = v(\text{Ker}\alpha) = v(\overline{S}) = \overline{S \setminus R}$$

como $v(R) = 1$ em G . Logo, basta tomar $\phi = \alpha'$.

Agora, se H é um grupo quociente de G , seja ψ a composição

$$\mathcal{F}(X) \rightarrow G \rightarrow H$$

dos homomorfismos naturais, de modo que $R \subseteq \text{Ker}\psi$ e $H = \langle X \mid \text{Ker}\psi \rangle$. \square

Proposição 7. (Teste da Substituição) Suponhamos que são dados, uma apresentação $G = \langle X \mid R \rangle$, um grupo H , e uma função $\theta : X \rightarrow H$. Então, θ estende para um homomorfismo $\theta'' : G \rightarrow H$ se, e somente se, para todo $x \in X$ e todo $r \in R$, o resultado da substituição $\theta(x)$ por x em r resulta a identidade de H .

Prova: Considerando $\mathcal{F} = \langle X \mid \quad \rangle$ e o diagrama comutativo na Figura 6:

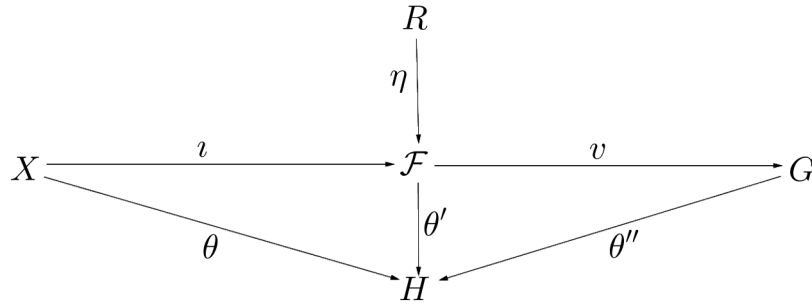


Figura 6 – Diagrama de funções

onde η e ι são inclusões e v o homomorfismo natural. Uma vez que \mathcal{F} é livre sobre X , θ estende para um único homomorfismo $\theta' : \mathcal{F} \rightarrow H$, e a condição de substituição pode ser reformulada simplesmente como: $R \subseteq \text{Ker}\theta'$.

Uma vez que $\text{Ker}\theta' \triangleleft \mathcal{F}$ e $\bar{R} = \text{Ker}v$, essa condição é equivalente a: $\text{Ker}v \leq \text{Ker}\theta'$. A existência de um θ'' induzida por θ' é agora uma consequência do Lema 2. Por outro lado, a existência de tal θ'' implica que: $R \subseteq \bar{R} = \text{Ker}v \subseteq \text{Ker}(\theta''v) = \text{Ker}\theta'$. \square

Observação 3. Notemos que quando θ'' existe, deve ser único, uma vez que X gera G . Mais ainda, θ'' é um epimorfismo se, e somente se, $\langle X \mid \text{Ker}\theta' \rangle = H$.

1.3 Problema da Conjugação

Nessa seção descrevemos brevemente o Problema da Conjugação.

Definição 5. Seja G um grupo.

- (i) Se g é um elemento de G , então um elemento da forma aga^{-1} para algum $a \in G$ é chamado conjugado de g .
- (ii) Dois elementos g e h são chamados conjugados em G se existe um elemento $a \in G$ com $aga^{-1} = h$.

Definição 6. O Problema da Conjugação para um grupo G é o problema de determinar, quando dois elementos g e h em G são conjugados ou não em G . Ou seja, é o problema de determinar, se existe ou não um elemento a em G tal que $h = aga^{-1}$.

Definição 7. Dizemos que o Problema da Conjugação para um grupo G é solúvel se existe uma condição equivalente para qual é possível dizer se dois elementos quaisquer de G são conjugados ou não em G .

Se k é um corpo, então o grupo de todas as matrizes não-singulares $n \times n$ com entradas em k é denotada por $GL(n, k)$. Lembremos que duas matrizes A e B em $GL(n, k)$ são similares se existe uma matriz M em $GL(n, k)$ tal que $A = MBM^{-1}$.

Exemplo 6. *Sejam A e B dois elementos de $GL(n, k)$. Então, A e B são conjugadas se, e somente se, elas são similares.*

Exemplo 7. *Sejam A e B dois elementos de $GL(n, \mathbb{C})$. Então, A e B são conjugadas em $GL(n, \mathbb{C})$ se, e somente se, elas tem a mesma forma de Jordan.*

Prova: Por um lado, se A e B são conjugadas em $GL(n, \mathbb{C})$ existe uma matriz Q tal que

$$A = QBQ^{-1}$$

A forma de Jordan de B é

$$B = PJ_B P^{-1}$$

em que P é uma matriz de $GL(n, \mathbb{C})$. Disso,

$$A = QPJ_B P^{-1}Q^{-1} = (QP)J_B(QP)^{-1}.$$

O outro lado é direto. \square

Aqui finalizamos o Capítulo 1.

2 Grupo F de Thompson

Neste capítulo definimos o Grupo F de Thompson, apresentamos maneiras de representar os elementos de F , provamos que F é gerado por dois elementos e mostramos duas apresentações para F onde uma é finita e a outra infinita.

2.1 Definição do Grupo F de Thompson

Dizemos que um homeomorfismo $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é linear por uma quantidade finita de partes se existem $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$ tais que f é linear em cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, para todo $i = 0, \dots, n - 1$. Um homeomorfismo linear por uma quantidade finita de partes $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ possui apenas uma quantidade finita de pontos $x_i \in [0, 1]$ em que as derivadas não existem, chamamos esses pontos de nós. O conjunto $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \left\{ \frac{a}{2^n} \mid a, n \in \mathbb{Z} \right\}$ é o conjunto dos números diádicos de \mathbb{Q} , um elemento de $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ chamamos de diádico.

Definição 8. O Grupo F de Thompson é o conjunto de todos os homeomorfismos lineares por partes $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ (munido da composição de funções) tais que:

- (i) A quantidade de nós de f é finita e pertencem a $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$;
- (ii) Se f é diferenciável em x , então $f'(x) = 2^n$ para algum $n \in \mathbb{Z}$, isto é, $f'(x)$ é uma potência inteira de 2.

Observação 4. Se F é o Grupo de Thompson e $f \in F$, sejam $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$ os pontos nos quais são os nós de f . Pelo fato de f ser homeomorfismo de $[0, 1]$ para $[0, 1]$ segue que $f(0) = 0$. Isso implica que $f(x) = a_1x$ para $x_0 \leq x \leq x_1$. Onde por definição a_1 é uma potência inteira de 2, pois a_1 é a derivada de f em (x_0, x_1) . Como a_1 é uma potência inteira de 2 e x_1 é um racional diádico, segue que a_1x_1 é um racional diádico.

Percebamos que $f(x) = a_2x + b_2$, para $x_1 \leq x \leq x_2$, em que a_2 é uma potência inteira de 2. Assim, $a_2x_1 + b_2 = a_1x_1$. Então, $b_2 = a_1x_1 - a_2x_1$ e portanto, b_2 é um racional diádico uma vez que b_2 é a diferença de racionais diádicos. E $f(x) = a_3x + b_3$, para $x_2 \leq x \leq x_3$, com a_3 uma potência inteira de 2. Assim, $a_3x_2 + b_3 = a_2x_2 + b_2$. Então, $b_3 = a_2x_2 + b_2 - a_3x_2$, e portanto, b_3 é um racional diádico uma vez que b_3 é uma operação com números racionais diádicos. E segue indutivamente que $f(x) = a_ix + b_i$ para $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, $i = 1, \dots, n$ onde a_i é uma potência inteira de 2 e b_i é um número racional diádico. Então, f mapeia o conjunto de números racionais diádicos bijetivamente nele próprio.

Exemplo 8. Sejam $A, B : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dadas por

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}; & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{4}; & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 2x - 1; & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad B(x) = \begin{cases} x; & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{4}; & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ x - \frac{1}{8}; & \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{7}{8} \\ 2x - 1; & \frac{7}{8} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

As funções A e B são exemplos de elementos de F . Seus gráficos são dados na Figura 7.

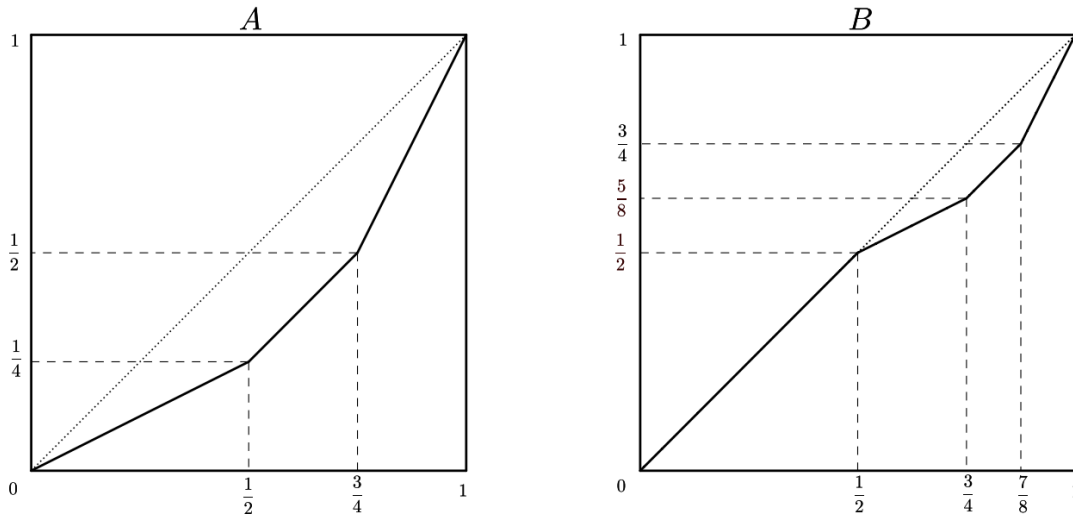


Figura 7 – Gráficos de A e B

Mais a frente, é provado que A e B geram F .

Baseado em (CANNON; FLOYD; PARRY, 1996). Uma representação útil para um elemento $f \in F$ é descrita a seguir: Construimos um retângulo para o qual o topo é visto como o domínio de f e a base é vista como a imagem de f . Para todo ponto x no topo no qual a derivada de f não existe, construimos um segmento de reta de x para $f(x)$ que está na base. Chamamos tal representação de *diagrama retangular* de f .

Exemplo 9. Os homeomorfismos A e B vistos acima, são representados como na Figura 8



Figura 8 – Diagramas retangulares de A e B

Ao justapor os diagramas retangulares de um par de funções, é fácil calcular o diagrama retangular de sua composição.

Exemplo 10. O diagrama retangular de AB^{-1} é visto na Figura 9 e os diagramas retangulares de $A^{-1}BA$ e $A^{-2}BA^2$ é visto na Figura 10.

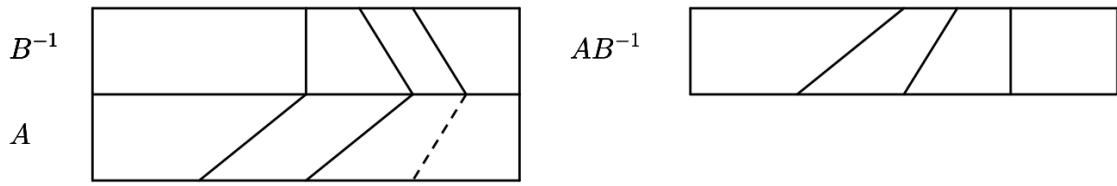


Figura 9 – Diagrama retangular de AB^{-1}

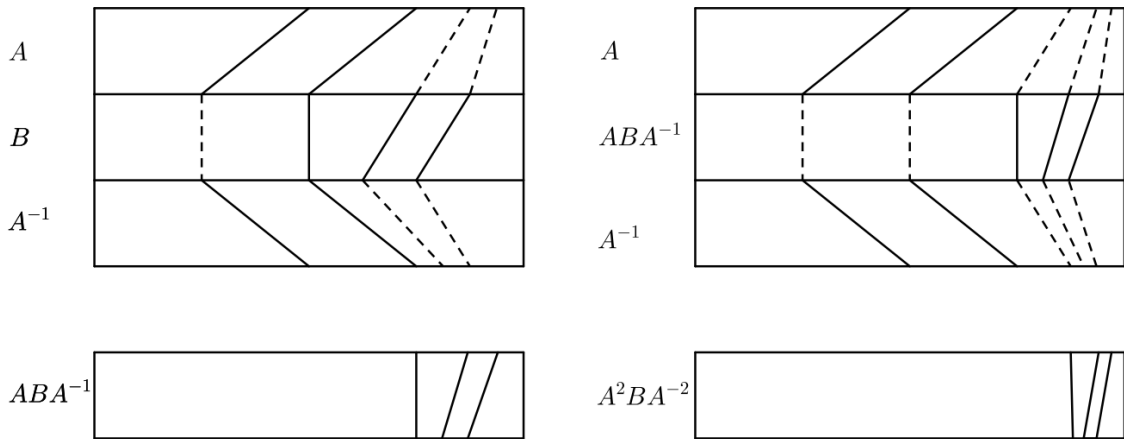


Figura 10 – Diagramas retangulares de $A^{-1}BA$ e $A^{-2}BA^2$

Definimos os elementos X_0, X_1, X_2, \dots de F de modo que $X_0 = A$ e $X_n = A^{-(n-1)}BA^{n-1}$ para $n \geq 1$. Seguindo o padrão dos diagramas retangulares de B, ABA^{-1} e A^2BA^{-2} das Figuras 8 e 10, é possível construir os diagramas retangulares dos homeomorfismos contidos em F da forma X_n como é mostrado na Figura 11.

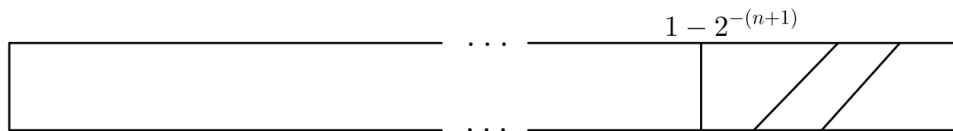


Figura 11 – Diagrama retangular de X_n

2.2 Diagramas de árvores

Nesta seção, desenvolvemos a noção de diagramas de árvores. Diagramas de árvores são úteis para descrever funções de F .

2.2.1 Definição de diagrama de árvore

Primeiro vamos definir o que é uma árvore. Para isso recorreremos a definição de grafo.

Definição 9. Um grafo S é um par ordenado (V, E) onde V é o conjunto de elementos que chamamos de vértices, e E é um subconjunto da forma $\{\{v, u\} \mid v, u \in V, u \neq v\}$. Cada elemento de E é chamado de

arestas. Um grafo $H = (V_1, E_1)$ é chamado de subgrafo de um grafo $S = (V, E)$ se V_1 é um subconjunto de V e E_1 um subconjunto de E .

Definição 10. Um caminho de comprimento n em um grafo $S = (V, E)$ que liga o vértice $v \in V$ ao vértice $u \in V$ é um subconjunto $C = \{\{v = v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{2n-1}, v_{2n} = u\}\}$ tal que $|C| = n$. Se $v \in V$, um ciclo é um caminho que liga o vértice v a v . Um grafo S é conexo se cada dois vértices do grafo podem ser conectados por um caminho em S .

Definição 11. Um grafo $S = (V, E)$ é chamado uma árvore se ele é conexo e não contém qualquer ciclo com um subgrafo.

Nesse trabalho, usamos árvores que tem um vértice destacado, que chamamos de raiz. Podemos tomar qualquer árvore, selecionar qualquer um de seus vértices, e chamá-lo de raiz. Uma árvore com uma raiz determinada é chamada de árvore enraizada.

Seja S uma árvore enraizada com raiz r . Dado qualquer vértice v diferente de r temos um único caminho conectando v a r . O vértice nesse caminho após v é chamado pai de v . Os outros vizinhos de v são chamados de filhos de v . A raiz r não tem pai, mas todos os seus vizinhos são chamados de filhos. O número de arestas que entra e sai do vértice v é chamado de valência de v . Vértices com valência 0 (em caso da árvore trivial) ou 1 em S são chamados folhas de S .

Exemplo 11. Considerando a árvore S da Figura 12 abaixo

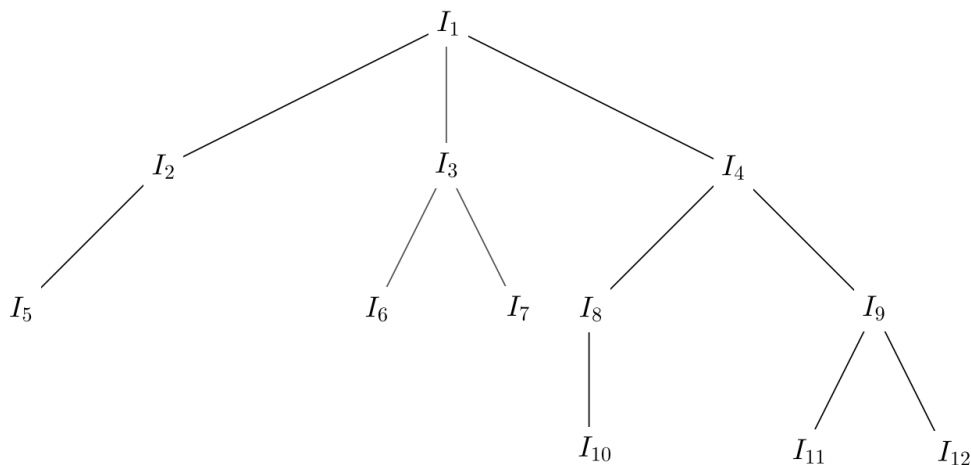


Figura 12 – Árvore S

- (i) A raiz da árvore S é o vértice I_1 ;
- (ii) O vértice I_3 é filho do vértice I_1 e pai dos vértices I_6 e I_7 ;
- (iii) As folhas da árvore S é $I_5, I_6, I_7, I_{10}, I_{11}, I_{12}$;
- (iv) A valência do vértice I_4 é 3.

Definição 12. Definimos uma árvore binária enraizada como sendo uma árvore S tal que:

- (i) O conjunto S tem uma raiz v_0 ;
- (ii) Se S consiste de mais que v_0 , então v_0 tem valência 2;
- (iii) Se v é um vértice em S com valência maior que 1, então existe exatamente duas arestas $e_{v,L}$, $e_{v,R}$ as quais contêm v e não estão contida na geodésica de v_0 para v .

Observação 5. Notemos que a árvore da Figura 12 não é binária, pois os vértices I_1 , I_2 e I_8 contraria o item (iii) da definição.

A aresta $e_{v,L}$ é chamada uma aresta esquerda de S , e a aresta $e_{v,R}$ é chamada uma aresta direita de S . Há uma ordenação linear canônica da esquerda para a direita nas folhas de S . O lado direito de S é o arco máximo de arestas direitas em S que começa na raiz de S . O lado esquerdo de S é definido analogamente.

Exemplo 12. O lado direito da árvore binária enraizada na Figura 13, abaixo, está destacado. Suas folhas são rotuladas de 1 a 6.

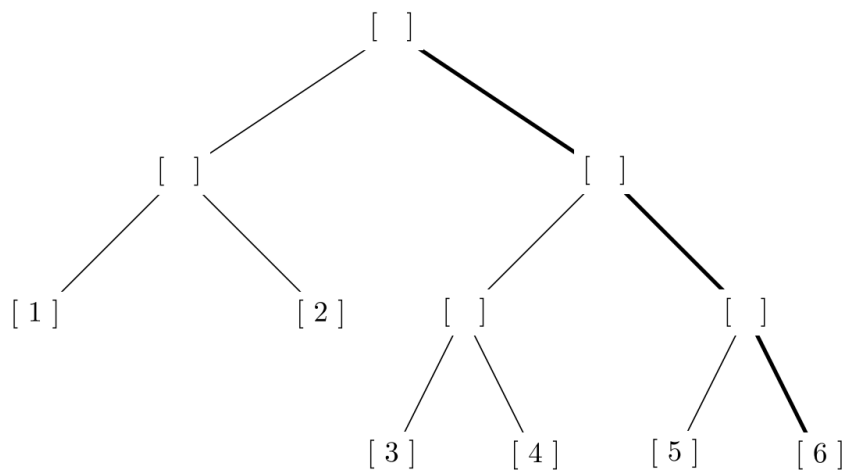


Figura 13 – Árvore binária enraizada

Definição 13. Uma subárvore binária enraizada S' de uma árvore binária enraizada S é uma árvore binária enraizada para qual é uma subárvore de S cujas arestas esquerdas são arestas esquerdas de S , e cujas arestas direitas são arestas direitas de S , mas no qual a raiz de S' não precisa ser a raiz de S .

Definição 14. Definimos um intervalo diádico padrão em $[0, 1]$ como sendo um intervalo da forma $\left[\frac{a}{2^n}, \frac{a+1}{2^n} \right]$, onde a, n são inteiros não negativos com $a \leq 2^n - 1$.

Chamamos de \mathcal{T} a árvore formada de intervalos diádicos padrões, que é definida como segue:

- (i) A raiz de \mathcal{T} é o intervalo $[0, 1]$;
- (ii) Os vértices de \mathcal{T} são os intervalos diádicos padrões em $[0, 1]$;
- (iii) Uma aresta de \mathcal{T} é um par (I, J) de intervalos diádicos padrões I e J ;
- (iv) A aresta (I, J) é uma aresta esquerda se I é a metade esquerda do intervalo J ;
- (v) A aresta (I, J) é uma aresta direita se I é a metade direita do intervalo J .

É fácil ver que \mathcal{T} é uma árvore binária enraizada. A árvore \mathcal{T} é exibida na Figura 14.

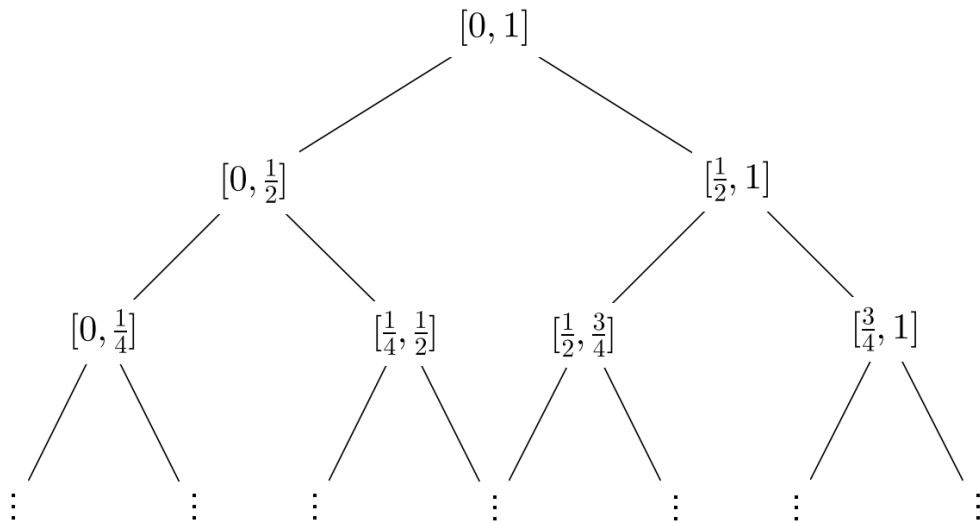


Figura 14 – Árvore \mathcal{T} de intervalos diádicos padrões

Definimos uma \mathcal{T} -árvore como uma subárvore binária enraizada finita de \mathcal{T} com raiz $[0, 1]$. Chamamos a \mathcal{T} -árvore com apenas um vértice a \mathcal{T} -árvore trivial. Para todo inteiro não negativo n , seja \mathcal{T}_n uma \mathcal{T} -árvore com $n + 1$ folhas cujo lado direito tem comprimento n . A subárvore \mathcal{T}_3 é exibida na Figura 15.

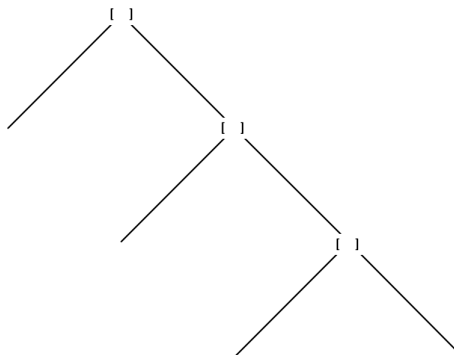


Figura 15 – \mathcal{T} -árvore \mathcal{T}_3

Definimos um acento circunflexo como sendo uma subárvore binária enraizada de \mathcal{T} com exatamente duas arestas. Todo acento circunflexo tem a forma da árvore enraizada da Figura 16

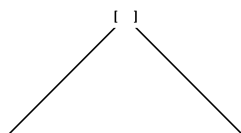


Figura 16 – Acento circunflexo

Definição 15. Uma partição $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$ de $[0, 1]$ determina intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, \dots, n$ os quais são chamados os intervalos da partição. Uma partição de $[0, 1]$ é chamada uma partição diádica padrão se, e somente se, os intervalos da partição são intervalos diádicos padrões.

Observamos que as folhas de uma \mathcal{T} -árvore são os intervalos de uma partição diádica padrão. Por outro lado, os intervalos de uma partição diádica padrão determina um número finito de vértices de \mathcal{T} , e é fácil ver que esses vértices são as folhas de uma árvore, no qual é uma \mathcal{T} -árvore. Então, existe uma bijeção canônica entre partições diádicas padrões e \mathcal{T} -árvores.

Definição 16. Formalmente, um diagrama de árvore é um par ordenado (R, S) de \mathcal{T} -árvores tal que R e S tem o mesmo número de folhas. Isso é representado como segue.

$$R \longrightarrow S$$

A árvore R é chamada árvore domínio do diagrama, e S é chamada a árvore imagem do diagrama.

Lema 3. Seja $f \in F$. Então, existe uma partição diádica padrão $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$ tal que f é linear em todo intervalo da partição e $0 = f(x_0) < f(x_1) < f(x_2) < \dots < f(x_n) = 1$ é uma partição diádica padrão.

Prova: Escolhamos uma partição P de $[0, 1]$ cujos pontos da partição são números racionais diádicos tal que f é linear em todo intervalo de P . Seja $[a, b]$ um intervalo de P . Suponhamos que a derivada de f em $[a, b]$ é 2^{-k} .

Seja m um inteiro tal que $m \geq 0$, $m + k \geq 0$, $2^m a \in \mathbb{Z}$, $2^m b \in \mathbb{Z}$, $2^{m+k} f(a) \in \mathbb{Z}$, e $2^{m+k} f(b) \in \mathbb{Z}$. Então, $a < a + \frac{1}{2^m} < a + \frac{2}{2^m} < a + \frac{3}{2^m} < \dots < b$ é uma partição de $[a, b]$ em intervalos diádicos padrões, e $f(a) < f(a) + \frac{1}{2^{m+k}} < f(a) + \frac{2}{2^{m+k}} < f(a) + \frac{3}{2^{m+k}} < \dots < f(b)$ é uma partição de $[f(a), f(b)]$ em intervalos diádicos padrões. Assim, temos o resultado. \square

Seja $f \in F$. O Lema 3 mostra que existem partições diádicas padrões P e Q tal que f é linear nos intervalos de P e mapeia eles para os intervalos de Q . O elemento f é associado ao diagrama (R, S) , onde R é a \mathcal{T} -árvore correspondente a P e S é a \mathcal{T} -árvore correspondente a Q .

Como P e Q não são únicas, existem muitos diagramas de árvores associadas a f . Dado um diagrama de árvore (R, S) para f , outro pode ser construído por adjuntar acentos circunflexos a R e S como segue. Seja I a n^{th} folha de R , para algum inteiro positivo n , e seja J a n^{th} folha de S . Sejam I_1, I_2 as folhas em ordem do acento circunflexo C , com raiz I , e sejam

J_1, J_2 as folhas em ordem do acento circunflexo D com raiz J . Sendo f linear em I e $f(I) = J$, segue que $f(I_1) = J_1$ e $f(I_2) = J_2$. Então, (R', S') é um diagrama de árvore para f , onde $R' = R \cup C$ e $S' = S \cup D$.

Na outra direção, se existe um inteiro positivo n tal que as n^{th} e $(n + 1)^{th}$ folhas de R , respectivamente S , são os vértices de um acento circunflexo C , respectivamente D , então exclua todos os C e D , exceto as raízes em R e S , isso leva a um novo diagrama para f . Se não existem tais acentos circunflexos C, D em R e S , então o diagrama de árvore (R, S) é dito ser reduzido.

Lema 4. *Seja f um elemento de F . Existe exatamente um diagrama de árvore reduzido para f .*

Prova: Suponhamos que (R, S) é um diagrama de árvore reduzido para f . É fácil ver que se I é um intervalo diádico padrão em que é ou uma folha de R ou não está em R (dizer que I é uma folha de R significa que I coincide com uma folha de R e dizer que I não está em R significa que I está contido na folha mais não é exatamente a folha), então $f(I)$ é um intervalo diádico padrão e f é linear em I . Por outro lado, se I é um intervalo diádico padrão tal que $f(I)$ é um intervalo diádico padrão e f é linear em I , então I é ou uma folha de R ou não está em R , pois (R, S) é reduzido.

Então, R é a única \mathcal{T} -árvore tal que um intervalo diádico padrão I é ou uma folha de R ou não está em R se, e somente se, $f(I)$ é um intervalo diádico padrão e f é linear em I . Isso da a unicidade do diagrama de árvore reduzido. \square

Observação 6. *Além do mais, se (R, S) é um diagrama de árvore, então é claro que existe $f \in F$ tal que f é linear em todas as folhas de R e f mapeia as folhas de R para as folhas de S .*

Exemplo 13. *Seja (R, S) o diagrama dado na Figura 17, vamos calcular a função f associada a esse diagrama.*

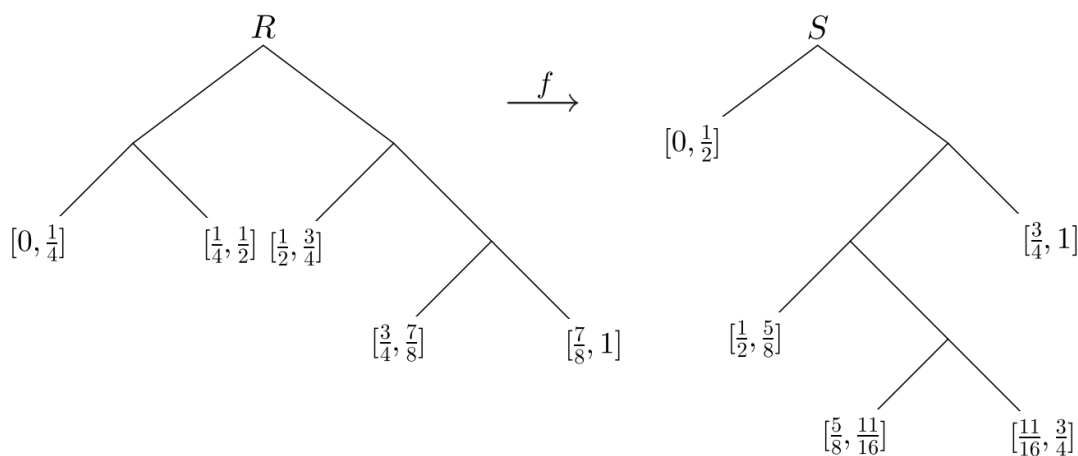


Figura 17 – Diagrama de árvore (R, S)

Para o primeiro intervalo, tomemos a função $f_1(x)$ que leva o intervalo $[0, \frac{1}{4}]$ para $[0, \frac{1}{2}]$, assim, $f_1(x) = 2x$. No segundo intervalo, tomemos a função $f_2(x)$ que leva o intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$

para $[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]$, disso, $f_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$. Para os outros intervalos, sejam f_3, f_4, f_5 as funções que levam os intervalos $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ para $[\frac{5}{8}, \frac{11}{16}]$, $[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}]$ para $[\frac{5}{8}, \frac{11}{16}]$, $[\frac{7}{8}, 1]$ para $[\frac{3}{4}, 1]$ respectivamente, assim $f_3(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$, $f_4(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{16}$, $f_5(x) = 2x - 1$.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x); & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ f_2(x); & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f_3(x); & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ f_4(x); & \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{7}{8} \\ f_5(x); & \frac{7}{8} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

O Lema 4 e a Observação 6 induzem a pensarmos na existência de uma bijeção canônica entre F e o conjunto dos diagramas de árvores reduzidas. Mais a frente concluímos que de fato isso é verdade.

Exemplo 14. A Figura 18 mostra o diagrama de árvore reduzido de A e a Figura 19 o de B .

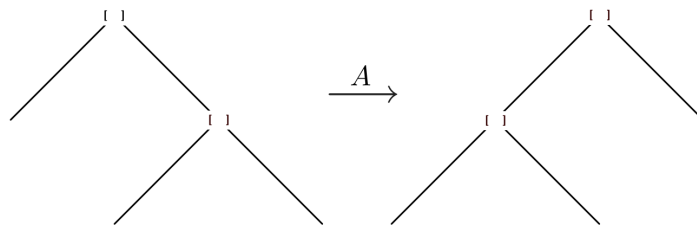


Figura 18 – Diagrama de árvore reduzido de A

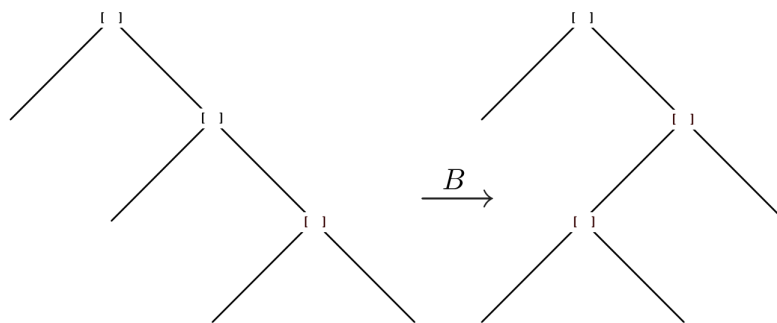


Figura 19 – Diagrama de árvore reduzido de B

Com base na Figura 11, podemos deduzir como os mapas $X_n = A^{-(n-1)}BA^{n-1}$, $n \geq 1$ agem e observar que seu diagrama de árvore reduzido é o diagrama da Figura 20.

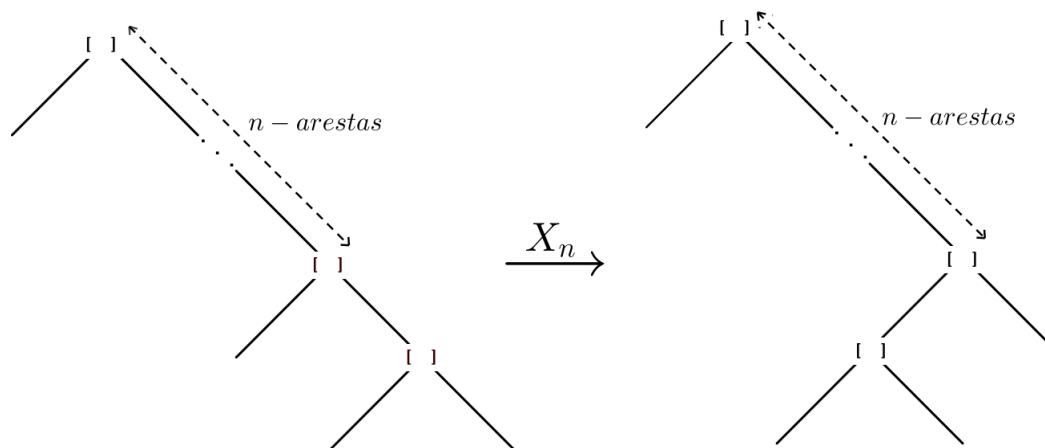


Figura 20 – Diagrama de árvore reduzido de X_n

Lema 5. Se $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$ e $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$ são partições de $[0, 1]$ no qual consistem de números racionais diádicos, então existe $f \in F$ tal que $f(x_i) = y_i$ para $i = 0, \dots, n$. Além disso, se $x_{i-1} = y_{i-1}$ e $x_i = y_i$ para algum i com $1 \leq i \leq n$, então f pode ser considerado trivial no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Prova: Seja m um inteiro positivo tal que $2^m x_i \in \mathbb{Z}$ e $2^m y_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 0, \dots, n$. Seja $R = S$ a \mathcal{T} -árvore cujas folhas consistem dos intervalos diádicos padrões de comprimento 2^{-m} . Seja I a folha de R cujo lado direito tem ponto final x_1 , e seja J a folha de S cujo lado direito tem ponto final y_1 .

Por adicionar acentos circunflexos a R com raízes não do lado direito de I ou adicionar acentos circunflexos a S com raízes não do lado direito de J , podemos assumir que existem tantas folhas em R à esquerda de I quanto em S à esquerda de J . Continuando desta forma se necessário para aumentar R e S , para que a função f com diagrama de árvore (R, S) leve x_i para y_i para $i = 0, \dots, n$. A segunda parte é direta. \square

2.2.2 Multiplicação de diagramas de árvores

Da perspectiva dos diagramas de árvores, a multiplicação de dois elementos de F procede da seguinte maneira. Para multiplicar dois diagramas de árvores (R_1, S_1) e (R_2, S_2) ,

$$(R_1, S_1)(R_2, S_2)$$

(relembramos que a multiplicação é composição de funções) comparamos S_1 e R_2 . Se eles são idênticos, então temos imediatamente que a composição é (R_1, S_2) . Mas, nem sempre isso vai acontecer, nesse caso, criamos representantes não reduzidos dos dois diagramas de árvores de modo que as duas árvores do meio coincidam. Isto é, encontramos um representante equivalente $(R'_1, S'_1) \sim (R_1, S_1)$ e $(R'_2, S'_2) \sim (R_2, S_2)$, onde as árvores S'_1 e R'_2 são idênticas.

Podemos fazer isso expandindo sucessivamente os vértices das folhas, isto é, adicionando acentos circunflexos e criando novos vértices folhas. Especificamente, expandimos os

vértices folhas de S_1 que não são vértices folhas em R_2 , e similarmente expandimos vértices folhas de R_2 que não são vértices folhas em S_1 , essa expansão dos vértices folhas apropriados em R_2 e S_1 , respectivamente, é feito de modo que não altera os elementos (os comentários feitos antes do Lema 4 explica isso.). Se pensarmos nas árvores S_1 e R_2 como subárvores da árvore binária de raiz infinita \mathcal{T} , então temos $S'_1 = S_1 \cup R_2 = R'_2$. Feito isso temos que

$$(R'_1, S'_1)(R'_2, S'_2) = (R'_1, S'_2)$$

Exemplo 15. Vamos fazer a multiplicação do par de diagramas de árvores da Figura 21, notemos que S_1 e R_2 não são idênticos. Na Figura 22 expandimos S_1 e R_2 até S'_1 e R'_2 fiquem idênticos.

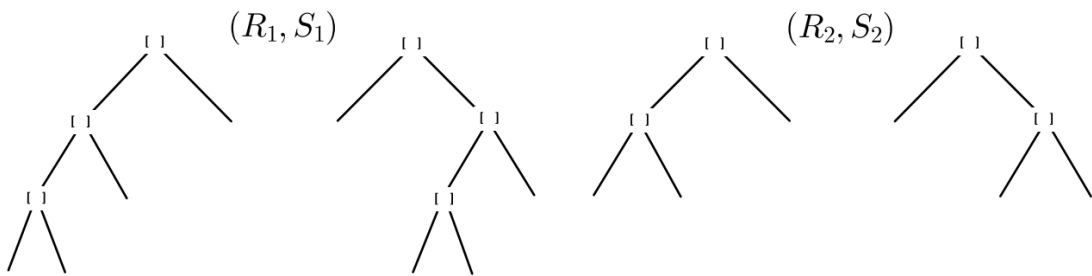


Figura 21 – Multiplicando (R_1, S_1) por (R_2, S_2)

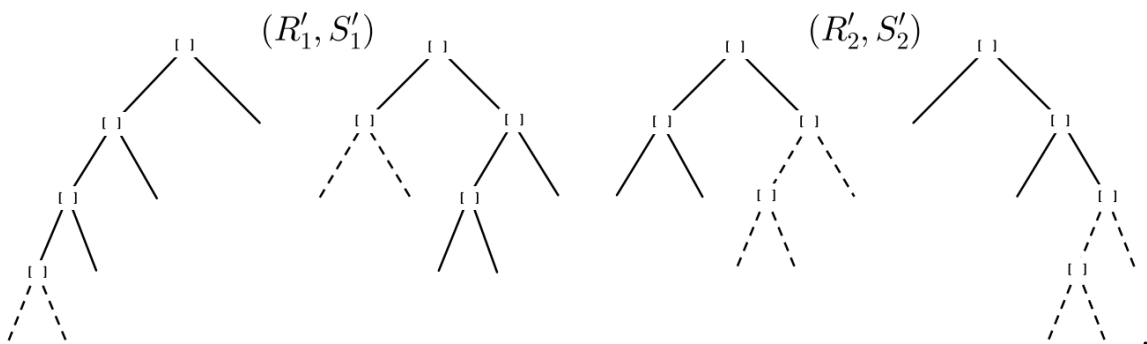


Figura 22 – Expansão dos diagramas de árvores para multiplicação

Portanto, o resultado é (R'_1, S'_2) da Figura 23.

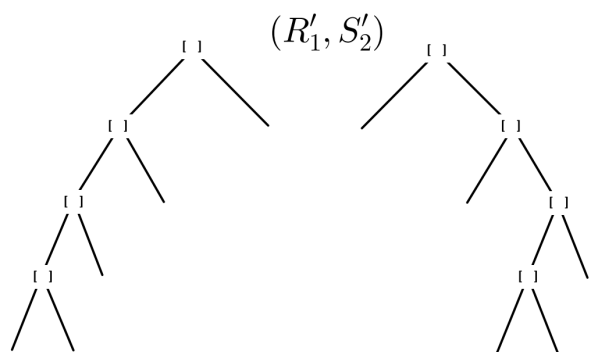


Figura 23 – Diagrama de árvore (R'_1, S'_2)

Do Exemplo 15 é fácil ver que se (R_1, S) é um diagrama de árvore para uma função $f \in F$ e (S, S_1) é um diagrama de árvore para uma função $g \in F$, então (R_1, S_1) é um diagrama de árvore para gf . Observamos que ao fazer uma composição de funções usando diagramas de árvores colocamos os diagramas de árvores das funções na ordem contrária do que aparece na composição.

O próximo exemplo, é um exemplo dado em (CLAY; MARGALIT, 2017). Nele utilizando diagramas de árvores mostramos que $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ pode ser mergulhado em F .

Exemplo 16. Considerando os elementos de F dados pelos diagramas de árvores na Figura 24.

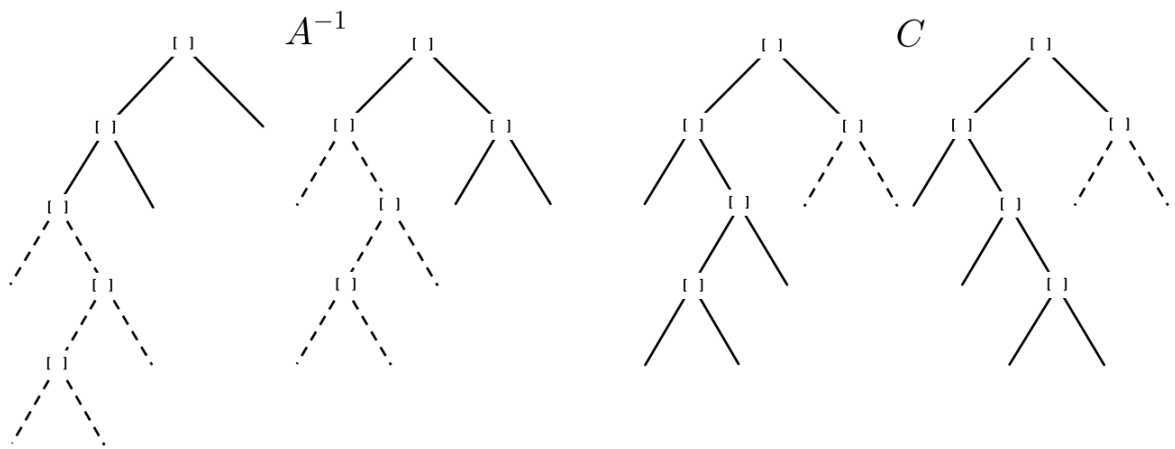


Figura 24 – Multiplicação dos diagramas de árvores das funções A^{-1} e C

Multiplicando esses diagramas de árvores encontramos o diagrama de árvore da função CA^{-1} do lado esquerdo da Figura 25. A multiplicação dos diagramas de árvores de CA^{-1} e A representado na Figura 25 resulta no diagrama de árvore de ACA^{-1} do lado esquerdo da Figura 26. De maneira análoga, encontramos o diagrama de árvore de A^2CA^{-2} , veja do lado direito da Figura 26.

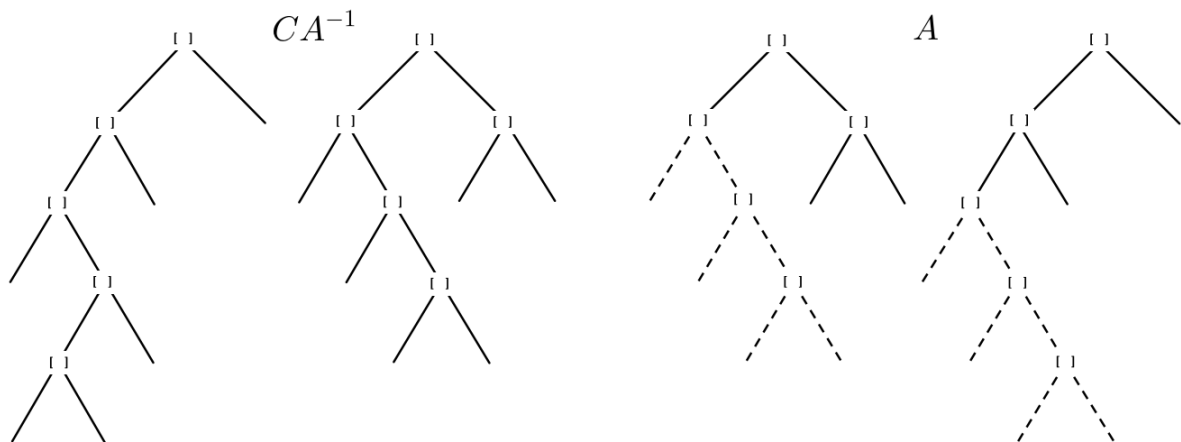


Figura 25 – Multiplicação dos diagramas de árvores das funções CA^{-1} e A

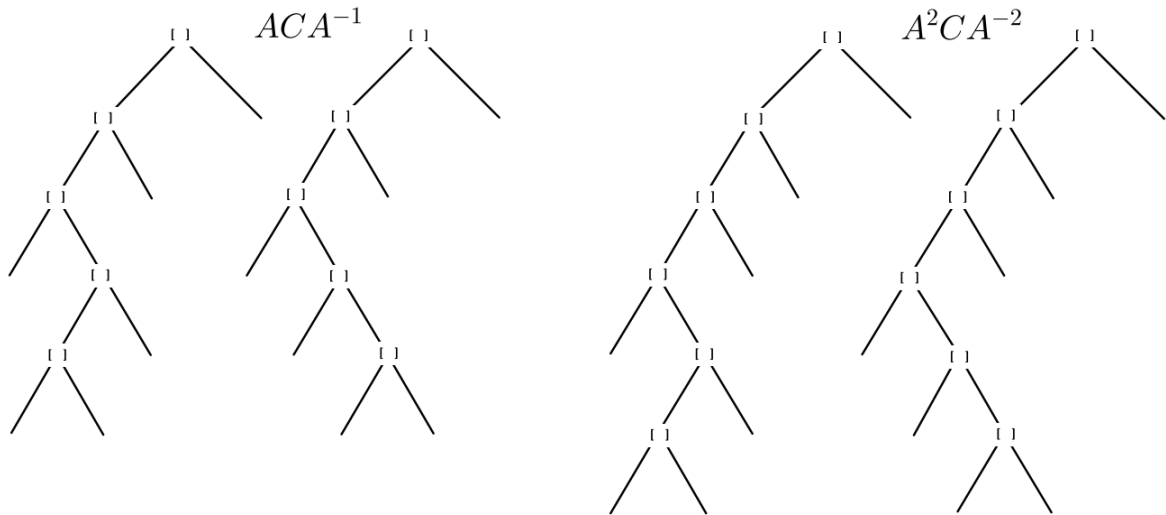


Figura 26 – Diagramas de árvores das funções ACA^{-1} e A^2CA^{-2}

Observamos nos diagramas que o suporte (fecho do conjunto dos pontos onde a função é diferente da identidade) das funções C , A^1CA^{-1} , A^2CA^{-2} são disjuntos, o que faz essas funções comutarem entre si. Notemos que acontece com o suporte quando conjugamos C por A^0 , A , A^2 . Generalizando isso, calculando A^nCA^{-n} para todo $n \in \mathbb{Z}$ é fácil ver que o suporte de A^nCA^{-n} é disjunto de A^mCA^{-m} para todo $n \neq m \in \mathbb{Z}$, ou seja, $[A^nCA^{-n}, A^mCA^{-m}] = 1$ para todo $n \neq m \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$\langle C, A \rangle = \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \langle A^nCA^{-n} \rangle \right) \rtimes \langle A \rangle \cong \bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$$

2.3 Apresentação para F

Nessa seção, mostramos com base em (CANNON; FLOYD; PARRY, 1996), duas apresentações do Grupo F de Thompson. Uma envolvendo os homeomorfismos A e B , e outra envolvendo $X_0 = A$ e $X_n = A^{-(n-1)}BA^{n-1}$ para $n \geq 1$. Começamos com algumas definições e dois teoremas auxiliares.

Definição 17. *Sejam I_0, \dots, I_n as folhas de S em ordem. Para todo inteiro k com $0 \leq k \leq n$ seja a_k o comprimento do arco maximal das arestas esquerdas em S o qual começa em I_k e que não atinge no lado direito de S . Então, a_k é o k^{th} expoente de S .*

Exemplo 17. *Seja S a \mathcal{T} -árvore que aparece na Figura 27 abaixo.*

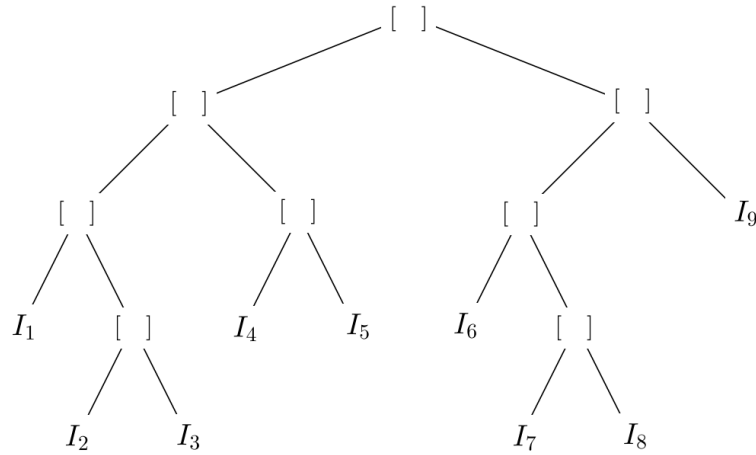


Figura 27 – \mathcal{T} -árvore S

Para encontrarmos os expoentes, precisamos contar quantas arestas esquerdas existem ligando as folhas a raiz da árvore. A contagem é feita a partir da folha e é interrompida se a próxima aresta for direita. As folhas que estão em arestas direitas sempre possuem expoente igual a zero.

Por exemplo, a folha I_1 é ligada por três arestas esquerdas até a raiz da árvore. Cada aresta conta como uma unidade, exceto quando a aresta toca a parte direita da árvore, desta forma, a folha I_1 tem o expoente igual a 2. Na folha I_2 , a contagem é interrompida em 1, pois a próxima aresta é direita. Assim, a folha I_2 tem expoente 1. As folhas I_3 , I_5 , I_8 e I_9 estão em arestas direitas, então os expoentes são iguais a zero. Desta forma, os expoentes desta árvore são, nesta ordem, 2, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0 e 0.

Essa definição vai ser usada no Teorema 2, na qual faz a correspondência entre funções de F e os diagramas de árvores mais precisamente.

Teorema 2. *Sejam R, S duas \mathcal{T} -árvores com $n + 1$ folhas para algum inteiro não negativo n . Sejam a_0, \dots, a_n os expoentes de R , e sejam b_0, \dots, b_n os expoentes de S . Então, o elemento de F com o diagrama de árvore (R, S) é $X_0^{b_0} X_1^{b_1} X_2^{b_2} \dots X_n^{b_n} X_n^{-a_n} \dots X_2^{-a_2} X_1^{-a_1} X_0^{-a_0}$.*

Prova: Provamos inicialmente que a função com diagrama de árvore (R, \mathcal{T}_n) é $X_n^{-a_n} \dots X_2^{-a_2} X_1^{-a_1} X_0^{-a_0}$. Disso, por meio de composição de funções obtemos o resultado. Destacamos essa observação na Figura 28 abaixo.

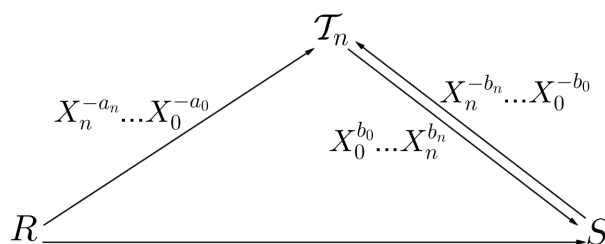


Figura 28 – Diagrama

A prova disso vai ser feita por indução em $a = \sum_{i=0}^n a_i$. Se $a = 0$, então $R = \mathcal{T}_n$, e o resultado é claro. Agora, suponhamos que $a > 0$ e que o resultado é verdade para valores menores que a . Seja m o menor índice tal que $a_m > 0$. Então, existem subárvores binárias enraizadas R_1, R_2, R_3 de R tal que R tem a forma da árvore da Figura 29 abaixo.

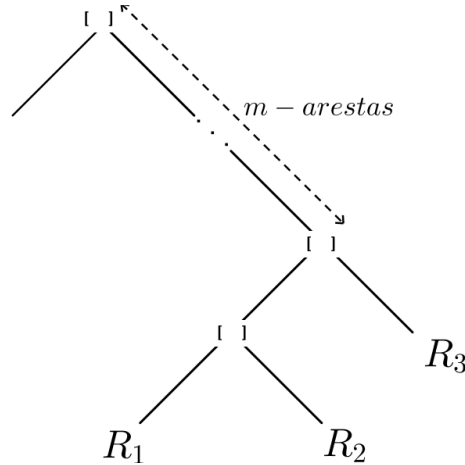


Figura 29 – \mathcal{T} -árvore R

Seja R' a \mathcal{T} -árvore mostrada na Figura 30, onde R'_1, R'_2, R'_3 são isomorfos com R_1, R_2, R_3 como árvores binárias enraizadas.

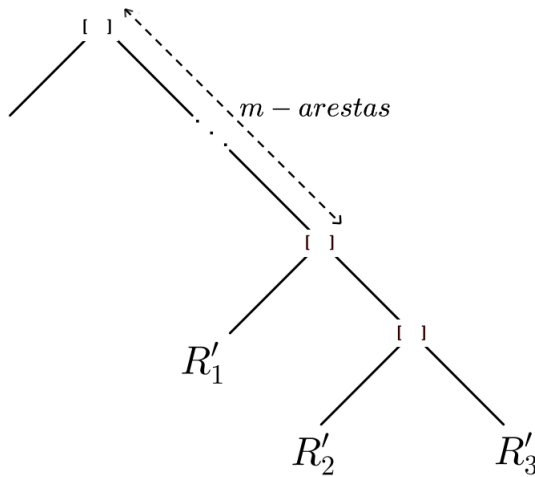


Figura 30 – \mathcal{T} -árvore R'

De acordo com o Exemplo 14 a função com o diagrama de árvore (R, R') é X_m^{-1} . Se a'_0, \dots, a'_n são os expoentes de R' , então $a'_m = a_m - 1$ e $a'_k = a_k$ se $k \neq m$. Portanto, a hipótese de indução se aplica em R' , e assim a função com diagrama de árvore (R', \mathcal{T}_n) é $X_n^{-a'_n} \dots X_2^{-a'_2} X_1^{-a'_1} X_0^{-a'_0}$. Como m é o menor tal que $a_m > 0$ e X_m^{-1} tem o diagrama (R, R') segue que

$$\begin{aligned} (X_n^{-a_n} \dots X_m^{-a_m+1} \dots X_1^{-a_1} X_0^{-a_0}) X_m^{-1} &= X_n^{-a_n} \dots X_m^{-a_m+1} X_m^{-1} \\ &= X_n^{-a_n} \dots X_m^{-a_m} \dots X_1^{-a_1} X_0^{-a_0} \end{aligned}$$

é representado por (R, \mathcal{T}_n) .

De maneira semelhante podemos chegar que a função com diagrama de árvore (S, \mathcal{T}_n) é $X_n^{-b_n} \dots X_2^{-b_2} X_1^{-b_1} X_0^{-b_0}$. Disso, a função com diagrama (\mathcal{T}_n, S) é $X_0^{b_0} X_1^{b_1} X_2^{b_2} \dots X_n^{b_n}$. Portanto, usando a composição da Figura 28 temos o resultado. \square

Teorema 3. *Sejam R, S duas \mathcal{T}_n -árvores com $n + 1$ folhas, para algum inteiro não negativo n . Sejam a_0, \dots, a_n expoentes de R e b_0, \dots, b_n expoentes de S . O diagrama (R, S) é reduzido se, e somente se*

- (i) *as últimas duas folhas de R estão em um acento circunflexo, então as últimas folhas de S não estão em um acento circunflexo;*
- (ii) *para todo inteiro k com $0 \leq k \leq n$, se $a_k > 0$ e $b_k > 0$, então $a_{k+1} > 0$ ou $b_{k+1} > 0$.*

Prova: Suponhamos que (R, S) é reduzido. Se as duas últimas folhas de R estão em um acento circunflexo, obrigam as duas últimas folhas de S a não está em um acento circunflexo, pois caso contrário esse acento circunflexo de R e S poderiam ser retirados, e assim o diagrama (R, S) deixaria de ser reduzido, contradizendo a hipótese. Suponhamos que $a_k > 0$ e $b_k > 0$ para todo k , com $0 \leq k \leq n$. Se $a_{k+1} = 0$ e $b_{k+1} = 0$ teríamos que a_k e a_{k+1} estariam em um acento circunflexo, e da mesma forma b_k e b_{k+1} . Novamente esses acentos circunflexos poderiam ser retirados, isso contraria a hipótese de (R, S) ser reduzido.

Por outro lado, sejam C e D acentos circunflexos de R e S , respectivamente, em que seus vértices estão na posição k e $k + 1$. Se $a_k > 0$ e $b_k > 0$, por hipótese temos que $a_{k+1} > 0$ ou $b_{k+1} > 0$. Portanto, não existem tais acentos circunflexos. Suponhamos que as últimas duas folhas de R estão em um acento circunflexo, então por (i) temos que as últimas folhas de S não estão em um acento circunflexo. As últimas duas afirmações mostram que (R, S) não pode ser reduzido. Logo, (R, S) é reduzido. \square

Os dois corolários abaixo segue diretamente dos Teoremas 2 e 3.

Corolário 1. *O Grupo F de Thompson é gerado por A e B .*

Corolário 2. *Cada elemento não nulo de F pode ser expresso unicamente na forma normal*

$$X_0^{b_0} X_1^{b_1} X_2^{b_2} \dots X_n^{b_n} X_n^{-a_n} \dots X_2^{-a_2} X_1^{-a_1} X_0^{-a_0}$$

onde $n, a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ são inteiros tais que

- (i) *exatamente um dos a_n e b_n é diferente de zero;*
- (ii) *se $a_k > 0$ e $b_k > 0$ para algum inteiro k com $0 \leq k \leq n$, então $a_{k+1} > 0$ ou $b_{k+1} > 0$. Além disso, todo elemento de F que é expresso na forma normal é não trivial.*

O corolário acima leva a seguinte definição.

Definição 18. Os elementos de F da forma $X_0^{b_0} X_1^{b_1} X_2^{b_2} \dots X_n^{b_n}$ com $b_k \geq 0$ para todo $0 \leq k \leq n$, são chamadas de positivas. As inversas de elementos positivos são chamados elementos negativos.

Notemos que os elementos positivos de F são exatamente aqueles com diagramas de árvores tendo como árvore domínio a \mathcal{T}_n -árvore, para algum inteiro não negativo n . Um exemplo disso é a função com diagrama (\mathcal{T}_n, S) vista na demonstração do Teorema 2.

A seguir, veremos os últimos resultados desta seção e duas apresentações para F . Dois grupos F_1 e F_2 serão definidos por geradores e relatores. Os geradores $A, B, X_0, X_1, X_2, \dots$ vamos chamar de elementos principais. Dados elementos g, h em um grupo, $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$. Considerando os grupos F_1 e F_2 dados pelas apresentações abaixo

$$F_1 = \langle A, B \mid [AB^{-1}, A^{-1}BA], [AB^{-1}, A^{-2}BA^2] \rangle$$

$$F_2 = \langle X_0, X_1, X_2, \dots \mid X_k^{-1} X_n X_k = X_{n+1} \text{ para } k < n \rangle$$

Desejamos mostrar que essas são duas apresentações para F , com esse propósito mostramos que F é isomorfo a F_1 e F_2 . Inicialmente mostramos que existe um isomorfismo entre os grupos F_1 e F_2 , e a partir disso construímos um isomorfismo de F para F_1 e F_2 .

Teorema 4. Existe um isomorfismo de grupos de F_1 para F_2 .

Prova: Considerando o homomorfismo que estende

$$\begin{aligned} \phi : F(A, B) &\longrightarrow F_2 \\ A &\longmapsto X_0 \\ B &\longmapsto X_1 \end{aligned}$$

em que $F(A, B)$ é o grupo livre gerado por A e B , isto é, $F(A, B) = \langle A, B \mid \ \rangle$. Lembramos que esse homomorfismo existe pela definição de grupo livre. Dado um elemento $X_n \in F_2$ temos que $X_n = X_0^{-(n-1)} X_1 X_0^{(n-1)}$, então o elemento $A^{-(n-1)} B A^{(n-1)}$ é mapeado em X_n , ou seja, ϕ é sobrejetora.

Vejamos agora que as relações definidas em F_1 estão no núcleo de ϕ , isto é, estão em $\text{Ker}\phi$. Com isso podemos concluir pela Proposição 7 (Teste da Substituição), que existe um homomorfismo de F_1 para F_2 tal que leva A em X_0 e B em X_1 , mais ainda, pela afirmação anterior esse homomorfismo é sobrejetivo.

$$\begin{aligned}
\phi([AB^{-1}, A^{-1}BA]) &= \phi(AB^{-1}A^{-1}BABA^{-2}B^{-1}A) \\
&= X_0X_1^{-1}\underbrace{X_0^{-1}X_1X_0}_{X_2}X_1X_0^{-2}X_1^{-1}X_0 \\
&= X_0\underbrace{X_1^{-1}X_2X_1}_{X_3}X_0^{-1}X_0^{-1}X_1^{-1}X_0 \\
&= \underbrace{X_0X_3X_0^{-1}}_{X_2}X_0^{-1}X_1^{-1}X_0 \\
&= X_2\underbrace{X_0^{-1}X_1^{-1}X_0}_{X_2^{-1}} \\
&= X_2X_2^{-1} = 1
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\phi([AB^{-1}, A^{-2}BA^2]) &= \phi(AB^{-1}A^{-2}BA^2BA^{-1}A^{-2}B^{-1}A^2) \\
&= X_0X_1^{-1}X_0^{-1}\underbrace{X_0^{-1}X_1X_0}_{X_2}X_0X_1X_0^{-3}X_1^{-1}X_0X_0 \\
&= X_0X_1^{-1}\underbrace{X_0^{-1}X_2X_0}_{X_3}X_1X_0^{-1}X_0^{-1}X_0^{-1}X_1^{-1}X_0X_0 \\
&= X_0\underbrace{X_1^{-1}X_3X_1}_{X_0^{-1}X_3X_0}X_0^{-1}X_0^{-1}X_0^{-1}X_1^{-1}X_0X_0 \\
&= X_0X_0^{-1}X_3X_0X_0^{-1}X_0^{-1}X_0^{-1}X_1^{-1}X_0X_0 \\
&= X_3X_0^{-1}\underbrace{X_0^{-1}X_1^{-1}X_0}_{X_2^{-1}}X_0 \\
&= X_3\underbrace{X_0^{-1}X_2^{-1}X_0}_{X_3^{-1}} \\
&= X_3X_3^{-1} = 1.
\end{aligned}$$

Então, para completar a prova do Teorema 4 é suficiente provar que existe um homomorfismo de grupos de F_2 para F_1 no qual leva X_0 para A e X_1 para B .

Considerando agora o homomorfismo que estende

$$\begin{aligned}
\psi : F(X_0, X_1, X_2, \dots) &\longrightarrow F_1 \\
X_0 &\longmapsto A \\
X_1 &\longmapsto B
\end{aligned}$$

em que $F(X_0, X_1, X_2, \dots)$ é o grupo livre gerado por X_0, X_1, X_2, \dots . Vamos provar que a relação definida em F_2 estão no núcleo de ψ , para isso é suficiente mostrar que

$$\psi(X_nX_k) = Y_nY_k = Y_kY_{n+1} = \psi(X_kX_{n+1}); \quad (2.1)$$

$k < n$, sendo $Y_0 = A$ e $Y_n = A^{-(n-1)}BA^{(n-1)}$. A equação 2.1 está intimamente ligada com a equação 2.2

$$[A^{-1}B, Y_m] = 1 \quad (2.2)$$

para $m \geq 3$. Vejamos que $[A^{-1}B, Y_m] = 1$ para $m = 3$

$$\begin{aligned} [AB^{-1}, A^{-1}BA] = 1 &\implies AB^{-1}A^{-1}BABA^{-2}B^{-1}A = 1 \\ &\implies A^{-1}AB^{-1}A^{-1}BABA^{-2}B^{-1}AA = 1 \\ &\implies B^{-1}A^{-1}BABA^{-2}B^{-1}A^2 = 1 \\ &\implies B^{-1}AA^{-2}BA^2A^{-1}BA^{-2}B^{-1}A^2 = 1 \\ &\implies A^{-2}BA^2A^{-1}BA^{-2}B^{-1}A^2 = A^{-1}B \\ &\implies A^{-1}BA^{-2}BA^2B^{-1}AA^{-2}B^{-1}A^2 = 1 \\ &\implies A^{-1}BY_3B^{-1}AY_3^{-1} = 1 \\ &\implies [A^{-1}B, Y_3] = 1. \end{aligned}$$

O mesmo argumento mostra a linha 2.2 pra $m = 4$. A equação seguinte mostra que se a linha 2.2 é verdade para $m = n - k + 2$, então a linha 2.1 é verdade.

$$\begin{aligned} Y_n Y_k &= A^{-n+1}BA^{n-1}A^{-k+1}BA^{k-1} \\ &= A^{-k+2}A^{-(n-k+1)}BA^{n-k+1}A^{-1}BA^{k-1} \\ &= A^{-k+2}Y_{n-k+2}A^{-1}BA^{k-1} \\ &= A^{-k+2}A^{-1}BY_{n-k+2}A^{k-1} \text{ (usamos a hipótese aqui)} \\ &= A^{-k-1}BA^{k-1}A^{k-1}Y_{n-k+2}A^{k-1} \\ &= Y_k A^{-k+1}Y_{n-k+2}A^{k-1} \\ &= Y_k A^{-k+1}A^{-(n-k+1)}BA^{n-k+1}A^{k-1} \\ &= Y_k A^{-n}BA^n \\ &= Y_k Y_{n+1}. \end{aligned}$$

Notemos que como a linha 2.2 é válido para $m = 3$ temos que a equação acima é válida para n e $k = n - 1$. Em particular vale para $n = 4$ e $k = 3$, isto é, $Y_3^{-1}Y_4Y_3 = Y_5$. Como a linha 2.2 é verdade para $m = 3$ e $m = 4$, então pela igualdade acima temos que a linha 2.2 é verdade para $m = 5$.

Agora, suponhamos por indução que $[A^{-1}B, Y_m] = 1$, para valores menores que m . Então em particular é válida para $m - 2$. Então, temos que a linha 2.1 é verdade para $n = m - 1$ e $k = 3$ uma vez que $m - 1 - 3 + 2 = m - 2$. Portanto,

$$Y_3^{-1}Y_{m-1}Y_3 = Y_m \quad (2.3)$$

Disso, da linha 2.3 $[A^{-1}B, Y_m] = [A^{-1}B, Y_3^{-1}Y_{m-1}Y_3] = 1$, para todo $m \geq 3$. Portanto, $Y_n Y_k = Y_k Y_{n+1}$ para todo $k < n$, isto é,

$$\psi(X_n X_k) = \psi(X_k X_{n+1});$$

Logo, usando novamente a Proposição 7 temos o resultado $F_1 \cong F_2$. \square

Teorema 5. *Existem isomorfismos de grupos de F_1 e F_2 para F no qual levam os elementos principais $A, B, X_0, X_1, X_2, \dots$ para os correspondentes elementos de F .*

Prova: As Figuras 9 e 10 mostram que o interior do suporte (fecho do conjunto dos pontos onde a função é diferente da identidade) do elemento AB^{-1} de F é disjunto do suporte dos elementos $A^{-1}BA, A^{-2}BA^2$ de F , ou seja, AB^{-1} comuta com $A^{-1}BA, A^{-2}BA^2$ em F e então, os elementos A, B de F satisfazem as relações de F_1 .

Disso, novamente pela Proposição 7 (semelhante a existência do homomorfismo de F_1 para F_2 no Teorema 4) existe um homomorfismo de grupos de F_1 para F que mapeia os elementos A, B para os elementos correspondentes em F . Pelo Corolário 1, temos que esse homomorfismo é sobrejetor. Esse homomorfismo sobrejetor junto com o Teorema 4 induz um homomorfismo sobrejetor de F_2 para F . Assim, basta mostrar que esse homomorfismo sobrejetor de F_2 para F , que levam os elementos X_0, X_1, X_2, \dots para os elementos correspondentes de F é um homomorfismo injetor. Por meio das relações de F_2 , obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} X_k^{-1} X_n &= X_{n+1} X_k^{-1} \\ X_n^{-1} X_k &= X_k X_{n+1}^{-1} \\ X_n X_k &= X_k X_{n+1}; \quad k < n. \end{aligned}$$

Assim, todo elemento $x \in F_2$ não trivial pode ser escrito como o produto de um elemento positivo com um elemento negativo. Suponhamos que X_k ocorra em ambas as partes, na parte positiva e negativa de x , mas X_{k+1} ocorre em nenhuma, então como $X_k X_{n+1} X_k^{-1} = X_n$, para $n > k$, é possível simplificar x deletando uma ocorrência de X_k na parte negativa e positiva e trocando toda ocorrência de X_{n+1} por X_n , para $n > k$. Portanto, todo elemento não trivial de F_2 pode ser posto na forma normal, conforme o Corolário 2. Logo, todo elemento não trivial de F_2 é levado em elemento não trivial de F , ou seja, o homomorfismo é injetor. \square

3 Conjugação no Grupo F de Thompson

Neste capítulo, definimos Σ e Δ mencionados brevemente na introdução e provaremos o Teorema A.

3.1 Conceitos iniciais

Com base em (GILL; SHORT, 2013) vamos descrever uma solução para o Problema da Conjugação no Grupo F de Thompson.

Definição 19. *Seja $f : (a, b) \rightarrow (a, b)$ um homeomorfismo linear por partes do intervalo aberto (a, b) . Seja $PLF(a, b)$ o grupo de todos os homeomorfismos lineares por partes $f : (a, b) \rightarrow (a, b)$ crescentes do intervalo aberto (a, b) que possuem um número finito de nós.*

Observamos que o Grupo F de Thompson pode ser mergulhado no grupo $PLF(0, 1)$. Isso é possível uma vez que qualquer elemento de F leva 0 para 0 e 1 para 1. Analisamos o Problema da Conjugação em F olhando cada um dos seus elementos como um elemento de $PLF(0, 1)$, isto é, $F \lesssim PLF(0, 1)$. Observamos que F está contido propriamente em $PLF(0, 1)$. Considerando a função $g : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{9}{4}x; & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{3}{8}x - \frac{5}{8}; & \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

o gráfico da função g está abaixo

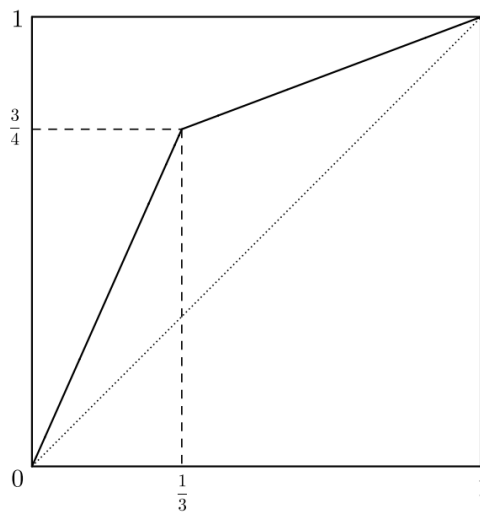


Figura 31 – Gráfico da função g

a função g é um elemento de $PLF(0, 1)$, mas não é um elemento de F , pois $x = \frac{1}{3}$ é um nó de g que não é diádico.

As próximas duas seções são dedicadas as construções de Σ e Δ comentados superficialmente na introdução.

3.2 Definição de Σ

Nesta seção, definiremos o invariante Σ . Seja f um elemento do Grupo $F \lesssim PLF(0, 1)$. Seguindo (GILL; SHORT, 2013), em que os autores fizeram uma adaptação de (BRIN; SQUIER, 2001) definimos o invariante Σ^f , como uma tupla de três quantidades, $\Sigma^f = (\Sigma_1^f, \Sigma_2^f, \Sigma_3^f)$, que dependem de f . A seguir, apresentamos as definições dessas quantidades. A primeira quantidade, Σ_1^f , é uma lista de inteiros relativos aos valores da imagem de ϵ_f , definimos a seguir

$$\epsilon_f : (0, 1) \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1; & f(x) > x \\ 0; & f(x) = x \\ -1; & f(x) < x. \end{cases}$$

Sendo f um elemento de $PLF(0, 1)$, então existe uma sequência de intervalos abertos

$$I_1, I_2, \dots, I_m \text{ em que } I_j = (p_{j-1}, p_j) \quad p_0 = 0, p_m = 1 \quad (3.1)$$

tais que ϵ_f é constante em cada intervalo, e os valores de ϵ_f em dois intervalos consecutivos são diferentes. Definimos $\Sigma_1^f = \{\epsilon_f(x_1), \dots, \epsilon_f(x_m)\}$ em que $x_i \in I_i$ para cada $i = 1, \dots, m$. Seja $Fix(f)$ o conjunto de pontos fixos de f e observamos que todos os pontos p_0, \dots, p_m de 3.1 estão em $Fix(f)$.

Exemplo 18. Suponhamos que f tenha o gráfico ilustrado na Figura 32, então os intervalos I_j para $j = 1, \dots, 6$ de f são tais que:

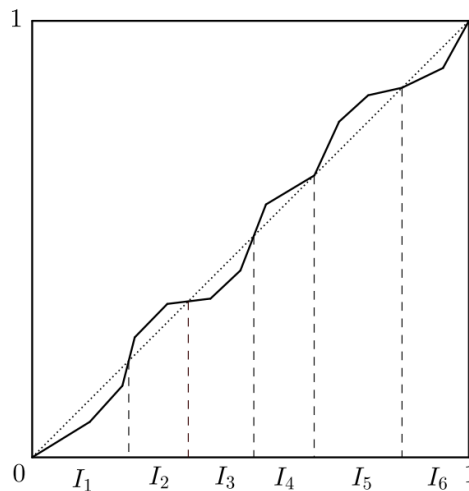


Figura 32 – Gráfico da função f

Dizemos que um intervalo I_j é um domínio de ressalto de f se ϵ_f não é nula nesse intervalo. Por exemplo, na Figura 32 todos os intervalos I_j para $j = 1, \dots, 6$ são domínios de ressaltos. Nossos próximos dois invariantes Σ_2^f e Σ_3^f consistem de listas com uma entrada para cada domínio de ressalto de f .

Se k é uma função linear por partes de um intervalo (a, b) para (a, b) , então a inclinação inicial de k é a derivada em qualquer ponto entre a e o primeiro nó de k e a inclinação final de k é a derivada em qualquer ponto entre o nó final de k e b . O invariante Σ_2^f é uma lista de números reais positivos, na qual cada elemento da lista é a inclinação inicial de f em um domínio de ressalto. Por exemplo, a entrada para um domínio de ressalto $I_j = (p_{j-1}, p_j)$ é o valor da inclinação inicial de f em I_j . A seguir, são dadas duas definições que são necessárias para a construção do invariante Σ_3^f .

Definição 20. Uma função de $[0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ é chamada de função finita se ela toma valor 1 em todos os pontos exceto em um número finito de valores.

Definição 21. Seja \mathcal{R} o conjunto das funções finitas. Tomemos a relação de equivalência em \mathcal{R} , onde c_1, c_2 dois elementos de \mathcal{R} são equivalentes se, e somente se, $c_1 = c_2 \circ \rho$, em que ρ é uma translação de $[0, 1)$ módulo 1.

Realmente essa é uma relação de equivalência. (i) É reflexiva, se $c_1 \in \mathcal{R}$, então $c_1 \sim c_1$, basta tomar ρ a translação identidade. (ii) É simétrica, se $c_1, c_2 \in \mathcal{R}$ com $c_1 \sim c_2$, assim existe uma translação ρ , tal que, $c_1 = c_2 \rho$, então $c_2 = c_1 \rho^{-1}$ e portanto, $c_2 \sim c_1$. (iii). É transitiva, se $c_1, c_2, c_3 \in \mathcal{R}$ com $c_1 \sim c_2$ e $c_2 \sim c_3$, então existem translações ρ, ρ' , tais que, $c_1 = c_2 \rho$ e $c_2 = c_3 \rho'$, disso, $c_1 = c_3 \rho' \rho$ e portanto, $c_1 \sim c_3$.

Usando as definições acima, Σ_3^f é uma lista de classes de equivalência de funções finitas. Vamos calcular a entrada para um domínio de ressalto $I_j = (p_{j-1}, p_j)$ da seguinte forma: suponhamos inicialmente que $\Sigma_1^f = 1$ em I_j . Definimos, para $x \in I_j$, a razão de inclinação $f^*(x) = f'_+(x) f'_-(x)^{-1}$. Então, $f^*(x) = 1$ exceto quando x é um nó de f . Agora, definimos

$$\begin{aligned} \pi_{f,j} : I_j &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \prod_{n=-\infty}^{\infty} f^*(f^n(x)) \end{aligned}$$

Uma vez que f tem um número finito de nós, somente um número finito de termos desse produto infinito são diferentes de 1. Seja p o menor nó de f em I_j e seja p^* o menor nó de f em I_j tal que $\pi_{f,j}(p^*) \neq 1$ (esse nó deve existir, na Observação 9 do Apêndice explicamos essa existência). Definimos, para $s \in [0, 1)$ a função

$$\psi_{f,j}(s) = \pi_{f,j}(\lambda^s(r - p_{j-1}) + p_{j-1}).$$

Aqui o valor λ é a entrada em Σ_2 correspondendo a I_j e r é qualquer ponto no intervalo $(0, p)$ no qual satisfaz a fórmula $r = f^n(p^*)$, para algum n inteiro negativo. Notemos que $\psi_{f,j}$ é uma

função finita. Além disso, na definição de $\psi_{f,j}$, foi escolhido um valor para r no qual garante que $\psi_{f,j}(0) \neq 1$. No Lema 12 do Apêndice, deixamos claro o porque podemos escolher esse r .

É importante observar que a função $\psi_{f,j}$ está bem definida, uma vez que o domínio de $\pi_{f,j}$ é I_j e $\lambda^s(r - p_{j-1}) + p_{j-1} \in I_j$. De fato, inicialmente repararemos que $\lambda \geq 2$ e $(r - p_{j-1}) > 0$ (pois, $r > p_{j-1}$), então a função $\lambda^s(r - p_{j-1}) + p_{j-1}$ é crescente. Assim, basta mostrarmos que os extremos dela pertencem a I_j .

$$s = 0 \implies \lambda^0(r - p_{j-1}) + p_{j-1} = r \in I_j$$

$$s = 1 \implies \lambda^1(r - p_{j-1}) + p_{j-1} = f|_{[p_{j-1},p]}(r) \in I_j$$

em que $f|_{[p_{j-1},p]}$ é a restrição de f no intervalo $[p_{j-1}, p]$ (p é o primeiro nó de f depois de p_{j-1}) que é dado por $f|_{[p_{j-1},p]}(x) = \lambda(x - p_{j-1}) + p_{j-1}$.

A entrada para Σ_3^f correspondendo a I_j é a classe de equivalência $[\psi_{f,j}]$. Caso $f(x) < x$ para cada $x \in I_j$, isto é, $\Sigma_1^f = -1$, então a entrada para Σ_3^f correspondendo a I_j é a classe de equivalência $[\psi_{f^{-1},j}]$.

Exemplo 19. Seja $f = BA^{-1}B \in F$, em que A, B são dados no Capítulo 2. Vamos calcular $\Sigma^f = (\Sigma_1^f, \Sigma_2^f, \Sigma_3^f)$.

Para encontrar f recorremos a multiplicação de diagramas de árvores para fazer a composição $BA^{-1}B$. Os diagramas de árvores de A e B e os passos para fazer a multiplicação estão expostos no Capítulo 2. Primeiro queremos $A^{-1}B$

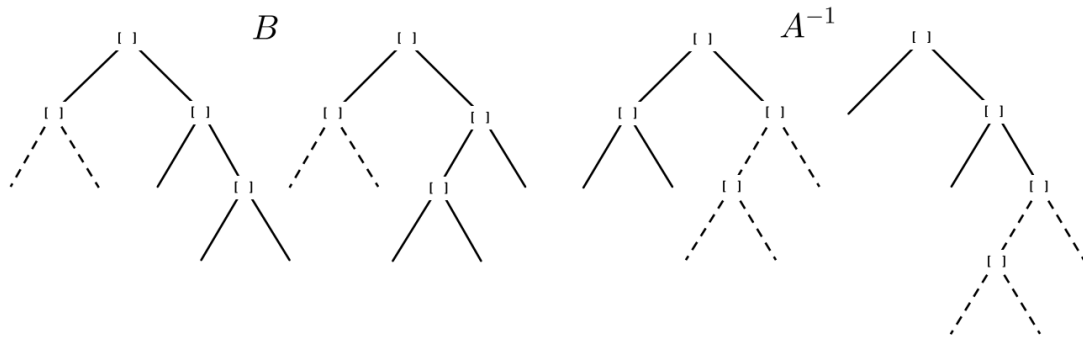


Figura 33 – Multiplicação dos diagramas de árvores dos elementos B e A^{-1}

o diagrama resultante da multiplicação acima está do lado esquerdo da Figura 34.

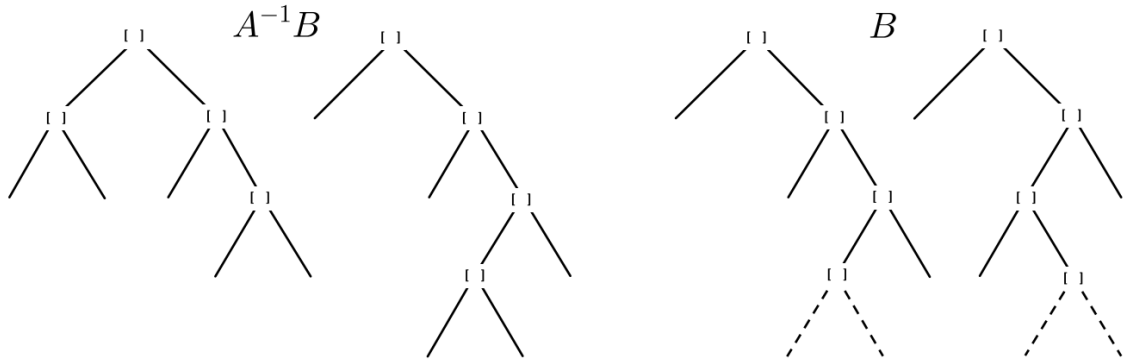


Figura 34 – Multiplicação dos diagramas de árvores dos elementos $A^{-1}B$ e B

o diagrama resultante da multiplicação acima está na Figura 35.

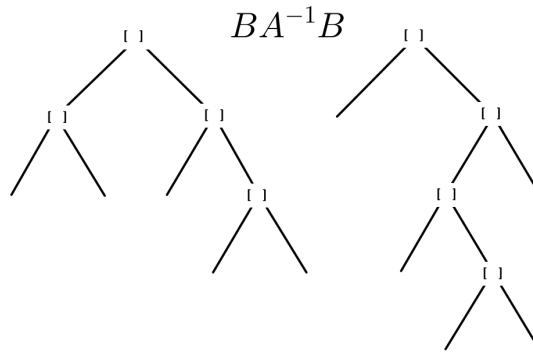
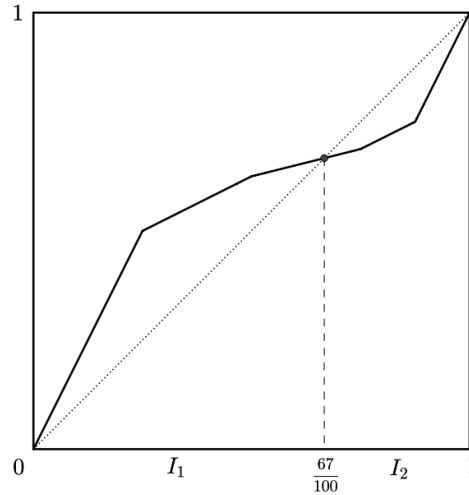


Figura 35 – Diagrama de árvore do elemento $BA^{-1}B$

a primeira e a segunda árvore da Figura 35 mostram os intervalos onde f é linear, assim podemos construir a função f , e conseqüentemente a função f^{-1} .

$$f(x) = \begin{cases} 2x; & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}; & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}; & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{16}; & \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{7}{8} \\ 2x - 1; & \frac{7}{8} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x; & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - \frac{3}{4}; & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{8} \\ 4x - 2; & \frac{5}{8} \leq x \leq \frac{11}{16} \\ 2x - \frac{10}{16}; & \frac{11}{16} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}; & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Na Figura 36, mostramos o gráfico da função f e os intervalos I_1, I_2 que necessitamos para o cálculo de Σ^f . Temos que, $\Sigma_1^f = \{1, -1\}$ e, uma vez que I_1 e I_2 são domínios de ressalto $\Sigma_2^f = \{2, \frac{1}{4}\}$. Resta calcular Σ_3^f . Primeiro, vamos calcular a entrada de Σ_3^f associada a I_1 . Para isso precisamos encontrar $f^*, \pi_{f,1}$ e $\psi_{f,1}$. Temos que

Figura 36 – Função f

$$f^*(x) = \begin{cases} 1; & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}; & x = 1/4 \\ 1; & \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}; & x = 1/2 \\ 1; & \frac{1}{2} < x \leq \frac{67}{100} \end{cases} \quad \pi_{f,1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}; & x = \frac{1}{2^m}, m \geq 2 \text{ e } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 1; & x \neq \frac{1}{2^m}, m \geq 2 \text{ e } 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 1; & \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8}; & x = 1/2 \\ 1; & \frac{1}{2} < x \leq \frac{67}{100} \end{cases}$$

Agora, resta calcular $\psi_{f,1}$. Para isso, precisamos de p^* , λ , r e p_0 associados a I_1 , seus valores são $p^* = \frac{1}{4}$, $\lambda = 2$, $r = \frac{1}{8}$ tomando $n = -1$ e $p_0 = 0$. Disso,

$$\begin{aligned} \psi_{f,1}(s) &= \pi_{f,1} \left(2^s \left(\frac{1}{8} - 0 \right) + 0 \right) \\ &= \pi_{f,1} \left(2^s \frac{1}{8} \right) \end{aligned}$$

Observamos que $2^s \frac{1}{8} = 2^{s-3} = \frac{1}{2^{3-s}}$ e que $\frac{1}{8} \leq \frac{1}{2^{3-s}} < \frac{1}{4}$. Portanto,

$$\psi_{f,1}(s) = \begin{cases} \frac{1}{8}; & s = 0 \\ 1; & 0 < s < 1 \end{cases}$$

Notemos também que $\psi_{f,1}(0) = \pi_{f,1} \left(\frac{1}{8} \right) = \frac{1}{8} \neq 1$

Portanto, $[\psi_{f,1}]$ é uma entrada de Σ_3^f associada a I_1 . A outra entrada de Σ_3^f associada a I_2 é $[\psi_{f^{-1},2}]$ é calculada de forma análoga. Isso mostra que $\Sigma_3^f = \{[\psi_{f,1}], [\psi_{f^{-1},2}]\}$. Assim, $\Sigma^f = ((1, -1), (2, \frac{1}{4}), ([\psi_{f,1}], [\psi_{f^{-1},2}]))$.

3.3 Definição de Δ

Nesta seção, definiremos o invariante Δ . O invariante Δ também é uma lista, dessa vez a lista é de classes de equivalências de tuplas de números reais. Começamos com o conceito de uma função encurralada mínima e depois definimos Δ .

3.3.1 A função encurralada mínima

Baseado em (GILL; SHORT, 2013) abordamos aqui o conceito de uma função encurralada mínima. Tomando $f \in PLF(0, 1)$, nessa subseção nosso foco está na restrição de f a um de seus domínios de ressalto $D = (a, b)$.

Definição 22. Uma função encurralada em $PLF(0, 1)$ é um elemento $l \in PLF(0, 1)$ com um único domínio de ressalto (a, b) , e satisfaz as seguintes propriedades: Σ_1 toma o valor 1 (resp. -1) em relação a (a, b) e existe um ponto $x \in (a, b)$ tal que todos os nós de l que está em (a, b) pertence a $(x, l(x))$ (resp. $(l(x), x)$).

Uma função encurralada é mostrada na Figura 37. Vamos algumas vezes abusar a notação e considerar uma função encurralada como um elemento de $PLF(a, b)$, ou seja, uma função encurralada de $PLF(0, 1)$ com o intervalo (a, b) como o domínio de ressalto.

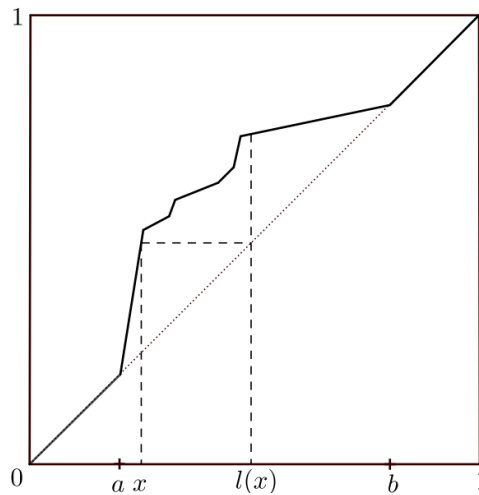


Figura 37 – Função encurralada

Dada uma função finita c , dizemos que uma função encurralada l corresponde a função c se $\psi_l = c$. Notemos que descartamos i do índice, uma vez que existe somente um domínio de ressalto. Pela construção de ψ_l , significa que o primeiro nó de l corresponde a $\psi_l(0)$. Veremos agora dois resultados auxiliares.

Lema 6. Sejam f e h dois elementos do grupo $PLF(0, 1)$. Então, $x \in (0, 1)$ é um ponto fixo de f se, e somente se, $h(x)$ é um ponto fixo de hfh^{-1} .

Prova: Por um lado, tomamos $x \in (0, 1)$ tal que $f(x) = x$. Considerando $h(x) = y$ para algum $y \in (0, 1)$ e temos $h(f(x)) = h(x)$. Disso,

$$hfh^{-1}(y) = hfh^{-1}(h(x)) = hf(x) = h(x) = y \implies hfh^{-1}(y) = y.$$

Por outro lado, suponhamos que x não é um ponto fixo de f , então $f(x) \neq x$. Considerando novamente $h(x) = y$ para algum $y \in (0, 1)$. Como h é bijetora temos que $h(f(x)) \neq h(x)$. Então,

$$hfh^{-1}(y) = hfh^{-1}(h(x)) = hf(x) \neq h(x) = y \implies hfh^{-1}(y) \neq y. \quad \square$$

Lema 7. Para uma dada inclinação $\lambda > 0$, existe uma única função encurralada l em $PLF(a, b)$ tal que $\psi_l = c$.

Prova: Seja $\lambda(x - a) + a$ a reta que passa pelo ponto (a, a) e tem inclinação λ . Tomando $z \in (a, b)$ definimos $w = \lambda(z - a) + a$. Então, pela Proposição 10 do Apêndice existe uma função encurralada l tais que, $l(z) = w$, tem inclinação inicial λ , $\psi_l = c$ e $z = \min(B(l) \cap D')$ (D' é o ressalto de l). Por construção, $D' = (a, d)$ e podemos analisar dois casos.

Caso 1: Se $d = b$, então l é a função encurralada que queríamos.

Caso 2: Se $d \neq b$ tomamos $u : D' \rightarrow (a, b)$ a função linear que leva D' para (a, b) . Afirmamos que ulu^{-1} é a nova função l que estávamos procurando.

De fato, vejamos inicialmente que (a, b) é o ressalto de $ul_i u^{-1}$ e que é encurralada. Observamos que $ul_i u^{-1}((a, b)) = ul(D') = u(D') = (a, b)$ e pelo Lema 6 (a, b) é o ressalto de ulu^{-1} . Agora, suponhamos que p' é um nó de ulu^{-1} . Então, $u^{-1}(p')$ é um nó de l , uma vez que p' não é nó de u^{-1} e $lu^{-1}(p')$ não é nó de u , pois ambas são lineares em (a, b) e D' , respectivamente. Como l é uma função encurralada, existe um $x \in D'$ tal que $u^{-1}(p') \in (x, l(x))$. Então, $p' \in (u(x), u(l(x))) = (u(x), u(l(u^{-1}(u(x)))) = (u(x), ulu^{-1}(u(x)))$. Assim, todo nó de ulu^{-1} está contido em $(u(x), ulu^{-1}(u(x)))$. Portanto, ulu^{-1} é uma função encurralada.

Observamos que, l e ulu^{-1} tem inclinação inicial λ . Disso, se mostrarmos que $\psi_{ulu^{-1}} = \psi_l = c$ temos o resultado. Seja $s \in [0, 1)$

$$\begin{aligned} \psi_l(s) &= \pi_l(\lambda^s(r - a) + a) \\ \psi_{ulu^{-1}}(s) &= \pi_{ulu^{-1}}(\lambda^s(r' - a) + a). \end{aligned}$$

Seja n um inteiro negativo. Escolhemos $r = l_i^n(p)$, em que p é o primeiro nó de l em D' e $r' = (ul_i u^{-1})^n(p')$, em que p' é o primeiro nó de ulu^{-1} em (a, b) . Então, $u(p) = p'$ e

$$r' = (ulu^{-1})^n(p') = ul^n u^{-1}(p') = ul^n u^{-1}(u(p)) = u(l^n(p)) = u(r)$$

assim,

$$\psi_{ulu^{-1}}(s) = \pi_{ulu^{-1}}(\lambda^s(u(r) - u(a)) + u(a))$$

Como l e ulu^{-1} são encurraladas, precisamos mostrar apenas que ambas as igualdades são verdadeiras

$$l^*(\lambda^s(r - a) + a) = (ulu^{-1})^*(\lambda^s(u(r) - u(a)) + u(a)) \quad (3.2)$$

$$l^*(\lambda^s r + (1 - \lambda^s)a) = (ulu^{-1})^*(\lambda^s u(r) + (1 - \lambda^s)u(a)). \quad (3.3)$$

É fácil ver que $l^*(x) = (ulu^{-1})^*(u(x))$ para todo $x \in D'$ uma vez que u é linear em D' para (a, b) . Então, a igualdade 3.3 é verificada se $u(\lambda^s r + (1 - \lambda^s)a) = \lambda^s u(r) + (1 - \lambda^s)u(a)$, e isso de fato acontece. Por u ser linear, implica que tem a forma $u(x) = mx + c$, assim

$$\begin{aligned} u(\lambda^s r + (1 - \lambda^s)a) &= m(\lambda^s r + (1 - \lambda^s)a) + c = m\lambda^s r + m(1 - \lambda^s)a + c \\ &= m\lambda^s r + m(1 - \lambda^s)a + c + \lambda^s c - \lambda^s c \\ &= \lambda^s(mr + c) + (1 - \lambda^s)(ma + c) \\ &= \lambda^s u(r) + (1 - \lambda^s)u(a) \end{aligned}$$

Portanto, $\psi_l = \psi_{ulu^{-1}}$, como queríamos. \square

Lema 8. *Sejam f e h elementos do grupo $PLF(0, 1)$. Sejam I_1, \dots, I_n os intervalos de 3.1. Escrevemos $I'_j = h(I_j)$. Então, a inclinação inicial de f em I_j e a inclinação inicial de hfh^{-1} em I'_j são iguais.*

Prova: Primeiramente, $hfh^{-1}(I'_j) = hf(I_j) = h(I_j) = I'_j$. Pelo Lema 6 o intervalo I'_j é um domínio de ressalto de hfh^{-1} . Suponhamos que $I_j = (a_j, b_j)$, tomando $\bar{I}_j = (a_j, a_j + \delta)$ um intervalo suficientemente pequeno tal que f e h têm inclinação constante e seja $\bar{I}'_j = h(\bar{I}_j)$.

Sejam $f(x) = a_2x + b_2$ e $h(x) = a_3x + b_3$ no intervalo \bar{I}_j . A inversa da função h é $h^{-1}(x) = \frac{1}{a_3}x + \frac{b_3}{a_3}$. Tomando $x \in \bar{I}'_j$, então

$$\begin{aligned} hfh^{-1}(x) &= hf\left(\frac{1}{a_3}x - \frac{b_3}{a_3}\right) \\ &= h\left(a_2\left(\frac{1}{a_3}x - \frac{b_3}{a_3}\right) + b_2\right) \\ &= a_3\left(\left(\frac{1}{a_3}a_2x - \frac{b_3}{a_3}a_2\right) + b_2\right) + b_3 \\ &= a_2x - b_3a_2 + a_3b_2 + b_3 \\ &= a_2x + (a_3b_2 + b_3 - b_3a_2) \end{aligned}$$

Então, a inclinação de hfh^{-1} em x é a_2 , que é a inclinação inicial de hfh^{-1} em I'_j , que é a inclinação inicial de f em I_j . \square

Seja $c : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função finita tal que $[c]$ é uma entrada em Σ_3^f associada com D . Dentro da classe de equivalência $[c]$ podemos definir uma *função finita mínima* c_m como segue. Primeiro definimos $C = \{c_1 \in [c] \mid c_1(0) \neq 1\}$ e consideremos uma ordem em C por: sejam $c_1, c_2 \in C$ e seja x o menor valor tal que $c_1(x) \neq c_2(x)$, dizemos que $c_1 < c_2$ se acontece $c_1(x) < c_2(x)$. Definimos c_m como a função mínima em C sobre essa ordem. Repare

que a função mínima c_m em C vai existir, pois o conjunto C é finito, e pela definição da ordem imposta, c_m também vai ser a mínima em $[c]$.

O gráfico de duas funções finitas c_L e c_R são mostradas na Figura 38; a função c_L está no lado esquerdo e a função c_R no lado direito. Essas duas funções são equivalentes, porque o gráfico de c_L pode ser obtido por uma translação do gráfico de c_R horizontalmente módulo 1. Notemos que nem c_L e nem c_R são funções finitas mínimas em suas classes de equivalência, pois $c_L(0) = c_R(0) > 1$ e há outras funções finitas equivalentes que tomam valores menores que 1 em 0. Uma vez que $c_R(x) < c_L(x)$, para o menor número x no qual c_L e c_R diferem, vemos que $c_R < c_L$.

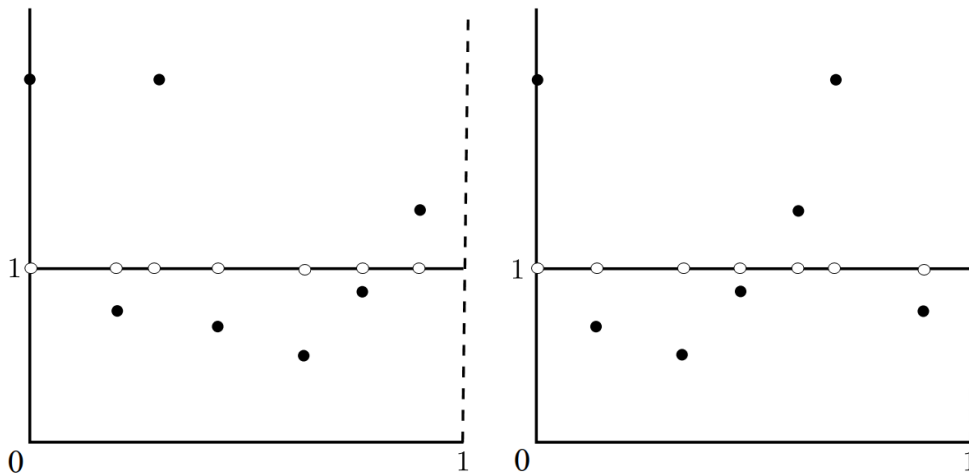


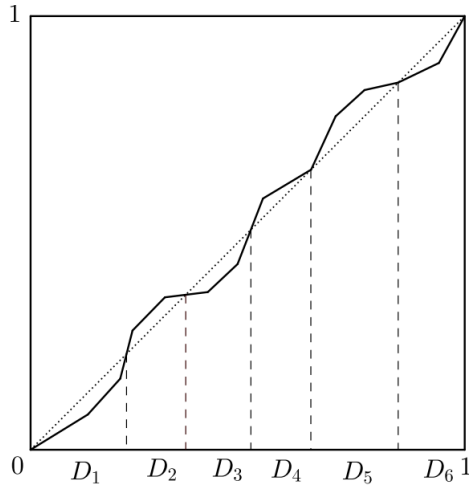
Figura 38 – Duas funções finitas equivalentes.

Ainda com f e D definidos acima, suponhamos que λ é a entrada em Σ_2^f associada ao D e $[\psi_{f,D}]$ a classe de equivalência que é a entrada de Σ_3^f também associada ao D no qual encontramos a função mínima c_m . Suponhamos também que l é a função encurralada em $PLF(a, b)$, com inclinação inicial λ , no qual corresponde a c_m . Dizemos que l é a *função encurralada mínima* associada com f sobre D .

3.3.2 Definição de Δ

Agora, vamos fixar f como um elemento do Grupo F de Thompson e definimos Δ como segue. Uma *cadeia de ressalto* é uma subsequência I_t, I_{t+1}, \dots, I_u de 3.1 tal que cada intervalo é um domínio de ressalto, e dos pontos p_{t-1}, p_t, \dots, p_u somente p_{t-1} e p_u são diádicos. Então, a sequência de intervalos I_1, I_2, \dots, I_m pode ser particionada em cadeias de ressalto e intervalos abertos de pontos fixos de f cujos extremos são números diádicos. Em uma cadeia de ressalto consideramos cada intervalo I como D .

Exemplo 20. A função f exibida na Figura 32 é exibida outra vez na Figura 39, suponhamos que os três primeiros pontos fixos de f não sejam números diádicos. Então, teremos três cadeias de ressalto. A primeira é D_1, D_2, D_3, D_4 , a segunda tem apenas o intervalo D_5 e a terceira tem apenas D_6 .

Figura 39 – Gráfico da função f

O invariante Σ foi construído tratando um domínio de ressalto de cada vez. O invariante Δ é construído tratando com uma cadeia de ressalto de cada vez. Considerando uma cadeia de ressalto particular D_1, \dots, D_s e seja f_j a restrição de f a cada $D_j = (a_j, b_j)$, para $j = 0, \dots, s$.

De acordo com o Teorema 7 do Apêndice, o centralizador de f_j em $PLF(a_j, b_j)$ é um grupo cíclico infinito gerado por uma raiz \widehat{f}_j de f_j . Definimos λ_j a inclinação inicial de \widehat{f}_j e μ_j a inclinação final de \widehat{f}_j . Assim, seja m_j o inteiro tal que $\widehat{f}_j^{m_j} = f_j$; então λ_j e μ_j são as m_j -ésimas raízes positivas da inclinação inicial e final de f_j .

Seja k_j um elemento de $PLF(a_j, b_j)$ que conjuga f_j a associada função encurralada mínima, l_j em $PLF(a_j, b_j)$. Então, k_j é alguma função satisfazendo a equação $k_j f_j k_j^{-1} = l_j$. Sejam α_j a inclinação inicial e β_j a inclinação final de k_j . Vale destacar que a função k_j existe, pois se $\Sigma^f = (1, \lambda, [\psi_{f,D}])$ e $\Sigma^{l_j} = (1, \lambda, [c_m])$ para $D = (a_j, b_j)$. Por construção da l_j temos que $\Sigma^f = (1, \lambda, [\psi_{f,D}]) = \Sigma^{l_j} = (1, \lambda, [c_m])$. Assim, pelo Teorema 6 do Apêndice f_j e l_j são conjugadas e portanto, k_j existe.

Definição 23. Tomando a relação de equivalência em \mathbb{R}^s onde (x_1, x_2, \dots, x_s) é equivalente a (y_1, y_2, \dots, y_s) se, e somente se, existem inteiros m, n_1, \dots, n_s tal que

$$\begin{aligned} 2^m x_1 &= \lambda_1^{n_1} y_1, \\ \mu_1^{n_1} x_2 &= \lambda_2^{n_2} y_2, \\ \mu_2^{n_2} x_3 &= \lambda_3^{n_3} y_3, \\ &\vdots \\ \mu_{s-1}^{n_{s-1}} x_s &= \lambda_s^{n_s} y_s. \end{aligned}$$

em que μ_i, λ_i são potências inteiras de 2.

Vejamos que de fato a definição acima é uma relação de equivalência;

- (i) É reflexiva, pois dado $(x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s$, basta tomar $m = n_1 = n_2 = \dots = n_s = 0$.
- (ii) É simétrica, pois dados $(x_1, \dots, x_s), (y_1, \dots, y_s)$ em \mathbb{R}^s tal que (x_1, \dots, x_s) se relaciona com (y_1, \dots, y_s) . Então,

$$\begin{aligned} 2^m x_1 = \lambda_1^{n_1} y_1 &\implies 2^{-m} y_1 = \lambda_1^{-n_1} x_1, \\ \mu_1^{n_1} x_2 = \lambda_2^{n_2} y_2 &\implies \mu_1^{-n_1} y_2 = \lambda_2^{-n_2} x_2, \\ \mu_2^{n_2} x_3 = \lambda_3^{n_3} y_3 &\implies \mu_2^{-n_2} y_3 = \lambda_3^{-n_3} x_3, \\ &\vdots \\ \mu_{s-1}^{n_{s-1}} x_s = \lambda_s^{n_s} y_s &\implies \mu_{s-1}^{-(n_{s-1})} y_s = \lambda_s^{-n_s} x_s. \end{aligned}$$

Portanto, (y_1, \dots, y_s) se relaciona com (x_1, \dots, x_s) .

- (iii) É transitiva, pois dados $(x_1, \dots, x_s), (y_1, \dots, y_s), (z_1, \dots, z_s)$ em \mathbb{R} , tal que (x_1, \dots, x_s) se relaciona com (y_1, \dots, y_s) e (y_1, \dots, y_s) se relaciona com (z_1, \dots, z_s) . Assim, temos que

$$\begin{aligned} 2^m x_1 = \lambda_1^{n_1} y_1 & \quad 2^k y_1 = \tau_1^{r_1} z_1 \\ \mu_1^{n_1} x_2 = \lambda_2^{n_2} y_2 & \quad \lambda_1^{r_1} y_2 = \tau_2^{r_2} z_2 \\ \mu_2^{n_2} x_3 = \lambda_3^{n_3} y_3 & \quad \lambda_2^{r_2} y_3 = \tau_3^{r_3} z_3 \\ & \quad \vdots \\ \mu_{s-1}^{n_{s-1}} x_s = \lambda_s^{n_s} y_s & \quad \lambda_{s-1}^{-(r_{s-1})} y_s = \tau_s^{r_s} z_s. \end{aligned}$$

Pela a primeira linha das igualdades acima temos

$$\frac{2^m}{\lambda_1^{n_1}} x_1 = y_1 = \frac{\lambda_1^{r_1}}{2^k} z_1 \implies 2^{m+k} x_1 = \lambda_1^{n_1+r_1} z_1.$$

Analogamente, pela segunda linha

$$\frac{\mu_1^{n_1}}{\lambda_2^{n_2}} x_2 = y_2 = \frac{\lambda_2^{r_2}}{\lambda_1^{r_1}} z_2 \implies \mu_1^{n_1+r_1} x_2 = \lambda_2^{n_2+r_2} z_2.$$

Assim, procedendo de forma análoga nas outras linhas, obtemos que

$$\begin{aligned} 2^{m+k} x_1 &= \lambda_1^{n_1+r_1} z_1, \\ \mu_1^{n_1+r_1} x_2 &= \lambda_2^{n_2+r_2} z_2, \\ \mu_2^{n_2+r_2} x_3 &= \lambda_3^{n_3+r_3} z_3, \\ &\vdots \\ \mu_{s-1}^{n_{s-1}+r_{s-1}} x_s &= \lambda_s^{n_s+r_s} z_s. \end{aligned}$$

Assim, (x_1, \dots, x_s) se relaciona com (z_1, \dots, z_s) . Portanto, tal relação é de equivalência.

Atribuímos a cadeia D_1, \dots, D_s a classe de equivalência da s -tupla

$$\left(\frac{\alpha_1}{w_1}, \frac{\alpha_2 w_1}{w_2 \beta_1}, \dots, \frac{\alpha_s w_{s-1}}{w_s \beta_{s-1}} \right)$$

onde $w_j = b_j - a_j$. Definimos Δ_f como uma lista ordenada de tais classes de equivalência, uma para cada cadeia de ressalto.

3.4 Prova do Teorema A

Nesta seção, provaremos o Teorema A enunciado na introdução. Enunciamos novamente abaixo

Teorema A. *Sejam f, g dois elementos de F . Então, f e g são conjugados em F se, e somente se, acontece*

$$(\Sigma^f, \Delta_f) = (\Sigma^g, \Delta_g).$$

A prova o Teorema A não é feita diretamente. Em vez disso provamos a proposição abaixo, no qual, mostramos que implica no Teorema A.

Proposição 8. *Dois elementos f e g de F que são conjugados em $PLF(0, 1)$ são conjugados em F se, e somente se,*

$$\Delta_f = \Delta_g.$$

Antes de provar a Proposição 8 veremos alguns resultados auxiliares.

Lema 9. *Sejam f e g dois elementos de F . Seja h um elemento de $PLF(0, 1)$ tal que $hfh^{-1} = g$. Seja $D = (a, b)$ um domínio de ressalto de f e suponhamos que a inclinação inicial de h em D é uma potência inteira de 2. Então, toda inclinação de h em D são potências inteiras de 2 e todo nó de h em D ocorre em $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.*

Prova: Seja $(a, a + \delta)$ um intervalo no qual h tem inclinação constante. Suponhamos que essa inclinação seja maior do que 1. Podemos assumir que f tem inclinação inicial maior que 1, pois, caso contrário, substituímos f por f^{-1} e g por g^{-1} . Temos que $hfh^{-1} = g$ implica que $hf^n h^{-1} = g^n$ e, assim $h = g^n h f^{-n}$. Agora, para qualquer $x \in (a, b)$ existe um intervalo $(x, x + \epsilon)$ tal que $f^{-n}(x, x + \epsilon) \subset (a, a + \delta)$, para algum n inteiro positivo.

Então, a equação $h = g^n h f^{-n}$ implica que, onde definida, a derivada de h sobre $(x, x + \epsilon)$ é uma potência inteira de 2. Porque por hipótese a derivada de h em $(a, a + \delta)$ é uma potência inteira de 2 e a derivada de f^{-n} e de g^n já são potências inteiras de 2 quando existem.

Além disso, qualquer nó de h que ocorre em $(x, x + \epsilon)$ deve estar em $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, pois por construção, h é diferenciável em $(a, a + \epsilon)$. Agora, suponhamos que h não é diferenciável em x , como $h = g^n h f^{-n}$ isso implica que f^{-n} não é diferenciável em x ou g^{-n} não é diferenciável em $hf^{-n}(x)$. Em ambos os casos chegamos que x é um número diádico, isto é, está em $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, como

desejado. Se h não tem inclinação inicial maior do que 1, então aplica o mesmo argumento para h^{-1} usando a equação $h^{-1}gh = f$. \square

Sejam f e g dois elementos de F e um terceiro elemento h de $PLF(0, 1)$ tal que $hfh^{-1} = g$ em $PLF(0, 1)$. Usaremos a notação para f descrita na Seção 3.3, assim como as quantidades $I_j, p_j, f_j, \widehat{f}_j, k_j, l_j, \alpha_j, \beta_j, w_j, \lambda_j$ e μ_j . Precisamos exatamente das mesmas quantidades para g , e serão denotadas por $I'_j, p'_j, g'_j, \widehat{g}'_j, k'_j, l'_j, \alpha'_j, \beta'_j, w'_j, \lambda'_j$ e μ'_j .

Em particular, escolhemos uma cadeia de resalto D_1, \dots, D_s de f e definimos $D'_i = h(D_i)$ para $i = 1, \dots, s$. Notemos pelo Lema 6 que D'_1, \dots, D'_s são domínios de resaltos para g . Mas, como h não é necessariamente um elemento de F , não formará necessariamente, uma cadeia de resalto para g .

Considerando a função $h_i = h|_{D_i}$ com inclinação inicial γ_i e inclinação final δ_i . A intenção aqui é encontrar a inclinação inicial e final de h_i em D_i em função de $\alpha_i, \beta_i, \alpha'_i, \beta'_i, \lambda_i, \mu_i, w_i$ e w'_i . Seja u o elemento de $PLF(0, 1)$ tal que, para cada $i = 1, \dots, m$, é linear quando restrito a D_i e leva D_i para D'_i . Afirmamos que, restrito a D'_i , o elemento ul_iu^{-1} é uma função encurralada tal que é conjugada de l'_i , pela função $k'_i h_i k_i^{-1} u^{-1}$ e satisfaz $\psi_{l'_i} = \psi_{ul_iu^{-1}}$.

De fato, vejamos inicialmente que ul_iu^{-1} é encurralada. Observamos que $ul_iu^{-1}(D'_i) = ul_i(D_i) = u(D_i) = D'_i$ e suponhamos que p' é um nó de ul_iu^{-1} . Então, $u^{-1}(p')$ é um nó de l_i , uma vez que p' não é nó de u^{-1} e $l_iu^{-1}(p')$ não é nó de u , pois ambas são lineares em D'_i e D_i , respectivamente. Como l_i é uma função encurralada, existe um $x \in D_i$ tal que $u^{-1}(p') \in (x, l_i(x))$. Então, $p' \in (u(x), u(l_i(x))) = (u(x), u(l_i(u^{-1}(u(x)))) = (u(x), ul_iu^{-1}(u(x)))$. Assim, todo nó de ul_iu^{-1} está contido em $(u(x), ul_iu^{-1}(u(x)))$. Portanto, ul_iu^{-1} é uma função encurralada. Vejamos agora que elas realmente são conjugadas,

$$\begin{aligned} (k'_i h_i k_i^{-1} u^{-1}) ul_i u^{-1} (k'_i h_i k_i^{-1} u^{-1})^{-1} &= k'_i h_i k_i^{-1} u^{-1} ul_i u^{-1} u k_i h_i^{-1} k_i'^{-1} \\ &= k'_i h_i \underbrace{k_i^{-1} l_i k_i}_{f_i} h_i^{-1} k_i'^{-1} \\ &= k'_i \underbrace{h_i f_i h_i^{-1}}_{g_i} k_i'^{-1} \\ &= k'_i g_i k_i'^{-1} = l'_i. \end{aligned}$$

Por fim, vejamos que $\psi_{l'_i} = \psi_{ul_iu^{-1}}$. Pelo fato de que l_i ser conjugada para ul_iu^{-1} e ul_iu^{-1} ser conjugada para l'_i temos respectivamente que $[\psi_{l_i}] = [\psi_{ul_iu^{-1}}]$ e $[\psi_{ul_iu^{-1}}] = [\psi_{l'_i}]$. Como l_i e l'_i são encurraladas mínimas temos que $\psi_{l_i} = \psi_{l'_i}$. Portanto, se mostrarmos que $\psi_{l_i} = \psi_{ul_iu^{-1}}$ segue diretamente que $\psi_{l'_i} = \psi_{ul_iu^{-1}}$. Seja $s \in [0, 1)$

$$\begin{aligned} \psi_{l_i}(s) &= \pi_{l_i}(\lambda^s(r - p_{j-1}) + p_{j-1}) \\ \psi_{ul_iu^{-1}}(s) &= \pi_{ul_iu^{-1}}(\lambda^s(r' - p'_{j-1}) + p'_{j-1}) \end{aligned}$$

Seja n um inteiro negativo. Escolhemos $r = l_i^n(p)$, em que p é o primeiro nó de l_i em D_i e

$r' = (ul_i u^{-1})^n(p')$, em que p' é o primeiro nó de $ul_i u$ em D'_i . Então, $u(p) = p'$ e

$$r' = (ul_i u^{-1})^n(p') = ul_i^n u^{-1}(p') = ul_i^n u^{-1}(u(p)) = ul_i^n(p) = u(r)$$

Assim,

$$\psi_{ul_i u^{-1}}(s) = \pi_{ul_i u^{-1}}(\lambda^s(u(r) - u(p_{j-1})) + u(p_{j-1}))$$

Como l_i e $ul_i u^{-1}$ são encurraladas, precisamos mostrar apenas que ambas as igualdades abaixo são verdadeiras

$$l_i^*(\lambda^s(r - p_{j-1}) + p_{j-1}) = (ul_i u^{-1})^*(\lambda^s(u(r) - u(p_{j-1})) + u(p_{j-1})) \quad (3.4)$$

$$l_i^*(\lambda^s r + (1 - \lambda^s)p_{j-1}) = (ul_i u^{-1})^*(\lambda^s u(r) + (1 - \lambda^s)u(p_{j-1})) \quad (3.5)$$

É fácil ver que $l_i^*(x) = (ul_i u^{-1})^*(u(x))$ para todo $x \in D_i$ uma vez que u é linear em D_i para D'_i . Então, a igualdade 3.5 é verificada se $u(\lambda^s r + (1 - \lambda^s)p_{j-1}) = \lambda^s u(r) + (1 - \lambda^s)u(p_{j-1})$, e isso de fato acontece. Por u ser linear, implica que tem a forma $u(x) = ax + b$, assim

$$\begin{aligned} u(\lambda^s r + (1 - \lambda^s)p_{j-1}) &= a(\lambda^s r + (1 - \lambda^s)p_{j-1}) + b = a\lambda^s r + a(1 - \lambda^s)p_{j-1} + b \\ &= a\lambda^s r + a(1 - \lambda^s)p_{j-1} + b + \lambda^s b - \lambda^s b \\ &= \lambda^s(ar + b) + (1 - \lambda^s)(ap_{j-1} + b) \\ &= \lambda^s u(r) + (1 - \lambda^s)u(p_{j-1}) \end{aligned}$$

Portanto, $\psi_{l_i} = \psi_{ul_i u^{-1}}$, como queríamos. Logo, pelo fato de $ul_i u^{-1}$ e l'_i serem conjugadas e $\psi_{l'_i} = \psi_{ul_i u^{-1}}$, segue da Proposição 10 do Apêndice que $ul_i u^{-1} = l'_i$. Combinando essa equação com as equações $k_i f_i k_i^{-1} = l_i$, $k'_i g_i k_i^{-1} = l'_i$, $h_i f_i h_i^{-1} = g_i$ chegamos à igualdade

$$\begin{aligned} f_i &= k^{-1} l_i k_i = k^{-1} u^{-1} l'_i u k_i = k^{-1} u^{-1} k'_i g_i k_i^{-1} u k_i \\ &= k^{-1} u^{-1} k'_i h_i f_i h_i^{-1} k_i^{-1} u k_i \\ &= (k_i^{-1} u^{-1} k'_i h_i) f_i (k_i^{-1} u^{-1} k'_i h_i)^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto, $k_i^{-1} u^{-1} k'_i h_i$ está no centralizador de f_i , então existe um inteiro N_i tal que

$$\widehat{f_i}^{N_i} = k_i^{-1} u^{-1} k'_i h_i \implies h_i = k_i^{-1} u k_i \widehat{f_i}^{N_i},$$

para cada $i = 1, \dots, s$. Então, por comparação da inclinação inicial e final nessa equação vemos que

$$\gamma_i = \lambda_i^{N_i} \frac{\alpha_i w'_i}{w_i \alpha'_i} \quad \delta_i = \mu_i^{N_i} \frac{\beta_i w'_i}{w_i \beta'_i}, \quad (3.6)$$

para cada $i = 1, \dots, s$. Estamos agora, em condições de provar a Proposição 8.

Prova da Proposição 8: Suponhamos que $h \in F$. Então, existem inteiros M_1, \dots, M_s tais que $\gamma_1 = 2^{M_1}$ e $\gamma_i = \delta_{i-1} = 2^{M_i}$, para $i = 2, \dots, s$. Substituindo esses valores em 3.6 e reorganizando temos que

$$2^{M_1} = \lambda_1^{N_1} \frac{\alpha_1 w'_1}{w_1 \alpha'_1} \implies 2^{M_1} \frac{\alpha'_1}{w'_1} = \lambda_1^{N_1} \frac{\alpha_1}{w_1}$$

e

$$\lambda_i^{N_i} \frac{\alpha_i w'_i}{w_i \alpha'_i} = \mu_{i-1}^{N_{i-1}} \frac{\beta_{i-1} w'_{i-1}}{w_{i-1} \beta'_{i-1}} \implies \mu_{i-1}^{N_{i-1}} \frac{\alpha'_i w'_{i-1}}{w'_i \beta'_{i-1}} = \lambda_i^{N_i} \frac{\alpha_i w_{i-1}}{w_i \beta_{i-1}},$$

para cada $i = 2, \dots, s$, isto é, $\Delta_f = \Delta_g$ como desejado.

Por outro lado, suponhamos que $\Delta_f = \Delta_g$ e h um elemento de $PLF(0, 1)$ tal que $hfh^{-1} = g$. A intensão agora é modificar h para que seja um elemento de F . Se I_j é um intervalo de pontos fixos de f , então modificamos h_j para que seja qualquer função linear (podemos escolher qualquer função pelo fato de f comutar com todo mundo nesse intervalo) por partes de I_j para I'_j (os extremos do intervalo I'_j são diádicos, pois I'_j é um intervalo de pontos fixos da função g) cujas inclinações são potências inteiras de 2 e cujos nós ocorrem em números diádicos. (A construção da nova função h_j é direta e é feita de forma semelhante ao feito no Lema 5).

Agora, modificaremos h em uma cadeia de resalto D_1, \dots, D_s . Uma vez que $\Delta_f = \Delta_g$ sabemos que existem inteiros m e n_1, \dots, n_s tais que, para $i = 2, \dots, s$,

$$2^m \frac{\alpha_1}{w_1} = \lambda_1^{n_1} \frac{\alpha'_1}{w'_1} \quad \mu_{i-1}^{n_{i-1}} \frac{\alpha_i w_{i-1}}{w_i \beta_{i-1}} = \lambda_i^{n_i} \frac{\alpha'_i w'_{i-1}}{w'_i \beta'_{i-1}} \quad (3.7)$$

Considerando a função linear por partes $h'_i : D_i \longrightarrow h_i(D_i)$ dado por $h'_i = h_i \widehat{f}_i^{-n_i - N_i}$. A inclinação inicial de h'_i é $\gamma'_i = \gamma_i \lambda_i^{-n_i - N_i}$ e a inclinação final é $\delta'_i = \delta_i \mu_i^{-n_i - N_i}$, uma vez que γ_i e δ_i é a inclinação inicial e final de h_i e λ_i e μ_i é a inclinação inicial e final de \widehat{f}_i , ambas respectivamente. De 3.6 e 3.7 vemos que

$$\begin{aligned} \gamma'_1 &= \gamma_1 \lambda_1^{-n_1 - N_1} = \gamma_1 \lambda_1^{-n_1} \lambda_1^{-N_1} = \gamma_1 2^{-m} \frac{w_1 \alpha'_1}{\alpha_1 w'_1} \gamma_1^{-1} \frac{\alpha_1 w_1}{w_1 \alpha'_1} = 2^{-m} \implies \gamma'_1 = 2^{-m} \\ \gamma'_i &= \gamma_i \lambda_i^{-n_i - N_i} = \gamma_i (\lambda_i^{n_i})^{-1} (\lambda_i^{N_i})^{-1} = \gamma_i \left(\mu_{i-1}^{n_{i-1}} \frac{\alpha_i w_{i-1}}{w_i \beta_{i-1}} \frac{w'_i \beta'_{i-1}}{\alpha'_i w'_{i-1}} \right)^{-1} \left(\gamma_i \frac{w_i \alpha'_i}{\alpha_i w'_i} \right)^{-1} \\ &= \left(\mu_{i-1}^{n_{i-1}} \frac{w_{i-1} \beta'_{i-1}}{\beta_{i-1} w'_{i-1}} \right)^{-1} = \mu_{i-1}^{N_{i-1}} \left(\frac{\beta_{i-1} w'_{i-1}}{w_{i-1} \beta'_{i-1}} \right) \mu_{i-1}^{-n_{i-1}} \mu_{i-1}^{-N_{i-1}} = \delta_{i-1} \mu_{i-1}^{-n_{i-1}} \mu_{i-1}^{-N_{i-1}} \\ &= \delta'_{i-1} \implies \gamma'_i = \delta'_{i-1} \end{aligned}$$

para $i = 2, \dots, s$.

Modificamos h substituindo h_i por h'_i em D_i . Então, pelo que acabamos de ver h não tem nó em nenhum dos pontos finais de D_1, \dots, D_s exceto os nós dos extremos. Pelo Lema 9, os nós de h_1 ocorrem em $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ e as inclinações de h_1 são todas potências inteiras de 2. Uma vez que a inclinação inicial de h_2 coincide com a inclinação final de h_1 , o mesmo podemos dizer para h_2 .

Similarmente, para $i = 3, \dots, s$, a inclinação inicial de h_i coincide com a inclinação final de h_{i-1} . Repetindo essa modificação para cada cadeia de resalto de f , a função de conjugação resultante é um elemento de F . Resta mostrar que a nova função h conjuga a função f para a

função g . De fato, basta verifica para apenas um intervalo D_i de uma cadeia de ressalto

$$\begin{aligned} h'_i f_i (h'_i)^{-1} &= h_i \widehat{f}_i^{-n_i - N_i} f_i (h_i \widehat{f}_i^{-n_i - N_i})^{-1} = h_i \widehat{f}_i^{-n_i - N_i} f_i \widehat{f}_i^{n_i + N_i} h_i^{-1} \\ &= h_i f_i h_i^{-1} = g_i \end{aligned}$$

em que na terceira igualdade usamos o fato de f_i ser uma raiz de \widehat{f}_i . \square

Prova do Teorema A: Por um lado, suponhamos que f e g são conjugadas em F . Pela Proposição 9 do Apêndice concluímos que $\Sigma^f = \Sigma^g$ e pela Proposição 8 chegamos que $\Delta_f = \Delta_g$. Desse modo $(\Sigma^f, \Delta_f) = (\Sigma^g, \Delta_g)$.

Por outro lado, suponhamos que $(\Sigma^f, \Delta_f) = (\Sigma^g, \Delta_g)$. Como $\Sigma^f = \Sigma^g$ e pelo Teorema 6 do Apêndice temos que f e g são conjugadas em $PLF(0, 1)$. Como $\Delta_f = \Delta_g$ pela Proposição 8 chegamos que f e g são conjugadas em F . \square

Observação 7. Observamos que no Teorema 6 do Apêndice as funções g e h em $PLF(0, 1)$ são de um único ressalto, mas podemos usar na demonstração do Teorema A. Basta restringir a função em cada domínio de ressalto, assim teremos funções de um ressalto no intervalo particular.

4 Apêndice

4.1 Definições e resultados básicos

Começamos aqui com algumas definições de acordo com (BRIN; SQUIER, 2001).

Definição 24. *Seja f um elemento de $PLF(0, 1)$. Dado x em $(0, 1)$, o orbital de f contendo x , denotado por $Orbl(f, x)$, é definido por*

$$Orbl(f, x) = \{y \in (0, 1) \mid \exists n \in \mathbb{Z}; f^n(x) \leq y \leq f^{n+\epsilon}(x)\}$$

onde $\epsilon = \epsilon_f(x)$

Observação 8. *Observamos que ou $Orbl(f, x)$ é um orbital infinito, ou $Orbl(f, x) = \{x\}$. Notemos também que se $Orbl(f, x)$ é um orbital infinito, esse conjunto nada mais é que um domínio de ressalto contendo o elemento x .*

Exemplo 21. *Seja a função $f \in F$ dada por $f = BA^{-1}B$ vista no Exemplo 19 do Capítulo 2. Veja o gráfico de f na Figura 40.*

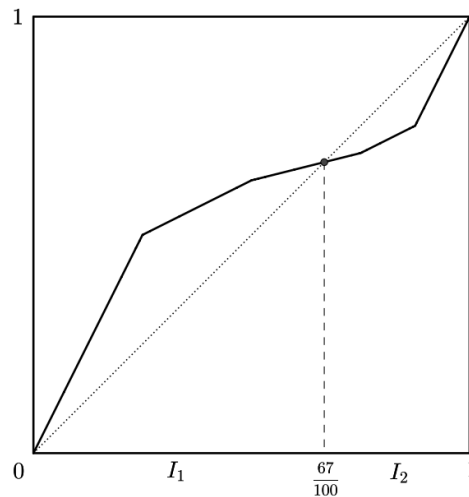


Figura 40 – Função f

Para $x \in I_1$ o conjunto $Orbl(f, x) = I_1$ e para $x \in I_2$ o conjunto $Orbl(f, x) = I_2$

Definição 25. *Seja f um elemento de $PLF(0, 1)$. Definimos $B(f) = \{x \in (0, 1) \mid f^*(x) \neq 1\}$*

É fácil perceber que, $B(f)$ nada mais é do que o conjunto de nós de f , uma vez que $f^*(x) \neq 1$ se, e somente se, x é nó de f .

Definição 26. *Seja f um elemento de $PLF(0, 1)$.*

- (1) Seja $x \in (0, 1)$ o conjunto $\{x_n = f^n(x) | n \in \mathbb{Z}\}$ é a órbita de x sobre f ;
- (2) Assumindo que $\{x_n\}$ é infinito (se $m, n \in \mathbb{Z}$ satisfaz $m \neq n$, então $x_m \neq x_n$) definimos

$$\pi_f(\{x_n\}) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} f^*(\{x_n\})$$

visto como uma função da órbita $\{x_n\}$ de x .

Chamamos $g \in PLF(0, 1)$ de função de um ressalto se g tem apenas um orbital infinito. Nesse capítulo, vamos determinar uma condição necessária e suficiente para duas funções de um ressalto serem conjugadas em $PLF(0, 1)$.

Seja S^1 o círculo unitário no plano complexo. A função $\sigma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}_+$ é chamada finita se o conjunto $\{q \in S^1 | \sigma(q) \neq 1\}$ é finito. Duas funções finitas $\sigma_1, \sigma_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}_+$ são equivalentes se existe uma rotação rígida $\rho : S^1 \rightarrow S^1$ tal que $\sigma_1 = \sigma_2 \rho$. Observamos que a definição de função finita dada aqui é equivalente a definição de função finita dada no Capítulo 3, apenas foi feita mudança de domínio de $[0, 1)$ para o S^1 . Isso é possível uma vez que $[0, 1)$ e S^1 são homeomorfos. A mudança é feita apenas por conveniência.

Os resultados seguintes são feitos para auxiliar a construção do invariante Σ sobre um outro ponto de vista.

Definição 27. Seja $L(\mathbb{R}) = \{x \rightarrow mx + b | m \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}\}$. Tomando $h \in L(\mathbb{R})$ tal que $h(x) = mx + b$. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, definimos $h^{(\theta)} \in L(\mathbb{R})$ como segue. Se $m = 1$, então $h^{(\theta)}(x) = x + \theta b$. Se $m \neq 1$, reescrevemos h como $h(x) = mx + (1 - m)s$ com $s = b/(1 - m)$ e seja $h^{(\theta)}(x) = m^\theta x + (1 - m^\theta)s$.

Lema 10. Seja $h(x) = mx + b \in L(\mathbb{R})$.

- (i) $h^{(n)} = h^n$ para $n \in \mathbb{Z}$ onde h^0 é a identidade;
- (ii) Se θ, ϕ estão em \mathbb{R} , então $h^{(\theta)}h^{(\phi)} = h^{(\theta+\phi)}$ e $(h^{(\theta)})^{(\phi)} = h^{(\theta\phi)}$;
- (iii) Se θ está em \mathbb{R} e f é um elemento $L(\mathbb{R})$, então $(fhf^{-1})^{(\theta)} = fh^{(\theta)}f^{-1}$;
- (iv) Se x e t pertencem ao mesmo orbital infinito de h , então existe um único $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $h^{(\theta)}(x) = t$.

Prova:

Prova item (i):

Caso I: Primeiro consideramos $n \in \mathbb{Z}$ positivo.

Para $m = 1$ é simples ver que o resultado é válido. Consideramos $m \neq 1$ e vejamos

$$h(x) = mx + (1 - m)s$$

$$\begin{aligned}
h^2(x) &= m(mx + (1 - m)s) + (1 - m)s \\
&= m^2x + m(1 - m)s + (1 - m)s \\
&= m^2x + (1 - m)s(1 + m) \\
&= m^2x + (1 - m^2)s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^3(x) &= m^2(mx + (1 - m)s) + (1 - m^2)s \\
&= m^3x + m^2(1 - m)s + (1 - m^2)s \\
&= m^3x + \cancel{m^2s} - m^3s + s - \cancel{m^2s} \\
&= m^3x + (1 - m^3)s
\end{aligned}$$

Continuando esse processo vamos chegar que $h^n(x) = m^n x + (1 - m^n)s = h^{(n)}(x)$

Caso 2: Agora, consideramos que $n \in \mathbb{Z}$ negativo.

Para $m = 1$ é também simples que o resultado é válido. Consideramos $m \neq 1$ e notemos que

$$h^{-1}(x) = m^{-1}x + (1 - m^{-1})s$$

$$\begin{aligned}
h^{-2}(x) &= m^{-1}(m^{-1}x + (1 - m^{-1})s) + (1 - m^{-1})s \\
&= m^{-2}x + m^{-1}(1 - m^{-1})s + (1 - m^{-1})s \\
&= m^{-2}x + (1 - m^{-1})s(1 + m^{-1}) \\
&= m^{-2}x + (1 - m^{-2})s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^{-3}(x) &= m^{-2}(m^{-1}x + (1 - m^{-1})s) + (1 - m^{-2})s \\
&= m^{-3}x + m^{-2}(1 - m^{-1})s + (1 - m^{-2})s \\
&= m^{-3}x + \cancel{m^{-2}s} - m^{-3}s + s - \cancel{m^{-2}s} \\
&= m^{-3}x + (1 - m^{-3})s
\end{aligned}$$

Continuando esse processo também chegamos que $h^n(x) = m^n x + (1 - m^n)s = h^{(n)}(x)$.

Caso 3: No caso $n = 0$, é direto ver que o resultado é válido para $m = 1$ e $m \neq 1$.

Portanto, $h^{(n)} = h^n$ para $n \in \mathbb{Z}$ e segue o resultado do item (i).

Prova do item (ii):

Caso 1: $m = 1$

$$\begin{aligned}
h^{(\theta)}h^{(\phi)}(x) &= h^{(\theta)}(h^{(\phi)}(x)) = x + \phi b + \theta b = x + (\theta + \phi)b \\
&= h^{(\theta+\phi)}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(h^{(\theta)})^{(\phi)}(x) &= (h^{(\theta)}(x))^{(\phi)} = (x + \theta b)^{(\phi)} = x + \phi \theta b = x + \theta \phi b \\
&= h^{(\theta\phi)}
\end{aligned}$$

Caso 2: $m \neq 1$

$$\begin{aligned}
 h^{(\theta)}h^{(\phi)}(x) &= h^{(\theta)}(h^{(\phi)}(x)) = m^\theta(m^\phi x + (1 - m^\phi)s) + (1 - m^\theta)s \\
 &= m^{\theta+\phi}x + \cancel{m^\theta s} - m^{\theta+\phi}s + s - \cancel{m^\theta s} \\
 &= m^{\theta+\phi}x + (1 - m^{\theta+\phi})s \\
 &= h^{(\theta+\phi)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (h^{(\theta)})^{(\phi)}(x) &= (h^{(\theta)}(x))^{(\phi)} = (m^\theta + (1 - m^\theta)s)^{(\phi)} = (m^\theta)^\phi + (1 - (m^\theta)^\phi)s \\
 &= m^{\theta\phi} + (1 - m^{\theta\phi})s \\
 &= h^{(\theta\phi)}
 \end{aligned}$$

isso encerra a prova desse item.

Prova do item (iii): Tomando $f(x) = rx + d$ temos que $f^{-1}(x) = r^{-1}x - r^{-1}d$. Assim,

$$\begin{aligned}
 fhf^{-1}(x) &= fh(r^{-1}x - r^{-1}d) = f(m(r^{-1}x - r^{-1}d) + b) \\
 &= f(mr^{-1}x - mr^{-1}d + b) \\
 &= r(mr^{-1}x - mr^{-1}d + b) + d \\
 &= mx - md + rb + d \\
 &= mx + (rb + d - md)
 \end{aligned}$$

Caso 1: $m = 1$

$$\begin{aligned}
 (fhf^{-1})^{(\theta)}(x) &= (mx + (rb + d - md))^\theta = (x + rb)^\theta = x + \theta rb \\
 &= x - d + r\theta b + d \\
 &= r(r^{-1}x - r^{-1}d + \theta b) + d \\
 &= f(r^{-1}x - r^{-1}d + \theta b) \\
 &= fh^{(\theta)}(r^{-1}x - r^{-1}d) \\
 &= fh^{(\theta)}f^{-1}(x)
 \end{aligned}$$

Caso 2: $m \neq 1$

Por um lado, como já conhecemos $fhf^{-1}(x)$ temos

$$\begin{aligned}
 (fhf^{-1})^{(\theta)}(x) &= m^\theta x + (1 - m^\theta) \frac{(rb + d - md)}{(1 - m)} \\
 &= m^\theta x + (1 - m^\theta) \frac{rb}{(1 - m)} + (1 - m^\theta) \frac{\cancel{d(1 - m)}}{\cancel{(1 - m)}} \\
 &= m^\theta x + (1 - m^\theta) \frac{rb}{(1 - m)} + (1 - m^\theta)d \\
 &= m^\theta x - m^\theta d + (1 - m^\theta) \frac{rb}{(1 - m)} + d
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 fh^{(\theta)}f^{-1}(x) &= fh^{(\theta)}(f^{-1}(x)) = fh^{(\theta)}(r^{-1}x - r^{-1}d) \\
 &= f(m^\theta(r^{-1}x - r^{-1}d) + (1 - m^\theta)\frac{b}{(1 - m)}) \\
 &= r(m^\theta(r^{-1}x - r^{-1}d) + (1 - m^\theta)\frac{b}{(1 - m)}) + d \\
 &= r(m^\theta r^{-1}x - m^\theta r^{-1}d + (1 - m^\theta)\frac{b}{(1 - m)}) + d \\
 &= m^\theta x - m^\theta d + (1 - m^\theta)\frac{rb}{(1 - m)} + d
 \end{aligned}$$

disso, temos que $(fhf^{-1})^{(\theta)}(x) = fh^{(\theta)}f^{-1}(x)$.

Prova do item (iv): Se $m = 1$, então $h^{(\theta)}(x) = x + \theta b$, assim

$$h^{(\theta)}(x) = t \implies x + \theta b = t \implies x + \theta b = t \implies \theta = \frac{t - x}{b}$$

observamos que b é diferente de zero, pois caso contrário h seria a identidade. Portanto, θ existe e é único.

Se $m \neq 1$, então $h^{(\theta)}(x) = m^\theta x + (1 - m^\theta)s$. Assim,

$$h^{(\theta)}(x) = t \implies m^\theta x + (1 - m^\theta)s = t \implies m^\theta = \frac{t - s}{x - s}$$

então,

$$\theta = \ln \left(\frac{t - s}{x - s} \right) \frac{1}{\ln m}.$$

Uma vez que $m > 0$ e $m \neq 1$ resulta que θ existe. Observamos que θ é unicamente determinado por x e t . \square

Na situação do Lema 10 item (iv), seja $\theta(x, t)$ o único número real no qual satisfaz $h^{(\theta(x, t))}(x) = t$. Algumas propriedades elementares da função $\theta(-, -)$ listada no próximo lema facilita a conclusão de resultados mais a frente.

Lema II. Dado $h \in L(\mathbb{R})$, assumamos que x, y, r e t pertencem ao mesmo orbital infinito de h . Então,

$$(i) \theta(x, x) = 0 \text{ e } \theta(x, y) + \theta(y, r) = \theta(x, r);$$

$$(ii) \theta(x, r) = -\theta(r, x);$$

$$(iii) \theta(x, r) - \theta(x, t) \text{ é um inteiro se, e somente se, } r \text{ e } t \text{ pertencem a mesma órbita de } h;$$

$$(iv) \theta(x, r) - \theta(y, r) \text{ é um inteiro se, e somente se, } x \text{ e } y \text{ pertencem a mesma órbita de } h.$$

Prova: Prova item (i):

O fato que $\theta(x, x) = 0$ é direto, uma vez que para $m = 1$ temos que $\theta = \frac{x-x}{b} = 0$ e para $m \neq 1$ temos $\theta = \ln\left(\frac{x-s}{x-s}\right) \frac{1}{\ln m} = \ln(1) \frac{1}{\ln m} = 0$. Vejamos que $\theta(x, y) + \theta(y, r) = \theta(x, r)$, para isso observamos;

$$h^{(\theta(x,y))}(x) = y$$

$$h^{(\theta(y,r))}(y) = r$$

$$h^{(\theta(x,r))}(x) = r.$$

Agora, notemos que

$$\begin{aligned} h^{(\theta(x,r))}(x) &= h^{(\theta(y,r))}(y) = h^{(\theta(y,r))}(h^{(\theta(x,y))}(x)) = h^{(\theta(y,r))}h^{(\theta(x,y))}(x) \\ &= h^{(\theta(y,r)+\theta(x,y))}(x) \\ &= h^{(\theta(x,y)+\theta(y,r))}(x) \end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamos o Lema 10 item (ii) e a última igualdade é fácil de ver que acontece. Portanto, pelo Lema 10 item (iv) segue que $\theta(x, y) + \theta(y, r) = \theta(x, r)$.

Prova do item (ii): Usando fortemente o item (i) temos

$$\theta(x, r) + \theta(r, x) = \theta(x, x) = 0$$

portanto,

$$\theta(x, r) = -\theta(r, x).$$

Prova do item (iii):

Por um lado, suponhamos que $\theta(x, r) - \theta(x, t) = n$ é inteiro. Agora, notemos que o item (ii) implica que $-\theta(x, t) = \theta(t, x)$ e o item (i) implica que $\theta(t, x) + \theta(x, r) = \theta(t, r) = n$. Usando o Lema 10 item (i) segue que

$$h^n(t) = h^{(n)}(t) = h^{(\theta(t,r))}(t) = r$$

como queríamos.

Por outro lado, suponhamos que r e t pertencem a mesma órbita de h . Então, $h^n(t) = r$ para algum inteiro n . O Lema 10 item (i) implica que, $h^{(n)}(t) = h^n(t) = r$. Pelo fato de r e t pertencerem a mesma órbita de h tem-se que r e t pertencem ao mesmo orbital, e assim pelo Lema 10 item (iv) existe um único $\theta(t, r)$ tal que $h^{(\theta(t,r))}(t) = r$. Isso nos permite concluir que $n = \theta(t, r)$. Agora, sabemos que $\theta(t, x) + \theta(x, r) = \theta(t, r) = n$ e $-\theta(x, t) = \theta(t, x)$. Portanto, $\theta(x, r) - \theta(x, t) = n$ é inteiro. Isso completa a prova.

Prova item (iv):

Notemos que do item (ii) temos que $\theta(x, r) = -\theta(r, x)$ e $-\theta(y, r) = \theta(r, y)$. Então, segue que

$$\begin{aligned} \theta(x, r) - \theta(y, r) &= -\theta(y, r) + \theta(x, r) \\ &= \theta(r, y) - \theta(r, x) \end{aligned}$$

portanto, a prova desse item segue direto do item (iii). Assim, terminamos a prova do Lema 11. \square

Seja g uma função de um ressalto em $PLF(0, 1)$, e seja U seu orbital infinito. O invariante Σ^g vai ser uma tripla $(\Sigma_1^g, \Sigma_2^g, \Sigma_3^g)$. Como g possui um único ressalto a tripla ordenada $(\Sigma_1^g, \Sigma_2^g, \Sigma_3^g)$ é

(i) Σ_1^g é 1 ou -1 ;

(ii) Σ_2^g está em \mathbb{R}_+ ;

(iii) Σ_3^g é uma classe de equivalência de funções finitas de S^1 para \mathbb{R}_+ .

A componente Σ_1^g é o valor da função ϵ_g em U . As componentes Σ_2^g e Σ_3^g vão ser calculado assumindo que $\Sigma_1^g = 1$. Para fazer isso, substituímos g por g^{-1} se $\Sigma_1^g = -1$. Até que afirmemos o contrário, vamos assumir que $\Sigma_1^g = 1$. Para definir Σ_2^g quando $\Sigma_1^g = 1$, escolhemos o ponto $z \in U$ tal que $z = \min(B(g) \cap U)$. Então, Σ_2^g vai ser $g'_-(z)$ que é a inclinação inicial.

Com o propósito de definir Σ_3^g , vamos estabelecer uma correspondência bijetiva entre o conjunto das órbitas de g em U e os pontos de S^1 . Escolhemos $z \in U$ como acima e seja $V = \{s \in U \mid s \leq z\}$. Notemos que $B(g) \cap V \subseteq \{z\}$. Definimos $g'_-(z) = m$ e observamos que se $t \in V$ temos $g'_-(t) = m$. Existe um elemento $b \in \mathbb{R}$ tal que se $t \in V$, então $g(t) = mt + b$. A função $x \rightarrow mx + b$ denotaremos por g_V . Observamos que dois pontos em $g(V)$ pertencem a mesma órbita de g se, e somente se, eles pertencem a mesma órbita de g_V .

Para cada $x \in U$, pretendemos definir a função μ_g^x . Para fazer isso, seja $\theta(-, -)$ a função associada a g_V definida depois do Lema 10, e escolhemos $i \in \mathbb{Z}$ de modo que $y = g^i(x)$ está em V . Dado $s \in U$, escolhemos $j \in \mathbb{Z}$ de modo que $t = g^j(s)$ está em $g(V)$. Dessa forma definimos $\mu_g^x(s) = e^{2\pi i \theta(y, t)}$.

Vamos mostrar que $\mu_g^x(s)$ é bem definida, isto é, não depende da escolha do i e j . Sejam i_0 e j_0 distintos de i e j e que satisfazem as mesmas condições com $y_0 = g^{i_0}(x)$ e $t_0 = g^{j_0}(s)$. Então, precisamos mostrar que a igualdade $e^{2\pi i \theta(y, t)} = e^{2\pi i \theta(y_0, t_0)}$ é verdadeira. Observamos que

$$\begin{aligned} e^{2\pi i \theta(y, t)} &= e^{2\pi i \theta(y, t_0)} \\ &= e^{2\pi i \theta(y_0, t_0)}. \end{aligned}$$

Em que na primeira e segunda igualdade usamos o Lema 11 item (iii) e (iv) respectivamente, no qual garante que $\theta(y, t) - \theta(y, t_0)$ e $\theta(y, t_0) - \theta(y_0, t_0)$ são inteiros, uma vez que y, t, y_0, t_0 pertencem ao mesmo orbital U . E também $\mu_g^x(s)$ depende somente da órbita de s e x sobre g .

Usando o Lema 11 item (iii), segue que μ_g^x produz uma correspondência biunívoca entre as órbitas de g em U e os pontos de S^1 . Veja $(\mu_g^x)^{-1}$ como uma função no qual associa cada ponto

de S^1 a uma órbita de g em U . Com essa conversão, definimos a função $\sigma^x[g] : S^1 \rightarrow \mathbb{R}_+$ como segue: Dado $q \in S^1$ definimos $\sigma^x[g](q)$ sendo $\pi_g((\mu_g^x)^{-1}(q))$ em que π_g é a função em órbitas como definida na Definição 26.

Para converter $\sigma^x[g]$ em um invariante de g , estudamos a dependência de $\sigma^x[g]$ em x . (Uma vez que μ_g^x depende somente da órbita de x , segue que $\sigma^x[g]$ depende somente da órbita de x .)

Lema 12. *Dados $x, y \in U$, seja ρ a rotação de S^1 tal que carrega 1 para $\mu_g^x(y)$. Então, $\sigma^y[g] = \sigma^x[g]\rho$*

Prova: Vamos provar que $\sigma^y[g](q) = \sigma^x[g]\rho(q)$ para todo $q \in S^1$, isto é, $\pi_g((\mu_g^y)^{-1}(q)) = \pi_g((\mu_g^x)^{-1}\rho(q))$. Para isso provaremos que $(\mu_g^y)^{-1} = (\mu_g^x)^{-1}\rho$, que é o mesmo que provar $\mu_g^x = \rho\mu_g^y$. Podemos assumir que $x, y \in V$, e avaliamos μ_g^x e $\rho\mu_g^y$ em um ponto $s \in g(V)$.

$$\mu_g^x(s) = e^{2\pi i\theta(x,s)} = e^{2\pi i(\theta(x,y)+\theta(y,s))} = e^{2\pi i\theta(x,y)}e^{2\pi i\theta(y,s)} = \rho(\mu_g^y(s))$$

onde na segunda igualdade usamos o Lema 11 item (i). E assim, temos o resultado desejado. Em particular $\sigma^x[g]$ e $\sigma^y[g]$ são equivalentes.

Agora, vamos completar a definição de Σ^g . Se g é uma função de um ressalto, seja U o orbital infinito de g . Quando $\Sigma_1^g = 1$, Σ_3^g é definido como sendo a classe de equivalência da função $\sigma^x[g]$ onde $x \in U$ é escolhido arbitrariamente. Quando $\Sigma_1^g = -1$, definimos Σ_2^g igual a $\Sigma_2^{g^{-1}}$ e Σ_3^g igual a $\Sigma_3^{g^{-1}}$.

Para finalizar essa seção vejamos que a definição de Σ dada no Capítulo 3 coincide com a definição dada aqui. Que o Σ_1 e Σ_2 coincidem é simples de ver, então resta mostrar que a definição de Σ_3 coincidem. Assuma que $g \in PLF(0, 1)$ é uma função de um ressalto e U o orbital infinito de g tal que $\Sigma_1^g = 1$. Seja p o menor nó de g em U , isso é, $p = \min\{B(g) \cap U\}$ e p^* o menor nó de g em U tal que $\pi_g(p^*) \neq 1$. Então, para $s \in [0, 1)$

$$\psi_g(s) = \pi_g(\lambda^s(r - p_1) + p_1).$$

Onde p_1 é o extremo esquerdo de U , $r = g^n(p^*)$ e n é qualquer inteiro negativo tal que $r \in (p_1, p) \subset V = \{x \in U \mid s \leq p\}$. Considerando a função

$$\begin{aligned} \Lambda : [0, 1) &\longrightarrow [r, g(r)) \\ s &\longmapsto \Lambda(s) = \lambda^s(r - p_1) + p_1. \end{aligned}$$

Observamos que $\Lambda(s) \in [r, g(r))$ para todo $s \in [0, 1)$. De fato, como $(r - p_1) > 0$, λ é maior que 1 e $s \in [0, 1)$ a função Λ é crescente. Os extremos do intervalo são:

$$\Lambda(0) = \lambda^0(r - p_1) + p_1 = r$$

$$\Lambda(1) = \lambda^1(r - p_1) + p_1 = g(r)$$

acima usamos que $g(x) = g_V(x) = \lambda(x - p_1) + p_1$ para $x \in V$. Por isso, $\Lambda(s) \in [r, g(r))$. Vejamos que todos os representantes das órbitas de g pertencem ao intervalo $[r, g(r))$, para isso precisamos mostrar que dado $y \in U$ existe um $t \in [r, g(r))$ e um $n \in \mathbb{Z}$ tal que $g^n(y) = t$. Primeiro, dado qualquer $x \in U$ temos que $U = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} [g^i(x), g^{i+1}(x))$, em particular para $x = r$ tem-se $U = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} [g^i(r), g^{i+1}(r))$, então existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $y \in [g^i(r), g^{i+1}(r))$, isso implica que $g^{-i}(y) \in [r, g(r))$, ou seja, $r \leq g^{-i}(y) < g(r)$. Portanto, basta tomar $t = g^{-i}(y)$ e $n = -i$.

Relembramos que a função $(\mu_g^r)^{-1}$ é uma função bijetiva que pega S^1 e leva no conjunto dos representantes das órbitas de g . Pelo que foi dito no parágrafo anterior por conveniência podemos tomar $[r, g(r))$ como o conjunto dos representantes da órbita de g . Consideramos a função $(\mu_g^r)^{-1} \phi : [0, 1) \rightarrow S^1 \rightarrow [r, g(r))$ onde ϕ é o homeomorfismo de $[0, 1)$ para S^1 dado por $f(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$. Vamos mostrar que $(\mu_g^r)^{-1} \phi = \Lambda$ o que é equivalente a mostrar que $\mu_g^r \Lambda = \phi$. Tomando $s \in [0, 1)$

$$\begin{aligned} \mu_g^r \Lambda(s) &= \mu_g^r(\Lambda(s)) = \mu_g^r(\lambda^s(r - p_1) + p_1) \\ &= e^{2\pi i \theta(r, \lambda^s(r - p_1) + p_1)} \\ &= e^{2\pi i s} \\ &= (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)) \\ &= \phi(s) \end{aligned}$$

onde a quarta igualdade vem do Lema 10 item (iv).

Agora, temos condições para mostrar que $\sigma^r[g] = \psi_g \phi$

$$\sigma^r[g](q) = \pi_g((\mu_g^r)^{-1}(q)) = \pi_g(\lambda^s(r - p_1) + p_1) = \psi_g(s)$$

para algum $s \in [0, 1)$.

4.2 Resultados Complementares

Começamos essa seção com o Lema 13, esse resultado é apenas um lema técnico que usamos algumas vezes como apoio para provar outros resultados.

Lema 13. Para $g, f \in PLF(0, 1)$ e $x \in (0, 1)$ temos que

$$(fgf^{-1})^* f(x) = (f^* g(x))(g^*(x))(f^*(x))^{-1}$$

Prova: Primeiro, desejamos mostrar que $(f^{-1})^*(x) = (f^* f^{-1}(x))^{-1}$

$$1 = 1^*(x) = (ff^{-1})^*(x) = (f^* f^{-1}(x))(f^{-1})^*(x) \quad (4.1)$$

onde a primeira igualdade é clara e a última igualdade é por definição. Agora, desejamos mostrar que $(gf^{-1})^*(x) = (g^* f^{-1}(x))(f^* f^{-1}(x))^{-1}$. Vejamos

$$(gf^{-1})^*(x) = (g^* f^{-1}(x))(f^{-1})^*(x) = (g^* f^{-1}(x))(f^* f^{-1}(x))^{-1} \quad (4.2)$$

na primeira igualdade usamos a definição e na segunda usamos 4.1. Por fim, vamos mostrar o lema

$$\begin{aligned} (fgf^{-1})^* f(x) &= f^*(gf^{-1}(f(x)))((gf^{-1})^*(f(x))) \\ &= (f^*g(x))(g^*f^{-1}(f(x)))(f^*f^{-1}(f(x)))^{-1} \\ &= (f^*g(x))(g^*(x))(f^*(x))^{-1} \end{aligned}$$

onde na primeira igualdade usamos a definição e na segunda usamos 4.2. E o resultado segue. \square

O Lema 13 é um resultado auxiliar que usamos na demonstração da Proposição 9.

Lema 14. *Sejam $f, g \in PLF(0, 1)$ e seja $h = fgf^{-1}$. Se $\{x_n\}$ é um orbital infinito de g e $\{y_n = f(x_n)\}$ a correspondente órbita de h . Então, $\pi_g(x_n) = \pi_h(y_n)$.*

Prova: Pelo Lema 13 temos que $(fgf^{-1})^* f(x_n) = (f^*(x_{n+1}))(g^*(x_n))(f^*(x_n))^{-1}$ para $x = x_n$. Disso,

$$\begin{aligned} \pi_h(y_n) &= \prod_{n=-\infty}^{\infty} h^*(y_n) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} (fgf^{-1})^*(f(x_n)) \\ &= \prod_{n=-\infty}^{\infty} ((f^*(x_{n+1}))(g^*(x_n))(f^*(x_n))^{-1}) \\ &= \prod_{n=-\infty}^{\infty} f^*(x_{n+1}) \prod_{n=-\infty}^{\infty} (f^*(x_n))^{-1} \prod_{n=-\infty}^{\infty} g^*(x_n) \\ &= \prod_{n=-\infty}^{\infty} g^*(x_n) \\ &= \pi_g(x_n) \end{aligned}$$

em que na terceira igualdade usamos a observação inicial e na penúltima igualdade usamos que $\prod_{n=-\infty}^{\infty} f^*(x_{n+1}) \prod_{n=-\infty}^{\infty} (f^*(x_n))^{-1} = 1$ uma vez que o número de nós de f é finito. \square

Proposição 9. *Seja g uma função de um resalto em $PLF(0, 1)$ e seja f um elemento de $PLF(0, 1)$. Então, fgf^{-1} é uma função de um resalto e $\Sigma^{fgf^{-1}} = \Sigma^g$.*

Prova: Pelo Lema 6 temos fgf^{-1} é uma função de um resalto. Vejamos agora a segunda parte, pelos Lemas 6 e 8 temos que $\Sigma_1^{fgf^{-1}} = \Sigma_1^g$ e o Lema 8 nos dá que $\Sigma_2^{fgf^{-1}} = \Sigma_2^g$. Para completar a prova resta mostrar que $\Sigma_3^{fgf^{-1}} = \Sigma_3^g$. Escolhemos $x \in U$ de modo que $V = \{s \in U \mid s \leq x\}$ é disjunto de $B(f) \cup B(g) \cup g^{-1}(B(f))$. Vamos mostrar que

$$\sigma^{f(x)}[fgf^{-1}] = \sigma^x[g]. \quad (4.3)$$

Por conveniência tomamos $h = fgf^{-1}$. Sejam f_V, g_V e $h_{f(V)}$ as funções em $L(\mathbb{R})$ definida pela restrição de f, g e h em V, V e $f(V)$, respectivamente. Observamos que $h_{f(V)} = f_V g_V f_V^{-1}$. Para provar 4.3, dado $q \in S^1$, escrevemos $q = e^{2\pi i\theta}$ em que $\theta \leq 0$ e seja $g_V^{(\theta)}(x) = s$. Segue que $\mu_g^x(s) = q$. Usando o Lema 10 item (iii), temos que

$$\begin{aligned} f(s) &= f(g_V^{(\theta)}(x)) = f(g_V^{(\theta)}(f^{-1}f_V(x))) = (f_V g_V^{(\theta)} f^{-1})f_V(x) = (f_V g_V f_V^{-1})^{(\theta)} f(x) \\ &= h_{f(V)}^{(\theta)} f(x) \end{aligned}$$

desse modo também temos que $\mu_h^{f(x)} f(s) = e^{2\pi i\theta} = q$. Notemos que

$$\begin{aligned} \sigma^x[g](q) &= \pi_g((\mu_g^x)^{-1}(q)) = \pi_g(s) \\ \sigma^{f(x)}[h](q) &= \pi_h((\mu_h^{f(x)})^{-1}(q)) = \pi_h(f(s)) \end{aligned}$$

pelo Lema 14, $\pi_g(s) = \pi_g(s_0) = \pi_h(f(s_0)) = \pi_h(f(s))$, segue que $\sigma^x[g](q) = \sigma^{f(x)}[h](q)$, assim 4.3 está provado. Segue que, $\Sigma_3^{fgf^{-1}} = \Sigma_3^g$ isso completa a prova da proposição. \square

Lema 15. *Seja l uma função encurralada em $PLF(0, 1)$, e seja U o orbital infinito de l . Sejam $z = \min(B(l) \cap U)$, $V = \{s \in U \mid s \leq z\}$ e l_V um elemento de $L(\mathbb{R})$ que coincide com l em V .*

(i) *Se $q = e^{2\pi i\theta} \in S^1$ com $0 \leq \theta < 1$, então $\sigma^z[l](q) = l^*(l_V^{(\theta)}(z))$;*

Assumindo ainda que $\{q \in S^1 \mid \sigma^z[l](q) \neq 1\} = \{q_0, q_1, \dots, q_{k-1}\}$ onde $q_j = e^{2\pi i\theta_j}$ e $0 \leq \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{k-1} < 1$

(ii) $\theta_0 = 0$;

(iii) $B(l) \cap U = \{l_V^{(\theta_0)}(z), l_V^{(\theta_1)}(z), \dots, l_V^{(\theta_{k-1})}(z)\}$ com $l_V^{(\theta_0)}(z) < l_V^{(\theta_1)}(z) < \dots < l_V^{(\theta_{k-1})}(z)$;

(iv) *Cada $l^*(l_V^{(\theta_j)}(z)) = \sigma^z[l](q_j)$.*

Prova: Uma vez que l é uma função encurralada e $z = \min(B(l) \cap U)$, então $B(l) \cap U \subseteq [z, l(z)) = [l_V^{(0)}(z), l_V^{(1)}(z))$. Então, uma órbita $\{x_n\}$ representado por x_0 tem $\pi_l(\{x_n\}) = l^*(x_0)$ desde que $x_0 = l_V^{(\theta)}(z)$ para algum θ com $0 \leq \theta < 1$. O item (i) agora é uma combinação dessa observação junto com a definição de $\sigma^z(l)$, isto é,

$$\sigma^z[l](q) = \pi_l((\mu_l^z)^{-1}(q)) = \pi_l(\{x_n\}) = l^*(x_0) = l^*(l_V^{(\theta)}(z)).$$

Os outros itens segue diretamente disso. \square

Definição 28. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um homeomorfismo linear por partes de \mathbb{R} para \mathbb{R} . Seja $PLF(\mathbb{R})$ o grupo de todos os homomorfismos lineares por partes $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescentes no qual $B(f)$ é um conjunto finito.*

Seja (a, b) um intervalo aberto em \mathbb{R} , podemos visualizar $PLF(a, b)$ como um subgrupo de $PLF(\mathbb{R})$ da seguinte maneira, $PLF(a, b) = \{g \in PLF(\mathbb{R}) \mid \text{se } x \notin (a, b) \implies g(x) = x\}$.

Definição 29. Seja $l \in PLF(\mathbb{R})$ tal que possui um único orbital infinito U . Dizemos que l é uma função encurralada se ou $B(l) \cap U = \emptyset$ ou se $z = \min(B(l) \cap U)$, então $(B(l) \cap U) \subseteq [z, g^\epsilon(z))$ em que $\epsilon = \epsilon_f(x)$, para $x \in U$.

Observamos que se $l \in PLF(\mathbb{R})$ é também um elemento de $PLF(0, 1)$ as definições de funções encurraladas em $PLF(\mathbb{R})$ e $PLF(0, 1)$ para l coincide. Uma quádrupla ordenada $\Omega = (m, \sigma, z, w)$ vai ser chamada uma quádrupla válida se satisfaz

- (1) $m \in \mathbb{R}_+$;
- (2) $\sigma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função no qual o conjunto $B(\sigma) = \{q \in S^1 \mid \sigma(q) \neq 1\}$ é finito e $1 \in B(\sigma)$;
- (3) $z, w \in (0, 1)$ com $z < w$

Proposição 10. Seja $\Omega = (m, \sigma, z, w)$ uma quádrupla válida. Então, existe uma única função encurralada $l \in PLF(\mathbb{R})$ com $\Sigma_1 = 1$ no qual satisfaz

- (i) $l(z) = w$ (em particular, z pertence o orbital infinito de l , no qual, vamos denotar por U ;
- (ii) $\Sigma_2^l = m$;
- (iii) $\sigma^z[l] = \sigma$;
- (iv) $z = \min(B(l) \cap U)$.

Prova: Seja Ω como na hipótese, l vai denotar a função encurralada em $PLF(\mathbb{R})$ com $\Sigma_1^l = 1$ no qual vamos assumir que satisfaz (i), (ii), (iii) e (iv), pretendemos deduzir as propriedades de l , isto é, desejamos mostrar que l é única e que ela existe.

Sabemos que o gráfico de l contém o ponto (z, w) e que a inclinação no ponto z e $l'_-(z)$ é m . Uma vez que $z < w$, o ponto (z, w) está acima da diagonal $y = x$. Seja l_V a função linear $l_V(x) = m(x - z) + w$ no qual deve coincidir com l em alguma vizinhança do lado esquerdo de z . Suponhamos que $k = |B(\sigma)|$ e seja $B(\sigma) = \{q_0, q_1, \dots, q_{k-1}\}$ onde cada $q_j = e^{2\pi i \theta_j}$ com $0 \leq \theta_1 < \dots < \theta_{k-1} < 1$. Da definição de Ω , temos que $q_0 = 1$, então $\theta_0 = 0$. Para $j = 0, 1, \dots, k - 1$, seja $z_j = l_V^{(\theta_j)}(z)$. Temos

$$z = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{k-1} < l_V^{(1)}(z) = w \quad (4.4)$$

obtemos que $B(l) \cap U = \{z_0, z_1, \dots, z_{k-1}\}$ do Lema 15 e das nossas afirmações (i) – (iv), então para cada i tem-se $l^*(z_i) = \sigma(q_i)$.

Seja $m_{-1} = m$ e indutivamente definimos $m_j = (l^*(z_j))^{-1} m_{j-1}$ para $0 \leq j < k$. Uma vez que $B(l) \cap U$ é exatamente o conjunto $\{z_0, \dots, z_{k-1}\}$ e m é a inclinação de l no lado esquerdo de $z = z_0$, obtemos que cada m_j com $0 \leq j < k - 1$ a inclinação de l em $[z_j, z_{j+1}]$ e m_{k-1} é a

inclinação de l no lado direito de z_{k-1} . Cada uma dessas inclinações é positiva de modo que $l(z_j) > l(z) = w$ para $0 \leq j < k$. Mas, observamos em 4.4 que $z_j < w$ para $0 \leq j < k$. Então, $z_j < l(z_j)$ para $0 \leq j < k$, ou seja, o gráfico de l em $[z, w]$ está inteiramente acima da diagonal $y = x$.

Agora identificamos o comportamento de l em $[z, w]$, e uma vez que conhecemos as inclinações m_{-1} e m_{k-1} , também conhecemos o comportamento de l em alguma vizinhança aberta de $[z, w]$. Como $l(x) > x$ para todo x em $[z, w]$, e $[z, w]$ contém todos elementos de $B(l) \cap U$, sabe-se que podemos estender nosso conhecimento de l para todo elemento de U . Em particular, sabemos que existe um ponto fixo de l (cuja localização pode ser calculada) no lado esquerdo de z se, e somente se, $m_{-1} > 1$ e sabemos que existe um ponto fixo de l (cuja localização pode ser calculada) no lado direito de w se, e somente se, $m_{k-1} < 1$. Então, existe uma função de um ressalto em $PLF(\mathbb{R})$ que tem todas as propriedades requeridas de l . Todo o comportamento dessa função foi completamente determinado pelos dados fornecidos de Ω mostrando que l é única. \square

A seguir apresentamos alguns resultados para provar a Proposição 11.

Definição 30. Dado $a \in (0, 1)$ e $r \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$ definimos $\Gamma(a, r) = \{\gamma \in PLF(0, 1) \mid B(\gamma) = \{a\}, \gamma^*(a) = r\}$.

Afirmamos que $\Gamma(a, r)$ não é vazio. De fato, definimos $\gamma_1(x) = cx$ e $\gamma_2(x) = ex + b$ e vamos encontrar c, e e b todas em função de a e r . Já temos que $\gamma_1(0) = 0$ e vamos impor as primeiras condições $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ e $\gamma_2(1) = 1$, então

$$\gamma_1(a) = \gamma_2(a) \implies ca = ea + b \implies b = ca - ea$$

$$\gamma_2(1) = 1 \implies e + ca - ea = 1 \implies e - ea = 1 - ca \implies e = \frac{1 - ca}{1 - a}.$$

Agora, vamos impor a condição que $\frac{1-ca}{1-a} = r$

$$\frac{1-ca}{1-a} = r \implies 1 - ca = (1 - a)cr \implies ca + cr - acr = 1 \implies c = \frac{1}{a + r - ar}.$$

Disso,

$$e = \frac{1 - \left(\frac{1}{a+r-ar}\right)a}{1 - a}, b = \left(\frac{1}{a + r - ar}\right)a - ea.$$

Por fim, temos que verificar que $c > 0$, $ca < 1$ e $e > 0$. Começamos por $c > 0$. A desigualdade $a + r > ar$ é verdadeira, uma vez que $a \in (0, 1)$, e isso implica diretamente que $c > 0$. Para $ca < 1$, suponhamos por contradição que $ca \geq 1$, então

$$\left(\frac{1}{a + r - ar}\right)a \geq 1 \implies a \geq a + r - ar \implies 0 \geq r - ar$$

a última desigualdade é um absurdo uma vez que $a \in (0, 1)$. Portanto, $ca < 1$. Por último $e > 0$, isso segue direto do fato que $ca < 1$ e $a \in (0, 1)$. Então,

$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma_1(x) = cx; & 0 < x \leq a \\ \gamma_2(x) = ex + b; & a \leq x < 1 \end{cases}$$

é um elemento de $\Gamma(a, r)$

Proposição 11. *Seja $g \in PLF(0, 1)$ uma função de um ressalto. Então, g é conjugada para uma função encurralada.*

Para provar a Proposição 11 precisamos de uma notação para expressar como $B(g)$ é distribuído sobre o orbital infinito de g . Em seguida, identificamos como essa distribuição é afetada quando g é conjugada por elementos específicos de $PLF(0, 1)$. A Proposição 11 segue disso.

Dado $g \in PLF(0, 1)$ e $x \in (0, 1)$ com $Orbl(g, x)$ um orbital infinito, seja $\epsilon = \epsilon_f(x)$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ seja $B(g, x)_n = |B(g) \cap [x_n, x_{n+\epsilon}]|$. Chamaremos isso da distribuição de $B(g)$ em $Orbl(g, x)$. A dependência de x não é um problema. Observamos que g é encurralada em $Orbl(g, x)$ se, e somente se, para algum y em $Orbl(g, x)$ tivermos $B(g, y)_n \neq 0$ para no máximo um $n \in \mathbb{Z}$. Os próximos resultados ajudam a comparar as distribuições de $B(g)$ e $B(fgf^{-1})$.

Lema 16. *Para qualquer f e g em $PLF(0, 1)$, se $y \in Orbl(g, x)$ tem-se que $y \in [x_n, x_{n+\epsilon})$, então $f(y) \in [f(x_n), f(x_{n+\epsilon})) = [(f(x))_n, (f(x))_{n+\epsilon})$ onde $(f(x))_i = (fgf^{-1})^i(f(x))$ e $\epsilon = \epsilon_g(x)$.*

Prova: Que $f(y) \in [f(x_n), f(x_{n+\epsilon}))$ é claro, resta mostrar que

$$[f(x_n), f(x_{n+\epsilon})) = [(f(x))_n, (f(x))_{n+\epsilon})$$

$$(f(x))_n = (fgf^{-1})^n(f(x)) = fg^n f^{-1}(f(x)) = f(g^n(x)) = f(x_n)$$

$$(f(x))_{n+\epsilon} = (fgf^{-1})^{n+\epsilon}(f(x)) = fg^{n+\epsilon} f^{-1}(f(x)) = f(g^{n+\epsilon}(x)) = f(x_{n+\epsilon})$$

como queríamos. \square

Os próximos dois lemas compara a distribuição de $B(g)$ e $B(fgf^{-1})$ para elementos específicos f de $PLF(0, 1)$.

Lema 17. *Se para $f, g \in PLF(0, 1)$ e $x \in (0, 1)$ tem-se que $Orbl(g, x)$ é infinito e $B(f)$ é disjunto de $Orbl(g, x)$, então para todo $n \in \mathbb{Z}$ vale a igualdade $B(g, x)_n = B(fgf^{-1}, f(x))_n$.*

Prova: Seja $\epsilon = \epsilon_g(x)$ e seja y pertencente a $[x_n, x_{n+\epsilon})$ de modo que $f(y) \in [f(x_n), f(x_{n+\epsilon}))$. Do Lema 13 temos

$$(fgf^{-1})^*(f(y)) = (f^*(g(y)))(g^*(y))(f^*(y))^{-1}.$$

Ambos y e $g(y)$ estão na $Orbl(g, x)$ e uma vez que $B(f) \cap Orbl(g, x) = \emptyset$ os termos $(f^*(y))^{-1}$ e $(f^*(g(y)))$ são ambos 1. Disso, a igualdade acima se resume em $(fgf^{-1})^*(f(y)) = g^*(y)$. Então, $y \in B(g)$ se, e somente se, $f(y) \in B(fgf^{-1})$. Esse fato junto com o Lema 16 implica que

$$y \in B(g) \cap [x_n, x_{n+1}) \iff f(y) \in B(fgf^{-1}) \cap [(f(x))_n, (f(x))_{n+1})$$

assim, a igualdade desejada vale. \square

Lema 18. *Se para $f, g \in PLF(0, 1)$ e $x \in (0, 1)$ tem-se que $Orbl(g, x)$ é infinito e $\epsilon = \epsilon_g(x)$. Seja $y \in (B(g) \cap [x_n, x_{n+1}))$, e assumindo que $f \in \Gamma(y, g^*(y))$. Então,*

$$B(fgf^{-1}, f(x))_i = \begin{cases} B(g, x)_i, & \text{se } i \neq n, n-1 \\ B(g, x)_n - 1, & \text{se } i = n \\ B(g, x)_{n-1} + \delta, & \text{se } i = n-1 \end{cases}$$

onde $\delta = -1, 0$ or 1 .

Prova: Novamente pelo Lema 13 para $z \in [x_i, x_{i+\epsilon})$ temos que

$$(fgf^{-1})^*(f(z)) = (f^*(g(z)))(g^*(z))(f^*(z))^{-1}$$

Para $z \neq y$ e $g(z) \neq y$, temos $(fgf^{-1})^*(f(z)) = g^*(z)$, então $B(fgf^{-1}, f(x))_i = B(g, x)_i$ quando $i \neq n, n-1$. Quando $z = y$, temos $g(z) \neq y$ e $(fgf^{-1})^*(f(y)) = (g^*(y))(g^*(y))^{-1} = 1$, então $B(fgf^{-1}, f(x))_i = B(g, x)_n - 1$. Quando $z = g^{-1}(y)$, a quantidade $(fgf^{-1})^*(f(g^{-1}(y))) = (f^*(y))(g^*(g^{-1}(y)))(f^*(g^{-1}(y)))^{-1} = (g^*(y))(g^*(g^{-1}(y)))$ não é previsível uma vez que $g^*(g^{-1}(y))$ não é conhecido, isto é, z pode ser nó de g e $f(z)$ ser nó de fgf^{-1} , z pode ser nó de g e $f(z)$ não ser nó de fgf^{-1} e z pode não ser nó de g e $f(z)$ ser nó de fgf^{-1} . \square

Prova da Proposição II: Seja U o orbital infinito de g . O conjunto $B(g) \cap U$ é finito e $U = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [x_n, x_{n+1})$, então existem finitos $n \in \mathbb{Z}$ tal que $B(g) \cap [x_n, x_{n+1})$ é diferente do vazio. Suponhamos que exista mais de um n , pois caso contrário já seria encurralada. Tomando $m > 1$ a quantidade desses n 's, tal que $B(g) \cap [x_n, x_{n+1})$ é diferente do vazio. Aplicando o Lema 18 para o maior desses n 's teremos que a quantidade de n 's para o qual $B(fgf^{-1}) \cap [f(x_n), f(x_{n+1})) \neq \emptyset$ vai ser menor ou igual a m . Podemos aplicar esse processo finitas vezes até chegar que só exista um n tal que $B(fgf^{-1}) \cap [f(x_n), f(x_{n+1})) \neq \emptyset$. \square

Observação 9. *Observamos que dado uma função g de um ressalto em $PLF(0, 1)$ pela Proposição II podemos conjugá-la para uma função encurralada h . Sendo h encurralada, para o primeiro nó de h , seja ele p , temos que $\pi_h(p) \neq 1$. Isso implica que existe um nó p^* de g tal que $\pi_g(p^*) \neq 1$.*

A Proposição 9 da uma condição necessária para duas funções de um ressalto serem conjugadas em $PLF(0, 1)$. Veremos no Teorema 6 que essa condição também é suficiente.

Teorema 6. *Sejam g e h duas funções de um ressalto em $PLF(0, 1)$. Então, g e h são conjugadas em $PLF(0, 1)$ se, e somente se, $\Sigma^g = \Sigma^h$*

Prova: A direção "somente se" é dada na Proposição 9. Para a direção "se", assumimos que $\Sigma^g = \Sigma^h$. Pela Proposição 11, g e h são conjugadas em $PLF(0, 1)$ para uma função encurralada. Pela Proposição 9, a conjugação em $PLF(0, 1)$ preserva o invariante Σ . Portanto, podemos assumir que g e h são ambas encurraladas. Invertendo g e h , se necessário, considerando que $\Sigma_1^g = \Sigma_1^h = 1$. Sejam U e V os orbitais infinitos de g e h respectivamente.

Seja $z = \min\{B(g) \cap U\}$ e $w = \min\{B(h) \cap V\}$. Usando o fato que $\Sigma_3^g = \Sigma_3^h$, existe uma rotação em ρ de S^1 tal que $\sigma^w[h] = \sigma^z[g]\rho$. Tomando $q = \rho(1)$ em S^1 , concluímos que $\sigma^z[g](q) \neq 1$, uma vez que w está em $B(h)$. Seja $B(g) \cap U = \{z_0, z_1, \dots, z_{k-1}\}$ com $z_0 < z_1 < \dots < z_{k-1}$. Uma vez que g é encurralada, existe um J com $0 \leq J < k$ tal que $\mu_g^z(z_J) = q$. Especificamente, $g^*(z_J) = \sigma^z[g](q)$. Pelo Lema 3.18 de (BRIN; SQUIER, 2001, página 4579), existe um elemento f que conjugua g em U , tal que, em particular fgf^{-1} é uma função encurralada em $PLF(0, 1)$ com orbital infinito $f(U)$ e ainda $f(z_J) = \min(B(fgf^{-1}) \cap f(U))$. E pelo Lema 4.10 de (BRIN; SQUIER, 2001, página 4589) a igualdade $\sigma^{z_J}[(fgf^{-1})f] = \sigma^w[h]$ é satisfeita. Substituindo g por fgf^{-1} redefinindo U e z , podemos assumir que $\sigma^z[g] = \sigma^w[h]$.

Precisamos de mais uma conjugação para completar a prova. Suponhamos que $U = (a, b)$ e $V = (c, d)$ e tome $f \in PLF(0, 1)$ tal que as restrições $f : (0, a) \rightarrow (0, c)$, $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$, $f : (b, 1) \rightarrow (d, 1)$ sejam lineares. Novamente substituindo g por fgf^{-1} e redefinindo U , temos agora que $U = V$ e $\sigma^z[g] = \sigma^w[h]$ (isso é verificado de maneira semelhante a demonstração do Lema 7). Sendo que, em complemento, temos $\Sigma_2^g = \Sigma_2^h$, então segue pelo Lema 7 que $g = h$. Logo, pelo fato de $g = h$ concluímos que nossas funções originais g e h são conjugadas em $PLF(0, 1)$, isso completa a prova. \square

Definição 31. *Seja $g \in PLF(0, 1)$ uma função de um ressalto, seja $R(g)$ o subgrupo de $PLF(0, 1)$ gerado por todas as raízes de g .*

Definição 32. *Dado $g \in PLF(0, 1)$ seja $C(g)$ o centralizador de g em $PLF(0, 1)$. Se g é uma função de um ressalto de $PLF(0, 1)$, com orbital infinito U , seja $\tilde{C}(g) = \{f \in C(g) \mid \text{se } x \notin U, \text{ então } f(x) = x\}$*

Teorema 7. (BRIN; SQUIER, 2001, página 4593) *Seja g uma função de um ressalto em $PLF(0, 1)$. Então $\tilde{C}(g) = R(g)$.*

Referências

- BELK, J.; MATUCCI, F. Conjugacy in Thompson's groups. Centre de Recerca Matemàtica, 2008.
- BELK, J.; MATUCCI, F. Conjugacy and dynamics in Thompson's groups. *Geometriae Dedicata*, Springer, v. 169, n. 1, p. 239–261, 2014.
- BRIN, M. G.; SQUIER, C. C. Presentations, conjugacy, roots, and centralizers in groups of piecewise linear homeomorphisms of the real line. Taylor & Francis, 2001.
- CANNON, J. W.; FLOYD, W. J.; PARRY, W. R. Introductory notes on Richard Thompson's groups. *Enseignement Mathématique*, SWETS & ZEITLINGER, v. 42, p. 215–256, 1996.
- CLAY, M.; MARGALIT, D. *Office Hours with a Geometric Group Theorist*. [S.l.]: Princeton University Press, 2017.
- GILL, N.; SHORT, I. Conjugacy in Thompson's group F. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 141, n. 5, p. 1529–1538, 2013.
- GUBA, V.; SAPIR, M. *Diagram groups*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1997. v. 620.
- JOHNSON, D. L. et al. *Presentations of groups*. [S.l.]: Cambridge university press, 1997.
- KASSABOV, M.; MATUCCI, F. The simultaneous conjugacy problem in groups of piecewise linear functions. *Groups, Geometry, and Dynamics*, v. 6, n. 2, p. 279–315, 2012.
- ROBINSON, D. J. *A Course in the Theory of Groups*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 80.
- THOMPSON, R. J. *Handwritten widely circulated notes*. [S.l.]: Unpublished, 1965.