Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

O quadrado tensorial não abeliano e outros funtores homológicos de p-grupos finitos *powerful*

Roberto Junior Dias

Brasília - DF
2023

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Roberto Junior Dias

O quadrado tensorial não abeliano e outros funtores homológicos de p-grupos finitos *powerful*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Noraí Romeu Rocco

Brasília - DF

2023

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

JD541q

Junior Dias, Roberto
O quadrado tensorial não abeliano e outros funtores homológicos de p-grupos finitos powerful / Roberto Junior Dias; orientador Noraí Romeu Rocco. -- Brasília, 2023.
68 p.

Dissertação(Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2023.

1. p-grupo finito. 2. p-grupo powerful. 3. produto tensorial não abeliano. 4. quadrado tensorial não abeliano. I. Romeu Rocco, Noraí, orient. II. Título.

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

O quadrado tensorial não abeliano e outros funtores homológicos de p-grupos finitos *powerful*

Roberto Junior Dias

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília - DF, 02 de junho de 2023.

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Noraí Romeu Rocco
Orientador
MAT/UnB

Prof. Dr. Ricardo Nunes de Oliveira
Membro
IME/UFG

Prof. Dr. Raimundo de Araújo Bastos Júnior
Membro
MAT/UnB

À Deus.
À minha noiva Giovana, minha fonte de inspiração.
À minha mãe Claudineia, minha base.

Agradecimentos

Ao meu pai de coração Mario Sérgio Caseri e à minha mãe Claudineia Guimarães da Silva por todo o apoio.

À minha noiva Giovana Rocha Faria por estar sempre ao meu lado e me incentivar nessa jornada.

Aos meus padrinhos Antonio Faria, Lúcia Valério e Bruno Faria, por todo o convívio com vocês.

Ao meu orientador Noraí Romeu Rocco, por toda a paciência e ajuda desde o início do mestrado, e principalmente na construção dessa dissertação.

Aos meus professores da UnB, em especial aos professores Noraí Romeu Rocco, Daniele Nantes Sobrinho, José Luis Teruel Carretero, Luís Henrique de Miranda, Manuela C. M. Rezende, Martino Garonzi, Raimundo Bastos Júnior, Sheila Campos Chagas, Willian Cintra da Silva e Raquel Carneiro Dörr.

À minha família, em especial ao Adailton Guimarães, Cássio Pereira, Joceli Guimarães, Gisela Guimarães, Ailton Guimarães, Sueli Guimarães, Isadora Caseri, Priscila Guimarães, Iara Caseri e Filipe Moura.

Aos meus amigos, em especial ao Marcus Bernardo, Higor Penhalves, Lucas Petenucci, Gerson Farias, Lucas Oliveira, Maurício Ferreira, Victor Gabriel, Iron Monteiro, Calebe Gomes, Maycon Douglas, Marciano Pavão, Laiali Safa, Jonatan Santos, Bruno Gomes, Gabriella Queiroz, Willian Franco, Emanuel Rodrigues e Natalia Moreira.

Aos meus colegas de turma, em especial ao Marcus Vinícius Ribeiro Bernardo Silvério, German Alejandro Jimenez Franco, André Pereira Araújo, Felipe Gonçalves Netto, Júlia Mitsuno Kato Aiza Alvarez e Paul Martinez Vilca.

À comissão examinadora composta pelos professores Noraí Romeu Rocco, Ricardo Nunes de Oliveira e Raimundo de Araújo Bastos Júnior.

Por fim, às instituições CAPES e CPNq pelo apoio financeiro que foi fundamental para a permanência no curso.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar resultados sobre o quadrado tensorial não abeliano $G \otimes G$ de um grupo G, para a classe de p-grupos finitos *powerful*. Também apresentamos algumas propriedades e resultados sobre p-grupos finitos e p-grupos *powerful* que serão utilizados no contexto, bem como as principais propriedades do grupo $\nu(G)$, uma certa extensão do quadrado tensorial $G \otimes G$ por $G \times G$. Além disso, abordamos alguns limitantes para a ordem, o expoente e o posto de $G \otimes G$ e do quadrado exterior não abeliano, $G \wedge G$, para p-grupos finitos G.

Palavras-chave: p-grupo finito, p-grupo *powerful*, produto tensorial não abeliano, quadrado tensorial não abeliano.

Abstract

This work aims to present results on the non-abelian tensor square $G \otimes G$ of a group G, for the class of powerful finite p-groups. Some properties and results about finite p-groups and powerful p-groups that will be used in the context will also be presented, as well as the main properties of the group $\nu(G)$, a certain extension of $G \otimes G$ by $G \times G$. In addition, we will address some bounds for the order, the exponent and the rank of $G \otimes G$ and of the non-abelian exterior square $G \wedge G$, for finite p-groups G.

Keywords: finite p-group, powerful p-group, non-abelian tensor product, non-abelian tensor square.

Lista de Símbolos

Símbolo	**Descrição**
$H \leq G$	H é subgrupo de G
$H < G$	H é subgrupo próprio de G
$H \trianglelefteq G$	H é subgrupo normal de G
$\langle X \rangle$	Subgrupo gerado por X
S_n	Grupo simétrico de grau n
D_n	Grupo diedral de ordem $2n$
$G_{ab} = G/G'$	Abelianização de G
$cl(G)$	Classe de nilpotência de G
$l(G)$	Comprimento derivado de G
x^y	$y^{-1}xy$
$[x, y]$	$x^{-1}y^{-1}xy$
$[x_1, x_2, \ldots, x_n]$	$[[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n]$
$[G, H]$	$\langle [x, y] \mid x \in G, y \in H \rangle$
$[G_1, G_2, \ldots, G_n]$	$[[G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}], G_n]$
$[G,_n H]$	$[G, H, \ldots, H]$, H aparece n vezes
$[G, G] = G'$	Subgrupo derivado de G
$G^{(n)}$	n-ésimo termo da sequência derivada do grupo G
$\gamma_i(G)$	i-ésimo termo da série central inferior de G
$\zeta_i(G)$	i-ésimo termo da série central superior de G
G^n	Subgrupo gerado pelas n-ésimas potências de $g \in G$
G^{p^i}	Subgrupo gerado pelo conjunto de todas as p^i-ésimas potências dos elementos de G
$G^{\{p^i\}}$	Conjunto das p^i-ésimas potências dos elementos de G
$\Omega_n(G)$	Subgrupo gerado pelos elementos de um grupo G que possuem ordem menor ou igual a p^n
$\Omega_{\{n\}}(G)$	Conjunto de elementos de um grupo G que possuem ordem menor ou igual a p^n
H^G	Fecho normal de H em G
$G \cong H$	Isomorfismo entre os grupos G e H
$G \times H$	Produto direto dos grupos G e H
$N \rtimes H$	Produto semidireto de N por H
$G \oplus H$	Soma direta de G e H

$G * H$	Produto livre dos grupos G e H
$G \otimes H$	Produto tensorial não abeliano de G e H
$G \otimes G$	Quadrado tensorial não abeliano de G e H
$G \wedge G$	Quadrado exterior não abeliano de G e H
$Z(G)$	Centro de G
$N_G(H)$	Normalizador de um subgrupo H em G
$\Phi(G)$	Subgrupo de Frattini de G
$exp(G)$	Expoente de G
$d(H)$	Número mínimo de geradores de um grupo G
C_n	Grupo cíclico de ordem n
$o(x)$	Ordem de um elemento x
$\|X\|$	Cardinalidade do conjunto X
$rk(G)$	$sup\{d(H) \mid H \leq G\}$

Sumário

Introdução

O produto tensorial não abeliano de grupos foi introduzido por R. Brown e J. Loday em [4], seguindo as ideias de R. K. Dennis em [6]. Tal produto surge em aplicações na teoria de homotopia e generaliza o produto tensorial usual dos grupos abelianizados $G_{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H_{ab}$, uma vez que esse novo produto leva em conta ações de G sobre H e de H sobre G.

Sejam G e H grupos agindo entre si (pela direita), $G \times H \to G, (g,h) \mapsto g^h$, $H \times G \to H, (h,g) \mapsto h^g$ e em si próprios por conjugação. Dizemos que G e H agem compativelmente entre si se, para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$, valem as seguintes igualdades:

$$g^{h^{g_1}} = ((g^{g_1^{-1}})^h)^{g_1}$$

e

$$h^{g^{h_1}} = ((h^{h_1^{-1}})^g)^{h_1}.$$

Quando isso acontece as ações acima são chamadas de compatíveis.

Se G e H são grupos que agem compativelmente entre si, então o produto tensorial não abeliano $G \otimes H$ de G e H é o grupo gerado pelos símbolos $g \otimes h$, sujeitos às seguintes relações:

(i) $gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h)$;

(ii) $g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1})$,

para todos $g, g_1 \in G,\ h, h_1 \in H$.

Em particular, quando $G = H$, como as ações por conjugação em G são sempre compatíveis, faz sentido considerar o produto $G \otimes G$, chamado o quadrado tensorial não abeliano de G.

O grupo $\nu(G)$ foi introduzido por N. Rocco em [25] e independentemente por G. Ellis e F. Leonard em [10]; tal grupo pode fornecer novas ferramentas para estudar o grupo $G \otimes G$ por meio do cálculo de comutadores. Sejam G e G^{φ} grupos isomorfos via o isomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G^{\varphi}$, dado por $g \mapsto g^{\varphi}$ para todo $g \in G$. Definimos o grupo $\nu(G)$ como sendo:

$$\nu(G) = \left\langle G \cup G^{\varphi} \mid [g, h^{\varphi}]^{k^{\epsilon}} = [g^k, (h^k)^{\varphi}],\ \text{para todos } g, h, k \in G,\ \epsilon \in \{1, \varphi\} \right\rangle.$$

Nesse contexto, o subgrupo $[G, G^\varphi]$ é normal em $\nu(G)$ e é canonicamente isomorfo a $G \otimes G$ através do isomorfismo induzido por $g \otimes h \mapsto [g, h^\varphi]$, para todos $g, h \in G$ [25, pg. 70]. Com isso, podemos provar alguns resultados do quadrado tensorial $G \otimes G$ por meio de comutadores em $\nu(G)$.

Seja $\Delta(G) = \langle [g, g^\varphi] \mid g \in G] \rangle$. De acordo com as relações definidoras de $\nu(G)$ obtêm-se que $\Delta(G) \leq [G, G^\varphi]$ é um subgrupo central em $\nu(G)$. O quociente $[G, G^\varphi]/\Delta(G)$ é então isomorfo com o assim chamado quadrado exterior não abeliano de G, denotado por $G \wedge G$; escrevemos $g \wedge h$ para indicar a imagem de $[g, h^\varphi]$ em $G \wedge G$. As relações definidoras de $G \otimes G$ são abstrações das relações de comutadores (cf. [2]), de modo que obtemos os homomorfismos $\kappa : G \otimes G \to G'$ e $\kappa' : G \wedge G \to G'$, dados por $\kappa(g \otimes h) = [g, h]$ e $\kappa'(g \wedge h) = [g, h]$, respectivamente. De acordo com [5], temos que $ker(\kappa) \cong \pi_3(SK(G, 1))$, o terceiro grupo de homotopia da suspensão de um espaço de Eilenberg-Mac Lane $K(G, 1)$. Além disso, $ker(\kappa')$ $(= ker(\kappa)/\Delta(G)) \cong H_2(G, \mathbb{Z})$, o segundo grupo de homologia de G com coeficientes inteiros, o qual é identificado como o *multiplicador de Schur*, $\mathcal{M}(G)$, do grupo G.

O objetivo principal desta dissertação é abordar propriedades do quadrado tensorial de um grupo G quando G é um p-grupo finito *powerful*. Os resultados principais deste trabalho estão baseados principalmente no artigo de P. Moravec [22]. A teoria dos p-grupos finitos *powerful* foi introduzida na literatura por A. Lubotzky e A. Mann, no artigo [21]. Dizemos que um p-grupo finito G é *powerful* se p é ímpar e $[G, G] = G' \leq G^p$, ou se $p = 2$ e $[G, G] = G' \leq G^4$. Um subgrupo $N \leq G$ diz-se *powerfully embedded* em G (N *pe* G) se p for ímpar e $[N, G] \leq N^p$, ou $p = 2$ e $[N, G] \leq N^4$. Claramente, se N *pe* G então N em sí é *powerful*.

Dos resultados de A. Lubotzky e A. Mann em [21], temos que em um p-grupo finito *powerful* G vale a igualdade $G^p = G^{\{p\}}$, ou seja, todo elemento de G^p é uma potência p-ésima em G, e se $H \leq G$ então $d(H) \leq d(G)$. Aqui, G^p indica o subgrupo gerado pelas potências p-ésimas dos elementos de G, enquanto $d(G)$ indica o número mínimo de geradores de G.

O presente trabalho está dividido em quatro capítulos. No Capítulo 1 apresentamos alguns conceitos e resultados preliminares da teoria dos grupos de modo a tornar a leitura o mais autossuficiente possível. No Capítulo 2 abordamos de maneira detalhada as propriedades básicas do produto tensorial não abeliano de grupos. No Capítulo 3 revisamos propriedades básicas de p-grupos finitos e de p-grupos finitos *powerful*. Finalmente, no Capítulo 4, apresentamos alguns resultados acerca do quadrado tensorial não abeliano de p-grupos, em particular, de p-grupos finitos *powerful*.

O teorema abaixo, obtido mediante a imersão de $G \otimes G$ em $\nu(G)$, nos mostra que se G é um p-grupo finito *powerful*, então o seu quadrado tensorial não abeliano $G \otimes G$ também será um p-grupo finito *powerful*.

Teorema 0.0.1. *[22, pg. 22] Seja G um p-grupo finito powerful. Então os grupos $[\nu(G), \nu(G)]$ e $[G, G^\varphi]$ são powerfully embedded em $\nu(G)$.*

Quando G é um p-grupo *powerful* também podemos obter alguns resultados da série central inferior de $\nu(G)$, como o resultado abaixo:

Proposição 0.0.1. *[14, pg. 16] Seja G um p-grupo powerful. Então $\gamma_i(\nu(G))$ pe $\nu(G)$, para $i \geq 2$.*

A. Lubotzky e A. Mann em [21] provaram que se G é um p-grupo *powerful*, então $exp(G \wedge G)$ divide $exp(G)$. O próximo teorema generaliza tal resultado:

Teorema 0.0.2. *[22, pg. 24] Seja G um p-grupo powerful. Então o expoente de $[\nu(G), \nu(G)]$ divide o expoente de G.*

Para finalizar, estudamos alguns limitantes para as ordens do quadrado tensorial $G \otimes G$ e do quadrado exterior $G \wedge G$. Além disso, apresentamos alguns resultados para o expoente e o posto (*rank*) dos principais grupos estudados neste trabalho, em função do expoente e do posto do grupo argumento, G.

Vamos definir $\lfloor x \rfloor$ como sendo o maior número inteiro menor ou igual a x e $\lceil y \rceil$ o menor número inteiro maior ou igual a y. Sejam G um p-grupo finito de expoente p^e, $r = sr(G)$ o posto especial, isto é, $sr(G) = max\{d(H) \mid H \leq G\}$. Note que $d(G) \leq sr(G) \leq log_2|G|$. Seja:

$$m = \begin{cases} \lceil log_2\, r \rceil, & \text{se } p > 2, \\ \lceil log_2\, r \rceil + 1, & \text{se } p = 2. \end{cases}$$

Proposição 0.0.2. *[22, pg. 26] Seja G como definido acima. Então, temos:*

(i) $d(J_2(G)) \leq r^2(1 + m)$;

(ii) $sr(G \wedge G) \leq \binom{r+1}{2} + r^2 m$;

(iii) $sr(G \otimes G) \leq r + r^2(1 + m)$.

Agora, considere:

$$k = \begin{cases} \lceil log_2\, r \rceil, & \text{se } p > 2, \\ \lceil log_2\, r \rceil^2 + 1, & \text{se } p = 2 \end{cases}$$

Proposição 0.0.3. *[22, pg. 26] Utilizando as mesmas notações acima para o grupo G e considerando k definido acima, temos:*

(i) $exp(J_2(G)) \leq p^{2e+rk}$;

(ii) $exp(G \wedge G) \leq p^{2e+rk}$;

(iii) $exp(G \otimes G) \leq p^{3e+rk}$.

Teorema 0.0.3. *[22, pg. 27] Seja G um p-grupo finito de expoente p^e e $r = sr(G)$, temos:*

(i) $|G \wedge G| \leq p^{r^2(e+m)}$;

(ii) $|G \otimes G| \leq p^{r^2(2e+m)}$.

Capítulo 1

Preliminares

Esse capítulo tem o intuito de apresentar conceitos e propriedades que formam uma boa base teórica para construção e compreensão dos resultados que serão apresentados.

1.1 Comutadores e Subgrupo Comutador

Sejam G um grupo e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementos de G. O *conjugado* de x_1 por x_2 é o elemento $x_1^{x_2} := x_2^{-1}x_1x_2$ e o *comutador* de x_1 e x_2, nesta ordem, é o elemento

$$[x_1, x_2] := x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2 (= x_1^{-1}x_1^{x_2}).$$

Em geral, um comutador de peso $n \geq 3$ é definido indutivamente pela regra:

$$[x_1, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n];$$

por convenção denotamos $[x] = x$ e $[x,_n y] = [x, \underbrace{y, \ldots, y}_{n \text{ vezes}}]$, para $x, y \in G$.

Observação 1.1.1. *Note que se $[x, y] = 1, \ \forall \ x, y \in G$, então G é um grupo abeliano.*

A próxima proposição trás identidades que serão frequentemente utilizadas nesta dissertação; para mais detalhes pode-se consultar [17, Section 1.5] e [24, pg. 123].

Proposição 1.1.1. *Sejam x, y, z elementos de um grupo G. Então:*

(i) $[x, y] = [y, x]^{-1}$;

(ii) $[xy, z] = [x, z]^y[y, z] = [x, z][x, z, y][y, z]$;

(iii) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z = [x, z][x, y][x, y, z]$;

(iv) $[x, y^{-1}] = ([x, y]^{y^{-1}})^{-1}$;

(v) $[x^{-1}, y] = ([x, y]^{x^{-1}})^{-1}$;

(*vi*) $[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = 1$ *(Identidade de Hall-Witt);*

(*vii*) *Seja* φ *um endomorfismo de* G*. Então:*

$$[x, y]^\varphi = [x^\varphi, y^\varphi],\ \forall\ x, y \in G.$$

Sejam X_1 e X_2 subconjuntos não vazios de um grupo G, definimos o *subgrupo comutador* de X_1 e X_2 por:

$$[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2 \rangle .$$

Em geral, para $n \geq 3$, temos:

$$[X_1, \ldots, X_n] = [[X_1, \ldots, X_{n-1}], X_n],$$

onde $X_1, \ldots, X_n \subseteq G$. Observe que $[X_1, X_2] = [X_2, X_1]$ pelo item (i) da Proposição 1.1.1. É conveniente escrevermos $[X,_n Y]$ para representar $[X, \underbrace{Y, \ldots, Y}_{n \text{ vezes}}]$.

Observação 1.1.2. *Denotaremos* $[G, G]$ *por* G'*, tal subgrupo é chamado subgrupo derivado de* G*.*

Observação 1.1.3. *Pelo item* (vii) *da Proposição 1.1.1 podemos concluir que* G' *é um subgrupo característico de* G*.*

De maneira análoga à definição de conjugação de um elemento, definimos:

$$X_1^{X_2} = \left\langle x_1^{x_2} = x_2^{-1}x_1x_2 \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2 \right\rangle .$$

Definição 1.1.1. *O fecho normal* $\overline{X} = X^G$ *de um subconjunto não vazio* X *de um grupo* G *é a interseção de todos os subgrupos normais de* G *que contém* X*.*

Observação 1.1.4. *O fecho normal de* X *é o menor subgrupo normal contendo* X *e também* $X^G = \langle g^{-1}Xg \mid g \in G\rangle$*.*

Se X é um subconjunto e H é um subgrupo de um grupo G, então $X \subseteq X^H \trianglelefteq \langle X, H\rangle$. Portanto $X^H = X^{\langle X,H\rangle}$ é exatamente o fecho normal de X em $\langle X, H\rangle$.

Proposição 1.1.2. *[24, pg. 124] Sejam* X *um subconjunto de* G *e* $K, H \leq G$*.*

(*i*) $X^H = \langle X, [X, H]\rangle$*;*

(*ii*) $[X, K]^K = [X, K]$*;*

(*iii*) *se* $K = \langle Y\rangle$*, então* $[X, K] = [X, Y]^K$*;*

(*iv*) *se* $K = \langle Y\rangle$ *e* $H = \langle X\rangle$*, então* $[H, K] = [X, Y]^{HK}$*.*

Proposição 1.1.3. *[17, pg. 26] Para subgrupos* X *e* Y *de* G *o subgrupo* $[X, Y]$ *é normal em* $\langle X, Y\rangle$*.*

Lema 1.1.1 (Lema dos Três Subgrupos)**.** *[24, pg. 126] Sejam H, K, L subgrupos de um grupo G. Se dois dos subgrupos comutadores $[H, K, L]$, $[K, L, H]$ e $[L, H, K]$ estão contido em um subgrupo normal de G, então o terceiro também estará contigo nesse subgrupo normal.*

Demonstração. O grupo $[H, K, L]$ é gerado por conjugados de comutadores da forma $[h, k^{-1}, l]$, onde $h \in H$, $k \in K$ e $l \in L$, tal afirmação é semelhante para os grupos $[K, L, H]$ e $[L, H, K]$. Segue da identidade de Hall-Witt que para todo $h, k, l \in G$, vale:

$$[h, k^{-1}, l]^k [k, l^{-1}, h]^l [l, h^{-1}, k]^h = 1.$$

Assim, se dois comutadores de $[h, k^{-1}, l]$, $[k, l^{-1}, h]$ e $[l, h^{-1}, k]$ estão em um subgrupo normal de G, o terceiro também estará. Portanto, como a demonstração foi feita nos geradores de cada grupo, o resultado será válido para todo o grupo. □

Observação 1.1.5. *Um caso particular do lema acima pode ser enunciado como: Sejam H, K, L subgrupos de um grupo G. Se $[H, K, L] = [K, L, H] = 1$, então $[L, H, K] = 1$.*

1.2 Séries

Seja G um grupo finito não trivial. A seguinte série de subgrupos de G

$$\mathcal{S} : 1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{n-1} \leq G_n = G,$$

será denotada por $(G_i)_{i=0,...,n}$, onde n é dito ser o *tamanho da série*. Uma série $(G_i)_{i=0,...,n}$ é uma série normal, se $G_i \trianglelefteq G$, e é uma série subnormal, se $G_{i-1} \trianglelefteq G_i$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$.

Definição 1.2.1. *Sejam G um grupo e $\mathcal{S} : 1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{n-1} \leq G_n = G$ uma série para G. Então:*

- *A série $\mathcal{S}$ é dita ser própria se seus termos são próprios, ou seja, $G_i < G_{i+1}$, para $0 \leq i \leq n - 1$;*
- *uma segunda série $\mathcal{T} : 1 = K_0 \leq K_1 \leq \cdots \leq K_{m-1} \leq K_m = G$ é chamada de refinamento da série $\mathcal{S}$ se cada termo G_i de $\mathcal{S}$ aparece como termo na série $\mathcal{T}$ (ou seja, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$);*
- *uma série subnormal $\mathcal{S}'$ de G é dita uma série de composição se tal série é própria e não admite um refinamento próprio; os fatores de $\mathcal{S}'$ são chamados fatores de composição (se $\mathcal{S}' : 1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$, os fatores de $\mathcal{S}'$ são os grupos quocientes G_i/G_{i-1});*
- *(Subgrupo Normal Minimal) um subgrupo normal $N \trianglelefteq G$ é dito ser normal minimal, se N não é trivial e $1 < K < N$, então $K \ntrianglelefteq G$. Notação: $N \cdot \trianglelefteq G$;*
- *$\mathcal{S}$ é dita principal se a mesma for normal e $G_{i+1}/G_i \cdot \trianglelefteq G/G_i$.*

Teorema 1.2.1. *[27, pg. 189]*

(i) Todo grupo finito G possui uma série de composição.

(ii) Todo fator de composição é simples.

Definição 1.2.2 (Série Derivada)**.** *Sejam G um grupo e $G' = [G, G]$ seu subgrupo derivado. A seguinte série:*

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} = G' \geq G^{(2)} \geq \cdots \geq G^{(n)} \geq \cdots, \text{ onde } G^{(n+1)} = (G^{(n)})',$$

é chamada de série derivada de G, sendo que tal série não necessariamente termina no grupo trivial 1*.*

Observação 1.2.1. *Como $G^{(n+1)} = (G^{(n)})'$, então todos os fatores $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ da série derivada são grupos abelianos. Em particular, G/G' tem grande relevância na teoria de grupos, tal grupo é denotado por G_{ab} e é conhecido como a Abelianização de G, o maior grupo quociente abeliano de G.*

Definição 1.2.3 (Grupo Solúvel)**.** *Um grupo G é dito ser solúvel se o mesmo possui uma série abeliana, ou seja, possui uma série $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$, onde cada fator G_{i+1}/G_i é um grupo abeliano. Se G é um grupo solúvel, o comprimento da menor série abeliana em G é chamado comprimento derivado de G e denotado por $dl(G)$.*

Proposição 1.2.1. *[24, pg. 121] A classe dos grupos solúveis é fechada com respeito a formação de subgrupos, imagens e extensões de seus membros.*

Proposição 1.2.2. *[24, pg. 122] O produto de dois subgrupos normais solúveis de um grupo é solúvel.*

Definição 1.2.4 (Grupo Nilpotente)**.** *Um grupo G é dito ser nilpotente se o mesmo possui uma série central normal, isto é, uma série normal $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G$, tal que, G_{i+1}/G_i está contido no centro de G/G_i, para todo i. Se G é nilpotente, o comprimento da menor série central de G é a classe de nilpotência de G e será denotada por $cl(G)$.*

Proposição 1.2.3. *[24, pg. 122] A classe dos grupos nilpotentes é fechada com respeito a formação de subgrupos, imagens e produtos diretos finitos.*

A seguir serão apresentadas duas séries importantes para a teoria, tais séries são chamadas de séries centrais.

Definição 1.2.5 (Série Central)**.** *Seja G um grupo. Dizemos que uma série $(G_i)_{i=0,\ldots,n}$ é uma série central de G se $[G_{i+1}, G] \leq G_i$, para $0 \leq i \leq n-1$.*

Definição 1.2.6. *Seja G um grupo.*

- *(Série Central Inferior) Consideremos $\gamma_1(G) = G$ e seja:*

$$\gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G] = \langle [x_1, ..., x_{n+1} \mid x_i \in G] \rangle, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

A série central inferior de G será dada por $G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \cdots$.

- *(Série Central Superior) Consideremos $\zeta_0(G) = 1$ e definimos, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\zeta_n(G)$ como o subgrupo dado (pelo Teorema da Correspondência):*

$$\zeta\left(\frac{G}{\zeta_{n-1}(G)}\right) = \frac{\zeta_n(G)}{\zeta_{n-1}(G)}.$$

A série central superior de G será dada por $1 = \zeta_0(G) \leq \zeta_1(G) \leq \cdots$.

Teorema 1.2.2. *[24, pg. 125] Seja $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G$ uma série central em um grupo nilpotente G. Então:*

(i) $\gamma_i(G) \leq G_{n-i+1}$, *de modo que* $\gamma_{n+1}(G) = 1$;

(ii) $G_i \leq \zeta_i(G)$, *de modo que* $\zeta_n(G) = G$;

(iii) (classe de nilpotência de G) = (comprimento da série central superior) = (comprimento da série central inferior).

Proposição 1.2.4. *[24, pg. 126] Sejam G um grupo e i e j inteiros positivos.*

(i) $[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] \leq \gamma_{i+j}(G)$;

(ii) $\gamma_i(\gamma_j(G)) \leq \gamma_{ij}(G)$;

(iii) $[\gamma_i(G), \zeta_j(G)] \leq \zeta_{j-1}(G)$, *se* $j \geq i$;

(iv) $\zeta_i\left(\frac{G}{\zeta_j(G)}\right) = \frac{\zeta_{i+j}(G)}{\zeta_j(G)}$.

Definição 1.2.7 (Subnormalidade)**.** *Seja H um subgrupo de G. H é dito ser subnormal em G se existe uma sequência de subgrupos $(H_i)_{i=1,\ldots,n}$, tal que:*

$$H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n = G.$$

Teorema 1.2.3. *[24, pg. 130] Seja G um grupo finito. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) G é nilpotente;

(ii) todo subgrupo de G é subnormal;

(iii) se $H < G$, então $H < N_G(H)$;

(iv) todo subgrupo maximal de G é normal;

(v) G é o produto direto de seus subgrupos de Sylow.

1.3 Grupos Livres e Produtos Livres

Faremos, nessa seção, uma introdução ao conceito de grupo livre, produto livre e algumas propriedades, para mais detalhes sobre a teoria consulte [16] e [24].

Definição 1.3.1. *Um grupo $F = F(X)$ é dito ser livre em um subconjunto $X \subseteq F$ se, para um grupo G e uma função $\theta : X \to G$, existe um único homomorfismo $\theta' : F \to G$ tal que $\theta'(x) = \theta(x)$, para todo $x \in X$. Equivalentemente, seja $i : X \to F$ a aplicação inclusão de X em F, quando ocorre que $\theta'(x) = \theta(x)$, para todo $x \in X$ é o mesmo que dizer que o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\theta"'] & F \arrow[dl, dotted, "\theta'"] \\
G &
\end{tikzcd}$$

Observação 1.3.1. *X é chamado de base de F e $|X|$ é o rank de F e será denotado por $r(F)$.*

Teorema 1.3.1. *[16, pg. 3]*

(i) Se F é livre em X, então X gera F.

(ii) Se F_i é livre em X_i $(i = 1, 2)$ e $F_1 \cong F_2$ então $|X_1| = |X_2|$.

(iii) Se F_i é livre em X_i $(i = 1, 2)$ e $|X_1| = |X_2|$, então $F_1 \cong F_2$.

Proposição 1.3.1. *[16, pg. 7] Todo grupo é imagem homomórfica de algum grupo livre.*

Teorema 1.3.2 (Nielsen-Schreier)**.** *[16, pg. 16] Seja F um grupo livre e H um subgrupo de F, então H é livre. Além disso, se $|F : H| = g$ e $r(F) = r$ são ambos finitos, então:*

$$r(H) = (r - 1)g + 1.$$

Definição 1.3.2. *Sejam X um conjunto, $F = F(X)$ um grupo livre em X, R um subconjunto de F de tal modo que $N = \overline{R}$ é o fecho normal de R em F e G o fator F/N. Então, escrevemos $G = \langle X \mid R \rangle$ e o mesmo é chamado de apresentação livre de G. Os elementos de X são chamados de geradores e os elementos de R são chamados de relatores da apresentação.*

Lema 1.3.1. *[16, pg. 27] Sejam F, G, H grupos e $v : F \to G$, $\alpha : F \to H$ homomorfismos, tal que $Im(v) = G$ e $ker(v) \subseteq ker(\alpha)$. Então, existe um homomorfismo $\alpha' : G \to H$ tal que $v\alpha' = \alpha$.*

$$\begin{tikzcd}
ker(\alpha) \arrow[dr] & & G \arrow[dd, dashed, "\alpha'"] \\
& F \arrow[ur, "v"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \\
ker(v) \arrow[uu, hook] \arrow[ur] & & H
\end{tikzcd}$$

Teorema 1.3.3 (von Dyck). *[16, pg. 28] Se $G = \langle X \mid R \rangle$ e $H = \langle X \mid S \rangle$, onde $R \subseteq S \subseteq F(X)$, então existe um epimorfismo $\phi : G \to H$ fixando todo $x \in X$ e tal que $ker(\phi) = \overline{S \backslash R}$. Por outro lado, todo fator do grupo $G = \langle X \mid R \rangle$ possui uma apresentação $\langle X \mid S \rangle$, com $S \supseteq R$.*

Teorema 1.3.4 (Teste da Substituição). *[16, pg. 29] Suponha que nos seja dada uma apresentação $G = \langle X \mid R \rangle$, um grupo H e uma função $\theta : X \to H$. Então θ se estende a um homomorfismo $\theta' : G \to H$ se, e somente se, para todo $x \in X$ e todo $r \in R$, o resultado da substituição de x por $\theta(x)$ em r nos dá a identidade de H.*

Teorema 1.3.5. *[16, pg. 32] Se G, H são grupos apresentados por $\langle X \mid R \rangle, \langle X \mid S \rangle$ respectivamente, então o produto direto $G \times H$ tem a seguinte apresentação:*

$$\langle X, Y \mid R, S, [X, Y] \rangle .$$

Definição 1.3.3. *Seja $G_1 = \langle X \mid R \rangle$ e $G_2 = \langle Y \mid S \rangle$ dois grupos. Seu produto livre é dado pela apresentação $G_1 * G_2 = \langle X, Y \mid R, S \rangle$.*

1.4 Módulos

Nessa seção serão apresentadas as definições e propriedades acerca da teoria de R-módulos, onde R é um anel com unidade (1_R). A noção de R-Módulo é uma generalização da ideia de espaço vetorial.

Definição 1.4.1. *Sejam $m, n \in M$ e $r, s \in R$. Um R-módulo à direita é um grupo abeliano aditivo M, denotado por M_R, munido de uma função:*

$$\begin{array}{ccc} M \times R & \to & M \\ (m, r) & \mapsto & m \cdot r, \end{array}$$

satisfazendo (para facilitar tomamos $m \cdot r = mr$):

(i) $(m + n)r = mr + nr$;

(ii) $m(r + s) = mr + ms$;

(iii) $m(rs) = (mr)s$;

(iv) $m1_R = m$.

Observação 1.4.1. *(i) R-módulos à esquerda são definidos analogamente e denotados por ${}_RM$.*

(ii) Se R é um corpo, então M é um R-espaço vetorial.

Definição 1.4.2. *Seja M um R-módulo à direita. Um submódulo N de M é um subgrupo aditivo N de M fechado sob a multiplicação escalar, ou seja, $nr \in N$ onde $n \in N$ e $r \in R$. Similarmente, vale para módulos à esquerda.*

Exemplo 1.4.1. *1. Todo grupo abeliano* M *pode ser visto como um* $\mathbb{Z}$*-módulo à esquerda, onde* $nm = \underbrace{m + \cdots + m}_{n \text{ vezes}}$.

2. *Um ideal* I *de* R *é um* R*-módulo.*

3. *Se* M *é um* R*-módulo e* $r \in R$*, onde* R *é um anel comutativo, então*

$$Mr = \{mr \mid m \in M\}$$

é um submódulo de M*. Generalizando, se* J *é um ideal em* R*, então*

$$MJ = \{\sum_i m_i j_i \mid j_i \in J \text{ e } m_i \in M\}$$

é um submódulo de M*.*

4. *Se* $(S_i)_{i \in I}$ *é uma família de submódulos de um* R*-módulo à direita* M*, então* $\bigcap_{i \in I} S_i$ *é um submódulo de* M*.*

Definição 1.4.3. *Sejam* M *e* N R*-módulos à direita. Um homomorfismo de* R*-módulos (*R*-homomorfismo) é uma aplicação* $f : M \to N$*, tal que:*

$$f(m + n) = f(m) + f(n) \text{ e } f(mr) = f(m)r,$$

para todos $m, n \in M$ *e* $r \in R$*. Um isomorfismo de* R*-módulos é um* R*-homomorfismo* f*, tal que* f *é bijetora, quando isso ocorre denotamos como* $M \cong N$*.*

Observação 1.4.2. *Seja* 0_M *o elemento neutro aditivo de* M*. Um* R*-homomorfismo* $f : M \to N$ *é injetor se, e somente se,* $ker(f) = 0_M$*. Os conjuntos* $ker(f)$ *e* $Im(f)$ *são submódulos de* M *e* N*, respectivamente.*

Definição 1.4.4. *Se* M *é um* R*-módulo à direita e* N *um submódulo de* M*. O grupo quociente (abeliano)* M/N *tem uma estrutura natural de* R*-módulo à direita:*

$$(m + N)r = mr + N.$$

Este R*-módulo é chamado de módulo quociente de* M *por* N*.*

Definição 1.4.5. *Sejam* M *um* R*-módulo e* $S_1, S_2, ..., S_n$ *submódulos de* M*.* M *é soma direta interna dos* $S_{i's}$ *se cada elemento* $m \in M$ *tem uma expressão única, da forma* $m = s_1 + \cdots + s_n$*, tal que* $s_i \in S_i$*, onde* $i \in \{1, 2, ..., n\}$*.*

Notação: $M = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i$.

M *é soma direta de uma família de submódulos* $(S_i)_{i \in I}$*, se* M *consiste de todas as i-uplas* (s_i) *tendo apenas um número finito de coordenadas diferentes de zero.* M *será denotado por:*

$$M = \bigoplus_{i \in I} S_i.$$

Definição 1.4.6. *Um R-módulo F é dito ser livre, se F for um R-módulo isomorfo a $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, onde cada $M_i \cong R$ como um R-módulo, ou seja, existe um conjunto B de índices (podendo ser infinito) com $F = \bigoplus\limits_{b\in B} R_b$, onde $R_b = \langle b\rangle \cong R$, para todo $b \in B$. B é chamada de base de F.*

Observação 1.4.3. *Pela definição de soma direta, cada $m \in F$ tem uma única expressão da forma:*

$$m = \sum_{b\in B} br_b,$$

onde $r_b \in R$ e além disso, quase todos os $r_b's$ são nulos. Assim, segue que, $F = \langle B\rangle$.

Proposição 1.4.1 (Extensão por Linearidade)**.** *[29, pg. 57] Sejam R um anel e F um R-módulo à direita com base X. Se M é um R-módulo à direita e se $f : M \to M$ é uma função, então existe um único R-homomorfismo $\tilde{f} : F \to M$, com $\tilde{f}\mu = f$, onde $\mu : X \to F$ é a aplicação inclusão, isto é, $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, de modo que $\tilde{f}$ estende f.*

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[dr, dashed, "\tilde{f}"] & \\
X \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, "f"'] & M
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Por definição, todo elemento de $y \in F$, pode ser escrito de maneira única, da forma:

$$y = \sum_{x\in X} xr_x,$$

onde $r_x \in R$, sendo quase todos $r_x's$ não nulos. Agora, seja a função:

$$\begin{array}{rccc}
\tilde{f}: & F & \longrightarrow & M \\
 & y & \longmapsto & \sum_{x\in X} f(x)r_x,
\end{array}$$

$\tilde{f}$ é bem definida pelo fato que cada $y \in F$ possui uma única expressão. Por definição, se $s \in R$, então $ys = \sum xr_x s$ e se $y' = \sum xr'_x$, então $y + y' = \sum x(r_x + r'_x)$, ou seja, $\tilde{f}$ é um R-homomorfismo. Sabendo que $F = \langle X\rangle$, qualquer R-homomorfismo $g : F \longrightarrow M$, que estende f terá a mesma imagem que $\tilde{f}$ em X, assim em todo R-módulo F, portanto $\tilde{f}$ é única. □

1.5 Produto Tensorial de R-Módulos

Definição 1.5.1. *Sejam R um anel, A_R um R-módulo à direita, ${}_RB$ um R-módulo à esquerda e G um grupo abeliano (aditivo). Uma aplicação $f : A\times B \to G$ é chamada R-biaditiva se, para todo $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ e $r \in R$, temos:*

$$f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b),$$

$$f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b'),$$
$$f(ar, b) = f(a, rb).$$

Se R é um anel comutativo e A , B e M R-módulos, então uma aplicação $f : A \times B \to M$ é chamada de R-bilinear se f é R-biaditiva e, além disso,

$$f(ar, b) = f(a, rb) = rf(a, b).$$

Definição 1.5.2 (Produto Tensorial de R-módulos)**.** *Sejam R um anel, A_R e ${}_RB$ módulos. O produto tensorial de A por B é um grupo abeliano $A \otimes_R B$ e uma aplicação R-biaditiva:*

$$h : A \times B \to A \otimes_R B,$$

onde, para todo grupo abeliano G e toda aplicação R-biaditiva $f : A \times B \to G$, existe um único $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\tilde{f} : A \otimes_R B \to G$ fazendo o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{tikzcd} A \otimes_R B \arrow[dr, dashed, "\tilde{f}"] & \\ A \times B \arrow[u, "h"] \arrow[r, "f"'] & G \end{tikzcd}$$

Proposição 1.5.1. *[29, pg. 71] Se U a $A \otimes_R B$ são produtos tensoriais de A_R e ${}_RB$ sobre R, então $A \otimes_R B \cong U$.*

Demonstração. Seja U um produto tensorial de R-módulos A_R e ${}_RB$. Tomemos $\eta : A \times B \to U$ uma aplicação R-biaditiva, tal que, todo grupo abeliano G e toda aplicação R-biaditiva $f : A \times B \to G$, existe um único $\mathbb{Z}$-homomorfismo $f' : U \to G$, fazendo o seguinte diagrama comutar.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[dr, dashed, "f'"] & \\ A \times B \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, "f"'] & G \end{tikzcd}$$

Considere $G = A \otimes_R B$ e $f = h$, existe um único $\mathbb{Z}$-homomorfismo $h' : U \to A \otimes_R B$, onde $h'\eta = h$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[dr, dashed, "h'"] & \\ A \times B \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, "h"'] & A \otimes_R B \end{tikzcd}$$

No mesmo sentido, sendo $A \otimes_R B$ um produto tensorial de A_R e ${}_RB$, considere $G = U$ e $f = \eta$, logo existe um homomorfismo $\eta' : A \otimes_R B \to U$, onde $\eta' h = \eta$.

$$\begin{tikzcd} A \otimes_R B \arrow[dr, dashed, "\eta'"] & \\ A \times B \arrow[u, "h"] \arrow[r, "\eta"'] & U \end{tikzcd}$$

Assim, podemos considerar o novo diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
& A \otimes_R B \arrow[d, "\eta'"] \arrow[dd, bend left=60, "1_{A\otimes_R B}"] \\
A \times B \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "h"'] & U \arrow[d, "h'"] \\
& A \otimes_R B
\end{tikzcd}
$$

Mas $h'\eta'$ faz o diagrama de $A \times B$, $A \otimes_R B$ e $A \otimes_R B$ comutar. Porém, $1_{A\otimes_R B}$ também o faz, logo por definição de produto tensorial temos que $h'\eta' = 1_{A\otimes_R B}$. Um argumento semelhante mostra que $\eta' h' = 1_U$. Portanto, $\eta' : A \otimes_R B \to U$ é um isomorfismo. Provando assim a unicidade do produto tensorial de R-módulos. $\square$

Proposição 1.5.2. *[29, pg. 72] Se R é um anel e A_R e ${}_RB$ são módulos, então o produto tensorial $A \otimes_R B$ existe.*

Proposição 1.5.3. *[20, pg. 26] Se R é comutativo e M e N são R-módulos, então $M \otimes_R N$ é um R-módulo com $(m \otimes n) \cdot r = m \otimes n \cdot r$.*

Proposição 1.5.4. *Se p e q são primos entre si então $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_q$ é trivial.*

Demonstração. Temos que:

$$p(a \otimes b) = pa \otimes b = 0 \otimes b$$

e

$$q(a \otimes b) = a \otimes qb = a \otimes 0,$$

sendo $a \in \mathbb{Z}_p$ e $b \in \mathbb{Z}_q$. $\square$

Proposição 1.5.5. *[30, pg. 29] Sejam m e n números inteiros positivos. Então,*

$$\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_d,$$

onde $d = mdc(m, n)$.

1.6 Produto Tensorial não Abeliano de Grupos

Nessa seção será apresentada a teoria sobre o produto tensorial não abeliano de grupos $G \otimes H$, que foi introduzida por R. Brown e J. Loday em [4], tal produto generaliza o conceito de produto tensorial usual $G_{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H_{ab}$.

Sejam G e H grupos que agem entre si (pela direita), $G \times H \to G$, onde $(g, h) \mapsto g^h$ e $H \times G \to H$, onde $(h, g) \mapsto h^g$, e agem sobre si mesmos por conjugação; se, para $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$, vale:

$$g^{(h^{g_1})} = ((g^{g_1^{-1}})^h)^{g_1} \text{ e } h^{(g^{h_1})} = ((h^{h_1^{-1}})^g)^{h_1},$$

então tais ações são chamadas compatíveis e dizemos que G e H agem compativelmente entre si.

Definição 1.6.1. *Sejam G e H grupos que agem compativelmente entre si, o produto tensorial não abeliano $G \otimes H$ de G e H é o grupo gerado pelos símbolos $g \otimes h$, para $g \in G$ e $h \in H$, onde valem as seguintes relações:*

(i) $gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h)$;

(ii) $g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1})$.

Observação 1.6.1. *O elemento neutro do grupo $G \otimes H$ é da forma $1_G \otimes h$ ou $g \otimes 1_H$, para $h \in H$ e $g \in G$. De fato,*

$$(g \otimes h) = (g1 \otimes h) = (g^1 \otimes h^1)(1 \otimes h) = (g \otimes h)(1 \otimes h)$$

e

$$(g \otimes h) = (g \otimes h1) = (g \otimes 1)(g^1 \otimes h^1) = (g \otimes 1)(g \otimes h).$$

Portanto, $1_{G \otimes H} = 1_G \otimes h = g \otimes 1_H$, para todo $g \in G$ e $h \in H$.

Observação 1.6.2. *Quando $H = G$ e as ações são por conjugação em G, então o produto tensorial não abeliano $G \otimes G$ é chamado de quadrado tensorial não abeliano de G; o mesmo sempre estará bem definido pois essas ações sempre serão compatíveis.*

Definição 1.6.2. *Sejam G, H e J grupos. Uma função $\theta : G \times H \longrightarrow J$ é dita ser uma biderivação se, para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$, valem as seguintes relações:*

(i) $\theta(gg_1, h) = \theta(g^{g_1}, h^{g_1})\theta(g_1, h)$;

(ii) $\theta(g, hh_1) = \theta(g, h_1)\theta(g^{h_1}, h^{h_1})$.

Pela Proposição 1.3.4, temos que uma biderivação $\theta : G \times H \longrightarrow J$ determina um único homomorfismo $\theta^* : G \otimes H \longrightarrow J$, onde $\theta^*(g \otimes h) = \theta(g, h)$. Sendo que tal homomorfismo será um epimorfismo se $\theta(G \times H)$ gerar J.

Exemplo 1.6.1. *Sejam $G = \langle x \mid x^2 \rangle$ e $H = \langle y \mid y^3 \rangle$. Suponhamos que G possui uma ação sobre H dada por $h^x = h^{-1}$, sendo $h \in H$ e H possui uma ação trivial sobre G (tais ações são compatíveis). Então, o produto tensorial $G \otimes H$ será gerado pelo conjunto $\{x \otimes y, x \otimes y^2\}$, mas temos que:*

$$x \otimes y^2 = (x \otimes y)(x^y \otimes y) = (x \otimes y)(x \otimes y) = (x \otimes y)^2,$$

logo $G \otimes H = \langle x \otimes y \rangle$, sabendo que $G \otimes H$ é um grupo cíclico, basta saber a ordem de seu gerador para encontrar a sua apresentação. Sabemos que $1 \otimes y$ é o elemento neutro de $G \otimes H$, assim:

$$(x \otimes y)^3 = (x \otimes y)^2(x \otimes y) = (x \otimes y^2)(x \otimes y) = (x^x \otimes y^x)(x \otimes y) = (xx \otimes y) = (1 \otimes y).$$

Portanto, $G \otimes H \cong C_3$, onde C_3 denota um grupo cíclico de ordem 3.

Exemplo 1.6.2. *Seja G um grupo. Considere a função $\theta : G \times G \longrightarrow G'$, onde $\theta(g,h) = [g,h]$, para todo $(g,h) \in G \times G$. Da Proposição 1.1.1 e como $[x,y]^z = [x^z, y^z]$, temos que a função θ é uma biderivação. Portanto, θ induz um único homomorfismo $\theta^* = \kappa : G \otimes G \longrightarrow G'$, tal que $\kappa(g \otimes h) = [g,h]$.*

Proposição 1.6.1. *[5, pg. 315] Sejam G e H grupos agindo compativelmente entre si. Então, G e H possuem uma ação sobre $G \otimes H$, dada por:*

$$(g \otimes h)^{g'} = (g^{g'} \otimes h^{g'}) \text{ e } (g \otimes h)^{h'} = (g^{h'} \otimes h^{h'}),$$

para todos $g, g' \in G$ e $h, h' \in H$. Naturalmente, obtemos uma ação do produto livre $G * H$ sobre o produto tensorial $G \otimes H$, dada por:

$$(g \otimes h)^p = g^p \otimes h^p,$$

para todos $g \in G$, $h \in H$ e $p \in G * H$.

Demonstração. Sejam $g \in G$ um elemento arbitrário e $\phi_g : G \times H \longrightarrow G \otimes H$ uma aplicação dada por $\phi_g(g_1, h) = (g_1^g \otimes h^g)$. Daí, temos que:

$$\phi_g(g_1g_2, h) = ((g_1g_2)^g \otimes h^g) = (g_1^g g_2^g \otimes h^g) = ((g_1^g)^{g_2^g} \otimes (h^g)^{g_2^g})(g_2^g \otimes h^g) =$$

$$= (g_1^{g_2g} \otimes h^{g_2g})(g_2^g \otimes h^g) = ((g_1^{g_2})^g \otimes (h^{g_2})^g)(g_2^g \otimes h^g) = \phi_g(g_1^{g_2} \otimes h^{g_2})\phi_g(g_2 \otimes h),$$

de modo semelhante, temos que $\phi_g(g_1, hh_1) = \phi_g(g_1, h_1)\phi_g(g_1^{h_1}, h^{h_1})$.

Portanto, ϕ_g é uma biderivação, ou seja, podemos obter um único homomorfismo de grupos $\psi_g : G \otimes H \longrightarrow G \otimes H$, onde $\psi_g(g_1 \otimes h) = (g_1^g \otimes h^g)$, para todos $g_1 \in G$ e $h \in H$. Uma vez que $\psi_g \psi_{g^{-1}} = \psi_{g^{-1}} \psi_g = Id_{G \otimes H}$, temos que ψ_g é um automorfismo. Então, temos o seguinte homomorfismo $\psi : G \longrightarrow Aut(G \otimes H)$, onde $g \mapsto \psi_g$, tendo assim uma ação de G sobre $G \otimes H$, dada por:

$$(g_1 \otimes h)^g = g_1^g \otimes h^g.$$

O caso para H é análogo. □

Proposição 1.6.2. *[4, pg. 179-180]*

(i) Suponha que $\theta : G \longrightarrow A$, $\phi : H \longrightarrow B$ são homomorfismos de grupos, A e B agem compativelmente um sobre o outro e as ações θ e ϕ se preservam, no sentido que:

$$\phi(h^g) = (\phi(h))^{\theta(g)},\ \theta(g^h) = (\theta(g))^{\phi(h)},$$

para todos $g \in G$ e $h \in H$. Então, existe um único homomorfismo:

$$\theta \otimes \phi : G \otimes H \longrightarrow A \otimes B,$$

tal que $(\theta \otimes \phi)(g \otimes h) = \theta(g) \otimes \phi(h)$, para todos $g \in G$ e $h \in H$. Também temos que, se θ e ϕ são sobrejetivas, então $\theta \otimes \phi$ também será.

(ii) Existe um único isomorfismo:

$$\tau : G \otimes H \longrightarrow H \otimes G,$$

tal que, $\tau(g \otimes h) = (h \otimes g)^{-1}$*, para todos* $g \in G$ *e* $h \in H$*.*

Demonstração. (i) Considere a função $\alpha : G \times H \longrightarrow A \otimes B$, dada por $\alpha(g, h) = \theta(g) \otimes \phi(h)$. Sejam $g_1, g_2 \in G$ e $h \in H$ elementos arbitrários, assim:

$$\alpha(g_1 g_2, h) = \theta(g_1 g_2) \otimes \phi(h) = \theta(g_1)\theta(g_2) \otimes \phi(h) =$$

$$= (\theta(g_1)^{\theta(g_2)} \otimes \phi(h)^{\theta(g_2)})(\theta(g_2) \otimes \phi(h)) = (\theta(g_1^{g_2}) \otimes \phi(h^{g_2}))(\theta(g_2) \otimes \phi(h)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(g_1 g_2, h) = \alpha(g_1^{g_2}, h^{g_2})\alpha(g_2, h).$$

Analogamente, temos que $\alpha(g, h_1 h_2) = \alpha(g, h_2)\alpha(g^{h_2}, h_1^{h_2})$, para todos $g \in G$ e $h_1, h_2 \in H$. Logo, α é uma biderivação, ou seja, existe um único homomorfismo $\theta \otimes \phi : G \otimes H \longrightarrow A \otimes B$, tal que, $(\theta \otimes \phi)(g \otimes h) = \theta(g) \otimes \phi(h)$, para todos $g \in G$ e $h \in H$.

Se θ e ϕ forem sobrejetivas, então, para todos $a \in A$ e $b \in B$ tem-se que existe alguns elementos $g \in G$ e $h \in H$ tais que $\theta(g) = a$ e $\phi(h) = b$, logo para todo $a \otimes b \in A \otimes B$, tem-se algum elemento $(g \otimes h) \in G \otimes H$ tal que $(\theta \otimes \phi)(g \otimes h) = a \otimes b$, assim $\theta \otimes \phi$ também será sobrejetiva.

(ii) Vamos definir a aplicação $\beta : G \times H \longrightarrow H \otimes G$ por $\beta(g, h) = (h \otimes g)^{-1}$. Por definição, temos que:

$$\beta(gg_1, h) = (h \otimes gg_1)^{-1} = [(h \otimes g_1)(h^{g_1} \otimes g^{g_1})]^{-1} = (h^{g_1} \otimes g^{g_1})^{-1}(h \otimes g_1)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta(gg_1, h) = \beta(g^{g_1}, h^{g_1})\beta(g_1, h),$$

similarmente, é possível provar que $\beta(g, hh_1) = \beta(g, h_1)\beta(g^{h_1} \otimes h^{h_1})$, assim, β é biderivativa. Então, β determina um único homomorfismo $\tau : G \otimes H \longrightarrow H \otimes G$ dado por $\tau(g \otimes h) = (h \otimes g)^{-1}$.

De maneira análoga, temos que $\tau' : H \otimes G \longrightarrow G \otimes H$ dada por $\tau'(h \otimes g) = (g \otimes h)^{-1}$ é um homomorfismo, compondo as duas aplicações τ e τ', temos:

$$(\tau \circ \tau')(h \otimes g) = \tau((g \otimes h)^{-1}) = \tau(g \otimes h)^{-1} = [(h \otimes g)^{-1}]^{-1} = h \otimes g$$

e

$$(\tau' \circ \tau)(g \otimes h) = \tau'((h \otimes g)^{-1}) = \tau'(h \otimes g)^{-1} = [(g \otimes h)^{-1}]^{-1} = g \otimes h,$$

logo, concluímos que $\tau : G \otimes H \longrightarrow H \otimes G$ é um isomorfismo.

□

A seguir, serão apresentadas algumas identidades interessantes do produto tensorial não abeliano de grupos.

Proposição 1.6.3. *[4, pg. 180] As seguintes relações são válidas para todos $g, g' \in G$ e $h, h' \in H$.*

(i) $(g^{-1} \otimes h)^g = (g \otimes h)^{-1} = (g \otimes h^{-1})^h$;

(ii) $(g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = (g_1 \otimes h_1)^{[g,h]}$;

(iii) $(g^{-1}g^h) \otimes h_1 = (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h)^{h_1}$;

(iv) $g_1 \otimes h^{-g}h = (g \otimes h)^{-g_1}(g \otimes h)$;

(v) $[g \otimes h, g_1 \otimes h_1] = g^{-1}g^h \otimes h_1^{-g_1}h_1$.

Demonstração. (i) Sabemos que $1_{G\otimes H} = 1 \otimes h = g \otimes 1$, sendo $g \in G$ e $h \in H$, assim:

$$1 \otimes h = g^{-1}g \otimes h = ((g^{-1})^g \otimes h^g)(g \otimes h) = (g^{-1} \otimes h)^g(g \otimes h)$$

e

$$g \otimes 1 = g \otimes h^{-1}h = (g \otimes h)(g^h \otimes (h^{-1})^h) = (g \otimes h)(g \otimes h^{-1})^h.$$

Logo, $(g^{-1} \otimes h)^g = (g \otimes h)^{-1} = (g \otimes h^{-1})^h$.

(ii) Utilizando as propriedades de produto tensorial, sendo $g, x \in G$ e $h, y \in H$, temos:

$$(xg \otimes yh) = (x^g \otimes (yh)^g)(g \otimes yh) = (x \otimes yh)^g(g \otimes yh) =$$

$$= [(x \otimes h)(x^h \otimes y^h)]^g(g \otimes h)(g^h \otimes y^h) = (x \otimes h)^g(x^{hg} \otimes y^{hg})(g \otimes h)(g \otimes y)^h =$$

$$= (x \otimes h)^g(x \otimes y)^{hg}(g \otimes h)(g \otimes y)^h,$$

por outro lado,

$$(xg \otimes yh) = (xg \otimes h)((xg)^h \otimes y^h) = (x^g \otimes h^g)(g \otimes h)[(x^g \otimes y^g)(g \otimes y)]^h =$$

$$= (x \otimes h)^g(g \otimes h)(x \otimes y)^{gh}(g \otimes y)^h,$$

assim,

$$(x \otimes y)^{hg}(g \otimes h) = (g \otimes h)(x \otimes y)^{gh}$$

$$\Rightarrow (x \otimes y)^{gh} = (g \otimes h)^{-1}(x \otimes y)^{hg}(g \otimes h), \tag{1.1}$$

tomando $g_1 = x^{hg}$ e $h_1 = y^{hg}$, temos que $x = g_1^{g^{-1}h^{-1}}$ e $y = h_1^{g^{-1}h^{-1}}$, substituindo esses valores na equação 1.1, obtemos:

$$(g_1 \otimes h_1)^{[g,h]} = (g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h).$$

(iii) Utilizando as propriedades de produto tensorial juntamente com os itens *i*) e *ii*), temos:

$$\begin{aligned}
(g^{-1}g^h \otimes h_1) &= (g^{-1}g^h \otimes h_1)^{h^{-1}h} \\
&= (g^{-h^{-1}}g \otimes h_1^{h^{-1}})^h \\
&= [((g^{-h^{-1}})^g \otimes (h_1^{h^{-1}})^g)(g \otimes h_1^{h^{-1}})]^h \\
&= [(g^{-1} \otimes h_1)^{h^{-1}g})(g \otimes h_1^{h^{-1}})]^h \\
&= [(g^{-1} \otimes h_1)^{h^{-1}g}(g \otimes h^{-1})(g^{h^{-1}} \otimes (hh_1)^{h^{-1}})]^h \\
&= (g^{-1} \otimes h_1)^{h^{-1}gh}(g \otimes h^{-1})^h(g \otimes hh_1) \\
&= (g^{-1} \otimes h_1)^{h^{-1}gh}(g \otimes h)^{-1}(g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}) \\
&= (g^{-1} \otimes h_1)^{gg^{-1}h^{-1}gh}(g \otimes h)^{-1}(g \otimes h_1)(g \otimes h)^{h_1} \\
&= (g \otimes h_1)^{-[g,h]}(g \otimes h)^{-1}(g \otimes h_1)(g \otimes h)^{h_1} \\
&= (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h_1)^{-1}(g \otimes h)(g \otimes h)^{-1}(g \otimes h_1)(g \otimes h)^{h_1} \\
&= (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h)^{h_1}.
\end{aligned}$$

(iv) Utilizando as propriedades de produto tensorial juntamente com o item i), temos:

$$\begin{aligned}
(g_1 \otimes h^{-g}h) &= (g_1 \otimes h^{-g}h)^{g^{-1}g} \\
&= (g_1^{g^{-1}} \otimes h^{-1}h^{g^{-1}})^g \\
&= [(g_1^{g^{-1}} \otimes h^{g^{-1}})(g_1^{g^{-1}h^{g^{-1}}} \otimes h^{-h^{g^{-1}}})]^g \\
&= (g_1 \otimes h)(g_1^h \otimes h^{-gh}) \\
&= (g_1 \otimes h)(g_1 \otimes (h^{-1})^g)^h \\
&= (g_1 \otimes h)(g_1^{g^{-1}} \otimes h^{-1})^{gh} \\
&= (g_1 \otimes h)(gg_1g^{-1} \otimes h^{-1})^{gh} \\
&= (g_1 \otimes h)[((gg_1)^{g^{-1}} \otimes (h^{-1})^{g^{-1}})(g^{-1} \otimes h^{-1})]^{gh} \\
&= (g_1 \otimes h)(gg_1 \otimes h^{-1})^h(g^{-1} \otimes h^{-1})^{gh} \\
&= (g_1 \otimes h)(gg_1 \otimes h)^{-1}(g \otimes h^{-1})^{-h} \\
&= (g_1 \otimes h)(g_1 \otimes h)^{-1}(g^{g_1} \otimes h^{g_1})^{-1}(g \otimes h) \\
&= (g \otimes h)^{-g_1}(g \otimes h).
\end{aligned}$$

(v) Utilizando as propriedades de produto tensorial juntamente com os itens ii) e iii), temos:

$$\begin{aligned}
[g \otimes h, g_1 \otimes h_1] &= (g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)^{-1}(g \otimes h)(g_1 \otimes h_1) \\
&= (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h)^{[g_1,h_1]} \\
&= (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h)^{h_1^{-g_1}h_1} \\
&= g^{-1}g^h \otimes h_1^{-g_1}h_1.
\end{aligned}$$

$\square$

Definição 1.6.3. *Um módulo cruzado é um homomorfismo de grupos $\mu : M \longrightarrow P$ munido de uma ação de P sobre M satisfazendo as relações:*

$$\mu(m^p) = p^{-1}\mu(m)p$$

e

$$(m_1)^{\mu(m)} = m^{-1}m_1m,$$

para todo $m, m_1 \in M$ e $p \in P$.

Exemplo 1.6.3. *[18, pg. 42]*

(i) Sejam G um grupo e $N \trianglelefteq G$. Temos que a função inclusão $\iota : N \to G$ é um módulo cruzado, considerando a ação por conjugação de G em N.

(ii) Sejam G um grupo, $Aut(G)$ o grupo de automorfismos de G e $c : G \to Aut(G)$, onde c associa a cada elemento $g \in G$ um automorfismo interno de G, $c(g) : x \mapsto gxg^{-1}$, para todo $x \in G$. Temos que, c é um módulo cruzado.

Proposição 1.6.4. *[5, pg. 315] Sejam G e H grupos que possuem uma ação compatível entre si. Então:*

(i) Existem homomorfismos

$$\lambda : G \otimes H \longrightarrow G$$

e

$$\lambda' : G \otimes H \longrightarrow H,$$

tais que, $\lambda(g \otimes h) = g^{-1}g^h$ e $\lambda'(g \otimes h) = h^{-g}h$, para todo $g \in G$ e $h \in H$.

(ii) Os homomorfismos λ e λ', munidos das ações de G e H sobre $G \otimes H$ (Proposição 1.6.1) são módulos cruzados.

(iii) Se $x \in G \otimes H, g \in G, h \in H$, então $\lambda(x) \otimes h = x^{-1}x^h$ e $g \otimes \lambda'(x) = x^{-g}x$.

(iv) As ações de G sobre $ker(\lambda')$ e de H sobre $ker(\lambda)$ são ações triviais.

(v) Para todo $x, x_1 \in G \otimes H$, vale $\lambda(x) \otimes \lambda'(x_1) = [x, x_1]$.

Demonstração. (i) Seja $\alpha : G \times H \to G$ um função, tal que $\alpha(g, h) = g^{-1}g^h$, para todos $g \in G$ e $h \in H$. Assim, segue que:

$$\alpha(gg_1, h) = (gg_1)^{-1}(gg_1)^h = g_1^{-1}g^{-1}g^hg_1^h = g_1^{-1}g^{-1}g_1g_1^{-1}g^hg_1g_1^{-1}g_1^h =$$

$$= (g^{g_1})^{-1}(g^h)^{g_1}g^{-1}g_1^h = (g^{g_1})^{-1}(g^{g_1})^{h^{g_1}}g^{-1}g_1^h = \alpha(g^{g_1}, h^{g_1})\alpha(g_1, h)$$

e

$$\alpha(g, hh_1) = g^{-1}g^{hh_1} = g^{-1}g^{h_1}(g^{h_1})^{-1}g^{hh_1} = g^{-1}g^{h_1}(g^{h_1})^{-1}(g^{h_1})^{h^{h_1}} =$$

$$= \alpha(g, h_1)\alpha(g^{h_1}, h^{h_1}).$$

A prova para $\alpha' : G \times H \to H$ é análoga. Portanto, α e α' são biderivativas, ou seja, existem dois homomorfismos $\lambda : G \otimes H \to G$ e $\lambda' : G \otimes H \to H$, dados por $\lambda(g \otimes h) = g^{-1}g^h$ e $\lambda'(g \otimes h) = h^{-g}h$, respectivamente.

(ii) Sejam $x = g_1 \otimes h \in G \otimes H$ e $g \in G$, temos que:

$$\lambda(x^g) = \lambda(g_1^g \otimes h^g) = g_1^{-g}(g_1^g)^{h^g} = g_1^{-g} g_1^{gh} = (g_1^{-1} g_1^h)^g = \lambda(g_1 \otimes h)^g = g^{-1}\lambda(x)g.$$

Se $x = g_1 \otimes h_1$ e $y = g \otimes h$ em $G \otimes H$, utilizando Proposição 1.6.3, temos:

$$x^{\lambda(y)} = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}g^h} = (g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = y^{-1}xy.$$

Portanto, λ é um módulo cruzado. De maneira análoga, prova-se que λ' também será um módulo cruzado.

(iii) Sejam $g \in G$, $h \in H$ e $x = g_1 \otimes h_1$ elementos arbitrários, utilizando a Proposição 1.6.3, temos:

$$\lambda(x) \otimes h = g_1^{-1} g_1^{h_1} \otimes h = (g_1 \otimes h_1)^{-1}(g_1 \otimes h_1)^h = x^{-1}x^h$$

e

$$g \otimes \lambda'(x) = g \otimes h_1^{-g_1} h_1 = (g_1 \otimes h_1)^{-g}(g_1 \otimes h_1) = x^{-g}x.$$

(iv) Sejam $x \in Ker(\lambda')$ e $g \in G$. Pelo item $iii)$, temos:

$$1_{G \otimes H} = g \otimes \lambda'(x) = x^{-g}x \Rightarrow x^g = x,$$

ou seja, a ação de G sobre $Ker(\lambda')$ é trivial. De maneira análoga, prova-se que a ação de H sobre $Ker(\lambda)$ é também trivial.

(v) Como $x, x_1 \in G \otimes H$, temos que $x = g \otimes h$ e $x_1 = g_1 \otimes h_1$, utilizando o item v) da Proposição 1.6.3, temos:

$$\begin{array}{rcl} \lambda(x) \otimes \lambda'(x_1) & = & \lambda(g \otimes h) \otimes \lambda'(g_1 \otimes h_1) \\ & = & (g^{-1}g^h) \otimes (h_1^{-g_1}h_1) \\ & = & [g \otimes h, g_1 \otimes h_1] \\ & = & [x, x_1]. \end{array}$$

□

Teorema 1.6.1. *[5, pg. 315] Sejam G e H grupos que agem trivialmente entre si. Então:*

$$G \otimes H \cong G_{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H_{ab}.$$

Demonstração. Como G e H agem trivialmente entre si e usando o item $v)$ da Proposição 1.6.3, temos que:

$$[g \otimes h, g_1 \otimes h_1] = g^{-1}g^h \otimes h_1^{-g_1}h_1 = g^{-1}g \otimes h_1^{-1}h_1 = 1 \otimes 1,$$

ou seja, $G \otimes H$ é abeliano. Considerando λ' definido na Proposição 1.6.4, segue que:

$$\lambda'(g \otimes h) = h^{-g}h = h^{-1}h = 1,$$

logo, $ker(\lambda') = G \otimes H$, pelo item $iv)$ da Proposição 1.6.4, temos que $G \otimes H$ é G-trivial. De maneira semelhante, podemos provar que $G \otimes H$ é H-trivial. Agora, sendo $\overline{g} = G'g$ e $\overline{h} = H'h$, defina a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \theta : & G_{ab} \times H_{ab} & \rightarrow & G \otimes H \\ & (\overline{g}, \overline{h}) & \mapsto & g \otimes h \end{array}$$

tal aplicação está bem definida, pois se $\overline{g} = \overline{g_1}$ e $\overline{h} = \overline{h_1}$, temos que existem $x \in G'$ e $y \in H'$ tais que $g = xg_1$ e $h = yh_1$, assim:

$$(g \otimes h) = (xg_1 \otimes yh_1) = (xg_1 \otimes h_1)(xg_1 \otimes y)^{h_1} = (x \otimes h_1)^{g_1}(g_1 \otimes h_1)(x \otimes y)^{g_1 h_1}(g_1 \otimes y)^{h_1}$$

$$= (x \otimes h_1)(g_1 \otimes h_1)(x \otimes y)(g_1 \otimes y).$$

Além disso, utilizando os itens $ii)$ e $iii)$ da Proposição 1.6.3, para $g_2, g_3 \in G$ e $h_2, h_3 \in H$, temos que:

$$[g_2, g_3] \otimes h_1 = (g_2 \otimes g_3)^{-1}(g_2 \otimes g_3)^{h_1} = (g_2 \otimes g_3)^{-1}(g_2 \otimes g_3) = 1$$

e

$$g_1 \otimes [h_2, h_3] = (h_2 \otimes h_3)^{-g_1}(h_2 \otimes h_3) = (h_2 \otimes h_3)^{-1}(h_2 \otimes h_3) = 1,$$

logo, como $x \in G'$ e $y \in H'$, temos que $(x \otimes h_1) = (x \otimes y) = (g_1 \otimes y) = 1$.

Portanto, $g \otimes h = g_1 \otimes h_1$, concluindo assim que θ é bem definida. A aplicação θ é $\mathbb{Z}$-bilinear, pois G e H agem trivialmente sobre $G \otimes H$. Considere M um $\mathbb{Z}$-módulo e $f : G_{ab} \times H_{ab} \rightarrow M$ uma aplicação $\mathbb{Z}$-bilinear arbitrária, então $f' : G \times H \rightarrow M$ onde $f'(g, h) = f(\overline{g}, \overline{h})$ é uma biderivação. Logo, f' determina um único homomorfismo $\tilde{f} : G \otimes H \rightarrow M$ onde $\tilde{f}(g \otimes h) = f'(g, h) = f(\overline{g}, \overline{h})$.

Assim, pela unicidade do produto tensorial, temos que $G \otimes H \cong G_{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H_{ab}$. $\square$

Capítulo 2

O Grupo $\nu(G)$

2.1 O grupo $\nu(G)$

A seguir apresentaremos o grupo $\nu(G)$ e suas propriedades; para mais detalhes sobre tal grupo é sugerida a leitura dos artigos [10] e [25]. O grupo $\nu(G)$ tem fundamental importância para atingir os objetivos propostos nessa dissertação, utilizando as propriedades de $\nu(G)$ é possível encontrar ferramentas para o estudo do quadrado tensorial não abeliano de um grupo.

Definição 2.1.1. *Sejam G e G^{φ} dois grupos isomorfos via isomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G^{\varphi}$, dado por $g \mapsto g^{\varphi}$. Definimos o grupo $\nu(G)$ como sendo:*

$$\nu(G) = \left\langle G, G^{\varphi} \mid [g, h^{\varphi}]^{k^{\epsilon}} = [g^{k}, (h^{k})^{\varphi}], \ \textit{para todos } g, h, k \in G, \ \epsilon \in \{1, \varphi\} \right\rangle.$$

Lema 2.1.1. *[3, 25] As seguintes relações valem em $\nu(G)$:*

(i) $[g_1, g_2^{\varphi}]^{[g_3, g_4^{\varphi}]} = [g_1, g_2^{\varphi}]^{[g_3, g_4]} = [g_1, g_2^{\varphi}]^{[g_3^{\varphi}, g_4]} = [g_1, g_2^{\varphi}]^{[g_3^{\varphi}, g_4^{\varphi}]}$, $\forall\ g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$;

(ii) $[g_1, g_2^{\varphi}, g_3] = [g_1, g_2, g_3^{\varphi}] = [g_1, g_2^{\varphi}, g_3^{\varphi}] = [g_1^{\varphi}, g_2, g_3] = [g_1^{\varphi}, g_2, g_3^{\varphi}] = [g_1^{\varphi}, g_2^{\varphi}, g_3]$, $\forall\ g_1, g_2, g_3 \in G$;

(iii) $[g, g^{\varphi}]$ *é central em* $\nu(G)$, $\forall\ g \in G$;

(iv) $[g_1, g_2^{\varphi}][g_2, g_1^{\varphi}]$ *é central em* $\nu(G)$, $\forall\ g_1, g_2 \in G$;

(v) $[c, g^{\varphi}][g, c^{\varphi}] = 1$, $\forall\ g \in G, c \in G'$;

(vi) $[c, c^{\varphi}] = 1$, $\forall\ c \in G'$.

Demonstração. (i) Sejam $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$ elementos arbitrários, então:

$$
\begin{array}{rcl}
[g_1, g_2^{\varphi}]^{[g_3^{\varphi}, g_4^{\varphi}]} & = & [g_1, g_2^{\varphi}]^{(g_3^{-1})^{\varphi}(g_4^{-1})^{\varphi} g_3^{\varphi} g_4^{\varphi}} \\
& = & [g_1^{g_3^{-1}}, (g_2^{g_3^{-1}})^{\varphi}]^{(g_4^{-1})^{\varphi} g_3^{\varphi} g_4^{\varphi}} \\
& = & [g_1^{g_3^{-1} g_4^{-1}}, (g_2^{g_3^{-1} g_4^{-1}})^{\varphi}]^{g_3^{\varphi} g_4^{\varphi}} \\
& = & [g_1^{g_3^{-1} g_4^{-1} g_3}, (g_2^{g_3^{-1} g_4^{-1} g_3})^{\varphi}]^{g_4^{\varphi}} \\
& = & [g_1^{g_3^{-1} g_4^{-1} g_3 g_4}, (g_2^{g_3^{-1} g_4^{-1} g_3 g_4})^{\varphi}] \\
& = & [g_1, g_2^{\varphi}]^{[g_3, g_4]}
\end{array}
$$

De maneira semelhante, encontra-se as demais identidades.

(ii) Sejam $g_1, g_2, g_3 \in G$ e considere as relações da Proposição 1.1.1, do item $i)$ dessa proposição e as relações definidoras de $\nu(G)$. Assim,

$$
\begin{array}{rcl}
[g_1, g_2^{\varphi}, g_3] & = & [g_1, g_2^{\varphi}]^{-1}[g_1, g_2^{\varphi}]^{g_3} \\
& = & [g_1, g_2^{\varphi}]^{-1}[g_1, g_2^{\varphi}]^{g_3^{\varphi}} \\
& = & [g_1, g_2^{\varphi}, g_3^{\varphi}]
\end{array}
$$

e

$$
\begin{array}{rcl}
[g_1, g_2, g_3^{\varphi}] & = & [g_1^{-1} g_1^{g_2}, g_3^{\varphi}] \\
& = & [g_1^{-1}, g_3^{\varphi}]^{g_1^{g_2}} [g_1^{g_2}, g_3^{\varphi}] \\
& = & [g_1, g_3^{\varphi}]^{-g_1^{-1} g_1^{g_2}} [g_1, (g_3^{g_2^{-1}})^{\varphi}]^{g_2} \\
& = & [g_1, g_3^{\varphi}]^{-[g_1, g_2]} [g_1, (g_2 g_3 g_2^{-1})^{\varphi}]^{g_2} \\
& = & [g_1, g_3^{\varphi}]^{-[g_1, g_2^{\varphi}]} [g_1, (g_2^{-1})^{\varphi}]^{g_2} [g_1, (g_2 g_3)^{\varphi}]^{g_2^{-1} g_2} \\
& = & [g_1, g_3^{\varphi}]^{-[g_1, g_2^{\varphi}]} [g_1, g_2^{\varphi}]^{-1} [g_1, g_3^{\varphi}] [g_1, g_2^{\varphi}]^{g_3} \\
& = & [g_1, g_2^{\varphi}]^{-1} [g_1, g_3^{\varphi}]^{-1} [g_1, g_2^{\varphi}] [g_1, g_2^{\varphi}]^{-1} [g_1, g_3^{\varphi}] [g_1, g_2^{\varphi}]^{g_3^{\varphi}} \\
& = & [g_1, g_2^{\varphi}]^{-1} [g_1, g_2^{\varphi}]^{g_3^{\varphi}} \\
& = & [g_1, g_2^{\varphi}, g_3^{\varphi}].
\end{array}
$$

Logo, $[g_1, g_2^{\varphi}, g_3] = [g_1, g_2^{\varphi}, g_3^{\varphi}] = [g_1, g_2, g_3^{\varphi}]$.

Agora, utilizando as mesmas proposições e relações acima, temos:

$$
\begin{array}{rcl}
[g_1^{\varphi}, g_2, g_3^{\varphi}] & = & [g_1^{\varphi}, g_2]^{-1}[g_1^{\varphi}, g_2]^{g_3^{\varphi}} \\
& = & [g_1^{\varphi}, g_2]^{-1}[g_1^{\varphi}, g_2]^{g_3} \\
& = & [g_1^{\varphi}, g_2, g_3]
\end{array}
$$

e

$$
\begin{array}{rcl}
[g_1^{\varphi}, g_2, g_3] & = & [[g_2, g_1^{\varphi}]^{-1}, g_3] \\
& = & [[g_2, g_1^{\varphi}], g_3]^{-[g_2, g_1^{\varphi}]^{-1}} \\
& = & [g_2, g_1^{\varphi}, g_3]^{-[g_2, g_1^{\varphi}]^{-1}} \\
& = & [[g_2, g_1], g_3^{\varphi}]^{-[g_2, g_1^{\varphi}]^{-1}} \\
& = & [[g_2, g_1]^{-1}, g_3^{\varphi}] \\
& = & [g_1, g_2, g_3^{\varphi}].
\end{array}
$$

Por fim,

$$
\begin{array}{rcl}
[g_1^{\varphi}, g_2^{\varphi}, g_3] & = & [(g_1^{-1}g_1^{g_2})^{\varphi}, g_3] \\
& = & [g_1^{-\varphi}, g_3]^{(g_1^{g_2})^{\varphi}}[(g_1^{g_2})^{\varphi}, g_3] \\
& = & [g_1^{\varphi}, g_3]^{-g_1^{-\varphi}(g_1^{g_2})^{\varphi}}[g_1^{\varphi}, g_3^{g_2^{-1}}]^{g_2} \\
& = & [g_3, g_1^{\varphi}]^{[g_1^{\varphi}, g_2^{\varphi}]}[g_1^{\varphi}, (g_2g_3)g_2^{-1}]^{g_2} \\
& = & [g_3, g_1^{\varphi}]^{[g_1^{\varphi}, g_2]}[g_1^{\varphi}, g_2^{-1}]^{g_2}[g_1^{\varphi}, g_2g_3]^{g_2^{-1}g_2} \\
& = & [g_1^{\varphi}, g_3]^{-[g_1^{\varphi}, g_2]}[g_1^{\varphi}, g_2]^{-1}[g_1^{\varphi}, g_3][g_1^{\varphi}, g_2]^{g_3} \\
& = & [g_1^{\varphi}, g_2]^{-1}[g_1^{\varphi}, g_3]^{-1}[g_1^{\varphi}, g_2][g_1^{\varphi}, g_2]^{-1}[g_1^{\varphi}, g_3][g_1^{\varphi}, g_2]^{g_3} \\
& = & [g_1^{\varphi}, g_2]^{-1}[g_1^{\varphi}, g_2]^{g_3} \\
& = & [g_1^{\varphi}, g_2, g_3].
\end{array}
$$

Portanto, juntando todas as identidades encontradas, temos que $[g_1, g_2^{\varphi}, g_3] = [g_1, g_2, g_3^{\varphi}] = [g_1, g_2^{\varphi}, g_3^{\varphi}] = [g_1^{\varphi}, g_2, g_3] = [g_1^{\varphi}, g_2, g_3^{\varphi}] = [g_1^{\varphi}, g_2^{\varphi}, g_3]$, $\forall\ g_1, g_2, g_3 \in G$.

(iii) Seja $g \in G$ um elemento arbitrário e considerando o item anterior, temos:

$$[g, g^{\varphi}, h^{\varphi}] = [g, g, h^{\varphi}] = [1, h^{\varphi}] = 1$$

e

$$[g, g^{\varphi}, h^{\varphi}] = [g, g^{\varphi}]^{-1}[g, g^{\varphi}]^{h^{\varphi}} = [g, g^{\varphi}]^{-1}[g, g^{\varphi}]^{h} = [g, g^{\varphi}, h],$$

logo, $[g, g^{\varphi}]$ comuta com os geradores de $\nu(G)$, ou seja, $[g, g^{\varphi}]$ é central em $\nu(G)$.

(iv) Considerando o item anterior:

$$
\begin{array}{rcl}
[g_1g_2, (g_1, g_2)^{\varphi}] & = & [g_1, (g_1g_2)^{\varphi}]^{g_2}[g_2, (g_1g_2)^{\varphi}] \\
& = & [g_1, g_2^{\varphi}]^{g_2}[g_1, g_1^{\varphi}]^{g_2^{\varphi}g_2}[g_2, g_2^{\varphi}][g_2, g_1^{\varphi}]^{g_2^{\varphi}} \\
& = & [g_1, g_2^{\varphi}]^{g_2}[g_1, g_1^{\varphi}][g_2, g_2^{\varphi}][g_2, g_1^{\varphi}]^{g_2^{\varphi}},
\end{array}
$$

como $[g_1, g_1^{\varphi}]$ e $[g_2, g_2^{\varphi}]$ são centrais, temos que:

$$[g_1g_2, (g_1, g_2)^{\varphi}][g_1, g_1^{\varphi}]^{-1}[g_2, g_2^{\varphi}]^{-1} = [g_1, g_2^{\varphi}]^{g_2}[g_2, g_1^{\varphi}]^{g_2^{\varphi}} = ([g_1, g_2^{\varphi}][g_2, g_1^{\varphi}])^{g_2^{\varphi}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [g_1g_2, (g_1, g_2)^{\varphi}][g_1, g_1^{\varphi}]^{-1}[g_2, g_2^{\varphi}]^{-1} = [g_1, g_2^{\varphi}][g_2, g_1^{\varphi}].$$

Portanto, como $[g_1, g_2^{\varphi}][g_2, g_1^{\varphi}]$ é produto de elementos centrais, então o mesmo é central.

(v) Considere $c \in G'$ um comutador simples, ou seja, $c = [x, y]$, para alguns $x, y \in G$, temos:

$$[[x, y], g^{\varphi}][g, [x, y]^{\varphi}] = [[x, y]^{\varphi}, g][g, [x, y]^{\varphi}] = 1.$$

Seja $c = \prod_{i=1}^{n}[x_i, y_i]$, para $x_1, y_i \in G$, vamos assumir que o resultado é válido para n, ou melhor,

$$\left[\prod_{i=1}^{n}[x_i, y_i], g^{\varphi}\right]\left[g\prod_{i=1}^{n}[x_i, y_i]^{\varphi}\right] = 1,$$

vamos provar então para $n+1$:

$$\left[\prod_{i=1}^{n+1}[x_i, y_i], g^{\varphi}\right]\left[g, \prod_{i=1}^{n+1}[x_i, y_i]^{\varphi}\right],$$

mas,

$$\left[\prod_{i=1}^{n+1}[x_i, y_i], g^{\varphi}\right] = \left[\prod_{i=1}^{n}[x_i, y_i], g^{\varphi}\right]^{[x_{n+1}, y_{n+1}]}[[x_{n+1}, y_{n+1}], g^{\varphi}]$$

e

$$\left[g, \prod_{i=1}^{n+1}[x_i, y_i]^{\varphi}\right] = [g, [x_{n+1}, y_{n+1}]^{\varphi}]\left[g, \prod_{i=1}^{n}[x_i, y_i]^{\varphi}\right]^{[x_{n+1}, y_{n+1}]},$$

assim, como $[[x_{n+1}, y_{n+1}], g^{\varphi}][g, [x_{n+1}, y_{n+1}]^{\varphi}] = 1$, temos que:

$$\left[\prod_{i=1}^{n+1}[x_i, y_i], g^{\varphi}\right]\left[g, \prod_{i=1}^{n+1}[x_i, y_i]^{\varphi}\right] =$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{n}[x_i, y_i], g^{\varphi}\right]^{[x_{n+1}, y_{n+1}]}\left[g, \prod_{i=1}^{n}[x_i, y_i]^{\varphi}\right]^{[x_{n+1}, y_{n+1}]} =$$

$$= \left(\left[\prod_{i=1}^{n}[x_i, y_i], g^{\varphi}\right]\left[g, \prod_{i=1}^{n}[x_i, y_i]^{\varphi}\right]\right)^{[x_{n+1}, y_{n+1}]} = 1.$$

(vi) Considere $c \in G'$ um comutador simples, utilizando os itens anteriores, temos:

$$\begin{aligned}
[c, c^{\varphi}] &= [x, y, [x, y]^{\varphi}] \\
&= [x, y^{\varphi}, [x, y]] \\
&= [[x, y^{\varphi}], [x, y]] \\
&= [x, y^{\varphi}]^{-1}[x, y^{\varphi}]^{[x,y]} \\
&= [x, y^{\varphi}]^{-1}[x, y^{\varphi}]^{[x,y^{\varphi}]} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Agora, para um elemento $c \in G'$ genérico, podemos assumir que $c = \prod_{i=1}^{n}[x_i, y_i]$. Assuma que é válida a seguinte igualdade:

$$\left[\prod_{i=1}^{n}[x_i, y_i], \prod_{i=1}^{n}[x_i, y_i]\right] = 1,$$

provaremos que também vale para $n+1$, assim:

$$\left[\prod_{i=1}^{n+1}[x_i,y_i],\prod_{i=1}^{n+1}[x_i,y_i]\right] = \left[\prod_{i=1}^{n+1}[x_i,y_i],(\prod_{i=1}^{n}[x_i,y_i][x_{n+1},y_{n+1}])^{\varphi}\right] =$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{n+1}[x_i,y_i],[x_{n+1},y_{n+1}]^{\varphi}\right]\left[\prod_{i=1}^{n+1}[x_i,y_i],\prod_{i=1}^{n}[x_i,y_i]^{\varphi}\right]^{[x_{n+1},y_{n+1}]^{\varphi}},$$

mas, temos que:

$$\left[\prod_{i=1}^{n+1}[x_i,y_i],[x_{n+1},y_{n+1}]^{\varphi}\right] =$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{n}[x_i,y_i],[x_{n+1},y_{n+1}]^{\varphi}\right]^{[x_{n+1},y_{n+1}]}[[x_{n+1},y_{n+1}],[x_{n+1},y_{n+1}]^{\varphi}] =$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{n}[x_i,y_i],[x_{n+1},y_{n+1}]^{\varphi}\right]^{[x_{n+1},y_{n+1}]},$$

e

$$\left[\prod_{i=1}^{n+1}[x_i,y_i],\prod_{i=1}^{n}[x_i,y_i]^{\varphi}\right]^{[x_{n+1},y_{n+1}]^{\varphi}} =$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{n}[x_i,y_i],\prod_{i=1}^{n}[x_i,y_i]^{\varphi}\right]^{[x_{n+1},y_{n+1}]}\left[[x_{n+1},y_{n+1}],\prod_{i=1}^{n}[x_i,y_i]^{\varphi}\right]^{[x_{n+1},y_{n+1}]} =$$

$$= \left[[x_{n+1},y_{n+1}],\prod_{i=1}^{n}[x_i,y_i]^{\varphi}\right]^{[x_{n+1},y_{n+1}]},$$

assim:

$$\left[\prod_{i=1}^{n+1}[x_i,y_i],\prod_{i=1}^{n+1}[x_i,y_i]\right] =$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{n}[x_i,y_i],[x_{n+1},y_{n+1}]^{\varphi}\right]^{[x_{n+1},y_{n+1}]}\left[[x_{n+1},y_{n+1}],\prod_{i=1}^{n}[x_i,y_i]^{\varphi}\right]^{[x_{n+1},y_{n+1}]} =$$

$$= \left(\left[\prod_{i=1}^{n}[x_i,y_i],[x_{n+1},y_{n+1}]^{\varphi}\right]\left[[x_{n+1},y_{n+1}],\prod_{i=1}^{n}[x_i,y_i]^{\varphi}\right]\right)^{[x_{n+1},y_{n+1}]},$$

utilizando o item anterior, concluímos que:

$$\left[\prod_{i=1}^{n+1}[x_i,y_i],\prod_{i=1}^{n+1}[x_i,y_i]\right] = 1.$$

□

Lema 2.1.2. *[25, pg. 67] Sejam a, b, x elementos em G tais que $[x, a] = 1 = [x, b]$. Então:*

$$[a, b, x^{\varphi}] = 1 = [[a, b]^{\varphi}, x].$$

Demonstração. Como $[x, a] = 1 = [x, b]$, temos que $a = a^x$ e $b = b^x$. Utilizando o Lema 2.1.1, concluímos que:

$$\begin{array}{rcl} [a^{\varphi}, b^{\varphi}, x] & = & [a, b, x^{\varphi}] \\ & = & [a, b^{\varphi}, x] \\ & = & [a, b^{\varphi}]^{-1}[a, b^{\varphi}]^x \\ & = & [a, b^{\varphi}]^{-1}[a^x, (b^x)^{\varphi}] \\ & = & [a, b^{\varphi}]^{-1}[a, b^{\varphi}] \\ & = & 1 \end{array}$$

□

Lema 2.1.3. *[25, pg. 68] Sejam x, y elementos de G tais que $[x, y] = 1$. Então:*

(i) $[x^n, y^{\varphi}] = [x, y^{\varphi}]^n = [x, (y^{\varphi})^n]$, *para todo* $n \in \mathbb{Z}$;

(ii) se x e y são elementos de torção de ordens $o(x)$ e $o(y)$, então $o([x, y^{\varphi}])$ divide $mdc(o(x), o(y))$.

Demonstração. (i) O resultado é trivial para $n = 0$ e $n = 1$, vamos assumir que o resultado é válido para n, assim $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$[x^n, y^{\varphi}] = [x, y^{\varphi}]^n = [x, (y^{\varphi})^n].$$

Agora, vamos provar que o resultado vale para $n+1$ (lembrando que $[x, y] = 1$):

$$\begin{array}{rcl} [x^{n+1}, y^{\varphi}] & = & [x^n, y^{\varphi}]^x[x, y^{\varphi}] \\ & = & [x, y^{\varphi}]^{nx}[x, y^{\varphi}] \\ & = & [x^x, (y^x)^{\varphi}]^n[x, y^{\varphi}] \\ & = & [x, y^{\varphi}]^n[x, y^{\varphi}] \\ & = & [x, y^{\varphi}]^{n+1}. \end{array}$$

Por outro lado,

$$\begin{array}{rcl} [x, (y^{n+1})^{\varphi}] & = & [x, y^{\varphi}][x, (y^n)^{\varphi}]^{y^{\varphi}} \\ & = & [x, y^{\varphi}][x, (y^n)^{\varphi}]^y \\ & = & [x, y^{\varphi}][x, y^{\varphi}]^{ny} \\ & = & [x, y^{\varphi}][x^y, (y^y)^{\varphi}]^n \\ & = & [x, y^{\varphi}][x, y^{\varphi}]^n \\ & = & [x, y^{\varphi}]^{n+1}. \end{array}$$

Como $n \in \mathbb{Z}$, vamos provar que o resultado também vale para $n < 0$, seja $n = -1$, temos que:

$$\begin{array}{rcl} [x^{-1}, y^{\varphi}] & = & [(x^{-1})^x, (y^x)^{\varphi}] \\ & = & [x^{-1}, y^{\varphi}]^x \\ & = & [x, y^{\varphi}]^{-1}. \end{array}$$

Pelas relações de comutadores, temos também que:

$$\begin{aligned}[x^{-m}, y^{\varphi}] &= [(x^{-1})^m, y^{\varphi}] \\ &= [x^{-1}, y^{\varphi}]^m \\ &= [x, y^{\varphi}]^{-m},\end{aligned}$$

$\forall\ m > 0$. Para $[x, (y^{-m})^{\varphi}]$ é provado de maneira semelhante. Assim, $\forall n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$[x^n, y^{\varphi}] = [x, y^{\varphi}]^n = [x, (y^{\varphi})^n].$$

(ii) Sejam $o(x) = n$, $o(y) = m$ e $o([x, y^{\varphi}]) = k$. Temos que:

$$[x, y^{\varphi}]^n = [x^n, y^{\varphi}] = 1$$

e

$$[x, y^{\varphi}]^m = [x, (y^m)^{\varphi}] = 1,$$

logo, $k \mid n$ e $k \mid m$, implicando em $k \mid mdc(o(x), o(y))$.

$\square$

Observação 2.1.1. *Pela simetria entre as relações que definem o grupo $\nu(G)$, ressalta-se que o isomorfismo φ é estendido unicamente para um automorfismo Ψ de $\nu(G)$ enviando $g \mapsto g^{\varphi}$, $g^{\varphi} \mapsto g$ e $[g_1, g_2^{\varphi}] \mapsto [g_2, g_1^{\varphi}]^{-1}$, para todo $g, g_1, g_2 \in G$.*

Definição 2.1.2. *Seja π um conjunto de números primos, dizemos que um número natural n é um π-número se:*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r},$$

onde $p_i \in \pi$ e $1 \leq i \leq r$. Um grupo é dito ser um π-grupo se a ordem do mesmo é um π-número.

Proposição 2.1.1. *[25, pg. 69] Seja G um π-grupo finito (π um conjunto de primos), nilpotente finito ou solúvel de grau finito. Então, $\nu(G)$ é também um π-grupo finito, nilpotente finito ou solúvel de grau finito.*

Sejam N um subgrupo normal de G e π um epimorfismo canônico:

$$\begin{aligned}\pi :\ G &\longrightarrow G/N \\ g &\longmapsto Ng\end{aligned}$$

Seja $\overline{G}$ o grupo quociente G/N, o epimorfismo π dá origem ao epimorfismo $\tilde{\pi}$: $\nu(G) \longrightarrow \nu(\overline{G})$ tal que $g \mapsto \overline{g}$, $g^{\varphi} \mapsto \overline{g^{\varphi}}$, onde $\overline{G^{\varphi}} = G^{\varphi}/N^{\varphi}$ será identificado com $\overline{G}^{\varphi}$.

Proposição 2.1.2. *[25, pg. 69] Com as notações acima, temos:*

(i) $[N, G^{\varphi}] \trianglelefteq \nu(G)$, $[G, N^{\varphi}] \trianglelefteq \nu(G)$;

(ii) $ker\ \tilde{\pi} = \langle N, N^{\varphi} \rangle\, [N, G^{\varphi}][G, N^{\varphi}]$.

2.2 Quadrado Tensorial não Abeliano de um Grupo

Já vimos no Exemplo 1.6.2 que existe um homomorfismo $\kappa : G \otimes G \to G'$ dado por $\kappa(g \otimes h) = [g, h]$ para todo $g, h \in G$. Denotaremos por $J_2(G)$ o núcleo do homomorfismo κ.

Seja o epimorfismo $\tau : G \otimes G \to [G, G^{\varphi}]$, definido nos geradores de $G \otimes G$ por $\tau(g_1 \otimes g_2) = [g_1, g_2^{\varphi}]$. A proposição a seguir nos fornece uma ferramenta para o estudo do quadrado tensorial $G \otimes G$, utilizando as propriedades do grupo $\nu(G)$ introduzidas por N. Rocco em [25].

Proposição 2.2.1. *[25, pg. 70] τ é um isomorfismo.*

Proposição 2.2.2. *[4, pg. 181] Temos que $J_2(G) = ker\ (\kappa)$, assim:*

(i) $J_2(G)$ é central em $G \otimes G$;

(ii) a ação de G sobre $J_2(G)$ é trivial.

Demonstração. (i) Utilizando o item (v) da Proposição 1.6.4, para $x \in J_2(G)$ e $x_1 \in G \otimes G$ temos:

$$[x, x_1] = \kappa(x) \otimes \kappa(x_1) = 1,$$

logo, $J_2(G) \subseteq Z(G \otimes G)$.

(ii) Do item (iv) da Proposição 1.6.4, para o caso $\kappa = \lambda : G \otimes G \to G$, sendo $\lambda(g \otimes h) = [g, h]$, a ação de G sobre $ker\ (\lambda) = J_2(G)$ é trivial.

□

Observação 2.2.1. *$J_2(G)$ é isomorfo à $\pi_3(SK(G, 1))$, o terceiro grupo de homotopia da suspensão de um espaço de Eilenberg-Mac Lane $K(G, 1)$, para mais detalhes consulte [5, pg. 324] e [15].*

Lema 2.2.1. *[23, pg. 29-30] Sejam $g \in G$ e $c \in G'$ elementos arbitrários. Então:*

$$cg \otimes cg = g \otimes g \quad e \quad gc \otimes gc = g \otimes g.$$

Demonstração. Sabendo que $J_2(G)$ é central em $G \otimes G$ e usando os resultados de 1.6.3 e 1.6.4, seja $g \in G$ e $c = [x, y] \in G'$, assim:

$$\begin{array}{rcl} cg \otimes cg & = & [x, y]g \otimes [x, y]g \\ & = & ([x, y] \otimes [x, y]g)^g (g \otimes [x, y]g) \\ & = & ([x, y] \otimes g)^g ([x, y] \otimes [x, y])^{g^2} (g \otimes g)(g \otimes [x, y])^g \\ & = & (g \otimes g)([x, y] \otimes g)^g ([x \otimes y, x \otimes y])^{g^2} (g \otimes [x, y])^g \\ & = & (g \otimes g)([x, y] \otimes g)^g (g \otimes [x, y])^g, \end{array}$$

mas,

$$[x, y] \otimes g = (x \otimes y)^{-1} (x \otimes y)^g$$

e

$$g \otimes [x, y] = (x \otimes y)^{-g}(x \otimes y),$$

logo, $([x, y] \otimes g)(g \otimes [x, y]) = 1$ e portanto $cg \otimes cg = g \otimes g$ para c um comutador simples. Usando um argumento indutivo prova-se que vale para todo $c \in G'$. $\square$

Definição 2.2.1. *Seja A um grupo abeliano. O funtor quadrático de Whitehead $\Gamma(A)$ é o grupo gerado pelos símbolos γa, com $a \in A$, satisfazendo as seguintes relações:*

(i) $\gamma(-a) = \gamma(a)$;

(ii) $\gamma(a + b + c) + \gamma(a) + \gamma(b) + \gamma(c) = \gamma(a + b) + \gamma(b + c) + \gamma(a + c)$.

Proposição 2.2.3. *[4, pg. 181] Existe um homomorfismo $\psi : \Gamma(G_{ab}) \to G \otimes G$, dado por $\psi(\gamma\overline{g}) = g \otimes g$, onde $\overline{g}$ denota a classe lateral de g módulo G'.*

Seja $\Upsilon(G) = [G, G^{\varphi}]$, de acordo com N. Rocco em [25], tal grupo é subgrupo normal de $\nu(G)$, por esse fato, temos que vale a seguinte igualdade $\nu(G) = \Upsilon(G) \cdot G \cdot G^{\varphi}$, dessa forma é possível dar uma melhor descrição da série central inferior e série derivada de $\nu(G)$.

Teorema 2.2.1. *[25, pg. 72-73] Para $i \geq 2$ o i-ésimo termo da série central inferior $\gamma_i(G)$ de $\nu(G)$ é dado por:*

$$\gamma_i(\nu(G)) = \gamma_i(G)\gamma_i(G^{\varphi})[\gamma_{i-1}(G), G^{\varphi}][G, \gamma_{i-1}(G^{\varphi})].$$

Corolário 2.2.1. *[25, pg. 73] Seja G um grupo nilpotente de classe c. Então, $\nu(G)$ é um grupo nilpotente de classe no máximo $c + 1$.*

Teorema 2.2.2. *[25, pg. 73] Para $i \geq 2$ o i-ésimo termo da série derivada de $\nu(G)$ é dado por:*

$$\nu(G)^{(i)} = G^{(i)}(G^{\varphi})^{(i)}[G^{(i-1)}, (G^{\varphi})^{(i-1)}],$$

onde $G^{(i)}$ denota o i-ésimo termo da série derivada de G.

Corolário 2.2.2. *[25, pg. 73] Seja G um grupo solúvel de comprimento derivado l. Então, $\nu(G)$ é solúvel de comprimento derivado no máximo $l + 1$.*

Lema 2.2.2. *[3, pg. 91] Seja G um p-grupo finito. Então, para todo $k \geq 1$, temos:*

$$[\gamma_k(G), G^{\varphi}] = [G, (\gamma_k(G))^{\varphi}].$$

Proposição 2.2.4. *[25, pg. 73] Seja $G = N \rtimes H$ um produto semidireto de seus subgrupos $N \trianglelefteq G$ e $H \leq G$. Então:*

(i) $\nu(G) = (\langle N, N^{\varphi}\rangle [N, H^{\varphi}][H, N^{\varphi}]) \rtimes \langle H, H^{\varphi}\rangle$;

(ii) $\langle H, H^{\varphi}\rangle \cong \nu(H)$.

Proposição 2.2.5. *[26, pg. 1992] Seja $G = H \times K$ um produto direto de grupos arbitrários H e K. Então:*

(i) $\nu(G) = \langle H, H^{\varphi}\rangle \langle K, K^{\varphi}\rangle [H, K^{\varphi}][K, H^{\varphi}]$;

(ii) $\langle H, H^{\varphi}\rangle \cong \nu(H)$, $\langle K, K^{\varphi}\rangle \cong \nu(K)$;

(iii) $$\begin{aligned} \Upsilon(G) &= \Upsilon(H) \times \Upsilon(K) \times [H, K^{\varphi}][K, H^{\varphi}] \\ &\cong (H \otimes H) \times (K \otimes K) \times (H \otimes_{\mathbb{Z}} K) \times (K \otimes_{\mathbb{Z}} H). \end{aligned}$$

Corolário 2.2.3. *[25, pg. 74] Seja $G = P_1 \times \cdots \times P_n$ um grupo nilpotente finito, sendo P_i um p_i-subgrupo de Sylow de G. Então:*

(i) $\nu(G) \cong \nu(P_1) \times \cdots \times \nu(P_n)$;

(ii) $\Upsilon(G) \cong \Upsilon(P_1) \times \cdots \times \Upsilon(P_n)$.

Agora, vamos apresentar alguns limitantes para a ordem do quadrado tensorial não abeliano de um grupo p-grupo finito G. Para mais detalhes, consulte [25, pg. 75-78].

Lema 2.2.3. *[25, pg. 75] Seja $c \in Z(G) \cap G'$ um elemento de ordem p. Se $\Phi(G)$ denota o subgrupo de Frattini de G, então:*

$$|\nu(G)| \text{ divide } p^2 \left|\frac{G}{\Phi(G)}\right| \left|\nu\left(\frac{G}{\langle c\rangle}\right)\right|.$$

Proposição 2.2.6. *[25, pg. 76] Seja G nilpotente de classe 2. Então:*

$$|\Upsilon(G)| \text{ divide } \left|G' \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{G}{G'}\right| \left|\Upsilon\left(\frac{G}{G'}\right)\right|.$$

Teorema 2.2.3. *[25, pg. 77] Seja G um p-grupo finito com $|G| = p^n$ e $|G'| = p^m$. Então, $|\nu(G)|$ divide $p^{n^2+2n-mn}$.*

Corolário 2.2.4. *[25, pg. 77] Sejam $|G| = p^n$, $|G'| = p^m$ e $d = d(G)$ o número mínimo de geradores de G. Então:*

$$p^{d^2} \leq |G \otimes G| \leq p^{n(n-m)}.$$

Capítulo 3

p-grupos finitos powerful

3.1 p-grupos Finitos

Nessa seção serão abordados alguns conceitos e propriedades sobre p-grupos finitos. Seja p um número primo, um grupo G é dito ser *p-grupo* se a ordem de todos seus elementos são potências de p. Se um p-grupo G for finito, então teremos $|G| = p^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Por facilidade iremos fixar G como sendo um p-grupo finito não trivial.

Lema 3.1.1. *[19, pg. 13]*

(i) Se N é um subgrupo normal não trivial de G, então $N \cap Z(G)$ é não trivial.

(ii) Um subgrupo normal minimal de G tem ordem p e é central em G.

(iii) Os fatores de composição de G são cíclicos de ordem p.

(iv) Toda série principal de G é central.

Lema 3.1.2. *[19, pg. 13] Seja $|G| = p^n$ onde $n > 1$. Então G é nilpotente e $cl(G) < n$.*

Lema 3.1.3. *[19, pg. 13]*

(i) Se H é um subgrupo próprio de G, então H é um subgrupo próprio de seu normalizador, ou seja, $H < N_G(H)$.

(ii) Um subgrupo maximal de G é normal e de índice p.

(iii) Sejam M e N subgrupos normais de G, com $M \leq N[M, G]$. Então, $M \leq N$.

Definição 3.1.1 (Subgrupo de Frattini)**.** *O subgrupo de Frattini de um grupo K é a interseção de todos os subgrupos maximais de K, o mesmo será denotado por $\Phi(K)$. Se o grupo K não possui um subgrupo maximal, então definimos $\Phi(K) = K$.*

Proposição 3.1.1. *[19, pg. 14]*

(i) *O subgrupo de Frattini de um grupo G será $\Phi(G) = G'G^p$. O rank do grupo abeliano elementar $G/\Phi(G)$ é denotado por $d(G)$.*

(ii) *(Teorema da Base de Burnside) Todo conjunto gerador de G contém um subconjunto gerador com exatamente $d(G)$ elementos. Além disso, $\{x_1, ..., x_{d(G)}\}$ gera G se, e somente se, $\{x_1\Phi(G), ..., x_{d(G)}\Phi(G)\}$ é uma base para o espaço vetorial $G/\Phi(G)$.*

Observação 3.1.1. *$rk(G) = sup\{d(H) \mid H \leq G\}$ é o rank de um grupo finito G e $d(H)$ é a cardinalidade mínima para um conjunto gerador de H.*

Definição 3.1.2. *Seja $i \geq 0$ um inteiro. Então:*

$$G^{\{p^i\}} = \{x^{p^i} \mid x \in G\} \text{ e } G^{p^i} = \left\langle G^{\{p^i\}} \right\rangle$$

e

$$\Omega_{\{i\}}(G) = \{x \in G \mid x^{p^i} = 1\} \text{ e } \Omega_i(G) = \left\langle \Omega_{\{i\}}(G) \right\rangle.$$

Para $i \geq 0$, $\Pi_i(G)$ é definido indutivamente por:

$$\Pi_0(G) = G \text{ e } \Pi_i(G) = (\Pi_{i-1}(G))^p, \text{ para } i > 0.$$

Quando G é um p-grupo finito e possui as seguintes igualdades $G^{\{p^i\}} = G^{p^i}$, $\Omega_{\{i\}}(G) = \Omega_i(G)$ e $|G : \Omega_i(G)| = |G^{p^i}|$, G é dito ser power abelian, tal propriedade vale para p-grupos abelianos, além disso, outras classes de grupos compartilham da mesma propriedade, um exemplo é a família de p-grupos *powerful*.

Definição 3.1.3. *O expoente de um grupo G é o mínimo múltiplo comum da ordem dos elementos de G, ou seja, é o menor valor $n \in \mathbb{N}$, tal que $g^n = 1$, para todo $g \in G$. Notação: $exp(G) = n$.*

Observação 3.1.2. *No caso de p-grupos finitos, nós temos que $exp(G) = p^e$, para algum $e \in \mathbb{N}$.*

Segundo N. Gonçalves em [13], em grupos abelianos e em algumas famílias de p-grupos finitos, o produto de potências n-ésimas é uma potência n-ésima, isto é, para todos elementos x, y e para n inteiro existe z tal que $x^n y^n = z^n$. No caso abeliano $z = xy$, mas tal condição não vale para todos os grupos. A fórmula de compilação de Philip Hall nos dá uma relação semelhante que vale para grupos arbitrários.

Teorema 3.1.1. *[7, pg. 355] Sejam x, y elementos de um grupo arbitrário G e n um inteiro positivo. Então:*

$$x^n y^n = (xy)^n c_2^{\binom{n}{2}} \cdots c_i^{\binom{n}{i}} \cdots c_{n-1}^n c_n,$$

onde $c_i \in \gamma_i(G)$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Conforme Gonçalves em [13], cada c_i pode ser construído como um produto de comutadores de tamanho pelo menos i. Além disso, os únicos elementos que aparecem nesse produto são x e y. Então, podemos considerar cada $c_i = c_i(x,y) \in \gamma_i(\langle x,y\rangle)$. Com respeito à p-grupos finitos, tomando $n = p^k$ podemos obter resultados mais interessantes da fórmula acima, conforme o seguinte teorema:

Teorema 3.1.2. *[11, pg. 4] (Fórmula de Compilação de Philip Hall) Sejam G um grupo arbitrário e x, y dois elementos de G. Seja $H = \langle x,y\rangle$ e $L = \langle x,[x,y]\rangle$. Então, para todo $k \geq 0$, temos:*

$$(xy)^{p^k} \equiv x^{p^k}y^{p^k} \ (mod \ \gamma_2(H)^{p^k}\gamma_p(H)^{p^{k-1}}\gamma_{p^2}(H)^{p^{k-2}}\cdots\gamma_{p^k}(H) \tag{3.1}$$

e

$$[x,y]^{p^k} \equiv [x^{p^k},y] \ (mod \ \gamma_2(L)^{p^k}\gamma_p(L)^{p^{k-1}}\gamma_{p^2}(L)^{p^{k-2}}\cdots\gamma_{p^k}(L). \tag{3.2}$$

Lema 3.1.4. *[11, pg. 5] Sejam G um p-grupo finito, e M e N subgrupos normais de G com $N \leq M[N,G]N^p$. Então, $N \leq M$.*

Teorema 3.1.3. *[11, pg. 5] Sejam G um p-grupo finito e M e N subgrupos normais de G. Então:*

$$[N^{p^k},M] \equiv [N,M]^{p^k} \ (mod \ [M,_p N]^{p^{k-1}}[M,_{p^2} N]^{p^{k-2}}\cdots[M,_{p^k} N]), \ para \ todo \ k \in \mathbb{N}.$$

3.2 p-grupos Powerful

Nessa seção serão apresentadas as propriedades e definições sobre p-grupos finitos *powerful*, tal família de grupos contém a família de p-grupos abelianos, a mesma foi introduzida por A. Mann e desenvolvida no artigo [21] pelos autores A. Lubotzky e A. Mann. Para mais detalhes acerca dessa teoria consulte [7] e [21].

Definição 3.2.1. *Quando G é um p-grupo finito, definimos a seguinte sequência de subgrupos:*

$$P_1(G) = G, \ P_{i+1}(G) = P_i(G)^p[P_i(G),G], \ para \ i \geq 1.$$

Para facilitar denominamos $G_i = P_i(G)$, tal série é chamada de p-série.

Podemos ver que a p-série é uma série descendente de subgrupos normais em G e ainda central, pois $[P_i(G),G] \leq P_{i+1}(G)$.

Lema 3.2.1 (Lei Modular de Dedekind)**.** *[24, pg. 15] Sejam H, K, L subgrupos de um grupo G e $H \leq K$. Então $HL \cap K = H(L \cap K)$.*

Definição 3.2.2 (*Powerful* e *Powerfully Embedded*)**.** *Seja G um p-grupo finito. Então,*

(i) O grupo G é dito ser powerful se:

$$G' \leq \begin{cases} G^p, & se \ p > 2 \\ G^4, & se \ p = 2 \end{cases}$$

(ii) Um subgrupo N de um grupo G é dito powerfully embedded em G, se:

$$[N,G] \leq \begin{cases} N^p, & se\ p > 2 \\ N^4, & se\ p = 2 \end{cases}$$

Notação: Se um subgrupo N é powerfully embedded em G, escrevemos N pe G.

Observação 3.2.1. *Da definição de subgrupo de Frattini de um p-grupo finito temos $\Phi(G) = G^pG'$, logo para p ímpar, G é powerful se, e somente se, $\Phi(G) = G^p$.*

Exemplo 3.2.1. *(i) Todos os p-grupos abelianos finitos são powerful e todos seus subgrupos são powerfully embedded.*

(ii) Para p ímpar, grupos não abelianos de expoente p não são powerful.

(iii) Grupos nilpotentes de classe 2 não necessariamente são powerful (Basta observar o grupo D_4, onde o mesmo é um 2-grupo com $cl(D_4) \leq 2$).

(iv) Subgrupos de grupos powerful nem sempre são powerful.

Exemplo 3.2.2. *Iremos explorar o item (iii) do exemplo anterior, utilizando o grupo D_4.*

Seja o grupo $D_4 = \langle x, y \mid x^4 = 1 = y^2,\ x^y = x^{-1} \rangle$ (diedral com 8 elementos), D_4 é um grupo não abeliano de ordem 2^3, temos que $Z(D_4) = \langle x^2 \rangle$, logo $|D_4/Z(D_4)| = 4$, assim $D_4/Z(D_4)$ é abeliano, como $Z(D_4) \trianglelefteq D_4$ então $D_4' \leq Z(D_4)$. D_4 é não abeliano, logo D_4' é não trivial, então $Z(D_4) = D_4'$, assim:

$$\gamma_1(D_4) = D_4,\ \gamma_2(D_4) = [D_4, D_4] = D_4',\ \gamma_3(D_4) = [D_4', D_4] = \{1\}.$$

Por definição, D_4 tem classe de nilpotência 2. Mas pela construção de D_4 vemos que $D_4^4 = \{1\}$, assim concluímos que D_4' não está contigo em D_4^4.

Portanto D_4 não é powerful.

Exemplo 3.2.3. *Mostraremos, por um exemplo, que nem todo subgrupo de um p-grupo powerful é ainda powerful.*

Seja $G = \langle a, b, c \mid a^8 = b^4 = c^2 = 1,\ ab = ba,\ ac = ca,\ b^c = b^{-1} \rangle$, ou seja, $G \cong D_4 \times C_8$, podemos ver que todo elemento de G é da forma $a^ib^jc^k$, sendo $1 \leq i \leq 8$, $1 \leq j \leq 4$ e $1 \leq k \leq 2$.

Seja $N = \langle b^2a^4 \rangle$ e temos $N \trianglelefteq G$, de fato, seja $a^ib^jc \in G$ arbitrário, então:

$$(b^2a^4)^{a^ib^jc} = c^{-1}b^{-j}a^{-i}b^2a^4a^ib^jc = cb^2a^4c = cbbca^4 =$$

$$= (cbc)(cbc)a^4 = b^{-1}b^{-1}a^4 = b^{-2}a^4 = b^2a^4 \in N,$$

logo, $N \trianglelefteq G$.

Considere $K = G/N$, *temos que* $K' = [K, K] = [G/N, G/N] = [G, G]N/N = \langle b^2 \rangle N/N = \langle b^2 N \rangle = \langle a^4 N \rangle = \langle (aN)^4 \rangle \leq K^4$.

Logo K *é um p-grupo powerful. Seja* $H = \langle bN, cN \rangle$, *onde* $o(bN) = 4$, $o(cN) = 2$ *e* $(bN)^{cN} = c^{-1}NbNcN = b^c N = b^{-1}N = (bN)^{-1}$.

Portanto, $H \cong D_4$, *sendo assim* H *não é powerful.*

Lema 3.2.2. *[7, pg. 37] Sejam* G *um p-grupo finito e* N, K *e* W *subgrupos normais de* G, *sendo* $N \leq W$.

(i) Se N *pe* G *então* NK/K *pe* G/K.

(ii) Se p *é ímpar e* $K \leq N^p$, *ou se* $p = 2$ *e* $K \leq N^4$, *então* N *pe* G *se, e somente se,* N/K *pe* G/K.

(iii) Se N *pe* G *e* $x \in G$, *então* $\langle x, N \rangle$ *é powerful.*

(iv) Se N *não é powerfully embedded em* W, *então existe um subgrupo normal* J *de* G *tal que:*

- *Se* p *é ímpar,*

  $$N^p[N, W, W] \leq J < N^p[N, W] \text{ e } [N^p[N, W] : J] = p.$$

- *Se* $p = 2$,

  $$N^4[N, W]^2[N, W, W] \leq J < N^2[N, W] \text{ e } [N^4[N, W] : J] = 2.$$

Proposição 3.2.1. *[7, pg. 38] Sejam* G *um p-grupo finito e* $N \leq G$. *Se* N *pe* G, *então* N^p *pe* G.

Teorema 3.2.1. *[12, pg. 37-39] Sejam* G *um p-grupo e* M, N *subgrupos powerfully embedded em* G, *então:*

(i) $[N^p, M] = [N, M]^p$.

(ii) $[N, G]$ *e* MN *são powerfully embedded em* G.

Corolário 3.2.1. *[21, pg. 487] Seja* G *um p-grupo powerful.*

(i) Os subgrupos $\gamma_i(G)$, $G^{(i)}$, G^{p^i} *e* $\Phi(G)$ *são powerfully embedded em* G.

(ii) Se $\gamma_{i+1}(G) \subseteq H \subseteq \gamma_i(G)$, *com* $i \geq 2$, *então* H *é powerful.*

Lema 3.2.3. *[7, pg. 39] Seja* G *um p-grupo powerful.*

(i) Para cada i, *temos que* G_i *pe* G *e* $G_{i+1} = G_i^p = \Phi(G_i)$.

(ii) Para cada i, *a aplicação* $x \longmapsto x^p$ *induz um homomorfismo de* G_i/G_{i+1} *sobre* G_{i+1}/G_{i+2}.

Lema 3.2.4. *[7, pg. 40] Se* $G = \langle a_1, \ldots, a_d \rangle$ *é um p-grupo powerful, então* $G^p = \langle a_1^p, \ldots, a_d^p \rangle$.

Demonstração. Consideremos o epimorfismo $\pi : G/G_2 \longrightarrow G_2/G_3$. Como $G = \langle a_1, \ldots, a_d \rangle$, então $G/G_2 = \langle a_1G_2, \ldots, a_dG_2 \rangle$.

Pelo epimorfismo π, $G_2/G_3 = \langle \pi(a_1G_2), \ldots, \pi(a_dG_2) \rangle$, como $\pi(x) = x^p$, teremos $G_2 = \langle a_1^pG_2^p, \ldots, a_d^pG_2^p \rangle\, G_3 = \langle a_1^p, \ldots, a_d^p \rangle\, G_3$, pois $G_2^p = G_3$.

Como G é *powerful*, então $\Phi(G) = G^p$ e $G_3 = \Phi(G_2)$, temos $G^p = \langle a_1^p, \ldots, a_d^p \rangle$. □

Proposição 3.2.2. *[7, pg. 40] Se G é um p-grupo powerful então todo elemento de G^p é uma p-ésima potência em G, ou seja, $G^p = G^{\{p\}}$.*

Demonstração. A prova será feita por indução sobre a ordem de G. Se $\mid G \mid = 1$, o resultado segue trivialmente.

Suponhamos então que vale a hipótese de indução para todo p-grupo *powerful* com ordem estritamente menor do que $\mid G \mid$.

Sejam $g \in G^p$ e π o epimorfismo de G/G_2 sobre G_2/G_3, definido no lema acima, como $G_2 = G^p$, existem $x \in G$ e $y \in G_3$ tais que $g = x^py$.

Defina $H = \langle G^p, x \rangle = \langle G_2, x \rangle$. Vimos anteriormente que G_i *pe* G, pelo Lema 3.2.2 H é *powerful*. Logo, como $y \in G_3 = G_2^p$, então $g = x^py \in \langle x^p, G_2^p \rangle = H^p$.

Se $H \neq G$, então pela hipótese de indução, g é uma potência de um elemento de H, logo de um elemento de G.

Se $H = G$, teremos $G = \langle G_2, x \rangle = \langle \Phi(G), x \rangle = \langle x \rangle$, ou seja, G é um grupo cíclico, portanto o teorema será válido para G. □

Proposição 3.2.3. *[21, pg. 489] Seja N um subgrupo powerfully embedded em G. Se N é o fecho normal de algum subconjunto de G, ou seja, se $X \subseteq G$ e $N = \langle X \rangle^G$, então N é gerado pelo conjunto X.*

Teorema 3.2.2. *[21, pg. 490] Se G é um p-grupo powerful e $H \leq G$ então $d(H) \leq d(G)$.*

Demonstração. A prova será feita por indução sobre a ordem do grupo G. Se $\mid G \mid = 1$, obtemos o resultado trivialmente. Suponhamos válida a hipótese para p-grupos *powerful* com ordem menor (estrita) que $\mid G \mid$. Seja $d(G) = d$ e $d(G_2) = m$, onde $G_2 = \Phi(G)$ por definição. Seja $H \leq G$, temos que G_2 é *powerful* (Lema 3.2.3), então consideremos o grupo $K = H \cap G_2 \leq G_2$, pela hipótese de indução teremos $d(K) \leq m = d(G_2)$.

Seja agora a aplicação $\pi : G/G_2 \longrightarrow G_2/G_3$ dada por $x \longmapsto x^p$ que é um epimorfismo (Lema 3.2.3), e como $G_2 = \Phi(G)$, segue que $d(G) = d = dim\,(G/\Phi(G)) = dim\,(G/G_2)$ (onde *dim* denota a dimensão como um $\mathbb{F}_p$-espaço vetorial). Por outro lado, $G_3 = \Phi(G_2)$, assim $d(G_2) = m = dim\,(G_2/G_3)$.

Como ambos quocientes são também espaços vetoriais, podemos ter:

$$dim(ker\ \pi) = dim(Dom(\pi)) - dim(Im(\pi)) = dim\left(\frac{G}{G_2}\right) - dim\left(\frac{G_2}{G_3}\right)$$

$$\Rightarrow dim(ker\ \pi) = d - m.$$

Assim, $dim\,(ker\ \pi \cap (HG_2)/G_2) \leq d-m$. Considerando a restrição de π ao conjunto HG_2/G_2, temos $dim\,(\pi\,(HG_2/G_2)) = dim\,(HG_2/G_2) - dim\,(ker\ \ \pi \cap (HG_2)/G_2) \geq e-(d-m) = m-(d-e)$, onde $e = dim\,(HG_2/G_2)$.

Sejam $h_1, \ldots, h_e$ elementos de H tais que $HG_2 = \langle h_1, \ldots, h_e \rangle\, G_2$. Observe que $\Phi(K) \leq K^p$ e por definição $G_3 = \Phi(G_2) = G_2^p$, mas $K = H \cap G_2$ então $K^p \leq G_2^p = G_3$, logo $\Phi(K) \leq G_3$.

Desde que $\Phi(K) \leq K^p \leq G_3$, o subespaço de $K/\Phi(K)$ gerado pelas classes $h_1^p, \ldots, h_e^p$ tem dimensão pelo menos $dim\,(\pi\,(HG_2/G_2)) \geq m-(d-e)$.

Como $d(K) \leq m$, pela hipótese de indução, podemos encontrar $d-e$ elementos $y_1, \ldots, y_{d-e}$ de K tais que $K = \langle h_1^p, \ldots, h_e^p, y_1, \ldots, y_{d-e} \rangle\, \Phi(K)$.

Então $K = \langle h_1^p, \ldots, h_e^p, y_1, \ldots, y_{d-e} \rangle$.

Logo:

$$H = H \cap HG_2 = H \cap \langle h_1, \ldots, h_e \rangle\, G_2 = \langle h_1, \ldots, h_e \rangle\, (H \cap G_2)$$
$$\Rightarrow H = \langle h_1, \ldots, h_e \rangle\, K = \langle h_1, \ldots, h_e, y_1, \ldots, y_{d-e} \rangle\,.$$

Portanto, $d(H) \leq d(G)$. □

Relembremos que o posto de um grupo finito é definido por:

$$rk(G) = sup\{d(H) \mid H \leq G\}.$$

Observação 3.2.2. *É interessante observar que ao usar o teorema acima, podemos obter a igualdade $rk(G) = d(G)$, para p-grupos finitos powerful.*

Definição 3.2.3. *Sejam G um p-grupo finito e r um inteiro positivo. Definimos $V(G, r)$ como sendo a interseção dos núcleos de todos os homomorfismos de G em $GL_r(\mathbb{F}_p)$*

Segundo Dixon, du Sautoy, Mann e Segal em [7], a imagem de um homomorfismo de um p-grupo G em $GL_r(\mathbb{F}_p)$ é um p-grupo, e todo p-subgrupo de $GL_r(\mathbb{F}_p)$ é conjugado a um subgrupo do grupo uni-triangular inferior $U_r(\mathbb{F}_p)$. Podemos igualmente definir $V(G, r)$ como sendo a interseção dos núcleos de todos os homomorfismos de G em $U_r(\mathbb{F}_p)$.

Observe que um elemento $g \in G$ pertence a $V(G, r)$ se, e somente se, g age trivialmente em qualquer representação linear de G sobre qualquer $\mathbb{F}_p$-espaço vetorial de dimensão no máximo r.

Definimos agora o inteiro $\lambda(r)$ como sendo:

$$2^{\lambda(r)-1} < r \leq 2^{\lambda(r)}, \text{ para } r \in \mathbb{N}.$$

Lema 3.2.5. *[7, pg. 42]*

(i) O grupo $U_r(\mathbb{F}_p)$ possui uma série, de comprimento $\lambda(r)$, de subgrupos normais, com quocientes abelianos elementares.

(ii) Se G é um p-grupo finito, então $G/V(G,r)$ possui uma série com essas propriedades.

Proposição 3.2.4. *[7, pg. 43] Sejam G um p-grupo finito e r um inteiro positivo. Coloque $V = V(G,r)$ e seja $W = V$ se p for ímpar ou $W = V^2$ se $p = 2$. Se $N \trianglelefteq G$, $d(N) \leq r$ e $N \leq W$, então N pe W.*

Teorema 3.2.3. *[7, pg. 44] Seja G um p-grupo finito de posto r. Então, G possui um subgrupo característico powerful de índice pelo menos $p^{r\lambda(r)}$ se p for ímpar ou $2^{r+r\lambda(r)}$ se $p = 2$.*

Demonstração. Considere $V = V(G,r)$, pelo Lema 3.2.5, G/V possui uma série de subgrupos normais com comprimento no máximo $\lambda(r)$, onde os quocientes são abelianos elementares. Com relação ao grupo G, temos a série $V \leq N_1 \leq \cdots \leq N_s = G$, com $s \leq \lambda(r)$ e N_i/N_{i+1} é um p-grupo abeliano elementar.

Por hipótese G tem posto r, então cada um dos fatores possui ordem no máximo p^r, pois $d(N_i) \leq d(G) = r$. Com isso $[G : V] \leq p^{r\lambda(r)}$.

- Caso $p > 2$: vemos que pela definição de V, temos que V é característico em G, logo $V \trianglelefteq G$. Como G possui posto r, temos que $d(V) \leq r$. Aplicando a proposição anterior temos que V *pe* V, ou seja, V é p-grupo *powerful*. Portanto se $p > 2$, o subgrupo V é característico *powerful* de índice no máximo $p^{r\lambda(r)}$.

- Caso $p = 2$: por definição V^2 *char* V e como V *char* G, então V^2 *char* G e assim $V^2 \trianglelefteq G$. Como também temos que $d(V^2) \leq r$, aplicando a proposição anterior temos que V^2 *pe* V^2, logo V^2 é *powerful*. Portanto, vemos que $[G : V^2] = [G : V]\,[V : V^2] \leq 2^{r\lambda(r)}.2^r = 2^{r+r\lambda(r)}$ (pois $[V : V^2]$ também tem ordem no máximo 2^r). Nesse caso o subgrupo característico *powerful* encontrado foi o subgrupo V^2 de índice $2^{r+r\lambda(r)}$.

□

A dissertação de mestrado de N. Gonçalves em [12] trás bons resultados acerca da teoria de p-grupos *powerful*, bem como alguns resultados sobre p-grupos *potent*, essa segunda família de p-grupos possui características semelhantes das vistas em p-grupos *powerful*.

Capítulo 4

O Quadrado Tensorial não Abeliano de p-grupos Finitos

Nesse capítulo o artigo [22] foi tomado como referência principal, serão abordados os principais resultados sobre o quadrado tensorial não abeliano de p-grupos finitos e algumas características relevantes, além disso, serão apresentados bons limitantes para a ordem dos principais grupos trabalhados nessa dissertação.

4.1 Quadrado Tensorial não Abeliano de p-grupos Finitos Powerful

Lema 4.1.1. *[1, pg. 293] Seja G um grupo nilpotente, onde $cl(G) \leq 2$, então para todo $g, h \in G$ e seja m e n inteiros arbitrários, temos:*

$$[g^m, (h^{\varphi})^n] = [g, h^{\varphi}]^{mn}[h, [g, h]^{\varphi}]^{m\binom{n}{2}}[g, [g, h]^{\varphi}]^{n\binom{m}{2}}.$$

Teorema 4.1.1. *[22, pg. 22] Seja G um p-grupo powerful. Então os grupos $[\nu(G), \nu(G)]$ e $[G, G^{\varphi}]$ são powerfully embedded em $\nu(G)$.*

Demonstração. Primeiro vamos provar que $[\nu(G), \nu(G)]$ *pe* $\nu(G)$.

Assuma que $p > 2$, vamos desenvolver a demonstração módulo $[\nu(G), \nu(G)]^p$, ou seja, podemos tomar $[\nu(G), \nu(G)]^p = 1$. Queremos mostrar que $\gamma_3(\nu(G)) = 1$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\nu(G)$ é nilpotente de classe ≤ 3. Temos que $[G, G]^p \leq [\nu(G), \nu(G)]^p = 1$, como foi suposto. Como G é *powerful*, pelo Corolário 3.2.1 segue que $\gamma_3(G) = [G', G] \leq G'^p = [G, G]^p = 1$, portanto G é um grupo nilpotente de classe ≤ 2.

Pelo Teorema 2.2.1, temos que:

$$\gamma_i(\nu(G)) = \gamma_i(G)\gamma_i(G^{\varphi})[\gamma_{i-1}(G), G^{\varphi}][G, \gamma_{i-1}(G^{\varphi})],$$

assim,

$$\begin{aligned}\gamma_3(\nu(G)) &= \gamma_3(G)\gamma_3(G^\varphi)[\gamma_2(G), G^\varphi][G, \gamma_2(G^\varphi)]\\ &= [G, G, G^\varphi][G, [G^\varphi, G^\varphi]]\\ &= [G, G, G^\varphi][G^\varphi, G^\varphi, G],\end{aligned}$$

pois G e G^φ são nilpotentes de classe ≤ 2, ou seja, $\gamma_3(G) = \gamma_3(G^\varphi) = 1$. Temos, pelo Lema 2.1.1 que, $[g_1^\varphi, g_2^\varphi, g_3] = [g_1, g_2, g_3^\varphi]$, $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$, logo $\gamma_3(\nu(G)) = [G, G, G^\varphi]$. Como G é nilpotente de classe ≤ 2 e pelo Lema 4.1.1, temos:

$$[g^m, (h^\varphi)^n] = [g, h^\varphi]^{mn}[h, [g, h]^\varphi]^{m\binom{n}{2}}[g, [g, h]^\varphi]^{n\binom{m}{2}},$$

para todos elementos $g, h \in G$ e inteiros m, n. Seja $[g, h, k^\varphi]$ um elemento arbitrário de $[G, G, G^\varphi]$. Como G é *powerful*, pela definição de p-grupo *powerful* e pela Proposição 3.2.2, temos que $[g, h] \in G^p$ e $[g, h] = x^p$, para algum $x \in G$. Podemos tomar $G = G^2$, pois p é ímpar, assim podemos escrever o elemento k como sendo o produto $\prod_i y_i^2 \in G^2$ (sem perda de generalidade, suponhamos que $k^\varphi = (y_i^\varphi)^2$), para certos $y_i \in G$, logo:

$$[x^p, (y_i^\varphi)^2] = [x, y_i^\varphi]^{2p}[y_i, [x, y_i]^\varphi]^p[x, [x, y_i]^\varphi]^{2\binom{p}{2}} = 1 \ ([\nu(G), \nu(G)]^p = 1),$$

assim, podemos concluir que $[x^p, k^\varphi] = 1$. Portanto $\gamma_3(\nu(G)) = [G, G, G^\varphi] = 1$, ou seja, $[\nu(G), \nu(G)]$ *pe* $\nu(G)$ para $p > 2$.

Vamos realizar algumas mudanças para provar o caso $p = 2$. Vamos assumir que $[\nu(G), \nu(G)]^4 = 1$, logo $[G, G]^4 = 1$, como G é *powerful*, temos que, $\gamma_3(G) \leq [G, G]^4 = 1$, logo G é nilpotente de classe ≤ 2. Como o caso acima, podemos observar que $\gamma_3(\nu(G)) = [G, G, G^\varphi]$. Seja $[g, h, k^\varphi] \in [G, G, G^\varphi]$ um elemento arbitrário. Como G é *powerful*, existe um elemento $x \in G$ tal que $[g, h] = x^4$. Nesse caso podemos tomar $G = G^3$, então é suficiente considerar o caso quando $k = y^3$, para algum $y \in G$, assim utilizando o Lema 4.1.1, temos:

$$[g, h, k^\varphi] = [x^4, (y^\varphi)^3] = [x, y]^{12}[y, [x, y]^\varphi]^{12}[x, [x, y]^\varphi]^{18} = [x, [x, y]^\varphi]^2.$$

Consideremos agora o termo $[x, [x, y]^\varphi]$, temos que $[x, y] = z^4$ e $x = w^3$, sendo $z, w \in G$, assim:

$$[x, [x, y]^\varphi] = [w^3, (z^\varphi)^4] = [w, z^\varphi]^{12}[z, [w, z]^\varphi]^{18}[w, [w, z]^\varphi]^{12} = [z, [w, z]^\varphi]^2,$$

logo temos que $[x, [x, y]^\varphi]^2 = ([z, [w, z]^\varphi]^2)^2 = [z, [w, z]^\varphi]^4 = 1$, assim $\gamma_3(\nu(G)) = 1$, ou seja, concluímos que $[\nu(G), \nu(G)]$ *pe* $\nu(G)$, para $p = 2$.

Agora vamos provar que $[G, G^\varphi]$ *pe* $\nu(G)$.

(Caso $p > 2$) Vemos que em [2] se $p \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 < n < p$ e G for um p-grupo finito tal que $\gamma_n(G) \leq G^p$, então $[[G, G^\varphi],_{n-1} \nu(G)] \leq [G, G^\varphi]^p$. Como $\gamma_2(G) \leq G^p$, então $[[G, G^\varphi], \nu(G)] \leq [G, G^\varphi]^p$, ou seja, $[G, G^\varphi]$ *pe* $\nu(G)$ para $p > 2$.

(Caso $p = 2$) Seja $W = [G, G^{\varphi}]^4[[G, G^{\varphi}], \nu(G), \nu(G)][[G, G^{\varphi}], \nu(G)]^2$, vamos provar que $[[G, G^{\varphi}], \nu(G)] \leq W$, mas antes, pelas relações definidoras de $\nu(G)$ e pelo Lema 2.1.1 podemos ver que:

$$[[G, G^{\varphi}], \nu(G)] = [G, G^{\varphi}, G] = [G, G, G^{\varphi}] \leq [G^4, G^{\varphi}],$$

ou seja, é suficiente mostrar que $[G^4, G^{\varphi}] \leq W$. Pelo Teorema 3.1.2, temos que:

$$[x^4, y^{\varphi}] \equiv [x, y^{\varphi}]^4 \ (mod\ \gamma_2(L)^4\gamma_2(L)^2\gamma_4(L)),$$

sendo $L = \langle x, [x, y^{\varphi}]\rangle$. Podemos observar que:

$$\begin{array}{rcl} \gamma_2(L)^4 & = & [L, L]^4 \\ & \leq & [G, G^{\varphi}, G]^4 \\ & \leq & [G, G, G^{\varphi}]^4 \\ & \leq & [G, G^{\varphi}]^4 \\ & \leq & W, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \gamma_2(L)^2 & = & [L, L]^2 \\ & \leq & [G, G, G^{\varphi}]^2 \\ & \leq & [G, G^{\varphi}]^2 \\ & \leq & W \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \gamma_4(L) & = & [[[L, L], L], L] \\ & \leq & [[G, G^{\varphi}, G, L], L] \\ & \leq & [G, G^{\varphi}, G, \nu(G), \nu(G)] \\ & = & [G, G, G^{\varphi},_2 \nu(G)] \\ & \leq & [G, G^{\varphi},_2 \nu(G)] \\ & \leq & W. \end{array}$$

Como $[x, y^{\varphi}]^4 \in W$, então $[x^4, y^{\varphi}] \in W$, pela arbitrariedade do elemento $[x^4, y^{\varphi}]$, temos que $[G^4, G^{\varphi}] \leq W$, assim utilizando o Lema 3.1.4 concluímos que $[[G, G^{\varphi}], \nu(G)] \leq [G, G^{\varphi}]^4$ e portanto, para $p = 2$, temos que $[G, G^{\varphi}]$ *pe* $\nu(G)$. □

Observação 4.1.1. *Usando a Proposição 2.2.1, a definição de grupo powerful e o resultado acima, temos que se G é powerful, então $G \otimes G$ também será powerful.*

Sejam G um grupo e $N \trianglelefteq G$. Então, temos os homomorfismos canônicos $\iota_1 : N \otimes G \to G \otimes G$ e $\iota_2 : G \otimes N \to G \otimes G$. Suas imagens são subgrupos normais de $G \otimes G$.

Observação 4.1.2. *Temos que $Im\ \iota_1 \cong [N, G^{\varphi}] \leq [G, G^{\varphi}]$ e $N \trianglelefteq G$, logo $[N, G^{\varphi}] \trianglelefteq [G, G^{\varphi}]$. O resultado é análogo para $Im\ \iota_2 = [G^{\varphi}, N]$.*

Proposição 4.1.1. *[22, pg. 23] Sejam G um p-grupo finito e N powerfully embedded em G. Então im ι_1 e im ι_2 são powerfully embedded em $G \otimes G$.*

Demonstração. Assuma $p > 2$, queremos provar que $[[N, G^\varphi], [G, G^\varphi]] \leq [N, G^\varphi]^p$. Utilizando o Lema 2.1.1, temos que em $\nu(G)$ vale:

$$[[g, h^\varphi], [x, y^\varphi]] = ([x, y^\varphi]^{-1})^{[g,h^\varphi]}[x, y^\varphi] = ([x, y^\varphi]^{-1})^{[g,h]}[x, y^\varphi] = [[g, h], [x, y]^\varphi],$$

para todos $g, h, x, y \in G$, então:

$$[[N, G^\varphi], [G, G^\varphi]] = [[N, G], [G, G]^\varphi] \leq [N^p, G^\varphi].$$

Sejam $x \in N$ e $y \in G$, pela fórmula de P. Hall temos que:

$$[x^p, y^\varphi] \equiv [x, y^\varphi]^p (mod\ \gamma_2(L)^p \gamma_p(L)), \text{ onde } L = \langle x, [x, y^\varphi] \rangle .$$

Temos também que:

$$\begin{array}{rcl} \gamma_2(L)^p & = & [\langle x, [x, y^\varphi] \rangle , \langle x, [x, y^\varphi] \rangle]^p \\ & \leq & [[N, G^\varphi], N]^p \\ & \leq & [N, G^\varphi, G]^p \\ & = & [N, G, G^\varphi]^p \\ & \leq & [N, G^\varphi]^p. \end{array}$$

Para mostrar que $\gamma_p(L) \leq [N, G^\varphi]^p$ vamos desenvolver os cálculos módulo $[N, G^\varphi]^p$, logo podemos supor que $[N, G^\varphi]^p = 1$. Projetando $[N, G^\varphi]^p$ em $[N, G]^p$, temos que $[N, G]^p = 1$. Além disso $[N, G]$ *pe* G pois N *pe* G (Teorema 3.2.1), ou seja, $[N, G, G] \leq [N, G]^p = 1$, assim:

$$\begin{array}{rcl} \gamma_p(L) & = & [\gamma_2(L),_{p-2} L] \\ & \leq & [N, G^\varphi, G,_{p-2} L] \\ & \leq & [N, G, G^\varphi,_{p-2} G] \\ & \leq & [N, G, G^\varphi, G] \\ & = & [N, G, G, G^\varphi] \\ & \leq & 1. \end{array}$$

Portanto, $\gamma_p(L) \leq [N, G^\varphi]^p$. Concluindo assim que $im\ \iota_1 \cong [N, G^\varphi]$ *pe* $[G, G^\varphi] \cong G \otimes G$, para $p > 2$.

Para $p = 2$, temos que:

$$[[N, G^\varphi], [G, G^\varphi]] \leq [N^4, G^\varphi].$$

Sejam $x \in N$ e $y \in G$, pela fórmula de P. Hall temos que:

$$[x^4, y^\varphi] \equiv [x, y^\varphi]^4 (mod\ \gamma_2(L)^4 \gamma_2(L)^2 \gamma_4(L)), \text{ onde } L = \langle x, [x, y^\varphi] \rangle ,$$

porém,

$$\begin{array}{rcl}\gamma_2(L)^4 & = & [L,L]^4\\ & \leq & [N,G^\varphi,G]^4\\ & \leq & [N,G,G^\varphi]^4\\ & \leq & [N,G^\varphi]^4\end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl}\gamma_2(L)^2 & = & [N,G,G^\varphi]^2\\ & \leq & [N^4,G^\varphi]^2.\end{array}$$

Para o grupo $\gamma_4(L)$ vamos desenvolver de maneira semelhante ao caso $p > 2$. Seja, sem perda de generalidade, $[N,G^\varphi]^4 = 1$. Projetando $[N,G^\varphi]^4$ em $[N,G]^4$, temos que $[N,G]^4 = 1$, assim $[[N,G],G] \leq [N,G]^4 = 1$, logo:

$$\begin{array}{rcl}\gamma_4(L) & = & [\gamma_2(L),_2 L]\\ & \leq & [N,G^\varphi,G,G]\\ & = & [N,G,G,G^\varphi]\\ & \leq & 1,\end{array}$$

assim, $\gamma_4(L) \leq [N,G^\varphi]^4$. Logo pelo Lema 3.1.4, temos que $[x^4,y^\varphi] \in [N,G^\varphi]^4[N^4,G^\varphi,[G,G^\varphi]][N^4,G^\varphi]^2$, para todo $x \in N$ e $y \in G$, assim $[N^4,G^\varphi] \leq [N,G^\varphi]^4$.

Portanto, para $p = 2$, $[N,G^\varphi]$ *pe* $[G,G^\varphi]$. O caso *im* ι_2 *pe* $G \otimes G$ é análogo. $\square$

Observação 4.1.3. *Temos que* $[G,G^\varphi] \cong G \otimes G$*, mas não necessariamente vale* $[N,G^\varphi] \cong N \otimes G$*, pois* $[N,G^\varphi]$ *pode sofrer influências dentro de* $\nu(G)$*.*

Definição 4.1.1. *(i) O grupo* $\nabla(G)$ *é o grupo gerado pelos símbolos* $g \otimes g$*, ou seja,* $\nabla(G) = \langle g \otimes g \mid g \in G] \rangle$*.*

(ii) Seja G *um grupo. O quadrado exterior não abeliano de* G *é o grupo quociente* $G \otimes G/\nabla(G)$*. Tal grupo será denotado por* $G \wedge G$*.*

Vamos definir abaixo o multiplicador de Schur $\mathcal{M}(G)$ de um grupo G, tal grupo foi introduzido por I. Schur em 1904 e é desenvolvido na teoria de grupos de cohomologia, para mais detalhes sobre $\mathcal{M}(G)$ consulte [28] e [29].

Teorema 4.1.2 (Fórmula de Hopf)**.** *[29] Sejam* G *um grupo e* R *um subgrupo normal de um grupo livre* F*, com* $F/R \cong G$*. Então:*

$$\mathcal{M}(G) \cong (F' \cap R)/[R,F].$$

Considerando o homomorfismo $\kappa : G \otimes G \to G'$ e pelo fato que $\nabla(G) \subseteq J_2(G)$ temos que existe um homomorfimo $\kappa' : G \wedge G \to G'$ (dado por $g \wedge h \mapsto [g,h]$), tal que $\rho\kappa' = \kappa$, sendo $\rho : G \otimes G \to G \otimes G/\nabla(G)$.

Conforme R. Brown, D. Johnson e E. Robertson em [4], o núcleo de κ' é isomorfo ao multiplicador de Schur $\mathcal{M}(G)$ e de acordo com N. Gonçalvez em [13], temos que para o caso finito o multiplicador de Schur $\mathcal{M}(G)$ coincide com o segundo grupo de homologia $H_2(G)$. Para mais detalhes acerca dessa teoria consulte [4] e [5].

De acordo com R. Brown, D. Johnson e E. Robertson em [4], temos que $Im\ \psi \cong \nabla(G)$, onde ψ é o homomorfismo definido na Proposição 2.2.3 e seja $\rho : G\otimes G \to (G\otimes G)/\nabla(G)$ uma projeção natural, assim, obtemos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas e extensões centrais como colunas:

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
 & \Gamma(G_{ab}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & J_2(G) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}(G) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \nabla(G) \arrow[r] \arrow[d] & G\otimes G \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\kappa"] & G\wedge G \arrow[r] \arrow[d, "\kappa'"] & 1 \\
 & 1 & G' \arrow[d] & G' \arrow[d] & \\
 & & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Para um p-grupo finito G, seja $d(G)$ o inteiro tal que $|G : \Phi(G)| = p^{d(G)}$. Lubotzky e Mann em [21] provaram que se G é um p-grupo *powerful* com $d(G) = d$, então $G \wedge G$ e $\mathcal{M}(G) = H_2(G)$ podem ser gerados por $\binom{d}{2}$ geradores. O próximo corolário nos trás uma extensão para esse resultado:

Corolário 4.1.1. *[22, pg. 23] Seja G um p-grupo powerful, com $d(G) = d$. Então $d([\nu(G), \nu(G)]) \leq d(2d-1)$, $d(G\otimes G) \leq d^2$ e $d(J_2(G)) \leq d^2$.*

Demonstração. Seja G gerado pelo conjunto $X = \{x_1, ..., x_d\}$. Temos que $G^{\varphi} = \langle x_1^{\varphi}, ..., x_d^{\varphi}\rangle$, pois $G \cong G^{\varphi}$. Por uma consequência do Teorema 2.2.1 temos que $\nu(G)' = [G, G^{\varphi}]G'(G^{\varphi})'$.

Como $G = \langle X\rangle$ e seja $G^{\varphi} = \langle Y\rangle = \langle y_1, ..., y_d\rangle$, onde $y_i = x_i^{\varphi}$, pela Proposição 1.1.2, temos que:

$$G' = [G, G] = [X, G] = [X, X]^G,$$

e

$$(G^{\varphi})' = [G^{\varphi}, G^{\varphi}] = [Y, G^{\varphi}] = [Y, Y]^{G^{\varphi}}.$$

Agora, também pela Proposição 1.1.2, temos que:

$$[G, G^{\varphi}] = [X, Y]^{GG^{\varphi}}.$$

Portanto, sendo $\mathcal{S} = \{[x_i, x_j], [x_i^{\varphi}, x_j^{\varphi}], [x_l, x_k^{\varphi}] \mid 1 \leq j < i \leq d, 1 \leq k, l \leq d\}$, temos $\nu(G)' = \langle [x_l, x_k^{\varphi}]\rangle^{GG^{\varphi}} \langle [x_i, x_j]\rangle^{G} \left\langle x_i^{\varphi}, x_j^{\varphi}\right\rangle^{G^{\varphi}} \leq \langle \mathcal{S}\rangle^{\nu(G)}$.

Por outro lado, como $\langle\mathcal{S}\rangle \leq \nu(G)' \trianglelefteq \nu(G)$, então $\langle\mathcal{S}\rangle^{\nu(G)} \leq \nu(G)'$, assim $\nu(G)' = \langle\mathcal{S}\rangle^{\nu(G)}$.

Então $[\nu(G), \nu(G)]$ é o fecho normal em $\nu(G)$ do conjunto

$$\mathcal{S} = \{[x_i, x_j], [x_i^{\varphi}, x_j^{\varphi}], [x_l, x_k^{\varphi}] \mid 1 \leq j < i \leq d, 1 \leq k, l \leq d\}.$$

Similarmente, o grupo $[G, G^{\varphi}]$ é o fecho normal em $\nu(G)$ do conjunto

$$\mathcal{T} = \{[x_i, x_j^{\varphi}] \mid 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Como $[\nu(G), \nu(G)]$ e $[G, G^{\varphi}]$ são *powerfully embedded* em $\nu(G)$, pela Proposição 3.2.3 segue que $[\nu(G), \nu(G)]$ e $[G, G^{\varphi}]$ são realmente gerados por $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$, respectivamente. Logo obtemos limites superiores para o número de geradores de $[\nu(G), \nu(G)]$ e $G \otimes G$, isto é, $d([\nu(G), \nu(G)]) \leq d(2d-1)$ e $d(G \otimes G) \leq d^2$. Temos também que $J_2(G) \leq G \otimes G$ e $G \otimes G$ é *powerful*, assim $d(J_2(G)) \leq d(G \otimes G) \leq d^2$. □

O próximo resultado é um caso particular do *Theorem A*, item (1) visto no artigo de N. Gonçalves em [14, pg. 16].

Proposição 4.1.2. *Seja G um p-grupo powerful. Então $\gamma_i(\nu(G))$ pe $\nu(G)$, para $i \geq 2$.*

Demonstração. Para $p > 2$, suponha por indução que $[\gamma_i(\nu(G)), \nu(G)] \leq \gamma_i(\nu(G))^p$. Pelo Teorema 3.1.3, temos:

$$\begin{array}{rcl} [\gamma_{i+1}(\nu(G)), \nu(G)] & \leq & [[\gamma_i(\nu(G)), \nu(G)], \nu(G)] \\ & \leq & [\gamma_i(\nu(G))^p, \nu(G)] \\ & \leq & [\gamma_i(\nu(G)), \nu(G)]^p [\nu(G),_p \gamma_i(\nu(G))] \\ & \leq & \gamma_{i+1}(\nu(G))^p [\nu(G), \gamma_i(\nu(G)),_{p-1} \gamma_i(\nu(G))] \\ & \leq & \gamma_{i+1}(\nu(G))^p [\gamma_i(\nu(G))^p,_2 \nu(G)] \\ & \leq & \gamma_{i+1}(\nu(G))^p [\gamma_i(\nu(G))^p, \nu(G), \nu(G)], \end{array}$$

aplicando o Lema 3.1.3, temos que $[\gamma_{i+1}(\nu(G)), \nu(G)] \leq \gamma_{i+1}(\nu(G))^p$. Portanto, $[\gamma_i(\nu(G)), \nu(G)] \leq \gamma_i(\nu(G))^p$, para $p > 2$, ou seja, $\gamma_i(\nu(G))$ *pe* $\nu(G)$.

Para $p = 2$, suponha por indução que $[\gamma_i(\nu(G)), \nu(G)] \leq \gamma_i(\nu(G))^4$, assim:

$$\begin{array}{rcl} [\gamma_{i+1}(\nu(G)), \nu(G)] & \leq & [[\gamma_i(\nu(G)), \nu(G)], \nu(G)] \\ & \leq & [\gamma_i(\nu(G))^4, \nu(G)] \\ & \leq & [\gamma_i(\nu(G)), \nu(G)]^4 [\nu(G),_2 \gamma_i(\nu(G))]^2 [\nu(G),_4 \gamma_i(\nu(G))] \\ & \leq & \gamma_{i+1}(\nu(G))^4 [\gamma_i(\nu(G)), \gamma_i(\nu(G)), \nu(G)]^2 [\nu(G), \gamma_i(\nu(G)),_3 \nu(G)] \\ & \leq & \gamma_{i+1}(\nu(G))^4 [\gamma_{i+1}(\nu(G)), \nu(G)]^2 [\gamma_{i+1}(\nu(G)), \nu(G), \nu(G)], \end{array}$$

aplicando o Lema 3.1.4, temos que $[\gamma_{i+1}(\nu(G)), \nu(G)] \leq \gamma_{i+1}(\nu(G))^4$, para $p = 2$, ou seja, $\gamma_i(\nu(G))$ *pe* $\nu(G)$. □

Podemos concluir pelos resultados de Lubotzky e Mann em [21] que se G é um p-grupo *powerful*, então $exp(G \wedge G)$ divide $exp(G)$. O próximo teorema generaliza esse resultado:

Teorema 4.1.3. *[22, pg. 24] Seja G um p-grupo powerful. Então o expoente de $[\nu(G), \nu(G)]$ divide o expoente de G.*

Demonstração. Primeiro provaremos a seguinte igualdade $[\gamma_k(H), H]^{p^i} = [\gamma_k(H)^{p^i}, H]$, para $p > 2$. Sejam $H = \nu(G)$, $exp(G) = p^e$ e $\gamma_k(H) = N$, utilizando o Teorema 3.1.3 e a Proposição 4.1.2, temos:

$$\begin{aligned} [N, H]^p &\leq [N^p, H][H,_p N] \\ &\leq [N^p, H][H, N,_{p-1} H] \\ &\leq [N^p, H][N^p, H, H] \\ &\leq [N^p, H][N^p, H] \\ &\leq [N^p, H], \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} [N^p, H] &\leq [N, H]^p[H,_p N] \\ &\leq [N, H]^p[H, N,_{p-1} H] \\ &\leq [N, H]^p[N^p, H, H], \end{aligned}$$

assim, pelo Lema 3.1.3 $[\gamma_k(H)^p, H] \leq [\gamma_k(H), H]^p$, assim, $[\gamma_k(H)^p, H] = [\gamma_k(H), H]^p$. Por um argumento indutivo, implica a igualdade $[\gamma_k(H)^{p^i}, H] = [\gamma_k(H), H]^{p^i}$.

Usando a igualdade acima, provaremos que $\gamma_k(H)^{p^i} = [\gamma_2(H)^{p^i},_{k-2} H]$, para $k \geq 2$.

Para $k = 3$, temos:

$$\begin{aligned} \gamma_3(H)^{p^i} &= [\gamma_2(H), H]^{p^i} \\ &= [\gamma_2(H)^{p^i},_{3-2} H], \end{aligned}$$

logo, para $k = 3$ a igualdade é válida. Suponha por indução que $\gamma_k(H)^{p^i} = [\gamma_2(H)^{p^i},_{k-2} H]$. Provaremos que tal resultado vale para $k + 1$:

$$\begin{aligned} \gamma_{k+1}(H)^{p^i} &= [\gamma_k(H), H]^{p^i} \\ &= [\gamma_k(H)^{p^i}, H] \\ &= [[\gamma_2(H)^{p^i},_{k-2} H], H] \\ &= [\gamma_2(H)^{p^i},_{(k+1)-2} H]. \end{aligned}$$

Logo, $\gamma_k(H)^{p^i} = [\gamma_2(H)^{p^i},_{k-2} H]$, para i inteiro não negativo e $k \geq 2$. Utilizando o resultado acima, temos que:

$$\gamma_k(H)^{p^i} = [\gamma_2(H)^{p^i},_{k-2} H] \leq (\gamma_2(H)^{p^i})^{p^{k-2}} = \gamma_2(H)^{p^{i+k-2}},$$

assim,

$$\gamma_k(H)^{p^i} \leq \gamma_2(H)^{p^{i+k-2}} \text{ para } k \geq 2.$$

Desse resultado, temos que se $exp(H') = p^n$, então $exp(\gamma_k(H))$ divide p^{n-k+2} para todo $k \geq 2$. Seja $a, b \in H$. Usando a fórmula de compilação de Hall (3.2), obtemos:

$$[a^{p^{n-1}}, b] = [a,b]^{p^{n-1}} \; mod \; \gamma_2(\langle a, [a,b]\rangle)^{p^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} \gamma_{p^i}(\langle a, [a,b]\rangle)^{p^{n-i-1}}.$$

Se $x \in \gamma_2(\langle a, [a,b]\rangle)$ então x é uma potência de $[a,[a,b]]$, pois $[a,a] = 1 = [[a,b],[a,b]]$, logo $x \in \gamma_3(\langle a, b\rangle)$ e temos que se $exp(H') = p^n$, então $exp(\gamma_k(H)) \mid p^{n-k+2}$, logo:

$$exp(\gamma_3(H)) \mid p^{n-1} \Rightarrow \gamma_3(\langle a, b\rangle)^{p^{n-1}} = 1,$$

assim, temos que $\gamma_2(\langle a,[a,b]\rangle)^{p^{n-1}} \leq \gamma_3(\langle a,b\rangle)^{p^{n-1}} = 1$. Similarmente podemos ver que $\gamma_{p^i}(\langle a,[a,b]\rangle)^{p^{n-i-1}} \leq \gamma_{p^{i+1}}(\langle a,b\rangle)^{p^{n-i-1}} = 1$, onde $p \geq 3$ e $p^i \geq i+2$. Daí, temos que $[a^{p^{n-1}}, b] = [a,b]^{p^{n-1}}$, para todo $a, b \in H$. Para provar que $exp(H')$ divide $exp(G)$, devemos assumir sem perda de generalidade que $\gamma_2(H)^{p^{e+1}} = 1$.

O grupo H' é gerado pelos elementos da forma $[g,h]$, $[g^\varphi, h^\varphi]$ e $[g, h^\varphi]$, sendo $g, h \in G$. Como $exp(G) = p^e$, temos que $[g,h]^{p^e} = [g^\varphi, h^\varphi]^{p^e} = 1$. Usando os argumentos acima explícitos, temos $[g, h^\varphi]^{p^e} = [g^{p^e}, h^\varphi] = 1$. Logo, H' é gerado por elementos de ordem p^e, mas H' *pe* H, ou seja, H' é *powerful*, portanto $exp(H')$ divide $p^e = exp(G)$.

Para $p = 2$, seja $N = \gamma_k(H)$, de maneira análoga à prova para $p > 2$, temos:

$$\begin{array}{rcl} [N,H]^2 & \leq & [N^2,H][H,_2 N] \\ & \leq & [N^2,H][N^4,H] \\ & \leq & [N^2,H] \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} [N^2,H] & \leq & [N,H]^2[H,_2 N] \\ & \leq & [N,H]^2[N,H,H] \\ & \leq & [N,H]^2[N,H]^4 \\ & \leq & [N,H]^2. \end{array}$$

Logo, $[\gamma_k(H), H]^2 = [\gamma_k(H)^2, H]$. Usando um argumento indutivo, concluímos que $[\gamma_k(H), H]^{2^i} = [\gamma_k(H)^{2^i}, H]$. Portanto, de maneira similar ao caso $p > 2$, concluímos que $\gamma_k(H)^{2^i} = [\gamma_2(H)^{2^i},_{k-2} H]$. Assim, $\gamma_k(H)^{2^i} = [\gamma_2(H)^{2^i},_{k-2} H] \leq (\gamma_2(H)^{2^i})^{2^{2(k-2)}} = \gamma_2(H)^{2^{i+2(k-2)}}$, ou seja,

$$\gamma_k(H)^{2^i} \leq \gamma_2(H)^{2^{i+2(k-2)}} \text{ para } k \geq 2.$$

Portanto, se $exp(H') = 2^n$, segue que $exp(\gamma_k(H))$ divide $2^{n-2(k-2)}$. Usando a fórmula de compilação de Hall, com $p = 2$ e observando que $2^{i+1} \geq i+3$, concluímos, como acima, que $[a^{2^{n-1}}, b] = [a,b]^{2^{n-1}}$, para todo $a, b \in H$, o que implica que $exp(H')$ divide $2^e = exp(G)$. $\square$

Juntando os resultados obtidos anteriormente e a Proposição 2.5 do artigo [21], temos o seguinte corolário:

Corolário 4.1.2. *[22, pg. 25] Seja G um p-grupo powerful, com $d(G) = d$ e $exp(G) = p^e$. Então, $|[\nu(G), \nu(G)]| \leq p^{ed(2d-1)}$, $|G \otimes G| \leq p^{ed^2}$ e $|G \wedge G| \leq p^{ed(d-1)/2}$.*

Observação 4.1.4. *A igualdade no corolário acima é alcançada quando G é um p-grupo abeliano elementar.*

4.2 Alguns Limitantes

Recordemos que $\lfloor x \rfloor$ denota o maior número inteiro menor ou igual a x e $\lceil y \rceil$ denota o menor número inteiro maior ou igual a y.

Sejam G um p-grupo finito de expoente p^e e $r = sr(G)$ o rank especial, isto é, $sr(G) = max\{d(H) \mid H \leq G\}$. Note que $d(G) \leq sr(G) \leq log_2|G|$. Seja:

$$m = \begin{cases} \lceil log_2\, r \rceil, & \text{se } p > 2, \\ \lceil log_2\, r \rceil + 1, & \text{se } p = 2 \end{cases}$$

Lubotzky e Mann no artigo [21] apresentaram estimativas para a ordem de G e $H_2(G)$ em termos de r e e. Nesse mesmo artigo, fazendo uma junção dos Teoremas 1.14 e 4.1.14, temos:

Lema 4.2.1. *Seja G um p-grupo de expoente p^e, com $sr(G) = r$. Então, G contém um subgrupo powerful característico H tal que $|G : H| \leq p^{rm}$.*

O grupo $\Delta(G) = \langle [g, g^\varphi] \mid g \in G] \rangle$ possui algumas características interessantes, abaixo serão apresentados alguns resultados sobre tal grupo, esses resultados são consequências do Lema 2.1.1 e das definições de comutadores.

Lema 4.2.2. *[26, pg. 1986-1987] Seja G um grupo e g, h elementos arbitrários de G. Então:*

(i) $[g, h^\varphi][h, g^\varphi] = [gh, (gh)^\varphi][h, h^\varphi]^{-1}[g, g^\varphi]^{-1} \quad (\in \Delta(G))$;

(ii) $[g, h^\varphi][h, g^\varphi] = [h, g^\varphi][g, h^\varphi]$;

(iii) *se $h \in G'$, então $[g, h^\varphi][h, g^\varphi] = 1$;*

(iv) *se $gG' = hG'$, então $[g, g^\varphi] = [h, h^\varphi]$;*

(v) *denotamos por $o'(x)$ a ordem de uma classe lateral xG', $x \in G$. Se $o'(g)$ ou $o'(h)$ é finito, então $[g, h^\varphi][h, g^\varphi]$ tem ordem dividindo $mdc(o'(g), o'(h))$;*

(vi) *se $o'(h)$ é finito, então $[h, h^\varphi]$ tem ordem dividindo $mdc(o'(h)^2, 2o'(h))$.*

Corolário 4.2.1. *[26, pg. 1987] Seja G um grupo finito de ordem ímpar e $g \in G$ um elemento com $o'(g) = s$. Então, $[g, g^\varphi]$ tem ordem dividindo s.*

Observação 4.2.1. *De acordo com os resultados encontrados em $\nu(G)$, temos que $\nabla(G) = \langle g \otimes g \mid g \in G] \rangle \cong \Delta(G) = \langle [g, g^\varphi] \mid g \in G] \rangle$.*

O próximo lema exibe o grupo $\Delta(G)$, para G um grupo gerado por um subconjunto $X = \{x_i\}_{i\in I}$; para mais detalhes consulte [26].

Lema 4.2.3. *[26, pg. 1987] Seja $X = \{x_i\}_{i\in I}$ um conjunto de geradores de um grupo G, onde podemos assumir que I é um conjunto totalmente ordenado. Então, $\Delta(G)$ é gerado pelo conjunto:*

$$\Delta = \{s_i = [x_i, x_i^{\varphi}], t_{jk} = [x_j, x_k^{\varphi}][x_k, x_j^{\varphi}] \mid i, j, k \in I,\ j < k\}.$$

Demonstração. Sejam $g = hx_i^{\epsilon_i}$ e $h = wx_j^{\epsilon_j}$ elementos arbitrários de G, sendo $x_i, x_j \in X$, $\epsilon_i, \epsilon_j \in \{1, -1\}$ e w um palavra em $X \cup X^{-1}$. Utilizando cálculos semelhantes aos da prova do item i) do Lema 4.2.2, podemos obter as identidades:

$$\begin{aligned} [g, g^{\varphi}] &= [hx_i^{\epsilon_i}, (hx_i^{\epsilon_i})^{\varphi}] \\ &= [h, h^{\varphi}][x_i, x_i^{\varphi}]^{\epsilon_i}([h, x_i^{\varphi}][x_i, h^{\varphi}])^{\epsilon_i} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [h, x_i^{\varphi}][x_i, h^{\varphi}] &= [wx_j^{\epsilon_j}, x_i^{\varphi}][x_i, w^{\varphi}(x_j^{\epsilon_j})^{\varphi}] \\ &= [w, x_i^{\varphi}]^{x_j^{\epsilon_j}}[x_j^{\epsilon_j}, x_i^{\varphi}][x_i, (x_j^{\epsilon_j})^{\varphi}][x_i, w^{\varphi}]^{(x_j^{\epsilon_j})^{\varphi}} \\ &= ([x_j, x_i^{\varphi}][x_i, x_j^{\varphi}])^{\epsilon_j}([w, x_i^{\varphi}][x_i, w^{\varphi}]). \end{aligned}$$

Utilizando essas identidades e argumentos indutivos no tamanho de g e h em elementos de $X \cup X^{-1}$, podemos concluir a prova. A escolha de $j < k$ em Δ é garantida pelo Lema 4.2.2. $\square$

Observação 4.2.2. *Utilizando os resultados de $\nu(G)$, temos que $\nabla(G)$ é gerado por $\{x_i \otimes x_i, (x_i \otimes x_j)(x_j \otimes x_i) \mid i, j = 1, ..., r,\ j < i\}$.*

Proposição 4.2.1. *[22, pg. 26] Seja G um p-grupo finito de expoente p^e e $r = sr(G)$. Então, temos:*

(i) $d(J_2(G)) \leq r^2(1 + m)$;

(ii) $sr(G \wedge G) \leq \binom{r+1}{2} + r^2m$;

(iii) $sr(G \otimes G) \leq r + r^2(1 + m)$.

Demonstração. (i) Conforme Rocco em [26], temos que $J_2(G)/\nabla(G) \cong H_2(G)$, logo obtemos a seguinte sequência exata:

$$1 \longrightarrow \nabla(G) \longrightarrow J_2(G) \longrightarrow H_2(G) \longrightarrow 1, \tag{4.1}$$

portanto, $d(J_2(G)) \leq d(\nabla(G)) + d(H_2(G))$. De acordo com Lubotzky e Mann em [21], temos que $H_2(H) \leq \binom{r}{2} + r^2m$ e pelo Lema 4.2.3 $\nabla(G)$ é gerado por $\{x_i \otimes x_i, (x_i \otimes x_j)(x_j \otimes x_i) \mid i, j = 1, ..., r,\ j < i\}$, tal conjunto tem no máximo $r + \frac{r(r-1)}{2}$ geradores, ou seja, $\binom{r+1}{2}$ geradores, assim $d(\nabla(G)) \leq \binom{r+1}{2}$. Então,

$$d(J_2(G)) \leq \binom{r+1}{2} + \binom{r-1}{2} + r^2m = \frac{r^2 + r}{2} + \frac{r^2 - r}{2} + r^2m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(J_2(G)) \leq r^2 + r^2m = r^2(1 + m).$$

(ii) De acordo com Blyth, Fumagalli e Morigi em [3], temos a seguinte extensão central:

$$1 \longrightarrow H_2(G) \longrightarrow G \wedge G \longrightarrow G' \longrightarrow 1, \tag{4.2}$$

$H_2(G) \leq Z(G \wedge G)$, logo $H_2(G)$ é abeliano e portanto *powerful*, assim $sr(H_2(G)) = d(H_2(G)) \leq \binom{r}{2} + r^2m$, além disso, $sr(G') \leq sr(G) = r$. Então:

$$sr(G \wedge G) \leq sr(H_2(G)) + sr(G') \leq \binom{r}{2} + r^2m + r = \frac{r^2+r}{2} + r^2m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sr(G \wedge G) \leq \binom{r+1}{2} + r^2m.$$

(iii) Conforme Blyth, Fumagalli e Morigi em [3], a seguinte extensão central:

$$1 \longrightarrow J_2(G) \longrightarrow G \otimes G \longrightarrow G' \longrightarrow 1, \tag{4.3}$$

$J_2(G) \leq Z(G \otimes G)$, logo $J_2(G)$ é abeliano e portanto *powerful*, assim $sr(J_2(G)) = d(J_2(G)) \leq r^2(1+m)$. Então:

$$sr(G \otimes G) \leq r^2(1+m) + r.$$

□

A próxima proposição nos dá limites superiores para o expoente de $J_2(G)$, $G \wedge G$ e $G \otimes G$ com base no expoente e rank de um grupo G. Conforme Ellis em [8], temos que $exp(J_2(G))$ divide $|G|$ e $exp(G \otimes G)$ divide $|G|exp(G')$, abaixo veremos mais alguns resultados sobre os expoentes de alguns grupos estudados nesse trabalho.

Proposição 4.2.2. *[22, pg. 26] Considere G um p-grupo finito de expoente p^e e $r = sr(G)$ e seja:*

$$k = \begin{cases} \lceil log_2\ r \rceil, & se\ p > 2, \\ \lceil log_2\ r \rceil^2 + 1, & se\ p = 2 \end{cases}$$

Então, temos:

(i) $exp(J_2(G)) \leq p^{2e+rk}$;

(ii) $exp(G \wedge G) \leq p^{2e+rk}$;

(iii) $exp(G \otimes G) \leq p^{3e+rk}$.

Demonstração. (i) Pelo Lema 2.1.3, temos que $(g \otimes g)^{p^e} = g^{p^e} \otimes g = 1$, para todo $g \in G$, logo $exp(\nabla(G))$ divide p^e e pelos resultados de [21], temos que $exp(H_2(G))$ divide p^{e+rk}.

Da sequência exata 4.1, segue que $exp(J_2(G))$ divide $exp(H_2(G))exp(\nabla(G))$, mas $exp(H_2(G))exp(\nabla(G))$ divide $p^e p^{e+rk} = p^{2e+rk}$, isto é:

$$exp(J_2(G)) \leq p^{2e+rk}.$$

(ii) Similarmente, utilizando a sequência exata 4.2, temos que $exp(G \wedge G)$ divide $exp(H_2(G))exp(G')$, onde $exp(H_2(G))exp(G')$ divide $p^{e+rk}p^e = p^{2e+rk}$, isto é:

$$exp(G \wedge G) \leq p^{2e+rk}.$$

(iii) Similarmente, utilizando a sequência exata 4.3, temos que $exp(G \otimes G)$ divide $exp(J_2(G))exp(G')$, onde $exp(J_2(G))exp(G')$ divide $p^{2e+rk}p^e = p^{3e+rk}$, isto é:

$$exp(G \otimes G) \leq p^{3e+rk}.$$

□

Para obter um limite superior, para $G \otimes G$, em função de seu expoente e rank é necessário enunciar o seguinte lema:

Lema 4.2.4. *[9, pg. 4228] Sejam G um p-grupo finito e N um subgrupo normal de G. Suponha que $|N| = p^n$, $d = d(G)$, e $|N/N \cap \Phi(G)| = p^t$. Então, $|G \wedge N| \leq p^{dn-t(t+1)/2}$ e $|G \otimes N| \leq p^{dn}$.*

Teorema 4.2.1. *[22, pg. 27] Com as notações acima, temos:*

(i) $|G \wedge G| \leq p^{r^2(e+m)}$;

(ii) $|G \otimes G| \leq p^{r^2(2e+m)}$.

Demonstração. Primeiro vamos tomar H um grupo, como definido no Teorema 3.2.3. Da identidade $g \wedge h = (h \wedge g)^{-1}$ para todo $g, h \in G$, temos a seguinte sequência exata:

$$G \wedge H \longrightarrow G \wedge G \longrightarrow \frac{G}{H} \wedge \frac{G}{H} \longrightarrow 1. \tag{4.4}$$

Pelo Lema 4.2.4 temos que:

$$|G \wedge H| \leq p^{dn-t(t+1)/2} \leq p^{dn} \leq p^{rn} = |H|^r.$$

Como H é *powerful* e pela Proposição 2.5 do artigo [21] temos que $|H| \leq p^{d(H)e} = p^{re}$. Assim, $|G \wedge H| \leq p^{r^2e}$.

Agora, como $|G : H| \leq p^{rm}$, pelo Lema 4.2.4, temos que $|G/H \wedge G/H| \leq p^{r^2m}$, portanto, utilizando a sequência exata 4.4 temos que $|G \wedge G| \leq p^{r^2(e+m)}$.

De acordo com Brown, Johnson e Robertson em [4], temos a seguinte sequência exata:

$$(G \otimes H)(H \otimes G) \longrightarrow G \otimes G \longrightarrow \frac{G}{H} \otimes \frac{G}{H} \longrightarrow 1,$$

pelo Lema 4.2.4, temos que $|G \otimes H| \leq |H|^r$, porém H é *powerful*, logo $|H| \leq p^{d(H)exp(H)} \leq p^{re}$, então $|G \otimes H| \leq p^{r^2e}$. Como $|G : H| \leq p^{rm}$, temos que $|G/H \otimes G/H| \leq p^{r^2m}$ (Lema 4.2.4), assim:

$$|G \otimes G| \leq |G \otimes H||H \otimes G|\left|\frac{G}{H} \otimes \frac{G}{H}\right| \leq p^{2r^2e}.p^{r^2m} = p^{r^2(2e+m)}.$$

□

No artigo de Lubotzky e Mann em [21], foi dado um limite superior para a ordem de $H_2(G) \leq p^{\binom{r}{2}e+er^2m}$, o próximo corolário melhora consideravelmente tal limite:

Corolário 4.2.2. *[22, pg. 28] Com as notações acima, temos que* $|H_2(G)| \leq p^{r^2(e+m)}$ *e* $|J_2(G)| \leq p^{r^2(2e+m)}$.

Referências

[1] M. R. Bacon. On the nonabelian tensor square of a nilpotent group of class two. *Glasgow Mathematical Journal 36*, pages 291–296, 1994.

[2] R. Bastos, E. de Melo, N. Gonçalves, and R. Nunes. Non-abelian tensor square and related constructions of p-groups. *Arch. Math. 114*, pages 481–490, 2020.

[3] R. D. Blyth, F. Fumagalli, and M. Morigi. Some structural results on the non-abelian tensor square of groups. *Journal of Group Theory 13*, pages 83–94, 2010.

[4] R. Brown, D. L. Johnson, and E. F. Robertson. Some computations of non-nabelian tensor products of groups. *Journal of Algebra 111*, pages 177–202, 1987.

[5] R. Brown and J. L. Loday. Van kampen theorems for diagrams of spaces. *Topology 26*, pages 311–335, 1987.

[6] R. K. Dennis. In search of new "homology"functors having a close relationship to k-theory. *Preprint, Cornell University*, 1976.

[7] J. D. Dixon, M. P. F. du Sautoy, A. Mann, and D. Segal. *Analytic Pro-p groups.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics 61, Cambridge, 2ª edition, 1999.

[8] G. Ellis. On the tensor square of a prime power group. *Arch. Math 66*, page 467–469, 1996.

[9] G. Ellis. On the relation between upper central quotients and lower central series of a group. *Transactions of the American Mathematical Society 353*, page 4219–4234, 2001.

[10] G. Ellis and F. Leonard. Computing schur multipliers and tensor products of finite groups. *Proc. Royal Irish Acad. 95A*, pages 137–147, 1995.

[11] G. A. Fernández-Alcober, J. González-Sánches, and A. Jaikin-Zapirain. Omega subgroups of pro-p groups. *Israel Journal of Mathematics 166*, pages 393–412, 2008.

[12] N. N. Gonçalves. Um estudo sobre p-grupos finitos powerful e potent. Dissertação de mestrado, Universidade de Brasília, 2017.

[13] N. N. Gonçalves. *The q-tensor square and the group $\nu^q(G)$ for some families of finite p-groups, $q \geq 0$.* PhD thesis, Universidade de Brasília, 2021.

[14] N. N. Gonçalves and N. R. Rocco. The q-tensor square of a powerful p-group. *Journal of Algebra 551*, pages 9–22, 2020.

[15] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[16] D. L. Johnson. *Topics in the Theory of Group Presentations.* Cambridge University Press, 1980.

[17] H. Kurzweil and B. Stellmacher. *The theory of finite groups: an introduction.* Springer-Verlag, New York, 2004.

[18] M. Ladra and A. R. Grandjeán. Crossed modules and homology. *Journal of Pure and Applied Algebra 95*, pages 41–55, 1994.

[19] C. R. Leedham-Green and S. McKay. *The Structure of Groups of Prime Power Order*, volume 27. Clarendon Press, United Kingdom, 1999.

[20] B. C. R. Lima. Cotas superiores para a ordem do quadrado tensorial não-abeliano de um grupo. Dissertação de mestrado, Universidade de Brasília, 2010.

[21] A. Lubotzky and A. Mann. Powerful p-groups. i. finite groups. *Journal of Algebra 105*, pages 484–505, 1987.

[22] P. Moravec. Groups of prime power order and their nonabelian tensor squares. *Israel Journal of Mathematics 174*, pages 19–28, 2009.

[23] I. N. Nakaoka. Sobre o produto tensorial não abeliano de grupos. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 1994.

[24] D. Robinson. *A Course in the Theory of Groups.* Springer-Verlag, New York, 2ª edition, 1995.

[25] N. R. Rocco. On a construction related to the non-abelian tensor square of a group. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática 22*, pages 63–79, 1991.

[26] N. R. Rocco. A presentation for a crossed embedding of finite solvable groups. *Communications in Algebra 22*, pages 1975–1998, 1994.

[27] H. Rose. *A Course in the Theory of Groups.* Springer-Verlag London, 2009.

[28] J. J. Rotman. *An Introduction to the theory of groups.* Springer-Verlag, New York, 4ª edition, 1994.

[29] J. J. Rotman. *An introduction to homological algebra.* Springer Science & Business Media, 2008.

[30] W. J. P. Silva. O grupo $\nu(G)$ e aplicações. Dissertação de mestrado, Universidade de Brasília, 2018.