Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

JOYCE DOS SANTOS MONTEIRO

Sobre o Comportamento Aritmético de *E*-funções

Brasília
2023

JOYCE DOS SANTOS MONTEIRO

Sobre o Comportamento Aritmético de E-funções

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestra em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Diego Marques Ferreira

Brasília
2023

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Sobre o comportamento aritmético de E-funções

por

Joyce dos Santos Monteiro*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 31 de março de 2023.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Diego Marques Ferreira - MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Hemar Teixeira Godinho – MAT/UnB (Membro)

Ana Paula de A. Chaves

Profa. Dra. Ana Paula de Araújo Chaves – UFG (Membro)

* A autora foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Agradecimentos

Em especial a Zenilza dos Santos Adalberto e ao Caio Henrique dos Santos Nascimento, cujas companhias, ao longo de quase 2 anos, mudaram profundamente as minhas concepções de amor, cuidado e dedicação. Sou muito grata por ter tido a felicidade de começar esse ciclo da minha vida na companhia dos dois. Contudo, tenho a profunda infelicidade de encerá-lo na ausência de ambos.

A minha mãe Zenilda e ao meu pai Jailson, por todas as palavras que, ao longo de toda uma vida, contribuíram para que eu tivesse a força e autonomia necessárias para ir em busca dos meus sonhos (e realizar alguns) e o discernimento e a coragem necessárias, para seguir em frente, e abandonar tantos outros.

Ao professor Diego Marques por ter aceitado me orientar durante a realização desta dissertação, e por todo ânimo, paciência e ajuda durante as orientações.

Ao professor Hilário Alencar por todos os conselhos e palavras de incentivo durante o período do mestrado e por todas as sugestões que contribuíram para a melhoria desta dissertação.

A professora Elaine Silva, por toda gentileza e solicitude ao tirar minhas dúvidas a respeito do programa de pós-graduação em matemática da UnB e sobre área de Teoria dos Números do programa.

Ao meu amigo Victor Lohan, por todo apoio, por todas palavras de incentivo, carinho e cumplicidade desde a UFAL. Gostaria ainda de agradecer a todos os amigos que fiz em Brasília, Daniel Abreu, Márcio Henrique, Maria Emanuelle, Maria Edna, Jonatas Peralta, Talita Matias por todo carinho, apoio e companheirismo em especial a Deyfila da Silva e a Vitória Henrylla.

Ao professor Hemar Godinho e a professora Ana Paula de Araújo pelas correções que contribuíram para melhoria desta dissertação e. Agradeço ainda a todos os professores do Departamento de Matemática da UnB que tanto contribuíram na minha formação acadêmica.

Por fim, agradeço a CAPES pelo financiamento da bolsa durante o período do mestrado.

Resumo

O objetivo desta dissertação é apresentar de modo sucinto a teoria das E-funções e os pré-requisitos necessários para a prova do Primeiro Teorema Fundamental. A partir deste resultado, provaremos o Segundo Teorema Fundamental do qual obteremos como corolário o famoso Teorema de Lidemann-Weierstrass.
Palavras-chave: Teoria dos Números. Números Transcendentes. E-funções.

Abstract

The purpose of this work is to present, succinctly, the theory of E-functions and their the First Fundamental Theorem. From this result, we will prove the Second Fundamental Theorem from which we will obtain as corollary the famous Lidemann-Weierstrass theorem.
Keywords: Number Theory. Transcendental Numbers. E-functions.

Conteúdo

Introdução

A introdução do conceito de E-funções no artigo [27], publicado por Carl Siegel em 1929, tem como objetivo generalizar, em um certo sentido, a função exponencial.

Para melhor compreender a motivação e a relevância da contribuição de C. Siegel, dedicaremos as próximas linhas a um breve histórico do desenvolvimento da Teoria dos Números Transcendentes.

Um número α é dito *algébrico*, quando é raiz de um polinômio

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad P \not\equiv 0,$$

com coeficientes racionais. Denotaremos por $\overline{\mathbb{Q}}$ o conjunto dos números algébricos. Dizemos que um número complexo α é *transcendente*, quando não é algébrico, isto é, quando não existe um polinômio $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $P(\alpha) = 0$.

A primeira prova sobre a existência de números transcendentes foi dada, em 1844, por Liouville. Em seu trabalho Liouville mostra a existência e exibe uma classe de números transcendentes, ver [16] e [17].

Aproximadamente três décadas após Liouville publicar seu trabalho, Cantor apresentou uma nova prova da existência dos números transcendentes, ver [5]. Neste trabalho Cantor demonstra que, do ponto de vista da medida de Lebesgue, quase todo número é transcendente.

Em 1873, Hermite [10] prova a transcendência do número e. Em seu método, Hermite usa propriedades da função exponencial $f(z) = e^z$. Desenvolvendo o método de Hermite, em 1882, Lindemann demonstra a transcendência de π, ver [14] e [13]. Lindemann provou que se $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}$, não nulo, então e^{ξ} é transcendente. Tal resultado é consequência de um teorema mais geral provado por Lindemann, enunciado a seguir.

Teorema. *(Lindemann) Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ são números algébricos distintos, e $c_1, \ldots, c_m$ são números algébricos não todos nulos, então*

$$c_1 e^{\alpha_1} + \cdots + c_m e^{\alpha_m} \neq 0.$$

Uma prova deste resultado pode ser consultada no livro *Teoria dos Números Transcendentes*, ver [20].

Dizemos que os números complexos $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ são *algebricamente independentes*, quando não existe um polinômio $P(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m]$ tal que $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 0$. Observe que o conceito de independência algébrica generaliza o de transcendência. Em 1885, Weierstrass, ver [29], generaliza o resultado de Lindemann ao provar o resultado seguinte.

Teorema. *(Lindemann-Wierstrass) Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ são números algébricos linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$, então $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_m}$ são algebricamente independentes.*

Dessa forma, o método de Hermite-Lindemann foi usado para responder completamente a questão da transcendência e independência algébrica dos valores das funções exponenciais em pontos algébricos.

No Capítulo 3 desta dissertação, veremos que o Teorema de Lindemann-Weierstrass pode ser obtido como corolário do Segundo Teorema Fundamental.

Alguns matemáticos contribuíram com simplificações das provas dadas por Hermite e Lindemann, mas quase meio século depois ainda não tinham conseguido avanços significativos na generalização do método Hermite-Lindemann.

O próximo progresso em Teoria dos Números Transcendentes ocorreu nos anos 1920 por C. Siegel e Gelfond e nos anos 1930 por Gelfond e Schneider.

No *Segundo Congresso Internacional de Matemáticos*, em 1900, Hilbert propõe uma lista com 23 problemas que contribuiriam para o desenvolvimento da matemática no século XX. O sétimo problema era uma conjectura a respeito da transcendência dos números da forma α^β, onde α é um algébrico diferente de 0 e 1, e β um número algébrico irracional. Por exemplo, $2^{\sqrt{2}}$ e $e^\pi = i^{-2i}$ são transcendentes?

Gelfond, ver [7], em 1929, prova um caso particular do sétimo problema de Hilbert e, com isto, conclui que e^π é transcendente. Em 1930, Kuz'min, ver [11], prova um segundo caso particular do sétimo problema e, como consequência, obtém a transcendência de $2^{\sqrt{2}}$.

Em 1934, Schneider, ver [22], e Gelfond, ver [9], provam completamente, de modo independente e usando métodos distintos, o sétimo problema de Hilbert. Em 1949, Gelfond, ver [8], generaliza o método utilizado na demonstração deste problema e o utiliza para provar alguns resultados acerca da independência algébrica de números.

O outro avanço na Teoria dos Números Transcendentes foi dado por C. Siegel e se trata de uma generalização do método de Hermite-Lindemann. Por sua vez, o método de Hermite-Lindemann é baseado em duas propriedades da função exponencial:

(i) a função $f(z) = e^z$ satisfaz a equação funcional

$$f(x+y) = f(x)f(y);$$

(ii) a função $f(z) = e^z$ é solução da equação diferencial linear

$$y' = y.$$

Após a criação deste método, torna-se natural o problema de estender o método para funções que satisfazem outras equações diferenciais lineares. Por exemplo, nos métodos utilizados por Schneider e Gelfond, para resolver o sétimo problema de Hilbert, foi usada a função $g(z) = \alpha^z$, onde α é algébrico. Essa função satisfaz a propriedade (i) e a equação diferencial linear dada por $y' = (\ln \alpha)y$.

Em seus estudos, Legendre considerou a função

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}, \quad \alpha \neq 0, -1, -2. \ldots,$$

que satisfaz a equação diferencial linear

$$xy'' + \alpha y' = y,$$

e provou que se $x \neq 0$ e α são racionais, então $f_\alpha(x)/f'_\alpha(x)$ é irracional.

Sob as mesmas hipóteses, E. Stridsberg, ver [28], mostrou, em 1910, que os números $f_\alpha(x)$ e $f'_\alpha(x)$ são irracionais. E, em 1927, mostrou que $f_\alpha(x)$ e $f'_\alpha(x)$ não são irracionais quadráticos, ou seja, não são raízes de polinômios de grau 2, ver [19]. Mas até então, informações sobre a transcendência desses números ou sobre valores de funções diferentes da exponencial que satisfazem uma equação diferencial linear ainda não tinham sido obtidas.

Em 1929, Carl Siegel, ver [27], apresenta um novo método para provar a transcendência e independência algébrica de valores em pontos algébricos de uma classe de funções inteiras, a qual chamou de funções *type E* ou *E-functions*. Tal método é uma generalização direta do método de Hermite-Lindemann e as funções objetos de seu estudo satisfazem uma equação diferencial linear com coeficientes em um corpo de funções racionais. Em seu livro *Transcendental Numbers*, publicado em 1949, C. Siegel comenta que seu trabalho foi motivado pelo artigo [19], publicado por W. Maier em 1927.

Em [27], Siegel prova uma primeira versão do Primeiro Teorema Fundamental. Uma das hipóteses deste teorema é uma condição de normalidade de difícil verificação. Tal condição foi contornada em 1955, por A. B. Shidlovskii, ver [23]. Em seu trabalho Shidlovskii apresenta uma condição necessária e suficiente para a independência algébrica de valores de E-funções. A versão do Primeiro Teorema Fundamental atribuída a Shidlovskii será o resultado central desta dissertação.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Este capítulo tem como finalidade apresentar os resultados necessários para a compreensão dos dois últimos capítulos. Dessa forma, destinamos a primeira seção as propriedades básicas de corpos de números algébricos finitos. A segunda seção é reservada a dois teoremas básicos de Análise Complexa que são utilizados no Capítulo 2, cujas provas foram omitidas. As duas últimas seções destinam-se a definição e as propriedades de formas lineares, bem como a resultados envolvendo uma classe particular de funções analíticas.

1.1 Propriedades de corpos de números algébricos finitos

Seja θ um número algébrico de grau n sobre $\mathbb{Q}$. Denotaremos por $\theta = \theta^{(0)}, \theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(n-1)}$ os conjugados algébricos de θ em $\mathbb{C}$, ou seja, as raízes do polinômio minimal de θ e por $K = \mathbb{Q}(\theta)$ o corpo de números algébricos obtido adjuntando θ a $\mathbb{Q}$. Observe que K tem como elementos $\alpha = r(\theta)$, onde $r \in \mathbb{Q}(x)$, isto é, r é uma função racional com coeficientes racionais. Denotaremos por

$$\alpha^{(j)} = r(\theta^{(j)}), \quad j \in [0, n-1],$$

os *conjugados* de α relativos a K.

Definição 1.1. *Seja α um número algébrico de grau n. Chamamos de* casa do número algébrico *α, $\overline{|\alpha|}$, o máximo dos valores absolutos dos conjugados de α. Isto é,*

$$\overline{|\alpha|} = \max(|\alpha|, |\alpha^{(1)}|, \ldots, |\alpha^{(n-1)}|).$$

Dessa forma, dados $\alpha, \beta \in K$ segue diretamente da definição que

$$\overline{|\alpha \pm \beta|} \leq \overline{|\alpha|} + \overline{|\beta|}, \quad \overline{|\alpha \cdot \beta|} \leq \overline{|\alpha|} \cdot \overline{|\beta|}. \tag{1.1}$$

Definição 1.2. *Um número algébrico é dito* inteiro algébrico *quando todos os coeficientes do polinômio minimal são inteiros. Denotaremos por $\mathcal{O}_K$ o conjunto dos inteiros algébricos de K.*

A definição de norma que apresentaremos a seguir, será utilizada exclusivamente na prova do Lema 2.7.

Definição 1.3. *Definimos a* norma *de um elemento $\alpha \in K = \mathbb{Q}(\theta)$ (onde $[K : \mathbb{Q}] = n$) como o produto de todos os conjugados de α em K. Denotamos por*

$$\mathcal{N}(\alpha) = r(\theta^{(0)}) \cdots r(\theta^{(n-1)}),$$

onde $\alpha = r(\theta^{(0)})$ e $\theta = \theta^{(0)}$.

Visto que K é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ de dimensão n e $\mathcal{O}_K$ um subespaço de K, podemos tomar uma base de $\mathcal{O}_K$, $\beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$. Dessa forma, todo elemento γ de $\mathcal{O}_K$ admite uma representação única

$$\gamma = g_1\beta_1 + \cdots + g_m\beta_m$$

com coeficientes $g_1, \ldots, g_m$ inteiros. De fato, tal β está bem definida e pode ser tomada como $\{1, a^{i_1} \cdot \theta^{i_1}, \cdots, a^{i_{m-1}}\theta^{i_{m-1}}\}$, onde $\{i_1, \ldots, i_{m-1}\} \subset \{1, \ldots, n-1\}$ e $a = a(\theta)$ é o menor inteiro positivo tal que $a \cdot \theta \in \mathcal{O}_K$. Se

$$\gamma^{(j)}, \beta_1^{(j)}, \ldots, \beta_m^{(j)}, \quad j \in [0, m-1],$$

são os conjugados de $\gamma, \beta_1, \ldots, \beta_m$, respectivamente, então

$$\gamma^{(j)} = g_1\beta_1^{(j)} + \cdots + g_m\beta_m^{(j)}, \quad j \in [0, m-1] \tag{1.2}$$

e, portanto, o determinante de T é não nulo, onde

$$T = \begin{pmatrix} \beta_1^{(0)} & \cdots & \beta_m^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^{(m-1)} & \cdots & \beta_m^{(m-1)} \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, as equações (1.2) podem ser resolvidas para $g_1, \ldots, g_m$ de modo que

$$g_k = \sum_{j=0}^{m-1} b_{j,k} \gamma^{(j)}, \;\; k \in [1, m], \tag{1.3}$$

onde os coeficiente $b_{j,k}$ são as entradas da matriz T^{-1}, inversa de T, e, portanto, dependem apenas da escolha da base $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ de $\mathcal{O}_K$. Afirmamos que existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$\overline{|\gamma|} \leq c_1 \max(|g_1|, \ldots, |g_m|) \tag{1.4}$$

$$c_2 \overline{|\gamma|} \geq \max(|g_1|, \ldots, |g_m|). \tag{1.5}$$

Com efeito, usando a equação (1.2), temos

$$\overline{|\gamma|} = \max_j |\gamma^{(j)}| \leq \max_j \left(\sum_{k=1}^{m} |g_k| \cdot |\beta_k^{(j)}| \right) \leq m \cdot \max_{j,\,k} |\beta_k^{(j)}| \cdot \max_k |g_k| = c_1 \max_k |g_k|.$$

Por outro lado, usando a equação (1.3), obtemos

$$\max_k |g_k| \leq \max_k \left(\sum_{j=0}^{m-1} |b_{j,k}| \cdot |\gamma^{(j)}| \right) \leq m \max_{j,\,k} |b_{j,k}| \cdot \max_j |\gamma^{(j)}| = c_2 \overline{|\gamma|}.$$

Observe que c_1 e c_2 dependem apenas do anel $\mathcal{O}_K$.

Proposição 1.1. *Sejam A um conjunto de p funcionais lineares em q variáveis com coeficientes $a_{h,i}$ em $\mathcal{O}_K$, ou seja, os elementos de A são da forma*

$$\mathbf{y}_h = \sum_{i=1}^{q} a_{h,i} \mathbf{x}_i, \quad h \in [1, p]$$

com $p < q$ e

$$M = \max_{h,i} \overline{|a_{h,i}|} > 0.$$

Então existem q inteiros $x_1, \ldots, x_q$ em $\mathcal{O}_K$ não todos nulos e uma constante positiva c, que depende apenas de $\mathcal{O}_K$, tal que

$$\max\left(\overline{|x_1|}, \ldots, \overline{|x_q|}\right) \leq c(cqmM)^{\frac{p}{q-p}} \quad \text{e} \quad y_1 = \cdots = y_p = 0.$$

Prova. Seja $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ uma base de $\mathcal{O}_K$ fixada. Como, por hipótese, os coeficientes $a_{h,i} \in \mathcal{O}_K$, temos que os produtos $a_{h,i}\beta_j \in \mathcal{O}_K$, para todos $h \in [1, p]$, $i \in [1, q]$ e $j \in [1, m]$.

Assim, existem únicos inteiros $a_{h,i,j,k}$ tais que

$$a_{h,i}\beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{h,i,j,k}\beta_k, \quad h \in [1,p], \quad i \in [1,q] \text{ e } j \in [1,m].$$

De modo análogo, para $x_1,\ldots,x_q \in O_K$, existem únicos $x_{i,j}$ inteiros tais que

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} x_{i,j}\beta_j, \quad i \in [1,q].$$

Assim,

$$y_h = \sum_{i=1}^{q}\left(a_{h,i}\sum_{j=1}^{m} x_{i,j}\beta_j\right) = \sum_{i=1}^{q}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{i,j}a_{h,i}\beta_j\right) = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{h,i,j,k}x_{i,j}\beta_k\right) = \sum_{k=1}^{m} y_{h,k}\beta_k,$$

onde

$$y_{h,k} = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m} a_{h,i,j,k}x_{i,j}, \quad h \in [1,p] \text{ e } k \in [1,m].$$

Agora, sejam c_1 e c_2 como nas desigualdades (1.4) e (1.5), respectivamente. Denotaremos por c_3 o inteiro positivo dado por

$$c_3 = \lfloor c_2 \max_j |\beta_j| \rfloor + 1,$$

e por H o inteiro positivo dado por

$$0 \leq (qmc_3M)^{\frac{p}{q-p}} - 1 < 2H \leq (qmc_3M)^{\frac{p}{q-p}} + 1.$$

Observe que c_3 depende apenas de $\mathcal{O}_K$ e que H satisfaz a desigualdade

$$\begin{aligned}(2H+1)^{qm} = (2H+1)^{(q-p)m}(2H+1)^{pm} &> (qmc_3M)^{pm}(2H+1)^{pm} \\ &= (2qmc_3MH + qmc_3M)^{pm} \\ &\geq (2qmc_3M+1)^{pm}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

onde a última desigualdade segue do fato de H, c_3, q, m e M são maiores do que ou iguais a 1.

Nas formas lineares $y_{h,k}$ cada variável $x_{i,j}$ pode ser tomada como um dos $2H+1$ valores

$$0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots, \ \pm H.$$

Então existem $(2H+1)^{qm}$ qm-uplas $\{x_{i,j}\}$ distintas. Agora, usando a desigualdade de (1.5), temos

$$\max_{h,\,i,\,j,\,k} |a_{h,i,j,k}| \leq c_2 \max_{h,i,j} \boxed{a_{h,i}\beta_j} \leq c_2 \max_{h,i} \boxed{a_{h,i}} \max_{j} \boxed{\beta_j} \leq c_2 M \max_{j} \boxed{\beta_j} \leq c_3 M.$$

Consequentemente,

$$\max_{h,k} |y_{h,k}| = \max_{h,k} \left| \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m} a_{h,i,j,k} x_{i,j} \right| \leq \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m} \max_{h,k} |a_{h,i,j,k}| \max_{i,j} |x_{i,j}| \leq qc_3 mMH.$$

Assim, o número de pm-uplas $\{y_{h,k}\}$ distintas não é maior do que

$$(2qc_3 mMH+1)^{pm}.$$

Portanto, usando a desigualdade (1.6) concluímos que existem mais vetores distintos $\{x_{i,j}\}$ que vetores distintos $\{y_{h,k}\}$. Pelo Princípio de Dirichlet, existem dois vetores distintos $\{x'_{i,j}\}$ e $\{x''_{i,j}\}$ correspondendo ao mesmo vetor $\{\tilde{y}_{h,k}\}$. Denotaremos

$$x_{i,j} = x'_{i,j} - x''_{i,j}, \quad i \in [1,q], \quad j \in [1,m].$$

Os qm inteiros $x_{i,j}$ não são todos nulos e satisfazem

$$\max_{i,\,j} |x_{i,j}| \leq 2H \leq (qc_3 mM+1)^{\frac{p}{q-p}}$$

e os pm números $y_{h,k}$ correspondentes são nulos. De fato,

$$y_{h,k} = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m} a_{h,i,j,k} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m} a_{h,i,j,k}(x'_{i,j} - x''_{i,j}) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m} a_{h,i,j,k} x'_{i,j} - \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m} a_{h,i,j,k} x''_{i,j} = 0,$$

com $h \in [1,p]$ e $k \in [1,m]$. Logo, os p inteiros algébricos

$$y_h = \sum_{k=1}^{m} y_{h,k}\beta_k, \ \ h \in [1,p]$$

são nulos. Seja $c = \max(2c_1, c_3)$. Então,

$$\max_{i} \boxed{x_i} \leq c_1 \max_{i,\,j} |x_{i,j}| \leq 2c_1 H \leq c_1[(qc_3 mM)^{\frac{p}{q-p}} + 1] \leq 2c_1 (qc_3 mM)^{\frac{p}{q-p}} \leq c(qcmM)^{\frac{p}{q-p}}.$$

□

1.2 Análise complexa

Nesta seção enunciaremos dois resultados básicos de análise complexa. Estes teoremas serão utilizados no Capítulo 2 para provar que as E-funções são funções inteiras. As demonstrações desses resultados podem ser consultadas em [15].

Teorema 1.1. *Dada uma série*

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{1.7}$$

seu raio de convergência $r(S)$ é dado por

$$r(S) = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Convencionalmente, dizemos que $r(S) = 0$, quando $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ e $r(S) = +\infty$, se $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

Teorema 1.2. *Seja S uma série de potência com raio de convergência $r > 0$, como apresentada em (1.7). Denotaremos por $S(z)$ a função definida por esta série no seu disco de convergência. Então a função $S(z)$ é holomorfa e a sua derivada é dada por*

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n,$$

para todo z no disco de convergência. Em particular, a série S' tem o mesmo disco de convergência que a série S.

Nas condições do Teorema 1.2, temos que $S(z)$ é infinitamente diferenciável. A prova, deste fato, faz-se usando diretamente o Teorema 1.2. Além disso, uma fórmula para a k-ésima derivada, $S^{(k)}$, pode ser obtida por indução.

Definição 1.4. *Seja f uma série de Laurent dada por*

$$f = \sum_{k=\eta}^{\infty} f_k (z-c)^k$$

com coeficientes $f_k \in K$, onde K é um corpo, $c \in K$ e η depende apenas de f. Denotamos a ordem de *f o índice $\eta \in \mathbb{Z}$ tal que $f_\eta \neq 0$ e $f_k = 0$ para todo $k < \eta$.*

Em particular, se é $f(z)$ uma função analítica no ponto $z = 0$. A notação $\mathrm{ord} f(z)$ indica a ordem de zero de $f(z)$ em $z = 0$.

1.3 Propriedades de formas lineares em funções que satisfazem um sistema de equações diferenciais lineares homogêneo

Considere o anel $\mathbb{C}[z]$ dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$. Para $m \geq 2$, chamamos o elemento dado por

$$R = \sum_{i=1}^{m} P_i y_i, \quad P_i \in \mathbb{C}[z] \;\text{ e }\; i \in [1,m] \tag{1.8}$$

de *forma linear* nas variáveis $y_1, \ldots, y_m$ sobre o anel $\mathbb{C}[z]$. Observe que o conjunto $\mathbf{M}$ das formas lineares formam um módulo.

No decorrer deste trabalho, consideraremos o sistema de equações diferenciais homogêneo

$$Q := \;\; y_k' = \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i} y_i, \quad k \in [1,m] \;\text{ e }\; m \geq 2, \tag{1.9}$$

onde $Q_{k,i} = Q_{k,i}(z) \in \mathbb{C}(z)$. E denotaremos por $T = T(z) \in \mathbb{C}[z]$ o menor denominador comum dos m^2 coeficientes $Q_{k,i}$ do sistema Q apresentado em (1.9), isto é, $TQ_{k,i} \in \mathbb{C}[z]$ para todo $k, i \in [1,m]$.

Definição 1.5. *Dizemos que o sistema de e equações diferenciais Q, apresentado em (1.9), é* regular em α*, se nenhum dos coeficientes $Q_{k,i}$, $i,k \in [1,m]$ tem polo em $z = \alpha$.*

Sobre $\mathbf{M}$ definimos o operador diferencial D dado por

$$D = \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} Q_{k,i} y_i \right) \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Mostraremos que $TD(\mathbf{M}) \subset \mathbf{M}$. Com efeito, dado $R \in \mathbf{M}$, temos

$$\begin{aligned}
TDR &= T \left[\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} Q_{k,i} y_i \right) \frac{\partial}{\partial y_k} \right] \sum_{j=1}^{m} P_j y_j \\
&= T \frac{\partial}{\partial z} \sum_{j=1}^{m} P_j y_j + T \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} Q_{k,i} y_i \right) \frac{\partial}{\partial y_k} \sum_{j=1}^{m} P_j y_j \\
&= T \sum_{j=1}^{m} P_j' y_j + T \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} Q_{k,i} y_i \right) P_k \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(TP_i' + \sum_{k=1}^{m} TQ_{k,i} P_k \right) y_i,
\end{aligned}$$

observe que

$$\left(TP_i' + \sum_{k=1}^{m} TQ_{k,i}P_k\right) \in \mathbb{C}[z], \quad i,k \in [1,m],$$

assim, concluímos que $TDR \in \mathbf{M}$ para todo $R \in \mathbf{M}$.

Agora, analisaremos a forma linear R definida em (1.8), quando as variáveis $y_1,\dots,y_m$ são as funções coordenadas de uma solução do sistema (1.9). Neste caso, R é uma função de z e R', a derivada de R em relação a z, é uma forma linear em $y_1,\dots,y_m,y_1',\dots,y_m'$ com coeficientes em $\mathbb{C}[z]$, visto que usando a regra da cadeia, temos

$$R' = \frac{d}{dz}\sum_{i=1}^{m} P_i y_i(z) = \sum_{i=1}^{m}(P_i' y_i(z) + P_i y_i'(z)).$$

Como as funções $y_1,\dots,y_m$ satisfazem o sistema (1.9), substituindo $y_1',\dots,y_m'$ pelo lado direito do sistema de equações diferenciais Q, obtemos que TR' é uma forma linear em $y_1,\dots,y_m$ com coeficientes em $\mathbb{C}[z]$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
TR' &= T\sum_{i=1}^{m}(P_i' y_i(z) + P_i y_i'(z)) \\
&= T\sum_{i=1}^{m}(P_i' y_i(z) + TP_i\sum_{k=1}^{m} Q_{i,k}y_k(z)) \\
&= T\sum_{i=1}^{m} P_i' y_i(z) + T\sum_{i=1}^{m} P_i \sum_{k=1}^{m} Q_{i,k}y_k(z) \\
&= T\sum_{i=1}^{m} P_i' y_i(z) + T\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} P_k Q_{k,i} y_i(z) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(TP_i' + \sum_{k=1}^{m} TP_k Q_{k,i}\right) y_i(z).
\end{aligned}$$

Observe que

$$\left(TP_i' + \sum_{k=1}^{m} P_k TQ_{k,i}\right) \in \mathbb{C}[z], \quad i,k \in [1,m].$$

Assim, concluímos que quando $y_1,\dots,y_m$ são soluções do sistema (1.9) aplicar o operador D na forma linear R equivale a derivar R em relação a z, isto é,

$$DR = \frac{d}{dz}R = R'.$$

Agora, nosso objetivo é construir de maneira indutiva uma sequência de formas lineares a partir de uma forma linear dada. Seja R_1 uma forma linear arbitrária em $\mathbf{M}$ dada por

$$R_1 = \sum_{i=1}^{m} P_{1,i}y_i, \quad P_{1,i} \in \mathbb{C}[z]. \tag{1.10}$$

Denotaremos por R_k a forma linear dada por

$$R_k = TDR_{k-1}, \quad k = 2,3,\dots. \tag{1.11}$$

Quando $y_1,\dots,y_m$ são soluções do sistema (1.9), indutivamente obtemos que $R_k \in \mathbf{M}$, $k = 2,3,\dots$. Assim, podemos escrever

$$R_k = \sum_{i=1}^{m} P_{k,i}y_i, \quad P_{k,i} \in \mathbb{C}[z] \quad \text{e} \quad k = 2,3,\dots. \tag{1.12}$$

Usando (1.11) recursivamente, concluímos que

$$P_{k,i} = T(P'_{k-1,i} + \sum_{j=1}^{m} P_{k-1,j}Q_{j,i}), \quad i \in [1,m]. \tag{1.13}$$

Por fim, substituindo as variáveis $y_1,\dots,y_m$, na forma linear (1.10), pelas coordenadas de uma solução arbitrária do sistema de (1.9), obtemos que, neste caso, as formas lineares apresentadas em (1.11) são da forma

$$R_k(z) = TR'_{k-1}(z), \quad k = 2,3,\dots. \tag{1.14}$$

Assim, construímos recursivamente uma sequência de formas lineares.

O resultado que enunciaremos a seguir afirma que a ordem de uma forma linear $R(z)$ é limitada e depende apenas das funções $f_1(z),\dots,f_m(z)$ e do grau dos polinômios que a define.

Antes de enunciar o lema, consideremos as m funções

$$f_k(z) = \sum_{s=0}^{\infty} c_{k,s}z^s, \quad k \in [1,m], \quad m \geq 2 \quad \text{e} \quad c_{k,s} \in \mathbb{C}, \tag{1.15}$$

analíticas em uma região contendo $z = 0$, os m polinômios

$$P_k \in \mathbb{C}[z], \quad \deg P_k \leq n \quad k \in [1,m] \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.16}$$

e a forma linear

$$R(z) = \sum_{k=1}^{m} P_k f_k(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s z^s. \tag{1.17}$$

Lema 1.1. *Sejam $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ como na equação (1.15) e $n \in \mathbb{Z}^+$. Então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$, dependendo das funções (1.15) e do inteiro n tal que para qualquer escolha de polinômios da forma (1.16) a forma linear $R(z)$ em (1.17) é identicamente nula ou satisfaz a relação $ordR(z) \leq n_0$.*

O lema a seguir será usado na provada do Lema 1.5 e sua prova pode ser encontrada na página 86 de [25].

Lema 1.2. *Sejam*

$$\varphi_1(z), \ldots, \varphi_s(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_m(z) \tag{1.18}$$

funções analíticas em alguma região tal que para pelo menos um valor de $i \in [1, m]$, $\psi_i(z) \not\equiv 0$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$, dependendo apenas das funções (1.18) de modo que não existe uma $(s+m)$-upla de números complexos

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_m$$

com

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \psi_i(z) \not\equiv 0,$$

tal que o quociente

$$g(z) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i(z)}{\sum_{i=1}^{m} \beta_i \psi_i(z)}$$

é uma função racional de z de grau maior que n_0.

Observe que o Lema 1.2 assegura a limitação do grau de uma função racional construída a partir de funções analíticas dadas.

O lema a seguir trata da independência linear de formas lineares. Uma prova deste resultado pode ser consultada em [25].

Lema 1.3. *Se $R_1 \in M$ é uma forma linear arbitrária, então o posto do conjunto das formas lineares R_1, R_2, $\ldots$ em (1.10)-(1.12) é igual a l, com $l \in [0, m]$ se, e somente se, as formas*

$$R_1, R_2, \ldots R_l$$

são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}[z]$, enquanto que as formas

$$R_1, R_2, \ldots R_l, R_{l+1}$$

são linearmente dependentes sobre $\mathbb{C}[z]$.

Consideremos o conjunto das m primeiras formas lineares (1.12), isto é,

$$R_k = \sum_{i=1}^{m} P_{k,i} y_i, \quad k \in [1,m] \quad \text{e} \quad P_{k,i} \in \mathbb{C}[z]. \tag{1.19}$$

Denotaremos por $\Delta = \Delta(z)$ o determinante da matriz formada pelos coeficientes das formas lineares (1.19), ou seja,

$$\Delta = \Delta(z) = |P_{k,i}|, \quad i,k \in [1,m]$$

e por $\Delta_{k,i}$ o cofator de $P_{k,i}$ deste determinante.

Para $j \in [1,m]$ fixado, multiplicando ambos os lados das m equações em (1.19) por $\Delta_{k,j}$, para todo $k \in [1,m]$, respectivamente e somando as equações resultantes, obtemos

$$\sum_{k=1}^{m} \Delta_{k,j} R_k = \sum_{k=1}^{m} \Delta_{k,j} \sum_{i=1}^{m} P_{k,i} y_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{m} \Delta_{k,j} P_{k,i} \right) y_i$$

Denotando por $\delta_{i,j}$ o determinante obtido de Δ substituindo a j-ésima coluna pela i-ésima coluna, então

$$\sum_{k=1}^{m} \Delta_{k,i} P_{k,j} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \Delta, & i = j \end{cases} . \tag{1.20}$$

Assim, usando a equação (1.20), obtemos

$$\Delta y_j = \sum_{k=1}^{m} \Delta_{k,j} R_k, \quad j \in [1,m]. \tag{1.21}$$

Lema 1.4. *Sejam R_1 uma forma linear e $l \in [1,m]$ o posto do conjunto das formas $R_1, \ldots, R_m$, apresentadas em (1.19). Então existem $\mu = m - l$ soluções linearmente independentes do sistema de equações diferenciais (1.9)*

$$y_{1,s}, y_{2,s}, \ldots, y_{m,s}, \quad s \in [1, \mu] \tag{1.22}$$

tais que as formas $R_1, R_2, \ldots$ são identicamente nulas quando substituímos as variáveis $y_1, \ldots, y_m$ por qualquer uma das μ soluções (1.22).

As soluções citadas no Lema 1.4 são ditas *soluções fundamentais do sistema* (1.9).

1.4 Resultados sobre funções analíticas

Nesta seção, apresentaremos e provaremos três lemas sobre funções analíticas. O primeiro desses resultados possui uma prova extensa e técnica, e atribui uma cota superior para a ordem de uma certa forma linear R_1. O terceiro resultado, trata de formas lineares numéricas.

Lema 1.5. *Para $m \geq 2$, sejam*

$$f_1(z), \ldots, f_m(z), \tag{1.23}$$

funções analíticas em uma região contendo o ponto $z = 0$ que são coordenadas de uma solução $f(z)$ de um sistema de equações diferenciais lineares (1.9) e linearmente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$. Denote

$$p = \min_{1 \leq i \leq m} \operatorname{ord} f_i(z), \tag{1.24}$$

e

$$q = \max \left\{ \deg T, \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq m}} \deg T Q_{k,i} \right\}. \tag{1.25}$$

Além disso, sejam

$$R_1 = \sum_{i=1}^{m} P_{1,i} y_i, \quad R_1 \not\equiv 0 \tag{1.26}$$

uma forma linear, $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$P_{1,i} \in \mathbb{C}[z], \quad \deg P_{1,i} \leq n \quad e \quad i \in [1, m],$$

e l o posto do conjunto das formas lineares (1.19). Então existe uma constante r_0, dependendo apenas das funções (1.23), tal que a relação

$$\operatorname{ord} R_1(z) = \operatorname{ord} \left(\sum_{i=1}^{m} P_{1,i} f_i(z) \right) \leq nl + r_0 \tag{1.27}$$

é satisfeita quando $y_i = f_i(z)$, para todo $i \in [1, m]$. Se $l = m$, então r_0 na desigualdade (1.27) pode ser substituído por r_1, onde

$$r_1 = q \cdot \frac{(m-1)m}{2} + m + p - 1.$$

Prova. O conjunto das formas (1.19) tem posto $l \leq m$. Sendo $R_1 \not\equiv 0$, temos que $l > 0$.

Consideremos as formas lineares

$$R_k = \sum_{i=1}^{m} P_{k,i} y_i, \quad k \in [1,l], \tag{1.28}$$

e a matriz retangular formada pelos coeficientes dessas formas, isto é,

$$(P_{k,i})_{k,i}, \quad k \in [1,l] \quad e \quad i \in [1,m]. \tag{1.29}$$

O Lema 1.3, afirma que as formas (1.28) são linearmente independentes e, portanto, a matriz (1.29) tem posto l e possui ao menos um determinante menor de ordem l, não-nulo. Sem perda de generalidade, podemos assumir que o determinante menor não-nulo é o determinante

$$\Delta_0 = \Delta_0(z) = |P_{k,i}| \not\equiv 0, \quad k,i \in [1,l], \tag{1.30}$$

visto que sempre podemos renumerar as funções (1.23).

Se $l < m$, então cada coluna da matriz (1.29) com índice $j > l$ é uma combinação linear das l primeiras colunas, consequentemente

$$P_{k,j} = \sum_{i=1}^{l} P_{k,i} D_{i,j}, \quad k \in [1,l], \quad j \in [l+1,m] \;\text{ e }\; D_{i,j} \in \mathbb{C}(z). \tag{1.31}$$

Substituindo a equação (1.31) na equação (1.28), obtemos

$$\begin{aligned} R_k &= \sum_{i=1}^{m} P_{k,i} y_i \\ &= \sum_{i=1}^{l} P_{k,i} y_i + \sum_{j=l+1}^{m} P_{k,j} y_j \\ &= \sum_{i=1}^{l} P_{k,i} y_i + \sum_{j=l+1}^{m} \sum_{i=1}^{l} P_{k,i} D_{i,j} y_j \\ &= \sum_{i=1}^{l} P_{k,i} (y_i + \sum_{j=l+1}^{m} D_{i,j} y_j). \end{aligned}$$

Portanto, as formas lineares (1.28) podem ser representadas da forma

$$R_k = \sum_{i=1}^{l} P_{k,i} u_i, \quad k \in [1,l], \tag{1.32}$$

onde

$$u_i = y_i + \sum_{j=l+1}^{m} D_{i,j} y_j, \quad i \in [1,l] \ \text{ e } \ l \leq m. \tag{1.33}$$

Por outro lado, se $l = m$, então temos $u_i = y_i$ em (1.33).

Se $l < m$, então por (1.30), temos que as funções racionais $D_{i,j}$, com $i \in [1,l]$ e $j \in [1,m]$, são unicamente determinadas para uma forma linear R_1 fixada. Agora, vamos obter fórmulas que expressam essas funções em termos das soluções do sistema (1.9).

Como $l \in [1,m)$, o Lema 1.4, assegura que podemos escolher um conjunto de $\mu = m - l$ soluções fundamentais

$$(y_{i,s}), \quad i \in [1,m] \ \text{ e } \ s \in [1,\mu] \tag{1.34}$$

do sistema (1.9) tal que

$$R_{k,s} = \sum_{i=1}^{m} P_{k,i} y_{i,s} = 0, \quad k \in [1,m] \ \text{ e } \ s \in [1,\mu]. \tag{1.35}$$

Denotando

$$u_{i,s} = y_{i,s} + \sum_{j=l+1}^{m} D_{i,j} y_{j,s}, \quad i \in [1,l] \ \text{ e } \ s \in [1,\mu], \tag{1.36}$$

obtemos, usando (1.28), (1.33), (1.35) e (1.36), a seguinte relação

$$0 = R_{k,s} = \sum_{i=1}^{m} P_{k,i} y_{i,s} = \sum_{i=1}^{l} P_{k,i} u_{i,s}, \quad k \in [1,m] \ \text{ e } \ s \in [1,\mu]. \tag{1.37}$$

Para cada s fixado, consideramos o sistema de equações lineares homogêneo (1.37) nas l incógnitas $u_{1,s}, \ldots, u_{l,s}$. Por sua vez, a condição (1.30), assegura que este sistema tem apenas a solução trivial. Assim,

$$u_{i,s} = y_{i,s} + \sum_{j=l+1}^{m} D_{i,j} y_{j,s} = 0, \quad i \in [1,m] \ \text{ e } \ s \in [1,\mu]. \tag{1.38}$$

Agora, fixando $i \in [1,l]$, a partir de (1.38) obtemos um sistema de μ equações lineares homogêneas nas μ funções $D_{i,j}$, $j \in [l+1,m]$. Este sistema tem apenas uma única solução para cada i, uma vez que o determinante

$$\lambda = |y_{j,s}|, \quad j \in [l+1,s] \ \text{ e } \ s \in [1,\mu].$$

não é identicamente nulo como função de z.

Com efeito, suponha por contradição que $\lambda \equiv 0$ e denote por σ o determinante da matriz

(1.34). Fixando qualquer $i \in [1,l]$, e adicionando a i-ésima linha de σ e as $(l+1)$-ésima, ..., m-ésima linhas, depois de multiplicar a j-ésima linha por $D_{i,j}$ para $j \in [l+1,m]$. Por (1.38) as μ primeiras entradas da i-ésima linha de σ se tornam zero. Fazendo isso para todo $i \in [1,l]$, obtemos que σ contém um bloco de zeros $l \times \mu$ no canto superior esquerdo. Portanto, nas primeiras μ colunas de σ temos um bloco inteiramente nulo, sob o qual obtemos um bloco quadrado de $\mu \times \mu$ dando determinante $\lambda \equiv 0$.

Por outro lado, o Teorema de Laplace assegura que o determinante σ da matriz (1.34) é identicamente nulo como uma função de z. Mas o determinante de uma matriz de soluções fundamentais de um sistema de equações diferenciais lineares homogênea não pode ser identicamente nulo, uma contradição. Assim, concluímos que $\lambda \not\equiv 0$. Consequentemente todas as funções $D_{i,j}$, $i \in [1,l]$, $j \in [1,m]$ são unicamente determinadas por (1.38).

Considere a matriz retangular

$$(y_{i,s})_{i,s}, \quad i \in [1,l] \quad \text{e} \quad s \in [1,\mu] \tag{1.39}$$

e denote por $\lambda_{i,j}$ o determinante obtido de λ, substituindo a linha $y_{j,1},\dots,y_{j,\mu}$, onde $j \in [l+1,m]$ pela linha $y_{i,1},\dots,y_{i,\mu}$, com $i \in [1,l]$ da matriz (1.39). Então das soluções (1.34) encontramos que

$$D_{i,j} = -\frac{\lambda_{i,j}}{\lambda}, \quad \lambda \equiv 0, \quad i \in [1,l], \quad \text{e} \quad j \in [l+1,m]. \tag{1.40}$$

As equações (1.40) expressam as funções $D_{i,j}$ em termos das entradas da matriz (1.34), e esta matriz depende da escolha da forma R_1. Portanto, devemos transformar o lado direito da equação (1.40) de maneira que contenham apenas funções de um conjunto de soluções fundamentais de (1.9) fixadas. Seja

$$(y^*_{i,k}), \quad i,k \in [1,m] \tag{1.41}$$

uma matriz formada por um conjunto arbitrário de soluções fundamentais.

Na matriz

$$(y^*_{j,k}), \quad j \in [l+1,m] \quad \text{e} \quad k \in [1,m] \tag{1.42}$$

existem

$$m_1 = \binom{m}{m-l} = \frac{m}{l!(m-l)!}$$

determinantes menores $\mu \times \mu$. Podemos enumerá-los arbitrariamente e denotá-los por

$$\psi_1(z), \psi_2(z), \dots, \psi_{m_1}(z). \tag{1.43}$$

Se substituirmos as linhas $y^*_{j,1},\dots,y^*_{j,m}$ em (1.42), onde $j\in[l+1,m]$ pela linha $y^*_{i,1},\dots,y^*_{i,m}$ em (1.41), onde $i\in[1,l]$ então podemos formar m_1 determinantes menores de dimensão $\mu\times\mu$ no resultante. Os quais enumeramos arbitrariamente e denotamos por

$$\varphi_{i,j,1}(z),\varphi_{i,j,2}(z),\dots,\varphi_{i,j,m_1}(z),\quad i\in[1,l] \text{ e } j\in[l+1,m]. \tag{1.44}$$

A matriz (1.34) difere da matriz fixada (1.41) por uma matriz de fator

$$(c_{k,s}),\quad k,s\in[1,m] \text{ e } c_{k,s}\in\mathbb{C}, \tag{1.45}$$

onde a matriz quadrada (1.45) tem a propriedade de ter determinante não-nulo. Assim,

$$(y_{i,s})=(y^*_{i,k})(c_{k,s})=\left(\sum_{k=1}^{m} y_{i,k}c_{k,s}\right),\quad i,k,s\in[1,m] \tag{1.46}$$

Consideremos novamente (1.40), usando a expressão (1.46), obtemos

$$\lambda=|y_{j,s}|=\left|\sum_{k=1}^{m} y^*_{j,k}c_{k,s}\right|,\quad j\in[l+1,m] \text{ e } s\in[1,\mu]. \tag{1.47}$$

Note que o determinante do lado direito da expressão (1.47) é igual ao determinante do produto das duas matrizes retangulares

$$(y^*_{j,k}),\quad j\in[l+1,m] \text{ e } k\in[1,m] \tag{1.48}$$

e

$$(c_{k,s}),\quad k\in[1,m] \text{ e } s\in[1,\mu]. \tag{1.49}$$

Pela fórmula de Binet-Cauchy, esse determinante é igual a soma de todos os produtos de um determinante menor de tamanho de no máximo $\mu\times\mu$ na matriz (1.48) com um determinante menor correspondente de mesmo tamanho na matriz (1.49). Assim, usando a notação (1.43), obtemos

$$\lambda=\sum_{k=1}^{m_1}\beta_k\psi_k(z),\quad \lambda\not\equiv 0,$$

onde as constantes $\beta_1,\dots,\beta_m$ são formas homogêneas de dimensão μ nas entradas da matriz (1.49).

Analogamente, usando a notação (1.44), obtemos

$$-\lambda_{i,j}=\sum_{k=1}^{m_1}\alpha_{i,j,k}\psi_{i,j,k}(z),\quad i\in[1,l] \text{ e } j\in[l+1,m],$$

onde as constantes $\alpha_{i,j,k}$ são formas homogêneas de dimensão μ nas entradas da matriz

(1.49).

Agora as equações (1.40) podem ser reescritas como

$$D_{i,j} = \frac{\sum_{k=1}^{m_1} \alpha_{i,j,k}\varphi_{i,j,k}(z)}{\sum_{k=1}^{m_1} \beta_k \psi_k(z)}, \quad \sum_{k=1}^{m_1} \beta_k \psi_k(z) \not\equiv 0, \quad i \in [1,l] \;\text{ e }\; j \in [l+1,m]. \tag{1.50}$$

Aplicando o Lema 1.2 para cada uma das igualdades em (1.50), obtemos que o grau de cada uma das funções racionais $D_{i,j}$ não é maior que um certo número v que depende apenas das funções (1.43) e (1.44) (que são os determinantes menores da matriz fixada (1.41) de um conjunto de soluções fundamentais de (1.9)).

Se considerarmos todas as formas lineares R_1 que satisfazem (1.26) para n variáveis, em geral obtemos conjuntos diferentes de funções racionais $D_{i,j}$ determinadas de (1.38) usando (1.50) para valores diferentes de l, diferentes maneiras de numerar as funções (1.23) e diferentes conjuntos de funções (1.43) e (1.44) e equações correspondentes (1.50). Assim, pelo que foi provado anteriormente, existe um número v_0 tal que para qualquer forma linear R_1 e qualquer numeração das funções (1.23), o grau de cada uma das funções racionais $D_{i,j}$ em (1.31) não é maior que v_0. Aqui v_0 depende apenas do sistema de equações diferenciais (1.9). Como, por hipótese, as funções (1.23) são linearmente independentes sobre sobre $\mathbb{C}(z)$, segue do Lema 2.2 que o sistema (1.9) é unicamente determinado por essas funções e então v_0 depende apenas do conjunto de funções (1.23).

Substituindo as variáveis $y_1, \ldots, y_m$ pelas funções (1.23) nas formas lineares (1.28), as equações (1.33) tornam-se

$$u_i = f_i(z) + \sum_{j=l+1}^{m} D_{i,j} f_j(z), \quad i \in [i,l] \;\text{ e }\; l \leq m. \tag{1.51}$$

Seja $T_i = T_i(z)$ um polinômio que serve como mínimo denominador comum de todas as funções racionais $D_{i,j}$ para todo $j \in [l+1,m]$ em (1.51). Se $l = m$, denotamos $T_i = 1$. As expressões

$$H_i = T_i u_i, \quad i \in [1,l] \;\text{ e }\; l \leq m, \tag{1.52}$$

são formas lineares nas funções (1.23) com coeficientes em $\mathbb{C}[z]$.

Como as funções (1.23) são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$, segue de (1.51) que nenhuma das funções em (1.52) é identicamente nula como uma função de z. Denotaremos

$$\tau = \min_{1 \leq i \leq l} \operatorname{ord} H_i(z).$$

Se $l = m$, temos $\tau = p$. Pelo que foi provado anteriormente, o grau dos coeficientes polinomiais da forma linear em (1.52) são limitados por μv_0. Consequentemente, se aplicarmos o Lema 1.1 em uma dessas formas, concluímos que existe um número τ_0, dependendo apenas das funções (1.23), de modo que, para qualquer forma linear R_1, o número τ correspondente as funções (1.52) satisfaz a desigualdade $\tau \leq \tau_0$. Se $l = m$, temos $\tau = p$.

Consideramos o determinante Δ_0 do conjunto das formas lineares (1.32). Denotamos $\Delta^0_{k,i}$ o cofator de $P_{k,i}$ em Δ_0. Da mesma maneira que (1.21) foi obtido, obtemos as seguintes equações para o sistema de formas lineares (1.32)

$$\Delta_0(z)u_j = \sum_{k=1}^{l} \Delta^0_{k,j} R_k(z), \quad j \in [1,l]. \tag{1.53}$$

Multiplicando ambos os lados da equação correspondente por T_j. Usando a notação (1.52), obtemos

$$\Delta_0(z)H_j(z) = T_j \sum_{k=1}^{l} \Delta^0_{k,j} R_k(z), \quad j \in [1,l]. \tag{1.54}$$

Escolhendo $j \in [1,l]$, de maneira que $\operatorname{ord} H_j = \tau$ e considerando a j-ésima equação em (1.53). De (1.13) segue que

$$\deg P_{k,i} \leq n + q(k-1), \quad i \in [1,l].$$

Consequentemente,

$$\deg \Delta_0(z) \leq nl + q \cdot \frac{(l-1)l}{2}.$$

Como $\operatorname{ord} H_j = \tau$, segue que

$$\operatorname{ord}\left(\Delta_0(z)H_j(z)\right) \leq nl + q \cdot \frac{(l-1)l}{2} + \tau. \tag{1.55}$$

Seja $\operatorname{ord} R_1(z) = v$. Então de (1.14), encontramos que

$$\operatorname{ord} R_k(z) \geq v - k + 1, \quad k \in [1,l].$$

Consequentemente,

$$\operatorname{ord}\left(\sum_{k=1}^{l} \Delta^0_{k,i} R_k(z)\right) \geq v - l + 1. \tag{1.56}$$

A desigualdade (1.26) segue de (1.54), (1.55) e (1.56) que

$$r_0 = q \cdot \frac{m(m-1)}{2} + m - 1 + \tau_0.$$

No caso em que $l = m$, temos $\tau = p$ e, portanto, podemos substituir r_0 por r_1 na desigualdade (1.26). □

A notação que apresentaremos a seguir será usada nos próximos resultados dessa seção. Denotaremos

$$n_0 = 2(r_0 - m + 1) = q(m-1)m + 2\tau_0 \tag{1.57}$$
$$s \in \mathbb{N}, \quad 0 \le s < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \tag{1.58}$$
$$t = q\frac{(m-1)m}{2} + s + p, \tag{1.59}$$

onde r_0 e n foram determinados no Lema 1.5.

Lema 1.6. *Nas condições do Lema 1.5, a forma linear R_1 apresentada em (1.26) satisfaz a condição*

$$\operatorname{ord} R_1(z) \ge m(n+1) - s - 1, \tag{1.60}$$

quando $y_i = f_i(z)$, para todo $i \in [1,m]$. Então para $n \ge n_0$ as formas lineares (1.19) obtidas de R_1 e (1.11) são linearmente independentes, e o determinante $\Delta(z)$ das formas (1.19) é dado por

$$\Delta(z) = z^{mn-s-p}\Delta_1(z), \quad \Delta_1(z) \not\equiv 0, \tag{1.61}$$
$$\Delta_1(z) \in \mathbb{C}[z], \quad \deg \Delta_1(z) = \kappa, \quad \kappa \in [0,t].$$

Prova. Suponha que as formas lineares (1.19) tem posto l, com $l \in [1,m]$, então das hipóteses (1.27) e (1.60), temos

$$m(n+1) - s - 1 \le \operatorname{ord} R_1(z) \le nl + r_0 \quad \Longrightarrow \quad m(n+1) - s - 1 \le nl + r_0,$$

da desigualdade (1.58), obtemos

$$(m-l)n \le r_0 - m + s + 1 \le \frac{n}{2} + r_0 - m. \tag{1.62}$$

Se $n \ge n_0$ e $l < m$, então segue de (1.57) que (1.62) apresenta uma contradição. Com efeito, de (1.57) e (1.62), obtemos

$$n_0 = 2(r_0 - m + 1) = 2(r_0 - m) + 2 \ge 2(m-l)n - n \ge (2(m-l) - 1)n > n,$$

quando $l < m$ a última desigualdade implica que $n_0 > n$, uma contradição. Logo, $l = m$ e $\Delta_0(z) = \Delta(z)$.

Para $l = m$, temos $u_j = y_j = f_j(z)$, assim considerando a equação (1.53), temos

$$\Delta(z) f_j(z) = \sum_{k=1}^{m} \Delta_{k,j} R_k(z), \quad \Delta(z) \not\equiv 0, \quad \operatorname{ord} f_j(z) = p. \tag{1.63}$$

Das desigualdades (1.27) e (1.60) concluímos que

$$\operatorname{ord} R_k(z) \ge m(n+1) - s - k.$$

Assim, usando a equação (1.63), obtemos (1.61), onde

$$\begin{aligned}\kappa = \deg \Delta_1(z) = \deg \Delta(z) - (mn - s - p) &\leq \left(mn + q \cdot \frac{(m-1)m}{2} \right) - (mn - s - p) \\ &= q \cdot \frac{(m-1)m}{2} + s + p \\ &= t.\end{aligned}$$

□

Lembre que o Lema 1.1 assegura que, sob algumas hipóteses, se a sequência das formas $R_1, R_2, \ldots, R_m$ tem posto l, então as formas $R_1, R_2, \ldots, R_l$ são linearmente independentes. O lema a seguir afirma que, sob algumas condições, o conjunto das $m+t$ formas lineares numéricas $R_k(\alpha)$, $k \in [1, m+t]$, tem posto m, mas não garante que estas formas lineares numéricas são $R_1(\alpha), \ldots, R_m(\alpha)$.

Lema 1.7 (C. L. Siegel). *Suponha que as funções (1.23) são analíticas em uma região contendo o ponto $z = 0$, formam uma solução do sistema de equações diferenciais homogêneo (1.9), e são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$. Sejam p, q como denotado em (1.24) (1.25) e r_0, s e t satisfazendo (1.57) - (1.59). Além disso, seja R_1 uma forma linear* (1.26) *tal que $n \geq n_0$ e* (1.60) *são válidas para $y_i = f_i(z)$, $i \in [1, m]$. Considere $R_{k+1} = TDR_k$, $k = 1, 2, \ldots$, $\alpha \in \mathbb{C}(z)$, e $\alpha T(\alpha) \neq 0$. Então a matriz*

$$\left(P_{k,i}(\alpha)\right)_{i,k}, \quad i = [1, m] \ \text{ e } \ k = [1, m+t],$$

das formas lineares

$$R_k(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} P_{k,i}(\alpha) f_i(\alpha), \quad k = [1, m+t], \tag{1.64}$$

tem posto m e, portanto, m formas lineares linearmente independentes podem ser escolhidas dentre as formas (1.64).

Prova. Como as hipótese dos Lema 1.6 são satisfeitas, segue que (1.61) é válida. Como $\alpha T(\alpha) \neq 0$, podemos afirma que $\Delta(z)$ tem zero de ordem τ em $z = \alpha$, então por (1.61)

$$0 \leq \tau \leq t \tag{1.65}$$

Consideremos as formas lineares $R_1, \ldots, R_m$ como em (1.12) com variáveis $y_1, \ldots, y_m$ que foram construídas a partir de R_1 como em (1.11) e as relações (1.21), isto é,

$$\Delta(z) y_j = \sum_{k=1}^{m} \Delta_{k,j}(z) R_k, \quad j \in [1, m],$$

Aplicando o operado TD em ambos os lados de (1.21) e usando (1.11), obtemos as seguintes relações que valem para $y_1,\dots,y_m$ e z

$$T(z)\Delta'(z)y_j+\Delta(z)\mathcal{L}_{1,j,0}=\sum_{k=1}^{m+1}M_{1,j,k}(z)R_k,\quad 1\le j\le m,$$

onde $\mathcal{L}_{1,j,0}$ é alguma forma linear em $y_1,\dots,y_m$ com coeficientes em $\mathbb{C}[z]$ e todos os $M_{1,j,k}(z)\in\mathbb{C}[z]$. De fato,

$$\begin{aligned}TD(\Delta(z)y_j)&=T\left[\frac{\partial}{\partial z}+\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{m}Q_{k,i}y_i\right)\frac{\partial}{\partial y_k}\right]\Delta(z)y_j\\&=T\left(y_j\Delta'(z)+\Delta(z)\sum_{i=1}^{m}Q_{j,i}y_i\right)\\&=T\Delta'(z)y_j+\Delta(z)\sum_{i=1}^{m}TQ_{j,i}y_i\\&=T(z)\Delta'(z)y_j+\Delta(z)\mathcal{L}_{1,j,0}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}TD\left(\sum_{k=1}^{m}\Delta_{k,j}(z)R_k\right)&=\sum_{k=1}^{m}TD(\Delta_{k,j}(z)R_k)\\&=\sum_{k=1}^{m}(R_kTD\Delta_{k,j}(z)+\Delta_{k,j}TDR_k)\\&=\sum_{k=1}^{m}(R_kTD\Delta_{k,j}(z)+\Delta_{k,j}R_{k+1})\\&=\sum_{k=1}^{m}R_kT\Delta'_{k,j}(z)+\sum_{k=1}^{m}\Delta_{k,j}R_{k+1}\\&=\sum_{k=1}^{m+1}M_{1,j,k}R_k,\end{aligned}$$

onde

$$M_{1,j,k}=\begin{cases}T\Delta'_{k,j}(z), & k=1\\ T\Delta'_{k,j}(z)+\Delta_{k-1,j}(z), & k\in(1,m]\\ \Delta_{k,j}(z), & k=m+1.\end{cases}$$

Note que em todos os casos $M_{1,j,k}\in\mathbb{C}[z]$.

Se repetimos o processo τ vezes, obtemos as seguintes relações

$$\begin{aligned} T^{\tau}(z)\Delta^{(\tau)}(z)y_j + \sum_{k=0}^{\tau-1} \Delta^{(k)}(z)\mathcal{L}_{\tau,j,k} &= \sum_{k=1}^{m+\tau} M_{\tau,j,k}(z)R_k \\ &= \sum_{k=1}^{m+\tau} M_{\tau,j,k}(z)(P_{k,1}(z)y_1 + \cdots + P_{k,m}(z)y_m), \end{aligned} \tag{1.66}$$

com $j \in [1,m]$, onde $\mathcal{L}_{\tau,j,k}$ são formas lineares em $y_1,\ldots,y_m$ e z com coeficientes em $\mathbb{C}[z]$ e $M_{\tau,j,k} \in \mathbb{C}[z]$.

Por hipótese, as seguintes condições são válidas

$$\begin{cases} \Delta^{(k)}(\alpha) = 0, \quad k \in [0,\tau-1] \\ \\ T^{(\tau)}(\alpha)\Delta^{(\tau)}(\alpha) = \beta \neq 0 \end{cases} . \tag{1.67}$$

Tomando $z = \alpha$ em (1.66) e denotando $M_{\tau,j,k}(\alpha) = \beta_{j,k}$. Então, substituindo (1.67) nas equações (1.66), obtemos

$$\beta y_j = \sum_{k=1}^{m+\tau} \beta_{j,k}(P_{k,1}(\alpha)y_1 + \cdots + P_{k,m}(\alpha)y_m), \quad j \in [1,m] \tag{1.68}$$

com $\beta \neq 0$. De (1.68) segue que as variáveis $y_1,\ldots,y_m$ podem ser representadas como combinação linear das $m+\tau$ formas lineares

$$P_{k,1}(\alpha)y_1 + \cdots + P_{k,m}(\alpha)y_m, \quad k \in [1,m+\tau].$$

Por (1.65), temos que a matriz (1.64) tem posto m. Isto conclui a prova do lema. $\square$

Capítulo 2

E-funções

Este capítulo tem como objetivo apresentar de modo sucinto a teoria das E-funções. Tendo em vista a finalidade, dividimos este capítulo em 4 seções. A primeira seção é destinada à definição e uma caracterização de E-funções, a segunda às propriedades básicas. A terceira e a quarta seções contém lemas fundamentais para a prova do Primeiro Teorema Fundamental que é o resultado principal desta dissertação.

2.1 Uma caracterização de E-funções

Para a definição de E função, faz-se necessária a definição de ordem de uma função. Tal conceito será amplamente utilizado neste capítulo e sua definição é apresentada a seguir.

Definição 2.1. *Considere U um subconjunto ilimitado de $\mathbb{R}$ e as funções $f : U \to \mathbb{R}$ e $g : U \to \mathbb{R}^+$. Dizemos que f* tem ordem grande *g ($f(z) = O(g(z))$ quando $z \to \infty$) quando existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$|f(z)| \leq cg(z),$$

para z suficientemente grande.

A definição de E-função que apresentaremos a seguir foi introduzida por C. Siegel em 1929 no artigo intitulado *Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen*, ver [27]. Este mesmo conceito foi apresentado por C. Siegel, em 1949, em seu livro *Transcendental Numbers* (ver [26]) e por de K. Mahler e A. Shidlovskii em seus trabalhos a saber [18] e [25], respectivamente.

Definição 2.2. *Uma série de potência*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{z^n}{n!}$$

é dita uma E-função para $K = \mathbb{Q}(\theta)$ quando as condições a seguir são satisfeitas.

(i) Todos os coeficientes $f_0, f_1, f_2, \ldots$ pertencem a K.

(ii) Para todo $\varepsilon > 0$, tem-se

$$\overline{\left| f_n \right|} = O(n^{\varepsilon n})$$

quando $n \to \infty$.

(iii) Denote por d_n o menor inteiro positivo tal que os produtos

$$d_n f_0,\ d_n f_1, \ldots, d_n f_n,$$

pertencem a $\mathcal{O}_K$. Então para todo $\varepsilon > 0$, tem-se

$$d_n = O(n^{\varepsilon n})$$

quando $n \to \infty$.

Veremos no item (e) da Proposição 2.1 que a condições (ii) da Definição 2.2 assegura a convergência da série $f(z)$.

Neste trabalho, nos restringiremos ao estudo das E-funções que satisfazem uma equação diferencial linear

$$y^{(n)} + r_0 y^{(n-1)} + \cdots + r_{n-1} y + r_n = 0, \tag{2.1}$$

onde os coeficientes $r_0, r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{C}(z)$, isto é, são funções racionais.

O lema a seguir caracteriza as E-funções que satisfazem uma equação diferencial linear.

Lema 2.1. *Sejam $f_1(z) \ldots, f_m(z)$ funções coordenadas de uma solução do sistema linear de equações*

$$Q := y_j' = Q_{j,0} + \sum_{k=1}^{m} Q_{j,k} y_k, \quad j \in [1, m], \tag{2.2}$$

onde os coeficientes $Q_{j,k} \in \mathbb{C}(z)$, isto é, são funções racionais, para $j \in [1,m]$ e $k \in [0,m]$. Se $f_1(z)$ é uma E-função, então $f_1(z)$ satisfaz uma equação diferencial linear. Reciprocamente, toda E-função que satisfaz uma equação diferencial linear é coordenada da solução de um sistema Q adequado com funções racionais como coeficientes.

Prova. ($\Rightarrow$) Usaremos indução na ordem de derivação j a fim de obter uma fórmula para a j-ésima derivada de f_1. Quando $j = 1$, temos que f_1 satisfaz o sistema Q e, portanto,

$$f_1^{(1)}(z) = f_1'(z) = Q_{1,0} + \sum_{k=1}^{m} Q_{1,k} f_k.$$

Suponha que para $j-1$ a função f_1 satisfaz a equação

$$f_1^{(j-1)}(z) = r_{j-1,0} + \sum_{k=1}^{m} r_{j-1,k} f_k,$$

onde $r_{j-1,k}$ são funções racionais para $k \in [0,m]$. Então, para j temos

$$f_1^{(j)}(z) = \frac{d}{dz} r_{j-1,0} + \sum_{k=1}^{m} \frac{d}{dz}(r_{j-1,k} f_k) = r'_{j-1,0} + \sum_{k=1}^{m} r'_{j-1,k} f_k + \sum_{k=1}^{m} r_{j-1,k} f'_k.$$

Substituindo as equações do sistema Q, obtemos

$$f_1^{(j)}(z) \quad = r'_{j-1,0} + \sum_{k=1}^{m} r'_{j-1,k} f_k + \sum_{k=1}^{m} \left(r_{j-1,k} Q_{k,0} + r_{j-1,k} \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i} f_i \right) = s_{j,0} + \sum_{i=1}^{m} s_{j,i} f_i,$$

onde $s_{j,i}$ são funções racionais para $i \in [0,m]$. Assim, por indução, concluímos que $f_1^{(j)}(z)$ pode ser obtida em função de $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Como quaisquer $m+1$ polinômios lineares são linearmente dependentes, concluímos que $f_1(z)$ satisfaz uma equação diferencial da forma (2.1), de ordem $n = m$.

($\Leftarrow$) Como $f(z)$ satisfaz a equação diferencial (2.1), denotando

$$y_1 = f(z), \;\; y_2 = f'(z), \;\; \ldots \;\; y_n = f^{(n-1)}(z),$$

obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais lineares

$$Q := \begin{cases} y_1' & = y_2 \\ y_2' & = y_3 \\ & \vdots \\ y_n' & = -(r_1 y_n + \cdots + r_n y_1 + r_0). \end{cases}$$

$\square$

O próximo resultado afirma que no caso em que as coordenadas da solução do sistema de equações diferenciais lineares (1.9) são E-funções para K, o sistema Q é unicamente determinado e seus coeficientes $Q_{k,i}$ pertencem a $K(z)$, para $k,i \in [1,m]$.

Lema 2.2. *Seja $m \geq 2$ e sejam $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, E-funções que são analíticas em uma região contendo o ponto $z = 0$ que formam uma solução do sistema (1.9), e são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$. Então o sistema (1.9) é unicamente determinado,*

$$Q_{k,i} \in K(z), \quad k,i \in [1,m],$$

e existe um polinômio $T = T(z)$ tal que

$$T \in \mathcal{O}_K[z], \quad TQ_{k,i} \in \mathcal{O}_K[z], \quad k,i \in [1,m].$$

2.2 Algumas propriedades de E-funções

A partir desta seção, o termo E-função será usado para se referir apenas as E-funções que satisfazem uma equação diferencial linear. As propriedades a seguir são consequências da definição de E-funções.

Proposição 2.1. *Sejam $f(z)$ e $g(z)$ E-funções e $\alpha \in K$, então são válidas as seguintes propriedade.*

(a) Todo polinômio em $K[z]$ é uma E-função.

(b) A função $f(\alpha z)$ é uma E-função.

(c) Todas as derivadas de $f(z)$

$$f'(z), f''(z), \ldots, f^{(n)}(z), \ldots$$

são E-funções.

(d) As integrais

$$\int_0^z f(s)\,ds, \quad \int_0^z \left(\int_0^z f(s)\,ds \right) ds, \ \ldots$$

são E-funções.

(e) Toda E-função é uma função inteira.

(f) As funções

$$f(z) + g(z), \ f(z) - g(z) \ \ e \ \ f(z)g(z), \tag{2.3}$$

são E-funções.

Prova. (a) Seja $p(z) \in K[z]$ um polinômio de grau n. Então

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k! \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{z^k}{k!},$$

onde $a_k = 0$ quando $k \geq n+1$. Como $a_k \in K$, para $k \in [0,n]$, concluímos que $f_k = a_k k! \in K$. Assim, para $k \geq n+1$, temos $\overline{|f_k|}$ e, portanto,

$$0 = \overline{|f_k|} \leq k^{\varepsilon k}.$$

Com isto, concluímos que $\overline{|f_k|} = O(k^{\varepsilon k})$, quando $k \to \infty$. Denote por d_k o menor inteiro positivo tal que $d_k f_1, \ldots, d_k f_k \in \mathcal{O}_K$. Observe que dado $\varepsilon > 0$, para $k > 1/\varepsilon$ tem-se

$$d_k \leq d_k k \leq d_k k^{\varepsilon k}$$

Tomando $d = d_n$ e $d_k = d_n$, quando $k \geq n$, da desigualdade anterior, obtemos

$$d_k \leq d_k k \leq d_k k^{\varepsilon k} \leq d k^{\varepsilon k}.$$

Logo, $d_k = O(k^{\varepsilon k})$ quando $k \to \infty$. Observe que $p(z)$ satisfaz a equação diferencial linear

$$y^{(n+1)} + r_1 y^{(n)} + \cdots + r_n y' + r_{n+1} y = 0,$$

onde $r_1 = \cdots = r_{n+1} = 0$. Assim, concluímos que $p(z)$ é uma E-função.
(b) Por definição

$$f(\alpha z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \alpha^k \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{f}_k \frac{z^k}{k!}.$$

Assim, $\tilde{f}_k \in K$, para $k = 0, 1, \ldots$. Note que se o polinômio minimal de f_k é dado por

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$

então $\tilde{f}_k$ tem como polinômio minimal

$$\tilde{p}(x) = \frac{a_0}{\alpha^{nk}} x^n + \frac{a_1}{\alpha^{(n-1)k}} x^{n-1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{\alpha^k} x + a_n,$$

e, portanto,

$$\overline{|\tilde{f}_k|} = |\alpha|^k \overline{|f_k|} = |\alpha|^k O(k^{\varepsilon k}) = O(k^{\varepsilon k})$$

quando $k \to \infty$. Agora, denote por m o menor inteiro positivo tal que $m\alpha \in \mathcal{O}_K$. Sendo d_k nas condições do item (iii) da Definição 2.2 (relativo a $f(z)$), denotando por $\tilde{d}_k = m^k d_k$, temos que $\tilde{d}_k$ é o menor inteiro positivo tal que

$$\tilde{d}_k \tilde{f}_0, \tilde{d}_k \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{d}_k \tilde{f}_k$$

pertencem a $\mathcal{O}_K$. E
$$\tilde{d_k} = md_k = m^k O(k^{\varepsilon k}) = O(k^{\varepsilon k}),$$
quando $k \to \infty$. Além disso, se $f(z)$ é uma E-função que satisfaz a equação diferencial

$$y^{(n)} + r_0 y^{(n-1)} + \cdots + r_{n-1}y + r_n = 0,$$

então $f(\alpha z)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{1}{\alpha^n} y^{(n)} + \frac{r_0}{\alpha^{n-1}} y^{(n-1)} + \cdots + r_{n-1}y + r_n = 0.$$

Assim, concluímos que $f(\alpha z)$ é uma E-função.
(c) Seja
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{z^k}{k!}.$$
Então a n-ésima derivada de f é dada por

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k+n} \frac{z^k}{k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{f_j} \frac{z^j}{j!},$$

onde $\tilde{f_j} = f_{k+n}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, $\tilde{f_j}$ satisfazem os itens (i), (ii) e (iii) da Definição (2.2). Agora, suponha que f satisfaz uma equação diferencial linear de ordem m, dada por

$$r_{-1} + r_0 f(z) + r_1 f'(z) + \cdots + r_m f^{(m)}(z) = 0, \tag{2.4}$$

onde $r_i \in \mathbb{C}(z)$, $i \in [-1, m]$. Derivando a equação (2.4) em relação a z, obtemos

$$r'_{-1} + r'_0 f(z) + r_0 f'(z) + r'_1 f'(z) + r_1 (f'(z))' + \cdots + r'_m (f'(z))^{(m)} = 0. \tag{2.5}$$

Isolando o termo $f(z)$ na equação (2.4) e substituindo na equação (2.5), obtemos

$$r'_{-1} - r_{-1}\frac{r'_0}{r_0} + \sum_{i=1}^{m} \left(r_{i-1} + r'_i - r_i \frac{r'_0}{r_0} \right) (f'(z))^{(i-1)} + r'_m (f'(z))^{(m)} = 0.$$

Logo, $f'(z)$ satisfaz uma equação diferencial linear. Mostraremos que se a $f^{(n)}(z)$, n-ésima derivada de f, satisfaz uma equação diferencial de ordem k, então $f^{(n+1)}(z)$ satisfaz uma equação diferencial de ordem k. Com efeito, suponha que $f^{(n)}(z)$ satisfaz a equação diferencial dada por

$$r_{-1} + r_0 f^{(n)}(z) + r_1 (f^{(n)}(z))' + \cdots + r_k (f^{(n)}(z))^{(k)} = 0. \tag{2.6}$$

Derivando a equação (2.6) em relação a z, obtemos

$$r'_{-1}+r_0f^{(n)}(z)+\sum_{i=1}^{k}(r_{i-1}+r'_i)(f^{(n+1)}(z))^{(i-1)}+r_k(f^{(n+1)}(z))^{(k)}=0. \tag{2.7}$$

Isolando $f^{(n)}(z)$ na equação (2.6) e substituindo na equação (2.7), obtemos

$$r'_{-1}-r_{-1}\frac{r'_0}{r_0}+\sum_{i=1}^{k}\left(r_{i-1}+r'_i-r_i\frac{r'_0}{r_0}\right)(f^{(n+1)}(z))^{(i-1)}+r'_m(f^{(n+1)})^{(k)}=0.$$

Assim, usando o Princípio de Indução Finita concluímos que se a E-função $f(z)$ satisfaz uma equação diferencial linear, então a n-ésima derivada de $f(z)$ satisfaz uma equação diferencial linear para todo $n\in\mathbb{N}$.
(d) Como $f(z)$ converge para todo $z\in\mathbb{C}$ (ver a prova no item a seguir) integrando termo a termo, temos

$$\int_0^z f(s)\,ds=\int_0^z\sum_{k=0}^{\infty}f_k\frac{s^k}{k!}\,ds=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^z f_k\frac{s^k}{k!}\,ds=\sum_{k=0}^{\infty}f_k\frac{z^{(k+1)}}{(k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{f}_k\frac{z^k}{k!},$$

onde $\tilde{f}_0=0$ e $\tilde{f}_k=f_k$, $k1$. Assim, concluímos que $\displaystyle\int_0^z f(s)\,ds$ é uma E-função. Além disso, por indução, podemos mostrar que

$$\overbrace{\int_0^z\cdots\int_0^z}^{n}f(s)\,ds\ldots ds=\sum_{k=0}^{\infty}f_k\frac{z^{k+n}}{(k+n)!}=\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{f}_j\frac{z^j}{j!},$$

com $\tilde{f}_j=0$ quando $j\in[0,n-1]$ e $\tilde{f}_j=f_{j-n}$, quando $j\geq n$. Assim, concluímos que as integrais em questão são E-funções.
(e) Afirmamos que $r(f(z))=+\infty$. De fato, usando o Teorema 1.1, temos

$$r(f(z))=\frac{1}{\limsup\sqrt[k]{f_k(k!)^{-1}}}.$$

Por outro lado, dado $\varepsilon>0$ do item (ii) da Definição 2.2, para k suficientemente grande, temos

$$|f_k|\leq\boxed{f_k}=O(k^{\varepsilon k})\Longrightarrow f_k(k!)^{-1}\leq c\,k^{\varepsilon k}(k!)^{-1}$$

$$\Longrightarrow\sqrt[k]{f_k(k!)^{-1}}\leq\sqrt[k]{c\,k^{\varepsilon k}(k!)^{-1}}$$

$$\Longrightarrow\lim\sqrt[k]{f_k(k!)^{-1}}\leq\lim\sqrt[k]{ck^{\varepsilon k}(k!)^{-1}}.$$

Sabemos que para $k \geq 1$, vale

$$k! > \left(\frac{k}{3}\right)^k.$$

Em particular, para $\varepsilon \in (0,1)$ obtemos

$$\sqrt[k]{\frac{k^{\varepsilon k}}{k!}} \leq \sqrt[k]{\frac{c\,k^{\varepsilon k}}{\left(\frac{k}{3}\right)^k}} = \sqrt[k]{c}\,3k^{\varepsilon-1} \implies \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{k^{\varepsilon k}}{k!}} < \sqrt[k]{c} \lim_{k\to\infty} \frac{3}{k^{1-\varepsilon}} = 0.$$

Logo,

$$\lim \sqrt[k]{f_k(k!)^{-1}} \leq \lim \sqrt[k]{\frac{c\,k^{\varepsilon k}}{k!}} = 0.$$

E, portanto, $r(f(z)) = +\infty$. Assim, concluímos que $f(z)$ converge em todo $z \in \mathbb{C}$. Por fim, o Teorema 1.2 afirma que $f(z)$ é infinitamente diferenciável em todo $z \in \mathbb{C}$. Assim, concluímos que $f(z)$ é uma função inteira.

(f) Sejam

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{z^k}{k!}, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \frac{z^k}{k!}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
f(z)+g(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (f_k+g_k)\frac{z^k}{k!},\\
f(z)-g(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (f_k-g_k)\frac{z^k}{k!}\\
f(z)\cdot g(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{k} \frac{f_q g_{k-q}}{q!(k-q)!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \frac{z^k}{k!},
\end{aligned}$$

onde h_k é dado por

$$h_k = k! \sum_{q=0}^{k} \frac{f_q g_{k-q}}{q!(k-q)!} = \sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} f_q g_{k-q}$$

Por hipótese, f_k e g_k pertencem a K para todo $k \geq 0$, portanto $f_k + g_k$, $f_k - g_k$, h_k pertencem a K. Logo, as funções apresentadas em (2.3) satisfazem o item (i) da Definição 2.2.
Segue das propriedades (1.1) e do item (ii) da Definição 2.2 que

$$\overline{\left|f_k \pm g_k\right|} \leq \overline{\left|f_k\right|} + \overline{\left|g_k\right|} = O(k^{\varepsilon k}) + O(k^{\varepsilon k}) = k_1 k^{\varepsilon k} + k_2 k^{\varepsilon k} = (k_1+k_2)k^{\varepsilon k} = O(k^{\varepsilon k})$$

e

$$\overline{|h_k|} = \overline{\left|\sum_{q=0}^{k}\binom{k}{q} f_q g_{k-q}\right|} \leq 2^k \overline{|f_q|} \cdot \overline{|g_{k-q}|} = O(k^{3\varepsilon k}) = O(k^{\varepsilon k}), \quad k \to \infty.$$

Assim, as funções em questão satisfazem ao item (ii) da Definição 2.2.

Agora vamos mostrar que as funções apresentadas em (2.3) satisfazem o item (iii) da Definição 2.2. Sendo d_k e e_k os inteiros positivos relativos a $f(z)$ e $g(z)$, respectivamente, que satisfazem o item (iii) da Definição 2.2. Dessa forma, sendo $\mathcal{O}_K$ um domínio de integridade, temos que os números

$$d_k e_k (f_h + g_h), \quad d_k e_k (f_h - g_h) \quad \text{e} \quad d_k \cdot e_k \cdot h_k, \quad h \in [0, k]$$

pertencem a $\mathcal{O}_K$ e para k suficientemente grande, temos

$$d_k e_k = O(k^{\varepsilon k}) O(k^{\varepsilon k}) = O(k^{2\varepsilon k}) = O(k^{\varepsilon k}).$$

Por fim, vamos considerar o caso em que $f(z)$ e $g(z)$ são E-funções que satisfazem, respectivamente, as equações diferenciais lineares

$$y^{(n)} + r_0 y^{(n-1)} + \cdots + r_{n-1} y + r_n = 0 \quad \text{e} \quad y^{(q)} + s_0 y^{(q-1)} + \cdots + s_{q-1} y + s_q = 0,$$

cujos coeficientes são funções racionais. Dessas equações, cada derivada de $f(z) + g(z)$ e de $f(z) - g(z)$ podem ser escritas como um polinômio com coeficientes racionais em

$$f(z), f'(z), \ldots, f^{(n-1)}(z), g(z), g'(z), \ldots, g^{(p-1)}(z),$$

e cada derivada de $f(z)g(z)$ é um polinômio linear em função de

$$f^{(h}(z), g^{(k)}(z), f^{(h)}(z) g^{(k)}(z), \quad h \in [0, n-1], \quad k \in [0, p-1].$$

Assim, efetuando algumas eliminações, obtemos que $f(z) + g(z)$, $f(z) - g(z)$ e $f(z)g(z)$ são soluções de equações diferenciais lineares com coeficientes racionais de ordens $n + p$, $n + p$ e $np + n + p$, respectivamente. E, com isto, concluímos que a prova da proposição.

$\square$

2.3 Lemas auxiliares sobre soluções de sistemas de equações lineares homogêneas

Os resultados apresentados nesta seção tem como objetivo extrair informações acerca de um conjunto de E-funções que são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$ e que formam uma solução de um sistema de equações diferenciais dado, quando submetidas a algumas hipóteses. Antes de enunciar tais resultados vamos associar a finalidade desta seção com o que já foi feito nas seções precedentes. Para isto, considere o sistema de equações diferenciais homogêneo

$$Q := y_i' = \sum_{k=1}^{m} Q_{i,k} y_k, \quad i \in [1,m],$$

onde $Q_{i,k}$ são m^2 funções racionais em $\mathbb{C}(z)$. Estamos interessados nas soluções de Q do tipo

$$f(z) = \begin{bmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{bmatrix} \neq 0,$$

cujas coordenadas $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ são E-funções. Nessas condições, o Lema 2.2 assegura que os coeficientes $Q_{i,k} \in K(z)$.

Quanto a independência linear destas funções temos a seguinte definição.

Definição 2.3. *O número máximo de coordenadas de $f(z)$ que são linearmente independentes sobre $K(z)$ (z é uma indeterminada) é dito o* posto de $f(z)$ sobre $K(z)$ *e denotamos por ρ.*

De modo análogo a definição anterior, dado $\alpha \in K$ podemos definir o *posto* $\rho(\alpha)$ do vetor constante

$$f(\alpha) = \begin{bmatrix} f_1(\alpha) \\ \vdots \\ f_m(\alpha) \end{bmatrix}$$

sobre K como o número máximo de coordenadas de $f(\alpha)$ que são linearmente independentes sobre K.

O lema a seguir, cuja demonstração pode ser consultada em [18] (página 74), será utilizado na prova do principal teorema deste capítulo.

Lema 2.3. *Sejam*

$$Q := y_k' = \sum_{j=1}^{m} Q_{k,j} y_j, \quad k \in [1,m],$$

um sistema de equações diferenciais lineares homogêneo regular e $f \not\equiv 0$ uma solução de Q de posto $\rho < m$. Então podemos selecionar ρ coordenadas $f_{i_1}, \ldots, f_{i_\rho}$ de f satisfazendo as seguintes propriedades:

(a) $f_{i_1}, \ldots, f_{i_\rho}$ *são linearmente independentes sobre $K(z)$;*

(b) o ρ-vetor f^0 formado por essas coordenadas é uma solução de um sistema de equações diferenciais lineares homogêneo

$$Q^0 := y'_{i_k} = \sum_{j=1}^{\rho} Q^0_{k,j} y_{i_j}, \quad k \in [1, \rho],$$

com coeficientes $Q^0_{k,j} \in K(z)$.

O lema a seguir estabelece a existência de polinômios e, consequentemente, de uma forma linear a partir de um conjunto de E-funções. Além disso, este resultado estabelece limitantes superiores para casa dos algébricos dos coeficientes desses polinômios e para a casa dos algébricos dos coeficientes da forma linear associada.

Lema 2.4. *Sejam $m \geq 2$, $f_1, \ldots, f_m$, E-funções, $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Então existem m polinômios*

$$P_k = P_k(z) = \sum_{l=0}^{n} b_{k,l} z^l, \quad k \in [1, m], \tag{2.8}$$

com as seguintes propriedades:

(i) os coeficientes $b_{k,l} \in \mathcal{O}_K$ não são todos nulos e satisfazem

$$\overline{|b_{k,l}|} = O(n^{(1+\varepsilon)n}), \quad k \in [1, m] \quad e \quad l \in [0, n], \tag{2.9}$$

quando $n \to \infty$;

(ii) a forma linear

$$R = \sum_{k=1}^{m} P_k(z) f_k(z) = \sum_{\nu=\tau}^{\infty} a_\nu \frac{z^\nu}{\nu!} \tag{2.10}$$

satisfaz a propriedade

$$\operatorname{ord} R \geq \tau, \quad \tau = m(n+1) - \lfloor \varepsilon n \rfloor - 1; \tag{2.11}$$

(iii) os coeficientes da série (2.10) satisfazem a condição

$$\overline{|a_\nu|} = \nu^{\varepsilon \nu} O(n^n), \quad \nu \geq \tau \tag{2.12}$$

para todo n suficientemente grande.

Prova. Denotamos

$$f_k(z) = \sum_{v=0}^{\infty} c_{k,v} \frac{z^v}{v!}, \quad k \in [1,m] \tag{2.13}$$

e

$$P_k(z) = n! \sum_{v=0}^{n} B_{k,v} \frac{z^v}{v!}, \quad k \in [1,m], \tag{2.14}$$

onde os $B_{k,v}$ são coeficientes em $\mathcal{O}_K$, para $k \in [1,m]$ e $v \in [1,n]$. Então $P_k(z) \in \mathcal{O}_K[z]$. Dessa forma, temos

$$P_k(z) f_k(z) = n! \sum_{v=0}^{\infty} q_{k,v} \frac{z^v}{v!}, \quad k \in [1,m], \tag{2.15}$$

onde

$$q_{k,v} = \sum_{\rho=0}^{\min(n,v)} \binom{v}{\rho} B_{k,\rho} c_{k,v-\rho}. \tag{2.16}$$

De fato, usando as equações (2.13) e (2.14), temos

$$\begin{aligned}
P_k(z) f_k(z) &= \left(n! \sum_{i=0}^{n} B_{k,i} \frac{z^i}{i!} \right) \left(\sum_{v=0}^{\infty} c_{k,v} \frac{z^v}{v!} \right) \\
&= \sum_{v=0}^{\infty} n! c_{k,v} \left(\sum_{i=0}^{n} B_{k,i} \frac{z^i}{i!} \right) \frac{z^v}{v!} \\
&= \sum_{v=0}^{\infty} n! c_{k,v} \sum_{i=0}^{n} \binom{v+i}{i} B_{k,i} \frac{z^{v+i}}{(v+i)!} \\
&= n! \sum_{\tilde{v}=0}^{\infty} \sum_{\rho=0}^{\min(n,\tilde{v})} \binom{\tilde{v}}{\rho} c_{k,\tilde{v}-\rho} B_{k,\rho} \frac{z^{\tilde{v}}}{\tilde{v}!}.
\end{aligned}$$

Usando a primeira igualdade (2.10) e a igualdade (2.15), obtemos

$$R = \sum_{k=1}^{m} P_k(z) f_k(z) = \sum_{k=1}^{m} n! \sum_{v=0}^{\infty} q_{k,v} \frac{z^v}{v!} = \sum_{v=0}^{\infty} n! \sum_{k=1}^{m} q_{k,v} \frac{z^v}{v!} = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \frac{z^v}{v!},$$

onde

$$a_v = n! \sum_{k=1}^{m} q_{k,v}, \quad v = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.17}$$

Da definição de E-função existe uma sequência $\{d_\nu\}$, $d_\nu \in \mathbb{N}$, tal que

$$d_\nu c_{k,l} \in \mathcal{O}_K, \quad l \in [0,\nu], \quad k \in [1,m], \quad \nu \in \mathbb{N},$$

onde

$$d_\nu = O(\nu^{\varepsilon_1 \nu}), \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon^2}{18m^2}, \quad \nu = 0,1,2,\ldots \tag{2.18}$$

e

$$\overline{|c_{k,\nu}|} = O(\nu^{\varepsilon_1 \nu}), \quad k \in [1,m], \quad \nu = 0,1,2,\ldots. \tag{2.19}$$

Para mostrar que a desigualdade (2.11) é válida, precisamos mostrar a validade das seguintes equações

$$\frac{d_\nu a_\nu}{n!} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\rho=0}^{\min(n,\nu)} \binom{\nu}{\rho} d_\nu c_{k,\nu-\rho} B_{k,\rho} = 0, \quad \nu \in [0,\tau-1]. \tag{2.20}$$

As igualdades (2.20) formam um sistema de τ equações lineares homogêneas nas $(n+1)m$ incógnitas $B_{k,\rho}$. Usando as igualdades (2.18) e (2.19), obtemos que os coeficientes do sistema (2.20) satisfazem a condição

$$\begin{aligned}
\overline{\left|\binom{\nu}{\rho} d_\nu c_{k,\nu-\rho}\right|} &\le 2^\nu \,\overline{|d_\nu|}\,\overline{|c_{k,\nu-\rho}|} \\
&= 2^\nu O(\nu^{\varepsilon_1 \nu}) O(\nu^{\varepsilon_1 \nu}) \\
&= 2^\nu O(\nu^{2\varepsilon_1 \nu}) \\
&= 2^\nu O(\nu^{\frac{\varepsilon^2}{9m^2}\nu}) \\
&= O(\nu^{(\frac{\varepsilon^2}{9m^2}+1)\nu}) \\
&= O(\nu^{\frac{\varepsilon^2 \nu}{8m^2}}) \\
&= O((mn+m)^{(n+1)m\varepsilon^2/8m^2}) \\
&= O(n^{\frac{\varepsilon^2 n}{3m}}).
\end{aligned}$$

Usando a Proposição 1.1 com os valores

$$p = (n+1)m - \lfloor \varepsilon n \rfloor - 1, \quad q = (n+1)m, \quad M = \max_{\nu,k,\rho} \overline{\left|\binom{\nu}{\rho} d_\nu c_{k,\nu-\rho}\right|} = O(n^{\frac{n\varepsilon^2}{3m}}),$$

temos que existem $B_{k,\nu} \in \mathcal{O}_K$, não são todos nulos, que satisfazem

$$
\begin{aligned}
\overline{|B_{k,v}|} < c(cqM)^{\frac{p}{q-p}} &= c(cm(n+1)O(n^{\frac{\varepsilon^2}{3m}n}))^{\frac{2m}{\varepsilon}} \\
&= O(n^{\varepsilon n}), \quad v \in [0,n], \quad k \in [1,m],
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

visto que

$$
\frac{p}{q-p} = \frac{(n+1)m - \lfloor \varepsilon n \rfloor - 1}{\lfloor \varepsilon n \rfloor + 1} < \frac{(n+1)m}{\varepsilon n} \leq \frac{2m}{\varepsilon}.
$$

Como os coeficientes $b_{k,v}$ do polinômio (2.8) são iguais a $(n!/v!)B_{k,v}$, usando a igualdade (2.14), o limitante (2.21) e o fato de $n! \leq n^n$, obtemos

$$
\overline{|b_{k,v}|} = \overline{\left|\frac{n!}{v!} B_{k,v}\right|} \leq n^n \overline{|B_{k,v}|} = n^n\, O(n^{\varepsilon n}) = O(n^{(1+\varepsilon)n}).
$$

Assim, concluímos a prova do item (i). Agora, vamos provar do item (iii). Usando as igualdades (2.16) e (2.17) e tendo em vista os limitantes (2.19) e (2.21), temos

$$
\begin{aligned}
\overline{|a_v|} = n! \overline{\left|\sum_{k=1}^{m} q_{k,v}\right|} &= n! \overline{\left|\sum_{k=1}^{m} \sum_{\rho=0}^{\min(n,v)} \binom{v}{\rho} B_{k,\rho} c_{k,v-\rho}\right|} \\
&= m2^v O(n^{\varepsilon n}) O(v^{\frac{\varepsilon^2 v}{18m^2}}) O(n^n) \\
&= v^{\varepsilon v} O(n^n), \quad v \geq \tau.
\end{aligned}
$$

□

Seja R_1 a forma linear construída no Lema 2.4. Se $\alpha \in \mathbb{C}$ e $R_{k+1}(z) = TR_k'(z)$, $k = 1,2,\ldots,$ com $\alpha T(\alpha) \neq 0$, então usando o Lema 1.7 concluímos que o conjunto das formas lineares

$$
R_k(\alpha), \quad k \in [1, m+t], \quad t = q \cdot \frac{(m-1)m}{2} + \lfloor \varepsilon n \rfloor + p,
\tag{2.22}
$$

tem m formas linearmente independentes.

Antes de enunciar o próximo lema, introduziremos a notação de majorante e provaremos alguns resultados básicos que seguem diretamente da notação. Considere as séries de potência

$$
u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k \quad \text{e} \quad v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k,
$$

onde $v_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se $u_k \in \mathbb{C}$ a notação

$$
u \ll v
$$

indica que $|u_k| \leq v_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por outro lado, quando $u_k \in K$ a notação

$$u \lll v$$

indica que $\overline{|u_k|} \leq v_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Observe que existem constantes positivas γ e C tais que

$$T(z) \lll \gamma(1+z)^C \quad \text{e} \quad T(z)Q_{i,j}(z) \lll \gamma(1+z)^C, \quad i,j \in [1,m]. \tag{2.23}$$

De fato, basta tomar

$$C = \max_{i,j}(\partial(T), \partial(TQ_{i,j})) \quad \text{e} \quad \gamma = \max_{i,j,m,l}(\overline{|T_l|}, \overline{|Q_{i,j,m}|}),$$

onde $Q_{i,j,m}$ são coeficientes do polinômio $T(z)Q_{i,j}(z)$ e T_l são os coeficientes do polinômio $T(z)$.

Lema 2.5. *Sejam $m \geq 2$, $f_1, \ldots, f_m$, E-funções coordenadas de uma solução $f(z)$ do sistema de equações diferenciais lineares (1.9) que são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$, e $\alpha \in K$. Sejam R_1 uma forma linear como a construída no Lema 2.4 para qualquer $n \geq n_0$, com ε substituído por $\varepsilon_1 = \varepsilon/6(m+1)$ para algum $\varepsilon \in (0,1)$, e seja t_1 o número obtido de t ao substituir ε por ε_1 em (2.22). Então as seguintes cotas para as formas lineares $R_k(z)$ e seus coeficientes são válidas as relações*

$$|R_k(\alpha)| = O(n^{-(m-1-\varepsilon/2)n}), \quad k \leq m+t_1, \tag{2.24}$$

e

$$\overline{|P_{k,i}(\alpha)|} = O(n^{(1+\varepsilon/2)n}), \quad k \leq m+t_1, \quad i \in [1,m]. \tag{2.25}$$

Prova. Da majoração (2.23) temos

$$T(z) \ll c(1+z)^q, \quad T(z)Q_{k,i} \ll c(1+z)^q, \tag{2.26}$$

onde $c > 0$ é uma constante que não depende de n e q é o máximo entre os graus dos polinômios T e $TQ_{k,i}$. Seja

$$R_1 = \sum_{i=1}^{m} P_{1,i}(z) f_i(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \frac{z^v}{v!}$$

a forma linear construída no Lema 2.4, segue da desigualdade (2.11) e da ordem (2.12) que

$$a_\nu = 0, \quad \nu \in [0, \tau - 1]$$

e

$$|a_\nu| = \nu^{\varepsilon_1 \nu} O(n^n), \quad \nu \leq \tau,$$

onde

$$\tau = m(n+1) - \lfloor \varepsilon_1 n \rfloor - 1.$$

Afirmamos que

$$P_{j,k}(z) \lll O(n^{(1+\varepsilon)n}) \gamma^{j-1} (1+z)^{n-1+(j-1)C} \prod_{i=0}^{j-2} (iC + m + n - 1), \quad k \in [1, m], \tag{2.27}$$

com $j \in \mathbb{N}$, onde $P_{j,k}$ é o polinômio associado a forma R_j, obtida recursivamente a partir da forma R construída no Lema 2.4. Quando $j = 1$, temos

$$P_{1,k} = P_k = \sum_{l=0}^{n} b_{k,l} z^l.$$

Usando a ordem (2.9), temos

$$b_{1,l} \leq \max_l \lceil b_{1,l} \rceil = O(n^{(1+\varepsilon)n}),$$

e, portanto,

$$P_{1,k}(z) \lll O(n^{(1+\varepsilon)n})(1+z)^n,$$

visto que para $j = 1$ o produtório do lado direito é igual a 1. Assim, concluímos que o majorante (2.27) vale para $j = 1$. Agora, queremos mostrar que se a majoração (2.27) é válida para $j > 1$, então é válida para $j + 1$. Com efeito, usando a ordem (2.9) e as majorações (2.23) e (2.27), obtemos

$$\begin{aligned} P_{j+1,k}(z) &= T(z) \frac{d}{dz} P_{j,k} + \sum_{l=1}^{m} P_{j,l} T(z) Q_{l,k}(z) \\ &\lll \gamma (1+z)^C \frac{d}{dz} P_{j,k} + \gamma (1+z)^C \sum_{l=1}^{m} P_{j,l} \\ &\lll \left[(m + \frac{d}{dz})(1+z)^{n-1+(j-1)C} \right] \gamma (1+z)^C O(n^{(1+\varepsilon)n}) \gamma^{j-1} \prod_{i=0}^{j-2} (iC + m + n - 1) \end{aligned}$$

$$\lll \gamma^j O(n^{(1+\varepsilon)n})(1+z)^{n-1+jC}\prod_{i=0}^{j-1}(iC+m+n-1).$$

Assim, por indução, concluímos que a majoração (2.27) é válida para todos $j,k \in \mathbb{N}$. Na última majoração, usamos o seguinte fato

$$\begin{aligned}\left(m+\frac{d}{dz}\right)(1+z)^{n-1+(j-1)C} &\lll \left(m+n-1+(j-1)C+\frac{d}{dz}\right)(1+z)^{n-1+(j-1)C}\\ &\lll (m+n-1+(j-1)C)(1+z)^{n-1+(j-1)C}.\end{aligned}$$

Agora, considerando a série de potência

$$R(z)=\sum_{\nu=\tau}^{\infty} a_\nu \frac{z^\nu}{\nu!},$$

contruída no Lema 2.4, denotamos

$$R^*(z):=\sum_{\nu=\tau}^{\infty}|a_\nu|\frac{z^\nu}{\nu!}.$$

Afirmamos que

$$R_k(z)\ll \gamma^{k-1}(1+z)^{(k-1)C}\prod_{\nu=0}^{k-2}\left(\nu C+\frac{d}{dz}\right)R^*(z). \tag{2.28}$$

De fato, para $k=1$, temos

$$\sum_{\nu=\tau}^{\infty} a_\nu\frac{z^\nu}{\nu!}=R(z)=R_1(z)\ll R^*(z)=\sum_{\nu=\tau}^{\infty}|a_\nu|\frac{z^\nu}{\nu!}=\sum_{\nu=\tau}^{\infty}\nu^{\varepsilon_1\nu}\frac{z^\nu}{\nu!}O(n^n). \tag{2.29}$$

Mostraremos que se a majoração (2.28) é válida para $k>1$, então vale para $k+1$. Com efeito,

$$\begin{aligned}R_{k+1}(z)=T\frac{d}{dz}R_k(z)\ll \gamma(1+z)^C\frac{d}{dz}&\left[\gamma^{k-1}(1+z)^{(k-1)C}\prod_{\nu=0}^{k-2}\left(\nu C+\frac{d}{dz}\right)\right]R^*(z)\\ &=\gamma^k(1+z)^{kC-1}\left[(k-1)C+(1+z)\frac{d}{dz}\right]\prod_{\nu=0}^{k-2}\left(\nu C+\frac{d}{dz}\right)R^*(z)\\ &\ll \gamma^k(1+z)^{kC}\left[(k-1)C+\frac{d}{dz}\right]\prod_{\nu=0}^{k-2}\left(\nu C+\frac{d}{dz}\right)R^*(z),\end{aligned}$$

a última majoração segue da seguinte

$$(1+z)^{(k-1)C-1}\ll(1+z)^{(k-1)C},$$

visto que
$$\binom{kC-C-1}{r} \leq \binom{kC-C}{r},$$
para todo $r \in [0,(k-1)C-1]$. Assim, concluímos a validade de (2.28) para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, das majorações (2.27) e (2.28), obtemos

$$R_{k+1}(z) \ll c^k (1+z)^{kq} \prod_{v=0}^{k-1} \left(vq + \frac{d}{dz}\right) R_1^*(z), \tag{2.30}$$
$$P_{k+1,i}(z) \ll c^k (1+z)^{kq+n} \prod_{v=0}^{k-1} (vq+m+n) O(n^{(1+\varepsilon_1)n}),\ i \in [1,m],\ k = 0,1,\ldots. \tag{2.31}$$

A primeira dessas relações é verdadeira, se os coeficientes dos polinômios $P_{k+1,i}(z)$ são substituídos pelos seus conjugados em K com qualquer índice fixo.

Agora, suponhamos que k satisfaz a desigualdade $k \leq m + t_1 = \varepsilon n + O(1)$. Então a majoração (2.28) implica o limitante (2.25). Além disso, usando as majorações (2.29) e (2.30), obtemos

$$\begin{aligned}
\prod_{v=0}^{k-1} \left(vq + \frac{d}{dz}\right) R_1^*(z) &\ll O(n^{2\varepsilon_1 n}) \left(1 + \frac{d}{dz}\right)^k R_1^*(z) \\
&= O(n^{(1+2\varepsilon_1)n}) \left(1 + \frac{d}{dz}\right)^k \sum_{v=\tau}^{\infty} v^{\varepsilon_1 v} \frac{z^v}{v!} \\
&= O(n^{(1+2\varepsilon_1)n}) \sum_{\rho=0}^{k} \sum_{v=\tau}^{\infty} v^{\varepsilon_1 v} \frac{z^{v-\rho}}{(v-\rho)!} \\
&\ll O(n^{(1+2\varepsilon_1)n}) 2^k \sum_{v=\tau-k}^{\infty} (v+k)^{\varepsilon_1 (v+k)} \frac{z^v}{v!} \\
&\ll O(n^{(1+2\varepsilon_1)n}) 2^k \sum_{v=\tau-k}^{\infty} (2v)^{2\varepsilon_1 v} \frac{z^v}{v!},
\end{aligned}$$

visto que $\tau \geq 2k$, obtemos $v \geq \tau - k \geq k$, para n suficientemente grande. Usando a ordem do primeiro termo do valor estimado da última série do lado direito acima, para $z = \alpha \in K$, obtemos
$$2^k \sum_{v=\tau-k}^{\infty} (2v)^{2\varepsilon_1 v} \frac{\alpha^v}{v!} = O(n^{3\varepsilon_1 mn - mn}).$$

Consequentemente,

$$\left[\prod_{v=0}^{n-1} \left(vq + \frac{d}{dz}\right) R_1^*(z)\right]_{z=\alpha} = O(n^{(1+2\varepsilon_1)n}) O(n^{3\varepsilon_1 mn - mn})$$

$$= O(n^{-(m-1-(2+3m)\varepsilon_1)n}). \tag{2.32}$$

Assim, usando majoração (2.28) e a ordem (2.32), obtemos o limitante (2.24). □

Lema 2.6. *Seja $m \geq 2$ e sejam $f_1(z), \dots, f_m(z)$, E-funções que formam uma solução do sistema (1.9) que são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$. Seja $\xi \in K$ tal que $\xi T(\xi) \neq 0$. Então para qualquer $\varepsilon \in (0,1)$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, onde n_0 foi definido em (1.57), existe um conjunto com m formas lineares linearmente independentes nos números $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$, isto é,*

$$L_k = \sum_{i=1}^{m} a_{k,i} f_i(\xi), \quad k \in [1,m], \quad e \quad a_{k,i} \in \mathcal{O}_K$$

tal que

$$L_k = O(n^{-(m-1-\varepsilon)n}), \quad k \in [1,m], \tag{2.33}$$

e

$$\boxed{a_{k,i}} = O(n^{(1+\varepsilon)n}), \quad k,\ i \in [1,m], \tag{2.34}$$

onde o limitante (2.33) permanece válido se o número ξ e todos os coeficientes de $R_k(z)$ forem substituídos por seus conjugados no corpo K_i conjugado a K, para qualquer $i \in [1,h]$.

Prova. Sejam n e ε nas condições deste lema e seja $R_1(z)$ a forma construída de acordo com o Lema 2.4, onde ε é substituído por $\varepsilon_1/(6(m+1))$. Considere as formas $R_k(z)$, $k = 1,2,\dots,$, com $R_k = TR'_{k-1}$. Nessas condições, o Lema 1.7, com t substituído por

$$t_1 = \frac{p+q(m-1)m}{2} + \lfloor \varepsilon_1 n \rfloor,$$

assegura que no conjunto das formas lineares

$$R_k(\xi) = \sum_{i=1}^{m} P_{k,i}(\xi) f_i(\xi), \quad k \in [1, m+t_1],$$

existem m formas linearmente independentes. Usando o Lema 2.5, essas formas satisfazem (2.24) e (2.25).

Denotemos por

$$R_s(\xi) = \sum_{i=1}^{m} P_{s,i}(\xi) f_i(\xi), \quad s = s_1, \dots, s_m \tag{2.35}$$

as m formas linearmente independentes. Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $a \in \mathcal{O}_K$. Das equações do Lema 2.4 e da igualdade (1.13), temos

$$\deg P_{k,i}(z) \leq n + (k-1)q, \quad i \in [1,m], \quad \text{e} \quad k = 1,2,\dots.$$

Assim, se denotarmos

$$g = n + q(m + t_1 - 1) = O(n), \tag{2.36}$$

obtemos

$$a_{k,i} = a^g P_{s_k,i}(\xi) \in \mathcal{O}_K, \quad i,k \in [1,m],$$

visto que os coeficientes de $P_{s_k,i}$ são números em $\mathcal{O}_K$. Por fim, denotando

$$L_k = a^g R_{s_k}(\xi) = \sum_{i=1}^{m} a_{k,i} f_i(\xi), \quad k \in [1,m],$$

tendo em vista os limitantes (2.24), (2.25) e (2.36) e que as formas acima são linearmente independentes, obtemos (2.33) e (2.34). Isto conclui a prova do lema. □

2.4 A independência linear de valores de E-funções

Nesta seção α denotará um número algébrico não-nulo pertencente a K. Nosso objetivo é expor condições necessárias para que os m valores

$$f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$$

sejam linearmente independentes sobre K, onde as funções $f_1(z), \dots, f_m(z)$, são E-funções coordenadas da solução $f(z)$ do sistema Q apresentado em (1.9). O primeiro resultado desta seção trata do caso em que $T(\alpha) = 0$, onde T é o menor denominador comum dos m^2 coeficientes $Q_{k,i}$ do sistema Q.

Proposição 2.2. *Sejam $f_1(z), \dots, f_m(z)$, E-funções coordenadas de uma solução $f(z)$ do sistema Q apresentado em (1.9) e α um número algébrico não-nulo pertencente a K tal que $T(\alpha) = 0$, onde $T \in \mathbb{C}[z]$ é o menor denominador comum dos m^2 coeficientes $Q_{k,i}$ do sistema Q. Então os m valores de funções*

$$f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$$

são linearmente dependentes sobre K.

Prova. Do sistema Q definido em (1.9), obtemos

$$0 = T(\alpha) f_i'(\alpha) = \sum_{k=1}^{m} \lim_{z \to \alpha} (T(z) Q_{i,k}(z)) \cdot f_k(\alpha), \quad i \in [1,m].$$

Usando a definição de T, isto é, o menor múltiplo comum dos denominadores das m^2 funções racionais $Q_{i,k}$, $i,k \in [1,m]$, sabemos que pelo menos um dos coeficientes

$$\lim_{z\to\alpha} T(z)Q_{i,k}(z), \quad i,k \in [1,m]$$

é diferente de zero, visto que $T(z) = (z-\alpha)^k R(z)$ com $k > 1$, onde k é a maior multiplicidade de α nos denominadores dos m^2 coeficientes $Q_{i,k}(z)$ e $R(z) \in \mathbb{C}[z]$. Como todos estes coeficientes pertence a K, concluímos que $f_1(\alpha),\dots,f_m(\alpha)$ são linearmente dependentes sobre K. □

Agora, uma vez provada a Proposição 2.2, analisaremos o caso em que

$$\alpha \in K, \quad \alpha \neq 0 \ \text{ e } \ T(\alpha) \neq 0. \tag{2.37}$$

Além das condições (2.37), assumiremos que

$$m \geq 2, \quad \rho = m \quad e \quad \rho(\alpha) = r \in [1, m-1]. \tag{2.38}$$

Proposição 2.3. *Seja Q o sistema definido em (1.9) e $T = T(z)$ o menor denominador comum das m^2 funções racionais $Q_{i,k}$, $i,k \in [1,m]$. Se $T(\alpha) \neq 0$, então Q é um sistema regular em $z = \alpha$.*

O lema que apresentaremos a seguir será usado na prova do principal resultado deste capítulo a saber o Teorema 2.1. Este resultado estabelece uma cota inferior para o posto de um conjunto finito de valores de E-funções em um ponto algébrico.

Lema 2.7. *Sejam $K = \mathbb{Q}(\theta)$ um corpo de número algébrico de grau h, $m \geq 2$ e $\alpha \in K$, com $\alpha T(\alpha) \neq 0$ e $f_1(z),\dots,f_m(z)$ E-funções coordenadas de uma solução $f(z) \not\equiv 0$ do sistema*

$$Q := y_k'(z) = \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i} y_i(z), \quad k \in [1,m]$$

com $Q_{k,i} \in K(z)$, $i,k \in [1,m]$. Se as funções $f_1(z),\dots,f_m(z)$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$, isto é, o posto $\rho = m$, então

$$\rho(\alpha) \geq \begin{cases} \dfrac{\rho}{h}, \text{ se } \theta \in \mathbb{R} \\[2ex] \dfrac{2\rho}{h}, \text{ se } \theta \notin \mathbb{R} \end{cases},$$

onde $\rho(\alpha)$ *é o posto do conjunto* $\{f_1(\alpha),\dots,f_m(\alpha)\}$.

Prova. A Proposição 2.3 assegura que $z=\alpha$ não é um ponto singular do sistema. Isto implica que para algum $i\in[1,m]$, $f_i(\alpha)$ é não nulo. De fato, suponha, por contradição, que $f(\alpha)=(f_1(\alpha),\dots,f_m(\alpha))=(0,\dots,0)$, substituindo no sistema Q, obtemos $f'(\alpha)=0$. Analogamente, obtemos

$$Q' : y_k''(z)=\sum_{i=1}^{m}(Q_{ik}y_i'(z)+Q_{ik}'y_i(z)) \quad\Longrightarrow\quad f''(\alpha)=(0,\dots,0).$$

Assim, indutivamente, obtemos

$$0=f_i(\alpha)=f_i'(\alpha)=\cdots=f_i^{(j)}(\alpha),\quad i\in[1,m] \tag{2.39}$$

para todo $j\in\mathbb{N}$.

Por outro lado, sendo $f_i(z)$ E-função e, portanto, uma função inteira, para $i\in[1,m]$, temos

$$f_i(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_i^{(k)}(\alpha)}{k!}(z-\alpha)^k,\quad i\in[1,m]. \tag{2.40}$$

Assim, substituindo as igualdades (2.39) na equação (2.40), obtemos que $f_i(z)\equiv 0$, para todo $i\in[1,m]$. Uma contradição, pois, por hipótese, $f(z)$ é uma solução não-trivial. Logo, $f(\alpha)\neq(0,\dots,0)$ e, portanto, $\rho(\alpha)\geq 1$. Note que se $\rho(\alpha)=m$, então o lema está provado. Suponha que $1\leq\rho(\alpha)<m$. Denote $r=\rho(\alpha)$. Então os números

$$f_1(\alpha),\dots,f_m(\alpha) \tag{2.41}$$

estão conectados por exatamente $m-r$ equações lineares homogêneas

$$L_k^0=\sum_{i=1}^{m}c_{k,i}f_i(\alpha)=0,\quad k\in[r+1,m] \text{ e } c_{k,i}\in\mathcal{O}_K, \tag{2.42}$$

onde $L_{r+1}^0,\dots,L_m^0$ são formas lineares nos números (2.41) as quais são linearmente independentes sobre K. De fato, suponha, sem perda de generalidade, que $f_1(\alpha),\dots,f_r(\alpha)$ são linearmente independentes sobre K. Então para todo $k\in[r+1,m]$ existem $c_{k,1},\dots,c_{k,m}$ não todos nulos de modo que a igualdade (2.42) é válida. Em particular, vale o caso em que os coeficientes $c_{k,i}$, $i\in[1,m]$ de L_k^0 satisfazem $c_{k,k}\neq 0$, $c_{k,i}=0$ quando $i\in[k,m]$.

Denotemos

$$c=\max_{k,i}\overline{\left|c_{k,i}\right|}. \tag{2.43}$$

O Lema 2.6 assegura que para qualquer $\varepsilon \in (0,1)$ e qualquer $n \geq n_0$ (ver definição de n_0 em (1.57)) existem m formas lineares linearmente independentes

$$L_k = \sum_{i=1}^{m} a_{k,i} f_i(\alpha)$$

com $a_{k,i} \in \mathcal{O}_K$ e $k \in [1,m]$ nos números (2.41) tais que

$$L_k = O(n^{-(m-1-\varepsilon/2)n}) \tag{2.44}$$

e

$$\overline{|a_{k,i}|} = O(n^{(1+\varepsilon/2)n}), \quad k,i \in [1,m] \tag{2.45}$$

Assim, é possível escolher r dessas formas lineares que juntamente com as formas (2.42) são linearmente independentes. Suponha que essas r formas são

$$L_k = \sum_{i=1}^{m} a_{k,i} f_i(\alpha), \quad k \in [1,r]. \tag{2.46}$$

Denotamos por δ o determinante da matriz S $(m \times m)$ dos coeficientes das formas (2.42) e (2.46). Como as entradas dessa matriz pertencem a $\mathcal{O}_K$, concluímos que $\delta \in \mathcal{O}_K$. Denotamos por $\delta_{i,k}$ o cofator da entrada da k-ésima linha e i-ésima coluna de δ. Se multiplicarmos ambos os lados das igualdades (2.42) e (2.46) por $\delta_{k,j}$ com $j \in [1,m]$ fixado e somamos as equações desta forma para $k \in [1,m]$, obtemos, das formas lineares numéricas (2.42), a seguinte igualdade

$$\delta f_j(\alpha) = \sum_{k=1}^{r} \delta_{k,j} L_k(\alpha), \quad j \in [1,m]. \tag{2.47}$$

Usando a igualdade (2.43) e a ordem (2.45), concluímos que

$$|\delta_{ki}| = m^m c^{m-r} O(n^{(1+\varepsilon/2)n(r-1)}) = O(n^{(1+\varepsilon)(r-1)n}), \quad k \in [1,r], \quad \text{e} \quad i \in [1,m]. \tag{2.48}$$

Analogamente,

$$\overline{|\delta|} = O(n^{(1+\varepsilon)rn}). \tag{2.49}$$

Escolhendo j tal que $f_j(\alpha) \neq 0$ da j-ésima equação da forma (2.47) e das ordens (2.44) e (2.48), obtemos

$$|\delta| \leq \frac{1}{|f_j(\alpha)|} \sum_{k=1}^{r} |\delta_{kj}||L_k(\alpha)| = O(n^{(1+\varepsilon)(r-1)n}) O(n^{-(m-1-\varepsilon/2)n}) = O(n^{((1+\varepsilon)r-\varepsilon/2-m)n}),$$

assim, obtemos

$$\delta = O(n^{((1+\varepsilon)r-m)n}). \tag{2.50}$$

Usando as ordens (2.49) e (2.50) obtemos o limitante

$$\mathcal{N}(\delta) = O(n^{((1+\varepsilon)rh-m)n}) \tag{2.51}$$

onde $\mathcal{N}(\delta)$ é a norma de um elemento $\delta \in \mathcal{O}_K$. Mas a norma de um número em $\mathcal{O}_K$ pertence a $\mathbb{Z}$. Como as formas (2.42) e (2.46) são linearmente independentes, temos $\delta \neq 0$ e consequentemente $\mathcal{N}(\delta) \neq 0$. Portanto,

$$|\mathcal{N}(\delta)| \geq 1. \tag{2.52}$$

Assim, da ordem (2.51) e da desigualdade (2.52), obtemos a desigualdade

$$(1+\varepsilon)rh - m \geq 0,$$

o qual, sendo ε arbitrário, implica que $rh - m \geq 0$, isto é, $\rho(\alpha) \geq m/h$.

Agora, suponha que $\theta \notin \mathbb{R}$. Então os conjugados de $\delta \in K$ inclui um conjugado $\overline{\delta}$ tal que $|\overline{\delta}| = |\delta|$. Consequentemente, ao invés de (2.51), dos limitantes (2.49) e (2.50), obtemos

$$\mathcal{N}(\delta) = O(n^{((1+\varepsilon)rh-2m)n}),$$

e, como desejado, concluímos que $\rho(\alpha) \geq 2m/h$. □

Uma prova deste lema pode ser consultada em [26]. A demonstração dada anteriormente foi apresentada como aparece em [25].

Corolário 2.1. *Nas condições do resultado anterior, se K é o corpo dos números racionais ($n = 1$) ou um corpo de números quadrático imaginário ($n = 2$), então $\rho(\alpha) = \rho = m$.*

O resultado a seguir generaliza o Lema 2.7 e foi provado por Shidlovskii em 1962, ver [24]. Uma versão desse resultado pode ser encontrada no Capítulo 5 de [18] e no Capítulo 3 de [25].

Teorema 2.1. *Sejam $K = \mathbb{Q}(\theta)$ um corpo de números algébricos de grau n sobre $\mathbb{Q}$ e $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ as E-funções coordenadas de uma solução $f(z) \not\equiv 0$ do sistema Q apresentado em (1.9). Sejam α um número algébrico em K tal que $\alpha T(\alpha) \neq 0$, ρ e $\rho(\alpha)$ os postos* *de* $f(z)$ *sobre* $\mathbb{C}(z)$ *e* $f(\alpha)$ *sobre* K*, respectivamente. Então* $\rho(\alpha)$ *satisfaz a desigualdade*

$$\rho(\alpha) \geq \begin{cases} \dfrac{\rho}{n}, \text{ se } \theta \in \mathbb{R} \\ \\ \dfrac{2\rho}{n}, \text{ se } \theta \notin \mathbb{R} \end{cases} .$$

Prova. Afirmamos que $T(\alpha) \neq 0$ implica que $z = \alpha$ é um ponto regular do sistema Q, isto é, as coordenadas de todas as soluções de Q são regulares relativas a $K\langle z-\alpha\rangle$. Com efeito, suponha que para algum $Q_{i,k}$ tenha um polo em α. Então denotando

$$Q_{i,k}(z) = \frac{A_{i,k}(z)}{B_{i,k}(z)}, \quad i,k \in [1,m],$$

onde $A_{i,k}, B_{i,k} \in K[z]$. Assim, $B_{i,k}(\alpha) = 0$ e consequentemente, $T(\alpha) = 0$, uma contradição. Logo, Q é um sistema regular. Caso $\rho = m$ o resultado segue diretamente do Lema 2.7. Caso $\rho < m$, o Lema 2.3 assegura ser possível selecionar ρ componentes $f_{i_1}(z), \ldots, f_{i_\rho}(z)$ de $f(z)$ com as seguintes propriedades:

(i) essas ρ componentes são linearmente independentes sobre $K(z)$;

(ii) essas componentes satisfazem um novo sistema Q^0 de equações diferenciais lineares com coeficientes $Q^0_{i,k}$ em $K(z)$ que são também regulares em $z = \alpha$.

Agora, é suficiente aplicar o Lema 2.7 no ρ-vetor $f^0(z)$ com as componentes $f_{i_1}(z), \ldots, f_{i_\rho}(z)$ de $f(z)$ de modo que m é substituído por ρ, e a afirmação segue imediatamente. □

Um resultado análogo ao Teorema 2.1 pode ser provado quando Q^* é um sistema de equações diferenciais lineares não-homogêneo.

Capítulo 3

Teoremas Fundamentais das E-funções

Este capítulo esta dividido em duas seções. A primeira está destinada a prova do principal teorema deste trabalho. A segunda tem como objetivo apresentar algumas de suas consequências entre as quais o Segundo Teorema Fundamental e o Teorema de Lindemann-Weierstrass.

3.1 O Primeiro Teorema Fundamental

Em 1929, C. Siegel [27], apresenta uma versão do Primeiro Teorema Fundamental. O método desenvolvido por Siegel apresenta uma condição de normalidade de difícil verificação. Tal condição, possivelmente, contribuiu para o não surgimento de novos trabalhos usando o método de Siegel nas quase três décadas que se seguiram a sua publicação. A seguir enunciaremos a primeira versão do Primeiro Teorema Fundamental como aparece no livro *Transcendental Numbers* [26].

Teorema (Primeira Versão do Teorema Fundamental - Siegel)**.** *Sejam $E_1,\dots,E_m$ E-funções que forma uma solução de um sistema de equações diferenciais homogêneo de primeira ordem, cujos coeficientes são funções racionais $Q_{k,l}$ que tem como coeficientes números algébricos, e suponha que os μ_v produtos das potências*

$$E_1^{v_1}\cdots E_m^{v_m}, \quad v_1+\cdots+v_m \leq v$$

formam um sistema normal para todo $v = 1,2,\dots$. Se α é qualquer número algébrico não-nulo que não é polo de $Q_{k,l}$, então os m números $E_1(\alpha),\dots,E_m(\alpha)$ não estão relacionados por uma equação algébrica com coeficientes algébricos.

Munido deste resultado, C. Siegel, prova que a função de Bessel é uma E-função.

Antes de enunciarmos e provarmos a versão do Primeiro Teorema Fundamental, devida a

Shidloviskii, apresentaremos as definições de polinômio homogêneo e funções homogeneamente algebricamente independentes. Tais conceitos aparecerem no enunciado do Primeiro Teorema Fundamental. Em seguida, provaremos dois lemas que serão utilizados na prova do teorema principal.

Definição 3.1. *Um polinômio $P(z_1,\dots,z_m) \in K[z_1,\dots,z_m]$ é dito um* polinômio homogêneo *quando todos os seus monômios tem mesmo grau. Ou seja, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $P(\lambda z_1,\dots,\lambda z_m) = \lambda^k P(z_1,\dots,z_m)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Definição 3.2. *Dizemos que as funções $f_1(z),\dots,f_m(z)$ são* homogeneamente algebricamente independentes *quando não existe um polinômio homogêneo, não-nulo, $P(z_1,\dots,z_m) \in K[z_1,\dots,z_m]$ tal que $P(f_1(z),\dots,f_m(z)) = 0$. Caso contrário, dizemos que tais funções são* homogeneamente algebricamente dependentes.

Observe que nenhum dos lemas provados nos capítulos anteriores tem como hipótese funções que são homogeneamente algebricamente independentes. O lema que apresentaremos a seguir garante que a hipótese da homogeneidade da independência algébrica, presente no Primeiro Teorema Fundamental, seja reformulada como um caso de independência linear. E, dessa forma, nos possibilita aplicar os resultados obtidos anteriormente.

Lema 3.1. *Sejam $f_1(z),\dots,f_m(z)$ funções analíticas que formam a solução do sistema de equações diferenciais lineares (1.9). Então para todo $n \in \mathbb{N}$ o conjunto dos*

$$\mu_{n,m} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$$

monômios da forma

$$v_{k_1,\dots,k_m} = f_1^{k_1}(z)\cdots f_m^{k_m}(z), \qquad k_1+\cdots+k_m = n \tag{3.1}$$

com $k_i \in \mathbb{Z}^+$ e $i \in [1,m]$ formam uma solução de um sistema de equações da forma (1.9) no qual m é substituído por $\mu_{n,m}$ e os coeficientes são combinações $\mathbb{Z}$-lineares dos coeficientes no sistema original (1.9). Além disso, estes coeficientes não tem nenhum polo além dos polos do sistema (1.9).

Prova. Diferenciando as funções (3.1) em relação a z e usando a regra da cadeia, obtemos

$$v'_{k_1,\cdots,k_m} = \sum_{i=1}^{m} k_i f_1^{k_1}(z)\cdots f_i^{k_i-1}\cdots f_m^{k_m}(z) f_i'(z),$$

com $k_1+\cdots+k_m=n$. Substituindo $f_i'(z)$ pelo lado direito da equação correspondente em (1.9), onde $y_i=f_i(z)$, temos

$$\begin{aligned} v'_{k_1,\cdots,k_m} &= \sum_{i=1}^{m}\left(k_i f_1^{k_1}(z)\cdots f_i^{k_i-1}\cdots f_m^{k_m}(z)\sum_{r=1}^{m} Q_{i,r}f_r(z)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{r=1}^{m} k_i Q_{i,r} f_1^{k_1}(z)\cdots f_i^{k_i-1}\cdots f_m^{k_m}(z) f_r(z)\right), \end{aligned}$$

como

$$k_1+\cdots+(k_i-1)+\cdots(k_r+1)+\cdots+k_m=\sum_{i=1}^{m}k_i=n,$$

concluímos que

$$f_1^{k_1}(z)\cdots f_i^{k_i-1}\cdots f_m^{k_m}(z)f_r(z)=v_{k_1,\dots,k_i-1,\dots,k_r+1,\dots,k_m},$$

ou seja, são monômios da forma (3.1). Assim, concluímos que os coeficientes de $v'_{k_1,\dots,k_m}$ são combinações $\mathbb{Z}$-linear dos coeficientes $Q_{i,r}$ do sistema Q, isto assegura o não surgimento de novos polos. Dessa forma, concluímos a prova do lema. □

Corolário 3.1. *Se no Lema 3.1 assumirmos que $f_1(z),\dots,f_m(z)$ são E-funções com coeficientes em K que satisfazem as condições do Primeiro Teorema Fundamental, então pelo Lema 2.2, o conjunto dos $\mu_{n,m}$ monômios (3.1) formam uma solução de um sistema de equações diferenciais lineares da forma (1.9) em que todos os $Q_{i,r}\in K(z)$. O polinômio $T=T(z)$ para este sistema coincide com o polinômio correspondente $T(z)$ para o sistema original (1.9) e temos $T\in\mathcal{O}_K[z]$, $TQ_{i,r}\in\mathcal{O}_K[z]$ com $k,i\in[1,m]$.*

A seguir, enunciaremos o principal teorema desta dissertação. Este resultado foi provado em 1955, por A. B. Shidlovskii [23] e apresenta alternativas mais naturais a condição de normalidade imposta por Siegel na primeira versão deste teorema. A versão de Shidlovskii afirma que sob algumas hipóteses a propriedade de homogeneidade da independência algébrica de um conjunto de E-funções $f_1(z),\dots,f_m(z)$ é transferida para o conjunto dos valores dessas funções em um número algébrico $z=\alpha$, com $\alpha T(\alpha)\neq 0$.

Teorema 3.1. *(Primeiro Teorema Fundamental) Seja $m\geq 2$ e sejam $f_1(z),\dots,f_m(z)$ E-funções coordenadas de uma solução do sistema (1.9) que formam um conjunto homogeneamente algebricamente independente sobre $\mathbb{C}(z)$ e $\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}$ tal que $\alpha T(\alpha)\neq 0$. Então os números $f_1(\alpha),\dots,f_m(\alpha)$ são homogeneamente algebricamente independentes.*

Prova. Seja $\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}$ tal que $\alpha T(\alpha)\neq 0$. Suponha, por contradição, que sob as hipóteses do teorema os números $f_1(\alpha),\dots,f_m(\alpha)$ são homogeneamente algebricamente dependentes.

Então existe um polinômio homogêneo P de grau k tal que

$$P(f_1(\alpha),\ldots,f_m(\alpha))=0. \tag{3.2}$$

Seja K um corpo de número algébrico que contém α, os coeficientes das séries de potência de todas as E-funções, $f_1(z),\ldots,f_m(z)$, e todos os coeficientes de P. De acordo, com o Lema 3.1 e com Corolário 3.1, K contém os coeficientes de todos os polinômios T e $TQ_{i,r}$ do sistema de equações diferenciais satisfeito pelos monômios (3.1) com $n\in\mathbb{N}$ arbitrário.

Considere as $\mu_{n-k,m}$ expressões

$$f_1^{k_1}(z)\cdots f_m^{k_m}(z)P(f_1(z),\ldots,f_m(z)),\quad k_1+\cdots+k_m=n-k. \tag{3.3}$$

Perceba que cada uma das expressões (3.3) é uma forma linear nas variáveis (3.1) com coeficientes em K. Visto que P é um polinômio homogêneo de grau k, temos

$$P(f_1(z),\ldots,f_m(z))=\sum_{i=1}^{\mu_{k,m}}p_if_1(z)^{k_{i,1}}\cdots f_m(z)^{k_{i,m}},$$

onde $k_{i,1}+\cdots+k_{i,m}=k$ para todo $i\in[1,\mu_{k,m}]$. Dessa forma, obtemos

$$f_1^{k_1}(z)\cdots f_m^{k_m}(z)P(f_1(z),\ldots,f_m(z))=\sum_{i=1}^{\mu_{k,m}}p_if_1(z)^{k_1+k_{i,1}}\cdots f_m(z)^{k_m+k_{i,m}},$$

note que

$$\sum_{j=1}^{m}(k_j+k_{i,j})=n,\quad i\in[1,\mu_{k,m}].$$

Assim, concluímos que $f_1(z)^{k_1+k_{i,1}}\cdots f_m(z)^{k_m+k_{i,m}}$ são monômios da forma (3.1), para todo $i\in[1,\mu_{k,m}]$. E, as formas lineares (3.3) são linearmente independentes, pois ordenando lexicograficamente os monômios (3.1) com respeito as potências de $f_1(z),\ldots,f_m(z)$, os termos principais das formas (3.3) são distintos.
Tomando $z=\alpha$ em (3.3) e usando (3.2), obtemos $\mu_{n-k,m}$ equações lineares homogêneas para os $\mu_{n,m}$ números

$$f_1^{k_1}(\alpha)\cdots f_m^{k_m}(\alpha),\quad k_i\geq 0,\quad i\in[1,m],\quad \sum_{i=1}^{m}k_i=n \tag{3.4}$$

com coeficientes em K.

Por outro lado, por hipótese, as funções $f_1(z),\ldots,f_m(z)$, são homogeneamente algebricamente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$ as funções (3.1) são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$. De fato, por contradição, suponha que existem coeficientes $c_i \in \mathbb{C}(z)$ não todos nulos, tais que

$$\sum_{i=1}^{\mu_{n,\,m}} c_i v_{k_{i,1},\,\dots,\,k_{i,m}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q(f_1(z),\dots,f_m(z)) = 0,$$

onde Q é o polinômio dado por

$$Q(x_1,\dots,\,x_m) = \sum_{i=1}^{\mu_{n,\,m}} c_i x_1^{k_{i,1}} \cdots x_m^{k_{i,m}}.$$

Uma contradição, visto que Q é um polinômio homogêneo e, por hipótese, as funções $f_1(z),\dots,f_m(z)$ são homogeneamente algebricamente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$. Assim, concluímos que os monômios (3.1) são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$.

Usando o Lema 3.1 e o Corolário 3.1 concluímos que as funções (3.1) satisfazem as hipóteses do Teorema 2.1 com m substituído por $\mu_{n,m}$. Sendo α um ponto não singular do sistema (1.9), segue do Lema 3.1 que α não é um ponto singular do sistema de equações diferenciais (1.9) satisfeito pelas funções (3.1). Assim, o Teorema 2.1 assegura que o posto sobre K do conjunto dos números

$$f_1^{k_1}(\alpha)\cdots f_m^{k_m}(\alpha), \quad k_i \geq 0, \quad i \in [1,m], \quad \sum_{i=1}^{m} k_i = n$$

não é menor que $\mu_{n,m}/h$, onde $h = [K:\mathbb{Q}]$. Isto significa que

$$m \geq r = \rho(\alpha) \geq \frac{\mu_{n,m}}{h}, \tag{3.5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto significa que

$$\mu_{n,m} - \mu_{n-k,m} \geq \rho(\alpha) \geq \frac{\mu_{n,m}}{h}, \tag{3.6}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, valem as seguintes relações,

$$\mu_{n,m} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} = \frac{n^{m-1}}{(m-1)!} + O(n^{m-2}), \tag{3.7}$$

$$\tag{3.8}$$

$$\mu_{n,m} - \mu_{n-k,m} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} - \frac{(n-k+m-1)!}{(n-k)!(m-1)!} = O(n^{m-2}). \tag{3.9}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\mu_{n,m} &= \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} \\
&\leq \frac{(n+m-1)^{m-1}}{(m-1)!} \\
&= \frac{n^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{j=1}^{m-1} n^{m-1-j}(m-1)^j \binom{m-1}{j} \\
&\leq \frac{n^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{n^{m-2}}{(m-1)!}\sum_{j=1}^{m-1}(m-1)^j \binom{m-1}{j} \\
&= \frac{n^{m-1}}{(m-1)!} + cn^{m-2} \\
&= \frac{n^{m-1}}{(m-1)!} + O(n^{m-2}).
\end{aligned}$$

E, analogamente,

$$\mu_{n-k,m} = \frac{(n-k)^{m-1}}{(m-1)!} + O((n-k)^{m-2})$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mu_{n,m} - \mu_{n-k,m} &= \frac{1}{(m-1)!}[n^{m-1} - (n-k)^{m-1}] \\
&\quad + O(n^{m-2}) - O((n-k)^{m-2}) \\
&\leq \frac{1}{(m-1)!}\left[n^{m-1} - \sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j n^{m-1-j}k^j \binom{m-1}{j}\right] \\
&\quad + O(n^{m-2}) - O((n-k)^{m-2}) \\
&\leq \frac{1}{(m-1)!}\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^{j+1} n^{m-1-j}k^j \binom{m-1}{j} \\
&\quad + c_1 n^{m-2} - c_2(n-k)^{m-2} \\
&\leq n^{m-2}\left[c_0 + c_1 + c_2 \sum_{j=0}^{m-2}(-1)^{j+1}k^j \binom{m-1}{j}\right] \\
&= n^{m-2}(c_0 + c_1 + c_3) \\
&= O(n^{m-2}).
\end{aligned}$$

Como as relações (3.7) e (3.9) contradizem a desigualdade (3.6) para n suficientemente grande, concluímos assim a prova do Primeiro Teorema Fundamental. $\square$

3.2 Consequências do Primeiro Teorema Fundamental

Nesta seção, apresentaremos algumas aplicações do Primeiro Teorema Fundamental. Para isto, dividiremos em duas subseções. Na primeira subseção provaremos alguns resultados que seguem diretamente do Primeiro Teorema Fundamental. Na segunda parte provaremos o Segundo Teorema Fundamental, este resultado fornece condições necessárias e suficientes para a independência algébrica de valores de E-funções em pontos algébricos.

3.2.1 Aplicações do Primeiro Teorema Fundamental

Os corolários que enunciaremos e provaremos a seguir, seguem diretamente do Primeiro Teorema Fundamental.

Corolário 3.2. *Nas condições do Teorema 3.1, todos os números $f_1(\alpha),\ldots,f_m(\alpha)$ são diferentes de zero, consequentemente todos os zeros de cada uma das funções $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ que não são zeros do polinômio $zT(z)$ são transcendentes.*

Prova. Suponha, por contradição, que $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ e $f_i(\alpha) = 0$ para algum $i \in [1,m]$. Considere o polinômio homogêneo $P \in \overline{\mathbb{Q}}[x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_m]$ de grau k dado por

$$P(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_m) = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=k \\ k_i=1}} x_1^{k_1}\cdots x_i^{k_i}\cdots x_m^{k_m},$$

onde o somatório é tomado sobre um conjunto de m-uplas de números inteiros não-negativos $(k_1,\ldots,k_{i-1},1,k_{i+1},\ldots,k_m)$. Note que neste caso, $P(f_1(\alpha),\ldots,f_m(\alpha)) = 0$, uma contradição, pois o Primeiro Teorema Fundamental assegura que os números $f_1(\alpha),\ldots,f_m(\alpha)$ são algebricamente homogeneamente independentes. Logo, os números $f_1(\alpha),\ldots,f_m(\alpha)$ são todos não nulos. Assim, concluímos que se α é tal que $f_i(\alpha) = 0$ para algum $i \in [1,m]$ e $\alpha T(\alpha) \neq 0$, então $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{Q}}$, isto é, α é transcendente. □

Corolário 3.3. *Nas condições do Primeiro Teorema Fundamental, os $m-1$ números*

$$\frac{f_k(\alpha)}{f_s(\alpha)}, \quad k \in [1,m], \quad s \neq k$$

são algebricamente independentes, para cada $s \in [1,m]$.

Prova. Suponha, por contradição, que os $m-1$ números

$$\frac{f_1(\alpha)}{f_s(\alpha)},\ldots,\frac{f_{s-1}(\alpha)}{f_s(\alpha)},\frac{f_{s+1}(\alpha)}{f_s(\alpha)},\ldots,\frac{f_m(\alpha)}{f_s(\alpha)}$$

são algebricamente dependentes. Então existe um polinômio $P \in \overline{\mathbb{Q}}[x_1,\ldots,x_{m-1}]$ tal que

$$P\left(\frac{f_1(\alpha)}{f_s(\alpha)},\ldots,\frac{f_{s-1}(\alpha)}{f_s(\alpha)},\frac{f_{s+1}(\alpha)}{f_s(\alpha)},\ldots,\frac{f_m(\alpha)}{f_s(\alpha)}\right)=\sum_{k_1+\cdots+k_m\leq k}\frac{f_1(\alpha)^{k_1}\cdots f_m(\alpha)^{k_m}}{f_s^{k_1+\cdots+k_m}}=0, \tag{3.10}$$

onde o somatório é tomado sobre um conjunto de $(m-1)$-uplas de inteiros positivos $(k_1,\ldots,k_{s-1},k_{s+1},\ldots,k_m)$ e $k=\deg P$. Assim, multiplicando a equação (3.10) por $f_s^n(\alpha)$ com $n>k$, obtemos

$$\sum_{k_1+\cdots+k_m\leq k}\frac{f_1(\alpha)^{k_1}\cdots f_m(\alpha)^{k_m}}{f_s^{k_1+\cdots+k_m}}f_s^n(\alpha)=\sum_{k_1+\cdots+k_m\leq k}f_1(\alpha)^{k_1}\cdots f_m(\alpha)^{k_m}f_s^{n-(k_1+\cdots+k_m)}(\alpha)=0$$

uma contradição, pois o Primeiro Teorema Fundamental assegura que os m números

$$f_1(\alpha),\ldots,f_s(\alpha),\ldots,f_m(\alpha)$$

são homogeneamente algebricamente independentes. □

Corolário 3.4. *Pelo menos $m-1$ dos números $f_1(\alpha),\ldots,f_m(\alpha)$ são transcendentes.*

Prova. Suponha que existam dois números algébricos $f_{s_1}(\xi)$ e $f_{s_2}(\xi)$, $s_1,s_2\in[1,m]$. O corolário anterior afirma que os $m-1$ números

$$\frac{f_1(\alpha)}{f_{s_1}(\alpha)},\ldots,\frac{f_{s_2}(\alpha)}{f_{s_1}(\alpha)},\ldots,\frac{f_m(\alpha)}{f_{s_1}(\alpha)}$$

são algebricamente independentes. Além disso, $f_{s_2}(\alpha)/f_{s_1}(\alpha)$ é algébrico. Então existe um polinômio $P\in\overline{\mathbb{Q}}[x]$ tal que

$$P\left(\frac{f_{s_2}(\alpha)}{f_{s_1}(\alpha)}\right)=0,$$

com

$$P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0.$$

Dessa forma, considere o polinômio

$$\tilde{P}(x_{r_1},\ldots,x_{r_{m-1}})=a_nx_{s_2}^n+\cdots+a_1x_{s_2}+a_0.$$

Observe que

$$\tilde{P}\left(\frac{f_1(\alpha)}{f_{s_1}(\alpha)},\ldots,\frac{f_{s_2}(\alpha)}{f_{s_1}(\alpha)},\ldots,\frac{f_m(\alpha)}{f_{s_1}(\alpha)}\right)=0$$

é uma contradição. Logo, o conjunto dos números $f_1(\alpha),\ldots,f_m(\alpha)$ possui pelo menos $m-1$ números transcendentes. □

Corolário 3.5. *Se um dos números $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ é algébrico, então os $m-1$ restantes são algebricamente independentes.*

Prova. Suponha que $f_s(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$ e que os números $f_1(\alpha), \dots, f_{s-1}(\alpha), f_{s+1}(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ são algebricamente dependentes. Então existe um polinômio $P \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_m]$ de grau k dado por

$$P(x_1, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_m) = \sum_{k_1+\cdots+k_m \leq k} x_1^{k_1} \cdots x_{s-1}^{k_{s-1}} \cdot x_{s+1}^{k_{s+1}} \cdots x_m^{k_m} \tag{3.11}$$

onde o somatório é tomado sobre um conjunto de $(m-1)$-uplas de inteiros positivos $(k_1, \dots, k_{s-1}, k_{s+1}, \dots, k_m)$, tal que

$$P(f_1(\alpha), \dots, f_{s-1}(\alpha), f_{s+1}(\alpha), f_m(\alpha)) = 0. \tag{3.12}$$

Considere o polinômio

$$\tilde{P}(x_m) = \sum_{k_1+\cdots+k_m \leq k} f_1(\alpha)^{k_1} \cdots f_{s-1}(\alpha)^{k_{s-1}} \cdot f_{s+1}(\alpha)^{k_{s+1}} \cdots x_m^{k_m},$$

onde o somatório é tomado no mesmo conjunto das $(m-1)$-uplas do polinômio P apresentado em (3.11). Usando a equação (3.12), temos

$$\tilde{P}(f_m(\alpha)) = P(f_1(\alpha), \dots, f_{s-1}(\alpha), f_{s+1}(\alpha) = 0,$$

uma contradição, visto que o Corolário 3.4 garante a transcendência de $f_m(\alpha)$. Logo, os $m-1$ números em questão são algebricamente independentes. □

3.3 O Segundo Teorema Fundamental

A seguir, enunciaremos e provaremos o Segundo Teorema Fundamental. Este resultado assegura a independência algébrica de valores de E-funções em pontos algébricos, nas condições dos Primeiro Teorema Fundamental, mediante a substituição da hipótese da homogeneidade da independência algébrica das E-funções pela hipótese da independência algébrica destas funções.

Teorema 3.2. *(Segundo Teorema Fundamental) Sejam $f_1(z), \dots, f_m(z)$ E-funções algebricamente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$ que formam uma solução do sistema de equações diferenci-*

ais lineares

$$y_k' = Q_{k,0} + \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i} y_i, \quad Q_{k,i} \in \mathbb{C}(z), \quad e \quad k,i \in [1,m],$$

que pode ser homogêneo, isto é, $Q_{k,0} = 0$, $k \in [1,m]$ *e* $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ *tal que* $\alpha T(\alpha) \neq 0$. *Então os números* $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ *são algebricamente independentes.*

Prova. Considere o conjunto das E- funções $f_0(z) = 1, f_1(z), \ldots, f_m(z)$. Assim, este conjunto de E-funções forma uma solução de um sistema de $m+1$ equações diferencias lineares homogêneo como o apresentado em (1.9). Observe que as E-funções $f_0(z) = 1, f_1(z), \ldots, f_m(z)$ são homogeneamente algebricamente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$ se, e somente se, $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$. Dessa forma, o Primeiro Teorema Fundamental assegura que se $f_0(z) = 1, f_1(z), \ldots, f_m(z)$ são homogeneamente algebricamente independentes, então para $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ com $\alpha T(\alpha) \neq 0$, então os $m+1$ números

$$f_0(\alpha) = 1, f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$$

são homogeneamente algebricamente independentes. Assim, usando o Corolário 3.3, concluímos que os m números

$$f_1(\alpha) = \frac{f_1(\alpha)}{f_0(\alpha)}, \ldots, f_m(\alpha) = \frac{f_m(\alpha)}{f_0(\alpha)},$$

são algebricamente independentes. Isto conclui a prova do Segundo Teorema Fundamental. □

Lema 3.2. *Sejam* $\beta_1, \ldots, \beta_m$, *números complexos distintos, então as funções* $e^{\beta_1 z}, \ldots, e^{\beta_m z}$ *são linearmente independentes sobre* $\mathbb{C}(z)$.

Prova. A prova será dada usando indução sobre o número m de funções exponenciais. Para $m = 1$, se $Q(z)$ é uma função racional tal que

$$Q(z)e^{\beta_1 z} = 0 \iff A(z)e^{\beta_1 z} = 0 \iff A \equiv 0,$$

onde $Q(z) = A(z)/B(z)$ e $A, B \in \mathbb{C}[z]$. Logo, $f_1(z) = e^{\beta_1 z}$ é linearmente independente sobre $\mathbb{C}(z)$. Suponha, nas hipóteses do lema, que para $m = n$, as

$$f_1(z) = e^{\beta_1 z}, \ldots, f_n(z) = e^{\beta_n z}$$

são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$. Queremos mostrar que tal propriedade vale para

$m = n+1$. Suponha, por contradição, que

$$f_1(z) = e^{\beta_1 z}, \ldots, f_n(z) = e^{\beta_n z}, f_{n+1}(z) = e^{\beta_{n+1} z}, \tag{3.13}$$

são linearmente dependentes sobre $\mathbb{C}(z)$. Portanto, existem polinômios $P_1, \ldots, P_{n+1} \in \mathbb{C}[z]$, tais que

$$P_1(z)e^{(\beta_1-\beta_{n+1})z} + P_2(z)e^{(\beta_2-\beta_{n+1})z} + \cdots + P_n(z)e^{(\beta_n-\beta_{n+1})z} + P_{n+1}(z) = 0. \tag{3.14}$$

Denote por $s = \deg P_{n+1}$. Derivando a equação (3.14) $s+1$ vezes, obtemos

$$\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\beta_{n+1})^{s+1}P_k(z)e^{(\beta_k-\beta_{n+1})z} + \sum_{k=1}^{n} e^{(\beta_k-\beta_{n+1})z}\frac{d^{s=1}}{dz^{s+1}}P_k(z) = \sum_{k=1}^{n}\tilde{P}_k(z)e^{(\beta_k-\beta_{n+1})z} = 0,$$

uma contradição, pois

$$\beta_1-\beta_{n+1}, \beta_2-\beta_{n+1}, \ldots, \beta_n-\beta_{n+1}$$

são números complexos distintos e, por hipótese de indução,

$$f_1(z) = e^{(\beta_1-\beta_{n+1})z}, \ldots, f_n(z) = e^{(\beta_n-\beta_{n+1})z}$$

são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$. Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ as funções (3.13) são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$. Com isto concluímos a prova do lema. □

Lema 3.3. *Sejam $\beta_1, \ldots, \beta_m$, números complexos linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$, então as funções $e^{\beta_1 z}, \ldots, e^{\beta_m z}$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$.*

Prova. Suponha, por contradição, que existe um polinômio

$$P = P(z, z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}[z, z_1, \ldots, z_m],$$

$$P \not\equiv 0, \quad \deg_{\mathbf{z}} P = k, \quad \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_m),$$

tal que

$$P(z, e^{\beta_1 z}, \ldots, e^{\beta_m z}) = 0.$$

Esta equação pode ser escrita da forma

$$P(z, z_1, \ldots, z_m) = \sum_{k_1+\cdots+k_m \le k} P_{k_1,\ldots,k_m}(z)e^{(k_1\beta_1+\cdots+k_m\beta_m)z} = 0,$$

$$P_{k_1,\ldots,k_m}(z) \in \mathbb{C}[z], \quad P_{k_1,\ldots,k_m} \not\equiv 0,$$

onde o somatório é tomado sobre um conjunto de m-uplas de inteiros positivos $(k_1,\dots,k_m)$. Por hipótese, os expoentes $z_1\beta_1+\cdots+z_m\beta_m$ são distintos. De fato,

$$\begin{aligned} k_1\beta_1+\cdots+k_m\beta_m = \tilde{k}_1\beta_1+\cdots+\tilde{k}_m\beta_m &\Longleftrightarrow (k_1-\tilde{k}_1)\beta_1+\cdots+(k_m-\tilde{k}_m)\beta_m = 0 \\ &\Longleftrightarrow k_1=\tilde{k}_1,\dots,k_m=\tilde{k}_m, \end{aligned}$$

pois, por hipótese, $\beta_1,\dots,\beta_m$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Uma contradição, uma vez que o Lema 3.2 assegura que as funções da forma

$$e^{(k_1\beta_1+\cdots+k_m\beta_m)z}$$

são algebricamente independentes sobre $\mathbb{C}(z)$. Assim, concluímos a prova do lema. $\square$

Corolário 3.6. *(Teorema de Lindemann-Weierstrass) Se $\alpha_1,\dots,\alpha_m$, são números algébricos, linearmente independentes, então os números $e^{\alpha_1},\dots,e^{\alpha_m}$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{Q}$.*

Prova. A demonstração segue diretamente do Lema 3.2 e do Segundo Teorema Fundamental.

$\square$

Considerações finais

Nesta dissertação, introduzimos o conceito de E-funções como o apresentado pode C. Siegel e apresentamos os pré-requisitos necessários para a compreensão do Primeiro Teorema Fundamental, provado A.B. Shidlovskii.

A seguir, apresentaremos alguns resultados sobre E-funções que foram demonstrados após 1955. Sabemos que C. Siegel, generalizando o método de Hermite-Lidemann, foi capaz de provar um teorema acerca da independência algébrica de valores de E-funções a partir de uma condição de normalidade. Tal condição, de difícil verificação, se fez necessária a fim de tornar um certo determinante, presente na prova. não-nulo. Em 1956, A. B. Shidlovskii contorna a condição de normalidade imposta por C. Siegel e prova uma nova versão do teorema de Siegel, conhecido como Terceiro Teorema Fundamental, que enunciaremos a seguir.

Teorema (Siegel-Shidlovski, 1956)**.** *Seja $f_1, \dots, f_m$ um conjunto de E-funções que satisfazem o sistema de equações diferenciais de primeira ordem*

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

onde A é uma matriz $m \times m$ com entradas em $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Denote o denominador comum das entradas de A por $T(z)$. Então, para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tal que $\alpha \cdot T(\alpha) \neq 0$, tem-se

$$\deg\operatorname{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) = \deg\operatorname{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z), \dots, f_m(z)).$$

Aproximadamente 4 décadas depois da prova do Terceiro Teorema Fundamental, Y. Nesterenko e A. Shidlovskii provam o resultado a seguir, ver [21].

Teorema. *(Nesterenko-Shidlovskii, 1996) Existe um conjunto finito S tal que para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $\alpha \notin S$ vale o seguinte. Para toda relação polinomial homogênea $P(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) = 0$*

com $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \ldots, X_m]$ *existe* $Q \in \overline{\mathbb{Q}}[z, X_1, \ldots, X_m]$*, homogêneo em* X_i*, tal que*

$$Q(z, f_1(z), \ldots, f_m(z)) \equiv 0 \quad \text{e} \quad P(X_1, \ldots, X_m) = Q(\alpha, X_1, \ldots, X_m).$$

Em 1997, Y. André apresenta uma nova prova do Teorema de Siegel-Shidlovskii sobre valores de E-funções, ver [1] e [2]. Uma versão em inglês deste resultado está descrita no trabalho de D. Bertrand, ver [3]. Em 2004, D. Bertrand usando determinantes de Laurent exibe uma nova demonstração do Terceiro Teorema Fundamental. Ainda em 2004, F. Beukers, usando os resultados de Y. André sobre a equações diferenciais satisfeitas por E-funções, apresenta uma nova versão do Teorema de Siegel-Shidlovskii, em seu artigo intitulado *A refined version of the Siegel-Shidlovskii theorem*, ver [4]. Neste trabalho, F. Beukers, prova ainda uma versão mais geral do Teorema de Nesterenko-Shidlovskii, solucionando, assim, a Conjectura A apresentada por Y. Nesterenko e A. Shidlovskii em [21] e mencionada por S. Lang em seu livro [12], que trata da independência $\overline{\mathbb{Q}}$-linear de valores de E-funções, linearmente independentes sobre $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ em pontos algébricos.

Em 2023, S. Fischler e T. Rivoal, ver [6], provam um resultado que tem como corolário: *Se* f *é uma* E*-função e* z_0 *um número algébrico, então* $f(z_0)$ *não é um número de Liouville.*

A partir dos resultados aqui apresentados, expomos, ainda que brevemente, o desenvolvimento da teria das E-funções nas últimas décadas e, dessa forma, motivamos a continuidade do estudo nesta bela teoria.

Bibliografia

[1] ANDRÉ, Y. Séries Gevrey de type arithmétique, I. Théoremes de pureté et de dualité. *Annals of mathematics 151*, 2 (2000), 705–740.

[2] ANDRÉ, Y. Séries Gevrey de type arithmétique, II. transcendance sans transcendance. *Annals of Mathematics 151*, 2 (2000), 741–756.

[3] BERTRAND, D. On André's proof of the Siegel-Shidlovsky theorem. In *Colloque Franco-Japonais: Théorie des Nombres Transcendants (Tokyo, 1998), Sem. Math. Sci* (1999), vol. 27, pp. 51–63.

[4] BEUKERS, F. A refined version of the Siegel-Shidlovskii theorem. *Annals of mathematics* (2006), 369–379.

[5] CANTOR, G. Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik 77* (1874), 258–262.

[6] FISCHLER, S., AND RIVOAL, T. Values of E-functions are not Liouville numbers. *arXiv preprint arXiv:2301.01158* (2023).

[7] GELFOND, A. Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières. *Tohoku Mathematical Journal, First Series 30* (1929), 280–285.

[8] GEL'FOND, A. O. On the algebraic independence of transcendental numbers of certain classes. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk 4*, 5 (1949), 14–48.

[9] GEL'FOND, A. O. On Hilbert's seventh problem. In *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* (1934), vol. 2, pp. 1–6.

[10] HERMITE, C. Sur la fonction exponentielle. *Gauthier-Villars (Paris)* (1874).

[11] KUZMIN, R. On a new class of transcendental numbers. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat 7* (1930), 585–597.

[12] LANG, S. Transcendental numbers and diophantine approximations. *Bulletin of the American Mathematical Society 77*, 5 (1971), 635–677.

[13] LINDEMANN, F. Uber die Zahl π. *Mathematische Annalen 20*, 2 (1882), 213–225.

[14] LINDEMANN, F. Über die Ludolph'sche zahl. *Sitzungber. Konigl. Preuss. Akad. Wissensch. zu Berlin*, 2 (1882), 679–682.

[15] LINS NETO, A. *Funções de uma variável complexa*. IMPA, 2016.

[16] LIOUVILLE, J. Nouvelle démonstration d'un théoreme sur les irrationnelles algébriques inséré dans le compte rendu de la derniere séance. *CR Acad. Sci. Paris 18* (1844), 910–911.

[17] LIOUVILLE, J. Sur des classes tres-etendues de quantites dont la valeur n'est ni algebrique ni meme reductible a des irrationnelles algebriques. *CR Acad. Sci. Paris 18* (1844), 883–885.

[18] MAHLER, K. *Lectures on transcendental numbers*, vol. 546. Springer, 1976.

[19] MAIER, W. Potenzreihen irrationalen grenzwertes. *Walter de Gruyter* (1927), 93–148.

[20] MARQUES, D. *Teoria dos Números Transcendentes*. SBM, 2013.

[21] NESTERENKO, Y. V., AND SHIDLOVSKII, A. B. Linear independence of values of E-functions. *Sbornik: Mathematics 187*, 8 (1996), 1197–1211.

[22] SCHNEIDER, T. Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen I. Transzendenz von Potenzen. *Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York* (1935).

[23] SHIDLOVSKII, A. B. A criterion for algebraic independence of the values of a class of entire functions. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya 23*, 1 (1959), 35–66.

[24] SHIDLOVSKII, A. B. Transcendency and algebraic independence of values of E-functions related by an arbitrary number of algebraic equations over the field of rational functions. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya 26*, 6 (1962), 877–910.

[25] SHIDLOVSKII, A. B. *Transcendental numbers*. Walter de Gruyter, 1989.

[26] SIEGEL, C. L. *Transcendental numbers*. No. 16. Princeton University Press, 1950.

[27] SIEGEL, C. L. Über einige anwendungen diophantischer approximationen [reprint of abhandlungen der preußischen akademie der wissenschaften. physikalisch-mathematische klasse 1929, nr. 1]. *On some applications of Diophantine approximations 2* (2014), 81–138.

[28] STRIDSBERG, E. Sur quelques propriétés arithmétiques de certaines fonctions transcendantes. *Acta Mathematica 33*, 1 (1910), 233–292.

[29] WEIERSTRASS, K. Zu Lindemann's Abhandlung: "Über die Ludolph'sche Zahl". In *Pi: A Source Book*. Springer, 2004, pp. 207–225.