



**APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO COM EXPANSÃO EM MULTIPOLOS E
ABORDAGEM ISOGEOMÉTRICA EM PROBLEMAS
ELÁSTICOS ANISOTRÓPICOS**

JAILSON FRANÇA DOS SANTOS

**TESE DE DOUTORADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**Faculdade de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ciências Mecânicas**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ciências Mecânicas

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO COM EXPANSÃO EM MULTIPÓLOS E
ABORDAGEM ISOGEOMÉTRICA EM PROBLEMAS
ELÁSTICOS ANISOTRÓPICOS**

JAILSON FRANÇA DOS SANTOS

ORIENTADOR: DR. EDER LIMA DE ALBUQUERQUE, UNB
COORIENTADOR: DR. LUCAS SILVEIRA CAMPOS, UFES

TESE DE DOUTORADO

PUBLICAÇÃO PCMEC.TD -
BRASÍLIA-DF, 19 DE MAIO DE 2023

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO COM EXPANSÃO EM MULTIPOLOS E
ABORDAGEM ISOGEOMÉTRICA EM PROBLEMAS
ELÁSTICOS ANISOTRÓPICOS**

JAILSON FRANÇA DOS SANTOS

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
CIÊNCIAS MECÂNICAS DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE
DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS PARCIAIS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS MECÂNICAS.

APROVADA POR:

Dr. Eder Lima de Albuquerque, Unb
Orientador

Dr. Lucas Silveira Campos, UFES
Coorientador

Dr. Taygoara Felamingo de Oliveira, Unb
Examinador interno

Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto, UFES
Examinador externo

Dr. Edson Denner Leonel, USP
Examinador externo

BRASÍLIA, 19 DE MAIO DE 2023

FICHA CATALOGRÁFICA

JAILSON FRANÇA DOS SANTOS

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM EXPANSÃO EM MULTIPOLOS E ABORDAGEM ISOGEOMÉTRICA EM PROBLEMAS ELÁSTICOS ANISOTRÓPICOS.

2023xv, 153p., 201x297 mm

(FT/UnB, Doutor, Ciências Mecânicas, 2023).

Tese de Doutorado - Universidade de Brasília.

Faculdade de Tecnologia.

Programa de Pós-Graduação em Ciências Mecânicas.

1. Método dos Elementos de Contorno 2. Materiais Anisotrópicos 3. Análise isogeométrica 4. Método das Expansões em Multipolos.

I. FT/UnB II. Doutor (-.DM 095A/2023)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

JAILSON FRANÇA DOS SANTOS (2023). APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM EXPANSÃO EM MULTIPOLOS E ABORDAGEM ISOGEOMÉTRICA EM PROBLEMAS ELÁSTICOS ANISOTRÓPICOS.. Tese de Doutorado em Ciências Mecânicas, Publicação , Departamento de Ciências Mecânicas, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 153p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: JAILSON FRANÇA DOS SANTOS

TÍTULO: APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM EXPANSÃO EM MULTIPOLOS E ABORDAGEM ISOGEOMÉTRICA EM PROBLEMAS ELÁSTICOS ANISOTRÓPICOS.

GRAU: Doutor ANO: 2023

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de Doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor se reserva a outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese de Doutorado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

JAILSON FRANÇA DOS SANTOS

Correio Eletrônico: jailson.santos@ufob.edu.br

Agradecimentos

Os agradecimentos aqui poderia ser uma lista extensa de pessoas que contribuíram de forma direta e indireta nesta minha trajetória até aqui, porém não terei espaço para tantas menções. Portanto, agradecerei primeiramente a Deus, pela graça da vida, por me permitir ter saúde, força e proteção diariamente. Em seguida agradeço toda minha família de forma geral (minha querida mãe, meus irmãos e familiares). Aos meus colegas e amigos, forte agradecimento, sejam os da graduação, do mestrado e do doutorado. Quero deixar meu profundo obrigado a Flávio Pietrobon Costa, por ter sido a primeira pessoa a ter acreditado em mim e me mostrado o caminho para este universo da pós-graduação. Agradeço a minha companheira Maria Clara Silva Oliveira, por todo apoio, força e paciência ao longo desse trajeto. Por fim, e não menos especial, quero agradecer aos meus orientadores, que hoje considero como amigos, Prof. Dr. Eder Lima de Albuquerque, pelos ensinamentos e por ter confiado em mim para realizar este trabalho, que, por diversas vezes foi bastante árduo. Assim como, meu mais sincero agradecimento ao Prof. Dr. Lucas Silveira Campos, pela contribuição valiosa na construção dessa tese. A todos vocês, o meu mais puro agradecimento.

Jailson França dos Santos

RESUMO

Esta tese apresenta uma análise isogeométrica do Método dos Elementos de Contorno (MEC Isogeométrico) juntamente com o método da expansão em multipolos rápidos (do acrônimos em inglês - FMM), aplicado a problemas elásticos anisotrópicos em plano bidimensional. A solução fundamental anisotrópica de Lekhnitskii é utilizada, e nela existem singularidades. A do tipo fraca do núcleo de deslocamento, é tratada com o método da transformada de Telles, enquanto que a singularidade forte do núcleo da força de superfície é tratada pelo método da subtração de singularidade (do acrônimos em inglês - SST). As funções de forma utilizadas neste trabalho são as B-Splines Racionais Não Uniformes (do acrônimos em inglês - NURBS). Assim, a mesma representação matemática do Desenho Assistido por Computador (do acrônimos em inglês - CAD) é utilizada no código computacional desenvolvido, evitando a geração de malhas e fornecendo representação exata para maioria das geometrias complexas utilizadas na análise de engenharia. Além do FMM, a fim de melhorar mais a eficiência numérica do código, reduzindo o custo computacional, as NURBS são decompostas em curvas de Bézier sem a perda das propriedades de continuidade, utilizando a decomposição de Bézier. Desta forma, a formulação isogeométrica se torna similar ao método dos elementos de contorno convencional. Como as matrizes do sistema algébrico não são explicitamente montadas devido ao FMM, é necessário usar um método iterativo para resolver o sistema de equações lineares. O método dos mínimos resíduos generalizados (do acrônimos em inglês - GMRES) foi escolhido, de acordo com sua eficácia notada em trabalhos anteriores e conforme a literatura. Para avaliar a acurácia da formulação, diferentes exemplos numéricos aplicados para materiais quase-isotrópicos, anisotrópicos e ortotrópicos são analisados. Os resultados numéricos do MEC isogeométrico e sua versão acelerada pelo FMM, são comparadas com soluções analíticas, e mesmo com poucos graus de liberdade, mostram que possuem boas precisões numéricas. Além destes, a formulação acelerada também foi aplicada em problemas de larga escala, modelos com milhares de graus de liberdade, provando que é mais rápida que o MEC isogeométrico, e portanto, é uma formulação muito indicada para problemas elásticos em larga escala, principalmente para geometrias que são mais indicadas o uso de elementos de contorno de alta ordem.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno; Análise isogeométrica; Método das Expansões em Multipolos; Elasticidade Plana Anisotrópica.

ABSTRACT

This thesis presents an Isogeometric Analysis of the Boundary Element Method (IGABEM) together with the fast multipole expansion method, applied to anisotropic elastic problems in a two-dimensional plane. Lekhnitskii's anisotropic fundamental solution is used, and in it there are singularities, that of the weak type of the displacement kernel, which is treated with the Telles transform method, while the strong singularity of the surface force kernel is treated by the technique of the singularity subtraction (SST). The shape functions used in this work are Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS). Thus, the same mathematical representation of Computer Aided Design (CAD) is used in the developed computational code, avoiding the generation of meshes and providing exact representation for most of the complex geometries used in engineering analysis. In addition to the FMM, in order to further improve the numerical efficiency of the code, reducing the computational cost, the NURBS are decomposed into Bézier curves without losing the continuity properties, using the Bézier decomposition. In this way, the isogeometric formulation becomes similar to the conventional boundary element method. As the matrices of the algebraic system are not explicitly assembled due to the FMM, it is necessary to use an iterative method to solve the system of linear equations. The generalized minimal residual method (GMRES) was chosen, according to its efficiency noted in previous works and according to the literature. To evaluate the accuracy of the formulation, different numerical examples applied to quasi-isotropic, anisotropic and orthotropic materials are analyzed. The numerical results of the IGABEM and its accelerated version by the FMM are compared with analytical solutions, and even with few degrees of freedom, they show that they have good numerical precision. In addition to these, the accelerated formulation was also applied to large-scale problems, models with thousands of degrees of freedom, proving that it is faster than the IGABEM, and therefore, it is a very suitable formulation for large-scale elastic problems, mainly for geometries that are best suited to the use of higher-order boundary elements.

Keywords: Boundary Element Method; Isogeometric analysis; Fast Multipole Method; Anisotropic Plane Elasticity.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	OBJETIVOS, METODOLOGIA E DELIMITAÇÕES DA PESQUISA	6
1.2	DESAFIOS E CONTRIBUIÇÕES	6
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	8
2	CONTEXTUALIZAÇÃO E BREVE REVISÃO DA LITERATURA	10
2.1	ANÁLISE ISOGOMÉTRICA - <i>IGA</i>	10
2.2	MÉTODO DOS MULTIPOLOS RÁPIDOS - <i>FMM</i>	13
2.3	<i>IGA</i> , <i>FMM</i> E O TRATAMENTO DE SINGULARIDADES NO MEC	17
3	TEORIA DA ELASTICIDADE PARA MATERIAIS COMPÓSITOS ANISOTRÓPICOS	20
3.1	FUNDAMENTOS DA ELASTICIDADE ANISOTRÓPICA	22
3.1.1	ESTADO DE TENSÃO	22
3.1.2	ESTADO DE DEFORMAÇÃO	23
3.1.3	RELAÇÕES CONSTITUTIVAS	23
3.2	DEFORMAÇÃO PLANA PELO FORMALISMO DE LEKHNITSKII	26
3.3	RELAÇÕES ELÁSTICAS PARA LÂMINA ORTOTRÓPICA	29
3.3.1	ANÁLISE ELÁSTICA PARA LAMINADO SIMÉTRICO	31
4	B-SPLINE E NURBS	35
4.1	CURVAS B-SPLINE	35
4.1.1	ALGORITMO DE BOOR	36
4.2	CURVAS NURBS	39
4.2.1	CURVA DE BÉZIER E POLINÔMIO DE BERNSTEIN	40
4.2.2	DECOMPOSIÇÃO DE BÉZIER	42
4.2.3	OPERADOR DE EXTRAÇÃO BÉZIER	45
5	FORMULAÇÃO MEC ISOGOMÉTRICO PARA ELASTICIDADE ANISOTRÓPICA	47
5.1	TEOREMA DE RECIPROCIDADE DE BETTI	47
5.2	EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO	49
5.3	SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA PROBLEMAS ANISOTRÓPICOS	51
5.4	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO ISOGOMÉTRICO	53
5.5	ORGANIZAÇÃO DOS PONTOS DE COLOCAÇÃO	56

5.6	CONDIÇÕES DE CONTORNO NA NURBS.....	57
5.7	INTEGRAIS SINGULARES	58
5.7.1	INTEGRAL FRACAMENTE SINGULAR	59
5.7.2	INTEGRAL FORTEMENTE SINGULAR.....	60
5.8	CÁLCULO DE TENSÕES NO CONTORNO	63
5.9	TRATAMENTO DA FORÇA DE CORPO	64
5.9.1	FORÇA DE CORPO CENTRÍFUGA.....	65
5.9.2	CARGAMENTO GRAVITACIONAL	66
6	RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O MEC ISOGOMÉTRICO	67
6.1	CILINDRO VAZADO E PRESSURIZADO	67
6.2	DISCO ROTATIVO DE VELOCIDADE ANGULAR CONSTANTE	73
6.3	FATOR DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO EM UM FURO CIRCULAR EM UMA PLACA DE DIMENSÕES INFINITAS	78
6.3.1	FATOR DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO.....	78
6.3.2	DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES AO LONGO DA DIREÇÃO PRINCIPAL	82
6.4	VIGAS	86
6.4.1	VIGA ENGASTADA EM UM EXTREMO E LIVRE NA OUTRA	86
6.4.2	VIGA ENGASTADA EM AMBOS EXTREMOS.....	89
7	MEC ISOGOMÉTRICO ACELERADO PELO MÉTODO DOS MULTIPÓLOS	91
7.1	IGABEM-FMM PARA PROBLEMAS 2D ANISOTRÓPICOS	93
7.1.1	ETAPAS DO IGABEM-FMM PARA OS NÚCLEOS U E T	94
7.1.2	EXPANSÕES EM MULTIPÓLOS (MOMENTOS).....	95
7.1.3	TRANSLAÇÕES MOMENTO PARA MOMENTO - M2M.....	96
7.1.4	TRANSLAÇÕES MOMENTO PARA LOCAL - M2L	96
7.1.5	EXPANSÕES LOCAL PARA LOCAL - L2L	97
7.1.6	PASSOS PARA CONSTRUÇÃO DO ALGORITMO IGABEM-FMM	97
8	RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O MEC ISOGOMÉTRICOS ACELERADO.....	103
8.1	CAVIDADE CIRCULAR EM MEIO INFINITO.....	103
8.1.1	VALIDAÇÃO MEC ISOGOMÉTRICO FMM	105
8.2	DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES TANGENCIAIS AO LONGO DA CIRCUNFERÊNCIA DO FURO	108
8.2.1	CUSTO COMPUTACIONAL	114
8.3	PLACA COM MÚLTIPLOS FUROS CIRCULARES	116
8.3.1	CUSTO COMPUTACIONAL	120
9	CONCLUSÕES	122
9.1	PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS.....	123
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	125

A	TESTE DE REGULARIZAÇÃO DO TERMO FORTEMENTE SINGULAR	137
B	MÉTODO ITERATIVO DO GMRES	141
	B.0.1 MÉTODO DOS MÍNIMOS RESÍDUOS GENERALIZADOS - GMRES	142
C	CONSTRUÇÃO DE UMA ESTRUTURA EM ÁRVORE HIERÁRQUICA	145

LISTA DE FIGURAS

1.1	Materiais compósitos: (a) turbina eólica, (b) barco, (c) ponte, (d) carro, (e) placa de circuito, (f) avião, (g) equipamentos estruturais e (h) raquete de tênis. Modelos retirados de (MOURA; MORAIS; MAGALHÃES, 2005), (GIBSON, 2016).	2
1.2	É mostrado em (a) um cilindro NURBS a esquerda e um cilindro poligonal a direita, (DERAKHSHANI, 2012). Em (b) um esquema comparando malhas na análise de elementos finitos e na análise iso-geométrica, (COTTRELL et al., 2006).	5
3.1	Sistemas de coordenadas da lâmina (x_1, y_1) e do laminado (x, y)	20
3.2	compósitos laminados, (a) unidirecional; (b) cruzado; (c) camadas em ângulo; e (d) multidirecional, (JR; RETHWISCH, 2016).	21
3.3	Sistema de coordenadas para um laminado.	22
3.4	Modelo de laminado simétrico com diferentes orientações de lâminas. .	31
4.1	(a) Funções de base cúbica usando o vetor \mathbf{u}_1 e a curva cúbica B-spline. (b) Funções de base quádrlica usando o vetor \mathbf{u}_2 e a curva quádrlica B-spline.	37
4.2	Curva quádrlica B-spline para $\mathbf{u} = (0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1)$	38
4.3	Polinômio de Bernstein.	41
4.4	a) Curva cúbica NURBS, pontos de controle da NURBS em azul e em preto são os pontos de controle das curvas de Bézier. b) funções de base para a curva, sendo que o vetor de nós é dado por $\mathbf{u} = [0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4]$	42
4.5	Sequências de funções de base criadas pela inserção dos nós para o vetor de nó não uniforme da Figura 4.4. O conjunto final de funções de base em (f) são cúbicas por partes das funções base de Bézier. Os $C^i, i = -1, 0, 1, 2$, denotam as classes de cada elemento de Bézier.	44
5.1	Representação esquemática do ponto x' localizado na região semicircular.	51
5.2	Modelo de um <i>patch</i> , com pontos de controle e normal externa. E a mudança da coordenada global $[x_1, x_2]$, para o sistema de coordenadas adimensionais de Gauss.	53

5.3	Singularidades forte e fraca no ponto singular em verde na curva NURBS.	58
5.4	Representação das tensões no contorno.	63
6.1	Em (a) Representação do cilindro, em (b) 1/4 do cilindro construído por NURBS de ordem $p = 2$, e (c) 1/4 do cilindro construído por NURBS de ordem $p = 4$	68
6.2	Em (a) 1/4 do cilindro, e em (b) 1/4 do cilindro original e seu deslocamento.	70
6.3	Deslocamento na NURBS (N_1).	70
6.4	Tensão radial na NURBS (N_1).	71
6.5	Tensão circunferencial na NURBS (N_1).	71
6.6	Erro _{norm} : deslocamento.	72
6.7	Erro _{norm} : tensões.	72
6.8	Representação do disco rotativo ortotrópico.	73
6.9	Representação de um quarto do disco rotativo ortotrópico.	75
6.10	(a) deslocamento no contorno (N_1), direção x , (b) deslocamento no contorno (N_3), direção y , (c) tensão radial σ_r e (d) tensão circunferencial σ_θ	76
6.11	Erro _{norm} : deslocamentos.	77
6.12	Erro _{norm} : tensão radial e circunferencial.	77
6.13	Representação de um domínio infinito com uma placa contendo um furo circular com tração uniforme na direção y	78
6.14	Ilustração de um quarto da placa com furo, tracionada no sentido y	80
6.15	Fator de concentração de tensão em um quarto da placa com furo, tracionada no sentido y	81
6.16	Tensão em $\sigma_y(x, 0)$: Boro / Epóxi (B(4)/5505) laminado $(0^\circ/90^\circ)_S$	83
6.17	Tensão em $\sigma_y(x, 0)$: Thornel 300/Narmco 5208 laminado $(0^\circ/90^\circ)_S$	83
6.18	Tensão em $\sigma_y(x, 0)$ para Thornel 300/Narmco 5208 num laminado $(\pm 45^\circ)_S$	84
6.19	Placa original (preto) e deformada (verde), sendo: (a) deformação da Figura 6.16, (b) deformação da Figura 6.17 e (c) deformação da Figura 6.18.	85
6.20	Viga engastada em um extremo sujeita a carga distribuída uniformemente.	86
6.21	Representação da viga, construída com NURBS de grau $p = 2$	87
6.22	Curva do deslocamento da viga.	88
6.23	Viga não deformada em preto e deformada em verde.	88
6.24	Viga engastada em ambos extremos com carga distribuída uniformemente.	89
6.25	Curva do deslocamento da viga.	90
6.26	Viga não deformada em preto e deformada em verde.	90

7.1	Modelo de subdivisão de células proporcionando uma estrutura de árvore hierárquica quaternária para uma malha 2D.....	91
7.2	Relações entre as células da árvore.	92
7.3	Notação complexa e os pontos relacionados para o processo IGABEM-FMM.	95
7.4	Domínio discretizado em elementos de contorno.	98
7.5	Passos para discretização do domínio até formar a árvore hierárquica ..	99
7.6	Mostragem geral das expansões e translações multipolares.....	100
7.7	Etapas do <i>upward</i> : (a) expansão multipolar e em (b) translação M2M....	100
7.8	Esquema das translações M2L dos pontos campos para o ponto fonte..	101
7.9	Etapas M2M, L2L e L2L. A célula em cinza contém o ponto fonte.	101
8.1	Representação da cavidade circular pressurizada em meio infinito.	104
8.2	Discretização da cavidade circular da Figura 8.1.	104
8.3	Estrutura em árvore para uma cavidade circular, construída com NURBS de grau $p = 4$ e 20 pontos fontes, (a) numeração dos nós e (b) numeração das células.	106
8.4	Estrutura de árvore com múltiplos elementos por folha.	106
8.5	Erro normalizado para o problema de cavidade circular.	107
8.6	Pontos de cálculo em nós externos à cavidade circular.	108
8.7	Placa com furo em plano infinito com tensão uniforme na direção x , sendo (x', y') as coordenadas da lâmina e (x, y) do laminado.	109
8.8	Ilustração de um quarto da placa com furo, tracionada no sentido x	110
8.9	Tecido de carbono / Fenólico: (a) Árvore hierárquica, (b) tensão tangencial em σ_θ	111
8.10	Tecido de carbono / Fenólico: (a) tensão tangencial em σ_θ e (b) erros....	112
8.11	Boro / Alumínio: (a) tensão tangencial em σ_θ e (b) erro.	112
8.12	Carbono / Epóxi: (a) tensão tangencial em σ_θ e (b) erro.....	113
8.13	Deslocamento das placas: (a) Carboneto de silício (b) Boro / Alumínio e (c) Tecido de carbono.	113
8.14	Tempo de processamento entre IGABEM e IGABEM-FMM no problema da placa com furo na quina.	115
8.15	Representação de uma placa com multifuros circulares.	116
8.16	Em (a) modelo construído com NURBS e (b) representação da árvore hierárquica.	117
8.17	Placa com furos, sendo em preto a placa original e em verde a placa deformada.	118
8.18	Tempo de execução da árvore para 624 DOFs.	120
8.19	Tempo de processamento entre o IGABEM e o IGABEM-FMM no problema de placa com multifuros.	121
A.1	Geometrias NURBS. (a) 15 pontos fontes, (b) 25 pontos fontes.....	137

A.2	Extração da singularidade forte para NURBS de ordem $p = 2$, em (a) $K_{T(1,2)}$ PF ₃ , em (b) $K_{T(1,4)}$ PF ₁₂ , em (c) $K_{T(1,2)}$ PF ₉ e em (d) $K_{T(1,4)}$ PF ₉	139
A.3	Extração da singularidade forte para NURBS de ordem $p = 4$, em (a) $K_{T(1,2)}$ PF ₁₉ , em (b) $K_{T(1,6)}$ PF ₂₄ , em (c) $K_{T(1,4)}$ PF ₁₄ e em (d) $K_{T(1,6)}$ PF ₁₅	140
C.1	Estrutura em árvore para uma cavidade circular, construída com NURBS de grau $p = 2$, (a) numeração dos nós e (b) numeração das células.	146

LISTA DE TABELAS

3.1	Tipo do material e constantes independentes.....	25
6.1	Propriedade mecânicas, pressão interna e informações geométricas: cilindro vazado.....	69
6.2	Propriedade mecânicas, velocidade angular e informações geométricas: disco rotativo.	76
6.3	Propriedades elásticas e tensão para o grafite epóxi (WANG; QIN; LEI, 2017).....	79
6.4	FCT máximo (ponto A) e mínimo (ponto B) mostrados na Figura 6.14. .	80
6.5	Propriedades elásticas (TSAI; HAHN, 2018), (KONISHI; WHITNEY, 1975), (NUISMER; WHITNEY, 1975).....	82
6.6	Propriedades elásticas do material.....	87
6.7	Deflexão máxima pelo IGABEM e MEC com elementos constantes.....	88
8.1	Propriedade mecânicas do material e pressão interna: cavidade circular.	105
8.2	Deslocamentos em pontos externos para o problema de cavidade circular.	108
8.3	Propriedades elásticas para aplicação das tensões tangenciais.	111
8.4	Cálculo do número de iterações e resíduos.	115
8.5	Propriedades elásticas para o tecido de carbono / Fenólico (DANIELS; ISHAI, 2006).....	117
8.6	Comparação do cálculo do módulo efetivo obtido pelo IGABEM, IGABEM-FMM e comparação com a literatura.....	119
8.7	Tempo da IGABEM-FMM com diferentes elementos por folha.	120
A.1	Dados para criação das NURBS da Figura A.1a.	138
C.1	Reagrupamento dos nós para o modelo da Figura C.1a.	147
C.2	O array numt (<i>i</i>) determina a quantidade de nós por célula.	147
C.3	O array ifath (<i>i</i>) determina o número da célula mãe de cada célula filha.	147
C.4	O array loct (<i>i</i>) mostra o ponto inicial do nó incluído no array <i>ielem</i> (<i>k</i>). ..	147
C.5	O array itree (<i>i</i>) mostra a posição da <i>i</i> -ésima célula em seu nível da árvore.....	148
C.6	O array limcel (<i>i</i>) mostra as informações dos limites de cada célula.....	148

ABREVIACOES, LETRAS GREGAS

Abreviatura	Significado em Inglês
CAD	Computer Aided Design
BEM	Boundary Element Method
BIE	Boundary Integral Equation
DOFs	Degrees of Freedom
FEM	Finite Element Method
FMM	Fast Multipole Method
GMRES	Generalized Minimum Residual Method
IGA	Isogeometric Analysis
IGABEM	Isogeometric Boundary Element Method
IGABEM-FMM	Isogeometric Boundary Element Method with Fast Multipole Method
L2L	Local to Local
M2L	Moment to Local
M2M	Moment to Moment
PDEs	Partial Differential Equations
NURBS	Non Uniform Rational Basis Spline
SST	Singularity Subtraction Technique

Abreviatura	Significado em portugus
MEC	Método de Elemento de Contorno
MEF	Método dos elementos finitos
MSS	Método da Subtração de Singularidade
VPC	Valor Principal de Cauchy

Capítulo 1

Introdução

A composição entre diferentes tipos de materiais sempre foi algo muito utilizado ao longo do desenvolvimento da humanidade. Estas misturas contribuíram para o desenvolvimento de novas classes de materiais, dando a ideia do que hoje conhecemos como materiais compostos. Os materiais compostos ou compósitos como também são conhecidos, são os resultados de dois ou mais materiais dos grupos dos materiais metálicos, cerâmicos e poliméricos, em que o resultado final seja a criação de um novo material com propriedades físicas e mecânicas superiores aos de seus constituintes, (AGARWAL; BROUTMAN; CHANDRASHEKHARA, 2017).

Estes materiais compósitos têm encontrando larga aplicação na área das engenharias, destacando-se por exemplo, os materiais compostos laminados, que possuem características que fazem com que este tipo de material seja muito utilizado por causa da sua resistência mecânica, rigidez, longa vida em fadiga e baixa densidade, possuindo assim, vantagens em relação aos materiais convencionais. A base para esse desempenho estrutural melhor encontra-se em sua alta resistência específica, na alta rigidez específica e principalmente nas características anisotrópicas, devido as diferentes propriedades dos seus constituintes e as suas orientações imersas na matriz. Isso implica em uma análise estrutural mais complexa para se projetar componentes com esses materiais, além de tornar mais complexo o estudo físico e de modelagem numérico computacional do comportamento mecânico desses materiais.

Diversos exemplos de estruturas criadas a partir de compósitos podem ser citadas, como exemplo: na indústria aeroespacial como nas fuselagens, nas peças estruturais em geral; na indústria de construção naval, nos cascos de iates, barcos de corrida, botes salva-vidas e pequenos navios comerciais para pesca e transporte de passageiros; na indústria automotiva, como em componentes elétricos e eletrônico, partes na mecânica; na indústria da construção civil, como em painéis, peças de decoração, fibras de vidro e no concreto; madeiras, especialmente com a finalidade ecológica; na indústria esportiva, dentre outros. Na Figura 1.1 pode ser observada alguns modelos criados com materiais compósitos.

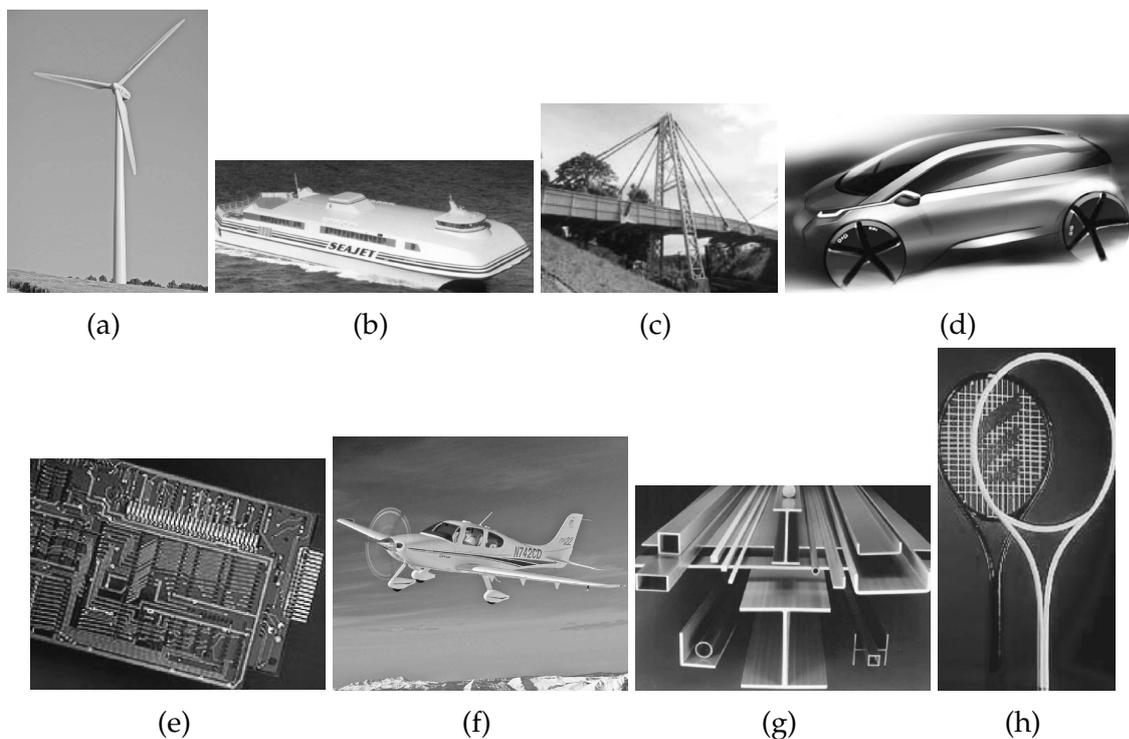


Figura 1.1: Materiais compósitos: (a) turbina eólica, (b) barco, (c) ponte, (d) carro, (e) placa de circuito, (f) avião, (g) equipamentos estruturais e (h) raquete de tênis. Modelos retirados de (MOURA; MORAIS; MAGALHÃES, 2005), (GIBSON, 2016).

Por causa das características peculiares que os materiais compósitos apresentam, o seu uso tem sido cada vez mais expandido nas diversas áreas das engenharias. Daí a necessidade em desenvolver análises numéricas capazes de prever com precisão o comportamento mecânico (deformação e falha) destes materiais. Portanto, é expressivo o interesse da engenharia em propor formulações numéricas para simular computacionalmente o comportamento mecânico destes tipos de estruturas compostas por materiais compósitos. Diante do exposto, a ideia deste trabalho é desenvolver uma nova formulação numérica destinadas para análise de problemas da elasticidade anisotrópica linear bidimensional em materiais compósitos.

Para o desenvolvimento dessa nova formulação, deve-se levar em consideração a complexidade de modelagem destes materiais compósitos, por exemplo, no modelo matemático que utilizam as equações integrais. Mesmo com todo avanço que temos hoje, em diversas situações, soluções analítica ainda são inacessíveis, principalmente para casos onde a geometria e as condições de contorno são complexas. Portanto, diante desse fato, soluções aproximadas por métodos numéricos, são apresentadas como alternativas as soluções exatas.

Quanto ao método numérico, esta tese utilizará o Método dos Elementos de Contorno - MEC, que é capaz de produzir soluções numéricas precisas, inclusive por não requerer aproximação de domínio. Além disso, o MEC possui outras diversas vantagens, dentre elas: 1. É um excelente método numérico pois possui uma

boa facilidade em sua modelagem para problemas com geometrias complexas; 2. Muito indicado também para problemas com domínios semi infinitos ou infinitos; 3. Destaca-se por poder reduzir o domínio de simulação em uma dimensão, uma vez que, é preciso discretizar apenas os contornos do modelo; 4. Com o MEC também é possível obter as informações do domínio a partir das variáveis de contorno, dentre outros. Entretanto o MEC também possui suas desvantagens, e para estas, foram buscadas soluções para reduzi-las.

Dentre as principais limitações, está a produção de matrizes não esparsas e não simétricas, pela característica da relação nó a nó que a metodologia possui. Isso gera um alto custo computacional para montagem do sistema linear, bem como para solução numérica, o que, restringe o MEC a ser um bom método para aplicações apenas em problemas com baixo número de graus de liberdade. Visando essa problemática, diversas técnicas de aceleração aplicadas ao MEC têm sido investigadas nas mais diversas áreas das engenharias para problemas de larga escala, no intuito de colocar o MEC como um método competitivo. Portanto, nesta tese utiliza-se o método das expansões em multipolos rápidos, desenvolvido por Rokhlin e Greengard Rokhlin (1985), Greengard e Rokhlin (1987), Greengard (1988), que promete acelerar as soluções do MEC em várias vezes, reduzindo o tempo de CPU para uma complexidade quase linear, $O(N \log N)$, e também a redução em memória utilizada para construção e solução do sistema linear. Transformando assim, o MEC associado ao FMM, aqui chamaremos de BEMFMM, como uma ótima ferramenta para resolver problemas de larga escala.

Além disso, o MEC é um método aplicado à problemas representados por equações integrais que possuam soluções fundamentais. Neste trabalho, as soluções fundamentais utilizadas foram apresentadas através do formalismo de Lekhnitskii (1968). A utilização dessas soluções fundamentais estão presentes em vários trabalhos e em diferentes áreas, que lidam com a elasticidade linear anisotrópica, alguns dos quais, mecânica da fratura (SOLLERO; ALIABADI, 1993; RAJAPAKSE; XU, 2001); problema de trincas: (ALBUQUERQUE; SOLLERO; FEDELINSKI, 2003; ALBUQUERQUE; SOLLERO; ALIABADI, 2004); problemas de flexão (PASTORINO et al., 2021), entre outros.

Ao utilizar as soluções fundamentais de Lekhnitskii, dependendo da posição dos pontos de colocação da região geométrica discretizada, surgem as singularidades. Com a criação de formulações para elementos de contorno anisotrópicos, técnicas de regularização foram desenvolvidas para avaliação de tais singularidades e podem ser classificadas conforme a forma de resolver o problema. Essas integrais singulares são representadas pelos núcleos de deformação (singularidade fraca) e de tensão (singularidade forte). Para singularidade fraca, foi utilizada nesta tese a transformada de Telles, (TELLES, 1987), que desenvolve uma nova transformação para a quadratura gaussiana tradicional. E para singularidade forte, foi utilizada

a técnica da subtração de singularidade, que foi apresentado por Aliabadi, Hall e Phemister (1985). A SST permite a integração sobre elementos de contorno curvos de alta ordem, e essa ideia encaixa-se perfeitamente com as NURBS, uma vez que as NURBS são construídas a partir de patches, que são exatamente a representação de elementos de contorno curvos de alta ordem. Além disso, conforme (CORDEIRO; LEONEL, 2020), a SST parece ser uma das técnicas mais gerais, uma vez que não impõe nenhuma restrição formal ao tipo de núcleo a ser integrado.

Existe um problema em trabalhar com polinômios de alta ordem, que é a chamada globalidade, ou seja, ao alterar qualquer ponto da curva, afetará toda a curva, implicando em tendências oscilatórias nela, como é o caso do efeito Runge. Por isso, pode-se dizer que os polinômios lagrangeanos têm geralmente uma aplicação bastante específica, sendo restrito a pequenos intervalos. Isso não acontece com as NURBS, porque ao mover a posição de um ponto de controle, a curva sofre alteração apenas localmente dentro de um intervalo. Esta é uma característica particular das NURBS, cuja ideia principal encontra-se em interpolar dados em subgrupos de pontos, obtendo-se, razões polinomiais de graus menores, e fornecendo condições de continuidade e derivadas contínuas até uma certa ordem. Esse fato por exemplo, implica numa boa eficiência do MEC isogeométrico, principalmente para problemas dos quais as tensões variam muito rapidamente.

As NURBS neste trabalho são construídas por meio de curvas de Bézier, que decompõe um conjunto de funções de base NURBS para o polinômio de Bernstein. Isso dará representação local das funções de base, além de estabelecer um elemento bem definido a partir do qual os pontos de colocação serão definidos. Alguns trabalhos como Scott et al. (2011), Borden et al. (2011), D'Angella et al. (2018), Miao et al. (2018) apresentaram a metodologia isogeométrica através da extração de Bézier, com resultados muito satisfatórios. Assim, os elementos de Bézier propostos fornecerão uma estrutura de elemento para análise isogeométrica, (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005), que será incorporada ao BEMFMM, dando através deste a ideia do BEMFMM isogeométrico, ou IGABEM-FMM. Nesse sentido, o conceito isoparamétrico é preservado, e a geometria do problema é usada de forma exata para a maioria das geometrias complexas, como cônicas, quádricas, circunferências, elipses, hipérboles, entre outros, mesmo utilizando um número relativamente baixo de NURBS.

É possível verificar, por exemplo, dois modelos na Figura 1.2, onde uma malha construída por polinômio lagrangeano para representação em elementos finitos é apenas uma aproximação da geometria. Essa aproximação pode, em muitas situações, gerar erros no desenvolvimento da formulação analítica. Por outro lado, note também na Figura 1.2, que, como uma extensão lógica da análise de elementos finitos, os objetivos da abordagem isogeométrica se concentraram em desenvolver uma estrutura de análise baseada em funções empregadas no CAD, capaz de representar

exatamente as geometrias. Como consequência, possíveis erros da geometria são eliminados na análise numérica. Além disso, o conceito de suavidade de uma curva é muito importante para a representação geométrica de um modelo. Alcançar a mesma aparência suave da NURBS através de polígonos, exigiria muito mais detalhes da superfície, como pode ser visto na Figura 1.2. Note, que a modelagem NURBS produz uma geometria mais suave, enquanto os polígonos podem ficar irregulares nas bordas.

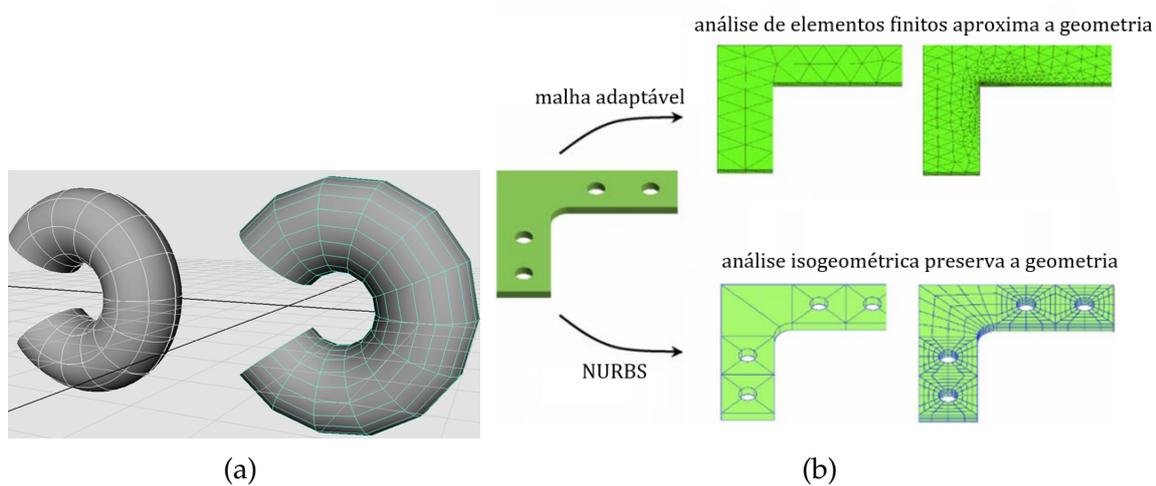


Figura 1.2: É mostrado em (a) um cilindro NURBS a esquerda e um cilindro poligonal a direita, (DERAKHSHANI, 2012). Em (b) um esquema comparando malhas na análise de elementos finitos e na análise isogeométrica, (COTTRELL et al., 2006).

Uma das principais aplicações da formulação elástica linear anisotrópica é a modelagem de problemas que utilizam os materiais compósitos. Vista disso, a presente tese consistiu uma nova formulação destinada a resolver problemas da elasticidade anisotrópica linear bidimensional, e para validar essa formulação, foi implementada em linguagem *Julia* uma ferramenta computacional para as análises mecânicas (tensão, deslocamento, deformação). O programa computacional desenvolvido é baseado na formulação IGABEM e as equações integrais de deslocamentos e de forças de superfície, foram regularizadas através do método de Telles (1987) e (ALIA-BADI; HALL; PHEMISTER, 1985), respectivamente. Além disso, quando analisado problemas em larga escala, a formulação fará uso da IGABEM com o FMM, que associado ao GMRES, permite acelerar o processo iterativo para os cálculos numéricos, conseguindo alcançar na configuração temporal uma complexidade de $O(N \log N)$, reduzindo o esforço computacional em relação ao IGABEM que é $O(N^2)$. Há também uma redução dos custos de processamento de dados, uma vez que, ao utilizar o método rápido com o GMRES, não é necessário construir de maneira explícita a matriz não esparsa que o IGABEM exige. Por fim, para avaliar a convergência e precisão da formulação proposta, diferentes problemas complexos utilizando elementos de contorno isogeométrico retos e curvos de alta ordem, aplicados na análise elástica em problemas quase-isotrópicos, anisotrópicos e ortotrópicos, são analisados e seus

resultados são comparados as soluções analíticas. Através destes resultados, foi possível mostrar a ótima acurácia do método, e com isso pontuar as vantagens de usar esta formulação em relação a formulação do IGABEM.

1.1 Objetivos, metodologia e delimitações da pesquisa

O presente trabalho tem como objetivo principal desenvolver uma formulação do MEC isogeométrico acelerada pelo método das expansões em multipolos rápidos para a análise de problemas bidimensionais da elasticidade plana anisotrópica. No intuito de alcançar com êxito esse objetivo principal, são necessários realizar alguns objetivos específicos, sendo eles:

1. Desenvolver uma aprofundada revisão bibliográfica, no estado da arte, sobre os principais tópicos abordados nesta tese, sendo eles: o MEC isogeométrico em problemas anisotrópicos, o método da subtração de singularidade, o método dos multipolos rápidos e o uso do GMRES com reinício e matriz de pré-condicionamento;
2. Implementar computacionalmente as curvas NURBS na forma de extração de Bézier. Em seguida, validar essa parte do código em problemas mais simples;
3. Estudar de maneira aprofundada a técnica de subtração de singularidade e implementar computacionalmente este método considerando as soluções fundamentais de Lekhnitski. Em seguida, validar essa parte do código acoplado ao IGABEM;
4. Implementar uma versão final do código computacional, que conterà a formulação proposta do IGABEM-FMM.
5. Analisar na literatura problemas da elasticidade linear em problemas mais complexo de características quase-isotrópicas, anisotrópicas e ortotrópicas, que tenham soluções de referência conhecidas na literatura. Fazer comparações com os resultado numéricos da versão final do código computacional.
6. Escrever textos na forma de artigos em revistas científicas e congressos nacionais e internacionais.

1.2 Desafios e contribuições

O conceito de curvas NURBS encontra-se relativamente difundido na literatura. Entretanto, ao trabalhar com problemas em larga escala, as NURBS podem ser melhor utilizadas quando trocadas as funções de forma, escrita da maneira convencional

pelo processo recursivo de Cox-de-Boor, por um processo direto, que possui um menor custo computacional, que é a decomposição de Bézier. Utilizar a decomposição de Bézier nas funções de forma das curvas NURBS tem sido alvo de pesquisas em diferentes trabalhos nas engenharias, como ficará mostrado na pesquisa bibliográfica. Portanto, o estudo e implementação da teoria NURBS na forma de extração do operador de Bézier em problemas da elasticidade linear é um desafio que foi atingido nesta tese.

Além disso, diversos trabalhos têm examinado diferentes técnicas para regularização dos termos singulares que aparecem nas soluções fundamentais quando se trabalha com o MEC. Alvo de pesquisas, têm sido as integrais singulares que são encontradas nas soluções fundamentais para a elasticidade anisotrópica, quando utilizada a interpolação lagrangeana na discretização geométrica dos modelos no MEC. Entretanto, usar a representação isogeométrica na discretização destes modelos geométricos, juntamente com a técnica da subtração de singularidade para regularizar as singularidades fortes que ocorrem nas integrais de superfícies, é algo inédito na literatura. Portanto, nessa perspectiva, avaliar a singularidade forte é um desafio. Principalmente porque a análise isogeométrica não se comporta por exemplo, na mesma forma da análise geométrica por interpolação convencional (constante, linear e quadrática), como será explicado ao longo do texto.

Diante os desafios apresentados, e após uma ampla pesquisa que culminou na construção da revisão bibliográfica, foi percebido que não há na literatura nenhuma formulação como a apresentada neste trabalho. Com isso, a presente tese apresenta como contribuição na área da mecânica computacional:

- Uma formulação isogeométrica do Método dos Elementos de Contorno (MEC Isogeométrico) acelerado pelo método dos multipolos rápidos (FMM). A solução fundamental anisotrópica é utilizada e a integração é realizada pela transformada de Telles e pela técnica de subtração de singularidade (SST). As funções de forma utilizadas são as NURBS, que, evita a geração de malhas e fornece representação exata da maioria das geometrias utilizadas em engenharia. As NURBS são decompostas em curvas de Bézier sem a perda das propriedades de continuidade, o que auxilia também na redução do custo computacional. Reflexo disso, a tese oferece uma formulação com velocidade computacional e precisão superior ao comparar-se com os códigos que utilizam o MEC convencional. Para provar isso, diferentes exemplos numéricos de estruturas simples e complexas são apresentadas na tese, demonstrando a eficiência da metodologia proposta. Portanto, a união destes pilares (MEC isogeométrico - FMM - SST) aplicada em problemas da elasticidade plana bidimensional anisotrópica, mas especificamente, em materiais compósitos laminados, é a contribuição inédita e original desta tese.

Além da contribuição desta tese, já foram geradas também outras publicações em revista e conferência, sendo eles:

- Santos, J. F. ; Albuquerque, E. L. ; CAMPOS, L. S. ; Junior, ABD ; Mateus, DDC . Computation of moments in quadratic discontinuous anisotropic plane elasticity fast multipole formulation. In: 42nd Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, 2021. 42nd Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering.
- Santos, Jailson França dos; Albuquerque, Eder Lima de; Campos, Lucas Silveira. Anisotropic elastic applications in composite materials using the isogeometric boundary element method. Latin American Journal of Solids and Structures, v. 20, p. e471-23, 2023.

1.3 Organização do trabalho

Conforme poderá ser observado ao longo do texto, no capítulo 1 é feita uma breve introdução sobre o conteúdo desta tese, abordando conceitos preliminares sobre materiais compósitos e suas classificações, o método numérico a ser utilizado, que é o MEC, a formulação isogeométrica que utilizada as curvas NURBS e a técnicas de aceleração aplicada ao MEC, finalizando com os objetivos do trabalho, contribuições, desafios, descrição e justificativa para esta tese. No capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica com os principais pontos de estudo deste trabalho, associando a análise isogeométrica, o FMM e MEC anisotrópico com a técnica de subtração de singularidades.

No capítulo 3 é apresentada toda parte da teoria da elasticidade em materiais compósitos anisotrópicos, dando uma ênfase para lâmina ortotrópica e laminados simétricos. No capítulo 4 é introduzido a parte das curvas construídas por B-splines, Bézier e NURBS, sendo esta última, utilizada na forma de extração do operador de Bézier. No capítulo 5 é mostrada a associação das curvas NURBS ao MEC, formando assim a teoria da formulação MEC isogeométrico, e como este é aplicado na análise da elasticidade anisotrópica.

No capítulo 6 são apresentadas diversas aplicações para análise elástica em problemas quase-isotrópicos, anisotrópicos e ortotrópicos afim de avaliar e verificar a robustez da análise isogeométrica apresentada. Por esta pesquisa se tratar de análises em larga escala, o trabalho precisa de uma técnica de aceleração para solução numérica das matrizes não esparsas que o MEC desenvolve. Por isso, no capítulo 7 é mostrada a técnica de aceleração, conhecida como método multipolo dos multipolos rápidos.

No capítulo 8 são mostrados diferentes resultados numéricos para avaliar o ganho em velocidade de processamento e de armazenamento de dados, quando utilizado o MEC isométrico com FMM. E por fim, no capítulo 9 são apresentadas as conclusões finais que foram obtidas com o desenvolvimento deste trabalho, juntamente com as perspectivas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Contextualização e breve revisão da literatura

Esta revisão bibliográfica tem como objetivo, construir elementos que trarão um embasamento teórico, através da fundamentação dos conteúdos apresentados em pesquisas na literatura, que norteiam os principais pontos de estudo dessa tese. Ou seja, busca-se realizar uma pesquisa dos principais trabalhos que apresentem, sempre que possível, tópicos que associem os conteúdos da análise isogeométrica, do FMM e do MEC anisotrópico com a técnica de subtração de singularidades.

2.1 Análise isogeométrica - IGA

Na geometria, o estudo de curvas (conjunto de sucessivas retas) é a base fundamental na criação de formas simples e complexas, que levam a criação de superfícies. Um conceito mais histórico de curvas e superfícies pode ser consultado em Montiel e Ros (2009) e para uma definição mais matemática Abate e Tovená (2012). Essas curvas podem ser representadas por equações que a caracterizam numa representação analítica, e esta representação pode ser dividida em formas paramétricas e não paramétricas. Dentre as curvas paramétricas mais conhecidas é possível citar as curvas de Hermite, Bezier, B-Splines e as NURBS.

A criação e evolução dos computadores em meados dos anos 50, acompanhou a evolução de novas tecnologias apresentada a sociedade. O computador, que conhecemos hoje, passou por diversas transformações ao longo do tempo, acompanhando o avanço das engenharias e ciências exatas. Logo os sistemas computacionais (software), passaram a ser chamados de Desenho assistido por computador, do inglês *Computer Aided Design* - CAD. A tecnologia predominante usada pelo CAD na representação de geometrias complexas é a B-spline não-uniforme racional - NURBS. A NURBS possibilita reproduzir de maneira exata entidades que seriam apenas

aproximadas por funções polinomiais, como no caso do Método dos Elementos Finitos - FEM, incluindo seções cônicas circulares. Isso pode ser visto em Cottrell et al. (2006), em que são mostrados comparativos de geração de malha em FEM utilizando polígonos (vértices, arestas e faces), e a isogeometria - (NURBS) usando curvas desenhadas.

Para este modelo de geometria exata, Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) propuseram um esquema de refinamento k , exclusivo da análise isogeométrica, que consiste numa elevação de ordem e inclusão de nós simultâneos. Existe uma vasta revisão que trata dos diferentes aspectos das NURBS em Rogers (2000) e Piegl e Tiller (2012) e as décadas de pesquisa resultaram em diversos algoritmos eficientes para a avaliação rápida e refinamento. O conceito principal apresentado em Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) é empregar as NURBS não só como discretização da geometria, mas também como ferramenta de discretização na análise, atribuindo a denominação de análise isogeométrica para essa família de métodos. Posteriormente o livro Cottrell, Hughes e Bazilevs (2009) foi publicado dedicado exclusivamente a análise isogeométrica utilizando o Método dos Elementos Finitos. Esse tipo de análise já foi aplicada nas mais diversas áreas, incluindo mecânica dos sólidos, mecânica dos fluídos e contato mecânico.

Apesar de mais desenvolvida no contexto do MEF, a análise isogeométrica somente no MEC é realmente isogeométrica. Nos modelos CAD somente as superfícies são definidas, o interior dos sólidos não é explicitamente modelado. No MEF essa definição é necessária, o que exige uma etapa adicional de análise onde as representações CAD têm que ser convertidas para modelos sólidos. Enquanto isso, no MEC, somente a discretização do contorno, que é completamente definida pelo CAD, é necessária. Outra desvantagem do MEF isogeométrico é que a quadratura de Gauss deixa de ser ótima uma vez que o integrando deixa de ser um simples polinômio. Esse comportamento já é observado no MEC, uma vez que a solução fundamental, que faz parte do integrando, não é um polinômio.

Em Veiga et al. (2014) é apresentada uma revisão com conceitos fortemente matemáticos, com os principais fundamentos teóricos da abordagem apresentada na análise isogeométrica. Análises técnicas variacionais para a resolução numérica de equações diferenciais parciais com base em splines ou NURBS foram mostradas, bem como estimativas ótimas de aproximação e erro em diversos casos. Tal revisão é uma boa leitura para quem deseja investigar mais afundo os processos matemáticos da IGA, apresentando conceitos de espaço isogeométrico para campos escalares e vetoriais, aplicações em problemas elípticos, dentre outros. Um outro artigo com uma boa abordagem matemática, foi apresentado por Gervasio et al. (2020), em que fazem uma comparação sistemática entre o Método dos Elementos Espectrais com Integração Numérica e os métodos da IGA baseados na NURBS, ou ainda Garoni et al. (2019).

Vale destacar que a análise isogeométrica tem se mostrado bastante eficaz em diferentes áreas e diversas aplicações. Abaixo são apresentados alguns desses trabalhos, como forma de proporcionar um sólido embasamento teórico para escrita desta tese.

- Os autores em Beer e Duenser (2019) mostraram através de exemplos numéricos aplicado a problemas potenciais em meio isotrópicos e anisotrópicos, que o uso da BEM isogeométrico tem vantagens sobre outros métodos numéricos. Resultados precisos são mostrados utilizando poucas incógnitas, o que evidencia a boa capacidade da NURBS para descrever geometrias complexas e as variáveis de campo. Outras aplicações em problemas de Laplace e Helmholtz (DÖLZ et al., 2018a) e equação de Stokes (MAESTRE et al., 2017), mostraram que é possível alcançar taxas extremamente altas de convergência. E também para mostrar que o cálculo do MEC isogeométrico permite uma resolução precisa e rápida, além de tempo da CPU ser drasticamente reduzido (LI et al., 2017).
- A IGA é amplamente discutida no trabalho de Nguyen et al. (2017), em que são analisados problemas elastostáticos lineares em 3D. As equações integrais foram resolvidas usando a aproximação padrão de Galerkin. Além de mostrarem as vantagens que a IGA possui, o método proposto explorou a representação de contorno comum do modelo CAD e o MEC. Vários exemplos numéricos de geometrias simples e complexas são examinados para validar a precisão e a eficiência da MEC isogeométrico.
- Um estudo aprofundado e bem sólido com conceitos puramente matemáticos é apresentado em Dolz et al. (2019). Neste trabalho é provado que pode-se obter taxas ótimas de convergência linear para a MEC isogeométrico adaptável para uma equação integral hiper-singular associada ao laplaciano bidimensional.
- Em Ferede, Abdalla e Bussel (2017) é apresentada uma estrutura baseada em IGA para parametrizar uma lâmina de rotor de turbina eólica e avaliar sua resposta. O modelo é baseado na abordagem isogeométrica para analisar as propriedades estruturais e aerodinâmicas. As deformações estruturais são resolvidas usando uma formulação isogeométrica.
- Dificuldades podem ocorrer na análise da integral quase singular no MEC IGA quando aplicada a elasticidade. Em Han et al. (2018) as integrais quase singulares no MEC IGA são separadas na parte não singular e na parte singular pela técnica de subtração. Os núcleos integrais na parte singular são aproximados por série Taylor, enquanto a parte não singular é calculada com quadratura gaussiana. Dessa forma, um método semi-analítico foi proposto

para as integrais quase singulares no MEC IGA. Os autores constataram resultados efetivos, devida à simulação precisa da geometria e discretização somente dos contornos.

Diversos trabalhos que usaram MEC IGA, ou MEF IGA também são destacados como importantes contribuições em diversas áreas da engenharia: na otimização estrutural (OLIVEIRA; ANDRADE; LEONEL, 2020; GILLEBAART; BREUKER, 2018); na investigação do sloshing líquido em tanques axissimétricos com defletores porosos (ZANG et al., 2020); em problemas da acústica (WU; DONG; YANG, 2020; SHAABAN et al., 2020; VENÅS; KVAMSDAL, 2020; SUN et al., 2019; CHEN et al., 2019; CHEN et al., 2019a); em problemas acoplados MEC/MEF (LIU et al., 2018); em problemas de elasticidade linear (TAUS et al., 2019); em transferência de calor (FANG et al., 2020; GONG et al., 2019; GONG; YANG; DONG, 2019; KOSTAS et al., 2018); para problemas de fluxo, equação de Stokes (LIU et al., 2020; BEER et al., 2018); para problemas potenciais 2D ou 3D (WANG et al., 2019; SUN et al., 2018); para IGABEM 3D com enrijecedores (NETO; LEONEL, 2022).

Finalmente conseguimos destacar, que, no contexto de problemas de larga escala, as estruturas IGA possuem um alto custo computacional, devido ao processo recursivo de seus cálculos. Tendo isso em vista, um bom caminho, é seguir a metodologia proposta por Borden et al. (2011), que é transformar as NURBS em curvas de Bézier. Alguns trabalho na literatura (SCOTT et al., 2011; D'ANGELLA et al., 2018; MIAO et al., 2018) mostram que esse é um processo robusto.

Assim, com uma base sólida através da leitura destes trabalhos, foi publicado um artigo (SANTOS; ALBUQUERQUE; CAMPOS, 2023), que descreve uma análise isogeométrica do método dos elementos de contorno, aplicado a problemas elásticos planos 2D anisotrópicos. Neste trabalho, utilizamos as NURBS como funções de forma. Como reflexo disso, o conceito isoparamétrico foi preservado, e, erros de interpolação geométrica foram excluídos, melhorando os resultados numéricos. Além disso, para aumentar a eficiência numérica do código, as NURBS foram decompostas em curvas de Bézier. Para avaliar a precisão da formulação, resultados em diferentes problemas complexos mostraram ótimas concordâncias com soluções analíticas disponíveis na literatura.

2.2 Método dos multipolos rápidos - *FMM*

A eficiência e custo computacional há muito tempo tem sido foco de investigações em pesquisas que envolvem soluções numéricas de problemas com equações diferenciais ou integro-diferenciais, bem como na simulação de modelos computacionais. Armazenamento de dados e tempo de processamento, por exemplo, são

fatores que estão constantemente envolvidos nos estudos, que lidam com simulação de problemas em larga escala.

Em geral, todos métodos numéricos possuem aspectos fortes e fracos, e muitas vezes o que se busca são caminhos alternativos para se acoplar nas ineficiências de cada método, tornando-o cada vez mais usado em quaisquer que sejam as áreas de aplicação. O Método do Elementos de Contorno, por exemplo, possui diversas vantagens, frente a outros métodos, como: 1. MEC é superior aos métodos de domínio pois ele reduz a dimensão do problema ao discretizar apenas os contornos; 2. exatidão - devido à natureza semi-analítica e uso de integrais nas equações de contorno; 3. bom método para problemas que envolvem domínios infinitos ou semi-infinitos. Entretanto, possui também desvantagens, como: 1. na discretização do modelo é gerado matrizes cheias e não simétricas; 2. em geral o tempo de solução é longo e o tamanho da memória necessita ser grande, ambos $O(N^2)$. Por o MEC, mesmo com seus pontos positivos, tem seu uso limitado a resolver modelos em pequena escala, ou seja, com poucos graus de liberdades.

Por entender que o MEC é um bom e promissor método numérico, e com interesse em superar as suas limitações quando aplicado em problemas de larga escala. Ao longo do anos, foi destinado um interesse na construção de técnicas, que, acoplados ao MEC, viessem proporcionar uma solução rápida, melhorando assim, a sua eficiência computacional. Em uma breve revisão na literatura, é possível encontrar diversas técnicas que mostram-se eficientes para acelerar o MEC, algumas delas são: aproximação cruzada adaptativa - ACA (BEBENDORF, 2000; BEBENDORF; RJSANOW, 2003); solucionadores diretos rápidos (LAI; WANG, 2002; GREENGARD et al., 2009); decomposição de domínio (HUANG et al., 2006); *wavelets* (BUCHER et al., 2002), processos de aglutinação (KANE; KUMAR; SAIGAL, 1990), técnicas iterativas (MANSUR; ARAUJO; MALAGHINI, 1992; BARRA et al., 1992), dentre outros.

No entanto, neste trabalho iremos utilizar o FMM, considerado entre os dez principais métodos numéricos desenvolvidos no século XX, segundo Dongarra e Sullivan (2000). A ideia pioneira começou com Appel (1985), no qual utilizou uma estrutura de dados em forma de árvore para armazenar partículas em uma região conhecida como folha. Em cima dessa ideia, a técnica do algoritmo de Barnes e Hut (1986) foi desenvolvida, na qual, tinha a intenção de acelerar o cálculo dos potenciais elétricos e gravitacionais de uma certa quantidade de partículas que interagem entre si, agrupando-as também em uma estrutura de dados do tipo árvore. Assim, Barnes e Hut (1986) mostrou, para este problema que inicialmente tinha a necessidade de $O(N^2)$ operações, poderia ser reduzido para $O(N \log N)$ operações, mesmo com algumas complexidades para construção do algoritmo como mostraram Song e Chew (1995), Bindiganavale e Volakis (1997), Darve (2000). Em Liu e Nishimura (2006) os autores também chamam atenção para a compreensão do BEM-FMM por ser ainda mais difícil em comparação ao MEC convencional, devido às comple-

xidades adicionais e diferentes abordagens nas formulações e implementações do FMM. O trabalho apresenta uma excelente introdução ao BEM-FMM para problemas potenciais. Além disso, conceitos básicos para resolver equações integrais de contorno são descritos e disponibilizado o código-fonte para problemas potenciais bidimensionais que pode auxiliar no desenvolvimento de códigos BEM-FMM. Entre as décadas de 1980 e 1990, Rokhlin (1985), Greengard e Rokhlin (1987), Greengard (1988), Greengard (1990), Rokhlin (1990), Schmidt e Lee (1991) foram alguns dos primeiros trabalhos na elaboração e apresentação do FMM. A nível de esclarecimento, é válido salientar que existem duas versões do FMM, sendo a que abordaremos neste trabalho é a baseada em uma expansão multipolar do *kernel* de interação, que foi proposto pela primeira vez por V. Rokhlin.

No MEC, devido a conectividade entre ponto fonte e ponto campo, tem-se uma matriz densa e não simétrica, necessitando assim de $O(N^2)$ operações. Quando acoplado ao MEC, o FMM é aplicado para acelerar a multiplicação matriz-vetor dos problemas em análise. O uso do método iterativo GMRES combinado com BEM-FMM reduz a complexidade do tempo de CPU e das operações para $O(N \log N)$. Diante desse acoplamento, o BEM-FMM, torna-se um método competitivo frente a outros métodos, tornando-se uma excelente alternativa para solução numérica de problemas com milhares de graus de liberdade, isto é, problemas em larga escala.

Em diversas áreas é possível verificar a utilização do FMM e como a sua aplicação auxiliou no alto despenho computacional quando aplicado à problemas com milhares de DOF, reduzindo o custo computacional e o número de operações. Alguns dos primeiros trabalhos em BEM-FMM na mecânica podem ser encontrados em Peirce e Napier (1995), Gomez e Powert (1997), Fu et al. (1998), Mammoli e Ingber (1999), que confirmam a viabilidade de aplicação do BEM-FMM para solução de problemas de grande escala. Podemos citar rapidamente também algumas outras áreas que nos ajudará a dar embasamento teórico para mostrar que o BEM-FMM é uma metodologia eficiente e de custo computacional reduzido.

- Em problemas eletromagnéticos, uma das dificuldades é a modelagem das estruturas dielétricas multicamadas, pois aumenta drasticamente a memória e o tempo de computacional. Em Ren e Lage (2004), os autores apresentaram uma estratégia de homogeneização aplicada tanto ao FEM quanto no BEM-FMM. Resultados numéricos apontaram que a técnica oferece boa precisão e o esforço de computacional é bastante reduzido. Outra boa leitura que faz comparações numéricas entre o MEF e o BEM-FMM é Htet et al. (2019). Para problema potencial tem-se o trabalho de Hu et al. (2021).
- Diversos problemas na acústica lidam com a complexidade de modelos em larga escala. Por isso é cada vez maior o uso do BEM-FMM unido ao GMRES para solução numérica desses problemas. Alguns trabalhos como Shen e Liu

(2007), Bapat, Shen e Liu (2009), Bapat e Liu (2010), Zhao et al. (2019), Chen et al. (2020), Zheng et al. (2020) mostram de maneira muito clara que o BEM-FMM pode ser várias vezes mais rápido do que o MEC convencional.

- As investigações em trincas são pontos de bastante interesse na mecânica da fratura, que em geral utiliza-se a equações integrais de contorno com singularidades forte e hiper singularidade para simulação numérica destes problemas. Em Nishimura, Yoshida e Kobayashi (1999) foi utilizado o BEM-FMM para resolver problemas com uso das funções de forma constantes. A equação algébrica resultante foi resolvida com o GMRES, e apresentaram um código mais rápido do que o MEC convencional. Outros trabalhos como (WANG; YAO, 2005; DANSOU et al., 2019) também seguem semelhantemente a ideia de simulações em trincas.
- Na mecânica, diversas subáreas também utilizaram o BEM-FMM para simulação de dados, Em Nishimura e Liu (2004) para compósitos de nanotubos de carbono, Yao et al. (2004) na simulação de materiais compósitos, Wang, Yao e Wang (2005), Ptaszny (2021) para problemas elastostáticos 2D, Frangi, Spinola e Vigna (2006), Liu (2008), Sellountos (2020) para problemas de fluxo.

Além dos trabalhos citados, é possível destacar alguns que usaram o FMM-BEM para resolver problemas de elasticidade 2D em larga escala, (LIU, 2006; LIU, 2008). Nestes, os autores utilizaram elementos de contorno constantes, que puderam resolver as integrais de forma analítica, porém precisaram de uma quantidade muito alta de graus de liberdade para alcançar resultados precisos. Finalmente, um dos trabalhos mais citados para quem desenvolve pesquisas utilizando o BEM-FMM é Liu et al. (2011), uma ótima revisão que reuni um total de 465 referências em um esforço conjunto de diversos autores com experiências na área. Outra revisão para o BEM-FMM também pode ser consultada em Chen e Xiao (2012). Por fim, uma publicação que é atualizada com frequência, reúne uma bibliografia com um conjunto de publicações sobre a ideia de Barnes e Hut (1986) e do FMM pode ser consultada em Beebe (2021).

É possível destacar, com a leitura destes trabalhos, que no contexto de problemas de larga escala, BEM-FMM é uma das melhores opções. O esperado é que quando utilizado o BEM-FMM nos problemas estudados nesta tese, problemas anisotrópicos em larga escala, obtenha-se um bom ganho no custo computacional, seja em armazenamento de dados, seja na velocidade de processamento na solução numérica dos problemas.

2.3 IGA, FMM e o tratamento de singularidades no MEC

Pelas características superiores em custo computacional dos métodos rápidos, e com a exatidão das formas geométricas desenhadas pelas NURBS, devido à representação exata dos contornos, que, consecutivamente gera a eliminação de erros de aproximação da geometria, logo surgiram diversos trabalhos que utilizaram dessa união, principalmente acoplada ao MEC, com o intuito de colocá-lo no posto de metodologia concorrente para lidar com problemas de larga escala. Trabalhos como Chen et al. (2019b) na acústica, Takahashi e Matsumoto (2012), Dölz et al. (2018b) para problemas de Laplace e Helmholtz, demonstraram que o MEC isogeométrico baseado em NURBS tem um desempenho melhor do que o MEC convencional em termos de precisão, e o uso do FMM mantém a robustez do MEC isogeométrico e reduz o custo computacional.

Essa união, IGA, com elementos de alta ordem e FMM, possui vantagens promissoras, porém, quando usadas no contexto MEC, acabam sendo impactadas por algumas desvantagens importantes, como por exemplo, no MEC, a necessidade em avaliar singularidades que ocorrem nos termos das soluções fundamentais que aparecem nas equações integrais. Para contornar este desafio, ao longo dos anos, muitos pesquisadores dedicaram esforços e publicaram trabalhos, que apresentavam técnicas diversas, com intuito em fornecer eficiência e precisão para avaliação dessas singularidades. A saber, em diferentes tipos de aplicações, podem aparecer singularidades diversas, tais como: a singularidade fraca, a singularidade forte, a hiper singularidade, ou até as super singularidades. Em Gao (2005) é apresentado um esquema que determina cada tipo dessas singularidades.

Essas técnicas de integração numérica podem ser classificadas conforme a sua forma de resolver o problema, a depender, pode ser por meio da clássica fórmula da quadratura ou modificações desta (TSAMASPHYROS; THEOTOKOGLU, 2006); por avaliação indireta por integração especial, (KUTT, 1975), (LI; HUANG; ZENG, 2020) ou integrais analíticas, (RIZZO, 1967), (BIN et al., 2020); ou através de transformações de regularização de integrando, (TELLES, 1987), (GUIGGIANI, 1991), dentre outros. Nesta tese, não serão detalhados nenhum desses métodos, para isso, uma extensa revisão sobre essas técnicas pode ser consultada em Tanaka, Sladek e Sladek (1994).

Em específico, as integrais singulares neste trabalho são representadas pelos núcleos de deformação (singularidade fraca) e de tensão (singularidade forte). Portanto, utilizaremos para regularização da singularidade fraca, a transformada de Telles (TELLES, 1987), que desenvolve uma nova transformação para a quadratura gaussiana tradicional. De tal forma que seja cancelada a singularidade logarítmica

deixando o integrando regular. E para singularidade forte, será utilizada uma técnica que subtrai a singularidade do modelo numérico, chamada de técnica da subtração de singularidade - SST, apresentado em Jaswon (1963). Em geral, a SST permite a integração sobre elementos de contorno curvos de alta ordem, e essa ideia encaixa-se perfeitamente com as curvas NURBS utilizadas nesse trabalho. Além disso, conforme Cordeiro e Leonel (2020), a SST parece ser um dos mais gerais, uma vez que não impõe nenhuma restrição formal ao tipo de *kernel* a ser integrado.

Ao lidar com as singularidades nos núcleos, a SST adiciona e subtrai expansões de Taylor truncada até a primeira ordem nos núcleos originais. Para esse procedimento de regularização, é necessário fazer a expansão da série de Taylor em torno do ponto singular. A publicação de Cordeiro e Leonel (2020), mostra de forma bem didática o passo a passo da expansão da série de Taylor em torno do ponto singular, e por conseguinte, como acontece a regularização do termo fortemente singular. Os autores neste trabalho utilizaram as funções de interpolação polinomial de elementos de contorno descontínuos. Também Sahli, Mohamed e Sahli (2018) demonstraram essa metodologia da SST.

Alguns trabalhos em diferentes aplicações utilizaram de forma satisfatória a técnica de subtração de singularidade na regularização de integrais fortemente singular, como pode-se citar:

- Em Aliabadi, Hall e Phemister (1985) foi apresentado a SST com expansão de Taylor de alta ordem, para tratar problemas potenciais cuja a integração de funções singulares surgem em formulações isoparamétricas das equações integrais de contorno, mais especificamente no *kernel* fortemente singular $1/r$. Para tal, elementos curvos foram utilizados na simulação computacional dos problemas. Numa extensão deste trabalho, a SST foi novamente utilizada por Aliabadi, Rooke e Cartwright (1987) em problemas de estruturas elásticas lineares plana, ao avaliar os fatores de intensidade de tensão para trincas de diferentes formas.
- Um modelo numérico de malha livre foi utilizado em Oliveira e Portela (2019) para resolver problemas 2D em mecânica de fratura elástica linear. Os autores usaram a SST para regularizar o campo elástico do problema. No texto, os resultados numéricos demonstraram claramente a precisão da estratégia da SST, apresentando boa concordância com as soluções analíticas disponíveis. Concluiu-se que a implementação da SST, torna a formulação muito confiável e robusta para a análise multi-fissuradas em geral. Outro trabalho na mesma linha, que utilizaram a SST para problemas de fissuras é Caicedo e Portela (2015).
- Em Pérez-Arancibia (2018) foram apresentadas as expressões para as equações integrais para a solução de problemas de Helmholtz. Essas expressões foram

obtidas por meio da SST, que também foi utilizada para suavizar os integrantes quase singulares que surgem da avaliação do problema. Com isso, resultados acurados foram apresentados no trabalho.

A SST foi aplicada com sucesso em outros diversos trabalhos: em Marin et al. (2002), que usaram o MEC aplicado a problemas singulares de Cauchy em elasticidade linear isotrópica; com o MEC IGA em problemas elásticos (DAI et al., 2021), e em placas deformáveis por cisalhamento (ABDELMOETY; NAGA; RASHED, 2019); na mecânica da fratura, em Xie e Zhou (2020), entre outros.

Finalmente, em toda pesquisa que foi realizada na literatura, não foi possível encontrar nenhum trabalho que tivesse tratado em qualquer aplicação, a associação IGA, FMM e MEC para materiais elásticos anisotrópicos em 2D, com a técnica de subtração de singularidades. Diversos trabalhos com a IGA e FMM, outros com a IGA e MEC anisotrópico, outros ainda com o FMM e MEC anisotrópico, como foi mostrado ao longo das seções 2.1, 2.2 e 2.3.

Capítulo 3

Teoria da elasticidade para materiais compósitos anisotrópicos

Na classificação dos materiais compósitos, destaca-se o material estrutural, na qual encontram-se os materiais laminados. Convém destacar que, uma lâmina é uma camada plana ou curva de fibras unidirecionalmente dispostas. A lâmina é um material ortotrópico com os eixos principais na direção das fibras (longitudinal), normal as fibras no plano da lamina (transversal) e normal ao plano da lâmina. Pode-se dizer que estas lâminas ao serem colocadas umas sobre as outras, podendo ser em diferentes orientações, dá-se então o conceito de laminado, em uma sequência determinada, de forma a se obter alto desempenho estrutural. Exemplos desse tipo de material, são: os laminados com matrizes poliméricas, os bimetais, metais folheados, madeira compensada, fórmica, dentre outros.

A orientação de uma lâmina é dada pelo ângulo entre o eixo de referência fixo na coordenada x e a direção das fibras no sentido x_1 da lâmina em questão, conforme mostrado na Figura 3.1, medido no plano (x, y) de referência no sentido anti-horário.

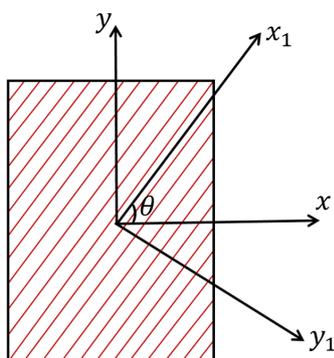


Figura 3.1: Sistemas de coordenadas da lâmina (x_1, y_1) e do laminado (x, y) .

Dada diferentes orientações que a lâmina pode estar, então é possível definir algumas propriedades para o laminado final. Conforme Jr e Rethwisch (2016), essas propriedades podem classificar o compósitos laminados em 4 classes: unidirecional,

cruzados, com camadas em ângulo e multidirecional. Nos unidirecionais, a orientação da direção de alta resistência para todas as lâminas é a mesma Figura 3.2(a); os laminados cruzados possuem orientações da camada de alta resistência alternadas em ângulos de 0° e 90° Figura 3.2(b); e nos laminados com camadas em ângulo, as camadas sucessivas alternam entre orientações de alta resistência de $+\theta$ e $-\theta$ (por exemplo, $\pm 45^\circ$) Figura 3.2(c). Os laminados multidirecionais possuem várias orientações de alta resistência Figura 3.2(d).

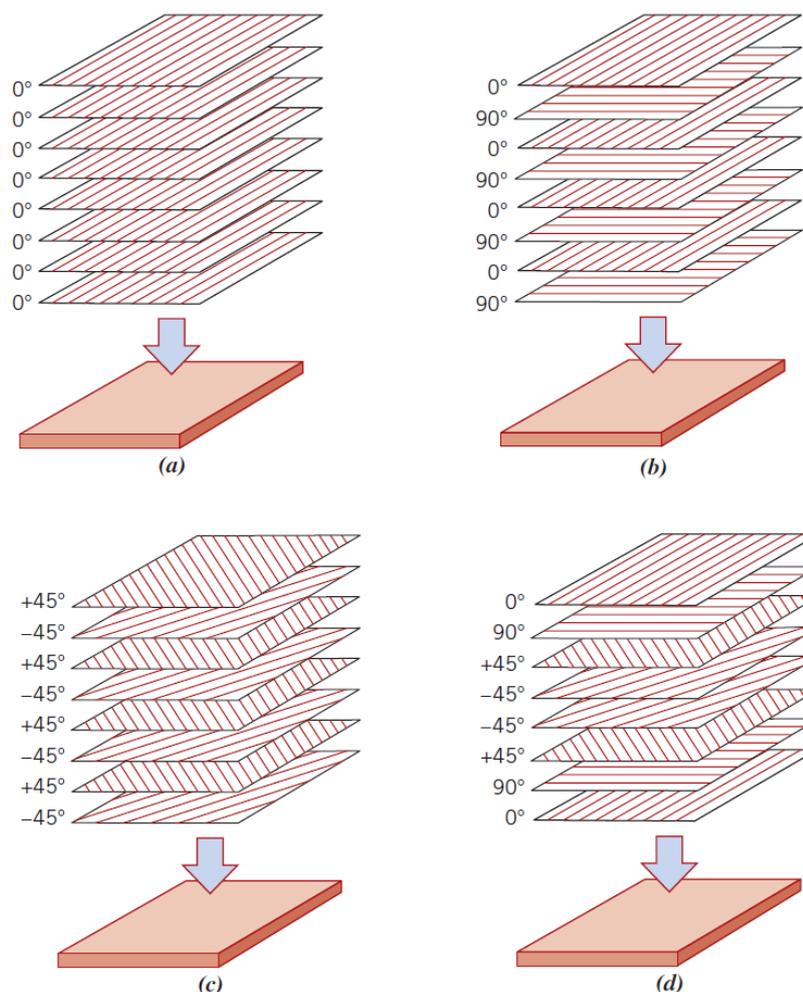


Figura 3.2: compósitos laminados, (a) unidirecional; (b) cruzado; (c) camadas em ângulo; e (d) multidirecional, (JR; RETHWISCH, 2016).

Os materiais compósitos, principalmente os laminados, possui um certo grau de anisotropia devido as diferentes propriedades dos seus constituintes e as suas orientações imersas na matriz. Neste caso, eles necessitam de um número maior de constantes elásticas para caracterizar seu comportamento, o que acarreta em uma análise estrutural de maneira bem mais complexa para se projetar componentes com esses materiais. As relações do tensor tensão x tensor deformação para materiais anisotrópicos fazem parte do escopo da próxima seção.

3.1 Fundamentos da elasticidade anisotrópica

No estudo da teoria da elasticidade anisotrópica, discute-se os conceitos para o estado de tensão, deformação e as relações constitutivas. Nesta seção é feita uma breve descrição dessas teorias e suas equações constituintes.

3.1.1 Estado de tensão

Seja considerado um laminado em n camadas de um material elástico e anisotrópico, conforme mostrado na Figura 3.3. Presume-se que as camadas estão perfeitamente unidas dentro do domínio Ω , e o material em cada camada é homogêneo. A espessura por lâmina, a espessura total do laminado, o ângulo de orientação da fibra e os coeficientes elásticos da n -ésima camada são denotados por h_i , H , θ e $C_{ijkl}^{(n)}$ respectivamente.

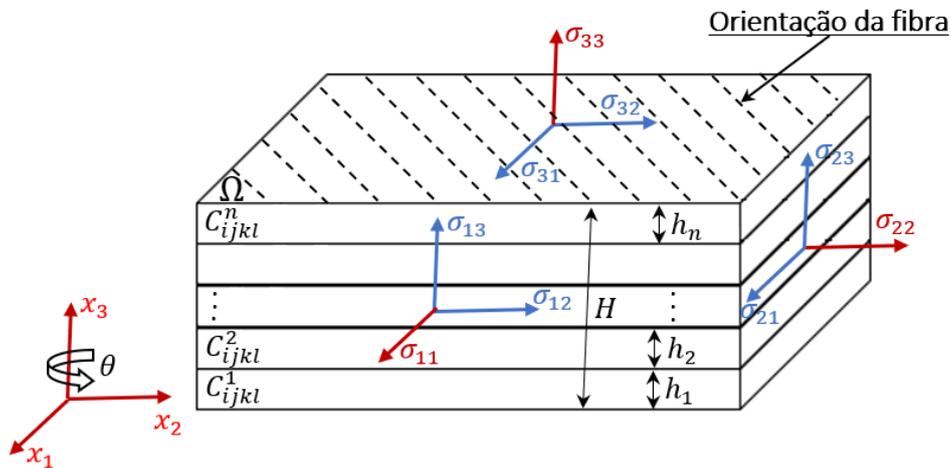


Figura 3.3: Sistema de coordenadas para um laminado.

Em um elemento infinitesimal dentro do domínio Ω , o equilíbrio das forças é expresso na forma da Eq. (3.1), conforme também utilizou Hwu (2010):

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0, \quad (3.1)$$

sendo que, os momentos são simétricos, ou seja, o tensor tensão é escrito como $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, b_i é o vetor de forças de corpo e ρ é a densidade do material. Assim, o vetor de força de superfície t_i em um ponto qualquer do contorno do domínio Ω é escrito na forma:

$$t_i = \sigma_{ij}n_j, \quad (3.2)$$

onde n_j é o vetor normal ao contorno no ponto onde o vetor é calculado.

3.1.2 Estado de deformação

Para relacionar a deformação com a tensão, partimos da consideração dos tensores de deformação Lagrangiana e Euleriana. Porém, com o vetor de deslocamentos e suas derivadas assumidos como infinitesimais. Então, ambos os tensores de deformação Lagrangiana e Euleriana reduzem-se ao tensor de deformação infinitesimal de Cauchy, escrito na forma

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (3.3)$$

Conforme Hwu (2010), nem sempre é possível encontrar um campo de deslocamento contínuo de valor único pela integração da Eq. (3.3). Por esta razão, é preciso ter as condições de compatibilidade para os campos de deformação para garantir a existência de um campo de deslocamento contínuo de valor único para um corpo contínuo. Essa demanda é satisfeita pelo uso da equação de compatibilidade para deformação infinitesimal que é dada por:

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jl,ik} = 0. \quad (3.4)$$

Dada a simetria das deformações, se for considerado o caso de problemas bidimensionais, apenas três componentes de deformação e duas funções de deslocamento são necessárias. Assim, apenas uma equação de compatibilidade independente deve ser satisfeita, e a Eq. (3.4) é reduzida para o caso bidimensional da seguinte equação:

$$2\epsilon_{12,12} = \epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11}. \quad (3.5)$$

3.1.3 Relações constitutivas

As relações constituintes para o material elástico linear para o estado de tensão e de deformação, em um elemento infinitesimal, estão relacionados pela lei de Hooke generalizada, escrita como:

$$\sigma_{ij}^{(n)} = C_{ijkl}^{(n)} \epsilon_{kl}^{(n)}, \quad (3.6a)$$

$$\epsilon_{ij}^{(n)} = S_{ijkl}^{(n)} \sigma_{kl}^{(n)}, \quad (3.6b)$$

onde o sobrescrito (n) representa a n -ésima camada. Os termos σ_{ij} e ϵ_{ij} são os tensores de segunda ordem de tensão e de deformação, respectivamente. Cada tensor é representado por nove componentes, cujos índices são $i, j = 1, 2, 3$. Na Eq. (3.6a), o coeficiente de linearidade $C_{ijkl}^{(n)}$ é um tensor de quarta ordem, possuindo $3^4 = 81$ elementos, chamado de tensor de constantes elásticas, que, segundo Liu et

al. (1990) satisfaz as condições de simetria de Green.

$$C_{ijkl}^{(n)} = C_{klij}^{(n)} = C_{ijlk}^{(n)} = C_{jilk}^{(n)}. \quad (3.7)$$

Para que a Eq. (3.7) possa existir, Hwu (2010) explica que, como os componentes da tensão são simétricos, uma troca dos índices i e j na Eq. (3.6a) não altera a fórmula, de modo que $C_{ijkl}^{(n)} = C_{jikl}^{(n)}$. Assim é possível dizer que a Eq. (3.6a) reduz o número de constantes elásticas independentes para $3 \times 3 \times 6 = 54$. Além disso, por meio da simetria do tensor de deformação, uma outra redução das constantes elásticas pode ser feita. Ou seja, $\epsilon_{ij}^{(n)} = \epsilon_{ji}^{(n)}$ e, portanto, $\sigma_{ij}^{(n)} = C_{ijkl}^{(n)} \epsilon_{kl}^{(n)} = C_{ijlk}^{(n)} \epsilon_{lk}^{(n)} = C_{ijlk}^{(n)} \epsilon_{kl}^{(n)}$, o que pode levar a $\epsilon_{kl}^{(n)} (C_{ijkl}^{(n)} - C_{ijlk}^{(n)}) = 0$. Uma vez que esta igualdade deve ser mantida para valores arbitrários de $\epsilon_{kl}^{(n)}$.

De maneira semelhante, $S_{ijkl}^{(n)}$ na Eq. (3.6b) é um tensor de quarta ordem, chamado de tensor de flexibilidade, que segue as mesmas características do tensor de constantes elásticas. Tais considerações reduz o número de constante elásticas de 81 para 21. Como a direção das tensões principais não coincidem necessariamente com a direção das deformações principais, apenas 18, das 21 constantes são independentes (LEKHNITSKII, 1963). Sendo assim, ambas Eqs. (3.6a) e (3.6b) podem ser escritas na forma matricial, numa notação contraída, como apresentado em (3.8) e (3.9).

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} = \sigma_1 \\ \sigma_{22} = \sigma_2 \\ \sigma_{33} = \sigma_3 \\ \sigma_{23} = \sigma_4 \\ \sigma_{13} = \sigma_5 \\ \sigma_{12} = \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} = \epsilon_1 \\ \epsilon_{22} = \epsilon_2 \\ \epsilon_{33} = \epsilon_3 \\ 2\epsilon_{23} = \epsilon_4 \\ 2\epsilon_{13} = \epsilon_5 \\ 2\epsilon_{12} = \epsilon_6 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

e

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} = \epsilon_1 \\ \epsilon_{22} = \epsilon_2 \\ \epsilon_{33} = \epsilon_3 \\ 2\epsilon_{23} = \epsilon_4 \\ 2\epsilon_{13} = \epsilon_5 \\ 2\epsilon_{12} = \epsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} = \sigma_1 \\ \sigma_{22} = \sigma_2 \\ \sigma_{33} = \sigma_3 \\ \sigma_{23} = \sigma_4 \\ \sigma_{13} = \sigma_5 \\ \sigma_{12} = \sigma_6 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Os termos do tensor de flexibilidade da matriz em (3.9), podem ser escritos como constantes que levam os coeficientes elásticos, conforme Lekhnitskii (1963) apresenta

$$\begin{aligned}
S_{11} &= 1/E_1 & S_{12} &= \nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2 \\
S_{13} &= -\nu_{31}/E_1 = -\nu_{13}/E_3 & S_{14} &= \eta_{23,1}/E_1 = \eta_{1,23}/G_{23} \\
S_{15} &= \eta_{32,1}/E_1 = \eta_{1,32}/G_{23} & S_{16} &= \eta_{12,1}/E_1 \\
S_{22} &= 1/E_2 & S_{23} &= \nu_{32}/E_2 = -\nu_{23}/E_3 \\
S_{24} &= \eta_{23,1}/E_2 = \nu_{23,3}/G_{23} & S_{25} &= \eta_{31,2}/E_2 = \eta_{2,31}/G_{13} \\
S_{26} &= \eta_{12,2}/E_2 = \eta_{2,12}/G_{12} & S_{33} &= 1/E_3 \\
S_{34} &= \eta_{23,3}/E_3 = \eta_{3,23}/G_{23} & S_{35} &= \eta_{31,1}/E_3 = \eta_{3,31}/G_{13} \\
S_{36} &= \eta_{12,3}/E_3 = \eta_{3,12}/G_{12} & S_{44} &= 1/G_{23} \\
S_{45} &= \zeta_{32,23}/G_{23} = \zeta_{23,31}/G_{13} & S_{46} &= \zeta_{12,23}/G_{23} = \zeta_{23,12}/G_{12} \\
S_{55} &= 1/G_{13} & S_{56} &= \zeta_{12,31}/G_{13} = \zeta_{31,12}/G_{12} \\
S_{66} &= 1/G_{12}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Essas constantes, em (3.10), são medidas em testes relativamente simples, como tensão uniaxial ou testes de cisalhamento puro. Elas são definidas no contexto da teoria da elasticidade anisotrópica, conforme Hwu (2010), como: E_1, E_2, E_3 os módulos de Young, ou módulos de elasticidade longitudinais, que ocorrem nas direções x_1, x_2 e x_3 , respectivamente. Essas direções podem ser vistas na Figura 3.3; ν_{ij} é o coeficiente de Poisson para deformação transversal na direção x_j quando tensionada na direção x_i , isto é, $\nu_{ij} = -\epsilon_j/\epsilon_i$ para $\sigma_i = \sigma$ e todas as outras tensões são zero; G_{ij} são os módulos de elasticidade transversais, ou módulo de Coulomb, para os planos definidos pelos eixos $x_i x_j$; $\eta_{i,ij}$ são os coeficientes de influência mútua do primeiro tipo que caracteriza o alongamento na direção x_i causado pelo cisalhamento no plano $x_i x_j$; $\eta_{ij,i}$ é o coeficiente de influência mútua do segundo tipo, que caracteriza o cisalhamento no plano $x_i x_j$ causado pela tensão normal na direção x_i . Finalmente, $\zeta_{ij,kl}$ é o coeficiente de Chentsov que caracteriza a deformação de cisalhamento no plano $x_i x_j$ devido à tensão de cisalhamento no plano $x_k x_l$.

Devido à simetria dos tensores de rigidez e de flexibilidade, é possível definir a quantidade de constantes independentes para diferentes tipos de materiais. A Tabela 3.1 mostra cinco dos materiais mais comuns, conforme Christensen (2012).

Modelo do material	Constantes independentes
Anisotrópico	21
Monoclínico	13
Ortotrópico	09
Transversalmente isotrópico	05
Isotrópico	02

Tabela 3.1: Tipo do material e constantes independentes.

Para o caso particular do estado plano de tensão em (3.8), ocorre quando a tensão normal à uma superfície particular é zero, assim como, para o estado plano de deformação em (3.9), ocorre quando a deformação normal à uma superfície

particular é zero. Isso faz com que esses modelos sejam restringidos à problemas bidimensionais, Eqs. (3.11) e (3.12). No entanto, em um material com anisotropia, a deformação plana geralmente não é possível, exceto para algumas formas especiais, porque geralmente não é possível satisfazer as equações de equilíbrio de um corpo elástico, conforme Lekhnitskii (1963). O que é possível apenas afirmar, é que todos os componentes de tensões e deslocamentos não dependerão de uma superfície. Sendo assim, se for considerado $x_3 = 0$ na Figura 3.3, então, para o estado plano de tensão ($\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$), o material passa a ser representado apenas com seis constantes elásticas independentes. Assim, a Eq. (3.9) pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}, \quad (3.11)$$

e para a configuração do estado plano de deformação ($\sigma_3 = -1/a_{33}(a_{13}\sigma_1 + a_{23}\sigma_2 + a_{36}\sigma_6)$, $\sigma_4 = \sigma_5 = \epsilon_3 = 0$), a Eq. (3.9) pode ser escrita como

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{26} \\ \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}, \quad (3.12)$$

onde os β_{ij} são escritos em termos dos coeficientes da *compliance* (a_{ij}), conforme Lekhnitskii (1968), na forma:

$$\beta_{ij} = a_{ij}, \quad \text{para estado plano de tensão}, \quad (3.13)$$

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}}, \quad \text{para estado plano de deformação}, \quad (3.14)$$

sendo $i, j = 1, 2, 6$.

3.2 Deformação plana pelo formalismo de Lekhnitskii

Como visto na seção 3.1, as equações básicas para elasticidade anisotrópica consistem nas equações de equilíbrio para condições de carregamento estático, dada pela Eq. (3.1) quando considerado o somatório de forças igual à zero, e que não haja presença da força de corpo. As relações entre deformação e deslocamento para pequenas deformações são dadas pela Eq. (3.3), e a relação linear entre tensão e deformação para sólidos elásticos anisotrópicos é dada pela Eq. (3.6a). Após esta etapa, podemos então partir para o formalismo que dá base para a metodologia de solução das equações diferenciais dos problemas anisotrópicos, o formalismo de Lekhnitskii.

Na formulação de Lekhnistkii é usada a equação constitutiva em termos do tensor flexibilidade. Assim, ao reescrever a Eq. (3.11), o tensor de tensão que é considerado dependente apenas das coordenadas x_1 e x_2 , é posto em termos de $(x_1 + \mu x_2)\phi$, que são chamadas de funções de Airy.

$$\epsilon_1 = S_{11} \frac{\partial \phi^2}{\partial x_2^2} + S_{12} \frac{\partial \phi^2}{\partial x_1^2} - S_{16} \frac{\partial \phi^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (3.15a)$$

$$\epsilon_2 = S_{12} \frac{\partial \phi^2}{\partial x_2^2} + S_{22} \frac{\partial \phi^2}{\partial x_1^2} - S_{26} \frac{\partial \phi^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (3.15b)$$

$$\epsilon_6 = S_{16} \frac{\partial \phi^2}{\partial x_2^2} + S_{26} \frac{\partial \phi^2}{\partial x_1^2} - S_{66} \frac{\partial \phi^2}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (3.15c)$$

Usando o conjunto das Eqs. (3.15), e substituindo-as nas restrições de compatibilidade, Eq. (3.5), e com algumas manipulações matemáticas é possível chegar na Eq. (3.16),

$$\begin{aligned} & S_{11} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} + S_{12} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^2 \partial x_1^2} \right) - S_{16} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1 \partial x_2^3} + S_{12} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^2 \partial x_1^2} + S_{22} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} - S_{26} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^3 \partial x_2} = \\ & S_{16} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1 \partial x_2^3} + S_{26} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2 \partial x_1^3} - S_{66} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + S_{11} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} + 2S_{12} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^2 \partial x_1^2} - 2S_{16} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^3 \partial x_2} + \\ & S_{22} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} - 2S_{26} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^3 \partial x_2} + S_{66} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = 0 \Leftrightarrow L_4 \phi = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Sendo L_4 o operador diferencial de quarta ordem, escrito como:

$$L_4 = S_{22} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - 2S_{26} \frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial x_2} + (2S_{12} + S_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - 2S_{16} \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3} + S_{11} \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}, \quad (3.17)$$

e sua solução pode ser encontrada pelo método das características (HWU, 2010), escrita como:

$$S_{11}\mu^4 - 2S_{16}\mu^3 + (2S_{12} + S_{66})\mu^2 - 2S_{26}\mu + S_{22} = 0. \quad (3.18)$$

Os termos da Eq. (3.18) podem ser decompostos em 4 operadores lineares de primeira ordem, escritos como:

$$D_1 D_2 D_3 D_4 \phi = 0, \quad \text{onde:} \quad D_k = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x_1}. \quad (3.19)$$

Conforme Lekhnitskii (1968), as raízes da Eq. (3.18), são sempre complexas ou

imaginárias puras, ocorrendo aos pares, por isso, as raízes podem ser dadas através de dois casos particulares:

$$\begin{aligned} \text{Caso 1 : } \mu_1 &= \alpha_1 + i\beta_1, \quad \mu_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \quad \mu_3 = \bar{\mu}_1, \quad \mu_4 = \bar{\mu}_2, \\ \text{Caso 2 : } \mu_1 &= \mu_2 = \alpha + i\beta, \quad \mu_3 = \mu_4 = \bar{\mu}_1. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Entretanto, o segundo caso raramente ocorre, e pode ser mostrado que se reduzirá a uma formulação isotrópica. Portanto, é descartado o caso 2, uma vez que não é o foco de pesquisa deste trabalho. Logo, se utilizado as raízes do caso 1, e substituídas na Eq. (3.19) após ser decomposta, resulta em

$$\begin{aligned} D_1\phi_1 &= 0, \\ D_2D_3D_4\phi_2 &= \phi_1, \\ D_3D_4\phi_3 &= \phi_2, \\ D_4\phi_4 &= \phi_3, \end{aligned} \quad (3.21)$$

é possível chegar na solução geral escrita em variável complexa, conforme Eq. (3.22)

$$\phi(z_1, z_2) = 2\text{Re}[\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2)], \quad z_1 = x_1 + \mu_1x_2, \quad z_2 = x_1 + \mu_2x_2. \quad (3.22)$$

Para expressar as equações de elasticidade em termos de funções potenciais complexas, adotaremos a notação

$$\frac{d\phi_i(z_i)}{dz_i} = \Phi_i(z_i). \quad (3.23)$$

Por fim, substituindo as Eqs. (3.23) e (3.22) na Eq. (3.15), podemos extrair as componentes de tensão, Eq. (3.24),

$$\text{Tensão} = \begin{cases} \sigma_1 = 2\text{Re}[\mu_1^2\Phi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2^2\Phi_2^{(1)}(z_2)], \\ \sigma_2 = 2\text{Re}[\Phi_1^{(1)}(z_1) + \Phi_2^{(1)}(z_2)] \\ \sigma_6 = -2\text{Re}[\mu_1\Phi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2\Phi_2^{(1)}(z_2)], \end{cases} \quad (3.24)$$

sendo $\Phi_k^{(1)}$ a primeira derivada de Φ_k . As componentes do deslocamento são dadas por:

$$\text{Deslocamento} \begin{cases} u_1 = 2\text{Re}[q_{11}\Phi_1(z_1) + q_{12}\Phi_2(z_2)], \\ u_2 = 2\text{Re}[q_{21}\Phi_1(z_1) + q_{22}\Phi_2(z_2)] \end{cases} \quad (3.25)$$

onde q_{ik} é a matriz de parâmetro complexo, escrita como:

$$q_{ik} = \begin{bmatrix} \mu_k^2 S_{11} + S_{12} - \mu_k S_{16} \\ \mu_k S_{12} - S_{26} + (S_{22}/\mu_k) \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

3.3 Relações elásticas para lâmina ortotrópica

As relações elásticas para lâmina ortotrópica, podem ser expressas conforme a direção do material de reforço imerso na matriz. Nesta seção, será tratada o alinhamento das situações. Primeiro, aquele quando o alinhamento encontra-se de maneira unidirecional, como, por exemplo, a analogia apresentada na Figura 3.2(a). Nestas condições, se as lâminas forem consideradas sob uma condição de tensão plana, com todos os componentes de tensão na direção x_3 iguais a zero,

$$\sigma_{33} = \sigma_3 = 0, \quad (3.27a)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_4 = 0, \quad (3.27b)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_5 = 0, \quad (3.27c)$$

a relação tensão deformação pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix}. \quad (3.28)$$

Conforme Agarwal, Broutman e Chandrashekhara (2017), quando os termos de (3.28) são expandidos, e eliminado os elementos em função de ϵ_3 , então (3.28) é rescrita como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix}, \quad (3.29)$$

sendo Q_{ij} em (3.29) os componentes do tensor rigidez, que podem ser escritos em termos de constantes de engenharia, como:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) & Q_{12} &= \nu_{12}E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) = \nu_{21}E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\ Q_{22} &= E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) & Q_{66} &= G_{12}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

A outra situação é quando as direções principais da lâmina não coincidem com as

direções das coordenadas de referência, situação apresentada na Figura 3.1. Nesta situação, os componentes de tensão e deformação referidos aos principais eixos de material podem ser expressos em termos dos eixos de carregamento, ao serem multiplicados pela matriz transformação, dadas pela Eq. (3.31), ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} \epsilon'_1 \\ \epsilon'_2 \\ \epsilon'_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix}, \quad (3.31)$$

onde \mathbf{T} é a matriz de transformação dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

e θ é o ângulo entre o eixo de referência global x_1 e o eixo de referência local x_1 .

É possível destacar que a matriz \mathbf{T} representa a rotação em torno do eixo das coordenadas, e sua matriz inversa \mathbf{T}^{-1} , pode ser obtida diretamente de \mathbf{T} , substituindo o ângulo θ por $-\theta$. Assim, a relação entre a rigidez transformada \mathbf{Q}^* e a rigidez \mathbf{Q} pode ser escrita como as Eqs. (3.33) e (3.34)

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} (\mathbf{T}^{-1})' \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix}, \quad (3.33)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^* & Q_{12}^* & Q_{16}^* \\ Q_{12}^* & Q_{22}^* & Q_{26}^* \\ Q_{16}^* & Q_{26}^* & Q_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon'_1 \\ \epsilon'_2 \\ \epsilon'_6 \end{Bmatrix}, \quad (3.34)$$

sendo, os elementos de Q_{ij}^* dado por (3.35),

$$\begin{aligned} Q_{11}^* &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ Q_{22}^* &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ Q_{12}^* &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ Q_{66}^* &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ Q_{16}^* &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})(\sin^3 \theta \cos \theta) \\ Q_{66}^* &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})(\sin \theta \cos^3 \theta). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Agora, diz-se que a lâmina é geralmente ortotrópica, pois a matriz \mathbf{Q}^* está totalmente preenchida, e é semelhante em aparência a matriz \mathbf{Q} dos materiais totalmente anisotrópicos ($Q_{16} \neq 0, Q_{26} \neq 0$). No entanto, como a lâmina tem características ortotrópicas nas direções principais do material, pois, Q_{16}^* e Q_{26}^* são combinações lineares das outras quatro, então o seu comportamento mecânico ainda é governado por apenas quatro constantes elásticas independentes, e não por seis constantes elásticas totalmente preenchidas em \mathbf{Q}^* . Por fim, se $Q_{16} = Q_{26} = 0$ o material é chamado de especialmente ortotrópico.

3.3.1 Análise elástica para laminado simétrico

Os laminados simétricos possuem simetrias em suas geometrias e em suas propriedades em relação a um plano médio. Com isso, pode-se dizer que, devido a essa simetria geométrica, as lâminas são agrupadas de tal forma que suas orientações devem ser idênticas na parte superior e inferior em relação ao plano médio. Ou seja, para cada lâmina de um lado deste plano, existe uma outra, idêntica em propriedade, espessura e orientação, localizada a mesma distância no outro lado deste plano médio. A Figura 3.4 mostra um modelo de um laminado simétrico. Nele é possível perceber as orientações do laminado em relação a cada lado, sendo (θ, α, ω) os ângulos de orientações do laminado.

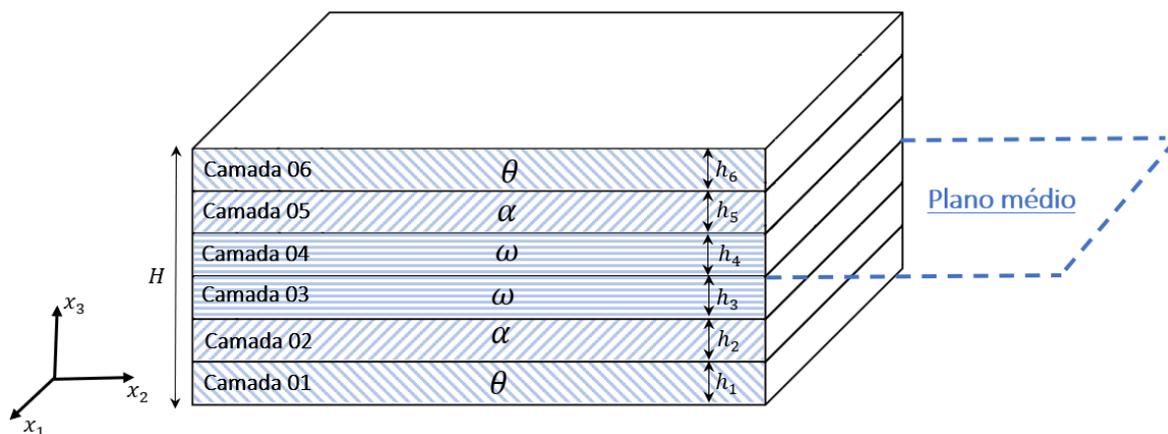


Figura 3.4: Modelo de laminado simétrico com diferentes orientações de lâminas.

Observe que, na Figura 3.4, as espessuras das lâminas obedecem às seguintes restrições: $h_1 = h_6, h_2 = h_5$ e $h_3 = h_4$. Outro fato importante que deve-se notar é que, no laminado simétrico pode haver um número par ou ímpar de camadas. Considere por exemplo, que um laminado par possui propriedades e espessura idênticas e sua orientação seja $[90^\circ/45^\circ/45^\circ/90^\circ]$, e para um número ímpar tenha $[90^\circ/45^\circ/90^\circ]$. Pode-se dizer que há uma maior facilidade para analisar os laminados simétricos,

pelo fato que, $B_{ij}^1 = 0$, pois não há acoplamento entre carregamentos no plano e deformações (curvaturas) fora deste.

Conforme Albuquerque (2001), a não existência de um plano médio implica num laminado no qual não é possível uma análise bidimensional, pois, mesmo que o carregamento seja constante em relação ao eixo x_3 , ao longo de toda a espessura do laminado, além das deformações no plano x_1x_2 , haveria também uma flexão em torno do eixo x_1 , aparecendo deformações nos três eixos.

Ao analisar o comportamento do laminado simétrico, partimos da hipótese que, as deformações em qualquer reta perpendicular ao plano x_1x_2 sejam as mesmas em toda a espessura do laminado. Isto equivale dizer que as lâminas encontram-se perfeitamente coladas (não há escorregamentos entre uma lâmina e outra). Além disso, o tensor de deformações ϵ_{ij} será, por hipótese, o mesmo em todas as lâminas. Assim, para obter as componentes do tensor de tensões atuantes em um laminado, integra-se as componentes atuantes em cada lâmina, ao longo de toda a espessura H do laminado, ou seja

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} \sigma'_{ij} dx_3 \quad (3.36)$$

sendo que, na Eq. (3.36) o termo σ'_{ij} é o tensor de tensão atuante em uma lâmina individual, e o σ_{ij} o tensor de tensão média no laminado.

Considerando que o laminado possua N lâminas genericamente ortotrópicas, conforme mostrado na Figura 3.4, as forças atuantes no plano médio deste laminado podem ser obtidas pela substituição da integral contínua pela soma das integrais, representando a contribuição de cada lâmina

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{H} \sum_{l=1}^N \int_{h_{l-1}}^{h_l} \begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{Bmatrix}_l dx_3, \quad (3.37)$$

que, substituindo a Eq. (3.34) na Eq. (3.37), e algumas manipulações matemáticas, é possível obter

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{H} \left[\sum_{l=1}^N \begin{bmatrix} Q_{11}^* & Q_{12}^* & Q_{16}^* \\ Q_{12}^* & Q_{22}^* & Q_{26}^* \\ Q_{16}^* & Q_{26}^* & Q_{66}^* \end{bmatrix} (h_l - h_{l-1}) \right] \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix}. \quad (3.38)$$

Sendo que Q_l^* é a matriz rigidez e ϵ_i é o vetor deformação constante ao longo da espessura da lâmina ($h_l - h_{l-1}$). Então, da Eq. (3.38) é possível escrever a matriz rigidez média

¹ B_{ij} é a matriz de acoplamento do laminado, que relaciona carregamento no plano às curvaturas e momentos às deformações no plano.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}_L \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix}, \quad (3.39)$$

em que

$$\mathbf{Q}_L = \left[\frac{1}{H} \sum_{l=1}^N \mathbf{Q}_l (h_l - h_{l-1}) \right] \quad (3.40)$$

Com base na Eq. (3.40), o tensor de flexibilidade para o laminado pode ser escrito como o inverso do tensor de rigidez, ou seja:

$$\mathbf{S}_L = \mathbf{Q}_L^{-1} \quad (3.41)$$

Por fim, conforme Albuquerque (2001), em diversas situações será necessário ainda escrever o tensor de rigidez Q_{ij} e de flexibilidade S_{ij} do laminado em relação a um outro referencial. Neste caso, por um procedimento similar ao realizado para encontrar os termos da Eq. (3.10), em que:

$$\begin{aligned} S'_{11} &= S_{11} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{22} \sin^4 \theta + (S_{16} \cos^2 \theta + S_{26} \sin^2 \theta) \sin 2\theta, \\ S'_{22} &= S_{11} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{22} \cos^4 \theta - (S_{16} \cos^2 \theta + S_{26} \sin^2 \theta) \sin 2\theta, \\ S'_{12} &= S_{12} + (S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{2}(S_{26} - S_{16}) \sin 2\theta \cos 2\theta, \\ S'_{66} &= S_{66} + 4(S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2(S_{26} - S_{16}) \sin 2\theta \cos 2\theta, \\ S'_{16} &= (S_{22} \sin^2 \theta - S_{11} \cos^2 \theta + \frac{1}{2}(2S_{12} + S_{66}) \cos 2\theta) \sin 2\theta + S_{16} \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta) \\ &\quad + S_{26} \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \\ S'_{66} &= (S_{22} \cos^2 \theta - S_{11} \sin^2 \theta + \frac{1}{2}(2S_{12} + S_{66}) \cos 2\theta) \sin 2\theta + S_{16} \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &\quad + S_{26} \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta), \end{aligned} \quad (3.42)$$

sendo, em (3.42), S'_{ij} a matriz de constantes elásticas do laminado escrita no sistema (x'_1, x'_2) enquanto que S_{ij} representa esta mesma matriz escrita no sistema (x_1, x_2) . E assim, as raízes da equação característica podem ser escritas num novo sistema de coordenadas, conforme mostrado por Lekhnitskii (1968) como:

$$\mu'_k = \frac{\mu_k \cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \mu_k \sin \theta} \quad (3.43)$$

onde μ'_k representa as raízes da equação característica no referencial (x'_1, x'_2) e μ_k as raízes da mesma equação no referencial (x_1, x_2) .

Capítulo 4

B-spline e NURBS

As representações da computação gráfica e tecnologia (*Computer Aided Design*) - CAD utilizadas para modelar formas simples ou complexas utilizadas nas engenharias, partem dos princípios básicos das curvas e superfícies. Os polinômios de grau elevado podem assumir um comportamento oscilatório, o que, pode refletir em uma não descrição perfeita da função pretendida, como é o caso do efeito Runge. Sendo assim, o caminho é interpolar os dados em subgrupos de pontos, obtendo-se polinômios de graus menores, no caso das NURBS, razões de polinômios que fornecem uma melhor interpolação, e condições de continuidade e derivadas contínuas até uma certa ordem. Para isso, este capítulo apresenta as splines: B-splines e NURBS, que caracterizam-se por apresentarem um comportamento estável.

4.1 Curvas B-Spline

Por possuírem características comuns, pode-se dizer que as curvas B-Spline são consideradas uma generalização das curvas de Bézier. Entretanto possuem algumas propriedades adicionais, como por exemplo o grau da curva e um vetor de nó, e com isso, fornecendo mais controle e flexibilidade da curva em relação a curva de Bézier.

As curvas B-Splines fazem uso de funções de base em regiões do espaço paramétrico. Conforme Piegl e Tiller (2012) estas regiões são denominadas de *knot spans*, que é o vetor com os valores do nó. Sendo assim, uma curva B-Spline é escrita na forma da Eq. (4.1), com uso dos pontos de controle \mathbf{P}_i e as funções de base $N_{i,k}(t)$, sendo a ordem k e o grau da curva $p = k - 1$.

$$\mathcal{C}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}_i N_{i,p}(t). \quad (4.1)$$

4.1.1 Algoritmo de Boor

Uma maneira mais natural para construir a função de base para as curvas B-splines é utilizar a recorrência de Cox-de Boor (BOOR, 1972; COX, 1972), contendo o vetor de nós $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{n+p})$, escrita matematicamente como a Eq. (4.2)

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } u_i \leq t \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{se caso contrário,} \end{cases} \quad (4.2)$$

sendo $i = 1, 2, \dots, n$, para funções $p = 1, 2, \dots, m$, escritas na forma da Eq. (4.3)

$$N_{i,p}(t) = \frac{t - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{u_{i+p+1} - t}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t). \quad (4.3)$$

O número de seguimentos da B-spline, Eq. (4.3), depende do intervalo do vetor \mathbf{u} e cada seguimento é influenciado pelos pontos de controle. Este vetor é escrito com um conjunto de valores reais não decrescentes e possui propriedades que caracterizam a curva B-spline. Ao passo que o parâmetro u_i da Eq. (4.3) muda de segmento, outro ponto de controle torna-se ativo ao mesmo tempo que o antigo é descartado. Verifica-se também que existe uma dependência entre a quantidade de elementos no vetor de nós e a quantidade de funções de base através da relação (número de nós m , grau da curva p e o número de pontos de controle n), escrito como

$$m = p + n + 1. \quad (4.4)$$

Para mostrar o comportamento das curvas B-Spline, construídas como combinação linear das funções de base B-spline, vamos aqui nos ater a análise de dois modelos de curvas B-spline: a cúbica e a quadrática.

Demonstração: para construção de curva cúbica, considere a utilização do vetor uniforme $\mathbf{u}_1 = (0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1)$ e para quádrlica $\mathbf{u}_2 = (0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1, 1)$. Observe que, ao utilizar a Eq. (4.4), para a forma cúbica, teremos $p = 11 - 3 - 1 = 7$ e para quádrlica $p = 10 - 2 - 1 = 7$, ou seja, serão necessários 7 pontos de controle para a construção de ambas as curvas B-Splines.

A Figura 4.1 mostra o comportamento dos resultados apresentados para ambos vetores. Uma característica importante que é necessário destacar, e que pode ser visto entre as Figuras 4.1a e 4.1b, é que as curvas B-spline são curvas por partes, em que, cada parte possui um grau p com m pontos de controle. Ou seja, para uma dada quantidade de pontos de controle de uma curva, teremos a mesma quantidade de funções de base. Observa-se por exemplo, a construção do polinômio em azul contínuo na Figura 4.1a, foi construído através da combinação linear das funções de base em azul contínuo do intervalo $[0; 0,25]$ como é mostrado ao lado.

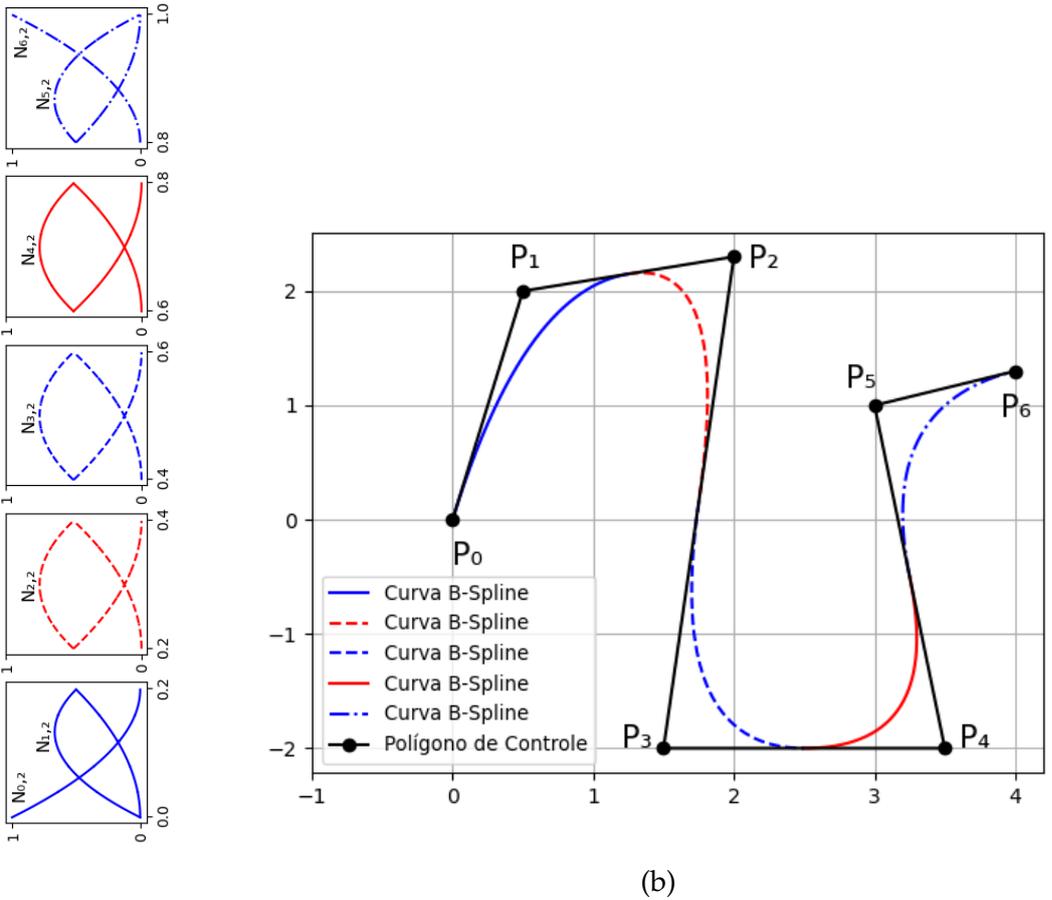
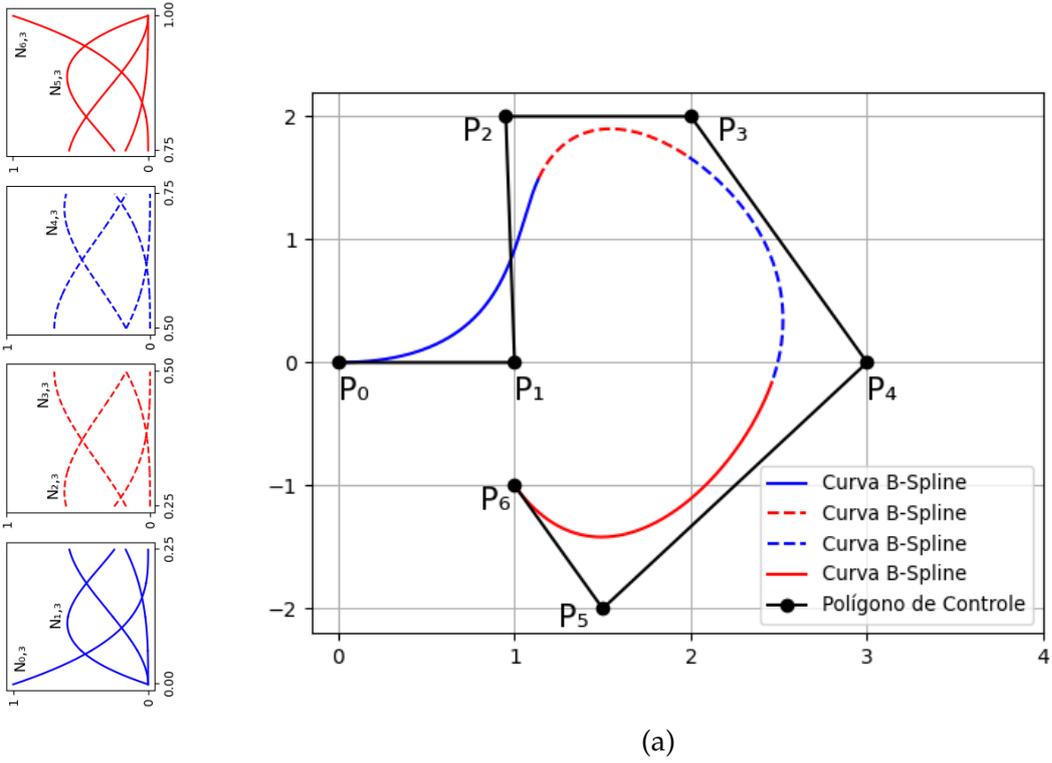


Figura 4.1: (a) Funções de base cúbica usando o vetor \mathbf{u}_1 e a curva cúbica B-spline. (b) Funções de base quádrlica usando o vetor \mathbf{u}_2 e a curva quádrlica B-spline.

As curvas B-spline possuem algumas características próprias e muito importantes, que seguem das propriedades da base das funções, Eq. (4.3). Aqui listaremos algumas delas.

- Se, ao definir uma curva B-spline, $k = p$ na Eq. (4.4), para um vetor uniforme escrito como $u = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$. Então, dizemos que a Eq. (4.1) passa a ser também uma curva de Bézier.
- A geometria da curva B-spline não é afetada quando aplicada uma transformação afim, pois é aplicada nos pontos de controle.
- Cada ponto da curva é calculado como uma soma ponderada de parte dos pontos de controle. Por isso, ao mover de posição o ponto de controle P_i , a curva B-spline sofre alteração apenas localmente dentro de um intervalo.
- A continuidade e diferenciabilidade da Eq. (4.1) depende da função de base $N_{i,p}(t)$, pois, como falado $\mathcal{C}(t)$ é apenas uma combinação linear de $N_{i,p}(t)$. Assim, $\mathcal{C}(t)$ é infinitamente diferenciável no interior de intervalos de nós, e é pelo menos $p - k$ vezes continuamente diferenciável em um nó de multiplicidade k .

Entretanto, as curvas B-splines possuem uma limitação essencial, pois não conseguem reproduzir exatamente entidades geométricas complexas, como círculos, elipses, cônicas, dentre outros, uma vez que não há uma geometria definida por polinômios para estas entidades. A Figura 4.2 mostra, através da curva preta, um círculo perfeito, e uma tentativa de reprodução para este círculo através de curvas B-splines, usando o vetor $\mathbf{u} = (0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1)$.

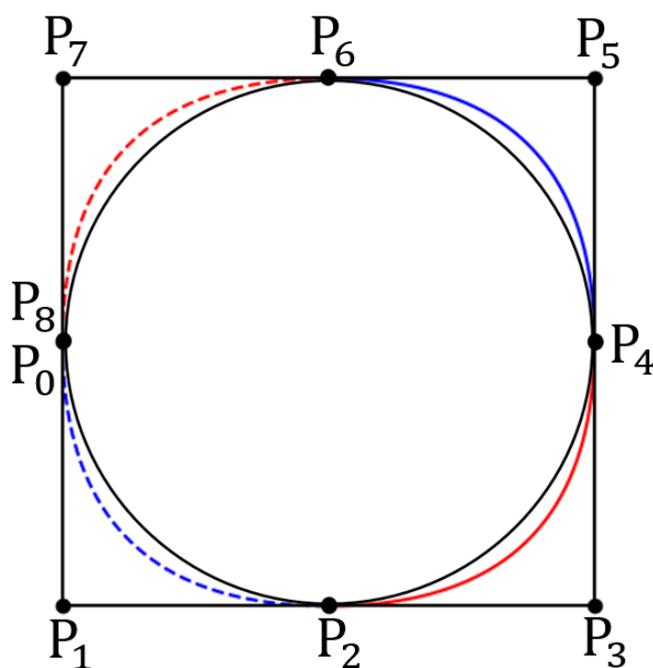


Figura 4.2: Curva quádrlica B-spline para $\mathbf{u} = (0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1)$.

É possível perceber que a geometria da curva em B-spline ainda não é uma boa aproximação para o círculo. Visto isso, dada essa limitação das curvas B-splines, buscamos solucionar essa dificuldade com as B-Splines não uniformes de base racional, a *Non-Uniform Rational B-Splines* – NURBS.

4.2 Curvas NURBS

As curvas apresentadas até aqui, produzem boa parte de geometrias necessária para quem trabalha com desenho assistido. Entretanto como mostrado na seção anterior, algumas formas geométricas não são possíveis de obter de maneira exata através da utilização de polinômios. Tendo isso em vista, vamos avançar nesse conceito e apresentar as bases de funções racionais por partes, conhecidas como base NURBS. Com essas bases, podemos dizer que conseguimos alcançar uma maior variedade das formas geométricas, das mais simples as mais complexas, inclusive os círculos, elipses, cônicas, dentre outros.

O conteúdo das NURBS são semelhantes as da B-splines, entretanto, nas funções base NURBS, além do vetor de nós e do grau, necessários para a B-spline, agora é introduzido mais um conceito, um vetor de pesos \mathbf{w} . Assim, semelhantemente as B-splines, as bases NURBS são definidas através de uma média ponderada entre as funções base B-splines, e podem possuir um peso diferente para cada curva. Vale salientar que, se esses pesos forem todos unitários, a curva NURBS volta a ser também uma curva B-spline.

Uma forma mais usual de representar curva NURBS, é com base no ponto de vista geométrico utilizando coordenadas homogêneas, na qual, na coordena (P_x, P_y) é adicionada o peso w como um ponto de controle, ficando $P^h = (P_x w, P_y w, w)$. Então, é aplicada da mesma forma que na B-spline, Eq. (4.1), resultando em uma B-spline que encontra-se no sistema de coordenadas homogêneas. Assim, para obter a NURBS, é realizada uma projeção dessa curva no plano $w = 1$, Cottrell, Hughes e Bazilevs (2009).

Por outro lado, do ponto de vista algébrico, uma curva NURBS de grau p é definida como:

$$\mathfrak{C}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}_i R_{i,p}(t), \quad (4.5)$$

sendo que, na Eq. (4.5) o termo \mathbf{P}_i representa os pontos de controle, e o conjunto $R_{i,p}(t)$ é a base racional escrita como:

$$R_{i,p}(t) = \frac{w_i N_{i,p}(t)}{\sum_{j=1}^n w_j N_{j,p}(t)} = \frac{w_i N_{i,p}(t)}{W(t)}, \quad (4.6)$$

onde $N_{i,p}(t)$ é a base de função B-spline de grau p para o vetor de nós não uniforme escrito como $\mathbf{u} = \{0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$ e $W(t)$ é a função peso. Por fim, a Eq. (4.6) pode ser reescrita na forma de matriz como,

$$\mathbf{R}(t) = \frac{1}{W(t)} \mathbf{W} \mathbf{N}(t) \quad \text{para} \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_3 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

e $\mathbf{N}(t)$ é o vetor coluna de funções de base B-spline. Pelas características de semelhança, as curvas NURBS possuem basicamente as mesmas características das curvas B-splines, sendo que, alguns destes foram mostrados na seção 4.1.1.

No contexto de problemas de larga escala, as estruturas NURBS possuem um alto custo computacional, devido ao processo recursivo de seus cálculos. Esse fato poderia representar uma desvantagem na concepção da análise isogeométrica. Tendo isso em vista, vamos adotar uma metodologia que diminui esse custo computacional, por meio da transformação das NURBS em curvas de Bézier através do processo da decomposição de Bézier e do operador de extração de Bézier.

4.2.1 Curva de Bézier e polinômio de Bernstein

Vamos apresentar o operador de extração de Bézier para NURBS, que decompõe um conjunto de funções de base NURBS para o polinômio de Bernstein. Isso permitirá a geração de elementos de Bézier contínuos C^0 , conforme Beer e Duenser (2019), dando representação local das funções de base, além de estabelecer um elemento bem definido a partir do qual os pontos de colocação serão definidos. Trabalhos como Scott et al. (2011), Borden et al. (2011), D'Angella et al. (2018), Miao et al. (2018) apresentaram essa metodologia de forma satisfatória. Por isso, a teoria, e os passos para os algoritmos computacionais que foram desenvolvidos para a construção dessa seção 4.2.1 foram escrita com base nestes trabalhos.

A curva de Bézier que foi determinada através da Eq. (4.8), é uma combinação linear do polinômio de Bernstein $B_{i,p}(t)$ e pontos de controles \mathbf{P}_i . A sua equação é escrita de maneira muito próxima da Eq. (4.5).

$$C(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}_i \mathbf{B}_{i,p}(t). \quad (4.8)$$

Aqui, é considerado que o polinômio de Bernstein é definido no intervalo $t = [-1, 1]$, e para tal são usados os pesos da quadratura de Gauss-Legendre para construção do polinômio de Bernstein escrito na forma da Eq. (4.9).

$$B_{i,p}(t) = \frac{1}{2}(1-t)B_{i,p-1}(t) + \frac{1}{2}(1+t)B_{i-1,p-1}(t). \quad (4.9)$$

É mostrado na Figura 4.3, os polinômios de Bernstein para ordem $p = 1, 2, 3$ e 4 .

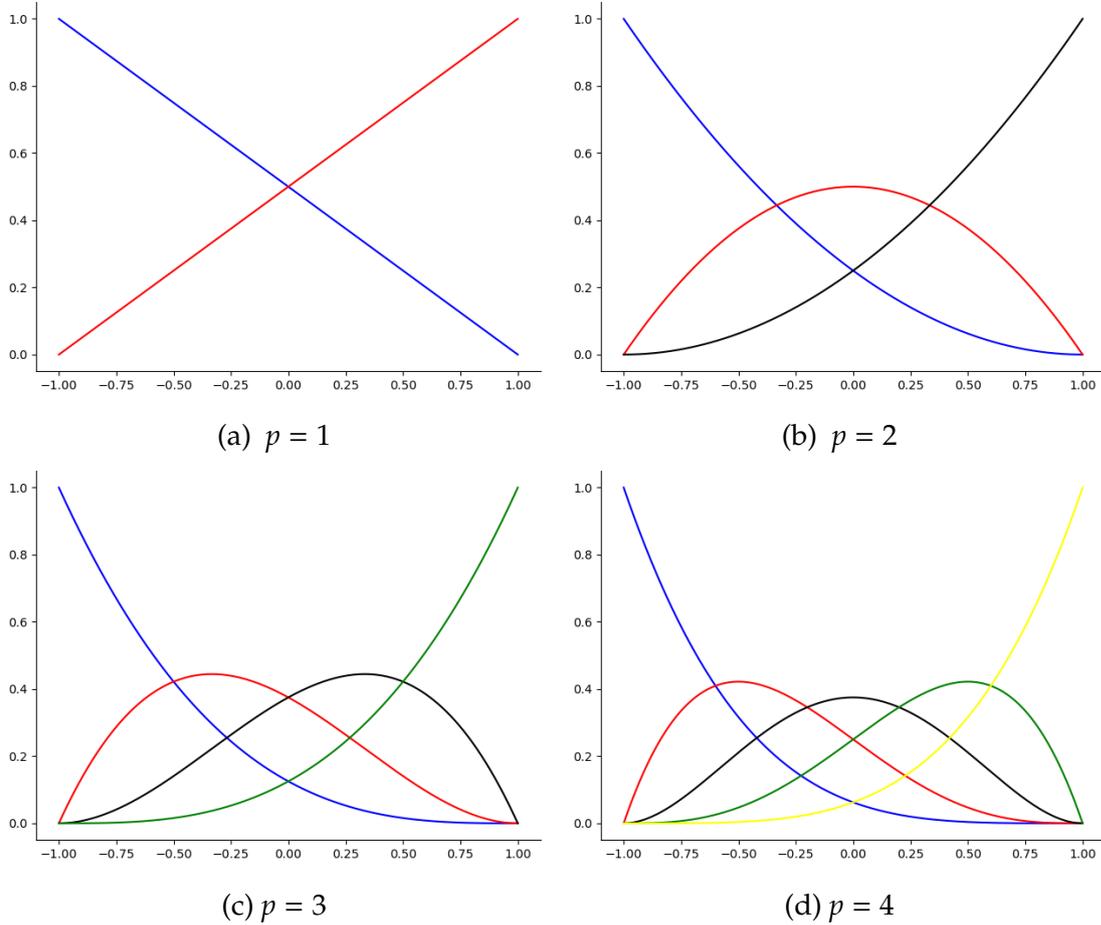


Figura 4.3: Polinômio de Bernstein.

4.2.1.1 Inserção de nós

O processo de refinamento é realizado ao inserir um nó em um vetor de nós já existente, sendo que este nó é adicionado no ponto médio entre os dois nós antigos. É importante ressaltar que, nas NURBS ao inserir nós no vetor de nós existente, não há mudança das propriedades geométricas ou paramétricas da curva.

Para cada nó inserido no vetor de nós existente, um novo ponto de controle deve ser adicionado, isso é feito através da Eq. (4.10):

$$\bar{P}_i = \begin{cases} P_1 & \text{se } i = 1, \\ \alpha_i P_i + (1 - \alpha_i) P_{i-1} & \text{se } 1 < i < m, \\ P_n & \text{se } i = m, \end{cases} \quad (4.10)$$

sendo

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq i \leq k - p, \\ \frac{\bar{t} - t_i}{t_{i+p} - t_i} & \text{se } k - p + 1 \leq i \leq k, \\ 0 & \text{se } i \geq k + 1. \end{cases} \quad (4.11)$$

O artigo de Borden et al. (2011) chama atenção para uma característica importante, pois, os valores nodais podem ser inseridos diversas vezes, porém, a continuidade das funções de base é reduzida por um a cada repetição de inserção de nó. Contudo, ao definir o novo ponto de controle, conforme as Eqs. (4.10) e Eq. (4.11), a continuidade da curva é mantida. É possível também remover um nó, aumentar e diminuir o grau das funções, como mostrado em Piegl e Tiller (2012).

4.2.2 Decomposição de Bézier

Para mostrar como é realizada a decomposição de Bézier, vamos primeiro considerar uma curva cúbica mostrada através da Figura 4.4 e seu vetor de nó associado $\mathbf{u} = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4)$.

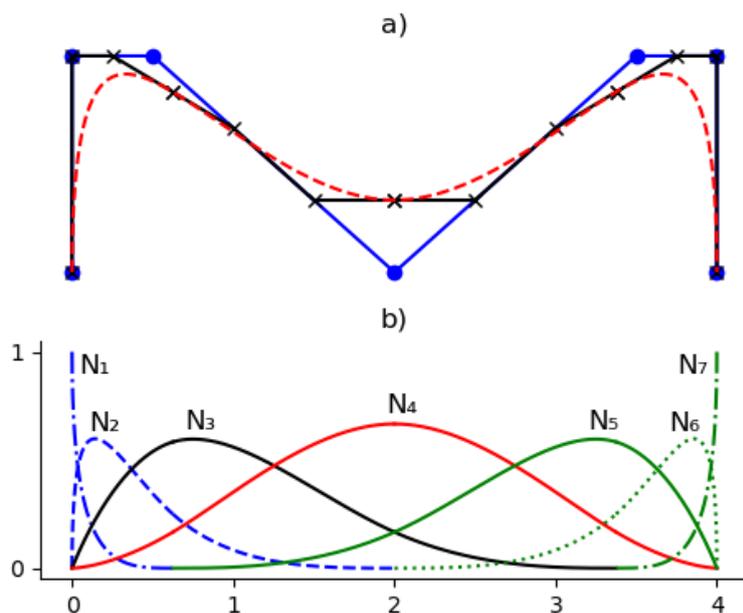


Figura 4.4: a) Curva cúbica NURBS, pontos de controle da NURBS em azul e em preto são os pontos de controle das curvas de Bézier. b) funções de base para a curva, sendo que o vetor de nós é dado por $\mathbf{u} = [0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4]$.

O processo da decomposição da curva Bézier é realizado através da inserção de nós repetidos em todos os nós internos, começando da esquerda, até que tenhamos uma multiplicidade igual ao grau da curva. Assim, por exemplo, como nossa curva

na Figura 4.4 é uma cúbica, então vamos realizar o refinamento do vetor de nós $\mathbf{u}_3 = [0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4]$, inserindo os nós $[1, 1, 2, 2, 3, 3]$.

Na Figura 4.5 é mostrada a curva NURBS para a sequência de nós inseridos, conforme as Eqs. (4.10) e (4.11). Nela são especificados, ainda, os pontos de controle da NURBS \mathbf{P}_i em azul, e os pontos de controle da curva de Bézier em preto. Algumas observações são possíveis destacar:

1. Nas Figuras 4.5a - 4.5f é possível perceber que mesmo inserindo nós, o comportamento da curva Bézier permanece inalterado.
2. Ao plotar a curva cúbica de Bézier, foi usado o vetor de nós $[0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4]$, por isso, o refinamento é realizado ao inserimos nós múltiplos, até que seja atingido o grau p da curva, ou seja, um conjunto de nós $[1, 1, 2, 2, 3, 3]$. Isso é mostrado em cada Figura 4.5, as multiplicidades $[1, 1, \dots, 2, \dots, 3]$ na Figura 4.5a, $[1, 1, 1, \dots, 2, \dots, 3]$ na Figura 4.5b e assim por diante.
3. Na teoria, os nós internos deveriam ter multiplicidade $(p + 1)$ para formar elementos de Bézier. No entanto, a multiplicidade de p é suficiente para representar os polinômios de Bernstein, que neste contexto também são chamados de funções de base de Bézier.
4. A cada nó que é inserido, a continuidade das funções de base é reduzida em um, no local do nó. Percebe-se na Figura 4.4 os nós internos ao elemento, $t = 1, 2$, e 3 , os valores desses nós aparecem apenas uma vez no vetor do nó e, portanto, temos o nível máximo de continuidade possível, isto é, $C^{p-1} = C^2$, com exceção dos extremos, pois, nesse caso, não se consegue definir a continuidade, uma vez que, quando a multiplicidade é $p + 1$, a base se torna descontínua, e por isso são de classe C^{-1} . As reduções das continuidades podem ser vistas na Figura 4.5. Perceba por exemplo, na Figura 4.5a, o primeiro limite interno do elemento, em $t = 1$. Os valores dos nós aparecem duas vezes $[1, 1]$ no vetor do nó e, portanto, temos uma redução no nível da classe para C^1 e assim sucessivamente até atingir a classe C^0 com a inserção de outro $t = 1$. Esse fato é de extrema importância, pois esta transformação torna possível usar elementos C^0 Bézier por partes como a representação de elemento de contorno de uma NURBS.
5. Ao fim do processo da decomposição de Bezier, Figura 4.5f, é possível perceber que os pontos de controle de Bézier calculados pelo algoritmo, são os mesmo pontos de controle dado para a construção da curva.
6. Note a validade da relação apresentada na Eq. (4.4), ou seja, a quantidade de pontos de controle e a quantidade de curvas são iguais. Perceba na Figura

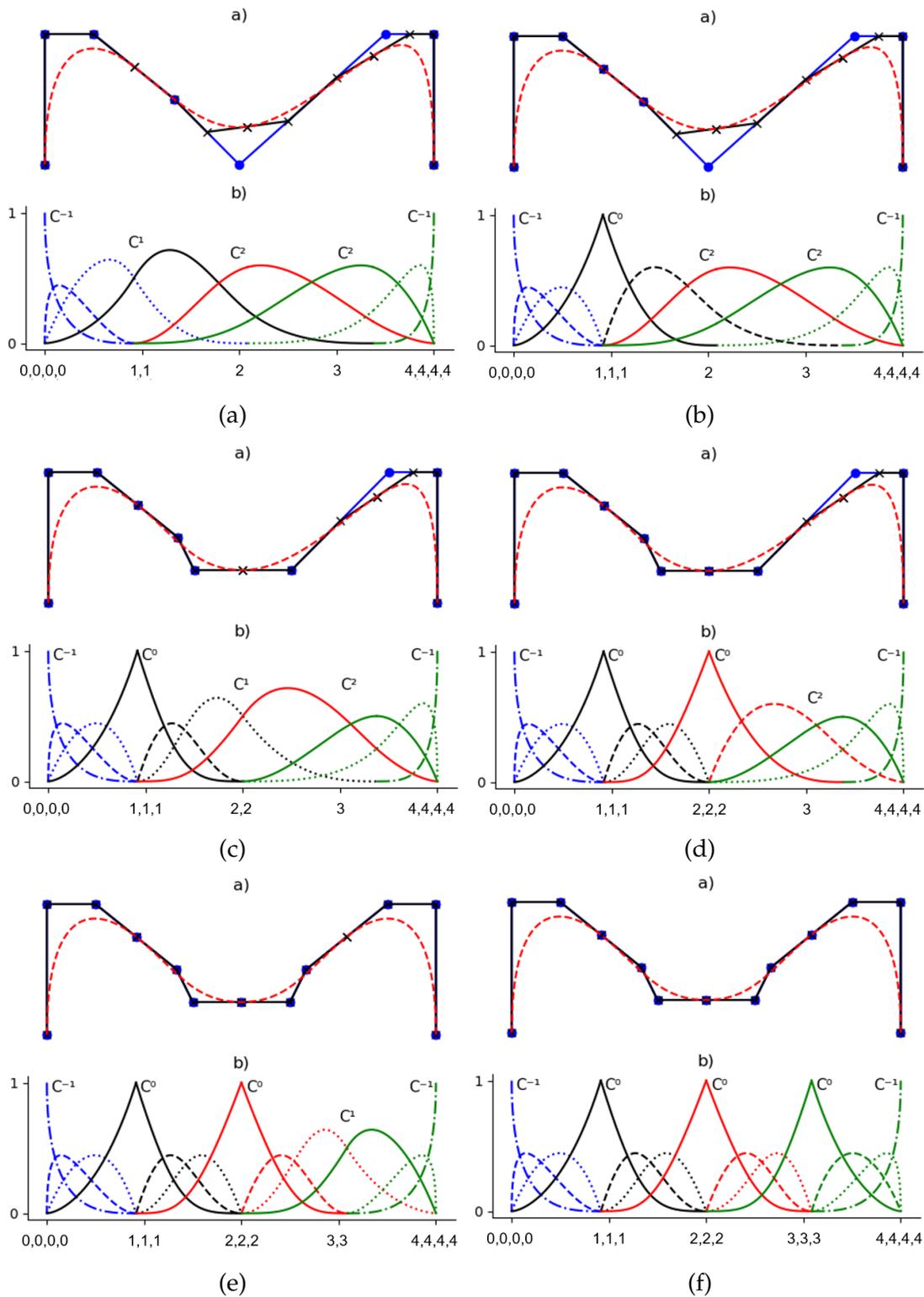


Figura 4.5: Sequências de funções de base criadas pela inserção dos nós para o vetor de nó não uniforme da Figura 4.4. O conjunto final de funções de base em (f) são cúbicas por partes das funções base de Bézier. Os C^i , $i = -1, 0, 1, 2$, denotam as classes de cada elemento de Bézier.

4.5a (12 nós, é igual a 8 número de pontos de controle mais 3 grau da curva mais 1). E nessa mesma analogia segue as outras figuras (para cada ponto de controle inserido, é construída uma nova curva).

4.2.3 Operador de extração Bézier

Foi mostrado na seção 4.2.2 que a decomposição de Bézier é uma operação de inserção de múltiplos nós em um vetor de nós existente. Agora, podemos mostrar que o operador de extração Bézier para uma curva NURBS pode ser calculado para representá-lo em termos de um conjunto de elementos Bézier. Este cálculo é usado para a determinação de novos pontos de controle, através das Eqs. (4.10) e (4.11), com base nos pontos de controles iniciais dado para construção da curva. É válido salientar que, por usar as Eqs. (4.10) e (4.11), a continuidade da curva permanece inalterada.

O operador de extração de Bézier \mathbf{C} é realizado considerando os n pontos de controle e os m nós necessários para realizar a decomposição do vetor $\mathbf{u} = (\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)$ e α_j conforme Eq. (4.11). Então a matriz, Eq. (4.12), que relaciona os novos pontos de controle aos antigos, é escrita como:

$$\mathbf{C}^j = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 - \alpha_2 & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1 - \alpha_3 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 1 - \alpha_4 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & 0 & \alpha_{n+j+1} & 1 - \alpha_{n+j} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Assim a Eq. (4.10) pode ser reescrita em forma matricial para representar a sequência de variáveis de controle criadas por inserção de nós, como:

$$\bar{\mathbf{P}}^{j+1} = (\mathbf{C}^j)^t \bar{\mathbf{P}}^j. \quad (4.13)$$

Ao repetir a forma da Eq. (4.13) m vezes, o conjunto final de pontos de controle $\bar{\mathbf{P}}^{m+1} = \bar{\mathbf{P}}^b$ é definido para \mathbf{C} como a Eq. (4.14)

$$\mathbf{C}^t = (\mathbf{C}^m)^t (\mathbf{C}^{m-1})^t \dots (\mathbf{C}^1)^t. \quad (4.14)$$

Dessa forma, os elementos de Bézier são obtidos através da forma final da decomposição, e a relação entre os novos pontos de controle da curva de Bézier e os pontos de controle inicial da NURBS é escrita conforme a Eq. (4.15):

$$\bar{\mathbf{P}}^b = \mathbf{C}^t \mathbf{P}. \quad (4.15)$$

Conforme já afirmado, a inserção de nós não causa alterações geométricas ou paramétricas na curva, como foi mostrado na seção 4.2.2. Então, da Eq. (4.1) e dado o conjunto de funções de base de Bernstein definidas pelo vetor de nó $\mathbf{B}_i(t)$ para $i = 1, 2, \dots, n + m - 1$, obtém-se:

$$(\bar{\mathbf{P}}^b)^t \mathbf{B}(t) = (\mathbf{C}^t \mathbf{P})^t \mathbf{B}(t) = \mathbf{P}^t \mathbf{C} \mathbf{B}(t) = \mathbf{P}^t \mathbf{N}(t). \quad (4.16)$$

Assim uma nova base e um operador linear é construído de modo que a Eq. (4.16) é escrita como:

$$\mathbf{C} \mathbf{B}(t) = \mathbf{N}(t), \quad (4.17)$$

em que \mathbf{C} é chamado de operador de extração de Bézier e depende apenas do vetor de nós. Note que \mathbf{B} é representado como classe C^0 , e \mathbf{C} mapeia a base polinomial de Bernstein por partes na NURBS, realizando a combinação linear das funções de base de Bézier. Assim, ao escrever $\mathbf{C} \mathbf{B}$, este termo volta a possuir a continuidade da NURBS original.

Quanto a velocidade e o custo computacional, note também que, o termo $\mathbf{C} \mathbf{B}$ é mais rápido e menos custoso em relação a $\mathbf{N}(t)$. Isso é facilmente observado, ao verificar a Eq. (4.8), que representa \mathbf{B} , ela é construída de forma direta pelo polinômio de Bernstein, enquanto a Eq. (4.6), que representa \mathbf{N} , é um polinômio construído de maneira recursiva através da fórmula de Cox-de Boor.

Portanto, substituindo a Eq. (4.17) na Eq. (4.7), as funções de base da NURBS utilizando o operador de extração Bézier torna-se:

$$\mathbf{R}(t) = \frac{1}{W(t)} \mathbf{W} \mathbf{C} \mathbf{B}(t). \quad (4.18)$$

Agora, a Eq. (4.18) está pronta pra ser utilizada como função de forma, na discretização dos elementos de contorno isogeométrico.

Capítulo 5

Formulação MEC isogeométrico para elasticidade anisotrópica

A equação integral de contorno para problemas de elasticidade pode ser obtida de diferentes maneiras. Para este processo, iremos considerar os critérios do teorema recíproco de Betti e a identidade de Somigliana.

5.1 Teorema de reciprocidade de Betti

Conforme Wrobel e Aliabadi (2002), a obtenção das equações integrais de contorno para problemas elastostáticos pode ser derivada do teorema recíproco de Betti. Assim, considere primeiro que dois estados estejam em equilíbrio, um no domínio do problema, (u_i, t_i, b_i) , e o outro no chamado espaço fundamental, (u_i^*, t_i^*, b_i^*) . Então, é possível integrar a Eq. (3.1), considerando u_i^* sobre um domínio Ω , como sendo uma função peso residual:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega + \int_{\Omega} \rho b_i u_i^* d\Omega = 0. \quad (5.1)$$

É possível destacar na Eq. (5.1) que $\sigma_{ij,j} u_i^*$ foi obtido a partir de

$$(\sigma_{ij} u_i^*)_j = \sigma_{ij,j} u_i^* + \sigma_{ji} u_{i,j}^*. \quad (5.2)$$

Vale salientar que a derivada do deslocamento $u_{i,j}^*$ é escrito como a soma do tensor simétrico e anti-simétrico.

$$u_{i,j}^* = \underbrace{\frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*)}_{\text{tensor simétrico de deformação } \epsilon_{i,j}^*} + \underbrace{\frac{1}{2}(u_{i,j}^* - u_{j,i}^*)}_{\text{tensor anti-simétrico de deformação } \omega_{i,j}^*}. \quad (5.3)$$

Como o produto do tensor simétrico pelo seu tensor anti-simétrico é nulo, então é possível escrever

$$\sigma_{ij,j}u_i^* = (\sigma_{ij}u_i^*)_{,j} - \sigma_{ji}\epsilon_{ij}^*. \quad (5.4)$$

Assim, quando substituída a Eq. (5.4) na Eq. (5.1), resulta em:

$$- \int_{\Omega} \sigma_{ij}\epsilon_{ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} (\sigma_{ij}u_i^*)_{,j} d\Omega + \int_{\Omega} \rho b_i u_i^* d\Omega - \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i u_i^* d\Omega = 0, \quad (5.5)$$

e utilizando o teorema da divergência, resulta em:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij}u_i^*)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}u_i^*) n_j d\Gamma = \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma, \quad (5.6)$$

onde $t_i = \sigma_{ij}n_j$. E assim, a Eq. (5.5) é formalizada como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}\epsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b_i u_i^* d\Omega - \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i u_i^* d\Omega. \quad (5.7)$$

Se partirmos da Eq. (3.1) como sendo a correspondente ao estado u_i^* e a função de interpolação da Eq. (5.1) como sendo u_i , segundo Albuquerque (2001), obtém-se de forma análoga a Eq. (5.7):

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b_i^* u_i d\Omega - \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i u_i d\Omega. \quad (5.8)$$

Também, Gaul, Kögl e Wagner (2013) reforçam que o teorema da reciprocidade de Betti combina dois estados elastodinâmicos diferentes nos domínios Ω e Ω^* , descritos pelas variáveis do estado $(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij})$ e $(\sigma_{ij}^*, \epsilon_{ij}^*)$, sendo que, o domínio Ω^* contém o domínio Ω . Assim, o trabalho realizado no domínio Ω pela aplicação das tensões σ_{ij}^* ao estado de deformação ϵ_{ij} é igual ao trabalho realizado pelas tensões σ_{ij} no estado de deformação recíproco ϵ_{ij}^* , que é escrito como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}\epsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^*\epsilon_{ij} d\Omega. \quad (5.9)$$

Por isso, é possível escrever a reciprocidade da Eq. (5.7) e Eq. (5.8). A prova da Eq. (5.9) é simples de ser mostrada, se for utilizada a lei de Hooke, Eq. (3.6a), como um tensor de elasticidade simétrico e relações de contração da álgebra linear:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}\epsilon_{ij}^* &= C_{ijkl}\epsilon_{kl}\epsilon_{ij}^* \\
&= C_{klij}\epsilon_{ij}^*\epsilon_{kl} \\
&= \sigma_{kl}^*\epsilon_{kl}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Finalmente, o teorema recíproco de dois estados de um mesmo material pode ser obtido igualando as Eqs. (5.7) e Eq. (5.8)

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} \rho u_i^* (b_i - \ddot{u}_i) d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \rho u_i (b_i^* - \ddot{u}_i^*) d\Omega. \tag{5.11}$$

Portanto a Eq. (5.11) é conhecida como teorema recíproco de Betti, e fornece uma relação entre dois estados elastostáticos diferentes. O passo agora, é determinar a equação integral de contorno, com base neste teorema.

5.2 Equação integral de contorno

Entre os dois estados diferentes na Eq. (5.11), vamos considerar que um é desconhecido, o estado (u_i, t_i, b_i) que é o estado que deseja-se analisar, e o outro conhecido, é chamado de estado fundamental, (u_i^*, t_i^*, b_i^*) , que, de acordo com Albuquerque (2001), corresponde a resposta de um corpo infinito a uma carga concentrada unitária, representada por uma função delta de Dirac.

Assim, começamos a considerar que, a força de corpo pode ser representada por um operador, chamado de delta de Dirac, $b_i \Leftrightarrow b_i^* = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')e_i$, sendo a componente do vetor unitário e_i corresponde a uma carga de módulo unitário na direção positiva x_i aplicada em \mathbf{x}' . Assim, as seguintes propriedades são definidas:

$$\begin{cases} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \infty & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{x}', \\ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0 & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}', \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\Omega = 1. \end{cases} \tag{5.12}$$

Conforme explica Albuquerque (2001), uma das consequências de se escolher a força de corpo como função delta de Dirac, Eq. (5.12), é redução do número de integrais de domínio do problema. Isso é possível por causa da propriedade de filtragem de função

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')d\Omega = f(\mathbf{x}'). \tag{5.13}$$

Os campos de deslocamento e força de superfície correspondentes à solução de força do ponto, são escritos utilizando as soluções fundamentais de deslocamento $U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ e forças de superfície $T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$, na forma:

$$u_i^* = U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})\delta_{ij}e_j, \quad (5.14a)$$

$$t_i^* = T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})\delta_{ij}e_j. \quad (5.14b)$$

sendo δ_{ij} o delta de Kronecker. Assim, substituindo as Eqs. de (5.14) na Eq. (5.11), e desconsiderando as forças de corpo:

$$u_i(\mathbf{x}') + \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')u_j(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')t_j(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}). \quad (5.15)$$

A equação Eq. (5.15) é conhecida como a Identidade da Somigliana para deslocamentos. Relaciona o valor dos deslocamentos em um ponto interno \mathbf{x}' aos valores do contorno dos deslocamentos e trações. Porém, ela é válida apenas para qualquer ponto fonte dentro do domínio. Para que haja uma solução para os pontos no contorno, é necessário algumas considerações, conforme Wrobel e Aliabadi (2002) apresenta. 1. é importante usar uma extensão simétrica, uma vez que esta se relaciona ao conceito do valor principal de Cauchy; 2. deve-se observar o comportamento não singular, quando $(\mathbf{x} - \mathbf{x}' \neq 0)$ para as integrais da Eq. (5.15); 3. é necessário analisar o limite de transição do ponto campo para o contorno $(\mathbf{x} - \mathbf{x}' = 0)$.

Considerando então a Figura 5.1, o contorno Γ é modificado pela introdução de uma região semicircular Γ_ϵ e raio ϵ , sendo que, o novo contorno agora é dado por:

$$\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma' \quad \text{com} \quad \Gamma' = (\Gamma - \Gamma_\epsilon^* + \Gamma_\epsilon). \quad (5.16)$$

Dada as informações mostradas na Figura 5.1, a identidade de Somigliana, Eq. (5.15), pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}') &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon^*} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')u_j(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')u_j(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon^*} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')t_j(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')t_j(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Quando o ponto fonte \mathbf{x}' tende ao ponto campo \mathbf{x} , a Eq. (5.17) apresenta duas integrais singulares. No caso de U_{ij} é dito que possui singularidade fraca $\log(r)$, e é integrável como uma integral imprópria, enquanto que T_{ij} tem-se uma singularidade forte $\frac{1}{r}$, e é integrável como uma integral que é calculada no sentido do valor principal

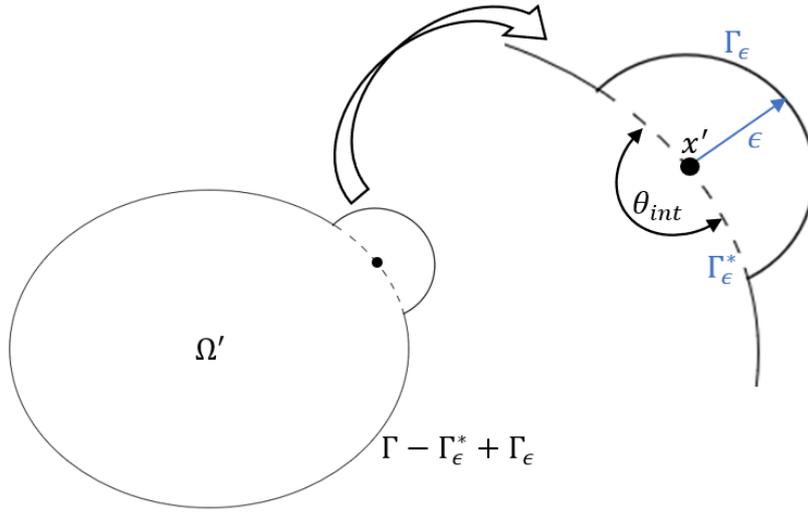


Figura 5.1: Representação esquemática do ponto x' localizado na região semicircular.

de Cauchy. E assim, a Eq. (5.17) resulta em

$$c_{ij}(\mathbf{x}')u_i(\mathbf{x}) + \oint_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})u_j(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})t_j(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}), \quad (5.18)$$

sendo que, \oint representa a integral no sentido do valor principal de Cauchy, e c_{ij} é o termo de coeficiente livre, que generaliza as três possibilidades que podem ocorrer para equação integral de contorno, com respeito a localização do ponto fonte, conforme (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1994).

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x}' \in \text{ao domínio,} \\ \frac{\theta_{int}}{2\pi} & \text{se } \mathbf{x}' \in \text{ao contorno,} \\ 0 & \text{se } \mathbf{x}' \notin \text{ao domínio ou ao contorno.} \end{cases} \quad (5.19)$$

Nas próximas seções será mostrado como são as soluções fundamentais anisotrópicas e quais técnicas serão adotadas para resolver as singularidades.

5.3 Soluções fundamentais para problemas anisotrópicos

As soluções fundamentais para a elasticidade anisotrópica plana utilizadas aqui, são com base na função de tensão de Airy proposta por Lekhnitskii (1963), Lekhnitskii (1968). Portanto, para problemas 2D (plano-deformação), a solução fundamental do deslocamento U_{ij} e a solução fundamental de tração T_{ij} , que representam o deslocamento e a força de superfície no ponto campo z , na direção j , quando a força concentrada está atuando na direção i no ponto fonte z_0 , são dadas através de um

mapeamento em um plano complexo, tal que,

$$z_o = \begin{Bmatrix} z_{o1} \\ z_{o2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{o1} + \mu_1 x_{o2} \\ x_{o1} + \mu_2 x_{o2} \end{Bmatrix}, \quad \text{ponto fonte} \quad (5.20a)$$

$$z = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 + \mu_1 x_2 \\ x_1 + \mu_2 x_2 \end{Bmatrix}, \quad \text{ponto campo.} \quad (5.20b)$$

lembrando que, μ_1 e μ_2 são as raízes da equação característica, mostrada na Eq (3.18). Conforme Cruse e Swedlow (1971), as forças de superfície fechada arbitrária considerando carregamentos concentrados, podem ser escritas como:

$$\oint_{\Gamma} t_1 d\Gamma = 2\text{Re}[\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2], \quad (5.21a)$$

$$\oint_{\Gamma} t_2 d\Gamma = -2\text{Re}[\Phi_1 + \Phi_2], \quad (5.21b)$$

assim, para que a Eq (5.21) satisfaça qualquer contorno fechado Γ em torno de z_o , deve-se considerar:

$$\Phi_{jk} = A_{jk} \log(z_k - z_{ok}). \quad (5.22)$$

Então, para determinar a solução fundamental de deslocamento U_{ij} , basta substituir a Eq (5.22) na Eq (3.25), e é obtido:

$$U_{ij}(z, z_o) = 2\text{Re}[q_{i1} A_{j1} \log(z_{o1} - z_1) + q_{i2} A_{j2} \log(z_{o2} - z_2)], \quad (5.23)$$

e a partir da derivada de Eq (5.22) com respeito a z_k , substituída Eq (3.24), chega-se na solução fundamental para força de superfície T_{ij} ,

$$T_{ij}(z, z_o) = 2\text{Re}\left[\frac{1}{(z_{o1} - z_1)} g_{j1} (\mu_1 n_1 - n_2) A_{i1} + \frac{1}{(z_{o2} - z_2)} g_{j2} (\mu_2 n_1 - n_1) A_{i2}\right], \quad (5.24)$$

em que $\text{Re}[\]$ indica a parte real da expressão, e mais detalhes podem ser consultados em Júnior (2019). Os termos μ_k - Eq (3.18), e q_{ik} , g_{ji} e A_{jk} são escritos como

$$q_{ik} = \begin{bmatrix} a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k \\ a_{12}\mu_k + a_{22}/\mu_k - a_{26} \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

$$g_{ji} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

$$A_{jk} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & -\bar{\mu}_1 & \mu_2 & -\bar{\mu}_2 \\ q_{11} & -\bar{q}_{11} & q_{12} & -\bar{q}_{12} \\ q_{21} & -\bar{q}_{21} & q_{22} & -\bar{q}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{j1} \\ -\bar{A}_{j1} \\ A_{j2} \\ -\bar{A}_{j2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{j2}/(2\pi i) \\ -\delta_{j1}/(2\pi i) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

Nas soluções fundamentais dada pelas Eqs. (5.23) e (5.24), teremos um problema de singularidades, quando o ponto fonte e o ponto campo se aproximam. A análise dessas singularidades é um ponto crucial para que se possa conseguir resolver a equação integral de contorno. Por isso, na próxima seção, esse tema será discutido.

5.4 Método dos Elementos de contorno isogeométrico

Após obter a equação integral de contorno, Eq. (5.18), o passo agora é a discretização desta equação, de maneira que, as integrais ao longo de um dado contorno sejam escritas como a soma das partes deste contorno. Na discretização convencional do MEC, é utilizado o conjunto de funções de base polinomiais, que podem ser dados por elementos constantes, lineares ou quadráticos. Entretanto, o foco deste trabalho concentra-se em utilizar as funções de bases NURBS nesta discretização.

É preciso considerar que, no MEC isogeométrico, a definição de curvas baseadas em NURBS (ou *patch* como também é chamado) não é tão direta como na formulação convencional. Portanto, primeiro iremos impor uma condição de mapeamento para o elemento, conforme Beer, Marussig e Duenser (2020) orienta. Considere a Figura 5.2, que mostra um exemplo de *patch*.

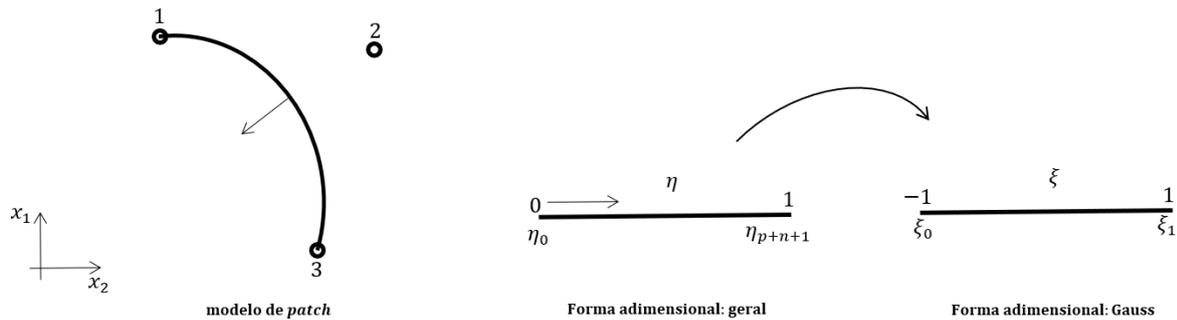


Figura 5.2: Modelo de um *patch*, com pontos de controle e normal externa. E a mudança da coordenada global $[x_1, x_2]$, para o sistema de coordenadas adimensionais de Gauss.

Assim, um ponto x em um *patch* é dado por

$$\mathbf{x}(\cdot) = \sum_{i=1}^I R_i(\cdot) \mathbf{x}_i, \quad (5.28)$$

sendo (\cdot) um espaço reservado para as coordenadas locais do objeto, R_i são funções de base NURBS apresentadas na Eq. (4.18), e \mathbf{x}_i referem-se às coordenadas dos pontos de controle correspondentes. O índice i é o índice global dentro do *patch* classificado na direção ξ , e I é o número total de funções de base dentro da base.

Observe que, com base na Figura 5.2, é mostrado o mapeamento para um elemento de parâmetro η , para o sistema de coordenadas global x . Note que, η é escrito em $[0, 1]$, ou seja, $\eta \in [\eta_0, \eta_{p+n+1}]$, sendo $p + n + 1$ a mesma relação da Eq. (4.4). Entretanto, para fins de integração numérica usando a quadratura de Gauss-Legendre, que são comumente mais utilizadas, é feita uma transformação linear, que mapeia o elemento de parâmetro η , para um elemento $\xi \in [-1, 1]$. Para que isso aconteça, é necessário que exista um jacobiano da transformação do espaço físico para o espaço paramétrico, (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1994). Isto é,

$$\frac{d\Gamma}{d\eta} = \sqrt{\left(\frac{dx_1(\eta)}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2(\eta)}{d\eta}\right)^2}, \quad (5.29)$$

$$\frac{d\Gamma}{d\xi} = \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{d\xi} = J(\xi), \quad (5.30)$$

Agora, precisamos estabelecer o termo de conectividade entre os elementos. Isto é, ao desativar um elemento e ativar um outro, ambos devem ter um ponto de conectividade entre eles. Essa função de conectividade pode ser vista em Simpson et al. (2013), na qual, um conjunto de funções de base locais se relacionam com as funções globais da forma:

$$N_c^e \equiv R_{n,p}(\xi), \quad (5.31)$$

onde o número da função de base local c , número do elemento e e número da função de base global são relacionados pela função de conectividade, escrita como,

$$n = \text{conn}(e, c), \quad (5.32)$$

A partir da conectividade entre os elementos, Eqs. (5.31) e (5.32), agora é possível estabelecer as aproximações isogeométricas para a geometria, e a Eq. (5.28) é reescrita como:

$$\mathbf{x}_e(\xi) = \sum_{c=1}^{p+1} N_c^e(\xi) \mathbf{x}_c^e, \quad (5.33)$$

e para o deslocamento e força de superfície:

$$\mathbf{u}_e(\xi) = \sum_{c=1}^{p+1} N_c^e(\xi) \mathbf{u}_c^e, \quad (5.34)$$

$$\mathbf{t}_e(\xi) = \sum_{c=1}^{p+1} N_c^e(\xi) \mathbf{t}_c^e, \quad (5.35)$$

sendo \mathbf{x}_c^e , \mathbf{u}_c^e e \mathbf{t}_c^e os vetores das coordenadas geométricas, coeficientes de deslocamento e coeficientes de tração, associados ao ponto de controle correspondente à função de base c para a curva de Bézier e . É importante notar que é usado o termo coeficiente, uma vez que as funções de base NURBS não obedecem necessariamente à propriedade delta de Kronecker. Portanto, \mathbf{u}_c^e e \mathbf{t}_c^e não representam necessariamente deslocamentos e as forças de superfícies reais (SIMPSON et al., 2013).

Por fim, agora, é possível utilizar a equação do Jacobiano (5.30), e as Eqs. (5.34) e (5.35), e substituí-las na equação integral de contorno Eq. (5.18). Isto resulta na equação discretizada para o MEC isogeométrico:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\mathbf{x}') \sum_{l=1}^{p+1} N_l^{\bar{e}}(\xi') u_j^{l\bar{e}} + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{l=1}^{p+1} \left[\int_{-1}^1 T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}(\xi)) N_l^e(\xi) J(\xi) d\xi \right] u_j^{le} \\ = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{l=1}^{p+1} \left[\int_{-1}^1 U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}(\xi)) N_l^e(\xi) J(\xi) d\xi \right] t_j^{le}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

onde u_j^{le} e t_j^{le} representam as componentes dos vetores \mathbf{u}_c^e e \mathbf{t}_c^e . No MEC convencional, a propriedade do delta de Kronecker das funções de base garante que no próprio ponto de colocação, as funções de base sejam interpoladores. Já a formulação MEC isogeométrico, não pode garantir que isso seja verdade, e o deslocamento deve ser interpolado como $u_j(\mathbf{x}') = \sum_{l=1}^{p+1} N_l^{\bar{e}}(\xi') u_j^{l\bar{e}}$, sendo, \mathbf{x}' o elemento que contém o ponto de colocação, e ξ' a coordenada local do ponto de colocação no elemento \bar{e} .

O operador extração de Bézier, desenvolvido na seção 4.2, promove a construção de elementos muito similar a de elemento no MEC convencional. Cada *patch* do espaço paramétrico, corresponde a um elemento independente dos elementos adjacentes, que por sua vez são correspondentes aos subintervalos paramétricos adjacentes ao inicial. Assim, Eq. (5.36) deve ser aplicada a cada ponto de controle, escolhidas conforme os pontos de colocação de Greville modificada, que, por fim, gerará um sistema algébrico de matriz cheia e não simétrica, do tipo

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2N} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & H_{N2} & \dots & H_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2N} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ G_{N1} & G_{N2} & \dots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ \bar{t}_2 \\ \vdots \\ t_N \end{Bmatrix}. \quad (5.37)$$

sendo as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} obtidas pelos termos do lado esquerdo e direito da Eq. (5.37), respectivamente. Os vetores \mathbf{t} e \mathbf{u} correspondem as forças de superfície e deslocamentos, sendo $\bar{\mathbf{u}}_i$ e $\bar{\mathbf{t}}_i$ os termos conhecidos, e os demais, desconhecidos. Assim, realocando os termos conhecidos e não conhecidos, juntamente com as condições de contorno, chega-se a um sistema de equação linear do tipo:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

sendo \mathbf{x} o vetor de solução das forças de superfície e deslocamentos.

5.5 Organização dos pontos de colocação

Como visto na seção 4, os pontos de controles não estão necessariamente na curva e sim no polígono de controle. Essa forma de colocação faz com que esta não seja a melhor escolha para os pontos de colocação do MEC. Em Li e Qian (2011), foram testadas diferentes formas de distribuição para os pontos de colocação. Por seus resultados, as coordenadas de Greville demonstrou uma melhor eficiência, com resultados estáveis e precisos para o método isogeométrico. Portanto, dentre as opções, provavelmente a abscissa de Greville é a mais utilizada como visto em Simpson et al. (2012), Scott et al. (2013).

Nessa ideia, optamos por utilizar as abscissas de Greville, na qual o ponto de controle tem influência máxima (FARIN, 2014) e é definida como a média dos nós:

$$\xi'_i = \frac{\xi_{i+1} + \xi_{i+2} + \dots + \xi_{i+p}}{p}. \quad (5.39)$$

Quando a curva é suave, as coordenadas de Greville são perfeitas para serem usadas como pontos de colocação. Do contrário quando existem quinas, especialmente para problemas tridimensionais, torna-se um problema calcular os termos diagonais uma vez que os pontos de colocação estarão nas quinas. Para contornar esse problema, neste trabalho é proposto a mudança nas posições do primeiro e do último ponto de colocação, ficando:

$$\xi'_1 = \xi'_1 + \beta(\xi'_2 - \xi'_1), \quad (5.40)$$

$$\xi'_n = \xi'_n - \beta(\xi'_n - \xi'_{n-1}), \quad (5.41)$$

sendo β o coeficiente que define o quanto o ponto de colocação se move. Conforme mostrado por Wang e Benson (2015) um valor ótimo é $\beta = 0,5$.

5.6 Condições de contorno na NURBS

Na formulação isogeométrica, a equação de equilíbrio escrita pelo MEC isogeométrico é formulada em termos dos pontos de controle, ou seja:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t} \quad (5.42)$$

Porém, como foi visto, os pontos de controle, salvo a exceção de geometrias retilíneas, não pertencem a curva NURBS. E por isso as condições de contorno não podem ser aplicadas diretamente na Eq. (5.42). Para resolver esse problema, em Cabral, Wrobel e Brebbia (1990) os autores propuseram uma matriz de transformação \mathbf{E} para B-splines. Essa matriz usa as funções de base para relacionar os valores nos pontos de controle com os valores nos pontos de colocação.

$$\mathbf{u} = \mathbf{E}\mathbf{u}_c, \quad (5.43)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{E}\mathbf{t}_c, \quad (5.44)$$

sendo \mathbf{u} e \mathbf{t} os vetores que contêm os valores nos pontos de colocação e \mathbf{u}_c e \mathbf{t}_c os vetores que contêm os valores nos pontos de controle. Agora, portanto as Eqs. (5.43) e (5.44) podem ser aplicadas na Eq. (5.42), que resulta em

$$\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{t}. \quad (5.45)$$

Note que a Eq. (5.45) agora pode ser utilizada normalmente no MEC. Porém, o esforço computacional para resolver a inversas de \mathbf{E} , além de utilizar as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} não esparsas, torna a solução numérica para problema grandes, um tanto custoso computacionalmente. Portanto, a ideia é definir pequenos sistemas de equações lineares, para cada NURBS com tipos de condições de contorno diferentes.

Como mencionado na seção 5.2, a formulação proposta pelo MEC apresenta integrais de funções singulares, ou seja, funções que tendem ao infinito. Na matriz \mathbf{G} , da Eq. (5.37) existem elementos de singularidade fraca, na forma $\log(r)$. Já na matriz \mathbf{H} , existem elementos de singularidade de forte, na forma $\frac{1}{r}$. A regularização destes termos singulares é um fator obrigatório para que possa ser construído o sistema linear da Eq. (5.38). Portanto, na próxima seção são feitos os comentários necessários para essa regularização.

5.7 Integrais singulares

É possível notar que nas soluções fundamentais de deslocamentos e forças de superfície, apresentadas pelas Eqs. (5.23) e (5.24), serão singulares quando o ponto fonte pertencer ao intervalo de integração, sendo a solução fundamental U de singularidade fraca e a T de singularidade forte. Essa denominação de singularidade fraca e forte refere-se à velocidade de crescimento em direção ao infinito, e podem ser mostradas. Usando por exemplo a mesma curva NURBS vista na Figura 4.4, na qual aqui é adicionada com um ponto fonte pertencente à curva, como mostrado na Figura 5.3. Ao plotar os gráficos verifica-se as singularidades para ambos os casos, exatamente no ponto fonte pertencente a NURBS.

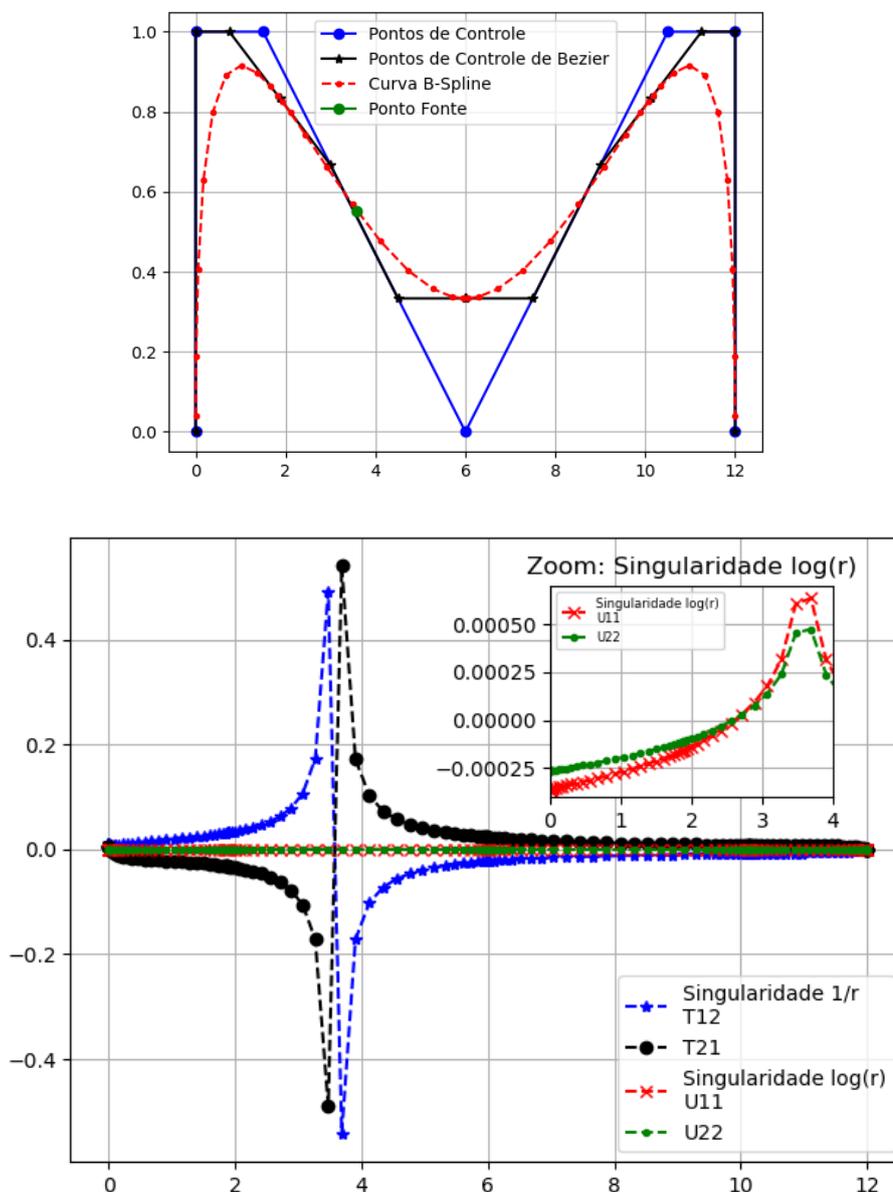


Figura 5.3: Singularidades forte e fraca no ponto singular em verde na curva NURBS.

Devido esse fato, tratamentos devem ser utilizados para a regularização das singularidades. Ao utilizar as NURBS, as funções de base não tem as mesmas característica que as funções polinomiais, uma vez que, no MEC convencional para as funções polinomiais, em cada ponto de colocação e o elemento singular correspondente, somente uma função de base associada aquele elemento é não nula. Portanto só existe uma integral singular em cada elemento. Enquanto que nas NURBS, as funções de base não tem essa característica, várias delas são não nulas nos pontos de colocação. Para cada ponto de colocação se tem k integrais singulares que precisam de tratamento especial (CAMPOS, 2016).

5.7.1 Integral fracamente singular

Existem diversas formas para ser resolvida as integrais fracamente singulares, da ordem $\log(r)$. Aqui, utilizaremos a transformada de Telles (TELLES, 1987), que usa uma nova transformação para a quadratura gaussiana tradicional. Desta forma, a concentração de pontos de integração próxima à singularidade é aumentada. Portanto, considere a integral Eq. (5.46),

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi, \quad (5.46)$$

em que, $f(\xi)$ é singular no ponto $\hat{\xi}$.

O que se faz, é uma transformação de coordenadas com base em um polinômio de variáveis cúbica, Eq. (5.47). Isso permite que seja cancelada a singularidade logarítmica, deixando o integrando regular.

$$\hat{\xi} = \frac{(\gamma - \gamma')^3 + \gamma'(\gamma'^2 + 3)}{1 + 3\gamma'^2}, \quad (5.47)$$

sendo,

$$\gamma' = \sqrt[3]{\hat{\xi}'(\hat{\xi}'^2 - 1) + |\hat{\xi}'^2 - 1|} + \sqrt[3]{\hat{\xi}'(\hat{\xi}'^2 - 1) - |\hat{\xi}'^2 - 1| + \hat{\xi}'}, \quad (5.48)$$

em que $\hat{\xi}'$ é a localização da singularidade no espaço original, γ representa a nova variável de integração. Assim, um jacobiano que faz a transformação do espaço $\hat{\xi} \in [-1, 1]$ para γ é dado por:

$$d\hat{\xi} = \frac{3(\gamma - \gamma'^2)}{1 + 3\gamma'^2} d\gamma', \quad (5.49)$$

E finalmente, ao substituir as Eqs. (5.47) e (5.49) na Eq. (5.46), chega-se na expressão final que representa a transformação da integração, dada por (TELLES,

1987).

$$I = f(\hat{\xi})d\hat{\xi} = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(\gamma - \gamma')^3 + \gamma'(\gamma'^2 + 3)}{1 + 3\gamma'^2}\right) \frac{3(\gamma - \gamma'^2)}{1 + 3\gamma'^2} d\gamma', \quad (5.50)$$

5.7.2 Integral fortemente singular

O método da subtração de singularidade (MSS), foi apresentado por (ALIABADI; HALL; PHEMISTER, 1985), e é baseado na expansão do núcleo (integrando), em série, para o tratamento da singularidades. Em geral, essa técnica é formulada com base na substituição da integral singular, criando dois novos termos: um novo núcleo regular e uma nova integral singular, de tal forma que esta última possa ser integrada analiticamente de forma mais simples. Isso por ser visto na Eq. (5.51),

$$\underbrace{\int_{-1}^1 f(\xi)d\xi}_{\text{termo singular}} = \underbrace{\int_{-1}^1 [F(\xi) - F^*(\xi)]d(\xi)}_{\text{termo regular}} + \underbrace{\int_{-1}^1 F^*(\xi)d\xi}_{\text{termo singular}}, \quad (5.51)$$

sendo que $F(\xi)$ e $F^*(\xi)$ possuem a mesma singularidade, entretanto, esta última é o termo que se apresenta de uma forma mais simples e é integrada de maneira analítica.

Para tratar a integral fortemente singular apresentada na Eq. (5.24), serão considerados os passos, utilizando as expansões, conforme Cordeiro e Leonel (2020) apresentaram. Primeiro, considerar a expansão de z_k , em série de Taylor, em torno do termo singular ξ_0 . Vale lembrar que, z_k , é o mapeamento complexo mostrado na Eq. (5.20), assim:

$$z_i^*(\xi) = z_i(\xi_0) + (\xi - \xi_0) \left. \frac{\partial z_i}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0} + O(\xi - \xi_0)^2. \quad (5.52)$$

Expandindo a derivada na Eq. (5.52), tem-se:

$$\left. \frac{\partial z_i}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0} = \left. \frac{\partial z_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0} + \left. \frac{\partial z_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0}. \quad (5.53)$$

Agora, substituída a Eq. (5.53) na Eq. (5.52), resulta em:

$$z_i^*(\xi) = z_i(\xi_0) + (\xi - \xi_0) \left(\left. \frac{\partial z_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\partial z_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right) \right) + O(\xi - \xi_0)^2. \quad (5.54)$$

Vale lembrar que, o vetor unitário \mathbf{n} , que é normal ao contorno Γ , e suas componentes na direção x_1 e na direção x_2 , escritas como n_{x1} e n_{x2} respectivamente, são:

$$\mathbf{n}(\xi_0) = \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi} \mathbf{i} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \mathbf{j} \right) \Big/ J(\xi_0) \quad \rightarrow \quad n_{x1}(\xi_0) = \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \Big/ J(\xi_0) \quad \text{e} \quad n_{x2}(\xi_0) = \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \Big/ J(\xi_0), \quad (5.55)$$

que resulta em:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \xi} = -J(\xi_0)n_{x2}(\xi_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial x_2}{\partial \xi} = J(\xi_0)n_{x1}(\xi_0). \quad (5.56)$$

Então, quando substituída a Eq. (5.56) na Eq. (5.54), é possível encontrar a equação na forma:

$$z_i^*(\xi) = z_i(\xi_0) + (\xi - \xi_0)J(\xi_0) \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_2} n_{x1}(\xi_0) - \frac{\partial z_i}{\partial x_1} n_{x2}(\xi_0) \right) + O(\xi - \xi_0)^2. \quad (5.57)$$

em que,

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} [x_1 + \mu_i x_2] = 1, \quad (5.58)$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_2} = \mu_i. \quad (5.59)$$

Por fim, ao substituir as Eqs. (5.58) e (5.59) na Eq. (5.57), chega-se na expressão final para a expansão z_k em torno de ξ_0 , escrita na forma da Eq. (5.60). A expansão escrita nesta forma, como apresentado por Cordeiro e Leonel (2020) é a base principal, que ao ser substituída na integral fortemente singular, será resolvida pelo MSS.

$$z_i^*(\xi) = z_i(\xi_0) + (\xi - \xi_0)J(\xi_0)(\mu_i n_{x1}(\xi_0) - n_{x2}(\xi_0)) + O(\xi - \xi_0)^2. \quad (5.60)$$

Agora, para o processo de regularização do termo fortemente singular mostrado na Eq. (5.18), será utilizada a ideia mostrada na Eq. (5.51), ao adicionar e subtrair núcleos auxiliares expandidos para o contorno $[-1, 1] = \Gamma_i$. Assim, o termo fortemente singular é escrito como:

$$\int_{-1}^1 T_{ij}(\xi_0, \xi) \phi_k(\xi) J(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 [K_T(\xi_0, \xi) - K_T^*(\xi_0, \xi)] d\xi + \int_{-1}^1 K_T^*(\xi_0, \xi) d\xi. \quad (5.61)$$

Note que, na integral do lado esquerdo da Eq. (5.61), $\phi_k(\xi)$ é a função de forma que aproxima o termo $u_j(x)$ e $J(\xi)$ é o parâmetro que transforma a coordenada adimensional para coordenadas reais. Já os termos das integrais do lado direito, $K_T(\xi_0, \xi)$, são os próprios núcleos originais da integral, isto é:

$$K_T(\xi_0, \xi) = T_{ij}(\xi_0, \xi) \phi_k(\xi) J(\xi) \quad (5.62)$$

e $K_T^*(\xi_0, \xi)$ é escrito na forma da expansão da série de Taylor em torno de $\xi = \xi_0$, obtido por meio do termo linear da expansão da Eq. (5.60). Sendo escrito como:

$$K_T^*(\xi_0, \xi) = 2\text{Re} \left[\frac{T_{ijl}(\xi_0)}{z_l^*(\xi) - z_l(\xi_0)} \right] \phi_k^*(\xi) J^*(\xi), \quad (5.63)$$

sendo $T_{ijl}(\xi_0) = g_{jl}(\mu_l n_{x1}(\xi_0) - n_{x2}(\xi_0)) A_{il}$.

Ao analisar a Eq. (5.61) após a substituição das Eqs. (5.62) e (5.63), nota-se a singularidade forte $1/(z_l^*(\xi) - z_l(\xi_0))$. Para regularização da integral entre colchetes da Eq. (5.61), Marczak e Creus (2002) utilizaram até o termo de primeira ordem da expansão da função de forma. Por outro lado, Cordeiro e Leonel (2020) considerou apenas o termo constante da expansão de $\phi_k^*(\xi) = \phi_k(\xi_0)$. As análises desse trabalho mostraram que a utilização de um termo de primeira ordem não nos evidenciou nenhum ganho substancial, e por isso será utilizado apenas o termo constante da expansão, e com isso a integral entre colchetes da Eq. (5.61) passa a ser regularizada, e pode ser resolvida numericamente pela quadratura de Gauss. Por outro lado, a outra integral do lado direito ainda continua singular, e deve ser resolvida analiticamente no sentido do valor principal de Cauchy, chamada aqui VPC, através de uma análise limite $\xi \rightarrow \xi_0$. Sendo assim, o integral de $K_T^*(\xi_0, \xi)$ é escrito como:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 K_T^*(\xi_0, \xi) d\xi &= \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \int_{-1}^1 2\text{Re} \left[\frac{T_{ijl}(\xi_0)}{z_l^*(\xi) - z_l(\xi_0)} \right] \phi_k(\xi) J(\xi) d\xi \\ &= \phi_k(\xi_0) J(\xi_0) 2\text{Re} \left\{ g_{jn}(\mu_l n_{x1}(\xi_0) - n_{x2}(\xi_0)) A_{in} \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \left[\int_{-1}^1 \frac{1}{z_l^*(\xi) - z_l(\xi_0)} d\xi \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Da série, Eq. (5.60), ao realizar algumas manipulações matemáticas, é possível reescrever na forma,

$$\frac{1}{(\xi - \xi_0) J(\xi_0)} = \frac{\mu_l n_{x1}(\xi_0) - n_{x2}(\xi_0)}{z_l^*(\xi) - z_l(\xi_0)}. \quad (5.65)$$

Assim, ao retirar o termo que é substituído na Eq. (5.64), essa passa a ser escrita como:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 K_T^*(\xi_0, \xi) d\xi &= \phi_k(\xi_0) J(\xi_0) 2\text{Re} \left\{ g_{jn} A_{in} \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \left[\int_{-1}^1 \frac{\mu_l n_{x1}(\xi_0) - n_{x2}(\xi_0)}{z_l^*(\xi) - z_l(\xi_0)} d\xi \right] \right\} \\ &= \phi_k(\xi_0) J(\xi_0) 2\text{Re} \left\{ g_{jn} A_{in} \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \left[\int_{-1}^1 \frac{1}{(\xi - \xi_0) J(\xi_0)} d\xi \right] \right\} \\ &= \phi_k(\xi_0) 2\text{Re} \left[g_{jn} A_{in} \text{VPC} \frac{1}{(\xi - \xi_0)} \right] \end{aligned} \quad (5.66)$$

sendo que, ao avaliar o limite da Eq. (5.66) resulta: $VPC[1/(\xi - \xi_0)] = \log(1 - \xi_0) - \log(1 + \xi_0)$.

Portanto, com a Eq. (5.66) é possível calcular a integral singular de maneira regular. Após o desenvolvimento de todas as equações desta etapa, é necessário chamar atenção a um fato importante no trabalho do Cordeiro e Leonel (2020). A sua equação final para regularizar o termo fortemente singular, semelhante a nossa Eq. (5.66), possui um Jacobiano $J(\xi_0)$ no lado direito da equação. Entretanto quando utilizado a Eq. (5.65) na Eq. (5.66) essa Jacobiano é cancelado, e por isso nossa equação difere da deles.

5.8 Cálculo de tensões no contorno

Para se calcular o tensor de tensões em um dado nó do contorno, considere a Figura 5.4.

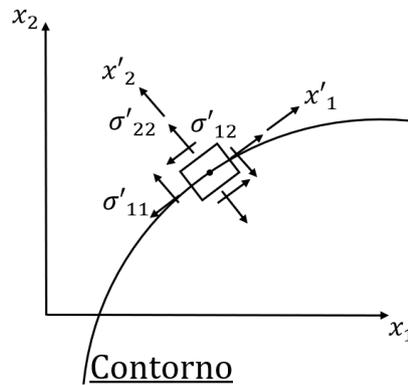


Figura 5.4: Representação das tensões no contorno.

O nó do contorno na Figura 5.4 possui as direções dos vetores tangente e normal ao contorno não coincidentes com as direções dos eixos geométricos. Neste nó é criado um novo sistema de referência $x'_1x'_2$ possuindo direções que coincidam com os vetores tangente e normal ao contorno neste nó. Escrevendo os deslocamentos e as forças de superfícies neste sistema local como:

$$\begin{aligned} u'_i &= l_{ij}u_j \\ t'_i &= l_{ij}t_j \end{aligned} \quad (5.67)$$

onde l_{ij} são os cossenos diretores. Assim, em um sistema local, a seguinte relação é válida:

$$\begin{aligned} \sigma'_{22} &= t'_2 \\ \sigma'_{12} &= t'_1 \end{aligned} \quad (5.68)$$

A deformação ε'_{11} pode ser calculada, sabendo que

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{11} &= \frac{1}{2}(u'_{1,1} + u'_{1,1}) = u'_{1,1} \\ u'_{1,1} &= \frac{du'_1}{dx'_1} = \frac{du'_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx'_1}\end{aligned}\quad (5.69)$$

Assim, da relação tensão deformação tem-se:

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & 2Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{pmatrix}\quad (5.70)$$

onde Q'_{ij} são as componentes do tensor de rigidez escritas no referencial local. Na Eq. (5.70) tem-se três incógnitas σ'_{11} , ε'_{22} , ε'_{12} , que agora podem então ser calculadas.

Por último, as tensões tem que ser escritas no referencial global x_1x_2 , ou seja

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{pmatrix}\quad (5.71)$$

onde \mathbf{T} é a matriz de transformação de coordenadas.

5.9 Tratamento da força de corpo

A fim de aplicar eficientemente o método dos elementos de contorno sem integração de volume para problemas envolvendo forças do corpo, como gravidade e força centrífuga, aqui será usado o método de condições de contorno modificado no contexto da elasticidade plana anisotrópica. Este método foi utilizado por Caicedo e Portela (2015) e por Oliveira e Portela (2019) para regularizar campos de tensões singulares na ponta de fissuras em aplicações do método dos elementos finitos e métodos sem malha, respectivamente. No caso deste trabalho, o método é o mesmo, mas o objetivo é diferente do que apresenta na literatura. As soluções particulares usadas para integrais de domínio são aquelas apresentadas por Deb e Banerjee (1990). No trabalho desses autores, uma integral extra foi gerada na equação da integral de contorno, o que levou a um novo vetor na equação da matriz. No entanto, neste trabalho, nenhuma integral extra foi gerada, apenas as condições de contorno são modificadas.

Ao decompor o campo elástico em uma parte homogênea H e uma parte particular P , as tensões e deslocamentos podem ser escritas como:

$$\sigma_{ij} = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^P) + \sigma_{ij}^P = \sigma_{ij}^H + \sigma_{ij}^P\quad (5.72)$$

$$u_i = (u_i - u_i^P) + u_i^P = u_i^H + u_i^P, \quad (5.73)$$

onde, $\sigma_{ij}^H = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^P$ e $u_i^H = u_i - u_i^P$ são, respectivamente, as soluções homogêneas para os campos de tensão e o deslocamento, isto é, desconsiderando as forças de corpo do problema original. Enquanto que, σ_{ij}^P e u_i^P são respectivamente as componentes de tensão e o deslocamento da solução particular do problema original, representando o campo elástico com as forças do corpo, sem, entretanto, levar em conta as condições de contorno.

5.9.1 Força de corpo centrífuga

Considerando que as forças do corpo são devidas à rotação do corpo (carga centrífuga), a equação do movimento é dada por:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 x_i = 0. \quad (5.74)$$

As soluções particulares para esta equação podem ser encontradas em Deb e Banerjee (1990). Sendo que, para deslocamentos, temos:

$$u_1^P = \frac{1}{3} \{ (b_{11} + b_{12}) c_1 + b_{11} c_2 \} x_1^3 + \frac{1}{2} b_{16} c_2 x_1^2 x_2 + \{ (b_{11} + b_{12}) c_1 + b_{12} c_2 \} x_1 x_2^2 + \frac{1}{3} \left\{ (b_{16} + b_{26}) c_1 + \frac{1}{2} b_{26} c_2 \right\} x_2^3, \quad (5.75)$$

$$u_2^P = \frac{1}{3} \left\{ (b_{16} + b_{26}) c_1 + \frac{1}{2} b_{26} c_2 \right\} x_1^3 + \{ (b_{22} + b_{12}) c_1 + b_{12} c_2 \} x_1^2 x_2 + \frac{1}{2} b_{26} c_2 x_1 x_2^2 + \frac{1}{3} \{ (b_{22} + b_{12}) c_1 + b_{22} c_2 \} x_2^3. \quad (5.76)$$

e para as tensões, temos:

$$\sigma_{11}^P = c_1 (x_1^2 + x_2^2) + c_2 x_1^2, \quad (5.77)$$

$$\sigma_{22}^P = c_1 (x_1^2 + x_2^2) + c_2 x_2^2, \quad (5.78)$$

$$\sigma_{12}^P = c_2 x_1 x_2. \quad (5.79)$$

As componentes c_1 e c_2 são representadas na forma das Eqs. (5.80) e (5.81), para o estado plano de tensão e para o estado plano de deformação, conforme as Eqs.

(3.13) e (3.14).

$$c_1 = \frac{4b_{12} - b_{66}}{2(3b_{11} + 2b_{12} + 3b_{22} + b_{66})} \rho \omega^2, \quad (5.80)$$

$$c_2 = -\frac{b_{11} + 2b_{12} + b_{22}}{3b_{11} + 2b_{12} + 3b_{22} + b_{66}} \rho \omega^2 \quad (5.81)$$

onde ρ é a densidade do material e ω é a velocidade angular.

5.9.2 Cargamento gravitacional

Considerando uma problema de carregamento gravitacional, as soluções particulares para deslocamentos são escritas como:

$$u_1^p = -\frac{1}{2}\gamma_1 b_{11} x_1^2 - \gamma_2 b_{12} x_1 x_2 + \frac{1}{2}(\gamma_1 b_{12} - \gamma_2 b_{23}) x_2^2, \quad (5.82)$$

$$u_2^p = \frac{1}{2}(\gamma_2 b_{12} - \gamma_1 b_{13}) x_1^2 - \gamma_1 b_{12} x_1 x_2 - \frac{1}{2}\gamma_2 b_{22} x_2^2. \quad (5.83)$$

e para as tensões, temos:

$$\sigma_{11}^p = -\gamma_1 x_1, \quad (5.84)$$

$$\sigma_{22}^p = -\gamma_2 x_2, \quad (5.85)$$

$$\sigma_{12}^p = 0. \quad (5.86)$$

sendo $\gamma_1 = 0$ e $\gamma_2 = -\rho G$.

Capítulo 6

Resultados numéricos para o MEC isogeométrico

Nessa seção são iniciados os primeiros resultados numéricos para demonstrar a eficiência e robustez da formulação do MEC isogeométrico em problemas elásticos quase-isotrópicos, anisotrópicos e ortotrópicos. Problemas para avaliar os contornos construídos pelas curvas NURBS na forma de extração de Bézier com diferentes refinamentos de malha e ordem de curva, também são avaliados. A regularização da singularidade forte que aparece na formulação da solução fundamental é devidamente mostrada no Apêndice A.

6.1 Cilindro vazado e pressurizado

Considere um problema de comum interesse para simulação computacional na indústria mecânica, que trata-se de um cilindro vazado elástico, conforme um Figura 6.1a. O cilindro que encontra-se pressurizado e tem espessura constante em suas paredes. Ele possui raio interno igual a r_a e raio externo igual a r_b , conforme mostrado na Figura 6.1a. Este problema pode ser modelados de diversas formas, conforme a sua aplicabilidade. Aqui são consideradas as seguintes simplificações e informações geométricas:

1. Considere um problema 2D e simétrico por qualquer que seja o eixo que passe pelo centro de origem (x, y) da Figura 6.1a. Então, diz-se que o problema é axisimétrico. Neste formato, a simulação numérica é feita em apenas um quarto do problema original, como mostra a Figura 6.1b construída com NURBS de grau $p = 2$ e a Figura 6.1c construída com NURBS de grau $p = 4$.
2. O cilindro pode estar sujeito a uma pressão interna, e ou, externa. O que leva o problema a ter que impor condições de contornos em ambas paredes. No caso

deste trabalho, é considerado que a influência externa ao cilindro, Figura 6.1b ou 6.1c em (NURBS₂(N₂)), é nula, e por isso, são necessárias apenas condições de contorno na parede interna (NURBS₄(N₄)).

- Na Figura 6.1b ou 6.1c é possível verificar que na parcela simulada do cilindro, não há deslocamento no sentido y da NURBS₁(N₁) nem no sentido x da NURBS₃(N₃). Além disso, é assumido que a pressão (p) é uniforme e atuante em toda extensão da superfície interna, com deslocamento na direção radial igual a u_r , e por isso, as condições de contorno para este tipo de problema devem ser $t_n = -p$ para o raio da parede interna (r_a).

Por fim, as condições de contorno, para um regime permanente, são apresentadas na Eq. (6.1), sendo t_n a força de superfície na direção normal e t_{tang} a força de superfície na direção tangencial.

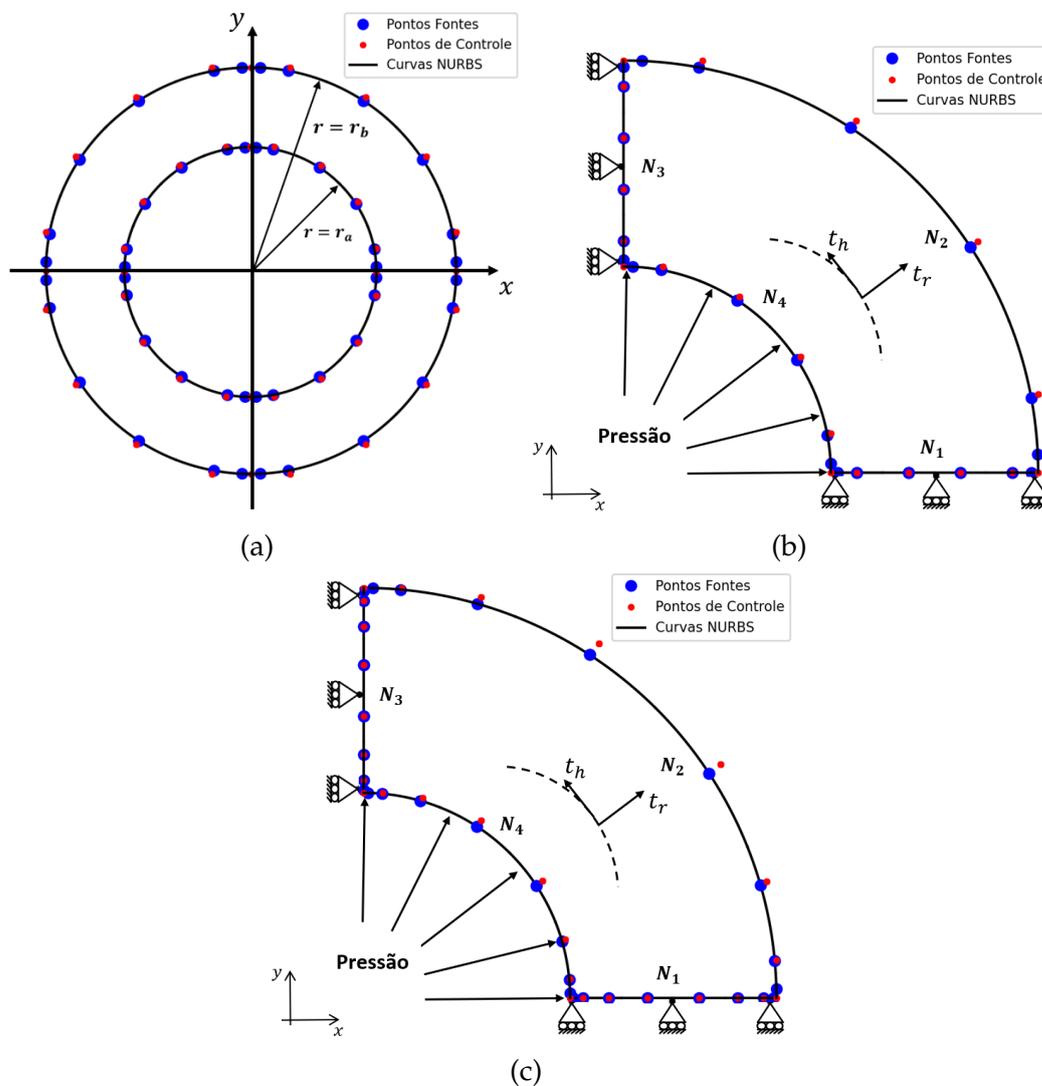


Figura 6.1: Em (a) Representação do cilindro, em (b) 1/4 do cilindro construído por NURBS de ordem $p = 2$, e (c) 1/4 do cilindro construído por NURBS de ordem $p = 4$.

$$\text{Condições de contorno} = \begin{cases} t_x = u_y = 0, & (x, y) \in N_1, \\ t_x = t_y = 0, & (x, y) \in N_2, \\ u_x = t_y = 0, & (x, y) \in N_3, \\ t_n = -100 \quad t_{tang} = 0, & (x, y) \in N_4. \end{cases} \quad (6.1)$$

Este problema possui solução analítica para materiais elásticos isotrópicos. Portanto, para a tensão radial (σ_r) e circunferencial (σ_h), e para o deslocamento radial é apresentada conforme Chandrasekharaiah e Debnath (2014):

$$u_r = \frac{(1 + \nu)pr_a^2}{(r_b^2 - r_a^2)E} \left[(1 - 2\nu)r + \frac{r_b^2}{r} \right], \quad (6.2)$$

$$\sigma_r = \frac{pr_a^2}{r_b^2 - r_a^2} - \frac{r_a^2 r_b^2 p}{r_b^2 - r_a^2} \frac{1}{r^2}, \quad (6.3)$$

$$\sigma_h = \frac{pr_a^2}{r_b^2 - r_a^2} + \frac{r_a^2 r_b^2 p}{r_b^2 - r_a^2} \frac{1}{r^2}, \quad (6.4)$$

sendo as constantes elásticas: coeficiente de Poisson ν e módulo de Young E .

Como as soluções analíticas para este modelo são para materiais isotrópicos, é necessário fazer uma pequena modificação para o problema ser modelado na forma quase-isotrópica. Nesse sentido o módulo de Young E agora precisa ter suas componentes variáveis nas direções longitudinais e transversais, portanto são utilizados o módulo de elasticidade longitudinal E_L e módulo de elasticidade transversal E_T . A Tabela 6.1 apresenta as propriedades do material utilizadas na simulação do problema.

Variáveis do problema	Valores	Variáveis do problema	Valores
Raio interno	$r_a = 0,05 \text{ m}$	Módulo de Cisalhamento	$G = 384,61 \text{ GPa}$
Raio externo	$r_b = 0,1 \text{ m}$	Coeficiente de Poisson	$\nu = 0,3$
Módulo de elasticidade longitudinal	$E_1 = 1000 \text{ GPa}$	Grau da NURBS	$p = 2$
Módulo de elasticidade transversal	$E_2 = 1000,1 \text{ GPa}$	Pressão interna	$P = 100 \text{ N}$

Tabela 6.1: Propriedade mecânicas, pressão interna e informações geométricas: cilindro vazado.

Esta simulação é com base na parcela do cilindro mostrado na Figura 6.2a. Construída com um total de 52 pontos fontes. Nesta, foi utilizado um refinamento no qual foram utilizados 13 pontos fontes por NURBS. Além disso, foi utilizado um total de 16 pontos de integração. Com os resultado obtidos para o deslocamento radial, é então mostrado o deslocamento que acontece no cilindro. Isso é visto na Figura 6.2b, em que mostra-se o cilindro original em preto e o deslocado em verde.

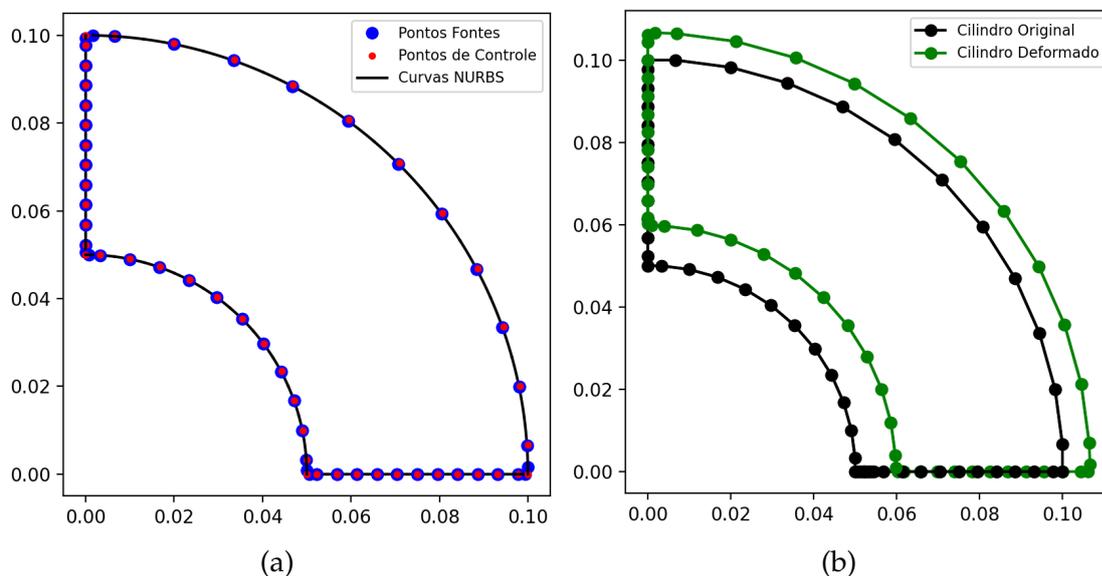


Figura 6.2: Em (a) 1/4 do cilindro, e em (b) 1/4 do cilindro original e seu deslocamento.

Ao utilizar a Eq. (6.2), é possível mostrar o deslocamento radial elemento a elemento, como pode ser visto na Figura 6.3.

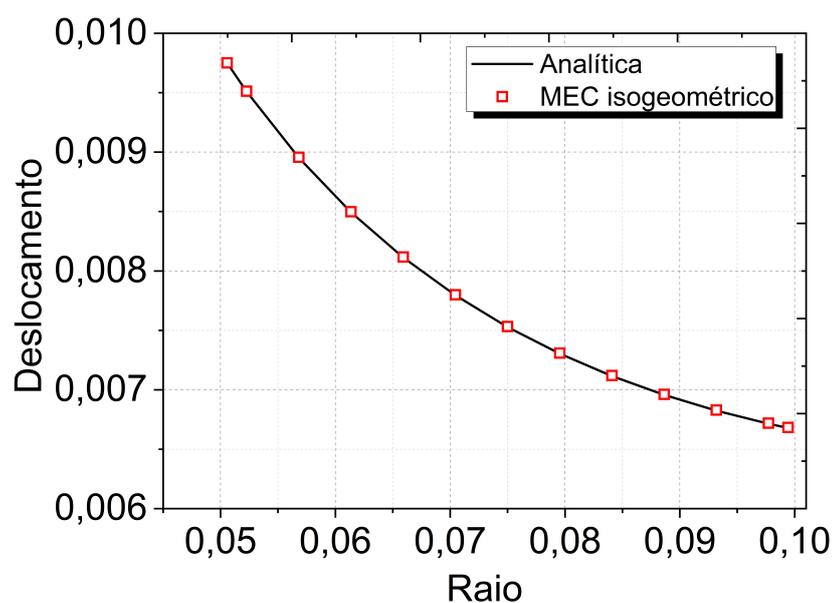


Figura 6.3: Deslocamento na NURBS (N_1).

Por outro lado, para os resultados numéricos para tensão radial, Eq. (6.3), e a tensão circunferencial, Eq. (6.4), são mostrados nas Figuras 6.4 e 6.5, respectivamente.

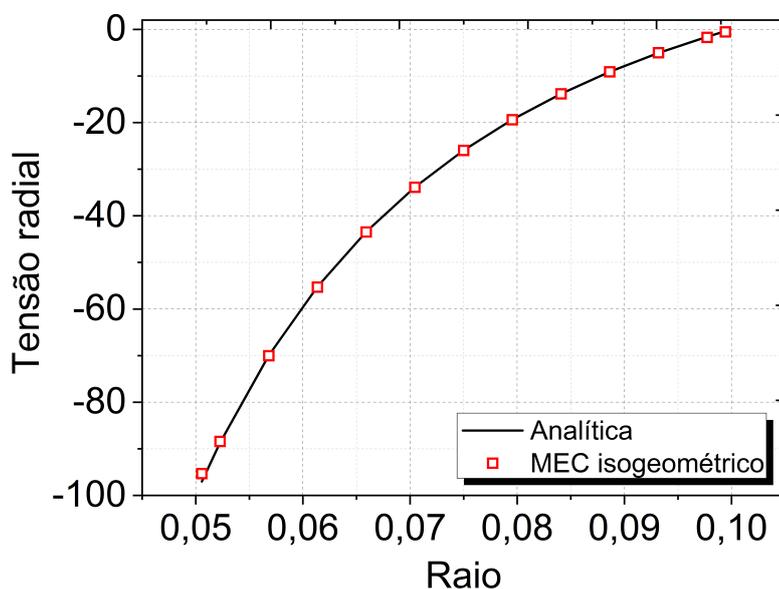


Figura 6.4: Tensão radial na NURBS (N_1).

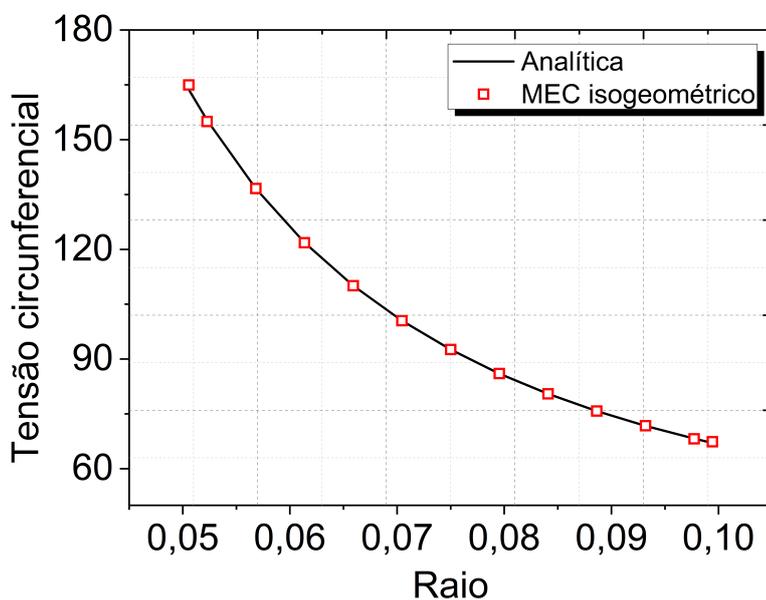


Figura 6.5: Tensão circunferencial na NURBS (N_1).

Em todos os casos, os resultados numéricos obtidos pelo MEC isogeométrico foram satisfatórios quando comparado à solução analítica. Outros testes para o deslocamento e as tensões, variando a grau p da NURBS e a quantidade de pontos de integração foram realizados, mostrando resultados numéricos semelhantes, ou seja, não houve erros de grandezas consideráveis que precisassem ser aqui mostrados.

Para medir a magnitude dos erros entre a solução analítica S_a e a numérica S_n , é feito o estudo da convergência usando a norma Euclidiana, com o refinamento da malha e inserção de diferentes quantidades de Pontos de Integração (PI). Na Figura 6.6 e 6.7 mostra-se a evolução do erro do deslocamento e tensão, para a Eq. (6.5),

$$\|\text{erro}_{\text{norm}}\|_2 = \frac{\left(\|S_a - S_n\|^2\right)^{1/2}}{\sqrt{n}} \quad \therefore \quad \frac{\mathbb{L}_2}{\sqrt{n}}, \quad (6.5)$$

sendo n o total de pontos fontes.

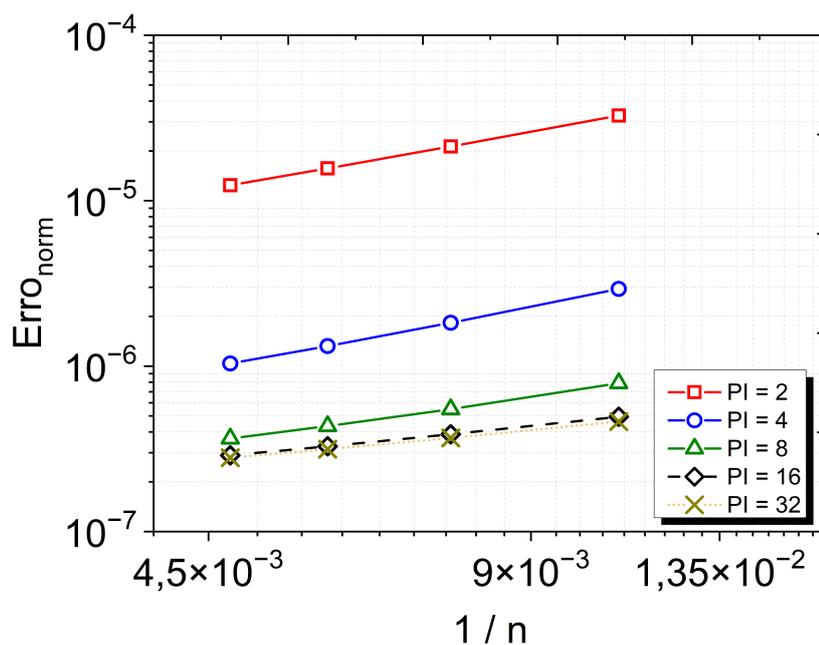


Figura 6.6: Erro_{norm}: deslocamento.

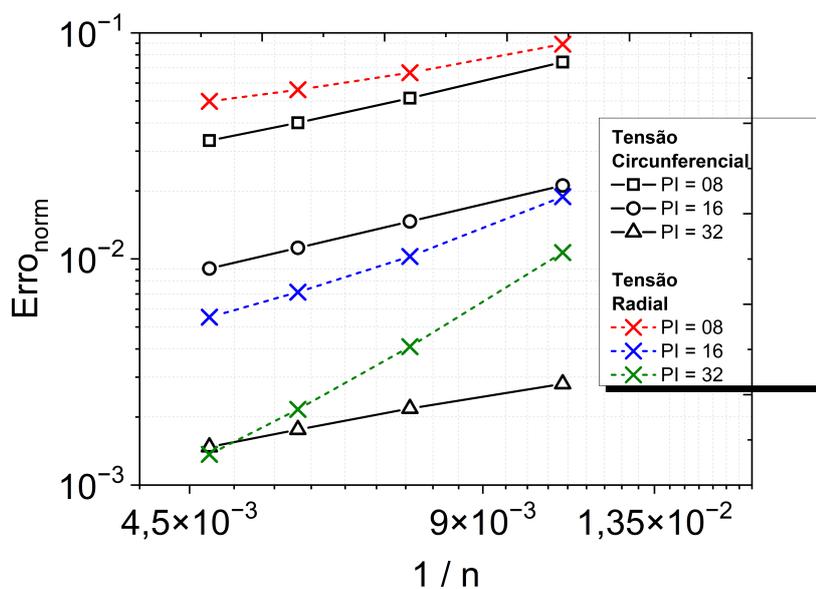


Figura 6.7: Erro_{norm}: tensões.

Na Figura 6.6 há uma boa convergência ao passo que a malha é refinada e não são notadas mais evidentes melhorias de erros para uma quantidade maior que 32 pontos fontes. Já na Figura 6.7 é possível notar também uma análise de erro boa, porém ao aumentar quantidade de pontos de integração ainda é possível melhorar os erros.

Outro fato importante a ser destacado é que fica mostrado que a técnica de extração de singularidade apresentado na seção 5.7.2, para $T_{ij}(x, y)$, da Eq. (5.24) de singularidade forte, foi desenvolvida de forma correta, uma vez que os resultados numéricos das tensões foram convergentes para a solução analítica.

6.2 Disco rotativo de velocidade angular constante

Considere a simulação de um disco rotativo de material anisotrópico (ortotrópico), de raio R , conforme apresentado na Figura 6.8. O disco em estado plano de tensão, encontra-se girando a uma velocidade angular constante ω , em torno do centro de origem (x, y) . O sentido da constante elástica longitudinal E_1 e transversal E_2 também podem ser visto na Figura 6.8.

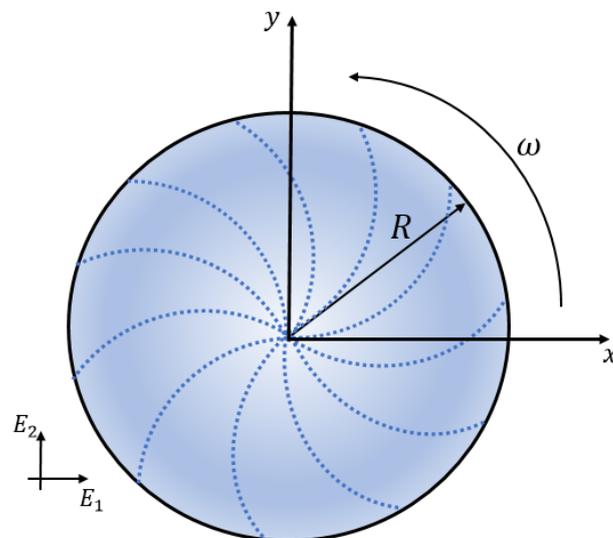


Figura 6.8: Representação do disco rotativo ortotrópico.

As equações que representam as componentes do tensor de tensões correspondentes ao disco rotativo ortotrópico no plano (x, y) são dadas pela Eq. (6.6), conforme Chang (1974).

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{1}{2}\rho\omega^2\left\{K(x^2 + 3y^2 - R^2) + (R^2 - (x^2 + y^2))\right\}, \\
\sigma_2 &= \frac{1}{2}\rho\omega^2\left\{K(3x^2 + y^2 - R^2) + (R^2 - (x^2 + y^2))\right\}, \\
\sigma_6 &= -\rho\omega^2Kxy, \\
\sigma_4 &= \sigma_5 = 0.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

sendo K escrito em termos dos coeficientes da matriz de flexibilidade (inversa da matriz de rigidez), na forma:

$$K = \frac{2\beta_{12} + \beta_{11} + \beta_{22}}{3(\beta_{11} + \beta_{22}) + (2\beta_{12} + \beta_{66})}. \tag{6.7}$$

Se considerado estado plano de deformação, tem-se:

$$\sigma_3 = -\frac{1}{a_{33}(a_{13}\sigma_1 + a_{23}\sigma_2)}, \tag{6.8}$$

ou, se considerado estado plano de tensão, tem-se:

$$\sigma_3 = 0. \tag{6.9}$$

Por outro lado, caso os resultados precisem ser avaliados em coordenadas polares, as componentes do tensor de tensões são transformados para:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{1}{2}\rho\omega^2(1 - K)(R^2 - r^2), \\
\sigma_t &= \frac{1}{2}\rho\omega^2(K(3r^2 - R^2) + (R^2 - r^2)), \\
\sigma_{rt} &= 0,
\end{aligned} \tag{6.10}$$

sendo σ_r a componente radial, σ_t a componente tangencial e σ_{rt} a componente de cisalhamento, ambas do tensor de tensões.

Por fim, as equações para as componentes do vetor de deslocamento, são:

$$u_1 = \frac{a_{11}\rho\omega^2x}{2}\left\{K\left(\frac{x^2}{3} + 3y^2 - R^2\right) + \left(R^2 - \left(\frac{x^2}{3} + y^2\right)\right)\right\} + \frac{a_{12}\rho\omega^2x}{2}\left\{K(x^2 + y^2 - R^2) + \left(R^2 - \left(\frac{x^2}{3} + y^2\right)\right)\right\}, \tag{6.11}$$

$$u_2 = \frac{a_{12}\rho\omega^2y}{2}\left\{K(x^2 + y^2 - R^2) + \left(R^2 - \left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right)\right)\right\} + \frac{a_{22}\rho\omega^2y}{2}\left\{K\left(3x^2 + \frac{y^2}{3} - R^2\right) + \left(R^2 - \left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right)\right)\right\}, \tag{6.12}$$

sendo o deslocamento radial dado por:

$$u_r = u_1^2 + u_2^2. \tag{6.13}$$

Com base na simetria que o disco da Figura 6.8 apresenta, o problema então pode

ser simulado considerando um quarto do disco, como mostrado na Figura 6.9. A geometria do modelo foi construída com três curvas NURBS (N_1, N_2 e N_3), conforme mostra a Figura 6.9. Nela também é apresentada como as condições de contorno são estabelecidas, sendo que no eixo x , ou seja, N_1 , não há deslocamento no sentido y e no eixo y , ou seja, N_3 , não há deslocamento no sentido x .

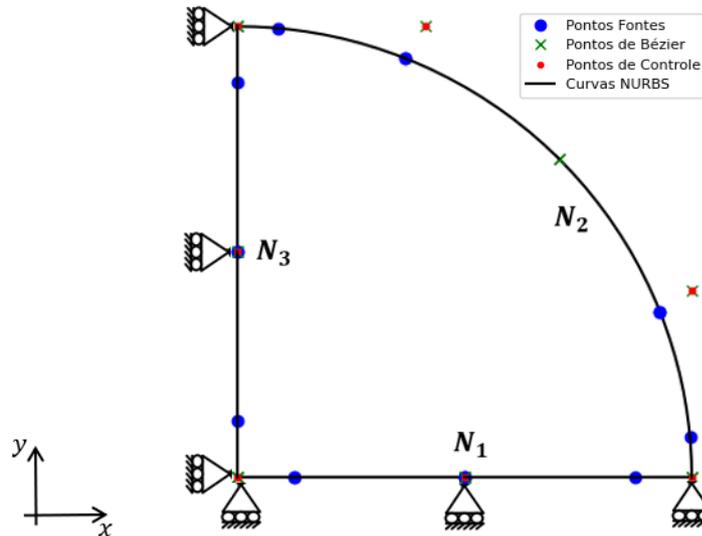


Figura 6.9: Representação de um quarto do disco rotativo ortotrópico.

Portanto, dadas estas informações, para esta aplicação vamos considerar as condições de contorno conforme mostra a Eq. (6.14).

$$\text{Condições de contorno} = \begin{cases} t_x = u_y = 0, & (x, y) \in N_1, \\ t_x = t_y = 0, & (x, y) \in N_2, \\ u_x = t_y = 0, & (x, y) \in N_3. \end{cases} \quad (6.14)$$

Note que este problema envolve forças do corpo, como a força centrífuga, portanto as condições de contorno apresentadas na Eq. (6.14), devem ser corrigidas conforme a seção 5.9.

A Tabela 6.2 apresenta as propriedades do material para simulação do problema.

Os resultados numéricos para os deslocamentos são apresentados para direção x , seguimento 1 NURBS (N_1), na Figura 6.10a e para a direção y , seguimento 3 NURBS (N_3), 6.10b. Já a tensão circunferencial é mostrada na Figura 6.10c e a tensão radial na Figura 6.10d. Nestes resultados, foram utilizados diferentes quantidades de pontos fonte e pontos de integração, como mostram as especificações em cada Figura 6.10.

Em todos os casos, tanto para o deslocamento quanto para as tensões, os resultados numéricos obtidos pelo MEC isogeométrico resultaram em erros satisfatórios

Variáveis do problema	Valores	Variáveis do problema	Valores
Módulo de elasticidade longitudinal	$E_1 = 17.24$ GPa	Velocidade angular	$\omega = 20$ rad/s
Módulo de elasticidade transversal	$E_2 = 48.26$ GPa	Densidade	$\rho = 1$ kg/m ³
Coefficiente de Poisson	$\nu_{12} = 0,29$	Ordem da NURBS	$p = 2$
Módulo de Cisalhamento	$G_{12} = 6.89$ GPa	Raio	$R = 1$ m

Tabela 6.2: Propriedade mecânicas, velocidade angular e informações geométricas: disco rotativo.

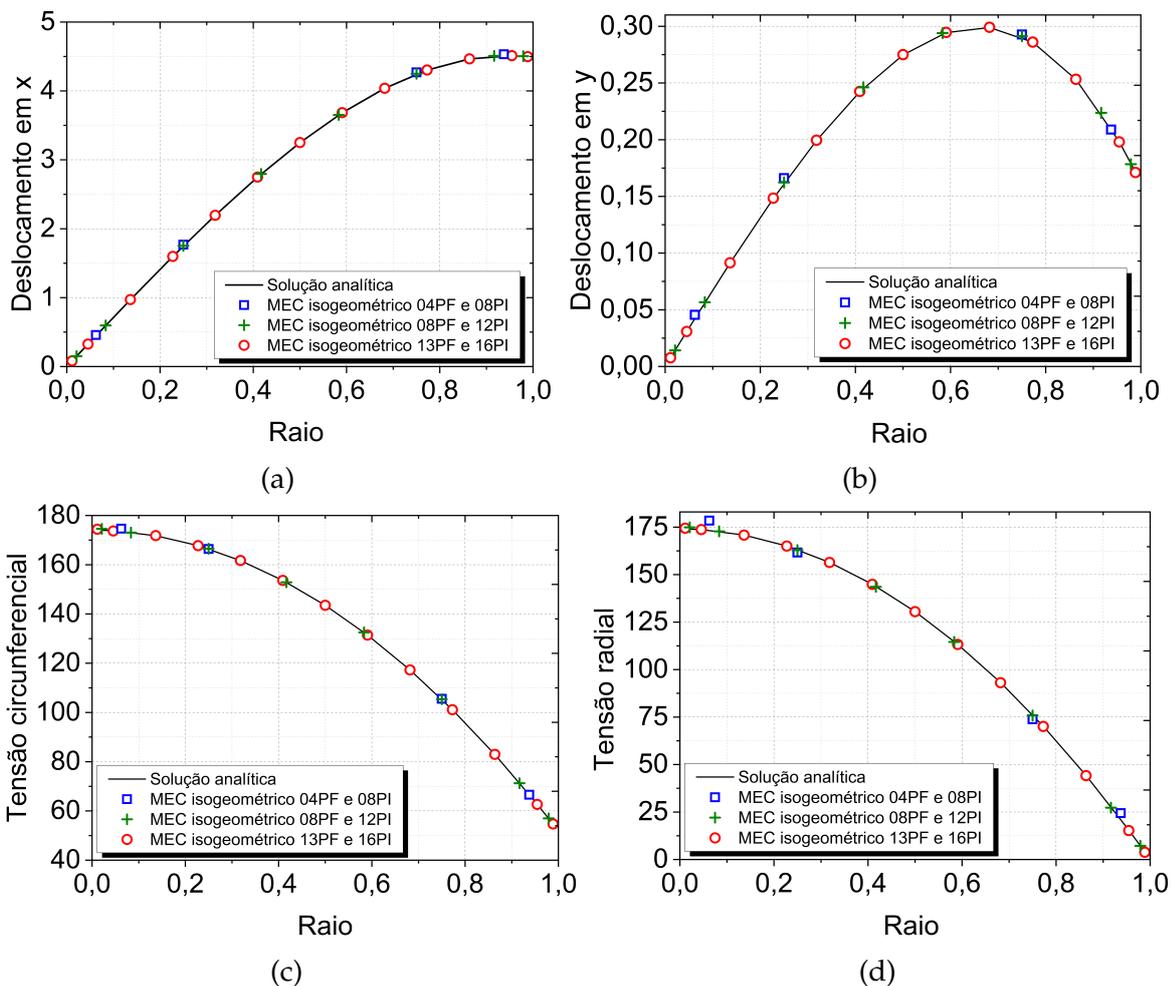


Figura 6.10: (a) deslocamento no contorno (N_1), direção x , (b) deslocamento no contorno (N_3), direção y , (c) tensão radial σ_t e (d) tensão circunferencial σ_r .

quando comparados à solução analítica.

A próxima análise foi realizada para identificar o erro numérico a passo que a malha é refinada. Neste problema, o estudo da convergência da malha pelo MEC isogeométrico para o deslocamento e tensões foram realizados pela Eq. (6.5). Os

resultados são mostrados nas Figuras 6.11 para o deslocamento direção x , NURBS (N_1) e deslocamento direção y , NURBS (N_3), enquanto que, na Figura 6.12 mostram os erros para as tensões circunferenciais e radiais. Através dos erros mostrados nestas Figuras é possível notar que os mesmos caem rapidamente com o aumento da discretização, mostrando assim que as soluções numéricas convergem com boa precisão para a solução analítica ao passo que a malha é refinada.

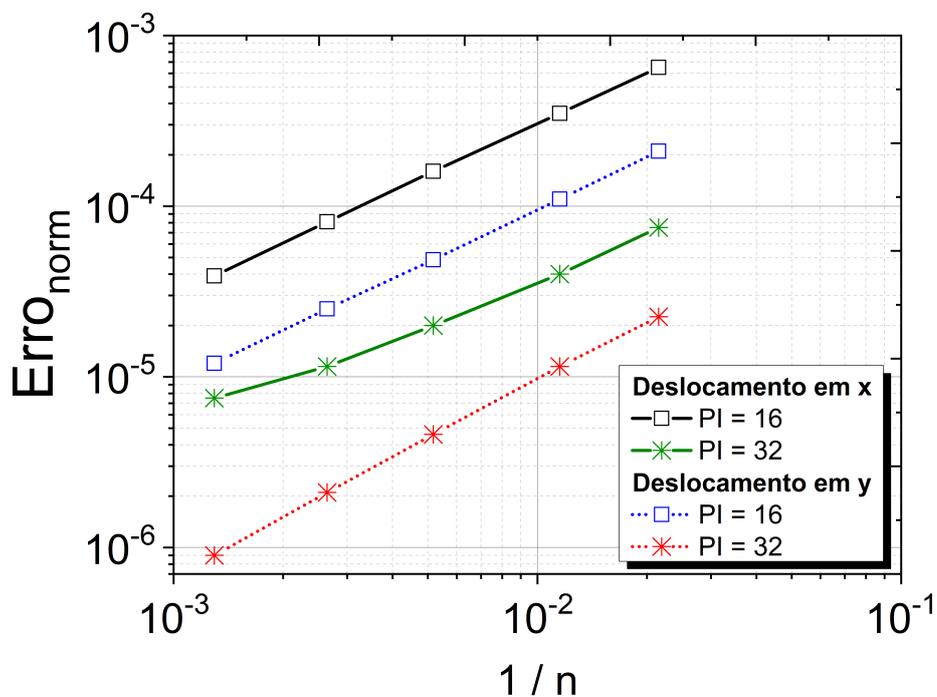


Figura 6.11: $Erro_{norm}$: deslocamentos.

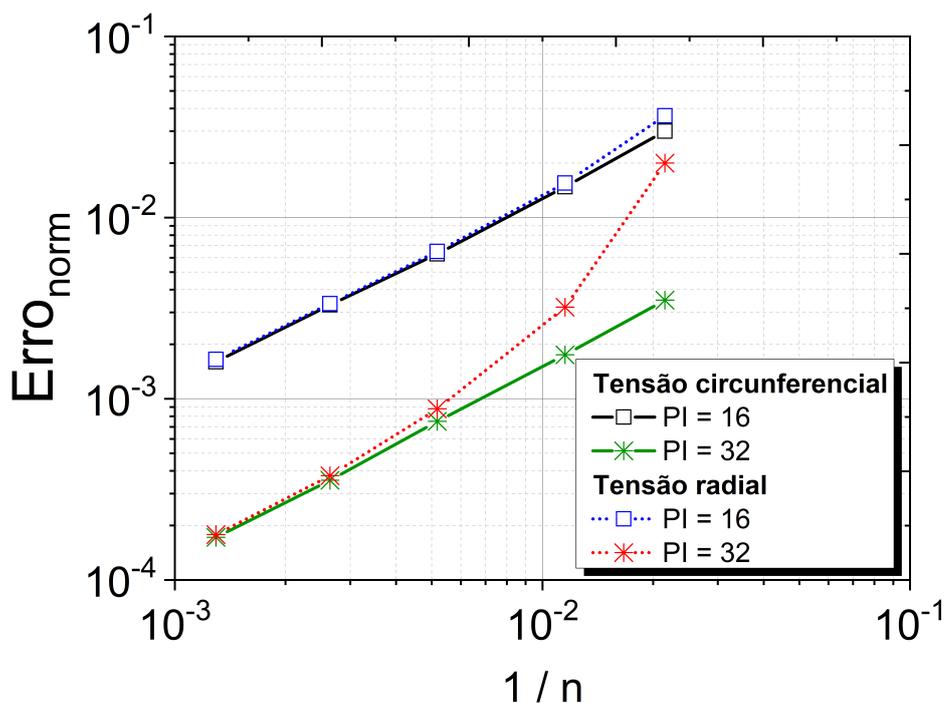


Figura 6.12: $Erro_{norm}$: tensão radial e circunferencial.

6.3 Fator de concentração de tensão em um furo circular em uma placa de dimensões infinitas

Nesta seção é mostrado o processo de cálculo de tensões em dois diferentes tópicos. Sendo eles: 1. cálculo do fator de concentração de tensão e 2. distribuição de tensões ao longo da direção principal em que se aplica a força.

6.3.1 Fator de concentração de tensão

Considere uma placa homogênea anisotrópica com furo circular sob tensão uniforme na direção y , conforme mostrado na Figura 6.13. É assumido que a placa possui contornos suficientemente distantes da região do furo, portanto, são desconsideradas os efeitos dos seus contornos externos. Conforme (LEKHNITSKII, 1968), o efeito de um furo em uma placa, que não é preenchido, causa um aumento de tensões em determinados locais próximos ao furo em comparação com uma placa sem furo. Esse efeito é conhecido como concentração de tensão.

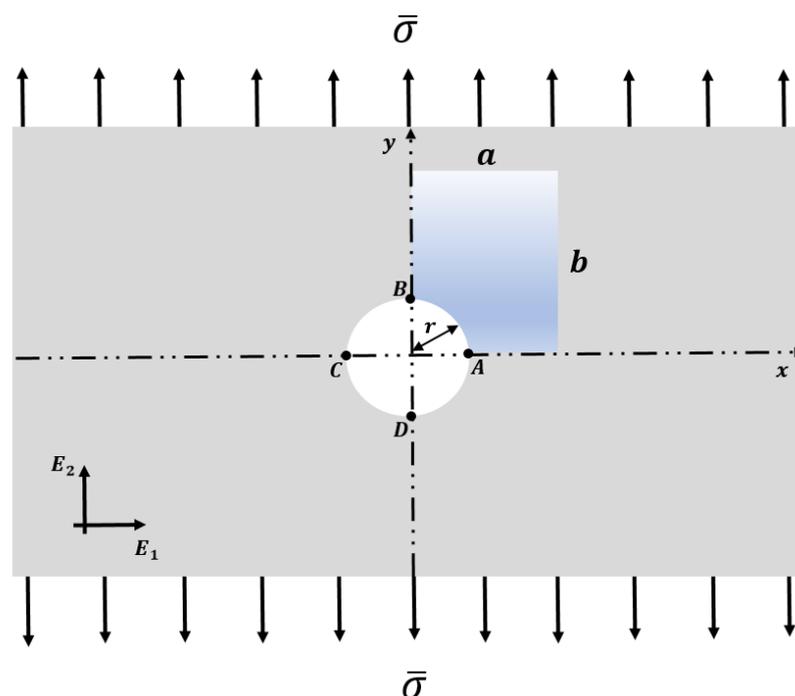


Figura 6.13: Representação de um domínio infinito com uma placa contendo um furo circular com tração uniforme na direção y .

Por se tratar de um problema de domínio infinito, na análise computacional, é considerado neste que as dimensões da placa finita são muito maiores que o diâmetro do furo. Desse modo, os efeitos dos limites finitos da placa não são significativos. Este problema, é um bom exemplo para ilustrar a eficiência do MEC isogeométrico

de ordem superior, principalmente para modelar o contorno do furo em torno do qual as tensões variam rapidamente. Para isso, conforme Lekhnitskii (1968), o fator de concentração de tensão ortotrópico para uma placa de largura infinita é dada por

$$K_{T,MAX}^{\infty} = 1 + \sqrt{\frac{2}{A_{22}} \left(\sqrt{A_{11}A_{22}} - A_{12} + \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{2A_{66}} \right)}, \quad x = r, \quad (6.15)$$

onde A_{ij} são os termos da matriz rigidez do laminado no plano, determinada pela teoria das placas laminadas. Já para o fator de concentração de tensão anisotrópico, conforme mostrado por Sollero (1994), é escrita como:

$$K_{T,MAX}^{\infty} = \bar{\sigma} \operatorname{Re} \left[1 + i \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \right], \quad x = r, \quad (6.16)$$

sendo μ_i as raízes da equação característica para um material anisotrópico. Por outro lado, é possível escrever a equação para as tensões mínimas conforme Sollero (1994):

$$K_{T,MIN}^{\infty} = \bar{\sigma} \operatorname{Re} [\mu_1 \mu_2], \quad y = r. \quad (6.17)$$

Aplicação 01: a primeira aplicação é em um laminado simétrico de Grafite / Epóxi com propriedades elásticas dadas na Tabela 6.3. A modelagem é realizada sob a geometria mostrada na Figura 6.14, com as devidas dimensões especificadas, sendo esta, a representação de um quarto do modelo mostrado na Figura 6.13. A geometria foi construída com NURBS de grau $p = 2$, com lâminas unidirecionais variando em ângulos $\theta = (0^\circ, 45^\circ, 90^\circ)$.

Na Figura 6.14 são mostrados os pontos A onde concentra-se a tensão máxima, e o ponto B, onde concentra-se a tensão mínima. Por fim, para obter a solução numérica, são consideradas as condições de contorno mostradas na Eq. (6.18).

Variáveis do problema	Valores
E_1	181 GPa
E_2	10,3 GPa
G_{12}	7,17 GPa
ν_{12}	0,28
$\bar{\sigma}$	1 MPa

Tabela 6.3: Propriedades elásticas e tensão para o grafite epóxi (WANG; QIN; LEI, 2017).

$$Cc = \begin{cases} t_x = u_y = 0, & (x, y) \in N_1, \\ t_x = t_y = 0, & (x, y) \in N_2, \\ t_x = 0, \quad t_y = \bar{\sigma}, & (x, y) \in N_3, \\ u_x = t_y = 0, & (x, y) \in N_4, \\ t_x = t_y = 0, & (x, y) \in N_5. \end{cases} \quad (6.18)$$

Na Tabela 6.4 é mostrado o fator de concentração máximo (ponto A da Figura 6.14) e o fator de concentração mínima (ponto B da Figura 6.14). Na análise das três

orientações do laminado, todos obtiveram resultados aproximados com uma boa concordância quando comparados com as soluções analíticas, como pode ser visto pelo erro percentual mostrado na Tabela 6.4. Além disso, os resultados calculados pelo MEC isogeométrico também pode ser comparados com o MEC tradicional de interpolações quadráticas descontínuas. Cujas soluções aproximadas não foram tão boas quanto o MEC isogeométrico.

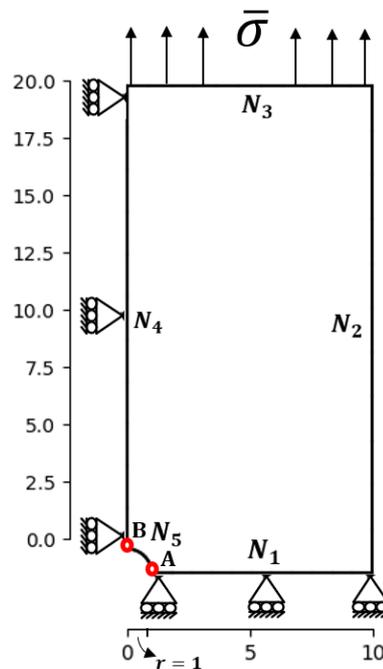


Figura 6.14: Ilustração de um quarto da placa com furo, tracionada no sentido y .

	FCT máximo e mínimo (IGABEM)				FCT máximo e mínimo (MEC Lagrangeano)		
	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 90^\circ$		$\theta = 0^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 90^\circ$
Total pontos fontes	85	120	315	Total pontos fontes	100	140	1000
Erro percentual	0,01%	0,26%	0,18%	Erro percentual	0,16%	0,31%	4,08%
IGABEM	2,37144	2,37409	6,73794	MEC Lagrangeano	2,37557	2,37918	6,47457
Solução Analítica	2,37177	2,38043	6,75048	Solução Analítica	2,37177	2,38043	6,75048
Total pontos fontes	200	100	140	Total pontos fontes	1000	140	160
Erro percentual	0,12%	0,91%	0,03%	Erro percentual	1,54%	0,96%	0,07%
IGABEM	-4,19743	-0,52409	-0,23863	MEC Lagrangeano	-4,12714	-0,52380	-0,23873
Solução Analítica	-4,19199	-0,52892	-0,23855	Solução Analítica	-4,19199	-0,52892	-0,23855

Tabela 6.4: FCT máximo (ponto A) e mínimo (ponto B) mostrados na Figura 6.14.

Note que neste tipo de problema, a curva na região do furo não é suave, e isso gera um problema, pois os pontos de colocação estão nas quinas. O algoritmo computacional na forma como construído, utiliza as abscissas de Greville modificadas, sendo que, o primeiro e último nó na NURBS nunca estão nas quinas. Portanto, para realizar o cálculo das tensões nas quinas foi necessário uma nova rotina computacional, onde os valores das tensões nos cantos são calculados por interpolação, usando as funções de forma.

Aplicação 02: o próximo resultado para o cálculo da concentração de tensão é apresentado na Figura 6.15 sob a mesma geometria da Figura 6.14, porém com propriedades elásticas do Boro-epóxi ((B4)/5505) (TSAI; HAHN, 2018). Entretanto, agora, são avaliados diferentes rotações do laminado simétrico, para dois diâmetros de furos, $r/l = 0,1$ e $0,5$, sendo r o raio e l a largura da placa, respectivamente. E também para dois tipos de geometrias, uma construída com NURBS de grau $p = 2$ e outra com NURBS de grau $p = 4$.

Os resultados da análise mostram uma boa concordância para os dois casos analisados. Observe que, como esperado, a geometria construída com grau maior da NURBS $p(4)$ teve necessidade menor de pontos fontes para um resultado satisfatório em comparação com a geometria de grau menor $p(2)$. Isso é mostrado nos dois exemplos comparativo na Figura 6.15 em $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 75^\circ$.

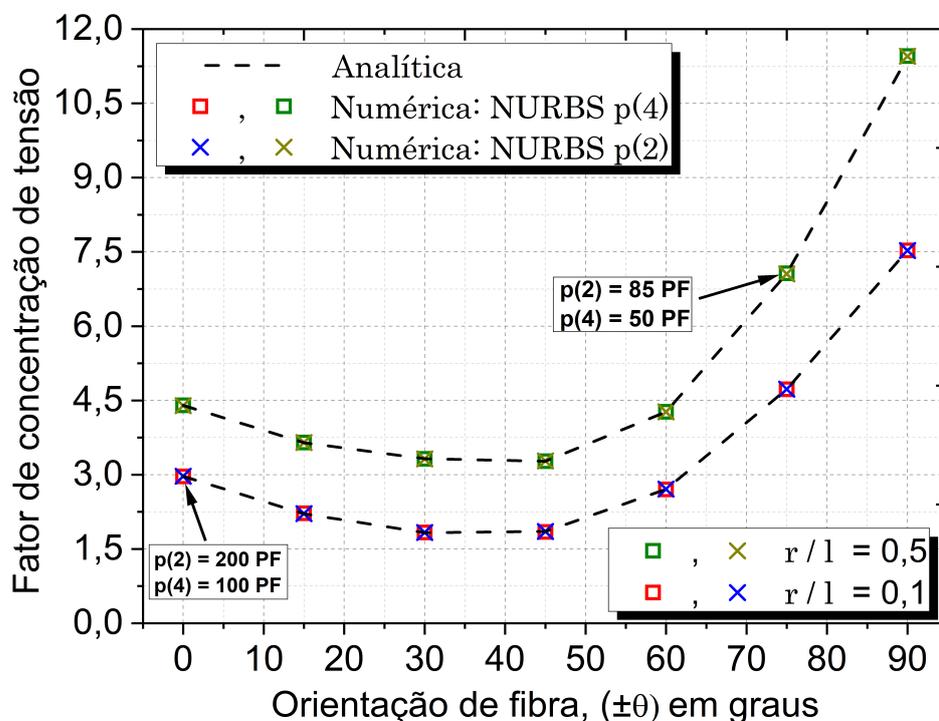


Figura 6.15: Fator de concentração de tensão em um quarto da placa com furo, tracionada no sentido y .

6.3.2 Distribuição de tensões ao longo da direção principal

A equação analítica para a distribuição de tensões ao longo da direção principal da placa com furo circular foi apresentada por Lekhnitskii (1968). Por outro lado, Nuismer e Whitney (1975) apresentaram um polinômio de regressão, que faz uso do valor do fator de concentração máximo, Eq. (6.15) para o caso ortotópico ou Eq. (6.16) para o caso anisotrópico. Portanto, considere uma tensão uniforme, $\bar{\sigma}$, ver Figura 6.14, aplicada paralelamente ao eixo y a uma distância considerada distante da borda da região do furo circular. Então a tensão normal, σ_y , ao longo do eixo x é dada conforme Nuismer e Whitney (1975), como:

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{\bar{\sigma}}{2} \left\{ 2 + \left(\frac{r}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{r}{x}\right)^4 - (K_{T,MAX}^{\infty} - 3) \left[5\left(\frac{r}{x}\right)^6 - 7\left(\frac{r}{x}\right)^8 \right] \right\}, \quad x > r, \quad (6.19)$$

Aplicação 03: seja considerado a geometria computacional semelhante a Figura 6.14, com diâmetro de furos, $r/l = 0,1$ e tensão uniforme $\bar{\sigma} = 1$. Para solução numérica calculada pelo MEC isogeométrico, são consideradas as mesmas condições de contorno apresentadas na Eq. (6.18). Por fim, nesta aplicação o laminado considerado é um material cruzado, formado por lâminas em diferentes ângulos, como será mostrado. As propriedades elásticas são apresentadas na Tabela 6.5.

Thornel 300 / Narmco 5208		Boro/Epóxi (B(4)/5505)		T300/Narmco 5208 grafite/epóxi	
Propriedades Elásticas	Valores	Propriedades Elásticas	Valores	Propriedades Elásticas	Valores
E_1	21.4 Ksi	E_1	204 GPa	E_1	141 GN m ⁻²
E_2	1.6 Ksi	E_2	18,8 GPa	E_2	9,44 GN m ⁻²
G_{12}	0,77 Ksi	G_{12}	5,59 GPa	G_{12}	5,18 GN m ⁻²
ν_{12}	0,29	ν_{12}	0,23	ν_{12}	0,31

Tabela 6.5: Propriedades elásticas (TSAI; HAHN, 2018), (KONISHI; WHITNEY, 1975), (NUISMER; WHITNEY, 1975).

Nas Figuras 6.16 a 6.18 são mostrados os resultados para $\sigma_y(x, 0)$, sendo nas Figuras 6.16 e 6.17 para o material formado por lâminas de $(0^\circ/90^\circ)_s$ e para Figura 6.18 lâminas de $(\pm 45^\circ)_s$. Nas três situações foram utilizadas um total de 80 pontos fontes por NURBS. Na plotagem dos gráficos, é mostrado os valores em $\sigma_y(1, 0)$ onde está localizado o fator de concentração de tensão, para os casos das Figuras 6.16 e 6.17, e os demais $\sigma_y(x, 0)$, para $1 < x < 2,5$.

Note que, no caso de laminados contendo 0° nas camadas, Figuras 6.16 e 6.17, embora não haja uma sobreposição das duas curvas, a solução do MEC isogeométrico possui uma boa concordância em relação a solução proposta pela Eq. (6.19), sendo que os erros relativos percentuais não excederam os 6%. Por fim, foi possível perceber

que em diversos casos analisados, a solução numérica mostra um comportamento muito próximo da solução analítica.

Boro / Epóxi (B(4) / 5505) - $(0^\circ/90^\circ)_S$

$$K_{T,MAX} = 5.67886$$

$$\text{Mec isogeométrico} = 5.67495$$

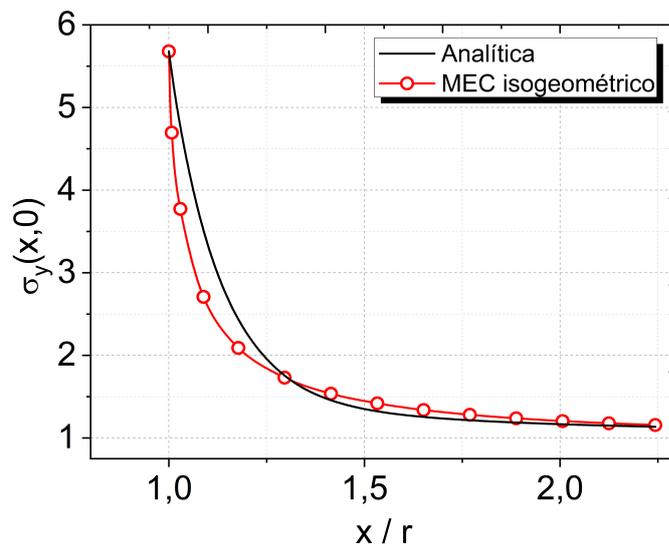


Figura 6.16: Tensão em $\sigma_y(x, 0)$: Boro / Epóxi (B(4)/5505) laminado $(0^\circ/90^\circ)_S$.

Thornel 300/Narmco 5208 - $(0^\circ/90^\circ)_S$

$$K_{T,MAX} = 5,11393$$

$$\text{Mec isogeométrico} = 5,11479$$

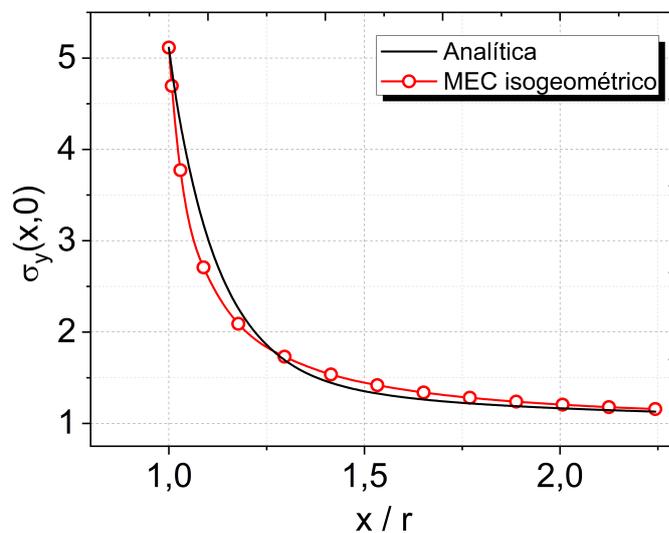


Figura 6.17: Tensão em $\sigma_y(x, 0)$: Thornel 300/Narmco 5208 laminado $(0^\circ/90^\circ)_S$.

Como visto nas Figuras 6.16 e 6.17 o fator de concentração de tensão é calculado através da razão entre a tensão no canto, $\sigma(1,0)$, e a tensão remotamente aplicada. Entretanto, conforme Nuismer e Whitney (1975), a maior tensão não ocorre no canto, como acontece em materiais isotrópicos, e sim em uma região adjacente. Isso é constatado através da Figura 6.18, na qual as lâminas estão a $(\pm 45^\circ)_S$. Observe que a solução analítica e o MEC isogeométrico possuem curvas semelhantes, embora as duas curvas atinjam picos em locais diferentes, mostrando que a concentração máxima de tensão, para este caso encontra-se numa região adjacente ao limite do furo.

Thornel 300/Narmco 5208 - $(\pm 45^\circ)_S$

$$K_{T,MAX} = 1,98427$$

$$\text{Mec isogeométrico} = 1,98389$$

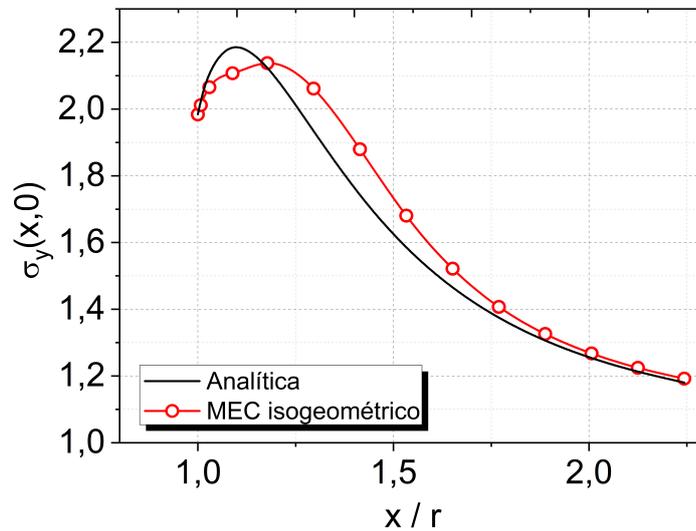
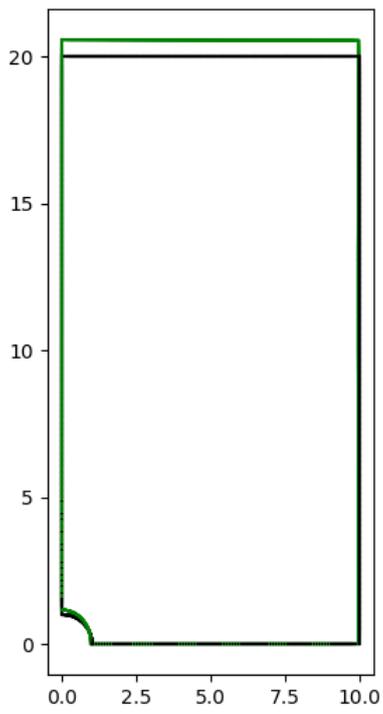


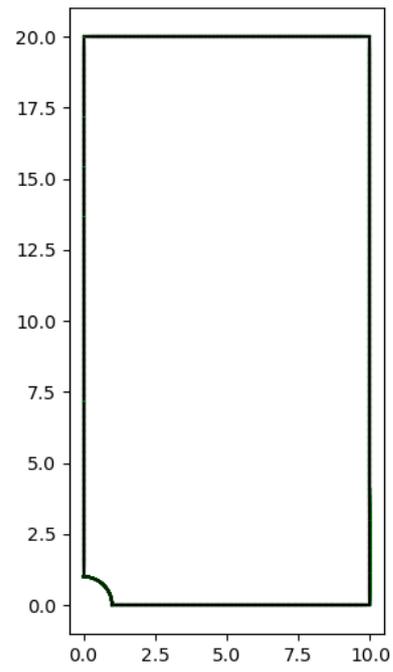
Figura 6.18: Tensão em $\sigma_y(x,0)$ para Thornel 300/Narmco 5208 num laminado $(\pm 45^\circ)_S$.

No geral, os três resultados numéricos mostram uma boa concordância para os materiais. Entretanto, Konish e Whitney (1975) salientam que mesmo o polinômio da Eq. (6.19) sendo um bom guia para uma solução aproximada, há suas restrições, e deve-se ter cuidado, principalmente porque ela está restrita a geometrias onde as dimensões da placa são muito maiores em relação ao tamanho do furo.

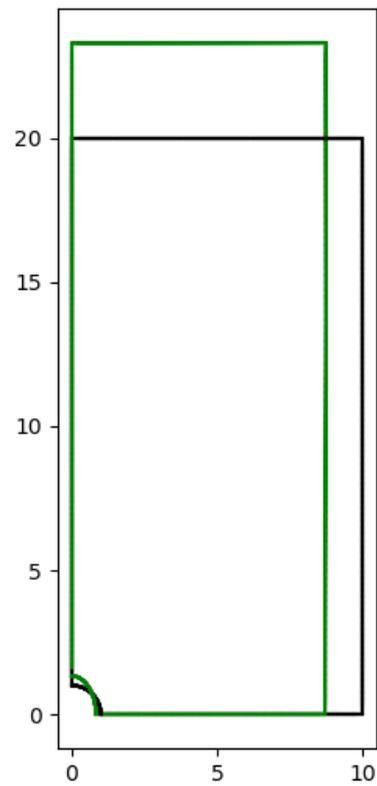
Por fim, na Figura 6.19 são apresentados os deslocamentos para as placas para os três casos analisados. A placa em linha preta é a placa original e em azul é a placa deformada. Para uma melhor visualização da dimensão da deformação, a placa deformada em azul foi gerada com um aumento de visualização 3x maior. Visivelmente fica claro que a placa com laminado $(\pm 45^\circ)_S$ obteve a maior deformação quando recebido a força aplicada.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.19: Placa original (preto) e deformada (verde), sendo: (a) deformação da Figura 6.16, (b) deformação da Figura 6.17 e (c) deformação da Figura 6.18.

6.4 Vigas

O estudo de tensões e deslocamento em vigas podem ser analisadas em diferentes aspectos, considerando que podem estar sujeita a diferentes tipos de carregamento, bem como, apoios móveis ou fixos. Nas seções a seguir, são estudadas diferentes vigas.

6.4.1 Viga engastada em um extremo e livre na outra

Na aplicação realizada aqui, é considerada uma viga de comprimento l e altura b , que está sujeita a uma carga q uniformemente distribuída em uma viga que encontra-se engastada em um extremo e livre no outro, conforme mostrado na Figura 6.20.

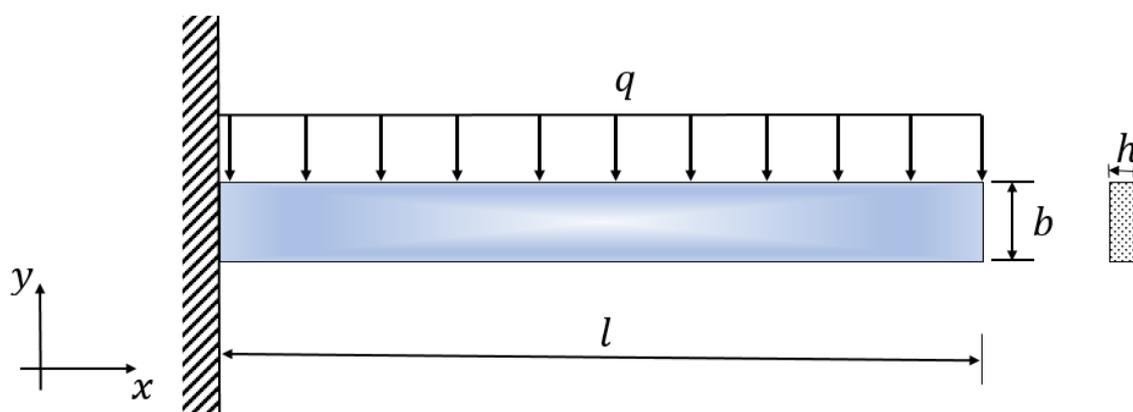


Figura 6.20: Viga engastada em um extremo sujeita a carga distribuída uniformemente.

A viga mostrada na Figura 6.20 é feita com material ortotrópico, cujo comprimento é de $l = 100\text{m}$, e a altura e largura da seção transversal retangular são $b = 5\text{m}$ e $h = 1\text{m}$, respectivamente. A carga uniformemente distribuída aplicada na borda superior da viga é calculada com base na equação $q = -G\rho b$, sendo $\rho = 1,534\text{ kg/m}^3$ e a gravidade $G = 9,81\text{ m/s}^2$. O modelo computacional foi feito com NURBS (N_i) de grau $p = 2$ como é mostrado na Figura 6.21, com propriedades do material nas direções principais dadas na Tabela 6.6, enquanto que a Eq. (6.20) mostram as condições de contorno para este problema.

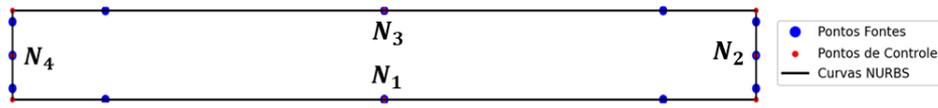


Figura 6.21: Representação da viga, construída com NURBS de grau $p = 2$.

Propriedades elásticas	Valores
E_1	$1,31 \times E^5$
E_2	$0,13 \times E^5$
G_{12}	$0,064 \times E^5$
ν_{12}	0,038

Tabela 6.6: Propriedades elásticas do material.

$$C_c = \begin{cases} t_x = t_y = 0, & (x, y) \in N_1, \\ t_x = t_y = 0, & (x, y) \in N_2, \\ t_x = t_y = 0, & (x, y) \in N_3, \\ u_x = u_y = 0, & (x, y) \in N_4. \end{cases} \quad (6.20)$$

Com base na teoria da elasticidade plana, as soluções analíticas para as tensões em uma viga ortotrópica, que a direção do eixo x coincide com uma das direções principais, são dadas conforme Lekhnitskii (1968). Além disso, é possível também apresentar a equação da deflexão máxima, escrita como:

$$\delta_{MAX} = \frac{qa_{11}l^4}{8J} - \frac{qb^2l^2}{80J} \left(3a_{12} + 4a_{66} - \frac{8a_{16}^2}{3a_{11}} \right). \quad (6.21)$$

sendo que, o primeiro termo da equação é devido a teoria elementar, e o segundo é a correção obtida com base na teoria mais exata da elasticidade plana. É possível também determinar a curvatura da deflexão que a viga sofre, através da equação:

$$u(x) = \frac{qx^2}{24E_1J} (6l^2 - 4lx + x^2). \quad (6.22)$$

O primeiro resultado é investigar a convergência do IGABEM e do MEC convencional. Para este propósito, os resultados numéricos no ponto de deflexão máxima, são listados na Tabela 6.7. É possível constatar que os resultados em ambos os métodos se aproximam da solução exata à medida que o número de elementos aumentam. Entretanto, é visível que a utilização do IGABEM é muito mais eficiente que o MEC com elementos constantes. No IGABEM foi possível chegar a um erro 0,0016% com 824 DOFs, enquanto que no MEC convencional com 12600 graus de liberdade, foi alcançado um erro de 0,45%. Não conseguimos aumentar a quantidade de DOFs no MEC convencional por falta de memória RAM do computador.

DOFs	δ_{MAX}		DOFs	δ_{MAX}	
	IGABEM	Erro %		MEC (constante)	Erro %
104	0,00058194	15,56	2100	0,00060872	11,6
184	0,00063694	7,58	3360	0,00064172	6,89
264	0,00065779	4,56	5040	0,00066136	4,04
504	0,00067998	1,34	6720	0,00067153	2,57
744	0,00068767	0,22	9240	0,00068001	1,34
824	0,00068923	0,0016	12600	0,00068614	0,45
Analítica	0,00068925		Analítica	0,00068925	

Tabela 6.7: Deflexão máxima pelo IGABEM e MEC com elementos constantes.

Em seguida, com os deslocamentos calculados, é possível mostrar a curva da deflexão sofrida em cada ponto da extensão da viga. Estes resultados são apresentados na Figura 6.22, na qual é comparada a IGABEM com 824 DOFs e a solução analítica.

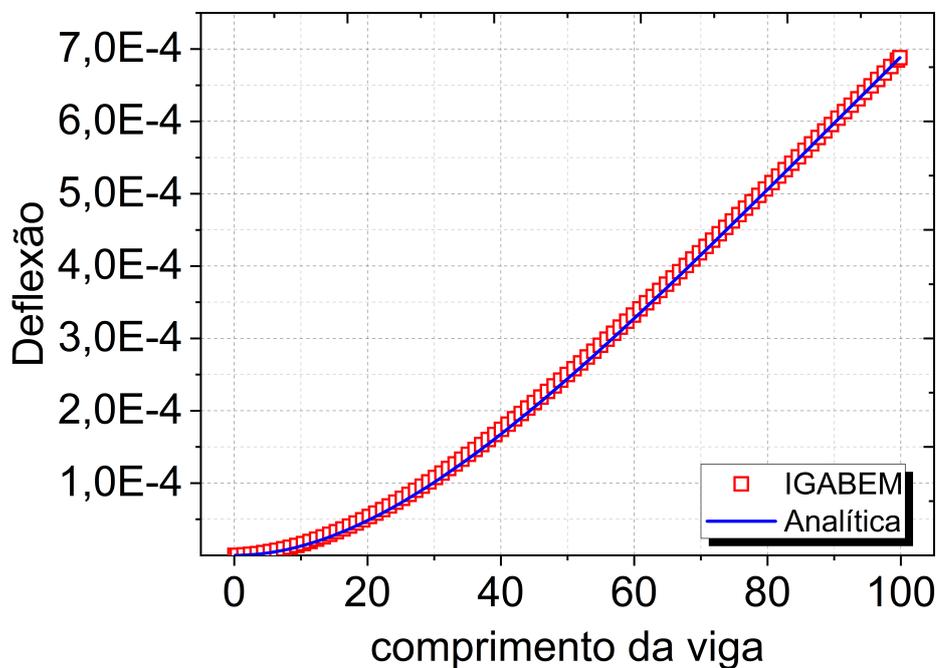


Figura 6.22: Curva do deslocamento da viga.

Finalmente, a Figura 6.23 mostra a viga deformada em verde, em relação a viga não deformada, em preto.



Figura 6.23: Viga não deformada em preto e deformada em verde.

6.4.2 Viga engastada em ambos extremos

Agora, na aplicação realizada aqui, é considerada uma viga engastada em ambos os lados, conforme apresentado na Figura 6.24. Sendo o comprimento $l = 100mm$ e altura $b = 1mm$. Os demais dados, são iguais ao utilizado no problema anterior.

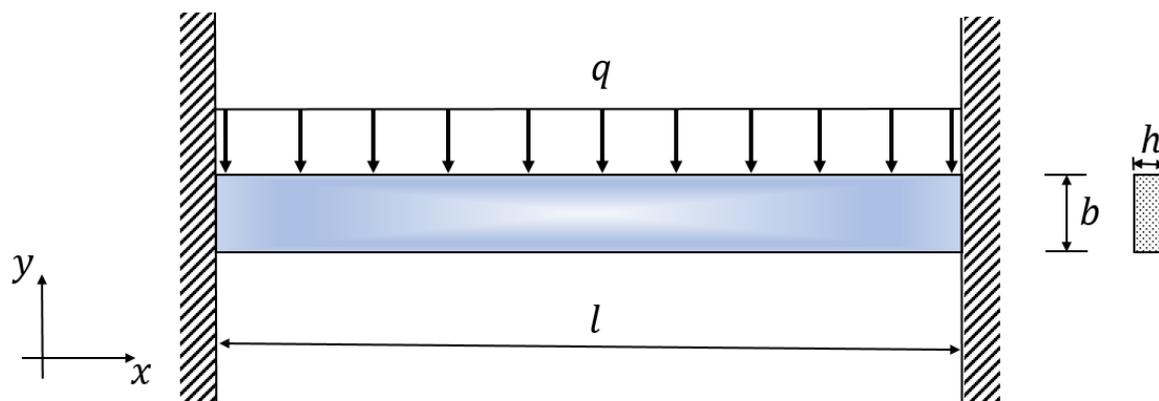


Figura 6.24: Viga engastada em ambos extremos com carga distribuída uniformemente.

As condições de contorno para este problema são escritas na forma:

$$C_c = \begin{cases} t_x = t_y = 0, & (x, y) \in N_1, \\ u_x = u_y = 0, & (x, y) \in N_2, \\ t_x = t_y = 0, & (x, y) \in N_3, \\ u_x = u_y = 0, & (x, y) \in N_4. \end{cases} \quad (6.23)$$

A equação da deflexão máxima para viga engastada em ambos os lados é escrita como:

$$\delta_{MAX} = \frac{qa_{11}l^4}{384J}. \quad (6.24)$$

Ao calcular os resultado numérico pelo IGABEM, foi possível chegar no resultado conforme abaixo:

Analítica	IGABEM	Erro %
0,00035898	0,00035866	0.089

Além disso, a curva da deflexão que a viga sofre, é escrita na forma:

$$u(x) = \frac{qx^2}{24E_1J} (l - x)^2 \quad (6.25)$$

Com os deslocamentos calculados, é possível mostrar a curva da deflexão sofrida em cada ponto da extensão da viga. Estes resultados são apresentados na Figura 6.25, novamente mostrando um ótimo resultado numérico, quando comparado ao analítico.

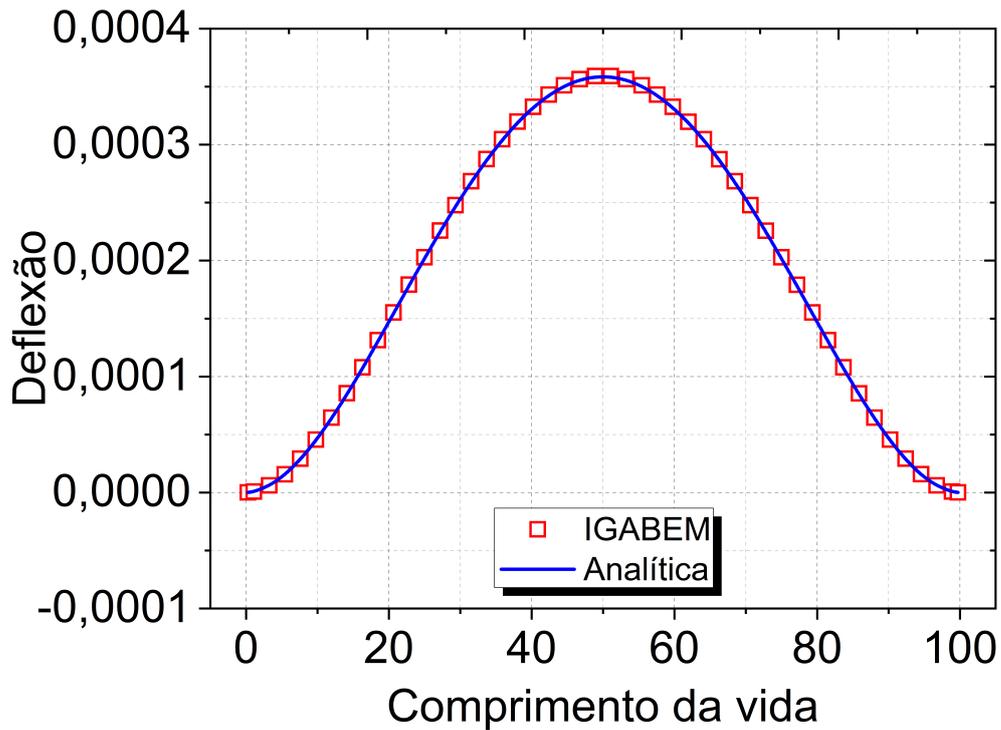


Figura 6.25: Curva do deslocamento da viga.

Finalmente, a Figura 6.26 mostra a viga deformada em verde, em relação a viga não deformada, em preto.



Figura 6.26: Viga não deformada em preto e deformada em verde.

Capítulo 7

MEC isogeométrico acelerado pelo método dos multipolos

O FMM parte da ideia de Barnes e Hut (1986) em que o domínio é discretizado em elementos para construir uma estrutura de árvore, como mostra a Figura 7.1. Nesta estrutura, são separados em relação a cada ponto fonte, os ditos pontos próximos (que são trabalhados com o IGABEM a partir de integrações diretas) e os ditos pontos distantes (que são trabalhados com o IGABEM-FMM).

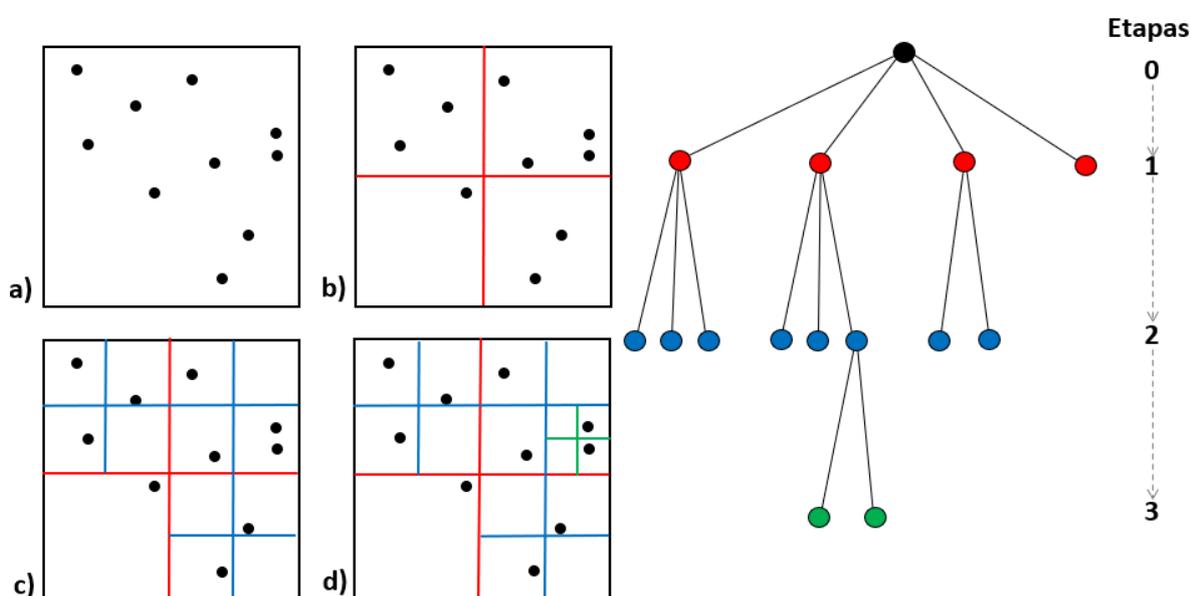


Figura 7.1: Modelo de subdivisão de células proporcionando uma estrutura de árvore hierárquica quaternária para uma malha 2D.

Para construção dessa árvore hierárquica, primeiro obtém-se a discretização do domínio interno a um quadrado, que é determinada de etapa zero, chamada nessa etapa de célula pai, como mostrado na Figura 7.1a. Em seguida, é dividido o quadrado da etapa zero, em quatro partes iguais, determinando assim a etapa um, e as células denominadas de filhas, Figura 7.1b. Assim, é continuado o processo

de divisões de cada célula em quatro novas, Figura 7.1c, respeitando o critério de quantidade desejada de elementos por cada célula (está célula agora passa a ser chamada de célula folha). Quando isso acontece, o processo de divisão da célula é finalizado, e chega-se na etapa final do nosso processo recursivo, Figura 7.1d, com a árvore hierárquica montada.

Após a construção da árvore, é feita a separação das células em três grupos, sendo, células adjacentes, bem separadas e distantes, conforme mostrado por Liu (2009). A Figura 7.2 é a mesma apresentada na Figura 7.1d, porém trazida aqui para que melhor possamos mostrar como dá-se a relação entre as células. Então, podemos dizer que, na etapa l as células são adjacentes se elas tem pelo menos um vértice comum, ver ^(*1) na Figura 7.2. Existe ainda outra situação de adjacência, que é quando duas células folhas forem de etapas diferentes, elas serão adjacentes se o pai de uma das células folhas tiver pelo menos um vértice comum com a outra célula folha, ver ^(*2) na Figura 7.2. Já, para que duas células sejam consideradas bem separadas em uma mesma etapa, l por exemplo, elas não podem ser adjacentes na etapa l , mas suas células pais tem que ser adjacentes na etapa anterior $l - 1$, ver ^(*3) na Figura 7.2. Por fim, uma célula é chamada distante de outra célula se a sua célula pai não for adjacente a célula pai da célula da outra comparada, ver ^(*4) na Figura 7.2.

Após a finalização da subdivisão dos elementos, passamos então a realizar as operações do IGABEM-FMM. Esse processo é realizado através de cinco etapas, sendo eles: duas expansões (expansão multipolar e expansão local) e três translações: translação momento para momento - M2M, translação momento para local - M2L e a translação local para local - L2L.

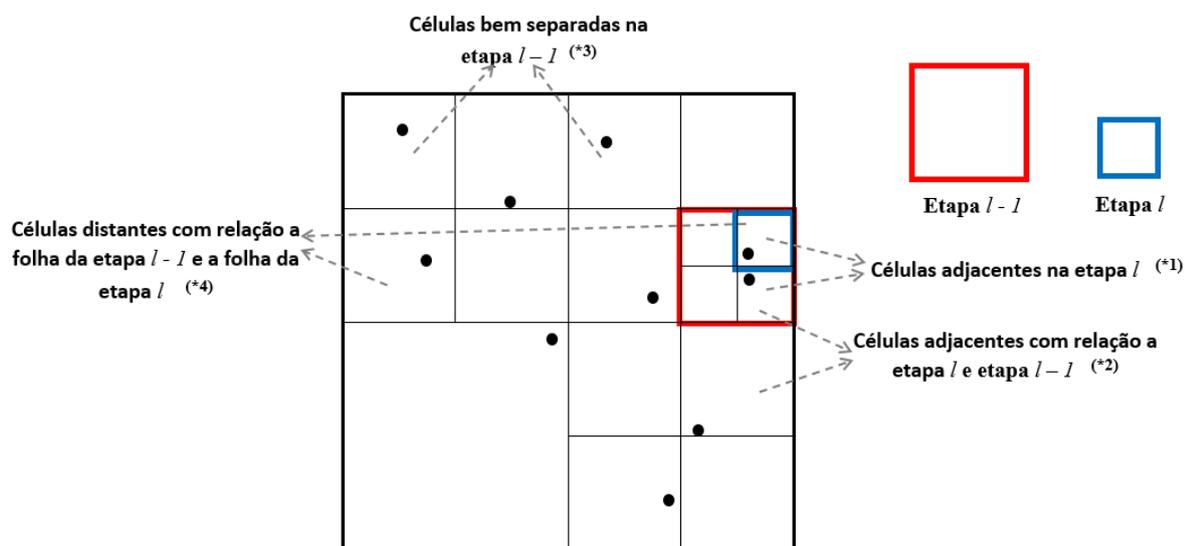


Figura 7.2: Relações entre as células da árvore.

Agora podemos direcionar a solução numérica final do problema em dois grupos, que ao final, se somam. O primeiro grupo são as células adjacentes, as células próximas do ponto fonte. Estas serão resolvidas utilizando o IGABEM. O segundo

grupo são as células consideradas bem separadas e as distantes. Estas últimas serão resolvidas com a aplicação do IGABEM-FMM. O principal objetivo do uso do IGABEM-FMM para os pontos bem separados e distantes está em acelerar o produto matriz/vetor \mathbf{Ax} , em cada iteração do método GMRES. Ao utilizar o FMM, essa matriz \mathbf{A} não é formada de maneira explícita durante a multiplicação da matriz/vetor. Isso é o que permite acelerar a solução numérica.

7.1 IGABEM-FMM para problemas 2D anisotrópicos

Como foi visto, as Eqs. (5.23) e (5.24) possuem singularidades e são tratadas agora com as funções de Green. Conforme Liu (2009), um dos motivos para redução das operações no IGABEM-FMM é devido ao fato de que as funções de Green ou os núcleos nos BIEs podem ser expandidos em forma de séries. Por conveniência, continuamos usando o plano complexo para o par cartesiano, onde x representa o ponto fonte, de coordenadas (x_1, x_2) e y representa o ponto campo, de coordenadas (y_1, y_2) , escrito na forma:

$$\mathbf{x} \rightarrow z_0 = x_1 + \mu x_2, \quad (7.1a)$$

$$\mathbf{y} \rightarrow z = y_1 + \mu y_2, \quad (7.1b)$$

em que μ são as raízes do polinômio característico. As Eqs. (7.1a) e (7.1b) representam o respectivo núcleo, e são sucessivamente a coordenada do ponto fonte z_0 e a coordenada do ponto campo z . Elas são utilizadas nas expansões das soluções fundamentais anisotrópicas U e T , na qual, primeiro utilizamos o operador de Green.

$$G(z_0, z) = \log(z_0 - z), \quad (7.2)$$

e sua derivada

$$G'(z_0, z) = \frac{1}{(z_0 - z)}. \quad (7.3)$$

Substituindo o operador de Green nas soluções fundamentais U e T , tem-se:

$$U_{ij}(z, z_0) = 2\text{Re}[q_{i1}A_{j1}G(z_0, z_1) + q_{i2}A_{j2}G(z_0, z_2)], \quad (7.4)$$

e

$$T_{ij}(z, z_0) = 2\text{Re}\left[G'(z_0, z_1)g_{j1}(\mu_1 n_1 - n_2)A_{i1} + G'(z_0, z_2)g_{j2}(\mu_2 n_1 - n_1)A_{i2}\right], \quad (7.5)$$

Agora, o passo é expandir a função do núcleo, e, para isso, é introduzido um

ponto de expansão z_c que é considerado próximo ao ponto campo z , como mostrado na Figura 7.3. Ou seja,

$$G(z_0, z) = \log((z_0 - z_c) - (z + z_c)) - \log \left[(z + z_c) \frac{(z_0 - z_c) - (z + z_c)}{(z + z_c)} \right], \quad (7.6)$$

a Eq. (7.6) pode ser escrita numa forma mais compacta como:

$$G(z_0, z) = \log((z_0 - z_c) + \log(1 - \xi)), \quad \text{para} \quad \xi = \left(\frac{z + z_c}{z_0 - z_c} \right). \quad (7.7)$$

Aplicando a Eq. (7.7) em série de Taylor e realizando os passos algébricos de Reis e Albuquerque (2013), chega-se a expressão final do termo de Green na forma da Eq. (7.8), e da sua derivada na forma da Eq. (7.9)

$$G(z_0, z) = \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_k(z - z_c), \quad \begin{cases} I_k(z) = \frac{z^k}{k!}, & k \geq 0 \\ O_k(z) \begin{cases} -\log(z), & k = 0 \\ \frac{(k-1)!}{z^k}, & k \geq 1 \end{cases} \end{cases} \quad (7.8)$$

$$G'(z_0, z) = \sum_{k=1}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_{k-1}(z - z_c), \quad I_{k-1}(z) \begin{cases} I'_k(z) = 0, & k = 1 \\ I'_k(z) = \frac{k(z^{k-1})}{k!}, & k > 1 \end{cases} \quad (7.9)$$

Dependendo da quantidade de termos utilizados na série de Taylor, a aproximação pode não ser tão boa quanto esperado, ou até mesmo não convergente.

Quando o operador de Green, Eq. (7.8), é expandido em diferentes números de termos da série e o mesmo mostra-se convergente, podemos dizer então que, esses resultados são satisfatórios, com o ponto de expansão próximo do ponto campo. E portanto, o termo de Green inserido nas soluções fundamentais U e T também serão. Estes resultados também demonstram importância para as fases subsequentes do IGABEM-FMM, uma vez que partem dessa primeira etapa, e em seguida realizam-se as expansões das soluções fundamentais.

7.1.1 Etapas do IGABEM-FMM para os núcleos U e T

Após obter uma forma de aproximação para os termos singulares das soluções fundamentais, U e T , através da expansão em séries, utilizando o operador de Green, vamos agora mostrar as equações para cada etapa do IGABEM-FMM, conforme a

inserção das soluções fundamentais, reescritas com o operador de Green, Eqs. (7.4) e (7.5) na BIE Eq. (5.18), que fica escrita como:

$$c_{ij}(\mathbf{z})u_i(\mathbf{z}) + \int_{\Gamma} 2\text{Re}\left[G'(z_0, z_1)g_{j1}(\mu_1 n_1 - n_2)A_{i1} + G'(z_0, z_2)g_{j2}(\mu_2 n_1 - n_1)A_{i2}\right]u_j(\mathbf{z})d\Gamma(\mathbf{z}) = \int_{\Gamma} 2\text{Re}\left[q_{i1}A_{j1}G(z_0, z_1) + q_{i2}A_{j2}G(z_0, z_2)\right]t_j(\mathbf{z})d\Gamma(\mathbf{z}). \quad (7.10)$$

As equações que definem as etapas do IGABEM-FMM seguem a notação por pontos complexos. Assim, é considerado dois fragmentos do contorno Γ , um que contém o ponto fonte e outro que contém o ponto campo, como mostra a Figura 7.3.

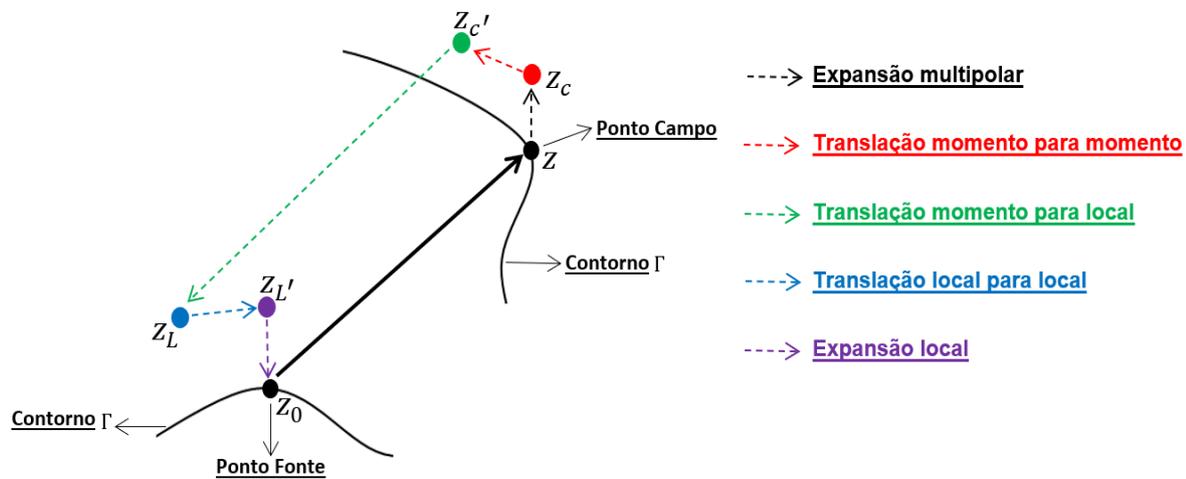


Figura 7.3: Notação complexa e os pontos relacionados para o processo IGABEM-FMM.

7.1.2 Expansões em múltiplos (momentos)

Para início do processo, seja considerado a Figura 7.3, na qual, chamamos de ponto intermediário z_c o ponto próximo do ponto campo z . Essa é a primeira etapa do FMM, chamada de expansão multipolar. Considerando que $|z - z_c| \ll |z_0 - z_c|$, e assim, usando as expansões das Eqs. (7.8) e (7.9) e substituindo nas soluções fundamentais de U e T , Eqs. (7.4) e (7.5), e integrando-as conforme os termos da Eq. (5.18), chega-se na expansão multipolar para ambos os casos, escrito na forma das Eqs. (7.11) e (7.12):

$$2\text{Re} \int_{\Gamma} [q_{im}A_{jm}G(z_0, z_m)]t_j(\mathbf{z}) = 2\text{Re} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_{om} - z_{cm}) \underbrace{\int_{\Gamma_c} t_j q_{im}A_{jm}I_k(z_m - z_{cm})d\Gamma}_{\text{núcleo } U \rightarrow M_k(z_{cm}): \text{momento}}, \quad (7.11)$$

$$2\text{Re} \int_{\Gamma} \left[G'(z_0, z_m) g_{jm} (\mu_m n_1 - n_2) A_{im} \right] u_j(\mathbf{z}) =$$

$$2\text{Re} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_{om} - z_{cm}) \underbrace{\int_{\Gamma_c} u_j g_{im} (\mu_m n_1 - n_2) A_{jm} I_{k-l}(z_m - z_{cm}) d\Gamma}_{\text{núcleo } T \rightarrow \tilde{M}_k(z_{cm}): \text{momento}}, \quad (7.12)$$

para $k \geq 0$ e $m = 1, 2$.

7.1.3 Translações momento para momento - M2M

Considere agora que, o ponto z_c seja deslocado para outra posição, o qual chamamos aqui de localização z'_c . Portanto, um novo momento pode ser calculados. E assim, a translação M2M para a integral da solução fundamental U e T são escritas como:

$$M_k(z'_{cm}) = \sum_{l=0}^k I_{k-l}(z_{cm} - z'_{cm}) \underbrace{\int_{\Gamma_c} t_j q_{im} A_{jm} I_l(z_m - z_{cm}) d\Gamma}_{\text{núcleo } U \rightarrow M_{l_2}(z_{cm})}, \quad (7.13)$$

$$\tilde{M}_k(z'_{cm}) = \sum_{l=0}^k I_{k-l}(z_{cm} - z'_{cm}) \underbrace{\int_{\Gamma_c} u_j g_{im} (\mu_m n_1 - n_2) A_{jm} I_l(z_m - z_{cm}) d\Gamma}_{\text{núcleo } T \rightarrow \tilde{M}_{l_2}(z_{cm})}, \quad (7.14)$$

para $k \geq 0$ e $m = 1, 2$.

7.1.4 Translações momento para local - M2L

Após as duas etapas, expansão multipolar e translação do momento para momento, relacionadas ao ponto campo, vamos agora realizar a translação no ponto fonte. Considere então um ponto z_L próximo do ponto fonte z_o , como pode ser visto em uma analogia na Figura 7.3. Assim, considerando que $|z_o - z_{Li}| \ll |z_{Li} - z_c|$, as equações para as translações M2L são escritas como:

$$2\text{Re} \int_{\Gamma_c} t_j q_{im} A_{jm} G(z_{om}, z_m) d\Gamma =$$

$$2\text{Re} \left[\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^k \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{\infty} O_{km+lm}(z_{Lm} - z_{cm}) M_{km}(z_{cm}) \right]}_{\text{núcleo } U \rightarrow L_{km}(z_{Lm}): \text{M2L}} I_{lm}(z_{om} - z_{cm}) \right], \quad (7.15)$$

$$2\text{Re} \int_{\Gamma_c} u_j g_{im} (\mu_m n_1 - n_2) A_{jm} G'(z_{om}, z_m) d\Gamma =$$

$$2\text{Re} \left[\underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^k \left[\sum_{k=0}^{\infty} O_{km+lm}(z_{Lm} - z_{cm}) \tilde{M}_{km}(z_{cm}) \right]}_{\text{núcleo } T \rightarrow \tilde{L}_{km}(z_{Lm}):M2L} \right] I_{lm}(z_{om} - z_{cm}). \quad (7.16)$$

As Eqs. (7.15) e (7.16) são denominadas expansões locais, e são válidas para $m = 1, 2$. e $k \geq 0$. Note que apenas o termo em destaque em cada equação é considerado na translação M2L.

7.1.5 Expansões local para local - L2L

Por fim, é realizada a segunda translação. Ou seja, considerando a translação do ponto z_L para um ponto z'_L , é possível escrever as equações dessa etapa como:

$$2\text{Re} \int_{\Gamma_c} t_j [q_{im} A_{jm} G(z_o, z_m)] d\Gamma = 2\text{Re} \left[\underbrace{\sum_{l=0}^p \sum_{k=0}^{p-l} I_m(z'_{Lm} - z_L) L_{l+k}(z_{lm}) I_{pm}(z_{mo} - z'_{Lm})}_{\text{núcleo } U \rightarrow L_{km}(z'_{Lm}):L2L} \right] \quad (7.17)$$

$$2\text{Re} \int_{\Gamma_c} u_j [g_{im} (\mu_m n_1 - n_2) A_{jm} G'(z_o, z_m)] d\Gamma = 2\text{Re} \left[\underbrace{\sum_{l=0}^p \sum_{k=0}^{p-l} I_m(z'_{Lm} - z_L) L_{l+k}(z_{lm}) I_{pm}(z_{mo} - z'_{Lm})}_{\text{núcleo } T \rightarrow \tilde{L}_{km}(z'_{Lm}):L2L} \right] \quad (7.18)$$

As Eqs. (7.17) e (7.18) demonstram a última etapa para o processo do IGABEM-FMM. Demais detalhes das equações apresentadas nesta seção, podem ser consultados em Junior, Albuquerque e Reis (2016), toda teoria do IGABEM-FMM pode ser vista em Liu (2009). Algoritmos para as etapas do IGABEM-FMM podem ser consultados ainda em Pfalzner e Gibbon (2005) e em Anisimov e Stewart (2019).

7.1.6 Passos para construção do algoritmo IGABEM-FMM

Após a apresentação das equações para cada etapa do IGABEM-FMM, vamos então mostrar como se dá a construção do algoritmo com base numa representação de um modelo discretizado. Sendo assim, para apresentar o passo a passo das etapas do algoritmo, seguiremos o domínio discretizado para um plano 2D em elementos de contorno, como mostrado de uma forma esquemática na Figura 7.4.

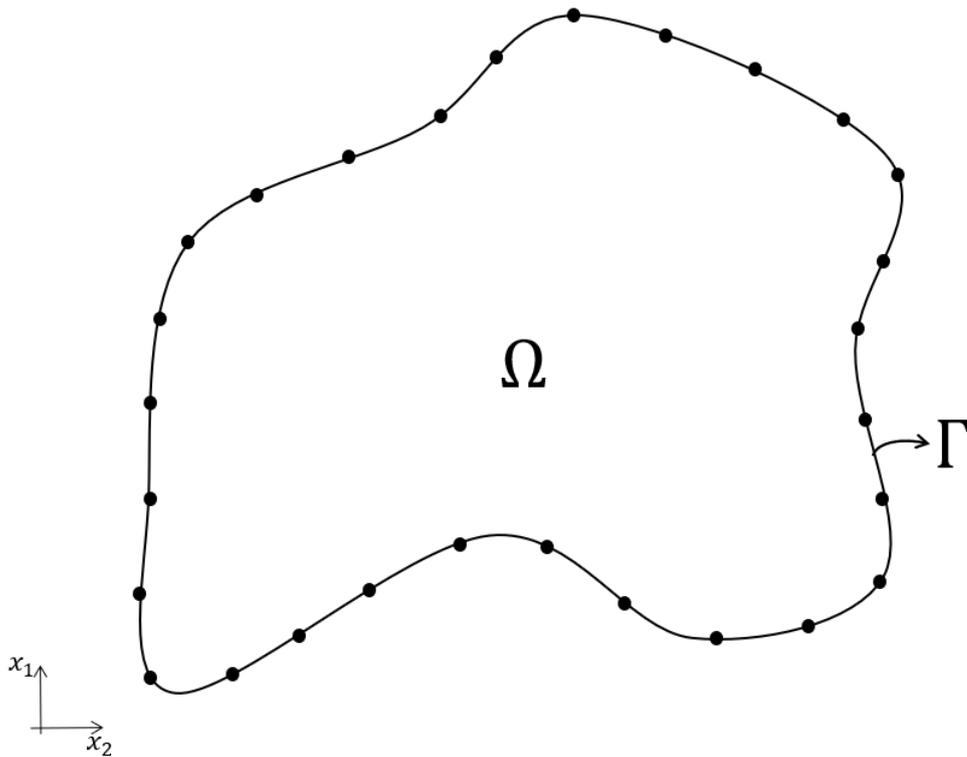


Figura 7.4: Domínio discretizado em elementos de contorno.

Primeiro passo: a inicialização do algoritmo começa a partir da discretização através do IGABEM. Essa discretização é dada pela NURBS, que são construídas por elementos de Bézier. Diante dos nós alocados, são definidos os níveis e como cada nó estará agrupado por cada célula. Assim, com essas informações, pode ser realizada a criação da estrutura da árvore hierárquica.

Então, seja considerada a Figura 7.5. A primeira etapa na construção do algoritmo, chamaremos de nível 0, que pode ser visto na Figura 7.5a. Nesta fase, é construído o retângulo de referência que mapeia todo o domínio discretizado. Em seguida, o retângulo da nível 0 é subdividido em 4 retângulos de proporções iguais, como mostrado na Figura 7.5b. Este novos retângulos, serão então chamados de células do nível 1, caso exista nó em seu interior. Dando continuidade ao processo de refinamento, novamente dividi-se cada célula do nível 1 em 4 novos retângulos iguais, e aqueles que possuem nó no seu interior são denominados de células do nível 2. Assim, é repetido a divisão dos retângulos de cada nível até se alcançar a quantidade mínima de nós por célula, como mostram os níveis 3 e 4, representado pelas Figuras 7.5c e 7.5d, respectivamente. E por fim, as células que não podem ser mais divididas, por existir apenas um nó em seu interior, são chamadas de células folhas, como as em azul na Figura 7.5d. Para o exemplo adotado na Figura 7.5, tem-se então, uma estrutura de células que pode ser representada na forma de uma árvore hierárquica quaternária, igualmente aquela vista na Figura 7.1.

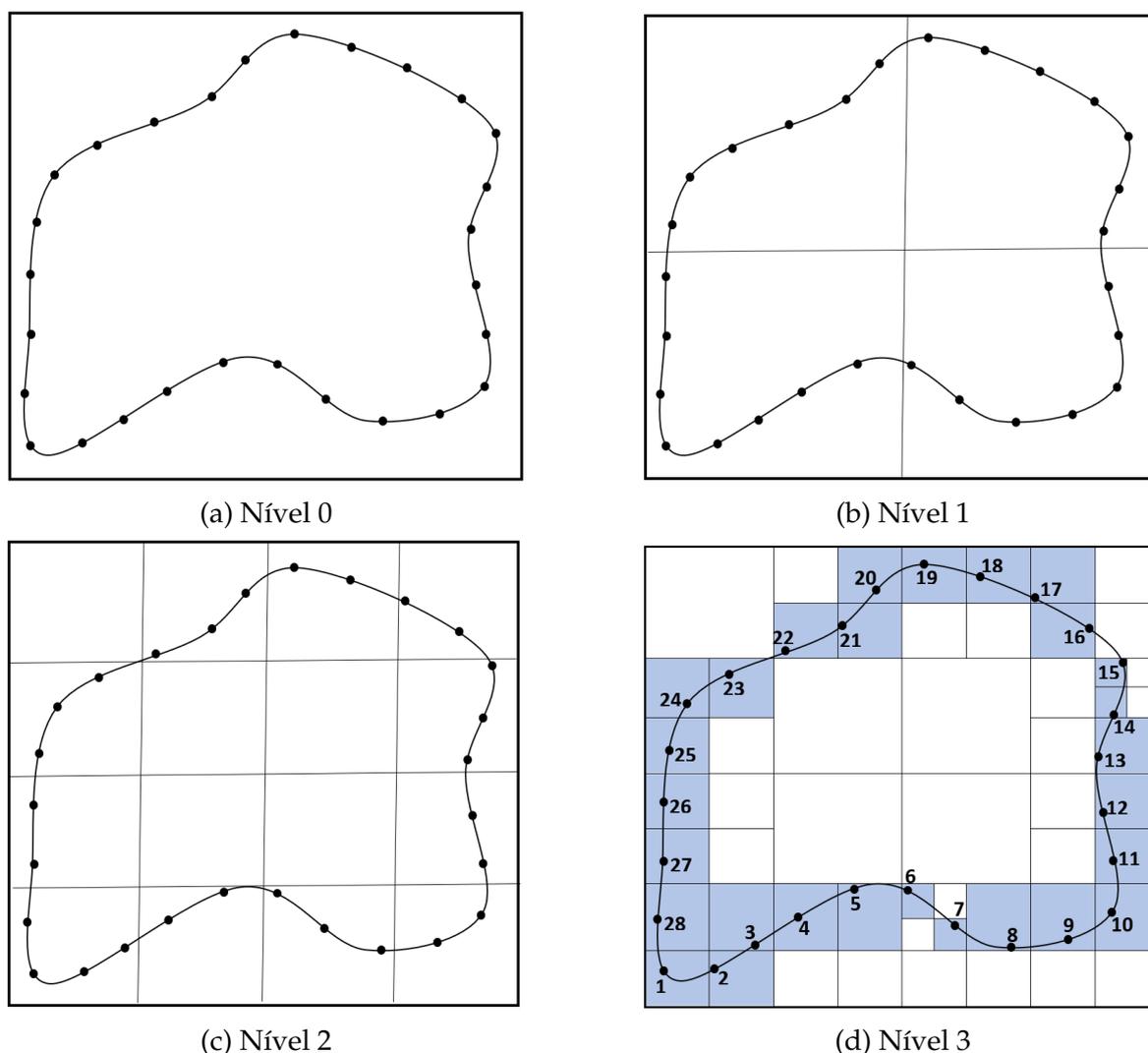


Figura 7.5: Passos para discretização do domínio até formar a árvore hierárquica

Segundo passo: é construída a sequência *upward*, que trata-se de agrupar os pontos campos, considerados distantes do ponto fonte, e também a fase em que são determinados os cálculos dos momentos multipolares. Esta etapa precisa ser calculada a cada nova iteração da solução, porque esses momentos envolvem a integração dos núcleos U e T . Assim, a partir da Figura 7.5d que foram obtidas todas as celular folhas e pais, são então determinados os locais das expansões dos momentos, que são os pontos z_c , isto é, o centro de cada célula folha, e os locais de translações do M2M, dado pelos pontos z'_c , que é o centro de cada célula pai, isso pode ser visto na Figura 7.6. E assim, após a definição destes locais, começam os cálculos.

Para uma explicação um pouco mais didática, é destacado a célula pai onde contém os nós 16 e 17, na região superior direita da Figura 7.5d. Então, primeiro são calculadas as expansões multipolares para cada célula folha, no ponto z_c , através das Eqs. (7.11) e (7.12), como mostrado na Figura 7.7a. Em seguida, a partir do centróide das células folhas, as translações multipolares são calculadas somando os

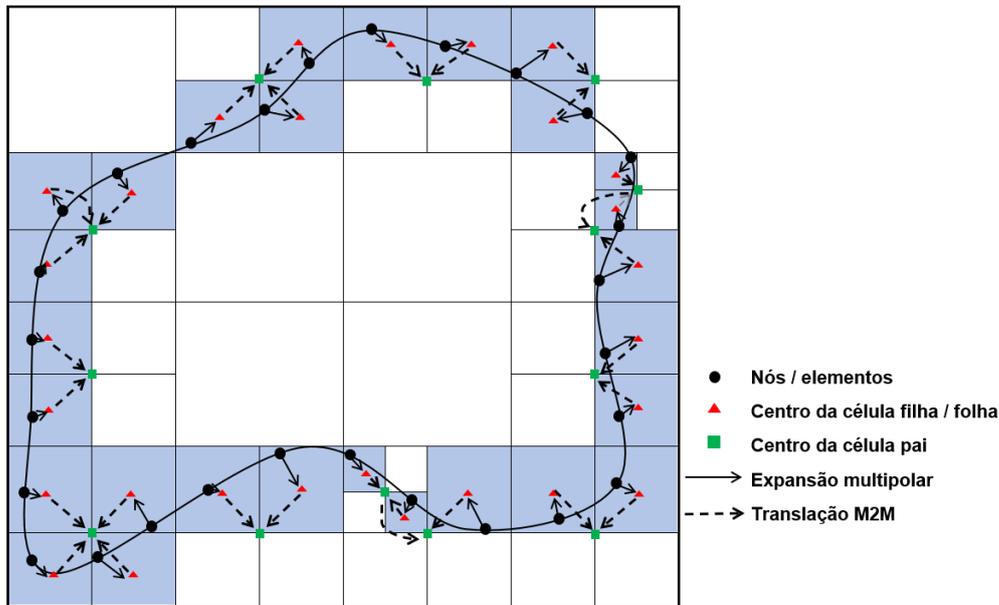


Figura 7.6: Mostragem geral das expansões e translações multipolares.

momentos multipolos das suas células filhas, ou seja, a translação M2M é calculada no centróide de cada célula pai, sob o ponto z_c , através das Eqs. (7.13) e (7.14).

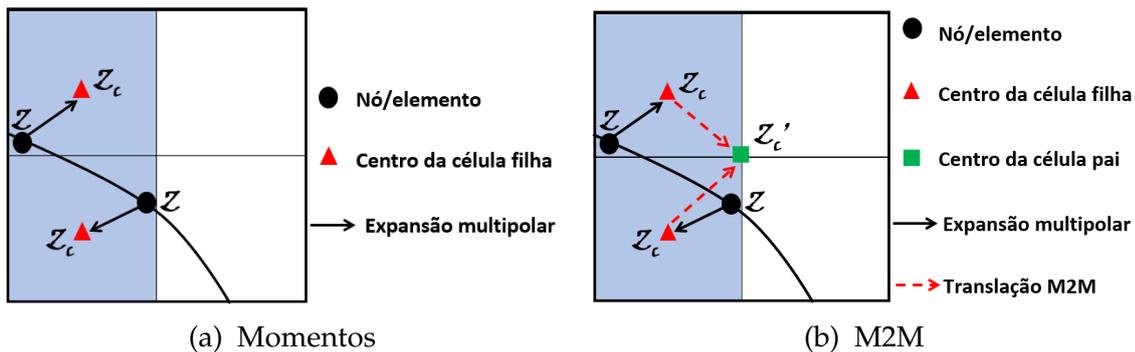


Figura 7.7: Etapas do *upward*: (a) expansão multipolar e em (b) translação M2M.

Terceiro passo: é construída a sequência *downward*. Para iniciar essa etapa, são enviadas as informações dos pontos das células pais onde contém os pontos campos, para o ponto da célula pai onde contém o ponto fonte. Isso é representado no maneira geral através da Figura 7.8, na qual, em modo de exemplo, é destacado o ponto 1, Figura 7.5d, como o ponto fonte.

Note que, nesta etapa é preciso definir o grupo, na qual cada célula encontra-se em relação a célula que contém o ponto fonte. Sendo, as células adjacentes (se elas têm pelo menos um vértice comum), as bem separadas (se na mesma etapa elas não forem adjacentes), e as distantes (se a célula pai não for adjacente na mesma etapa). Isso é bem mostrado na Figura 7.8, perceba que para o exemplo escolhido, são necessários dois níveis de M2L, o nível 2 que são todas as células bem separadas e distantes, e o nível 3, pois existem duas células pais adjacentes ao pai da célula do

ponto fonte, e por isso o M2L já faz a translação direto para o centro da célula folha onde há o ponto fonte.

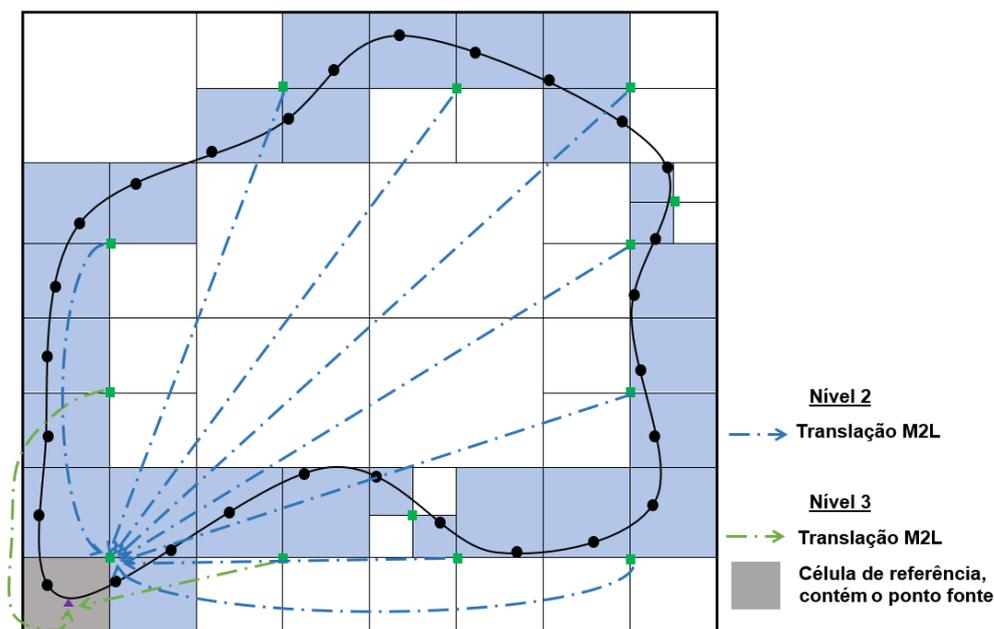


Figura 7.8: Esquema das translações M2L dos pontos campos para o ponto fonte.

De maneira semelhantes a Figura 7.7, para uma melhor didática de explicação das etapas M2L do nível 3, L2L e a expansão local, vamos destacar apenas as células pais onde contêm os pontos campos e ponto fonte, como mostrado na Figura 7.9.

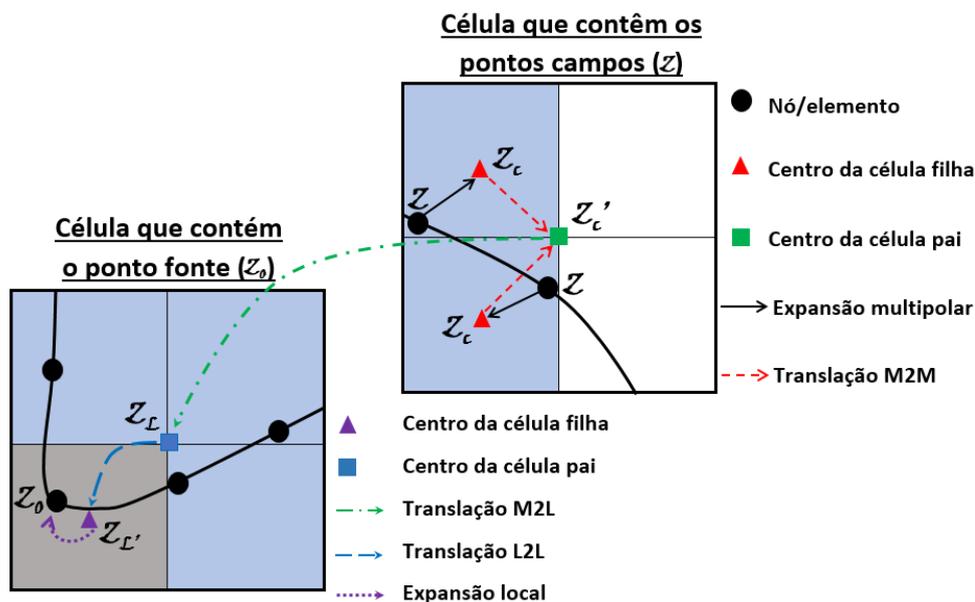


Figura 7.9: Etapas M2M, L2L e L2L. A célula em cinza contém o ponto fonte.

Assim, após as definições dos grupos de cada célula, e dando continuidade na Figura 7.7b, é então realizada a etapa M2L do nível 3. Esta etapa é considerada a união do processo *upward* com a etapa *downward*, sendo a *downward* a segunda parte da estrutura hierárquica das árvores. Portanto, na etapa M2L do nível 3, os

momentos serão transladados do centro da célula pai dos pontos campos, para o centro da célula pai onde contém o ponto fonte. Isso é feito através das Eqs. (7.15) e (7.16). E em seguida inicia-se a última translação, através da operação L2L, que irá transladar as informações no centro da célula pai para o centro da célula filha, até que se alcance o centro da folha. Isso é feito, ativando as Eqs. (7.17) e (7.18). Uma vez calculadas as informações no centro da célula folha, em cinza na Figura 7.9, agora é preciso apenas realizar a expansão local para o nó do elemento de contorno.

Quarto passo: Por fim, nessa estrutura, as células são separadas em relação a cada ponto fonte que a contém, os ditos pontos próximos (que são trabalhados com o IGABEM a partir de integrações diretas) e os ditos pontos bem separadas e distantes (que são trabalhados com o IGABEM-FMM), como será mostrado adiante. Portanto, as integrais da Eq. (7.10) devem ser resolvidas conforme os grupos das células, sendo perto ou longe. Por isso as integrais devem ser reescritas na forma:

$$\underbrace{2\text{Re} \int_{\Gamma_{\text{perto}}} G'(z_0, z_1) g_{j1} (\mu_1 n_1 - n_2) A_{i1} u_j d\Gamma}_{\text{IGABEM}} + \underbrace{2\text{Re} \int_{\Gamma_{\text{longe}}} G'(z_0, z_2) g_{j2} (\mu_2 n_1 - n_1) A_{i2} u_j d\Gamma}_{\text{IGABEM-FMM}}. \quad (7.19)$$

$$\underbrace{2\text{Re} \int_{\Gamma_{\text{perto}}} q_{i1} A_{j1} G(z_0, z_1) t_j d\Gamma}_{\text{IGABEM}} + \underbrace{2\text{Re} \int_{\Gamma_{\text{longe}}} q_{i2} A_{j2} G(z_0, z_2) t_j d\Gamma}_{\text{IGABEM-FMM}}. \quad (7.20)$$

No apêndice B é apresentado o Método dos Mínimos Resíduos Generalizados - GMRES, que é utilizado na solução iterativa do problema.

Capítulo 8

Resultados numéricos para o MEC isogeométricos acelerado

Após a verificação da robustez dos resultados numéricos apresentados na seção 6, através da formulação do IGABEM. Nesta sessão, são então mostrados os resultados numéricos para a formulação final, que foi o objetivo principal desta tese, que trata-se da união do IGABEM com o FMM. Assim como na seção 6, aqui também é analisada a eficiência e robustez da formulação com aplicações em problemas elásticos quase-isotrópicos, anisotrópicos e ortotrópicos. Problemas para avaliar a velocidade da formulação, bem como a capacidade de armazenamento de dados, ao utilizar modelos discretizados em milhares de grau de liberdade.

8.1 Cavidade circular em meio infinito

Em geral, problema de domínio infinito e semi infinito são bem modelados pelo MEC quando se é conhecida a solução fundamental para a equação que modela o problema. Na acústica, em análise de ruídos, em problemas de fluidos, como escoamento em reservatório de petróleo, são alguns exemplos. Para o problema a ser simulado nessa seção, considera-se uma cavidade circular em um meio elástico infinito com pressurização interna P , que encontra-se submetida a uma força de superfície t_r , na direção radial, em todo domínio circular, como mostra a Figura 8.1.

Neste problema são consideradas as seguintes simplificações e informações geométricas:

1. É considerado um problema 2D, cuja cavidade circular possui raio interno r_a e raio externo r_∞ , conforme mostrado na Figura 8.2.
2. É assumido que a pressão P é uniforme e atuante em toda extensão interna à cavidade circular, com deslocamento na direção radial u_r , e por isso, as

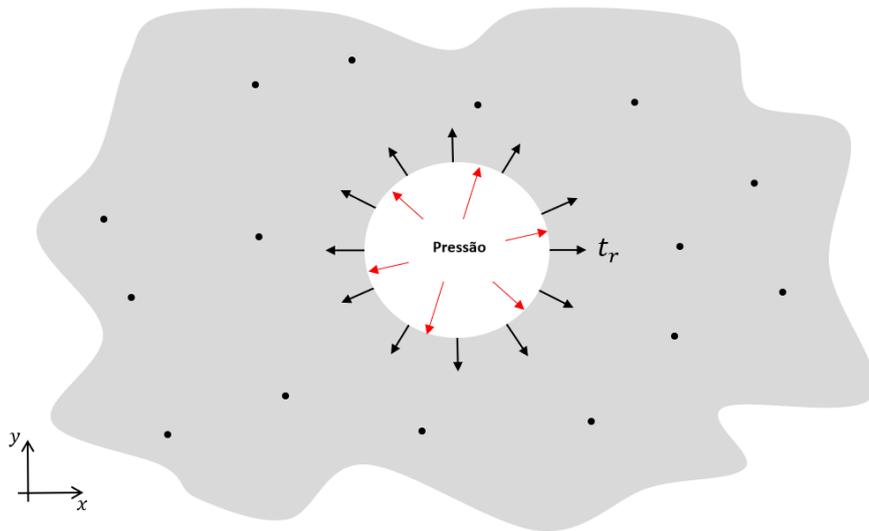


Figura 8.1: Representação da cavidade circular pressurizada em meio infinito.

condições de contorno para este tipo de problema devem ser $t_n = -p$ para o raio da parede interna r_a .

3. A geometria do modelo foi construída com uma NURBS(N_1), sendo N_1 a circunferência geométrica, cujo raio r parte do centro de origem em $(0,0)$, como pode ser visto um modelo representado pela Figura 8.2.

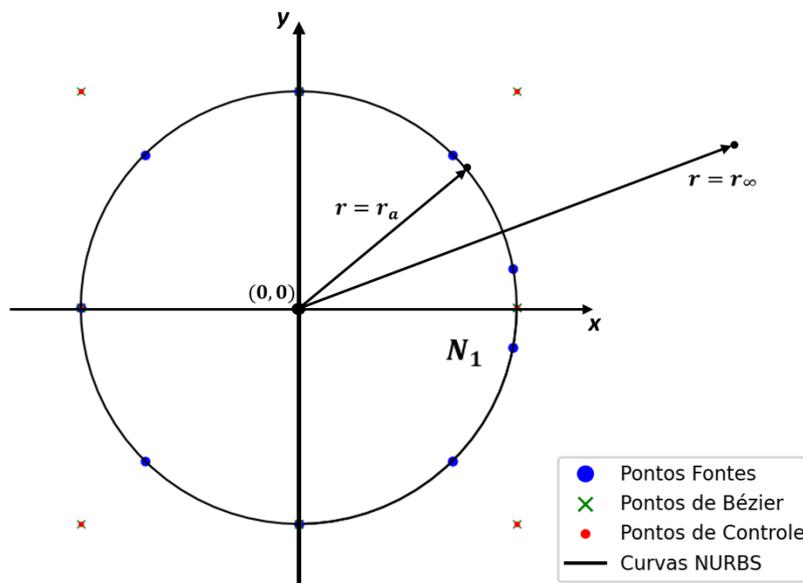


Figura 8.2: Discretização da cavidade circular da Figura 8.1.

Este exemplo representa um problema de estado plano de deformação, e, para aplicação numérica, é considerada a condição de contorno apresentada na Eq. (8.1), sendo t_n a força de superfície na direção normal e t_{tang} a força de superfície na direção tangencial.

$$\text{Condições de contorno} = \left\{ t_n = -100 \quad t_{tang} = 0, \quad (x, y) \in N_1. \quad (8.1) \right.$$

A simulação é realizada com base nas informações apresentadas na Tabela 8.1.

Variáveis do problema	Valores	Variáveis do problema	Valores
Elasticidade longitudinal	$E_1 = 2.07 \text{ GPa}$	Módulo de Cisalhamento	$G_{12} = 94499,9 \text{ GPa}$
Elasticidade transversal	$E_2 = 1,01 \text{ GPa}$	Pressão interna	$P = 100 \text{ N}$
Coefficiente de Poisson	$\nu_{12} = 0,1$		

Tabela 8.1: Propriedade mecânicas do material e pressão interna: cavidade circular.

Os resultados para o deslocamento radial são comparados com a solução analítica deste problema, conforme apresentado por Chandrasekharaiah e Debnath (2014):

$$u_r = \frac{(1 + \nu)pr_a^2}{Er} \quad (8.2)$$

8.1.1 Validação MEC isogeométrico FMM

Nesta seção são apresentados os primeiros resultados como forma de validação da formulação do IGABEM-FMM. Nesta investigação é avaliado o efeito do número de termos na expansão multipolar, a influência da quantidade de elementos de contorno por folha, bem como a convergência da solução numérica, ao passo que a malha é refinada.

Para início dos resultado numéricos do IGABEM-FMM, primeiro é realizada toda etapa conforme mostrada na seção 7.1.6. Portanto, dada as informações geométricas para o domínio à ser modelado, é construída a estrutura da árvore hierárquica que contém os dados necessários para serem enviados para o algoritmo do FMM. No Apêndice C é mostrado em detalhes os parâmetros de saída para um exemplo de uma árvore hierárquica. Neste contexto, é importante apresentar alguns termos escritos no algoritmo computacional, que são utilizados na análise numérica para os diferentes problemas simulados. São eles:

- maxEf - É a quantidade de elementos de contorno que a folha agrega;
- nivA - É a quantidade de níveis permitidos na árvore;
- ExpM - É a quantidade de termos utilizada na expansão multipolar;
- ExpL - É a quantidade de termos utilizada na expansão local.

Portanto, com as informações de refinamento da malha, grau da NURBS, quantidade de níveis da árvore e quantidade de elementos de contorno por folha, é possível criar a árvore hierárquica como mostrado na Figura 8.3.

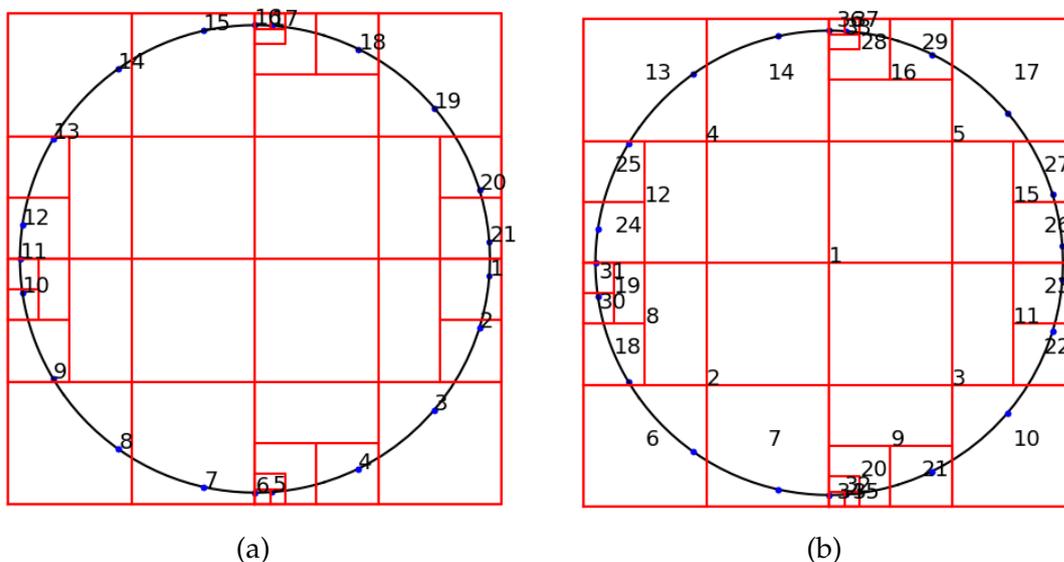


Figura 8.3: Estrutura em árvore para uma cavidade circular, construída com NURBS de grau $p = 4$ e 20 pontos fontes, (a) numeração dos nós e (b) numeração das células.

Note que a Figura 8.3 possui um elemento de contorno por célula, que, desta forma, assemelha-se com o MEC convencional, onde cada ponto fonte interage diretamente com um ponto campo. Obviamente que a ideia ao utilizar o FMM não é essa, mas sim, que uma dada quantidade de elementos de contorno dentro de uma célula seja realocados através da expansão multipolar, e esse grupo possa interagir com um ponto fonte. Isso pode ser verificado na Figura 8.4 nas células em destaques, como se relacionam os seis pontos campos dentro de uma célula com o ponto fonte.

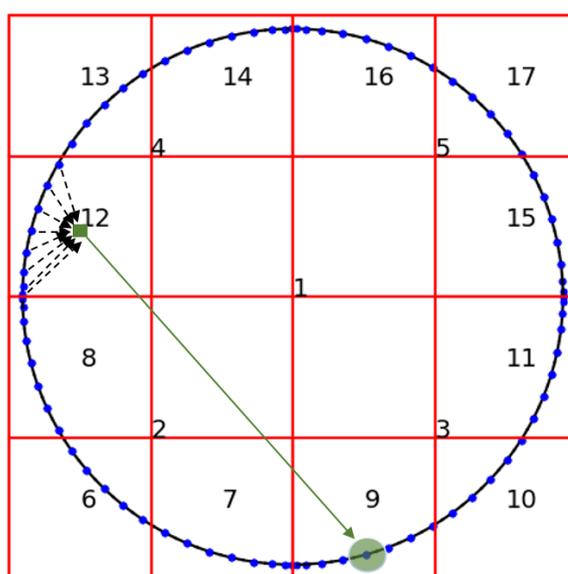


Figura 8.4: Estrutura de árvore com múltiplos elementos por folha.

Na Figura 8.5 mostra-se o erro normalizado, Eq. (6.5), entre a solução analítica para o deslocamento radial Eq. (8.2), e as soluções numéricas pelos IGABEM e IGABEM-FMM, calculados no contorno da cavidade circular. Foi utilizada uma geometria circular de raio $r_a = 3$, com um total de 10 pontos de integração. Além disso, para o IGABEM-FMM foi utilizado 1 elemento de contorno por folha, e as expansões $\text{ExpM} = \text{ExpL} = 8$.

Por ser um problema não muito complexo para ser resolvido, este tem uma convergência muito rápida para ambos os métodos. Note por exemplo, que a norma do erro é baixa, por volta de 10^{-4} , mesmo com poucos pontos fontes. Por fim, é possível verificar que os dois métodos, nestas configurações, são semelhantes.

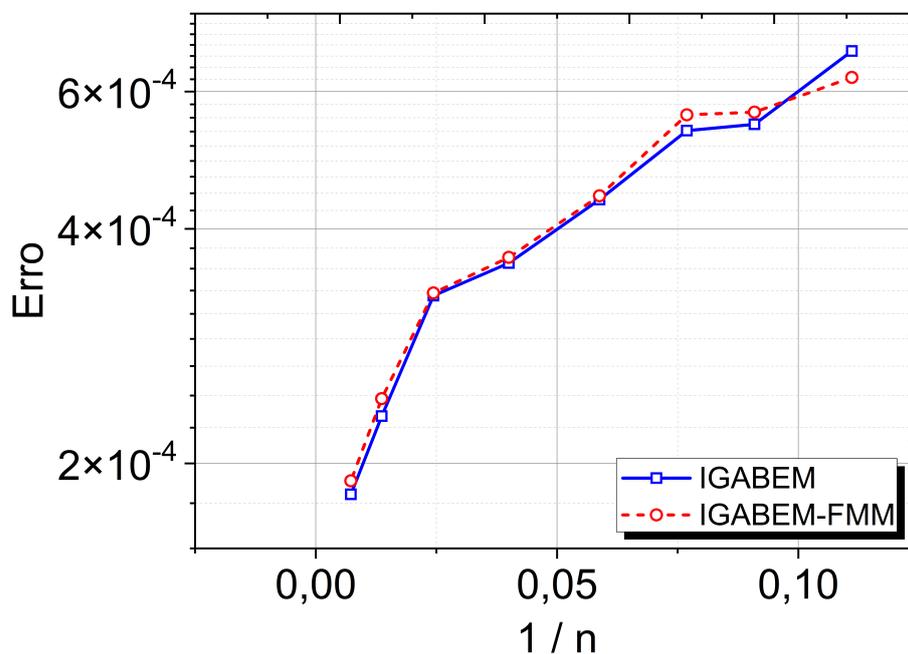


Figura 8.5: Erro normalizado para o problema de cavidade circular.

Por se tratar de um problema em meio infinito, agora é analisado a eficiência das metodologias no cálculo dos deslocamentos em pontos externos à cavidade circular. Na Figura 8.6 é mostrado de forma esquemática a representação do modelo, na qual foi selecionado alguns pontos de forma aleatória para calcular o deslocamento. Os resultados agora levam em consideração a análise do efeito da variação da quantidade de termos utilizado na expansão multipolar - ExpM e na expansão local - ExpL . Na Tabela 8.2 são apresentados estes resultados. Nesta, é mostrada quando o raio da cavidade é $r_a = 3$, com a geometria possuindo 39 pontos fontes, nos quais, cada célula da árvore possui no máximo, até 4 elementos por folha. É possível observar a influência da quantidade de termos nestas expansões, o quanto melhora os resultados numéricos no IGABEM-FMM comparando-se com a solução analítica.

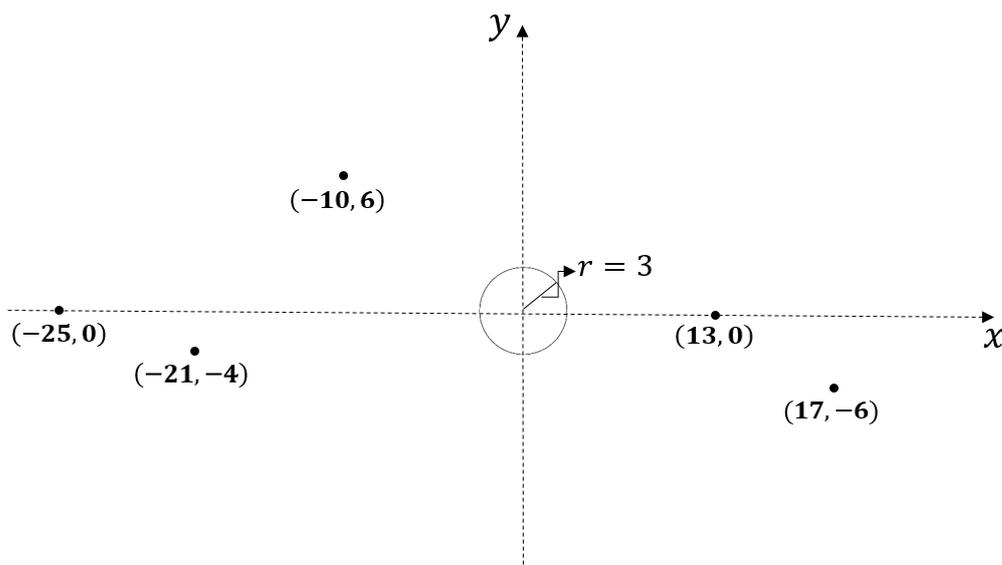


Figura 8.6: Pontos de cálculo em nós externos à cavidade circular.

$r_a = 3$	Análise de deslocamentos em elementos externo a cavidade				
IGABEM-FMM	nó	nó	nó	nó	nó
ExpM / ExpL	(-25; 0)	(-21; -4)	(-10; 6)	(13; 0)	(17; -6)
1 / 1	1.930×10^{-4}	2.253×10^{-4}	4.105×10^{-4}	3.704×10^{-4}	2.667×10^{-4}
2 / 2	1.916×10^{-4}	2.239×10^{-4}	4.098×10^{-4}	3.679×10^{-4}	2.653×10^{-4}
4 / 4	1.906×10^{-4}	2.228×10^{-4}	4.083×10^{-4}	3.667×10^{-4}	2.644×10^{-4}
8 / 8	1.906×10^{-4}	2.227×10^{-4}	4.082×10^{-4}	3.667×10^{-4}	2.643×10^{-4}
IGABEM	1.905×10^{-4}	2.227×10^{-4}	4.081×10^{-4}	3.666×10^{-4}	2.642×10^{-4}
Analítica	1.905×10^{-4}	2.228×10^{-4}	4.083×10^{-4}	3.663×10^{-4}	2.641×10^{-4}

Tabela 8.2: Deslocamentos em pontos externos para o problema de cavidade circular.

Com os resultados desta seção é possível verificar a eficiência da metodologia proposta do IGABEM-FMM, com resultados acurados e convergentes ao passo que refina-se a malha e aumenta-se a quantidade de termos das expansões. Com respeito aos resultados numéricos variando a quantidade de elementos por folha da árvore, não foi verificado valores com grandes diferenças, e portanto, não são mostrados.

8.2 Distribuição de tensões tangenciais ao longo da circunferência do furo

Considere uma placa de dimensões infinitas com um furo circular, submetida a uma força $\bar{\sigma}$ no sentido principal em x , como mostrado na Figura 8.7. Perceba que nesta aplicação, como mostra a figura, é considerado um ângulo φ , que descreve o sentido da fibra no laminado, ou seja, é a representação de um modelo anisotrópico, sendo que, quando $\varphi = 0^\circ$ ou 90° passa a ser também ortotrópico. Nestas condições,

$$\frac{\mu^4}{E_1} + \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \mu^2 + \frac{1}{E_2} = 0. \quad (8.6)$$

Para simulação computacional deste problema, considere a geometria mostrada na Figura 8.8 criada com curvas NURBS N_i . As suas respectivas condições de contorno, são apresentadas na Eq. (8.7).

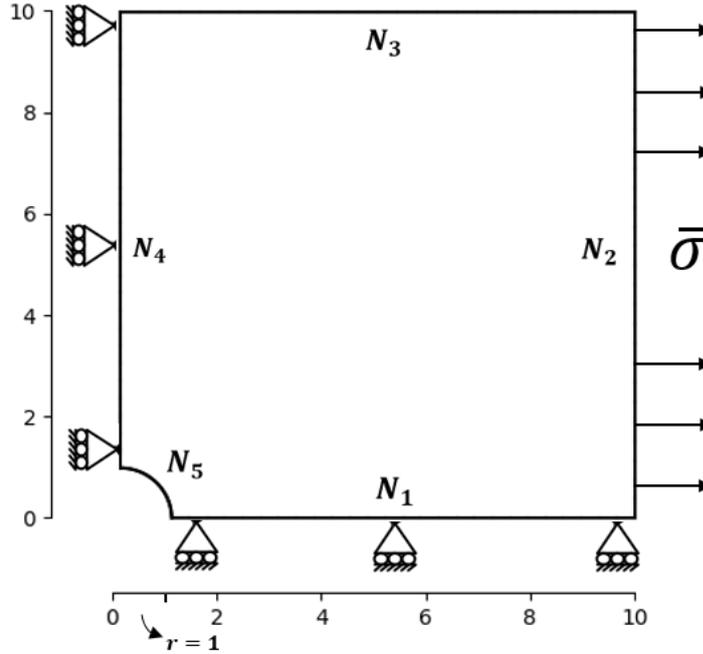


Figura 8.8: Ilustração de um quarto da placa com furo, tracionada no sentido x .

$$\text{Condições de contorno} = \begin{cases} t_x = u_y = 0, & (x, y) \in N_1, \\ t_x = \bar{\sigma}, \quad t_y = 0, & (x, y) \in N_2 \\ t_x = t_y = 0, & (x, y) \in N_3, \\ u_x = t_y = 0, & (x, y) \in N_4, \\ t_x = t_y = 0, & (x, y) \in N_5. \end{cases} \quad (8.7)$$

Aplicação: Nesta seção, é realizada a simulação computacional, considerando três diferentes tipos de materiais anisotrópicos. Portanto, considere agora, a geometria computacional, Figura 8.8, de raio = 1m, largura = 10m e altura = 10m, construída com NURBS de grau $p = 4$, condições de contorno como apresentadas na Eq. 8.7 e tração uniaxial $\bar{\sigma} = 1$. Além disso, foram utilizados um total de 150 pontos fontes, igualmente distribuídos, sendo 30 por NURBS N_i , com propriedades elásticas apresentadas na Tabela 8.3, conforme pode ser consultadas em Daniels e Ishai (2006).

Boro / Alumínio (B4/6061-Al)		Tecido de carbono / Fenólico		Carboneto de silício/ Al	
Propriedades Elásticas	Valores	Propriedades Elásticas	Valores	Propriedades Elásticas	Valores
E_1	235 GPa	E_1	20 GPa	E_1	204 GPa
E_2	137 GPa	E_2	19 GPa	E_2	118 GPa
G_{12}	47 GPa	G_{12}	6,8 GPa	G_{12}	41 GPa
ν_{12}	0,30	ν_{12}	0,23	ν_{12}	0,27

Tabela 8.3: Propriedades elásticas para aplicação das tensões tangenciais.

Com base no material de Carbono / Fenólico, são apresentados os resultados na Figuras 8.9 e 8.10. A primeira avaliação, tem como objetivo o efeito da quantidade de termos das expansões multipolar e local, utilizados no IGABEM-FMM. Para tal, foi gerada uma árvore hierárquica com no máximo cinco elementos por célula, como mostrado na Figura 8.9a. Nas Figuras 8.9b e 8.10a são mostrados os resultados numéricos para as tensões tangenciais σ_θ , em torno da circunferência do furo circular para o caso ortotrópico, com $\varphi = 0$. É possível verificar que na Figura 8.9b, quando utilizados apenas 1 ou 2 termos da expansão, os resultados não são bons, porém, começa a melhorar a partir da utilização de 4 termos. Na Figura 8.10a, são comparados o IGABEM-FMM com 8 termos da expansão, IGABEM e a solução analítica. Neste, os valores foram muito bons comparado ao analíticos. E na Figura 8.10b são mostrados os erros para cada caso analisado, calculados através da equação:

$$\text{erro} = \frac{\left(|S_a - S_n|\right)^{1/2}}{\text{MAX}|S_a|}, \quad (8.8)$$

sendo S_a e S_n as soluções analíticas e numéricas, respectivamente.

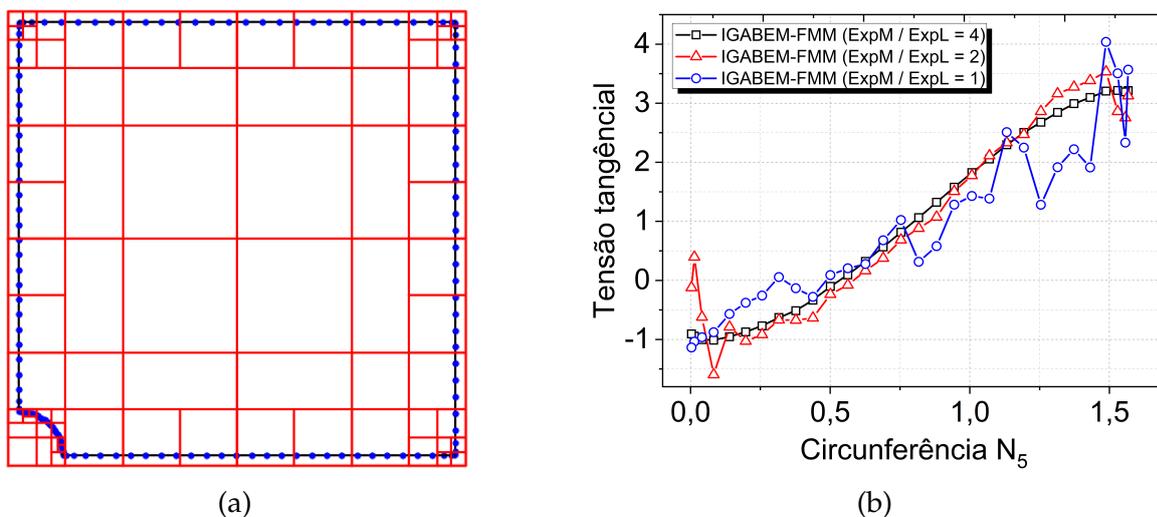


Figura 8.9: Tecido de carbono / Fenólico: (a) Árvore hierárquica, (b) tensão tangencial em σ_θ .

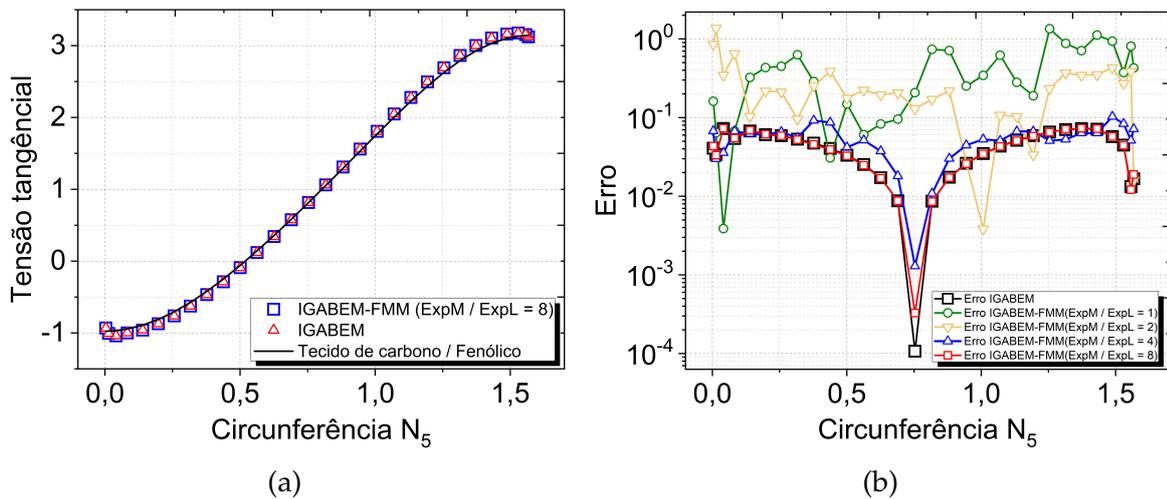


Figura 8.10: Tecido de carbono / Fenólico: (a) tensão tangencial em σ_θ e (b) erros.

Vale comentar que, nas regiões próximas dos limites da circunferência, os resultados numéricos apresentaram sempre um pouco mais de dificuldade em acompanhar o analítico, isso pode ser justificado por que próximos dos limites ocorrem variações bruscas dos valores das tensões.

Nas Figuras 8.11 e 8.12 são apresentados os resultados para σ_θ para os outros dois materiais anisotrópicos mostrados na Tabela 8.3. Ambos os resultados numéricos, como pode ser visto, também apresentaram ótimos comportamentos quando comparados com os resultados analíticos, e além disso, os erros calculados nó a nó mostrado nas Figuras 8.11b e 8.12b confirmam a qualidade dos resultados.

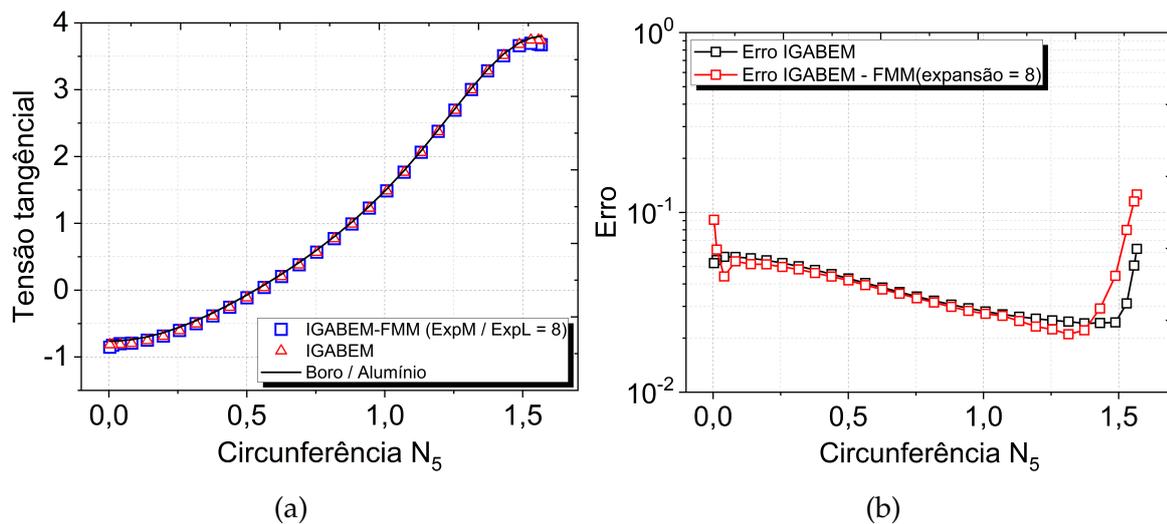


Figura 8.11: Boro / Alumínio: (a) tensão tangencial em σ_θ e (b) erro.

É possível também mostrar as deformações em cada laminado, causado pela aplicação da força. Na Figura 8.13, são mostrados os 3 diferentes materiais anisotrópicos apresentados na Tabela 8.3.

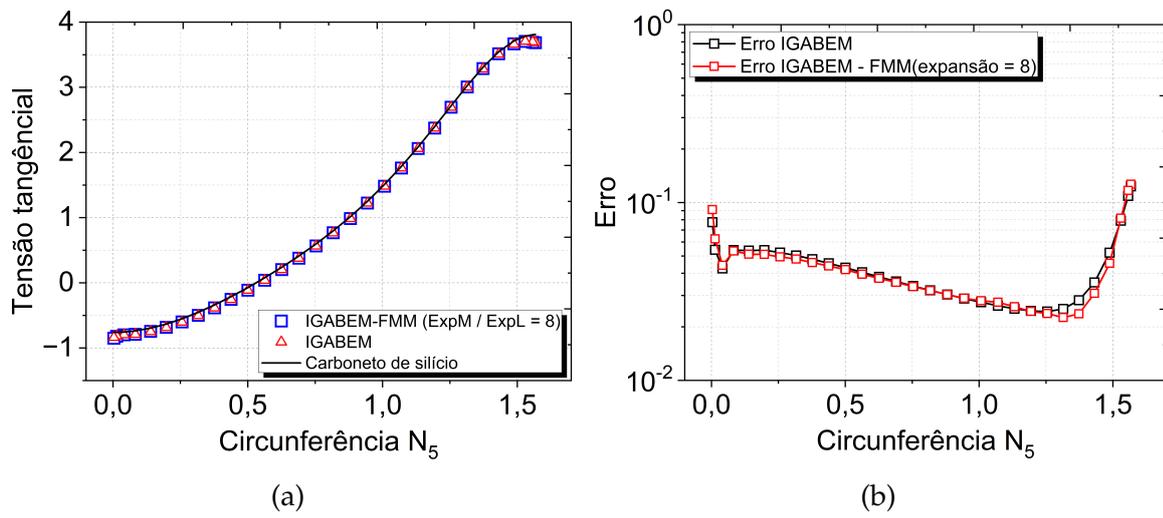


Figura 8.12: Carbono / Epóxi: (a) tensão tangencial em σ_θ e (b) erro.

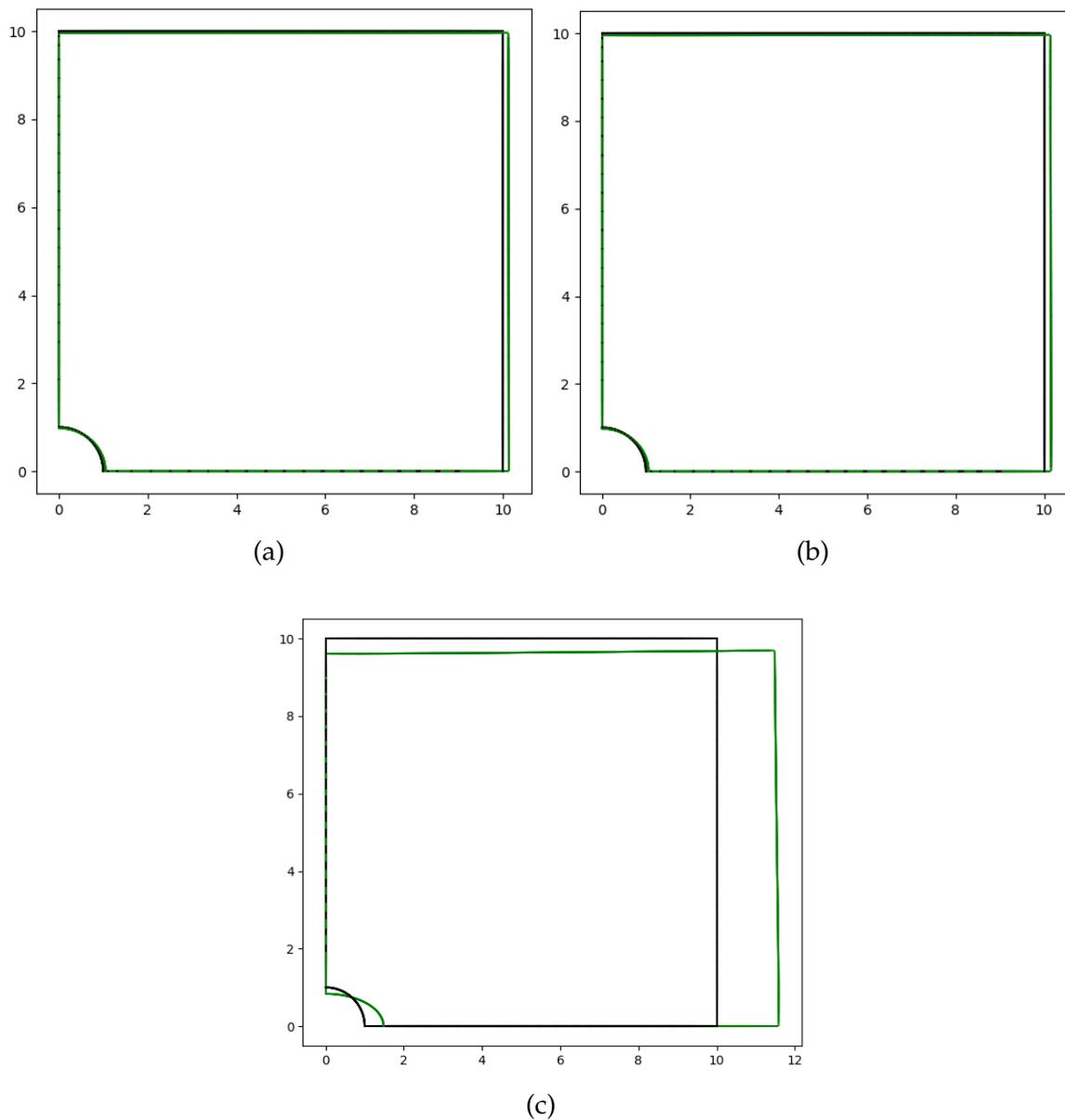


Figura 8.13: Deslocamento das placas: (a) Carboneto de silício (b) Boro / Alumínio e (c) Tecido de carbono.

8.2.1 Custo computacional

A partir deste problema, são iniciadas as análises de custo computacional do IGABEM-FMM comparando-o com o IGABEM. Para estas análises, foi utilizado a função `Timeroutput()` da linguagem computacional *julia*, na época destas análises, na versão 1.7.2, em um notebook de configurações: processador: AMD Ryzen 3 PRO 4450U com Radeon Graphics 2.50 GHz; memória RAM: 8,00 GB; com um sistema operacional de 64 bits, na edição do Windows 10 Pro.

Portanto, considere o material de tecido de carbono, como apresentado na Tabela 8.3. Os parâmetros de entrada para o GMRES foram utilizados conforme documentação¹. Sendo estes, listados no algoritmo abaixo.

```
1 x, flag = GMRES(A,b,  
2     restart=true,  
3     atol=1e-6, #tolerancia absoluta de parada baseada na norma residual  
4     rtol=1e-6, #tolerancia de parada relativa com base na norma residual  
5     memory=20,  
6     M=rwork, # matriz de pre-condicionamento  
7     ldiv=true,  
8     history=true #retorna as normas residuais de cada iteracao)
```

Sendo a saída da função GMRES, o vetor x contido da solução do problema e o $flag$ que retorna dados estatísticos, como: quantidade de iterações do problema, os resíduos, bem como informações da operação, se conseguiu ser resolvida, se houve inconsistências como a não convergência do problema. Como parâmetro de entrada, têm a \mathbf{A} , que é o operador linear que modela a matriz de dimensão n ; \mathbf{b} é um vetor de comprimento n , o GMRES(m) reinicia com a quantidade padrão para $m = 20$. A tolerância do GMRES foi mantida em 10^{-6} , uma vez que os resultados numéricos apresentados na Figura 8.10a foi de boa qualidade, $ldiv$ utiliza a matriz de pré-condicionamento $\mathbf{M} = rwork$, sendo $rwork$ o parâmetro de saída do FMM. E por fim, $history$ representa as normas residuais.

Na Figura 8.14 são apresentados os resultados para o tempo de execução para o IGABEM e o IGABEM-FMM, variando a quantidade de graus de liberdade. Como este é um problema relativamente pequeno, não houve a preocupação em analisar um alto número de graus de liberdade, a intenção nesse exemplo é mostrar que o velocidade de processamento do IGABEM-FMM é melhor, a partir de uma certa quantidade de DOFs. Isso é claramente mostrado na Figura 8.14, através da inclinação da curva de ambos os métodos. No IGABEM-FMM a inclinação faz com que o método, apesar de mais demorado para uma quantidade menor de DOFs, fica mais rápido quando superado aproximadamente os 1600 DOFs. Essa certificação, fortalece a ideia da teoria do FMM, uma vez que este método é fortemente indicado

¹<https://juliasmoothoptimizers.github.io/Krylov.jl/stable/solvers/unsymmetric/#Krylov.gmres>. Acessado 13/03/2023.

para problemas com milhares de graus de liberdade, não fazendo sentido seu uso em problemas com poucos DOFs.

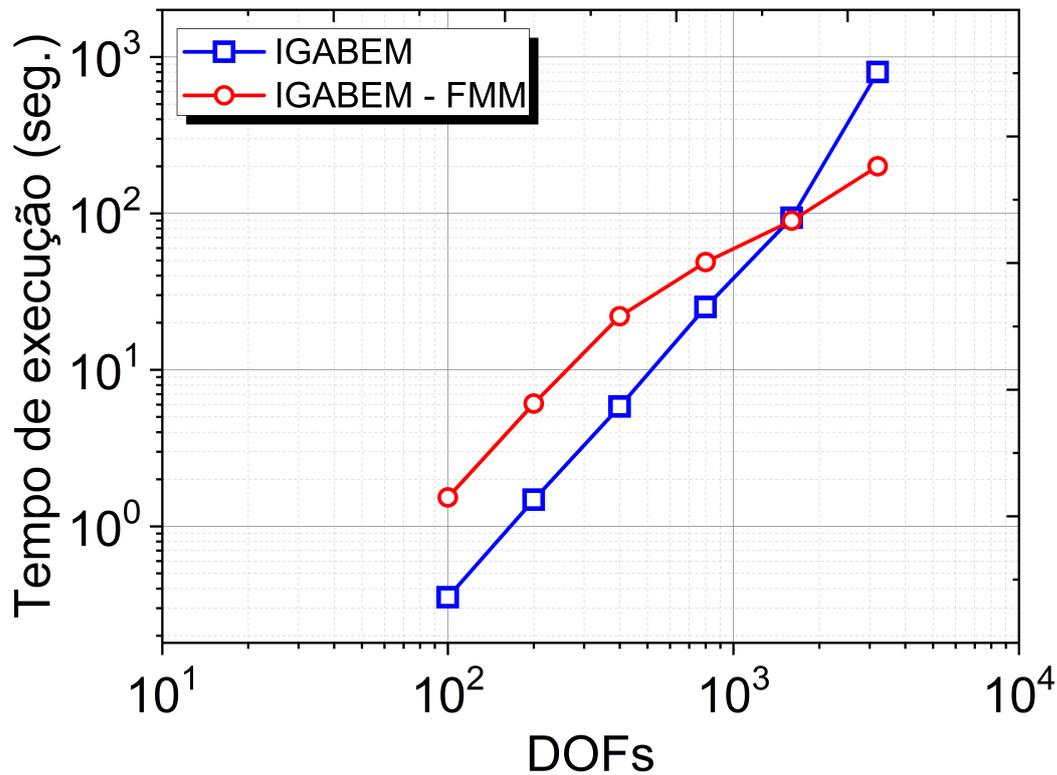


Figura 8.14: Tempo de processamento entre IGABEM e IGABEM-FMM no problema da placa com furo na quina.

Finalmente, a Tabela 8.4 mostra quantas iterações foram necessárias para o GMRES(m) com base em cada quantidade de DOFs. E além disso, é mostrado também o resíduo da última iteração.

DOFs	Iterações	Resíduo
100	15	9.4×10^{-4}
200	29	2.7×10^{-4}
400	27	3.3×10^{-4}
800	22	2.6×10^{-4}
1600	26	3.7×10^{-4}
3200	25	1.8×10^{-4}

Tabela 8.4: Cálculo do número de iterações e resíduos.

Todos os resultados do IGABEM-FMM convergiram com no máximo 30 iterações usando o reinício e a matriz de pré-condicionamento. Contudo, é preciso chamar atenção a este fato. O GMRES pode consumir uma quantidade de memória e tempo de processamento bastante elevados, por isso a ideia do reinício m do GMRES(m), conforme mostrou Saad e Schultz (1986). Assim, quando o GMRES é reiniciado, as informações acumuladas são eliminadas e os resultados mais recentes são usados

como valores iniciais para as próximas iterações. Contudo, ao reiniciar o GMRES(m) ele perde a garantia de convergência, o que não ocorre com o GMRES, que mesmo sendo mais custoso computacionalmente, garante a convergência. Assim, para contornar o problema do GMRES(m), usa-se a matriz de pré-condicionamento. Esse é um fato importante porque pode existir situações na qual a solução só converge depois de centenas de iterações, usando o GMRES, ou por outro lado, convergir rapidamente, usando o GMRES(m) com a matriz de pré-condicionamento. Isso foi visto na prática para esta aplicação. Por exemplo, no cálculo em 200 DOFs, quando foi usado o GMRES sem reinício e sem a matriz de pré-condicionamento, foram necessárias 61 iterações para o método convergir, com um total de 35 segundos. Já, ao utilizar o GMRES(m) com a matriz de pré-condicionamento, foram necessárias 29 iterações (Tabela 8.4) em um total de 2 segundos (Figura 8.14).

8.3 Placa com múltiplos furos circulares

Dando continuidade na avaliação de precisão numérica e custo computacional do IGABEM-FMM, agora, nesta aplicação, é estudada uma placa quadrada de dimensão $a \times a$ que encontra-se perfurada com múltiplos furos circulares distribuídos de maneira uniforme. Nesta placa é imposta uma aresta fixa, enquanto que a outra é submetida a uma tensão uniforme $\bar{\sigma}$ na direção x , conforme pode ser visto na Figura 8.15. Os furos podem ser adicionados de tal forma que sempre a razão entre a área dos furos e a área da placa seja constante e igual a 12,47%.

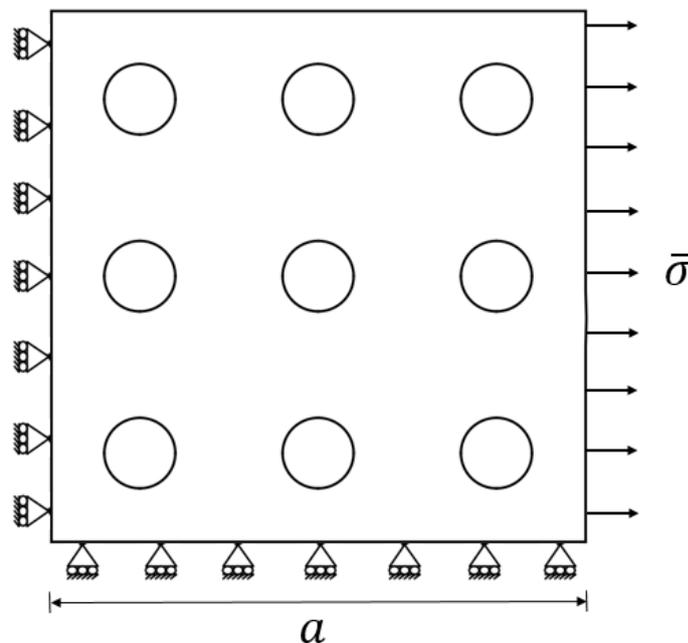


Figura 8.15: Representação de uma placa com multifuros circulares.

Para a simulação numérica deste problema, são usadas as constantes elásticas conforme a Tabela 8.5. E as condições de contorno, com base na Figura 8.15, são apresentadas na Eq. (8.9).

Propriedades elásticas	Valores
E_1	20 GPa
E_2	19 GPa
G_{12}	6,8 GPa
ν_{12}	0,23
$\bar{\sigma}$	1 MPa

$$C_c = \begin{cases} t_x = u_y = 0, & (x, y) \in N_1, \\ t_x = \bar{\sigma}, \quad t_y = 0, & (x, y) \in N_2, \\ t_x = t_y = 0, & (x, y) \in N_3, \\ u_x = t_y = 0, & (x, y) \in N_4. \end{cases} \quad (8.9)$$

Tabela 8.5: Propriedades elásticas para o tecido de carbono / Fenólico (DANIELS; ISHAI, 2006).

Para relação das informações do IGABEM-FMM, são utilizados um total de 08 termos para expansão multipolar e local, o número máximo de elementos em uma folha pode chegar até 50, e a tolerância para convergência do GMRES(m) de 10^{-6} .

Com base na representação mostrada na Figura 8.15, é possível construir o modelo com as curvas NURBS, como pode ser visto na Figura 8.16a, com NURBS de grau $p = 2$. Enquanto que na Figura 8.16b é mostrado a árvore hierárquica, onde mostra cada elemento nas células enumeradas.

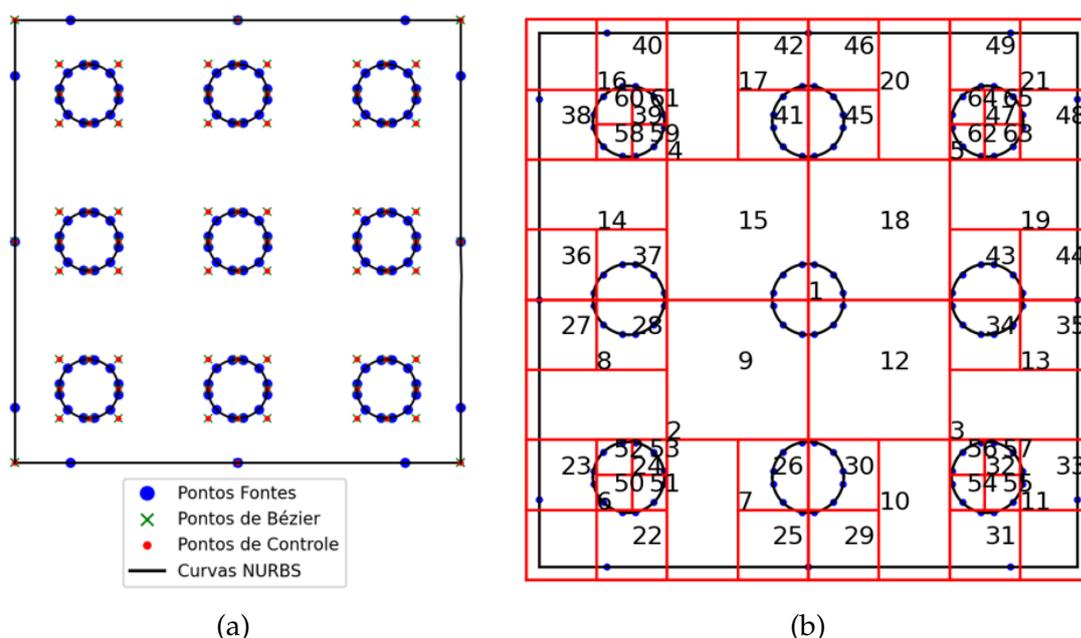


Figura 8.16: Em (a) modelo construído com NURBS e (b) representação da árvore hierárquica.

Na Figura 8.17 é mostrada a placa original com furos, em preto, e o deslocamento calculado pelo IGABEM-FMM, em verde, para diferentes configurações. Na Figura

8.17a é utilizada 2×2 furos, sendo usados 32 pontos fontes no quadrado e em cada furo, totalizando 160 pontos fontes ou 320 DOFs. Na Figura 8.17b foi utilizada 3×3 furos, sendo usados 40 pontos fontes no quadrado e em cada furo, totalizando 400 pontos fontes ou 800 DOFs. Na Figura 8.17c foi utilizada 4×4 furos, sendo usados 52 pontos fontes no quadrado e em cada furo, totalizando 884 pontos fontes ou 1768 DOFs. Por fim, na Figura 8.17d foi utilizada 8×8 furos, sendo usados 100 pontos fontes no quadrado e em cada furo, totalizando 6500 pontos fontes ou 13000 DOFs.

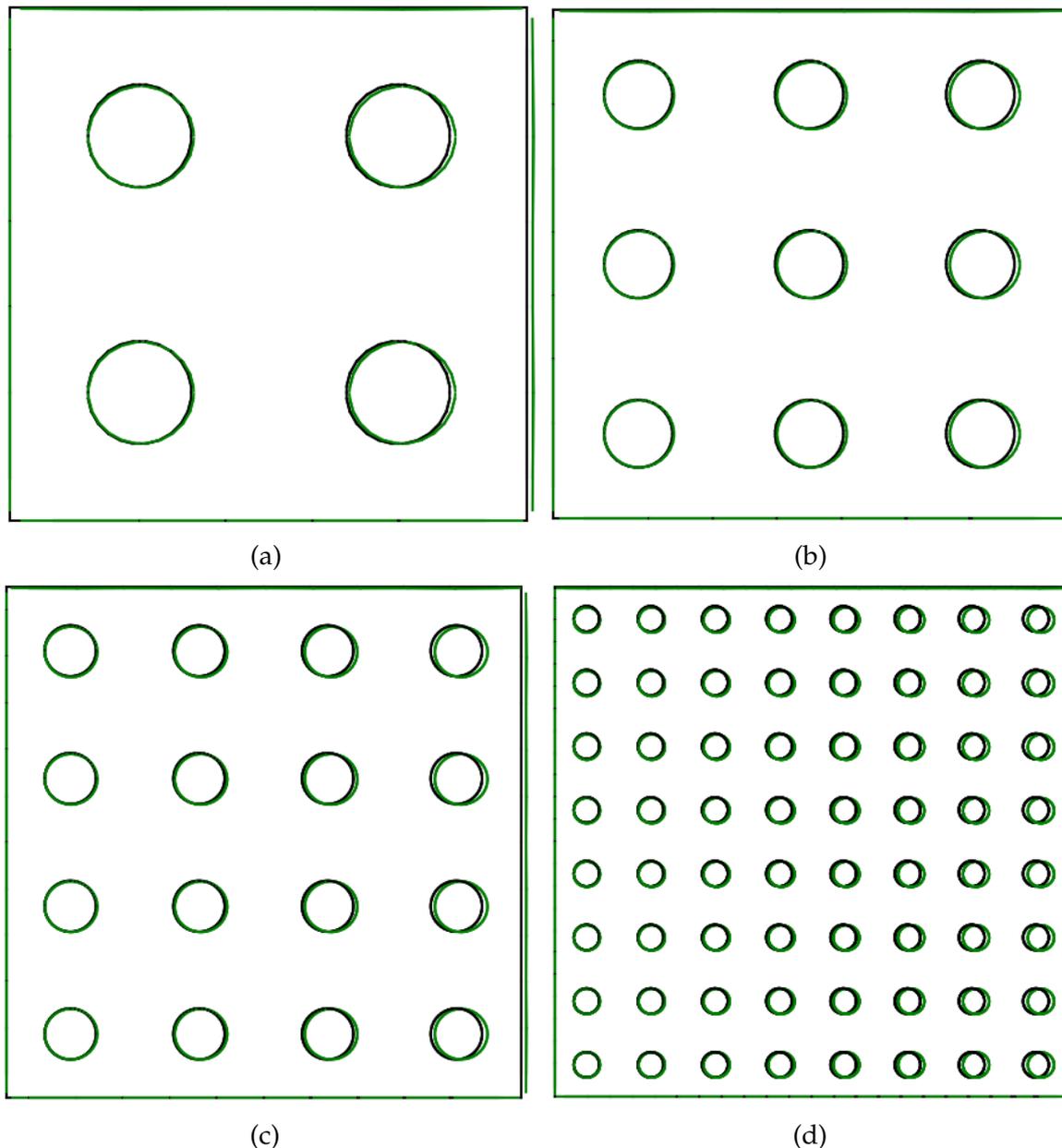


Figura 8.17: Placa com furos, sendo em preto a placa original e em verde a placa deformada.

Este problema da placa com multi furos não possui solução analítica conhecida. Portanto, foi buscado na literatura uma maneira de validar os resultados calculados para o deslocamento através do IGABEM-FMM. Uma forma conhecida, é calcular o módulo efetivo E_x . Para tal, é usado o deslocamento médio da placa, $desl_m$, calculado

a partir da solução de deslocamento no contorno do quadrado, u_x em $x = a$, e, em seguida, usa-se para estimar o módulo efetivo, (LIU, 2006), escrito na forma:

$$E_{ef} = \frac{\bar{\sigma}a}{desl_m}. \quad (8.10)$$

Com o módulo efetivo calculado, é então feita a divisão pelo módulo de elasticidade E_1 , de tal forma que convirja para uma constante que se aproxime da estimativa que usa a teoria de homogeneização baseada em distribuição de defeito diluído, como mostra Gross e Seelig (2017). A Tabela 8.6 mostra os resultados para o módulo efetivo calculados pelo IGABEM e IGABEM-FMM para placas com quantidades crescentes de furos e diferentes DOFs. Foi estabelecida uma discretização homogênea, de tal forma que, a discretização do contorno da placa possuísse a mesma quantidade de elementos de cada furo. Por exemplo, na placa com 6×6 , tem 72 elementos no contorno da placa e 72 no contorno de cada furo, como são 36 furos, então o total de elementos fica 5328 DOFs.

Módulo efetivo calculado para placa perfurada							
Número de furos	DOFs	IGABEM	IGABEM-FMM		(LIU, 2006)		
		E_{ef}/E_1	E_{ef}/E_1	Iterações	DOFs	E_{ef}/E_1	Iterações
2×2	320	0,716681	0,718512	15	3680	0,697892	25
4×4	1768	0,715825	0,715448	28	13120	0,711998	31
6×6	5328	0,716178	0,716124	19	28320	0,715846	29
8×8	13000	0,716255	0,716911	20	48280	0,717643	28

Tabela 8.6: Comparação do cálculo do módulo efetivo obtido pelo IGABEM, IGABEM-FMM e comparação com a literatura.

Como é possível verificar na Tabela 8.6, todos os resultados para o IGABEM-FMM convergiram até um máximo de 28 iterações. Além disso, com o aumento do tamanho de cada modelo, o módulo efetivo avaliado aproxima-se do valor da constante proposta na estimativa analítica em Gross e Seelig (2017).

Ao comparar os resultados obtidos por Liu (2006) aos calculados com as formulações do IGABEM e do IGABEM-FMM, é preciso justificar que eles utilizaram elementos de contorno constantes. Embora sejam menos precisos em comparação com os elementos desta tese, que é de ordem superior, há razões lógicas para terem utilizado. Pois, ao usar elementos constantes, todas as integrais podem ser avaliadas analiticamente, inclusive os momentos multipolares, assim como as integrações diretas dos núcleos do campo próximo. Porém, para resolver modelos de larga escala, em problemas com contornos curvos, o uso de elementos constantes para os campos de deslocamento não é tão eficiente e pode ser necessário um grande número de elementos, isso pode ser verificado claramente na Tabela 8.6. A diferenças de DOFs, chega a ser numa escala de milhares de elementos.

Por fim, é preciso frisar que, ao utilizar as NURBS é necessário usar integrações numéricas ou outros esquemas para as avaliações diretas das integrais singulares. Por um lado, isso demanda um custo computacional alto, se necessário utilizar uma grande quantidade de DOFs. Porém, por outro lado, as integrais podem ser avaliadas com mais precisão em contornos curvos com estes elementos de ordem superior, se comparado aos elementos constantes. Assim, a precisão numérica pode ser atingida rapidamente, e essa grande quantidade de DOFs pode não ser necessária. Isso é o que fica claro neste problema.

8.3.1 Custo computacional

A primeira investigação a ser realizada para o custo computacional do IGABEM-FMM neste exemplo, é a análise de tempo para a construção da árvore hierárquica. Para tal, é usado como referência uma placa com 5×5 furos, contendo um total de 624 DOFs. A Figura 8.18 mostra estes resultados. Fica claro que, o tempo da construção da árvore diminui ao passo que aumenta-se o número de elementos por célula. Isso já era esperado, uma vez que, quando se tem um elemento por célula, a árvore é construída com o máximo de níveis possível. E assim, ao passo que é aumentado a quantidade de elementos por célula, o número de níveis da árvore diminui até o nível mínimo. Essa análise é importante, pois o custo computacional do IGABEM-FMM é alterado pela quantidade de operações executadas nas expansões e translações.

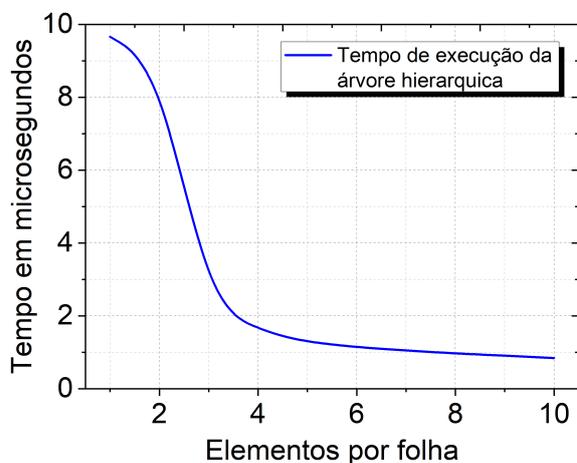


Figura 8.18: Tempo de execução da árvore para 624 DOFs.

Elementos por folha	Tempo
1	115 segundos
2	96,9 segundos
3	72,9 segundos
4	70,1 segundos

Tabela 8.7: Tempo da IGABEM-FMM com diferentes elementos por folha.

Note que, quanto maior a quantidade de elementos por folha, menor será a operação M2M, por exemplo. Porque, como visto na Figura 8.18, quanto mais elementos em uma folha, menos níveis da árvore teremos e conseqüentemente a etapa *downward* será menos custosa. Isso é possível ver claramente na Tabela 8.7, em que a IGABEM-FMM tende a diminuir o tempo de execução na medida que o número de elementos por folha aumenta. Entretanto deve-se notar que a maior quantidade de elementos por folha não será sempre a opção mais rápida na IGABEM-FMM. Pois,

dependendo da geometria, ao aumentar a quantidade de elementos por nós, pode ser diminuída as quantidades de expansões multipolares e translações M2M, porém dar-se-a um aumento dos elementos que deverá ser resolvido de forma direta, o que acarretará num processo mais demorado na IGABBEM-FMM.

Na Figura 8.19 é apresentada o tempo de execução para a placa, com a quantidade de furos, indo de 2×2 a 50×50 furos, resultando na variação de 120 a 60.024 mil DOFs. Perceba que o IGABEM não consegue alcançar a mesma quantidade de DOFs, uma vez que a memória RAM é totalmente consumida, então paramos em 21624 DOFs. Enquanto que o IGABEM-FMM conseguimos alcançar 60024 DOFs sem utilizar totalmente a memória RAM.

Finalmente, na Figura 8.19, é possível constatar que o IGABEM-FMM é uma formulação indicada para problemas com milhares de DOFs. Neste exemplo, a formulação passa a ser melhor quando se aproxima dos 9000 DOFs. Ainda com relação aos valores calculados, foi feita uma análise do ajuste por regressão linear nos dados em ambos os métodos, sendo o IGABEM resultando em 2,012541, provando que este possui complexidade de $O(N^2)$, enquanto que o IGABEM-FMM resultou em 1,044919, possuindo ordem de complexidade próxima do $O(N)$ no tempo de processamento. Assim, diante dos resultado em mais essa seção, conclui-se que a formulação desenvolvida é precisa e é mais eficiente em custo computacional do que IGABEM ao passo que a quantidade de DOFs aumenta.

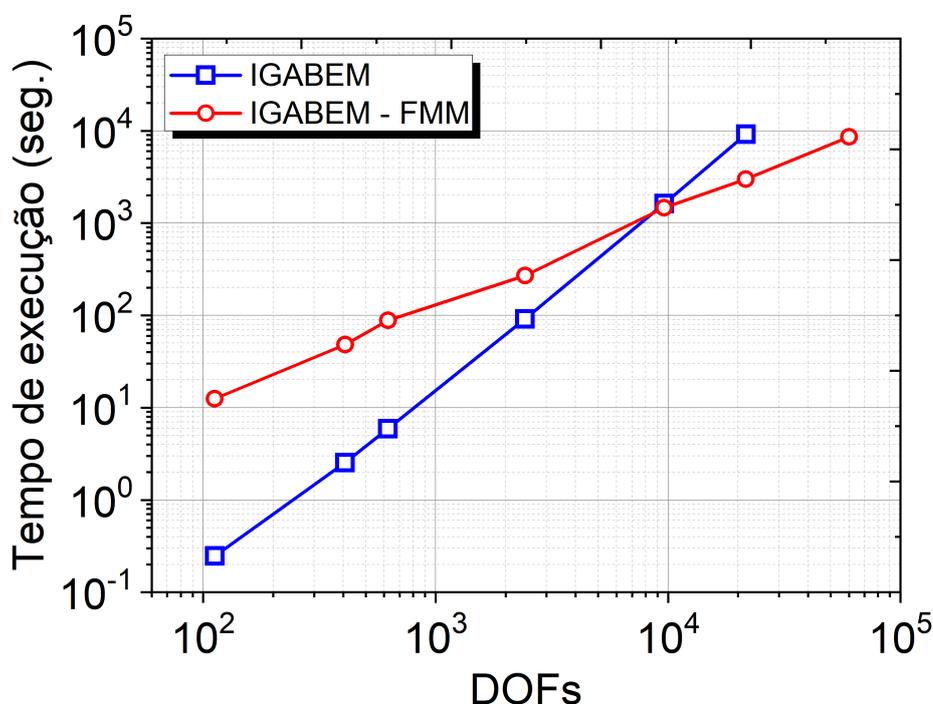


Figura 8.19: Tempo de processamento entre o IGABEM e o IGABEM-FMM no problema de placa com multifuros.

Capítulo 9

Conclusões

Esta tese apresentou duas formulações numéricas, IGABEM e IGABEM-FMM, aplicadas a problemas da elasticidade plana anisotrópica. Nestas aplicações a solução fundamental anisotrópica de Lekhnitskii foi utilizada, e nela as singularidades foram regularizadas de forma bem sucedida. A do tipo fraca, do núcleo de deslocamento, foi tratada com o método da transformada de Telles, enquanto que a singularidade forte do núcleo da força de superfície, foi tratada pelo método da subtração de singularidade.

As funções de forma utilizadas neste trabalho foram as NURBS. E assim, foi possível utilizar a mesma representação matemática do CAD na análise estrutural, evitando a geração de malhas e fornecendo representação exata para maioria das geometrias complexas utilizadas na análise de engenharia. As NURBS escritas de maneira convencional pelo processo de Cox-de-Boor pode ser custosas computacionalmente. Por causa do processo recursivo que utiliza, por isso, neste trabalho foi utilizada um processo direto, que possui menor custoso computacional, que é a decomposição de Bézier. Ao utilizar essa forma direta não obtivemos nenhuma perda das propriedades de continuidade. Esse procedimento tornou, a IGABEM similar ao método dos elementos de contorno convencional. Assim, ao utilizar a IGABEM com a solução fundamental anisotrópica, com a regularização das singularidades fortes pela SST, e utilizando as NURBS escritas na forma da decomposição de Bézier, foi possível construir a primeira contribuição deste trabalho, uma vez que, foram constatadas, seção 6, soluções numéricas em excelente concordância com as soluções analíticas disponíveis na literatura, além de precisão superior quando comparada a códigos que utilizam o MEC convencional, mesmo com poucos graus de liberdade.

Como foi visto, no MEC, dada a sua forma de interação elemento a elemento, gera uma matriz algébrica cheia e não simétrica. Solucionadores diretos ou iterativos podem não ser compensatórios, pois, dependendo do método, podemos ter complexidades que variam de $O(N^2)$ ou até $O(N^3)$, e isso pode levar até anos para ser resolvido, a depender do tamanho do problema a ser modelado. Para contornar essa difi-

culdade, esta tese propôs a segunda contribuição deste trabalho, a formulação do IGABEM-FMM. Como foi visto neste método, a ideia é sair da interação elemento a elemento e ter a interação elemento com um grupo de elemento, permitido, através das expansões e translações multipolares. Neste caso, como as matrizes do sistema algébrico não são explicitamente montadas, utilizamos um método muito indicado para estes tipos de problemas, o GMRES(m), de acordo com sua eficácia notada largamente na literatura. Foi mostrado que o GMRES pode demandar uma quantidade grande de iterações para resolver o sistema linear, podendo chegar em n iterações, sendo n o tamanho do sistema linear. Entretanto, quando utilizado a matriz de pré-condicionamento, que é baseada no sistema $\mathbf{HE}^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{GE}^{-1}\mathbf{t}$, uma clara eficiência na redução do número de iterações nas soluções do IGABEM-FMM foi constatada, embora isso exija maior tamanho de memória se os pré-condicionadores forem armazenados na memória para reduzir o tempo de CPU.

Assim como na IGABEM, também foi avaliado a acurácia da IGABEM-FMM, seção 8, através de diferentes exemplos numéricos aplicados para materiais anisotrópicos e ortotrópicos. Pôde-se constatar que a versão acelerada também possui excelente precisão numérica. Além disso, a IGABEM-FMM também foi aplicada a problema de larga escala, provando que é mais rápida que o IGABEM, e portanto, é uma formulação muito indicada para problemas elásticos em larga escala. Isso se deu, pois utilizamos os elementos de ordem superior, que aplicadas em problemas com contornos curvos ou geometrias complexas, as integrais puderam ser avaliadas com mais precisão, até mesmo quando utilizada poucos graus de liberdade.

9.1 Propostas para trabalhos futuros

A proposta de trabalho para essa área pode ser um leque com diversas opções que variam desde a diversificação da formulação da IGABEM-FMM até as áreas de aplicações ainda não encontradas na literatura.

- A extensão do código elástico do IGABEM-FMM bidimensional para uma versão tridimensional deve ser o primeiro ponto a ser almejado. Entretanto, como foi discutido no texto, a necessidade de utilizar integrais numéricas pode ser custoso computacionalmente pra problemas 3D. Além disso, avaliar a quantidade ótima de reinício do GMRES(m) e estudar outras técnicas para montar a matriz de pré-condicionamento, pode ser uma ótima solução para melhorar o custo computacional do IGABEM-FMM.
- Ainda com respeito a uma versão 3D, as integrais numéricas singulares podem ser investigadas mais a fundo com outras técnicas numéricas, de modo que sejam melhoradas. Existe na literatura diferentes formas de splines. Nestas

novas splines, o operador de extração Bézier para curva NURBS pôde ser calculado para representá-lo em termos de um conjunto de elementos Bézier. Assim também pode ser utilizada outros tipos de splines, como: T-splines, U-spline, PHT-splines.

- A necessidade em modelar problemas em larga escala, com milhares de DOFs, é constante na engenharia. Por isso as linhas de pesquisas que podem ser inseridas a formulação do IGABEM-FMM pode ser bem extensa. A nível de exemplo, pode-se citar: problemas semi-infinitos e infinitos nas áreas da acústica, escoamento de fluídos laminar, turbulento, em dutos. Problema de trincas, placas em grandes deformações, dentre outros.

Referências Bibliográficas

ABATE, M.; TOVENA, F. *Curves and surfaces*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

ABDELMOETY, A. K.; NAGA, T. H.; RASHED, Y. F. Isogeometric boundary integral formulation for reissner's plate problems. *Engineering Computations*, Emerald Publishing Limited, 2019.

AGARWAL, B. D.; BROUTMAN, L. J.; CHANDRASHEKHARA, K. *Analysis and performance of fiber composites*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2017.

ALBUQUERQUE, E. *Numerical analysis of dynamic anisotropic problems using the boundary element method*. Tese (Doutorado) — PhD thesis, Unicamp, Dept. Mec. Comput, 2001.

ALBUQUERQUE, E.; SOLLERO, P.; ALIABADI, M. Dual boundary element method for anisotropic dynamic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 59, n. 9, p. 1187–1205, 2004.

ALBUQUERQUE, E.; SOLLERO, P.; FEDELINSKI, P. Dual reciprocity boundary element method in laplace domain applied to anisotropic dynamic crack problems. *Computers & structures*, Elsevier, v. 81, n. 17, p. 1703–1713, 2003.

ALIABADI, M.; HALL, W.; PHEMISTER, T. Taylor expansions for singular kernels in the boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 21, n. 12, p. 2221–2236, 1985.

ALIABADI, M.; ROOKE, D.; CARTWRIGHT, D. An improved boundary element formulation for calculating stress intensity factors: application to aerospace structures. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 22, n. 4, p. 203–207, 1987.

AMLANI, F.; CHAILLAT, S.; LOSEILLE, A. An efficient preconditioner for adaptive fast multipole accelerated boundary element methods to model time-harmonic 3d wave propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 352, p. 189–210, 2019.

ANISIMOV, V.; STEWART, J. J. *Introduction to the Fast Multipole Method: Topics in Computational Biophysics, Theory, and Implementation*. [S.l.]: CRC Press, 2019.

APPEL, A. W. An efficient program for many-body simulation. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, SIAM, v. 6, n. 1, p. 85–103, 1985.

- ARNOLDI, W. E. The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. *Quarterly of applied mathematics*, v. 9, n. 1, p. 17–29, 1951.
- BAKER, A. H.; JESSUP, E. R.; KOLEV, T. V. A simple strategy for varying the restart parameter in gmres (m). *Journal of computational and applied mathematics*, Elsevier, v. 230, n. 2, p. 751–761, 2009.
- BAPAT, M.; LIU, Y. A new adaptive algorithm for the fast multipole boundary element method. *Computer Modeling in Engineering & Sciences(CMES)*, Citeseer, v. 58, n. 2, p. 161–184, 2010.
- BAPAT, M.; SHEN, L.; LIU, Y. Adaptive fast multipole boundary element method for three-dimensional half-space acoustic wave problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 33, n. 8-9, p. 1113–1123, 2009.
- BARNES, J.; HUT, P. A hierarchical $O(n \log n)$ force-calculation algorithm. *nature*, Nature Publishing Group, v. 324, n. 6096, p. 446–449, 1986.
- BARRA, L. et al. Iterative solution of bem equations by gmres algorithm. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 44, n. 6, p. 1249–1253, 1992.
- BEBENDORF, M. Approximation of boundary element matrices. *Numerische Mathematik*, Springer, v. 86, n. 4, p. 565–589, 2000.
- BEBENDORF, M.; RJASANOW, S. Adaptive low-rank approximation of collocation matrices. *Computing*, Springer, v. 70, n. 1, p. 1–24, 2003.
- BEEBE, N. H. A bibliography of publications about the fast multipole method. Version 2.152. 2021.
- BEER, G.; DUENSER, C. Isogeometric boundary element analysis of problems in potential flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 347, p. 517–532, 2019.
- BEER, G. et al. Isogeometric boundary element analysis of steady incompressible viscous flow, part 2: 3-d problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 332, p. 440–461, 2018.
- BEER, G.; MARUSSIG, B.; DUENSER, C. *The Isogeometric Boundary Element Method*. [S.l.]: Springer, 2020.
- BIN, H. et al. Boundary element analysis of the orthotropic potential problems in 2-d thin structures with the higher order elements. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 118, p. 1–10, 2020.
- BINDIGANAVALA, S. S.; VOLAKIS, J. L. Comparison of three fmm techniques for solving hybrid fe-bi systems. *IEEE antennas and propagation magazine*, IEEE, v. 39, n. 4, p. 47–60, 1997.
- BOOR, C. D. On calculating with b-splines. *Journal of Approximation theory*, Academic Press, v. 6, n. 1, p. 50–62, 1972.
- BORDEN, M. J. et al. Isogeometric finite element data structures based on bézier extraction of nurbs. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 87, n. 1-5, p. 15–47, 2011.

- BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. *Boundary elements: an introductory course*. [S.l.]: WIT press, 1994.
- BUCHER, H. F. et al. A novel approach to applying fast wavelet transforms in the boundary element method. *Electronic Journal of Boundary Elements*, v. 2, p. 187–195, 2002.
- CABRAL, J.; WROBEL, L.; BREBBIA, C. A bem formulation using b-splines: I-uniform blending functions. *Engineering analysis with boundary elements*, Elsevier, v. 7, n. 3, p. 136–144, 1990.
- CAICEDO, J.; PORTELA, A. Cracked plate analysis with the dual boundary element method and williams' eigenexpansion. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 52, p. 16–23, 2015.
- CAMPOS, L. S. Método dos elementos de contorno isogeométricos acelerado pela aproximação cruzada adaptativa. 2016.
- CHANDRASEKHARAIHAH, D.; DEBNATH, L. *Continuum mechanics*. [S.l.]: Elsevier, 2014.
- CHANG, C. A closed-form solution for an orthotropic rotating disk. *J. of Applied Mechanics*, v. 41, p. 1122–1123, 1974.
- CHEN, L. et al. Structural shape optimization of three dimensional acoustic problems with isogeometric boundary element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 355, p. 926–951, 2019.
- CHEN, L. et al. Subdivision surfaces—boundary element accelerated by fast multipole for the structural acoustic problem. *Journal of Theoretical and Computational Acoustics*, World Scientific, v. 28, n. 02, p. 2050011, 2020.
- CHEN, L. et al. Implementation of isogeometric fast multipole boundary element methods for 2d half-space acoustic scattering problems with absorbing boundary condition. *Journal of Theoretical and Computational Acoustics*, World Scientific, v. 27, n. 02, p. 1850024, 2019.
- CHEN, L. et al. Isogeometric fast multipole boundary element method based on burton-miller formulation for 3d acoustic problems. *Archives of Acoustics*, v. 44, 2019.
- CHEN, Z.; XIAO, H. The fast multipole boundary element methods (fmbem) and its applications in rolling engineering analysis. *Computational Mechanics*, Springer, v. 50, n. 5, p. 513–531, 2012.
- CHRISTENSEN, R. M. *Mechanics of composite materials*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.
- CORDEIRO, S. G. F.; LEONEL, E. D. Subtraction singularity technique applied to the regularization of singular and hypersingular integrals in high-order curved boundary elements in plane anisotropic elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 119, p. 214–224, 2020.
- COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J.; BAZILEVS, Y. *Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009.

- COTTRELL, J. A. et al. Isogeometric analysis of structural vibrations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 195, n. 41-43, p. 5257–5296, 2006.
- COX, M. G. The numerical evaluation of b-splines. *IMA Journal of Applied Mathematics*, Oxford University Press, v. 10, n. 2, p. 134–149, 1972.
- CRUSE, T. A.; SWEDLOW, J. *Interactive program for analysis and design problems in advanced composites technology*. [S.l.], 1971.
- DAI, R. et al. Igabem of 2d and 3d liquid inclusions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 132, p. 33–49, 2021.
- DANIELS, I.; ISHAI, O. *Engineering mechanics of composite materials*. [S.l.]: New York: Oxford University Press, 2006.
- DANSOU, A. et al. Modeling multicrack propagation by the fast multipole symmetric galerkin bem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 106, p. 309–319, 2019.
- DARVE, E. The fast multipole method: numerical implementation. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 160, n. 1, p. 195–240, 2000.
- DEB, A.; BANERJEE, P. Bem for general anisotropic 2d elasticity using particular integrals. *Communications in Applied Numerical Methods*, Wiley Online Library, v. 6, n. 2, p. 111–119, 1990.
- DERAKHSHANI, D. *Introducing Autodesk Maya 2013*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012.
- DÖLZ, J. et al. A fast isogeometric bem for the three dimensional laplace-and helmholtz problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 330, p. 83–101, 2018.
- DÖLZ, J. et al. A fast isogeometric bem for the three dimensional laplace-and helmholtz problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 330, p. 83–101, 2018.
- DOLZ, J. et al. Isogeometric boundary elements in electromagnetism: Rigorous analysis, fast methods, and examples. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 41, n. 5, p. B983–B1010, 2019.
- DONGARRA, J.; SULLIVAN, F. Guest editors' introduction: The top 10 algorithms. *IEEE Computer Architecture Letters*, IEEE Computer Society, v. 2, n. 01, p. 22–23, 2000.
- D'ANGELLA, D. et al. Multi-level bézier extraction for hierarchical local refinement of isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 328, p. 147–174, 2018.
- FANG, W. et al. Analysis of unsteady heat transfer problems with complex geometries using isogeometric boundary element method. *Computers, Materials & Continua*, v. 62, n. 2, p. 929–962, 2020.
- FARIN, G. *Curves and surfaces for computer-aided geometric design: a practical guide*. [S.l.]: Elsevier, 2014.

- FEREDE, E.; ABDALLA, M. M.; BUSSEL, G. J. van. Isogeometric based framework for aeroelastic wind turbine blade analysis. *Wind Energy*, Wiley Online Library, v. 20, n. 2, p. 193–210, 2017.
- FRANGI, A.; SPINOLA, G.; VIGNA, B. On the evaluation of damping in mems in the slip–flow regime. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 68, n. 10, p. 1031–1051, 2006.
- FU, Y. et al. A fast solution method for three-dimensional many-particle problems of linear elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 42, n. 7, p. 1215–1229, 1998.
- GAO, X.-W. Evaluation of regular and singular domain integrals with boundary-only discretization—theory and fortran code. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 175, n. 2, p. 265–290, 2005.
- GARONI, C. et al. Symbol-based analysis of finite element and isogeometric b-spline discretizations of eigenvalue problems: exposition and review. *Archives of Computational Methods in Engineering*, Springer, v. 26, n. 5, p. 1639–1690, 2019.
- GAUL, L.; KÖGL, M.; WAGNER, M. *Boundary element methods for engineers and scientists: an introductory course with advanced topics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- GERVASIO, P. et al. A computational comparison between isogeometric analysis and spectral element methods: accuracy and spectral properties. *Journal of Scientific Computing*, Springer, v. 83, p. 1–45, 2020.
- GIBSON, R. F. *Principles of composite material mechanics*. [S.l.]: CRC press, 2016.
- GILLEBAART, E.; BREUKER, R. D. Geometrically consistent static aeroelastic simulation using isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 340, p. 296–319, 2018.
- GOMEZ, J.; POWERT, H. A multipole direct and indirect bem for 2d cavity flow at low reynolds number. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 19, n. 1, p. 17–31, 1997.
- GONG, Y. et al. Hybrid nearly singular integration for isogeometric boundary element analysis of coatings and other thin 2d structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 346, p. 642–673, 2019.
- GONG, Y.; YANG, H.; DONG, C. A novel interface integral formulation for 3d steady state thermal conduction problem for a medium with non-homogenous inclusions. *Computational Mechanics*, Springer, v. 63, n. 2, p. 181–199, 2019.
- GREENGARD, L. *The rapid evaluation of potential fields in particle systems*. [S.l.]: MIT press, 1988.
- GREENGARD, L. The numerical solution of the n-body problem. *Computers in physics*, American Institute of Physics, v. 4, n. 2, p. 142–152, 1990.
- GREENGARD, L. et al. Fast direct solvers for integral equations in complex three-dimensional domains. *Acta Numerica*, Cambridge University Press, v. 18, p. 243–275, 2009.

GREENGARD, L.; ROKHLIN, V. A fast algorithm for particle simulations. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 73, n. 2, p. 325–348, 1987.

GROSS, D.; SEELIG, T. *Fracture mechanics: with an introduction to micromechanics*. [S.l.]: Springer, 2017.

GUIGGIANI, M. The evaluation of cauchy principal value integrals in the boundary element method—a review. *Mathematical and Computer Modelling*, Elsevier, v. 15, n. 3-5, p. 175–184, 1991.

HAN, Z. et al. The semi-analytical evaluation for nearly singular integrals in isogeometric elasticity boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 95, p. 286–296, 2018.

HTET, A. T. et al. Comparative performance of the finite element method and the boundary element fast multipole method for problems mimicking transcranial magnetic stimulation (tms). *Journal of neural engineering*, IOP Publishing, v. 16, n. 2, p. 024001, 2019.

HU, B. et al. A fast multipole boundary element method based on higher order elements for analyzing 2-d potential problems. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 87, p. 65–76, 2021.

HUANG, J. et al. An efficient large deformation method using domain decomposition. *Computers & Graphics*, Elsevier, v. 30, n. 6, p. 927–935, 2006.

HUGHES, T. J.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 194, n. 39-41, p. 4135–4195, 2005.

HWU, C. *Anisotropic elastic plates*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010.

JASWON, M. Integral equation methods in potential theory. i. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 275, n. 1360, p. 23–32, 1963.

JOUBERT, W. On the convergence behavior of the restarted gmres algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *Numerical linear algebra with applications*, Wiley Online Library, v. 1, n. 5, p. 427–447, 1994.

JR, W. D. C.; RETHWISCH, D. G. *Ciência E Engenharia de Materiais: Uma Introdução*. [S.l.]: LTC, 2016. v. 9.

JÚNIOR, A. B. D. *O método rápido dos elementos de contorno com expansão em multipolos para problemas elástico-anisotrópicos em duas dimensões*. Tese (Doutorado) — PhD thesis, Unb, Dept. Eng. Mec., 2019.

JUNIOR, A. D.; ALBUQUERQUE, E. L.; REIS, A. dos. Computation of moments in the anisotropic plane elasticity fast multipole formulation. *Linhas Críticas*, v. 2, n. 6, p. 152–169, 2016.

KANE, J.; KUMAR, B. K.; SAIGAL, S. An arbitrary condensing, noncondensing solution strategy for large scale, multi-zone boundary element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 79, n. 2, p. 219–244, 1990.

- KELLEY, C. T. *Iterative methods for linear and nonlinear equations*. [S.l.]: SIAM, 1995.
- KONISHI, H. J.; WHITNEY, J. M. Approximate stresses in an orthotropic plate containing a circular hole. *Journal of composite materials*, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 9, n. 2, p. 157–166, 1975.
- KOSTAS, K. et al. Shape optimization of conductive-media interfaces using an igabem solver. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 340, p. 600–614, 2018.
- KUTT, H. The numerical evaluation of principal value integrals by finite-part integration. *Numerische Mathematik*, Springer, v. 24, n. 3, p. 205–210, 1975.
- LAI, M.-C.; WANG, W.-C. Fast direct solvers for poisson equation on 2d polar and spherical geometries. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, Wiley Online Library, v. 18, n. 1, p. 56–68, 2002.
- LEKHNITSKII, S. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*. [S.l.]: Pe Men Book Company, 1963.
- LEKHNITSKII, S. G. *Anisotropic plates*. [S.l.], 1968.
- LI, H.; HUANG, J.; ZENG, G. On the numerical solutions of two-dimensional scattering problems for an open arc. *Boundary Value Problems*, SpringerOpen, v. 2020, n. 1, p. 1–15, 2020.
- LI, K.; QIAN, X. Isogeometric analysis and shape optimization via boundary integral. *Computer-Aided Design*, Elsevier, v. 43, n. 11, p. 1427–1437, 2011.
- LI, S. et al. An isogeometric boundary element reanalysis framework based on proper generalized decomposition. In: IEEE. *2017 8th International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering (ICMAE)*. [S.l.], 2017. p. 272–280.
- LIESEN, J.; STRAKOS, Z. *Krylov subspace methods: principles and analysis*. [S.l.]: Oxford University Press, 2013.
- LIU, G. et al. Lamb wave propagation in anisotropic laminates. *ASME J. Appl. Mech.*, v. 57, p. 923–929, 1990.
- LIU, J. et al. High performance of sloshing problem in cylindrical tank with various barrels by isogeometric boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 114, p. 148–165, 2020.
- LIU, Y. A new fast multipole boundary element method for solving large-scale two-dimensional elastostatic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 65, n. 6, p. 863–881, 2006.
- LIU, Y. A new fast multipole boundary element method for solving 2-d stokes flow problems based on a dual bie formulation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 32, n. 2, p. 139–151, 2008.
- LIU, Y. *Fast multipole boundary element method: theory and applications in engineering*. [S.l.]: Cambridge university press, 2009.

- LIU, Y. et al. Recent advances and emerging applications of the boundary element method. *Applied Mechanics Reviews*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 64, n. 3, 2011.
- LIU, Y.; NISHIMURA, N. The fast multipole boundary element method for potential problems: a tutorial. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 30, n. 5, p. 371–381, 2006.
- LIU, Z. et al. Isogeometric fem-bem coupled structural-acoustic analysis of shells using subdivision surfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 113, n. 9, p. 1507–1530, 2018.
- MAESTRE, J. et al. A 3d isogeometric be–fe analysis with dynamic remeshing for the simulation of a deformable particle in shear flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 326, p. 70–101, 2017.
- MAMMOLI, A.; INGBER, M. Stokes flow around cylinders in a bounded two-dimensional domain using multipole-accelerated boundary element methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 44, n. 7, p. 897–917, 1999.
- MANSUR, W.; ARAUJO, F.; MALAGHINI, J. Solution of bem systems of equations via iterative techniques. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 33, n. 9, p. 1823–1841, 1992.
- MARCZAK, R. J.; CREUS, G. J. Direct evaluation of singular integrals in boundary element analysis of thick plates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 26, n. 8, p. 653–665, 2002.
- MARIN, L. et al. An iterative boundary element algorithm for a singular cauchy problem in linear elasticity. *Computational mechanics*, Springer, v. 28, n. 6, p. 479–488, 2002.
- MIAO, D. et al. Bézier b projection. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 335, p. 273–297, 2018.
- MONTIEL, S.; ROS, A. *Curves and surfaces*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2009. v. 69.
- MOURA, M. F. d. S. de; MORAIS, A. M. B. de; MAGALHÃES, A. G. de. *Materiais compósitos: materiais, fabrico e comportamento mecânico*. [S.l.: s.n.], 2005.
- NETO, A. R.; LEONEL, E. D. Nonlinear igabem formulations for the mechanical modelling of 3d reinforced structures. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 102, p. 62–100, 2022.
- NGUYEN, B. et al. Isogeometric symmetric galerkin boundary element method for three-dimensional elasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 323, p. 132–150, 2017.
- NISHIMURA, N.; LIU, Y. Thermal analysis of carbon-nanotube composites using a rigid-line inclusion model by the boundary integral equation method. *Computational Mechanics*, Springer, v. 35, n. 1, p. 1–10, 2004.

NISHIMURA, N.; YOSHIDA, K.-i.; KOBAYASHI, S. A fast multipole boundary integral equation method for crack problems in 3d. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 23, n. 1, p. 97–105, 1999.

NUISMER, R.; WHITNEY, J. *Uniaxial failure of composite laminates containing stress concentrations*. [S.l.]: ASTM International, 1975.

OLIVEIRA, H. L.; ANDRADE, H. d. C. e; LEONEL, E. D. An isogeometric boundary element approach for topology optimization using the level set method. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, 2020.

OLIVEIRA, T.; PORTELA, A. A local mesh free method with the singularity subtraction technique. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 104, p. 148–159, 2019.

PASTORINO, D. et al. Closed-form methodology for the bending of symmetric composite plates with cutouts and non-uniform lay-up. *Composite Structures*, Elsevier, v. 271, p. 114052, 2021.

PEIRCE, A. P.; NAPIER, J. A spectral multipole method for efficient solution of large-scale boundary element models in elastostatics. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 38, n. 23, p. 4009–4034, 1995.

PÉREZ-ARANCIBIA, C. A plane-wave singularity subtraction technique for the classical dirichlet and neumann combined field integral equations. *Applied Numerical Mathematics*, Elsevier, v. 123, p. 221–240, 2018.

PFALZNER, S.; GIBBON, P. *Many-body tree methods in physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005.

PIEGL, L.; TILLER, W. *The NURBS book*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

PTASZNY, J. A fast multipole bem with higher-order elements for 3-d composite materials. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 82, p. 148–160, 2021.

RAJAPAKSE, R.; XU, X.-L. Boundary element modeling of cracks in piezoelectric solids. *Engineering analysis with boundary elements*, Elsevier, v. 25, n. 9, p. 771–781, 2001.

REIS, A. C. M.; ALBUQUERQUE, E. L. *Series expansions of anisotropic plane elasticity fundamental solution*. [S.l.]: In International Conference on Boundary Element and Meshless Techniques., 2013.

REN, Z.; LAGE, C. 3-d capacitance extraction of ic interconnects using field solvers and homogenization technique. *IEEE transactions on magnetics*, IEEE, v. 40, n. 2, p. 703–706, 2004.

RIZZO, F. J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quarterly of applied mathematics*, v. 25, n. 1, p. 83–95, 1967.

ROGERS, D. F. *An introduction to NURBS: with historical perspective*. [S.l.]: Elsevier, 2000.

- ROKHLIN, V. Rapid solution of integral equations of classical potential theory. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 60, n. 2, p. 187–207, 1985.
- ROKHLIN, V. Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 86, n. 2, p. 414–439, 1990.
- SAAD, Y. *Iterative methods for sparse linear systems*. [S.l.]: SIAM, 2003.
- SAAD, Y.; SCHULTZ, M. H. Gmres: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on scientific and statistical computing*, SIAM, v. 7, n. 3, p. 856–869, 1986.
- SAHLI, A.; MOHAMED, F. A.; SAHLI, S. Retracted: Composite parameters analysis with boundary element method. *Journal of Materials and Engineering Structures «JMES»*, v. 5, n. 4, p. 387–398, 2018.
- SANTOS, J. F. d.; ALBUQUERQUE, E. L. d.; CAMPOS, L. S. Anisotropic elastic applications in composite materials using the isogeometric boundary element method. *Latin American Journal of Solids and Structures*, SciELO Brasil, v. 20, 2023.
- SCHMIDT, K. E.; LEE, M. A. Implementing the fast multipole method in three dimensions. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 63, n. 5, p. 1223–1235, 1991.
- SCOTT, M. A. et al. Isogeometric finite element data structures based on bézier extraction of t-splines. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 88, n. 2, p. 126–156, 2011.
- SCOTT, M. A. et al. Isogeometric boundary element analysis using unstructured t-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 254, p. 197–221, 2013.
- SELLOUNTOS, E. J. A single domain velocity-vorticity fast multipole boundary domain element method for three dimensional incompressible fluid flow problems, part ii. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 114, p. 74–93, 2020.
- SHAABAN, A. M. et al. Shape optimization by conventional and extended isogeometric boundary element method with pso for two-dimensional helmholtz acoustic problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 113, p. 156–169, 2020.
- SHEN, L.; LIU, Y. An adaptive fast multipole boundary element method for three-dimensional acoustic wave problems based on the burton–miller formulation. *Computational Mechanics*, Springer, v. 40, n. 3, p. 461–472, 2007.
- SIMPSON, R. N. et al. An isogeometric boundary element method for elastostatic analysis: 2d implementation aspects. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 118, p. 2–12, 2013.
- SIMPSON, R. N. et al. A two-dimensional isogeometric boundary element method for elastostatic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 209, p. 87–100, 2012.
- SOLLERO, P. *Fracture mechanics analysis of anisotropic laminates by the boundary element method*. Tese (Doutorado) — University of Portsmouth, 1994.

- SOLLERO, P.; ALIABADI, M. Fracture mechanics analysis of anisotropic plates by the boundary element method. *International Journal of Fracture*, Springer, v. 64, n. 4, p. 269–284, 1993.
- SONG, J. M.; CHEW, W. C. Multilevel fast-multipole algorithm for solving combined field integral equations of electromagnetic scattering. *Microwave and Optical Technology Letters*, Wiley Online Library, v. 10, n. 1, p. 14–19, 1995.
- SUN, S. et al. Structural shape optimization by igabem and particle swarm optimization algorithm. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 88, p. 26–40, 2018.
- SUN, Y. et al. Discontinuous isogeometric boundary element (igabem) formulations in 3d automotive acoustics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 105, p. 303–311, 2019.
- TAKAHASHI, T.; MATSUMOTO, T. An application of fast multipole method to isogeometric boundary element method for laplace equation in two dimensions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 36, n. 12, p. 1766–1775, 2012.
- TANAKA, M.; SLADEK, V.; SLADEK, J. Regularization techniques applied to boundary element methods. *Appl. Mech. Rev.*, American Society of Mechanical Engineers, ASME, v. 47, n. 10, p. 457–499, 1994.
- TAUS, M. et al. Isogeometric boundary element methods and patch tests for linear elastic problems: Formulation, numerical integration, and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 357, p. 112591, 2019.
- TELLES, J. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 24, n. 5, p. 959–973, 1987.
- TSAI, S. W.; HAHN, H. T. *Introduction to composite materials*. [S.l.]: Routledge, 2018.
- TSAMASPHYROS, G.; THEOTOKOGLOU, E. A quadrature formula for integrals with nearby singularities. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 67, n. 8, p. 1082–1093, 2006.
- VEIGA, L. B. da et al. Mathematical analysis of variational isogeometric methods. *Acta Numerica*, Cambridge University Press, v. 23, p. 157, 2014.
- VENÅS, J. V.; KVAMSDAL, T. Isogeometric boundary element method for acoustic scattering by a submarine. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 359, p. 112670, 2020.
- VORST, H. A. Van der; VUIK, C. The superlinear convergence behaviour of gmres. *Journal of computational and applied mathematics*, Elsevier, v. 48, n. 3, p. 327–341, 1993.
- WANG, H.; QIN, Q.-H.; LEI, Y.-P. Green's-function-based-finite element analysis of fully plane anisotropic elastic bodies. *Journal of Mechanical Science and Technology*, Springer, v. 31, n. 3, p. 1305–1313, 2017.
- WANG, H.; YAO, Z. A new fast multipole boundary element method for large scale analysis of mechanical properties in 3d particle-reinforced composites. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, v. 7, n. 1, p. 85–95, 2005.

WANG, H.; YAO, Z.; WANG, P. On the preconditioners for fast multipole boundary element methods for 2d multi-domain elastostatics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 29, n. 7, p. 673–688, 2005.

WANG, Q. et al. A nurbs-enhanced improved interpolating boundary element-free method for 2d potential problems and accelerated by fast multipole method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 98, p. 126–136, 2019.

WANG, Y.; BENSON, D. Multi-patch nonsingular isogeometric boundary element analysis in 3d. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 293, p. 71–91, 2015.

WROBEL, L. C.; ALIABADI, M. H. The boundary element method: Applications in solids and structures. John Wiley & Sons Inc, 2002.

WU, Y.; DONG, C.; YANG, H. Isogeometric indirect boundary element method for solving the 3d acoustic problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 363, p. 273–299, 2020.

XIE, G.; ZHOU, F. A generation of special triangular boundary element shape functions for 3d crack problems. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi, v. 2020, 2020.

YAO, Z. et al. 2d simulation of composite materials using bem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 28, n. 8, p. 927–935, 2004.

ZANG, Q. et al. A nurbs-based isogeometric boundary element method for analysis of liquid sloshing in axisymmetric tanks with various porous baffles. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, Elsevier, v. 81, p. 129–150, 2020.

ZHAO, W. et al. Topology optimization of exterior acoustic-structure interaction systems using the coupled fem-bem method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 119, n. 5, p. 404–431, 2019.

ZHENG, C.-J. et al. Simulation of sound propagation over an infinite impedance plane by using a fast multipole bem. *Journal of Theoretical and Computational Acoustics*, World Scientific, v. 28, n. 02, p. 2050020, 2020.

Apêndice A

Teste de regularização do termo fortemente singular

Neste apêndice é demonstrado que foi conseguido com sucesso, realizar a regularização do termo fortemente singular através do uso da técnica de extração de singularidade. Vale ressaltar que as aplicações foram consideradas usando elementos de contorno criadas via NURBS, para avaliar a eficiência do método no contexto da análise isogeométrica.

O primeiro passo para construção da demonstração da regularização, parte da definição de uma geometria criada pelas curvas NURBS. Na Figura A.1 são mostradas duas geometrias bidimensionais, contendo elementos retilíneos e curvos. A geometria foi criada utilizando 5 NURBS, da ($NURBS_1, \dots, NURBS_5$). Na Figura A.1a foram utilizados 15 pontos fontes, (PF_1, \dots, PF_{15}) com ordem da curva NURBS $p = 2$, enquanto Figura A.1b foram utilizados 25 pontos fontes, (PF_1, \dots, PF_{25}) com grau da curva NURBS $p = 4$.

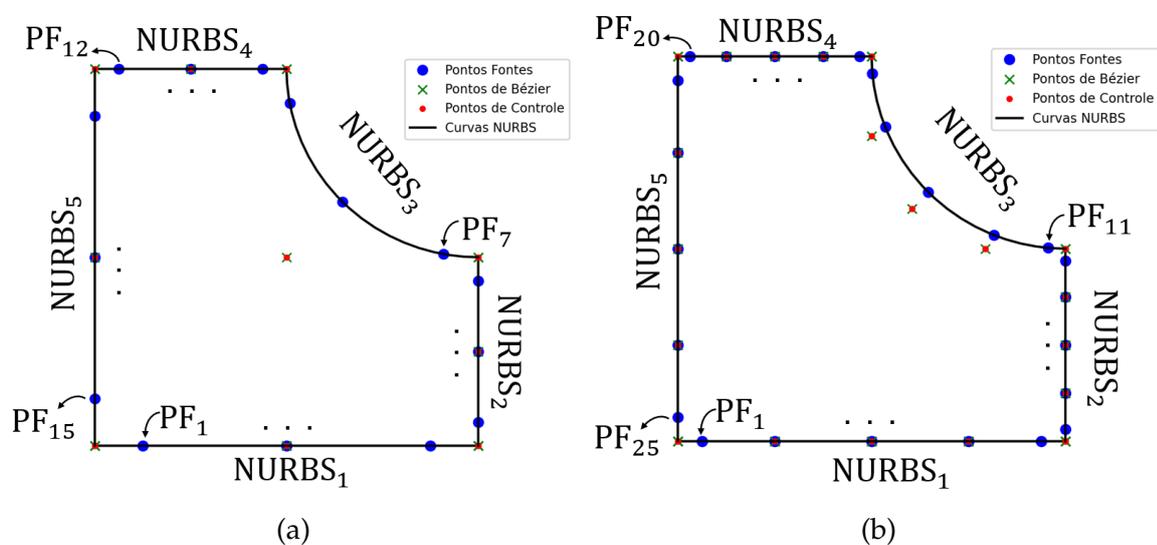


Figura A.1: Geometrias NURBS. (a) 15 pontos fontes, (b) 25 pontos fontes.

O tamanho da solução numérica para o núcleo da equação integral, $K_T(\xi_0, \xi)$, ver Eq. (5.62), depende da localização do ponto fonte que está sendo avaliado e do grau da curva NURBS. Sendo assim, $K_T(\xi_0, \xi)$ é uma matriz de **dim** $M[2, 2(p + 1)]$, escrita na forma:

$$K_T(\xi_0, \xi) = \begin{bmatrix} K_{T(1,1)} & K_{T(1,2)} & \cdots & K_{T(1,2(p+1))} \\ K_{T(2,1)} & K_{T(2,2)} & \cdots & K_{T(2,2(p+1))} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Na matriz (A.1), a linha 1 representa os valores na direção da coordenada x , enquanto a linha 2 os valores da coordenada y . Portanto, por exemplo, a solução numérica para $K_T(\xi_0, \xi)$ na NURBS₁ da Figura A.1a terá tamanho **dim** $M[2, 6]$, enquanto que a NURBS₁ da Figura A.1b terá tamanho **dim** $M[2, 10]$.

Algumas das principais informações para gerar a geometria da Figura A.1a é apresentada na Tabela A.1.

	NURBS ₁	NURBS ₂	NURBS ₃	NURBS ₄	NURBS ₅
Ponto de controle	[(0, 0); (2, 0); (4, 0)]	[(4, 0); (4, 1); (4, 2)]	[(4, 2); (1.414, 1.414); (2, 4)]	[(2, 4); (1, 4); (0, 4)]	[(0, 4); (0, 2); (0, 0)]
Ponto fonte	[(0,5 0,0); (2,0 0,0); (3,5 0,0)]	[(4,0 0,25); (4,0 1,0); (4,0 1,75)]	[(3,636 2,033); (2,585 2,585); (2,033 3,636)]	[(1,75 4,0); (1,0 4,0); (0,25 4,0)]	[(0,0 3,5); (0,0 2,0); (0,0 0,5)]
Grau da NURBS	2	2	2	2	2
Peso W da NURBS	[(1, 1, 1)]	[(1, 1, 1)]	[(1, 0,70, 1)]	[(1, 1, 1)]	[(1, 1, 1)]
Curva NURBS	[0,0 0,0; 0,2105 0,0; 0,4210 0,0; 0,6315 0,0; 0,8421 0,0; 1,0526 0,0; 1,2631 0,0; 1,4736 0,0; 1,6842 0,0; 1,8947 0,0; 2,1052 0,0; 2,3157 0,0; 2,5263 0,0; 2,7368 0,0; 2,9473 0,0; 3,1578 0,0; 3,3684 0,0; 3,5789 0,0; 3,7894 0,0; 4,0 0,0]	[4,0 0,0; 4,0 0,1052; 4,0 0,2105; 4,0 0,3157; 4,0 0,4210; 4,0 0,5263; 4,0 0,6315; 4,0 0,7368; 4,0 0,8421; 4,0 0,9473; 4,0 1,0526; 4,0 1,1578; 4,0 1,2631; 4,0 1,3684; 4,0 1,4736; 4,0 1,5789; 4,0 1,6842; 4,0 1,7894; 4,0 1,8947; 4,0 2,0]	[4,0 2,0; 3,8490 2,0057; 3,6946 2,0234; 3,5380 2,0540; 3,3809 2,0982; 3,2250 2,1562; 3,0719 2,2283; 2,9236 2,3143; 2,7820 2,4136; 2,6487 2,5254; 2,5254 2,6487; 2,4136 2,7820; 2,3143 2,9236; 2,2283 3,0719; 2,1562 3,2250; 2,0982 3,3809; 2,0540 3,5380; 2,0234 3,6946; 2,0057 3,8490; 2,0 3,9999]	[2,0 4,0; 1,8947 4,0; 1,7894 4,0; 1,6842 4,0; 1,5789 4,0; 1,4736 4,0; 1,3684 4,0; 1,2631 4,0; 1,1578 4,0; 1,0526 4,0; 0,9473 4,0; 0,8421 4,0; 0,7368 4,0; 0,6315 4,0; 0,52631 4,0; 0,4210 4,0; 0,3157 4,0; 0,2105 4,0; 0,1052 4,0; 0,0 4,0]	[0,0 4,0; 0,0 3,7894; 0,0 3,5789; 0,0 3,3684; 0,0 3,1578; 0,0 2,9473; 0,0 2,7368; 0,0 2,5263; 0,0 2,3157; 0,0 2,1052; 0,0 1,8947; 0,0 1,6841; 0,0 1,4736; 0,0 1,2631; 0,0 1,0526; 0,0 0,8421; 0,0 0,6315; 0,0 0,4210; 0,0 0,2105; 0,0 0,0]

Tabela A.1: Dados para criação das NURBS da Figura A.1a.

Com base nas Figuras A.1a e A.1b, é possível perceber que existem para a geometria apresentada, 15 e 25 pontos fontes, respectivamente, que são os pontos singulares e precisarão ser regularizados. Por causa da quantidade dos resultados numéricos, e visando que não fique algo amplo e cansativo para o leitor, foram feitas todas as análises numéricas e plotagens de gráficos, entretanto, serão apresentadas aqui a extração da singularidade apenas em alguns pontos fontes específicos, contidas na NURBS retilínea e curva, em ambas as Figuras A.1a e A.1b. Apresentar essa extração da singularidade em elementos curvos, é importante, pois, o grau de dificuldade é um pouco maior, quando comparado a elementos retilíneos, uma vez que, a normal no elemento curvo e conseqüentemente o seu jacobiano não é constante ao longo da NURBS, enquanto que na NURBS retilínea sempre é a mesma normal. Além disso, na NURBS curva, o ponto de controle não está exatamente sobre a curva, como pode ser visualizado nas Figuras A.1a e A.1b, e isso acarreta em uma dificuldade a mais.

Na Figura A.2 são apresentados os comportamentos dos núcleos para as posições $K_{T(1,2)}$ PF₃, para $K_{T(1,4)}$ PF₁₂, para $K_{T(1,2)}$ PF₉ e para $K_{T(1,4)}$ PF₉, enquanto que na Figura A.3 são apresentados para as posições $K_{T(1,2)}$ PF₁₉, para $K_{T(1,6)}$ PF₂₄, para $K_{T(1,4)}$ PF₁₄ e para $K_{T(1,6)}$ PF₁₅.

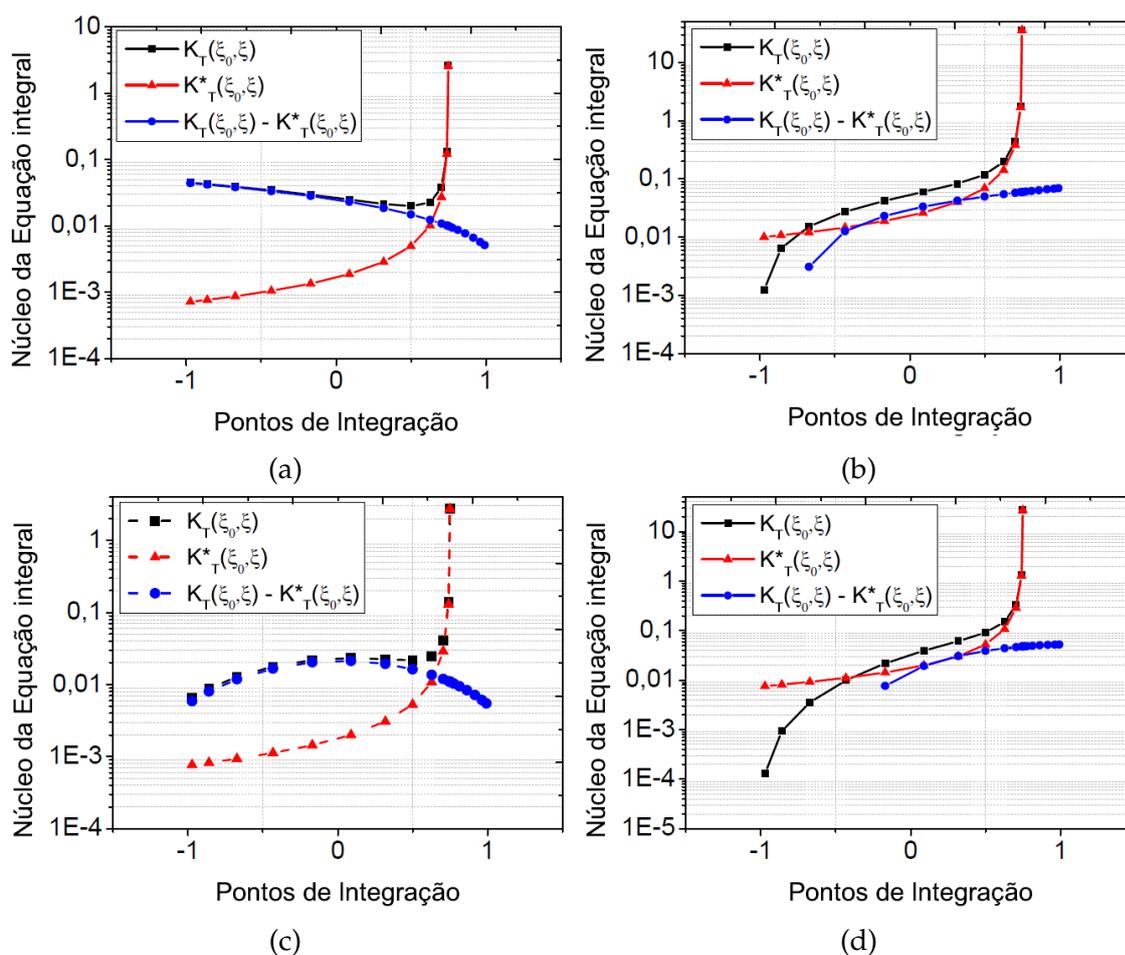


Figura A.2: Extração da singularidade forte para NURBS de ordem $p = 2$, em (a) $K_{T(1,2)}$ PF₃, em (b) $K_{T(1,4)}$ PF₁₂, em (c) $K_{T(1,2)}$ PF₉ e em (d) $K_{T(1,4)}$ PF₉.

Nas Figuras A.2 e A.3, são mostrados o núcleo original $K_T(\xi_0, \xi)$ e a sua referida expansão em série $K_T^*(\xi_0, \xi)$. É possível ver claramente que ambas figuras possuem gráficos com picos, que tendem ao infinito com a mesma intensidade, ou seja, mesma velocidade. Representando assim, singularidades fortes para cada um dos termos. Após aplicação do método proposto, é possível verificar através da curva em azul, que as singularidades fortes são extraídas, tornando-se agora uma função regular, e, estão prontas para serem avaliadas numericamente na solução fundamental.

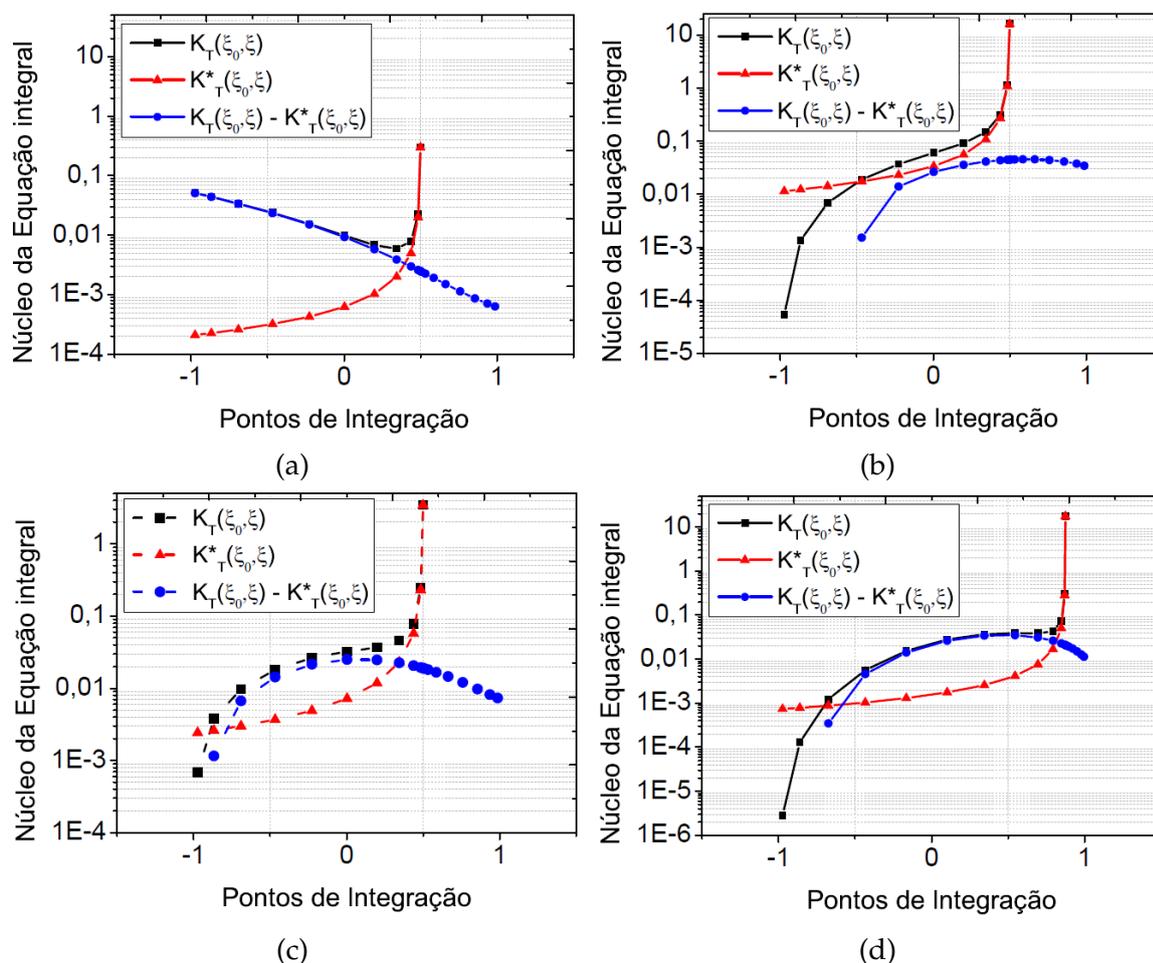


Figura A.3: Extração da singularidade forte para NURBS de ordem $p = 4$, em (a) $K_{T(1,2)}$ PF₁₉, em (b) $K_{T(1,6)}$ PF₂₄, em (c) $K_{T(1,4)}$ PF₁₄ e em (d) $K_{T(1,6)}$ PF₁₅.

Apêndice B

Método iterativo do GMRES

Ao resolver as Eqs. (7.19) e (7.20) através dos passos do IGABEM-FMM, um sistema linear do tipo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ será formado. Com isso, é preciso algum método numérico para solução. Todo método numérico, seja ele direto ou iterativo, possui suas vantagens e desvantagens. Como mencionado no início desse capítulo, para a solução do sistema linear formado por matrizes densas (não esparsas), se for utilizado um solucionador iterativo, é necessário $O(N^2)$ operações, ou caso se opte por um solucionador direto, são necessários $O(N^3)$ operações. Não entraremos aqui no mérito de caracterizar métodos numéricos, uma vez que isso pode ser consultado na maioria das referências que tratam do assunto. O importante é afirmar que a escolha de tal método é um fator importante na análise para solução numérica das equações diferenciais.

Ao saber que a matriz \mathbf{A} gerada é não esparsa e não simétrica, então nesta tese foi utilizado um solucionador iterativo baseado no espaço de Krylov Kelley (1995), (LIESEN; STRAKOS, 2013), que está alocado no grupo dos métodos não estacionários, conhecido como método dos Mínimos Resíduos Generalizados, do inglês *Generalized Minimal Residual Method* - GMRES. Este método foi apresentado por Saad e Schultz (1986), e trata-se de uma técnica que aproxima a solução por um vetor no subespaço de Krylov encontrado pelo processo de Arnoldi, ao minimizar no decorrer do processo iterativo uma determinada medida de erro, chamada de mínimo resíduo.

As técnicas baseadas nos métodos de Krylov chama atenção pelo seu critério do custo computacional, uma vez que, não há necessidade de armazenamento da matriz \mathbf{A} no decorrer do processo iterativo, necessitando apenas do produto matriz/vetor - \mathbf{Ax} , conforme pontua Kelley (1995). Essa ideia choca perfeitamente com o uso do IGABEM-FMM para os pontos bem separados e distantes para acelerar o produto matriz/vetor, em cada iteração do método GMRES. Pois ao utilizar o FMM, a matriz \mathbf{A} não é formada de maneira explícita durante a multiplicação da matriz/vetor, e isso permite acelerar a solução numérica.

B.0.1 Método dos Mínimos Resíduos Generalizados - GMRES

Primeiro devemos lembrar que, de modo geral, os métodos iterativos para resolução $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, sendo \mathbf{A} não singular, representa uma sequência finita de soluções aproximadas $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ a partir de uma estimativa inicial \mathbf{x}_0 . Por isso, a não singularidade de \mathbf{A} garante a unicidade da solução.

Definição 01: Dados $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{N}$, é possível definir o espaço por:

$$K_\tau(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \text{span}(\mathbf{A}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \dots), \quad (\text{B.1})$$

chamado de *espaço de Krylov* de ordem τ , associado a matriz \mathbf{A} e vetor \mathbf{b} . E por conseguinte, o τ -ésimo *espaço de Krylov* gerado pela matriz \mathbf{A} e vetor \mathbf{b} , como sendo o subespaço vetorial

$$K_\tau(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \text{span}(\mathbf{A}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{\tau-1}\mathbf{b}), \quad (\text{B.2})$$

Portanto, quando considerado \mathbf{x}_0 uma estimativa inicial para a solução do problema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, então encontra-se um resíduo $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0$ na forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_i) = \mathbf{b} \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{Ax}_0 + \mathbf{Ax}_i = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Ax}_i = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0$$

$$\mathbf{Ax}_i = \mathbf{r}_0.$$

Com os resíduos, o GMRES, formam explicitamente uma base ortogonal para o subespaço de Krylov, escrita como:

$$K_\tau(\mathbf{A}, \mathbf{r}_0) = \text{span}(\mathbf{r}_0, \mathbf{Ar}_0, \mathbf{A}^2\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{A}^{\tau-1}\mathbf{r}_0), \quad (\text{B.4})$$

e assim, uma sequência iterativa para aproximações é dada por:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_0 + \mathbf{z}_i, \quad (\text{B.5})$$

sendo $\mathbf{z}_i \in K_\tau(\mathbf{A}, \mathbf{r}_0)$ que minimiza a norma do resíduo $\mathbf{r}_i = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_i$ sobre o espaço.

Aplicada a sequência de Krylov $\{\mathbf{Ar}_0\}$, essa ortogonalização é chamada de método de Arnoldi (ARNOLDI, 1951). Do método de Arnoldi obtém-se uma matriz Hessenberg superior a partir de uma matriz densa, \mathbf{A} , conforme mostra Saad (2003). Ou seja, da Eq. (B.3) é possível encontrar:

$$\mathbf{V}_{i+1}^T \mathbf{A} \underbrace{\mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^T}_{\mathbf{I}} \mathbf{x}_i = \mathbf{V}_{i+1}^T \mathbf{r}_0, \quad (\text{B.6})$$

em que $\mathbf{V}_{i+1}^T \mathbf{A} \mathbf{V}_i^T = \mathbf{H}$ é matriz de Hessenberg e \mathbf{V} representa uma matriz coluna formada por vetores ortonormais, ambas escritas na forma:

$$\mathbf{V}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_{i+1} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1i} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2i} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{i+1,i} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Portanto se $\mathbf{y} = \mathbf{V}_i^T \mathbf{x}_i$, é possível reescrever o sistema linear na forma:

$$\mathbf{H}\mathbf{y} = \mathbf{V}_{i+1}^T \mathbf{r}_0, \quad (\text{B.8})$$

de modo que, o problema passa a ser encontrar um \mathbf{y} pelo GMRES, que minimize:

$$\|\mathbf{r}_i\| = \|\mathbf{V}_{i+1}^T \mathbf{r}_0 - \mathbf{H}_{i+1,i} \mathbf{y}\|, \quad (\text{B.9})$$

ou, conforme Saad e Schultz (1986),

$$\min_{\mathbf{y}} \|\mathbf{r}_0 \mathbf{e}_{1+j+1} - \mathbf{H}_{i+1,i}\| \rightarrow \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0, \quad (\text{B.10})$$

com $i + 1$ equações e i variáveis. Segundo Saad (2003), é possível demonstrar que os autovalores da matriz de Hessenberg são aproximações precisas para alguns autovalores da matriz transformada, e por isso, ser mais eficiente para aproximar os autovalores de matrizes que são grandes e esparsas.

Com a minimização escrita na forma da Eq. (B.10), o problema apresentado na definição 1, a matriz que era $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ passa a ser definida pelo problema equivalente com a matriz de Hessenberg $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}$. Em geral o método do GMRES apresenta um bom desempenho, porém, também apresenta algumas desvantagens quando aplicado a problemas que exigem uma grande quantidade de iterações para encontrar a solução do problema. É possível verificar que, quando o número i de iterações aumentam, o tamanho de \mathbf{V} e \mathbf{H} na Eq. (B.9) também aumentam, e isso implica diretamente no custo computacional requerido para solução do problema. Além disso, na matriz coluna, os elementos de \mathbf{v}_i deixam de ser exatamente ortogonais devido a erros aritméticos que vão se acumulando durante o processo iterativo.

Para enfrentar essas desvantagens apresentadas, existe uma possibilidade no método GMRES, que faz com que, este seja reiniciado após um número m de iterações, onde m é um parâmetro inteiro fixo, conforme mostrou Saad e Schultz (1986). Assim, ao reiniciar o método, as informações acumuladas são eliminadas e os resultados mais recentes são usados como valores iniciais para as próximas iterações. Esta versão reiniciada do GMRES é denotada por GMRES(m).

Contudo, o GMRES(m) mesmo com seus benefícios, também pode apresentar

algumas desvantagens. Primeiro, que, a escolha de um valor correto para m , de modo que, otimize o número de iterações e custo computacional, não é algo trivial, e inclusive tem sido foco de discussões em diversos trabalhos, como pode-se citar Vorst e Vuik (1993), Joubert (1994), Baker, Jessup e Kolev (2009). Além disso, o GMRES(m) pode trazer problemas, como por exemplo, falhar na apresentação das soluções aproximadas, uma vez que, ao adotar a técnica do recomeço perde-se a garantia de convergência para solução do problema. Isso está ligado a matriz A não ser definida positiva, o que pode impactar na distribuição de autovalores, e nas condições dos autovetores. Por outro lado, como mostra Liu e Nishimura (2006), Liu (2006), a utilização de uma boa matriz de pré-condicionamento, escrita em bloco diagonal, para o FMMBEM é crucial para sua convergência e eficiência computacional. Em Liu (2008), os autores analisaram duas formas diferentes de matrizes de pré-condicionamento, mostrando que o número de iterações variaram na casa de dezenas. Este ainda é um tema em pesquisa na comunidade acadêmica, uma vez que, através da matriz de pré-condicionamento, o FMMBEM pode melhorar cada vez mais o desempenho computacional. Recentemente, Amlani, Chaillat e Loseille (2019) mostraram que um pré-condicionador, obtido pela decomposição da matriz do MEC convencional através do método das matrizes hierárquicas, acelerou a convergência de problemas de propagação de ondas em três dimensões. Em algumas situações, obtiveram 80% mais rápida que a solução fornecida pelo FMMBEM com o pré-condicionador convencional.

A implementação do IGABEM-FMM é mais complexo que a implementação do IGABEM devido à estrutura em árvore das células e construção das diferentes expansões e translações. Por ser uma parte fundamental, no apêndice C apresentamos um exemplo com mais detalhe, com todas as saídas dessa função que cria a árvore. O algoritmo computacional completo, pode ser acessado em <<https://github.com/jailsongithub>>.

Apêndice C

Construção de uma estrutura em árvore hierárquica

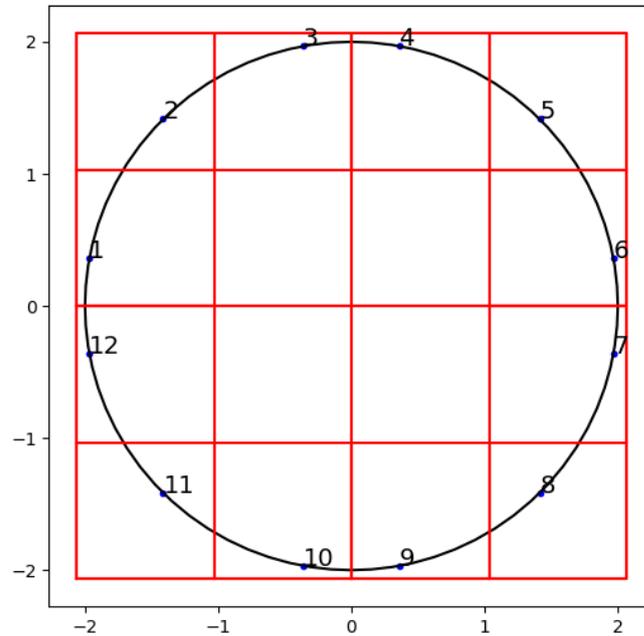
Neste apêndice é discutido uma das estruturas principais de um código computacional do IGABEM-FMM para resolver problemas gerais bidimensionais. O código completo, escrito em Julia, que resolve problemas da elasticidade linear bidimensional, pode ser acessado em <https://github.com/jailsongithub>.

Em posse da discretização do contorno do problema a ser modelado, utiliza-se a técnica da construção da árvore hierárquica. Esta árvore possibilita relacionar quais são os pontos campos que estão perto ou distante do ponto fonte, criando assim, uma estrutura de dados. Sendo assim, considerando uma parcela do código computacional escrito em linguagem *julia*, como mostrado abaixo.

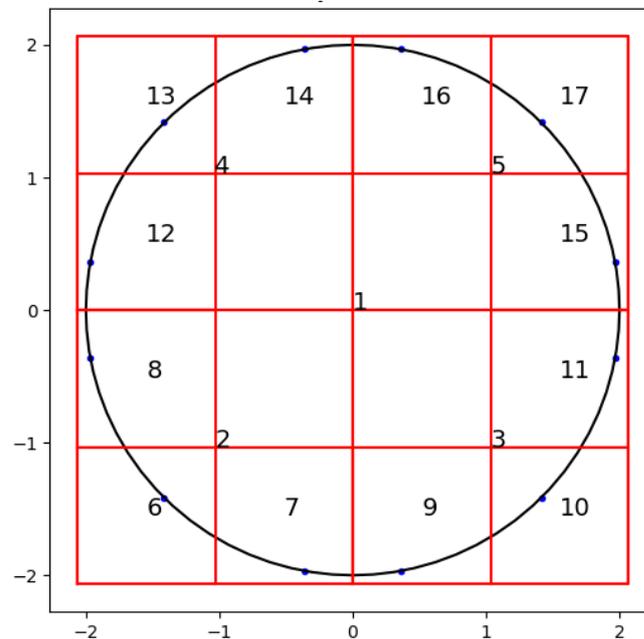
```
1 #####
2 # Program: computational routine to build the hierarchical tree structure
3 # Editor: Jailson Franca dos Santos
4 # Modified: 2023
5 #####
6
7 p = 2 # NURBS degree
8 h = 1 # NURBS refinement
9
10 dad = format_dad_iga(PlacacomFuro(h, p))
11
12 maxl = 1 # Maximum number of elements on a leaves
13 levmx = 10 # Maximum number of levels allowed in the tree
14
15 itree, loct, numt, ifath, level, ielem, iwork, lowlev, x1max, x1min,
    x2max, x2min, limcel = tree(dad.NOS, maxl, levmx)
```

A primeira função, na linha 12 *format_dad_iga* recebe como parâmetro as informações de refinamento e grau da curva NURBS, e como consequência, retorna em *dad* uma estrutura de dados, que contém informações da NURBS, tais como: coord-

nadas dos nós, pontos de controle e pontos internos a geometria, tipos e valores das condições e contorno. Em seguida, é chamada a segunda função, que cria a árvore hierárquica, *tree*. Para criação da árvore, são necessárias as informações das coordenadas dos nós, da quantidade máxima de elementos por folha e da quantidade máxima de níveis permitidos na árvore. Como consequência, retorna um conjunto de dados que serão enviado para o código do FMM. Esses dados são mostrados abaixo, para um exemplo de uma cavidade circular, como mostrado na Figura C.1.



(a)



(b)

Figura C.1: Estrutura em árvore para uma cavidade circular, construída com NURBS de grau $p = 2$, (a) numeração dos nós e (b) numeração das células.

- O array **ielem**(k) informa a numeração dos nós no último nível da árvore. Esse reagrupamento dos nós em cada nível até obter o *ielem*(k) é visto na Tabela C.1.

Nível 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12			
Nível 1	10	11	12		7	8	9		1	2	3		4	5	6
ielem (k)	11	10	12	9	8	7	1	2	3	6	4	5			

Tabela C.1: Reagrupamento dos nós para o modelo da Figura C.1a.

- O array **numt**(i) informa a quantidade de nós que estão inseridos em cada célula i . Por exemplo, perceba na Figura C.1b, que na célula 1 = 12 nós; na célula 2 = 3 nós, na célula 17 = 1 nó. O array **numt**(i) completo é mostrado na Tabela C.2.

célula (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
numt (i)	12	3	3	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabela C.2: O array **numt**(i) determina a quantidade de nós por célula.

- O array **ifath**(i) representa o número da célula mãe no qual está alocado o i -ésimo nó. Por exemplo, perceba na Figura C.1b, que **ifath**(2 ou 5) = 1, **ifath**(9 ou 11) = 3 ou **ifath**(15 ou 16) = 5. O array **ifath**(i) completo é mostrado na Tabela C.3.

célula (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
ifath (i)	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5

Tabela C.3: O array **ifath**(i) determina o número da célula mãe de cada célula filha.

- O array **loct**(i) mostra o ponto inicial do nó incluído na i -ésima célula do array *ielem*(k). Por exemplo, perceba na Figura C.1b, que **loct**(8) = 3 ou **loct**(10) = 5. Nesta modelo há também alguns locts iguais, são eles: **loct**(2 ou 6) = 1, **loct**(3 ou 9) = 4, **loct**(4 ou 12) = 7 e **loct**(5 ou 15) = 10. O array **loct**(i) completo é mostrado na Tabela C.4.

célula (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
loct (i)	1	1	4	7	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Tabela C.4: O array **loct**(i) mostra o ponto inicial do nó incluído no array *ielem*(k).

- O array **itree**(i) mostra a localização da i -ésima célula em seu nível da árvore. A numeração começa no canto inferior esquerdo com os números 0, 1, 2, 3, . . . , e assim por diante, primeiro na direção x , depois na direção y . Por exemplo, perceba na Figura C.1b, que no nível 0, o $\text{itree}(1) = 0$, no nível 1 têm-se $\text{itree}(2) = 0$, $\text{itree}(3) = 1$, $\text{itree}(4) = 2$ e $\text{itree}(5) = 3$. Para o nível 2, têm-se $\text{itree}(6) = 0$, $\text{itree}(10) = 3$, $\text{itree}(11) = 7$ e assim por diante. O array **itree**(i) completo é mostrado na Tabela C.5.

célula (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
itree (i)	0	0	1	2	3	0	1	4	2	3	7	8	12	13	11	14	15

Tabela C.5: O array **itree**(i) mostra a posição da i -ésima célula em seu nível da árvore.

- O array **level**(l) informa o número inicial da célula em que inicia-se cada nível na estrutura da árvore. Conforme a Figura C.1b é possível, por exemplo, perceber que, no nível 0 a primeira célula é 1, no nível 2 a primeira célula é a 2, no nível 3 a primeira célula é a 6.

level (l)	1	2	6	18	18	18
----------------------	---	---	---	----	----	----

- O array **limcel**(i) mostra as informações dos limites de cada célula, sendo estes mostrados na Tabela C.6.

1.0	-2.06494	2.06494	-2.06494	2.06494
2.0	-2.06494	0.0	-2.06494	0.0
3.0	0.0	2.06494	-2.06494	0.0
4.0	-2.06494	0.0	0.0	2.06494
5.0	0.0	2.06494	0.0	2.06494
6.0	-2.06494	-1.03247	-2.06494	-1.03247
7.0	-1.03247	0.0	-2.06494	-1.03247
8.0	-2.06494	-1.03247	-1.03247	0.0
9.0	0.0	1.03247	-2.06494	-1.03247
10.0	1.03247	2.06494	-2.06494	-1.03247
11.0	1.03247	2.06494	-1.03247	0.0
12.0	-2.06494	-1.03247	0.0	1.03247
13.0	-2.06494	-1.03247	1.03247	2.06494
14.0	-1.03247	0.0	1.03247	2.06494
15.0	1.03247	2.06494	0.0	1.03247
16.0	0.0	1.03247	1.03247	2.06494
17.0	1.03247	2.06494	1.03247	2.06494

Tabela C.6: O array **limcel**(i) mostra as informações dos limites de cada célula.