UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

O MOMENTO ANGULAR DO CAMPO GRAVITACIONAL E O GRUPO DE POINCARÉ

SÉRGIO COSTA ULHOA

ORIENTADOR:

JOSÉ WADIH MALUF

Brasília, 22 de fevereiro de 2009

Agradecimentos

Sou grato ao meu orientador, o professor Dr. José Wadih Maluf, por ter me guiado ao longo destes anos em que se desenvolveram e se estabeleceram relações de amizade, respeito e profunda admiração. Foi ele o grande responsável pela minha escolha em trabalhar na área de Relatividade. Nunca vou esquecer o meu primeiro contato com a pesquisa acadêmica que se deu, ainda calouro, em um seminário ministrado pelo prof. Maluf. Gostaria de agradecer a todos os professores do Instituto de Física que contribuíram para minha formação ou o fizeram de forma indireta. Sou grato aos amigos que fiz ao longo destes anos, mas principalmente agradeço a minha companheira Marianne Maciel de Almeida, por sempre estar ao meu lado, apoiando-me e auxiando-me a seguir por esta vida.

Resumo

O teleparalelismo equivalente à Relatividade Geral (TEGR, na sigla em inglês) é uma descrição alternativa do campo gravitacional em termos de um campo de tétradas, que correspondem às variáveis dinâmicas do sistema. O TEGR permite-nos tratar de maneira adequada o problema de definição da energia, momento e momento angular do campo gravitacional. Nesta tese mostraremos como descrever o TEGR usando o formalismo Lagrangeano e Hamiltoniano. Utilizando o formalismo Hamiltoniano construiremos uma expressão para o momento angular do campo gravitacional que é independente de coordenadas. Discutiremos as principais maneiras de definir o momento angular existentes na literatura, comparando com a nossa expressão para uma configuração que exibe simetria axial. Estabeleceremos qual deve ser o comportamento assintótico do tensor métrico para que a expressão do momento angular seja bem definida. Verificaremos que as nossas expressões para o momento-energia e o momento angular formam uma representação do grupo de Poincaré, o que nos permite definir os invariantes de Casimir. Utilizando essas quantidades tentaremos construir a helicidade de ondas gravitacionais, analisando dois sistemas: a métrica de Bondi e ondas gravitacionais planas como soluções exatas das equações de Einstein. Discutiremos qual é a interpretação física do campo de tétradas e exemplificaremos nossa interpretação através do cálculo do momento angular comparando dois campos de tétradas para a casca esférica em rotação.

Abstract

The teleparallel equivalent of general relativity (TEGR) is a viable alternative geometrical description of General Relativity in terms of the tetrad field. In the framework of the TEGR it has been possible to address the longstanding problem of defining the energy, momentum and angular momentum of the gravitational field. In this thesis we shall show how to describe the TEGR by means the Lagrangian and Hamiltonian formalisms. Using the Hamiltonian formalism we shall give a expression for gravitational angular momentum that is independent of the coordinates, we shall describe the several ways to defining the gravitational angular momentum in the literature and compare them with our definition by applying it to a configuration that exhibits axial symmetry. We shall fix the exact asymptotic conditions on the metric tensor in order to get a well defined expression for the gravitational angular momentum. We find that the gravitational energy-momentum and angular momentum correspond to a representation of the Poincaré group. This result allows us to define Casimir type invariants for the gravitational field. Using these invariants we shall try to build the helicity of gravitational waves by analyzing two configurations: Bondi's metric and gravitational plane-waves as exact solutions of Einstein's equations. We shall discuss the physical meaning of the tetrad field by investigating the gravitational angular momentum of two different tetrad fields for a rotating mass shell.

Sumário

Notação:

O espaço-tempo físico será designado por letras gregas, de forma similar o espaço-tempo tangente será designado por letras latinas. Índices do espaço-tempo físico $\mu, \nu, ...$ e índices SO(3,1) ou do espaço-tempo tangente $a, b, ...$ variam de 0 a 3. Índices de espaço e tempo são indicados de acordo com $\mu = 0, i, \quad a = (0), (i)$. O campo de tétradas é denotado por $e^a{}_\mu$, o tensor métrico do espaço-tempo de Minkowski levanta e abaixa índices e é fixado por $\eta_{ab} = e_{a\mu} e_{b\nu} g^{\mu\nu} = (-+++)$. O determinante do campo de tétradas é indicado por $e = \det(e^a{}_\mu)$. As unidades são fixadas com a escolha $G = c = 1$, a menos que se diga o contrário.

Capítulo 1

Introdução

Um entendimento mais completo e profundo da Relatividade Geral de Einstein requer o conhecimento da estrutura das equações de campo, soluções e suas consequências, bem como a compreensão de propriedades tais como: a energia, momento e momento angular do campo gravitacional [1]. Devido ao surgimento de problemas na interpretação, e mesmo na definição dessas propriedades, que são indispensáveis para a completa compreensão da teoria, torna-se necessária uma nova abordagem, porém equivalente, para a descrição do campo gravitacional.

Na abordagem geométrica da gravitação surgem diversos problemas conceituais tais como a inexistência de uma densidade para energia gravitacional, e existem sérias dificuldades quando tentamos construir uma teoria de calibre na tentativa de se unificar as quatro interações fundamentais da natureza. Parte dessa dificuldade advém de estensões equivocadas do Princípio da Equivalência.

Moller [2] já havia notado que é impossível anular o campo gravitacional por uma simples transformação de coordenadas, ou seja, as quantidades físicas têm que ser independentes de tais transformações. Por isso a abordagem de pseudo-tensores torna-se inviável, uma vez que em sua formulação, essa dependência é explícita. Um outro problema é que a interação gravitacional é muito fraca em comparação com as outras interações fundamentais, caracterizando a chamada "hierarquia das interações".

A teoria de Yang-Mills [3] descreve com sucesso três das quatro interações fundamentais. A gravitação é uma interação que permanece alheia a essa unificação. Existem duas razões que explicam esse fato. A primeira é que a Lagrangeana, na visão geométrica, é linear na curvatura, sendo que no teorema de Noether [4] (fundamental para a formulação da teoria de Yang-Mills) a Lagrangeana é quadrática. A segunda é que não se sabe qual é realmente a simetria de calibre da gravitação, muito embora haja argumentos muito fortes a favor do grupo das translações [5]. Logo não podemos construir ainda nenhum observável da teoria nos moldes da teoria Quântica, uma vez que a expressão de Noether para os observáveis pressupõe uma conexão associada a uma representação do grupo de calibre que nesse caso ainda é controverso. Essa conexão não necessariamente reflete uma propriedade física do espaço-tempo, ela é uma propriedade do grupo de calibre em questão. Por exemplo, na teoria eletromagnética, o potencial vetor A_μ funciona coma a referida conexão, enquanto que a curvatura contruída a partir dela é o tensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Uma abordagem bastante interessante é aquela que lida com o campo gravitacional como teoria de calibre para o grupo das translações definido no espaço tangente a cada ponto do espaço-tempo [6, 7, 8, 5]. Esta abordagem tem estreita relação com o que passaremos a discutir nesta tese, entretanto a nossa visão é um pouco diferente como veremos.

Assim, temos que abordar a gravitação sob um outro ponto de vista que nos permita resolver alguns dos problemas citados e que recupere os ganhos e conquistas da visão geométrica. Isso é feito através do chamado Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TEGR). Antes, porém, temos que introduzir alguns conceitos fundamentais.

O primeiro deles é o conceito de campo de tétradas. Um campo de tétradas é um conjunto de vetores linearmente independentes que obedecem uma relação de ortogonalidade. Esses vetores são usados para construir uma base capaz de descrever um espaço-tempo. As primeiras tentativas de se descrever o campo gravitacional por meio de tétradas são atribuídas a Einstein na tentativa de se unir a gravitação e o eletromagnetismo [9]. A característica mais importante das tétradas é que, na descrição do espaço-tempo em termos destes campos, o Princípio da Equivalência surge de maneira natural. Isso se deve ao fato de que os campos de tétradas, que descrevem ao mesmo tempo o espaço-tempo físico e o espaço tangente, podem ser interpretados como uma transformação de Lorentz entre os diferenciais dx^μ do espaço-tempo físico e dq^a do espaço-tempo tangente, através da comparação entre $\Lambda^c{}_a\Lambda^d{}_b\eta_{cd} = \eta_{ab}$, onde $\Lambda^a{}_b$ é a matriz de Lorentz, e $e^a{}_\mu e^b{}_\nu\eta_{ab} = g_{\mu\nu}$. Com isso podemos sempre escrever a quantidade projetada $e^a = e^a{}_\mu dx^\mu$, porém podemos escrever também $dq^a = e^a{}_\mu dx^\mu$, muito embora não possamos integrar esta relação e escrever $q^a = q^a(x^\mu)$. O sentido físico do campo de tétradas será explorado mais profundamente no Capítulo 5.

No espaço-tempo caracterizado por um campo de tétradas os componentes de um campo vetorial são ditos paralelos se suas projeções em pontos distintos da variedade, com respeito a um campo local de tétradas, forem idênticos. Claro que se pudermos construir uma derivada covariante que, aplicada sobre um campo de tétradas, se anula identicamente, a característica anterior é satisfeita e podemos definir o conceito de paralelismo absoluto ou teleparalelismo, no espaço-tempo [10].

Se usarmos a conexão de Cartan, $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = e^{a\lambda}\partial_\mu e_{a\nu}$, podemos construir a chamada geometria Teleparalela que é menos restritiva do que a geometria Riemanniana. Uma geometria Riemanniana corresponde a uma classe de geometrias Teleparalelas. Isso significa que dada uma geometria Riemanniana (caracterizada por um tensor métrico) existem diversas maneiras de se construir geometrias Teleparalelas (caracterizadas por campos de tétradas). Isso pode ser verificado através da relação entre o tensor métrico e um campo de tétradas $g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e_{a\nu}$. Um escalar de curvatura construído a partir dessa conexão é identicamente nulo, o que permite escrever a densidade de Lagrangeana como combinação quadrática do tensor de torção (que é a parte anti-simétrica da conexão de Cartan).

A partir desses conceitos básicos, podemos entender que o Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TEGR) é uma descrição alternativa do campo gravitacional em termos de um campo de tétradas [11], que correspondem às variáveis dinâmicas do sistema. Esses objetos são adequados a essa descrição pois produzem o campo gravitacional e ao mesmo tempo estabelecem um campo de observadores no espaço-tempo. Apesar de ainda ser objeto de estudo e investigação, o TEGR parece-nos ser a alternativa mais viável para o entendimento do campo gravitacional. Entendemos ser assim, pois no contexto do TEGR tem sido possível tratar de maneira adequada o problema de definição do momento-energia e momento angular do campo gravitacional.

Pode-se descrever a gravitação com o TEGR de duas maneiras. A formulação Lagrangeana e a formulação Hamiltoniana do TEGR. A primeira é construida pensando-se nas simetrias que as equações de campo exibem e a segunda é obtida da primeira por meio de uma transformação de Legendre.

Assim, nesse contexto, no esforço de tentar caracterizar as simetrias do sistema, construímos a Lagrangeana [12, 13, 14] e através da execução de uma transformação de Legendre definimos o que é chamado de formulação Hamiltoniana da gravitação [15]. Entretanto sabemos que essa formulação nem sempre é bem definida para uma teoria geométrica arbitrária da gravitação. Para que seja bem definida é necessário que os vínculos satisfaçam uma álgebra e que, além disso, essa álgebra seja de primeira classe. Isso significa que cada vínculo deve comutar com todos os outros, ou seja, o "produto" entre os vínculos deve ser escrito apenas em termos dos próprios vínculos.

Ao analisarmos as equações de Einstein, na formulação métrica e lagrangeana usuais, notamos que elas podem ser separadas em duas categorias, que não surgem de maneira explícita na teoria, a saber: seis equações dinâmicas (equações diferenciais hiperbólicas) e quatro equações de vínculo (equações diferenciais elípticas). No formalismo Hamiltoniano, quando escrevemos as equações de Hamilton (elas são essencialmente as equações de Einstein), essa separação ocorre de maneira natural, através de uma decomposição 3+1 do espaço-tempo.

Quando consistente, a formulação Hamiltoniana não só garante que a evolução temporal das quantidades de campo sejam bem definidas, como também permite o entendimento da teoria física por uma perspectiva diferente. Nessa tese lidamos com o formalismo Hamiltoniano com vínculos, desenvolvido por Dirac [16] e que tem se mostrado muito útil por mostrar explícitamente a forma do momento angular e do momento-energia gravitacionais.

Nos capítulos 2 e 3, a partir de uma formulação Hamiltoniana bem definida, interpretamos as equações de vínculos como definições do momento angular e momento-energia gravitacionais de forma que as definições sejam independentes de coordenadas. Isso se justifica, em parte, pelo fato do conjunto de vínculos primários satisfazerem a álgebra de momento angular. Com isso, e considerando o colchete de Poisson definido no espaço de fase da teoria, como sendo o produto da álgebra, encontramos que o momento-energia e o momento angular gravitacionais correspondam a uma representação do grupo de Poincaré. Esse resultado permite escrever os operadores de Casimir do campo gravitacional, quantidades que são invariantes gerados pela teoria e que caracterizam uma configuração do campo de tétradas.

No capítulo 4, além de interpretarmos o significado de um campo de tétradas, vamos investigar a definição do momento angular mais profundamente, bem como explorar a forma da expressão regularizada para essa grandeza física, no sentido de se eliminarem possíveis infinitos quando as integrais são calculadas. Uma expressão regularizada para algum objeto significa, essencialmente, subtrair uma quantidade infinita desse objeto obtida no espaço-tempo plano. Isso se torna necessário para afastar a existência de valores não nulos de momento-energia ou momento angular na ausência de campo gravitacional. Vamos, também, calcular o momento angular de uma casca esférica para diferentes observadores.

Regge e Teitelboim [17] obtiveram um formalismo Hamiltoniano para Relatividade Geral que é claramente invariante sob transformações do grupo de Poincaré no infinito, através da introdução de dez novos pares de variáveis canônicas. A análise subsequente feita por York [18] mostrou que uma definição própria do momento angular gravitacional requer um comportamento assintótico adequado dos componentes do tensor de Ricci. Beig e ó Murchadha [19] analisaram a forma exata das condições de fronteira necessárias para se definir energia, momento e momento angular do campo gravitacional. Szabados [20], além disso, encontrou as condições necessárias que produzem valores finitos para as quantidades mencionadas acima. Em todas essas análises as transformações de Poincaré são definidas e realizadas em regiões assintóticas do espaço-tempo. A álgebra de Poincaré também é verificada no limite assintótico do espaço-tempo. Nesta tese mostraremos que, no âmbito de nossa definição para o momento angular, a álgebra de Poincaré é verificada em todo espaço de fase da teoria, não sendo restrita à região de fronteira.

No capítulo 5, traçaremos um paralelo entre o exposto acima e a nossa definição de momento angular, aplicando nossa definição a uma configuração com simetria axial e analisando em que medida o limite assintótico do momento angular depende das componentes do tensor métrico. A investigação dos auto-valores dos operadores de Casimir poderia ter aplicação a uma possível teoria quântica da gravitação, uma vez que essas quantidades têm íntima relação com a massa e o spin de partículas nas ondas gravitacionais. Assim, procederemos nessa análise para o caso de ondas gravitacionais planas e para a métrica de Bondi (essencialmente uma configuração perdendo massa por emissão de ondas gravitacionais).

Capítulo 2

O Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral

2.1 Introdução

Procuraremos traçar alguns comentários a respeito do campo de tétradas e mostrar como estabelecer a formulação Lagrangeana e Hamiltoniana [15] do TEGR. Exigiremos inicialmente que a teoria exiba invariância local de Lorentz, através da introdução de uma conexão de spin $\omega_{\mu ab}$ do grupo SO(3,1) local, e posteriormente vamos impor que essa conexão seja nula para obtermos uma densidade de Lagrangeana invariante por transformações globais de Lorentz. A partir dessa densidade de Lagrangeana obteremos as equações de campo.

Quando introduzimos a conexão de spin a condição de Teleparalelismo exige que a derivada covariante da tétrada seja nula, o que pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu e^a{}_\nu &= 0 \\ \partial_\mu e^a{}_\nu - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} e^a{}_\lambda + \omega_\mu{}^a{}_b e^b{}_\nu &= 0\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

Isolando a conexão $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ na última equação temos:

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = e^{a\lambda} e^{b}{}_{\nu} \omega_{\mu ab} + e^{a\lambda} \partial_{\mu} e_{a\nu} \,. \tag{2.2}$$

Substituindo essa quantidade na definição usual do tensor de curvatura obtemos:

$$R^{\lambda}{}_{\gamma\mu\nu}(e,\omega) = e_{a}{}^{\lambda} e^{b}{}_{\gamma} (\partial_{\mu}\omega_{\nu}{}^{a}{}_{b} - \partial_{\nu}\omega_{\mu}{}^{a}{}_{b} + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{c}\omega_{\nu}{}^{c}{}_{b} - \omega_{\nu}{}^{a}{}_{c}\omega_{\mu}{}^{c}{}_{b}) \,. \tag{2.3}$$

Usando a equação (2.2), podemos calcular o tensor de torção $T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}$, que gera a seguinte expressão:

$$T^{a}{}_{\mu\nu}(e,\omega) = \partial_{\mu} e^{a}{}_{\nu} - \partial_{\nu} e^{a}{}_{\mu} + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{b} e^{b}{}_{\nu} - \omega_{\nu}{}^{a}{}_{b} e^{b}{}_{\mu} \,. \tag{2.4}$$

A conexão de spin, usando a equação (2.4), pode ser escrita identicamente como:

$$\omega_{\mu ab} = {}^{\circ}\omega_{\mu ab} + K_{\mu ab} \,, \tag{2.5}$$

onde $K_{\mu ab}$ é o tensor de contorção e ${}^{\circ}\omega_{\mu ab}$ é a conexão de Levi-Civita, sendo essas quantidades definidas pelas expressões:

$$\begin{aligned} K_{\mu ab} &= \frac{1}{2} e_{a}{}^{\lambda} e_{b}{}^{\nu} (T_{\lambda\mu\nu} + T_{\nu\lambda\mu} + T_{\mu\lambda\nu}) \,, \\ {}^{\circ}\omega_{\mu ab} &= -\frac{1}{2} e^{c}{}_{\mu} (\Omega_{abc} - \Omega_{bac} - \Omega_{cab}) \,, \end{aligned} \tag{2.6}$$

com Ω_{abc} dado por:

$$\Omega_{abc} = e_{a\nu} (e_{b}{}^{\mu} \partial_{\mu} e_{c}{}^{\nu} - e_{c}{}^{\mu} \partial_{\mu} e_{b}{}^{\nu}) \,. \tag{2.7}$$

Devemos notar que ${}^{\circ}\omega_{\mu ab}$ possui torção nula.

Se usarmos a expressão (2.5) para calcular o escalar de curvatura, que é calculado por meio da contração dos índices do tensor definido em (2.3), chegamos à seguinte relação:

$$eR(e,\omega) = eR(e) + e(\frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^aT_a) - 2\partial_\mu(eT^\mu)\,. \tag{2.8}$$

Essa é a relação fundamental que será usada para definirmos a densidade de Lagrangeana no TEGR.

Tradicionalmente a densidade de Hamiltoniana é obtida quando decompomos o espaço-tempo em hipersuperfícies tridimensionais do tipo espaço e que são deformadas com o auxílio das funções lapso N e *shift* N^i, as quais agem na direção normal e tangencial dessas hipersuperfícies espaciais, respectivamente, gerando o espaço-tempo físico. Entretanto neste capítulo construiremos a densidade de Hamiltoniana por meio de uma transformação de Legendre aplicada à densidade de Lagrangeana sem fazermos a decomposição 3 + 1 do espaço-tempo. A partir disso definiremos as expressões para o momento-energia e momento angular gravitacionais.

Construir uma formulação Hamiltoniana da gravitação é importante pois as equações se tornam menos complexas, uma vez que as equações diferenciais envolvem derivadas de primeira ordem. Algumas características do sistema são melhor observadas, permitindo-nos retirar informações que, muitas vezes, são obscuras no contexto do formalismo Lagrangeano. E, fundamentalmente, esse enfoque pode nos permitir a quantização do campo gravitacional.

2.2 Algumas Considerações Sobre o Campo de Tétradas

Em um espaço-tempo físico arbitrário há sempre um espaço-tempo plano tangente em cada ponto. Podemos projetar uma quantidade definida nesse espaço-tempo arbitrário, no espaço-tempo tangente. Para isso, usamos o campo de tétradas. Considere um vetor definido em um espaço-tempo V^μ, a correspondente projeção no espaço-tempo tangente é dada por:

$$V^a = e^a{}_\mu V^\mu\,, \tag{2.9}$$

sendo que para isso utilizamos o campo de tétradas $e^a{}_\mu$. Claro que podemos fazer o caminho oposto e projetar um vetor do espaço-tempo tangente V^a no espaço-tempo físico, assim temos:

$$V^\mu = e_a{}^\mu V^a\,, \tag{2.10}$$

nesse caso usamos o campo de tétradas inverso $e_a{}^\mu$.

Como foi dito, um campo de tétradas é um conjunto de vetores linearmente independentes que obedecem uma relação de ortogonalidade. Essa relação pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= e^{a\mu} e_a{}^\nu\,; \\ \eta^{ab} &= e^{a\mu} e^b{}_\mu\,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Vamos mostrar como construir um campo de tétradas em um espaço-tempo plano, claro que neste caso o espaço-tempo tangente será o próprio espaço-tempo físico. Para isso vamos considerar dois sistemas de coordenadas, $q^a = (t, x, y, z)$ no espaço-tempo tangente e $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$ no espaço-tempo físico. Os dois sistemas estão relacionados pela transformação de coordenadas $dq^a = e^a{}_\mu dx^\mu$, com isso o campo de tétradas pode ser escrito como:

$$e^a{}_\mu = \frac{\partial q^a}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta\,\cos\phi & r\cos\theta\,\cos\phi & -r\sin\theta\,\sin\phi \\ 0 & \sin\theta\,\sin\phi & r\cos\theta\,\sin\phi & r\sin\theta\,\cos\phi \\ 0 & \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

da relação acima percebemos que o campo de tétradas pode ser escrito como o gradiente da função q^a. Quando isso ocorre as tétradas são chamadas de holônomas, nesse caso tanto x^μ quanto q^a descrevem os mesmos pontos do espaço-tempo, como seria de se esperar em uma transformação de cordenadas. A mesma idéia pode ser usada para construírmos outras configurações de tétradas, por exemplo através de uma transformação de coordenadas que se relacionam através de um “boost"de Lorentz.

No caso geral o campo de tétradas não pode ser escrito na forma $\partial_\mu q^a$, então as tétradas são chamada de não-holônomas. Para essa categoria de tétradas temos a seguinte propriedade $\partial_\mu e^a{}_\nu - \partial_\nu e^a{}_\mu \neq 0$, logo para um espaço-tempo com torção, temos tétradas não-holônomas. Nos sistemas abordados nesta tese em que for necessário a utilização de coordenadas esféricas, vamos usar a estrutura de (2.12) para construírmos o campo de tétradas correspondente.

Para o TEGR a manifestação do campo gravitacional se dá em um espaço-tempo dotado de um campo de tétradas não-holonômico, que não pode ser escrito como gradiente de funções q^a. As quantidades de interesse físico tais como o vetor energia-momento e o momento angular serão definidos no espaço-tempo tangente, que será identificado com o espaço-tempo de referência.

2.3 A Formulação Lagrangeana

Na formulação Lagrangeana do TEGR vamos impor que a conexão de spin $\omega_{\mu ab}$ seja igual a zero. Com isso a expressão (2.3) se reduz a:

$$eR(e) \equiv -e(\frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^aT_a) + 2\partial_\mu(eT^\mu)\,. \tag{2.13}$$

Além disso, a torção em (2.4) assume a seguinte forma:

$$T^a{}_{\mu\nu}(e) = \partial_\mu e^a{}_\nu - \partial_\nu e^a{}_\mu\,. \tag{2.14}$$

Se desprezarmos a divergência em (2.13), a densidade de Lagrangeana para o campo gravitacional no TEGR é dada por:

$$\begin{aligned} L(e_{a\mu}) &= -k\,e\,(\frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^aT_a) - L_M \\ &\equiv -k\,e\Sigma^{abc}T_{abc} - L_M\;, \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde $k = 1/(16\pi)$ e L_M é a densidade de Lagrangeana para os campos de matéria. O termo de divergência não é necessário quando construimos a integral de ação para espaços-tempos assintoticamente planos, pois as integrais de superfície que surgem por integrações por partes se anulam. No vácuo, notamos que a densidade de Lagrangeana é invariante por transformações gerais de coordenadas e por transformações de Lorentz globais SO(3,1) como é esperado, uma vez que impusemos $\omega_{\mu ab} = 0$. O tensor Σ^{abc} é definido por:

$$\Sigma^{abc} = \frac{1}{4}(T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}) + \frac{1}{2}(\eta^{ac}T^b - \eta^{ab}T^c) \, , \tag{2.16}$$

e $T^a = T^b{}_b{}^a$. As equações de campo são obtidas a partir de (2.15), por meio de sua variação funcional em relação a $e^{a\mu}$ e são dadas por:

$$e_{a\lambda}e_{b\mu}\partial_\nu(e\Sigma^{b\lambda\nu}) - e(\Sigma^{b\nu}{}_a T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4}e_{a\mu}T_{bcd}\Sigma^{bcd}) \; = \frac{1}{4k}eT_{a\mu} \, . \tag{2.17}$$

Como $\Sigma^{abc}T_{abc}$ é proporcional ao escalar de curvatura relativo à conexão de Levi-Civita a menos de uma divergência total, pode-se mostrar, por cálculos explícitos, que o lado esquerdo de (2.17) é proporcional ao tensor de Einstein $G_{a\mu} = e_a{}^\nu G_{\nu\mu}$. Ou seja:

$$e_{a\lambda}e_{b\mu}\partial_\nu(e\Sigma^{b\lambda\nu}) - e(\Sigma^{b\nu}{}_a T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4}e_{a\mu}T_{bcd}\Sigma^{bcd}) \; = \frac{1}{2}e[R_{a\mu}(e) - \frac{1}{2}e_{a\mu}R(e)] \, , \tag{2.18}$$

com isso, a seguinte equação se torna clara:

$$R_{a\mu}(e) - \frac{1}{2}e_{a\mu}R(e) = \frac{1}{2k}T_{a\mu} \, . \tag{2.19}$$

Isso mostra a equivalência entre a teoria em questão e a Relatividade Geral, o que justifica o próprio nome da teoria. Essa equivalência pode ser visualizada quando analisamos a maneira como a Relatividade Geral é descrita. Usualmente ela é descrita em termos de um tensor de curvatura diferente de zero, é portanto uma teoria essencialmente geométrica, e com o tensor de torção nulo. Para o Teleparalelismo o quadro é oposto, mas absolutamente equivalente. Tem-se a curvatura construída a partir da conexão de Cartan nula e a torção diferente de zero.

As equações de campo (2.17) podem ser reescritas na forma:

$$\partial_\nu(e\Sigma^{a\lambda\nu}) = \frac{1}{4k} e\, e^a{}_\mu (t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu}) \,, \tag{2.20}$$

onde

$$t^{\lambda\mu} = k(4\Sigma^{bc\lambda} T_{bc}{}^{\mu} - g^{\lambda\mu}\Sigma^{bcd}T_{bcd}) \,, \tag{2.21}$$

é interpretado como o tensor de energia momento do campo gravitacional [21]. Dentre os vários motivos que suportam essa interpretação [22], vemos primeiramente que $t^{\lambda\mu}$ é um tensor verdadeiro sob transformações de coordenadas, entretanto $t^{\lambda\mu}$ não é simétrico. Além disso, temos uma lei de conservação tanto para $et^{a\lambda}$ quanto para $eT^{a\lambda}$. Para entendermos isso basta notar que $\Sigma^{a\lambda\nu}$ é anti-simétrico nos dois últimos índices, lembrando que uma contração entre um tensor simétrico e outro anti-simétrico é nula, temos o seguinte:

$$\partial_\lambda\partial_\nu(e\Sigma^{a\lambda\nu}) \equiv 0 \,. \tag{2.22}$$

Assim, imediatamente chegamos à equação:

$$\partial_\lambda(et^{a\lambda} + eT^{a\lambda}) = 0 \,, \tag{2.23}$$

que é uma lei de conservação local para os tensores de energia-momento gravitacional, $t^{a\lambda}$, e dos campos de matéria, $T^{a\lambda}$. Entretanto a quantidade definida em (2.21) deve ainda ser objeto de verificações posteriores, como por exemplo, a questão da positividade do tensor de energia-momento. Como veremos essa propriedade nem sempre é obedecida.

2.4 A Formulação Hamiltoniana

Nesta seção faremos uma apresentação resumida dos resultados principais estabelecidos nas referências [15] e [23]. Para obtermos a formulação Hamiltoniana do TEGR temos que, primeiramente, estabelecer o espaço de fase da teoria. Como a densidade de Lagrangeana não contém explicitamente a derivada temporal de e_{a0}, essa quantidade surge como um multiplicador de Lagrange. O momento canonicamente conjugado a e_{ai} é dado por $\Pi^{ai} = \delta L/\delta \dot{e}_{ai}$. A formulação Hamiltoniana (não explicitamente covariante) é obtida reescrevendo a densidade de Lagrangeana na forma $L = p\dot{q} - H_0$, em termos de e_{ai}, Π^{ai} e dos multiplicadores de Lagrange. Executando a transformação de Legendre, chegamos à densidade de Hamiltoniana [15] na forma:

$$H = H_0 + \alpha_{ik}\Gamma'^{\,ik} + \beta_k\Gamma^k\,, \tag{2.24}$$

mais termos de superfície. α_{ik} e β_k são multiplicadores de Lagrange. Através da condição de consistência $\frac{\delta H_0}{\delta e_{a0}} = 0$, temos um novo vínculo C^a, que se relaciona com H_0 por $H_0 = e_{a0}C^a$. Com isso obtemos a seguinte densidade de Hamiltoniana:

$$H = e_{a0}C^a + \alpha_{ik}\Gamma'^{\,ik} + \beta_k\Gamma^k\,. \tag{2.25}$$

Após resolvermos as equações de campo identificamos $\alpha_{ik} = 1/2(T_{i0k} + T_{k0i})$ e $\beta_k = T_{00k}$. C^a, $\Gamma'^{\,ik}$ e Γ^k são vínculos de primeira classe, garantindo que a evolução temporal da teoria é bem definida.

O vínculo C^a é escrito como $C^a = -\partial_i\Pi^{ai} + p^a$, onde p^a é uma expressão muito complicada das variáveis de campo, explicitamente temos:

$$\begin{aligned}
p^a &= ke\Big\{e^{a0}\Big[-\frac{1}{4g^{00}}\Big(g_{ik}g_{jl}P^{ij}P^{kl} - \frac{1}{2}P^2\Big) + \Big(\frac{1}{4}g^{im}g^{nj}T^b{}_{mn}T_{bij} + \\
&+ \frac{1}{2}g^{nj}T^i{}_{mn}T^m{}_{ij} - g^{ik}T^m{}_{mi}T^n{}_{nk}\Big)\Big] - \frac{1}{2g^{00}}\Big(g_{ik}g_{jl}\gamma^{aij}P^{kl} - \\
&- \frac{1}{2}g_{ij}\gamma^{aij}\,P\Big) - e^{ai}\Big(g^{0m}g^{nj}T^b{}_{ij}T_{bmn} + g^{nj}T^0{}_{mn}T^m{}_{ij} + g^{0j}T^n{}_{mj}T^m{}_{ni} -
\end{aligned}$$

$$- \quad 2g^{0k}T^m{}_{mk}T^n{}_{ni} - 2g^{jk}T^0{}_{ij}T^n{}_{nk}\Big)\Big\}\,, \tag{2.26}$$

com γ^{aij} e P^{ik} definidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\gamma^{aij} &= -\frac{1}{2ke}(e^{ai}\Gamma^j + e^{aj}\Gamma^i) - e^{ak}\Big[g^{00}(g^{jm}T^i{}_{km} + g^{im}T^j{}_{km} + 2g^{ij}T^m{}_{mk}) + \\
&+ g^{0m}(g^{0j}T^i{}_{mk} + g^{0i}T^j{}_{mk}) - 2g^{0i}g^{0j}T^m{}_{mk} + \\
&+ (g^{jm}g^{0i} + g^{im}g^{0j} - 2g^{ij}g^{0m})T^0{}_{mk}\Big] \qquad (2.27)\\
P^{ik} &= \frac{1}{ke}\Pi^{(ik)} + g^{0m}(g^{kj}T^i{}_{mj} + g^{ij}T^k{}_{mj} - 2g^{ik}T^j{}_{mj}) + \\
&+ (g^{km}g^{0i} + g^{im}g^{0k})T^j{}_{mj}\,. \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

A forma integral das equações de vínculo $C^a = 0$ é interpretada como equação de energia do tipo $H - E = 0$ e nos permite definir o vetor energia-momento gravitacional P^a :

$$P^a = -\int_V d^3x p^a\,, \tag{2.29}$$

como $p^a = \partial_i \Pi^{ai}$ (pela equação de vínculo), temos [1, 24]:

$$P^a = -\int_V d^3x \partial_i \Pi^{ai}\,, \tag{2.30}$$

V é um volume arbitrário do espaço tri-dimensional. Essa é uma definição consistente pois diversas aplicações indicam que (2.30) representa o momento-energia gravitacional contido em um volume V em espaços vazios. Particularmente (2.30) gera a energia de ADM [41] quando aplicada a todo espaço tri-dimensional. No espaço de configurações, temos:

$$\Pi^{ai} = -4ke\Sigma^{a0i}\,. \tag{2.31}$$

O surgimento de divergências totais na forma de densidades escalares ou vetoriais é possível no contexto de teorias contruídas a partir do tensor de torção, o que não é o caso de teorias métricas da gravitação.

Em termos da definição (2.21), podemos escrever:

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\, e\, e^a{}_\mu(t^{0\mu}+T^{0\mu}) = -\oint_S dS_j\, \left[e\, e^a{}_\mu(t^{j\mu}+T^{j\mu})\right]\,, \tag{2.32}$$

que representa uma equação de continuidade para o tensor de energia-momento total $t^{\lambda\mu}+T^{\lambda\mu}$. Assim, alternativamente, podemos reescrever P^a de uma forma mais familiar:

$$P^a = \int_V d^3x\, e\, e^a{}_\mu(t^{0\mu}+T^{0\mu})\,. \tag{2.33}$$

Entretanto utilizaremos a expressão (2.30), por motivos práticos, uma vez que é muito mais fácil lidar com (2.30) do que (2.33). Vemos que a divergência que aparece em C^a pode ser realmente tomada para definirmos o vetor energia-momento em vista das equações de campo que relacionam $t^{\mu\nu}$ com Π^{ai}. Portanto a nossa definição de momento energia não é arbitrária, o seu sentido é estritamente relacionado com as equações de campo.

A interpretação dos vínculos como equações que definem a energia e o momento gravitacionais se justifica quando lidamos por exemplo com a integral de ação de Jacobi [25]. Considere um sistema descrito por coordenadas x^i em um espaço de configurações n-dimensional, $(i = 1, 2, ...n)$. A ação de Jacobi é:

$$S[x] = \int \sqrt{m_{ij}dx^i dx^j}\sqrt{2(E-V(x))}\,, \tag{2.34}$$

onde m_{ij} é a métrica Newtoniana. Se introduzirmos um parâmetro σ ao longo de um caminho no espaço de configurações com extremidades fixas então a ação de Jacobi se escreve como:

$$S[x] = \int_{\sigma'}^{\sigma''} d\sigma \sqrt{m_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}\sqrt{2(E-V(x))}\,, \tag{2.35}$$

onde $x(\sigma') = x'$ e $x(\sigma'') = x''$ são fixados.

Vemos que a ação $S[x]$ é invariante por reparametrizações espaciais, logo se tentarmos escrever o Hamiltoniano a partir de (2.35) concluiremos que ele é identicamente nulo. A definição do momento canonicamente conjugado às coordenadas, $p^i = \dot{x}^i \sqrt{\frac{2(E-V(x))}{\dot{x}^2}}$, estabelece um vínculo C que pode ser usado como uma equação que define a energia. Da seguinte maneira:

$$C \equiv \frac{1}{2} m^{ij} p_i p_j + V(x) - E = 0\,. \tag{2.36}$$

Com isso podemos notar a similaridade que existe entre o exposto acima e aquilo que usamos nesta tese para definir o vetor energia-momento gravitacional.

Os vínculos $\Gamma'^{\,ik}$ e Γ^k são obtidos a partir da relação (2.31) quando escrevemos a densidade de Hamiltoniana e podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} \Gamma'^{\,ik} &= \Pi^{[ik]} + ke\{g^{im} g^{kj} T^0{}_{mj} + (g^{km} g^{0i} - g^{im} g^{0k}) T^j{}_{mj}\} \\ \Gamma^k &= \Pi^{0k} + 2ke(g^{kj} g^{0i} T^0{}_{ij} - g^{0k} g^{0i} T^j{}_{ij} + g^{00} g^{ik} T^j{}_{ij})\,. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Essas quantidades são vínculos no sentido estrito do termo, pois representam uma relação algébrica entre as variáveis de campo, ou seja, as tétradas, e os momentos canonicamente conjugados a elas. Isso é explicitado quando executamos a transformação de Legendre sobre a densidade de Lagrangeana (2.15).

O colchete de Poisson entre duas quantidades de campo F e G é dado por:

$$\{F, G\} = \int d^3x \Big(\frac{\delta F}{\delta e_{ai}(x)} \frac{\delta G}{\delta \Pi^{ai}(x)} - \frac{\delta F}{\delta \Pi^{ai}(x)} \frac{\delta G}{\delta e_{ai}(x)} \Big)\,. \tag{2.38}$$

Calculando o colchete de Poisson entre os vínculos $\Gamma'^{\,ij}(x)$ e $\Gamma'^{\,kl}(y)$, vemos que eles satisfazem a álgebra de momento angular [15], explicitamente temos:

$$\{\Gamma'^{\,ij}(x), \Gamma'^{\,kl}(y)\} = \frac{1}{2}\Big(g^{il} \Gamma'^{\,jk} + g^{jk} \Gamma'^{\,il} - g^{ik} \Gamma'^{\,jl} - g^{jl} \Gamma'^{\,ik} \Big) \delta(x-y)\,, \tag{2.39}$$

isso justifica a interpretação de uma forma simplificada do vínculo como definição do momento angular, tal qual é feito para o vetor energia-momento.

Em vista disso é importante reescrevermos a densidade de Hamiltoniana H de uma forma mais simples [23]. Para isso simplificamos os vínculos $\Gamma'^{\,ik}$ e Γ^k, reescrevendo-os como um único vínculo Γ^{ab}. Antes, porém, devemos notar a seguinte relação:

$$\Sigma^{\mu 0\nu} - \Sigma^{\nu 0\mu} = \frac{1}{2}\left[g^{\mu m}g^{\nu j}T^{0}{}_{mj} + (g^{\nu m}g^{0\mu} - g^{\mu m}g^{0\nu})T^{j}{}_{mj}\right], \tag{2.40}$$

a partir disso tomamos os componentes $\mu = 0$ e $\nu = k$, obtendo:

$$\Sigma^{00k} = \frac{1}{2}\left[g^{0m}g^{kj}T^{0}{}_{mj} + (g^{km}g^{00} - g^{0m}g^{0k})T^{j}{}_{mj}\right]. \tag{2.41}$$

Realizando o mesmo procedimento para $\mu = i$ e $\nu = k$, temos:

$$\Sigma^{i0k} - \Sigma^{k0i} = \frac{1}{2}\left[g^{im}g^{kj}T^{0}{}_{mj} + (g^{km}g^{0i} - g^{im}g^{0k})T^{j}{}_{mj}\right]. \tag{2.42}$$

Se definirmos uma quantidade $M^{\mu\nu}$ por:

$$M^{ik} = 2\Pi^{[ik]} = e_a{}^{i}\Pi^{ak} - e_a{}^{k}\Pi^{ai}, \tag{2.43}$$

$$M^{0k} = \Pi^{0k} = e_a{}^{0}\Pi^{ak}, \tag{2.44}$$

então não é difícil verificar que o vínculo simplificado Γ^{ab} é:

$$\Gamma^{ab} = M^{ab} + 4ke(\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a}), \tag{2.45}$$

com $M^{ab} = e^{a}{}_{\mu}e^{b}{}_{\nu}M^{\mu\nu} = -M^{ba}$. O novo vínculo $\Gamma^{ab} = -\Gamma^{ba}$ encerra ambos os antigos vínculos $\Gamma'^{\,ik}$ e Γ^{k} através das relações $\Gamma^{ik} = 2\Gamma'^{\,ik} = e_a{}^{i}e_b{}^{k}\Gamma^{ab}$, $\Gamma^{k} \equiv \Gamma^{0k} = e_a{}^{0}e_b{}^{k}\Gamma^{ab}$.

Com isso a densidade de Hamiltoniana pode ser escrita de uma forma mais simples quando comparada a (2.25):

$$H = e_{a0}C^{a} + \frac{1}{2}\lambda_{ab}\Gamma^{ab}, \tag{2.46}$$

onde $\lambda_{ab} = -\lambda_{ba}$ são multiplicadores de Lagrange. O significado desses novos multiplicadores de Lagrange se torna claro quando os comparamos com os antigos, α_{ik}

e β_k, na expressão (2.25). Para isso o segundo termo em (2.46) deve ser separado da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\lambda_{ab}\Gamma^{ab} &= \frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\lambda_{00}\Gamma^{00} + \lambda_{0i}\Gamma^{0i} + \lambda_{i0}\Gamma^{i0} + \lambda_{ij}\Gamma^{ij}) \\
&= \lambda_{0i}\Gamma^{0i} + \frac{1}{2}\lambda_{ij}\Gamma^{ij} \\
&= \lambda_{0i}\Gamma^{i} + \lambda_{ij}\Gamma'^{\,ij}\,, \qquad (2.47)
\end{aligned}
$$

logo identificamos os multiplicadores de Lagrange como $\lambda_{ik} = \alpha_{ik}$ e $\lambda_{0k} = -\lambda_{k0} = \beta_k$. É bom lembrar que na expressão acima utilizamos as relações $\lambda_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu \lambda_{ab}$ e $\Gamma^{\mu\nu} = e_a{}^\mu e_b{}^\nu \Gamma^{ab}$.

Como vimos, quando escrevemos a densidade de Hamiltoniana a partir de uma integral de ação de Jacobi, surge um vínculo, expresso por (2.36), que é usado como definição de energia. Comparando com o nosso procedimento, vemos que o processo de interpretação do vínculo C^a como definição do vetor energia-momento gravitacional é o mesmo. Assim, tendo por base as mesmas idéias, a estensão mais natural desses conceitos é interpretar o vínculo Γ^{ab} como definição de alguma quantidade física. Ao analisarmos as dimensões desse vínculo e tendo por base a relação (2.39), vemos que essa quantidade física tem que estar relacionada com o momento angular. Isso será exemplificado no capítulo 4 quando, em nossa análise, reintroduzirmos as constantes c e G.

Portanto de maneira análoga à definição de P^a [21], a forma integral da equação de vínculo $\Gamma^{ab} = 0$ motiva a definição da densidade do 4-momento angular do espaço-tempo:

$$M^{ab} = -4ke(\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a})\,. \qquad (2.48)$$

e que, portanto, define

$$L^{ab} = -\int_V d^3x\; e^a{}_\mu e^b{}_\nu M^{\mu\nu}\,, \qquad (2.49)$$

como o quadri-momento angular do campo gravitacional [23]. Essa expressão é invariante sob transformações de coordenadas do espaço tridimensional.

Notamos que o lado direito da equação (2.48), bem como o lado direito da equação (2.31) existe o índice temporal 0, além de notarmos a presença do determinante do campo de tétradas e. Esse determinante sempre pode ser escrito como o produto da função lapso com o determinante das tétradas restritas ao espaço tridimensional. Por causa dessas características o lado direito das equações (2.31) e (2.48) são invariantes sob reparametrizações temporais.

É importante enfatizar que P^a e L^{ab} transformam covariantemente sob transformações globais SO(3,1). Essas quantidades são definidas no espaço de fase da teoria, logo, para calcularmos essas expressões, devemos usar uma configuração particular de campo, entendendo que os lados direitos de (2.31) e (2.48) devem ser considerados no espaço de configurações da teoria.

No capítulo 5 discutiremos as diferentes abordagens para se definir momento angular do campo gravitacional, dentre elas, aquela que é tomada como padrão na literatura e vamos comparar, em termos de aplicações, com a nossa proposta elaborada neste capítulo.

Capítulo 3

O Grupo de Poincaré

3.1 Introdução

A teoria de grupos originalmente se desenvolveu como um braço da Matemática pura, se mostrando uma extraordinária ferramenta para formalizar conceitos intuitivos e explorar simetrias no contexto da Física. Ou seja, a teoria de grupos é fundamental para identificar e formalizar simetrias.

O instrumental produzido pela teoria de grupos encontrou um grande acolhimento em Física, produzindo aplicações e resultados significativos em diversas áreas, tais como Estado Sólido, Física Atômica e Molecular e Cristalografia.

O estudo do grupo de Poincaré é de vital importância para a compreensão da Física existente por trás de inúmeros processos da natureza. É bem conhecida quão grande influência esse conhecimento exerce em Física de Partículas e Campos. Logo quando identificamos que uma simetria de um sistema físico pode ser descrita através do grupo de Poincaré pensamos, preferencialmente, nos invariantes que a teoria gera. A invariância apresentada é um conceito-chave no entendimento de novos fenômenos e desenvolvimento apropriado de teorias físicas

Compreender a gravitação do ponto de vista de uma teoria de calibre do grupo de Poincaré é um ponto de partida para tentarmos, de alguma forma, ligá-la às demais forças da natureza, de modo análogo à teoria de calibre de Yang-Mills.

Neste capítulo desenvolveremos a teoria de representações de grupos [26], abordando grupos de Lie e especificamente o grupo de Poincaré. Mostraremos como construir os invariantes de Casimir do grupo, comparando-os com aqueles construídos para o campo gravitacional.

3.2 Teoria de Grupos

Um grupo G é um conjunto de elementos $a, b, c...$ para os quais uma dada lei de composição ou "multiplicação" define um "produto" entre dois elementos do grupo, satisfazendo os seguintes postulados:

- Se a e b são dois elementos do grupo, então ab também é;
- Multiplicação é associativa, ou seja, $a(bc) = (ab)c$;
- O grupo contém um elemento e chamado elemento identidade, tal que para todo elemento do grupo temos $ea = ae = a$.
- Se a é um elemento do conjunto, existe um elemento b tal que $ab = ba = e$. O elemento b é chamado de inverso e denotado por $b = a^{-1}$.

Um conjunto de operadores $(A, B, C..)$ em um espaço vetorial L, forma um grupo se forem respeitados os postulados acima. O produto de dois operadores é construído segundo a forma pela qual eles agem nos vetores de L, ou seja:

$$C\mathbf{x} = A(B\mathbf{x})\,, \tag{3.1}$$

para todo $\mathbf{x}$ pertencete a L. O operador identidade transforma os vetores neles mesmos. Todos os operadores do grupo possuem inversos.

Se fizermos um mapeamento do espaço L em outro L', usando um operador T, obtemos um grupo isomórfico (porque é inversível) de operadores em L' que se relacionam com os operadores do espaço L pela seguinte transformação:

$$A' = TAT^{-1}\,, \tag{3.2}$$

onde A é um operador de L e A' representa um de L'.

Antes de continuar nossa análise temos que definir o que é homomorfismo, necessário para escrevermos, de maneira inequívoca, o conceito de representações de grupos.

Um homomorfismo de um grupo G em um grupo G' é uma correspondência entre os elementos de G e G' que preserva a lei de composição dos grupos. Segundo essa definição um elemento de G' pode ser imagem de vários elementos de G, uma vez que a correspondência não é uma associação "um-a-um" entre os elementos [27].

Se propusermos uma correspondência homomórfica entre elementos de um grupo G e elementos de um grupo de operadores D(G) em um espaço vetorial L, obedecendo as relações:

$$\begin{aligned} D(RS) &= D(R)D(S)\,, \\ D(R^{-1}) &= [D(R)]^{-1}\,, \\ D(E) &= 1\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

sendo R, S e E elementos do grupo G, com E representando o operador neutro, então dizemos que $D(G)$ é uma representação do grupo G no espaço de representação L.

Uma representação linear é aquela construída em termos de operadores lineares. Se escolhemos uma base num espaço n-dimensional L, os operadores lineares da representação podem ser descritos através de matrizes, assim obtemos um mapeamento homomórfico $D(G)$ de um grupo G em um grupo de matrizes $n \times n$. Ou seja, uma representação matricial do grupo G. Dito de outra forma, a condição de linearidade significa que podemos associar uma matriz a cada elemento $D(R)$ da representação em uma dada base do espaço vetorial L.

Assim, um grupo pode ter uma infinidade de representações em espaços de dimensões distintas. O grau da representação é o número de dimensões do espaço vetorial L. Se fizermos uma mudança de base em algum espaço vetorial, os elementos da representação transformam-se sob a ação de um operador C, da maneira seguinte:

$$D'(R) = CD(R)C^{-1} \,. \tag{3.4}$$

Os elementos $D'(R)$ também formam uma representação do grupo que é equivalente a $D(R)$. No caso de representações matriciais, a equivalência entre duas representações é verificada quando o traço das matrizes $D'(R)$ e $D(R)$ são iguais.

Quando o mapeamento homomórfico $D(R)$ se reduz para um isomórfico, ou seja, quando há uma correspondência de um para um entre os elementos do grupo R e $D(R)$, dizemos que a representação é "fiel".

Ainda temos que tecer alguns comentários sobre grupos contínuos e especialmente sobre grupos de Lie, uma vez que o grupo de Poincaré é um grupo de Lie.

3.2.1 Grupos Contínuos

Um grupo é dito ser contínuo se alguma relação de proximidade é imposta sobre os elementos do grupo-variedade. O termo "variedade" advém do fato de que grupos contínuos finitos têm uma estreita relação com a definição de variedades, uma vez que o conceito de proximidade é dado por um conjunto de funções em um espaço e expresso em termos da distância nesse espaço de funções. Assim, imaginamos que variações infinitesimais de um dos fatores produza variações infinitesimais no produto de dois elementos do grupo.

Dado um grupo contínuo G, os elementos do grupo são associados a pontos em uma variedade e são descritos por funções contínuas de seus parâmetros. A lei de composição pode ser descrita simbolicamente por:

$$c = f(a, b) \,, \tag{3.5}$$

onde a, b e c são parâmetros do grupo. Quando f é uma função analítica, no sentido de que pode ser expandida em séries de potências convergentes no espaço de N parâmetros, o grupo G é chamado de grupo de Lie finito de N parâmetros.

Se os elementos do grupo de Lie são operadores em uma variedade V, então temos um grupo de transformação. Para o caso de grupos de transformação de coordenadas no espaço-tempo plano, um exemplo é o grupo de Poincaré. Quando a transformação induzida em V por G é linear, naturalmente, os elementos de G possuem uma representação matricial em alguma base escolhida em V. Nesta tese vamos lidar essencialmente com tais grupos.

Consideremos um grupo contínuo de transformação de coordenadas em uma variedade V com um parâmetro. A lei de composição pode ser escrita como:

$$x' = f(x; a)\,, \tag{3.6}$$

onde f é uma função analítica do parâmetro a. Nesse caso temos uma variedade definida pelas coordenadas x, elas são modificadas por f, que é função do parâmetro a, gerando um novo conjunto de coordenadas x' na variedade. Ou seja, o grupo é caracterizado pelos parâmetros, aqui representado por a.

Logo esses parâmetros devem satisfazer todos os requisitos que definem um grupo, ou seja, deve existir um elemento inverso $\overline{a}$ tal que:

$$x'' = f(x'; \overline{a}) = x\,, \tag{3.7}$$

isso quer dizer que, imposta alguma condição de inversibilidade sobre a função f, x pode ser escrito em termos de x'. Além disso deve também existir um elemento a^0 que corresponde ao elemento identidade, ou seja:

$$x' = f(x; a^0) = x\,. \tag{3.8}$$

Podemos especificar essa relação tomando a^0 igual a zero. Finalmente, se executarmos duas transformações sucessivas no grupo de transformações, então o novo elemento da variedade tem que obedecer a mesma relação que define o grupo. Isso pode ser visualizado considerando as seguintes relações:

$$\begin{aligned} x' &= f(x;a) \\ x'' &= f(x';b)\,, \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde a e b definem as duas transformações sucessivas. Se assumirmos que existe um parâmetro c tal que:

$$x'' = f(x;c)\,, \tag{3.10}$$

então c tem que ser função dos parâmetros a e b, ou seja:

$$c = \phi(a;b)\,, \tag{3.11}$$

onde a função ϕ define a lei de composição do grupo. Como exemplo temos o grupo de transformação abeliano de um parâmetro definido por:

$$x' = ax\,, \tag{3.12}$$

com $a \neq 0$. Neste exemplo o elemento identidade é $a^0 = 1$, o elemento inverso é $\overline{a} = \frac{1}{a}$ e o produto entre os elementos é dado por $c = ab$, sendo c uma função analítica de a e b.

A relação (3.6) mostra que as coordenadas iniciais x da variedade são levadas para uma posição final x', por meio da variação de um parâmetro a em uma função f. Se a posição final das coordenadas nessa variedade forem modificadas de dx', então essa nova posição final, $x'' = x' + dx'$, pode se dar por meio de uma variação infinitesimal do parâmetro a. Essencialmente há duas formas de conseguirmos isso. A primeira é modificarmos a coordenada x para x' por meio de a e então levarmos x' para $x' + dx'$ por meio de um parâmetro infinitesimal δa. A segunda forma consiste em levarmos diretamente os pontos iniciais x em $x' + dx'$ por meio de um parâmetro $a + da$. Estas duas maneiras podem ser ilustradas pelas seguintes relações:

$$x' + dx' = f(x; a + da)\,, \tag{3.13}$$

$$x' + dx' = f(x'; \delta a)\,. \tag{3.14}$$

Usando a expressão (3.11) temos:

$$a + da = \phi(a; \delta a)\,, \tag{3.15}$$

isso nos dá a relação entre as duas equações (3.13) e (3.14). Devido a hipótese de continuidade de f, podemos expandir a equação (3.14) em:

$$dx' = \Big(\frac{\partial f(x'; a)}{\partial a}\Big|_{a=0}\Big)\delta a\,. \tag{3.16}$$

Como ϕ também é uma função contínua de seus parâmetros, expandindo (3.15), temos:

$$da = \Big(\frac{\partial \phi(a; b)}{\partial b}\Big|_{b=0}\Big)\delta a\,, \tag{3.17}$$

o que representa uma relação entre da e δa. Assim, vemos que qualquer parâmetro do grupo pode ser obtido do elemento identidade por meio de sucessivas transformações infinitesimais, bem como qualquer ponto na variedade pode ser obtido de um ponto inicial.

Agora vamos generalizar os conceitos desenvolvidos até aqui sobre transformações infinitesimais, expandindo as nossas definições para um grupo de transformações, em uma variedade descrita por n coordenadas, com r parâmetros. A generalização é imediata, ou seja:

$$x'^i = f^i(x^1, ..., x^n; a^1, ..., a^r)\,, \quad i = 1...n$$

$$
\begin{aligned}
x'^i + dx'^i &= f^i(x^1,...,x^n;a^1+\delta a^1,...,a^r+\delta a^r)\,; && (3.18)\\
dx'^i &= \Big[\frac{\partial f^i(x'^1,...,x'^n;a^1,...,a^r)}{\partial a^k}\Big]\Big|_{a=0}\delta a^k\,, \quad k=1...r; && (3.19)\\
a^l + da^l &= \phi^l(a^1,...a^r;a^1+\delta a^1,...,a^r+\delta a^r)\,, \\
da^l &= \Big[\frac{\partial \phi^l(a^1,...a^r;b^1,...,b^r)}{\partial b^k}\Big]\Big|_{b=0}\delta a^k\,; && (3.20)
\end{aligned}
$$

sendo que utilizamos a convenção de Einstein, isto é, índices repetidos significam um somatório. Essa convenção será usada nas demais expressões.

Imediatamente somos induzidos a analisar o comportamento de uma função das coordenadas $G(x^i)$ quando as coordenadas são levadas de um valor inicial x^i para um final $x'^i = x^i + dx^i$, através da variação infinitesimal, δa^l, dos parâmetros do grupo. A variação de $G(x^i)$ é:

$$
\begin{aligned}
dG &= \frac{\partial G}{\partial x^i}dx^i \\
&= \Big[\frac{\partial f^i(x^1,...,x^n;a^1,...,a^r)}{\partial a^k}\Big]\Big|_{a=0}\delta a^k\frac{\partial G}{\partial x^i}\,, && (3.21)
\end{aligned}
$$

com $i = 1...n$ e $k = 1...r$. Para obtermos esse resultado substituimos a expressão (3.19) na equação acima. Isso nos permite definir um conjunto de operadores diferenciais lineares X_k dados por:

$$
X_k = \Big[\frac{\partial f^i(x^1,...,x^n;a^1,...,a^r)}{\partial a^k}\Big]\Big|_{a=0}\frac{\partial}{\partial x^i}\,, \qquad (3.22)
$$

com $i = 1...n$. O operador X_k é chamado de gerador infinitesimal do grupo. Claro que a variação de G produz uma nova função que pode ser escrita com o auxílio do operador X_b, da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
G' &= G + dG \\
&= (1+\delta a^b X_b)G\,, && (3.23)
\end{aligned}
$$

com $b = 1...r$. No caso particular em que $G(x^i)$ é a própria coordenada x^i, temos:

$$\begin{aligned} x'^i &= (1 + \delta a^b X_b) x^i \\ &= x^i + \delta a^b X_b x^i \,, \end{aligned} \tag{3.24}$$

com $b = 1...r$, ou seja, recuperamos a expressão (3.19). Assim, concluimos que os operadores X_b geram as transformações infinitesimais de qualquer função G definida em uma variedade, inclusive as próprias coordenadas da variedade. Isso justifica o nome dos operadores X_b como geradores do grupo. Claro que o grupo é definido por meio de seus parâmetros e eles se relacionam por meio de transformações infinitesimais do parâmetro tomado como identidade.

O Teorema de Lie nos diz que o comutador entre dois geradores do grupo pode ser escrito como combinação linear dos próprios geradores infinitesimais X_a. Ou seja,

$$[X_a, X_b] = C^d_{ab} X_d \,, \tag{3.25}$$

onde C^d_{ab} são as chamadas constates de estrutura. Provar que C^d_{ab} são realmente constantes é bem simples, porém um pouco longo. Não mostraremos a prova dessa afirmação pois isso seria estender muito o assunto, fugindo aos objetivos estabelecidos.

A relação acima define uma álgebra denominada álgebra de Lie. Os geradores do grupo formam um espaço vetorial e a representação construída nesse espaço é chamada de Representação Adjunta. Uma Representação Adjunta matricial é construída através das constantes de estrutura.

Além disso, os geradores infinitesimais do grupo satisfazem a identidade de Jacobi

$$[[X_a, X_b], X_c] + [[X_c, X_a], X_b] + [[X_b, X_c], X_a] = 0 \,, \tag{3.26}$$

resultando em

$$C^d_{ab} C^e_{dc} + C^d_{ca} C^e_{db} + C^d_{bc} C^e_{da} = 0 \,. \tag{3.27}$$

Resolvendo essa identidade, podemos construir uma representação linear do grupo de Lie. Entretanto essa não é uma tarefa fácil, pois cada índice varia de um ao número de geradores do grupo, além disso a expressão (3.27) é quadrática nas constantes de estrutura, o que dificulta a determinação destas variáveis. É bom enfatizar que as propriedades do grupo podem ser reproduzidas pela álgebra de Lie. Ou seja, é possível mostrar que existe uma relação entre o grupo de Lie e sua respectiva álgebra e que uma vez construída ela pode ser usada para escrevermos uma representação do grupo.

Tendo em vista o que foi exposto, estamos aptos a prosseguir na construção de uma representação do grupo de Poincaré.

3.3 O Grupo de Poincaré

O grupo de Poincaré é outro nome para o grupo de Lorentz não-homogêneo, o qual engloba translações, "boosts", rotações e inversões que deixam $c^2\tau^2 = -x_0^2 + \mathbf{x}^2$ invariante [28]. A transformação mais geral do grupo de Poincaré em um espaço-tempo plano é:

$$x'_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu x_\nu + a_\mu \,, \tag{3.28}$$

onde a_μ é um quadrivetor constante e portanto é independente de x. Como as translações não podem ser representadas por meio de uma matriz 4×4 agindo em x, não podemos obter uma representação do grupo em termos dessas matrizes.

Consideremos primeiramente uma transformação de Lorentz infinitesimal no espaço plano, da forma:

$$\Lambda_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu} \,, \tag{3.29}$$

onde

$$\Lambda_{\gamma\mu}\Lambda^{\gamma}{}_{\nu} = \eta_{\mu\nu}\,. \tag{3.30}$$

Substituindo (3.29) em (3.30) vemos que $\varepsilon_{\mu\nu}$ deve ser obrigatoriamente antisimétrico. Aplicando (3.29) em x_μ obtemos $x'_\mu = x_\mu - \varepsilon_\mu{}^\nu x_\nu$. Alternativamente podemos obter o mesmo resultado através da aplicação do operador $\exp(-\frac{1}{2}i\varepsilon_{\mu\nu}L^{\mu\nu})$ sobre x_μ, onde $L_{\mu\nu}$ é o momento angular generalizado, sendo definido por:

$$L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\,. \tag{3.31}$$

Uma vez definido $L_{\mu\nu}$ temos que calcular as relações de comutação entre esses operadores diferenciais. Fazendo isso e depois de algum esforço algébrico, chegamos a:

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} - \eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma})\,. \tag{3.32}$$

Essa relação de comutação adquire as feições tradicionais quando separamos os geradores em momentos angulares tridimensionais e “boosts"que são os L_{0i}.

Vamos agora considerar uma translação infinitesimal da seguinte maneira: $x'_\mu = x_\mu - \varepsilon_\mu$. De maneira análoga vamos assumir que essa transformação pode ser obtida através da aplicação do operador $\exp(i\varepsilon_\mu P^\mu)$ sobre x_μ, onde P_μ é o operador quadri-momento $P_\mu = i\partial_\mu$. Esses operadores claramente comutam entre si:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0\,. \tag{3.33}$$

Resta-nos calcular as relações de comutação entre os momentos angulares generalizados e os quadri-momentos. Novamente, depois de cálculos simples, obtemos:

$$[P_\mu, L_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho)\,. \tag{3.34}$$

As relações (3.32), (3.33) e (3.34) formam a álgebra do grupo de Poincaré porque é construída em termos de operadores que são capazes de gerar as transformações que definem o referido grupo. Nesse sentido, pode-se dizer que essas relações são uma representação do grupo de Poincaré.

Voltando agora ao material discutido no capítulo anterior, calculamos o colchete de Poisson entre as quantidades definidas por (2.30) e (2.49), sendo que para isso temos que calcular suas derivadas funcionais:

$$\begin{aligned}
\frac{-\delta L^{ab}}{\delta e_{ck}(z)} &= \int d^3x \frac{\delta}{\delta e_{ck}(z)} \Big[e^a{}_\mu e^b{}_\nu M^{\mu\nu} \Big] \\
&= \int d^3x \frac{\delta}{\delta e_{ck}(z)} \Big[e^a{}_0 e^b{}_j\, M^{0j} + e^a{}_j e^b{}_0\, M^{j0} + e^a{}_i e^b{}_j\, M^{ij} \Big] \\
&= (\eta^{bc} e^a{}_0(z) - \eta^{ac} e^b{}_0(z)) M^{0k}(z) \\
&\quad + (\eta^{bc} e^a{}_j(z) - \eta^{ac} e^b{}_j(z)) \Pi^{kj}(z) \\
&\quad + (\eta^{ac} e^b{}_j(z) - \eta^{bc} e^a{}_j(z)) M^{kj}(z) \\
&= -\eta^{ac} \Pi^{bk}(z) + \eta^{bc} \Pi^{ak}(z)\,. \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

Lembrando que $M^{0j} = e_a{}^0 \Pi^{aj}$ e $M^{ij} = e_a{}^i \Pi^{aj} - e_a{}^j \Pi^{ai}$ podemos escrever

$$\frac{-\delta L^{ab}}{\delta \Pi^{ck}(z)} = \delta^a_c e^b{}_k(z) - \delta^b_c e^a{}_k(z)\,. \qquad (3.36)$$

Analisando a expressão de P^a vemos que o mesmo depende apenas de Π^{ai}; logo escrevemos imediatamente os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta P^a}{\delta e_{ck}(z)} &= 0\,, \\
\frac{\delta P^a}{\delta \Pi^{ck}(z)} &= -\int d^3x \delta^a_c \frac{\partial}{\partial x^k} \delta^3(x-z)\,. \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Com isso chegamos a uma forma similar às relações (3.32), (3.33) e (3.34) [23]:

$$\begin{aligned}
\{P^a, P^b\} &= 0\,, \\
\{P^a, L^{bc}\} &= \eta^{ab} P^c - \eta^{ac} P^b\,, \\
\{L^{ab}, L^{cd}\} &= \eta^{ac} L^{bd} + \eta^{bd} L^{ac} - \eta^{ad} L^{bc} - \eta^{bc} L^{ad}\,. \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

Aqui interpretamos a relação dada pelo colchete de Poisson como sendo o "produto" da álgebra, em vez da relação de comutação. O fator imaginário que aparece nas relações (3.32), (3.33) e (3.34) refere-se à unitariedade do grupo. Para as relações (3.38), exigimos apenas a ortogonalidade do grupo.

Assim, podemos afirmar que P^a e L^{ab}, definidos para o campo gravitacional no TEGR, formam uma representação do grupo de Poincaré, no sentido discutido anteriormente. E, além disso, notamos quão consistentes são essas definições quando chamamos P^a e L^{ab} de momento-energia e momento angular gravitacionais respectivamente.

3.4 Operadores de Casimir para o Campo Gravitacional

Partículas em geral são caracterizadas por duas propriedades básicas, o spin e a massa. Claro que existem outras propriedades tais como cor e sabor, por exemplo, mas que não serão tratadas nesse trabalho. A massa é um invariante associado ao operador momento, enquanto o spin é associado a uma rotação definida no espaço vetorial abstrato sobre o qual o grupo atua e que guarda relação com o mundo real, uma vez que o spin é observável. Em termos dos operadores da álgebra de Poincaré, massa e spin são dois auto-valores de dois operadores quadráticos de Casimir.

A vantagem dos operadores de Casimir é que eles podem ser usados para caracterizar representações irredutíveis do grupo em questão. A ordem de uma representação irredutível é igual ao número de operadores de Casimir. Portanto, para o grupo de Poincaré, temos apenas dois operadores, um ligado à massa e o outro ligado ao momento-angular (ou spin).

Em termos dos elementos de base da álgebra X_μ o operador de Casimir é definido como:

$$C = g^{\rho\sigma} X_\rho X_\sigma \,, \tag{3.39}$$

onde $g^{\mu\nu}$ é a métrica que define o espaço da álgebra.

Definido dessa maneira o operador de Casimir é um invariante da teoria. Um invariante é um escalar sob a ação da lei de composição do grupo. Existem várias maneiras de se construir invariantes, no entanto vamos nos concentrar na maneira especificada por (3.39). Como as propriedades do grupo podem sempre ser recuperadas por meio da respectiva álgebra de Lie, vamos tomar a lei de composição como sendo o "produto" da álgebra.

Calculando o comutador entre C e os geradores do grupo, temos:

$$\begin{aligned} [C, X_\lambda] &= g^{\rho\sigma}[X_\rho X_\sigma, X_\lambda] \\ &= g^{\rho\sigma} X_\rho [X_\sigma, X_\lambda] + g^{\rho\sigma}[X_\rho, X_\lambda] X_\sigma \\ &= g^{\rho\sigma} C^\mu_{\sigma\lambda} X_\rho X_\mu + g^{\rho\sigma} C^\mu_{\rho\lambda} X_\mu X_\sigma \\ &= g^{\rho\sigma} C^\mu_{\sigma\lambda} (X_\rho X_\mu + X_\mu X_\rho)\,. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Quando levamos em consideração o fato que $C_{\mu\nu\sigma}$ é totalmente anti-simétrico, imediatamente vemos que:

$$[C, X_\lambda] = 0\,. \tag{3.41}$$

Assim, C representa uma quantidade invariante.

Para a álgebra de Poincaré o primeiro desses operadores é $P^2 = P_\mu P^\mu$. Ele é invariante sob a ação do grupo de Lorentz e sob translações. Isso significa que:

$$\begin{aligned} [P^2, P_\mu] &= 0\,, \\ [P^2, L_{\mu\nu}] &= 0\,, \end{aligned} \tag{3.42}$$

o que pode ser verificado diretamente com a ajuda da identidade de Jacobi.

O segundo operador de Casimir é $w^2 = w_\mu w^\mu$, onde w_μ representa o vetor de Pauli-Lubanski, definido por

$$w_\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} L^{\nu\rho} P^\sigma, \tag{3.43}$$

onde $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ é a densidade de Levi-Civita. Verificamos facilmente que w^2 comuta com os demais geradores do grupo,

$$
\begin{aligned}
[w^2, P_\mu] &= 0\,, \\
[w^2, L_{\mu\nu}] &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

Agindo sobre o auto-estado de P_μ, num sistema de referência em repouso, quando $P_\mu = (m, \mathbf{0})$, o operador w_μ se reduz a $w_i = mJ_i$ e $w^2 = -m^2\mathbf{J}^2$, onde J é o momento angular espacial. Assim podemos definir um conjunto completo de auto-vetores e auto-valores para w^2 e P^2, tal que:

$$
\begin{aligned}
P^2\psi_{m,s} &= m^2\psi_{m,s}\,, \\
w^2\psi_{m,s} &= -m^2 s(s+1)\psi_{m,s}\,,
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

onde m é a massa e ψ representa o espaço vetorial sobre o qual o grupo de Poincaré age. Quando $m = 0$ a partícula passa a ser caracterizada pela componente do spin ao longo da direção do momento, $\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}$. Esse operador é chamado de helicidade e seus auto-valores são dados por λ. Nesse caso podemos caracterizar também a helicidade por meio da relação:

$$
w_\mu\psi = \lambda P_\mu \psi\,. \tag{3.46}
$$

Preferiremos lidar com esta forma de caracterizar a helicidade quando tratarmos as ondas gravitacionais.

Tendo em vista as definições anteriores podemos construir o vetor de Pauli-Lubanski gravitacional W_a:

$$
W_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}P^b L^{cd}\,, \tag{3.47}
$$

onde ε_{abcd} é novamente a densidade de Levi-Civita. Verificamos facilmente que W_a comuta com P^a. Portanto definimos as quantidades de Casimir do campo gravitacional como:

$$\begin{aligned} P^2 &= \eta_{ab} P^a P^b\,, \\ W^2 &= \eta^{ab} W_a W_b. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Vemos claramente que essas quantidades obedecem as mesmas relações de comutação (3.42) e (3.44) construídas anteriormente, mas calculadas considerando o colchete de Poisson. Portanto podemos dizer que essas quantidades são invariantes da configuração de tétradas do campo gravitacional [23].

Essas quantidades podem ter um importante papel na caracterização do campo gravitacional. Elas podem ser usadas para determinar representações irredutíveis do grupo, uma vez que elas são operadores de Casimir. Devemos analisar como W_a e P_a produzem informações a respeito da helicidade das ondas gravitacionais planas. Verificaremos também se o campo gravitacional admite ondas com helicidade $\lambda = 1$ [29]. Estas questões serão analisadas futuramente no capítulo 5.

Capítulo 4

Sistemas de Referência e o Momento Angular Gravitacional

4.1 Introdução

A idéia de um espaço e tempo absolutos adotada por Newton nos induz a pensar que observadores em repouso ou que se movem com velocidade constante em relação a esse tal espaço absoluto são privilegiados em relação a todos os outros observadores. Essa é a idéia de sistemas de referência inerciais e a causa desse dogmatismo é um problema de difícil interpretação em Física.

A Relatividade Especial veio mostrar que esse absolutismo era apenas aparente, ou seja, não há razão para se privilegiar um referencial em particular, dado o caráter relativístico exibido pela natureza.

O conceito de sistemas de referência foi e continua a ser muito importante em Física, especialmente para a Relatividade Geral, para a qual o princípio da equivalência assume um papel fundamental. Na Relatividade Restrita a equivalência entre todos os sistemas de referência inerciais é estabelecida em nível de princípio, e é realizada através da simetria global do grupo de Lorentz.

Se analisarmos o impacto que a teoria de calibre de Yang-Mills teve em Física de Partículas e Teoria Quântica de Campos, naturalmente tentaremos compreender a Relatividade Geral do ponto de vista de uma teoria com simetria local de Lorentz. Quando fixamos o observador através de uma escolha de um campo de tétradas quebramos a simetria local. Assim, para resolvermos as equações de campo é necessário que exista essa quebra da simetria local de Lorentz. Logo o TEGR exibe apenas uma invariância por transformações globais de Lorentz.

A simetria de um sistema físico é matematicamente levada em conta quando da construção da Lagrangeana que o descreve. Logo, a análise de simetrias leva ao entendimento do funcionamento da Natureza. Procurar compreender os sistemas de referência como consequência das simetrias de alguma transformação global ou local é um passo fundamental no entendimento de uma teoria.

Neste capítulo mostraremos a interpretação do campo de tétradas como sistemas de referência, além de abordar a construção de expressões regularizadas, aplicando a teoria a duas configurações de tétradas simples.

4.2 Campos de Tétradas como Sistemas de Referência e Expressões Regularizadas para o Momento Angular

As invariâncias exibidas pela Lagrangeana (2.15), mencionadas anteriormente, são responsáveis pela interpretação do campo de tétradas como sistemas de referência. Ou seja, a invariância da teoria por transformações globais SO(3,1) estabelece que dois campos de tétradas que (i) são soluções das equações de campo, (ii) produzem o mesmo tensor métrico e (iii) não se relacionam por nenhuma transformação global de Lorentz, descrevem dois sistemas de referência diferentes. Assim podemos adotar o significado físico desses objetos como sendo sistemas de referência adaptados a observadores ideais de massa nula no espaço-tempo.

Cada conjunto de tétradas define uma classe de sistemas de referência [30].

Se denotamos por $x^\mu(s)$ a linha mundo C de um observador no espaço-tempo, e por $u^\mu(s) = dx^\mu/ds$ sua velocidade ao longo de C, podemos fazer a identificação da velocidade do observador com a componente $a = (0)$ de $e_a{}^\mu$ [31]. A aceleração do observador é dado por $a^\mu = Du^\mu/ds = De_{(0)}{}^\mu/ds = u^\alpha \nabla_\alpha e_{(0)}{}^\mu$, onde a derivada covariante é escrita em termos dos símbolos de Christoffel.

Vemos, então, que $e_a{}^\mu$ determina a velocidade e a aceleração, ao longo de uma linha mundo, de um observador adaptado a um sistema de referência. Deste ponto de vista, concluímos que um conjunto de tétradas, para os quais $e_{(0)}{}^\mu$ descreve uma congruência de curvas do tipo tempo, é adaptado a uma classe de observadores. A título de comparação, devemos lembrar que se $e^a{}_\mu \rightarrow \delta^a_\mu$ no limite $r \rightarrow \infty$, então $e^a{}_\mu$ é adaptado a observadores estáticos no infinito espacial.

No sentido de estimarmos o momento-energia e o momento angular gravitacionais para um sistema físico, temos que calcular o lado direito de (2.31) e (2.48), com isso podemos saber se as expressões definidas anteriormente para P^a e L^{ab} são bem definidas. Isso só será possível se considerarmos um conjunto de tétradas, tais que, no limite do espaço-tempo plano, a condição $T_{a\mu\nu}(e) = 0$ seja satisfeita.

Entretanto, existem configurações de tétradas $E^a{}_\mu$, no espaço-tempo plano, para as quais temos $T_{a\mu\nu}(E) \neq 0$. Consequentemente obtemos valores para P^a e L^{ab} que não se anulam quando consideramos o referido limite, ou seja, podemos encontrar valores de energia e momento na ausência de campo gravitacional. Assim torna-se necessário o uso de expressões regularizadas para tais quantidades. A regularização do momento-energia gravitacional foi discutido em detalhes em [30]. O processo é conceitualmente o mesmo realizado em [18], consistindo o processo em basicamente subtrair a energia do espaço-tempo plano.

Se denotarmos $T^a{}_{\mu\nu}(E) = \partial_\mu E^a{}_\nu - \partial_\nu E^a{}_\mu$ e $\Pi^{aj}(E)$ como sendo a expressão de Π^{aj} construída usando-se as tétradas planas $E^a{}_\mu$, então podemos escrever a expressão regularizada para o tensor de energia-momento gravitacional como:

$$P^a = -\int_V d^3x\, \partial_k [\Pi^{ak}(e) - \Pi^{ak}(E)]\ . \tag{4.1}$$

Essa definição garante que o momento-energia do espaço-tempo plano será sempre nulo. O espaço-tempo de referência é determinado pelo conjunto de tétradas $E^a{}_\mu$, obtido de $e^a{}_\mu$ requerendo que os parâmetros físicos tais como massa, momento angular, etc, se anulem.

Podemos estabelecer a expressão regularizada para o momento angular de forma análoga a (4.1), como se segue:

$$L^{ab} = \int_V d^3x \, [M^{ab}(e) - M^{ab}(E)] \, . \tag{4.2}$$

As expressões (4.1) e (4.2) podem ser usadas para calcularmos o momento-energia e o momento angular gravitacionais para uma configuração arbitrária de tétradas.

4.3 O Momento Angular da Casca Esférica em Rotação

Apresentaremos em detalhes uma aplicação da definição (4.2) para o espaço-tempo de uma casca esférica em rotação [32]. Consideraremos, na análise das expressões, um movimento de rotação lento. É uma configuração matematicamente simples e não-singular de campo gravitacional que exibe efeitos rotacionais e é regular em todo espaço. No limite para momentos angulares pequenos a métrica para tal configuração corresponde à forma assintótica do tensor métrico de Kerr. A motivação principal para considerar essa métrica é a construção de uma fonte realística para uma região exterior do espaço-tempo de Kerr, e, portanto, para conectar a região exterior com um espaço-tempo livre de singularidades.

Para uma casca de raio r_0 e massa total $m = 2\alpha$, como visto por um observador no infinito, a métrica é dada por [32]:

$$ds^2 = -V^2 dt^2 + \psi^4 [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta (d\phi - \Omega dt)^2] \, , \tag{4.3}$$

onde

$$\begin{aligned} V &= \frac{r_0 - \alpha}{r_0 + \alpha}\,, \\ \psi &= \psi_0 = 1 + \frac{\alpha}{r_0}\,, \\ \Omega &= \Omega_0\,, \end{aligned} \tag{4.4}$$

para $r < r_0$, e

$$\begin{aligned} V &= \frac{r - \alpha}{r + \alpha}\,, \\ \psi &= 1 + \frac{\alpha}{r}\,, \\ \Omega &= \left(\frac{r_0\psi_0^2}{r\psi^2}\right)^3 \Omega_0\,, \end{aligned} \tag{4.5}$$

para $r > r_0$.

O tensor métrico dado por (4.3) é solução das equações de Einstein até primeira ordem em Ω. A quantidade Ω_0 é constante e representa a velocidade angular de arrasto de observadores localmente inerciais no interior da casca esférica. É necessário calcularmos os componentes contra-variantes do tensor métrico, o que nos leva a:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{V^2} & 0 & 0 & -\frac{\Omega}{V^2} \\ 0 & \frac{1}{\psi^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\psi^4} & 0 \\ -\frac{\Omega}{V^2} & 0 & 0 & \frac{V^2 - r^2\Omega^2\psi^4\sin^2\theta}{V^2 r^2\psi^4\sin^2\theta} \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Vamos considerar duas configurações de tétradas e discutir as suas interpretações físicas enquanto sistemas de referência.

4.3.1 Observador em Rotação

A primeira delas é dada por:

$$
e_{a\mu} = \begin{pmatrix} -V & 0 & 0 & 0 \\ \Omega r\psi^2 \sin\theta\, \sin\phi & \psi^2\, \sin\theta\, \cos\phi & r\psi^2\, \cos\theta\, \cos\phi & -r\psi^2\, \sin\theta\, \sin\phi \\ -\Omega r\psi^2 \sin\theta\, \cos\phi & \psi^2\, \sin\theta\, \sin\phi & r\psi^2\, \cos\theta\, \sin\phi & r\psi^2\, \sin\theta\, \cos\phi \\ 0 & \psi^2\, \cos\theta & -r\psi^2\, \sin\theta & 0 \end{pmatrix} . \tag{4.7}
$$

O determinante de $e^a{}_\mu$ pode ser imediatamente calculado, sendo o seu valor $e = Vr^2\psi^6\, \sin\theta$. O campo de tétradas acima gera o seguinte campo de quadri-velocidades:

$$
e_{(0)}{}^\mu(t, r, \theta, \phi) = \frac{1}{V}(1, 0, 0, \Omega)\,, \tag{4.8}
$$

sendo $1/V$ o fator de normalização. Assim concluímos que um observador na posição radial r se move ao longo de uma trajetória circular com velocidade angular $\Omega(r)$ em torno da fonte. Em comparação com o campo de tétradas definido em [1], devemos mencionar que o significado físico permanece o mesmo uma vez que as tétradas descrevem um observador em repouso em relação ao espaço-tempo de referência, mas o próprio espaço-tempo de referência está em rotação. Portanto, apesar de uma aparente discrepância, o significado de (4.7) permanece o mesmo.

Para encontrarmos as componentes do momento angular gravitacional faz-se necessário o cálculo das componentes de $T_{\lambda\mu\nu} = e^a{}_\lambda T_{a\mu\nu}$, sendo aquelas não nulas iguais a:

$$
\begin{aligned}
T_{001} &= V\partial_1 V - \frac{1}{2}\partial_1(\Omega r\psi^2)^2 \sin^2\theta\,, \\
T_{301} &= r\psi^2\partial_1(\Omega r\psi^2)\sin^2\theta\,, \\
T_{002} &= -(\Omega r\psi^2)^2 \sin\theta\, \cos\theta\,, \\
T_{302} &= \Omega r^2\psi^4 \sin\theta\, \cos\theta\,, \\
T_{103} &= -\Omega r\psi^4 \sin^2\theta\,, \\
T_{203} &= -\Omega r^2\psi^4 \sin\theta\, \cos\theta\,, \\
T_{212} &= r^2\psi^2(\partial_1\psi^2)\,, \\
T_{013} &= -\Omega r^2\psi^2(\partial_1\psi^2)\sin^2\theta\,,
\end{aligned}
$$

$$T_{313} \;=\; r^2\psi^2(\partial_1\psi^2)\sin\theta\,. \qquad (4.9)$$

Seguindo no mesmo esforço, depois de simples manipulações algébricas, obtemos as seguintes componentes diferentes de zero:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{001} &= \frac{1}{2}(T_{001} - g_{00}T_1)\,,\\
\Sigma_{301} &= \frac{1}{4}(T_{301} - T_{013} + T_{103}) - \frac{1}{2}g_{03}T_1\,,\\
\Sigma_{002} &= \frac{1}{2}T_{002}\,,\\
\Sigma_{103} &= \frac{1}{4}(T_{103} + T_{013} + T_{301})\,,\\
\Sigma_{212} &= \frac{1}{2}(T_{212} + g_{22}T_1)\,,\\
\Sigma_{013} &= \frac{1}{4}(T_{013} + T_{103} - T_{301}) + \frac{1}{2}g_{03}T_1\,,\\
\Sigma_{313} &= \frac{1}{2}(T_{313} + g_{33}T_1)\,,\\
\Sigma_{023} &= \frac{1}{2}T_{203}\,. \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Para calcularmos M^{ab} é necessário sabermos o comporatamento de $\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a}$. Em particular vamos calcular a componente $M^{(1)(2)}$, assim temos:

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(1)0(2)} - \Sigma^{(2)0(1)} &= e^{(1)}{}_{\mu}e^{(2)}{}_{\delta}g^{0\gamma}\{g^{\mu 0}g^{\delta\lambda}(\Sigma_{0\gamma\lambda} - \Sigma_{\lambda\gamma 0}) + g^{\mu i}g^{\delta 0}(\Sigma_{i\gamma 0} - \Sigma_{0\gamma i}) \;+\\
&+\; g^{\mu i}g^{\delta j}(\Sigma_{i\gamma j} - \Sigma_{j\gamma i})\}\,. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Considerando as relações $e^{(1)}{}_{\mu}g^{\mu 0} = e^{(2)}{}_{\mu}g^{\mu 0} = 0$, a expressão acima pode ser simplificada para:

$$\Sigma^{(1)0(2)} - \Sigma^{(2)0(1)} = e^{(1)}{}_{\mu}e^{(2)}{}_{\delta}g^{0\gamma}g^{\mu i}g^{\delta j}(\Sigma_{i\gamma j} - \Sigma_{j\gamma i})\}\,, \qquad (4.12)$$

abrindo o somatório, podemos escrever $M^{(1)(2)}$ nos seguintes termos:

$$\begin{aligned}
M^{(1)(2)} &= -4ke\,\{g^{11}g^{22}(e^{(1)}{}_{1}e^{(2)}{}_{2} - e^{(1)}{}_{2}e^{(2)}{}_{1})[g^{00}(\Sigma_{102} - \Sigma_{201}) + g^{03}(\Sigma_{132} - \Sigma_{231})] \;+\\
&+\; g^{11}[(e^{(1)}{}_{\mu}g^{\mu 3})e^{(2)}{}_{1} - (e^{(2)}{}_{\mu}g^{\mu 3})e^{(1)}{}_{1}](g^{00}\Sigma_{301} - g^{00}\Sigma_{103} - g^{03}\Sigma_{313}) \;+\\
&+\; g^{22}[(e^{(1)}{}_{\mu}g^{\mu 3})e^{(2)}{}_{2} - (e^{(2)}{}_{\mu}g^{\mu 3})e^{(1)}{}_{2}](g^{00}\Sigma_{302} - g^{00}\Sigma_{203} - g^{03}\Sigma_{323})\}\,. \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

Em vista da relação $g^{00}\Sigma_{301} - g^{00}\Sigma_{103} - g^{03}\Sigma_{313} = 0$ e das componentes de $\Sigma_{\mu\nu\gamma}$ em (4.10), chegamos à conclusão que:

$$M^{(1)(2)} = 0\,. \tag{4.14}$$

Absolutamente de maneira similar podemos encontrar as seguintes expressões para $M^{(1)(3)}$:

$$\begin{aligned} M^{(1)(3)} &= -4ke\,\{g^{11}g^{22}(e^{(1)}{}_1e^{(3)}{}_2 - e^{(1)}{}_2e^{(3)}{}_1)[g^{00}(\Sigma_{102} - \Sigma_{201}) + g^{03}(\Sigma_{132} - \Sigma_{231})] + \\ &+ g^{11}[(e^{(1)}{}_\mu g^{\mu 3})e^{(3)}{}_1 - (e^{(3)}{}_\mu g^{\mu 3})e^{(1)}{}_1](g^{00}\Sigma_{301} - g^{00}\Sigma_{103} - g^{03}\Sigma_{313}) + \\ &+ g^{22}[(e^{(1)}{}_\mu g^{\mu 3})e^{(3)}{}_2 - (e^{(3)}{}_\mu g^{\mu 3})e^{(1)}{}_2](g^{00}\Sigma_{302} - g^{00}\Sigma_{203} - g^{03}\Sigma_{323})\}\,, \end{aligned} \tag{4.15}$$

e para e $M^{(2)(3)}$:

$$\begin{aligned} M^{(2)(3)} &= -4ke\,\{g^{11}g^{22}(e^{(2)}{}_1e^{(3)}{}_2 - e^{(2)}{}_2e^{(3)}{}_1)[g^{00}(\Sigma_{102} - \Sigma_{201}) + g^{03}(\Sigma_{132} - \Sigma_{231})] + \\ &+ g^{11}[(e^{(2)}{}_\mu g^{\mu 3})e^{(3)}{}_1 - (e^{(3)}{}_\mu g^{\mu 3})e^{(2)}{}_1](g^{00}\Sigma_{301} - g^{00}\Sigma_{103} - g^{03}\Sigma_{313}) + \\ &+ g^{22}[(e^{(2)}{}_\mu g^{\mu 3})e^{(3)}{}_2 - (e^{(3)}{}_\mu g^{\mu 3})e^{(2)}{}_2](g^{00}\Sigma_{302} - g^{00}\Sigma_{203} - g^{03}\Sigma_{323})\}\,. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Concluímos que esses componentes espaciais também se anulam pelas mesmas razões pelas quais obtivemos a expressão (4.14), ou seja, temos que $M^{(1)(3)} = M^{(2)(3)} = 0$. Isso nos permite concluir que $L^{(i)(j)}$, a parte espacial do momento angular gravitacional de uma casca esférica em rotação, é zero. Esse é um resultado esperado, haja vista a própria interpretação do campo de tétradas (4.7). Ou seja, um observador que se move em torno de uma fonte com a mesma velocidade angular da fonte não é capaz de sentir nenhum efeito referente ao momento angular.

4.3.2 Observador Estático

Agora vamos utilizar uma outra configuração de tétradas cuja interpretação também é simples quando considerada do ponto de vista do sistema de referência. Vamos considerar

$$e_{a\mu} = \begin{pmatrix} -X & 0 & 0 & Z \\ 0 & \psi^2 \sin\theta\, \cos\phi & r\psi^2 \cos\theta\, \cos\phi & -Y \sin\theta\, \sin\phi \\ 0 & \psi^2 \sin\theta\, \sin\phi & r\psi^2 \cos\theta\, \sin\phi & Y \sin\theta\, \cos\phi \\ 0 & \psi^2 \cos\theta & -r\psi^2 \sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

onde

$$\begin{aligned} X &= (V^2 - r^2\Omega^2\psi^4 \sin^2\theta)^{1/2}\,, \\ Z &= -\frac{1}{X}\,\Omega r^2 \psi^4 \sin^2\theta\,, \\ Y &= \frac{V}{X}\, r\psi^2\,. \end{aligned} \tag{4.18}$$

O campo de tétradas acima produz o campo de velocidades seguinte:

$$e_{(0)}{}^{\mu}(t, r, \theta, \phi) = \left(\frac{1}{X}, 0, 0, 0\right). \tag{4.19}$$

Uma vez que fizemos a identificação da velocidade u^μ de um observador no espaço-tempo com $e_{(0)}{}^{\mu}$ vemos imediatamente que (4.17) é adaptado a observadores estáticos no espaço-tempo.

As componentes de $T_{\lambda\mu\nu}$ diferentes de zero são:

$$\begin{aligned} T_{001} &= X\partial_1 X\,, \\ T_{301} &= -Z\partial_1 X\,, \\ T_{202} &= X\partial_2 X\,, \\ T_{302} &= -Z\partial_2 X\,, \\ T_{212} &= r^2\psi^2(\partial_1 \psi^2)\,, \\ T_{013} &= X\partial_1 Z\,, \\ T_{313} &= -Z\partial_1 Z + (\partial_1 Y - \psi^2) Y \sin^2\theta\,, \\ T_{023} &= X\partial_2 Z\,, \\ T_{323} &= -Z\partial_2 Z + Y(\partial_2 Y) \sin^2\theta - (r\psi^2 - Y) Y \sin\theta\, \cos\theta\,. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Os traços do tensor de torção são:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= g^{00}T_{001} + g^{03}(T_{301} - T_{013}) - g^{22}T_{212} - g^{33}T_{313}\,, \\
T_2 &= g^{00}T_{002} + g^{03}(T_{302} - T_{023}) - g^{33}T_{323}\,,
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

sendo T_0 e T_3 componentes nulas.

As quantidades acima dão origem às seguintes componentes não-nulas de $\Sigma_{\lambda\mu\nu}$:

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{001} &= \frac{1}{2}(T_{001} - g_{00}T_1)\,, \\
\Sigma_{301} &= \frac{1}{4}(T_{301} - T_{013}) - \frac{1}{2}g_{03}T_1\,, \\
\Sigma_{002} &= \frac{1}{2}(T_{002} - g_{00}T_2)\,, \\
\Sigma_{302} &= \frac{1}{4}(T_{302} - T_{023}) - \frac{1}{2}g_{03}T_2\,, \\
\Sigma_{103} &= \frac{1}{4}(T_{013} + T_{301})\,, \\
\Sigma_{112} &= -\frac{1}{2}g_{11}T_2\,, \\
\Sigma_{212} &= \frac{1}{2}(T_{212} + g_{22}T_1)\,, \\
\Sigma_{013} &= \frac{1}{4}(T_{013} - T_{301}) + \frac{1}{2}g_{03}T_1\,, \\
\Sigma_{313} &= \frac{1}{2}(T_{313} + g_{33}T_1)\,, \\
\Sigma_{023} &= \frac{1}{4}(T_{023} - T_{302}) + \frac{1}{2}g_{03}T_2\,, \\
\Sigma_{323} &= \frac{1}{2}(T_{323} + g_{33}T_2)\,.
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

Fazendo uso da definição (2.48), tomada para as componentes $a = (1)$ e $b = (2)$, chegamos à expressão exata de $M^{(1)(2)}$, que é dada por:

$$
\begin{aligned}
M^{(1)(2)} &= -2ke(e^{(1)}{}_3 e^{(2)}{}_1 - e^{(1)}{}_1 e^{(2)}{}_3)\times\Big[g^{00}g^{03}g^{11}(T_{001} - g_{00}T_1) \\
&\quad -g^{00}g^{11}g^{33}(T_{013} + g_{03}T_1) + g^{03}g^{03}g^{11}(T_{301} - g_{03}T_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-g^{03}g^{11}g^{33}(T_{313}+g_{33}T_1)\Big] - 2ke(e^{(1)}{}_3e^{(2)}{}_2 - e^{(1)}{}_1e^{(2)}{}_3)\times\\
&\times\Big[g^{00}g^{03}g^{22}(T_{002}-g_{00}T_2)g^{00}g^{22}g^{33}\Big(\frac{1}{2}(T_{302}-T_{023})-g_{03}T_2\Big)\\
&-g^{03}g^{03}g^{22}\Big(\frac{1}{2}(T_{023}-T_{302})+g_{03}T_2\Big)\\
&-g^{03}g^{22}g^{33}(T_{323}+g_{33}T_2)\Big]\,. \qquad (4.23)
\end{aligned}
$$

Obviamente, a expressão acima é muito complicada. No sentido de simplificá-la, vamos adotar duas hipóteses. Assumiremos que:

$$
\begin{aligned}
r^2\Omega^2 &<< 1\,, \qquad (4.24)\\
r_0 &>> \alpha\,. \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

A condição (4.24) expressa o fato de que o tensor métrico dado por (4.3) é solução das equações de Einstein para o limite de rotações lentas, enquanto que a hipótese (4.25) simplifica sobremaneira os cálculos e é válida quando tomamos o limite Newtoniano da gravitação. Tanto a relação (4.24) quanto a (4.25) implicam $X = (V^2 - r^2\Omega^2\psi^4\sin^2\theta)^{1/2}$ como sendo sempre real, permitindo-nos afastar de algum inconveniente conceitual.

A relação (4.24) simplifica (4.23) para:

$$
\begin{aligned}
M^{(1)(2)} &\cong -2ke(e^{(1)}{}_3e^{(2)}{}_1 - e^{(1)}{}_1e^{(2)}{}_3)\times\\
&\times\ \Big[g^{00}g^{03}g^{11}(T_{001}-g_{00}T_1) - g^{00}g^{11}g^{33}T_{013}\Big]\\
&+\ ke(e^{(1)}{}_3e^{(2)}{}_2 - e^{(1)}{}_2e^{(2)}{}_3)g^{00}g^{22}g^{33}T_{023}\,. \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

Com o auxílio da condição (4.25) e substituindo os valores das respectivas componentes de $T_{\alpha\mu\nu}$, obtemos uma forma bem mais simples e aproximada para $M^{(1)(2)}$:

$$
M^{(1)(2)} \cong -4k\Big[2\alpha\Omega r\sin^3\theta - \frac{1}{2}\Omega r^2\sin^3\theta + \frac{1}{2}\Omega r^2\sin\theta\,\cos^2\theta\ \Big]\,, \qquad (4.27)
$$

para $r > r_0$, sendo Ω dado em (4.5). Para $r < r_0$ a expressão de $\psi = \psi_0$ é constante e é dado por (4.4). Consequentemente a quantidade Σ_{001} é igual a zero, com isso a expressão para $M^{(1)(2)}$ é:

$$M^{(1)(2)} \cong 4k\Big[\frac{1}{2}\Omega r^2 \sin^3\theta - \frac{1}{2}\Omega r^2 \sin\theta\, \cos^2\theta\ \Big]\,, \tag{4.28}$$

A integração na variável r, no domínio de r_0 até infinito, dos dois últimos termos da expressão (4.27) diverge. Explicitamente, se substituirmos Ω, chegamos a uma expressão que é proporcional a $\int_{r_0}^{\infty} \frac{r^5}{(r+\alpha)^6} dr$. Ou seja, chegamos a uma expressão divergente. Esse comportamento pode ser entendido quando analisamos a relação existente entre o parâmetro α e as componentes do tensor de torção $T_{a\mu\nu}$ no espaço-tempo. Claro que se tivermos componentes do tensor de torção diferentes de zero para o espaço-tempo plano se fará necessário o uso de expressões regularizadas.

Como $m = 2\alpha$, temos no espaço-tempo plano a condição que $\alpha = 0$. Entretanto, para essa condição, encontramos que $T_{(0)13} = \partial_1 Z$ e $T_{(0)23} = \partial_2 Z$, logo concluímos que $T_{013} \neq 0$ e $T_{123} \neq 0$ nesse limite. As duas últimas quantidades se comportam como $O(r^{-2}\sin^2\theta)$ e $O(r^{-1}\sin\theta\,\cos\theta)$, respectivamente. Consequentemente será necessário o uso da definição regularizada do momento angular gravitacional.

A expressão regularizada para $M^{(1)(2)}$ é obtida quando subtraímos o valor de $M^{(1)(2)}$ no limite $\alpha = 0$, já que α é o único parâmetro físico associado à configuração. Devemos, ainda, notar que nesse limite Ω_0 pode ser eliminado por uma transformação de coordenadas. Com isto obtemos finalmente o seguinte:

$$M^{(1)(2)}(\alpha) - M^{(1)(2)}(\alpha = 0) \cong -\frac{1}{4\pi} 2\alpha(\Omega r)\sin^3\theta\,, \tag{4.29}$$

para $r > r_0$ e

$$M^{(1)(2)}(\alpha) - M^{(1)(2)}(\alpha = 0) \cong 0\,, \tag{4.30}$$

para $r < r_0$. Na notação da definição (4.2) temos que $M^{(1)(2)}(\alpha) - M^{(1)(2)}(\alpha = 0) = M^{(1)(2)}(e) - M^{(1)(2)}(E)$, cuja validade se torna evidente quando pensamos que $\alpha = 0$

conduz ao espaço-tempo plano, descrito pelos campos de tétradas $E^a{}_\mu$.

Integrando $M^{(1)(2)}$ em todo o espaço obtemos:

$$L^{(1)(2)} \cong \frac{8\alpha}{3r_0} J = \frac{4m}{3r_0} J\,, \tag{4.31}$$

onde [32]

$$J = \frac{1}{2}(r_o\psi_0^2)^3\Omega_0 \tag{4.32}$$

é identificado com o momento angular da fonte.

Os outros componentes de $M^{(i)(j)}$ de maneira análoga são escritos como:

$$\begin{aligned}
M^{(1)(3)} &\cong -2ke(e^{(1)}{}_3 e^{(3)}{}_1 - e^{(1)}{}_1 e^{(3)}{}_3) \times \\
&\times \left[g^{00}g^{03}g^{11}(T_{001} - g_{00}T_1) - g^{00}g^{11}g^{33}T_{013}\right] \\
&+ ke(e^{(1)}{}_3 e^{(2)}{}_2 - e^{(1)}{}_2 e^{(2)}{}_3) g^{00}g^{22}g^{33}T_{023} \qquad (4.33) \\
M^{(2)(3)} &\cong -2ke(e^{(2)}{}_3 e^{(3)}{}_1 - e^{(2)}{}_1 e^{(3)}{}_3) \times \\
&\times \left[g^{00}g^{03}g^{11}(T_{001} - g_{00}T_1) - g^{00}g^{11}g^{33}T_{013}\right] \\
&+ ke(e^{(1)}{}_3 e^{(2)}{}_2 - e^{(1)}{}_2 e^{(2)}{}_3) g^{00}g^{22}g^{33}T_{023}\,. \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

Quando integramos $M^{(1)(3)}$ e $M^{(2)(3)}$ devemos lembrar que $\int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi = 0$ e $\int_0^{2\pi} \sin\phi d\phi = 0$, que aparecem nas combinações $(e^{(1)}{}_3 e^{(3)}{}_1 - e^{(1)}{}_1 e^{(3)}{}_3)$, $(e^{(1)}{}_3 e^{(2)}{}_2 - e^{(1)}{}_2 e^{(2)}{}_3)$, $(e^{(2)}{}_3 e^{(3)}{}_1 - e^{(2)}{}_1 e^{(3)}{}_3)$ e $(e^{(1)}{}_3 e^{(2)}{}_2 - e^{(1)}{}_2 e^{(2)}{}_3)$, tornando-se simples concluir

$$L^{(1)(3)} = L^{(2)(3)} = 0\,. \tag{4.35}$$

Com isso, chegamos precisamente ao mesmo valor encontrado em [1], entretanto há uma diferença entre as expressões usadas para o cálculo do momento angular. As duas expressões seguem o raciocínio do formalismo Hamiltoniano de interpretar as equações de vínculo como equações que definem momento-angular, mas a nossa definição é projetada no espaço tangente o que garante que a expressão é invariante por transformações de coordenadas. Cohen [32] identifica J dado pela equação (4.32) como sendo o valor Newtoniano do momento angular de uma casca esférica em rotação. É possível escrever $L^{(1)(2)}$ como produto do momento de inércia da fonte por Ω_0, que representa a velocidade angular de sistemas de referência inerciais no interior da casca esférica. Ou seja, podemos escrever $L^{(1)(2)}$, considerando que $\psi_0 = 1 + \alpha/r_0 \cong 1$, como [1]:

$$L^{(1)(2)} = \Big(\frac{2}{3} m r_0^2\Big)\Omega_0 \,. \tag{4.36}$$

Levando-se em conta a discussão apresentada em [1] podemos afirmar que (4.36) representa o momento angular do campo gravitacional, e não da fonte.

Se reintroduzirmos as constantes c e G em nossa expressão para o momento angular do campo gravitacional e relacionarmos a velocidade angular de observadores inerciais no interior da casca esférica, Ω_0, com a velocidade de rotação da fonte, ω_s, podemos escrever a nossa expressão em termos do momento angular da fonte.

Para isso, basta recordarmos que Ω_0 se relaciona com ω_s através da expressão: $\Omega_0 = \omega_s(4m/3r_0)$ [33]. Substituindo Ω_0 em (4.36), temos:

$$L^{(1)(2)} = \Big(\frac{2}{3} m r_0^2\Big)\omega_s(4m/3r_0) \,. \tag{4.37}$$

Agora resta-nos reintroduzir as constantes c e G. Para isso, lembramos que $k = \frac{1}{16\pi} \to \frac{c^3}{16\pi G}$. Além disso, vamos fazer as identificações $m \to \frac{G}{c^2}M$ e $\omega_s \to \frac{1}{c}\Omega_s$, sendo M dado em gramas e Ω_s em radianos por segundo. Assim, o momento angular gravitacional se torna:

$$L^{(1)(2)} = \frac{G}{c^2}\Big(\frac{4M}{3r_0}\Big)\Big(\frac{2}{3} M r_0^2 \Omega_s\Big) \,, \tag{4.38}$$

sendo $\frac{2}{3} M r_0^2 \Omega_s$ o momento angular da fonte. Essa expressão será importante quando compararmos com valores na literatura. Devemos notar que (4.38) tem dimensão de momento angular, isso corrobora o apontamento feito no final do capítulo 2.

Para campos gravitacionais fracos esperamos que o momento angular tenha intensidade pequena. Para configurações típicas (no limite newtoniano e no sistema de unidades Gaussiano) o campo gravitacional de uma casca esférica de massa m é desprezível, logo, o momento angular também o será. No entanto, alguns cálculos na literatura [33, 34, 35, 36] mostram que o momento angular do espaço-tempo de uma casca esférica em rotação tem a mesma ordem de magnitude do momento angular da fonte, resultado que está em desacordo com a nossa análise. Isso pode ser visto quando analisamos a expressão (4.38), se observarmos que $\frac{G}{c^2} = 7,4\,.\,10^{-29} g/cm$, concluimos que o momento angular em (4.38) é muito menor que o momento angular da fonte.

Capítulo 5

O Momento Angular Gravitacional

5.1 Introdução

Em uma abordagem Newtoniana o conceito de momento angular aparece como idéia central para o entendimento de características de sistemas em rotação, tais como a estabilidade e a evolução temporal. Então, compreender o momento angular, do ponto de vista Newtoniano em sistemas em rotação, é entender a dinâmica do sistema. Isso vale para qualquer sistema, inclusive para o caso gravitacional.

Quando lidamos com objetos em rotação na formulação relativística, novos fenômenos aparecem, como por exemplo o arrasto de observadores inerciais causados por uma fonte em rotação. Para a Relatividade Geral o momento angular ainda tem um papel de destaque no completo entendimento da teoria, entretanto a sua definição padrão, ou seja, aquela que é adotada na literatura, é um tanto quanto restrita pois fornece apenas o momento angular total do espaço-tempo. A nossa definição, como veremos a seguir, não apresenta essa limitação. Ela pode ser aplicada a volumes finitos do espaço.

Nesse capítulo vamos comparar a nossa definição de momento angular com aquela que é tomada como padrão na literatura. Analisaremos em que medida o comportamento de componentes específicos do tensor métrico influem na construção do momento angular, assim como é feito em [19] e [20]. Calcularemos o momento angular para uma simetria axial adaptado a um observador estático e outro em rotação no caso específico do buraco negro de Kerr. Além disso, investigaremos a possibilidade de construírmos a helicidade para a métrica de Bondi e para uma onda gravitacional plana arbitrária.

5.2 Revisão Bibliográfica sobre Momento Angular

Dada a importância do momento angular, temos que entender como ele é definido na literatura e qual a relação com a definição que propomos. Antes, porém, vamos relembrar como estabelecemos quantidades conservadas quando existe um campo de matéria em Relatividade Geral. Considere uma quantidade definida por:

$$J^{\mu} = T^{\mu\nu}\xi_{\nu}\,, \tag{5.1}$$

onde $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ é o tensor de energia-momento dos campos de matéria e ξ_{ν} é o vetor de Killing associado a alguma simetria. Calculando a derivada covariante D_{μ} de J^{μ} a partir dos símbolos de Christoffel, temos:

$$\begin{aligned} D_{\mu}J^{\mu} &= D_{\mu}(T^{\mu\nu}\xi_{\nu}) \\ &= (D_{\mu}T^{\mu\nu})\xi_{\nu} + T^{\mu\nu}(D_{(\mu}\xi_{\nu)}) \\ &= 0\,, \end{aligned} \tag{5.2}$$

nesse caso assumimos que existe conservação dos campos de matéria, o que é explicitado pela condição $D_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$, que $T^{\mu\nu}$ é simétrico e que ξ_{μ} obedece à equação $D_{(\mu}\xi_{\nu)} = 0$. Assim, vemos que J^{μ} é uma quantidade conservada e podemos usá-la para definirmos energia, momento e momento angular associada a algum campo de matéria. Passaremos a discutir como definir quantidades conservadas para o campo gravitacional.

Muitos autores [36, 37] identificam o momento angular com uma integral de superfície sobre uma esfera no infinito, construída a partir do vetor de Killing que exibe simetria por rotações espaciais. Do mesmo modo podemos fazer a identificação do momento-energia gravitacional com uma dessas quantidades construídas a partir de um vetor de Killing que surge devido à simetria por translações. É possível construir tantas quantidades conservadas quantos são os vetores de Killing, sendo a interpretação física associada à natureza dos vetores de Killing.

Essas quantidades conservadas são as chamadas integrais de Komar [34] e são dadas pela seguinte expressão:

$$K = \frac{1}{2} \oint_S \frac{1}{8\pi} D^{[\mu} \xi^{\nu]} dS_{\mu\nu} \, , \tag{5.3}$$

onde D^μ é a derivada covariante, calculada a partir dos símbolos de Christoffel, e ξ^μ corresponde ao vetor de Killing. A quantidade (5.3) é definida para um espaço-tempo assintoticamente plano, para $S \to \infty$. Uma característica importante dessas quantidades é a sua independência em relação ao sistema de coordenadas, além disso, usa-se as integrais de Komar para sistemas que tem algum tipo de simetria. Por exemplo, para o buraco negro de Kerr que exibe simetria axial, essa quantidade, no respectivo limite e com o respectivo vetor de Killing, gera o momento angular $J = ma$.

Alternativamente, as integrais de Komar podem ser obtidas por meio da adição de um campo rotacional às quantidades de Noether geradas pela abordagem de pseudo-tensores de modo análogo ao que é feito para os campos de matéria. Entretanto essa abordagem tem sua validade questionável, uma vez que as quantidades pseudo-tensoriais são dependentes do sistema de coordenadas. Essa não é uma característica desejável para uma definição, por exemplo, de energia. Um dos inconvenientes da abordagem pseudo-tensorial é o problema da localizabilidade do momento-energia gravitacional, uma vez que os pseudo-tensores dependem do sistema de coordenadas e em princípio seria possível anulá-los por uma mudança de coordenadas. Conseqüentemente temos uma não-localizabilidade dessa quantidade.

Assim, essa característica gera uma incompatibilidade com grandezas de interesse físico.

Essa abordagem pseudo-tensorial é analisada em detalhes por Aguirregabiria, Chamorro e Virbhadra em [38]. Nesse artigo os autores mostram que os pseudo-tensores de Einstein, Tolman, Landau-Lifshitz, Papapetrou e Weinberg dão os mesmos resultados para distribuições de energia, momento e momento angular, quando aplicados para métricas de Kerr-Newman e Bonnor-Vaidya. Todos os resultados foram obtidos em um sistema de coordenadas cartesiano e são razoáveis do ponto de vista físico. Por exemplo, para buraco negro de Kerr-Newman, a energia e o momento angular são M e Ma, respectivamente, com M o parâmetro de massa e a o parâmetro de rotação. Apesar desses sucessos, essas expressões têm o seu alcance restrito a um sistema de coordenadas específico.

Claramente as definições de momento-energia e momento angular em termos de pseudo-tensores não têm significado físico local, apesar das expressões totais serem largamente usadas pelos físicos. Uma transformação de coordenadas é apenas uma maneira diferente de se caracterizar o mesmo ponto e, por isso, seria um contra-senso imaginar que tal transformação passiva fosse capaz de alterar o valor do momento-energia ou momento angular. Situação inteiramente oposta é a dependência das grandezas físicas em relação ao sistema de referência, o que está em completa concordância com todas as concepções da Física conhecidas, inclusive com o Princípio da Equivalência.

Para contornar esse problema, Garecki, em [39], define expressões tensoriais para o momento-energia e momento angular a partir mesmo de expressões pseudo-tensoriais. O processo consiste em se fazer médias de expressões relativas a um sistema de referência onde o campo de tétradas, $e^a{}_\mu$, é igual a δ^a_μ. Esse processo é similar àquele que adotamos para as expressões regularizadas no capítulo anterior. Ele define essas expressões tanto para os campos de matéria quanto para o campo gravitacional, a partir do pseudo-tensor de Einstein.

Garecki aplica suas definições aos Universos de Friedman e encontra que a densidade de energia é positivamente definida. Ele justifica a necessidade de se encontrar uma outra expressão capaz de lidar com essas configurações que não sejam integrais de Komar ou expressões pseudo-tensoriais, uma vez que ambas falham quando aplicadas aos Universos de Friedman, gerando inconsistências. Uma dessas falhas é a inexistência de expressões globais para o momento-energia e momento angular, para o caso de expressões pseudo-tensoriais. Outro inconveniente, para o caso de expressões de Komar, é a impossibilidade de se construir vetores de Killing associados à energia do sistema.

Essas expressões tensoriais para o momento-energia e momento angular diferem apenas por constantes dimensionais das expressões de superenergia-momento e supermomento angular, as quais são abordadas em [39] e foram introduzidas anteriormente por Mashhoon [40]. Garecki interpreta essas quantidades obtidas por médias como mais fundamentais, uma vez que a diferença de um fator dimensional permitiria uma relação com a escala de Planck ou qualquer outro fator de escala fundamental que caracterize o sistema. A existência desse fator violaria a simetria local de Lorentz a menos que ele fosse infinitesimalmente pequeno. A abordagem de Garecki parece-nos promissora, mas falta-lhe, em relação ao momento angular, lastro na aplicação de suas definições a sistemas conhecidos no sentido de compará-las e analisar se geram resultados satisfatórios.

Quando não sabemos quais são as simetrias exatas de uma configuração não podemos usar as integrais de Komar, uma vez que elas geram uma anomalia entre o que é esperado e o valor de (5.3) [37]. Há casos em que conhecemos as simetrias assintóticas para espaços-tempos assintóticamente planos no infinito espacial. Nesses casos usamos uma versão modificada de (5.3) construídas a partir do formalismo Hamiltoniano, o qual foi introduzido por Arnowitt, Desser e Misner (ADM) [41], e usando os conceitos de energia, momento e momento angular totais atribuídos ao espaço-tempo como um todo.

Passaremos a descrever os trabalhos de Regge e Teitelboim [17, 42], nos quais eles estabelecem os geradores assintóticos no infinito espacial das simetrias do campo gravitacional usando o formalismo Hamiltoniano. Regge e Teitelboim partem da Hamiltoniana introduzida em [41] e exigindo a invariância da Hamiltoniana por translações espaciais e temporais, além de rotações espaciais, eles mostram a maneira de se definir energia, momento e momento angular do campo gravitacional no caso de um espaço-tempo assintoticamente plano. O primeiro ponto notado por eles foi que existia uma grande diferença, usando o formalismo Hamiltoniano, na descrição do espaço-tempo dependendo se a seção 3-dimensional espacial do universo fosse assintoticamente aberta ou fechada. Com isso eles entenderam a necessidade de se modificar a Hamiltoniana básica com a qual trabalhavam através da introdução de vínculos associados aos geradores do grupo de simetria assintótico do espaço-tempo, que foi identificado como sendo o grupo de Poincaré.

A Hamiltoniana que Regge e Teitelboim partiram foi a seguinte:

$$H_0 = \int d^3x[N(x)\mathcal{H}(x) + N^i(x)\mathcal{H}_i(x)]\,, \tag{5.4}$$

com N e N^i sendo as funções lapso e “shift"respectivamente. As quantidades $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}_i$ são definidas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= g^{-1/2}(\pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{1}{2}\pi^2) - g^{1/2}R \approx 0\,; \\ \mathcal{H}_i &= -2D_j{\pi_i}^j \approx 0\,, \end{aligned} \tag{5.5}$$

onde $\pi = {\pi^i}_i$, g é o determinante da métrica tri-dimensional e R é o escalar de curvatura tri-dimensional. O funcional (5.4) foi obtido por ADM [41] através da foliação do espaço-tempo.

O principal argumento de Regge e Teitelboim é que a variação da Hamiltoniana de qualquer sistema tem que obedecer à seguinte forma:

$$\delta H = \int d^3x[A^{ij}(x)\delta g_{ij}(x) + B_{ij}(x)\delta\pi^{ij}(x)]\,, \tag{5.6}$$

de modo que as equações de campo, dadas por:

$$\begin{aligned} A^{ij} &= \frac{\delta H}{\delta g_{ij}} \\ B_{ij} &= \frac{\delta H}{\delta \pi^{ij}}\,, \end{aligned} \qquad (5.7)$$

sejam bem definidas. Entretantanto a variação de (5.4) é da forma:

$$\begin{aligned} \delta H_0 &= \int d^3x[A^{ij}(x)\delta g_{ij}(x) + B_{ij}(x)\delta\pi^{ij}(x)] - \oint ds_l G^{ijkl}(N\delta D_k g_{ij} - \partial_k \delta g_{ij}) - \\ &- \oint ds_l[2N_k\delta\pi^{kl} + (2N^k\pi^{jl} - N^l\pi^{jk})\delta g_{jk}]\,, \end{aligned} \qquad (5.8)$$

onde a forma exata de A^{ij} e B_{ij} não é aqui relevante uma vez que pode ser recuperada do trabalho de ADM, e G^{ijkl} é definido por:

$$G^{ijkl} = \frac{1}{2}g^{1/2}(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk} - 2g^{ij}g^{kl})\,. \qquad (5.9)$$

Assim a variação de H_0 não obedece (5.6), pois existem termos de superfície. Regge e Teitelboim analisam esses termos de superfície utilizando o fato que o decaimento assintótico no infinito espacial da métrica e do momento canonicamente conjugado têm a seguinte forma:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{ij} + \frac{1}{r}h_{ij}(\frac{x^k}{r}) + O(r^{-1-\varepsilon})\,, \\ h_{ij}(\frac{x^k}{r}) &= h_{ij}(-\frac{x^k}{r})\,, \\ \pi^{ij} &= \frac{1}{r^2}p^{ij}(\frac{x^k}{r}) + O(r^{-2-\varepsilon})\,, \\ p^{ij}(\frac{x^k}{r}) &= -p^{ij}(-\frac{x^k}{r})\,, \end{aligned} \qquad (5.10)$$

com $\varepsilon > 0$, $r = (x^i x_i)^{1/2}$ e $r \gg 0$. Além disso, eles utilizaram o fato que nesse limite a função lapso é igual a um e a função "shift" decai com $\frac{1}{r}$. O resultado é que, dos termos de superfície, apenas sobrevive:

$$\oint ds_l G^{ijkl}\delta D_k g_{ij} = \delta \oint ds_k(\partial_i g_{ik} - \partial_k g_{ii}) \equiv \delta E[g_{ij}]\,, \qquad (5.11)$$

identificado com a energia total do espaço-tempo. Desse modo a Hamiltoniana é modificada para $H = H_0 + E[g_{ij}]$, o que deixa a variação de H da forma (5.6).

A interpretação de $E[g_{ij}]$ como energia justifica-se pois a ação,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \Big[\int d^3x(\pi^{ik}\dot{g}_{ik} - N\mathcal{H} - N^i\mathcal{H}_i) + E[g_{ij}] \Big]\,, \qquad (5.12)$$

é invariante por reparametrizações temporais para o limite de $r \to \infty$ no espaço 3-dimensional assintoticamente plano. Da mesma forma que a energia é associada com uma simetria assintótica temporal, o momento e o momento angular serão associados com transformações assimtóticas do tipo $x'^i = x^i + \xi^i$ que deixam a ação (5.12) invariante. O termo que contém $E[g_{ij}]$ é invariante separadamente, com isso a variação da ação, após utilizar-se as equações de vínculo (5.5), se torna [17]:

$$\delta S = \oint ds_l(-2\pi^{ik}\xi_k)\Big|_{t_1}^{t_2}\,. \qquad (5.13)$$

Se $\xi_k \to \epsilon_k$ para $r \to \infty$, então:

$$\begin{aligned} \delta S &= \epsilon_k(P^k(t_2) - P^k(t_1))\,, \\ P^k &= -2\oint ds_i \pi^{ik}\,. \end{aligned} \qquad (5.14)$$

Isso permite associar o momento com a invariância da ação por translações espaciais no infinito. Analogamente se $\xi_i \to \epsilon_{ijk}\delta\phi^j x^k$ para $r \to \infty$, então:

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta\phi^j(L_j(t_2) - L_j(t_1))\,, \\ L_i &= 2\oint ds_l \epsilon_{ijk}\pi^{lj}x^k\,. \end{aligned} \qquad (5.15)$$

Desse modo, o momento angular é associado com a invariância da ação por rotações espaciais no infinito.

Para definir o centro-de-inércia, Regge e Teitelboim constroem um 4-vetor (N^μ) a partir das funções lapso e "shift" que no infinito espacial tem o seguinte comportamento:

$$N^\mu \to \alpha^\mu + \beta^\mu{}_r x^r \,, \tag{5.16}$$

nesse caso é possível identificar $N^0 = N$, bem como a parte espacial de N^μ com a função "shift". Da mesma forma como foi feito para a energia, é necessário redefinir o Hamiltoniano englobando a energia, o momento e o momento angular nesta definição. Com isso, vemos que a variação funcional do novo Hamiltoniano é:

$$\begin{aligned} \delta(H_0 - \alpha^\mu P_\mu + \frac{1}{2}\beta_{rs}M^{rs}) &= \int d^3x[A^{ij}(x)\delta g_{ij}(x) + B_{ij}(x)\delta\pi^{ij}(x)] - \\ -\beta_{0r}\oint ds_l G^{ijkl}(x^r\partial_k g_{ij} - \delta^r_k g_{ij}) &- \beta_{rs}\oint ds_l x^r(2\delta^k_s\pi^{jl} - \delta^l_s\pi^{jk})\delta g_{jk} \,, \end{aligned} \tag{5.17}$$

onde $P^\mu = (E, P^i)$ e $M^{rs} = \oint ds_l(x^r\pi^{ls} - x^s\pi^{lr})$. Substituindo o comportamento assintótico de N^μ na variação funcional de $(H_0 - \alpha^\mu P_\mu + \frac{1}{2}\beta_{rs}M^{rs})$ e utilizando o mesmo argumento de diferenciabilidade do Hamiltoniano quando a energia foi definida, Regge e Teitelboim identificam a expressão:

$$M^{0r} = \oint ds_l G^{ijkl}(x^r\partial_k g_{ij} - \delta^r_k g_{ij}) \,, \tag{5.18}$$

com o centro-de-inércia assintótico gravitacional. Onde G^{ijkl} é definido em (5.9). Claro que, com isso, o Hamiltoniano deve ser redefinido englobando a quantidade (5.18), de modo que a variação do Hamiltoniano tome a forma (5.6).

Assim os resultados obtidos por Regge e Teitelboim podem ser aglutinados em apenas duas grandezas P^μ e $M^{\mu\nu}$ cujas componentes são:

$$\begin{aligned} P^0 &= k\oint ds_l(\partial_i g_{il} - \partial_l g_{ii}) \\ P^r &= k\oint ds_l \pi^{rl} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^{0r} &= k\oint ds_l G^{ijkl}(x^r\partial_k g_{ij} - \delta^r_k g_{ij}) \\ M^{rs} &= k\oint ds_l(x^r\pi^{ls} - x^s\pi^{lr})\,, \end{aligned} \tag{5.19}$$

onde introduzimos a constante $k = \frac{1}{16\pi}$ por questões dimensionais. As grandezas P^μ e $M^{\mu\nu}$ são adicionadas a H_0, de modo a preservar as simetrias assintóticas e garantir a diferenciabilidade do Hamiltoniano total, que pode ser escrito como:

$$H_t = \int d^3x N^\mu(x)\mathcal{H}_\mu(x) - \alpha^\mu P_\mu + \frac{1}{2}\beta^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\,, \tag{5.20}$$

onde α^μ e $\beta^{\mu\nu}$ são multiplicadores de Lagrange. Regge e Teitelboim mostram que essas quantidades adicionadas a H_0 reproduzem a álgebra do grupo de Poincaré. Ou seja, P_μ e $M_{\mu\nu}$ são geradores assintóticos do grupo de Poincaré para o campo gravitacional. Outro resultado que devemos destacar, obtido por Regge e Teitelboim, é que os geradores de Poincaré são sempre integrais de superfície, esse é um resultado largamente utilizado e conhecido quando descreve-se o campo gravitacional utilizando-se a Relatividade Geral, em sua formulação métrica, e o formalismo Hamiltoniano. Apesar de, nesta tese, lidarmos com o formalismo Hamiltoniano, as nossas expressões para energia, momento e momento angular não são diretamente definidas por integrais de superfície. Isso se deve a duas razões: em primeiro lugar lidamos com o equivalente teleparalelo da Relatividade Geral, em segundo lugar não assumimos nenhuma simetria assintótica para o espaço 3-dimensional, apenas utilizamos os vínculos para definir os geradores de Poincaré no espaço de fase da teoria.

Beig e ó Murchadha [19] reconsideram a formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral em um contexto assintoticamente plano abordado anteriormente por Reege e Teitelbloim [17]. Usando uma linguagem simplética eles resgatam os resultados obtidos por Reege e Teitelbloim. Ou seja, estabeleceram que o grupo de Poincaré assintoticamente age como grupo de simetria no espaço de fase dessa abordagem Hamiltoniana e além disso, estenderam a análise para as condições no infinito espacial que permitem a existência de momento-energia e momento angular. Eles também mostraram que os geradores de Poincaré são bem definidos se o seguinte comportamento assintótico para o tensor de Ricci tridimensional for observado,

$$\begin{aligned} R_{rr} &\sim O(\frac{1}{r^3})\,, \\ R_{r\theta}\,, R_{r\phi} &\sim O(\frac{1}{r^{3+\varepsilon}})\,, \end{aligned} \tag{5.21}$$

que foi primeiro obtido por York [18].

A análise feita por Beig e ó Murchadha é estendida por Szabados [20]. Nesse trabalho ele chega praticamente aos mesmos resultados anteriores. Foi mostrado que os vetores de Killing assintóticos, definidos com relação a uma foliação do espaço-tempo, podem ser usados para construir quantidades cuja álgebra corresponde à de Poincaré se a métrica tem um decaimento de $\frac{1}{r}$ ou mais rápido. Essas quantidades são identificadas com a energia, momento e momento angular. Ele também mostrou que o momento angular e o centro-de-inércia são bem definidos apenas para o mesmo tipo de decaimento supracitado da métrica. Outro resultado interessante é a forma diferente do centro-de-inércia em relação ao trabalho de Beig e ó Murchadha. Vamos mencionar a seguir as principais diferenças entre o trabalho de Szabados e aquele de Beig e ó Murchadha.

Szabados explora a definição de energia, momento, momento angular e centro-de-inércia na presença de matéria, procurando entender em que sentido essas quantidades são invariantes de Lorentz. Além de especificar o decaimento das funções lapso e "shift" no limite espacial para que cada uma das grandezas anteriores sejam bem definidas, ele analisa a possibilidade da dependência temporal dessas grandezas. Outra divergência surge quando ele não considera a estrutura simplética como fundamental, mudando o foco para as equações de campo.

Outro resultado fundamental é que o centro-de-inércia difere pela quantidade tP^i, onde P^i é o momento e $t = x^0$. Essa quantidade somada ao momento angular espacial forma um tensor anti-simétrico que transforma como o gerador momento angular do grupo de Poincaré. Isso nos permite suspeitar que $L^{(0)(i)}$, segundo a nossa definição, tenha relação com o centro-de-inércia do campo. O termo "centro-de-inércia" é utilizado uma vez que a expressão centro-de-massa não faz sentido quando aplicada à campos.

Brown e York [18] desenvolveram um método para definir energia, momento e momento angular baseado em expressões quasi-locais [43, 44, 45]. Eles definem essas expressões a partir da formulação Hamiltoniana estabelecida anteriormente por ADM. O método é essencialmente usar a equação de Hamilton-Jacobi modificada para o formalismo de ADM. As expressões de Brown e York têm as mesmas limitações que aquelas discutidas até agora e que são construídas a partir de um formalismo Hamiltoniano, ou seja, têm sua validade restrita a limites assintoticamente planos no infinito espacial. Além disso, existe uma liberdade de escolha das expressões propostas por Brown e York que é própria da invariância das equações de campo quando soma-se uma divergência total à ação. Essa característica é uma herança da formulação de Hamilton-Jacobi.

Existem diversas maneiras de se definir expressões quasi-locais. Uma maneira, já discutida, é baseada nas expressões de Brown-York. Outra maneira largamente utilizada foi desenvolvida por Penrose e Rindler [46] usando o conceito de espinores. Winicour [47], a partir dessas expressões quasi-locais, estabelece grandezas conservadas usando as simetrias assintóticas, no chamado infinito nulo. O infinito nulo é uma região definida como o limite de distâncias com luminosidade infinita ao longo de uma hipersuperfície nula. A justificativa para se usar quantidades quasi-locais é, de acordo com os autores, que o campo gravitacional não tem existência local (afirmação com a qual não concordamos). Para uma análise bem detalhada sobre quantidades quasi-locais e como usá-las para construir quantidades conservadas recomendamos [43] e [46].

Concluímos que tanto as expressões para energia, momento e momento angular definidas a partir das integrais de Komar quanto aquelas pseudo-tensoriais não são totalmente satisfatórias e, essencialmente, existem duas maneiras de se definir expressões globais que são conservadas no espaço-tempo. Uma forma está relacionada com simetrias assintóticas no infinito espacial, considerando-se que nesse limite o espaço 3-dimensional é plano, e associada geralmente ao formalismo Hamiltoniano. A outra forma também usa simetrias assintóticas, mas no infinito nulo, sendo associada geralmente a expressões quasi-locais. Apesar do relativo sucesso apresentado pelas definições globais, elas tem uma aplicabilidade restrita. A nossa definição de momento angular tem sua validade em todo o espaço de fase da teoria, não existindo a necessidade de pensarmos em simetrias assintóticas. A seguir analisaremos as características da nossa definição de momento angular para algumas configurações específicas.

5.3 O Momento Angular de uma Simetria Axial no Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral

Quando a simetria esférica é quebrada por uma rotação, temos uma simetria axial. Esse tipo de simetria engloba um grande número de configurações, de uma massa em rotação, passando por quasares, sistemas binários, aglomerados de galáxias, até o buraco negro de Kerr. É bom ressaltar que para o caso de Kerr a singularidade da configuração não permite conclusões inequívocas, como veremos um pouco mais adiante.

O tensor métrico mais geral para uma simetria axial [48] é dado por:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{03}d\phi dt + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\phi^2 \,, \tag{5.22}$$

sendo todas as componentes do tensor métrico dependentes de r e θ.

Com a finalidade de calcular o momento angular para essa configuração temos que calcular o tensor métrico contravariante. Fazendo isso temos:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{g_{33}}{\delta} & 0 & 0 & \frac{g_{03}}{\delta} \\ 0 & \frac{1}{g_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{g_{22}} & 0 \\ \frac{g_{03}}{\delta} & 0 & 0 & -\frac{g_{00}}{\delta} \end{pmatrix}, \qquad (5.23)$$

com $\delta = g_{03}g_{03} - g_{00}g_{33}$.

A seguir vamos fazer a análise do momento angular para um observador estático.

5.3.1 Observador Estático

Um observador estático é caracterizado por um campo de velocidade do tipo $u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$ ao longo de uma linha mundo C. Uma vez que fazemos a identificação $u^\mu = e_{(0)}{}^\mu$ podemos concluir que para observadores estáticos a condição $e_{(0)}{}^k = 0$ deve ser satisfeita, claro que dessa condição temos $e^{(i)}{}_0 = 0$, conforme foi analisado no capítulo anterior. Escolhendo um observador estático adaptado a esse sistema, temos:

$$e_{a\mu} = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & -B \\ 0 & \sqrt{g_{11}}\sin\theta\cos\phi & \sqrt{g_{22}}\cos\theta\cos\phi & -C\sin\theta\sin\phi \\ 0 & \sqrt{g_{11}}\sin\theta\sin\phi & \sqrt{g_{22}}\cos\theta\sin\phi & C\sin\theta\cos\phi \\ 0 & \sqrt{g_{11}}\cos\theta & -\sqrt{g_{22}}\sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \qquad (5.24)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(-g_{00})}\,, \\ AB &= -\frac{g_{03}}{A}\,, \\ C\sin\theta &= \frac{\delta^{1/2}}{\sqrt{(-g_{00})}}\,. \end{aligned} \qquad (5.25)$$

O determinante da tétrada $e^a{}_\mu$ é $e=\sqrt{g_{11}g_{22}\delta}$. Devemos notar que o campo de tétradas (5.24) gera a quadri-velocidade $e_{(0)}{}^\mu=(\frac{1}{A},0,0,0)$, isso mostra que esse campo de tétradas é realmente adaptado à observadores estáticos.

Após longos cálculos encontramos para M^{ab} a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} M^{ab} &= -2ke\{(e^a{}_0e^b{}_1-e^a{}_1e^b{}_0)g^{11}[(g^{00}g^{33}-g^{03}g^{03})T_{313}+g^{00}g^{22}T_{212}]+ \\ &\quad +(e^a{}_0e^b{}_2-e^a{}_2e^b{}_0)g^{22}[(g^{00}g^{33}-g^{03}g^{03})T_{323}-g^{00}g^{11}T_{112}]- \\ &\quad -(e^a{}_0e^b{}_3-e^a{}_3e^b{}_0)(g^{00}g^{33}-g^{03}g^{03})(g^{11}T_{113}-g^{22}T_{223})+ \\ &\quad +(e^a{}_1e^b{}_2-e^a{}_2e^b{}_1)g^{11}g^{22}(g^{00}T_{012}+g^{03}T_{312})+ \\ &\quad +(e^a{}_1e^b{}_3-e^a{}_3e^b{}_1)g^{11}[(g^{00}g^{33}-g^{03}g^{03})T_{013}-g^{03}g^{22}T_{212}]+ \\ &\quad +(e^a{}_2e^b{}_3-e^a{}_3e^b{}_2)g^{22}[(g^{00}g^{33}-g^{03}g^{03})T_{023}+g^{03}g^{11}T_{112}]\}\,. \end{aligned} \tag{5.26}$$

As componentes de $T_{\lambda\mu\nu}$ relevantes para o cálculo de L^{ab} são:

$$\begin{aligned} T_{012} &= 0\,, \\ T_{013} &= -A\partial_1 B\,, \\ T_{023} &= -A\partial_2 B\,, \\ T_{112} &= -\frac{1}{2}\partial_2(g_{11})\,, \\ T_{113} &= 0\,, \\ T_{212} &= \frac{1}{2}\partial_1(g_{22})-\sqrt{g_{11}g_{22}}\,, \\ T_{223} &= 0\,, \\ T_{312} &= 0\,, \\ T_{313} &= \frac{1}{2}\partial_1(g_{33})-\sqrt{g_{11}}C\sin^2\theta\,, \\ T_{323} &= \frac{1}{2}\partial_2(g_{33})-\sqrt{g_{22}}C\sin\theta\cos\theta\,. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Com isso, após uma série de manipulações verificamos que a expressão para $M^{(1)(2)}$ pode ser simplificada como:

$$M^{(1)(2)} = 2k\Big[\partial_1\Big(\frac{g_{03}\sqrt{g_{22}}\sin\theta}{\sqrt{(-g_{00})}}\Big) + \partial_2\Big(\frac{g_{03}\sqrt{g_{11}}\cos\theta}{\sqrt{(-g_{00})}}\Big)\Big]\,. \tag{5.28}$$

Para $M^{(0)(3)}$ temos:

$$M^{(0)(3)} \;=\; 2k\Big[\partial_1\Big(\frac{\delta^{1/2}\sqrt{g_{22}}\cos\theta}{\sqrt{(-g_{00})}}\Big) - \partial_2\Big(\frac{\delta^{1/2}\sqrt{g_{11}}\sin\theta}{\sqrt{(-g_{00})}}\Big)\Big]\,. \tag{5.29}$$

As outras componentes de M^{ab} vão gerar componentes do momento angular iguais a zero, porque a sua dependência em relação a ϕ é dado por um $\sin\phi$, um $\cos\phi$, ou um produto de ambos. Isso será nulo quando integrarmos sobre essa variável.

Finalmente, integrando M^{ab}, as componentes do momento angular L^{ab} são:

$$\begin{aligned} L^{(0)(3)} &= -2k\oint_{S\to\infty} d\theta d\phi\Big(\frac{\delta^{1/2}\sqrt{g_{22}}\cos\theta}{\sqrt{(-g_{00})}}\Big)\,, \\ L^{(1)(2)} &= -2k\oint_{S\to\infty} d\theta d\phi\Big(\frac{g_{03}\sqrt{g_{22}}\sin\theta}{\sqrt{(-g_{00})}}\Big)\,. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Devemos notar que, de modo análogo ao que é feito nas referências [19] e [20], o comportamento assintótico da métrica determina se o momento angular é bem definido, especialmente o comportamento das componentes g_{00} e g_{03}, as quais estão intimamente relacionadas às funções lapso e "shift". Ou seja, se o tensor métrico tiver o comportamento assintótico

$$\begin{aligned} g_{03} &\cong O(1/r) + ... \\ g_{22} &\cong r^2 + O(r) + ... \\ -g_{00} &\cong 1 + O(1/r) + ...\,, \end{aligned} \tag{5.31}$$

então o momento angular espacial $L^{(1)(2)}$ será bem definido. As expressões em (5.30) constituem um dos resultados mais importantes desta tese, pois permitem o cálculo do momento angular de uma maneira simples, ou seja, por meio de integrais de superfície, e é invariante por transformações de coordenadas. A seguir vamos calcular o momento angular, considerando-se um observador estático, para uma estrela de nêutrons e para o buraco negro de Kerr.

Estrela de Nêutrons:

Para uma estrela de nêutrons em rotação aproximadamente rígida [49], o tensor métrico é dado pelo elemento de linha:

$$ds^2 = -A'^{\,2}dt^2 + B'^{\,2}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta(d\phi - \omega dt)^2 \,. \tag{5.32}$$

O comportamento desses parâmetros é o seguinte:

Para $r \leq R$,

$$\begin{aligned} A' &= \frac{3}{2}(1 - \frac{8\pi}{3}\rho R^2)^{1/2} - \frac{1}{2}(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r^2)^{1/2} \,, \\ B'^{\,2} &= (1 - \frac{8\pi}{3}\rho r^2)^{-1} \,, \\ \omega &= \omega(0)[1 - b\Big(\frac{r}{R}\Big)^2 - b\tau\Big(\frac{r}{R}\Big)^4] \,, \end{aligned} \tag{5.33}$$

para $r \geq R$,

$$\begin{aligned} A'^{\,2} &= [1 - \frac{2m(R)}{r}] \,, \\ B'^{\,2} &= [1 - \frac{2m(R)}{r}]^{-1} \,, \\ \omega &= 2Jr^{-3} \,, \end{aligned} \tag{5.34}$$

onde R é o raio da estrela, ω é a velocidade de observadores inerciais ao longo do eixo de rotação, ρ é a densidade (uniforme) da estrela e J é o momento angular da estrela. A quantidade b é definida por $b = 3/(5 + 7\tau)$, onde τ é um parâmetro livre.

Para calcular $L^{(0)(3)}$ vamos utilizar a primeira expressão de (5.30). Lembrando que $\delta^{1/2} = A'r\sin\theta$, $\sqrt{-g_{00}} = (A'^{\,2} - \omega^2r^2\sin^2\theta)^{1/2}$, $\sqrt{g_{22}} = r$ e $\omega r^3 = 2J$, então:

$$L^{(0)(3)} = -4\pi k \lim_{r\to\infty} \int_0^\pi d\theta \frac{A'r^2\sin\theta\cos\theta}{(A'^{\,2} - 2J\sin^2\theta/r)^{1/2}} \,, \tag{5.35}$$

uma vez que o denominador da expressão acima tende a 1 com $r \to \infty$, claro que $L^{(0)(3)}$ é zero, pois $\int_0^\pi d\theta \sin\theta\cos\theta = 0$.

Vamos usar a segunda expressão de (5.30) e calcular $L^{(1)(2)}$. Considerando que $g_{03} = -\omega r^2\sin^2\theta$ $\sqrt{-g_{00}} = (A'^{\,2} - \omega^2r^2\sin^2\theta)^{1/2}$, $\sqrt{g_{22}} = r$ e $\omega r^3 = 2J$, então:

$$L^{(1)(2)} = -4\pi k \lim_{r\to\infty} \int_0^{\pi} d\theta \frac{\omega r^3 \sin^3\theta}{(A'^{\,2} - 2J\sin^2\theta/r)^{1/2}} = 8k\pi J \int_0^{\pi} d\theta \sin^3\theta\,. \tag{5.36}$$

Assim, considerando que $\int_0^{\pi} d\theta \sin^3\theta = \frac{4}{3}$, o momento angular gravitacional resulta em:

$$L^{(1)(2)} = \frac{2}{3} J\,. \tag{5.37}$$

Onde substituímos o valor $k = \frac{1}{16\pi}$. Deste modo, o momento angular do campo é dado em termos do momento angular da fonte.

Buraco Negro de Kerr:

Para o buraco negro de Kerr, o tensor métrico é estabelecido pelo elemento de linha:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\psi^2}{\rho^2}dt^2 - \frac{2\chi\sin^2\theta}{\rho^2}\,d\phi\,dt + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 \\ &\quad +\rho^2 d\theta^2 + \frac{\Sigma^2\sin^2\theta}{\rho^2}d\phi^2\,, \end{aligned} \tag{5.38}$$

com

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 + a^2 - 2mr\,, \\ \rho^2 &= r^2 + a^2\cos^2\theta\,, \\ \Sigma^2 &= (r^2+a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta\,, \\ \psi^2 &= \Delta - a^2\sin^2\theta\,, \\ \chi &= 2amr\,. \end{aligned} \tag{5.39}$$

As expressões (5.30) foram obtidas considerando-se o campo de tétradas (5.24), adaptado a observadores estáticos. No caso do sistema que estamos tratando, ou seja, o buraco negro de Kerr, sabemos que não é possível existir um observador estático na região definida por $r_+ < r < r^*$, chamada de ergoesfera, onde $r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2}$ e $r^* = m + \sqrt{m^2 + a^2\cos^2\theta}$. Por esse motivo a região de integração, em relação à coordenada r, será definida de $r = r^*$ (superfície externa da ergoesfera) até $r \to \infty$. Para as outras coordenadas temos θ variando de 0 a π e ϕ variando de 0 a 2π.

Primeiramente vamos obter o valor de $L^{(0)(3)}$. Se especificarmos as quantidades que aparecem em (5.30) quando aplicadas à configuração definida por (5.39), obtemos para $L^{(0)(3)}$ a seguinte expressão:

$$L^{(0)(3)} = -4k\pi[\lim_{r\to\infty} I(r) - \lim_{r\to r^*} I(r)]\,, \tag{5.40}$$

onde $I(r)$ é uma expressão definida por:

$$I(r) = \int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos\theta \Big[\frac{\chi^2}{\psi^2}\sin^2\theta - \Sigma^2\Big]^{1/2}. \tag{5.41}$$

Vemos que $I(r)$ é igual a zero, pois essa integral pode ser transformada por uma mudança de coordenadas em $\int_{-1}^{1} dx\, x f(x^2)$, que obviamente é igual a zero seja qual for a forma de $f(x^2)$. Consequentemente temos $L^{(0)(3)} = 0$. Para $L^{(1)(2)}$ obtemos:

$$L^{(1)(2)} = -4k\pi[\lim_{r\to\infty} I'(r) - \lim_{r\to r^*} I'(r)]\,, \tag{5.42}$$

onde $I'(r)$ é uma expressão definida por:

$$I'(r) = \int_0^\pi d\theta \frac{\chi}{\psi}\sin^3\theta\,. \tag{5.43}$$

Vemos que dos dois termos da expressão (5.42), o primeiro deles é bem definido, uma vez que $\lim_{r\to\infty} I'(r) = -\frac{8}{3}am$. O segundo termo é divergente, pois na superfície da ergoesfera, ou seja, quando $r = r^*$, a função ψ tende a zero. Isso resulta em uma indeterminação no cálculo do segundo limite em (5.42), entretanto podemos contornar essa situação regularizando a expressão de $L^{(1)(2)}$, isso é feito subtraindo-se o termo divergente. Com isso, o momento angular do campo gravitacional para o buraco negro de Kerr é:

$$L^{(1)(2)} = \frac{2}{3}am\,, \tag{5.44}$$

onde novamente utilizamos que $k = \frac{1}{16\pi}$. Devemos destacar novamente que $L^{(1)(2)}$ é dado em termos do momento angular da fonte $J_s = ma$.

5.3.2 Observador em Rotação para o Buraco Negro de Kerr

Para tratarmos o buraco negro de Kerr do ponto de vista de outro observador que não o estático, vamos primeiramente supor o seguinte campo de tétradas:

$$e_{a\mu} = \begin{pmatrix} -\frac{\Lambda}{\rho\Sigma} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\chi}{\rho\Sigma}\sin\theta\sin\phi & \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}}\sin\theta\cos\phi & \rho\cos\theta\cos\phi & -\frac{\Sigma}{\rho}\sin\theta\sin\phi \\ -\frac{\chi}{\rho\Sigma}\sin\theta\cos\phi & \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}}\sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \frac{\Sigma}{\rho}\sin\theta\cos\phi \\ 0 & \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}}\cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \qquad (5.45)$$

onde $\Lambda^2 = \Sigma^2\psi^2 + \chi^2\sin^2\theta$ e o determinante de $e^a{}_\mu$ é $e = \frac{\Lambda}{\sqrt{\Delta}}\sin\theta$. Esse campo de tétradas gera o campo de velocidade:

$$e_{(0)}{}^{\mu} = \frac{\rho\Sigma}{\Lambda}\left(1,\, 0,\, 0,\, \frac{\chi}{\Sigma^2}\right), \qquad (5.46)$$

com isso, podemos concluir que o campo de tétradas (5.45) é adaptado a um observador em rotação, com velocidade angular $\Omega(r) = \frac{\chi}{\Sigma^2}$.

Após longos cálculos chegamos à seguinte expressão para M^{ab}:

$$\begin{aligned} M^{ab} \;=\; & -2ke\{(e^a{}_0e^b{}_1 - e^a{}_1e^b{}_0)g^{11}[(g^{00}g^{33} - g^{03}g^{03})T_{313} + g^{00}g^{22}T_{212}] + \\ & +(e^a{}_0e^b{}_2 - e^a{}_2e^b{}_0)g^{22}[(g^{00}g^{33} - g^{03}g^{03})T_{323} - g^{00}g^{11}T_{112}] - \\ & -(e^a{}_0e^b{}_3 - e^a{}_3e^b{}_0)(g^{00}g^{33} - g^{03}g^{03})(g^{11}T_{113} - g^{22}T_{223}) + \\ & +(e^a{}_1e^b{}_2 - e^a{}_2e^b{}_1)g^{11}g^{22}(g^{00}T_{012} + g^{03}T_{312}) + \\ & +(e^a{}_1e^b{}_3 - e^a{}_3e^b{}_1)g^{11}[(g^{00}g^{33} - g^{03}g^{03})T_{013} - g^{03}g^{22}T_{212}] + \\ & +(e^a{}_2e^b{}_3 - e^a{}_3e^b{}_2)g^{22}[(g^{00}g^{33} - g^{03}g^{03})T_{023} + g^{03}g^{11}T_{112}]\}\,. \end{aligned} \qquad (5.47)$$

As componentes do tensor de torção que aparecem na expressão acima são:

$$
\begin{aligned}
T_{012} &= 0\,, \\
T_{013} &= \Big[-\frac{\chi}{\Sigma\rho}\partial_1\Big(\frac{\Sigma}{\rho}\Big)+\frac{\chi}{\Sigma\sqrt{\Delta}}\Big]\sin^2\theta\,, \\
T_{023} &= -\frac{\chi}{2\Sigma^2}\partial_2[\Big(\frac{\Sigma\sin\theta}{\rho}\Big)^2]+\frac{\chi}{\Sigma}\sin\theta\cos\theta\,, \\
T_{112} &= -\frac{1}{2}\partial_2\Big(\frac{\rho^2}{\Delta}\Big)\,, \\
T_{113} &= 0\,, \\
T_{212} &= \frac{1}{2}\partial_1(\rho^2)-\frac{\rho^2}{\sqrt{\Delta}}\,, \\
T_{223} &= 0\,, \\
T_{312} &= 0\,, \\
T_{313} &= \frac{1}{2}\partial_1\Big(\frac{\Sigma^2\sin^2\theta}{\rho^2}\Big)-\frac{\Sigma\sin^2\theta}{\sqrt{\Delta}}\,, \\
T_{323} &= \frac{1}{2}\partial_2\Big(\frac{\Sigma^2\sin^2\theta}{\rho^2}\Big)-\Sigma\sin\theta\cos\theta\,.
\end{aligned}
\tag{5.48}
$$

Antes de calcularmos as componentes de M^{ab} devemos lembrar que $M^{(0)(1)}$, $M^{(0)(2)}$, $M^{(1)(3)}$ e $M^{(2)(3)}$ não vão contribuir para o momento angular. Isso se deve ao fato que a dependência dessas quantidades em relação à coordenada ϕ ser dada em termos de um $\sin\phi$ ou um $\cos\phi$. Podemos garantir isso porque, na expressão de M^{ab}, nem $g^{\mu\nu}$ nem $T^{\mu\nu\lambda}$ são funções de ϕ, essa dependência só pode aparecer nas expressões $e^a{}_0e^b{}_1 - e^a{}_1e^b{}_0$, $e^a{}_0e^b{}_2 - e^a{}_2e^b{}_0$, $e^a{}_1e^b{}_3 - e^a{}_3e^b{}_1$ e $e^a{}_2e^b{}_3 - e^a{}_3e^b{}_2$, para $a = (0),(1),(2)$ e $b = (1),(2),(3)$. Explicitamente temos:

$$
e^{(0)}{}_0e^{(1)}{}_1 - e^{(0)}{}_1e^{(1)}{}_0 = \frac{\Lambda}{\Sigma\sqrt{\Delta}}\sin\theta\cos\phi\,,
$$

$$
e^{(0)}{}_0e^{(2)}{}_1 - e^{(0)}{}_1e^{(2)}{}_0 = \frac{\Lambda}{\Sigma\sqrt{\Delta}}\sin\theta\sin\phi\,,
$$

$$
e^{(0)}{}_0e^{(1)}{}_2 - e^{(0)}{}_2e^{(1)}{}_0 = \frac{\Lambda}{\Sigma}\cos\theta\cos\phi\,,
$$

$$
e^{(0)}{}_0e^{(2)}{}_2 - e^{(0)}{}_2e^{(2)}{}_0 = \frac{\Lambda}{\Sigma}\cos\theta\sin\phi\,,
$$

$$
e^{(1)}{}_0e^{(3)}{}_1 - e^{(1)}{}_1e^{(3)}{}_0 = \frac{\Lambda}{\Sigma\sqrt{\Delta}}\sin\theta\cos\theta\sin\phi\,,
$$

$$e^{(2)}{}_0 e^{(3)}{}_1 - e^{(2)}{}_1 e^{(3)}{}_0 = -\frac{\Lambda}{\Sigma\sqrt{\Delta}} \sin\theta\cos\theta\cos\phi\,,$$
$$e^{(1)}{}_0 e^{(3)}{}_2 - e^{(1)}{}_2 e^{(3)}{}_0 = -\frac{\chi}{\Sigma} \sin^2\theta\sin\phi\,,$$
$$e^{(2)}{}_0 e^{(3)}{}_2 - e^{(2)}{}_2 e^{(3)}{}_0 = \frac{\chi}{\Sigma} \sin^2\theta\cos\phi\,,$$
$$e^{(1)}{}_1 e^{(3)}{}_3 - e^{(1)}{}_3 e^{(3)}{}_1 = \frac{\Sigma}{\sqrt{\Delta}} \sin\theta\cos\theta\sin\phi\,,$$
$$e^{(2)}{}_1 e^{(3)}{}_3 - e^{(2)}{}_3 e^{(3)}{}_1 = -\frac{\Sigma}{\sqrt{\Delta}} \sin\theta\cos\theta\cos\phi\,,$$
$$e^{(1)}{}_2 e^{(3)}{}_3 - e^{(1)}{}_3 e^{(3)}{}_2 = -\Sigma\sin^2\theta\sin\phi\,,$$
$$e^{(2)}{}_2 e^{(3)}{}_3 - e^{(2)}{}_3 e^{(3)}{}_2 = \Sigma\sin^2\theta\cos\phi\,.$$

Devido ao fato de que $e^{(0)}{}_i = 0$, as outras combinações serão iguais a zero. Quando integrarmos em ϕ, claro que o resultado será zero.

Substituindo (5.47) em (5.48) e após algumas manipulações algébricas obtemos para $M^{(0)(3)}$ a expressão:

$$M^{(0)(3)} = -2k\Big[\partial_2\Big(\frac{\Sigma\sin^2\theta}{\sqrt{\Delta}}\Big) - \partial_1\Big(\Sigma\sin\theta\cos\theta\Big)\Big]\,. \tag{5.49}$$

Para calcularmos $L^{(0)(3)}$, devemos integrar a expressão acima. Como resultado obtemos:

$$L^{(0)(3)} = 0\,. \tag{5.50}$$

A componente $M^{(1)(2)}$ pode ser calculada uma vez que as seguintes relações são estabelecidas:

$$\begin{aligned}
(e^{(1)}{}_0 e^{(2)}{}_1 - e^{(1)}{}_1 e^{(2)}{}_0) &= \frac{\chi}{\Sigma^2}(e^{(1)}{}_1 e^{(2)}{}_3 - e^{(1)}{}_3 e^{(2)}{}_1) \\
(e^{(1)}{}_0 e^{(2)}{}_2 - e^{(1)}{}_2 e^{(2)}{}_0) &= \frac{\chi}{\Sigma^2}(e^{(1)}{}_2 e^{(2)}{}_3 - e^{(1)}{}_3 e^{(2)}{}_2) \\
T_{013} &= -\frac{\chi}{\Sigma^2} T_{313} \\
T_{023} &= -\frac{\chi}{\Sigma^2} T_{323}\,,
\end{aligned} \tag{5.51}$$

assim, imediatamente obtemos:

$$M^{(1)(2)} = 0\,. \tag{5.52}$$

A componnete $L^{(1)(2)}$ será obviamente igual a zero.

Como resultado o momento angular será:

$$L^{ab} = 0\,. \tag{5.53}$$

Esse resultado não é surpreendente, ao contrário, é um resultado esperado dada a natureza do campo de tétradas que utilizamos no cálculo, que é adaptado a um campo de observadores em rotação, arrastados pelo campo gravitacional do espaço-tempo de Kerr. Estes observadores não conseguem medir a rotação do buraco negro.

5.4 O Significado de $L^{(0)(i)}$

Para algumas configurações há a possibilidade de termos $L^{(0)(i)} \neq 0$, o significado disso discutiremos a seguir. Primeiramente considere o momento angular de um conjunto de partículas relativísticas [50]:

$$L^{\alpha\beta} = x^{\alpha}P^{\beta} - x^{\beta}P^{\alpha}\,, \tag{5.54}$$

onde x^{α} é a coordenada de cada partícula e P^{α} é o quadri-momento canônico. Com isso, temos o momento angular espacial para cada partícula, definido pelo vetor $\mathbf{L} = (L^{23}, -L^{13}, L^{12})$. Do mesmo, modo as componentes de L^{0i} formam um vetor $\mathbf{I}$, dado por:

$$\mathbf{I} = (L^{01}, L^{02}, L^{03})\,. \tag{5.55}$$

No sistema constituido por n partículas, vamos introduzir um índice k para designar cada partícula. Na ausência de torque externo o momento angular do sistema se conserva, por consequência, o vetor **I** total será uma integral de movimento. Assim, temos:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{I}_k = \sum_{k=1}^{n} (t\mathbf{P}_k - \varepsilon_k \mathbf{r}_k) = cte\,, \tag{5.56}$$

com $\mathbf{r}_k$, $\mathbf{P}_k$ e ε_k o vetor posição, o momento e a energia de cada partícula, respectivamente. Como a energia total também é conservada, podemos definir o centro-de-inércia relativístico e a velocidade do sistema, repectivamente, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \mathbf{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k}\,, \\ \mathbf{V} &= \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k}{\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k}\,. \end{aligned} \tag{5.57}$$

Vemos imediatamente que essas duas quantidades são dependentes do sistema de referência. Substituindo as definições (5.57) em (5.56) podemos reescrever essa relação de uma maneira bem mais clara para os nossos propósitos, ou seja:

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}t + \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{I}_k}{\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k}\,. \tag{5.58}$$

Vemos que na expressão acima o vetor **I**, definido a partir das componentes L^{0i} do momento angular para um sistema de partículas, tem íntima relação com o centro-de-inércia relativístico do sistema.

O termo centro-de-massa é por nós preterido, pois, quando estendemos os conceitos discutidos nesta seção para campos [51, 52], esse termo não faz sentido, uma vez que um campo não possui massa. Fundamentalmente podemos fazer a mesma interpretação das componentes do momento angular definido tanto para campos quanto para um sistema de partículas relativísticas. Por isso vamos interpretar a quantidade $L^{(i)(j)}$ como sendo o momento angular espacial do campo gravitacional e a quantidade $L^{(0)(i)}$ como sendo o centro-de-inércia do campo gravitacional.

5.5 Helicidade das Ondas Gravitacionais

Quando pensamos em ondas gravitacionais duas configurações nos vêm à mente. A primeira é relativa à métrica de Bondi [53], ou seja uma fonte que perde massa por meio de radiação de ondas gravitacionais. A segunda configuração é uma onda plana como solução exata das equações de Einstein. A seguir exploraremos cada uma delas.

5.5.1 A Métrica de Bondi

O tensor métrico de Bondi [54] é dado por:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\Big(\frac{V}{r}e^{2\beta} - U^2r^2e^{2\gamma}\Big)du^2 - 2e^{2\beta}dudr - 2Ur^2e^{2\gamma}dud\theta + \\ &+ r^2(e^{2\gamma}d\theta^2 + e^{-2\gamma}\sin^2\theta d\phi^2)\,, \end{aligned} \tag{5.59}$$

onde (r, θ, ϕ) são as coordenadas esféricas usuais e u é o tempo retardado. A métrica de Bondi não é uma solução exata das equações de Einstein, é uma solução aproximada que não tem validade para valores pequenos de r.

As quantidades acima têm o seguinte comportamento assintótico:

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{c^2}{4r^2} + \cdots \\ \gamma &= \frac{c}{r} + \cdots \\ \frac{V}{r} &= 1 - \frac{2M}{r} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{r^2}\Big[\frac{\partial d}{\partial\theta} + d\,\cos\theta - \Big(\frac{\partial c}{\partial\theta}\Big)^2 - 4c\Big(\frac{\partial c}{\partial\theta}\Big)\cot\theta \\
& -\frac{1}{2}c^2\Big(1 + 8\cot^2\theta\Big)\Big] + \cdots \\
U \;\; = \;\; & -\frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial c}{\partial\theta} + 2c\cot\theta\Big) \\
& +\frac{1}{r^3}\Big(2d + 3c\frac{\partial c}{\partial\theta}\cot\theta + 4c^2\cot\theta\Big) + \cdots\,, \qquad (5.60)
\end{aligned}
$$

onde $M = M(u,\theta)$ e $d = d(u,\theta)$ são relativos à informação de massa e dipolo, respectivamente. A partir da função $c(u,\theta)$ podemos definir a função “news", $\dot{c} = (\partial c(u,\theta))/\partial u$. O tensor métrico inverso é dado por

$$
g^{\mu\nu}(u,r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-2\beta} & 0 & 0 \\ -e^{-2\beta} & e^{-2\beta}\frac{V}{r} & -e^{-2\beta}U & 0 \\ 0 & -e^{-2\beta}U & \frac{e^{-2\gamma}}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^{2\gamma}}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}\,. \qquad (5.61)
$$

A tétrada mais simples que gera (5.59), adaptada a um observador estático, é dada por:

$$
e_{a\mu} = \begin{pmatrix} -A & -B & -C & 0 \\ 0 & B\sin\theta\cos\phi & D\cos\theta\cos\phi + C\sin\theta\cos\phi & -E\sin\theta\sin\phi \\ 0 & B\sin\theta\sin\phi & D\cos\theta\sin\phi + C\sin\theta\sin\phi & E\sin\theta\cos\phi \\ 0 & B\cos\theta & -D\sin\theta + C\cos\theta & 0 \end{pmatrix}\,, \qquad (5.62)
$$

onde $e = ABDE\sin\theta$ e A, B, C, D e E são definidos como

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \Big(\frac{V}{r}e^{2\beta} - U^2r^2e^{2\gamma}\Big)\,, \\
AB &= e^{2\beta}\,, \\
AC &= e^{2\gamma}Ur^2\,, \\
D^2 &= r^2e^{2\gamma}\,, \\
E^2 &= r^2e^{-2\gamma}\,. \qquad (5.63)
\end{aligned}
$$

Essa tétrada é adaptada a um observador estático pois obedece à relação $e^{(i)}{}_0 = e_{(0)}{}^k = 0$.

Para M^{ab}, encontramos a seguinte expressão em termos das componentes do tensor de torção:

$$\begin{aligned}
M^{ab} &= 2ke\{(e^a{}_0 e^b{}_1 - e^a{}_1 e^b{}_0) g^{01} g^{01} (g^{33} T_{313} + g^{22} T_{212}) - \\
&\quad -(e^a{}_0 e^b{}_2 - e^a{}_2 e^b{}_0) g^{01} g^{01} g^{22} T_{112} - (e^a{}_0 e^b{}_3 - e^a{}_3 e^b{}_0) g^{01} g^{01} g^{33} T_{113} + \\
&\quad +(e^a{}_1 e^b{}_2 - e^a{}_2 e^b{}_1) g^{01} [g^{22}(g^{01} T_{012} + g^{13} T_{312}) - g^{33}(g^{12} T_{313} + g^{22} T_{323})] + \\
&\quad +(e^a{}_1 e^b{}_3 - e^a{}_3 e^b{}_1) g^{01} g^{33} (g^{01} T_{013} + g^{12} T_{213} + g^{22} T_{223}) - \\
&\quad -(e^a{}_2 e^b{}_3 - e^a{}_3 e^b{}_2) g^{01} g^{33} (g^{12} T_{113} + g^{22} T_{123})\}\,. \qquad (5.64)
\end{aligned}$$

Calculando as componentes relevantes para o cálculo de M^{ab} do tensor de torção, encontramos:

$$\begin{aligned}
T_{012} &= A\partial_2 B - A\partial_1 C\,, \\
T_{013} &= 0\,, \\
T_{112} &= 0\,, \\
T_{113} &= 0\,, \\
T_{212} &= \frac{1}{2}\partial_1(D^2) - BD\,, \\
T_{223} &= 0\,, \\
T_{312} &= 0\,, \\
T_{313} &= \frac{1}{2}\partial_1(E^2 \sin^2\theta) - BE\sin^2\theta\,, \\
T_{323} &= \frac{1}{2}\partial_2(E^2 \sin^2\theta) - CE\sin^2\theta - ED\sin\theta\cos\theta\,, \\
T_{123} &= 0\,, \\
T_{213} &= 0\,. \qquad (5.65)
\end{aligned}$$

Analisando a expressão (5.64), levando-se em consideração (5.65), vemos que tanto $M^{(0)(1)}$ quanto $M^{(0)(2)}$ não contribuirão para o momento angular. Isso pode se entendido quando tomamos o valor das expressões $(e^a{}_0 e^b{}_1 - e^a{}_1 e^b{}_0)$ e $(e^a{}_1 e^b{}_2 - e^a{}_2 e^b{}_1)$ para $a = (0)$ e $b = (1), (2)$. Ou seja,

$$e^{(0)}{}_0 e^{(1)}{}_1 - e^{(0)}{}_1 e^{(1)}{}_0 = AB \sin\theta \cos\phi \,,$$

$$e^{(0)}{}_1 e^{(2)}{}_2 - e^{(0)}{}_2 e^{(2)}{}_1 = AB \sin\theta \sin\phi \,,$$

$$e^{(0)}{}_0 e^{(1)}{}_1 - e^{(0)}{}_1 e^{(1)}{}_0 = BD \cos\theta \cos\phi \,,$$

$$e^{(0)}{}_1 e^{(2)}{}_2 - e^{(0)}{}_2 e^{(2)}{}_1 = BD \cos\theta \sin\phi \,.$$

Quando integramos as expressões acima na coordenada ϕ, elas gerarão os respectivos componentes do momento angular iguais a zero, pois $\int_0^{2\pi} \sin\phi = \int_0^{2\pi} \cos\phi = 0$.

Para a componente $M^{(0)(3)}$ não podemos usar o argumento acima, é necessário calcularmos explicitamente. Após algumas manipulações algébricas chegamos a:

$$M^{(0)(3)} = 2k\Big\{\partial_2[\,(r - EB)\sin^2\theta\,] + \partial_1(EC\sin^2\theta)\Big\}\,. \qquad (5.66)$$

Se integrarmos a expressão acima em θ e ϕ, imediatamente concluiremos que o primeiro termo será igual a zero pois $\sin^2\theta\Big|_0^\pi = 0$. O segundo termo também será nulo uma vez que $C = \frac{e^{2\gamma}Ur^2}{A}$ e $\lim_{r\to\infty}\int_0^\pi d\theta\, r^3 U \sin^2\theta = \int_0^\pi d\theta \frac{\partial}{\partial\theta}(c\sin^2\theta) = 0$. Portanto, encontramos para $L^{(0)(3)}$ o seguinte resultado:

$$L^{(0)(3)} = 0\,. \qquad (5.67)$$

Assim como $M^{(0)(1)}$ e $M^{(0)(2)}$ as componentes $M^{(i)(j)}$ também não vão contribuir para o momento angular. A razão disso é que as expressões $(e^a{}_1 e^b{}_2 - e^a{}_2 e^b{}_1)$ para $a = (1), (2)$ e $b = (2), (3)$, serão dadas em termos de $\sin\phi$ ou $\cos\phi$. Explicitamente, temos:

$$e^{(1)}{}_1 e^{(2)}{}_2 - e^{(1)}{}_2 e^{(2)}{}_1 = 0\,,$$

$$e^{(1)}{}_1 e^{(3)}{}_2 - e^{(1)}{}_2 e^{(3)}{}_1 = -BD\cos\phi\,,$$

$$e^{(2)}{}_1 e^{(3)}{}_2 - e^{(2)}{}_2 e^{(3)}{}_1 = -BD\sin\phi\,.$$

Quando integrarmos essas expressões em ϕ o resultado será zero. Além disso, devemos lembrar que ${e^{(i)}}_0 = 0$ o que anula a primeira linha de (5.64). Como resultado teremos o momento angular gravitacional igual a zero, ou seja:

$$L^{ab} = 0\,. \tag{5.68}$$

Com isso, o vetor de Pauli-Lubanski $W_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}P^bL^{cd}$ é igual a zero. Consequentemente, o invariante de Caismir W^2, também será igual a zero.

Para calcularmos a helicidade é necessário conhecermos o outro invariante de Casimir P^2. Se esses dois invariantes de Casimir forem nulos simultaneamente então as quantidades W^a e P^a serão linearmente dependentes, ou seja, um pode ser escrito como combinação linear do outro. A constante λ que os relaciona na expressão $W^a = \lambda P^a$ é chamada de helicidade.

As componentes de $\Sigma^{\mu\nu\lambda}$ relevantes para o cálculo de P^a são:

$$\begin{aligned}
\Sigma^{001} &= -\frac{1}{2}g^{01}g^{01}(g^{22}T_{212} + g^{33}T_{313}) \\
\Sigma^{101} &= \frac{1}{2}g^{01}g^{01}(g^{22}T_{202} + g^{33}T_{303}) \\
\Sigma^{201} &= \frac{1}{4}g^{01}g^{01}g^{22}(T_{012} - T_{102} - T_{201}) - \frac{1}{2}g^{01}g^{12}g^{33}T_{313} \\
\Sigma^{301} &= 0\,,
\end{aligned} \tag{5.69}$$

substituindo as componentes do tensor de torção e manipulando algebricamente cada uma das expressões em (5.69), encontramos:

$$\begin{aligned}
\Sigma^{001} &= -\frac{1}{2}\frac{e^{-4\beta}}{r}[2 - B(e^{\gamma} + e^{-\gamma})] \\
\Sigma^{101} &= \frac{1}{2}e^{-4\beta-2\gamma}\frac{C}{r^2}\partial_2 A \\
\Sigma^{201} &= \frac{1}{4}\frac{e^{-4\beta-2\gamma}}{r^2}[A\partial_2 B - B\partial_2 A\partial_1(AC)] + \\
&+ \frac{1}{2}e^{-4\beta+2\gamma}\frac{UE}{r^2}(\partial_1 E - B)\,.
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Agora, estamos aptos a calcular P^a. Nesse caso supomos uma superfície esférica com raio tendendo ao infinito, com isso, temos:

$$P^a = \lim_{r\to\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta d\phi e \Sigma^{a01} \,. \qquad (5.71)$$

Lembrando que $\Sigma^{a01} = e^a{}_0\Sigma^{001} + e^a{}_1\Sigma^{101} + e^a{}_2\Sigma^{201}$, podemos calcular as componentes de P^a substituindo as expressões (5.70) em (5.71), como resultado obtemos:

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta M(u,\theta) \\ P^{(1)} &= 0 \\ P^{(2)} &= 0 \\ P^{(3)} &= 0 \,, \end{aligned} \qquad (5.72)$$

obviamente o invariante de Casimir P^2 será diferente de zero, isso nos impossibilita de determinar a helicidade para esse caso. Conforme já haviamos apontado, isso significa que W_a e P_a são linearmente independentes, ou seja, o coeficiente que os relaciona é o trivial, o qual é igual a zero.

5.5.2 A Onda Plana Não Linear

Consideramos uma métrica para uma onda gravitacional [55] dada por:

$$ds^2 = (\frac{1}{2}H - 1)dt^2 - Hdtdz + dx^2 + dy^2 + (\frac{1}{2}H + 1)dz^2 \,. \qquad (5.73)$$

A métrica contravariante é:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}H - 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}H \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}H & 0 & 0 & -\frac{1}{2}H + 1 \end{pmatrix} , \qquad (5.74)$$

com $H = H(x, y, z - t)$, obedecendo a seguinte equação: $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)H = 0$.

Vamos escolher um observador estático adaptado a esse sistema em coordenadas cartesianas, para isso lembremos da condição para observadores estáticos $u^i = e_{(0)}{}^i = 0$ que é equivalente a $e^{(k)}{}_0 = 0$. Para montarmos o campo de tétradas em coordenadas cartesianas usamos a estrutura do campo de tétradas no espaço-tempo plano, ou seja $e^a{}_\mu = \delta^a_\mu$, da mesma maneira como fizemos no caso de coordenadas esféricas. Assim, o campo de tétradas que obedece a esses requisitos é:

$$e_{a\mu} = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & -B \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \tag{5.75}$$

onde

$$\begin{aligned} A &= (-\frac{1}{2}H + 1)^{\frac{1}{2}}\,, \\ AB &= \frac{1}{2}H\,, \\ AC &= 1\,. \end{aligned} \tag{5.76}$$

O determinante da tétrada é $e = 1$. Devemos notar que fazendo $H = 0$, temos $e^a{}_\mu = \delta^a_\mu$, ou seja, recuperamos a estrutura o espaço-tempo plano como era de se esperar.

Calculando M^{ab} encontramos:

$$\begin{aligned} M^{ab} &= -2ke\{(e^a{}_0 e^b{}_1 - e^a{}_1 e^b{}_0) g^{11}[(g^{00}g^{33} - g^{03}g^{03})T_{313} + g^{00}g^{22}T_{212}] + \\ &+(e^a{}_0 e^b{}_2 - e^a{}_2 e^b{}_0) g^{22}[(g^{00}g^{33} - g^{03}g^{03})T_{323} - g^{00}g^{11}T_{112}] - \\ &-(e^a{}_0 e^b{}_3 - e^a{}_3 e^b{}_0)(g^{00}g^{33} - g^{03}g^{03})(g^{11}T_{113} - g^{22}T_{223}) + \\ &+(e^a{}_1 e^b{}_2 - e^a{}_2 e^b{}_1) g^{11}g^{22}(g^{00}T_{012} + g^{03}T_{312}) + \\ &+(e^a{}_1 e^b{}_3 - e^a{}_3 e^b{}_1) g^{11}[(g^{00}g^{33} - g^{03}g^{03})T_{013} - g^{03}g^{22}T_{212}] + \\ &+(e^a{}_2 e^b{}_3 - e^a{}_3 e^b{}_2) g^{22}[(g^{00}g^{33} - g^{03}g^{03})T_{023} + g^{03}g^{11}T_{112}]\}\,. \end{aligned} \tag{5.77}$$

As componentes de $T_{\lambda\mu\nu}$ relevantes são:

$$
\begin{aligned}
T_{012} &= 0\,, \\
T_{013} &= -A\partial_1 B\,, \\
T_{023} &= -A\partial_2 B\,, \\
T_{112} &= 0\,, \\
T_{113} &= 0\,, \\
T_{212} &= 0\,, \\
T_{223} &= 0\,, \\
T_{312} &= 0\,, \\
T_{313} &= \frac{1}{2}\partial_1(\frac{1}{2}H+1)\,, \\
T_{323} &= \frac{1}{2}\partial_2(\frac{1}{2}H+1)\,.
\end{aligned}
\tag{5.78}
$$

Com isso, as componentes de M^{ab} não nulas são:

$$
\begin{aligned}
M^{(0)(1)} &= 2k\partial_1(C)\,, \\
M^{(0)(2)} &= 2k\partial_2(C)\,, \\
M^{(1)(3)} &= -2k\partial_1(B)\,, \\
M^{(2)(3)} &= -2k\partial_2(B)\,.
\end{aligned}
\tag{5.79}
$$

Agora, basta integrar (5.79) em um volume V do espaço-tempo, para encontrarmos L^{ab}, ou seja:

$$
\begin{aligned}
L^{(0)(1)} &= 2k\int_V d^3x\partial_x\Big(\frac{1}{(1-\frac{1}{2}H)^{1/2}}\Big)\,, \\
L^{(0)(2)} &= 2k\int_V d^3x\partial_y\Big(\frac{1}{(1-\frac{1}{2}H)^{1/2}}\Big)\,, \\
L^{(1)(3)} &= -2k\int_V d^3x\partial_x\Big(\frac{H/2}{(1-\frac{1}{2}H)^{1/2}}\Big)\,, \\
L^{(2)(3)} &= -2k\int_V d^3x\partial_y\Big(\frac{H/2}{(1-\frac{1}{2}H)^{1/2}}\Big)\,.
\end{aligned}
\tag{5.80}
$$

Vemos que o momento angular espacial possui uma componente na direção x e outra na direção y, essas quantidades são identificadas com os estados de polarização da onda plana. As outras componentes do momento angular representam o centro-de-inércia, conforme discutido anteriormente.

Para calcularmos P^a temos que calcular as componentes de Σ^{a0i}. As componentes relevantes para o cálculo (e não nulas) são:

$$
\begin{aligned}
\Sigma^{(0)01} &= -\frac{1}{8A}\partial_1(H)\,, \\
\Sigma^{(0)02} &= -\frac{1}{8A}\partial_2(H)\,, \\
\Sigma^{(1)01} &= \frac{1}{8A^2}\partial_0(H)\,, \\
\Sigma^{(1)03} &= \frac{1}{8A^2}\partial_1(H)\,, \\
\Sigma^{(2)02} &= \frac{1}{8A^2}\partial_0(H)\,, \\
\Sigma^{(2)03} &= \frac{1}{8A^2}\partial_2(H)\,, \\
\Sigma^{(3)01} &= -\frac{1}{8A}\partial_1(H)\,, \\
\Sigma^{(3)02} &= -\frac{1}{8A}\partial_2(H)\,.
\end{aligned} \tag{5.81}
$$

Assim, as componentes de P^a são:

$$
\begin{aligned}
P^{(0)} &= -\frac{1}{2}k\int_V d^3x\Big[\partial_x\Big(\frac{\partial_x H}{A}\Big)+\partial_y\Big(\frac{\partial_y H}{A}\Big)\Big]\,, \\
P^{(1)} &= 0\,, \\
P^{(2)} &= 0\,, \\
P^{(3)} &= -\frac{1}{2}k\int_V d^3x\Big[\partial_x\Big(\frac{\partial_x H}{A}\Big)+\partial_y\Big(\frac{\partial_y H}{A}\Big)\Big]\,.
\end{aligned} \tag{5.82}
$$

Consequentemente um dos invariantes de Casimir será $P^2 = 0$, o que é compatível com solução de onda plana [56]. Uma característica curiosa a respeito deste sistema surge quando desenvolvemos a expressão da energia em (5.82), ou seja, aplicando as respectivas derivadas parciais e usando a relação $\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)H = 0$, temos:

$$P^{(0)} = -\frac{k}{8}\int_V d^3x\Big[\frac{(\partial_x H)^2}{(-g_{00})^{3/2}} + \frac{(\partial_y H)^2}{(-g_{00})^{3/2}}\Big]\,, \tag{5.83}$$

assumindo que $(-g_{00}) > 0$, vemos que a energia é negativa.

Usando as relações (5.80) e (5.82), concluimos que as componentes do vetor de Pauli-Lubanski se reduzem a:

$$\begin{aligned} W_{(1)} &= -P^{(0)}(L^{(2)(3)} - L^{(0)(2)})\,, \\ W_{(2)} &= P^{(0)}(L^{(1)(3)} - L^{(0)(1)})\,. \end{aligned} \tag{5.84}$$

Com isso o outro invariante de Casimir W^2 pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} W^2 &= k^4\Big\{\int_V d^3x\Big[\partial_x\Big(\frac{\partial_x H}{A}\Big) + \partial_y\Big(\frac{\partial_y H}{A}\Big)\Big]\Big\}^2 \times \\ &\times \Big\{\Big[\int_V d^3x\partial_y\Big(\frac{(1+\frac{1}{2}H)}{(1-\frac{1}{2}H)^{1/2}}\Big)\Big]^2 + \\ &+ \Big[\int_V d^3x\partial_x\Big(\frac{(1+\frac{1}{2}H)}{(1-\frac{1}{2}H)^{1/2}}\Big)\Big]^2\Big\}\,. \end{aligned} \tag{5.85}$$

Claramente $W^2 \neq 0$, isso significa que P_a e W_a são linearmente independentes. Ou seja, não podemos ter a relação $W_a = \lambda P_a$, onde λ é a helicidade da onda. Assim, apesar de nossos esforços, a helicidade permanece indefinida.

O fato de não podermos estabelecer a helicidade deve ser investigado mais profundamente, uma vez que ele não indica necessariamente a incompatibilidade entre a Mecânica Quântica e o campo Gravitacional. Podemos estar lidando com um resultado negativo isolado, talvez fruto de nossa ignorância com relação às soluções exatas das equações de Einstein do tipo onda plana. Por outro lado a existência de energia negativa para ondas planas é um resultado intrigante, pois um sistema que experimenta a passagem desta onda vai perder ao invés de ganhar uma certa quantidade de energia. Além disso, um sistema desse tipo não permite a aplicação das regras de quantização conhecidas, uma vez que no formalismo da Mecânica

Quântica qualquer observável, como é o caso da energia, é uma média do operador correspondente, considerado hermitiano, obtida a partir das funções de onda definidas no espaço de Hilbert. Como consequência um observável é uma grandeza sempre positiva, o que está em contradição com os nossos resultados para a onda plana.

Assim, podemos interpretar a energia da onda plana ser negativa como indicador do porquê da dificuldade em se conciliar a Mecânica Quântica com a Relatividade Geral. O pensamento usual para se quantizar um certo campo é modificar a teoria dita clássica de modo a se adaptar à Mecânica Quântica, entretanto no caso da Relatividade Geral, nos parece que tanto a Mecânica Quântica quanto a Relatividade devam ser modificadas ou melhor estruturadas na direção de uma teoria nova.

Capítulo 6

Conclusão e Perspectivas

Nesta tese abordamos uma expressão para o momento angular gravitacional na formulação Teleparalela. As definições para o momento angular e momento-energia gravitacionais são invariantes por transformações de coordenadas no espaço tridimensional e por reparametrizações temporais. Apesar disso, o momento angular se mostra dependente do sistema de referência (podemos observar essa característica no âmbito da mecânica clássica e da mecânica relativística), o que não é inconsistente com a interpretação física de referencial e nem com o princípio da equivalência. Chegamos à conclusão que P^a e L^{ab}, tal qual foram definidos, formam uma representação do grupo de Poincaré. Analisamos a necessidade de se empregar expressões regularizadas para P^a e L^{ab}, aplicando esse conhecimento ao cálculo do momento angular de uma casca esférica em rotação.

Analisamos as condições necessárias para que o momento angular seja bem definido e estabelecemos qual deve ser o comportamento assintótico do tensor métrico para que isso ocorra. Aplicamos as nossas expressões para uma configuração com simetria axial em relação a um observador estático e a outro em rotação no caso específico do buraco negro de Kerr. Interpretamos o significado das componentes $L^{(0)(i)}$ do momento angular como centro-de-inécia do campo gravitacional. Tentamos construir a helicidade para a métrica de Bondi e para ondas gravitacionais planas. As nossas tentativas se revelaram infrutíferas, no entanto algumas considerações importantes devem ser observadas.

Para o caso da métrica de Bondi, as simetrias intrínsicas da configuração podem ser responsáveis pelo resultado nulo que obtivemos para o momento angular. No caso das ondas planas, o momento-energia e o vetor de Pauli-Lubanski são linearmente independentes, o que impede qualquer tentativa de se construir a helicidade. Entretanto o momento angular revela-se em acordo com o que esperaríamos para uma onda plana em propagação: o momento angular possui componentes perpendiculares entre si e à direção de propagação da onda, o que pode ser identificado com os estados de polarização da onda gravitacional plana.

Estabelecemos expressões que permitem o cálculo do momento-energia e do momento angular gravitacionais para uma configuração de tétradas arbitrária. Isso foi feito considerando a forma das expressões regularizadas, ou seja, temos que subtrair das expressões de P^a e L^{ab} o valor dessas quantidades no limite tendendo ao espaço plano. Devemos ainda investigar se esse procedimento elimina todos os infinitos quando as integrais são calculadas. Uma vez que isso é estabelecido, podemos adotar esse procedimento para eliminação de divergências.

Assim, os resultados obtidos para a casca esférica parecem ser corretos, haja vista a própria consistência das definições de momento-energia e momento angular gravitacionais, como exposto nos Capítulos 2 e 4. Porém temos que investigar e entender melhor a escolha de referenciais, o que equivale a dizer, como construir um campo de tétradas adaptado a um observador específico. Esse é um procedimento necessário pois lidamos com conceitos fundamentais em Física e um dos pilares da própria Relatividade que é a questão dos referenciais.

O insucesso que advém da tentativa de se construir a helicidade de ondas planas deve ser melhor investigado no futuro, uma vez que um dos resultados capitais que encontramos é que a teoria da gravitação, aqui considerada, apresenta como grupo de simetria no espaço de fase o grupo de Poincaré. Sabemos quão relevante é o grupo de Poincaré e suas representações para construção de uma teoria quântica para um determinado campo que obedece essa simetria, através da obtenção de quantidades invariantes, tais quais os invariantes de Casimir. Entretanto, a abordagem para se construir uma teoria quântica da gravitação utilizando os operadores de Casimir não nos parece o melhor caminho. Uma abordagem alternativa seria a quantização segundo a teoria de Dirac, entretanto, isso dependeria da simplificação dos vínculos da teoria. Um resultado surpreendente que obtivemos e que também deve ser objeto de investigações posteriores é a questão da energia negativa para ondas gravitacionais planas. Isso é um indício de uma incompatibilidade mais fundamental entre a Relatividade Geral (considerando-se o equivalente teleparalelo) e a Mecânica Quântica, uma vez que os procedimentos de quantização geram observáveis positivos. Claro que esta questão da energia de ondas planas ser negativa tem implicações diretas na detecção dessas ondas gravitacionais.

Apesar da consistência de nossas definições para o caso de uma simetria axial, o problema do buraco negro de Kerr exibe uma indefinição quando analisamos o probema utilizando um observador estático. A divergência que aparece quando calculamos as integrais é relativa à impossibilidade da existência de tais observadores no interior da ergoesfera. Esse problema é resolvido com o uso de uma regularização do momento angular, dada a natureza da divergência. Quando utilizamos um campo de tétradas adaptado a um observador em rotação, como vimos, o momento angular é zero, sem a necessidade de regularização.

A Astrofísica tem tido enormes avanços recentemente e um dos principais problemas é a determinação do momento de inécia de fontes em rotação, que pode ser estimado a partir do momento angular do campo gravitacional. Para isso conjecturamos que a relação entre essas grandezas pode ser expressa da seguinte forma:

$$L^{(1)(2)} = I_f \Omega \,,$$

onde I_f é o momento de inercia da fonte e Ω é a sua velocidade angular. No sentido de fornecer resultados que são passíveis de observação, podemos calcular o momento angular para uma configuração realística, por exemplo, a Terra, se soubermos qual é a velocidade angular Ω na superfície da fonte. Com isso é possível verificar se o momento angular do campo gravitacional fornece uma medida do momento de inércia da Terra.

Referências Bibliográficas

[1] J. W. Maluf, J. F. da Rocha-Neto, T. M. L. Toríbio, and K. H. Castello-Branco. Energy and angular momentum of the gravitational field in the teleparallel geometry. *Phys. Rev. D*, 65(12):124001, May 2002.

[2] C. Möller. Tetrad fields and conservation laws in general relativity. In C. Møller, editor, *Evidence for Gravitational Theories*, page 252, 1961.

[3] C. N. Yang and R. L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, 96(1):191–195, Oct 1954.

[4] Emmy Noether. Invariant variation problems. *Transport Theory and Statistical Mechanics*, 1(3):183–207, 1971.

[5] R. Aldrovandi, H. I. Arcos, and J. G. Pereira. General relativity as a genuine connection theory. 2004.

[6] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen, and J. G. Pereira. Gravitational energy-momentum density in teleparallel gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 84(20):4533–4536, May 2000.

[7] V. C. De Andrade, L. C. T. Guillen, and J. G. Pereira. Teleparallel Gravity: An Overview. 2000.

[8] R. Aldrovandi, J. G. Pereira, and K. H. Vu. Selected topics in teleparallel gravity. *Braz. J. Phys.*, 34:1374–1380, 2004.

[9] A. Einstein. Unified field theory based on riemannian metrics and distant parallelism. *Math. Annal.*, 102:685–697, 1930.

[10] J. A. Schouten. *Ricci Calculus.* Springer-Verlag, London, 2nd edition, 1954.

[11] F. W. Hehl. Four lectures on Poincaré gauge field theory. In P. G. Bergmann and V. de Sabbata, editors, *Proceedings of the 6th School of Cosmology and Gravitation on Spin, Torsion, Rotation and Supergravity, Erice, Italy, May 1979.* Plenum Press, 1980.

[12] Kenji Hayashi and Takeshi Shirafuji. New general relativity. *Phys. Rev. D*, 19(12):3524–3553, Jun 1979.

[13] Kenji Hayashi and Takeshi Shirafuji. Addendum to "new general relativity". *Phys. Rev. D*, 24(12):3312–3314, Dec 1981.

[14] Kenji Hayashi. The gauge theory of the translation group and underlying geometry. *Physics Letters B*, 69(4):441–444, Mar 1977.

[15] J. W. Maluf and J. F. da Rocha-Neto. Hamiltonian formulation of general relativity in the teleparallel geometry. *Phys. Rev. D*, 64(8):084014, Sep 2001.

[16] P. A. M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics.* Dover Publications, 2001.

[17] T. Regge and C. Teitelboim. Role of surface integrals in the Hamiltonian formulation of general relativity. *Annals of Physics*, 88(1):286–318, 1974.

[18] J. David Brown and James W. York. Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action. *Phys. Rev. D*, 47(4):1407–1419, Feb 1993.

[19] R. Beig and N. ó Murchadha. The Poincaré group as the symmetry group of canonical general relativity. *Annals of Physics*, 174(2):463–498, 1987.

[20] L. B. Szabados. On the roots of the poincaré structure of asymptotically flat spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 20(13):2627–2661, 2003.

[21] J. W. Maluf. The gravitational energy-momentum tensor and the gravitational pressure. *Annalen Phys.*, 14:723–732, 2005.

[22] S. V. Babak and L. P. Grishchuk. Energy-momentum tensor for the gravitational field. *Phys. Rev. D*, 61(2):024038, Dec 1999.

[23] J. W. Maluf, S. C. Ulhoa, F. F. Faria, and J. F. da Rocha-Neto. The angular momentum of the gravitational field and the poincaré group. *Classical and Quantum Gravity*, 23(22):6245–6256, 2006.

[24] José Wadih Maluf. Accelerated observers and gravitational radiation. *Grav. Cosmol.*, 11:284–288, 2005.

[25] R. Arnowitt, S. Deser, and C.W. Misner. The dynamics of general relativity. In L. Witten, editor, *Gravitation: An Introduction to Current Research*, pages 227–265. Wiley, New York, U.S.A., 1962.

[26] J. David Brown and James W. York. Jacobi's action and the recovery of time in general relativity. *Phys. Rev. D*, 40(10):3312–3318, Nov 1989.

[27] G. B. Arfken and H. J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists.* Elsevier Academic Press, 6th international edition, 2005.

[28] M. Hamermesh. *Group Theory and its Aplication to Physical Problems.* Dover Publications, Mineola, N.Y. 11501, 1989.

[29] H. F. Jones. *Groups, Representations and Physics.* Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2nd edition, 1998.

[30] F. Canfora, L. Parisi, and G. Vilasi. Nonlinear gravitational waves, their polarization, and realistic sources. *Theor. Math. Phys.*, 152(4):1069–1080, 2007.

[31] J. W. Maluf, M. V. O. Veiga, and J. F. da Rocha-Neto. Regularized expression for the gravitational energy- momentum in teleparallel gravity and the principle of equivalence. *Gen. Rel. Grav.*, 39:227–240, 2007.

[32] F. W. Hehl, J. Lemke, and E. W. Mielke. Two lectures on fermions and gravity. In J. Debrus and A. C. Hirshfeld, editors, *Geometry and Theoretical Physics*, Berlim, 1991. Springer.

[33] Jeffrey M. Cohen. Note on the kerr metric and rotating masses. *Journal of Mathematical Physics*, 8(7):1477–1478, 1967.

[34] Dieter R. Brill and Jeffrey M. Cohen. Rotating masses and their effect on inertial frames. *Phys. Rev.*, 143(4):1011–1015, Mar 1966.

[35] Arthur Komar. Covariant conservation laws in general relativity. *Phys. Rev.*, 113(3):934–936, Feb 1959.

[36] A. Ashtekar. Angular Momentum of Isolated Systems in General Relativity. In P. G. Bergmann and V. de Sabbata, editors, *NATO ASIB Proc. 58: Cosmology and Gravitation: Spin, Torsion, Rotation, and Supergravity*, page 435, 1980.

[37] J. Winicour. Angular momentum in general relativity. In A. Held, editor, *General Relativity and Gravitation: One Hundred Years After the Birth of Albert Einstein*, volume 1, pages 71–96. Plenum Press, New York, U.S.A., 1980.

[38] Nathalie Deruelle and Joseph Katz. Comments on conformal masses, asymptotic backgrounds and conservation laws. *Class. Quant. Grav.*, 23:753–760, 2006.

[39] J. M. Aguirregabiria, A. Chamorro, and K. S. Virbhadra. Energy and angular momentum of charged rotating black holes. *Gen. Rel. Grav.*, 28:1393–1400, 1996.

[40] Janusz Garecki. The averaged tensors of the relative energy-momentum and angular momentum in general relativity and some their applications. *Foundations of Physics*, 37(3):341–365, 2007.

[41] Bahram Mashhoon, James C. McClune, and Hernando Quevedo. Gravitational superenergy tensor. *Phys. Lett.*, A231:47–51, 1997.

[42] T. Regge and C. Teitelboim. Improved Hamiltonian for general relativity. *Physics Letters B*, 53(1):101–105, 1974.

[43] László B. Szabados. Quasi-local energy-momentum and angular momentum in gr: A review article. *Living Reviews in Relativity*, 7(4), 2004.

[44] Chiang-Mei Chen and James M. Nester. A Symplectic Hamiltonian Derivation of Quasilocal Energy- Momentum for GR. *Grav. Cosmol.*, 6:257–270, 2000.

[45] James M. Nester and Roh Suan Tung. A quadratic spinor Lagrangian for general relativity. *Gen. Rel. Grav.*, 27(6).

[46] R. Penrose and W. Rindler. *Spinors and Space-Time, 2 vols.* Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1984.

[47] J. Winicour. Some total invariants of asymptotically flat space-times. *Journal of Mathematical Physics*, 9(6):861–867, 1968.

[48] N. K. Glendenning. *Compact Stars.* Springer, New York, 2nd edition, 2000.

[49] Richard C. Adams, Jeffrey M. Cohen, Ronald J. Adler, and Charles Sheffield. Analytic pulsar models. *The Astrophysical Journal*, 192:525–528, Sep 1974.

[50] L. D. Landau and E. M. Lifshiz. *The Classical Theory of Fields*, volume 2 of *Course of Theoretical Physics.* Elsevier Butterworth-Heinemann, 4th revised english edition, 2004.

[51] Julian Schwinger. *Particles, sources, and fields*, volume 1. Addison-Wesley, 1970.

[52] B. Z. Iliev. Centre of mass in spaces with torsion free flat linear connection. *arXiv:gr-qc/0404002*, April 2004.

[53] A. W. K. Metzner H. Bondi, M. G. J. van der Burg. Gravitational waves in general relativity. vii. waves from axi-symmetric isolated systems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences (1934-1990)*, 269(1336):21–52, Aug 1962.

[54] J. W. Maluf and F. F. Faria. On gravitational radiation and the energy flux of matter. *Annalen Phys.*, 13:604–616, 2004.

[55] H. Stephani. *An Introduction to Special and General Relativity.* Cambridge University Press, Cambrige, 3rd edition, 2004.

[56] J. W. Maluf and S. C. Ulhoa. The energy-momentum of plane-fronted gravitational waves in the teleparallel equivalent of gr. *Physical Review D (Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology)*, 78(4):047502, 2008.