Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Hipersuperfícies Conformemente Planas em formas espaciais de dimensão 4

por

João Paulo dos Santos

Orientadora: Keti Tenenblat

Brasília

2009

Aos meus pais,

Maria José dos Santos e

Walter da Silva Santos Júnior

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus, pela oportunidade de evoluir e ajudar meus irmãos.

À minha grande família, meus pais e minha irmã, meus avós, minha tia e minhas primas. Agradeço por ter dado todo o apoio e pela disposição em ajudar em todos os momentos que precisei.

À Dani, pelo amor, carinho e apoio incondicional. Agradeço por estar presente em minha vida nesses quase dois anos, compartilhando alegrias e superando juntos os obstáculos que nos foram colocados.

À professora Keti Tenenblat pela oportunidade única que me deu de trabalhar sob à sua orientação, o que me possibilitou um aprendizado grandioso. Agradeço por sua dedicação, pela paciência e competência profissional.

Aos professores membros da banca, Rosa Maria Chaves e Romildo da Silva Pina, por tornarem o meu trabalho melhor através das suas críticas e sugestões.

Aos professores do departamento de Matemática da UnB. Em especial aqueles que contribuíram com meu aprendizado, desde as disciplinas ministradas até as dúvidas esclarecidas quando precisei. Aos funcionários, agradeço pela eficiência nos serviços prestados.

Aos professores e funcionários do Instituto de Matemática e Estatística da UFG, que foram fundamentais em minha formação profissional. Em especial, os professores Marcelo, Edméia, Denise e Alacyr pelo apoio durante toda a graduação.

Finalmente, mas não menos importante, agradeço aos colegas que participaram de todo o processo, desde quando cheguei em Brasília, passando pelas disciplinas, exames de qualificação até chegar a esta dissertação. Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para que eu chegasse até aqui.

Ao CNPq e CAPES, pelo apoio financeiro.

“ Qualquer idéia que te agrade,

Por isso mesmo... é tua.

O autor nada mais fez que vestir a verdade

Que dentro em ti se achava inteiramente nua... “

Mário Quintana

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo de hipersuperfícies conformemente planas baseado em um trabalho de Hertrich-Jeromin, onde são obtidas condições necessárias e suficientes para que tenhamos uma hipersuperfície conformemente plana em uma forma espacial de dimensão quatro. Como consequência temos a relação entre essas hipersuperfícies e um sistema triplamente ortogonal de superfícies de $\mathbb{R}^3$ chamado rede de Guichard.
Palavras-chave: hipersuperfícies conformemente planas, teorema de Weyl-Schouten, redes de Guichard

Abstract

In this work we present a study on conformally flat hypersurfaces which is based on a Hertrich-Jeromin's article, where a characterization for conformally flat hypersurfaces in a four dimensional space form is obtained. As a consequence we have a relationship between these hypersurfaces and a triply orthogonal system of surfaces in $\mathbb{R}^3$, called Guichard Net.

Keywords: conformally flat hypersurfaces, Weyl-Schouten theorem, Guichard Nets

Sumário

Introdução

Classificar hipersuperfícies conformemente planas tem sido um tópico de interesse em geometria diferencial há algum tempo. Assim como vemos em outros problemas de geometria, o problema em questão é fortemente influenciado pela dimensão da hipersuperfície.

Quando temos uma superfície regular, isto é, uma hipersuperfície de dimensão $n = 2$ em $\mathbb{R}^3$, o problema está resolvido. A solução está relacionada ao fato de que sempre é possível obter coordenadas isotérmicas para superficies. Dessa forma, hipersuperfícies de dimensão $n = 2$ sempre são conformemente planas.

Para dimensões maiores, a primeira solução obtida foi dada em [4] por E. Cartan, em 1917. Neste trabalho Cartan deu uma classificação completa para as hipersuperfícies conformemente planas em formas espaciais de dimensão $n + 1 \geq 5$, caracterizando-as por aquelas quasi-umbílicas, ou seja, onde uma das curvaturas principais tem multiplicidade pelo menos $n - 1$. No mesmo trabalho, Cartan deu uma caracterização para hipersuperfícies em formas espaciais de dimensão 4:

Uma hipersuperfície com três curvaturas principais distintas em uma forma espacial de dimensão 4 é conformemente plana se, e somente se, suas seis "distribuições umbílicas" (ou seja, os planos onde a segunda forma fundamental é múltipla da primeira forma fundamental) são integráveis.

Porém, diferentemente do caso anterior, não foi possível uma classificação precisa a partir desta caracterização, já que tais distribuições não eram tão simples quanto pareciam.

Em 1994, Hertrich-Jeromin em seu trabalho [7], estudou o artigo de Cartan e tentou dar uma resposta mais satisfatória à questão envolvendo a dimensão da forma espacial igual a 4. Neste trabalho, o autor conseguiu uma correspondência entre as hipersuperfícies conformemente planas de dimensão 3 e as redes de Guichard, uma espécie de sistema triplamente ortogonal de superfícies consideradas inicialmente por C. Guichard em 1905 [6] onde ele se referiu a esses sistemas como um análogo às coordenadas isotérmicas. Dessa forma, Hertrich-Jeromin transferiu o problema de classificar as hipersuperfícies conformemente planas para o problema de classificação das redes de Guichard. Outro trabalho que temos em 1994, é o trabalho de O. J. Garay [5] onde é obtida uma classificação para hipersuperfícies conformemente planas de $\mathbb{R}^4$ onde a curvatura média é um autovetor do seu operador Laplaciano.

Ainda tentando compreender o resultado de Cartan sobre o problema quando a dimensão da forma espacial é 4, Suyama em 2000 e em 2005, com os trabalhos [13] e [14], apresentou uma abordagem diferente daquela descrita por Hertrich-Jeromin. A estratégia de Suyama foi estudar hipersuperfícies onde a primeira forma fundamental fosse de um determinado tipo. E assim, usando a caracterização dada por Cartan, obteve uma representação da primeira e segunda formas fundamentais de uma classe de hipersuperfícies que são conformemente planas.

Em 2007, temos em [9] um trabalho em conjunto de Hertrich-Jeromin e Suyama. Neste trabalho temos uma classificação de hipersuperfícies conformemente planas de dimensão 3 em termos das redes Guichard com uma característica especial, chamadas rede de Guichard cíclicas. Continuando o que foi feito em [7] a idéia agora foi considerar certas redes de Guichard e ver quais eram as hipersuperfícies conformemente planas associadas a elas.

O presente trabalho baseia-se principalmente em [7] e [8], este último um livro onde Hertrich-Jeromin apresenta uma introdução à Geometria de Möbius, abordando como aplicação do modelo desenvolvido, as hipersuperfícies conformemente planas. Dividimos o nosso trabalho em três capítulos e dois apêndices, a saber:

- **Capítulo 1: Preliminares**. Neste capítulo apresentamos as definições e resultados básicos sobre geometria Riemanniana que usaremos durante o trabalho. Além de relembrar alguns conceitos a idéia aqui é também estabelecer as notações usadas. As referências usadas neste capítulo, são os livros [2], [10] e [12].

- **Capítulo 2: O teorema de Weyl-Schouten**. Neste capítulo apresentamos os conceitos básicos para estabelecer um teorema fundamental no estudo de hipersuperfícies conformemente planas, o teorema de Weyl-Schouten. Neste teorema vemos claramente como a dimensão influi na classificação das hipersuperfícies e o motivo pelo qual o caso das hipersuperfícies tridimensional é mais complicado. O capítulo baseia-se essencialmente em [8].

- **Capítulo 3: Hipersuperfícies Conformemente planas e Redes de Guichard**. Neste capítulo, apresentamos um estudo detalhado do que foi feito em [7]. Consideramos imersões de variedades riemannianas de dimensão 3 no cone de luz dentro do espaço de Minkowski e vemos como esse artifício pode nos ajudar a obter condições para que hipersuperfícies em formas espaciais sejam conformemente planas. Veremos como é possível obter uma correspondência entre tais hipersuperfícies e as Redes de Guichard.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Variedades Riemannianas

Neste capítulo apresentaremos as definições e resultados básicos sobre geometria Riemanniana que usaremos durante o trabalho. Além de relembrar alguns conceitos a idéia aqui é também estabelecer as notações usadas. As referências usadas neste capítulo, são os livros [2], [10] e [12].

Definição 1.1 Uma *variedade diferenciável* de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $X_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ tais que:

1. $\bigcup\limits_{\alpha} X_\alpha(U_\alpha) = M.$

2. Para todo par α, β, com $X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $X_\alpha^{-1}(W)$ e $X_\alpha^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$ são diferenciáveis.

3. A família $\{U_\alpha, X_\alpha\}$ é máxima relativamente as condições 1 e 2.

O par (U_α, X_α) (ou a aplicação X_α) com $p \in X_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma *parametrização* (ou *sistema de coordenadas*) de M em p ; $X_\alpha(U_\alpha)$ é então chamada uma *vizinhança coordenada* em p. Uma família $\{U_\alpha, X_\alpha\}$ satisfazendo 1 e 2 é chamada uma *estrutura diferenciável* em M.

Observação 1.1 Uma estrutura diferenciável em um conjunto M induz de uma maneira natural uma topologia em M. Basta definir que $A \subset M$ é um *aberto* de M se

$X_\alpha^{-1}(A \cap X_\alpha(U_\alpha))$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ para todo α. É imediato verificar que M e o vazio são abertos, que a união de abertos é aberto e que a intersecção finita de abertos é aberto. Dessa forma M torna-se um espaço topológico.

A seguir, estendemos a noção de diferenciabilidade às aplicações entre variedades e a noção de vetor tangente:

Definição 1.2 Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \to M_2$ é *diferenciável em* $p \in M_1$ se dada uma parametrização $\mathbf{Y} : V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $\mathbf{X} : V \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ em p tal que $\varphi(\mathbf{X}(U)) \subset \mathbf{Y}(V)$ e a aplicação

$$\mathbf{Y^{-1}} \circ \varphi \circ \mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \tag{1.1}$$

é diferenciável em $X^{-1}(p)$. φ é diferenciável em um aberto de M_1 se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Decorre da condição 2 da Definição 1.1 que a definição dada é independente da escolha das parametrizações. A aplicação (1.1) é chamada *expressão* de φ nas paramatrizações $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.

Definição 1.3 Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é chamada uma *curva* (diferenciável) em M. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja $\mathcal{D}(M)$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p. O *vetor tangente à curva* α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D}(M) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}. \tag{1.2}$$

Um *vetor tangente a* M *em* p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por T_pM.

Se escolhemos uma parametrização $X : U \to M^n$ em $p = X(0)$, podemos exprimir a função f e a curva α nesta parametrização por

$$f \circ X(q) = f(u_1, \ldots, u_n), \quad q = (u_1, \ldots, u_n) \in U,$$

e

$$X^{-1} \circ \alpha(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t)),$$

respectivamente. Portanto, restringindo f a α, obteremos

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \left.\frac{d(f\circ\alpha)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}f(u_1(t),\ldots,u_n(t))\right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i'(0)\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_0\right) f. \end{aligned}$$

Assim, o vetor $\alpha'(0)$ pode ser expresso na parametrização $\mathbf{X}$ por

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} u_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_0. \tag{1.3}$$

Decorre da expressão acima que o conjunto T_pM, com as operações usuais de funções, forma um espaço vetorial de dimensão n, e que a escolha de uma parametrização $X : U \to W$ determina uma *base associada* $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_0\right\}_{i=1}^{n}$ em T_pM.

Observação 1.2 Algumas vezes, será conveniente usar a notação ∂_i para denotar o vetor $\dfrac{\partial}{\partial u_i}$.

Com estes conceitos estabelecidos passemos à seguinte definição:

Definição 1.4 Um *campo de vetores* x em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $x(p) \in T_pM$.

Considerando uma parametrização $\mathbf{X} : U \to M$ é possível escrever

$$x(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p)\frac{\partial}{\partial u_i},$$

onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função em U. Dizemos que x é diferenciável se as funções a_i são diferenciáveis para alguma (e, portanto, para qualquer) parametrização. Indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o *conjunto de todos os campos de vetores diferenciáveis em* M.

Podemos pensar em um campo de vetores como uma aplicação $x : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$, definida do seguinte modo

$$(xf)(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p)\frac{\partial f}{\partial u_i}(p),$$

uma espécie de derivada direcional. Dessa forma, se x e y são campos de vetores diferenciáveis em M e $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, podemos considerar as funções $x(yf)$ e $y(xf)$ e então definir o *colchete*, indicado por $[x, y]$, pelo campo de vetores $xy - yx$ onde

$$(xy - yx)f = x(yf) - y(xf).$$

Podemos verificar que o campo vetorial colchete possui as seguintes propriedades:

1. $[x, y] = -[y, x]$,

2. $[ax + by, z] = a[x, y] + b[y, z]$,

3. $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ *(identidade de Jacobi)*,

4. $[fx, gy] = fg[x, y] + fx(g)y - gy(f)x$,

Onde z é um campo diferenciável de vetores, a, b são números reais e f, g são funções diferenciáveis.

Dando seqüência às nossas definições, o próximo passo será definir uma *métrica Riemanniana* em uma variedade diferenciável. Assim, fará sentido falar em imersões isométricas, um conceito que será bastante usado e que será definido logo em seguida.

Definição 1.5 Uma *Métrica Riemanniana* em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $<,>_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM, que varia diferencialmente no seguinte sentido: Se $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é uma sistema de coordenadas locais em torno de p com base associada $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \right) \right\}_{i=1}^{n}$ e $q = \mathbf{X}(u_1, \ldots, u_n)$ então a função $\left\langle \frac{\partial}{\partial u_i}(q), \frac{\partial}{\partial u_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(u_1, \ldots, u_n)$ é uma função diferenciável em U. As funções g_{ij} são chamadas *expressão da métrica Riemanniana* no sistema de coordenadas $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$. Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma *Variedade Riemanniana* e denotaremos essa métrica por $\langle , \rangle$ e, em alguns casos, por $g\,(,)$ ou simplesmente g.

Definição 1.6 Sejam M e N variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \to N$ é uma *imersão* se $d\varphi_p : T_pM :\to T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se N tem uma métrica Riemanniana, f induz uma métrica Riemanniana em M por $\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$, $u, v \in T_pM$. A métrica de M é chamada então uma métrica *induzida* por f, e f é uma *imersão isométrica*.

1.2 Conexão Riemanniana e Curvatura

Um conceito que será fundamental em nossos estudos será o de curvatura, em verdade, procuraremos variedades com uma curvatura específica. Assim, é importante deixar registrado neste capítulo preliminar esta definição. Definiremos inicialmente conexão.

Definição 1.7 Uma *conexão afim* ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\begin{array}{rcll} \nabla : & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \rightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ & (x, y) & \mapsto & \nabla_x y \end{array}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\nabla_{(fx+gy)}z = f\nabla_x z + g\nabla_y z,$

2. $\nabla_x(y + z) = \nabla_x y + \nabla_x z,$

3. $\nabla_x(fy) = f\nabla_x y + x(f)y,$

onde $x, y, z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g(D)$. Dizemos que ∇ é *simétrica* se

$$\nabla_x y - \nabla_y x = [x, y]. \tag{1.4}$$

Quando estamos em uma variedade Riemanniana M dizemos que ∇ é *compatível com a métrica* se

$$x \langle y, z \rangle = \langle \nabla_x y, z \rangle + \langle y, \nabla_x z \rangle . \tag{1.5}$$

O seguinte teorema é um resultado fundamental sobre conexões Riemannianas que será útil mais adiante.

Teorema 1.1 (Levi-Civita) *Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão Riemanniana ∇ univocamente determinada pela métrica através da expressão*

$$\begin{aligned} \langle z, \nabla_y x \rangle &= \frac{1}{2} \{ x \langle y, z \rangle + y \langle z, x \rangle - z \langle x, y \rangle \\ &\quad - \langle [x, z], y \rangle - \langle [y, z], x \rangle - \langle [x, y], z \rangle \} . \end{aligned} \tag{1.6}$$

Assim, como a conexão dada pelo teorema de Levi-Civita é única, essa conexão será chamada a *conexão Riemanniana* de M ou conexão de Levi-Civita.

Observação 1.3 Quando nos restringimos aos vetores coordenados $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial u_i}$ de uma base associada à uma parametrização X, introduzimos as funções Γ_{ij}^k chamadas *símbolos de Christoffel*, definidas da seguinte forma:

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Definimos agora a curvatura em uma variedade Riemanniana.

Definição 1.8 A *curvatura* R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $x, y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(x,y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(x,y)z = \nabla_y \nabla_x z - \nabla_x \nabla_y z + \nabla_{[x,y]} z. \tag{1.7}$$

onde $z \in \mathfrak{X}(M)$ e ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Passemos agora as propriedades de R. Dados $x_1, x_2, y_1, y_2, z, w \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$ temos que:

1. R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é

$$\begin{aligned} R(fx_1 + gx_2, y_1) &= fR(x_1, y_1) + gR(x_2, y_1), \\ R(x_1, fy_1 + gy_2) &= fR(x_1, y_1) + gR(x_1, y_2). \end{aligned}$$

2. Para todo par $x, y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(x,y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é linear, isto é,

$$\begin{aligned} R(x,y)(z+w) &= R(x,y)z + R(x,y)w, \\ R(x,y)fz &= fR(x,y)z. \end{aligned}$$

3. $R(x,y)z + R(y,z)x + R(z,x)y = 0$, *(Primeira Identidade de Bianchi).*

É conveniente escrever o que foi visto acima em um sistema de coordenadas (U, X) em torno de $p \in M^n$. Escrevendo

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_{l=1}^{n} R_{ijk}^l \partial_l,$$

as funções R_{ijk}^l são chamadas as *componentes da curvatura* R em (U, X) e podemos exprimir tais funções em termos dos símbolos de Christoffel da seguinte forma:

$$R_{ijk}^s = \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s + \partial_j(\Gamma_{ik}^s) - \partial_i(\Gamma_{jk}^s).$$

Considere agora a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rccl} r: & \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) & \to & \mathcal{D}(M) \\ & (x,y,z,w) & \mapsto & \langle R(x,y)z,w\rangle \end{array}$$

é imediato verificar que r é linear em cada uma das entradas, além disso, temos as seguintes propriedades:

1. $r(x,y,z,w) = -r(y,x,z,w)$,
2. $r(x,y,z,w) = -r(x,y,w,z)$,
3. $r(x,y,z,w) = r(z,w,x,y)$.

A aplicação r será chamada o *tensor curvatura* de M.

No que se segue convém usar a seguinte notação. Dado um espaço vetorial V, x e y vetores em V, indicaremos por $|x\wedge y|$ a expressão

$$\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2}$$

e assim podemos estabelecer a seguinte definição.

Definição 1.9 Dado um ponto $p\in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma\subset T_pM$ gerado por x e y, o número real

$$K(x,y) = \frac{r(x,y,x,y)}{|x\wedge y|^2},$$

que depende apenas da escolha de σ, será chamado *curvatura seccional* de σ em p.

Definição 1.10 As variedades completas com curvatura seccional constante são chamadas *formas espaciais.*

Podemos mostrar que, com um ajuste na métrica, podemos assumir que uma variedade M de curvatura seccional constante possui curvatura seccional 0, 1 ou -1. Além disso, quando M é simplesmente conexa, podemos mostrar que M é isométrica a $\mathbb{R}^n$, quando $K=0$; a esfera unitária S^n, quando $K=1$ e ao espaço hiperbólico, quando

$K = -1$.

Nos próximos capítulos, lidaremos com outras aplicações *multilineares* definidas sobre os campos de vetores, assim como o tensor curvatura. Tais aplicações são chamadas *tensores*, definidas da seguinte maneira:

Definição 1.11 Um tensor de grau s ou simplesmente um tensor-$(s, 0)$ em uma variedade Riemanniana M é uma aplicação multilinear

$$\underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{s} \to \mathcal{D}(M).$$

Similarmente um *campo tensor* de grau s ou um tensor-$(s, 1)$ é uma aplicação multilinear

$$\underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{s} \to \mathfrak{X}(M).$$

Temos como imagem funções diferenciáveis no caso de tensor-$(s, 0)$ e campos de vetores diferenciáveis no caso de tensor-$(s, 1)$, podemos então pensar na derivada de um tensor, mais precisamente, temos a seguinte definição:

Definição 1.12 Sejam A um tensor-$(s, 0)$ e $x \in \mathfrak{X}(M)$ um campo fixado. Definimos a *derivada covariante* de A na direção de x como um tensor-$(s + 1, 0)$ dado por

$$\begin{aligned} (\nabla_x A)(y_1, \ldots, y_s) \;&:=\; x(A(y_1, \ldots, y_s)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{s} A(y_1, \ldots, y_{i-1}, \nabla_x y_i, \ldots, y_s). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Analogamente, se A é um tensor-$(s, 1)$ a derivada convariante de A é um tensor-$(s+1, 1)$ dada por

$$\begin{aligned} (\nabla_x A)(y_1, \ldots, y_s) \;&:=\; \nabla_x(A(y_1, \ldots, y_s)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{s} A(y_1, \ldots, y_{i-1}, \nabla_x y_i, \ldots, y_s). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Observação 1.4 Temos alguns casos especiais a considerar:

1. Para uma função $f : U \subset M \to \mathbb{R}$ (isto é, para um tensor-$(0, 0)$ a derivada covariante nada mais é do que a diferencial de f e assim $\nabla_x f = df(x) = x(f)$. O *gradiente* de f com respeito a uma métrica g, indicado por $\mathrm{grad} f$ é o vetor determinado pela relação $g(\mathrm{grad} f, x) = df(x)$.

2. A derivada covariante segunda de f é dada por $\nabla^2 f = \nabla\nabla f$. Usando o que vimos anteriormente,

$$\begin{aligned}(\nabla^2 f)(x,y) \;:=\; (\nabla_x \nabla f)(y) &= x(\nabla f(y)) - \nabla f(\nabla_x y)\\ &= xy(f) - (\nabla_x y)(f)\\ &= x(df(y)) - df(\nabla_x y).\end{aligned}$$

Para conexão Riemanniana, $xy - yx = [x,y] = \nabla_x y - \nabla_y x$, então

$$\begin{aligned}(\nabla^2 f)(y,x) &= yx(f) - (\nabla_y x)(f)\\ &= xy(f) - [x,y](f) - (\nabla_x y)(f) + [x,y](f)\\ &= (\nabla^2 f)(x,y).\end{aligned}$$

E assim, $(\nabla^2 f)(x,y)$ é um tensor-$(2,0)$ simétrico chamado de *hessiano de f* indicado também por $\operatorname{hess} f(x,y)$. Note agora que

$$\underbrace{x(g(\mathrm{grad} f, y))}_{xdf(y)} = g(\nabla_x \mathrm{grad} f, y) + \underbrace{g(\mathrm{grad} f, \nabla_x y)}_{df(\nabla_x y)}$$

e então obtemos a relação $g(\nabla_x \mathrm{grad} f, y) = \operatorname{hess} f(x,y)$, veremos que essa relação será muito útil no próximo capítulo:

$$\operatorname{hess} f(x,y) = xdf(y) - df(\nabla_x y)$$

3. Decorre da definição da conexão Riemanniana ser compatível com a métrica que $(\nabla_x g) = 0$.

4. Para o tensor curvatura r temos a *Segunda Identidade de Bianchi:*

$$(\nabla_v r)(x,y,z,w) + (\nabla_z r)(x,y,w,v) + (\nabla_w r)(x,y,v,z) = 0.$$

Dado $p \in M$ sempre podemos encontrar uma base ortonormal de vetores em T_pM. Considere agora n campos de vetores de forma que, em cada p, $\{e_1(p), \dots e_n(p)\}$ seja uma base ortonormal. Em geral, pode não ser possível definir tais campos em todos os pontos de M, mas localmente sempre é possível, e isso será suficiente para nossos propósitos. Tal conjunto de campos de vetores será chamado um *referencial ortonormal.* Estabelecido esse conceito, temos a seguinte definição:

Definição 1.13 O *divergente* de um tensor-$(2,0)$ simétrico A em M é dado por:

$$(\mathrm{div}A)(x) = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i} A)(x, e_i).$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal e $x \in \mathfrak{X}(M)$.

Definimos agora outro tensor importante, chamado tensor de Ricci, intimamente relacionado com o tensor curvatura. Com ele, temos também a curvatura escalar:

Definição 1.14 Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal definido em $U \subset M$ o *tensor de Ricci*, um tensor-$(2,0)$ simétrico é dado por:

$$Ric(x, y) = \sum_{i=1}^{n} r(x, e_i, y, e_i), \tag{1.10}$$

e a seguinte soma

$$k = \sum_{i=1}^{n} Ric(e_i, e_i), \tag{1.11}$$

será chamada *curvatura escalar*.

Dado um ponto $p \in M$ podemos mostrar que, sempre existe um referencial ortonormal definido em uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$. Tal referencial será chamado um *referencial geodésico*. Às vezes, será conveniente trabalhar em um referencial geodésico, visto que, ao escrever $x = \sum_{i=1}^{n} g(x, e_i) e_i$ teremos $\nabla_x e_j(p) = 0$. Como exemplo de aplicação de um referencial geodésico, temos o seguinte lema, que será importante no próximo capítulo e é interessante em si mesmo.

Lema 1.1 $(\mathrm{div}Ric)(x) = \dfrac{1}{2} dk(x)$

Demonstração: Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial geodésico definido em uma vizinhança U de um ponto $p \in M$ então a diferencial de k no ponto p, na direção de $x \in \mathfrak{X}(M)$ é dada por:

$$dk(x) = x\left(\sum_{i=1}^{n} Ric(e_i, e_i)\right) = x\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r(e_i, e_j, e_i, e_j)\right).$$

O fato de estarmos em um referencial geodésico nos permite aplicar a definição de derivada covariante e obter a seguinte expressão equivalente:

$$dk(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\nabla_x r)(e_i, e_j, e_i, e_j) \quad \text{em } p. \tag{1.12}$$

Calculamos agora o divergente do tensor de Ricci no ponto p:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}Ric)(x) &= \sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}Ric)(x,e_i) = \sum_{i=1}^{n}[e_iRic(x,e_i) - Ric(\nabla_{e_i}x,e_i) - Ric(x,\nabla_{e_i}e_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n}[e_i\left(\sum_{j=1}^{n} r(x,e_j,e_i,e_j)\right) - \sum_{j=1}^{n} r(\nabla_{e_i}x,e_j,e_i,e_j)] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[e_ir(x,e_j,e_i,e_j) - r(\nabla_{e_i}x,e_j,e_i,e_j)],
\end{aligned}$$

onde usamos que $\nabla_{e_i}e_i(p) = 0$ na segunda igualdade. Da mesma forma como fizemos anteriormente, aplicamos a derivada covariante de r na direção e_i e obtemos em p:

$$(\mathrm{div}Ric)(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[(\nabla_{e_i}r)(x,e_j,e_i,e_j)] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[(\nabla_{e_i}r)(e_i,e_j,x,e_j)]. \qquad (1.13)$$

Pela segunda identidade de Bianchi, temos:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[(\nabla_{e_i}r)(e_i,e_j,x,e_j) + (\nabla_x r)(e_i,e_j,e_j,e_i) + (\nabla_{e_j}r)(e_i,e_j,e_i,x)] = 0.$$

Usando (1.12) e (1.13) reescrevemos a expressão acima como:

$$(\mathrm{div}Ric)(x) - dk(x) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\nabla_{e_j}r)(e_i,e_j,e_i,x)] = 0.$$

Os somatórios que restaram são exatamente a expressão de $(\mathrm{div}Ric)(x)$ já que, usando as propriedades dos tensor curvatura e permutando os somatórios, obtemos no ponto p:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\nabla_{e_j}r)(e_i,e_j,e_i,x)] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_j}r)(e_j,e_i,x,e_i)],$$

que é uma expressão análoga a (1.13). Verificado este fato, e como p é um ponto arbitrário de M, obtemos então:

$$(\mathrm{div}Ric)(x) = \frac{1}{2}dk(x).$$

$\square$

Capítulo 2

O Teorema de Weyl-Schouten

O teorema de Weyl-Schouten é o principal teorema sobre classificação de variedades conformemente planas. Veremos que quando a dimensão é maior que 3, uma condição necessária e suficiente para que a variedade seja conformemente plana é que o tensor de Weyl seja nulo, o que é equivalente a uma equação diferencial de segunda ordem. Quando temos a dimensão 3, o teorema estabelece que uma condição necessária e suficiente é que o tensor de Schouten seja um tensor de Codazzi, o que é equivalente a uma equação diferencial de terceira ordem, mostrando assim porque o caso em que a dimensão é 3 merece um estudo a parte.

Começaremos o capítulo com algumas noções básicas de geometria conforme relacionadas com os conceitos de geometria Riemanniana que apresentamos previamente no Capítulo 1. Dessa forma, iremos introduzir a noção de aplicação conforme e quais as mudanças geradas por essa aplicação em elementos como métrica, conexão e tensor curvatura. Neste contexto, apresentaremos a definição de variedade conformemente plana e em seguida o Teorema de Weyl-Schouten, que dá condições necessárias e suficientes para que uma variedade Riemanniana seja conformemente plana. Finalizaremos o capítulo com duas aplicações desse teorema, mostrando que as formas espaciais são conformemente planas e que variedades produtos de dimensão 3 do tipo $M^2 \times I$ são conformemente planas se, e somente se, M^2 tem curvatura gaussiana constante.

2.1 Aplicações Conformes

Inicialmente, veremos a noção de aplicação conforme e a noção de equivalência conforme entre métricas. Denotaremos por (M, g) a variedade Riemanniana M munida com uma métrica Riemanniana g, então:

Definição 2.1 Uma aplicação $f : (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ entre variedades Riemannianas é chamada *aplicação conforme* se a métrica induzida $f^*\tilde{g} = \tilde{g}(df, df) = e^{2u}g$ para alguma função $u : M \to \mathbb{R}$ diferenciável.

Duas métricas g e $\tilde{g}$ em M são ditas *conformemente equivalentes*, ou *conformes*, quando a aplicação $f = id : (M, g) \to (M, \tilde{g})$ é conforme.

Observação 2.1 Note que as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $f : (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ é uma aplicação conforme;

2. f preserva ângulos;

3. f preserva ortogonalidade;

Claramente, 1 implica em 2 e 2 implica 3. Falta mostrar então que 3 implica em 1 e obtemos o resultado desejado. Nesse sentido, seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal em T_pM, assim para $i \neq j$,

$$g(e_i + e_j, e_i - e_j) = g(e_i, e_i) - g(e_i, e_j) + g(e_i, e_j) - g(e_j, e_j) = 0.$$

Se f preserva ortogonalidade,

$$\begin{aligned} 0 = g(e_i + e_j, e_i - e_j) &= \tilde{g}(df(e_i + e_j), df(e_i - e_j)) \\ &= \tilde{g}(df(e_i), df(e_i)) - \tilde{g}(df(e_i), df(e_j)) \\ &\quad + \tilde{g}(df(e_i), df(e_j)) - \tilde{g}(df(e_j), df(e_j)) \\ &= \tilde{g}(df(e_i), df(e_i)) - \tilde{g}(df(e_j), df(e_j)), \end{aligned}$$

mostrando que os vetores $df(e_i)$ são ortogonais e tem o mesmo comprimento. Portanto, se escrevemos $\tilde{g}(df(e_i), df(e_i)) = e^{2u} = e^{2u}g(e_i, e_i)$, temos que f é conforme.

Exemplo 2.1 As inversas das projeções estereográficas $\sigma_{\pm}$, definidas por

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{\pm}^{-1}: \ \mathbb{R}^n & \longrightarrow & S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ p & \longmapsto & \frac{1}{1+|p|^2}\left(\mp(1-|p|^2), 2p\right), \end{array}$$

são conformes, onde a métrica na esfera é a métrica induzida pelo $\mathbb{R}^n$. Basta notar que, de acordo com a observação anterior, as aplicações inversas das projeções estereográficas preservam ortogonalidade. De fato, tomemos por exemplo $\sigma_{-}^{-1} = f$ então se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$ e $p = (p_1, \ldots, p_n)$ temos que:

$$f(p) \ = \ \frac{1}{1+|p|^2}\left((1-|p|^2), 2p\right),$$

implica em

$$\begin{array}{rcl} df_p(e_i) & = & \frac{-2p_i}{(1+|p|^2)^2}\left((1-|p|^2), 2p\right) + \frac{1}{1+|p|^2}\left(-2p_i, 2e_i\right) \\ & = & \frac{2}{(1+|p|^2)^2}\left(-2p_i, -2pp_i + e_i(1+|p|^2)\right). \end{array}$$

Então, denotando por $\langle , \rangle$ o produto interno usual do $\mathbb{R}^{n+1}$ e para $i \neq j$, temos que:

$$\begin{array}{rcl} \langle df(e_i), df(e_j) \rangle & = & \frac{4}{(1+|p|p^2)^4}\left(4p_ip_j + 4|p|^2p_ip_j - 2p_ip_j(1+|p|^2) - 2p_jp_i(1+|p|^2)\right) \\ & = & 0. \end{array}$$

assim, a aplicação f preserva ortogonalidade, sendo portanto, uma aplicação conforme.

2.2 Fórmulas de Transformação

Vimos nas Preliminares que dada uma métrica g em uma variedade Riemanniana M temos associado uma única conexão afim ∇ simétrica e compatível com g, chamada conexão Riemanniana, ou conexão de Levi-Civita. Com a conexão Riemanniana, definimos a curvatura R e então o tensor curvatura r. Agora, dada uma métrica $\tilde{g}$ conformemente equivalente à g, queremos encontrar as expressões correspondentes para esses elementos em M. O primeiro passo é dado pelo lema a seguir:

Lema 2.1 *Se $\tilde{g} = e^{2u}g$, então $\tilde{\nabla} = \nabla + B$, onde ∇ e $\tilde{\nabla}$ são as conexões de Levi-Civita para g e $\tilde{g}$, respectivamente, e B é um tensor-(2,1) simétrico, dado por*

$$B(x, y) = du(x)y + du(y)x - g(x, y)\mathrm{grad}u.$$

Demonstração: Pelo que vimos no Capítulo 1, no teorema de Levi-Civita, dados os campos x, y e $z \in \mathfrak{X}(M)$ a conexão Riemanniana $\tilde{\nabla}$ associada a $\tilde{g}$ satisfaz:

$$\begin{aligned}\tilde{g}(z, \tilde{\nabla}_y x) &= \frac{1}{2}\{x\tilde{g}(y,z) + y\tilde{g}(z,x) - z\tilde{g}(x,y) \\ &\quad - \tilde{g}([x,z],y) - \tilde{g}([y,z],x) - \tilde{g}([x,y],z)\}.\end{aligned}$$

como $\tilde{g} = e^{2u}g$, temos

$$\begin{aligned}e^{2u}g(z, \tilde{\nabla}_y x) &= \frac{1}{2}\left\{x(e^{2u})g(y,z) + e^{2u}xg(y,z) + y(e^{2u})g(z,x) + e^{2u}yg(z,x)\right. \\ &\quad -z(e^{2u})g(x,y) - e^{2u}zg(x,y) - e^{2u}\left[g([x,z],y) + g([y,z],x)\right. \\ &\quad \left.\left.+g([x,y],z)\right]\right\} \\ &= \frac{e^{2u}}{2}\{2du(x)g(y,z) + 2du(y)g(x,z) - 2du(z)g(x,y) \\ &\quad +xg(y,z) + yg(z,x) - zg(x,y) - g([x,z],y) - g([y,z],x) \\ &\quad -g([x,y],z)\}.\end{aligned}$$

Aplicando novamente o teorema de Levi-Civita nas duas últimas linhas e o fato de que $du(z) = g(\text{grad}u, z)$ segue que:

$$e^{2u}g(z, \tilde{\nabla}_y x) = e^{2u}g(du(x)y + du(y)x - g(x,y)\text{grad}u, z) + e^{2u}g(\nabla_y x, z).$$

Que é equivalente a

$$g(\tilde{\nabla}_y x, z) = g(B(x,y) + \nabla_y x, z).$$

Como os campos são arbitrários, a última equação nos dá que $\tilde{\nabla}_y x = \nabla_y x + B(x,y)$.

$\square$

A próxima definição é de natureza um pouco técnica, mas permitirá simplificar bastante o calculo para o tensor curvatura na métrica $\tilde{g}$.

Definição 2.2 Sejam $b_1, b_2 : V \times V \to \mathbb{R}$ duas formas bilineares simétricas em um espaço vetorial. O *produto de Kulkarni-Nomizu* de b_1 por b_2 é definido como

$$(b_1 \wedge b_2)(x,y,z,w) := \begin{vmatrix} b_1(x,z) & b_1(x,w) \\ b_2(y,z) & b_2(y,w) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2(x,z) & b_2(x,w) \\ b_1(y,z) & b_1(y,w) \end{vmatrix} \tag{2.1}$$

É imediato que o produto Kulkarni-Nomizu é simétrico, ou seja, $b_1 \wedge b_2 = b_2 \wedge b_1$ e, aplicando o determinante, vemos que $b_1 \wedge (b_2 + b_3) = b_1 \wedge b_2 + b_1 \wedge b_3$ onde b_3 é outra forma bilinear simétrica definida em $V \times V$. Outras propriedades que decorrem diretamente da definição são as seguintes, parecidas com as propriedades do tensor curvatura:

1. $(b_1 \wedge b_2)(x, y, z, w) = -(b_1 \wedge b_2)(x, y, w, z)$,
2. $(b_1 \wedge b_2)(x, y, z, w) = -(b_1 \wedge b_2)(y, x, z, w)$,
3. $(b_1 \wedge b_2)(x, y, z, w) = (b_1 \wedge b_2)(z, w, x, y)$,
4. $(b_1 \wedge b_2)(x, y, z, w) + (b_1 \wedge b_2)(y, z, x, w) + (b_1 \wedge b_2)(z, x, y, w) = 0$.

Temos então o seguinte lema:

Lema 2.2 *Se $\tilde{g} = e^{2u} g$ então o tensor curvatura de $\tilde{g}$ é dado por*

$$\tilde{r} = e^{2u}(r - b_u \wedge g), \tag{2.2}$$

onde r é o tensor curvatura de g e b_u é uma forma bilinear simétrica dada por

$$b_u(x, y) := \operatorname{hess} u(x, y) - du(x)du(y) + \frac{1}{2} g(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u) g(x, y). \tag{2.3}$$

Demonstração: Escrevendo $B(x, y) = \tilde{\nabla}_y x - \nabla_y x$, temos

$$\begin{aligned}
&\tilde{R}(x, y)z - R(x, y)z = \\
&= \tilde{\nabla}_y \tilde{\nabla}_x z - \tilde{\nabla}_x \tilde{\nabla}_y z + \tilde{\nabla}_{[x,y]} z - \nabla_y \nabla_x z + \nabla_x \nabla_y z - \nabla_{[x,y]} z \\
&= \tilde{\nabla}_y \tilde{\nabla}_x z - \tilde{\nabla}_x \tilde{\nabla}_y z - \nabla_y \nabla_x z + \nabla_x \nabla_y z + B(z, [x, y]) \\
&= \tilde{\nabla}_y (B(x, z) + \nabla_x z) - \nabla_y \nabla_x z - \tilde{\nabla}_x (B(y, z) + \nabla_y z) + \nabla_x \nabla_y z + B(z, [x, y]) \\
&= \tilde{\nabla}_y B(x, z) + (\tilde{\nabla}_y \nabla_x z - \nabla_y \nabla_x z) - \tilde{\nabla}_x B(y, z) - (\tilde{\nabla}_x \nabla_y z - \nabla_x \nabla_y z) \\
&\quad + B([x, y], z) \\
&= \tilde{\nabla}_y B(x, z) + B(\nabla_x z, y) - \tilde{\nabla}_x B(y, z) - B(\nabla_y z, x) + B([x, y], z) \\
&= B(y, B(x, z)) + \nabla_y B(x, z) + B(\nabla_x z, y) - B(x, B(y, z)) - \nabla_x B(y, z) \\
&\quad - B(x, \nabla_y z) + B(\nabla_x y, z) - B(\nabla_y x, z) \\
&= B(y, B(x, z)) - B(x, B(y, z)) + \{\nabla_y B(x, z) - B(\nabla_y x, z) - B(x, \nabla_y z)\} \\
&\quad - \{\nabla_x B(y, z) - B(\nabla_x y, z) - B(y, \nabla_x z)\}
\end{aligned}$$

Mas, o que temos dentro das chaves, é exatamente a derivada covariante do tensor B. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}\tilde{R}(x,y)z - R(x,y)z &= B(y,B(x,z)) - B(x,B(y,z)) \\ &\quad +(\nabla_y B)(x,z) - (\nabla_x B)(y,z).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Vamos calcular agora separadamente cada parcela do lado direito da equação (2.4), usando a expressão de B dada pelo Lema (2.1):

$$\begin{aligned}B(x,B(y,z)) &= B(x, du(y)z + du(z)y - g(y,z)\mathrm{grad}u) \\ &= du(y)B(x,z) + du(z)B(x,y) - g(y,z)B(x,\mathrm{grad}u) \\ &= du(y)[du(x)z + du(z)x - g(x,z)\mathrm{grad}u] \\ &\quad +du(z)[du(x)y + du(y)x - g(x,y)\mathrm{grad}u] \\ &\quad -g(y,z)[du(x)\mathrm{grad}u + du(\mathrm{grad}u)x - g(x,\mathrm{grad}u)\mathrm{grad}u] \\ &= [2du(y)du(z) - g(y,z)g(\mathrm{grad}u,\mathrm{grad}u)]x + du(z)du(x)y \\ &\quad +du(y)du(x)z - [du(y)g(x,z) + du(z)g(x,y)]\mathrm{grad}u.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}B(y,B(x,z)) &= [2du(x)du(z) - g(x,z)g(\mathrm{grad}u,\mathrm{grad}u)]y + du(z)du(y)x \\ &\quad +du(x)du(y)z - [du(x)g(y,z) + du(z)g(y,x)]\mathrm{grad}u.\end{aligned}$$

Agora, calculamos as derivadas covariantes,

$$\begin{aligned}(\nabla_x B)(y,z) &= \nabla_x B(y,z) - B(\nabla_x y, z) - B(y, \nabla_x z) \\ &= \nabla_x(du(y)z + du(z)y - g(y,z)\mathrm{grad}u) - [du(\nabla_x y)z + du(z)\nabla_x y \\ &\quad -g(\nabla_x y, z)\mathrm{grad}u] - [du(y)\nabla_x z + du(\nabla_x z)y - g(y,\nabla_x z)\mathrm{grad}u] \\ &= x(du(y))z + du(y)\nabla_x z + x(du(z))y + du(z)\nabla_x y - x(g(y,z))\mathrm{grad}u \\ &\quad -g(y,z)\nabla_x \mathrm{grad}u - du(\nabla_x y)z - du(z)\nabla_x y + g(\nabla_x y, z)\mathrm{grad}u \\ &\quad -du(y)\nabla_x z - du(\nabla_x z)y + g(y,\nabla_x z)\mathrm{grad}u \\ &= x(du(y))z + x(du(z))y - du(\nabla_x y)z - du(\nabla_x z)y - g(y,z)\nabla_x \mathrm{grad}u.\end{aligned}$$

Lembrando que $\mathrm{hess}\, u(x,y) = x(du(y)) - du(\nabla_x y)$, temos

$$(\nabla_x B)(y,z) = \mathrm{hess}\, u(x,y)z + \mathrm{hess}\, u(x,z)y - g(y,z)\nabla_x \mathrm{grad}u.$$

Analogamente,

$$(\nabla_y B)(x,z) = \operatorname{hess} u(y,x)z + \operatorname{hess} u(y,z)x - g(x,z)\nabla_y \mathrm{grad} u.$$

Com essas informações calculamos agora o tensor curvatura $\tilde{r}$ da seguinte forma. Segue de (2.4) que

$$\begin{aligned}
g(\tilde{R}(x,y)z - R(x,y)z, w) \quad &= \\
= \quad & g(B(y,B(x,z)),w) - g(B(x,B(y,z)),w) + g((\nabla_y B)(x,z),w) - g((\nabla_x B)(y,z),w) \\
= \quad & 2du(x)du(z)g(y,w) - g(y,w)g(x,z)g(\mathrm{grad}u, \mathrm{grad}u) + du(z)du(y)g(x,w) \\
& + du(x)du(y)g(z,w) - du(x)du(w)g(y,z) - du(z)du(w)g(y,x) + du(y)du(x)g(z,w) \\
& - 2du(y)du(z)g(x,w) + g(y,z)g(x,w)g(\mathrm{grad}u, \mathrm{grad}u) - du(z)du(x)g(y,w) \\
& - du(y)du(x)g(z,w) + du(y)du(w)g(x,z) + du(z)du(w)g(x,y) - du(x)du(y)g(z,w) \\
& + \operatorname{hess} u(y,x)g(z,w) + \operatorname{hess} u(y,z)g(x,w) - g(x,z)\operatorname{hess} u(y,w) \\
& - \operatorname{hess} u(x,y)g(z,w) - \operatorname{hess} u(x,z)g(y,w) + g(y,z)\operatorname{hess} u(x,w) \\
= \quad & -[\operatorname{hess} u(x,z)g(y,w) - \operatorname{hess} u(x,w)g(y,z)] - [g(x,z)\operatorname{hess} u(y,w) - g(x,w)\operatorname{hess} u(y,z)] \\
& + [du(x)du(z)g(y,w) - du(x)du(w)g(y,z)] + [g(x,z)du(y)du(w) - g(x,w)du(y)du(z)] \\
& - [g(x,z)g(y,w) - g(y,z)g(x,w)]g(\mathrm{grad}u, \mathrm{grad}u).
\end{aligned}$$

Perceba que, na última igualdade, temos um produto de Kulkarni-Nomizu em cada uma das linhas (ver em (2.1)), o que nos dá:

$$g(\tilde{R}(x,y)z - R(x,y)z, w) = -\left(b_u \wedge g\right)(x,y,z,w), \tag{2.5}$$

com

$$b_u(x,y) = \operatorname{hess} u(x,y) - du(x)du(y) + \frac{1}{2}g(\mathrm{grad}u, \mathrm{grad}u)g(x,y).$$

Mas, lembrando que $\tilde{g} = e^{2u}g$ temos que

$$g(\tilde{R}(x,y)z - R(x,y)z, w) = \frac{\tilde{r}}{e^{2u}}(x,y,z,w) - r(x,y,z,w).$$

Voltando em (2.5) obtemos

$$\frac{\tilde{r}}{e^{2u}} - r = -b_u \wedge g,$$

o que é equivalente a (2.2).

$\square$

Vamos agora definir o conceito de variedades conformemente planas.

Definição 2.3 Uma variedade Riemanniana (M, g) é chamada *conformemente plana* se, para todo $p \in M$, existe uma vizinhança U de p e alguma função $u : U \to \mathbb{R}$ tal que a métrica $\tilde{g} = e^{2u}g$ é *plana* em U, isto é, o tensor $\tilde{r}$ definido a partir de $\tilde{g}$ é identicamente nulo.

O que faremos na próxima seção é dar condições necessárias e suficientes para que uma variedade Riemanniana seja conformemente plana.

2.3 O teorema de Weyl-Schouten

Na seção anterior, introduzimos o conceito de variedades conformemente planas. Quando estamos em dimensão 2, obtemos que superfícies regulares são sempre conformemente planas. Isto decorre do fato que localmente uma superfície regular admite uma parametrização isotérmica, ou seja, os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por:

$$E = G = e^{2u} \text{ e } F = 0,$$

e então a métrica obtida satisfaz $\tilde{g} = e^{2u}I$ onde I é a métrica euclidiana, que sabemos que é plana. Em dimensões superiores, isso nem sempre acontece, como vimos na discussão feita na Introdução. Portanto, o que teremos é um teorema que caracteriza as variedades conformemente planas de dimensão $n \geq 3$ em termos de determinados tensores que apresentaremos logo no início da seção. Em seguida, teremos alguns resultados estabelecidos e então finalizaremos esta seção com o enunciado e a demonstração do teorema de Weyl-Schouten.

Definição 2.4 Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n. Definimos o *tensor de Schouten* por

$$s := \frac{1}{n-2}\left[Ric - \frac{k}{2(n-1)}g\right], \tag{2.6}$$

onde k é a curvatura escalar, e o *tensor de Weyl* por

$$w := r - s \wedge g. \tag{2.7}$$

Veremos agora que o tensor de Weyl tem a seguinte propriedade: Dado um referencial ortonormal $\{e_1, \dots e_n\}$ temos $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} w(x, e_i, y, e_i) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} w(x, e_i, y, e_i) &= \sum_{i=1}^{n} r(x, e_i, y, e_i) - \sum_{i=1}^{n} s \wedge g(x, e_i, y, e_i) \\
&= Ric(x, y) - ns(x, y) + s(x, y) - \frac{g(x, y)}{(n-2)} \left[k - \frac{nk}{2(n-1)} \right] + s(x, y) \\
&= Ric(x, y) - (n-2)s(x, y) - \frac{g(x, y)}{(n-2)} \frac{(n-2)k}{2(n-1)} \\
&= \left[Ric(x, y) - \frac{k}{2(n-1)} g(x, y) \right] - (n-2)s(x, y) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Essa propriedade permite-nos uma importante decomposição única do tensor curvatura r, que registraremos no seguinte lema:

Lema 2.3 *Se escrevemos $r = a + b \wedge g$ onde a é um tensor-$(4, 0)$ que satisfaz*

$$\sum_{i=1}^{n} a(x, e_i, y, e_i) = 0,$$

então temos que a é o tensor de Weyl e que b é o tensor de Schouten.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
Ric(x, y) = \sum_{i=1}^{n} r(x, e_i, y, e_i) &= \sum_{i=1}^{n} a(x, e_i, y, e_i) + \sum_{i=1}^{n} b \wedge g(x, e_i, y, e_i) \\
&= nb(x, y) - b(x, y) + g(x, y) \sum_{i=1}^{n} b(e_i, e_i) - b(x, y) \\
&= (n-2)b(x, y) + g(x, y) \sum_{i=1}^{n} b(e_i, e_i).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Então,

$$k = \sum_{i=1}^{n} Ric(e_i, e_i) = (n-2) \sum_{i=1}^{n} b(e_i, e_i) + n \sum_{i=1}^{n} b(e_i, e_i) = 2(n-1) \sum_{i=1}^{n} b(e_i, e_i).$$

Portanto, voltando em (2.8)

$$Ric(x, y) = (n-2)b(x, y) + \frac{k}{2(n-1)} g(x, y).$$

Isolando b,

$$b(x, y) = \frac{1}{(n-2)} \left[Ric(x, y) - \frac{k}{2(n-1)} g(x, y) \right] = s(x, y).$$

Então $a = r - s \wedge g = w$.

Portanto, obtemos que a é o tensor de Weyl e b é o tensor de Schouten.

□

É importante ter em mente esse resultado visto que, uma vez apresentado o tensor curvatura na forma acima, conseguimos indentificar quais são os tensores que o compõe, veremos isso explicitamente na demonstração do teorema de Weyl-Schouten e nas aplicações que apresentaremos.

Os próximos lemas nos mostram como a dimensão da variedade influencia nos tensores de Weyl e Schouten.

Lema 2.4 *Considere uma variedade Riemanniana (M^n, g), se $n = 3$ então o tensor de Weyl w é identicamente nulo.*

Demonstração: De fato, lembrando da expressão para o tensor de Schouten s dada em (2.6) e considerando $\{e_1, e_2, e_3\}$ um referencial ortonormal, temos, para $i \neq j$

$$\begin{aligned}
(s \wedge g)(e_i, e_j, e_i, e_j) &= \begin{vmatrix} s(e_i, e_i) & s(e_i, e_j) \\ g(e_j, e_i) & g(e_j, e_j) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g(e_i, e_i) & g(e_i, e_j) \\ s(e_j, e_i) & s(e_j, e_j) \end{vmatrix} \\
&= s(e_i, e_i) + s(e_j, e_j) \\
&= \left[Ric(e_i, e_i) - \frac{k}{4}\right] + \left[Ric(e_j, e_j) - \frac{k}{4}\right] \\
&= Ric(e_i, e_i) + Ric(e_j, e_j) - \frac{k}{2}.
\end{aligned}$$

Lembrando que $k = \displaystyle\sum_{l=1}^{3} Ric(e_l, e_l)$ obtemos que

$$(s \wedge g)(e_i, e_j, e_i, e_j) = \frac{1}{2}Ric(e_i, e_i) + \frac{1}{2}Ric(e_j, e_j) - \frac{1}{2}Ric(e_k, e_k),$$

onde $k \neq i$ e $k \neq j$. Dessa forma, sendo $n = 3$, considerando os três índices distintos i, j e k, temos

$$\begin{aligned}
(s \wedge g)(e_i, e_j, e_i, e_j) &= \tfrac{1}{2}[r(e_i, e_j, e_i, e_j) + r(e_i, e_k, e_i, e_k) + r(e_i, e_i, e_i, e_i)] \\
&\quad + \tfrac{1}{2}[r(e_j, e_j, e_j, e_j) + r(e_j, e_k, e_j, e_k) + r(e_j, e_i, e_j, e_i)] \\
&\quad - \tfrac{1}{2}[r(e_k, e_j, e_k, e_j) + r(e_k, e_k, e_k, e_k) + r(e_k, e_i, e_k, e_i)] \\
&= r(e_i, e_j, e_i, e_j).
\end{aligned}$$

E assim, de (2.7) concluimos que $w(e_i, e_j, e_i, e_j) = 0$.

Ainda com os índices i, j e k distintos, temos que:

$$\begin{aligned} w(e_i, e_j, e_k, e_j) &= r(e_i, e_j, e_k, e_j) - (s \wedge g)(e_i, e_j, e_k, e_j) \\ &= r(e_i, e_j, e_k, e_j) - s(e_i, e_k) \\ &= r(e_i, e_j, e_k, e_j) - Ric(e_i, e_k) \\ &= r(e_i, e_j, e_k, e_j) - r(e_i, e_j, e_k, e_j) \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $n = 3$ para concluir, por exemplo, que $Ric(e_i, e_k) = r(e_i, e_j, e_k, e_j)$. Da mesma forma,

$$\begin{aligned} w(e_i, e_j, e_k, e_i) &= r(e_i, e_j, e_k, e_i) - (s \wedge g)(e_i, e_j, e_k, e_i) \\ &= -r(e_j, e_i, e_k, e_i) + (s \wedge g)(e_j, e_i, e_k, e_i) \\ &= -w(e_j, e_i, e_k, e_i) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Os demais casos decorrem destes acima e das propriedades do tensor curvatura e do produto Kulkarni-Nomizu.

Portanto, concluímos que, aplicando em quaisquer vetores do referencial, o tensor de Weyl se anula, e então temos que $w \equiv 0$.

$\square$

Lema 2.5 *Se em uma dada variedade Riemanniana (M^n, g), com $n > 3$, tivermos o tensor de Weyl w identicamente nulo, então o tensor de Schouten é um tensor de Codazzi, isto é*

$$(\nabla_x s)(y, z) = (\nabla_y s)(x, z).$$

Demonstração: Para provar isso, a primeira observação que devemos fazer é que, neste caso, $r = s \wedge g$ e portanto $(\nabla_x r)(y, z, v, w) = (\nabla_x (s \wedge g))(y, z, v, w)$. Desenvolvendo esta última derivada covariante temos:

$$\begin{aligned}
(\nabla_x(s\wedge g))(y,z,v,w) \;&= \\
= \;& x[(s\wedge g)(y,z,v,w)] - (s\wedge g)(\nabla_x y,z,v,w) - (s\wedge g)(y,\nabla_x z,v,w) \\
& \qquad -(s\wedge g)(y,z,\nabla_x v,w) - (s\wedge g)(y,z,v,\nabla_x w) \\
= \;& x[s(y,v)g(z,w) - s(y,w)g(z,v) + g(y,v)s(z,w) - g(y,w)s(z,v)] \\
& -[s(\nabla_x y,v)g(z,w) - s(\nabla_x y,w)g(z,v) + g(\nabla_x y,v)s(z,w) - g(\nabla_x y,w)s(z,v)] \\
& -[s(y,v)g(\nabla_x z,w) - s(y,w)g(\nabla_x z,v) + g(y,v)s(\nabla_x z,w) - g(y,w)s(\nabla_x z,v)] \\
& -[s(y,\nabla_x v)g(z,w) - s(y,w)g(z,\nabla_x v) + g(y,\nabla_x v)s(z,w) - g(y,w)s(z,\nabla_x v)] \\
& -[s(y,v)g(z,\nabla_x w) - s(y,\nabla_x w)g(z,v) + g(y,v)s(z,\nabla_x w) - g(y,\nabla_x w)s(z,v)].
\end{aligned}$$

Podemos agora agrupar as parcelas da última igualdade de forma que podemos escrevê-la em termos das derivadas covariantes de s e g:

$$\begin{aligned}
(\nabla_x(s\wedge g))(y,z,v,w) \;&= \\
= \;& [(\nabla_x s)(y,v)g(z,w) - (\nabla_x s)(y,w)g(z,v) + (\nabla_x s)(z,w)g(y,v) - (\nabla_x s)(z,v)g(y,w)] \\
& +[s(y,v)(\nabla_x g)(z,w) - s(y,w)(\nabla_x g)(z,v) + s(z,w)(\nabla_x g)(y,v) - s(z,v)(\nabla_x g)(y,w)].
\end{aligned}$$

Lembrando que a derivada covariante da métrica g é sempre zero, temos simplesmente:

$$(\nabla_x r)(y,z,v,w) = (\nabla_x(s\wedge g))(y,z,v,w) = ((\nabla_x s)\wedge g)(y,z,v,w). \tag{2.9}$$

Pelas propriedades que listamos anteriormente do tensor curvatura, é imediato que $(\nabla_x r)(y,z,v,w) = (\nabla_x r)(v,w,y,z)$. E assim, pela segunda identidade de Bianchi e por (2.9) obtemos:

$$0 = ((\nabla_x s)\wedge g)(y,z,v,w) + ((\nabla_y s)\wedge g)(z,x,v,w) + ((\nabla_z s)\wedge g)(x,y,v,w) \tag{2.10}$$

Obtemos (2.10) com campos de vetores arbitrários, dessa forma dado um referencial geodésico $\{e_1,\ldots,e_n\}$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; \sum_{i=1}^{n}[((\nabla_{e_i}s)\wedge g)(y,z,v,e_i) + ((\nabla_y s)\wedge g)(z,e_i,v,e_i) + ((\nabla_z s)\wedge g)(e_i,y,v,e_i)] \\
&=\; \sum_{i=1}^{n}[(\nabla_{e_i}s)(y,v)g(z,e_i) - (\nabla_{e_i}s)(y,e_i)g(z,v) + (\nabla_{e_i}s)(z,e_i)g(y,v) \\
&\qquad -(\nabla_{e_i}s)(z,v)g(y,e_i) + (\nabla_y s)(z,v)g(e_i,e_i) - (\nabla_y s)(z,e_i)g(e_i,v) \\
&\qquad +g(z,v)(\nabla_y s)(e_i,e_i) - g(z,e_i)(\nabla_y s)(e_i,v) + (\nabla_z s)(e_i,v)g(y,e_i) \\
&\qquad -(\nabla_z s)(e_i,e_i)g(y,v) + g(e_i,v)(\nabla_z s)(y,e_i) - g(e_i,e_i)(\nabla_z s)(y,v)]
\end{aligned}$$

Como o referencial geodésico é uma base ortonormal do espaço tangente em cada ponto, podemos escrever um campo x da forma $x = \sum_{i=1}^{n} g(x, e_i)e_i$. Usando este fato e lembrando que a derivada covariante é um tensor (isto é, uma aplicação multilinear), obtemos:

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla_z s)(y,v) - g(z,v)(\mathrm{div}s)(y) + g(y,v)(\mathrm{div}s)(z) - (\nabla_y s)(z,v) \\
&\quad + n(\nabla_y s)(z,v) - (\nabla_y s)(z,v) + g(z,v)\sum_{i=1}^{n}(\nabla_y s)(e_i,e_i) - (\nabla_y s)(z,v) \\
&\quad + (\nabla_z s)(y,v) - g(y,v)\sum_{i=1}^{n}(\nabla_z s)(e_i,e_i) + (\nabla_z s)(y,v) - n(\nabla_z s)(y,v) \\
&= g(z,v)\left[\sum_{i=1}^{n}(\nabla_y s)(e_i,e_i) - (\mathrm{div}s)(y)\right] + g(y,v)\left[(\mathrm{div}s)(z) - \sum_{i=1}^{n}(\nabla_z s)(e_i,e_i)\right] \\
&\quad + (n-3)[(\nabla_y s)(z,v) - (\nabla_z s)(y,v)].
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Usamos agora o Lema 1.1 para mostrar que as expressões entre colchetes nas primeiras parcelas são nulas. De fato, inicialmente temos que

$$(\nabla_z s)(x,y) = \frac{1}{n-2}\left[(\nabla_z Ric)(x,y) - \frac{dk(z)}{2(n-1)}g(x,y)\right].$$

Então

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{div}s)(z) - \sum_{i=1}^{n}(\nabla_z s)(e_i,e_i) = \\
&= \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\nabla_{e_i} Ric)(z,e_i) - \frac{dk(e_i)}{2(n-1)}g(z,e_i) - (\nabla_z Ric)(e_i,e_i) + \frac{dk(z)}{2(n-1)}g(e_i,e_i)\right] \\
&= \frac{1}{n-2}\left[(\mathrm{div}Ric)(z) - \frac{dk(z)}{2(n-1)} - \sum_{i=1}^{n} z(Ric(e_i,e_i)) + \frac{dk(z)}{2(n-1)}n\right] \\
&= \frac{1}{n-2}\left[(\mathrm{div}Ric)(z) - \frac{dk(z)}{2(n-1)} - dk(z) + \frac{dk(z)}{2(n-1)}n\right] \\
&= \frac{1}{n-2}\left[(\mathrm{div}Ric)(z) - \frac{1}{2}dk(z)\right] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde usamos o lema na última igualdade.

Dessa forma, voltando a (2.11) concluímos que

$$0 = (n-3)[(\nabla_y s)(z,v) - (\nabla_z s)(y,v)].$$

Sendo $n > 3$ obtemos

$$(\nabla_y s)(z, v) = (\nabla_z s)(y, v).$$

$\square$

Podemos agora passar ao teorema de Weyl-Schouten:

Teorema 2.1 (Weyl-Schouten) *: Uma variedade Riemanniana (M^n, g) de dimensão $n \geq 3$ é conformemente plana se, e somente se,*

- *O tensor de Schouten é um tensor de Codazzi, isto é, $(\nabla_x s)(y, z) = (\nabla_y s)(x, z)$, no caso $n = 3$.*
- *O tensor de Weyl é identicamente nulo, no caso $n > 3$.*

Demonstração: Vimos no Lema 2.2 que, ao passar de uma métrica g para $\tilde{g} = e^{2u}g$ obtemos o tensor curvatura $\tilde{r} = e^{2u}(r - b_u \wedge g)$. Assim, (M^n, g) é conformemente plana se, e somente se, $\tilde{r} = 0$, então

$$e^{2u}(r - b_u \wedge g) = 0 \quad \text{isto é} \quad r = b_u \wedge g.$$

Assim, M é conformemente plana se, e somente se, o tensor curvatura r admitir uma decomposição $r = 0 + b_u \wedge g$ e então, pelo Lema 2.3, devemos ter o tensor de Weyl indenticamente nulo, $w \equiv 0$, e o tensor de Schouten dado por $s = b_u$. Ou seja, deve existir uma função u tal que o tensor de Schouten seja escrito da forma,

$$s = b_u = \operatorname{hess} u(x, y) - du(x)du(y) + \frac{1}{2}g(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u)g(x, y). \tag{2.12}$$

Vimos no Lema 2.4 que quando $n = 3$ o tensor de Weyl é identicamente nulo e no Lema 2.5 vimos que, no caso $n > 3$, o tensor de Weyl ser identicamente nulo implica no tensor de Schouten ser um tensor de Codazzi. Assim basta mostrar que a expressão

$$(\nabla_y s)(z, v) = (\nabla_z s)(y, v), \tag{2.13}$$

é a condição de integrabilidade para a equação diferencial parcial (2.12) e assim, resolvemos o nosso problema em ambos os casos:

- Para $n = 3$, (2.13) aparece como hipótese;

- Para $n > 3$, (2.13) aparece como consequência de $w \equiv 0$.

Suponha então que u seja uma solução para o problema. Introduzindo o tensor-$(1,1)$ S dado por $s(x,y) = g(x, S(y))$ e denotando $v = \mathrm{grad} u$ temos que a equação $b_u = s$ é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} du &= g(v,.) \\ \nabla v &= S + g(v,.)v - \frac{1}{2}g(v,v)id. \end{cases}$$

Vamos verificar esta equivalência. A primeira linha segue da definição de gradiente. Aplicando as definições de s, $\mathrm{hess}\, u$ e $\mathrm{grad} u$, a expressão

$$s(x,y) = b_u = \mathrm{hess}\, u(x,y) - du(x)du(y) + \frac{1}{2}g(\mathrm{grad} u, \mathrm{grad} u)g(x,y),$$

é equivalente a

$$g(x, S(y)) = g(x, \nabla_y \mathrm{grad} u) - g(x, \mathrm{grad} u)g(y, \mathrm{grad} u) + \frac{1}{2}g(\mathrm{grad} u, \mathrm{grad} u)g(x,y).$$

Se $v = \mathrm{grad} u$, podemos reescrever a equação acima como

$$\begin{aligned} g(x, S(y)) &= g(x, \nabla_y v) - g(x, g(y,v)v) + \frac{1}{2}g(\mathrm{grad} u, \mathrm{grad} u)g(x,y) \\ &= g(x, \nabla_y v - g(y,v)v + \frac{1}{2}g(v,v)y). \end{aligned}$$

Como os campos aplicados são arbitrários, a última linha é equivalente a

$$\nabla_y v = S(y) + g(y,v)v - \frac{1}{2}g(v,v)y$$

e obtemos a segunda linha do sistema.

Note agora que o operador $A := S + g(v,.)v - \frac{1}{2}g(v,v)id$ é um operador auto-adjunto:

$$\begin{aligned} g(x, A(y)) &= g(x, S(y) + g(y,v)v - \frac{1}{2}g(v,v)y) \\ &= s(x,y) + g(v,y)g(x,v) - \frac{1}{2}g(v,v)g(x,y) \\ &= g(y, A(x)) \end{aligned}$$

Dessa forma, sendo $A(x) = \nabla_x v$ concluímos que

$$(\nabla_x v, y) = g(x, \nabla_y v). \tag{2.14}$$

Trabalhando agora em coordenadas locais, seja $Y : V \subset \mathbb{R}^n \to M$ um sistema de coordenadas onde ∂_i representam os vetores coordenados. Por (2.14) temos que:

$$g(\nabla_{\partial_i} v, \partial_j) = g(\partial_i, \nabla_{\partial_j} v).$$

Como $\nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_j}\partial_i = [\partial_i, \partial_j] = 0$, a equação acima é equivalente a

$$g(\nabla_{\partial_i} v, \partial_j) + g(v, \nabla_{\partial_i}\partial_j) = g(\partial_i, \nabla_{\partial_j} v) + g(v, \nabla_{\partial_j}\partial_i).$$

Assim, em coordenadas locais, (2.14) equivale a:

$$\partial_i g(v, \partial_j) = \partial_j g(v, \partial_i). \tag{2.15}$$

Expressando u em coordenadas locais $u \circ Y : V \to \mathbb{R}$ temos que (2.15) é equivalente a:

$$\partial_i \partial_j (u) = \partial_j \partial_i (u),$$

e pelo teorema de Frobenius (ver apêndice B) temos que qualquer solução v da segunda equação do sistema é localmente um gradiente.

Escrevendo $v = \sum_{j=1}^{n} v^j \partial_j$ e $A(\partial_i) = \sum_{k=1}^{n} A_i^k \partial_k$ temos:

$$\begin{aligned} A(\partial_i) &= \nabla_{\partial_i}\left(\sum_{j=1}^{n} v^j \partial_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \left[\partial_i(v^j)\partial_j + v^j \nabla_{\partial_i}\partial_j\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left[\partial_i(v^j)\partial_j + v^j \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[\partial_i(v^k) + \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k v^j\right] \partial_k, \end{aligned}$$

e então, $A_i^k = \partial_i(v^k) + \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k v^j$.

Dessa forma, obtemos, em coordenadas locais, um expressão equivalente à segunda equação do sistema:

$$\partial_i(v^k) = A_i^k - \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ij}^m v^j. \tag{2.16}$$

Usando (2.16) e o Teorema de Frobenius podemos obter uma condição de integrabilidade, procedendo da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
(\partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i)v^k &= \partial_i\left[A_j^k - \sum_{m=1}^{n}\Gamma_{jm}^k v^m\right] - \partial_j\left[A_i^k - \sum_{m=1}^{n}\Gamma_{im}^k v^m\right] \\
&= \underbrace{\partial_i(A_j^k) - \partial_j(A_i^k)}_{D} - \partial_i(\sum_{m=1}^{n}\Gamma_{jm}^k v^m) + \partial_j(\sum_{m=1}^{n}\Gamma_{im}^k v^m) \\
&= D - \sum_{m=1}^{n}\left[\partial_i(\Gamma_{jm}^k)v^m + \Gamma_{jm}^k\partial_i(v^m)\right] + \sum_{m=1}^{n}\left[\partial_j(\Gamma_{im}^k)v^m + \Gamma_{im}^k\partial_j(v^m)\right] \\
&= D - \sum_{m=1}^{n}\left\{\Gamma_{jm}^k\left[A_i^m - \sum_{l=1}^{n}\Gamma_{il}^m v^l\right] + \Gamma_{im}^k\left[A_j^m - \sum_{l=1}^{n}\Gamma_{jl}^m v^l\right]\right\} \\
&\quad - \sum_{m=1}^{n}\left[\partial_i(\Gamma_{jm}^k) - \partial_j(\Gamma_{im}^k)\right]v^m \\
&= \partial_i(A_j^k) - \partial_j(A_i^k) + \sum_{m=1}^{n}\left\{\Gamma_{im}^k A_j^m - \Gamma_{jm}^k A_i^m\right\} \\
&\quad \sum_{m=1}^{n}\left\{\left[\partial_j(\Gamma_{im}^k) - \partial_i(\Gamma_{jm}^k) + \sum_{l=1}^{n}\Gamma_{jl}^k\Gamma_{im}^l - \sum_{l=1}^{n}\Gamma_{il}^k\Gamma_{jm}^l\right]v^m\right\}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, $\partial_i\partial_j(v^k) = \partial_j\partial_i(v^k)$ é equivalente à

$$0 = \partial_i(A_j^k) - \partial_j(A_i^k) + \sum_{m=1}^{n}\left[\Gamma_{im}^k A_j^m - \Gamma_{jm}^k A_i^m + R_{ijm}^k v^m\right], \tag{2.17}$$

onde usamos a expressão das componentes de curvatura R_{ijm}^k.

Podemos agora usar a condição que obtivemos para coordenadas locais e obter um resultado geral, ou seja, para campos de vetores quaisquer. Basta observar que:

$$\begin{aligned}
&(\nabla_{\partial_i}A)(\partial_j) - (\nabla_{\partial_j}A)(\partial_i) + R(\partial_i,\partial_j)v = \\
&= \nabla_{\partial_i}A(\partial_j) - A(\nabla_{\partial_i}\partial_j) - \nabla_{\partial_j}A(\partial_i) + A(\nabla_{\partial_j}\partial_i) + R(\partial_i,\partial_j)\sum_{m=1}^{n}v^m\partial_m \\
&= \nabla_{\partial_i}(\sum_{k=1}^{n}A_j^k\partial_k) - \nabla_{\partial_j}(\sum_{k=1}^{n}A_i^k\partial_k) + \sum_{m=1}^{n}v^m R(\partial_i,\partial_j)\partial_m \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[\partial_i(A_j^k)\partial_k + A_j^k\nabla_{\partial_i}\partial_k\right] - \sum_{k=1}^{n}\left[\partial_j(A_i^k)\partial_k + A_i^k\nabla_{\partial_j}\partial_k\right] + \sum_{m=1}^{n}v^m\sum_{k=1}^{n}R_{ijm}^k\partial_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[\partial_i(A_j^k) - \partial_j(A_i^k) + \sum_{m=1}^{n}R_{ijm}^k v^m\right]\partial_k + \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(A_j^k\Gamma_{ik}^m - A_i^k\Gamma_{jk}^m\right)\partial_l.
\end{aligned}$$

como a variação em k e em m é a mesma, podemos trocá-los na segunda parcela acima e reescrever:

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_{\partial_i}A)(\partial_j)-(\nabla_{\partial_j}A)(\partial_i)+R(\partial_i,\partial_j)v=\\
=&\ \sum_{k=1}^{n}\left[\partial_i(A_j^k)-\partial_j(A_i^k)+\sum_{m=1}^{n}R_{ijm}^{k}v^m\right]\partial_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(A_j^m\Gamma_{im}^k-A_i^m\Gamma_{jm}^k\right)\partial_k\\
=&\ \sum_{k=1}^{n}\left[\partial_i(A_j^k)-\partial_j(A_i^k)+\sum_{m=1}^{n}\left(R_{ijm}^{k}v^m+A_j^m\Gamma_{im}^k-A_i^m\Gamma_{jm}^k\right)\right]\partial_k\\
=&\ 0,
\end{aligned}
$$

já que, por (2.17), cada coeficiente acima é nulo. Dessa forma, concluímos que

$$(\nabla_{\partial_i}A)(\partial_j)-(\nabla_{\partial_j}A)(\partial_i)+R(\partial_i,\partial_j)v=0,$$

e assim, por linearidade, obtemos a seguinte condição de integrabilidade:

$$0=(\nabla_xA)(y)-(\nabla_yA)(x)+R(x,y)v. \tag{2.18}$$

O que faremos agora é mostrar que, quando o tensor de Weyl é identicamente nulo, a condição (2.18) é equivalente ao tensor de Schouten ser um tensor de Codazzi e assim finalizamos a demonstração do teorema.

Lembrando que o tensor A é dado por $A(y)=\nabla_yv=S(y)+g(v,y)v-\dfrac{1}{2}g(v,v)y$, temos então que:

$$
\begin{aligned}
(\nabla_xA)(y) &= \nabla_x\left[S(y)+g(v,y)v-\frac{1}{2}g(v,v)y\right]-S(\nabla_xy)-g(v,\nabla_xy)v+\frac{1}{2}g(v,v)\nabla_xy\\
&= [\nabla_xS(y)-S(\nabla_xy)]+g(v,y)\nabla_xv+x\,[g(v,y)]\,v-\frac{1}{2}g(v,v)\nabla_xy\\
&\quad -x\left[\frac{1}{2}g(v,v)\right]y-g(v,\nabla_xy)v+\frac{1}{2}g(v,v)\nabla_xy\\
&= (\nabla_xS)(y)+g(v,y)\left[S(x)+g(v,x)v-\frac{1}{2}g(v,v)x\right]+g(\nabla_xv,y)v\\
&\quad +g(v,\nabla_xy)v-g(\nabla_xv,v)y-g(v,\nabla_xy)v\\
&= (\nabla_xS)(y)+g(v,y)S(x)+g(v,y)g(v,x)v-\frac{1}{2}g(v,y)g(v,v)x\\
&\quad g(S(x),y)v+g(v,x)g(v,y)v-\frac{1}{2}g(v,v)g(x,y)v\\
&\quad -g(S(x),v)y-g(v,x)g(v,v)y+\frac{1}{2}g(v,v)g(x,v)y.
\end{aligned}
$$

Usando agora que o operador S é auto-adjunto, obtemos que:

$$\begin{aligned}(\nabla_x A)(y) - (\nabla_y A)(x) + R(x,y)v &= (\nabla_x S)(y) + g(v,y)S(x) - g(S(x),v)y \\ &\quad -(\nabla_y S)(x) - g(v,x)S(y) + g(S(y),v)x \\ &\quad +R(x,y)v.\end{aligned}$$

Como vimos, existe solução se, e somente se, o lado esquerdo da igualdade acima se anula. Portanto, aplicando a métrica g com um campo arbitrário z obtemos,

$$\begin{aligned}0 &= g(g(v,y)S(x) - g(S(x),v)y - g(v,x)S(y) + g(S(y),v)x, z) \\ &\quad +g(R(x,y)v,z) + g((\nabla_x S)(y) - (\nabla_y S)(x), z) \\ &= g(v,y)s(x,z) - s(x,v)g(y,z) - g(v,x)s(y,z) + s(y,v)g(x,z) \\ &\quad +r(x,y,v,z) + g((\nabla_x S)(y) - (\nabla_y S)(x), z) \\ &= w(x,y,v,z) + g((\nabla_x S)(y) - (\nabla_y S)(x), z).\end{aligned}$$

E então, quando temos $w \equiv 0$ a condição de integrabilidade do sistema se reduz a

$$g((\nabla_x S)(y) - (\nabla_y S)(x), z) = 0,$$

que é equivalente a:

$$g((\nabla_x S)(y), z) = g((\nabla_y S)(x), z). \tag{2.19}$$

Para concluir, basta notar que:

$$\begin{aligned}(\nabla_x s)(y,z) &= xs(y,z) - s(\nabla_x y, z) - s(y, \nabla_x z) \\ &= xg(S(y),z) - g(S(\nabla_x y), z) - g(S(y), \nabla_x z) \\ &= g(\nabla_x S(y), z) + g(S(y), \nabla_x z) - g(S(\nabla_x y), z) - g(S(y), \nabla_x z) \\ &= g(\nabla_x S(y) - S(\nabla_x y), z) \\ &= g((\nabla_x S)(y), z).\end{aligned}$$

Dessa forma, (2.19) é equivalente a:

$$(\nabla_x s)(y,z) = (\nabla_y s)(x,z).$$

□

Veremos agora dois exemplos como aplicações do teorema de Weyl-Schouten. Neste ponto é importante relembrar que quando temos $r = a - b \wedge g$ e $\sum_{i=1}^{n} a(x, e_i, y, e_i) = 0$, onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal, então devemos ter $a = w$ e $b = s$.

Exemplo 2.2 As formas espaciais, ou seja, os espaços de curvatura seccional constante $K = c$, são conformemente planas: De fato, lembramos que nesse caso,

$$r(x, y, z, w) = c\left[g(x, z)g(y, w) - g(y, z)g(x, w)\right],$$

ou seja,

$$r = \frac{c}{2} g \wedge g.$$

Então $w \equiv 0$ e $s = \frac{c}{2}g$. Calculando a derivada covariante de s temos

$$(\nabla_x s)(y, z) = \frac{c}{2}(\nabla_x g)(y, z) = \frac{c}{2}\left[xg(y, z) - g(\nabla_x y, z) - g(y, \nabla_x z)\right] = 0$$

e assim $(\nabla_x s)(y, z) = (\nabla_y s)(x, z)$.

Exemplo 2.3 Considere uma variedade produto 3-dimensional $\hat{M}^3 = M^2 \times I$ com uma métrica $\hat{g} = g + dt^2$, onde I é um intervalo de parâmetro t. Seja K a curvatura Gaussiana de M^2, então $(M^2 \times I, g + dt^2)$ é conformemente plana se, e somente se, K é constante.

De fato, considere os campos em $\hat{M}$, $\hat{x} = x + l_x\partial_t$ e $\hat{y} = y + l_y\partial_t$, onde $x, y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$l_x, l_y : I \to \mathbb{R}$$

são funções reais da variável t e $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$. Então a métrica produto $\hat{g}$ é dada por:

$$\hat{g}(\hat{x}, \hat{y}) = (g + dt^2)(\hat{x}, \hat{y}) = g(x, y) + l_x l_y.$$

Como

$$[\hat{x}, \hat{y}] = [x, y] + \left(l_x l'_y - l'_x l_y\right)\partial_t \quad \text{e} \quad \hat{x}\hat{g}(\hat{y}, \hat{z}) = xg(y, z) + l_x(l_y l_z)',$$

onde $l'_x = \frac{\partial l_x}{\partial l_y}$, segue de (1.6) que a conexão Riemanniana produto $\hat{\nabla}_{\hat{x}}\hat{y}$ é dada por

$$\hat{\nabla}_{\hat{x}}\hat{y} = \nabla_x y + l_x l'_y \partial_t$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\hat{R}(\hat{x}, \hat{y})\hat{z} &= \hat{\nabla}_{\hat{y}}\hat{\nabla}_{\hat{x}}\hat{z} - \hat{\nabla}_{\hat{x}}\hat{\nabla}_{\hat{y}}\hat{z} + \hat{\nabla}_{[\hat{x},\hat{y}]}\hat{z} \\
&= \hat{\nabla}_{\hat{y}}\left[\nabla_x z + l_x l'_z \partial_t\right] - \hat{\nabla}_{\hat{x}}\left[\nabla_y z + l_y l'_z \partial_t\right] + \hat{\nabla}_{[x,y] + \left[l_x l'_y - l'_x l_y\right]\partial_t}\hat{z} \\
&= \nabla_y \nabla_x z + l_y\left[l_x l''_z + l'_x l'_z\right]\partial_t - \nabla_x \nabla_y z \\
&\quad - l_x\left[l_y l''_z + l'_y l'_z\right]\partial_t + \nabla_{[x,y]}z + \left[l_x l'_y - l'_x l_y\right] l'_z \partial_t \\
&= \nabla_y \nabla_x z - \nabla_x \nabla_y z + \nabla_{[x,y]} z \\
&= R(x, y)z,
\end{aligned}$$

o que implica $\hat{r}(\hat{x},\hat{y},\hat{z},\hat{w}) = r(x,y,z,w)$. Como em dimensão 2 a curvatura seccional e a curvatura gaussiana coincidem teremos:

$$K = \frac{r(x,y,x,y)}{g(x,x)g(y,y) - g(x,y)^2},$$

isto é

$$r = \frac{1}{2} K g \wedge g$$

Porém, note que, pela definição do produto Kulkarni-Nomizu dada por (2.1) e para

$$(g - dt^2)(\hat{x},\hat{y}) := g(x,y) - l_x l_y,$$

temos:

$$\begin{aligned}
&(g - dt^2) \wedge (g + dt^2)(\hat{x},\hat{y},\hat{z},\hat{w}) \quad = \\
= \quad & (g - dt^2)(\hat{x},\hat{z})(g + dt^2)(\hat{y},\hat{w}) - (g - dt^2)(\hat{x},\hat{w})(g + dt^2)(\hat{y},\hat{z}) \\
& + (g + dt^2)(\hat{x},\hat{z})(g - dt^2)(\hat{y},\hat{w}) - (g + dt^2)(\hat{x},\hat{w})(g - dt^2)(\hat{y},\hat{z}) \\
= \quad & [g(x,z) - l_x l_z]\,[g(y,w) + l_y l_w] - [g(x,w) - l_x l_w]\,[g(y,z) + l_y l_z] \\
& [g(x,z) + l_x l_z]\,[g(y,w) - l_y l_w] - [g(x,w) + l_x l_w]\,[g(y,z) - l_y l_z] \\
= \quad & g(x,z)g(y,w) - g(x,w)g(y,z) + g(x,z)g(y,w) - g(x,w)g(y,z) \\
= \quad & g \wedge g(x,y,z,w).
\end{aligned}$$

Assim

$$\hat{r}(\hat{x},\hat{y},\hat{x},\hat{y}) = r(x,y,x,y) = \frac{1}{2}K(x,y) g \wedge g(x,y,x,y) = \frac{1}{2}K(g - dt^2) \wedge \underbrace{g + dt^2}_{\hat{g}}(\hat{x},\hat{y},\hat{x},\hat{y})$$

Portanto, $w \equiv 0$ (o que já era esperado, já que $n = 3$) e

$$\hat{s}(\hat{x},\hat{y}) = \frac{1}{2}K(x,y)(g - dt^2)(\hat{x},\hat{y}).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
(\hat{\nabla}_{\hat{x}}\hat{s})(\hat{y},\hat{z}) \quad &= \quad \hat{x}\left[\frac{1}{2}K(g - dt^2)(\hat{y},\hat{z})\right] - \frac{1}{2}K(g - dt^2)(\hat{\nabla}_{\hat{x}}\hat{y},\hat{z}) - \frac{1}{2}K(g - dt^2)(\hat{y},\hat{\nabla}_{\hat{x}}\hat{z}) \\
&= \quad \frac{1}{2}dK(x)(g - dt^2)(\hat{y},\hat{z}) - \frac{1}{2}K(\nabla_{\hat{x}}(g - dt^2))(\hat{y},\hat{z}),
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue do fato que K não depende de t. Calculando agora a derivada covariante de $g - dt^2$, obtemos:

$$\begin{aligned}
(\hat{\nabla}_{\hat{x}}(g - dt^2))(\hat{y},\hat{z}) \quad &= \quad (x + l_x\partial_t)\,[g(y,z) - l_y l_z] - g(\nabla_x y, z) + l_x l'_y l_z - g(y, \nabla_x z) + l_x l_y l'_z \\
&= \quad (\nabla_x g)(y,z) - l_x \partial_t(l_y l_z) + l_x(l'_y l_z + l_y l'_z) \\
&= \quad 0,
\end{aligned}$$

e então

$$(\hat{\nabla}_{\hat{x}}\hat{s})(\hat{y},\hat{z}) = \frac{1}{2}dK(x)(g - dt^2)(\hat{y},\hat{z}).$$

Dessa forma, quando K é constante, temos

$$(\hat{\nabla}_{\hat{x}}\hat{s})(\hat{y},\hat{z}) = \frac{1}{2}dK(x)(g - dt^2)(\hat{y},\hat{z}) = 0 = \frac{1}{2}dK(y)(g - dt^2)(\hat{x},\hat{z}) = (\hat{\nabla}_{\hat{y}}\hat{s})(\hat{x},\hat{z}),$$

e assim $\hat{M}$ é conformemente plana, já que o tensor de Schouten é, trivialmente, um tensor de Codazzi.

Reciprocamente, suponha que $\hat{M}$ é conformemente plana, então vale:

$$0 = (\hat{\nabla}_{\partial_t}\hat{s})(x,\partial_t) - (\hat{\nabla}_x\hat{s})(\partial_t,\partial_t) = \frac{1}{2}dK(x)$$

o que implica em K constante.

Capítulo 3

Hipersuperfícies conformemente planas e Redes de Guichard

Apresentaremos neste capítulo um estudo detalhado do trabalho de Hertrich-Jeromin [7]. Veremos como imersões isométricas de variedades riemannianas de dimensão 3 no cone de luz do espaço Minkowski nos ajudam a obter condições para que tenhamos hipersuperfícies de formas espaciais conformemente planas. Para isso, começaremos o capítulo estudando tais espaços. Uma vez estabelecidas as formas espaciais, estudaremos as imersões no cone de luz definindo o referencial móvel e a equação de Maurer-Cartan, com isso, recorreremos ao teorema de Weyl-Schouten e obteremos uma versão equivalente envolvendo determinadas formas de conexão. Finalmente, introduziremos as redes de Guichard e veremos como estão relacionadas com as hipersuperfícies conformemente planas.

3.1 Definição do espaço ambiente

Definiremos a seguir o espaço em que iremos trabalhar de agora em diante. Veremos que, não teremos agora, no espaço ambiente, uma métrica positiva definida, mas o que é usualmente chamada de métrica *semi-riemanniana*. O leitor interessado poderá consultar [12] onde terá à disposição uma boa abordagem sobre o assunto.

Definição 3.1 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^6$ e a forma bilinear simétrica, não-degenerada $\langle , \rangle$ dada por:

$$\begin{array}{rcl} \langle , \rangle \ : \ \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v, w) & \mapsto & -v_0 w_0 + \sum_{i=1}^{5} v_i w_i. \end{array}$$

Dessa forma, $\mathbb{R}^6$ munido com o produto escalar $\langle , \rangle$ é chamado espaço *Minkowski* e denotado por $\mathbb{R}^6_1$.

Observação 3.1 Dizer que a forma bilinear simétrica é *não-degenerada* significa que se $\langle v, w \rangle = 0$ para todo w em $\mathbb{R}^6$ então $v = 0$.

Observação 3.2 Lembramos que quando temos uma transformação linear em $\mathbb{R}^6$ que preserva o produto interno usual, chamamos essa transformação de transformação ortogonal. No caso do espaço Minkowski $\mathbb{R}^6_1$, as transformações lineares que preservam o produto escalar definido acima são chamadas *transformações de Lorentz* e o conjunto de todas as transformações de Lorentz formam um grupo, chamado *grupo de Lorentz* e denotado por $O_1(6)$.

O conjunto de todos os vetores y tais que $\langle y, y \rangle = 0$ será chamado *cone de luz* e denotado por L^5. Assim,

$$L^5 = \left\{ y \in \mathbb{R}^6_1 | \, \langle y, y \rangle = 0 \right\}. \tag{3.1}$$

Trabalhando no cone de luz, vamos estudar subconjuntos que identificaremos com as formas espaciais. Especificamente, considere os vetores

$$m_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0), \quad m_0 = (1, 0, 0, 0, 0, -1), \quad m_{-1} = (0, 1, 0, 0, 0, 0). \tag{3.2}$$

Vamos mostrar que os conjuntos

$$M^4_K = \left\{ y \in L^5 | \, \langle y, m_K \rangle = -1 \right\}, \tag{3.3}$$

onde $K = 1, 0$ ou -1, com a métrica induzida por $\mathbb{R}^6_1$ são variedades riemannianas de curvatura seccional constante 1, 0 e -1, de acordo com K.

Começando com m_1, considere o conjunto dado por $E^6_1 = \{y \in \mathbb{R}^6_1 | \, \langle y, m_1 \rangle = -1\}$. Em coordenadas, escrevendo $y = (y_0, \ldots, y_5)$ concluímos que $E^6_1 = \{y \in \mathbb{R}^6_1 | y_0 = 1\}$. Assim, E^6_1 é um hiperplano passando por m_1.

Identificando m_1 como a origem 0 do espaço vetorial E_1^6 podemos associar, para cada $y \in E_1^6$ um vetor $\overline{y} = y - m_1 = (0, y_1, \ldots, y_5)$. Com essa identificação, olhamos para E_1^6 como o conjunto dos vetores $\overline{y}$ satisfazendo $\langle \overline{y}, \overline{y} \rangle = \sum_{i=1}^{5} y_i^2$, que a métrica euclidiana usual. Dessa forma, E_1^6 torna-se um espaço euclidiano de dimensão 5.

Segue da definição de E_1^6 e de M_1^4 que $M_1^4 = E_1^6 \cap L^5$ e então se $y \in M_1^4$ temos

$$0 = \langle y, y \rangle = -1 + \sum_{i=1}^{5} y_i^2,$$

o que implica

$$\sum_{i=1}^{5} y_i^2 = \langle \overline{y}, \overline{y} \rangle = 1.$$

Assim, obtemos que M_1^4 é a esfera padrão unitária dentro de um espaço euclidiano de dimensão 5. Logo, M_1^4 é uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante igual a 1.

Para o caso m_{-1} temos uma situação bastante parecida. A saber,

$$E_{-1}^6 = \left\{ y \in \mathbb{R}_1^6 | \, \langle y, m_{-1} \rangle = -1 \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R}_1^6 | y_1 = -1 \right\}.$$

E então, identificando a origem de E_{-1}^6 com $-m_{-1}$, E_{-1}^6 é visto como o conjunto dos vetores $\overline{y} = y - (-m_{-1}) = (y_0, 0, y_2, \ldots, y_5)$ satisfazendo $\langle \overline{y}, \overline{y} \rangle = -y_0^2 + \sum_{i=2}^{5} y_i^2$. Dessa forma, E_{-1}^6 torna-se um espaço Minkowski de dimensão 5.

Como $M_{-1}^4 = E_{-1}^6 \cap L^5$, temos que, se $y \in M_{-1}^4$,

$$0 = \langle y, y \rangle = -y_0^2 + \sum_{i=2}^{5} y_i^2 + 1,$$

o que nos dá

$$-y_0^2 + \sum_{i=2}^{5} y_i^2 = \langle \overline{y}, \overline{y} \rangle = -1.$$

Esta é a equação de um hiperbolóide de duas folhas em um espaço Minkowski de dimensão 5, variedade que sabemos ser Riemanniana e ter curvatura seccional constante igual à -1.

Considere agora o vetor m_0. Nesse caso, se $y \in M_0^4$ então $\langle y, m_0 \rangle = -1$ portanto, $\langle y, m_0 \rangle = -y_0 - y_5 = -1$, isto é

$$y_0 + y_5 = 1. \tag{3.4}$$

Como $y \in L^5$ temos que $\langle y, y\rangle = 0$ e então $-y_0^2 + \sum_{i=1}^{4} y_i^2 + y_5^2 = 0$ o que é equivalente a

$$\sum_{i=1}^{4} y_i^2 = (y_0 + y_5)(y_0 - y_5).$$

Seja $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $x = (y_1, \ldots, y_4)$ e então, denotando por $x \cdot x$ o produto interno usual de $\mathbb{R}^4$ e usando (3.4) podemos reescrever a equação acima como

$$x \cdot x = y_0 - y_5. \tag{3.5}$$

E assim, as equações (3.4) e (3.5) nos dão o seguinte sistema

$$\begin{cases} y_0 + y_5 &= 1 \\ y_0 - y_5 &= x \cdot x, \end{cases}$$

o que implica em

$$y_0 = \frac{1 + x \cdot x}{2} \quad \text{e} \quad y_5 = \frac{1 - x \cdot x}{2}.$$

Considere então a aplicação

$$\begin{array}{rcl} f \; : \; \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & L^5 \subset \mathbb{R}^6_1 \\ x & \mapsto & \left(\dfrac{1 + x \cdot x}{2}, x, \dfrac{1 - x \cdot x}{2}\right). \end{array}$$

Temos que f é claramente uma bijeção entre $\mathbb{R}^4$ e M_0^4. Além disso, f é uma imersão isométrica. De fato, dados $p, v \in \mathbb{R}^4$ temos que $df_p(v) = (p \cdot v, v, -p \cdot v)$ e então

$$\begin{aligned} \langle df_p(v), df_p(w)\rangle &= -(p \cdot v)(p \cdot w) + v \cdot w + (p \cdot v)(p \cdot w) \\ &= v \cdot w. \end{aligned}$$

Como a curvatura seccional é preservada por isometrias obtemos que M_0^4 é uma variedade Riemanniana de curvatura seccional 0.

Observação 3.3 Para que tenhamos uma forma espacial conexa de curvatura seccional -1 usaremos somente a parte do cone de luz onde $y_0 > 0$, e assim, M_{-1}^4 terá somente uma componente conexa.

Observação 3.4 Inicialmente, notamos que se $y \in L^5$ então $\lambda y \in L^5$. Pelo que vimos acima, conseguimos uma relação biunívoca entre $\mathbb{R}^4$ e M_0^4,

$$\mathbb{R}^4 \ni x \leftrightarrow \left(\frac{1 + |x|^2}{2}, x, \frac{1 - |x|^2}{2}\right) \in M_0^4 \subset L^5.$$

Note agora que, se $\lambda = \dfrac{2}{1+|x|^2}$ temos

$$\lambda\left(\frac{1+|x|^2}{2}, x, \frac{1-|x|^2}{2}\right) = \left(1, \frac{2x}{1+|x|^2}, \frac{1-|x|^2}{1+|x|^2}\right) \in L^5.$$

Mas vimos que, o conjunto dos pontos em L^5 tais que $y_0 = 1$ é exatamente M_1^4. Dessa forma, passamos de M_0^4 para M_1^4 através de uma simples multiplicação por uma função escalar. Perceba ainda que a expressão que obtivemos é exatamente aquela da projeção estereográfica estudada no Capítulo 2, já que podemos fazer a identificação

$$\mathbb{R}^4 \supset S^3 \ni p \leftrightarrow (1, p) \in M_1^4 \subset L^5.$$

Lembramos que a projeção estereográfica é uma aplicação conforme entre a esfera e o espaço euclidiano. Note que, podemos usar este artifício de maneira mais geral. A primeira coisa a observar é que se $y \in L^5$, então, dado $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda y \in L^5$, assim, podemos passar de uma forma espacial M_K^4 para a outra por uma simples multiplicação por uma função escalar. Além disso, como a métrica nesses conjuntos é a induzida por $\mathbb{R}_1^6$, temos que, se g e $\tilde{g}$ são as métricas em duas dessas formas espaciais,

$$g(y,y) = \langle y, y\rangle \qquad \text{e} \qquad \tilde{g}(\lambda y, \lambda y) = \langle \lambda y, \lambda y\rangle = \lambda^2 \langle y, y\rangle = \lambda^2 g(y,y),$$

e então, tal aplicação, obtida através de uma multiplicação por uma função escalar, nos dá uma transformação conforme entre as formas espaciais.

Essa idéia será importante para motivar o que faremos a seguir.

3.2 Imersões isométricas em L^5

O objetivo desta seção é estudar imersões isométricas de variedades riemannianas de dimensão 3 no cone de luz L^5. A idéia é obter informações sobre essas aplicações e introduzir alguns conceitos importantes. Como as imersões serão sempre isométricas, as trataremos somente por imersões.

Iniciaremos com imersões de variedades tridimensionais nas formas espaciais de curvatura constante M_K^4. Essas observações serão importantes pois, localmente, podemos ver a imersão como uma subvariedade de M_K^4.Tais subvariedades serão hipersuperfícies, já que a codimensão é 1.

Considere então uma imersão Riemanniana $f : M^3 \to M^4_K \subset L^5$ com um campo normal unitário n, ou seja, $\langle df, n\rangle \equiv 0$. Além disso, o campo n satisfaz $\langle n, m_K\rangle = 0$ e $\langle n, f\rangle = 0$, onde os m_K são dados por (3.2). De fato, para todo $p \in M^3$, $n(p) \in T_{f(p)}M^4_K$, e então se $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M^4_K$ é tal que $\alpha(0) = f(p)$ e $\alpha'(0) = n(p)$, temos

$$\langle \alpha(t), m_K\rangle = -1 \qquad \text{e} \qquad \langle \alpha(t), \alpha(t)\rangle = 0, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

o que implica, derivando em $t = 0$,

$$\langle \alpha'(0), m_K\rangle = 0 \qquad \text{e} \qquad \langle \alpha'(0), f(p)\rangle = 0.$$

Motivados com o que vimos acima considere agora uma imersão $f : M^3 \to L^5$ (não necessariamente em M^4_K) com um campo normal unitário satisfazendo $\langle f, n\rangle = 0$. Como $\langle f, f\rangle = 0$ temos que $\langle df_p(v), f\rangle = 0$, assim seja u uma função diferenciável em M^3, se $\tilde{f} = e^u f$ então

$$d\tilde{f}_p(v) = e^u du_p(v) f + e^u df_p(v).$$

Então a métrica induzida por $\tilde{f}$ é tal que

$$\begin{aligned} \left\langle d\tilde{f}_p(v), d\tilde{f}_p(v)\right\rangle &= e^{2u}[du_p(v)]^2 \langle f, f\rangle + 2e^{2u}\langle f, df_p(v)\rangle + e^{2u}\langle df_p(v), df_p(v)\rangle \\ &= e^{2u}\langle df_p(v), df_p(v)\rangle \end{aligned}$$

ou seja, é uma métrica conforme à métrica induzida por f.

Assim, dada uma imersão $f : M^3 \to L^5$ podemos obter, através de uma simples multiplicação por função escalar, uma outra imersão $\tilde{f}$ cuja métrica induzida é conforme à induzida por f.

Dada uma função diferenciável a em M^3, se $\tilde{n} = n + af$, temos que

$$\begin{aligned} \langle f, n + af\rangle &= \langle f, n\rangle + a\langle f, f\rangle &= 0 \\ \langle df, n + af\rangle &= \langle df, n\rangle + a\langle df, f\rangle &= 0 \end{aligned}$$

e assim, $\tilde{n}$ ainda é um campo normal a f e a df. Além disso,

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{n}, \tilde{f}\right\rangle &= \langle \tilde{n}, e^u f\rangle &= 0 \\ \left\langle \tilde{n}, d\tilde{f}\right\rangle &= \langle \tilde{n}, e^u(du f + df)\rangle &= 0 \\ \langle \tilde{n}, \tilde{n}\rangle &= \langle n, n\rangle &= 1 \end{aligned}$$

Tais observações nos conduzem à seguinte definição:

Definição 3.2 Seja $f : M^3 \to L^5$ uma imersão tal que a métrica induzida $\langle f, f \rangle$ é positiva definida, seja n um campo normal unitário de f tal que $\langle f, n \rangle = 0$ e sejam u e a funções diferenciáveis em M^3. Então o par (f, n) é denominado uma *faixa* e a mudança

$$\tilde{f} = e^u f \quad , \quad \tilde{n} = n + af$$

é chamada uma *deformação conforme* da faixa (f, n).

Observação 3.5 Como vimos, considerando a mudança $\tilde{f} = e^u f$, continuamos com uma imersão em L^5 mas agora com uma métrica induzida conforme à métrica induzida por f. Assim, a idéia é obter uma imersão $f : M^3 \to L^5$ através de uma deformação conforme e obter condições para que a imersão $\tilde{f}$ tenha métrica induzida plana, e portanto condições para que f seja conformemente plana. Dessa forma, obtida uma imersão com esta propriedade no cone de luz L^5, basta fazer uma deformação conforme para que tenhamos $f : M^3 \to M^4_K$ conformemente plana e portanto hipersuperfícies conformemente planas nas formas espaciais. A mudança $\tilde{n} = n + af$ será conveniente em alguns casos, e ficará mais clara com o que faremos mais adiante.

3.3 Referencial adaptado e equações de compatibilidade

Para estudar as imersões em L^5 definiremos agora o referencial adaptado com que iremos trabalhar. Antes, considere uma base *pseudo-ortonormal* de $\mathbb{R}^6_1$, isto é, um conjunto $\{e_1, \ldots, e_6\} \in \mathbb{R}^6_1$ onde

$$\begin{cases} \langle e_A, e_B \rangle = \delta_{AB}, & \text{para } 1 \leq A, B \leq 4, \\ \langle e_5, e_A \rangle = \langle e_6, e_A \rangle = 0, & \text{para } 1 \leq A \leq 4, \\ \langle e_5, e_5 \rangle = \langle e_6, e_6 \rangle = 0, & \\ \langle e_5, e_6 \rangle = \langle e_6, e_5 \rangle = 1. & \end{cases} \tag{3.6}$$

Definição 3.3 Um *referencial adaptado* para uma faixa (f, n) é uma aplicação que associa a cada $p \in M^3$, uma base pseudo-ortonormal $\{n_1(p), \ldots, n_6(p)\}$ satisfazendo, de acordo com os índices, as relações (3.6) acima, de forma que $\{n_1(p), n_2(p), n_3(p)\}$ é uma base ortonormal de $df_p(T_pM)$, $n_4 = n$ e $n_5 = f$.

Dessa forma, os vetores n_1, n_2 e n_3 são tangentes a M e n_4, n_5 e n_6 são normais a M. Por isso, é importante neste ponto, estabelecer a seguinte convenção de índices:

- as letras maiúsculas A, B, C, ... serão usadas para variar os índices de 1 a 6;
- as letras minúsculas i, j, k, ... serão usadas para variar os índices de 1 a 3;
- as letras gregas α, β, γ, ... serão usadas para variar os índices de 4 a 6.

Introduzimos agora as 1-formas diferenciais ω_A e ω_{AB} definidas por:

$$\begin{aligned} df &= \sum_{A=1}^{6} \omega_A n_A, \\ dn_A &= \sum_{C=1}^{6} \omega_{AC} n_C. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Como df está sempre no espaço tangente, concluímos que, ω_4, ω_5 e ω_6 são identicamente nulas. Se $x_i \in \mathfrak{X}(M)$ são tais que $df_p(x_i(p)) = n_i(p)$, então temos que $\omega_i(x_j) = \delta_{ij}$. O conjunto $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ é chamado *co-referencial adaptado* e as formas ω_{AB} são as *formas de conexão.*

Note que, a partir de (3.7), podemos obter informações importantes com relação às formas de conexão ω_{AB}. Inicialmente, se $n_5 = f$, obtemos de (3.7) que:

$$\begin{aligned} \omega_{5i} &= \omega_i, \\ \omega_{5\alpha} &= 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Por (3.6) temos que $\langle n_A, n_B \rangle$ é constante, o que implica $\langle dn_A, n_B \rangle + \langle n_A, dn_B \rangle = 0$ e então, por (3.7) obtemos que

$$\left\langle \sum_{C=1}^{6} \omega_{AC} n_C, n_B \right\rangle + \left\langle n_A, \sum_{C=1}^{6} \omega_{BC} n_C \right\rangle = 0, \tag{3.9}$$

que reduz-se aos seguintes casos:

$$\begin{cases} \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, & 1 \leq A, B \leq 4 \\ \omega_{A6} + \omega_{5A} = 0, & 1 \leq A \leq 4 \\ \omega_{A5} + \omega_{6A} = 0, & 1 \leq A \leq 4 \\ 2\omega_{56} = 0, & \\ 2\omega_{65} = 0, & \\ \omega_{55} + \omega_{66} = 0, & \end{cases} \tag{3.10}$$

obtidos considerando em (3.9) $B = 5$ (respectivamente $B = 6$) para obter a 2ª relação (respectivamente 3ª relação), $A = B = 5$ (respectivamente $A = B = 6$) para obter a 4ª relação (respectivamente 5ª relação) e $A = 5,\ \ B = 6$ para a última relação.

Se $\omega_{5\alpha} = 0$, temos que (3.10) implica em:

$$\begin{aligned} \omega_{46} &= -\omega_{54} = 0, \\ \omega_{66} &= -\omega_{55} = 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Assim, a partir de (3.8), (3.10) e (3.11) concluímos que:

$$\begin{cases} \omega_{5i} = \omega_i, & 1 \leq i \leq 3 \\ \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, & 1 \leq A, B \leq 4 \\ \omega_{A6} + \omega_{5A} = 0, & 1 \leq A \leq 4 \\ \omega_{A5} + \omega_{6A} = 0, & 1 \leq A \leq 4 \\ \omega_{AA} = 0, & 1 \leq A \leq 6 \\ \omega_{5\alpha} = 0, & 4 \leq \alpha \leq 6 \\ \omega_{65} = \omega_{46} = 0. & \end{cases} \tag{3.12}$$

Valem ainda as seguinte relações, chamadas *equações de estrutura*:

$$\begin{cases} d\omega_A = \displaystyle\sum_{B=1}^{6} \omega_B \wedge \omega_{BA}, \\ d\omega_{AB} = \displaystyle\sum_{C=1}^{6} \omega_{AC} \wedge \omega_{CB}, \end{cases}$$

que são obtidas considerando a diferencial de (3.7).

Como cada n_B é um vetor de $\mathbb{R}^6_1$, podemos escrevê-lo como combinação linear da base $B = \{e_1, \ldots, e_6\}$. Para isso, introduzimos as funções n_{AB} de forma que

$$n_B = \sum_{A=1}^{6} n_{AB} e_A.$$

Derivando a expressão acima, obtemos $dn_B = \displaystyle\sum_{A=1}^{6} dn_{AB} e_A$. Por outro lado, pelo que vimos em (3.7) podemos escrever:

$$dn_B = \sum_{C=1}^{6} \omega_{BC} n_C = \sum_{C=1}^{6} \omega_{BC} \sum_{A=1}^{6} n_{AC} e_A = \sum_{A=1}^{6} \left(\sum_{C=1}^{6} \omega_{BC} n_{AC} \right) e_A,$$

e então obtemos que

$$dn_{AB} = \sum_{C=1}^{6} n_{AC}\omega_{BC}. \tag{3.13}$$

Seja F a matriz das funções n_{AB}, ou seja $(F)_{AB} = n_{AB}$ e Φ a matriz transposta da matriz das formas de conexão tal que $(\Phi)_{AB} = \omega_{BA}$, então a equação (3.13) nos diz que:

$$dF = F\Phi. \tag{3.14}$$

Como F é uma matriz de mudança de base, F possui uma inversa F^{-1} o que nos possibilita escrever:

$$\Phi = F^{-1}dF.$$

Queremos agora encontrar relações envolvendo a derivada exterior de Φ. Voltando à equação (3.13) e lembrando que $(\Phi)_{AB} = \omega_{BA}$ temos:

$$0 = d(dn_{AB}) = d(\sum_{C=1}^{6} n_{AC}(\Phi)_{CB}) = \sum_{C=1}^{6}(dn_{AC} \wedge (\Phi)_{CB} + n_{AC}d(\Phi)_{CB}).$$

Então podemos escrever

$$0 = dF \wedge \Phi + Fd\Phi,$$

onde o símbolo $\wedge$ acima representa multiplicação de matrizes de 1-formas diferenciais, sendo que procedemos de forma análoga ao produto de matrizes reais, com a diferença que trocamos o produto usual de números pelo produto exterior de formas. Como $dF = F\Phi$ temos então que

$$F(\Phi \wedge \Phi + d\Phi) = 0.$$

Como F admite uma inversa, temos simplesmente

$$\Phi \wedge \Phi + d\Phi = 0. \tag{3.15}$$

A equação acima é conhecida por *equação de Maurer-Cartan* e nos dará as equações de compatibilidade para a nossa imersão. Para obter detalhes dessa equação, é interessante obter mais informações a respeito da matriz Φ.

Para organizar nossos cálculos, vamos dividir a matriz Φ em quatro blocos:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Omega & \eta \\ \overline{\eta} & \mu \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Lembrando que $(\Phi)_{AB} = \omega_{BA}$, e em (3.12) vimos que, para $1 \leq A, B \leq 4$, $\omega_{AB} = -\omega_{BA}$ então a matriz Ω é dada por:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{12} & -\omega_{13} \\ \omega_{12} & 0 & -\omega_{23} \\ \omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Passemos agora à matriz η. Por (3.8), $\omega_{5i} = \omega_i$. Escrevendo $\omega_{4i} = -\psi_i$ e $\omega_{6i} = \chi_i$, temos a matriz η da forma

$$\eta = \begin{pmatrix} -\psi_1 & \omega_1 & \chi_1 \\ -\psi_2 & \omega_2 & \chi_2 \\ -\psi_3 & \omega_3 & \chi_3 \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

A matriz $\overline{\eta}$ é obtida facilmente a partir de η usando o que vimos em (3.12). Portanto temos

$$\overline{\eta} = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ -\chi_1 & -\chi_2 & -\chi_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, para a matriz μ usamos (3.12) e denotamos $\nu = \omega_{64} = -\omega_{45}$ para obter

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \nu \\ -\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Escrevendo agora a equação de Maurer-Cartan envolvendo os blocos da matriz Φ, temos:

$$\begin{pmatrix} d\Omega & d\eta \\ d\overline{\eta} & d\mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega \wedge \Omega + \eta \wedge \overline{\eta} & \Omega \wedge \eta + \eta \wedge \mu \\ \overline{\eta} \wedge \Omega + \mu \wedge \overline{\eta} & \overline{\eta} \wedge \eta + \mu \wedge \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde cada 0 na matriz do lado direito representa uma matriz nula 3×3. Analisando cada identidade diretamente com as componentes das matrizes, temos:

- A partir de $d\eta + \Omega \wedge \eta + \eta \wedge \mu = 0$,

$$
\begin{aligned}
0 &= \begin{pmatrix} -d\psi_1 & d\omega_1 & d\chi_1 \\ -d\psi_2 & d\omega_2 & d\chi_2 \\ -d\psi_3 & d\omega_3 & d\chi_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{12} & -\omega_{13} \\ -\omega_{21} & 0 & -\omega_{23} \\ -\omega_{31} & -\omega_{32} & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\psi_1 & \omega_1 & \chi_1 \\ -\psi_2 & \omega_2 & \chi_2 \\ -\psi_3 & \omega_3 & \chi_3 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} -\psi_1 & \omega_1 & \chi_1 \\ -\psi_2 & \omega_2 & \chi_2 \\ -\psi_3 & \omega_3 & \chi_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 & \nu \\ -\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

o que nos dá as *equações de Codazzi*:

$$
\begin{cases}
0 = d\psi_i - \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \psi_j + \omega_i \wedge \nu, \\
0 = d\omega_i - \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \omega_j, \\
0 = d\chi_i - \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \chi_j - \psi_i \wedge \nu.
\end{cases}
\tag{3.20}
$$

- A partir de $d\mu + \overline{\eta} \wedge \eta + \mu \wedge \mu = 0$,

$$
\begin{aligned}
0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & d\nu \\ -d\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ -\chi_1 & -\chi_2 & -\chi_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\psi_1 & \omega_1 & \chi_1 \\ -\psi_2 & \omega_2 & \chi_2 \\ -\psi_3 & \omega_3 & \chi_3 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \nu \\ -\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 & \nu \\ -\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

de onde obtemos as *equações de Ricci*:

$$
\begin{cases}
0 = \sum_{j=1}^{3} \psi_j \wedge \omega_j, \\
0 = \sum_{j=1}^{3} \chi_j \wedge \omega_j, \\
d\nu = \sum_{j=1}^{3} \chi_j \wedge \psi_j.
\end{cases}
\tag{3.21}
$$

- A partir de $d\Omega + \Omega \wedge \Omega + \eta \wedge \overline{\eta} = 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} 0 & -d\omega_{12} & -d\omega_{13} \\ -d\omega_{21} & 0 & -d\omega_{23} \\ -d\omega_{31} & -d\omega_{32} & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{12} & -\omega_{13} \\ -\omega_{21} & 0 & -\omega_{23} \\ -\omega_{31} & -\omega_{32} & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{12} & -\omega_{13} \\ -\omega_{21} & 0 & -\omega_{23} \\ -\omega_{31} & -\omega_{32} & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -\psi_1 & \omega_1 & \chi_1 \\ -\psi_2 & \omega_2 & \chi_2 \\ -\psi_3 & \omega_3 & \chi_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ -\chi_1 & -\chi_2 & -\chi_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

  o que nos dá somente um tipo de equação, chamada *equação de Gauss*:

$$-d\omega_{ij} + \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = \psi_i \wedge \psi_j + \omega_i \wedge \chi_j + \chi_i. \wedge \omega_j. \tag{3.22}$$

Observação 3.6 Pelo teorema fundamental das subvariedades, que também vale para o espaço Minkowski, a condição necessária e suficiente para que exista uma imersão $f : M^n \to \mathbb{R}_1^{n+k}$ é que, definido um referencial adaptado, o co-referencial e as formas de conexão satisfaçam as equações de Codazzi, Ricci e Gauss, daí então o nome equações de compatibilidade. O enunciado e a prova completa do teorema fundamental das subvariedades, para o caso euclidiano, podem ser encontrados em [16].

Defina as 1-formas diferenciais, chamadas *formas de curvatura* ρ_{ij} por

$$\rho_{ij} := -d\omega_{ij} + \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}. \tag{3.23}$$

Vamos mostrar que tais formas nos dão a curvatura de M^3 segundo a métrica induzida por f. Denotando por $g = \langle df, df \rangle$ a métrica induzida, temos então que

$$g = \sum_{i=1}^{3} \omega_i^2. \tag{3.24}$$

E a conexão Riemanniana ∇ associada à métrica induzida g é dada por

$$\nabla_y x_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}(y) x_j \tag{3.25}$$

onde, como anteriormente, $n_i(p) = df_p(x_i(p))$.

Calculando então a curvatura:

$$\begin{aligned}
R(x,y)x_i &= \nabla_y\nabla_x x_i - \nabla_x\nabla_y x_i + \nabla_{[x,y]}x_i \\
&= \nabla_y\left[\sum_{j=1}^{3}\omega_{ij}(x)x_j\right] - \nabla_x\left[\sum_{j=1}^{3}\omega_{ij}(y)x_j\right] + \sum_{j=1}^{3}\omega_{ij}([x,y])x_j \\
&= \sum_{j=1}^{3}\left[y\omega_{ij}(x)x_j + \omega_{ij}(x)\nabla_y x_j\right] - \sum_{j=1}^{3}\left[x\omega_{ij}(y)x_j + \omega_{ij}(y)\nabla_x x_j\right] \\
&\quad + \sum_{j=1}\omega_{ij}([x,y])x_j \\
&= \sum_{j=1}^{3}\left[y\omega_{ij}(x) - x\omega_{ij}(y) + \omega_{ij}([x,y])\right]x_j \\
&\quad + \sum_{j=1}^{3}\left[\omega_{ij}(x)\sum_{k=1}^{3}\omega_{jk}(y)x_k - \omega_{ij}(y)\sum_{k=1}^{3}\omega_{jk}(x)x_k\right] \\
&= \sum_{j=1}^{3}\left[-d\omega_{ij}(x,y)\right]x_j + \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left[\omega_{ij}(x)w_{jk}(y) - \omega_{ij}(y)\omega_{jk}(x)\right]x_k \\
&= \sum_{j=1}^{3}\left[-d\omega_{ij}(x,y) + \sum_{k=1}^{3}\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}(x,y)\right]x_j,
\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade, usamos a relação $d\omega(x,y) = x\omega(y) - y\omega(x) - \omega([x,y])$ (ver apêndice A) e na última, trocamos na segunda parcela k por j já que possuem a mesma variação de índices.

Do que vimos acima, concluímos então que

$$R(x,y)x_i = \sum_{j=1}^{3}\rho_{ij}(x,y)x_j. \tag{3.26}$$

O tensor curvatura, fica então determinado, já que

$$\rho_{ij}(x,y) = g(R(x,y),x_i,x_j) = r(x,y,x_i,x_j) = r(x_i,x_j,x,y).$$

Como consequência de (3.22) e (3.23), conseguimos expressar a curvatura em função das formas ψ_i, ω_i e χ_i, fato que será importante mais adiante. Outro fato importante envolvendo a forma ψ_i é o que descrevemos a seguir. Como vimos $\omega_\alpha = 0$ (lembre-se que as letras gregas representam os índices de 4 a 6). Para $\alpha = 4$ temos $n_4 = n$, o vetor normal unitário que compõe a faixa (f,n). Portanto:

$$d\omega_4 = \sum_{A=1}^{6}\omega_A\wedge\omega_{A4} = \sum_{i=1}^{3}\omega_i\wedge\omega_{i4} + \sum_{\alpha=4}^{6}\omega_\alpha\wedge\omega_{\alpha4} = \sum_{i=1}^{3}\omega_i\wedge\omega_{i4}.$$

Pelo lema de Cartan (ver apêndice A), existem funções h_{ij}^4 tais que

$$\omega_{i4} = \sum_{j=1}^{3} h_{ij}^4 \omega_j, \qquad h_{ij}^4 = h_{ji}^4. \tag{3.27}$$

Como consequência, para cada $p \in M$ a forma bilinear definida em $T_pM \times T_pM$ dada por

$$H_n = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \omega_{i4} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} h_{ij}^4 \omega_i \omega_j, \tag{3.28}$$

é uma forma bilinear simétrica. E assim, podemos associar a H_n uma forma quadrática

$$II_n(x) = H_n(x,x),$$

chamada *segunda forma quadrática*. Decorre do que vimos acima que,

$$-\langle df, dn\rangle = -\left\langle \sum_{i=1}^{3} \omega_i n_i, \sum_{A=1}^{6} \omega_{4A} n_A \right\rangle = -\sum_{i=1}^{3} \omega_i \omega_{4i} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \omega_{i4} = H_n, \tag{3.29}$$

relação que será útil em alguns casos.

Sabemos que a toda forma bilinear simétrica definida em um espaço vetorial está associada uma aplicação linear auto-adjunta. Assim, definimos o *tensor de Weingarten* A_n que a cada $p \in M$ associa uma aplicação linear auto-adjunta $A_n : T_pM \to T_pM$ tal que:

$$H_n(x,y) = -g(A_n(x), y), \tag{3.30}$$

onde g é a métrica induzida.

Dessa forma, usando (3.28) e (3.30) podemos obter facilmente a matriz de A_n na base $\{x_1, x_2, x_3\}$ já que

$$\begin{aligned} (A_n)_{lk} = g(An(x_l), x_k) = -H_n(x_l, x_k) &= -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} h_{ij}^4 \omega_i(x_l)\omega_j(x_k) \\ &= -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} h_{ij}^4 \delta_{il}\delta_{jk} = -h_{lk}^4. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Sendo A_n uma matriz auto-adjunta, admite então uma base ortonormal de autovetores onde, nesta base, a matriz de A_n é dada por

$$\begin{pmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 \end{pmatrix},$$

nesse caso, $h^4_{ii} = a_i$ e $h^4_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Assim, as funções a_i são as curvaturas principais e os auto-vetores que constituem essa base são as direções principais associados a faixa (f, n). Quando o referencial adaptado for definido de forma que a parte tangencial seja dada por $n_i = df(x_i)$ com x_i uma direção principal, chamaremos esse referencial de um *referencial adaptado de direções principais.*

Vamos agora relacionar o que introduzimos acima com as formas diferenciais definidas com o referencial adaptado. Lembramos que introduzimos as formas ψ_i por $\psi_i = -\omega_{4i}$ e então, por (3.27):

$$\psi_i = -\omega_{4i} = \omega_{i4} = \sum_{j=1}^{3} h^4_{ij}\omega_j. \tag{3.32}$$

Portanto por (3.28), H_n fica da forma:

$$H_n = \sum_{i=1}^{3} \omega_i\psi_i. \tag{3.33}$$

Trabalhando com um referencial adaptado de direções principais, as equações anteriores se reduzem à:

$$\psi_i = a_i\omega_i,$$

e

$$H_n = \sum_{i=1}^{3} a_i\omega_i^2.$$

3.4 Imersões conformemente planas

O objetivo desta seção é encontrar condições necessárias e suficientes para que uma imersão $f : M^3 \to L^5$ seja conformemente plana. Embora estejamos procurando imersões conformemente planas nas formas espaciais $M^4_K \subset L^5$, é suficiente encontrá-las simplesmente em L^5 já que, por uma deformação conforme, podemos obter uma imersão $\tilde{f}$ em M^4_K cuja métrica induzida é conforme a métrica induzida por f e então, se f for uma imersão conformemente plana em L^5, $\tilde{f}$ será uma imersão conformemente plana em M_K^4. Dessa forma, o que faremos é obter o referencial adaptado e as formas de conexão de uma faixa $(\tilde{f}, \tilde{n})$ resultante de uma deformação conforme da faixa (f, n). A idéia é obter ambos em função do referencial e das formas de (f, n) e assim, exigindo que a imersão $\tilde{f}$ seja plana, obteremos f conformemente plana.

O que teremos a seguir é uma sequência de proposições relacionadas as deformações conformes. A primeira nos mostra como mudam direções principais e curvaturas principais ao efetuarmos uma deformação conforme. As seguintes nos dão um referencial adaptado e as respectivas formas de conexão para a faixa $(\tilde{f}, \tilde{n})$, obtida através de uma deformação conforme da faixa (f, n).

Proposição 3.1 *Sejam x_i as direções principais e a_i as curvaturas principais de uma faixa (f, n). Seja $(\tilde{f}, \tilde{n})$ uma deformação conforme dada por*

$$\tilde{f} = e^u f \qquad \text{e} \qquad \tilde{n} = n + af.$$

Então as direções principais são preservadas pela deformação conforme e as curvaturas principais $\tilde{a}_i$ associadas a $(\tilde{f}, \tilde{n})$ são dadas por:

$$\tilde{a}_i = e^{-u}(a_i - a). \tag{3.34}$$

Demonstração: Como $\{x_1, x_2, x_3\} \in \mathfrak{X}(M)$ é uma base ortonormal, podemos escrever, para $x \in \mathfrak{X}(M)$

$$x = \sum_{i=1}^{3} g(x, x_i)x_i \qquad \text{e} \qquad A_n(x) = \sum_{i=1}^{3} g(A_n(x), x_i)x_i. \tag{3.35}$$

Considerando agora a faixa $(\tilde{f}, \tilde{n})$ e escrevendo $A_{\tilde{n}}(x) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(x)x_i$ obtemos

$$\tilde{g}(A_{\tilde{n}}(x), x_i) = e^{2u}\lambda_i(x). \tag{3.36}$$

Lembramos agora que, por (3.30) e (3.29) temos

$$g(A_n(x), x_i) = \langle df(x), dn(x_i)\rangle \, .$$

Então, por (3.36), temos:

$$\begin{aligned} e^{2u}\lambda_i(x) &= \left\langle d\tilde{f}(x), d\tilde{n}(x_i)\right\rangle &=& \left\langle e^u du(x) f + e^u df(x), dn(x_i) + da(x_i) f + adf(x_i)\right\rangle \\ && =& \; e^u \left\langle df(x), dn(x_i) + adf(x_i)\right\rangle \\ && =& \; e^u \left[\left\langle df(x), dn(x_i)\right\rangle + a\left\langle df(x), df(x_i)\right\rangle\right] \\ && =& \; e^u \left[g(A_n(x), x_i) + ag(x, x_i)\right], \end{aligned}$$

portanto $\lambda_i(x) = e^{-u}\left[g(A_n(x), x_i) + ag(x, x_i)\right]$. Podemos agora obter uma expressão para $A_{\tilde{n}}$ já que

$$\begin{aligned} A_{\tilde{n}}(x) &= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(x) x_i \\ &= \sum_{i=1}^{3} e^{-u}\left[g(A_n(x), x_i) + ag(x, x_i)\right] x_i \\ &= e^{-u}\left[A_n(x) + ax\right], \end{aligned}$$

onde na última igualdade, usamos as identidades obtidas em (3.35). Assim, quando x é uma direção principal x_i temos que $A_n(x_i) = -a_i x_i$ e então,

$$A_{\tilde{n}}(x_i) = e^{-u}\left[A_n(x_i) + ax_i\right] = e^{-u}\left(-a_i + a\right) x_i = -e^{-u}\left(a_i - a\right) x_i.$$

Portanto, x_i continua sendo direção principal, agora com curvatura principal

$$\tilde{a}_i = e^{-u}(a_i - a).$$

□

Vamos agora à construção de um referencial adaptado para a faixa $(\tilde{f}, \tilde{n})$.

Proposição 3.2 *Dado um referencial adaptado para uma faixa (f, n) como definido na Definição 3.3, um referencial adaptado para a deformação conforme $(\tilde{f}, \tilde{n})$, onde $\tilde{f} = e^u f$ e $\tilde{n} = n + af$, é dado por:*

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{n}_i &= n_i + u_i f \\ \tilde{n} &= n + af \\ \tilde{f} &= e^{-u} f \\ \tilde{n}_6 &= e^{-u}\left\{\sum_{j=1}^{3} (-u_j)\, n_j - an + \left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{3} u_j^2 + a^2\right)\right] f + n_6\right\}. \end{aligned} \right. \tag{3.37}$$

onde $u_i = du(x_i)$.

Demonstração: Como a métrica $\tilde{g}$ induzida por $\tilde{f}$ é conforme à induzida por f é natural definir $\tilde{n}_i$ por

$$\tilde{n}_i = \frac{d\tilde{f}(x_i)}{||d\tilde{f}(x_i)||},$$

já que, a princípio, $d\tilde{f}(x_i)$ não é unitário. Definindo $u_i := du(x_i)$ temos então que

$$\tilde{n}_i = \frac{e^u du(x_i) f + e^u df(x_i)}{\sqrt{\left\langle d\tilde{f}(x_i), d\tilde{f}(x_i)\right\rangle}} = \frac{e^u(u_i f + n_i)}{\sqrt{e^{2u}\left\langle df(x_i), df(x_i)\right\rangle}} = u_i f + n_i.$$

Já sabemos que $\tilde{n}_4 = \tilde{n} = n + af$ e que $\tilde{n}_5 = \tilde{f} = e^u f$. Para determinar $\tilde{n}_6$ escrevemos

$$\tilde{n}_6 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i n_i + \lambda_4 n + \lambda_5 f + \lambda_6 n_6.$$

Como $\{n_1, n_2, n_3, n, f, n_6\}$ é uma base pseudo-ortonormal obtemos diretamente que

$$\begin{cases} \lambda_i &= \left\langle \tilde{n}_6, n_i \right\rangle, \\ \lambda_4 &= \left\langle \tilde{n}_6, n \right\rangle, \\ \lambda_6 &= \left\langle \tilde{n}_6, f \right\rangle. \end{cases}$$

Como queremos $\left\langle \tilde{f}, \tilde{n}_6 \right\rangle = 1$ segue que $\left\langle e^u f, \tilde{n}_6 \right\rangle = 1$ e portanto

$$\lambda_6 = \left\langle \tilde{n}_6, f \right\rangle = e^{-u}.$$

Fato que nos ajuda a calcular os λ_i, já que devemos ter $\left\langle \tilde{n}_6, \tilde{n}_i \right\rangle = 0$. Então

$$0 = \left\langle \tilde{n}_6, u_i f + n_i \right\rangle = u_i e^{-u} + \lambda_i,$$

o que implica $\lambda_i = -u_i e^{-u}$. Analogamente,

$$0 = \left\langle \tilde{n}_6, \tilde{n} \right\rangle = \left\langle \tilde{n}_6, n + af \right\rangle = \lambda_4 + ae^{-u},$$

e assim $\lambda_4 = -ae^{-u}$. Para calcular λ_5 procedemos da seguinte forma: umas vez calculados os coeficientes restantes e sabendo que $\left\langle \tilde{n}_6, \tilde{n}_6 \right\rangle = 0$ temos

$$0 = \left\langle \tilde{n}_6, \tilde{n}_6 \right\rangle = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 + \lambda_4^2 + 2\lambda_5\lambda_6 = e^{-2u}\left(\sum_{i=1}^{3} u_i^2 + a^2\right) + 2\lambda_5 e^{-u},$$

o que nos dá $\lambda_5 = -\dfrac{1}{2}e^{-u}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{3} u_i^2 + a^2\right)$. Dessa forma, obtemos a seguinte expressão $\tilde{n}_6$:

$$\tilde{n}_6 = \sum_{i=1}^{3} \left(-u_i e^{-u}\right) n_i - ae^{-u} n + \left[-\frac{1}{2}e^{-u}\left(\sum_{i=1}^{3} u_i^2 + a^2\right)\right] f + e^{-u} n_6.$$

$\square$

Obtido o referencial, vamos calcular as correspondentes formas de conexão e as formas de curvatura.

Proposição 3.3 *Dada a matriz de formas de conexão* Φ *em* (3.16) *de um referencial adaptado para a faixa* (f, n), *com componentes* $\omega_{ij}, \omega_i, \psi_i, \chi_i, \nu$ *dadas em* (3.17), (3.18) *e* (3.19). *Então, as componentes da matriz* $\tilde{\Phi}$ *correspondente a faixa* $(\tilde{f}, \tilde{n})$, *onde* $\tilde{f} = e^u f$ *e* $\tilde{n} = n + af$ *são dadas por:*

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_i &= e^u \omega_i, \\ \tilde{\omega}_{ij} &= u_i\omega_j - u_j\omega_i + \omega_{ij}, \\ \tilde{\psi}_i &= \psi_i - a\omega_i, \\ \tilde{\chi}_i &= e^{-u}\left(\chi_i + a\psi_i - \dfrac{1}{2}a^2\omega_i - \tau_i\right), \\ \tilde{\nu} &= e^{-u}\left(-\displaystyle\sum_{j=1}^{3} u_j\psi_j + adu + \nu - da\right). \end{cases} \tag{3.38}$$

Além disso, se ρ_{ij} *são as formas de curvatura da faixa* (f, n), *então as formas de curvatura correspondentes à faixa* $(\tilde{f}, \tilde{n})$ *são dadas por:*

$$\tilde{\rho}_{ij} = \rho_{ij} - (\omega_i \wedge \tau_j + \tau_i \wedge \omega_j), \tag{3.39}$$

onde $\tau_i = du_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{3} u_j\omega_{ij} - u_i du + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} u_j^2\omega_i.$

Demonstração: Como $d\tilde{f} = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \tilde{\omega}_i\tilde{n}_i$, temos

$$\tilde{\omega}_i = \left\langle d\tilde{f}, \tilde{n}_i \right\rangle = \langle e^u du f + e^u df, n_i + u_i f\rangle = e^u \langle df, n_i\rangle = e^u\omega_i.$$

Analogamente, se $d\tilde{n}_i = \displaystyle\sum_{A=1}^{6} \tilde{\omega}_{iA}\tilde{n}_A$ então

$$\tilde{\omega}_{ij} = \langle d\tilde{n}_i, \tilde{n}_j\rangle = \langle du_i f + u_i df + dn_i, u_j f + n_j\rangle = u_i\omega_j - u_j\omega_i + \omega_{ij},$$

$$\tilde{\omega}_{4i} = \langle d\tilde{n}, \tilde{n}_i\rangle = \langle dn + daf + adf, n_i + u_i f\rangle = \langle dn, n_i\rangle + a\langle n_i, df\rangle = \omega_{4i} + a\omega_i.$$

Como $\psi_i = -\omega_{4i}$ obtemos

$$\tilde{\psi}_i = \psi_i - a\omega_i.$$

Procedendo com este raciocínio,

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_{i5} &= \langle d\tilde{n}_i, \tilde{n}_6 \rangle \\
&= e^{-u} \left\langle du_i f + u_i df + dn_i, \sum_{j=1}^{3} (-u_j)\, n_j - an + \left[-\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{3} u_j^2 + a^2 \right) \right] f + n_6 \right\rangle \\
&= e^{-u} \left\{ du_i \langle f, n_6 \rangle + u_i \sum_{j=1}^{3} (-u_j) \langle df, n_j \rangle + \sum_{j=1}^{3} (-u_j) \langle dn_i, n_j \rangle - a \langle dn_i, n \rangle \right. \\
&\quad \left. + \left[-\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{3} u_j^2 + a^2 \right) \right] \langle dn_i, f \rangle + \langle dn_i, n_6 \rangle \right\} \\
&= e^{-u} \left\{ du_i + u_i \sum_{j=1}^{3} (-u_j)\, \omega_j + \sum_{j=1}^{3} (-u_j)\, \omega_{ij} - a\psi_i + \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{3} u_j^2 + a^2 \right) \right] \omega_i + \omega_{i5} \right\},
\end{aligned}$$

já que $-\langle dn_i, f \rangle = \langle n_i, df \rangle = \omega_i$. Como $\chi_i = \omega_{6i} = -\omega_{i5}$ chegamos a:

$$-\tilde{\chi}_i = e^{-u} \left\{ du_i + u_i \sum_{j=1}^{3} (-u_j)\, \omega_j + \sum_{j=1}^{3} (-u_j)\, \omega_{ij} - a\psi_i + \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{3} u_j^2 + a^2 \right) \right] \omega_i - \chi_i \right\},$$

que é equivalente a expressão

$$\tilde{\chi}_i = e^{-u} \left[\chi_i + a\psi_i - \frac{1}{2} a^2 \omega_i - \left(du_i - \sum_{j=1}^{3} u_j \omega_{ij} - u_i \sum_{j=1}^{3} u_j \omega_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} u_j^2 \omega_i \right) \right]. \quad (3.40)$$

Como du é uma forma, temos que

$$du = \sum_{j=1}^{3} du(x_i)\omega_i = \sum_{j=1}^{3} u_j \omega_j(x).$$

Dessa forma, (3.40) pode ser reescrita como:

$$\tilde{\chi}_i = e^{-u} \left(\chi_i + a\psi_i - \frac{1}{2} a^2 \omega_i - \tau_i \right),$$

onde $\tau_i := du_i - \sum_{j=1}^{3} u_j \omega_{ij} - u_i du + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} u_j^2 \omega_i$.

Prosseguindo com nossa tarefa, o próximo passo é obter $\tilde{\nu}$ que é dada por

$$\begin{aligned}
-\tilde{\nu} &= \langle \tilde{n}_6, d\tilde{n} \rangle \\
&= e^{-u} \left\langle \sum_{j=1}^{3} (-u_j)\, n_j - an + \left[-\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{3} u_j^2 + a^2 \right) \right] f + n_6, dn + da f + a df \right\rangle \\
&= e^{-u} \left[\sum_{j=1}^{3} (-u_j) \langle n_j, dn \rangle + a \sum_{j=1}^{3} (-u_j) \langle n_j, df \rangle + \langle n_6, dn \rangle + da \langle n_6, f \rangle \right] \\
&= e^{-u} \left[\sum_{j=1}^{3} u_j \psi_j + a \sum_{j=1}^{3} (-u_j)\, \omega_j - \nu + da \right],
\end{aligned}$$

então
$$\tilde{\nu} = e^{-u}\left(-\sum_{j=1}^{3} u_j\psi_j + adu + \nu - da\right).$$

Passemos agora às formas de curvatura correspondentes $\tilde{\rho}_{ij}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{ij} &= \tilde{\psi}_i \wedge \tilde{\psi}_j + \tilde{\omega}_i \wedge \tilde{\chi}_j + \tilde{\chi}_i \wedge \tilde{\omega}_j \\
&= (\psi_i - a\omega_i) \wedge (\psi_j - a\omega_j) + (e^u\omega_i) \wedge \left[e^{-u}\left(\chi_j + a\psi_j - \frac{1}{2}a^2\omega_j - \tau_j\right)\right] \\
&\quad + \left[e^{-u}\left(\chi_i + a\psi_i - \frac{1}{2}a^2\omega_i - \tau_i\right)\right] \wedge (e^u\omega_j) \\
&= \psi_i \wedge \psi_j - a\psi_i \wedge \omega_j - a\omega_i \wedge \psi_j + a^2\omega_i \wedge \omega_j + \omega_i \wedge \chi_j + a\omega_i \wedge \psi_j \\
&\quad -\frac{1}{2}a^2\omega_i \wedge \omega_j - \omega_i \wedge \tau_j + \chi_i \wedge \omega_j + a\psi_i \wedge \omega_j - \frac{1}{2}a^2\omega_i \wedge \omega_j - \tau_i \wedge \omega_j \\
&= \rho_{ij} - (\omega_i \wedge \tau_j + \tau_i \wedge \omega_j).
\end{aligned}$$

□

Acabamos de obter informações importantes sobre a faixa $(\tilde{f}, \tilde{n})$. O que faremos agora é ver como podemos usá-las para obter condições necessárias e suficientes para que a imersão f seja conformemente plana.

Para isso, definimos as *formas de Schouten* por

$$\sigma_i = s(x_i, .)$$

onde s é o tensor de Schouten, e então temos o seguinte lema:

Lema 3.1 *As formas de curvaturas ρ_{ij} dadas na equação de Gauss* (3.22), *quando a dimensão da variedade é $n = 3$, podem ser expressas por*

$$\rho_{ij} = \omega_i \wedge \sigma_j + \sigma_i \wedge \omega_j, \tag{3.41}$$

onde σ_i são as formas de Schouten.

Demonstração: Lembramos que o tensor de Schouten, para o caso $n = 3$ é dado por

$$s = Ric - \frac{k}{4}g,$$

onde k é a curvatura escalar. Assim, temos que σ_i será dada por

$$\sigma_i = Ric(x_i, .) - \frac{k}{4}g(x_i, .) = \rho_i - \frac{k}{4}\omega_i,$$

onde

$$\rho_i := Ric(x_i, .) = \sum_{j=1}^{3} r(x_i, x_j, ., x_j) = \sum_{j=1}^{3} \rho_{ij}(., x_j)$$

e então $k = \sum_{i=1}^{3} \rho_i(x_i)$.

Agora, lembramos que o tensor de Weyl é dado por

$$w = r - s \wedge g,$$

onde na identidade acima, o símbolo $\wedge$ representa o produto Kulkarni-Nomizu. Introduzindo as formas $\zeta_{ij}(x,y) := w(x_i, x_j, x, y)$, então

$$\begin{aligned}
\zeta_{ij}(x,y) &= r(x_i, x_j, x, y) - s \wedge g(x_i, x_j, x, y) \\
&= \rho_{ij}(x,y) - \begin{vmatrix} s(x_i, x) & s(x_i, y) \\ g(x_j, x) & g(x_j, y) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} g(x_i, x) & g(x_i, y) \\ s(x_j, x) & s(x_j, y) \end{vmatrix} \\
&= \rho_{ij}(x,y) - [\sigma_i(x)\omega_j(y) - \sigma_i(y)\omega_j(x)] - [\omega_i(x)\sigma_j(y) - \omega_i(y)\sigma_j(x)] \\
&= \rho_{ij}(x,y) - \sigma_i \wedge \omega_j(x,y) - \omega_i \wedge \sigma_j(x,y).
\end{aligned}$$

Portanto $\zeta_{ij} = \rho_{ij} - (\sigma_i \wedge \omega_j + \omega_i \wedge \sigma_j)$. Vimos no capítulo anterior que para $n = 3$ o tensor de Weyl é identicamente nulo, o que implica em (3.41).

□

Podemos agora estabelecer o seguinte teorema:

Teorema 3.1 *Uma imersão Riemanniana $f : M^3 \to L^5$ é conformemente plana se, e somente se, existir uma função u tal que*

$$\sigma_i = du_i - \sum_{j=1}^{3} u_j \omega_{ij} - u_i du + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} u_j^2 \omega_i, \tag{3.42}$$

onde σ_i são as formas de Schouten.

Demonstração: Por (3.39), temos que a imersão f será conformemente plana se, e somente se, $0 = \tilde{\rho}_{ij} = \rho_{ij} - (\omega_i \wedge \tau_j + \tau_i \wedge \omega_j)$ ou equivalentemente,

$$\rho_{ij} = \omega_i \wedge \tau_j + \tau_i \wedge \omega_j. \tag{3.43}$$

Portanto, por (3.43) e (3.41), devemos ter

$$\omega_i \wedge \sigma_j + \sigma_i \wedge \omega_j = \omega_i \wedge \tau_j + \tau_i \wedge \omega_j,$$

o que implica em $\sigma_i = \tau_i$. Portanto, por (3.38), devemos ter (3.42) satisfeita.

$\square$

Observação 3.7 No capítulo anterior, quando estudamos o teorema de Weyl-Schouten, para que a variedade fosse conformemente plana, vimos em (2.12), que procuramos uma função u tal que

$$s = \operatorname{hess} u(x,y) - du(x)du(y) + \frac{1}{2}g(\text{grad}u, \text{grad}u)g(x,y)$$

De fato, com a nossa notação, vamos mostrar que essa equação é equivalente a (3.42),

$$\sigma_i(y) = s(x_i,y) = \operatorname{hess} u(x_i,y) - du(x_i)du(y) + \frac{1}{2}g(\text{grad}u, \text{grad}u)g(x_i,y). \tag{3.44}$$

Como $\text{grad}u = \sum_{j=1}^{3} u_j x_j$ temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{hess} u(y,x_i) \;=\; g(\nabla_y \text{grad}u, x_i) &= \left\langle \sum_{j=1}^{3} du_j(y)x_j + \sum_{j=1}^{3} u_j \nabla_y x_j, x_i \right\rangle \\ &= du_i(y) + \left\langle \sum_{j=1}^{3} u_j \sum_{k=1}^{3} \omega_{jk}(y)x_k, x_i \right\rangle \\ &= du_i(y) + \sum_{j=1}^{3} u_j \omega_{ji}(y), \end{aligned}$$

podemos então reescrever (3.44) da forma

$$\sigma_i(y) = du_i(y) - \sum_{j=1}^{3} u_j\omega_{ij}(y) - u_i du(y) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} u_j^2 \omega_i(y),$$

que é exatamente (3.42).

Podemos então, estabelecer aqui uma versão do teorema de Weyl-Schouten envolvendo as formas diferenciais que estabelecemos neste capítulo.

Teorema 3.2 *Afim de que uma imersão riemanniana $f : M^3 \to L^5$ seja conformemente plana é necessário e suficiente que*

$$0 = d\sigma_i - \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \sigma_j, \tag{3.45}$$

onde σ_i são as formas de Schouten e ω_{ij} as formas de conexão de um referencial adaptado.

Demonstração: Relembramos que, no caso $n = 3$ a condição de existência da função u era que o tensor de Schouten fosse um tensor de Codazzi, ou seja:

$$(\nabla_x s)(y, z) = (\nabla_y s)(x, z).$$

Como a derivada covariante é um tensor, e então uma aplicação multilinear em cada uma das suas variáveis, basta verificar a seguinte expressão:

$$(\nabla_x s)(y, x_i) = (\nabla_y s)(x, x_i),$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_x s)(y, x_i) - (\nabla_y s)(x, x_i) &= xs(y, x_i) - s(\nabla_x y, x_i) - s(y, \nabla_x x_i) \\ & & -ys(x, x_i) + s(\nabla_y x, x_i) + s(x, \nabla_y x_i), \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= x\sigma_i(y) - y\sigma_i(x) - \sigma_i([x, y]) - s(y, \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}(x)x_j) + s(x, \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}(y)x_j) \\ &= d\sigma_i(x, y) - \sum_{j=1}^{3} [\omega_{ij}(x)\sigma_j(y) - \omega_{ij}(y)\sigma_j(x)] \\ &= d\sigma_j(x, y) - \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \sigma_j(x, y). \end{aligned}$$

$\square$

Introduzindo as *formas de Cartan*

$$\beta_i := \sigma_i - \chi_i, \tag{3.46}$$

temos o seguinte teorema:

Teorema 3.3 (Cartan) *Uma imersão riemanniana $f : M^3 \to L^5$ é conformemente plana se, e somente se,*

$$0 = d\beta_i - \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \beta_j + \psi_i \wedge \nu, \tag{3.47}$$

onde β_i são as formas de Cartan, ω_{ij} e ψ_i são formas de conexão de um referencial adaptado.

Demonstração: Usando a terceira das equações de Codazzi dadas em (3.20) temos que

$$\begin{aligned} 0 &= d\chi_i - \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \chi_j - \psi_i \wedge \nu \\ &= d\sigma_i - d\beta_i - \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge (\sigma_j - \beta_j) - \psi_i \wedge \nu \\ &= d\sigma_i - d\beta_i - \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \sigma_j + \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \beta_j - \psi_i \wedge \nu. \end{aligned}$$

Segue do teorema anterior, que (3.47) se verifica.

□

Observação 3.8 Quando trabalhamos com um referencial adaptado de direções principais, podemos calcular as formas de Cartan β_i. Neste caso, temos $\psi_i = a_i\omega_i$ e a equação de Gauss (3.22) reduz-se a:

$$\rho_{ij} = a_i a_j \omega_i \wedge \omega_j + \omega_i \wedge \chi_j + \chi_i \wedge \omega_j.$$

Como vimos em (3.41), quando $n = 3$, $\rho_{ij} = \omega_i \wedge \sigma_j + \sigma_i \wedge \omega_j$. Portanto

$$\omega_i \wedge \sigma_j + \sigma_i \wedge \omega_j = a_i a_j \omega_i \wedge \omega_j + \omega_i \wedge \chi_j + \chi_i \wedge \omega_j,$$

que é equivalente a

$$a_i a_j \omega_i \wedge \omega_j - \omega_i \wedge \beta_j - \beta_i \wedge \omega_j = 0, \tag{3.48}$$

já que $\beta_i = \sigma_i - \chi_i$. Se escrevemos

$$\beta_i = \sum_{k=1}^{3} b_{ik}\omega_k,$$

(3.48) é equivalente a

$$a_i a_j \omega_i \wedge \omega_j - \sum_{k=1}^{3} b_{jk}\omega_i \wedge \omega_k - \sum_{l=1}^{3} b_{il}\omega_l \wedge \omega_j = 0.$$

Aplicando a identidade acima em cada par dos vetores da base $\{x_1, x_2, x_3\}$, obtemos, para todo i e j

$$\left\{ \begin{aligned} a_i a_j - b_{jj} - b_{ii} &= 0, \\ b_{ij} &= 0, \quad i \neq j. \end{aligned} \right. \tag{3.49}$$

Da primeira equação, para obter cada b_{ii}, basta observar que:

$$\begin{cases} a_1a_2 - b_{11} - b_{22} &= 0, \\ a_2a_3 - b_{22} - b_{33} &= 0, \\ a_1a_3 - b_{11} - b_{33} &= 0, \end{cases}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} 2b_{11} &= a_1a_2 + a_1a_3 - a_2a_3, \\ 2b_{22} &= a_1a_2 + a_2a_3 - a_1a_3, \\ 2b_{33} &= a_2a_3 + a_1a_3 - a_1a_2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} \beta_1 &= \frac{1}{2}\left(a_1a_2 + a_1a_3 - a_2a_3\right)\omega_1, \\ \beta_2 &= \frac{1}{2}\left(a_1a_2 + a_2a_3 - a_1a_3\right)\omega_2, \\ \beta_3 &= \frac{1}{2}\left(a_2a_3 + a_1a_3 - a_1a_2\right)\omega_3. \end{cases} \tag{3.50}$$

Para provar o principal teorema desta seção, precisamos de alguns lemas.

Lema 3.2 *Vale a seguinte identidade:*

$$(\nabla_x A_n)(y) + \nu(x)y = (\nabla_y A_n)(x) + \nu(y)x. \tag{3.51}$$

Demonstração: Lembramos que, como $\{x_1, x_2, x_3\}$ é uma base ortonormal na métrica induzida g, podemos escrever

$$A_n(x) = \sum_{i=1}^{3} g(A_n(x), x_i)x_i,$$

mas, por (3.30) e (3.33)

$$g(A_n(x), x_i) = -H_n(x, x_i) = -\sum_{j=1}^{3} \psi_j(x)\omega_j(x_i) = -\psi_i(x).$$

Então podemos escrever

$$A_n(x) = -\sum_{i=1}^{3} \psi_i(x)x_i.$$

Calculando a derivada do tensor A_n usando a expressão que obtemos acima segue que

$$\begin{aligned}
(\nabla_x A_n)(y) &= \nabla_x A_n(y) - A_n(\nabla_x y) \\
&= \nabla_x\left(-\sum_{i=1}^{3}\psi_i(y)x_i\right) + \sum_{i=1}^{3}\psi_i(\nabla_x y)x_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left[-x\psi_i(y)x_i - \psi(y)\nabla_x x_i + \psi_i(\nabla_x y)x_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left[-x\psi_i(y) + \psi_i(\nabla_x y)\right]x_i - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\psi_i(y)\omega_{ij}(x)x_j \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left[-x\psi_i(y) + \psi_i(\nabla_x y) - \sum_{j=1}^{3}\psi_j(y)\omega_{ji}(x)\right]x_i,
\end{aligned}$$

onde na última igualdade rearranjamos os índices trocando i por j. Analogamente, temos

$$(\nabla_y A_n)(x) = \sum_{i=1}^{3}\left[-y\psi_i(x) + \psi_i(\nabla_y x) - \sum_{j=1}^{3}\psi_j(x)\omega_{ji}(y)\right]x_i.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
(\nabla_y A_n)(x) - (\nabla_x A_n)(y) &= \sum_{i=1}^{3}\left[x\psi_i(y) - y\psi_i(x) - \psi_i([x,y])\right]x_i \\
&\quad \sum_{i=1}^{3}\left[\sum_{j=1}^{3}\psi_j(y)\omega_{ji}(x) - \psi_j(x)\omega_{ji}(y)\right]x_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}d\psi_i(x,y)x_i + \sum_{i=1}^{3}\left[\sum_{j=1}^{3}\omega_{ji}\wedge\psi_j(x,y)\right]x_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left[d\psi_i(x,y) - \sum_{j=1}^{3}\omega_{ij}\wedge\psi_j(x,y)\right]x_i.
\end{aligned}$$

Aplicando a primeira das equações de Codazzi descritas em (3.20) obtemos que:

$$\begin{aligned}
(\nabla_y A_n)(x) - (\nabla_x A_n)(y) &= \sum_{i=1}^{3}-\omega_i\wedge\nu(x,y)x_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left[\nu(x)\omega_i(y) - \nu(y)\omega_i(x)\right]x_i \\
&= \nu(x)\sum_{i=1}^{3}g(y,x_i)x_i - \nu(y)\sum_{i=1}^{3}g(x,x_i)x_i \\
&= \nu(x)y - \nu(y)x.
\end{aligned}$$

De onde segue (3.51).

$\square$

Para o próximo lema, será interessante lembrarmos alguns conceitos de Álgebra Linear.

Dada uma aplicação linear $A : E \rightarrow F$, onde E e F são espaços vetoriais, o núcleo de A, denotado por $\mathcal{N}(A)$, é o conjunto dos v vetores em E tais que $A(v) = 0$. O conjunto imagem de A, denotado por $\mathcal{I}(A)$ é o conjunto dos vetores em F tais que $w = A(v)$ onde $v \in E$. Com estes conceitos, temos o Teorema do Núcleo e da Imagem, estabelecendo que, nestas condições,

$$dimE = dim\mathcal{N}(A) + dim\mathcal{I}(A), \tag{3.52}$$

onde, $dimE$ é a dimensão do espaço vetorial E.

Como em cada ponto p, A_n é uma transformação linear de T_pM em T_pM e dn_p é outra transformação linear, de T_pM em $dn_p(T_pM)$, podemos enunciar o seguinte lema:

Lema 3.3 *Para cada $p \in M$, se $dim\mathcal{I}(A_n) \leq 1$ então $\mathcal{N}(A_n) \subset \mathcal{N}(dn)$.*

Demonstração: Pela definição das formas de conexão

$$dn(y) = \sum_{A=1}^{6} \omega_{4A} n_A = \sum_{i=1}^{3} [-\psi_i(y)] n_i - \nu(y) f,$$

já que $\omega_{44} = \omega_{46} = 0$ e $\omega_{45} = -\nu$.

Pelo teorema do núcleo e da imagem, $dim\mathcal{N}(A) \geq 2$ então seja $\{x, y\}$ um par ortonormal de vetores em $\mathcal{N}(A_n)$. Dessa forma, temos que

$$0 = A_n(y) = -\sum_{i=1}^{3} \psi_i(y) x_i,$$

o que implica $\psi_i(y) = 0$. Consequentemente,

$$dn(y) = -\nu(y) f = -\nu(y) g(x, x) f = g(-\nu(y)x, x) f.$$

Aplicando o lema anterior, podemos escrever

$$\begin{aligned} dn(y) &= g((\nabla_y A_n)(x) - (\nabla_x A_n)(y) - \nu(x) y, x) f \\ &= g(\nabla_y A_n(x) - A_n(\nabla_y x) - \nabla_x A_n(y) + A_n(\nabla_x y) - \nu(x) y, x) f. \end{aligned}$$

Mas $A_n(x) = A_n(y) = 0$ e $g(x, y) = 0$, então

$$\begin{aligned} dn(y) &= g(A_n([x, y]), x) f \\ &= g([x, y], A_n(x)) f \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade, usamos que A_n é auto-adjunta. Assim $y \in \mathcal{N}(dn)$ logo

$$\mathcal{N}(A_n) \subset \mathcal{N}(dn).$$

$\square$

Antes de passar ao teorema, vamos estabelecer uma convenção envolvendo as curvaturas principais. De agora em diante, sempre que falarmos das funções a_1, a_2 e a_3, elas estarão satisfazendo à seguinte ordem:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3$$

Com isso, temos a seguinte definição:

Definição 3.4 Definimos as *formas fundamentais conformes* da faixa (f, n) como sendo as formas α_i dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & \sqrt{a_3 - a_1}\sqrt{a_2 - a_1}\,\omega_1, \\ \alpha_2 & = & \sqrt{a_2 - a_1}\sqrt{a_3 - a_2}\,\omega_2, \\ \alpha_3 & = & \sqrt{a_3 - a_2}\sqrt{a_3 - a_1}\,\omega_3. \end{array} \right. \tag{3.53}$$

Uma observação interessante é que as formas α_i são invariantes por deformações conformes. Como vimos em (3.34),com uma deformação conforme, passando da faixa (f, n) para a faixa $(\tilde{f}, \tilde{n})$ as curvaturas principais passam de a_i para $\tilde{a}_i = e^{-u}(a_i - a)$ e então, calculando $\tilde{\alpha_1}$, por exemplo, temos

$$\begin{array}{rclcl} \tilde{\alpha_1} & = & \sqrt{\tilde{a}_3 - \tilde{a}_1}\sqrt{\tilde{a}_2 - \tilde{a}_1}\tilde{\omega}_1 & = & \sqrt{e^{-u}(a_3 - a - a_1 + a)}\ \sqrt{e^{-u}(a_2 + a - a_1 - a)}\,e^u\omega_1 \\ & & & = & \sqrt{e^{-2u}(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)}\,e^u\omega_1 \\ & & & = & \sqrt{a_3 - a_1}\sqrt{a_2 - a_1}\,\omega_1 \\ & & & = & \alpha_1. \end{array}$$

Definidas as formas que iremos trabalhar, temos o seguinte teorema

Teorema 3.4 *Uma imersão riemanniana $f : M^3 \to L^5$ é conformemente plana se, e somente se, as formas fundamentais conformes* (3.53) *são fechadas, isto é, $d\alpha_i = 0$.*

Demonstração: *1º Caso:* As três curvaturas principais são distintas.

Trabalhando com um referencial adaptado de direções principais, considere inicialmente o aberto onde (f,n) tem as três curvaturas principais distintas. Pela Observação 3.8, as equações (3.50) nos dão as formas de Cartan em um referencial adaptado de direções principais. A saber,

$$\beta_i = b_i\omega_i,$$

onde

$$\begin{cases} b_1 &= \frac{1}{2}(a_1a_2 - a_2a_3 + a_3a_1), \\ b_2 &= \frac{1}{2}(a_1a_2 + a_2a_3 - a_3a_1), \\ b_3 &= \frac{1}{2}(-a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1). \end{cases}$$

Para $i \neq j$, as equações acima são equivalentes a

$$b_i + b_j - a_ia_j = 0. \tag{3.54}$$

Como estamos em um referencial adaptado, $\psi_i = a_i\omega_i$ e o teorema de Cartan diz que f é conformemente plana se, e somente se, vale a equação (3.47):

$$\begin{aligned} 0 &= d\beta_i - \sum_{j=1}^{3}\omega_{ij}\wedge\beta_j + \psi_i\wedge\nu, \\ &= d(b_i\omega_i) - \sum_{j=1}^{3}\omega_{ij}\wedge(b_j\omega_j) + a_i(\omega_i\wedge\nu). \end{aligned} \tag{3.55}$$

Pela primeira das equações de Codazzi (3.20), temos

$$\omega_i\wedge\nu = \sum_{j=1}^{3}\omega_{ij}\wedge(a_j\omega_j) - d(a_i\omega_i).$$

Substituindo a expressão acima em (3.55) temos

$$\begin{aligned} 0 &= d(b_i\omega_i) - \sum_{j=1}^{3}\omega_{ij}\wedge(b_j\omega_j) + a_i\left[\sum_{j=1}^{3}\omega_{ij}\wedge(a_j\omega_j) - d(a_i\omega_i)\right] \\ &= db_i\wedge\omega_i + b_id\omega_i - \sum_{j=1}^{3}b_j\omega_{ij}\wedge\omega_j + \sum_{j=1}^{3}(a_ia_j)\omega_{ij}\wedge\omega_j - a_ida_i\wedge\omega_i - a_i^2d\omega_i \\ &= (db_i - a_ida_i)\wedge\omega_i + (b_i - a_i^2)d\omega_i - \sum_{j=1}^{3}(b_j - a_ia_j)\omega_{ij}\wedge\omega_j. \end{aligned}$$

Mas como $d\omega_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \omega_j$ temos

$$
\begin{aligned}
0 &= (db_i - a_i da_i) \wedge \omega_i + \sum_{j=1}^{3} (b_i - a_i^2 - b_j + a_i a_j)\omega_{ij} \wedge \omega_j \\
&= (db_i - a_i da_i) \wedge \omega_i + \sum_{j=1}^{3} (2b_i - a_i^2 - b_i - b_j + a_i a_j)\omega_{ij} \wedge \omega_j \\
&= (db_i - a_i da_i) \wedge \omega_i + (2b_i - a_i^2) d\omega_i,
\end{aligned}
$$

onde a última igualdade decorre de (3.54). Então, f é conformemente plana se, e somente se, as funções a_i e b_i satisfazem a relação

$$
(db_i - a_i da_i) \wedge \omega_i + (2b_i - a_i^2) d\omega_i = 0. \tag{3.56}
$$

Mas, observe que

$$
\begin{cases}
2b_1 - a_1^2 &= a_1 a_2 - a_2 a_3 + a_3 a_1 - a_1^2 \\
&= (a_3 - a_1)(a_1 - a_2) \\
2b_2 - a_2^2 &= a_1 a_2 + a_2 a_3 - a_3 a_1 - a_2^2 \\
&= (a_3 - a_2)(a_2 - a_1) \\
2b_3 - a_3^2 &= -a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 - a_3^2 \\
&= (a_3 - a_1)(a_2 - a_3)
\end{cases}
$$

Portanto, analisando (3.56) em cada caso, temos:

- Para $i = 1$, (3.56) é equivalente a:

$$
\begin{aligned}
0 &= (a_1 da_1 - db_1) \wedge \omega_1 + (a_1^2 - 2b_1) d\omega_1 \\
&= \sqrt{a_1^2 - 2b_1} \left[\frac{a_1 da_1 - db_1}{\sqrt{a_1^2 - 2b_1}} \wedge \omega_1 + \sqrt{a_1^2 - 2b_1} d\omega_1 \right] \\
&= \sqrt{a_1^2 - 2b_1}\, d\left(\sqrt{a_1^2 - 2b_1}\, \omega_1 \right) \\
&= \sqrt{(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)}\, d\left(\sqrt{(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)}\, \omega_1 \right).
\end{aligned}
$$

- Para $i = 2$, basta fazer

$$
\begin{aligned}
0 &= (db_2 - a_2 da_2) \wedge \omega_2 + (2b_2 - a_2^2) d\omega_2 \\
&= \sqrt{2b_2 - a_2^2} \left[\frac{db_2 - a_2 da_2}{\sqrt{2b_2 - a_2^2}} \wedge \omega_2 + \sqrt{2b_2 - a_2^2} d\omega_2 \right] \\
&= \sqrt{(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)}\, d\left(\sqrt{(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)}\, \omega_2 \right).
\end{aligned}
$$

- Para $i = 3$ procedemos de forma análoga ao caso $i = 1$ e obtemos que (3.56) é equivalente a

$$0 = \sqrt{(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)}\, d\left(\sqrt{(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)}\,\omega_3\right)$$

Como as três curvaturas principais são distintas, então devemos ter

$$\begin{cases} d\,(\sqrt{a_3 - a_1}\sqrt{a_2 - a_1}\,\omega_1) &= 0, \\ d\,(\sqrt{a_2 - a_1}\sqrt{a_3 - a_2}\,\omega_2) &= 0, \\ d\,(\sqrt{a_3 - a_2}\sqrt{a_3 - a_1}\,\omega_3) &= 0, \end{cases}$$

que, por (3.53), é equivalente a

$$d\alpha_i = 0,$$

ou seja, equivalente às formas fundamentais conformes serem fechadas. E assim, no aberto onde as curvaturas principais são distintas, vale o teorema.

2º Caso: Considere agora o interior do complementar desse conjunto, ou seja, o interior do conjunto onde (f, n) possui duas curvaturas principais iguais. A primeira coisa que devemos observar é que podemos trabalhar com um campo normal apropriado de forma que podemos assumir que $a_1 = a_2 = 0$. De fato, basta lembrar que, por (3.34), ao mudarmos da faixa (f, n) para a faixa $(f, n + af)$ a métrica induzida se mantém, mas as curvaturas principais mudam de a_i para $a_i - a$.

Suponha então que $a_1 = a_2 = \lambda$ considerando o campo normal $n + \lambda f$, as curvaturas principais serão

$$\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{a}_3 = a_3 - \lambda.$$

Vamos então continuar trabalhando no referencial adaptado de direções principais e considerar $a_1 = a_2 = 0$. Como $\psi_i = a_i\omega_i$, temos

$$\begin{cases} \psi_1 &= 0, \\ \psi_2 &= 0, \\ \psi_3 &= a_3\omega_3. \end{cases}$$

Portanto, $\psi_i \wedge \psi_j = 0$ e $\psi_i \wedge \nu = 0$ já que

$$\begin{aligned} \psi_3 \wedge \nu(x_i, x_j) &= a_3\omega_3 \wedge \nu(x_i, x_j) \\ &= a_3\left[\omega_3(x_i)\nu(x_j) - \omega_3(x_j)\nu(x_i)\right]. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Se $a_1 = a_2 = 0$ temos $A_n(x_1) = A_n(x_2) = 0$ e então, pelo Lema 3.3,

$$\begin{cases} 0 &= dn(x_1) &= -\nu(x_1)f, \\ 0 &= dn(x_2) &= -\nu(x_2)f, \end{cases}$$

onde usamos a definição das formas de conexão, ou seja,

$$dn = \sum_{A=1}^{6} \omega_{4A} n_A = -\sum_{i=1}^{3} \psi_i n_i - \nu f,$$

ja que $\omega_{4i} = -\psi_i, \omega_{44} = \omega_{46} = 0$ e $\omega_{45} = -\nu$.

Portanto $\nu(x_1) = \nu(x_2) = 0$. Como sabemos que $\omega_3(x_1) = \omega_3(x_2) = 0$ concluímos de (3.57) que, $\psi_3 \wedge \nu(x_i, x_j) = 0$, consequentemente,

$$\psi_i \wedge \nu = 0. \tag{3.58}$$

Se $\psi_i \wedge \psi_j = 0$, a equação de Gauss (3.22) reduz-se a

$$\rho_{ij} = \omega_i \wedge \chi_j + \chi_i \wedge \omega_j.$$

Assim, lembrando que $\rho_i(x_i) = Ric(x_i, x_i) = \sum_{j=1}^{3} \rho_{ij}(x_i, x_j)$, temos

$$\begin{aligned} \rho_i(x_i) &= \sum_{j=1}^{3} [\omega_i \wedge \chi_j(x_i, x_j) + \chi_i \wedge \omega_j(x_i, x_j)] \\ &= \sum_{j=1}^{3} [\chi_j(x_j) - \omega_i(x_j)\chi_j(x_i) + \chi_i(x_i) - \omega_j(x_i)\chi_i(x_j)] \\ &= \sum_{j=1}^{3} \{\chi_j + \chi_i(x_i) - \delta_{ij} [\chi_j(x_i) + \chi_i(x_j)]\} \\ &= \sum_{j=1}^{3} \chi_j(x_j) + 3\chi_i(x_i) - \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} [\chi_j(x_i) + \chi_i(x_j)] \\ &= \sum_{j=1}^{3} \chi_j(x_j) + \chi_i(x_i), \end{aligned}$$

o que nos dá a curvatura escalar, já que

$$k = \sum_{i=1}^{3} \rho_i(x_i) = \sum_{i=1}^{3} \chi_i(x_i) + 3\sum_{j=1}^{3} \chi_j(x_j) = 4\sum_{j=1}^{3} \chi_j(x_j).$$

Agora, para $l \neq i$

$$\begin{aligned}
\rho_i(x_l) &= \sum_{j=1}^{3} [\omega_i \wedge \chi_j(x_l, x_j) + \chi_i \wedge \omega_j(x_l, x_j)] \\
&= \sum_{j=1}^{3} [\omega_i(x_l)\chi_j(x_j) - \omega_i(x_j)\chi_j(x_l) + \chi_i(x_l)\omega_j(x_j) - \chi_i(x_j)\omega_j(x_l)] \\
&= \sum_{j=1}^{3} [-\delta_{ij}\chi_j(x_l) + \chi_i(x_l) - \delta_{jl}\chi_i(x_j)] \\
&= 3\chi_i(x_l) - \chi_i(x_l) - \chi_i(x_l) \\
&= \chi_i(x_l).
\end{aligned}$$

Sendo assim, calculamos as formas de Schouten, $\sigma_i = \rho_i - \frac{k}{4}\omega_i$, aplicando nos vetores da base

$$\begin{aligned}
\sigma_i(x_i) &= \rho_i(x_i) - \frac{k}{4}\omega_i(x_i) \\
&= \chi_i(x_i) + \sum_{j=1}^{3} \chi_j(x_j) - \frac{4}{4}\sum_{j=1}^{3} \chi_j(x_j) \\
&= \chi_i(x_i),
\end{aligned}$$

e para $l \neq i$,

$$\sigma_i(x_l) = \rho_i(x_l) - \frac{k}{4}\omega_i(x_l) = \rho_i(x_l) = \chi_i(x_l),$$

de onde concluímos que $\sigma_i = \chi_i$. Portanto segue de (3.58) que a terceira das equações de Codazzi (3.20) reduz-se a

$$0 = d\chi_i - \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \chi_j - \psi_i \wedge \nu = d\sigma_i - \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \sigma_j.$$

Concluímos, pelo Teorema 3.2, que temos uma imersão conformemente plana. Portanto, para provar o teorema neste caso, basta provar que as formas α_i são fechadas, Mas neste caso, temos:

$$\begin{cases}
\alpha_1 &= 0, \\
\alpha_2 &= 0, \\
\alpha_3 &= \sqrt{a_3^2}\,\omega_3.
\end{cases}$$

E então, α_1 e α_2 são trivialmente fechadas. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $a_3 > 0$, o que nos possibilita escrever:

$$\alpha_3 = a_3\omega_3 = \psi_3.$$

Novamente, usando as equações de Codazzi (3.20). Temos

$$\begin{aligned} d\psi_3 &= \sum_{j=1}^{3} \omega_{3j} \wedge (a_j \omega_j) - \omega_3 \wedge \nu \\ &= \omega_{31} \wedge (a_1\omega_1) + \omega_{32} \wedge (a_2\omega_2) - \omega_3 \wedge \nu \\ &= -\omega_3 \wedge \nu. \end{aligned}$$

Como já vimos, $\nu(x_1) = \nu(x_2) = 0$, portanto $\omega_3 \wedge \nu = 0$ e então concluímos que a forma α_3 é fechada.

Desta forma, como vale o teorema em ambos os abertos, onde as três curvaturas principais são distintas e no interior do conjunto onde duas coincidem, por continuidade, obtemos a equivalência em toda a imersão.

□

Uma vez que a imersão $f : M^3 \to L^5$ é conformemente plana, basta uma deformação conforme para que tenhamos uma imersão conformemente plana em uma forma espacial. Para ilustrar, vamos para obter uma imersão $\tilde{f}$ com campo normal $\tilde{n}$ na forma M_1^4. Devemos ter

$$\langle e^u f, m_1 \rangle = -1,$$

onde $m_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Vimos que, por conexidade, estamos usando somente a parte do cone de luz composta pelos vetores com a primeira coordenada estritamente positiva. Assim para $f = (f_0, \ldots, f_5) \in L^5$, temos $f_0 > 0$. Então, $\langle e^u f, m_1 \rangle = -1$, isto é, $-e^u f_0 = -1$, ou seja

$$e^u = \frac{1}{f_0}.$$

Para $\tilde{n} = n + af$ devemos ter $\langle n + af, m_1 \rangle = 0$, isto é, $-n_0 - af_0 = 0$, ou seja,

$$a = -\frac{n_0}{f_0}.$$

Como vimos, passamos de M_1^4 para M_0^4 ou M_{-1}^4 através de deformações conformes e que as formas fundamentais conformes são invariantes, por estas transformações. Dessa forma, podemos concluir que:

Corolário 3.1 *Afim de que uma hipersuperfície em uma forma espacial de dimensão 4 seja conformemente plana e necessário e suficiente que as formas α_i dadas em* (3.53) *sejam fechadas.*

3.5 Redes de Guichard

Dizemos que uma k-forma diferencial ω é *exata* se existe uma (k-1) forma β tal que $d\beta = \omega$. Pelo lema de Poincaré (ver apêndice A) temos que toda forma fechada é localmente exata.

Vimos que, as imersões $f : M^3 \to L^5$ são conformemente planas se, e somente se, as formas α_i,

$$\begin{cases} \alpha_1 &= \sqrt{a_3 - a_1}\sqrt{a_2 - a_1}\,\omega_1, \\ \alpha_2 &= \sqrt{a_2 - a_1}\sqrt{a_3 - a_2}\,\omega_2, \\ \alpha_3 &= \sqrt{a_3 - a_2}\sqrt{a_3 - a_1}\,\omega_3. \end{cases}$$

são fechadas.

Assim, usando o lema de Poincaré, obtemos um sistema de coordenadas Y, através das funções y_i definidas em um aberto $U \subset M^3$ tal que

$$Y = (y_1, y_2, y_3) : U \subset M^3 \to \mathbb{R}^3,$$

com $dy_i = \alpha_i$. Considerando as funções q_i:

$$\begin{cases} q_1 &= \dfrac{1}{\sqrt{a_3 - a_1}\sqrt{a_2 - a_1}}, \\ q_2 &= \dfrac{1}{\sqrt{a_2 - a_1}\sqrt{a_3 - a_2}}, \\ q_3 &= \dfrac{1}{\sqrt{a_3 - a_2}\sqrt{a_3 - a_1}}, \end{cases} \tag{3.59}$$

temos $dy_i = \frac{1}{q_i}\omega_i$. Seja $\left\{\dfrac{\partial}{\partial y_1}, \dfrac{\partial}{\partial y_2}, \dfrac{\partial}{\partial y_3}\right\}$ a base de vetores tangentes às curvas coordenadas, então,

$$\delta_{ij} = dy_i\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \frac{1}{q_i}\omega_i\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \omega_i\left(\frac{1}{q_i}\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

Portanto

$$\frac{1}{q_i}\frac{\partial}{\partial y_i} = x_i, \tag{3.60}$$

são as direções principais, temos portanto uma parametrização por linhas de curvatura e consequentemente, um sistema de coordenadas *triplamente ortogonal*, ou seja, as superfícies coordenadas y_i constantes intersectam-se ortogonalmente.

Dado este sistema de coordenadas, definimos as *funções de Lamé*, l_i por

$$l_i = \sqrt{\left\langle df\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right), df\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\right\rangle}. \tag{3.61}$$

Uma consequência do que vimos acima é que

$$l_i = \sqrt{\left\langle df\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right), df\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\right\rangle} = \sqrt{\langle df(q_i x_i), df(q_i x_i)\rangle} = q_i. \tag{3.62}$$

Portanto as funções de Lamé satisfazem:

$$l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 = q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 = \frac{1}{(a_3-a_1)(a_2-a_1)} - \frac{1}{(a_2-a_1)(a_3-a_2)} + \frac{1}{(a_3-a_2)(a_3-a_1)} = 0.$$

A relação

$$l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 = 0, \tag{3.63}$$

será chamada *condição de Guichard*.

Como os vetores $\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3}\right\}$ são ortogonais, geometricamente, (3.63) significa que as superfícies coordenadas $y_i = const$ dividem a variedade Riemanniana (M^3, g) em infinitesimais paralelepípedos tais que dois dos seus seis retângulos diagonais são quadrados.

Definiremos então este tipo de sistema de coordenadas:

Definição 3.5 *Um sistema de coordenadas triplamente ortogonal em uma variedade Riemanniana de dimensão 3*

$$Y = (y_1, y_2, y_3) : (M, g) \to \mathbb{R}^3,$$

onde suas funções de Lamé $l_i = \sqrt{g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right)}$ *satisfazem a condição de Guichard* (3.63) *será chamada uma Rede de Guichard.*

Teorema 3.5 *Se uma imersão* $f : M^3 \to L^5$ *é conformemente plana então podemos parametrizar* M^3 *por uma rede de Guichard.*

Demonstração: Decorre da discussão que fizemos antes de definir uma rede de Guichard.

□

Com esta definição e o teorema acima, seguem os seguintes corolários:

Corolário 3.2 *A cada hipersuperfície* M *conformemente plana em uma forma espacial de dimensão 4 podemos associar uma Rede de Guichard como definida acima.*

Corolário 3.3 *Dada uma hipersuperfície* (M^3, g) *conformemente plana em uma forma espacial de dimensão 4, existe uma parametrização por linhas de curvatura* $Y = (y_1, y_2, y_3) : M^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* g *é dada nesta parametrização, por:*

$$g = e^{2P(y)} \left\{ cos^2\theta(y)(dy_1)^2 + (dy_2)^2 + sen^2\theta(y)(dy_3)^2 \right\} \tag{3.64}$$

ou

$$g = e^{2P(y)} \left\{ senh^2\varphi(y)(dy_1)^2 + cosh^2\varphi(y)(dy_2)^2 + (dy_3)^2 \right\} \tag{3.65}$$

com respectivas segundas formas quadráticas:

$$II = e^{2P(y)} \left\{ a_1(y)cos^2\theta(y)(dy_1)^2 + a_2(y)(dy_2)^2 + a_3(y)sen^2\theta(y)(dy_3)^2 \right\} \tag{3.66}$$

ou

$$II = e^{2P(y)} \left\{ a_1(y)senh^2\varphi(y)(dy_1)^2 + a_2(y)cosh^2(dy_2)^2 + a_3(y)(dy_3)^2 \right\} \tag{3.67}$$

onde $y = (y_1, y_2, y_3)$, $a_1(y)$, $a_2(y)$ *e* $a_3(y)$ *são as curvaturas principais.*

Demonstração: Pelo corolário anterior, temos uma parametrização por linhas de curvatura para a nossa hipersuperfície dada por uma rede de Guichard $Y = (y_1, y_2, y_3) : (M^3, g) \to \mathbb{R}^3$. Como os vetores $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3} \right\}$ são ortogonais e $l_i = \sqrt{g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right)}$ temos que a métrica g induzida pela imersão, é dada por:

$$g = (l_1)^2(dy_1)^2 + (l_2)^2(dy_2)^2 + (l_3)^2(dy_3)^2.$$

Considere $l_2^2 = e^{2P(y)}$, então g é expressa por:

$$g = e^{2P(y)} \left\{ \frac{l_1^2}{l_2^2}(dy_1)^2 + (dy_2)^2 + \frac{l_3^2}{l_2^2}(dy_3)^2 \right\}.$$

Como $l_2^2 = l_1^2 + l_3^2$ temos que

$$0 < \frac{l_1^2}{l_2^2} = \frac{l_1^2}{l_1^2 + l_3^2} < 1,$$

o que é equivalente a $0 < \frac{l_1}{l_2} < 1$. Portanto, existe uma função diferenciável tal que $cos\theta(y) = \frac{l_1}{l_2}$. Como

$$\frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{l_3^2}{l_2^2} = \frac{l_1^2 + l_3^2}{l_2^2} = 1,$$

temos que

$$\frac{l_3}{l_2} = sen\theta(y).$$

E obtemos (3.64). Para a equação (3.65), basta considerar $l_3^2 = e^{2P(y)}$ para obter

$$g = e^{2P(y)} \left\{ \frac{l_1^2}{l_3^2}(dy_1)^2 + \frac{l_2^2}{l_3^2}(dy_2)^2 + (dy_3)^2 \right\}.$$

Agora vemos que

$$\frac{l_2^2}{l_3^2} = \frac{l_1^2 + l_3^2}{l_3^2} > 1.$$

Dessa forma, tomamos uma função diferenciável tal que $cosh\varphi(y) = \dfrac{l_2}{l_3}$. Como

$$\frac{l_2^2}{l_3^2} - \frac{l_1^2}{l_3^2} = \frac{l_2^2 - l_1^2}{l_3^2} = 1,$$

temos que

$$\frac{l_1}{l_3} = senh\varphi(y).$$

E obtemos (3.65).

Para obter (3.66) e (3.67), basta notar que, quando temos uma parametrização por linhas de curvatura, ao escrevermos uma métrica g da forma:

$$g = g_{11}(dy_1)^2 + g_{22}(dy_2)^2 + g_{33}(dy_3)^2,$$

a segunda forma fica dada por:

$$II = a_1(y)g_{11}(dy_1)^2 + a_2(y)g_{22}(dy_2)^2 + a_3(y)g_{33}(dy_3)^2.$$

Pelo que fizemos acima e pela expressão anterior, segue diretamente que as segundas formas fundamentais, relacionadas às métricas são dadas respectivamente por

$$II = e^{2P(y)} \left\{ a_1(y)cos^2\theta(y)(dy_1)^2 + a_2(y)(dy_2)^2 + a_3(y)sen^2\theta(y)(dy_3)^2 \right\},$$

e

$$II = e^{2P(y)} \left\{ a_1(y)senh^2\varphi(y)(dy_1)^2 + a_2(y)cosh^2(dy_2)^2 + a_3(y)(dy_3)^2 \right\}.$$

$\square$

Observação 3.9 O Corolário 3.3 é o ponto de partida para o trabalho desenvolvido por Suyama em [14].

O próximo passo será obter uma recíproca desse fato e então, uma correspondência entre hipersuperfícies conformemente planas e redes de Guichard, para isso, precisamos do seguinte lema:

Lema 3.4 *Dada uma imersão $f: M^3 \to L^5$ com métrica induzida plana g e curvaturas principais distintas a_1, a_2 e a_3, associadas ao campo normal n e seja $Y = (y_1, y_2, y_3) : (M^3, g) \to \mathbb{R}^3$ sua rede de Guichard correspondente dada pelo Teorema 3.5. Considere o referencial adaptado de direções principais*

$$n_i = df(x_i),\ n_4 = n + a_3 f,\ n_5 = f,\ n_6,$$

onde $x_i = \frac{1}{l_i}\frac{\partial}{\partial y_i}$ e $l_i = \sqrt{g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right)}$. Então, podemos escrever o co-referencial e as formas de conexão do referencial adaptado dado em termos da rede de Guichard, da seguinte forma:

$$\begin{array}{lllllllll}
\omega_1 & = & \frac{1}{||\mathrm{grad} y_1||}dy_1 & \psi_1 & = & -\frac{||\mathrm{grad} y_3||}{||\mathrm{grad} y_2||}dy_1 & \chi_1 & = & -\frac{||\mathrm{grad} y_3||^2}{2||\mathrm{grad} y_1||}dy_1 \\
\omega_2 & = & \frac{1}{||\mathrm{grad} y_2||}dy_2 & \psi_2 & = & -\frac{||\mathrm{grad} y_3||}{||\mathrm{grad} y_1||}dy_2 & \chi_2 & = & -\frac{||\mathrm{grad} y_3||^2}{2||\mathrm{grad} y_2||}dy_2 \\
\omega_3 & = & \frac{1}{||\mathrm{grad} y_3||}dy_3 & \psi_3 & = & 0 & \chi_3 & = & \frac{||\mathrm{grad} y_3||}{2}dy_3
\end{array}$$

$$\omega_{ij} = \frac{a_{ji}}{||\mathrm{grad} y_i||}dy_i - \frac{a_{ij}}{||\mathrm{grad} y_j||}dy_j \tag{3.68}$$

$$\nu = a_{13}\frac{||\mathrm{grad} y_3||}{||\mathrm{grad} y_2||}dy_1 - a_{23}\frac{||\mathrm{grad} y_3||}{||\mathrm{grad} y_1||}dy_2 + (a_{31} - a_{32})\frac{||\mathrm{grad} y_3||^2}{||\mathrm{grad} y_1||||\mathrm{grad} y_2||}dy_3,$$

com $a_{ij} = \frac{||\mathrm{grad} y_i||}{||\mathrm{grad} y_j||}\frac{\partial}{\partial y_i}||\mathrm{grad} y_j||$.

Demonstração: Considere a superfície y_i constante. Vimos em (3.60) e (3.62) que

$$x_i = \frac{1}{l_i}\frac{\partial}{\partial y_i},$$

e que este campo define um campo normal a essa superfície. Se ∇ é a conexão Riemanniana em M^3, pelo teorema de Levi-Civita, temos que, para $i \leq j$

$$g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y_j}}\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_k}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y_i}g\left(\frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_k}\right) + \frac{\partial}{\partial y_j}g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_k}\right) - \frac{\partial}{\partial y_k}g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right)\right]$$

já que $\left[\dfrac{\partial}{\partial y_i}, \dfrac{\partial}{\partial y_j}\right] = \left[\dfrac{\partial}{\partial y_k}, \dfrac{\partial}{\partial y_j}\right] = \left[\dfrac{\partial}{\partial y_i}, \dfrac{\partial}{\partial y_k}\right] = 0$.

Quando $k = i$

$$g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y_j}} \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right) = l_i \frac{\partial l_i}{\partial y_j}.$$

Analogamente quando $k = j$

$$g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y_j}} \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = l_j \frac{\partial l_j}{\partial y_i}.$$

Se $k \neq i$ e $k \neq j$, temos $g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y_j}} \dfrac{\partial}{\partial y_i}, \dfrac{\partial}{\partial y_k}\right) = 0.$

Portanto, considerando

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y_j}} \frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \frac{\partial}{\partial y_k},$$

temos que

$$\lambda_k l_k^2 = g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y_j}} \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_k}\right),$$

e então

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y_j}} \frac{\partial}{\partial y_i} = \frac{1}{l_j} \frac{\partial l_j}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial l_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_i} = \frac{\partial l_j}{\partial y_i} x_j + \frac{\partial l_i}{\partial y_j} x_i.$$

Dessa forma, temos

$$\nabla_{x_j} x_i = \nabla_{\frac{1}{l_j}\frac{\partial}{\partial y_j}} \left(\frac{1}{l_i} \frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \frac{1}{l_j}\left(-\frac{1}{l_i^2} \frac{\partial l_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{1}{l_i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_j}} \frac{\partial}{\partial y_i}\right),$$

e usando o que obtivemos acima, temos:

$$\begin{aligned} \nabla_{x_j} x_i &= \frac{1}{l_j}\left[-\frac{1}{l_i^2} \frac{\partial l_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{1}{l_i} \frac{1}{l_j} \frac{\partial l_j}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{l_i^2} \frac{\partial l_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_i}\right] \\ &= \frac{1}{l_i l_j} \frac{\partial l_j}{\partial y_i} x_j. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Como y_i constante é uma superfície de M^3 e x_i é seu campo normal, temos que

$$-\left(\nabla_{x_j} x_i\right)^T = -\left(\frac{1}{l_i l_j} \frac{\partial l_j}{\partial y_i}\right) x_j, \tag{3.70}$$

onde $(v)^T$ é a componente tangente à superfície do vetor v. Então as curvaturas principais da superfície y_i constante são dadas por

$$a_{ij} := -\frac{1}{l_i l_j} \frac{\partial l_j}{\partial y_i}, \tag{3.71}$$

com as direções principais dadas por x_j, $j \neq i$. Usaremos essas funções para encontrar as formas de conexão ω_{ij}.

Antes, vamos obter as expressões para o co-referencial ω_i. Se escrevemos $\text{grad}y_j = \sum_{i=1}^{3} g(\text{grad}y_j, x_i)x_i$ temos que

$$g(\text{grad}y_j, x_i) = dy_j(x_i) = \frac{1}{l_j}\omega_j(x_i) = \frac{\delta_{ij}}{l_j},$$

e então $\text{grad}y_j = \dfrac{1}{l_j}x_j = \dfrac{1}{l_j^2}\dfrac{\partial}{\partial y_j}$. Dessa forma,

$$||\text{grad}y_j|| = \frac{1}{l_j^2}l_j = \frac{1}{l_j}. \tag{3.72}$$

Então

$$\omega_i = \frac{dy_i}{||\text{grad}y_i||}.$$

Calculando então a derivada de $||\text{grad}y_j||$ na direção x_i obtemos:

$$\begin{aligned} d||\text{grad}y_j||(x_i) &= \frac{1}{l_i}d||\text{grad}y_j||\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) \\ &= \frac{1}{l_i}\left(\frac{-1}{l_j^2}\right)\frac{\partial l_j}{\partial y_i} = \frac{1}{l_j}\left(-\frac{1}{l_i l_j}\frac{\partial l_j}{\partial y_i}\right) = ||\text{grad}y_j||a_{ij}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$a_{ij} = \frac{d||\text{grad}y_j||(x_i)}{||\text{grad}y_j||} = \frac{||\text{grad}y_i||}{||\text{grad}y_j||}d||\text{grad}y_j||\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \frac{||\text{grad}y_i||}{||\text{grad}y_j||}\frac{\partial}{\partial y_i}||\text{grad}y_j||.$$

Para as formas de conexão ω_{ij}, lembramos que

$$\nabla_y x_i = \sum_{j=1}^{3}\omega_{ij}(y)x_j.$$

Por (3.69) e (3.71)

$$-a_{ik}x_k = \nabla_{x_k}x_i = \sum_{j=1}^{3}\omega_{ij}(x_k)x_j,$$

o que implica

$$\begin{cases} \omega_{ik}(x_k) = -\omega_{ki}(x_k) = -a_{ik} \\ \omega_{ij}(x_k) = 0 \qquad j \neq k. \end{cases}$$

Dessa forma, se x é um campo tangente a M^3,

$$x = \sum_{k=1}^{3} g(x, x_k)x_k = \sum_{k=1}^{3}\omega_k(x)x_k,$$

temos

$$\omega_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{3} \omega_k(x)\omega_{ij}(x_k) = \omega_i(x)\omega_{ij}(x_i) + \omega_j(x)\omega_{ij}(x_j) = \omega_i(x)a_{ji} - a_{ij}\omega_j(x),$$

então

$$\omega_{ij} = a_{ji}\omega_i - a_{ij}\omega_j,$$

isto é,

$$\omega_{ij} = \frac{a_{ji}}{||\mathrm{grad} y_i||}dy_i - \frac{a_{ij}}{||\mathrm{grad} y_j||}dy_j.$$

Agora, como $l_i = q_i$ dadas em (3.59), segue que:

$$l_1 l_2 = \frac{1}{(\sqrt{a_3 - a_1}\sqrt{a_2 - a_1})(\sqrt{a_2 - a_1}\sqrt{a_3 - a_2})} = \frac{l_3}{a_2 - a_1},$$

isto é,

$$a_2 - a_1 = \frac{l_3}{l_1 l_2}.$$

Analogamente,

$$a_3 - a_2 = \frac{l_1}{l_2 l_3}, \qquad a_3 - a_1 = \frac{l_2}{l_3 l_1}.$$

Considerando o campo normal

$$\tilde{n} = n + a_3 f,$$

as curvaturas principais passam a ser

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= a_1 - a_3, \\ \tilde{a}_2 &= a_2 - a_3, \\ \tilde{a}_3 &= 0, \end{aligned}$$

e com um referencial adaptado de direções principais, temos

$$\begin{cases} \psi_1 = \tilde{a}_1\omega_1 = (a_1 - a_3)l_1 dy_1 = -\dfrac{l_2}{l_3 l_1} l_1 dy_1 = -\frac{||\mathrm{grad} y_3||}{||\mathrm{grad} y_2||} dy_1, \\ \psi_2 = \tilde{a}_2\omega_2 = (a_2 - a_3)l_2 dy_2 = -\dfrac{l_1}{l_3 l_2} l_2 dy_2 = -\frac{||\mathrm{grad} y_3||}{||\mathrm{grad} y_1||} dy_2, \\ \psi_3 = \tilde{a}_3\omega_3 = 0. \end{cases}$$

Para determinar a forma ν precisamos das seguintes equações de Codazzi:

$$\begin{cases} 0 = d\psi_i - \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \psi_j + \omega_i \wedge \nu, \\ 0 = d\omega_i - \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \omega_j. \end{cases}$$

E então, quando trabalhamos em um referencial adaptado de direções principais para a faixa (f, n):

$$\begin{aligned}
0 &= d(a_i\omega_i) - \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge (a_j\omega_j) + \omega_i \wedge \nu \\
&= da_i \wedge \omega_i + a_i d\omega_i - \sum_{j=1}^{3} a_j(\omega_{ij} \wedge \omega_j) + \omega_i \wedge \nu \\
&= (da_i - \nu) \wedge \omega_i + a_i \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \omega_j - \sum_{j=1}^{3} a_j\omega_{ij} \wedge \omega_j \\
&= (da_i - \nu) \wedge \omega_i + \sum_{j=1}^{3} (a_i - a_j)(a_{ji}\omega_i - a_{ij}\omega_j) \wedge \omega_j \\
&= (da_i - \nu) \wedge \omega_i + \sum_{j=1}^{3} a_{ji}(a_i - a_j)\omega_i \wedge \omega_j \\
&= \left[da_i - \nu - \sum_{j=1}^{3} a_{ji}(a_i - a_j)\omega_j \right] \wedge \omega_i,
\end{aligned}$$

implicando que

$$da_i - \nu - \sum_{j=1}^{3} a_{ji}(a_i - a_j)\omega_j = r_i\omega_i, \tag{3.73}$$

para alguma função r_i. Como a forma α_2 é fechada, temos

$$\begin{aligned}
0 &= d\left(\sqrt{(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)}\omega_2\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{(a_2-a_1)(a_3-a_2)}} \left[(da_2 - da_1)(a_3 - a_2) + (a_2 - a_1)(da_3 - da_2)\right] \wedge \omega_2 \\
&\quad + \sqrt{(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)} d\omega_2.
\end{aligned}$$

Multiplicando por $2\sqrt{(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)}$ obtemos

$$0 = \left[(da_2 - da_1)(a_3 - a_2) + (a_2 - a_1)(da_3 - da_2)\right] \wedge \omega_2 + 2(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)d\omega_2. \tag{3.74}$$

Pela expressão que obtemos em (3.73) segue que

$$\begin{aligned}
da_2 - da_1 &= r_2\omega_2 - r_1\omega_1 + \sum_{j=1}^{3} \left[a_{j2}(a_2 - a_j) - a_{j1}(a_1 - a_j)\right] \omega_j \\
&= \left[a_{12}(a_2 - a_1) - r_1\right] \omega_1 + \left[r_2 - a_{21}(a_1 - a_2)\right] \omega_2 \\
&\quad + \left[a_{32}(a_2 - a_3) - a_{31}(a_1 - a_3)\right] \omega_3 \\
da_3 - da_2 &= r_3\omega_3 - r_2\omega_2 + \sum_{j=1}^{3} \left[a_{j3}(a_3 - a_j) - a_{j2}(a_1 - a_j)\right] \omega_j \\
&= \left[a_{13}(a_3 - a_1) - a_{12}(a_2 - a_1)\right] \omega_1 + \left[a_{23}(a_3 - a_2) - r_2\right] \omega_2 \\
&\quad + \left[r_3 - a_{32}(a_2 - a_3\right] \omega_3.
\end{aligned}$$

Voltando em (3.74)

$$\begin{aligned}
0 &= \{(a_3-a_2)\left[a_{12}(a_2-a_1)-r_1\right]+(a_2-a_1)\left[a_{13}(a_3-a_1)-a_{12}(a_2-a_1)\right]\}\,\omega_1\wedge\omega_2\\
&\quad \{(a_3-a_2)\left[a_{32}(a_2-a_3)-a_{31}(a_1-a_3)\right]+(a_2-a_1)\left[r_3-a_{32}(a_2-a_3)\right]\}\,\omega_3\wedge\omega_2\\
&\quad +2(a_2-a_1)(a_3-a_2)\left[\sum_{j=1}^{3}(a_{j2}\omega_2-a_{2j}\omega_j)\wedge\omega_j\right]\\
&= \left[(a_3-a_2)a_{12}(a_2-a_1)-r_1(a_3-a_2)+(a_2-a_1)a_{13}(a_3-a_1)\right.\\
&\quad \left.-(a_2-a_1)(a_2-a_1)a_{12}\right]\omega_1\wedge\omega_2+\left[(a_3-a_2)a_{32}(a_3-a_2)+(a_3-a_2)a_{31}(a_1-a_3)\right.\\
&\quad \left.+\,(a_2-a_1)r_3+(a_2-a_1)a_{32}(a_2-a_3)\right]\omega_2\wedge\omega_3\\
&\quad +2(a_2-a_1)(a_3-a_2)(-a_{12}\omega_1\wedge\omega_2+a_{32}\omega_2\wedge\omega_3)\\
&= \left[-r_1(a_3-a_2)+(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_{13}-a_{12})\right]\omega_1\wedge\omega_2\\
&\quad +\left[-(a_2-a_1)r_3+(a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_{32}-a_{31})\right]\omega_2\wedge\omega_3,
\end{aligned}$$

o que implica em $r_3=\dfrac{(a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_{32}-a_{31})}{a_2-a_1}$.

Quando mudamos de (f,n) para $(f,n+a_3f)$, vimos em (3.38) que ω_i e ω_{ij} ficam invariantes, consequentemente os a_{ij} são invariantes, uma vez que as direções principais são conservadas. Já as formas correspondentes $\tilde{\nu}$ passam a ser $\nu-da_3$. Assim, por (3.73), temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\nu} &= -\sum_{j=1}^{3}a_{j3}(a_3-a_j)\omega_j-r_3\omega_3\\
&= -a_{13}(a_3-a_1)\omega_1-a_{23}(a_3-a_2)\omega_2-\frac{(a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_{32}-a_{31})}{a_2-a_1}\omega_3\\
&= -a_{13}\frac{l_2}{l_3l_1}l_1dy_1-a_{23}\frac{l_1}{l_2l_3}l_2dy_2-\frac{l_1}{l_2l_3}\frac{l_2}{l_1l_3}\frac{l_1l_2}{l_3}(a_{32}-a_{31})l_3dy_3\\
&= -a_{13}\frac{l_2}{l_3}dy_1-a_{23}\frac{l_1}{l_3}dy_2+(a_{31}-a_{32})\frac{l_1l_2}{l_3^2}dy_3\\
&= -a_{13}\frac{||\mathrm{grad}y_3||}{||\mathrm{grad}y_2||}dy_1-a_{23}\frac{||\mathrm{grad}y_3||}{||\mathrm{grad}y_1||}dy_2+(a_{31}-a_{32})\frac{||\mathrm{grad}y_3||^2}{||\mathrm{grad}y_1||||\mathrm{grad}y_2||}dy_3.
\end{aligned}$$

Para calcular as formas χ_i lembramos que, se a métrica induzida por f é plana então as formas de Schouten, σ_i são nulas. Portanto $\chi_i=-\beta_i$. Neste caso,

$$\beta_1=\frac{1}{2}b_1\omega_1=\frac{1}{2}(\tilde{a}_1\tilde{a}_2+\tilde{a}_1\tilde{a}_3-\tilde{a}_2\tilde{a}_3)\omega_1=\frac{1}{2}(a_1-a_3)(a_2-a_3)\omega_1,$$

e então

$$\chi_1=-\frac{1}{2}(a_1-a_3)(a_2-a_3)l_1dy_1=-\frac{1}{2}\frac{l_2}{l_3l_1}\frac{l_1}{l_2l_3}l_1dy_1=-\frac{l_1}{2l_3^2}dy_1=-\frac{||\mathrm{grad}y_3||^2}{2||\mathrm{grad}y_1||}dy_1.$$

De forma análoga, obtemos

$$\chi_2 = -\frac{l_2}{2l_3^2}dy_2 = -\frac{||\text{grad}y_3||^2}{2||\text{grad}y_2||}dy_2 \qquad \text{e} \qquad \chi_3 = \frac{1}{2l_3}dy_3 = \frac{||\text{grad}y_3||}{2}dy_3.$$

$\square$

Observação 3.10 Observamos que as formas dadas em (3.68) no Lema 3.4 podem ser escritas em termos das funções de Lamé l_i. De fato, como

$$||\text{grad}y_i|| = \frac{1}{l_i}.$$

Podemos ver imediatamente que as formas ω_i, ω_{ij}, ψ_i, χ_i são dadas por:

$$\begin{aligned} \omega_i &= l_i dy_i, \\ \omega_{ij} &= -\frac{1}{l_j}\frac{\partial l_i}{\partial y_j}dy_i + \frac{1}{l_i}\frac{\partial l_j}{\partial y_i}dy_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{l_2}{l_3}dy_1, & \chi_1 &= -\frac{l_1}{2l_3^2}dy_1, \\ \psi_2 &= -\frac{l_1}{l_3}dy_2, & \chi_2 &= -\frac{l_2}{2l_3^2}dy_2, \\ \psi_3 &= 0. & \chi_3 &= \frac{1}{2l_3^2}dy_3. \end{aligned}$$

Para escrever ν devemos considerar:

$$\begin{aligned} \nu &= -a_{13}\frac{l_2}{l_3}dy_1 - a_{23}\frac{l_1}{l_3}dy_2 + (a_{31}-a_{32})\left(\frac{l_1 l_2}{l_3^2}\right)dy_3 \\ &= \frac{1}{l_1 l_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\frac{l_2}{l_3}dy_1 + \frac{1}{l_2 l_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\frac{l_1}{l_3}dy_2 + \left(-\frac{1}{l_3 l_1}\frac{\partial l_1}{\partial y_3} + \frac{1}{l_3 l_2}\frac{\partial l_2}{\partial y_3}\right)\left(\frac{l_1 l_2}{l_3^2}\right)dy_3 \\ &= \frac{1}{l_1 l_2 l_3^2}\left[l_2^2\frac{\partial l_3}{\partial y_1}dy_1 + l_1^2\frac{\partial l_3}{\partial y_2}dy_2 - l_2^2\left(\frac{l_1}{l_3}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}dy_3\right) + l_1^2\left(\frac{l_2}{l_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_3}dy_3\right)\right]. \end{aligned}$$

Usando (3.78), temos

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{l_1 l_2 l_3^2}\left[l_1^2\frac{\partial l_3}{\partial y_1}dy_1 + l_3^2\frac{\partial l_3}{\partial y_1}dy_1 + l_1^2\frac{\partial l_3}{\partial y_2}dy_2 - l_1^2\left(\frac{l_1}{l_3}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}dy_3\right) - l_3^2\left(\frac{l_1}{l_3}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}dy_3\right)\right. \\ &\quad \left. + l_1^2\left(\frac{l_2}{l_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_3}dy_3\right)\right] \\ &= \frac{1}{l_1 l_2 l_3^2}\left[l_1^2\left(\frac{\partial l_3}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial l_3}{\partial y_2}dy_3 + \frac{\partial l_3}{\partial y_3}dy_3\right) l_3^2\frac{\partial l_3}{\partial y_1}dy_1 - l_1 l_3\frac{\partial l_1}{\partial y_3}dy_3\right] \\ &= \frac{1}{l_1 l_2 l_3^2}\left(l_1^2 dl_3 + l_3^2\frac{\partial l_3}{\partial y_1}dy_1 - l_1 l_3\frac{\partial l_1}{\partial y_3}dy_3\right). \end{aligned}$$

O próximo lema nos mostra que as funções de Lamé de uma rede de Guichard associada a uma imersão com métrica induzida plana satisfazem um sistema de seis equações diferenciais parciais. Tais equações serão úteis na demonstração do próximo teorema.

Lema 3.5 *Seja $f : M^3 \to L^5$ uma imersão com métrica induzida plana g e seja $Y = (y_1, y_2, y_3) : (M^3, \langle df, df\rangle) \to \mathbb{R}^3$ sua rede de Guichard. Então as suas funções de Lamé dadas por* (3.61) *satisfazem o seguinte sistema de equações diferenciais parciais:*

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial_2 l_1}{\partial y_2 \partial y_3} & = & \dfrac{1}{l_2}\dfrac{\partial l_1}{\partial y_2}\dfrac{\partial l_2}{\partial y_3} + \dfrac{1}{l_3}\dfrac{\partial l_1}{\partial y_3}\dfrac{\partial l_3}{\partial y_2}, \\ \dfrac{\partial_2 l_2}{\partial y_3 \partial y_1} & = & \dfrac{1}{l_3}\dfrac{\partial l_2}{\partial y_3}\dfrac{\partial l_3}{\partial y_1} + \dfrac{1}{l_1}\dfrac{\partial l_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial l_1}{\partial y_3}, \\ \dfrac{\partial_2 l_3}{\partial y_1 \partial y_2} & = & \dfrac{1}{l_1}\dfrac{\partial l_3}{\partial y_1}\dfrac{\partial l_1}{\partial y_2} + \dfrac{1}{l_2}\dfrac{\partial l_3}{\partial y_2}\dfrac{\partial l_2}{\partial y_1}, \\ 0 & = & \dfrac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{1}{l_2}\dfrac{\partial l_1}{\partial y_2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y_1}\left(\dfrac{1}{l_1}\dfrac{\partial l_2}{\partial y_1}\right) + \dfrac{1}{l_3^2}\dfrac{\partial l_1}{\partial y_3}\dfrac{\partial l_2}{\partial y_3}, \\ 0 & = & \dfrac{\partial}{\partial y_3}\left(\dfrac{1}{l_3}\dfrac{\partial l_3}{\partial y_3}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y_2}\left(\dfrac{1}{l_2}\dfrac{\partial l_3}{\partial y_2}\right) + \dfrac{1}{l_1^2}\dfrac{\partial l_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial l_3}{\partial y_1}, \\ 0 & = & \dfrac{\partial}{\partial y_1}\left(\dfrac{1}{l_1}\dfrac{\partial l_3}{\partial y_1}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y_3}\left(\dfrac{1}{l_3}\dfrac{\partial l_1}{\partial y_3}\right) + \dfrac{1}{l_2^2}\dfrac{\partial l_3}{\partial y_2}\dfrac{\partial l_1}{\partial y_2}, \end{array} \tag{3.75}$$

chamadas equações de Lamé.

Demonstração: Como a métrica induzida é plana, temos $\rho_{ij} = 0$ e então, pela equação de Gauss (3.22),

$$0 = d\omega_{ij} - \sum_{l=1}^{3} \omega_{il} \wedge \omega_{lj}.$$

Portanto, para i, j e k índices distintos,

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & d(a_{ji}\omega_i - a_{ij}\omega_j) - (a_{ki}\omega_i - a_{ik}\omega_k) \wedge (a_{jk}\omega_k - a_{kj}\omega_j) \\ & = & da_{ji} \wedge \omega_i + a_{ji} d\omega_i - da_{ij} \wedge \omega_j - a_{ij} d\omega_j \\ & & -(a_{ki}a_{jk}\omega_i \wedge \omega_k - a_{ki}a_{kj}\omega_i \wedge \omega_j + a_{ik}a_{kj}\omega_k \wedge \omega_j). \end{array}$$

Antes de prosseguir, note que como $d\omega_j = \sum_{l=1}^{3} \omega_{jl} \wedge \omega_l$, temos para i, j, k distintos

$$\begin{array}{rcl} d\omega_j & = & \omega_{jk} \wedge \omega_k + \omega_{ji} \wedge \omega_i \\ & = & (a_{kj}\omega_j - a_{jk}\omega_k) \wedge \omega_k + (a_{ij}\omega_j - a_{ji}\omega_i) \wedge \omega_i \\ & = & a_{kj}\omega_j \wedge \omega_k + a_{ij}\omega_j \wedge \omega_i. \end{array}$$

Então

$$
\begin{aligned}
0 &= da_{ji}\wedge\omega_i + a_{ji}(a_{ki}\omega_i\wedge\omega_k + a_{ji}\omega_i\wedge\omega_j) - da_{ij}\wedge\omega_j - a_{ij}(a_{kj}\omega_j\wedge\omega_k + a_{ij}\omega_j\wedge\omega_i)\\
&\quad -(a_{ki}a_{jk}\omega_i\wedge\omega_k - a_{ki}a_{kj}\omega_i\wedge\omega_j + a_{ik}a_{kj}\omega_k\wedge\omega_j)\\
&= da_{ji}\wedge\omega_i - da_{ij}\wedge\omega_j + a_{ki}(a_{ji}-a_{jk})\omega_i\wedge\omega_k + (a_{ji}^2 + a_{ij}^2 + a_{ki}a_{kj})\omega_i\wedge\omega_j\\
&\quad +a_{kj}(a_{ij}-a_{ik})\omega_k\wedge\omega_j.
\end{aligned}
$$

Temos ainda

$$
da_{ji} = \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial a_{ji}}{\partial y_l}dy_l = \sum_{l=1}^{3} l_l x_l(a_{ji})dy_l = \sum_{l=1}^{3} x_l(a_{ji})\omega_l.
$$

Usando então este fato, temos

$$
\begin{aligned}
0 &= \left[a_{ki}(a_{ji}-a_{jk}) - x_k(a_{ji})\right]\omega_i\wedge\omega_k + (a_{ji}^2 + a_{ij}^2 + a_{ki}a_{kj} - x_j(a_{ji}) - x_i(a_{ij}))\omega_i\wedge\omega_j\\
&\quad \left[a_{kj}(a_{ij}-a_{ik}) - x_k(a_{ij})\right]\omega_k\wedge\omega_j,
\end{aligned}
$$

o que nos dá, percorrendo os índices 1, 2 e 3:

$$
\begin{aligned}
x_1(a_{23}) &= a_{13}(a_{23}-a_{21}), & x_1(a_{32}) &= a_{12}(a_{32}-a_{31}),\\
x_2(a_{31}) &= a_{21}(a_{31}-a_{32}), & x_2(a_{13}) &= a_{23}(a_{13}-a_{12}),\\
x_3(a_{12}) &= a_{32}(a_{12}-a_{13}), & x_3(a_{21}) &= a_{31}(a_{21}-a_{23}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1(a_{12}) + x_2(a_{21}) &= a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{31}a_{32},\\
x_2(a_{23}) + x_3(a_{32}) &= a_{23}^2 + a_{32}^2 + a_{12}a_{13},\\
x_3(a_{31}) + x_1(a_{13}) &= a_{31}^2 + a_{13}^2 + a_{23}a_{21}.
\end{aligned}
$$

Usando que $a_{ij} = -\dfrac{1}{l_i l_j}\dfrac{\partial l_j}{\partial y_i}$ e que $x_i = \dfrac{1}{l_i}\dfrac{\partial}{\partial y_i}$ através de substituição e cálculo direto, podemos reduzir facilmente o sistema acima para o sistema (3.75).

□

Assumindo que a imersão f é plana nós podemos pensar em M^3 como um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ com a métrica usual e f como uma imersão isométrica. Assim, temos uma rede de Guichard em $\mathbb{R}^3$. E então, podemos pensar na recíproca do corolário, ou seja, dada uma rede de Guichard em $\mathbb{R}^3$ queremos saber se é possível obter uma imersão plana $f : M^3 \to L^5$ e por consequência, uma imersão conformemente plana nas variedades de curvatura constante M_K^4. Assim, motivados pela Observação 3.10. Podemos então estabelecer o seguinte teorema:

Teorema 3.6 *A cada imersão conformemente plana $f : M^3 \to M^4_K$ com três curvaturas principais distintas podemos associar de uma rede de Guichard $Y : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cujas funções de Lamé* (3.61) *satisfazem as equações diferenciais* (3.75).

Reciprocamente, seja $Y = (y_1, y_2, y_3) : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, uma rede de Guichard com suas funções de Lamé não nulas, definidas por $l_i = \sqrt{g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right)}$, onde g a métrica euclidiana em U. Suponha que o sistema de equações de Lamé (3.75) *é satisfeito e considere as formas ω_i, $1 \leq i \leq 3$ e ω_{AB}, $1 \leq A, B \leq 6$, dadas por*

$$\begin{aligned} \omega_i &= l_i dy_i \\ \omega_{ij} &= -\frac{1}{l_j}\frac{\partial l_i}{\partial y_j} dy_i + \frac{1}{l_i}\frac{\partial l_j}{\partial y_i} dy_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{41} &= -\frac{l_2}{l_3} dy_1 & \omega_{61} &= -\frac{l_1}{2l_3^2} dy_1 \\ \omega_{42} &= -\frac{l_1}{l_3} dy_2 & \omega_{62} &= -\frac{l_2}{2l_3^2} dy_2 \\ \omega_{43} &= 0 & \omega_{63} &= \frac{1}{2l_3^2} dy_3 \end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned} \omega_{5i} &= \omega_i \\ \omega_{5\alpha} &= 0, \quad 4 \leq \alpha \leq 6 \end{aligned}$$

$$\omega_{64} = \frac{1}{l_1 l_2 l_3^2}\left(l_1^2 dl_3 + l_3^2 \frac{\partial l_3}{\partial y_1} dy_1 - l_1 l_3 \frac{\partial l_1}{\partial y_3} dy_3\right),$$

e pelas relações

$$\begin{aligned} &\omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, \quad 1 \leq A, B \leq 4 \\ &\omega_{A6} + \omega_{5A} = 0, \quad 1 \leq A \leq 4 \\ &\omega_{A5} + \omega_{6A} = 0, \quad 1 \leq A \leq 4 \\ &\omega_{55} + \omega_{66} = 0, \\ &\omega_{65} = \omega_{56} = 0. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Então, existe uma imersão $f : V \subset U \to L^5 \subset \mathbb{R}^6_1$ com metrica induzida plana e curvaturas principais distintas, e consequentemente, uma imersão conformemente plana com curvaturas principais distintas em uma forma espacial M^4_K.

Demonstração: A primeira parte já é dada pelo Teorema 3.5 e Corolário 3.2.

Para a segunda parte, precisamos verificar se as formas diferenciais dadas em (3.76) e pelas relações (3.77) satisfazem as equações de Maurer-Cartan.

Como fizemos anteriormente, introduziremos a notação:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \omega_{4i}, \\ \chi_i &= \omega_{6i}, \\ \nu &= \omega_{64}, \end{aligned}$$

com $1 \leq i \leq 3$. Então, pelas hipóteses (3.76) e (3.77), as equações de Maurer-Cartan reduzem-se a:

- Equações de Codazzi

$$\begin{cases} 0 = d\psi_i - \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \psi_j + \omega_i \wedge \nu, \\ 0 = d\omega_i - \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \omega_j, \\ 0 = d\chi_i - \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \chi_j - \psi_i \wedge \nu. \end{cases}$$

- Equações de Ricci

$$\begin{cases} 0 = \sum_{j=1}^{3} \psi_j \wedge \omega_j, \\ 0 = \sum_{j=1}^{3} \chi_j \wedge \omega_j, \\ d\nu = \sum_{j=1}^{3} \chi_j \wedge \psi_j. \end{cases}$$

- Equação de Gauss

$$-d\omega_{ij} + \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = \psi_i \wedge \psi_j + \omega_i \wedge \chi_j + \chi_i.$$

Para verificar as equações de Maurer-Cartan, utilizaremos algumas expressões, que serão bastante úteis nos cálculos que faremos:

Aplicando derivadas parciais na expressão

$$l_2^2 = l_1^2 + l_3^2$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l_1}{\partial y_1} &= \frac{l_2}{l_1}\frac{\partial l_2}{\partial y_1} - \frac{l_3}{l_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}, \\
\frac{\partial l_2}{\partial y_2} &= \frac{l_1}{l_2}\frac{\partial l_1}{\partial y_2} + \frac{l_3}{l_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}, \\
\frac{\partial l_3}{\partial y_3} &= \frac{l_2}{l_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_3} - \frac{l_1}{l_3}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Vamos então verificar as equações de Codazzi. Para a equação envolvendo $d\omega_i$, observamos inicialmente que

$$d\omega_i = dl_i \wedge dy_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial l_i}{\partial y_j} dy_j \wedge dy_i.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \omega_j &= \sum_{j=1}^{3} \left(-\frac{1}{l_j}\frac{\partial l_i}{\partial y_j} dy_i + \frac{1}{l_i}\frac{\partial l_j}{\partial y_i} dy_j \right) \wedge l_j dy_j \\
&= -\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial l_i}{\partial y_j} dy_i \wedge dy_j \\
&= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial l_i}{\partial y_j} dy_j \wedge dy_i \\
&= d\omega_i.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \omega_j.$$

Vamos agora verificar a equação de Codazzi para ψ_i

$$d\psi_i - \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \psi_j + \omega_i \wedge \nu = 0,$$

analisando cada valor de i separadamente:

- Para $i = 1$, temos $d\psi_1 - \sum_{j=1}^{3} \omega_{1j} \wedge \psi_j + \omega_1 \wedge \nu = d\psi_1 - \omega_{12} \wedge \psi_2 + \omega_1 \wedge \nu = E_1$.

  Portanto,

$$
\begin{aligned}
E_1 &= d\left(-\frac{l_2}{l_3}\right) \wedge dy_1 - \left(-\frac{1}{l_2}\frac{\partial l_1}{\partial y_2}dy_1 + \frac{1}{l_1}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}dy_2\right) \wedge \left(-\frac{l_1}{l_3}dy_2\right) \\
&\quad + (l_1 dy_1) \wedge \frac{1}{l_1 l_2 l_3^2}\left(l_1^2 dl_3 + l_3^2 \frac{\partial l_3}{\partial y_1}dy_1 - l_1 l_3 \frac{\partial l_1}{\partial y_3}dy_3\right) \\
&= \left(\frac{l_2 dl_3 - l_3 dl_2}{l_3^2}\right) \wedge dy_1 - \frac{l_1}{l_2 l_3}\frac{\partial l_1}{\partial y_2}dy_1 \wedge dy_2 + \frac{l_1^2}{l_2 l_3^2}dy_1 \wedge dl_3 \\
&\quad - \frac{l_1}{l_2 l_3}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}dy_1 \wedge dy_3 \\
&= \left(\frac{l_2}{l_3^2} - \frac{l_1^2}{l_2 l_3^2}\right) dl_3 \wedge dy_1 - \frac{1}{l_3}dl_2 \wedge dy_1 + \frac{l_1}{l_2 l_3}dl_1 \wedge dy_1 \\
&= \left(\frac{1}{l_2}dl_3 - \frac{1}{l_3}dl_2 + \frac{l_1}{l_2 l_3}dl_1\right) \wedge dy_1 \\
&= \frac{l_3 dl_3 - l_2 dl_2 + l_1 dl_1}{l_2 l_3} \wedge dy_1 \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

  onde a última igualdade decorre de $l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 = 0$.

- Para $i = 2$, temos $d\psi_2 - \sum_{j=1}^{3} \omega_{2j} \wedge \psi_j + \omega_2 \wedge \nu = d\psi_2 - \omega_{21} \wedge \psi_1 + \omega_2 \wedge \nu = E_2$.

  Portanto,

$$
\begin{aligned}
E_2 &= d\left(-\frac{l_1}{l_3}\right) \wedge dy_2 - \left(-\frac{1}{l_1}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}dy_2 + \frac{1}{l_2}\frac{\partial l_1}{\partial y_2}dy_1\right) \wedge \left(-\frac{l_2}{l_3}dy_1\right) \\
&\quad + (l_2 dy_2) \wedge \frac{1}{l_1 l_2 l_3^2}\left(l_1^2 dl_3 + l_3^2 \frac{\partial l_3}{\partial y_1}dy_1 - l_1 l_3 \frac{\partial l_1}{\partial y_3}dy_3\right) \\
&= \left(\frac{l_1 dl_3 - l_3 dl_1}{l_3^2}\right) \wedge dy_2 - \frac{l_2}{l_1 l_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}dy_2 \wedge dy_1 + \frac{l_1}{l_3^2}dy_2 \wedge dl_3 \\
&\quad + \frac{1}{l_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}dy_2 \wedge dy_1 - \frac{1}{l_3}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}dy_2 \wedge dy_3 \\
&= -\frac{1}{l_3}dl_1 \wedge dy_2 + \left(\frac{1}{l_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_1} - \frac{l_2}{l_1 l_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}\right) dy_2 \wedge dy_1 - \frac{1}{l_3}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}dy_2 \wedge dy_3 \\
&= -\frac{1}{l_3}dl_1 \wedge dy_2 - \frac{1}{l_3}\frac{\partial l_1}{\partial y_1}dy_2 \wedge dy_1 - \frac{1}{l_3}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}dy_2 \wedge dy_3 \\
&= -\frac{1}{l_3}dl_1 \wedge dy_2 + \frac{1}{l_3}dl_1 \wedge dy_2 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

- Para $i=3$, temos $d\psi_3 - \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \omega_{3j} \wedge \psi_j + \omega_3 \wedge \nu = -\omega_{31} \wedge \psi_1 - \omega_{32} \wedge \psi_2 + \omega_3 \wedge \nu = E_3$.

  Portanto,

$$
\begin{aligned}
E_3 &= -\left(-\frac{1}{l_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_1} dy_3 + \frac{1}{l_3}\frac{\partial l_1}{\partial y_3} dy_1\right) \wedge \left(-\frac{l_2}{l_3} dy_1\right) \\
&\quad -\left(-\frac{1}{l_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_2} dy_3 + \frac{1}{l_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_3} dy_2\right) \wedge \left(-\frac{l_1}{l_3} dy_2\right) \\
&\quad + (l_3 dy_3) \wedge \frac{1}{l_1 l_2 l_3^2}\left(l_1^2 dl_3 + l_3^2 \frac{\partial l_3}{\partial y_1} dy_1 - l_1 l_3 \frac{\partial l_1}{\partial y_3} dy_3\right) \\
&= -\frac{l_2}{l_1 l_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1} dy_3 \wedge dy_1 - \frac{l_1}{l_2 l_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_2} dy_3 \wedge dy_2 + \frac{l_1}{l_2 l_3} dy_3 \wedge dl_3 + \frac{l_3}{l_1 l_2} dy_3 \wedge dy_1 \\
&= -\frac{l_1}{l_2 l_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1} dy_3 \wedge dy_1 - \frac{l_1}{l_2 l_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_2} dy_3 \wedge dy_2 + \frac{l_1}{l_2 l_3} dy_3 \wedge dl_3 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Procedendo da mesma forma, faremos a verificação para a a equação de Codazzi:

$$
d\chi_i - \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \chi_j - \psi_i \wedge \nu = 0.
$$

- Para $i=1$, temos $d\chi_1 - \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \omega_{1j} \wedge \chi_j - \psi_1 \wedge \nu = d\chi_1 - \omega_{12} \wedge \chi_2 - \omega_{13} \wedge \chi_3 - \psi_1 \wedge \nu = F_1$.

  Portanto,

$$
\begin{aligned}
F_1 &= d\left(-\frac{l_1}{2l_3^2}\right) \wedge dy_1 - \left(-\frac{1}{l_2}\frac{\partial l_1}{\partial y_2} dy_1 + \frac{1}{l_1}\frac{\partial l_2}{\partial y_1} dy_2\right) \wedge \left(-\frac{l_2}{2l_3^2} dy_2\right) \\
&\quad -\left(-\frac{1}{l_3}\frac{\partial l_1}{\partial y_3} dy_1 + \frac{1}{l_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_1} dy_3\right) \wedge \left(\frac{1}{2l_3} dy_3\right) \\
&\quad -\left(-\frac{l_2}{l_3} dy_1\right) \wedge \frac{1}{l_1 l_2 l_3^2}\left(l_1^2 dl_3 + l_3^2 \frac{\partial l_3}{\partial y_1} dy_1 - l_1 l_3 \frac{\partial l_1}{\partial y_3} dy_3\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{l_3^2 dl_1 - 2 l_1 l_3 dl_3}{l_3^4}\right) \wedge dy_1 - \frac{1}{2l_3^2}\frac{\partial l_1}{\partial y_2} dy_1 \wedge dy_2 + \frac{1}{2l_3^2}\frac{\partial l_1}{\partial y_3} dy_1 \wedge dy_3 \\
&\quad \frac{l_1}{l_3^3} dy_1 \wedge dl_3 - \frac{1}{l_3^2}\frac{\partial l_1}{\partial y_3} dy_1 \wedge dy_3 \\
&= -\frac{1}{2l_3^2} dl_1 \wedge dy_1 + \frac{l_1}{l_3^3} dl_3 \wedge dy_1 - \frac{1}{2l_3^2}\frac{\partial l_1}{\partial y_2} dy_1 \wedge dy_2 - \frac{1}{2l_3^2}\frac{\partial l_1}{\partial y_3} dy_1 \wedge dy_3 \\
&\quad + \frac{l_1}{l_3^3} dy_1 \wedge dl_3 \\
&= -\frac{1}{2l_3^2} dl_1 \wedge dy_1 + \frac{l_1}{l_3^3} dl_3 \wedge dy_1 + \frac{1}{2l_3^2} dl_1 \wedge dy_1 - \frac{l_1}{l_3^3} dl_3 \wedge dy_1 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

- Para $i=2$, temos $d\chi_2-\sum_{j=1}^{3}\omega_{2j}\wedge\chi_j-\psi_2\wedge\nu = d\chi_2-\omega_{21}\wedge\chi_1-\omega_{23}\wedge\chi_3-\psi_2\wedge\nu = F_2$.

  Portanto,

$$
\begin{aligned}
F_2 &= d\left(-\frac{l_2}{2l_3^2}\right)\wedge dy_2-\left(-\frac{1}{l_1}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}dy_2+\frac{1}{l_2}\frac{\partial l_1}{\partial y_2}dy_1\right)\wedge\left(-\frac{l_1}{2l_3^2}dy_1\right)\\
&\quad-\left(-\frac{1}{l_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_3}dy_2+\frac{1}{l_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}dy_3\right)\wedge\left(\frac{1}{2l_3}dy_3\right)\\
&\quad-\left(-\frac{l_1}{l_3}dy_2\right)\wedge\frac{1}{l_1l_2l_3^2}\left(l_1^2dl_3+l_3^2\frac{\partial l_3}{\partial y_1}dy_1-l_1l_3\frac{\partial l_1}{\partial y_3}dy_3\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{l_3^2dl_2-2l_2l_3dl_3}{l_3^4}\right)\wedge dy_2-\frac{1}{2l_3^2}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}dy_2\wedge dy_1+\frac{1}{2l_3^2}\frac{\partial l_2}{\partial y_3}dy_2\wedge dy_3\\
&\quad\frac{l_1^2}{l_2l_3^2}dy_2\wedge dl_3+\frac{1}{l_2l_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}dy_2\wedge dy_1-\frac{l_1}{l_2l_3^2}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}dy_2\wedge dy_3\\
&= -\frac{1}{2l_3^2}dl_2\wedge dy_2+\frac{1}{l_2l_3}dl_3\wedge dy_2-\frac{1}{2l_3^2}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}dy_2\wedge dy_1+\frac{1}{2l_3^2}\frac{\partial l_2}{\partial y_3}dy_2\wedge dy_3\\
&\quad+\frac{1}{l_2l_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}dy_2\wedge dy_1-\frac{l_1}{l_2l_3^2}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}dy_2\wedge dy_3\\
&= -\frac{1}{2l_3^2}dl_2\wedge dy_2+\frac{1}{l_2l_3}dl_3\wedge dy_2-\frac{1}{2l_3^2}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}dy_2\wedge dy_1\\
&\quad-\frac{1}{2l_3^2}\frac{\partial l_2}{\partial y_3}dy_2\wedge dy_3+\frac{1}{l_3^2}\frac{\partial l_2}{\partial y_3}dy_2\wedge dy_3+\frac{1}{l_2l_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}dy_2\wedge dy_1-\frac{l_1}{l_2l_3^2}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}dy_2\wedge dy_3\\
&= -\frac{1}{2l_3^2}dl_2\wedge dy_2+\frac{1}{l_2l_3}dl_3\wedge dy_2+\frac{1}{2l_3^2}dl_2\wedge dy_2+\left(\frac{1}{l_3^2}\frac{\partial l_2}{\partial y_3}-\frac{l_1}{l_2l_3^2}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}\right)dy_2\wedge dy_3\\
&\quad+\frac{1}{l_2l_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}dy_2\wedge dy_1\\
&= \frac{1}{l_2l_3}dl_3\wedge dy_2+\frac{1}{l_2l_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_3}dy_2\wedge dy_3+\frac{1}{l_2l_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}dy_2\wedge dy_1\\
&= \frac{1}{l_2l_3}dl_3\wedge dy_2-\frac{1}{l_2l_3}dl_3\wedge dy_2\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

- Para $i=3$ temos $d\chi_3-\sum_{j=1}^{3}\omega_{3j}\wedge\chi_j-\psi_3\wedge\nu = d\chi_3-\omega_{31}\wedge\chi_1-\omega_{32}\wedge\chi_2 = F_3$.

  Portanto,

$$
\begin{aligned}
F_3 &= d\left(\frac{1}{2l_3}\right)\wedge dy_3-\left(-\frac{1}{l_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}dy_3+\frac{1}{l_3}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}dy_1\right)\wedge\left(-\frac{l_1}{2l_3^2}dy_1\right)\\
&\quad-\left(-\frac{1}{l_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}dy_3+\frac{1}{l_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_3}dy_2\right)\wedge\left(-\frac{l_2}{2l_3^2}dy_2\right)\\
&= -\frac{1}{2l_3^2}dl_3\wedge dy_3-\frac{1}{2l_3^2}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}dy_3\wedge dy_1-\frac{1}{2l_3^2}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}dy_3\wedge dy_2\\
&= -\frac{1}{2l_3^2}dl_3\wedge dy_3+\frac{1}{2l_3^2}dl_3\wedge dy_3\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

As equações de Ricci

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3}\psi_j\wedge\omega_j &= 0,\\ \sum_{j=1}^{3}\chi_j\wedge\omega_j &= 0,\end{aligned}$$

são trivialmente satisfeitas. Para a próxima

$$d\nu=\sum_{j=1}^{3}\chi_j\wedge\psi_j,$$

devemos ter $d\nu=0$. Pela linearidade de $d\nu$, basta verificar aplicando nos vetores coordenados $\frac{\partial}{\partial y_i}$. Lembrando que

$$\nu=\frac{1}{l_1l_2l_3^2}\left(l_1^2dl_3+l_3^2\frac{\partial l_3}{\partial y_1}dy_1-l_1l_3\frac{\partial l_1}{\partial y_3}dy_3\right).$$

Temos,

$$\begin{aligned}\nu\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right) &= \frac{l_2}{l_1l_3^2}\frac{\partial l_3}{\partial y_1},\\ \nu\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right) &= \frac{l_1}{l_2l_3^2}\frac{\partial l_3}{\partial y_2},\\ \nu\left(\frac{\partial}{\partial y_3}\right) &= \frac{l_1}{l_2l_3^2}\frac{\partial l_3}{\partial y_3}-\tfrac{1}{l_2l_3}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}.\end{aligned}\tag{3.79}$$

Usando a fórmula $d\nu(x,y)=x\nu(y)-y\nu(x)-\nu([x,y])$, temos que:

$$d\nu\left(\frac{\partial}{\partial y_i},\frac{\partial}{\partial y_j}\right)=\frac{\partial}{\partial y_i}\nu\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)-\frac{\partial}{\partial y_j}\nu\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right),$$

já que o colchete se anula. Portanto

$$\begin{aligned}d\nu\left(\frac{\partial}{\partial y_2},\frac{\partial}{\partial y_1}\right) &= \frac{\partial}{\partial y_2}\nu\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)-\frac{\partial}{\partial y_1}\nu\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{l_2}{l_1l_3^2}\right)\frac{\partial l_3}{\partial y_1}+\frac{l_2}{l_1l_3^2}\frac{\partial^2 l_3}{\partial y_2\partial y_1}-\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{l_1}{l_2l_3^2}\right)\frac{\partial l_3}{\partial y_2}-\frac{l_1}{l_2l_3^2}\frac{\partial^2 l_3}{\partial y_1\partial y_2}\\ &= \frac{1}{l_1^2l_3^4}\left[\frac{\partial l_2}{\partial y_2}l_1l_3^2-l_2\left(\frac{\partial l_1}{\partial y_2}l_3^2+2l_3l_1\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\right)\right]\frac{\partial l_3}{\partial y_1}+\left(\frac{l_2}{l_1l_3^2}-\frac{l_1}{l_2l_3^2}\right)\frac{\partial^2 l_3}{\partial y_2\partial y_1}\\ &\quad -\frac{1}{l_2^2l_3^4}\left[\frac{\partial l_1}{\partial y_1}l_2l_3^2-l_1\left(\frac{\partial l_2}{\partial y_1}l_3^2+2l_3l_2\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\right)\right]\frac{\partial l_3}{\partial y_2}.\end{aligned}$$

Usando a equação de Lamé $\frac{\partial^2 l_3}{\partial y_1\partial y_2}=\frac{1}{l_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\frac{\partial l_1}{\partial y_2}+\frac{1}{l_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}$, temos

$$\begin{aligned}d\nu\left(\frac{\partial}{\partial y_2},\frac{\partial}{\partial y_1}\right) &= = \frac{1}{l_1l_3^2}\frac{\partial l_2}{\partial y_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}-\frac{l_2}{l_1^2l_3^2}\frac{\partial l_1}{\partial y_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}-\frac{2l_2}{l_1l_3^3}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\\ &\quad +\frac{1}{l_1l_2}\left(\frac{1}{l_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\frac{\partial l_1}{\partial y_2}+\frac{1}{l_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}\right)-\frac{1}{l_2l_3^2}\frac{\partial l_1}{\partial y_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}+\frac{l_1}{l_2^2l_3^2}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\\ &\quad +\frac{2l_1}{l_2l_3^3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}.\end{aligned}$$

Aplicando (3.78),

$$
\begin{aligned}
d\nu\left(\frac{\partial}{\partial y_2},\frac{\partial}{\partial y_1}\right) &= \frac{1}{l_1 l_3^2}\left(\frac{l_1}{l_2}\frac{\partial l_1}{\partial y_2}+\frac{l_3}{l_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\right)\frac{\partial l_3}{\partial y_1}-\frac{l_2}{l_1^2 l_3^2}\frac{\partial l_1}{\partial y_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}-\frac{2l_2}{l_1 l_3^3}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\\
&+\frac{1}{l_1^2 l_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\frac{\partial l_1}{\partial y_2}+\frac{1}{l_1 l_2^2}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}-\frac{1}{l_2 l_3^2}\left(\frac{l_2}{l_1}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}-\frac{l_3}{l_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\right)\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\\
&+\frac{l_1}{l_2^2 l_3^2}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}+\frac{2l_1}{l_2 l_3^3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\\
&= \frac{\partial l_1}{\partial y_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\left(\frac{1}{l_2 l_3^2}-\frac{l_2}{l_1^2 l_3^2}+\frac{1}{l_1^2 l_2}\right)+\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\left(\frac{2}{l_1 l_2 l_3}-\frac{2l_2}{l_1 l_3^3}+\frac{2l_1}{l_2 l_3^3}\right)\\
&+\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}\left(\frac{1}{l_1 l_2^2}-\frac{1}{l_1 l_3^2}+\frac{l_1}{l_2^2 l_3^2}\right)\\
&= \frac{\partial l_1}{\partial y_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\left(\frac{l_1^2-l_2^2+l_3^2}{l_1^2 l_2 l_3^2}\right)+2\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\left(\frac{l_3^2-l_2^2+l_1^2}{l_1 l_2 l_3^3}\right)\\
&+\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}\left(\frac{l_3^2-l_2^2+l_1^2}{l_1 l_2^2 l_3^2}\right)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

O que implica $d\nu\left(\frac{\partial}{\partial y_2},\frac{\partial}{\partial y_1}\right)=0$.

Analogamente, por (3.79) temos que

$$
\begin{aligned}
d\nu\left(\frac{\partial}{\partial y_1},\frac{\partial}{\partial y_3}\right) &= \frac{\partial}{\partial y_1}\nu\left(\frac{\partial}{\partial y_3}\right)-\frac{\partial}{\partial y_3}\nu\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{l_1}{l_2 l_3^2}\right)\frac{\partial l_3}{\partial y_3}+\frac{l_1}{l_2 l_3^2}\frac{\partial^2 l_3}{\partial y_1\partial y_3}-\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{1}{l_2 l_3}\right)\frac{\partial l_1}{\partial y_3}-\frac{1}{l_2 l_3}\frac{\partial^2 l_1}{\partial y_1\partial y_3}\\
&-\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{l_2}{l_1 l_3^2}\right)\frac{\partial l_3}{\partial y_1}-\frac{l_2}{l_1 l_3^2}\frac{\partial^2 l_3}{\partial y_3\partial y_1}\\
&= \frac{1}{l_2^2 l_3^4}\left[\frac{\partial l_1}{\partial y_1}l_2 l_3^2-l_1\left(\frac{\partial l_2}{\partial y_1}l_3^2+2l_3 l_2\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\right)\right]\frac{\partial l_3}{\partial y_3}+\frac{l_1}{l_2 l_3^2}\frac{\partial^2 l_3}{\partial y_1\partial y_3}\\
&+\frac{1}{l_2^2 l_3^2}\left(\frac{\partial l_2}{\partial y_1}l_3+l_2\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\right)\frac{\partial l_1}{\partial y_3}-\frac{1}{l_2 l_3}\frac{\partial^2 l_1}{\partial y_1\partial y_3}\\
&-\frac{1}{l_1^2 l_3^4}\left[\frac{\partial l_2}{\partial y_3}l_1 l_3^2-l_2\left(\frac{\partial l_1}{\partial y_3}l_3^2+2l_3 l_1\frac{\partial l_3}{\partial y_3}\right)\right]\frac{\partial l_3}{\partial y_1}-\frac{l_2}{l_1 l_3^2}\frac{\partial^2 l_3}{\partial y_3\partial y_1}\\
&= \frac{1}{l_2 l_3^2}\frac{\partial l_1}{\partial y_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_3}-\frac{l_1}{l_2^2 l_3^2}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_3}-\frac{2l_1}{l_2 l_3^3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_3}+\frac{1}{l_2^2 l_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}\\
&\frac{1}{l_2 l_3^2}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}-\frac{1}{l_1 l_3^2}\frac{\partial l_2}{\partial y_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}+\frac{l_2}{l_1^2 l_3^2}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}+\frac{2l_2}{l_1 l_3^3}\frac{\partial l_3}{\partial y_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\\
&-\frac{1}{l_1 l_2 l_3}\left(l_1\frac{\partial^2 l_1}{\partial y_1\partial y_3}+l_3\frac{\partial^2 l_3}{\partial y_3\partial y_1}\right).
\end{aligned}
$$

Segue de (3.78) e da equação de Lamé $\dfrac{\partial^2 l_2}{\partial y_3 \partial y_1} = \dfrac{1}{l_3}\dfrac{\partial l_2}{\partial y_3}\dfrac{\partial l_3}{\partial y_1} + \frac{1}{l_1}\dfrac{\partial l_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial l_1}{\partial y_3}$ que

$$\begin{aligned}
l_3\frac{\partial^2 l_3}{\partial y_3 \partial y_1} + l_1\frac{\partial^2 l_1}{\partial y_1 \partial y_3} &= -\frac{\partial l_1}{\partial y_1}\frac{\partial l_1}{\partial y_3} + \frac{\partial l_2}{\partial y_1}\frac{\partial l_2}{\partial y_3} - \frac{\partial l_3}{\partial y_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_3} + l_2\frac{\partial^2 l_2}{\partial y_3 \partial y_1} \\
&= -\left(\frac{l_2}{l_1}\frac{\partial l_2}{\partial y_1} - \frac{l_3}{l_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\right)\frac{\partial l_1}{\partial y_3} + \frac{\partial l_2}{\partial y_1}\frac{\partial l_2}{\partial y_3} - \frac{\partial l_3}{\partial y_1}\left(\frac{l_2}{l_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_3} - \frac{l_1}{l_3}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}\right) \\
&\quad + l_2\left(\frac{1}{l_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1} + \frac{1}{l_1}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}\right) \\
&= \frac{\partial l_2}{\partial y_1}\frac{\partial l_2}{\partial y_3} + \frac{l_2^2}{l_1 l_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}.
\end{aligned}$$

Com isso, temos que:

$$\begin{aligned}
d\nu\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_3}\right) &= \frac{1}{l_2 l_3^2}\left(\frac{l_2}{l_1}\frac{\partial l_2}{\partial y_1} - \frac{l_3}{l_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\right)\frac{\partial l_3}{\partial y_3} - \frac{l_1}{l_2^2 l_3^2}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_3} + \frac{2}{l_1 l_2 l_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_3} \\
&\quad + \frac{1}{l_2^2 l_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}\frac{\partial l_1}{\partial y_3} + \frac{1}{l_2 l_3^2}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\frac{\partial l_1}{\partial y_3} - \frac{1}{l_1 l_3^2}\frac{\partial l_2}{\partial y_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1} + \frac{l_2}{l_1^2 l_3^2}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1} \\
&\quad - \frac{1}{l_1 l_2 l_3}\left(\frac{\partial l_2}{\partial y_1}\frac{\partial l_2}{\partial y_3} + \frac{l_2^2}{l_1 l_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}\right) \\
&= \left(\frac{1}{l_1 l_3^2} - \frac{l_1}{l_2^2 l_3^2}\right)\frac{\partial l_3}{\partial y_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_1} + \left(-\frac{1}{l_1 l_2 l_3} + \frac{2}{l_1 l_2 l_3}\right)\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_3} \\
&\quad - \frac{1}{l_1 l_2 l_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}\frac{\partial l_2}{\partial y_3} + \frac{1}{l_2^2 l_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}\frac{\partial l_1}{\partial y_3} + \frac{1}{l_2 l_3^2}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\frac{\partial l_1}{\partial y_3} - \frac{1}{l_1 l_3^2}\frac{\partial l_2}{\partial y_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1},
\end{aligned}$$

aplicando novamente (3.78) obtemos

$$\begin{aligned}
d\nu\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_3}\right) &= \frac{1}{l_1 l_2^2}\left(\frac{l_2}{l_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_3} - \frac{l_1}{l_3}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}\right)\frac{\partial l_2}{\partial y_1} + \frac{1}{l_1 l_2 l_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\left(\frac{l_2}{l_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_3} - \frac{l_1}{l_3}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}\right) \\
&\quad - \frac{1}{l_1 l_2 l_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}\frac{\partial l_2}{\partial y_3} + \frac{1}{l_2^2 l_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}\frac{\partial l_1}{\partial y_3} + \frac{1}{l_2 l_3^2}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\frac{\partial l_1}{\partial y_3} - \frac{1}{l_1 l_3^2}\frac{\partial l_2}{\partial y_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $d\nu\left(\dfrac{\partial}{\partial y_1}, \dfrac{\partial}{\partial y_3}\right) = 0$. Restando mostrar agora que $d\nu\left(\dfrac{\partial}{\partial y_2}, \dfrac{\partial}{\partial y_3}\right) = 0$. De forma análoga,

$$\begin{aligned}
d\nu\left(\frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3}\right) &= \frac{\partial}{\partial y_2}\nu\left(\frac{\partial}{\partial y_3}\right) - \frac{\partial}{\partial y_3}\nu\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{l_1}{l_2 l_3^2}\right)\frac{\partial l_3}{\partial y_3} + \frac{l_1}{l_2 l_3^2}\frac{\partial^2 l_3}{\partial y_2 \partial y_3} - \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{1}{l_2 l_3}\right)\frac{\partial l_1}{\partial y_3} - \frac{1}{l_2 l_3}\frac{\partial^2 l_1}{\partial y_2 \partial y_3} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{l_1}{l_2 l_3^2}\right)\frac{\partial l_3}{\partial y_2} - \frac{l_1}{l_2 l_3^2}\frac{\partial^2 l_3}{\partial y_3 \partial y_2} \\
&= \frac{1}{l_2^2 l_3^4}\left[\frac{\partial l_1}{\partial y_2} l_2 l_3^2 - l_1\left(\frac{\partial l_2}{\partial y_2} l_3^2 + 2 l_2 l_3 \frac{\partial l_3}{\partial y_2}\right)\right]\frac{\partial l_3}{\partial y_3} \\
&\quad + \frac{1}{l_2^2 l_3^2}\left(\frac{\partial l_2}{\partial y_2} l_3 + l_2\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\right)\frac{\partial l_1}{\partial y_3} - \frac{1}{l_2 l_3}\frac{\partial^2 l_1}{\partial y_2 \partial y_3} \\
&\quad - \frac{1}{l_2^2 l_3^4}\left[\frac{\partial l_1}{\partial y_3} l_2 l_3^2 - l_1\left(\frac{\partial l_2}{\partial y_3} l_3^2 + 2 l_2 l_3 \frac{\partial l_3}{\partial y_3}\right)\right]\frac{\partial l_3}{\partial y_2}.
\end{aligned}$$

Usando a equação de Lamé $\dfrac{\partial^2 l_1}{\partial y_2 \partial y_3} = \frac{1}{l_2}\dfrac{\partial l_1}{\partial y_2}\dfrac{\partial l_2}{\partial y_3} + \frac{1}{l_3}\dfrac{\partial l_1}{\partial y_3}\dfrac{\partial l_3}{\partial y_2}$, temos

$$\begin{aligned}
d\nu\left(\frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3}\right) &= \frac{1}{l_2 l_3^2}\frac{\partial l_1}{\partial y_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_3} - \frac{l_1}{l_2^2 l_3^2}\frac{\partial l_2}{\partial y_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_3} + \frac{1}{l_2^2 l_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_2}\frac{\partial l_1}{\partial y_3} + \frac{1}{l_2 l_3^2}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\frac{\partial l_1}{\partial y_3} \\
&\quad - \frac{1}{l_2 l_3}\left(\frac{1}{l_2}\frac{\partial l_1}{\partial y_2}\frac{\partial l_2}{\partial y_3} + \frac{1}{l_3}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\right) - \frac{1}{l_2 l_3^2}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_2} + \frac{l_1}{l_2^2 l_3^2}\frac{\partial l_2}{\partial y_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}.
\end{aligned}$$

Aplicando (3.78), obtemos

$$\begin{aligned}
d\nu\left(\frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3}\right) &= \left[\frac{1}{l_2 l_3^2}\frac{\partial l_1}{\partial y_2} - \frac{l_1}{l_2^2 l_3^2}\left(\frac{l_1}{l_2}\frac{\partial l_1}{\partial y_2} + \frac{l_3}{l_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\right)\right]\left(\frac{l_2}{l_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_3} - \frac{l_1}{l_3}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}\right) \\
&\quad \frac{1}{l_2^2 l_3}\left(\frac{l_1}{l_2}\frac{\partial l_1}{\partial y_2} + \frac{l_3}{l_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\right)\frac{\partial l_1}{\partial y_3} - \frac{1}{l_2^2 l_3}\frac{\partial l_1}{\partial y_2}\frac{\partial l_2}{\partial y_3} - \frac{1}{l_2 l_3^2}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_2} \\
&\quad + \frac{l_1}{l_2^2 l_3^2}\frac{\partial l_2}{\partial y_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_2} \\
&= \left(\frac{1}{l_3^3} - \frac{l_1^2}{l_2^2 l_3^3} - \frac{1}{l_2^2 l_3}\right)\frac{\partial l_1}{\partial y_2}\frac{\partial l_2}{\partial y_3} + \left(-\frac{l_1}{l_2 l_3^3} + \frac{l_1^3}{l_2^3 l_3^3} + \frac{l_1}{l_2^3 l_3}\right)\frac{\partial l_1}{\partial y_2}\frac{\partial l_1}{\partial y_3} \\
&\quad \left(-\frac{l_1}{l_2^2 l_3^2} + \frac{l_1}{l_2^2 l_3^2}\right)\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\frac{\partial l_2}{\partial y_3} + \left(\frac{l_1^2}{l_3^2 l_2^3} + \frac{1}{l_2^3} - \frac{1}{l_2 l_3^2}\right)\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\frac{\partial l_1}{\partial y_3} \\
&= \left(\frac{l_2^2 - l_1^2 - l_3^2}{l_2^2 l_3^3}\right)\frac{\partial l_1}{\partial y_2}\frac{\partial l_2}{\partial y_3} + \left(\frac{-l_2^2 + l_1^2 + l_3^2}{l_2^3 l_3^3}\right) l_1 \frac{\partial l_1}{\partial y_2}\frac{\partial l_1}{\partial y_3} \\
&\quad \left(\frac{l_1^2 + l_3^2 - l_2^2}{l_3^2 l_2^3}\right)\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\frac{\partial l_1}{\partial y_3} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vamos agora verificar a equação de Gauss:

$$\rho_{ij} = -d\omega_{ij} + \sum_{s=1}^{3}\omega_{is}\wedge\omega_{sj} = \psi_i \wedge \psi_j + \omega_i \wedge \chi_j + \chi_i \wedge \omega_j.$$

Começaremos pelo lado direito. Imediatamente, se $i = j$ temos que

$$\psi_i \wedge \psi_j + \omega_i \wedge \chi_j + \chi_i \wedge \omega_j = 0.$$

Considerando índices distintos:

- Para $i = 1$ e $j = 2$ temos $\psi_1 \wedge \psi_2 + \omega_1 \wedge \chi_2 + \chi_1 \wedge \omega_2 = G_1$ e então

$$\begin{aligned}
G_1 &= \left(-\frac{l_2}{l_3}dy_1\right) \wedge \left(-\frac{l_1}{l_3}dy_2\right) + (l_1 dy_1) \wedge \left(-\frac{l_2}{2l_3^2}dy_2\right) + \left(-\frac{l_1}{2l_3^2}dy_1\right) \wedge (l_2 dy_2) \\
&= \left(\frac{l_1 l_2}{l_3^2} - \frac{l_1 l_2}{2l_3^2} - \frac{l_1 l_2}{2l_3^2}\right) dy_1 \wedge dy_2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

- Para $i=1$ e $j=3$ temos $\omega_1\wedge\chi_3+\chi_1\wedge\omega_3=G_2$. Portanto,

$$\begin{aligned} G_2 &= (l_1dy_1)\wedge\left(\frac{1}{2l_3}dy_3\right)+\left(-\frac{l_1}{2l_3^2}dy_1\right)\wedge(l_3dy_3)\\ &= 0. \end{aligned}$$

- Para $i=2$ e $j=3$ temos $\omega_2\wedge\chi_3+\chi_2\wedge\omega_3=G_3$. Portanto,

$$\begin{aligned} G_3 &= (l_2dy_2)\wedge\left(\frac{1}{2l_3}dy_3\right)+\left(-\frac{l_2}{2l_3^2}dy_2\right)\wedge(l_3dy_3)\\ &= 0. \end{aligned}$$

Como mudamos apenas o sinal ao trocar i por j segue que

$$\psi_i\wedge\psi_j+\omega_i\wedge\chi_j+\chi_i\wedge\omega_j=0.$$

Para todo i e j. Dessa forma, basta mostrar agora que

$$-d\omega_{ij}+\sum_{s=1}^{3}\omega_{is}\wedge\omega_{sj}=0,\qquad\forall\ \ i,\ j.$$

Que é equivalente a

$$d\omega_{ij}-\sum_{s=1}^{3}\omega_{is}\wedge\omega_{sj}=0,\qquad\forall\ \ i,\ j. \tag{3.80}$$

Imediatamente temos que, quando $i=j$ a expressão vale. Considere então os índices distintos i, j e k. Então,

$$\begin{aligned} d\omega_{ij} &= d\left(-\frac{1}{l_j}\frac{\partial l_i}{\partial y_j}\right)\wedge dy_i+d\left(\frac{1}{l_i}\frac{\partial l_j}{\partial y_i}\right)\wedge dy_j\\ &= \frac{\partial}{\partial y_j}\left(-\frac{1}{l_j}\frac{\partial l_i}{\partial y_j}\right)dy_j\wedge dy_i+\frac{\partial}{\partial y_k}\left(-\frac{1}{l_j}\frac{\partial l_i}{\partial y_j}\right)dy_k\wedge dy_i\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{l_i}\frac{\partial l_j}{\partial y_i}\right)dy_i\wedge dy_j+\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{1}{l_i}\frac{\partial l_j}{\partial y_i}\right)dy_k\wedge dy_j\\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{1}{l_j}\frac{\partial l_i}{\partial y_j}\right)+\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{l_i}\frac{\partial l_j}{\partial y_i}\right)\right]dy_i\wedge dy_j+\left[\frac{1}{l_j}\frac{\partial^2 l_i}{\partial y_k\partial y_j}-\frac{1}{l_j^2}\frac{\partial l_j}{\partial y_k}\frac{\partial l_i}{\partial y_j}\right]dy_i\wedge dy_k\\ &\quad+\left[\frac{1}{l_i}\frac{\partial^2 l_j}{\partial y_k\partial y_i}-\frac{1}{l_i^2}\frac{\partial l_i}{\partial y_k}\frac{\partial l_j}{\partial y_i}\right]dy_k\wedge dy_j. \end{aligned}$$

Por outro lado, ainda considerando os índices distintos i, j e k, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{3}\omega_{is}\wedge\omega_{sj} &= \omega_{ik}\wedge\omega_{kj}\\ &= \left(-\frac{1}{l_k}\frac{\partial l_i}{\partial y_k}dy_i+\frac{1}{l_i}\frac{\partial l_k}{\partial y_i}dy_k\right)\wedge\left(-\frac{1}{l_j}\frac{\partial l_k}{\partial y_j}dy_k+\frac{1}{l_k}\frac{\partial l_j}{\partial y_k}dy_j\right)\\ &= -\frac{1}{l_k^2}\frac{\partial l_i}{\partial y_k}\frac{\partial l_j}{\partial y_k}dy_i\wedge dy_j+\frac{1}{l_kl_j}\frac{\partial l_i}{\partial y_k}\frac{\partial l_k}{\partial y_j}dy_i\wedge dy_k+\frac{1}{l_il_k}\frac{\partial l_k}{\partial y_i}\frac{\partial l_j}{\partial y_k}dy_k\wedge dy_j. \end{aligned}$$

Portanto, para que (3.80) seja satisfeita, devemos ter:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{1}{l_j}\frac{\partial l_i}{\partial y_j}\right)+\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{l_i}\frac{\partial l_j}{\partial y_i}\right)+\frac{1}{l_k^2}\frac{\partial l_i}{\partial y_k}\frac{\partial l_j}{\partial y_k} &= 0,\\
\frac{1}{l_j}\frac{\partial^2 l_i}{\partial y_k\partial y_j}-\frac{1}{l_j^2}\frac{\partial l_j}{\partial y_k}\frac{\partial l_i}{\partial y_j}-\frac{1}{l_k l_j}\frac{\partial l_i}{\partial y_k}\frac{\partial l_k}{\partial y_j} &= 0,\\
\frac{1}{l_i}\frac{\partial^2 l_j}{\partial y_k\partial y_i}-\frac{1}{l_i^2}\frac{\partial l_i}{\partial y_k}\frac{\partial l_j}{\partial y_i}-\frac{1}{l_i l_k}\frac{\partial l_k}{\partial y_i}\frac{\partial l_j}{\partial y_k} &= 0.
\end{aligned}
$$

Variando os índices, temos exatamente as equações de Lamé (3.75):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l_1}{\partial y_2\partial y_3} &= \frac{1}{l_2}\frac{\partial l_1}{\partial y_2}\frac{\partial l_2}{\partial y_3}+\frac{1}{l_3}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\\
\frac{\partial^2 l_2}{\partial y_3\partial y_1} &= \frac{1}{l_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}+\frac{1}{l_1}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}\\
\frac{\partial^2 l_3}{\partial y_1\partial y_2} &= \frac{1}{l_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\frac{\partial l_1}{\partial y_2}+\frac{1}{l_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}\\
0 &= \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{1}{l_2}\frac{\partial l_1}{\partial y_2}\right)+\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{1}{l_1}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}\right)+\frac{1}{l_3^2}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}\frac{\partial l_2}{\partial y_3}\\
0 &= \frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{1}{l_3}\frac{\partial l_3}{\partial y_3}\right)+\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{1}{l_2}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\right)+\frac{1}{l_1^2}\frac{\partial l_2}{\partial y_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\\
0 &= \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{1}{l_1}\frac{\partial l_3}{\partial y_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{1}{l_3}\frac{\partial l_1}{\partial y_3}\right)+\frac{1}{l_2^2}\frac{\partial l_3}{\partial y_2}\frac{\partial l_1}{\partial y_2}
\end{aligned}
$$

E dessa forma, verifica-se que Maurer-Cartan é satisfeita.

Portanto, pelo teorema fundamental das subvariedades, existe uma imersão $f : M^3 \to \mathbb{R}^6_1$ e uma aplicação $F : M^3 \to O_1(6)$, o grupo das transformações ortogonais de $\mathbb{R}^6_1$, que para cada $p \in M^3$ associa uma base pseudo-ortonormal $\{n_1, \ldots, n_6\}$ de vetores em $\mathbb{R}^6_1$ de forma que

$$
\begin{cases}
\langle n_A, n_B\rangle = \delta_{AB}, & 1 \leq A, B \leq 4\\
\langle n_A, n_5\rangle = \langle n_A, n_6\rangle = 0, & 1 \leq A \leq 4\\
\langle n_5, n_6\rangle = 1, & \\
\langle n_5, n_5\rangle = \langle n_6, n_6\rangle = 0. &
\end{cases}
$$

Além disso, $\{n_1, n_2, n_3\}$ formam uma base para o espaço tangente de f e $\{n_4, n_5, n_6\}$ formam uma base para o espaço normal ao espaço tangente de f. Temos ainda que as formas ω_i e ω_{AB} estão relacionadas aos vetores n_A pelas relações:

$$
\begin{aligned}
df &= \sum_{i=1}^{3}\omega_i n_i,\\
dn_A &= \sum_{B=1}^{6}\omega_{AB} n_B.
\end{aligned}
$$

Como $\omega_{5i} = \omega_i$ e $\omega_{5\alpha} = 0$ temos que

$$dn_5 = \sum_{B=1}^{6} \omega_{5B} n_B = \sum_{i=1}^{3} \omega_i n_i = df.$$

Portanto, $dn_5 = df$ o que implica

$$n_5 = f + v,$$

onde $v \in \mathbb{R}^6_1$ é um vetor contante. Fixado $p_0 \in M^3$, podemos escolher nossa condição inicial de forma que $f(p_0) = n_5(p_0)$ o que implica em $v = 0$. Então

$$f(p) = n_5(p),$$

para todo $p \in M^3$. Como n_5 é normal ao espaço tangente de f, concluímos que

$$\langle df, f \rangle = 0,$$

implicando que $\langle f, f \rangle$ é constante. Escolhendo a condição inicial tal que $\langle f(p_0), f(p_0) \rangle = 0$ concluímos que

$$f(p) \in L^5,$$

para todo $p \in M^3$. Portanto, $f : M^3 \to L^5 \subset \mathbb{R}^6_1$.

Denotando $n = n_4$ temos que $\langle f, n \rangle = \langle df, n \rangle = 0$. Portanto, (f, n) constituem uma faixa para a imersão f. Por (3.76), temos que:

$$\begin{aligned} \omega_{41} &= -\frac{l_2}{l_3} dy_1 = -\frac{l_2}{l_1 l_3} \omega_1, \\ \omega_{42} &= -\frac{l_1}{l_3} dy_2 = -\frac{l_1}{l_2 l_3} \omega_2, \\ \omega_{43} &= 0. \end{aligned}$$

Então as curvaturas principais associadas a faixa (f, n) são dadas por

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{l_2}{l_1 l_3} \\ a_2 &= -\frac{l_1}{l_2 l_3} \\ a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Afirmamos que as curvaturas principais são distintas. De fato, como as funções l_i são não nulas, temos inicialmente que

$$a_3 \neq a_1 \quad \text{e} \quad a_2 \neq a_1.$$

Suponha por contradição que $a_1 = a_2$, então

$$\frac{l_2}{l_1 l_3} = \frac{l_1}{l_2 l_3},$$

o que implica

$$\frac{l_2^2}{l_1 l_2 l_3} = \frac{l_1^2}{l_1 l_2 l_3}.$$

Portanto, $l_2^2 = l_1^2$, o que é um absurdo já que, pela condição de Guichard

$$l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 = 0,$$

implicando em $l_3 = 0$.

Lembramos que, se f é uma imersão com métrica induzida plana, efetuando uma deformação conforme $(\tilde{f}, \tilde{n})$, onde $\tilde{f} = e^u f$ e $\tilde{n} = n + af$, obtemos uma imersão $\tilde{f} : M^3 \to M_K^4$ conformemente plana. Como vimos em (3.34), com a deformação conforme, as curvaturas principais passam a ser

$$\tilde{a}_i = e^{-u}(a_i - a).$$

Então, se as curvaturas principais a_i são distintas, $\tilde{a}_i$ também são.

Dessa forma, obtemos uma imersão conformemente plana em M_K^4 com curvaturas principais distintas, o que prova a recíproca do teorema.

$\square$

Conclusão

Concluímos que o trabalho de Hertrich-Jeromin, [7] nos dá uma alternativa para o problema da classificação das hipersuperfícies conformemente planas em formas espaciais de dimensão 4. Mostrando que esse problema é equivalente a classificar as redes de Guichard em $\mathbb{R}^3$ associadas a tais hipersuperfícies. Uma rede de Guichard nessas condições é determinada por três funções reais positivas $l_i(y_1, y_2, y_3)$, $i = 1, 2, 3$ que satisfazem a condição algébrica

$$l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 = 0,$$

e o sistema de equações diferenciais

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial_2 l_1}{\partial y_2 \partial y_3} & = & \dfrac{1}{l_2}\dfrac{\partial l_1}{\partial y_2}\dfrac{\partial l_2}{\partial y_3} + \dfrac{1}{l_3}\dfrac{\partial l_1}{\partial y_3}\dfrac{\partial l_3}{\partial y_2} \\
\dfrac{\partial_2 l_2}{\partial y_3 \partial y_1} & = & \dfrac{1}{l_3}\dfrac{\partial l_2}{\partial y_3}\dfrac{\partial l_3}{\partial y_1} + \dfrac{1}{l_1}\dfrac{\partial l_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial l_1}{\partial y_3} \\
\dfrac{\partial_2 l_3}{\partial y_1 \partial y_2} & = & \dfrac{1}{l_1}\dfrac{\partial l_3}{\partial y_1}\dfrac{\partial l_1}{\partial y_2} + \dfrac{1}{l_2}\dfrac{\partial l_3}{\partial y_2}\dfrac{\partial l_2}{\partial y_1} \\
0 & = & \dfrac{\partial}{\partial y_2}\left(\dfrac{1}{l_2}\dfrac{\partial l_1}{\partial y_2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y_1}\left(\dfrac{1}{l_1}\dfrac{\partial l_2}{\partial y_1}\right) + \dfrac{1}{l_3^2}\dfrac{\partial l_1}{\partial y_3}\dfrac{\partial l_2}{\partial y_3} \\
0 & = & \dfrac{\partial}{\partial y_3}\left(\dfrac{1}{l_3}\dfrac{\partial l_3}{\partial y_3}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y_2}\left(\dfrac{1}{l_2}\dfrac{\partial l_3}{\partial y_2}\right) + \dfrac{1}{l_1^2}\dfrac{\partial l_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial l_3}{\partial y_1} \\
0 & = & \dfrac{\partial}{\partial y_1}\left(\dfrac{1}{l_1}\dfrac{\partial l_3}{\partial y_1}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y_3}\left(\dfrac{1}{l_3}\dfrac{\partial l_1}{\partial y_3}\right) + \dfrac{1}{l_2^2}\dfrac{\partial l_3}{\partial y_2}\dfrac{\partial l_1}{\partial y_2}.
\end{array}$$

Apêndice A

Formas Diferenciais

O objetivo deste apêndice é apresentar algumas definições e resultados básicos sobre formas diferenciais para que o leitor, sempre que necessário, possa consultá-lo durante a leitura do texto.

A.1 Formas Diferenciais em $\mathbb{R}^n$

Sejam $p \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n_p$ o espaço tangente de $\mathbb{R}^n$ em p e $(\mathbb{R}^n_p)^*$ o seu espaço dual. Uma base para $(\mathbb{R}^n_p)^*$ é obtida tomando $(dx_i)_p$, onde $x_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é a projeção na i-ésima coordenada. Uma forma diferencial de grau 1 é uma aplicação ω que a cada $p \in \mathbb{R}^n$ associa $\omega(p) \in (\mathbb{R}^n_p)^*$ que pode ser escrita na forma

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i$$

onde cada a_i é uma função diferenciável.

Seja $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ o conjunto das funções k-lineares alternadas:

$$\varphi : \underbrace{\mathbb{R}^n_p \times \ldots \times \mathbb{R}^n_p}_{kvezes} \to \mathbb{R}$$

Com as operações usuais $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ é um espaço vetorial. Se $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ são formas diferenciais podemos obter um elemento $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_k$ de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ definindo

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_k)(v_1, \ldots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j))$$

Desta forma, podemos mostrar que o conjunto $\{(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge (dx_{i_k})_p)\}$, com $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ constitue uma base para $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$. Portanto,

Definição A.1 Uma k-forma diferencial em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação ω que a cada $p \in \mathbb{R}^n$ associa $\omega(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ onde ω pode ser escrito por

$$\omega = \sum_I a_I dx_I$$

onde I indica a k-upla $(i_1, \ldots, i_k)$ com $i_j \in \{1, \ldots, n\}$.

Convenciona-se que uma 0-forma diferencial em $\mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável. A aplicação linear $df_p : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^m_{f(p)}$ induz uma transformação linear

$$f_p^* : \Lambda^k(\mathbb{R}^m_{f(p)})^* \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*,$$

que para cada $\varphi \in \Lambda^k(\mathbb{R}^m_{f(p)})^*$ associa $f_p^*(\varphi)$, definida da seguinte maneira:

$$(f_p^*(\varphi))(v_1, \ldots, v_k) = \varphi(df_p(v_1), \ldots, df_p(v_k)), \quad v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n_p.$$

Fazendo o ponto p variar, obteremos uma aplicação f^* que leva k-formas de $\mathbb{R}^m$ em k-formas de $\mathbb{R}^n$. Convenciona-se que

$$f^*(g) = g \circ f,$$

quando g é uma 0-forma.

Definição A.2 Seja ω uma k-forma, $\omega = \sum_I a_I dx_I$ e φ uma s-forma, $\varphi = \sum_J a_J dx_J$, então o *produto exterior* $\omega \wedge \varphi$ é uma (k+s)-forma definida por

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

Definição A.3 Se $\omega = \sum_I a_I dx_I$ é uma k-forma, definimos a *diferencial exterior* de ω como sendo a (k+1)-forma

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I.$$

Valem as seguintes propriedades:

1. $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$, quando $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, uma função diferenciável;

2. $d(d\omega) = d^2\omega = 0$;

3. $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$, onde ω é uma k-forma em $\mathbb{R}^m$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável.

A.2 Formas diferenciais em variedades diferenciáveis

Definição A.4 Seja M uma variedade de dimensão n. Uma k-forma diferencial ω em M é a escolha, para cada sistema de coordenadas $X_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de uma k-forma ω_{U_α} em U_α de tal forma que se ω_{U_α} e ω_{U_β} são duas tais escolhas e $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) \neq 0$, então

$$\omega_{U_\alpha} = (f_2^{-1} \circ f_1)^* \omega_{U_\beta}$$

A seguinte proposição também pode ser vista como uma definição para formas diferenciais em uma variedade diferenciável:

Proposição A.1 *Uma k-forma diferencial ω em uma variedade diferenciável M é a escolha, para cada $p \in M$, de um elemento $\omega(p)$ do espaço das formas k-lineares alternadas, $\Lambda^k(T_pM)^*$, do espaço tangente, de modo que a expressão ω_α de ω em qualquer parametrização seja diferenciável.*

Demonstração: Com efeito, dada uma tal escolha, teremos para qualquer parametrização $X_\alpha : U_\alpha \to M$, uma k-forma diferencial ω_α definida por

$$\omega_\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \omega(df_\alpha(v_1), \ldots, df_\alpha(v_k)), \quad v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n_q, \quad q \in U_\alpha \tag{A.1}$$

É imediato verificar que $\omega_\alpha = (X_\beta^{-1} \circ X_\alpha)^* \omega_\beta$. Reciprocamente, dada uma k-forma pela definição anterior, a condição $\omega_\alpha = (X_\beta^{-1} \circ X_\alpha)^* \omega_\beta$ garante que a escolha de um elemento $\omega(p) \in \Lambda^k(T_pM)^*$ dada pela expressão $(A.1)$ não depende da parametrização.

$\square$

Existe uma relação interessante entre a derivação exterior de formas de grau um e o colchete de campos de vetores:

Proposição A.2 *Se ω é uma 1-forma diferenciável em uma variedade diferenciável M e x, y são campos de vetores diferenciáveis em M, tem-se*

$$d\omega(x, y) = x\omega(y) - y\omega(x) - \omega([x, y])$$

Uma demonstração da proposição anterior pode ser encontrada em [1].

Note que, para cada $p \in M$, $\omega(p)(x(p))$ é uma função diferenciável de M em $\mathbb{R}$ portanto faz sentido escrever $y\omega(x)$.

Seja M uma variedade diferenciável. Uma k-forma diferencial ω em M é chamada *exata* se existe uma (k-1)-forma β em M tal que $d\beta = \omega$; ω é dita *fechada* se $d\omega = 0$. Como $d^2 = 0$, é claro que se ω é exata, então ω é fechada.

A recíproca deste fato, globalmente, não é, em geral, verdadeira. Porém, a condição $d\omega = 0$ é suficiente para que ω seja localmente exata. Antes precisamos de uma definição:

Definição A.5 *Uma variedade diferenciável M é contrátil (a um ponto $p_0 \in M$) se existir uma aplicação diferenciável $H : M \times [0,1] \to M$ tal que:*

$$H(p,1) = p, \quad H(p,0) = p_0, \quad \text{para todo} \quad p \in M$$

É claro que $\mathbb{R}^n$ é contrátil (a um ponto arbitrário $p_0 \in \mathbb{R}^n$); basta definir $H : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ por $H(p,t) = p_0 + (p - p_0)t$. O mesmo argumento mostra que a bola de raio r, $B_r = \{p \in R^n; ||p|| < r\}$ é contrátil. Decorre daí que toda variedade é localmente contrátil (basta estabelecer um difeomorfismo através de uma parametrização).

Teorema A.1 (Lema de Poincaré) *Seja M uma variedade diferenciável M contrátil e ω uma k-forma diferencial em M, com $d\omega = 0$. Então existe uma (k-1)-forma α em M tal que $d\alpha = \omega$.*

Uma demonstração para o Lema de Poincaré pode ser encontrada em [1].

Como todo espaço vetorial V de dimensão n é linearmente isomorfo a $\mathbb{R}^n$ podemos falar em formas lineares pertencentes ao espaço dual V^* de um espaço vetorial V. Dessa forma, temos o seguinte teorema:

Teorema A.2 (Lema de Cartan) *Seja v um espaço vetorial de dimensão n. Sejam $\omega_1, \ldots, \omega_r : V \to \mathbb{R}$, $r \leq n$, formas lineares de V linearmente independentes. Suponhamos que existam formas lineares $\theta_1, \ldots, \theta_r : V \to \mathbb{R}$ satisfazendo a seguinte condição:*

$$\sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \theta_i = 0.$$

Então

$$\theta_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\omega_j, \qquad i, j = 1, \ldots, r, \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

Podemos encontrar uma demonstração para o Lema de Cartan [3].

Apêndice B

Teorema de Frobenius

O Teorema de Frobenius é um resultado básico de integrabilidade de um sistema de equações diferenciais parciais. A versão clássica deste teorema pode ser enunciada da seguinte forma:

Teorema B.1 *Sejam U e V abertos de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Denotemos por $u = (u_1, \ldots, u_m)$ os pontos de U e $v = (v_1, \ldots, v_n)$ os pontos de V. Consideremos aplicações diferenciáveis (C^∞), $f^\gamma : U \times V \to \mathbb{R}^n$, $1 \leq \gamma \leq m$, cujas funções coordenadas denotamos por f_i^γ, $1 \leq i \leq n$. Então,*

$$\frac{\partial f_i^\beta}{\partial u_\gamma} - \frac{\partial f_i^\gamma}{\partial u_\beta} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i^\beta}{\partial v_j} f_j^\gamma - \frac{\partial f_i^\gamma}{\partial v_j} f_j^\beta \right) = 0,$$

em $U \times V$, para todo $1 \leq i \leq n$, $1 \leq \gamma, \beta \leq m$ se, e só se, fixado $u_0 \in U$, para todo $v \in V$ existe vizinhança U_0 de u_0 em U e uma aplicação diferenciável $F : U_0 \to V$ tal que

$$\begin{aligned} F(u_0) &= v, \\ \frac{\partial F}{\partial u_\gamma} &= f^\gamma(u, F(u)), \quad u \in U_0, \quad 1 \leq \gamma \leq m. \end{aligned}$$

O enunciado acima e sua demonstração podem ser encontrados em [15].

No caso particular em que $n = 1$ o teorema acima afirma que um sistema de equações diferenciais

$$\frac{\partial F}{\partial u_\gamma} = A^\gamma(u_1, \ldots, u_m) \ \ 1 \leq l \leq m,$$

admite solução com condições iniciais dadas se, e somente se,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_\gamma \partial u_\beta} = \frac{\partial^2 F}{\partial u_\beta \partial u_\gamma}.$$

De fato, nessas condições, temos $A^\gamma(u) = f^\gamma(u, F(u))$ e então, o sistema admite solução se, e somente se,

$$\frac{\partial f^\beta}{\partial u_\gamma} - \frac{\partial f^\gamma}{\partial u_\beta} + \left(\frac{\partial f^\beta}{\partial v} f^\gamma - \frac{\partial f^\gamma}{\partial v} f^\beta \right) = 0, \tag{B.1}$$

onde $v \in V = I \subset \mathbb{R}$. Calculando as derivadas parciais de F obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial u_\gamma \partial u_\beta} &= \frac{\partial f^\beta}{\partial u_\gamma}(u, F(u)) \\ &= \frac{\partial f^\beta}{\partial u_\gamma} + \frac{\partial f^\beta}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial u_\gamma} \quad . \\ &= \frac{\partial f^\beta}{\partial u_\gamma} + \frac{\partial f^\beta}{\partial v} f^\gamma \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_\gamma \partial u_\beta} - \frac{\partial^2 F}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} = \frac{\partial f^\beta}{\partial u_\gamma} + \frac{\partial f^\beta}{\partial v} f^\gamma - \frac{\partial f^\gamma}{\partial u_\beta} + \frac{\partial f^\gamma}{\partial v} f^\beta$$

Dessa forma, pela condição $(B.1)$ o sistema admite solução se, e somente se, o lado direito da igualdade acima é nulo, o que é equivalente a:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_\gamma \partial u_\beta} = \frac{\partial^2 F}{\partial u_\beta \partial u_\gamma}.$$

Referências Bibliográficas

[1] Carmo, M. P., *Formas Diferenciais e Aplicações*, 8º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Edição (1971).

[2] Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, 3ª Edição (2005).

[3] Carmo, M. P., *O método do referencial móvel*, II Escola Latino Americana de Matemática, IMPA, (1976).

[4] Cartan, E., *La déformation des hypersurfaces dans l'éspace conforme réel à $n \geq 5$ dimensions*, Bull. Soc. Math. France **45** (1917) 57-121, (Euvres Complètes Partie 3, Vol. 1, S. 221, Paris 1955)

[5] Garay, O. J., *A classification of certain 3-dimensional conformally flat euclidean hypersurfaces*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 162, **1** (1994), 13-25.

[6] Guichard, C., *Sur les systèmes triplement indéterminés et sur systèmes triplement orthogonaux*, Scienta 25, Paris (1905).

[7] Hertrich-Jeromin, E., *On conformally flat hypersurfaces and Guichard's nets*, Beirtrage zur Algebra und Geometrie, **35** (1994), 315-331.

[8] Hertrich-Jeromin, E., *Introduction to Möbius Differential Geometry*, London Mathematical Society Lecture Notes Series 300, Cambridge University Press (2003).

[9] Hertrich-Jeromin, U., Suyama, Y., *Conformally Flat Hypersurfaces with cyclic guichard net*, International Journal of Mathematics, Vol. 18, **3** (2007) 301-329.

[10] Kühnel, W., *Curves-surfaces-manifolds*, Student Mathematical Library, Vol. 16, Second Edition, American Mathematical Society (2005).

[11] Lima, E. L., *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 7ª Edição, (2006).

[12] O'Neill, B., *Semi-Riemannian Geometry, with applications to relativity*, Academic Press (1983).

[13] Suyama, Y., *Conformally flat hypersurfaces in Euclidean 4-space*, Nagoya Math. J, Vol.158 (2000) 1-42.

[14] Suyama, Y., *Conformally flat hypersurfaces in Euclidean 4-space II*, Osaka Math. J, **42** (2005) 573-598.

[15] Tenenblat, K., *Transformações de superfícies e aplicacões*, 13º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, (1981).

[16] Tenenblat, K., *On isometric immersions of riemannian manifolds*, Boletim da Soc. Bras. de Mat, Vol.2 (1971) 15-22.