Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Leis dos Grandes Números para Arranjos de Variáveis Aleatórias Negativamente Dependentes

por

Renato Ferreira da Cruz

Brasília

2009

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Leis dos Grandes Números para Arranjos de Variáveis Aleatórias Negativamente Dependentes

Por

Renato Ferreira da Cruz*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 25 de setembro de 2009

Comissão Examinadora:

Prof. Ary Vasconcelos Medino - MAT/UnB (Orientador)

Prof^a^. Chang Chung Yu Dorea - MAT/UnB (Membro)

Prof. Roberto Imbuzeiro Oliveira - MAT/IMPA (Membro)

*Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

"Deus é uno. Ele não está jamais, como pensam alguns, fora do mundo, mas sim, totalmente no mundo inteiro. Deus está no universo e o Universo está em Deus. O mundo e Deus não são mais que uma unidade".

Pitágoras

Aos meus pais, minha vó, meu irmão e minha cunhada.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela sua infinita sabedoria e por me dar saúde e força para vencer todas as dificuldades da vida. À todos os meus familiares, especialmente meus pais, que souberam entender a minha ausência não só ao longo desses dois anos, mais desde a época de graduação.

Ao meu orientador professor Ary Vasconcelos Medino, por sua disponibilidade, paciência e ajuda.

Aos professores da banca examinadora: Chang Chung Yu Dorea e Roberto Imbuzeiro de Oliveira pelas correções e sugestões, que fizeram, enriquecendo este trabalho.

Aos colegas de graduação, que ainda temos um contato maravilhoso: Adma, Lucenildo, Wene, Gislaine, Rogério, Daniel, Lucimar e Marcos. Aos colegas do curso de verão: Kaliana, Adriana, Ana Paula, Daniele, Tiago e Andrei, pelo companheirismo e amizade apesar do pouco tempo de convivência durante a seleção para o mestrado.

Aos colegas do departamento de matemática da UnB: Kaliana, Thaynara, Sunamita, Ana Paula, Tarcísio, Marcelo, Weslley, Wembeson, Grace Kelly, Tiago, Daiane, Daniele, João Paulo, Paulo Ângelo, Eduardo, Mariana, Laura, Ana Paula, Jairo, Mônica, João Marcelo, João Vítor, Luciana, Ricardo, Eunice, Kélem. Ao meu amigo, Andrei Barbosa, pelo companheirismo durante este período da pós-graduação e pelos assuntos variados de nossas conversas.

Aos professores da UFMT: Carlos Rodrigues, Adilson Berllato e Daniel Guimarães, com quem troquei as primeiras palavras sobre o mestrado, pelo incentivo e presença amiga em todos os momentos.

Aos meus amigos de Barra do Garças: Aline Maria, Izuleide, Kamilla, Adma, Lucimar, Rogério, Laura, Doraci, Leila, Raquel, Wene, Lucenildo, Aldeni, Cecy, Jairo, Luzinalda, Cida e Dom Protógenes que fazem parte da minha vida e que de alguma maneira me ajudaram e me incentivaram durante o períodos de graduação e mestrado.

Aos professores Cátia Regina, Carlos Carrion, Daniele Baratela, José Valdo e Noraí Rocco, pelo conhecimento adquirido durante o curso.

Ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento Científico (CNPq), pelo apoio financeiro, sem o qual seria impossível manter-me em Brasília durante a elaboração deste trabalho.

À todos que, com um pensamento positivo, uma palavra amiga, alimentaram meus sonhos e contribuiram para esta grande conquista da minha vida.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o conceito de Dependencia Negativa e algumas de suas propriedades, e mostramos Leis dos Grandes Numeros (fraca e forte) para arranjos de variaveis aleatorias Negativamente Dependentes.

Palavras-chave: Leis dos Grandes Números, Dependência Negativa, Convergência Completa, Arranjos.

Abstract

In this work, we study the concept of Negative Dependece and its properties, and we show Laws of Large Numbers (weak and strong) for arrays of Negatively Dependent random variables.

Key-words: Laws of Large Numbers, Negative Dependence, Complete Convergence, Arrays.

Sumário

Introdução

Leis dos Grandes Números para sequências e arranjos de variáveis aleatórias desempenham um papel muito importante em Teoria da Probabilidade e Estatística. Condições de independência e distribuições idênticas são básicas em resultados históricos devidos a Bernoulli, Borel e Kolmogorov. A primeira Lei dos Grandes Números foi provada pelo matemático suíço James Bernoulli na quarta parte de sua obra Ars Conjectandi, publicada em 1713. Depois, outros matemáticos também contribuíram para o aperfeiçoamento da lei, incluindo Chebyshev, Markov, Khinchin, Borel e Kolmogorov. Estes resultados deram origem às duas formas conhecidas de Lei dos Grandes Números, uma denominada *lei fraca* e a outra, *lei forte*. Com o passar do tempo, várias generalizações foram surgindo. Por exemplo, Marcinkiewicz e Zygmund generalizaram a lei de Kolmorogov para v.a.'s com p-ésimo momento $1 \leq p < 2$ e mostraram que $\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{q.c} 0$ se, e somente se, $E|X_1|^p < \infty$ ([8] p.122 e [1] p.256). Em todas elas temos a hipótese de momento finito. Mas surgiram novas leis envolvendo variáveis aleatórias com média infinita ou sem média. Uma dessas leis foi provada por Kolmogorov e Feller ([9] p.116 e [29] p.205).

A história e literatura sobre leis dos grandes números para variáveis aleatórias independentes é bastante rica. Já, para variáveis dependentes, os estudos são mais limitados, mas muito interessantes. Existem muitas noções de dependência bivariada e multivariada. Várias destas noções e como elas se relacionam umas com as outras, podem ser vistas em Block [6], Ebrahimi e Ghosh [13], Esary e Proschan [15], Hu e Yang[19], Lehmann [23], Joag-dev e Proschan [22] e Matula [24]. Muitas delas foram motivadas a partir de aplicações em teoria da confiabilidade. Normalmente o ponto de partida na análise de sistemas é supor que o tempo de vida útil dos componentes são variáveis aleatórias independentes. Mas em alguns casos é mais realista assumir algum tipo de dependência entre as variáveis, pois a falha de um determinado componente pode afetar o desempenho dos outros. Neste caso, as ferramentas clássicas de Teoria da Probabilidade (tais como, Lei dos Grandes Números e Teorema do Limite Central) válidas sob hipótese de independência não podem ser utilizadas como tal. Então é necessário determinar em que condições de dependência se pode obter resultados análogos aos que se tem sob hipóteses de independência.

Neste trabalho estudamos Leis dos Grandes Números para variáveis aleatórias Negativamente Dependentes baseadas no artigos de Bozorgnia, Patterson e Taylor ([3] e [5]) de 2000 e 2001. Os resultados principais são: Teorema 2.6 do Capítulo 2 e Teorema 3.9 do Capítulo 3. O primeiro é uma extensão da lei fraca provada por Kolmogorov e Feller para variáveis aleatórias independentes e diz que se $\{X_{ni}; n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ é um arranjo de v.a.'s negativamente dependentes duas a duas em cada linha com funções de distribuição $(F_{ni}; n \geq 1, 1 \leq i \leq n)$ e as condições

$$\sum_{i=1}^{n} P(|X_{ni}| > b_n) \to 0, \ \text{ com } \ n \to \infty,$$

e

$$\frac{1}{b_n^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{(|x| \leq b_n)} x^2 dF_{ni}(x) \to 0 \ \text{ com } \ n \to \infty.$$

são satisfeitas, então

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0,$$

onde $a_n = \sum_{i=1}^{n} \int_{(|x| \leq b_n)} x dF_{ni}(x)$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_{ni}$ e $(b_n; n \geq 1)$ é uma sequência de números reais positivos crescendo para $+\infty$. O segundo é uma lei forte para arranjos de variáveis aleatórias negativamente dependentes em cada linha com $EX_{ni} = 0$. Neste caso, se as variáveis são uniformemente limitadas ou existe uma v.a. X tal que a cauda da distribuição das $X'_{ni}s$ é limitada pela cauda da distribição de X com $E|X|^{2p} < \infty$, então

$$\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni} \to 0 \text{ completamente, } 0 < p < 2.$$

Para o estudo desses resultados, dividimos o trabalho em três capítulos.

No Capítulo 1, apresentamos o conceito de dependência negativa definido por Lehmann [23] em 1966 para o caso bivariado e por Ebrahimi e Ghosh [13] em 1981 para o caso multivariado (Seção 1.2). Apresentamos também alguns exemplos (Seção 1.3) e propriedades para variáveis aleatórias negativamente dependentes (Seção 1.4) necessárias nas demonstrações do Capítulo 2 e 3, onde as mais relevantes são o Corolário 1.14 e Lema 1.15.

No Capítulo 2, fazemos uma breve revisão das principais leis fracas para o caso independente, relacionando-as com os resultados obtidos para variáveis aleatórias negativamente dependentes. O resultado principal deste capítulo é o Teorema 2.6, como mencionamos acima. Deste, são obtidos como consequência, os Teoremas 2.8 e 2.9. O primeiro afirma que se $(X_{ni}; n \geq 1, 1 \leq i \leq n)$ é um arranjo de v.a.'s negativamente dependentes com $EX_{ni} = 0$ e existe uma v.a. X tal que

$$P(|X_{ni}| > t) \leq P(|X| > t), \forall\, t > 0 \tag{1}$$

e

$$nP(|X|^p > n) \to 0 \text{ para algum } 1 < p < 2,$$

então

$$\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni} \xrightarrow{P} 0.$$

O segundo nos diz que se $(X_{ni}; n \geq 1, 1 \leq i \leq n)$ é um arranjo de v.a.'s negativamente dependentes e X uma v.a. satisfazendo (1) e $nP(|X| > n) \to 0$ com $n \to \infty$, então

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_{ni} - c_{ni}) \xrightarrow{P} 0,$$

onde $c_{ni} = E\left[X_{ni} I_{(|X_{ni}| \leq n)}\right]$.

Por fim, no Capítulo 3, abordamos um conceito de convergência (denominado convergência completa) que implica em convergência quase-certa e a utilizamos na demonstração do principal resultado, o qual foi mencionado acima.

Para concluir, apresentamos uma lei fraca e uma lei forte para arranjos de v.a.'s em que não são necessárias as hipóteses de dependência negativa e nem $EX_{ni} = 0$.

Capítulo 1

Dependência Negativa

1.1 Introdução

Neste capítulo, estudamos o conceito de Dependência Negativa introduzido por Lehmann [23] em 1996 e apresentamos alguns exemplos e propriedades básicas de variáveis aleatórias Negativamente Dependentes necessárias para as demonstrações nos Capítulos 2 e 3.

A hipótese de independência entre variáveis aleatórias é frequentemente muito conveniente por várias razões. Primeiramente, ela torna a análise e os cálculos muito mais simples. Em segundo lugar, existe uma série de conceitos e ferramentas matemáticas poderosas de teoria da probabilidade para tais estudos, como *Leis dos Grandes Números* e *Teorema do Limite Central*. Estes resultados são geralmente obtidos sob a hipótese de independência entre as variáveis envolvidas. Porém, muitos casos envolvem variáveis aleatórias que não são independentes. Daí, a necessidade de se determinar em que condições de dependência ainda se pode obter resultados análogos aos mencionados anteriormente. A seguir, apresentamos algumas situações onde surgem alguns tipos de dependência.

Em teoria da confiabilidade, é normalmente assumido que os tempos de duração dos componentes de um determinado equipamento são variáveis aleatórias independentes. No entanto, os componentes de um sistema são utilizados num mesmo ambiente ou compartilham da mesma carga, e daí, a falha de um componente pode afetar o desempenho dos outros. Neste caso, as ferramentas clássicas de teoria da probabilidade, que são válidas sob hipótese de independência entre as v.a.'s envolvidas, não podem ser utilizadas como tal. Em [10], os autores propõe um modelo para a confiabilidade de um sistema que resulta em componentes com um tipo de dependência negativa.

Ocorrem também em Teoria da Ruína modelos em que as indenizações exibem alguma estrutura de dependência. Por exemplo, em [7], os autores consideram um modelo em que as indenizações são variáveis aleatórias negativamente dependentes e com cauda pesada.

Em [11], os autores tentam chamar a atenção para o uso da noção de dependência negativa como um paradigma simples e unificante na análise de estruturas aleatórias e algoritmos.

Em Mecânica Estatística, muitos modelos exibem variáveis aleatórias que satisfazem a chamada desigualdade FKG (Fortuin-Kasteleyn-Ginibre). Variáveis desse tipo são também chamadas de positivamente associadas e são, em outras palavras, variáveis positivamente dependentes. Em [27], o autor obtém um teorema limite para tal categoria de variáveis e o aplica ao estudo de flutuações de densidade de aglomerados infinitos em modelos de percolação e a flutuações de magnetização em modelos de Ising.

Mencionemos ainda que modelos envolvendo variáveis com dependência negativa têm sido apresentados em áreas onde estatísticas espaciais desempenham um papel importante. Algumas de tais estatísticas envolvem análise de experimentos agrícolas, aplicações à oceanografia, processamento de sinais de radares e sonares, e estereologia.

Uma breve introdução a essas aplicações pode ser encontrada em *Panel on Spatial Statistics and Image Processing* [25].

O conceito de dependência está relacionado com a função de distribuição conjunta das variáveis. É importante o estudo dos diversos modos de dependência, pois um dado modelo pode ser mais adequado para um determinado tipo de dependência do que para outro. Várias formas de dependência negativa são introduzidas na literatura. Entre elas estão: *Negativamente Associadas* (Joag-dev e Proschan [22]), *Negativamente Dependentes na Cauda à Direita*, *Negativamente Dependentes na Cauda à Esquerda* (Hu e Yang [19]), *Negativamente Dependentes Através de Ordenação Estocástica*, *Totalmente Negativas de Ordem 2* (Block et al. [6]), etc. Para outras formas de dependência (positiva e negativa) ver [6], [13], [15] e [23]. Neste trabalho vamos considerar apenas dependência negativa.

A partir de agora, assumiremos que as variáveis aleatórias envolvidas estão definidas em um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1.2 Conceito de Dependência Negativa

Nesta seção definimos uma das formas mais populares de dependência negativa, introduzida por Lehmann [23] em 1966 e apresentamos alguns exemplos e propriedades de v.a.'s negativamente dependentes.

Dizemos que X e Y são negativamente dependentes se:

$$P(X \leq x, Y \leq y) \leq P(X \leq x)P(Y \leq y), \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

As variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots$ são ditas negativamente dependente duas a duas, se cada par (X_i, X_j) com $i \neq j$ satisfaz (1.1). Por meio de um cálculo simples, podemos verificar que (1.1) é equivalente a

$$P(X > x, Y > y) \leq P(X > x)P(Y > y), \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

No entanto, os dois próximos exemplos mostram que para uma coleção de 3 ou mais variáveis aleatórias, isso pode não ocorrer.

Exemplo 1.1. Sejam X_1, X_2 e X_3 variáveis aleatórias tais que (X_1, X_2, X_3) assume os valores $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 0)$ cada um com probabilidade $\frac{1}{4}$. Então:

$$P(X_1 > 0, X_2 > 0, X_3 > 0) = 0 < \frac{1}{8} = P(X_1 > 0)P(X_2 > 0)P(X_3 > 0) \tag{1.3}$$

mas

$$P(X_1 \leq 0, X_2 \leq 0, X_3 \leq 0) = \frac{1}{4} > \frac{1}{8} = P(X_1 \leq 0)P(X_2 \leq 0)P(X_3 \leq 0), \tag{1.4}$$

ou seja, X_1, X_2, X_3 satisfazem a condição 1.2, mas não a condição 1.1.

Exemplo 1.2. Considere agora (X_1, X_2, X_3) assumindo os valores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ e $(1, 1, 1)$ cada um com probabilidade $\frac{1}{4}$. Então:

$$P(X_1 \leq 0, X_2 \leq 0, X_3 \leq 0) = 0 < \frac{1}{8} = P(X_1 \leq 0)P(X_2 \leq 0)P(X_3 \leq 0) \tag{1.5}$$

mas

$$P(X_1 > 0, X_2 > 0, X_3 > 0) = \frac{1}{4} > \frac{1}{8} = P(X_1 > 0)P(X_2 > 0)P(X_3 > 0). \tag{1.6}$$

Neste caso temos X_1, X_2, X_3 satisfazendo a condição 1.1, mas não a condição 1.2.

Entretanto, existem variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ em que ambas as condições 1.1 e 1.2 são satisfeitas para $n \geq 3$. Por isso, somos motivados a considerar a seguinte definição, introduzida em 1981 por Ebrahimi and Ghosh [13].

Definição 1.3. As variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são ditas:

(a) *Negativamente Dependentes Inferiormente (NDI)* se para cada $n \geq 2$

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \leq x_i)\right] \leq \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x_i),\ \forall\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

(b) *Negativamente Dependentes Superiormente (NDS)* se para cada $n \geq 2$

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{n}(X_i > x_i)\right] \leq \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x_i),\ \forall\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \tag{1.8}$$

(c) *Negativamente Dependentes (ND)* se (1.7) e (1.8) são válidas.

Observações:

(a) Qualquer um dos sinais $\leq$ ou $>$ pode ser substituído por $<$ ou $\geq$ (Ver [23]).

(b) Os Exemplos 1.1 e 1.2 mostram que 1.7 pode ser válido e 1.8 não e que 1.8 pode ser válido e 1.7 não.

(c) Se $X_1, X_2, \ldots$ são v.a's independentes então $X_1, X_2, \ldots$ são ND, mas a recíproca não vale em geral. Logo independência é um conceito mais restritivo que dependência negativa.

1.3 Exemplos de Dependência Negativa

Vejamos agora, alguns exemplos de variáveis aleatórias negativamente dependentes.

Exemplo 1.4. [4] Seja $Y = -X$. Então:

Se $-y > x$,

$$\begin{aligned} P(X \leq x, -X \leq y) &= P(X \leq x, X \geq -y) = P(X \leq x, X > x) = \\ &= P(\phi) = 0 \leq P(X \leq x)P(-X \leq y). \end{aligned}$$

Se $-y \leq x$,

$$\begin{aligned}
P(X \leq x, -X \leq y) &= P[(X \leq x) - (X < -y)] = \\
&= P(X \leq x) - P(X < -y) \leq \\
&\leq P(X \leq x) - P(X \leq x)P(X < -y) = \\
&= P(X \leq x)[1 - P(X < -y)] = \\
&= P(X \leq x)P(X \geq -y) = \\
&= P(X \leq x)P(-X \leq y).
\end{aligned}$$

Logo $P(X \leq x, -X \leq y) \leq P(X \leq x)P(-X \leq y), \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ e portanto X e $-X$ são negativamente dependentes.

Exemplo 1.5. (Distribuição exponencial bivariada de Gumbel) [28]

Considere X e Y variáveis aleatórias com distribuição conjunta dada por

$$F(x,y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y+\theta xy)}, \;\; x, y \geq 0 \;\text{ e }\; 0 \leq \theta \leq 1.$$

Então as marginais de X e Y são:

$$F_X(x) = F(x,\infty) = \lim_{y\to\infty}(1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y+\theta xy)}) = 1 - e^{-x}$$

$$F_Y(y) = F(\infty,y) = \lim_{x\to\infty}(1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y+\theta xy)}) = 1 - e^{-y}$$

Assim,

$$F(x,y) - F_X(x)F_Y(y) = e^{-(x+y+\theta xy)} - e^{-(x+y)} \leq 0, \;\; x, y \geq 0 \;\text{ e }\; 0 \leq \theta \leq 1,$$

e portanto, X e Y são ND.

Exemplo 1.6. Sejam X e Y v.a.'s com distribuição normal bivariada, cuja função densidade é dada por

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right], -1 < \rho < 1.$$

Podemos verificar que X e Y são ND para $-1 < \rho \leq 0$. (Ver [28])

Definição 1.7. *Uma sequência infinita* $(X_n; n \geq 1)$ *de variáveis aleatórias é dita* ND *se qualquer subconjunto* $\{X_1, \ldots, X_n\}$ *é* ND.

Sabemos que se $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes e $f_1, \ldots, f_n$ são funções mensuráveis a Borel então $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ são variáveis aleatórias independentes. O próximo exemplo mostra que para variáveis aleatórias ND esta propriedade pode não ser válida.

Exemplo 1.8. [2] Sejam X e Y variáveis aleatórias assumindo os valores $-1, 0, 1$ com função de probabilidade conjunta dada por

$$p(-1,-1) = p(1,0) = 0,$$

$$p(-1,0) = p(0,0) = p(0,-1) = p(0,1) = p(1,1) = \frac{1}{9},$$
$$p(-1,1) = p(1,-1) = \frac{2}{9},$$

Então:

a) X e Y são variáveis aleatórias ND, uma vez que, para $x, y \in \mathbb{R}$ temos

$$P(X \leq x, Y \leq y) \leq P(X \leq x)P(Y \leq y).$$

Para verificar isso, considere as distribuições conjunta e marginais de X e Y dadas pelas Tabelas 1.1, 1.2 e 1.3 abaixo.

$X \setminus Y$	$y < -1$	$-1 \leq y < 0$	$0 \leq y < 1$	$y \geq 1$
$x < -1$	0	0	0	0
$-1 \leq x < 0$	0	0	1/9	3/9
$0 \leq x < 1$	0	1/9	3/9	6/9
$x \geq 1$	0	3/9	5/9	1

Tabela 1.1: Distribuição conjunta de X e Y

X	$x < -1$	$-1 \leq x < 0$	$0 \leq x < 1$	$x \geq 1$
$P(X \leq x)$	0	3/9	6/9	1

Tabela 1.2: Distribuição Marginal de X

Y	$y < -1$	$-1 \leq y < 0$	$0 \leq y < 1$	$y \geq 1$
$P(Y \leq y)$	0	3/9	5/9	1

Tabela 1.3: Distribuição Marginal de Y

b) As variáveis aleatórias X e $Z = Y^2$ não são ND, pois para $-1 \leq x < 0$ e $0 \leq z < 1$ temos

$$P(X \leq x, Z \leq z) = \frac{1}{9} > \frac{6}{81} = P(X \leq x)P(Z \leq z).$$

c) As variáveis aleatórias $U = X^2$ e $V = Y^2$ não são ND, visto que para $0 \leq u < 1, 0 \leq v < 1$ temos

$$P(U \leq u, V \leq v) = \frac{1}{9} > \frac{6}{81} = P(U \leq u)P(V \leq v).$$

1.4 Propriedades de Dependência Negativa

Nesta seção veremos algumas propriedades de dependência negativa e resultados que nos dirão em que condições, funções de variáveis aleatórias ND são também v.a.'s ND.

Os resultados mais importantes são o Corolário 1.14 e o Lema 1.15, que serão bastante úteis nas demonstrações dos Capítulos 2 e 3.

Às vezes trabalhamos com funções que apresentam saltos ou são em forma de escada. Nesses casos, a inversa não existirá. Com a finalidade de cotornar situções como essas, vamos considerar o seguinte resultado:

Lema 1.9. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua à direita. Então:*
(a) *Se* f *é não-decrescente:*

$$f(x) < y \;\Leftrightarrow\; x < \inf\{t \in \mathbb{R}; f(t) > y\} \quad e \quad f(x) \geq y \;\Leftrightarrow\; x \geq \inf\{t \in \mathbb{R}; f(t) \geq y\}.$$

(b) *Se* f *é não-crescente:*

$$f(x) \leq y \;\Leftrightarrow\; x \geq \inf\{t \in \mathbb{R}; f(t) \leq y\} \quad e \quad f(x) > y \;\Leftrightarrow\; x > \inf\{t \in \mathbb{R}; f(t) > y\}.$$

Lema 1.10. *a) Se* $(X_n; n \geq 1)$ *é uma sequência de variáveis aleatórias NDI(NDS) e* $(f_n; n \geq 1)$ *é uma sequência de funções* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *não-decrescentes, então* $(f_n(X_n); n \geq 1)$ *são NDI(NDS).*
b) Se $(X_n; n \geq 1)$ *é uma sequência de variáveis aleatórias NDS(NDI) e* $(f_n; n \geq 1)$ *é uma sequência de funções* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *não-crescentes, então* $(f_n(X_n); n \geq 1)$ *são NDI(NDS).*

Demonstração:
(a) Sejam $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções não-decrescentes e $z_i = \inf\{t \in \mathbb{R}; f_i(t) \geq x_i\}, \forall\, i = 1, \ldots, n$ e $x_i \in \mathbb{R}$. Sendo $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s NDS, pelo Lema 1.9(a) e Observação(a) pág.18 temos:

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{n} (f_i(X_i) > x_i)\right] \;=\; P\left[\bigcap_{i=1}^{n} (X_i > z_i)\right] \leq \prod_{i=1}^{n} P(X_i > z_i) = \prod_{i=1}^{n} P(f_i(X_i) > x_i).$$

Portanto $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ são v.a.'s NDS.

Agora, se $X_1, \ldots, X_n$ são v.a.'s NDI, temos:

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{n}(f_i(X_i) \leq x_i)\right] = P\left[\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \leq z_i)\right] \leq \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq z_i) = \prod_{i=1}^{n} P(f_i(X_i) \leq x_i).$$

onde usamos o Lema 1.9(a) e Observação(a) pág.18 com $z_i = \inf\{t \in \mathbb{R}; f_i(t) \geq x_i\}$. Logo $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ são v.a.'s NDI.

(b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções não-crescentes, $z_i = \inf\{t \in \mathbb{R}; f_i(t) \leq x_i\}$ e $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s NDS, pelo Lema 1.9(b) e Observação(a) pág.18,

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{n}(f_i(X_i) > x_i)\right] = P\left[\bigcap_{i=1}^{n}(X_i < z_i)\right] \leq \prod_{i=1}^{n} P(X_i < z_i) = \prod_{i=1}^{n} P(f_i(X_i) > x_i).$$

Portanto $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ são v.a.'s NDI.

Por outro lado, sendo $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s NDI e $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções não-crescentes, pondo $z_i = \inf\{t \in \mathbb{R}; f_i(t) \leq x_i\}$, a partir do Lema 1.9(b) e Observação(a) pág.18, tem-se

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{n}(f_i(X_i) \leq x_i)\right] = P\left[\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \geq z_i)\right] \leq \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq z_i) = \prod_{i=1}^{n} P(f_i(X_i) \leq x_i).$$

Logo $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ são v.a.'s NDI.

■

Corolário 1.11. *Se $(X_n; n \geq 1)$ é uma sequência de variáveis aleatórias ND e $(f_n; n \geq 1)$ é uma sequência de funções todas não-decrescentes (ou todas não-crescentes), então $(f_n(X_n); n \geq 1)$ é uma sequência de variáveis aleatórias ND.*

Demonstração:

Como $(X_n; n \geq 1)$ é uma sequência da variáveis aleatórias ND, temos que $(X_n; n \geq 1)$ é NDI e NDS. Assim

$i)$ Se $(f_n; n \geq 1)$ é uma sequência de funções monótonas não-decrescentes, pelo Lema 1.10(a), $(f_n(X_n); n \geq 1)$ é uma sequência de variáveis aleatórias NDI e NDS e portanto ND.

ii) A prova é análoga, considerando $(f_n; n \geq 1)$ uma sequência de funções monótonas não-crescentes e utilizando o Lema 1.10(b). ■

Nos dois próximos exemplos mostraremos a relação entre as partes positivas e negativas de variáveis aleatórias ND.

Exemplo 1.12. Sejam X e Y variáveis aleatórias ND. Então X^+ e Y^+, X^- e Y^- são variáveis aleatórias ND. De fato, considere $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x, & se \ x \geq 0 \\ 0, & se \ x < 0 \end{cases} \quad e \quad g(y) = \begin{cases} y, & se \ y \geq 0 \\ 0, & se \ y < 0 \end{cases}.$$

Agora,

$$X^+ = \begin{cases} X, & \text{se } X \geq 0 \\ 0, & \text{se } X < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad Y^+ = \begin{cases} Y, & \text{se } Y \geq 0 \\ 0, & \text{se } Y < 0 \end{cases}.$$

Assim,

$$X^+ = f(X) \text{ e } Y^+ = g(Y).$$

Como f e g são não-decrescentes e X, Y são ND, pelo Corolário 1.11 segue que $f(X)$ e $g(Y)$ são v.a.'s ND e portanto X^+ e Y^+ também são ND. Para X^- e Y^- a prova é análoga. Basta tomar $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & se \ x < 0 \\ 0, & se \ x \geq 0 \end{cases} \quad e \quad g(y) = \begin{cases} -y, & se \ y < 0 \\ 0, & se \ y \geq 0 \end{cases}.$$

Exemplo 1.13. Se X e Y são variáveis aleatórias ND então X^+ e $-Y^-$, Y^+ e $-X^-$ também são ND. De fato, sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x, & se \ x \geq 0 \\ 0, & se \ x < 0 \end{cases} \quad e \quad g(y) = \begin{cases} y, & se \ y < 0 \\ 0, & se \ y \geq 0 \end{cases}.$$

Mas,

$$X^+ = \begin{cases} X, & \text{se } X \geq 0 \\ 0, & \text{se } X < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad -Y^- = \begin{cases} Y, & \text{se } Y < 0 \\ 0, & \text{se } Y \geq 0 \end{cases}.$$

Daí,

$$X^+ = f(X) \text{ e } -Y^- = g(Y).$$

Sendo f e g não-decrescentes e X, Y v.a.'s ND, do Corolário 1.11 segue que $f(X)$ e $g(Y)$ são ND e portanto Y^+ e $-Y^-$ também são ND. De modo análogo mostra-se que Y^+ e $-X^-$ são ND.

Mostraremos agora uma técnica de truncamento que preserva dependência negativa e será de grande utilidade na obtenção da Lei dos Grandes Números nos próximos capítulos.

Corolário 1.14. *Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias NDI(NDS), então para quaisquer números reais $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ tais que $a_i < b_i, 1 \leq i \leq n$, tem-se que:*

(a) $\{I_{(-\infty < X_i < b_i)}, 1 \leq i \leq n\}$ são NDS(NDI);

(b) $\{Y_i, 1 \leq i \leq n\}$ são NDI(NDS),

onde $Y_i = X_i I_{(a_i \leq X_i \leq b_i)} + b_i I_{(X_i > b_i)} + a_i I_{(X_i < a_i)}$.

Demonstração:

$a)$ Como $\{I_{(-\infty < X_i < b_i)}, 1 \leq i \leq n\}$ são funções não-crescentes e $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s $NDI(NDS)$, pelo Lema 1.10(b), segue que $\{I_{(-\infty < X_i < b_i)}, 1 \leq i \leq n\}$ são $NDS(NDI)$.

$b)$ Temos que $\{Y_i, 1 \leq i \leq n\} = \{X_i I_{(a_i \leq X_i \leq b_i)} + b_i I_{(X_i > b_i)} + a_i I_{(X_i < a_i)}, 1 \leq i \leq n\}$ são v.a.'s não-decrescentes. Como $a_i I_{(X_i < a_i)}$, $X_i I_{(a_i \leq X_i \leq b_i)}$, $b_i I_{(X_i > b_i)}$ são mensuráveis, então $\{Y_i; 1 \leq i \leq n\}$ também são mensuráveis. Pelo Lema 1.10(a), tem-se que $\{Y_i; 1 \leq i \leq n\}$ são $NDI(NDS)$, visto que $X_1, X_2, \ldots$ são v.a.'s $NDI(NDS)$.

■

O próximo lema nos diz, que variáveis aleatórias *Negativamente Dependentes* possuem coeficiente de correlação não-positivo, ou seja, valores maiores de uma variável implicam em valores menores da outra. Isto justifica o nome dependência negativa para qualquer um dos conceitos definidos anteriormente.

Lema 1.15. *Sejam X e Y variáveis aleatórias ND com EX, EY e EXY finitas. Então $EXY \leq EXEY$ e $Cov(X,Y) \leq 0$.*

Demonstração:

$i)$ Suponhamos primeiro que as variáveis aleatórias X e Y são simples não-negativas. Daí,

$$EX = \sum_{i=1}^{n} a_i P(X = a_i) \quad \text{e} \quad EY = \sum_{j=1}^{m} b_j P(Y = b_j).$$

Considerando $A_i = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = a_i\}$ e $B_j = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = b_j\}$, temos que $\{A_i; 1 \leq i \leq n\}$ e $\{B_j; 1 \leq j \leq m\}$ formam partições de Ω.

Agora,

$$\Omega = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right) = \bigcup_{i,j} A_i B_j$$

e

$$X(\omega)Y(\omega) = a_i b_j \quad \text{se} \quad \omega \in A_i B_j.$$

Logo XY é simples e $\{A_i B_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$ forma uma partição de Ω. Assim, pela dependência negativa

$$P(A_i B_j) = P(X(\omega) = a_i; Y(\omega) = b_j) \leq P(X(\omega) = a_i)P(Y(\omega) = b_j) = P(A_i)P(B_j).$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} EXY &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j P(A_i B_j) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j P(A_i)P(B_j) = \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} a_i P(A_i)\right]\left[\sum_{j=1}^{m} b_j P(B_j)\right] = EXEY. \end{aligned}$$

ii) Sejam agora X e Y variáveis aleatórias não-negativas. Então as sequências de variáveis aleatórias simples não-negativas

$$X_n(\omega) = nI_{(X_n(\omega)\geq n)} + \sum_{k=1}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} I_{A_{nk}}(\omega) \quad \text{e} \quad Y_n(\omega) = nI_{(Y_n(\omega)\geq n)} + \sum_{k'=1}^{n2^n-1} \frac{k'}{2^n} I_{B_{nk'}}(\omega)$$

são tais que $0 \leq X_n \uparrow X$ e $0 \leq Y_n \uparrow Y$, onde

$$A_{nk} = \left(\omega : \frac{k}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k+1}{2^n}\right) \quad \text{e} \quad B_{nk'} = \left(\omega : \frac{k'}{2^n} \leq Y(\omega) < \frac{k'+1}{2^n}\right).$$

Pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$EX_n \uparrow EX \quad \text{e} \quad EY_n \uparrow EY.$$

Além disso, $0 \leq X_nY_n \uparrow XY$. Novamente, pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$E[X_nY_n] \uparrow EXY. \tag{1.9}$$

Temos ainda que para cada n, X_n e Y_n são ND. Basta observar que $X_n = \dfrac{[\![2^nX]\!]}{2^n}$ e $Y_n = \dfrac{[\![2^nY]\!]}{2^n}$, onde $[\![x]\!]$ denota a função maior inteiro em x. Como X e Y são ND, o resultado segue do Corolário 1.11, pois a função maior inteiro é não-decrescente.

Assim,

$$EXY = \lim_{n\to\infty} E[X_nY_n] \leq \lim_{n\to\infty}(EX_nEY_n) = \lim_{n\to\infty} EX_n \lim_{n\to\infty} EY_n = EXEY.$$

iii) Para o caso geral com $X = X^+ - X^-$ e $Y = Y^+ - Y^-$, temos

$$EXY = E(X^+Y^+) - E(X^+Y^-) - E(X^-Y^+) + E(X^-Y^-). \tag{1.10}$$

Como X^+, Y^+, X^- e Y^- são não-negativas e ND (Ver Exemplo 1.12), de *ii*) tem-se

$$E(X^+Y^+) \leq EX^+EX^- \quad \text{e} \quad EX^-Y^- \leq EX^-EY^-. \tag{1.11}$$

Afirmação: As variáveis aleatórias X e $-Y$ são ND se, e somente se,

$$P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x)P(Y \leq y).$$

Prova:

Se X e $-Y$ são ND, temos

$$\begin{aligned} P(X \le x, Y \le y) &= P(X \le x, -Y \ge -y) \ge \\ &\ge P(X \le x)P(-Y \ge -y) = \\ &= P(X \le x)P(Y \le y). \end{aligned}$$

Reciprocamente, se X e Y são tais que $P(X \le x, Y \le y) \ge P(X \le x)P(Y \le y)$, então

$$\begin{aligned} P(X \le x, -Y \le y) &= P(X \le x) - P(X \le x, -Y > -y) \le \\ &\le P(X \le x) - P(X \le x)P(Y < -y) = \\ &= P(X \le x)[1 - P(Y < -y)] = \\ &= P(X \le x)P(-Y \le y). \end{aligned}$$

Portanto X e $-Y$ são ND. □

No Exemplo 1.13 verificamos que se X e Y são v.a's ND, então, X^+ e $-Y^-$, Y^+ e $-X^-$ também são ND. Daí, pela Afirmação,

$$P(X^+ \le x, Y^- \le y) \ge P(X^+ \le x)P(Y^- \le y); \tag{1.12}$$

$$P(X^- \le x, Y^+ \le y) \ge P(X^- \le x)P(Y^+ \le y). \tag{1.13}$$

De modo inteiramente análogo à demonstração dos itens $i)$ e $ii)$ mostra-se a partir de (1.12) e (1.13) que

$$EX^+Y^- \ge EX^+EY^- \quad \text{e} \quad EX^-Y^+ \ge EX^-EY^+. \tag{1.14}$$

Logo, o resultado segue de (1.10), (1.11) e (1.14).

Finalmente, como $Cov(X, Y) = EXY - EXEY$, temos

$$Cov(X, Y) \leq EXEY - EXEY = 0.$$

■

Uma técnica chave em teoria da probabilidade para se provar teoremas limites é fazer truncamentos. Dois métodos alternativos de truncagem de uma variável aleatória X são:

$$Y = XI_{(a \leq X \leq b)} \tag{1.15}$$

$$Y' = XI_{(a \leq X \leq b)} + aI_{(X<a)} + bI_{(X>b)} \tag{1.16}$$

onde a e b são constantes reais tais que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Um ou ambos os sinais de igualdade no conjunto da função indicadora de (1.15) pode ser suprimido.

Para variáveis aleatórias negativamente dependentes ocorre um sério problema ao aplicar os métodos usuais de prova (i.e., os métodos para variáveis aleatórias independentes) na obtenção das Leis dos Grandes Números, uma vez que, ao truncar variáveis aleatórias ND, as novas variáveis encontradas podem não ser ND, mesmo quando estas são identicamente distribuídas.

Por exemplo, sejam $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{F}$ uma $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Ω e P assumindo $1/4$ para cada resultado. Então as variáveis aleatórias X e Y definidas sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ dado por:

ω	a	b	c	d
$X(\omega)$	2	1	0	-2
$Y(\omega)$	-2	1	0	2

são ND, mas $|X(\omega)| \equiv |Y(\omega)|$ para todo $\omega \in \Omega$ and $XI_{(|X| \leq 1)}(\omega) \equiv YI_{(|Y| \leq 1)}(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$. Com isso, $U = XI_{(|X| \leq 1)}$ e $V = YI_{(|Y| \leq 1)}$ não são ND.

No entanto, o Corolário 1.14(b) mostra que o método de truncamento (1.16) preserva variáveis aleatórias ND e será útil na obtenção das Leis dos Grandes Números nos próximos capítulos.

Capítulo 2

Lei Fraca dos Grandes Números para v.a's ND

2.1 Introdução

No fim do século XVII e início do século XVIII, James Bernoulli provou um teorema que só foi publicado após a sua morte no ano de 1713 em *Ars Conjectandi* (*A arte da construção de conjecturas*) [16]. Ele considerou uma sequência de ensaios do tipo "sucesso-fracasso" independentes, onde cada ensaio tem mesma probabilidade p de "sucesso" e mostrou que se S_n é o número de sucessos nos primeiros n ensaios, então $\frac{S_n}{n}$ converge para p, quando $n \to \infty$ [21].

Teorema 2.1 (Lei Fraca de Bernoulli)**.** *Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes com distribuição Bernoulli(p). Então $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$, onde $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.*

Em 1866, o matemático Russo P.L. Chebyshev através de um método que usa a chamada *Desigualdade de Chebyshev*, provou que se $X_1, X_2, \ldots$ são v.a.'s duas a duas independentes com variâncias finitas e uniformemente limitadas, então $\frac{S_n - ES_n}{n}$

converge para 0, quando $n \to \infty$. Na realidade, Chebyshev provou o seguinte resultado, que pode ser visto em [12].

Teorema 2.2 (Lei Fraca L^2)**.** *Considere $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias não correlacionadas tais que $EX_i = \mu$ e $var(X_i) \leq C < \infty$. Se $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ então $S_n/n \to \mu$ em L^2 e consequentemente, também em probabilidade.*

Mais tarde em 1928, A.Ya. Khinchin conseguiu mostrar utilizando o método de truncamento, que se as v.a.'s X_n são independentes e também identicamentes distribuídas, então a existência de EX é uma condição suficiente para se deduzir a Lei Fraca dos Grandes Números, sem a hipótese de variância finita. Mais precisamente, ele provou o

Teorema 2.3 (Lei Fraca de Khinchin)**.** *Se $X_1, X_2, \ldots$ são v.a.'s i.i.d. com $E|X_1| < \infty$ e $EX_n = \mu$, então $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$.*

Até aqui, foram consideradas leis fracas para variáveis aletórias independentes com média finita. Mas podemos encontrar leis fracas que também são aplicadas a v.a.'s com média infinita ou sem média. Kolmogorov e Feller obtiveram condições necessárias e suficientes para uma sequência de v.a.'s independentes $X_1, X_2, \ldots$ obedecer a Lei dos Grandes Números (Ver [9] p.116 e [29] p.205).

O próximo teorema é uma extensão do resultado provado por Kolmogorov e Feller, para arranjos triangulares.

Teorema 2.4 (LfGN's para arranjos triangulares)**.** *Considere $(X_{ni}; n \geq 1, 1 \leq i \leq n)$ um arranjo de variáveis aleatórias independentes com funções de distribuição $(F_{ni}; n \geq 1)$ e $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_{ni}$. Seja $(b_n; n \geq 1)$ uma sequência de números reais positivos com $b_n \uparrow +\infty$. Supondo que*

(i) $\sum_{i=1}^{n} P(|X_{ni}| > b_n) \to 0$ *com* $n \to \infty$,

(ii) $\displaystyle \frac{1}{b_n^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{(|x|\leq b_n)} x^2 dF_{ni}(x) \to 0$ *com* $n \to \infty$,

e tomando $a_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int_{(|x|\leq b_n)} x dF_{ni}(x)$, *temos*

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0.$$

Para a demonstração ver [12].

Feller mostrou que para uma sequência de v.a.'s. vale o seguinte:

Teorema 2.5. *Suponha que* $(X_n; n \geq 1)$ *v.a.'s são i.i.d. e* $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. *Então* $\dfrac{S_n}{n} - c_n \to 0$ *em probabilidade se, e somente se,* $nP(|X_1| > n) \to 0$ *com* $n \to \infty$, *onde* $c_n = E\left[X_1 I_{(|X_1|\leq n)}\right]$.

Demonstração: Ver [8], [12] ou [29], . ■

Observe que neste resultado não se faz nenhuma suposição sobre um primeiro momento finito. Além disso é possível mostrar que a *lei fraca de Khinchin* segue como corolário desse teorema (Ver [12]).

2.2 Lei Fraca dos Grandes Números para arranjo de v.a.'s ND

Nesta seção apresentaremos algumas leis fracas para variáveis aleatórias negativamente dependentes. O primeiro resultado é uma extensão do Teorema 2.4 para arranjos de variáveis aleatórias negativamente dependentes. As hipóteses são similares e a idéia da demonstração é basicamente a mesma, mudando apenas o método de truncamento das variáveis. Vimos na Seção 1.4 do Capítulo 1, que o método de truncagem utilizado para demonstrar teoremas limites com a hipótese de idependência entre as variáveis aleatórias não vale em geral quando as variáveis em questão são ND. A diferença nas truncagens está no fato de que a primeira é uma função não monótona e a segunda é monótona não-decrescente. Como foi mostrado no Corolário 1.14, o método 1.16 preserva v.a.'s ND e será utilizado a partir de agora. Uma das vantagens do próximo resultado é que não precisamos de nenhuma hipótese sobre os momentos, podendo considerar assim, variáveis aleatórias com primeiro momento infinito ou sem primeiro momento.

Teorema 2.6. *Sejam* $(X_{ni}; n \geq 1, 1 \leq i \leq n)$ *um arranjo de variáveis aleatórias ND duas a duas em cada linha com funções de distribuição* $(F_{ni}; n \geq 1, 1 \leq i \leq n)$ *e* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_{ni}$. *Seja* $(b_n; n \geq 1)$ *uma sequência de números reais positivos crescendo para* ∞ *e suponha que*

$$\sum_{i=1}^{n} P(|X_{ni}| > b_n) \to 0, \quad com \ n \to \infty, \tag{2.1}$$

e

$$\frac{1}{b_n^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{(|x| \leq b_n)} x^2 dF_{ni}(x) \to 0 \ \ com \ n \to \infty. \tag{2.2}$$

Então,

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0,$$

onde $a_n = \sum_{i=1}^{n} \int_{(|x| \leq b_n)} x dF_{ni}(x)$.

Demonstração:

Para $n \geq 1$ e $1 \leq i \leq n$, defina

$$Y_{ni} = X_{ni} I_{(|X_{ni}| \leq b_n)} + b_n I_{(X_{ni} > b_n)} - b_n I_{(X_{ni} < -b_n)} \quad \text{e} \quad T_n = \sum_{i=1}^{n} Y_{ni}.$$

Com isto, $P(T_n \neq S_n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(Y_{ni} \neq X_{ni}) = \sum_{i=1}^{n} P(|X_{ni}| > b_n)$, donde por (2.1), $P(T_n \neq S_n) \to 0, \quad \text{com} \quad n \to \infty$.

Do Corolário 1.14, $(Y_{ni}; n \geq 1, 0 \leq i \leq n)$ são ND. Assim, pelo Lema 1.15 temos

$$
\begin{aligned}
Var\left(\frac{T_n}{b_n}\right) &= \sum_{i=1}^{n} Var\left(\frac{Y_{ni}}{b_n}\right) + 2\sum_{i<j} Cov\left(\frac{Y_{ni}}{b_n}, \frac{Y_{nj}}{b_n}\right) \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} Var\left(\frac{Y_{ni}}{b_n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ E\left(\frac{Y_{ni}}{b_n}\right)^2 - \left[E\left(\frac{Y_{ni}}{b_n}\right)\right]^2 \right\} \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} E\left(\frac{Y_{ni}}{b_n}\right)^2 = \frac{1}{b_n^2}\sum_{i=1}^{n} E(Y_{ni})^2 = \\
&= \frac{1}{b_n^2}\sum_{i=1}^{n} E\left[X_{ni} I_{(|X_{ni}| \leq b_n)} + b_n I_{(X_{ni} > b_n)} - b_n I_{(X_{ni} < -b_n)}\right]^2 = \\
&= \frac{1}{b_n^2}\sum_{i=1}^{n} E\left[X_{ni}^2 I_{(|X_{ni}| \leq b_n)} + b_n^2 I_{(X_{ni} > b_n)} + b_n^2 I_{(X_{ni} < -b_n)} - \right. \\
&- \left. 2b_n X_{ni} I_{(|X_{ni}| \leq b_n)} I_{(X_{ni} < -b_n)} - 2b_n^2 I_{(X_{ni} > b_n)} I_{(X_{ni} < -b_n)}\right] = \\
&= \frac{1}{b_n^2}\left\{ \sum_{i=1}^{n} E[X_{ni}^2 I_{(|X_{ni}| \leq b_n)}] + b_n^2 \sum_{i=1}^{n} E\left[I_{(X_{ni} > b_n)} + I_{(X_{ni} < -b_n)}\right] \right\} = \\
&= \frac{1}{b_n^2}\sum_{i=1}^{n} E[X_{ni}^2 I_{(|X_{ni}| \leq b_n)}] + \sum_{i=1}^{n} E\left[I_{(X_{ni} > b_n) \cup (X_{ni} < -b_n)}\right] = \\
&= \frac{1}{b_n^2}\sum_{i=1}^{n} E[X_{ni}^2 I_{(|X_{ni}| \leq b_n)}] + \sum_{i=1}^{n} P[(X_{ni} > b_n) \cup (X_{ni} < -b_n)] = \\
&= \frac{1}{b_n^2}\sum_{i=1}^{n} \int_{(|x| \leq b_n)} x^2 F_{ni}(x) + \sum_{i=1}^{n} P(|X_{ni}| > b_n)
\end{aligned}
$$

Daí, de (2.1) e (2.2), $Var\left(\frac{T_n}{b_n}\right) \to 0, \quad \text{com} \quad n \to \infty.$

Agora, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, temos

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|\frac{S_n - ET_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right) &= P\left(\left|\frac{S_n - ET_n}{b_n}\right| > \varepsilon, S_n \neq T_n\right) + \\
&+ P\left(\left|\frac{T_n - ET_n}{b_n}\right| > \varepsilon, S_n = T_n\right) \leq \\
&\leq P(S_n \neq T_n) + P\left(\left|\frac{T_n - ET_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right). \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

Da desigualdade de Tchebyshev,

$$P\left(\left|\frac{T_n - ET_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{T_n}{b_n} - E\left(\frac{T_n}{b_n}\right)\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{Var\left(\frac{T_n}{b_n}\right)}{\varepsilon^2} \to 0,$$

com $n \to \infty$. Logo de (2.3), $\dfrac{S_n - ET_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} ET_n &= \sum_{i=1}^{n} E\left[X_{ni} I_{(|X_{ni}|\leq b_n)} + b_n I_{(X_{ni}>b_n)} - b_n I_{(X_{ni}<-b_n)}\right] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} E\left[X_{ni} I_{(|X_{ni}|\leq b_n}\right] + b_n \sum_{i=1}^{n} E I_{(X_{ni}>b_n)} - b_n \sum_{i=1}^{n} E I_{(X_{ni}<-b_n)} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{(|x|\leq b_n)} x dF_{ni}(x) + b_n \sum_{i=1}^{n} \int_{(x>b_n)} dF_{ni}(x) - b_n \sum_{i=1}^{n} \int_{(x<-b_n)} dF_{ni}(x) = \\ &= a_n + b_n \left[\sum_{i=1}^{n} \int_{(x>b_n)} dF_{ni}(x) - \sum_{i=1}^{n} \int_{(x<-b_n)} dF_{ni}(x)\right] \end{aligned}$$

donde,

$$\frac{ET_n - a_n}{b_n} = \sum_{i=1}^{n} \int_{(x>b_n)} dF_{ni}(x) - \sum_{i=1}^{n} \int_{(x<-b_n)} dF_{ni}(x) \tag{2.4}$$

Por (2.1),

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{(x>b_n)} dF_{ni}(x) + \sum_{i=1}^{n} \int_{(x<-b_n)} dF_{ni}(x) \to 0 \text{ com } n \to \infty.$$

Logo cada parcela de (2.4) converge para 0 e com isto, $\dfrac{ET_n - a_n}{b_n} \to 0$, com $n \to \infty$.

Portanto,

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} = \frac{S_n - ET_n}{b_n} + \frac{ET_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0.$$

∎

No próximo teorema, vamos utilizar um p-ésimo momento $1 < p < 2$. Este teorema é uma consequência do Teorema 2.6 com $b_n = n^{1/p}$ e $a_n = 0$. A vantagem é que não precisamos verificar se as variáveis satisfazem as condições (2.1) e (2.2), que provavelmente seria um pouco mais trabalhoso. Observe que se $E|X|^{2p} < \infty$, então a condição

2.6 é satisfeita (Ver Lema 3.8 p.47). A desigualdade 2.5 significa que para cada n e i a cauda da distribuição das $X'_{ni}s$ são limitadas pela cauda da distribuição de X. O método utilizado na demonstração do Teorema 2.8 exige a condição $1 < p < 2$. Mas antes, precisamos do seguinte:

Lema 2.7. *Para qualquer variável aleatória $X, r \geq 1$ e $p > 0$, tem-se*

(*a*) $E\left[|X|^r I_{(|X| \leq n^{1/p})}\right] \leq r \int_0^{n^{1/p}} t^{r-1} P(|X| > t)dt;$

(*b*) $E\left[|X| I_{(|X| > n^{1/p})}\right] = n^{1/p} P(|X| > n^{1/p}) + \int_{n^{1/p}}^{\infty} P(|X| > t)dt.$

Demonstração:

(a) Fazendo $Y = |X|^r I_{(|X| \leq n^{1/p})}$, temos

$$
\begin{aligned}
EY &= \int_0^\infty P(Y > y)dy = \\
&= \int_0^\infty P(Y > y, |X| > n^{1/p})dy + \int_0^\infty P(Y > y, |X| \leq n^{1/p})dy = \\
&= \int_0^\infty P(Y > y, |X| \leq n^{1/p})dy = \int_0^{n^{r/p}} P(|X|^r > y, |X| \leq n^{1/p})dy \leq \\
&\leq \int_0^{n^{r/p}} P(|X|^r > y)dy = r\int_0^{n^{1/p}} t^{r-1} P(|X| > t)dt.
\end{aligned}
$$

(b) Pondo $Y = |X| I_{(|X| > n^{1/p})}$, temos

$$
\begin{aligned}
EY &= \int_0^\infty P(Y > y)dy = \\
&= \int_0^\infty P(Y > y, |X| > n^{1/p})dy + \int_0^\infty P(Y > y, |X| \leq n^{1/p})dy = \\
&= \int_0^{n^{1/p}} P(Y > y, |X| > n^{1/p})dy + \int_{n^{1/p}}^\infty P(Y > y, |X| > n^{1/p})dy = \\
&= \int_0^{n^{1/p}} P(|X| > n^{1/p})dy + \int_{n^{1/p}}^\infty P(|X| > y)dy = \\
&= n^{1/p} P(|X| > n^{1/p}) + \int_{n^{1/p}}^\infty P(|X| > t)dt.
\end{aligned}
$$

■

Teorema 2.8. *Sejam $(X_{ni}; n \geq 1, 1 \leq i \leq n)$ um arranjo de variáveis aleatórias ND duas a duas em cada linha com $EX_{ni} = 0$ e X uma variável aleatória tal que*

$$P(|X_{ni}| > t) \leq P(|X| > t), \forall\, t > 0. \tag{2.5}$$

Se

$$nP(|X|^p > n) \to 0 \text{ para algum } 1 < p < 2, \tag{2.6}$$

então:

$$\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni} \xrightarrow{P} 0$$

Demonstração:

De (2.5), tem-se $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(|X_{ni}| > n^{1/p}) \leq \sum_{i=0}^{n} P(|X| > n^{1/p}) = nP(|X| > n^{1/p})$, donde por (2.6), $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(|X_{ni}| > n^{1/p}) \to 0$, com $n \to \infty$ e $1 < p < 2$. De (2.6), dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos encontrar $A = A(\varepsilon)$ tal que para para todo $t \geq A$,

$$P(|X| > t) \leq \frac{\varepsilon(p-1)}{t^p}. \tag{2.7}$$

Assim, do Lema 2.7(a), para todo $n \geq A^p$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{2/p}} \sum_{i=1}^{n} E\left[X_{ni}^2 I_{(|X_{ni}| \leq n^{1/p})}\right] &\leq \frac{2}{n^{2/p}} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{n^{1/p}} tP(|X_{ni}| > t)dt \leq \text{(por 2.5)} \\
&\leq \frac{2n}{n^{2/p}} \int_0^{n^{1/p}} tP(|X| > t)dt = \\
&= \frac{2n}{n^{2/p}} \left[\int_0^{A} tP(|X| > t)dt + \int_A^{n^{1/p}} tP(|X| > t)dt\right] \leq \text{(por 2.7)} \\
&\leq \frac{2n}{n^{2/p}} \left[\int_0^{A} tP(|X| > t)dt + \int_A^{n^{1/p}} t\frac{\varepsilon(p-1)}{t^p}dt\right] \leq \\
&\leq \frac{nA^2}{n^{2/p}} + \frac{2\varepsilon(p-1)n}{(2-p)n^{2/p}}[n^{\frac{1}{p}(2-p)} - A^{2-p}] = \\
&= n^{1-\frac{2}{p}}A^2 + \frac{2\varepsilon(p-1)}{2-p} - \frac{2\varepsilon(p-1)}{2-p}n^{1-\frac{2}{p}}A^{2-p} \leq \\
&\leq n^{1-\frac{2}{p}}A^2 + \frac{2\varepsilon(p-1)}{2-p}
\end{aligned}$$

Como $2/p > 1$ então $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2/p}} \sum_{i=1}^{n} E\left[X_{ni}^2 I_{(|X_{ni}|\leq n^{1/p})}\right] \leq \frac{2\varepsilon(p-1)}{2-p}$ e sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário segue que $\frac{1}{n^{2/p}} \sum_{i=1}^{n} E\left[X_{ni}^2 I_{(|X_{ni}|\leq n^{1/p})}\right] \to 0$ com $n \to \infty$. Do Teorema 2.6 temos que $\frac{S_n - a_n}{n^{1/p}} \xrightarrow{P} 0$, onde $a_n = \sum_{i=1}^{n} E\left[X_{ni} I_{(|X_{ni}|\leq n^{1/p})}\right]$. Daí, a prova estará completa se mostrarmos que

$$\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} E\left[X_{ni} I_{(|X_{ni}|\leq n^{1/p})}\right] \to 0 \text{ com } n \to \infty. \tag{2.8}$$

Dado que $EX_{ni} = 0$ temos,

$$\begin{aligned} \left|E\left[X_{ni} I_{(|X_{ni}|\leq n^{1/p})}\right]\right| &= \left|EX_{ni} - E\left[X_{ni} I_{(|X_{ni}|> n^{1/p})}\right]\right| \leq \\ &\leq E\left[|X_{ni}| I_{(|X_{ni}|> n^{1/p})}\right]. \end{aligned}$$

Do Lema 2.7(b) tem-se

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} E\left[X_{ni} I_{(|X_{ni}|\leq n^{1/p}}\right]\right| &\leq \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} E\left[|X_{ni}| I_{(|X_{ni}|> n^{1/p})}\right] = \\ &= \frac{1}{n^{1/p}} \left(\sum_{i=1}^{n} n^{1/p} P(|X_{ni}| > n^{1/p}) + \sum_{i=1}^{n} \int_{n^{1/p}}^{\infty} P(|X_{ni}| > t)dt \right) \leq (\text{por } 2.5) \\ &\leq nP(|X| > n^{1/p}) + \frac{n}{n^{1/p}} \int_{n^{1/p}}^{\infty} P(|X| > t)dt. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Como $nP(|X| > n^{1/p}) = nP(|X|^p > n) \to 0$, de (2.6), o primeiro termo de (2.9) tende para 0 com $n \to \infty$. Por outro lado, para $\varepsilon > 0$ arbitrário e para todo $n \geq A^p$, segue-se a partir de (2.7) que

$$\begin{aligned} \frac{n}{n^{1/p}} \int_{n^{1/p}}^{\infty} P(|X| > t)dt &\leq \frac{n}{n^{1/p}} \int_{n^{1/p}}^{\infty} (p-1)\frac{\varepsilon}{t^p} dt = \\ &= \frac{n}{n^{1/p}} \varepsilon(p-1) \frac{(n^{1/p})^{1-p}}{p-1} = \varepsilon \end{aligned} \tag{2.10}$$

implicando que o segundo termo de (2.9) vai para 0 com $n \to \infty$, donde segue o resultado. ∎

O próximo resultado é uma lei fraca obtida como consequência do Teorema 2.6. Veremos que a condição (2.11) implica em (2.1) com $b_n = n$ e a dificuldade maior na prova do Teorema 2.9 está na verificação da condição (2.2). Uma outra observação, é que a condição (2.11) pode ocorrer sem a existência de um primeiro momento finito (Ver Exemplo 1 em [29] p.208). Por outro lado, se $E|X| < \infty$, é possível mostrar que $nP(|X| > n) \to 0$ com $n \to \infty$. A demonstração desse fato pode ser vista em [30] p.46.

Teorema 2.9. *Sejam* $(X_{ni}; n \geq 1, 1 \leq i \leq n)$ *um arranjo de variáveis aleatórias ND duas a duas em cada linha e* X *uma variável aleatória satisfazendo* (2.5) *e*

$$nP(|X| > n) \to 0 \text{ com } n \to \infty. \tag{2.11}$$

Então

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{ni} - c_{ni}) \xrightarrow{P} 0,$$

onde $c_{ni} = E\left[X_{ni}I_{(|X_{ni}|\leq n)}\right]$.

Demonstração:

Por (2.5) e (2.11) temos

$$\sum_{i=1}^{n} P(|X_{ni}| > n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(|X| > n) = nP(|X| > n) \to 0, \text{ com } n \to \infty.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} E\left[X_{ni}^2 I_{(|X_{ni}|\leq n)}\right] &= \sum_{i=1}^{n} E\left[X_{ni}^2 I_{\cup_{j=1}^{n}(j-1<|X_{ni}|\leq j)}\right] = \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left[X_{ni}^2 \sum_{j=1}^{n} I_{(j-1<|X_{ni}|\leq j)}\right] = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E\left[X_{ni}^2 I_{(j-1<|X_{ni}|\leq j)}\right] = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \int_{(j-1<|x|\leq j)} x^2 dF_{ni}(x) \leq
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{(j-1<|x|\leq j)} j^2 dF_{ni}(x) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^2 P(j-1<|X_{ni}|\leq j) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^2 [P(|X_{ni}|>j-1) - P(|X_{ni}|>j)] = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\{P(|X_{ni}|>0) - P(|X_{ni}|>1) + \\
&+ 2^2[P(|X_{ni}|>1) - P(|X_{ni}|>2)] + \\
&+ 3^2[P(|X_{ni}|>2) - P(|X_{ni}|>3)] + \cdots + \\
&+ n^2[P(|X_{ni}|>n-1) - P(|X_{ni}|>n)]\big\} = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\big[P(|X_{ni}|>0 + (2^2-1)P(|X_{ni}|>1) + (3^2-2^2)P(|X_{ni}|>2) + \\
&+ \cdots + (n^2-(n-1)^2)P(|X_{ni}|>n-1) - n^2P(|X_{ni}|>n)\big] = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[P(|X_{ni}|>0) - n^2P(|X_{ni}|>n) + \sum_{j=1}^{n-1}(2j+1)P(|X_{ni}|>j)\right] \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\left[1 + \sum_{j=1}^{n-1}(2j+1)P(|X_{ni}|>j)\right] = \\
&= n + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1} jP(|X_{ni}|>j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}P(|X_{ni}|>j) = \\
&= n + 2\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n} jP(|X_{ni}|>j) + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}P(|X_{ni}|>j) \leq \text{(por 2.5)} \\
&\leq n + 2n\sum_{j=1}^{n-1} jP(|X|>j) + n\sum_{j=1}^{n-1}P(|X|>j)
\end{aligned}
$$

De (2.11) segue-se que

$$
\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E\left[X_{ni}^2 I_{(|X_{ni}|\leq n)}\right] \leq \frac{1}{n} + \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n-1} jP(|X|>j) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}P(|X|>j) \to 0
$$

com $n \to \infty$, uma vez que $\lim_{n\to\infty} nP(|X| > n) = 0$ implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} jP(|X| > j) = 0.$$

Agora, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{ni} - c_{ni}) = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} X_{ni} - \sum_{i=1}^{n} c_{ni}\right] = \frac{1}{n}(S_n - a_n)$, onde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_{ni}$ e $a_n = \sum_{i=1}^{n} c_{ni}$. Portanto, o resultado segue do Teorema 2.6, com $b_n = n$.

■

Corolário 2.10. *Seja $(X_n; n \geq 1)$ uma sequência de variáveis aleatórias ND duas a duas identicamente distribuídas. Se*

$$nP(|X_1| > n) \to 0 \ \ \textit{com} \ \ n \to \infty, \tag{2.12}$$

então

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - c_n) \xrightarrow{P} 0 \tag{2.13}$$

onde $c_n = E\left[X_1 I_{(|X_1| \leq n)}\right] + o(1), n \geq 1.$

Demonstração:

Sendo $X_1, X_2, \ldots$ identicamente distribuídas, temos $P(|X_n| > t) = P(|X_1| > t), \forall\, t > 0$, ou seja, $(X_n; n \geq 1)$ satisfaz (2.5). Logo o resultado segue do teorema anterior. ■

Observação: No caso em que as v.a.'s são independentes e identicamente distribuídas, as condições (2.12) e (2.13) são equivalentes (Teorema 2.5).

Capítulo 3

Lei Forte dos Grandes Números para v.a.'s ND

3.1 Introdução

Neste capítulo introduzimos um conceito de convergência que implica em convergência quase certa. A partir desse conceito, mostramos na Seção 3.2 (Teorema 3.9) uma lei forte dos grandes números para variáveis aleatórias negativamente dependentes, onde o item (iii) é a extensão de um resultado válido para variáveis aleatórias independentes e que foi provado por Marcinkiewicz e Zygmund (Teorema 3.3). Apresentamos também duas leis dos grandes números em que não é necessária a hipótese de dependência negativa (Teorema 3.10).

Definição 3.1. *Seja* $(X_n; n \geq 1)$ *uma sequência de variáveis aleatórias. Dizemos que* $(X_n; n \geq 1)$ *converge para 0 completamente se para todo* $\varepsilon > 0$, *temos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) < \infty.$$

Notação: $X_n \xrightarrow{C} 0$.

Esta definição foi introduzida em 1947 por Hsu e Robbins [18]. Utilizando o lema de Borel-Cantelli é possível mostrar que convergência completa implica em convergência quase-certa. Para a demonstração ver [1] p.224 ou [31] p.11. A recíproca vale para variáveis aleatórias independentes, mas é falsa em geral. (Ver [1]).

Para convergência completa é válida a seguinte propriedade:

Propriedade 3.2.

a) Se $X_n \xrightarrow{C} 0$ e $Y_n \xrightarrow{C} 0$ então $X_n + Y_n \xrightarrow{C} 0$.

b) Se $X_n \xrightarrow{C} 0$ e $(a_n; n \geq 1)$ é uma sequência de números reais tal que $a_n \to 0$ com $n \to \infty$, então $X_n + a_n \xrightarrow{C} 0$.

Demonstração:

a) Como $X_n \xrightarrow{C} 0$ e $Y_n \xrightarrow{C} 0$, então $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) < \infty$, para todo $\varepsilon > 0$. Assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n + Y_n| > \varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|Y_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right) < \infty, \forall\, \varepsilon > 0.$$

Portanto $X_n + Y_n \xrightarrow{C} 0$.

b) Se $a_n \to 0$ com $n \to \infty$, então dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \;\Rightarrow\; |a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Daí

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|a_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right) = \sum_{n=1}^{n_0} P\left(|a_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} P\left(|a_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right) = \sum_{n=1}^{n_0} P\left(|a_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right) < \infty.$$

Por outro lado, como $X_n \xrightarrow{C} 0$ temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right) < \infty, \forall\, \varepsilon > 0.$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_n + a_n| > \varepsilon\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|a_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right) < \infty.$$

Portanto $X_n + a_n \xrightarrow{C} 0$. ■

Para sequências $(X_n; n \geq 1)$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, Borel mostrou que $(X_n; n \geq 1)$ obedece a Lei Forte dos Grandes Números se, $E|X_1|^4 < \infty$. Em 1956, Kolmogorov melhorou significamente este resultado e reduziu a condição de momento para $E|X_1| < \infty$. Depois em 1981, Etemadi conseguiu mostrar que a mesma lei continua válida, assumindo apenas que as v.a.'s sejam duas a duas i.i.d. com $E|X_1| < \infty$. Marcinkiewicz e Zygmund generalizaram o resultado de Kolmogorov e provaram uma lei forte para $(X_n; n \geq 1)$ quando $E|X|^p < \infty$ para algum $1 \leq p < 2$. Mas precisamente eles mostraram o seguinte

Teorema 3.3. *Se $X_1, X_2, \ldots$ são variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas com $EX_1 = 0$ e se $1 \leq p < 2$, então*

$$\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} X_i \to 0, \quad q.c. \qquad \textit{se, e somente se } E|X_1|^p < \infty. \tag{3.1}$$

Para a demonstração ver [8] p.122 e [1] p.256.

A equivalência em (3.1) é uma generalização da Lei Forte dos Grandes Números de Kolmogorov com $p = 1$.

Os dois próximos teoremas são válidos para arranjos de v.a.'s independentes, cujas provas serão omitidas e podem ser encontradas em [14] e [20].

Teorema 3.4. *Seja $(X_{ni}; n \geq 1, 1 \leq i \leq n)$ um arranjo de v.a.'s i.i.d. tal que $EX_{11} = 0$. Então para $1 \leq p < 2$,*

$$\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni} \to 0 \ \textit{completamente} \ \ \textit{se, e somente se}, E|X_{11}|^{2p} < \infty.$$

Teorema 3.5. *Se $(X_{ni}; n \geq 1, 1 \leq i \leq n)$ um arranjo de v.a.'s independentes em cada linha com $EX_{ni} = 0$ e se existe uma v.a. X tal que $P(|X_{ni}| > t) \leq P(|X| > t), \forall\, t > 0$*

e $E|X|^{2p} < \infty$ *para algum* $1 \leq p < 2$*, então*

$$\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni} \to 0 \text{ completamente.}$$

3.2 Lei Forte dos Grandes Números para arranjos de v.a.'s ND

Nesta seção veremos uma lei forte para arranjos de variáveis aleatórias ND (Teorema 3.9) e duas leis (fraca e forte) em que não são necessárias as hipóteses de dependência negativa e nem $EX_{ni} = 0$ (Teorema 3.10). A condição *(i)* do Teorema 3.9 para variáveis independentes é uma consequência da Primeira Lei Forte de Kolmogorov (ver [21] p.210) e a condição *(iii)* é uma extensão dos Teoremas 3.3, 3.4 e 3.5 para arranjos de v.a.'s ND. Para a demonstração do Teorema 3.9, precisaremos dos seguintes lemas:

Lema 3.6. ([3]) *Sejam* $X_1, \ldots, X_n$ *v.a.'s NDS e não negativas. Então*

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) \leq \prod_{i=1}^{n} EX_i.$$

Demonstração:

Como $X_1, \ldots, X_n$ são não-negativas e NDS, temos

$$\begin{aligned} E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty P(X_1 > x_1, \ldots, X_n > x_n)dx_1 \cdots dx_n \leq \\ &\leq \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x_i)dx_1 \cdots dx_n = \prod_{i=1}^{n} EX_i \end{aligned}$$

■

Lema 3.7. ([3]) *Se* X *é uma v.a. tal que* $|X| \leq M$ *q.c. e* $EX = 0$*, então*

$$1 \leq E(e^{tX}) \leq e^{t^2 EX^2} \leq e^{t^2 M^2}, \text{ para todo } |t| \leq \frac{1}{M}.$$

Demonstração:

Lembrando que $1 + x \leq e^x$, para todo x real, temos

$$\begin{aligned}
1 + tX &\leq e^{tX} = 1 + tX + \frac{t^2X^2}{2!} + \frac{t^3X^3}{3!} + \cdots \leq 1 + tX + \frac{t^2X^2}{2!} + \frac{|tX|^3}{3!} + \cdots = \\
&= 1 + tX + t^2X^2 \left(\frac{1}{2!} + \frac{|tX|}{3!} + \frac{|tX|^2}{4!} + \cdots \right) \leq \\
&\leq 1 + tX + t^2X^2 \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \cdots \right) \leq 1 + tX + t^2X^2.
\end{aligned}$$

Daí,

$$1 + tEX \leq Ee^{tX} \leq 1 + tEX + t^2EX^2 \leq e^{tEX + t^2EX^2}.$$

Como $EX = 0$, segue que $1 \leq Ee^{tX} \leq e^{t^2EX^2}$. ■

Lema 3.8. *Para qualquer variável aleatória X e $p > 0$, se $E|X|^{2p} < \infty$ então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP(|X|^p > n) < \infty.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
E|X|^{2p} &= \int_0^\infty P(|X|^{2p} > t)dt = (\text{fazendo } t = s^2) \\
&= 2\int_0^\infty P(|X|^p > s)sds = 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_{n-1}}^{a_n} P(|X|^p > s)sds, \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

onde $a_{n-1}^2 - a_n^2 = n, n \geq 1$ e $a_0 = 0$. Daí $a_n \leq n$ para todo $n \geq 1$.

De fato, se $n = 1$ tem-se $a_1 \leq 1$, pois $a_1 = 1$. Suponhamos que $a_n \leq n$, para $n \geq 1$. Então

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = n + 1 \;\Rightarrow\; a_{n+1}^2 \leq n^2 + n + 1 \;\Rightarrow\; a_{n+1} \leq \sqrt{n^2 + n + 1} \leq n + 1.$$

Portanto, pelo Princípio de Indução, $a_n \leq n, \forall\, n \geq 1$.

Agora, se $a_{n-1} \leq s \leq a_n$, temos $s \leq n$ e assim $(|X|^p > n) \subset (|X|^p > s)$. Logo de (3.2),

$$E|X|^{2p} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_{n-1}}^{a_n} P(|X|^p > s)sds \geq 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_{n-1}}^{a_n} P(|X|^p > n)sds =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(|X|^p > n)(a_n^2 - a_{n-1})ds = \sum_{n=1}^{\infty} nP(|X|^p > n).$$

Como $E|X|^{2p} < \infty$ segue que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nP(|X|^p > n) < \infty$. ■

Teorema 3.9. *Seja* $(X_{ni}; n \geq 1, 1 \leq i \leq n)$ *um arranjo de variáveis aleatórias* ND *em cada linha tal que* $EX_{ni} = 0$ *para cada* n *e* i. *Então*

(i) $|X_{ni}| \leq M, 0 < p < 2$ *ou*

(ii) $P(|X_{ni}| > t) \leq P(|X| > t)$ *para todo* $t > 0$ *e* $E|X|^{2p} < \infty, 0 < p < 2$

implica que

$$\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni} \to 0 \ \textit{completamente.}$$

Demonstração:

(a) Suponha que $|X_{ni}| \leq M, 0 < p < 2$ e $\varepsilon > 0$. Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\left|\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni}\right| > \varepsilon\right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left[\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni} > \varepsilon\right] + \sum_{n=1}^{\infty} P\left[\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} (-X_{ni}) > \varepsilon\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\left[\frac{1}{M\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni} > \frac{\varepsilon n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}{M}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} P\left[\frac{1}{M\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (-X_{ni}) > \frac{\varepsilon n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}{M}\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\left[e^{\frac{1}{M\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni}} > e^{\frac{\varepsilon n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}{M}}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} P\left[e^{\frac{1}{M\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (-X_{ni})} > e^{\frac{\varepsilon n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}{M}}\right] \leq \text{(Des. de Markov)}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}{M}} E\left[e^{\frac{1}{M\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni}}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}{M}} E\left[e^{\frac{1}{M\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (-X_{ni})}\right] \leq \text{(Lema 3.6)}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2 n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}{M}} \prod_{i=1}^{n} E\left[e^{\frac{1}{M\sqrt{n}} X_{ni}}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}{M}} \prod_{i=1}^{n} E\left[e^{\frac{1}{M\sqrt{n}} (-X_{ni})}\right] \leq \text{(Lema 3.7)}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}{M}} \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{1}{M^2 n} M^2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}{M}} \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{1}{M^2 n} M^2} =$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}{M}} \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{1}{n}} = 2e \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}{M}} < \infty, \text{ pelo teste da integral}$$

pois $\int_0^\infty e^{-ax^b}dx < \infty, \forall\, a > 0, b > 0$ e $\frac{1}{p} - \frac{1}{2} > 0$ para $0 < p < 2$. Logo

$$\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni} \to 0 \text{ completamente.}$$

(b) Sejam m um inteiro positivo ($m \geq 4$) tal que $\frac{m}{m+1} \geq \frac{p}{2}$ e $\alpha = \left(\frac{m}{m+1}\right)\frac{1}{p}$. Observe que

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni} > \varepsilon\right] \quad \subset & \quad \left[\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni} I_{(|X_{ni}| \leq n^\alpha)} > \frac{\varepsilon}{2}\right] \cup \\
\cup & \quad \left[\frac{1}{n^{1/p}} X_{ni} > \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para algum} \quad i, 1 \leq i \leq n\right] \cup \\
\cup & \quad \left[X_{ni} > n^\alpha \quad \text{para pelo menos dois valores de} \quad i, 1 \leq i \leq n\right].
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni} > \varepsilon\right] \quad \leq & \quad \sum_{n=1}^{\infty} P\left[\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni} I_{(|X_{ni}| \leq n^\alpha)} > \frac{\varepsilon}{2}\right] + \\
+ & \quad \sum_{n=1}^{\infty} P\left[\frac{1}{n^{1/p}} X_{ni} > \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para algum} \quad i, 1 \leq i \leq n\right] + \\
+ & \quad \sum_{n=1}^{\infty} P\left[X_{ni} > n^\alpha \quad \text{para pelo menos dois valores de } i,\ 1 \leq i \leq n\right]. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que cada termo do lado direito da desigualdade acima é finito.

No segundo termo de (3.3), temos

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} P\left[\frac{1}{n^{1/p}} X_{ni} > \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para algum} \quad i, 1 \leq i \leq n\right] = \\
= & \quad \sum_{n=1}^{\infty} P\left[\bigcup_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n^{1/p}} X_{ni} > \frac{\varepsilon}{2}\right)\right] \leq \\
\leq & \quad \sum_{n=1}^{\infty} P\left[\bigcup_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n^{1/p}} |X_{ni}| > \frac{\varepsilon}{2}\right)\right] \leq \\
\leq & \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} P\left(|X_{ni}| > \frac{\varepsilon}{2} n^{1/p}\right) \leq \text{(por } (ii))
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} P\left(|X| > \frac{\varepsilon}{2}n^{1/p}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nP\left(\left|\frac{2}{\varepsilon}X\right|^{p} > n\right) < \infty. \tag{3.4}$$

Fazendo $Y = \dfrac{2}{\varepsilon}X$, temos $E|Y|^{2p} = \left(\dfrac{2}{\varepsilon}\right)^{2} E|X|^{2p} < \infty$. Daí, pelo Lema 3.8, de (3.4) segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\frac{1}{n^{1/p}}X_{ni} > \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para algum} \quad i, 1 \leq i \leq n\right] < \infty$$

O terceiro termo de (3.3) pode ser escrito da seguinte forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left[X_{ni} > n^{\alpha} \quad \text{para pelo menos dois valores de } i,\ 1 \leq i \leq n\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\left[\bigcup_{\substack{i,k=1\\ k\neq i}}^{n} (X_{ni} > n^{\alpha}, X_{nk} > n^{\alpha})\right] \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{i,k=1\\ k\neq i}}^{n} P(X_{ni} > n^{\alpha}, X_{nk} > n^{\alpha}) \leq \text{(Dependência Negativa)}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{i,k=1\\ k\neq i}}^{n} P(X_{ni} > n^{\alpha})P(X_{nk} > n^{\alpha}) \leq \text{(Por } (ii))$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{i,k=1\\ k\neq i}}^{n} P(|X| > n^{\alpha})P(|X| > n^{\alpha}) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)[P(|X| > n^{\alpha})]^{2} \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)(E|X|^{2p})^{2}(n^{-2\alpha p})^{2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} Cn(n-1)n^{-4\alpha p} \leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{2-4\alpha p} \leq \text{(pois } 2-4\alpha p \leq -6/5)$$

$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-6/5} < \infty.$$

Agora, para o primeiro termo de (3.3), defina

$$Y_{ni} = X_{ni}I_{(|X_{ni}| \leq n^{\alpha})} + n^{\alpha}I_{(X_{ni} > n^{\alpha})} - n^{\alpha}I_{(X_{ni} < -n^{\alpha})} \tag{3.5}$$

de modo que pelo Corolário 1.14, $(Y_{ni}; n \geq 1, 1 \leq k \leq n)$ são ND.

Daí

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni} I_{(|X_{ni}| \leq n^{\alpha})} &= \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} Y_{ni} + \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} n^{\alpha} I_{(X_{ni} < -n^{\alpha})} - \\
&- \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} n^{\alpha} I_{(X_{ni} > n^{\alpha})} + \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} EY_{ni} - \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} EY_{ni} = \\
&= \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} (Y_{ni} - EY_{ni}) + \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} \left[EX_{ni} I_{(|X_{ni}| \leq n^{\alpha})} + \right. \\
&+ \left. n^{\alpha} P(X_{ni} > n^{\alpha}) - n^{\alpha} P(X_{ni} < -n^{\alpha}) \right] + \\
&+ \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} n^{\alpha} I_{(X_{ni} < -n^{\alpha})} - \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} n^{\alpha} I_{(X_{ni} > n^{\alpha})} = \\
&= \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} (Y_{ni} - EY_{ni}) + \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} \left[EX_{ni} I_{(|X_{ni}| \leq n^{\alpha})} \right] + \\
&+ \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} n^{\alpha} \left[I_{(X_{ni} < -n^{\alpha})} - P(X_{ni} < -n^{\alpha}) \right] - \\
&- \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} n^{\alpha} \left[I_{(X_{ni} > n^{\alpha})} - P(X_{ni} > n^{\alpha}) \right] \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Mostraremos que o primeiro, o terceiro e o quarto termos de (3.6) convergem completamente para 0 e o segundo tende a 0 com $n \to \infty$. Para isto, dividiremos a demonstração em 3 passos.

Passo 1: Mostrar que $\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} n^{\alpha} \left[I_{(X_{ni} < -n^{\alpha})} - P(X_{ni} < -n^{\alpha}) \right] \xrightarrow{C} 0$.

Seja $Z_{ni} = n^{\alpha} \left[I_{(X_{ni} > n^{\alpha})} - P(X_{ni} > n^{\alpha}) \right]$, donde

$$|Z_{ni}| \leq n^{\alpha} \text{ e } EZ_{ni}^2 \leq n^{2\alpha} \left[\frac{E|X_{ni}|^{2p}}{n^{2p\alpha}} \right]. \qquad (3.7)$$

Para $\delta = \frac{1}{p} - \alpha = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{m+1} \right) > 0$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} P \left[\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} Z_{ni} > \varepsilon \right] = \sum_{n=1}^{\infty} P \left[\frac{1}{n^{\frac{1}{p} - \delta}} \sum_{i=1}^{n} Z_{ni} > \varepsilon n^{\delta} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} P \left[\frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{i=1}^{n} Z_{ni} > \varepsilon n^{\delta} \right] =$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\left[e^{\frac{1}{n^\alpha}\sum_{i=1}^{n} Z_{ni}} > e^{\varepsilon n^\delta}\right] \leq \text{(Des. de Markov)} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n^\delta} E e^{\frac{1}{n^\alpha}\sum_{i=1}^{n} Z_{ni}} \leq \text{(Lemas 3.6 e 3.7)} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n^\delta} \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{1}{n^{2\alpha}} E Z_{ni}^2} \leq \text{(por (3.7))} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n^\delta} \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{1}{n^{2\alpha}} n^{2\alpha} \frac{E|X_{ni}|^{2p}}{n^{2p\alpha}}} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n^\delta} e^{\sum_{i=1}^{n} \frac{E|X_{ni}|^{2p}}{n^{2p\alpha}}} \leq \text{(por } \textit{(ii)}\text{)} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n^\delta} e^{\sum_{i=1}^{n} \frac{E|X|^{2p}}{n^{2p\alpha}}} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n^\delta} e^{E|X|^{2p} n^{1-2p\alpha}} \leq \\
&\leq K \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n^\delta} < \infty, \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

uma vez que $a_n = e^{E|X|^{2p} n^{1-2p\alpha}}$ é limitada, pois $2p\alpha = 2\left(\dfrac{m}{m+1}\right) \geq 1$ e, pelo teste da integral, $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n^\delta} < \infty$. Da mesma forma, verifica-se que

$$
\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} W_{ni} > \varepsilon\right] < \infty, \qquad (3.9)
$$

onde $W_{ni} = n^\alpha \left[I_{(X_{ni} < -n^\alpha)} - P(X_{ni} < -n^\alpha)\right]$.
Logo $\dfrac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} n^\alpha \left[I_{(X_{ni}<-n^\alpha)} - P(X_{ni} < -n^\alpha)\right]$ e $\dfrac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} n^\alpha \left[I_{(X_{ni}>n^\alpha)} - P(X_{ni} > n^\alpha)\right]$ convergem completamente para 0.

Passo 2: Mostrar que $\dfrac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} (Y_{ni} - EY_{ni}) \xrightarrow{C} 0$.

De (3.5) temos

$$
EY_{ni}^2 = E\left[X_{ni}^2 I_{(|X_{ni}| \leq n^\alpha)} + n^{2\alpha} I_{(X_{ni} > n^\alpha)} + n^{2\alpha} I_{(X_{ni} < -n^\alpha)} - \right.
$$

$$
\begin{aligned}
& - \quad 2n^{\alpha} X_{ni} I_{(|X_{ni}| \le n^{\alpha})} I_{(X_{ni} < -n^{\alpha})} - 2n^{2\alpha} I_{(X_{ni} > n^{\alpha})} - 2n^{2\alpha} I_{(X_{ni} > n^{\alpha})} I_{(X_{ni}^{<} - n^{\alpha})} \Big] = \\
& = \quad E\left\{ X_{ni}^2 I_{(|X_{ni}| \le n^{\alpha})} + n^{2\alpha} \left[I_{(X_{ni} > n^{\alpha})} + I_{(X_{ni} < -n^{\alpha})} \right] \right\} = \\
& = \quad EX_{ni}^2 I_{(|X_{ni}| \le n^{\alpha})} + n^{2\alpha} E I_{(|X_{ni}| > n^{\alpha})} = \\
& = \quad EX_{ni}^2 I_{(|X_{ni}| \le n^{\alpha})} + n^{2\alpha} P(|X_{ni}| > n^{\alpha}) \le (\text{Lema } 2.7(a)) \\
& \le \quad n^{2\alpha} P(|X_{ni}| > n^{\alpha}) + 2 \int_0^{n^{\alpha}} t P(|X_{ni}| > t) dt = \qquad (3.10) \\
& = \quad n^{2\alpha} P(|X_{ni}| > n^{\alpha}) + 2 \int_0^{1} t P(|X_{ni}| > t) dt + 2 \int_1^{n^{\alpha}} t P(|X_{ni}| > t) dt \le (\text{por } (ii)) \\
& \le \quad n^{2\alpha} P(|X| > n^{\alpha}) + 2 \int_0^{1} t dt + 2 \int_1^{n^{\alpha}} t P(|X| > t) dt \le (\text{Des. de Markov}) \\
& \le \quad n^{2\alpha} \frac{E|X|^{2p}}{n^{2\alpha p}} + 1 + 2 \int_1^{n^{\alpha}} t \frac{E|X|^{2p}}{t^{2p}} dt \le \\
& \le \quad n^{2\alpha - 2\alpha p} E|X|^{2p} + 1 + \frac{E|X|^{2p}}{|1-p|} n^{2\alpha - 2\alpha p},
\end{aligned}
$$

desde que $p \neq 1$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} EY_{ni}^2 \quad & \le \quad n^{1+2\alpha-2\alpha p} E|X|^{2p} + n + \frac{E|X|^{2p}}{|1-p|} n^{1+2\alpha-2\alpha p} = \\
& = \quad n^{1+2\alpha-2\alpha p} \left(E|X|^{2p} + \frac{E|X|^{2p}}{|1-p|} \right) + n = \\
& = \quad Cn^{1+2\alpha-2\alpha p} + n, \ \text{ para todo } \ 0 < p < 2 \ \text{ e } \ p \neq 1. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} (Y_{ni} - EY_{ni}) > \varepsilon \right] \quad & = \quad \sum_{n=1}^{\infty} P\left[\frac{1}{2n^{\alpha}} \sum_{i=1}^{n} (Y_{ni} - EY_{ni}) > \frac{n^{\delta}}{2} \varepsilon \right] = \\
& = \quad \sum_{n=1}^{\infty} P\left[e^{(2n^{\alpha})^{-1} \sum_{i=1}^{n} (Y_{ni} - EY_{ni})} > e^{\frac{n^{\delta}\varepsilon}{2}} \right] \le (\text{Markov}) \\
& \le \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^{\delta}\varepsilon}{2}} E\left[e^{(2n^{\alpha})^{-1} \sum_{i=1}^{n} (Y_{ni} - EY_{ni})} \right] \le (\text{Lema } 3.6) \\
& \le \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^{\delta}\varepsilon}{2}} \prod_{i=1}^{n} E\left[e^{(2n^{\alpha})^{-1} (Y_{ni} - EY_{ni})} \right] \le (\text{Lema } 3.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^{\delta}\varepsilon}{2}} \prod_{i=1}^{n} e^{(2n^{\alpha})^{-2}E(Y_{ni}-EY_{ni})^2} \leq \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^{\delta}\varepsilon}{2}} e^{(2n^{\alpha})^{-2}\sum_{i=1}^{n} EY_{ni}^2} \leq (\text{por}(3.11)) \qquad (3.12)\\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^{\delta}\varepsilon}{2}} e^{(2n^{\alpha})^{-2}(Cn^{1+2\alpha-2\alpha p}+n)} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon n^{\delta}}{2}} e^{\frac{1}{4}(Cn^{1-2\alpha p}+n^{1-2\alpha})} \leq \\
&\leq K\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^{\delta}\varepsilon}{2}} < \infty, \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

pois, $1-2\alpha p = 1-2\left(\dfrac{m}{m+1}\right)\dfrac{1}{p}p = \dfrac{1-m}{m+1} \leq 0, 2\alpha \geq 1$ e $\delta > 0$.

Quando $p=1$, de (3.10) temos

$$
\begin{aligned}
EY_{ni}^2 &\leq n^{2\alpha}P(|X|>n^{\alpha}) + 2\int_0^{n^{\alpha}} tP(|X|>t)dt = (\text{fazendo } s=t^2)\\
&= n^{2\alpha}P(|X|>n^{\alpha}) + 2\int_0^{n^{2\alpha}} tP(|X|^2>s)ds \leq 2EX^2.
\end{aligned}
$$

Desta forma, de (3.12) segue que

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^{n}(Y_{ni}-EY_{ni}) > \varepsilon\right] &\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^{\delta}\varepsilon}{2}} e^{(2n^{\alpha})^{-2}2nEX^2} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon n^{\delta}}{2}} e^{\frac{1}{2}EX^2n^{1-2\alpha}} \leq \\
&\leq K\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^{\delta}\varepsilon}{2}} < \infty, \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

visto que $1-2\alpha = \dfrac{1-m}{m+1} < 0$ e $\delta > 0$. Logo $\dfrac{1}{n^{1/p}}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(Y_{ni}-EY_{ni})$ converge completamente para 0.

Passo 3: Mostar que $\dfrac{1}{n^{1/p}}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E\left[X_{ni}I_{(|X_{ni}|\leq n^{\alpha})}\right] \to 0$ com $n\to\infty$.

Como $X_{ni}I_{(|X_{ni}|\leq n^\alpha)} = X_{ni} - X_{ni}I_{(|X_{ni}>n^\alpha)}$, segue que $EX_{ni}I_{(|X_{ni}|\leq n^\alpha)} = -EX_{ni}I_{(|X_{ni}|>n^\alpha)}$. Se $p > \dfrac{1}{2}$, para n suficientemente grande tal que $P(|X| > t) < \dfrac{\varepsilon}{t^{2p}}$ para $t \geq n^\alpha$, temos

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^{n} EX_{ni}I_{(|X_{ni}|\leq n^\alpha)}\right| &\leq \frac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^{n} E\left[|X_{ni}|I_{(|X_{ni}|\leq n^\alpha)}\right] = \frac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^{n} E\left[|X_{ni}|I_{(|X_{ni}|>n^\alpha)}\right] = \\
&= \frac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^{n}\left[n^\alpha P(|X_{ni}| > n^\alpha) + \int_{n^\alpha}^{\infty} P(|X_{ni}| > t)dt\right] \leq \\
&\leq \frac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^{n}\left[n^\alpha P(|X| > n^\alpha) + \int_{n^\alpha}^{\infty} P(|X| > t)dt\right] = \\
&= \frac{n}{n^{1/p}}\left[n^\alpha P(|X| > n^\alpha) + \frac{n}{n^{1/p}}\int_{n^\alpha}^{\infty} P(|X| > t)dt\right] \leq \\
&\leq n^{1-\frac{1}{p}+\alpha}\frac{\varepsilon}{n^{2\alpha p}} + \frac{n}{n^{1/p}}\int_{n^\alpha}^{\infty}\frac{\varepsilon}{t^{2p}}dt = \\
&= \varepsilon(n^{-2\alpha p-\frac{1}{p}+\alpha+1}) + c\varepsilon(n^{-2\alpha p-\frac{1}{p}+\alpha+1}) = \\
&= (c+1)\; n^{-2\alpha p-\frac{1}{p}+\alpha+1} \to 0, \;\text{ com }\; n \to \infty
\end{aligned}
$$

uma vez que $-2\alpha p - \frac{1}{p} + \alpha + 1 = -\dfrac{2m}{m+1} - \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{1}{m+1}\right) + 1 = \dfrac{p(1-m)-1}{p(m+1)} < 0.$
Logo

$$\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^{n} EX_{ni}I_{(|X_{ni}|\leq n^\alpha)} \to 0 \;\text{ com }\; n \to \infty.$$

Se $p = \dfrac{1}{2}$, então $E|X| = E|X|^{2p} < \infty$ e daí,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} EX_{ni}I_{(|X_{ni}|\leq n^\alpha)}\right| &\leq \frac{1}{n}n^\alpha P(|X| > n^\alpha) + \frac{1}{n}\int_{n^\alpha}^{\infty} P(|X| > t)dt \leq \\
&\leq \frac{2}{n}E|X| \to 0, \text{com } n \to \infty. \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

Para $p < \dfrac{1}{2}$, $E|X|^{2p} < \infty$ implica que $P(|X| > t) \leq \dfrac{1}{t^{2p}}$ onde $t \geq A$ (para alguma constante A). Assim, para $n \geq A^{1/\alpha}$

$$\left|\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^{n} EX_{ni}I_{(|X_{ni}|\leq n^\alpha)}\right| \leq \frac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^{n} E|X_{ni}|I_{(|X_{ni}|\leq n^\alpha)} \leq (\text{Lema } 2.7(a))$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{n^\alpha} P(|X_{ni}| > t)dt \leq \text{(por } (iii))\\
&\leq \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{n^\alpha} P(|X| > t)dt =\\
&= \frac{n}{n^{1/p}} \int_0^{n^\alpha} P(|X| > t)dt =\\
&= \frac{n}{n^{1/p}} \left[\int_0^{A} P(|X| > t)dt + \int_A^{n^\alpha} P(|X| > t)dt\right] \leq\\
&\leq \frac{n}{n^{1/p}} \left[\int_0^{A} P(|X| > t)dt + \int_A^{n^\alpha} t^{-2p}dt\right] \leq\\
&\leq \frac{n}{n^{1/p}} \left[A + \frac{(n^\alpha)^{1-2p}}{1-2p} - \frac{A^{1-2p}}{1-2p}\right] \leq\\
&\leq \frac{n}{n^{1/p}} \left[A + \frac{(n^\alpha)^{1-2p}}{1-2p}\right] = n^{1-\frac{1}{p}}A + \frac{1}{1-2p} n^{-2\alpha p+\alpha+1-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Logo, $\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} E\left[X_{ni} I_{(|X_{ni}| \leq n^\alpha)}\right] \to 0$ com $n \to \infty$, pois $1 - \frac{1}{p} < 0$ e $-2\alpha p + \alpha + 1 - \frac{1}{p} = \frac{p(1-m)-1}{p(m+1)} < 0$.

Assim, dos passos 1, 2 e 3 temos pela Propriedade 3.2 que

$$
\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni} I_{(|X_{ni}| \leq n^\alpha)} > \frac{\varepsilon}{2}\right] < \infty.
$$

Logo,

$$
\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni} > \varepsilon\right) < \infty.
$$

De forma similar, mostra-se que

$$
\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} (-X_{ni}) > \varepsilon\right) < \infty,
$$

uma vez que $(X'_{ni} = -X_{ni}; n \geq 1, 1 \leq i \leq n)$ também é um arranjo de variáveis aleatórias ND com as mesmas condições de momento. Portanto

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni}\right| > \varepsilon\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni} > \varepsilon\right) +\\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} (-X_{ni}) > \varepsilon\right) < \infty, \forall\, \varepsilon > 0
\end{aligned}
$$

ou seja, $\dfrac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^{n} X_{ni} \to 0$ completamente. ■

O próximo teorema mostra que nem dependência negativa e nem $EX_{ni} = 0$ são necessárias para a obtenção de uma lei forte (onde $0 < p < 1/2$) ou uma lei fraca (onde $1/2 < p < 1$) para arranjos de variáveis aleatórias.

Teorema 3.10. *Seja $(X_{ni}; n \geq 1, 1 \leq i \leq n)$ um arranjo de variáveis aleatórias. Suponha que exista uma v.a. X tal que $P(|X_{ni}| > t) \leq P(|X| > t), \forall\, t > 0$ e $E|X|^{2p} < \infty$ para $0 < p < 1$. Então*

(i) $\dfrac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^{n} X_{ni} \to 0$ *completamente, se $0 < p < 1/2$;*

(ii) $\dfrac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^{n} X_{ni} \to 0$ *em probabilidade, se $1/2 \leq p < 1$.*

Demonstração:

(i)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\left|\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^{n} X_{ni}\right| > \varepsilon\right] &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left[\left|\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^{n} X_{ni} I_{(|X_{ni}| \leq n^{1/p})}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right] + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} P\left[\left|\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^{n} X_{ni} I_{(|X_{ni}| > n^{1/p})}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \leq \\
&\leq \frac{2}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^{n} E|X_{ni} I_{(|X_{ni}| \leq n^{1/p})}| + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} P\left[\bigcup_{i=1}^{n}(|X_{ni}| > n^{1/p})\right] \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Para o segundo termo de (3.16),

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\bigcup_{i=1}^{n}(|X_{ni}| > n^{1/p})\right] &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} P\left[|X_{ni}| > n^{1/p}\right] \leq \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} P\left[|X| > n^{1/p}\right] = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nP\left[|X| > n^{1/p}\right] < \infty, \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

pelo Lema 3.8, pois $E|X|^{2p} < \infty$.

Agora, para o primeiro termo de (3.16),

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} E|X_{ni} I_{(|X_{ni}| \leq n^{1/p})}| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{n^{1/p}} P(|X_{ni}| > t)dt \leq \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/p}} n \int_0^{n^{1/p}} P(|X| > t)dt = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/p}} n \int_0^{1} P(|X| > n^{1/p}s) n^{1/p} ds = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^{1} P(|s^{-1}X|^p > n) ds = \\
&= \int_0^{1} \sum_{n=1}^{\infty} nP(|s^{-1}X|^p > n) ds \leq \text{(Lema 3.8)} \\
&\leq \int_0^{1} E|s^{-1}X|^{2p} ds = \\
&= E|X|^{2p} \frac{1}{1-2p} < \infty, \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

pois $E|X|^{2p} < \infty$. Portanto de (3.16), (3.17) e (3.18) segue o resultado.

(ii) Da desigualdade de Markov, dado $\varepsilon > 0$ temos

$$P\left(\left| \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni} \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon} E \left| \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} X_{ni} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} E|X_{ni}|.$$

Basta mostrar que $\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} E|X_{ni}| \to 0$ com $n \to \infty$.

Por hipótese, $P(|X_{ni}| > t) \leq P(|X| > t), \forall\, t > 0$ e $p \geq 1/2$ implicam $E|X_{ni}| \leq E|X| < \infty$. Assim, $\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} E|X_{ni}| \leq \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} E|X| = n^{1-1/p} E|X| \to 0$, quando $n \to \infty$, dado que $p < 1$. ■

Referências Bibliográficas

[1] Athreya, K.B. and Lahiri, S.N., *Measure Theory and Probability Theory*, Springer, New York, 2006.

[2] Bozorgnia, A., Amini, M., *Negatively dependent bounded random variable probability inequalities and the strong law of large numbers*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, **13:**3 (2000),261-267.

[3] Bozorgnia, A., Patterson, R.F. and Taylor, R.L., *A strong law of large numbers for arrays of rowwise negatively dependent random variables*, Stochastic Analysis and Applications, **20:**3 (2002), 643-656.

[4] Bozorgnia, A., Patterson, R.F. and Taylor, R.L., *Limit theorems for dependent random variables*, Proc. First World Cong. of Nonl. Anal. (ed. by V. Lakshmikantham), Walter de Grutyer, Berlin (1996), 1639-1650.

[5] Bozorgnia, A., Patterson, R.F. and Taylor, R.L., *Weak laws of large numbers for arrays of rowwise negatively dependent random variables*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, **14:**3 (2001), 227-236.

[6] Block, H.W, Savits, T.H., and Shahed, M. *Some concepts of negative dependence.* The Annals of Probability, **10** (1982), 765-772.

[7] Chen, Y, and Ng, K.W., *The ruin probability of the renewal model with constant interest force and negatively dependent heavy-tailed claims*, Insurance: Mathematics and Economics, **40** (2007), 415-423.

[8] Chow, Y.S. and Teicher, H., *Probability Theory: Independence, Interchangeability Martingales*, 3nd Ed, Springer, New York, 2003.

[9] Chung, K.L., *A Course of Probability Theory*, 3nd Ed, Academic Press, New York, 2001.

[10] Derman, C. and Ross, S., *Reliability for a system with dependent components*, Probability in the Engineering and Informational Sciences **9** (1995), n°1, 59-63.

[11] Dubhashi, D. and Ranjan, D., *Balls and bins: a study in negative dependence*, Random Structures Algorithms, **13** (1998), 99-124.

[12] Durrett, R., *Probability: Theory and Examples*, 2nd Ed, Duxbury Press, California, 1996.

[13] Ebrahimi, N. and Ghosh, M., *Multivariate negative dependence*, Communications in Statistics. Theory Methods **A10** (1981), 307-337.

[14] Erdos,P., *On a Theorem of Hsu and Robbins*, The Annals of Mathematical Statistics **20** (1949), 286-291.

[15] Esary, J.D., Proschan, F., *Relationships among some concepts of bivariate dependence*, The Annals of Mathematical Statistics **38** (1972), 651-655.

[16] Gnedenko, B., *The Theory of Probability*, Tradução para o inglês de Kurs Teoriia Veroiatnostei, Mir, Moscou, 1976.

[17] Ghosh, S. and Puri, M.L., *Asymptotics Nonparametrics and Time Series*, vol.158, CR Press, Siberia, 1999.

[18] Hsu, P.L., Robbins, H., *Complete convergence and the law of large numbers*, Proceedings of the National Academy of Sciences **33** (1947), 25-31.

[19] Hu, T. and Yang, J., *Further developments on sufficient conditions for negative dependence of random variables*, Statistics & Probability Letters **66** (2004), 369-381.

[20] Hu, T.-C., Móricz, F. and Taylor, R.L., *Strong laws of large numbers for arrays of rowwise independent random variables*, Acta Mathematica Hungárica **54**(1-2) (1989), 153-162.

[21] James, B.R., *Probabilidade: um curso em nível intermediário*, 3nd Ed, CNPq-IMPA, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2006.

[22] Joag-dev, K. and Proschan, F., *Negative association of random variables, with applications*, The Annals of Statistics, **11** (1983), 286-295.

[23] Lehmann, E.L., *Some concepts of dependence*, Thes Annals of Mathematical Statistics **43** (1966), 1137-1153.

[24] Matula, P., *A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables*, Statistics & Probability Letters **15** (1992), 209-213.

[25] National Research Council (Panel on Spatial Statistics and Image Processing) *Spatial Statistics and Digital Image Analysis*, National Academy Press, Washington, D.C., 1991.

[26] Newman, C.M., *Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables*, Inequalities in Statistics and Probability, IMS Lecture Notes 5 (1984), 127-140.

[27] Newman, C.M., *Normal Fluctuations and the FKF Inequalities*, Communications in Mathematical Physics, **74** (1980), 119-128.

[28] Phan, H., *Handbook of Reliability Engineering*, Springer, New Jersey, 2003.

[29] Resnick, S.I., *A Probability Path*, Birkhauser, Boston, 1999.

[30] Serfling, R.J., *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, New York, 1980.

[31] Stout W.F., *Almost Sure Convergence*, Academic Press, New York, 1974.