Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Grupos Solúveis e Pronilpotentes com Condições de Engel

Wállef Januário Pereira da Silva

Brasília
2022

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Wállef Januário Pereira da Silva[1]

Grupos Solúveis e Pronilpotentes com Condições de Engel

Tese apresentada à Universidade de Brasília como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Pavel Shumyatsky

Brasília
2022

[1] O autor contou com apoio financeiro da Capes durante uma parte do doutorado.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Jg

Januário Pereira da Silva, Wállef
Grupos Solúveis e Pronilpotentes com Condições de Engel / Wállef Januário Pereira da Silva; orientador Pavel Shumyatsky. -- Brasília, 2022.
78 p.

Tese(Doutorado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2022.

1. Elementos Engel. 2. Grupos Pronilpotentes. 3. Grupos Solúveis. I. Shumyatsky, Pavel, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de
Matemática

Grupos Solúveis e Pronilpotentes com Condições de Engel

Wállef Januário Pereira da Silva*

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 11 de novembro de 2022.

Comissão Examinadora:

____

Prof. Dr. Pavel Shumyatsky - MAT/UnB (Orientador)

____

Profa. Dra. Cristina Acciarri – MAT/UnB (Membro)

____

Prof. Dr. Jhone Caldeira Silva– UFG (Membro)

____

Prof. Dr. Carmine Monetta – Universidade de Salerno -Itália (Membro)

Abstract

Let G be a finitely generated pronilpotent group. In this work we consider the conditions:

($*$) For every $x, y \in G$ there are positive integers $n = n(x, y)$ and $q = q(x, y)$ such that $[x,_n y^q] = 1$;

($**$) For every $x, y \in G$ there are positive integers $n = n(x, y)$ and $q = q(x, y)$ such that $[x^q,_n y] = 1$.

We show that if G satisfies ($*$) then G is a virtually nilpotent group. If G satisfies ($**$) then G is nilpotent. When G is a finitely generated soluble (abstract) group satisfying ($*$) or ($**$), we show that G is virtually nilpotent. This generalizes Gruenberg's theorem which says that every finitely generated soluble Engel group is nilpotent.

Keywords: Engel Elements, Pronilpotent Groups, Soluble Groups.

Resumo

Seja G um grupo pronilpotente finitamente gerado. Neste trabalho, consideramos as seguintes condições:

($*$) Para quaisquer $x, y \in G$ existem inteiros positivos $n = n(x, y)$ e $q = q(x, y)$ tais que $[x, {}_n y^q] = 1$;

($**$) Para quaisquer $x, y \in G$ existem inteiros positivos $n = n(x, y)$ e $q = q(x, y)$ tais que $[x^q, {}_n y] = 1$.

Mostramos que se G satisfaz ($*$), então G é um grupo virtualmente nilpotente. Se G satisfaz ($**$), então G é um grupo nilpotente. Quando G é um grupo (abstrato) solúvel finitamente gerado satisfazendo ($*$) ou ($**$) então G é virtualmente nilpotente. A última afirmação generaliza o teorema de Gruenberg que diz que todo grupo solúvel Engel finitamente gerado é nilpotente.

Palavras-chave: Elementos Engel; Grupos Pronilpotentes; Grupos Solúveis.

Agradecimentos

"Enquanto houver vontade de lutar
haverá esperança de vencer."
– Santo Agostinho

Em uma palavra desejo expressar o amor, a paciência, o estresse, a perseverança, a raiva, a angústia, o desespero, o esforço, e demais sentimentos que me envolveram durante todos esses anos de doutorado.

Agradeço à Deus pela graça e sabedoria, me dando forças para lutar e me trazendo sempre à memória aquilo que me dá esperança.

À minha família pelo apoio. Em especial, ao meu pai que para mim é um exemplo de inteligência e sabedoria.

Aos meus professores de matemática pela minha formação e pela inspiração que me deram para seguir neste caminho.

Ao professor Pavel Shumyatsky pela orientação, pelos conselhos e confiança. Por toda ajuda e incentivo nesta minha iniciação à pesquisa.

Aos amigos e colegas que estiveram comigo em todos esses anos de universidade, os quais não conseguiria citar sem cometer a injustiça de deixar de mencionar algum.

Aos professores Pavel Shumyatsky, Cristina Acciarri, Carmine Monetta, Jhone Silva, Igor Lima, pelas sugestões e correções para melhorar este trabalho.

Aos funcionários do departamento de matemática da UnB pela solicitude.

À Capes pelo apoio financeiro.

Aos que estiveram na retaguarda, gritando bem baixinho: "Siga em frente!", eu agradeço! Não somente com um obrigado momentâneo, mas com uma lembrança eterna em meu coração.

"Man's mind, stretched to a new idea, never goes back to its original dimension."

– Oliver Wendell Holmes.

À Deus, fonte de toda sabedoria.
À família e amigos, base de toda felicidade.

Sumário

Lista de Símbolos

Símbolo	**Descrição**
$\mathbb{F}, \mathbb{F}_p$	corpo, corpo com p elementos
$\mathbb{Z}_p$	anel dos inteiros p-ádicos
$L(G)$	álgebra de Lie associada a um grupo G
$dl(G)$	comprimento derivado de G
$X \subseteq G$	X é um subconjunto de G
$H \leq G$	H é subgrupo de G
x^y	$y^{-1}xy$
$[x, y]$	$x^{-1}y^{-1}xy$
$[x, {}_n y]$	$[[x, {}_{n-1} y], y]$ com $n \geq 2$
$\langle X \rangle$	subgrupo gerado por X
$[A, B]$	$\langle [a, b] \mid a \in A, b \in B \rangle$
G'	$[G, G]$
G/N	grupo quociente de G por um subgrupo normal N
$G_1 \times G_2$	produto cartesiano de G_1 e G_2
$\gamma_k(G)$	k-ésimo termo da série central inferior de G
$G^{(k)}$	k-ésimo termo da série derivada de G
G^k	$\langle g^k \mid g \in G \rangle$
X^G	fecho normal do conjunto X em G
π	conjunto de números primos
$max\{a, b, \ldots, c\}$	maior elemento do conjunto de números $\{a, b, \ldots, c\}$
$mmc\{a, b, \ldots, c\}$	mínimo múltiplo comum dos números $\{a, b, \ldots, c\}$
$\lvert X \rvert$	cardinalidade do conjunto X

Introdução

A teoria de grupos com condições de Engel tem início essencialmente com os trabalhos de W. Burnside [13, 14] em 1902. Um elemento g de um grupo G é dito ser Engel se para cada $x \in G$ existe um inteiro positivo $n = n(x)$ tal que

$$[x, {}_n g] = 1,$$

onde $[x, {}_1 g] = [x, g]$ e $[x, {}_s g] = [[x, {}_{s-1} g], g]$ para qualquer $s > 1$. Quando n pode ser escolhido independente de x então dizemos que g é n-Engel. Se todos os elementos de um grupo G são Engel (n-Engel) então dizemos que G é um grupo Engel (n-Engel).

Um grupo G é dito ser localmente nilpotente se qualquer subconjunto finito de G gera um subgrupo nilpotente. As condições de Engel generalizam a propriedade de nilpotência local em grupos. De fato, E. S. Golod mostrou em 1964 que existem grupos finitamente gerados Engel que não são nilpotentes [21]. Por conta disso, podemos fazer o seguinte questionamento:

Pergunta. *Quais condições são suficientes para que um grupo finitamente gerado Engel seja nilpotente?*

Foram obtidos vários resultados que respondem à pergunta anterior [57], sendo que um dos primeiros resultados, devido a M. Zorn (1936), diz que todo grupo finito

Engel é nilpotente [68]. Algum tempo depois, em 1953, K. W. Gruenberg mostrou que a condição de solubilidade também nos dá uma resposta para tal questionamento, quando divulgou o seguinte resultado:

Teorema. [22, Theorem 1] *Todo grupo solúvel finitamente gerado Engel é nilpotente.*

É válido notar também que condições de Engel em álgebras de Lie possuíram um papel importante no desenvolvimento da Teoria dos Grupos. Uma álgebra de Lie L é um espaço vetorial com uma operação $[,] : L \times L \to L$ chamada produto de Lie, que é bilinear, anticomutativa e satisfaz a identidade de Jacobi. Uma álgebra de Lie L é dita ser n-Engel se, para todos $x, y \in L$, tivermos

$$[x, {}_n y] = 0.$$

Estudos de W. Magnus e I. N. Sanov (veja, por exemplo, [36, 38, 46]), feitos entre as décadas de 1930 e 1950, mostravam que o estudo de álgebras de Lie m-geradas, $(p-1)$-Engel sobre um corpo com p elementos traria uma resposta positiva para o Problema Restrito de Burnside (PRB) para grupos de expoente primo p [23], o qual, neste caso, questiona se existe um número dependendo de m, p que limita a ordem de qualquer grupo finito m-gerado e de expoente p.

Mais tarde, em 1991, E. Zelmanov deu uma solução completa para o PRB utilizando também métodos de Lie [63, 65] e tais métodos trouxeram grandes contribuições para Teoria de Grupos, sobre as quais podemos citar as referências [47, 48, 49, 50, 58, 60].

Lembramos que um grupo topológico G é dito ser profinito (pronilpotente) se for compacto, totalmente desconexo e G/L é finito (nilpotente finito) para todo subgrupo normal aberto L de G. O seguinte teorema foi demonstrado por Wilson e Zelmanov (1992) para grupos profinitos Engel:

Teorema. [60, Theorem 5] *Um grupo profinito é localmente nilpotente se, e somente* *se, é Engel.*

Generalizações das condições de Engel têm sido investigadas para outras classes de grupos como grupos residualmente finitos [9, 55], grupos lineares [52] e grupos compactos [7, 29]. Um grupo G é dito ser virtualmente nilpotente se possui um subgrupo normal N nilpotente tal que G/N é finito. Neste contexto, uma generalização do teorema de Wilson-Zelmanov foi obtida por Bastos e Shumyatsky (2015) no seguinte sentido:

Teorema. [7, Theorem 1.1] *Seja G um grupo profinito finitamente gerado tal que para todo $x \in G$ existe um inteiro positivo $q = q(x)$ tal que x^q é Engel. Então, G é virtualmente nilpotente.*

Neste trabalho, investigamos grupos solúveis e grupos pronilpotentes finitamente gerados com as condições $(*)$ e $(**)$ dadas por:

$(*)$ Para todos $x, y \in G$ existem inteiros positivos $n = n(x, y)$ e $q = q(x, y)$ tais que $[x, {}_n y^q] = 1$;

$(**)$ Para todos $x, y \in G$ existem inteiros positivos $n = n(x, y)$ e $q = q(x, y)$ tais que $[x^q, {}_n y] = 1$,

e obtivemos os seguintes resultados:

Teorema A. *Seja G um grupo solúvel finitamente gerado satisfazendo $(*)$ ou $(**)$. Então, G é virtualmente nilpotente.*

Teorema B. *Seja G um grupo pronilpotente finitamente gerado.*

(a) Se G satisfaz $(*)$, então G é virtualmente nilpotente.

(b) Se G satisfaz $(**)$, então G é nilpotente.

Nossos resultados foram publicados em [53]. Acreditamos que o Teorema B é válido para todos os grupos compactos, mas até o momento não obtivemos sucesso.

Observamos que o Teorema A generaliza o Teorema de Gruenberg (1953) para grupos solúveis citado anteriormente.

A demonstração do Teorema A é feita por indução no comprimento derivado do grupo G e a seguinte proposição nos ajuda a alcançar este objetivo:

Proposição C. *Seja G um grupo finitamente gerado satisfazendo* $(*)$ *ou* $(**)$. *Então o subgrupo comutador G' é finitamente gerado.*

Este trabalho está dividido em 5 capítulos. No Capítulo 1 fazemos um resumo dos conceitos principais usados no texto, começando com algumas definições em teoria de grupos abstratos, seguindo por grupos topológicos com destaque para grupos profinitos e finalizamos com álgebras de Lie.

O Capítulo 2 é dedicado a condições de Engel em grupos, contendo alguns resultados principais que surgiram no desenvolvimento dessa teoria, desde os trabalhos de Burnside até os trabalhos que motivaram nossos resultados e finalizamos o Capítulo 2 demonstrando a Proposição C.

No Capítulo 3, demonstramos o Teorema A e no Capítulo 4 demonstramos o Teorema B.

No Capítulo 5 dedicamos um espaço para fazer nossas considerações finais trazendo alguns resultados mais recentes e perguntas relacionadas a condições de Engel.

1

Conceitos Preliminares

Neste capítulo faremos um resumo dos principais conceitos e resultados utilizados no desenvolvimento deste trabalho, começando com conceitos em Teoria de Grupos Abstratos, seguindo com Grupos Profinitos e, por fim, fazendo menção de Métodos Lie Teóricos em teoria de grupos. Mais detalhes dos conteúdos aqui citados podem ser consultados, por exemplo, nas referências [16, 31, 45].

1.1 Grupos Abstratos

Seja G um grupo e $X \subseteq G$. Usaremos a notação $\langle X \rangle$ para subgrupo gerado por X. Se G possui um subconjunto finito X tal que $G = \langle X \rangle$, então dizemos que G é um grupo *finitamente gerado.*

Definição 1.1.1. *Seja $\mathfrak{X}$ uma propriedade de grupos. Um grupo G é dito ser localmente $\mathfrak{X}$ se todo subgrupo finitamente gerado de G tem a propriedade $\mathfrak{X}$.*

Definição 1.1.2. *Seja $\mathfrak{X}$ uma propriedade de grupos. Um grupo G é dito ser virtualmente $\mathfrak{X}$ se G possui um subgrupo normal N tal que N possui $\mathfrak{X}$ e G/N é finito.*

Exemplos 1.1.3.

1. Um grupo G é localmente finito quando todo subgrupo finitamente gerado de G é finito;

2. Um grupo G é virtualmente abeliano quando G possui um subgrupo normal N tal que N é um grupo abeliano e G/N é finito.

Sejam X, Y subgrupos de um grupo G. Denotamos por X^Y o menor subgrupo de G contendo X que é normalizado por Y. Obviamente, $X^Y = \langle y^{-1}Xy \,|\, y \in Y\rangle$. Em particular, quando $Y = G$ chamamos X^G de *fecho normal* de X em G.

Alguns resultados que serão citados ao longo do texto são obtidos sob a condição de grupos que satisfazem identidades e tal propriedade está relacionada com o conceito de palavras de grupo.

Uma *palavra de grupo*, ou simplesmente *palavra*, é um elemento não trivial $w = w(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ do grupo livre $F = F(X)$, onde $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ é um conjunto de geradores livres de F. Neste texto, nossas palavras são tomadas na sua forma reduzida. Para mais detalhes sobre grupos livres e suas propriedades veja, por exemplo, [45, Cap. 2].

Definição 1.1.4. *Sejam G um grupo e $w = w(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ uma palavra. Um grupo G é dito satisfazer a identidade $w \equiv 1$ se $w(g_1, \ldots, g_s) = 1$ para todos $g_1, \ldots, g_s \in G$.*

Seguindo J. Wilson e E. Zelmanov [60] definimos o que significa um grupo satisfazer uma identidade de classes laterais.

Definição 1.1.5. *Um grupo G é dito satisfazer uma identidade de classes laterais se existirem uma palavra $w = w(x_1, \ldots, x_m)$, elementos $a_1, \ldots, a_m \in G$ e um subgrupo $H \leq G$ tais que $w(a_1h_1, \ldots, a_mh_m) = 1$ para todos $h_1, \ldots, h_m \in H$.*

O teorema a seguir, devido a Tits, garante uma propriedade muito útil em grupos lineares finitamente gerados. Lembramos que um grupo G é dito ser linear se for isomorfo a um subgrupo do grupo $GL_n(K)$ das matrizes inversíveis $n \times n$ para algum corpo K e algum inteiro positivo n.

Teorema 1.1.6. (Alternativa de Tits)[56, Corollary 1] *Um grupo linear finitamente gerado ou contém um subgrupo livre não-abeliano ou tem um subgrupo solúvel de índice finito.*

Comutadores

A seguir definiremos comutador de grupo e demonstraremos algumas propriedades relacionadas. Outras propriedades podem ser facilmente verificadas utilizando a definição ou podem ser encontradas nas referências (veja, por exemplo, [45, Cap. 5]).

Sejam G um grupo, $x_1, x_2 \in G$. O *comutador* de x_1 e x_2 é dado por

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2 = x_1^{-1}x_1^{x_2}.$$

Mais geralmente, para $s \geq 2$ e elementos $x_1, \ldots, x_s \in G$, denotamos recursivamente o comutador dos elementos $x_1, \ldots, x_s$ pela regra

$$[x_1, \ldots, x_s] = [[x_1, \ldots, x_{s-1}], x_s],$$

onde $[x_1] = x_1$, por convenção.

Chamamos de *comutador de peso 1* a qualquer elemento $g \in G$ e, indutivamente, definimos *comutador de peso* $s \geq 2$ a qualquer comutador da forma $[w_1, w_2]$ onde w_1 é um comutador de peso $n_1 < s$ e w_2 é um comutador de peso $n_2 < s$ com $n_1 + n_2 = s$.

Para todo inteiro não negativo n define-se indutivamente o *n-ésimo comutador de Engel* por

$$[x_1, {}_0x_2] = x_1; \;\; [x_1, {}_nx_2] = [[x_1, {}_{n-1}x_2], x_2] \text{ para todo } n \geq 1.$$

As afirmações do seguinte lema serão usadas no texto sem referência.

Lema 1.1.7. [45, 5.1.5, Exercise 5.1.4] *Para quaisquer elementos x, y, z de um grupo G e um inteiro positivo r, as seguintes identidades são válidas:*

(a) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z] = [x, z][x, z, y][y, z]$;

(b) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z = [x, z][x, y][x, y, z]$;

(c) $[x^{-1}, z] = \left([x, z]^{-1}\right)^{x^{-1}} = [x, z]^{-x^{-1}} = [z, x]^{x^{-1}}$;

(d) $[x, y^r] = [x, y][x, y]^y \ldots [x, y]^{y^{(r-2)}}[x, y]^{y^{(r-1)}} = \prod_{j=0}^{r-1}[x, y]^{y^j}$;

(e) (Identidade de Hall-Witt) $[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1$.

Seguindo J. Wilson e E. Zelmanov [60] trazemos uma generalização da afirmação (a) do Lema 1.1.7. Tal generalização já é conhecida na literatura e sua demonstração será feita para conveniência do leitor.

Lema 1.1.8. *Sejam G um grupo, $x, y, z \in G$ e $n \geq 1$. Então,*

$$[xy, {}_n z] = [x, {}_n z][y, {}_n z]v(x, y, z),$$

onde $v(x, y, z)$ é um produto de comutadores de pesos pelo menos $n+2$ envolvendo x, y e envolvendo z pelo menos n vezes.

Demonstração: Faremos indução em n. Se $n = 1$ então

$$[xy, z] = [x, z][y, z]h(x, y, z),$$

com $h(x, y, z) = [x, z, y][[x, z, y], [y, z]]$. Agora suponhamos que para $n \geq 2$ temos

$$[xy, {}_{n-1} z] = [x, {}_{n-1} z][y, {}_{n-1} z]t(x, y, z),$$

onde $t(x, y, z)$ é um produto de comutadores de pesos pelo menos $n + 1$ envolvendo

x, y e envolvendo z pelo menos $n-1$ vezes. Denote

$$a = [x, {}_{n-1}z], \ b = [y, {}_{n-1}z] \ \text{ e } t = t(x, y, z).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
[xy, {}_n z] &= [[xy, {}_{n-1}z], z] \\
&= [abt, z] \\
&= [a, z][a, z, bt][bt, z] \\
&= [a, z][a, z, t][a, z, b][a, z, b, t][b, z][b, z, t][t, z]. \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

Afirmamos que o lado direito de (1.1) é

$$[x, {}_n z][y, {}_n z]v(x, y, z),$$

onde $v(x, y, z)$ é um produto de comutadores de pesos pelo menos $n+2$, envolvendo x, y e envolvendo z pelo menos n vezes. De fato, basta analisar os comutadores em (1.1) que contém t em uma de suas entradas.

Assim, escreva $t = y_1 y_2$ onde y_1 é um comutador de peso pelo menos $n+1$, envolvendo x e y e envolvendo z pelo menos $n-1$ vezes e y_2 é o produto dos demais comutadores aparecendo em t. Segue que

$$[t, z] = [y_1 y_2, z] = [y_1, z][y_1, z, y_2][y_2, z]. \qquad (1.2)$$

Da mesma forma, para cada g sendo um dos elementos $[a, z], [a, z, b], [b, z]$ obtemos

$$[g, t] = [g, y_1 y_2] = [g, y_2][g, y_1][g, y_1, y_2]. \qquad (1.3)$$

De (1.2) e (1.3), depois de um número finito de passos, obtemos que $[t, z]$ e $[g, t]$ são produtos de comutadores de pesos pelo menos $n + 2$, envolvendo x, y e envolvendo z pelo menos n vezes. Portanto, segue de (1.1) que

$$[xy, {}_n z] = [a, z][b, z]v(x, y, z) = [x, {}_n z][y, {}_n z]v(x, y, z),$$

onde $v(x, y, z)$ é um produto de comutadores de pesos pelo menos $n + 2$, envolvendo x, y e envolvendo z pelo menos n vezes. ■

De modo semelhante, obtemos o seguinte lema.

Lema 1.1.9. *Sejam G um grupo, $x, y, z \in G$, e sejam n e q inteiros positivos. Então*

$$[xy, z^q, {}_n z] = [x, z^q, {}_n z][y, z^q, {}_n z]v(x, y, z^q, z),$$

onde $v(x, y, z^q, z)$ é um produto de comutadores de pesos pelo menos $n+3$ envolvendo x, y e z^q, e envolvendo z pelo menos n vezes.

Demonstração: A demonstração será feita por indução em n como na prova do Lema 1.1.8. Suponha $n = 1$ e escreva

$$a = [x, z^q],\ b = [y, z^q],\ c = [x, z^q, y] \ \text{ e } \ d = [[x, z^q, y], [y, z^q]].$$

Desde que $[xy, z^q] = abcd$, obtemos

$$\begin{aligned} [xy, z^q, z] &= [abcd, z] \\ &= [a, z][a, z, bcd][bcd, z] \\ &= [a, z][a, z, bcd][b, z][b, z, cd][cd, z] \\ &= \cdots \\ &= [a, z][b, z]h(x, y, z^q, z). \end{aligned}$$

onde $h(x, y, z^q, z)$ é um produto de comutadores de pesos pelo menos 4, cada um deles envolvendo x, y, z^q e z.

Agora o passo de indução para $n \geq 2$ é similar ao que foi feito na prova do Lema 1.1.8. ■

Observação 1.1.10. Embora as expressões de $v(x, y, z)$ e $v(x, y, z^q, z)$ nos Lemas 1.1.8 e 1.1.9 não sejam explícitas em geral, elas são muito úteis quando os elementos envolvidos pertencem a subgrupos $G_i \leq G$ com a propriedade que $[G_i, G_j] \leq G_{i+j}$ (por exemplo, termos da série central inferior de G, definidas mais adiante). Esta utilidade será vista em uma de nossas demonstrações.

Sejam A e B subconjuntos de um grupo G. Definimos o subgrupo $[A, B]$ como

$$[A, B] = \langle [a, b] \,|\, a \in A \text{ e } b \in B \rangle.$$

Em particular, o subgrupo $[G, G]$ gerado por todos os comutadores de G é chamado de *subgrupo comutador* de G, às vezes denotado por G'.

A sequência de subgrupos $G^{(n)}$ dada por

$$G^{(0)} = G, \;\; G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}], n \geq 1$$

forma uma série descendente chamada de *série derivada* de G.

Definição 1.1.11. *Um grupo G é dito ser solúvel quando existe um inteiro não negativo n tal que $G^{(n)} = 1$.*

Observação 1.1.12. O menor inteiro n para o qual $G^{(n)} = 1$ é chamado de *comprimento derivado* de G, o qual denotaremos por $dl(G)$. Portanto, um grupo tem comprimento derivado 0 se, e somente se, tem ordem 1; grupos com comprimento derivado no máximo 1 são abelianos; e um grupo com comprimento derivado no máximo 2 é chamado de *grupo metabeliano.*

O seguinte lema é uma consequência da identidade de Hall-Witt para grupos metabelianos.

Lema 1.1.13. *Seja G um grupo metabeliano e $z \in G'$. Então $[z, x, y] = [z, y, x]$ para todos $x, y \in G$.*

Demonstração: Dado que G' é abeliano e $z \in G'$, segue da Identidade de Hall-Witt com x^{-1}, y, z que

$$[y, z^{-1}, x^{-1}][z, x, y]^{x^{-1}} = 1.$$

Agora basta notar que

$$[y, z^{-1}, x^{-1}] = [[y, z]^{-z^{-1}}, x^{-1}] = [z, y, x]^{-x^{-1}}.$$

O resultado segue. ∎

A seguinte classe de grupos é um caso particular de grupos solúveis.

Definição 1.1.14. *Um grupo G é dito ser nilpotente de classe c quando c é o menor inteiro não negativo tal que $[x_1, x_2, \ldots, x_{c+1}] = 1$ para todos $x_1, \ldots, x_{c+1} \in G$.*

Um grupo nilpotente também pode ser definido usando a série central de subgrupos

$$\gamma_1(G) = G \geq \gamma_2(G) \geq \cdots \geq \gamma_n(G) \geq \cdots$$

onde $\gamma_n(G) = [\gamma_{n-1}(G), G], n \geq 2$. Assim, um grupo é dito ser nilpotente de classe c se $\gamma_{c+1}(G) = 1$ e c é o menor inteiro não negativo com essa propriedade. A série de subgrupos acima é chamada de *série central inferior de G* e cada subgrupo $\gamma_k(G)$ é chamado de *k-ésimo termo da série central inferior de G.*

Definimos o centro $Z(G)$ de um grupo G como

$$Z(G) = \{z \in G \mid [z, g] = 1 \text{ para todo } g \in G\}.$$

Teorema 1.1.15. *Um grupo G é nilpotente de classe $c > 1$ se, e somente se, $G/Z(G)$ é nilpotente de classe $c - 1$.*

Em nossos resultados no capítulo 4 trabalharemos com grupos que envolvem p-grupos finitos, onde p é um número primo. Relembramos que um p-grupo é um grupo em que todos os seus elementos têm ordem igual a uma potência de p. Mais geralmente, seja π um conjunto de números primos. Chamamos de π-grupo ao grupo cuja ordem é divisível somente por números primos que estão em π.

Observação 1.1.16. Seja p um número primo. Dado que p-grupos finitos possuem centro não trivial, eles são nilpotentes. Quando a ordem de um p-grupo finito é $p^n, n \geq 2$, então sua classe de nilpotência é no máximo $n - 1$ e satisfaz a identidade $[x_1, x_2, \ldots, x_n] \equiv 1$. Para o caso $n \leq 2$, a identidade $[x_1, x_2] \equiv 1$ é satisfeita.

Seguindo as Definições 1.1.1 e 1.1.2, destacamos os seguintes casos quando $\mathfrak{X}$ é a propriedade de um grupo ser nilpotente.

Definição 1.1.17. *Um grupo G é dito ser localmente nilpotente se todo subgrupo finitamente gerado de G é nilpotente.*

Definição 1.1.18. *Um grupo G é dito ser virtualmente nilpotente se G possui um subgrupo normal N tal que N é nilpotente e G/N é finito.*

Finalizamos este tópico com dois teoremas bem conhecidos e úteis. O seguinte é devido a H. Fitting.

Teorema 1.1.19. [45, 5.2.8] *Sejam M e N subgrupos normais nilpotentes de um grupo G. Suponha que c e d sejam as classes de nilpotência de M e N, respectivamente. Então, MN é um subgrupo normal nilpotente de G de classe no máximo $c + d$.*

É conhecido que nilpotência não é uma propriedade fechada para extensões. Um resultado que nos auxilia a contornar esta dificuldade foi dado por P. Hall e faremos a sua demonstração na sequência. Para isso, lembramos os seguintes lemas.

Lema 1.1.20. [31, Lemma 1.17] *Seja G um grupo. Se A, B, C são subgrupos normais de G então*

$$[AB, C] = [A, C][B, C].$$

Lema 1.1.21. [31, Corollary 3.3] *Sejam A, B, C subgrupos normais de um grupo G. Então,*

$$[[A, B], C] \leq [[B, C], A][[C, A], B].$$

Teorema 1.1.22. [31, Theorem 3.26] *Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G tal que N é nilpotente de classe k e G/N' é nilpotente de classe c. Então, G é nilpotente de classe no máximo $f(k, c) = (c-1)k(k+1)/2 + k$.*

Demonstração: Usando o fato que G/N' é nilpotente de classe c, usaremos indução em $k \in \mathbb{N}$ para mostrar que

$$\gamma_{f(k,c)+1}(G) \leq \gamma_{k+1}(N), \text{ onde } f(k, c) = (c-1)k(k+1)/2 + k.$$

Para $k = 1$, nossa hipótese nos diz que $\gamma_{c+1}(G) \leq \gamma_2(N)$, como queríamos. Suponhamos que $\gamma_{f(k,c)+1}(G) \leq \gamma_{k+1}(N)$. Para quaisquer $s \in \mathbb{N}$ notamos que o subgrupo

$$\begin{aligned}\gamma_{f(k,c)+s+1}(G) &= [\gamma_{f(k,c)+1}(G), \underbrace{G, \ldots, G}_{s}] \\ &\leq [\gamma_{k+1}(N), \underbrace{G, \ldots, G}_{s}] \\ &= [\underbrace{N, \ldots, N}_{k+1}, \underbrace{G, \ldots, G}_{s}]. \qquad (1.4)\end{aligned}$$

Vamos analisar o lado direito de (1.4). Usando o Lema 1.1.20 e o Lema 1.1.21 temos

$$[\underbrace{N,\ldots,N}_{k+1},G] \leq [[N,G],N,\ldots,N][N,[N,G],N,\ldots,N]\ldots[N,\ldots,N,[N,G]],$$

e, portanto,

$$[\underbrace{N,\ldots,N}_{k+1},\underbrace{G,\ldots,G}_{s}] \leq \prod_{i_1+\cdots+i_{k+1}=s} \big[[N,\underbrace{G,\ldots,G}_{i_1}],\ldots,[N,\underbrace{G,\ldots,G}_{i_{k+1}}]\big]. \tag{1.5}$$

Considerando $s=(k+1)(c-1)+1$, temos que pelo menos um dos i_j na soma $i_1+\cdots+i_{k+1}=s$ é maior que $c-1$ e, consequentemente, cada comutador no produto (1.5) contém uma entrada da forma

$$[N,\underbrace{G,\ldots,G}_{i_r}] \text{ com } i_r \geq c. \tag{1.6}$$

Observe que, pelo Lema 1.1.21, conseguimos "transpor" cada subgrupo normal A,B,C para o início de cada comutador da seguinte forma:

$$[[A,B],C] \leq [[B,C],A][[C,A],B] = [[C,B],A][[C,A],B].$$

Com várias aplicações dessa inclusão, colocamos o subgrupo da forma (1.6) para o início de cada fator em (1.5) e escrevemos $[N,\underbrace{G,\ldots,G}_{c}]$ no lugar de qualquer $[N,\underbrace{G,\ldots,G}_{i_r}], i_r \geq c$ e N no lugar dos demais $[N,\underbrace{G,\ldots,G}_{i_j}]$, obtendo a seguinte inclusão

$$\prod_{i_1+\cdots+i_{k+1}=s} \big[[N,\underbrace{G,\ldots,G}_{i_1}],\ldots,[N,\underbrace{G,\ldots,G}_{i_{k+1}}]\big] \leq [[N,\underbrace{G,\ldots,G}_{c}],\underbrace{N,\ldots,N}_{k}].$$

Como resultado, segue de (1.4) e da hipótese $\gamma_{c+1}(G) \leq [N, N]$ que

$$\begin{aligned}
\gamma_{f(k,c)+s+1}(G) &\leq [[N, \underbrace{G, \ldots, G}_{c}], \underbrace{N, \ldots, N}_{k}] \\
&\leq [[\underbrace{G, \ldots, G}_{c+1}], \underbrace{N, \ldots, N}_{k}] \\
&\leq [[N, N], \underbrace{N, \ldots, N}_{k}] = \gamma_{k+2}(N). \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Por fim, dado que

$$\begin{aligned}
f(k, c) + s &= (c-1)k(k+1)/2 + k + (k+1)(c-1) + 1 \\
&= (c-1)(k+1)(k+2)/2 + k + 1 \\
&= f(k+1, c)
\end{aligned}$$

segue que $\gamma_{f(k+1,c)+1}(G) \leq \gamma_{k+2}(N)$, como queríamos. ■

Elementos Engel

A seguir definiremos grupos com condições de Engel. Tal conceito generaliza a propriedade de nilpotência local em grupos. No próximo capítulo falaremos um pouco mais sobre o desenvolvimento das pesquisas relacionadas a essas condições e no último capítulo reservamos um espaço para generalizações das condições de Engel em grupos. Para mais detalhes sobre grupos com condições de Engel e suas propriedades, veja por exemplo [1, 44, 45, 57].

Definição 1.1.23. *Sejam n um inteiro positivo, G um grupo e $g \in G$.*

1. *Dizemos que g é Engel se para qualquer $x \in G$ existe um inteiro positivo $n = n(x)$ tal que $[x, {}_n g] = 1$. Quando todo elemento de G é Engel, dizemos que G é um grupo Engel;*

2. Dizemos que g é n-Engel se $[x, {}_n g] = 1$ para todo $x \in G$. Quando todo elemento de G é n-Engel dizemos que G é um grupo n-Engel ou que satisfaz a n-ésima condição de Engel.

Na literatura é comum encontrar distinção entre elementos Engel à esquerda e elementos Engel à direita, e tal distinção é feita de acordo com a posição da variável no n-ésimo comutador de Engel. Mais especificamente, um elemento $g \in G$ é dito ser Engel à direita se para qualquer $x \in G$ existe um inteiro positivo $n = n(x)$ tal que $[g, {}_n x] = 1$.

Observações 1.1.24.

1. Na Definição 1.1.23 (e em todo o nosso trabalho) estamos considerando elementos Engel à esquerda;
2. Elementos 1-Engel de um grupo G são exatamente elementos que estão no centro de G. Por outro lado, o conjunto de elementos 2-Engel de um grupo G pode não formar um subgrupo de G (veja, [44, pág 45]). Mais geralmente, existem grupos em que o produto de elementos Engel não é necessariamente um elemento Engel (veja, por exemplo, [5, 17]), em particular, o conjunto de elementos Engel não forma um subgrupo em geral.

No que segue, veremos que o conjunto de elementos Engel de um grupo contém um subgrupo chamado radical de Hirsch-Plotkin.

Proposição 1.1.25. *Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G.*

(a) Se $g \in N$ e N é nilpotente de classe n, então g é $(n+1)$-Engel;

(b) Se $g \in N$ e N é localmente nilpotente, então g é Engel.

Demonstração: A afirmação (a) segue do fato que, se N é normal, então para todo $x \in G$ temos $[x, g] \in N$. Logo, dado que N é nilpotente de classe n temos que $1 = [[x, g], {}_n g] = [x, {}_{n+1} g]$, em particular g é $(n+1)$-Engel.

Agora, suponhamos que N seja localmente nilpotente. Então, o subgrupo $\langle [x, g], g\rangle \leq N$ é nilpotente de classe c, para algum c. Portanto, para cada $x \in G$ existe um inteiro $c = c(x, g)$ tal que $[x, {}_{c+1}g] = 1$, em particular, g é um elemento Engel de G e a afirmação (b) segue como queríamos. ∎

O seguinte resultado é um análogo ao Teorema de Fitting 1.1.19 para grupos normais localmente nilpotentes.

Teorema 1.1.26. (Hirsch-Plotkin)[45, 12.1.2] *Seja G um grupo. Se H e K são subgrupos normais localmente nilpotentes de G, então HK é um subgrupo normal localmente nilpotente de G.*

Um corolário imediato da proposição anterior (veja [45, 12.1.3]) é que em qualquer grupo G existe um único subgrupo normal maximal localmente nilpotente, chamado de *radical de Hirsch-Plotkin*. Em particular, pela Proposição 1.1.25, o conjunto dos elementos Engel de G contém radical de Hirsch-Plotkin.

Duas questões importantes surgem no estudo de elementos Engel de um grupo G, as quais são:

Pergunta 1.1.27. *Sob quais hipotéses temos que o radical de Hirsch-Plotkin de G coincide com o conjunto de elementos Engel de G?*

Pergunta 1.1.28. *Sob quais condições o conjunto de elementos Engel de G forma um subgrupo?*

Avanços relacionados a essas perguntas podem ser consultados em [1].

Condição Maximal em Subgrupos

Dedicamos este tópico para relembrar o conceito de condição maximal em subgrupos.

Definição 1.1.29. *Um grupo G é dito satisfazer condição maximal em subgrupos se qualquer conjunto não vazio de subgrupos de G, parcialmente ordenado pela inclusão, possui um elemento maximal.*

Grupos com condição maximal em subgrupos possuem a seguinte caracterização.

Teorema 1.1.30. [45, 3.1.6] *Um grupo G satisfaz condição maximal em subgrupos se, e somente se, todo subgrupo de G é finitamente gerado.*

O teorema a seguir mostra que condição maximal em subgrupos é uma propriedade fechada para extensões.

Teorema 1.1.31. [45, 3.1.7] *Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G. Suponha que N e G/N satisfazem condição maximal em subgrupos. Então G também satisfaz.*

Finalizamos este tópico com o seguinte teorema, devido a R. Baer, que nos dá uma condição suficiente para um grupo satisfazer condição maximal.

Teorema 1.1.32. [45, 5.2.17] *Seja G um grupo nilpotente finitamente gerado. Então G satisfaz condição maximal em subgrupos.*

1.2 Grupos Profinitos

Nesta seção traremos algumas noções de uma classe de grupos que generaliza a classe dos grupos finitos, os chamados *grupos profinitos*. Tais grupos envolvem conceitos de topologia, os quais serão ligeiramente mencionados aqui.

Para mais detalhes sobre grupos profinitos e suas propriedades veja, por exemplo, [16, 43, 59] e para mais detalhes sobre espaços topológicos veja, por exemplo, [27].

Definição 1.2.1. *Um grupo topológico G é um conjunto que é simultaneamente um grupo e um espaço topológico para o qual a aplicação*

$$G \times G \to G,\ (g,h) \mapsto gh^{-1}$$

é contínua, onde $G \times G$ é equipado com a topologia produto.

Dizemos que um conjunto G é um grupo *compacto (Hausdorff)* quando G for um grupo topológico e, visto como espaço topológico, é um espaço compacto (resp. Hausdorff). A seguir, enunciamos alguns fatos básicos em grupos topológicos.

Lema 1.2.2. [59, Lemma 0.3.1] *Seja G um grupo topológico.*

(a) As funções $(x, y) \mapsto xy$ de $G \times G$ para G e a função $x \mapsto x^{-1}$ de G para G são contínuas.

(b) Todo subgrupo fechado de índice finito em G é aberto. Se G é um grupo compacto, então todo subgrupo aberto de G tem índice finito.

(c) G é Hausdorff se, e somente se, $\{1\}$ é um subconjunto fechado de G.

Sejam G_1 e G_2 espaços topológicos. Considere o produto cartesiano $P = G_1 \times G_2$ com a topologia produto e a projeção canônica $\pi_i : P \to G_i$ dada por $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$ para cada $i = 1, 2$. Lembramos que uma função $f : X \to P$ de um espaço topológico X em P é contínua se, e somente se, a composição $\pi_i f : X \to G_i$ é contínua para todo $i = 1, 2$, e que composição de funções contínuas é contínua. Com isso, podemos fazer a seguinte observação que será usada em nossas demonstrações:

Observação 1.2.3. Seja G um grupo topológico. Então, para inteiros positivos q, r, s, t e $a \in G$, a função $G \times G \to G$ dada por $(g_1, g_2) \mapsto [g_1^q, {}_t g_2]$ e a função $G \to G$ dada por $g \mapsto [g, {}_s a^r]$ são contínuas. Se G é Hausdorff, então os conjuntos

$$\{(g_1, g_2) \in G \times G \,|\, [g_1^q, {}_t g_2] = 1\} \text{ e } \{g \in G \,|\, [g, {}_s a^r] = 1\}$$

são fechados.

Uma classe especial de grupos compactos será definida na sequência.

Definição 1.2.4. *Um conjunto G é um grupo profinito se G é um grupo topológico compacto, Hausdorff cujos subgrupos abertos formam uma base de vizinhanças da identidade.*

A seguir listamos alguns exemplos importantes de grupos profinitos. Para mais detalhes veja [16, Cap. 1].

Exemplos 1.2.5.

1. Grupos finitos com a topologia discreta;

2. Seja p um número primo. O grupo aditivo do anel dos inteiros p-ádicos

$$\mathbb{Z}_p = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, x_n \in \mathbb{Z}, x_n \equiv x_m \bmod p^m \text{ se } m \leq n\}$$

é um grupo profinito;

3. O grupo $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ das matrizes $n \times n$ inversíveis sobre $\mathbb{Z}_p$ é um grupo profinito.

Uma maneira útil de caracterizar subconjuntos abertos de um grupo profinito e que será usada em nossas demonstrações é dada a seguir.

Proposição 1.2.6. [59, Proposition 0.3.3] *Seja G um grupo profinito. Todo subconjunto aberto em G é uma união de classes de subgrupos normais abertos em G.*

Como aplicação desse fato, temos o seguinte caso especial do Teorema da Categoria de Baire [27, pág. 200].

Teorema 1.2.7. [43, Proposition 2.3.1] *Sejam G um grupo profinito. Se existe uma família enumerável $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos fechados de G tais que $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, então pelo menos um subconjunto C_l tem interior não vazio. Consequentemente, existe um subgrupo normal aberto H de G e um elemento $b \in G$ tais que $Hb \subseteq C_l$.*

Embora a definição formal de limite inverso não seja abordada aqui, grupos profinitos podem ser definidos por meio de limite inverso de um sistema inverso de grupos finitos. De modo mais abrangente, para uma classe $\mathscr{C}$ de grupos finitos podemos definir os chamados *grupos pro-$\mathscr{C}$* como sendo o limite inverso de um sistema inverso de grupos em $\mathscr{C}$. Mais detalhes sobre a definição de limite inverso e suas propriedades podem ser encontrados, por exemplo, em [43, 59].

Neste momento, traremos algumas equivalências que serão usadas em algumas de nossas demonstrações. Lembramos que uma classe de grupos $\mathfrak{X}$ é:

1. Fechada para subgrupos (quociente) se todo subgrupo (resp. grupo quociente) de um grupo em $\mathfrak{X}$ está em $\mathfrak{X}$;

2. Fechada para produtos direto se $G_1 \times G_2 \in \mathfrak{X}$ sempre que $G_1, G_2 \in \mathfrak{X}$.

Teorema 1.2.8. [59, Theorem 1.2.3] *Sejam $\mathscr{C}$ uma classe de grupos finitos que é fechada para subgrupos, quocientes e produto diretos, e G um grupo topológico. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) G é um grupo pro-$\mathscr{C}$;

(b) G é isomorfo (como grupo topológico) a um subgrupo fechado de um produto cartesiano de grupos em $\mathscr{C}$;

(c) G é compacto, totalmente desconexo e $G/L \in \mathscr{C}$ para todo subgrupo normal aberto L de G.

Destacamos alguns exemplos a seguir.

Exemplos 1.2.9.

1. Um grupo profinito é um grupo pro-$\mathscr{C}$, com $\mathscr{C}$ sendo a classe de todos os grupos finitos;

2. Sejam p um número primo e $\mathscr{F}_p$ a classe de todos os p-grupos finitos. Um grupo pro-$\mathscr{F}_p$ é chamado de *grupo pro-p*. Mais geralmente, se π é um conjunto de números

primos, chamamos de *grupo pro-π* ao limite inverso de π-grupos finitos;

4. Seja $\mathscr{N}$ a classe dos grupos nilpotentes finitos. Um grupo pro-$\mathscr{N}$ é chamado de *grupo pronilpotente.*

Observação 1.2.10. A estrutura de grupos pronilpotentes é, em alguns aspectos, semelhante à estrutura de grupos nilpotentes finitos. Por exemplo, grupos pronilpotentes são isomorfos ao produto cartesiano de seus subgrupos de Sylow [59, Proposition 2.4.3], que em particular, são grupos pro-p, onde p percorre todos os primos que dividem a ordem de G. Para mais detalhes sobre grupos pronilpotentes veja [59, Cap 2].

Finalizamos esta seção com o conceito de grupos profinitos finitamente gerados.

Definição 1.2.11. *Sejam G um grupo profinito e $X \subseteq G$. Dizemos que X é um conjunto gerador topológico de G se G é o fecho do grupo abstrato gerado por X. Um grupo G é dito ser profinito finitamente gerado quando existe um conjunto gerador topológico, finito, de G.*

Observação 1.2.12. Salvo menção ao contrário, qualquer subgrupo de um grupo profinito G é tomado como sendo um subgrupo fechado de G. Portanto, um grupo profinito G é virtualmente nilpotente se existir um subgrupo normal fechado e de índice finito em G (portanto, aberto em G) nilpotente.

Proposição 1.2.13. [59, Proposition 4.1.1] *Sejam G um grupo profinito, H um subgrupo de G e $X \subseteq H$. Então, X gera H topologicamente se, e somente se, XN/N gera HN/N para todo subgrupo normal aberto N de G.*

1.3 Álgebras de Lie

Métodos de Lie em teoria de grupos são usados para obter informações de um grupo G analisando a estrutura de uma Álgebra de Lie associada ao grupo G e vice-versa. Aplicações desses métodos estão relacionados, por exemplo, com a solução do célebre Problema Restrito de Burnside [24, 63, 64, 65, 67].

Existem várias maneiras de associar uma Álgebra de Lie a um grupo e o leitor interessado poderá ver isso, por exemplo, em [10, 16, 30]. Em nossas demonstrações para grupos pronilpotentes utilizaremos resultados envolvendo a Álgebra de Lie construída a partir da chamada *série de Zassenhaus-Jenning-Lazard.*

Começaremos esta seção com a seguinte definição:

Definição 1.3.1. *Um espaço vetorial L sobre um corpo $\mathbb{F}$, com uma operação produto $[\cdot,\cdot] : L \times L \to L$ dada por $(x, y) \mapsto [x, y]$ é chamada de Álgebra de Lie sobre $\mathbb{F}$ se:*

(a) $[\cdot,\cdot]$ é bilinear, ou seja, para todos $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in L$ e $\alpha \in \mathbb{F}$ temos

$$[x_1 + x_2, y] = [x_1, y] + [x_2, y];$$
$$[x, y_1 + y_2] = [x, y_1] + [x, y_2];$$
$$[\alpha x, y] = \alpha[x, y] = [x, \alpha y].$$

(b) $[\cdot,\cdot]$ é anticomutativa, isto é,

$$[x, x] = 0,$$

para todo $x \in L$;

(c) $[\cdot,\cdot]$ satisfaz a identidade de Jacobi, ou seja,

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0,$$

para todos $x, y, z \in L$.

A operação $[\cdot,\cdot]$ apresentada na Definição 1.3.1 é chamada de *produto (ou colchete) de Lie*.

Seja $X \subseteq L$. Entendemos por *comutador* nos elementos de X a qualquer elemento de L que pode ser obtido como um produto de Lie nos elementos do conjunto X e nossos comutadores são normados à esquerda, isto é, se $l_1, l_2, \ldots, l_n \in L$ então

$$[l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n] = [\ldots[[l_1, l_2], l_3], \ldots, l_n].$$

Dado um elemento $x \in L$, definimos o *operador adjunto* associado a x como a aplicação linear $adx : L \to L$ dada por $adx(y) = [y, x]$.

Definição 1.3.2. *Sejam L uma Álgebra de Lie e $x \in L$. Dizemos que x é ad-nilpotente se existe um inteiro positivo $n = n(x)$ de tal forma que $(adx)^n = 0$, ou seja, $[a, {}_n x] = 0$ para todo $a \in L$. Se n é o menor inteiro com tal propriedade, então dizemos que x é ad-nilpotente de índice n.*

Dada uma Álgebra de Lie L sobre $\mathbb{F}$, dizemos que um subconjunto B de L é uma *subálgebra de Lie* se B é um subespaço vetorial de L fechado para a operação produto definida em L. Uma subálgebra de L gerada por um conjunto $X \subseteq L$ constitui-se de todas as $\mathbb{F}$-combinações lineares de todos os comutadores nos elementos de X.

Conceito de nilpotência para Álgebras de Lie é definido de modo semelhante ao que foi feito para grupos (veja [10, 31]), de modo que uma Álgebra de Lie é *nilpotente de classe c* quando $[l_1, l_2, \ldots, l_{c+1}] = 0$ para todos $l_1, l_2, \ldots, l_{c+1} \in L$ e c é o menor inteiro satisfazendo esta propriedade. Em particular, uma álgebra de Lie nilpotente pode ser definida como uma Álgebra de Lie que satisfaz uma identidade do tipo $[x_1, x_2, \ldots, x_n] \equiv 0$, isto é, $[l_1, l_2, \ldots, l_n] = 0$ para todos $l_1, l_2, \ldots, l_n \in L$.

Álgebras de Lie que satisfazem identidades recebem um nome especial, o qual definiremos a seguir. Tal definição envolve conceito de Álgebra de Lie livre, o qual não será abordado aqui (para mais detalhes sobre Álgebras de Lie livre veja [26]).

Definição 1.3.3. *Seja $\mathfrak{F}$ uma Álgebra de Lie livre, sob uma quantidade enumerável de geradores e sobre um corpo $\mathbb{F}$. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{F}$ um elemento não trivial. Uma Álgebra de Lie L sobre $\mathbb{F}$ é dita satisfazer a identidade $f \equiv 0$ se*

$f(l_1, \ldots, l_n) = 0$, para todos $l_1, \ldots, l_n \in L$. Neste caso, dizemos que L satisfaz uma identidade polinomial não trivial, ou que L é PI.

O próximo teorema, muito importante na Teoria de Álgebras de Lie e com inúmeras aplicações na Teoria de Grupos, foi primeiramente anunciado por E. Zelmanov em [64] e uma prova detalhada foi publicada recentemente em [67].

Teorema 1.3.4. (Zelmanov) [67] *Seja L uma Álgebra de Lie gerada por um conjunto finito X. Suponha que L satisfaz uma identidade polinomial e que todo comutador nos elementos de X é ad-nilpotente. Então L é nilpotente.*

Álgebra de Lie associada a um grupo

Neste momento falaremos sobre a associação de um grupo com uma Álgebra de Lie por meio da série de Zassenhaus-Jenning-Lazard. Vale destacar que ideias que ajudariam a associar uma Álgebra de Lie a um grupo já eram discutidas por W. Magnus entre as décadas de 1930 e 1950 [35, 36, 37] (veja também [46]). Generalizando construções descobertas por Magnus [38] e Zassenhaus [61], Lazard nota em [32] várias propriedades úteis de uma Álgebra de Lie $L(G)$ associada a uma N_p-série de um grupo G.

Começaremos por considerar G como um grupo e p um número primo. Uma série de subgrupos

$$G = G_1 \geq G_2 \geq \cdots$$

é dita ser uma *N-série* se satisfaz

$$[G_i, G_j] \leq G_{i+j} \text{ para todos } i, j. \tag{1.8}$$

Seja $G_i^p = \langle g^p \mid g \in G_i \rangle$. Uma N_p-*série*, por sua vez, é uma N-série que satisfaz

$$G_i^p \leq G_{pi} \text{ para todo } i \geq 1.$$

Observe que, em particular, toda N-série é central, ou seja, $G_i/G_{i+1} \leq Z(G/G_{i+1})$ para todo i.

Um exemplo de uma N_p-série é a p-*série dimensional* [16, Cap. 11, 12], também conhecida como *série de Lazard* ou *série de Zassenhaus-Jennings-Lazard*, formada pelos seguintes subgrupos

$$G_i = \langle g^{p^k} \mid g \in \gamma_j(G), jp^k \geq i \rangle \text{ para } i \in \mathbb{N}.$$

A partir da série de Zassenhaus-Jennings-Lazard de um grupo G podemos construir uma Álgebra de Lie associada a G da seguinte forma:

Considere os fatores $L_i = G_i/G_{i+1}$ escritos aditivamente e defina a seguinte soma direta

$$L(G) = \bigoplus_i G_i/G_{i+1}.$$

Cada componente L_i é chamada de i-*ésima componente homogênea* e seus elementos são ditos *elementos homogêneos*.

Para elementos homogêneos $xG_{i+1}, zG_{i+1} \in L_i$, $yG_{j+1} \in L_j$ definimos uma operação de soma e um produto de Lie em $L(G)$ induzidos pela operação de G e pela comutação em elementos de G, respectivamente, da seguinte maneira:

$$xG_{i+1} + zG_{i+1} = xzG_{i+1} \;\text{ e }\; [xG_{i+1}, yG_{j+1}] = [x, y]G_{i+j+1}.$$

Tal produto é estendido por linearidade e a verificação de que essas operações estão bem definidas pode ser feita usando (1.8) e identidades de comutadores (veja, [10, 31]). A identidade de Jacobi pode ser verificada usando a identidade de Hall-Witt. Com isso, e observando que L_i são grupos abelianos de expoente p, podemos então considerar $L(G)$, com as operações definidas acima, como uma Álgebra de Lie sobre o corpo com p elementos $\mathbb{F}_p$.

Notações 1.3.5.

1. Denotamos por $L_p(G)$ a subálgebra gerada pela primeira componente homogênea G/G_2 de $L(G)$;
2. Se $u \in G_i \setminus G_{i+1}$, então definimos $\delta(u) = i$ como o *grau de* u com respeito a série de Zassenhaus-Jennings-Lazard;
3. Para $u \in G_i \setminus G_{i+1}$ denotamos por $\bar{u}$ ao elemento homogêneo $uG_{i+1} \in L_i$.

O seguinte resultado devido a Lazard relaciona a ordem dos elementos de um grupo G com o índice do operador adjunto associado a elementos homogêneos de $L(G)$ e será muito útil em nossos cálculos.

Lema 1.3.6. [32, pág 131] *Sejam G um grupo e $x \in G$. Então, $(ad\bar{x})^p = ad\overline{x^p}$. Consequentemente, se x possui ordem p^r então $\bar{x}$ é ad-nilpotente de índice no máximo p^r.*

Finalizamos este tópico com dois teoremas envolvendo a subálgebra de Lie $L_p(G)$. O primeiro deles, devido a Lazard, nos diz que a nilpotência de $L_p(G)$ exerce forte influência sobre a estrutura do grupo G quando G é pro-p finitamente gerado.

Teorema 1.3.7. (Lazard) [33, Pág 206] *Seja G um grupo pro-p finitamente gerado. Se $L_p(G)$ é nilpotente, então G é isomorfo a um subgrupo fechado de $GL_n(\mathbb{Z}_p)$.*

Observação 1.3.8. A conclusão do teorema anterior é apresentada em [33] de outra forma, porém, equivalente (veja [16, pág 97]) ao que escrevemos aqui.

O seguinte resultado, devido a J. Wilson e E. Zelmanov, nos dá uma condição para que a Álgebra de Lie $L_p(G)$ satisfaça uma identidade polinomial. Para conveniência do leitor, lembramos que um grupo G é dito satisfazer uma identidade de classes laterais se existirem uma palavra $w = w(x_1, \dots, x_m)$, elementos $a_1, \dots, a_m \in G$ e um subgrupo $H \leq G$ tais que $w(a_1h_1, \dots, a_mh_m) = 1$ para todos $h_1, \dots, h_m \in H$.

Teorema 1.3.9. (Wilson e Zelmanov) [60, Teorema 1] *Seja G um grupo satisfazendo uma identidade de classes laterais para um subgrupo de índice finito. Então, para todo primo p, a Álgebra de Lie $L_p(G)$ satisfaz uma identidade polinomial.*

2

Condições de Engel

Neste capítulo traremos alguns resultados importantes relacionados à condições de Engel em grupos que foram demonstrados no decorrer dos anos e que tem relação com nossos resultados. Consideraremos as condições $(*)$ e $(**)$ dadas por

$(*)$ Para todos $x, y \in G$ existem inteiros positivos $n = n(x, y)$ e $q = q(x, y)$ tais que $[x, {}_n y^q] = 1$;

$(**)$ Para todos $x, y \in G$ existem inteiros positivos $n = n(x, y)$ e $q = q(x, y)$ tais que $[x^q, {}_n y] = 1$.

Mostraremos que um grupo finitamente gerado com as condições $(*)$ e $(**)$ possui subgrupo comutador finitamente gerado. Tal resultado será útil na demonstração de nosso resultado para grupos solúveis, que será feita no próximo capítulo.

2.1 Breve História de Grupos com Condição de Engel

A teoria de grupos Engel e os Problemas de Burnside estão relacionados de certa forma. Em 1902, W. Burnside [13] fez o seguinte questionamento (em linguagem moderna), hoje conhecido como Problema Geral de Burnside:

Problema Geral de Burnside 2.1.1. *Um grupo finitamente gerado periódico é finito?*

Burnside trouxe uma resposta positiva para a pergunta anterior para o caso em que o expoente do grupo é 3 e observou que estes grupos tem a propriedade que quaisquer dois conjugados comutam. É possível mostrar que grupos em que dois conjugados comutam são grupos 2-Engel.

Em [14], Burnside demonstrou que grupos finitos 2-Engel sem elementos de ordem 3 são nilpotentes de classe no máximo 2 e outros resultados de mesma natureza foram obtidos em [18, 25, 34, 41].

Em 1936, M. Zorn anuncia um importante resultado envolvendo condições de Engel em grupos finitos que generaliza os trabalhos [14, 18, 25].

Teorema 2.1.2 (Zorn)**.** [68] *Todo grupo finito Engel é nilpotente.*

Naturalmente, o próximo passo para tentar generalizar o teorema de Zorn, seria considerar grupos Engel finitamente gerados. Alguns avanços foram obtidos por Gruenberg em 1953 (para grupos solúveis finitamente gerados) e por Baer em 1957 (para grupos satisfazendo condição maximal em subgrupos). Mais especificamente,

Teorema 2.1.3. [22, Theorem 1](Gruenberg) *Todo grupo solúvel finitamente gerado Engel é nilpotente.*

Teorema 2.1.4. [4, pág 257] (Baer) *Todo grupo Engel satisfazendo condição maximal em subgrupos é nilpotente.*

Observação 2.1.5. A hipótese "finitamente gerado" é necessária para a conclusão do Teorema 2.1.3. De fato, Baer [3, Example 3.4] construiu um exemplo de um p-grupo metabeliano infinitamente gerado Engel que não é nilpotente (veja também [15]).

Observamos que os grupos apresentados nos Teoremas 2.1.3 e 2.1.4 são residualmente finitos (veja [45, 5.4.17]).

Definição 2.1.6. *Um grupo G é dito ser residualmente finito se a interseção de todos subgrupos normais de índice finito de G é trivial.*

Tal propriedade também é obtida em grupos lineares finitamente gerados [39]. Entretanto, diferentemente do que acontece para grupos lineares finitamente gerados [19, 20], um grupo residualmente finito finitamente gerado Engel pode não ser nilpotente em geral. Um contra-exemplo para isso foi dado por E. S. Golod [21] em 1964. Por sua vez, J. S. Wilson (1991), demonstrou o seguinte teorema para grupos residualmente finitos:

Teorema 2.1.7. [58, Theorem 2] *Se G é um grupo finitamente gerado residualmente finito n-Engel, então G é nilpotente.*

Outros grupos que, com condição de Engel, se tornam grupos nilpotentes são os grupos profinitos finitamente gerados. Vale lembrar também que grupos profinitos são residualmente finitos [59, Proposition 0.3.3]. Em 1992, J. S. Wilson e E. I. Zelmanov provaram o seguinte resultado:

Teorema 2.1.8. [60, Theorem 5] *Um grupo profinito é localmente nilpotente se, e somente se, é Engel.*

Observação 2.1.9. Mais adiante, os teoremas 2.1.7 e 2.1.8 foram generalizados por P. Shumyatsky em dois trabalhos [48, 51], de 1999 e 2001, respectivamente. Mais especificamente, foi demonstrado o seguinte:

Teorema 2.1.10. [48] *Sejam k, n inteiros positivos. Se G um grupo residualmente finito tal que $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ é n-Engel para todos $x_1, x_2, \ldots, x_k \in G$, então $\gamma_k(G)$ é localmente nilpotente.*

Teorema 2.1.11. [51, Theorem 1.1] *Sejam k um inteiro positivo. Se G é um grupo profinito finitamente gerado tal que $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ é Engel para todos $x_1, x_2, \ldots, x_k \in G$, então $\gamma_k(G)$ é localmente nilpotente.*

Sabemos pela própria definição de grupos profinitos que tal classe é mais restritiva do que a classe de grupos compactos. Um resultado mais geral do que o teorema de Wilson-Zelmanov (1992), o qual foi demonstrado em 2003 por Y. Medvedev [40].

Teorema 2.1.12. [40] *Todo grupo compacto Engel é localmente nilpotente.*

Observação 2.1.13. O teorema anterior foi generalizado por P. Shumyatsky e E. Khukhro em 2020 [29] usando condições mais gerais que as condições de Engel. Tais condições e resultado serão enunciados no último capítulo.

Numa analogia ao Problema Geral de Burnside, a seguinte pergunta foi feita para grupos Engel.

Problema Geral de Nilpotência 2.1.14. *Todo grupo finitamente gerado Engel é nilpotente?*

Sabemos pelo exemplo de Golod (1964) que a Pergunta 2.1.14 possui resposta negativa. Neste caso, faz sentido questionar:

Pergunta 2.1.15. *Quais condições são suficientes para que um grupo finitamente gerado Engel seja nilpotente?*

Vimos com o Teorema de Wilson-Zelmanov que a condição do grupo ser profinito responde a Pergunta 2.1.15. Em 2015, R. Bastos e P. Shumyatsky [7] usaram uma condição mais fraca que condição de Engel em todos os elementos de um grupo profinito e obtiveram uma generalização do Teorema de Wilson-Zelmanov no seguinte sentido:

Teorema 2.1.16. [7, Theorema 1.1] *Seja G um grupo profinito finitamente gerado tal que para todo $x \in G$ existe um inteiro positivo $q = q(x)$ tal que x^q é Engel. Então, G é virtualmente nilpotente.*

Observação 2.1.17. Condições semelhantes foram trabalhadas mais recentemente por D. Silveira [55] em 2020 e um ano depois, juntamente com R. Bastos [9] em grupos residualmente finitos.

Podemos citar outras duas perguntas relacionadas ao Problema Geral de Burnside que são conhecidas como Problema de Burnside e Problema Restrito de Burnside (para mais detalhes sobre Problemas de Burnside veja [24]). Mais especificamente,

Problema de Burnside 2.1.18. *Seja n um inteiro positivo. Todo grupo finitamente gerado de expoente n é finito?*

Problema Restrito de Burnside 2.1.19. *Sejam m e n inteiros positivos. Todo grupo finito m-gerado de expoente n tem ordem limitada por uma função que depende apenas de m e n?*

Uma resposta negativa para a Pergunta 2.1.18 foi dada em 1968 por S. I. Adian e P. S. Novikov [2]. Por sua vez, E. Zelmanov [62, 63, 64, 65], em 1991, deu uma resposta positiva para a pergunta 2.1.19. Tal resultado, assim como métodos de Lie usados em sua demonstração, tem forte impacto em diversos avanços da Teoria de Grupos inclusive em Teoria de Grupos com Condições de Engel. Alguns desses avanços podem ser vistos em [47, 48, 49, 50, 58, 60].

Alguns desses resultados serão usados em nossas demonstrações para grupos pronilpotentes com uma condição mais geral que a condição usada no Teorema 2.1.16. Além disso, obtivemos uma generalização do Teorema de Gruenberg 2.1.3 para grupos solúveis finitamente gerados.

2.2 Subgrupo Comutador Finitamente Gerado

Já é bastante conhecido que existem grupos finitamente gerados que possuem subgrupos que não são finitamente gerados [45, Exercise 1.6.15], em particular, grupos livres não cíclicos possuem subgrupo comutador infinitamente gerado [45, 6.1.7].

Seja G um grupo finitamente gerado. Uma condição suficiente para um subgrupo $H \leq G$ ser finitamente gerado é que o índice de H em G seja finito [45, 1.6.11]. Se adicionalmente G for nilpotente, então os subgrupos de G são finitamente gerados (veja Teorema 1.1.32). Em particular, neste caso, G' é finitamente gerado.

Mais geralmente, se G é um grupo Engel finitamente gerado então o subgrupo comutador de G é finitamente gerado (veja [12, 22]). A demonstração de R. G. Burns e Y. Medvedev (1998) é de especial interesse pois eles mostram que nessas condições, para quaisquer elementos $x, y \in G$, o subgrupo $\langle x \rangle^{\langle y \rangle}$ é finitamente gerado e como consequência G' é finitamente gerado.

Em 2013, R. Bastos, P. Shumyatsky, A. Tortora e M. Tota [8] obtiveram a mesma conclusão usando condições de Engel apenas em potências de geradores de um grupo finitamente gerado. Mais especificamente,

Lema 2.2.1. [8, Lemma 4] *Sejam $m \geq 1$ e G um grupo gerado por um subconjunto finito X. Se x^m é Engel para todo $x \in X$, então G' é finitamente gerado.*

Conseguimos obter a mesma conclusão do lema acima utilizando condições mais gerais. Essas condições são $(*)$ e $(**)$, apresentadas no início deste capítulo.

Demonstração da Proposição 2.2.7

Começaremos demonstrando lemas que nos ajudarão a verificar que as condições $(*)$ e $(**)$ são suficientes para garantir que $\langle x \rangle^{\langle y \rangle}$ é um subgrupo finitamente gerado. Os Lemas 2.2.2 e 2.2.3 a seguir já são conhecidos na literatura (veja [1, Lemma 3.42]) e suas demonstrações são colocadas aqui para conveniência do leitor.

Lema 2.2.2. *Sejam x, y elementos de um grupo G. Então, para todo $n \geq 1$, temos*

$$[x, {}_n y] = h_n x^{(-1)^n} h_{n+1} = f_n x^{y^n}, \tag{2.1}$$

onde $f_n \in F_n = \langle x, x^y, \ldots, x^{y^{n-1}} \rangle$ e $h_i \in H_i = \langle x^y, x^{y^2}, \ldots, x^{y^{i-1}} \rangle$.

Demonstração: Faremos indução em n. Para $n = 1$ note que

$$[x, y] = x^{-1}x^{y}.$$

Então, basta tomar

$$h_1 = 1, h_2 = x^y \text{ e } f_1 = x^{-1}.$$

Seja $n \geq 2$ e suponhamos que a afirmação (2.1) é válida para $n-1$. Então, pela primeira igualdade de (2.1), existem $g_{n-1} \in H_{n-1}$ e $g_n \in H_n$ tais que

$$\begin{aligned} [x, {}_n y] &= [x, {}_{n-1}y]^{-1}[x, {}_{n-1}y]^{y} \\ &= (g_{n-1}x^{(-1)^{n-1}}g_n)^{-1}\Big(g_{n-1}x^{(-1)^{n-1}}g_n\Big)^{y} \\ &= g_n^{-1}x^{(-1)^n}g_{n-1}^{-1}\Big(g_{n-1}x^{(-1)^{n-1}}g_n\Big)^{y}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Observe que $H_i \leq H_{i+1}$ e $(H_i)^y \leq H_{i+1}$ para todo $i \geq 1$. Portanto, basta tomar

$$h_n = g_n^{-1} \in H_n \text{ e } h_{n+1} = g_{n-1}^{-1}\Big(g_{n-1}x^{(-1)^{n-1}}g_n\Big)^{y} \in H_{n+1} \text{ em } (2.2)$$

e a primeira igualdade em (2.1) está provada para todo $n \geq 1$.

Para provar a segunda igualdade de (2.1) observamos que, por hipótese de indução, existe $f_{n-1} \in F_{n-1}$ tal que

$$\begin{aligned} [x, {}_n y] &= [x, {}_{n-1}y]^{-1}[x, {}_{n-1}y]^{y} \\ &= (f_{n-1}x^{y^{n-1}})^{-1}\Big(f_{n-1}x^{y^{n-1}}\Big)^{y} \\ &= x^{-y^{n-1}}f_{n-1}^{-1}f_{n-1}^{y}x^{y^n}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Observe que

$$F_{n-1} \leq F_n \text{ e } (F_{n-1})^y \leq F_n.$$

Assim, basta tomar

$$f_n = x^{-y^{n-1}} f_{n-1}^{-1} f_{n-1}^{y} \in F_n \text{ em } (2.3)$$

e a segunda igualdade em (2.1) também é verdadeira para todo $n \geq 1$. O lema segue como queríamos. ■

Lema 2.2.3. *Sejam G um grupo e $x, y \in G$ tais que $[x, {}_n y] = 1$. Então o subgrupo $\langle x \rangle^{\langle y \rangle}$ é finitamente gerado.*

Demonstração: Seja $F_n = \langle x, x^y, \ldots, x^{y^{n-1}} \rangle$ como no lema anterior. Afirmamos que $\langle x \rangle^{\langle y \rangle} = F_n$, em particular, $\langle x \rangle^{\langle y \rangle}$ é finitamente gerado.

Observe que a inclusão $F_n \leq \langle x \rangle^{\langle y \rangle}$ é clara. Para mostrar a outra inclusão, é suficiente garantir que $x^{y^{-1}}, x^{y^n} \in F_n$. De fato, se isso vale, então $(F_n)^y \leq F_n$ e $(F_n)^{y^{-1}} \leq F_n$ e, consequentemente, $\langle x \rangle^{\langle y \rangle} \leq F_n$. Portanto, dado que $[x, {}_n y] = 1$ então pelo Lema 2.2.2 temos

$$x^{y^n} = f_n^{-1} \in F_n \text{ e } x = (h_n^{-1} h_{n+1}^{-1})^{(-1)^n} \in H_{n+1} = \langle x^y, x^{y^2}, \ldots, x^{y^n} \rangle.$$

Em particular, $x^{y^{-1}} \in F_n$. O lema segue. ■

A seguinte observação será usada em algumas demonstrações de nossos resultados.

Observação 2.2.4. Se G satisfaz $(**)$, então para quaisquer $x, y \in G$ existem inteiros positivos n e q, tais que $[(y^{-x})^q, {}_n y] = 1$. Desde que

$$(y^{-x})^q = (y^{-q})^x = [x, y^q] y^{-q},$$

temos

$$1 = [(y^{-x})^q, {}_n y] = [[x, y^q] y^{-q}, {}_n y] = [[x, y^q], {}_n y]^{y^{-q}}.$$

Consequentemente,

$$[[x, y^q], {}_n y] = 1.$$

Como consequência temos o seguinte resultado:

Lema 2.2.5. *Seja G um grupo satisfazendo $(*)$ ou $(**)$. Então $\langle x\rangle^{\langle y\rangle}$ é um subgrupo finitamente gerado, para quaisquer $x, y \in G$.*

Demonstração: Para quaisquer $x, y \in G$ tais que $[x, {}_n y^q] = 1$ o subgrupo $X = \langle x\rangle^{\langle y^q\rangle}$ é finitamente gerado pelo Lema 2.2.3. Portanto, se G satisfaz $(*)$ então

$$\langle x\rangle^{\langle y\rangle} = \langle X^{y^l} \mid 0 \leq l \leq q-1\rangle$$

é finitamente gerado. Agora, se G satisfaz $(**)$, pela Observação 2.2.4 existem inteiros positivos $n = n(x, y)$ e $q = q(x, y)$ tais que $[[x, y^q], {}_n y] = 1$. Pelo Lema 2.2.3, o subgrupo

$$W = \langle [x, y^q]\rangle^{\langle y\rangle}$$

é finitamente gerado. Note que W contém os elementos $x^{-1}x^{y^q}, x^{-y}x^{y^{q+1}}, \ldots, x^{-y^q}x^{y^{2q}}$, e assim $x^{-1}x^{y^{2q}} \in W$. Semelhantemente, $[x, y^{iq}] \in W$ para todo $i \geq 1$. Mas, uma vez que $[x, y^{-iq}] = [x, y^{iq}]^{-y^{-iq}} \in W$, podemos dizer que $[x, y^{iq}] \in W$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Agora considere o seguinte subgrupo finitamente gerado

$$M = \langle x, x^y, \ldots, x^{y^{q-1}}, W\rangle.$$

Afirmamos que $M = \langle x\rangle^{\langle y\rangle}$. De fato, para todo $j \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq l \leq q-1$ temos que

$$x^{y^{jq+l}} = x^{y^l}x^{-y^l}x^{y^{jq+l}} = x^{y^l}[x, y^{jq}]^{y^l} \in M.$$

Como a inclusão $M \leq \langle x\rangle^{\langle y\rangle}$ é clara, segue que $M = \langle x\rangle^{\langle y\rangle}$ e assim $\langle x\rangle^{\langle y\rangle}$ é finitamente gerado. ■

O seguinte lema é bem conhecido e sua demonstração é dada na sequência para conveniência do leitor.

Lema 2.2.6. *Seja G um grupo gerado por dois elementos x, y. Então, $G' = \langle [x,y]^{x^r y^s} \mid r, s \in \mathbb{Z} \rangle$.*

Demonstração: Seja $N = \langle [x,y]^{x^r y^s} \mid r, s \in \mathbb{Z} \rangle$. Note que $N \leq G'$. Para a inclusão contrária, basta mostrar que N é normal em G. Claramente, N^y e $N^{y^{-1}}$ estão ambos contidos em N. Por outro lado,

$$[x,y]^{x^r y^s x} = [x,y]^{x^{r+1} y^s [y^s,x]} = [y^s,x]^{-1}[x,y]^{x^{r+1}y^s}[y^s,x].$$

Como $[y^s,x] = [y,x]^{y^{s-1}}[y,x]^{y^{s-2}} \ldots [y,x]$ para todo $s \geq 1$, segue que $N^x \leq N$. Semelhantemente, temos $N^{x^{-1}} \leq N$. Portanto, N é normal em G, e isto implica que $G' = N$, como desejado. ■

Por fim, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.2.7. *Seja G um grupo finitamente gerado satisfazendo $(*)$ ou $(**)$. Então o subgrupo comutador G' é finitamente gerado.*

Demonstração: Pelo Lema 2.2.5 o subgrupo $\langle x \rangle^{\langle y \rangle}$ é finitamente gerado para todos $x, y \in G$. Portanto, se $H = \langle h_1, h_2, \ldots, h_t \rangle$ é um subgrupo finitamente gerado de G e $g \in G$, então $H^{\langle g \rangle} = \langle \langle h_i \rangle^{\langle g \rangle} \mid 1 \leq i \leq t \rangle$ é finitamente gerado. Suponha que $G = \langle b_1, b_2, \ldots, b_k \rangle$. Provaremos, por indução em k, que G' é finitamente gerado. Se $k = 2$, pelo Lema 2.2.6 temos que

$$G' = \langle [b_1,b_2]^{b_1^r b_2^s} \mid r, s \in \mathbb{Z} \rangle = (\langle [b_1,b_2] \rangle^{\langle b_1 \rangle})^{\langle b_2 \rangle}.$$

Em particular, G' é finitamente gerado. Seja $k > 2$ e suponha que para todo

$d \leq k-1$ qualquer subgrupo gerado por d elementos de $\{b_1, \ldots, b_k\}$ tenha subgrupo comutador finitamente gerado. Portanto, o subgrupo $G_j = \langle b_1, \ldots, b_{j-1}, b_{j+1}, \ldots, b_k \rangle$ tem subgrupo comutador finitamente gerado. Logo, $(G_j')^{\langle b_j \rangle}$ é finitamente gerado. Agora considere o subgrupo

$$N = \langle (G_j')^{\langle b_j \rangle} \mid j = 1, 2, \ldots, k \rangle.$$

Note que N é finitamente gerado e fazendo cálculos como na demonstração do Lema 2.2.6 concluímos que $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}^{\pm 1}$ normalizam N. Isso nos mostra que N é um subgrupo normal de G. Consequentemente, temos $G' \leq N$. Portanto, $G' = N$ é finitamente gerado. ■

3

Grupos Solúveis com Condições de Engel

Seja G um grupo e considere as seguintes condições:

$(*)$ Para todos $x, y \in G$ existem inteiros positivos $n = n(x, y)$ e $q = q(x, y)$ tais que $[x, {}_n y^q] = 1$;

$(**)$ Para todos $x, y \in G$ existem inteiros positivos $n = n(x, y)$ e $q = q(x, y)$ tais que $[x^q, {}_n y] = 1$.

Nosso objetivo neste capítulo é demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.0.1. *Seja G um grupo solúvel finitamente gerado satisfazendo $(*)$ ou $(**)$. Então, G é virtualmente nilpotente.*

Nossa demonstração será feita por indução no comprimento derivado de G. Primeiramente, mostraremos que a afirmação é válida para G metabeliano. Depois, consideraremos o caso em que G' é virtualmente abeliano e, finalmente, faremos para o caso solúvel em geral. Note que no caso em que G é um grupo metabeliano, G possui um subgrupo normal abeliano finitamente gerado pela Proposição 2.2.7. Diante disso, é interessante investigar as implicações de nossas hipóteses sobre um grupo possuindo um subgrupo normal abeliano finitamente gerado e isto será feito na sequência. Por fim, observamos que tal resultado generaliza o Teorema de Gruenberg (1953) que diz que todo grupo solúvel finitamente gerado Engel é nilpotente.

Demonstração do Teorema 3.0.1

Sejam A um subgrupo normal abeliano de um grupo G e $b \in G$. Claramente, pelo item (c) do Lema 1.1.7, se $[x,_n b] = 1$ para algum $x \in A$ e $n \geq 1$, então temos $[x^{-1},_n b] = 1$. O lema a seguir nos garante outras relações de comutadores que serão úteis em nossas demonstrações. Como consequência, mostraremos que se G satisfaz $(*)$ ou $(**)$, então sempre existirá um inteiro positivo $t = t(b)$ tal que $\langle A, b^t \rangle$ é nilpotente, tal resultado será útil na demonstração de nosso resultado para os casos G metabeliano e G' virtualmente abeliano.

Lema 3.0.2. *Sejam G um grupo e A um subgrupo normal abeliano de um grupo G. Suponha que $b \in G$, $x, y \in A$ e sejam n, q, r inteiros positivos. Então,*

(a) $[xy,_n b] = [x,_n b][y,_n b]$*;*

(b) se $[x,_n b] = 1$*, então* $[x,_n b^r] = 1$*;*

(c) se $[x, b^q,_n b] = 1$*, então* $[x, b^{qr},_n b] = 1$*.*

Demonstração: A afirmação (a) segue facilmente do Lema 1.1.7 (a) já que A é normal abeliano.

A afirmação (b) segue do fato que $\langle x, b \rangle$ é nilpotente de classe no máximo n. De fato, como A é normal abeliano e $x \in A$, vemos facilmente que $[x,_{n-1} b] \in Z(\langle x, b \rangle)$. Agora basta usar indução em n e o Teorema 1.1.15.

De modo análogo, temos que $\langle [x, b^q], b \rangle$ é nilpotente de classe no máximo n e como

$$[x, b^{qr}] = \prod_{j=0}^{r-1} [x, b^q]^{b^{qj}} \in \langle [x, b^q], b \rangle,$$

a afirmação (c) seguirá facilmente. ■

Lema 3.0.3. *Sejam A um subgrupo normal abeliano finitamente gerado de um grupo G e $b \in G$.*

(a) se G satisfaz $(*)$, então $[A, {}_s b^t] = 1$, para certos inteiros positivos s e t;

(b) se G satisfaz $(**)$, então $[A, {}_s b, b^t] = 1$, para certos inteiros positivos s e t.

Demonstração: Assuma que G satisfaz $(*)$. Sejam $A = \langle a_1, a_2, \ldots, a_r \rangle$ e $b \in G$. Por hipótese, para cada $i = 1, 2, \ldots, r$, existem inteiros positivos $n_i = n(a_i, b)$ e $q_i = q(a_i, b)$, tais que

$$[a_i, {}_{n_i} b^{q_i}] = 1.$$

Considere $s = max\{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$ e $t = mmc\{q_1, q_2, \ldots, q_r\}$. Pelo Lema 3.0.2 concluímos que $[a_i, {}_s b^t] = 1$, para todo $i = 1, 2, \ldots, r$, e que $[A, {}_s b^t] = 1$ uma vez que todo elemento de A é um produto de elementos em $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}^{\pm 1}$.

Agora, suponha que G satisfaz $(**)$. Por hipótese e pela Observação 2.2.4, para cada $x, y \in G$ existem inteiros positivos $n = n(x, y)$ e $q = q(x, y)$ tais que $[x, y^q, {}_n y] = 1$. Argumentando como no primeiro parágrafo existem inteiros positivos s e t para os quais $[A, b^t, {}_s b] = 1$. Agora, dado que A é um subgrupo normal abeliano, para todo $a \in A$, temos que

$$\begin{aligned}
[a, b^t, b] &= (a^{-1} a^{b^t})^{-1} (a^{-b} a^{b^{t+1}}) \\
&= a^{-b^t} (a a^{-b}) a^{b^{t+1}} \\
&= (a^{-1} a^b)^{-1} (a^{-1} a^b)^{b^t} \\
&= [a, b, b^t].
\end{aligned}$$

Consequentemente, $[A, b^t, {}_s b] = [A, {}_s b, b^t]$ como queríamos. ■

Com isso, temos a seguinte consequência direta:

Corolário 3.0.4. *Seja G um grupo satisfazendo $(*)$ ou $(**)$. Seja A um subgrupo normal abeliano finitamente gerado de G. Então, para cada $b \in G$, existe um inteiro positivo $t = t(b)$ tal que $\langle A, b^t \rangle$ é nilpotente.*

Demonstração: Se G satisfaz $(*)$ segue do Lema 3.0.3 (a) que existem $t = t(b)$ e $s = s(b)$ tais que $[A,_s b^t] = 1$. Então $[A,_{s-1} b^t] \leq Z(\langle A, b^t \rangle)$, pois A é normal abeliano. Pelo Teorema 1.1.15 e por indução em s temos que $\langle A, b^t \rangle$ é nilpotente.

Agora, se G satisfaz $(**)$, vimos na demonstração do Lema 3.0.3 (b) que existem t e s, dependendo de b, tais que $[A, b^t,_s b] = 1$, em particular, $[a, b^t,_{s-1} b]$ comuta com b^t para todo $a \in A$. Dado que A é normal abeliano, temos que $[A, b^t,_{s-1} b] \leq Z(\langle A, b^t \rangle)$. Agora, basta fazer indução em s e usar o Teorema 1.1.15.

O resultado segue. ■

Agora faremos nossa demonstração para o grupo G solúvel e será feita por indução no comprimento derivado de G. Considerando primeiramente o caso onde G é um grupo metabeliano, depois o caso onde o subgrupo comutador G' é virtualmente abeliano e finalmente o caso solúvel geral.

Lema 3.0.5. *Seja G um grupo metabeliano finitamente gerado satisfazendo $(*)$ ou $(**)$. Então, G é virtualmente nilpotente.*

Demonstração: Seja $G = \langle b_1, b_2, \ldots, b_k \rangle$. Pela Proposição 2.2.7 e Corolário 3.0.4, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, existe um inteiro positivo t_i tal que o subgrupo normal $\langle G', b_i^{t_i} \rangle$ é nilpotente. Seja $M = G' \langle b_1^{t_1}, b_2^{t_2}, \ldots, b_k^{t_k} \rangle$ e note que M é um subgrupo normal nilpotente de G. Dado que G/M é um grupo finitamente gerado abeliano e gerado por elementos de ordem finita, M tem índice finito em G. O lema segue como queríamos. ■

Para o próximo passo, faremos menção do seguinte resultado devido a B. Bruno e F. Napolitani (2004).

Lema 3.0.6. (Bruno-Napolitani)[11, Lemma 3] *Seja G um grupo contendo um subgrupo de índice finito e nilpotente de classe no máximo n. Então, G contém um subgrupo característico de índice finito e nilpotente de classe no máximo n.*

Tal resultado nos fará ver que o caso em que G' é virtualmente abeliano se reduz para o caso em que G é abeliano-por-(nilpotente de classe no máximo 2), isto é, G possui um subgrupo normal A abeliano, tal que G/A é nilpotente de classe no máximo 2.

Lema 3.0.7. *Seja G um grupo solúvel finitamente gerado satisfazendo $(*)$ ou $(**)$. Suponha que G' é um subgrupo virtualmente abeliano. Então, G é virtualmente nilpotente.*

Demonstração: Dado que G' é virtualmente abeliano existe, pelo Lema 3.0.6, um subgrupo característico abeliano A de índice finito em G'. Pela Proposição 2.2.7, o subgrupo comutador G' é finitamente gerado e assim A é um subgrupo normal finitamente gerado de G. Seja $L = \{g \in G \mid [G', g] \leq A\}$. Note que L é a imagem inversa do núcleo da ação por conjugação de G/A em G'/A pelo homomorfismo canônino e, portanto, L é um subgrupo normal e de índice finito em G, em particular, L é finitamente gerado. Além disso, pela definição de L é claro que L/A é nilpotente de classe no máximo dois. É suficiente provar que L é virtualmente nilpotente, pois neste caso, existirá, pelo Lema 3.0.6, um subgrupo característico nilpotente e de índice finito em L que, em particular, será nilpotente, normal em G e de índice finito em G.

Como L é finitamente gerado, sem perda de generalidade, podemos assumir que $G = L$ e G/A é nilpotente de classe no máximo dois. Seja $G = \langle b_1, b_2, \ldots, b_k \rangle$. Pelo Corolário 3.0.4 existe um inteiro positivo t_i, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, tal que o subgrupo $K_i = \langle A, b_i^{t_i} \rangle$ é nilpotente. Note que G é uma extensão de um subgrupo abeliano finitamente gerado por um subgrupo nilpotente finitamente gerado, logo, usando Teorema 1.1.31 e Teorema 1.1.32 concluímos que G satisfaz condição maximal em subgrupos. Logo, existem elementos $g_1, g_2, \ldots, g_r$ em G para os quais o fecho normal K_i^G de K_i em G é

$$N_i := \langle\langle A, (b_i^{t_i})^{g_j}\rangle \mid j = 1, 2, \ldots, r\rangle.$$

Dado que $G'/A \leq Z(G/A)$, pois G/A é nilpotente de classe no máximo dois, e $(b_i^{t_i})^{g_j} = b_i^{t_i}[b_i^{t_i}, g_j]$, todos os conjugados $\langle A, (b_i^{t_i})^{g_j}\rangle$ de K_i normalizam um ao outro. Segue que N_i é um produto de uma quantidade finita de subgrupos normais nilpotentes, em particular, N_i é nilpotente para todos $i = 1, 2, \ldots, k$. Portanto, $N = N_1 N_2 \ldots N_k$ é nilpotente e normal em G. Denotando $\bar{u}$ a imagem de u em G/N, temos que $\bar{G} = G/N$, $\bar{A} = 1$ e $\overline{b_i^{t_i}} = 1$. Assim, $\overline{G}$ é gerado por uma quantidade finita de elementos de ordem finita e $\overline{G'}$ é finito. Segue que $\overline{G}$ é finito e G é virtualmente nilpotente. ■

Agora estamos prontos para demonstrar o Teorema 3.0.1 e sua afirmação será novamente escrita aqui para conveniência do leitor.

Seja G um grupo solúvel finitamente gerado satisfazendo $(*)$ *ou* $(**)$*. Então, G é virtualmente nilpotente.*

Demonstração: Usaremos indução no comprimento derivado $dl(G)$ de G. O caso $dl(G) \leq 2$ já foi provado no Lema 3.0.5. Suponha que $dl(G) \geq 3$. Pela Proposição 2.2.7, G' é finitamente gerado, portanto, pela hipótese de indução, existe um subgrupo normal nilpotente de índice finito $N \leq G'$. Pelo Lema 3.0.6, podemos assumir que N é um subgrupo característico de G', em particular, N é um subgrupo normal de G. Se N é abeliano, então o resultado segue do Lema 3.0.7. Assuma $N' \neq 1$. Como o subgrupo quociente G'/N' é virtualmente abeliano, pelo Lema 3.0.7 o grupo quociente G/N' é virtualmente nilpotente, isto é, existe um subgrupo normal de índice finito $K \leq G$ contendo N' tal que K/N' é nilpotente. Pelo Teorema de Fitting 1.1.19, podemos escolher K de tal maneira que $N \leq K$. Como N é um subgrupo normal nilpotente de K segue do Teorema de Hall 1.1.22 que K é nilpotente e, consequentemente, G é virtualmente nilpotente como queríamos. ■

Finalizamos este capítulo com a seguinte observação que será útil no próximo capítulo.

Observação 3.0.8. Segue do Teorema 3.0.1 que se G é um grupo finitamente gerado virtualmente solúvel satisfazendo $(*)$ ou $(**)$, então G é virtualmente nilpotente.

4

Grupos Pronilpotentes com Condições de Engel

Considere as seguintes condições em um grupo G:

($*$) Para todos $x, y \in G$ existem inteiros positivos $n = n(x, y)$ e $q = q(x, y)$ tais que $[x, {}_n y^q] = 1$;

($**$) Para todos $x, y \in G$ existem inteiros positivos $n = n(x, y)$ e $q = q(x, y)$ tais que $[x^q, {}_n y] = 1$.

Nosso objetivo neste capítulo é demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 4.0.1. *Seja G um grupo pronilpotente finitamente gerado.*

(a) Se G satisfaz ($*$), então G é virtualmente nilpotente.

(b) Se G satisfaz ($**$), então G é nilpotente.

O exemplo a seguir mostra que existe um grupo pro-2 finitamente gerado, satisfazendo a hipótese ($*$) que não é nilpotente.

Exemplo 4.0.2. Seja $\mathbb{Z}_2$ o grupo aditivo dos inteiros 2-ádicos. Considere o automorfismo $\alpha : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ dado por $g \mapsto -g$ e note que a ordem de α é 2. Considerando o produto semidireto $G = \mathbb{Z}_2\langle\alpha\rangle$, podemos notar que G é um grupo pro-2 finitamente gerado e que $g^2 \in \mathbb{Z}_2$ para todo $g \in G$. Como $\mathbb{Z}_2$ é normal abeliano, segue da Proposição 1.1.25 que g^2 é um elemento Engel de G para todo $g \in G$. Mas, G não é nilpotente pois tem centro trivial. De fato, seja $h \in Z(G)$. Podemos denotar

$h = z + \alpha^i$, com $z \in \mathbb{Z}_2$ e $\alpha^i \in \langle \alpha \rangle$. Para qualquer elemento não nulo $z_1 \in \mathbb{Z}_2$ temos

$$0 = [z_1, z + \alpha^i] = [z_1, \alpha^i] = (-z_1) + z_1^{\alpha^i},$$

se, e somente se, α^i é o elemento identidade de $\langle \alpha \rangle$. Portanto, podemos assumir que $h = z \in Z(G)$. Então,

$$0 = [z, \alpha] = (-z) + z^{\alpha}.$$

Por nossa escolha de α, segue que $z = 0$. Logo, $Z(G)$ é trivial.

Nossa demonstração do Teorema 4.0.1 utiliza métodos de Lie em teoria de grupos, especialmente resultados de E. Zelmanov usados para demonstrar o Problema Restrito de Burnside. Começaremos provando um lema que nos garante as hipóteses do Teorema 1.3.4, sobretudo, para encontrar um indíce de ad-nilpotência para cada comutador nos geradores da álgebra de Lie $L_p(G)$. Isso nos ajudará a tratar o caso em que G é um grupo pro-p finitamente gerado. O caso para grupo pronilpotente seguirá como consequência do fato que o grupo é isomorfo ao produto cartesiano de seus subgrupos de Sylow.

Demonstração do Teorema

Lema 4.0.3. *Seja G um grupo pro-p finitamente gerado satisfazendo $(*)$ ou $(**)$. Então, a álgebra de Lie $L_p(G)$ é gerada por um conjunto finito de elementos tal que todos os comutadores nesses geradores são ad-nilpotentes.*

Demonstração: A imagem do conjunto finito de geradores de G na primeira componente homogênea da álgebra de Lie $L_p(G)$ é um conjunto finito de geradores de $L_p(G)$. Afirmamos que todos os comutadores nestes geradores são ad-nilpotentes. De fato, pela definição do produto de Lie em $L_p(G)$, é suficiente garantir que todo elemento homogêneo $\bar{a}$ de $L_p(G)$ é ad-nilpotente. Denote por $\delta(u)$ o grau do elemento

$u \in G$ e seja $\bar{a}$ a imagem de $a \in G$ no correspondente fator $G_{\delta(a)}/G_{\delta(a)+1}$ da série de Zassenhaus-Jenning-Lazard. Fixaremos a e $\bar{a}$ para o resto de nossa demonstração.

Assuma que G satisfaz $(*)$ e considere os seguintes conjuntos:

$$S_{n,q} = \{x \in G \,|\, [x, {}_n a^q] = 1\}, \qquad n, q \in \mathbb{N}.$$

Cada conjunto $S_{n,q}$ é fechado e, por hipótese, temos que

$$G = \bigcup_{n,q \in \mathbb{N}} S_{n,q}.$$

Pelo Teorema 1.2.7 (Categoria de Baire) algum $S_{n,q}$ tem interior não vazio. Portanto, existem inteiros positivos n e q, um subgrupo normal aberto H de G e um elemento $d \in G$ tais que $Hd \subseteq S_{n,q}$. Neste caso, obtemos

$$[hd, {}_n a^q] = 1 \text{ para todo } h \in H.$$

Considerando $q = q_1 p^l$, com q_1 coprimo com p, escrevemos

$$[hd, {}_n a^{q_1 p^l}] = 1 \text{ para todo } h \in H. \tag{4.1}$$

Usaremos (4.1) para estimarmos o índice de ad-nilpotência de $\bar{a}$.

Como a imagem $\overline{a^{q_1}}$ de a^{q_1} em $G_{\delta(a)}/G_{\delta(a)+1}$ é igual a $q_1\bar{a}$ e q_1 é coprimo com a característica p do corpo base de $L_p(G)$, é suficiente provar que $\overline{a^{q_1}}$ é ad-nilpotente. Portanto, por conveniência, mudaremos a notação a^{q_1} por a em (4.1) de modo que

$$[hd, {}_n a^{p^l}] = 1 \text{ para todo } h \in H.$$

Logo, pelo Lema 1.1.8 e por (4.1), segue que

$$[h, {}_n a^{p^l}] = v(h, d, a^{p^l})^{-1} \text{ para todo } h \in H,$$

onde $v(h, d, a^{p^l})$ é um produto de comutadores de pesos pelo menos $n+2$ e cada um deles envolve h e d e envolve a^{p^l} pelo menos n vezes. Dado que G é pro-p e H é normal aberto em G temos que $|G/H| = p^r$, para algum r. Então, pela Observação 1.1.16, para qualquer $g \in G$, temos que $[g, {}_r a^{p^l}] \in H$ e, consequentemente,

$$[g, {}_{n+r} a^{p^l}] = v([g, {}_r a^{p^l}], d, a^{p^l})^{-1}. \tag{4.2}$$

Afirmamos que $\bar{a}$ é ad-nilpotente em $L_p(G)$ de índice no máximo $(n+r)p^l$.

De fato, lembre que na série de Zassenhaus-Jenning-Lazard é válido o seguinte:

$$u^p \in G_{p\delta(u)} \text{ para todo } u \in G. \tag{4.3}$$

Além disso, o Lema 1.3.6 nos garante que em $L_p(G)$, para as imagens de u e u^p em $G_{\delta(u)}/G_{\delta(u)+1}$ e $G_{p\delta(u)}/G_{p\delta(u)+1}$, respectivamente, temos

$$[c, \overline{u^p}] = [c, {}_p \bar{u}], \tag{4.4}$$

onde $c \in L_p(G)$. Assim, por (4.3), o grau de $v([g, {}_r a^{p^l}], d, a^{p^l})$ no lado direito de (4.2) é pelo menos $\delta(d) + \delta(g) + (n+r)p^l\delta(a)$ o qual é estritamente maior que $t = \delta(g) + (n+r)p^l\delta(a)$. Isto significa que a imagem do lado direito de (4.2) em G_t/G_{t+1} é trivial. Ao mesmo tempo, por (4.4), a imagem do lado esquerdo de (4.2) em G_t/G_{t+1} é igual a imagem de $[g, {}_{(n+r)p^l} a]$ em G_t/G_{t+1}, que é igual ao elemento $[\bar{g}, {}_{(n+r)p^l} \bar{a}]$ em $L_p(G)$. Portanto, para o correspondente elemento homogêneo de

$L_p(G)$ temos que

$$[\bar{g},{}_{(n+r)p^l}\bar{a}] = 0.$$

Dado que $\bar{g}$ pode ser qualquer elemento homogêneo, isto significa que $\bar{a}$ é ad-nilpotente, com índice no máximo $(n+r)p^l$, como afirmado.

Agora, suponhamos que G satisfaz $(**)$. Pela Observação 2.2.4, para cada $x, y \in G$, existem $n = n(x, y)$ e $q = q(x, y)$ tais que

$$[x, y^q, {}_n y] = 1. \tag{4.5}$$

Portanto, para nosso $a \in G$, consideramos os conjuntos

$$T_{n,q} = \{x \in G \,|\, [x, a^q, {}_n a] = 1\}, \qquad n, q \in \mathbb{N},$$

e observamos que $T_{n,q}$ são conjuntos fechados. Note que, por (4.5), temos

$$G = \bigcup_{n,q\in\mathbb{N}} T_{n,q}.$$

Pelo Teorema da Categoria de Baire algum $T_{n,q}$ tem interior não vazio. Então, existem inteiros n e q, um subgrupo normal aberto M de G e um elemento $d \in G$ tais que $Md \subseteq T_{n,q}$. Neste caso, obtemos

$$[hd, a^q, {}_n a] = 1, \text{ para todo } h \in M.$$

Usando o Lema 1.1.9, temos que

$$[h, a^q, {}_n a] = v(h, d, a^q, a)^{-1}, \text{ para todo } h \in M,$$

onde $v(h, d, a^q, a)$ é um produto de comutadores de pesos pelo menos $n+3$ envolvendo

h, d e a^q, e envolvendo a pelo menos n vezes.

Escreva $q = q_1 p^l$, q_1 coprimo com p. De modo semelhante à primeira parte, temos $[g, {}_r a] \in M$ para todo $g \in G$ e algum inteiro r, e obtemos $t = \delta(g) + (n + r + p^l)\delta(a)$ tal que a imagem do elemento $[g, {}_r a, {}_{p^l} a^{q_1}, {}_n a]$ em G_t/G_{t+1} (igual ao elemento $[\bar{g}, {}_r \bar{a}, {}_{p^l} \overline{a^{q_1}}, {}_n \bar{a}] \in L_p(G)$) é trivial. Em particular, como q_1 é coprimo com a característica p do corpo base de $L_p(G)$ e a imagem $\overline{a^{q_1}}$ de a^{q_1} em $G_{\delta(a)}/G_{\delta(a)+1}$ é igual a $q_1\bar{a}$, temos que

$$[\bar{g}, {}_{n+r+p^l} \bar{a}] = 0.$$

Portanto, como $\bar{g}$ pode ser qualquer elemento homogêneo de $L_p(G)$ segue que $\bar{a}$ é ad-nilpotente de índice no máximo $n + r + p^l$, como queríamos. ∎

Agora, estamos preparados para demonstrar o Teorema 4.0.1 para o caso pro-p.

Proposição 4.0.4. *Seja G um grupo pro-p finitamente gerado.*

(a) Se G satisfaz $(*)$, então G é virtualmente nilpotente;

(b) Se G satisfaz $(**)$, então G é nilpotente.

Demonstração: Assuma que G satisfaz $(*)$. Considere os seguintes conjuntos

$$S_{n,q} = \{(g_1, g_2) \in G \times G \mid [g_1, {}_n g_2^q] = 1\}, \qquad n, q \in \mathbb{N}.$$

Cada conjunto $S_{n,q}$ é fechado e por hipótese segue que

$$G \times G = \bigcup_{n,q \in \mathbb{N}} S_{n,q}.$$

Pelo Teorema da Categoria de Baire, algum $S_{n,q}$ tem interior não vazio. Consequentemente, existem um subgrupo normal aberto H de G e elementos $a_1, a_2 \in G$ tais que G satisfaz a identidade de classes laterais $[x, {}_n y^q] \equiv 1$ nas classes a_1H, a_2H. Pelo Teorema 1.3.9, $L = L_p(G)$ é PI. Pelo Lema 4.0.3 e Teorema 1.3.4, L é nilpotente.

Portanto, pelo Teorema 1.3.7, G é um grupo linear. Como G satisfaz $(*)$, segue que G não pode conter um subgrupo livre não-abeliano. Portanto, pelo Teorema 1.1.6, podemos escolher um subgrupo abstrato K, denso em G, que é finitamente gerado e virtualmente solúvel. Pela Observação 3.0.8, K é virtualmente nilpotente. Portanto, G é virtualmente nilpotente, como queríamos.

Agora, suponhamos que G satisfaz $(**)$. Temos os seguintes conjuntos fechados

$$T_{n,q} = \{(g_1, g_2) \in G \times G \,|\, [g_1^q, {}_n g_2] = 1\}, \qquad n, q \in \mathbb{N}.$$

Argumentando como no primeiro parágrafo, usamos o Teorema da Categoria de Baire e concluímos que G é virtualmente nilpotente. Seja A um subgrupo nilpotente, normal aberto de G. Pelo Teorema 1.1.22 (de Hall) é suficiente considerar o caso onde A é um grupo abeliano. Para quaisquer $a \in A$ e $g \in G$ existem inteiros positivos $s = s(a, g)$ e $t = t(a, g)$ tais que $[a^s, {}_t g] = 1$. Como A é normal abeliano finitamente gerado, para cada $g \in G$ existem l e k tais que $[A^l, {}_k g] = 1$, onde $A^l = \langle a^l \,|\, a \in A\rangle$. Note que A^l é um subgrupo característico e de índice finito em A, logo, A^l é aberto em A (veja [16, Theorem 1.17]) e, em particular, é normal e aberto em G. Portanto, G/A^l é nilpotente de classe c, para algum c, pois G é pro-p. Isto significa que, para todo $h \in G$ temos que $[h, {}_c g] \in A^l$. Logo, $[h, {}_{k+c} g] = 1$ e isto implica que todo elemento $g \in G$ é Engel. Portanto, G é Engel e G é nilpotente pelo Teorema 2.1.8 (Wilson-Zelmanov). ■

Agora estamos prontos para provar o Teorema 4.0.1 e suas afirmações serão escritas aqui para conveniência do leitor.

Seja G um grupo pronilpotente finitamente gerado.

(a) Se G satisfaz $(*)$, então G é virtualmente nilpotente.

(b) Se G satisfaz $(**)$, então G é nilpotente.

Demonstração: Suponha que G satisfaz $(*)$. Para cada par de inteiros positivos n, q considere os seguintes conjuntos

$$S_{n,q} = \{(g_1, g_2) \in G \times G \mid [g_1, {}_n g_2^q] = 1\}, \qquad n, q \in \mathbb{N}.$$

Cada conjunto $S_{n,q}$ é fechado e por hipótese temos

$$G \times G = \bigcup_{n,q \in \mathbb{N}} S_{n,q}.$$

Pelo Teorema da Categoria de Baire, algum $S_{n,q}$ tem inteiror não vazio. Consequentemente, existem um subgrupo normal aberto H de G e elementos $a_1, a_2 \in G$ tais que G satisfaz a identidade de classes laterais $[x, {}_n y^q] \equiv 1$ nas classes a_1H, a_2H. Seja m o índice de H em G. Sejam J o produto de todos os subgrupos de Sylow correspondendo aos números primos que dividem m e K o produto de todos os subgrupos de Sylow correspondendo aos primos que não dividem m. Como G é pronilpotente, temos que $G = J \times K$. Mais ainda, $K \leq H$ e assim $G = JH$. Portanto, podemos assumir $a_1, a_2 \in J$ e segue que K satisfaz a identidade $[x, {}_n y^q] \equiv 1$. Seja π o conjunto dos primos dividindo q e π' o conjunto de todos os primos que não pertencem a π. Seja $O_{\pi'}(K)$ o subgrupo maximal normal pro-π' de K. Para cada $g \in O_{\pi'}(K)$ temos $\langle g \rangle = \langle g^q \rangle$ e assim a identidade $[x, {}_n y] \equiv 1$ é satisfeita em $O_{\pi'}(K)$. Consequentemente, $O_{\pi'}(K)$ é um grupo pro-π' finitamente gerado Engel. Segue do Teorema de Wilson-Zelmanov que $O_{\pi'}(K)$ é nilpotente. Agora, é suficiente provar que o produto de todos os subgrupos de Sylow de G correspondendo aos primos dividindo qm é virtualmente nilpotente. De fato, isto segue diretamente da Proposição 4.0.4 (a). Portanto, G é virtualmente nilpotente, como afirmado.

Agora, assuma que G satisfaz $(**)$. Para cada par de inteiros positivos n, q, considere os seguintes conjuntos fechados

$$T_{n,q} = \{(g_1, g_2) \in G \times G \mid [g_1^q, {}_n g_2] = 1\}, \qquad n, q \in \mathbb{N}.$$

Argumentando como no primeiro parágrafo, usamos o Teorema da Categoria de Baire e deduzimos da Proposição 4.0.4 (b) que G é nilpotente. ■

5

Considerações Finais

Generalizando o Teorema de Wilson-Zelmanov (1992), R. Bastos e P. Shumyatsky [7] usaram uma condição mais fraca que condição de Engel em todos os elementos de um grupo e obtiveram que um grupo G profinito finitamente gerado é virtualmente nilpotente sempre que para todo $x \in G$ existir um inteiro positivo $q = q(x)$ tal que x^q é Engel.

Vários resultados foram obtidos com condições semelhantes às condições de Engel em grupos residualmente finitos. Por exemplo, R. Bastos e P. Shumyatsky [8, Teorema C] provaram que se um grupo G é residualmente finito, finitamente gerado, satisfazendo a identidade $[x, {}_n y^q] \equiv 1$, onde q é uma potência de um primo, então G é solúvel. Tal resultado é uma resposta para a seguinte pergunta:

Pergunta 5.0.1. [6, B.1.10] *Seja G um grupo residualmente finito, finitamente gerado satisfazendo uma identidade $f \equiv 1$. Quais condições sobre f implicam que G é solúvel?*

Observações 5.0.2.

1. O Teorema de J. S. Wilson 2.1.7 [58] também traz uma resposta para a pergunta 5.0.1;

2. Por Zelmanov (veja [66, Theorem 5]) todo p-grupo finitamente gerado residualmente

finito, cujo a álgebra de Lie $L_p(G)$ é PI, é finito. Com isso, a identidade $x^q \equiv 1$, onde q é uma potência fixada de um primo p, traz uma resposta para a Pergunta 5.0.1.

Resultados Mais Recentes

Seja G um grupo residualmente finito finitamente gerado. Em 2019, P. Shumyatsky, A. Tortora e M. Tota [54] mostraram que se G é adicionalmente um grupo Engel satisfazendo uma identidade então G é nilpotente.

Por sua vez, em 2020, D. Silveira [55] mostrou que se G satisfaz a identidade $[x,{}_n y^q] \equiv 1$ para algum inteiro positivo q, então existe uma função $f(n)$ tal que G possui um subgrupo normal nilpotente, de índice finito, de classe no máximo $f(n)$.

Observamos a seguir que tais condições são necessárias para concluir que grupos finitamente gerados sejam (virtualmente) nilpotentes.

Exemplos 5.0.3.

1. Os grupos Tarski Monster [42] são grupos infinitos não-abelianos simples 2-gerados tais que todo subgrupo próprio é um grupo cíclico de ordem p. Portanto, são grupos que satisfazem a identidade $[x, y^p] \equiv 1$. Por [66, Theorem 5] tais grupos não são residualmente finitos, pois, caso contrário, seriam finitos. E pela simplicidade não são virtualmente nilpotentes.

2. Já o exemplos de Golod (1964) são p-grupos Engel finitamente gerados residualmente finitos, não nilpotentes. Tais grupos não satisfazem uma identidade, pois caso contrário, seriam finitos [66, Theorem 5] e não podem ser virtualmente nilpotentes, pois por Zorn (1936) e Gruenberg (1953) eles seriam nilpotentes.

Posteriormente, em 2021, Bastos e Silveira [9] provaram que G é virtualmente nilpotente se adicionalmente G satisfizer alguma identidade e para cada $x \in G$ existir uma potência $m = m(x)$, de um primo q tal que x^m é n-Engel para algum n.

Recentemente, condições mais gerais que as condições de Engel foram exploradas por Shumyatsky e E. I. Khukhro [29]. A seguir definimos o que é um Engel sink de um elemento g de um grupo G.

Definição 5.0.4. *Um Engel sink de um elemento g de um grupo G é um conjunto $\mathscr{E}(g)$ tal que para todo $x \in G$ todo comutador suficientemente grande $[x, g, g, \dots, g]$ pertence a $\mathscr{E}(g)$, isto é, para todo $x \in G$ existe um inteiro positivo $n(x, g)$ tal que $[x, {}_n g] \in \mathscr{E}(g)$ para todo $n \geq n(x, g)$.*

Observe que g é um elemento Engel quando podemos escolher $\mathscr{E}(g) = \{1\}$. Uma generalização do Teorema de Medvedev (2003) foi obtida por meio do seguinte resultado:

Teorema 5.0.5. [29, Theorem 1.2] *Suponha que G seja um grupo compacto em que todo elemento tem um Engel sink enumerável. Então G tem um subgrupo normal finito N tal que G/N é localmente nilpotente.*

Utilizando a hipótese de grupos quase Engel, ou seja, grupos em que todos os seus elementos possuem um Engel sink finito, Shumyatsky [52, Theorem 1.1] mostrou que se G é um grupo linear quase Engel, então G possui um subgrupo normal finito N tal que G/N é hipercentral, que em particular, (veja, [45, 12.2.4]) é localmente nilpotente. Este resultado generaliza o Teorema de Garaščuk-Suprunenko (1960) [19, 20] para grupos lineares.

Vimos anteriormente que uma questão interessante em Teoria dos Grupos Engel é saber quando o conjunto de todos os elementos Engel de um grupo forma um subgrupo. Em geral, o radical de Hirsch-Plotkin está contido no conjunto de todos os elementos Engel de um grupo mas a inclusão contrária não é válida em geral (Golod, 1964). Nesta direção, citamos a seguir uma pergunta feita por Shumyatsky em The Kourovka Notebook para elementos quase Engel de um grupo linear.

Pergunta 5.0.6. [28, Problema 19.83] *Um elemento g de um grupo G é quase Engel se existe um Engel sink finito de g. O conjunto de elementos quase Engel em um grupo linear é sempre um subgrupo?*

Concluímos dizendo que neste trabalho obtivemos uma generalização do Teorema de Gruenberg (1953) para um grupo G solúvel finitamente gerado (Teorema 3.0.1) e obtivemos a mesma conclusão que Bastos-Shumyatsky (2015) para grupos pronilpotentes finitamente gerados (Teorema 4.0.1) assumindo qualquer uma das seguintes condições mais gerais:

($*$) Para todos $x, y \in G$ existem inteiros positivos $n = n(x, y)$ e $q = q(x, y)$ tais que $[x, {}_n y^q] = 1$;

($**$) Para todos $x, y \in G$ existem inteiros positivos $n = n(x, y)$ e $q = q(x, y)$ tais que $[x^q, {}_n y] = 1$;

Referências

[1] Abdollahi, A. Engel elements in groups. *Groups St Andrews 2009 in Bath, vol. 1 - London Mathematical Society Lecture Note Series*, vol. 387 (2011), 94–117.

[2] Adian, S. I., and Novikov, P. S. On infinite periodic groups i, ii, iii. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, vol. 32, n.1, 2, 3 (1968).

[3] Baer, R. Nilpotent groups and their generalizations. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol.47, n.3 (1940), 393–434.

[4] Baer, R. Engelsche elemente noetherscher gruppen. *Mathematische Annalen*, vol. 133, n. 3 (1957), 256–270.

[5] Bartholdi, L. Algorithmic decidability of Engel's property for automaton groups. *International Computer Science Symposium in Russia*, vol. 9691 (2016), 29–40.

[6] Bastos, R. *Condições de Engel em subgrupos verbais de grupos residualmente finitos - Tese de Doutorado em Matemática*. Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

[7] Bastos, R., and Shumyatsky, P. On profinite groups with Engel-like conditions. *Journal of Algebra*, vol. 427 (2015), 215–225.

[8] Bastos, R., Shumyatsky, P., Tortora, A., and Tota, M. On groups admitting a word whose values are Engel. *International Journal of Algebra and Computation*, vol. 23, n. 1 (2013), 81–89.

[9] Bastos, R., and Silveira, D. Bounded Engel elements in residually finite groups satisfying an identity. *Communications in Algebra*, vol. 49, n. 6 (2021), 2556–2562.

[10] Blackburn, N., and Huppert, B. *Finite Groups II.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, Berlin, 1982.

[11] Bruno, B., and Napolitani, F. A note on nilpotent-by-Černikov groups. *Glasgow Mathematical Journal*, vol. 46, n.2 (2004), 211–215.

[12] Burns, R., and Medvedev, Y. A note on Engel groups and local nilpotence. *Journal of the Australian Mathematical Society*, vol. 64, n.1 (1998), 92–100.

[13] Burnside, W. On an unsettled question in the theory of discontinuous groups. *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 33 (1902), 230–238.

[14] Burnside, W. On groups in which every two conjugate operations are permutable. *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. s1-35, n. 1 (1902), 28–38.

[15] Cohn, P. A non-nilpotent lie ring satisfying the Engel condition and a non-nilpotent Engel group. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 51, n.3 (1955), 401–405.

[16] Dixon, J. D., Du Sautoy, M. P. F., Mann, A., and Segal, D. *Analytic Pro-p Groups*, 2 ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1999.

[17] Fernández-Alcober, G. A., and Tracey, G. M. Engel elements in weakly branch groups. *Journal of Algebra*, vol. 554 (2020), 54–77.

[18] Fite, W. Groups of order 3^m in which every two conjugate operations are permutable. *Mathematische Annalen*, vol. 67, (1909), 498–510.

[19] Garaščuk, M., and Suprunenko, D. Lineare nilgruppen. *Doklady Akademii Nauk BSSR*, vol. 4 (1960), 407–408.

[20] Garaščuk, M., and Suprunenko, D. Linear groups with Engel's condition. *Doklady Akademii Nauk BSSR*, vol. 6 (1962), 277–280.

[21] Golod, E. S. On nil-algebras and finitely approximable p-groups. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, vol. 28, n.2 (1964), 273–276.

[22] Gruenberg, K. Two theorems on Engel groups. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 49, n.3 (1953), 377–380.

[23] Gupta, N. Third-Engel 2-groups are soluble. *Canadian Mathematical Bulletin*, vol. 15, n. 4 (1972), 523–524.

[24] Gupta, N. On groups in which every element has finite order. *The American Mathematical Monthly*, vol. 96, n. 4 (1989), 297–308.

[25] Hopkins, C. Finite groups in which conjugate operations are commutative. *American Journal of Mathematics*, vol. 51, n.1 (1929), 35–41.

[26] Jacobson, N. *Lie algebras.* Dover Publications, New York, 1979.

[27] Kelley, J. L. *General Topology.* Graduate Texts in Mathematics, ed. 1. Springer, New York, 1975.

[28] Khukhro, E., and Mazurov, V. Unsolved problems in group theory. the kourovka notebook. *arXiv preprint arXiv:1401.0300* (2014).

[29] Khukhro, E., and Shumyatsky, P. Compact groups with countable Engel sinks. *Bulletin of Mathematical Sciences*, vol. 11, n. 3 (2020), 2050015.

[30] Khukhro, E. I. *Nilpotent groups and their automorphisms*, vol. 8 of *De Gruyter Expositions in Mathematics*. De Gruyter, Berlin, 1993.

[31] Khukhro, E. I. *p-Automorphisms of Finite p-Groups*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1998.

[32] Lazard, M. Sur les groupes nilpotents et les anneaux de lie. In *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, vol. 71* (1954), pp. 101–190.

[33] Lazard, M. Groupes analytiques p-adiques. *Publications Mathématiques de l'IHÉS, vol. 26* (1965), 5–219.

[34] Levi, F. Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions. *The Journal of the Indian Mathematical Society*, vol. 6 (1942), 87–97.

[35] Magnus, W. Beziehungen zwischen gruppen und idealen in einem speziellen ring. *Mathematische Annalen*, vol. 111 (1935), 259–280.

[36] Magnus, W. Über beziehungen zwischen höheren kommutatoren. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 1937, n. 177, (1937), 105 – 115.

[37] Magnus, W. Über gruppen und zugeordneten liesche ringe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 1940, n. 182 (1940), 142–149.

[38] Magnus, W. A connection between The Baker-Hausdorff formula and a problem of Burnside. *Annals of Mathematics*, vol. 52, n. 1 (1950), 111–126.

[39] Mal'cev, A. I. On the faithful representation of infinite groups by matrices. *Mat. Sb.*, vol. 8, n. 50 (1940), 405–422 and *American Mathematical Society Translations: Series 2*, vol. 45 (1965), 1–18.

[40] Medvedev, Y. On compact Engel groups. *Israel Journal of Mathematics*, vol. 135 (2003), 147–156.

[41] Meier-Wunderli, H. Über die gruppen mit der identischen relation. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, vol. 94 (1949), 211–218.

[42] Ol'Shanskii, A. Y. Groups of bounded period with subgroups of prime order. *Algebra and Logic*, vol. 21, n.5 (1982), 369–418.

[43] Ribes, L., and Zalesskii, P. *Profinite Groups, 2 ed.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 40. Springer, Berlin, 2010.

[44] Robinson, D. J. *Finiteness conditions and generalized soluble groups: Part 2.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer, Berlin, 1972.

[45] Robinson, D. J. *A Course in the Theory of Groups*, 2 ed. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 1996.

[46] Sanov, I. N. Establishment of a connection between periodic groups with period a prime number and lie rings. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, vol. 16, n. 1 (1952), 23–58.

[47] Shumyatsky, P. On groups with commutators of bounded order. *Proceedings of the American Mathematical Society 127*, 9 (1999), 2583–2586.

[48] Shumyatsky, P. On residually finite groups in which commutators are Engel. *Communications in Algebra*, vol. 27, n.4 (1999), 1937–1940.

[49] Shumyatsky, P. Applications of lie ring methods to group theory. In *Nonassociative algebra and its applications*. CRC Press, 2000, pp. 373–395.

[50] Shumyatsky, P. Verbal subgroups in residually finite groups. *Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 51, n. 4 (2000), 523–528.

[51] Shumyatsky, P. On profinite groups in which commutators are Engel. *Journal of the Australian Mathematical Society*, vol. 70, n.1 (2001), 1–9.

[52] Shumyatsky, P. Almost Engel linear groups. *Monatshefte für Mathematik*, vol. 184, n. 4 (2018), 711–719.

[53] Shumyatsky, P., and da Silva, W. Engel conditions for soluble and pronilpotent groups. *Advances in Group Theory and Applications*, aceito para publicação (2022).

[54] Shumyatsky, P., Tortora, A., and Tota, M. Engel groups with an identity. *International Journal of Algebra and Computation*, vol. 29, n. 1 (2019), 1–7.

[55] Silveira, D. On residually finite groups satisfying an Engel type identity. *Monatshefte für Mathematik*, vol. 193, n.1 (2020), 171–176.

[56] Tits, J. Free subgroups in linear groups. *Journal of Algebra*, vol. 20, n. 2 (1972), 250–270.

[57] Traustason, G. Engel groups. *Groups St Andrews 2009 in Bath: Volume 2 - London Mathematical Society Lecture Note Series, Series Number 388* (2011), 520–550.

[58] Wilson, J. Two-generator conditions for residually finite groups. *Bulletin of the London Mathematical Society*, vol. 23, n.3 (1991), 239–248.

[59] Wilson, J. S. *Profinite groups*, vol. 19 of *London Mathematical Society Monographs*. Oxford, 1999.

[60] Wilson, J. S., and Zelmanov, E. I. Identities for lie algebras of pro-p groups. *Journal of pure and applied algebra*, vol. 81 (1992), 103–109.

[61] Zassenhaus, H. Ein verfahren, jeder endlichenp-gruppe einen lie-ring mit der charakteristikp zuzuordnen. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, vol. 13 (1939), 200–207.

[62] Zelmanov, E. I. On some problems of group theory and lie algebras. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, vol. 66, n. 1 (1990), 159.

[63] Zelmanov, E. I. Solution of the Restricted Burnside Problem for groups of odd exponent. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 36, n.1 (1991), 41–60.

[64] Zelmanov, E. I. *Nil rings and periodic groups*. Lecture Notes in Mathematics. Korean Mathematical Society, Seoul, 1992.

[65] Zelmanov, E. I. A solution of the Restricted Burnside Problem for 2-groups. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, vol. 72, n.2 (1992), 543–565.

[66] Zelmanov, E. I. On the Restricted Burnside Problem. *Fields Medallists' Lectures* (1997), 623–632.

[67] Zelmanov, E. I. Lie algebras and torsion groups with identity. *Journal of Combinatorial algebra*, vol. 1, n. 3 (2017), 289–340.

[68] Zorn, M. Nilpotency of finite groups. *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 42, n. 7 (1936), 485–486.