Universidade de Brasília

Caracterização do Princípio do Máximo para operadores uniformemente elípticos com termo não local

Ismael Oliveira dos Anjos

Orientador: Dr. Willian Cintra

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Brasília, Maio de 2022

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Caracterização do Princípio do Máximo para operadores uniformemente elípticos com termo não local

por

Ismael Oliveira dos Anjos*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 10 de maio de 2022.

Comissão Examinadora:

Willian Cintra da Silva
___

Prof. Dr. Willian Cintra da Silva - MAT/UnB (Orientador)

___

Prof. Dr. Carlos Alberto Pereira da Silva – MAT/UnB (Membro)

João Rodrigues Dos Santos Junior
___

Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior – UFPA (Membro)

* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Oc

Oliveira dos Anjos, Ismael
Caracterização do Princípio do Máximo para operadores uniformemente elípticos com termo não local / Ismael Oliveira dos Anjos; orientador Willian Cintra da Silva. -- Brasília, 2022.
126 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2022.

1. Operadores uniformemente elípticos. 2. Princípio do Máximo. 3. Autovalor principal. 4. Termo não local. I. Cintra da Silva, Willian , orient. II. Título.

Agradecimentos

Quero agradecer primeiramente a Deus por me permitir chegar até aqui e estar realizando este sonho. Sem Ele eu não conseguiria, foi meu refúgio e minha fortaleza nos momentos mais difíceis, longe de família e grande parte dos amigos.

Em segundo lugar, agradecer a minha família, minha base e meu alicerce. Em especial aos meus pais, Raimunda Nonata e Izaías dos Anjos, por tudo que fizeram por mim em toda a minha vida e principalmente pelo seu apoio e amor incondicional. O amor que sinto por vocês é incomensurável e nada que eu escreva aqui é suficiente para expressá-lo. Aos meus irmãos Irla, Izaque, Rosete e Rozilene por todo o apoio e encorajamento não me deixando sentir sozinho mesmo tão longe. Amo vocês!

Agradeço ao meu orientador, Willian Cintra, pelos infindáveis ensinamentos e pela grande paciência comigo durante esse processo. O senhor foi, além de um excelente orientador, um ótimo amigo.

Agradeço aos membros da banca, professor Carlos Alberto e professor João Rodrigues, por aceitarem avaliar este trabalho e pelas suas valiosas contribuições que permitiram tornar este trabalho melhor.

A todos os professores da minha formação. Em particular aos professores da UFAC José Ivan, Sérgio Brazil e Edcarlos por me ajudarem e incentivarem a ingressar no mestrado.

Agradeço a todos os meus amigos e familiares que oraram, me apoiaram e me ajudaram antes e durante esse processo. Em especial ao Caio, Gabriel e Gabriela, pela companhia, pelas contas divididas e pela paciência comigo. Vocês foram minha família em Brasília; Ao Mateus, por me incentivar a vir para cá desde a graduação, acreditar em mim e pelos diversos momentos de descontração; À Kémyla pela amizade e sábios conselhos; À todos da minha igreja pelas constantes orações e apoio;

À todos os amigos que tive o prazer de conhecer na UnB, entre eles: Daniel, Flávia, Maristela, Paúl, Vinícius e Katianny.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar uma caracterização do princípio do máximo para uma classe de operadores uniformemente elípticos de segunda ordem com um termo não local e com condições de fronteira mistas. Os resultados serão apresentados em contextos de espaços de Sobolev. Como consequência desta caracterização, obteremos diversos resultados de monotonia com respeito aos parâmetros do autovalor principal. Também obtemos resultados de existência e não existência para determinados tipos de equações diferenciais elípticas não lineares e com termo não local.

Abstract

The goal of this work is to present a characterization of the maximum principle for a class of second-order uniformly elliptic operators with a nonlocal term and with mixed boundary conditions. The results will be presented in Sobolev spaces contexts. As a consequence of this characterization, we will obtain several results of monotony with respect to the parameters of the principal eigenvalue. We also obtain existence and non-existence results for certain types of nonlinear elliptic differential equations.

Conteúdo

Lista de Figuras

Introdução

As equações diferenciais parciais (EDP's), tem sua importância devido a variedade de suas aplicações, em diversas áreas, onde modela problemas reais usando o rigor matemático. No entanto, é sabido que encontrar soluções para este tipo de equação não é uma tarefa fácil em geral. Além disso, em muitos casos, pela interpretação do modelo é interessante obter informações sobre as soluções positivas da equação. Por exemplo, em certas EDP's que modelam fenômenos em Dinâmica de Populações a solução representa uma densidade populacional que é uma grandeza não negativa. Neste sentido, o princípio do máximo surge como uma ferramenta que nos auxilia em obter a positividade das soluções, além de outros resultados como não existência e propriedades qualitativas.

No contexto dos chamados operadores elípticos de segunda ordem, os primeiros resultados sobre o princípio do máximo foram apresentados por Hopf em 1927 e 1952 (ver [18] e [19]), fornecendo condições necessárias para aplicá-lo. Em 1967 temos as contribuições de Protter e Weinberger com seu clássico livro sobre princípio do máximo em equações diferenciais (ver [22]) e também o princípio do mínimo fraco apresentado por Bony (ver [7]), apresentando uma versão em contextos de espaços de Sobolev. Todos estes resultados apresentam condições necessárias para a aplicar o princípio do máximo. Em 1994, López-Gómez e Molina-Meyer apresentam uma caracterização do princípio do máximo fornecendo condições necessárias e suficientes para a aplicação do mesmo (ver [21]). Em 1998, estes resultados foram estendidos por Amann e López-Gómez em [5], considerando condições de contorno mistas. Mais recentemente, Amann estendeu esta caracterização para incluir o caso dos chamados princípio do máximo fraco e princípio do máximo muito fraco (ver [4]). Para outros resultados de princípio do máximo, veja também [6, 13, 20] e suas referências.

Nosso objetivo neste trabalho é caracterizar o princípio do máximo para uma classe de operadores uniformemente elípticos de segunda ordem com termo não local e com condições de fronteiras gerais, conforme veremos mais adiante. Nosso estudo tem como base o artigo [12] de Delgado, Duarte e Suárez, porém, considerando operadores elípticos mais gerais, bem como outras condições de contorno, inspirados no artigo de López-Gómez e Cano-Casanova (ver [9]).

Este trabalho se divide em três capítulos. O primeiro capítulo é baseado em [20], onde faremos um estudo sobre alguns princípios do máximo no contexto de funções em Espaços de Sobolev para operadores da forma

$$\mathcal{L} := -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + c(x), \quad x \in \Omega \tag{1}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ e $a_{ij}, b_j, c \in L^\infty(\Omega)$. Primeiramente apresentaremos o princípio do máximo generalizado de Bony e em seguida o princípio do máximo fraco de Hopf. Estes teoremas nos auxiliarão na classificação das chamadas funções super harmônicas e supersoluções da terna $(\mathcal{L}, \mathfrak{B}, \Omega)$, onde $\mathfrak{B}$ é o operador de fronteira definido por

$$\mathfrak{B}\psi := \begin{cases} \psi, \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial \nu} + \beta\psi, \text{ sobre } \Gamma_1. \end{cases}$$

Finalizamos o capítulo com uma versão destes resultados para o operador com o termo não local dado por

$$\mathcal{L} - \int_\Omega K(x,y) \cdot dy,$$

sendo $K \in L^\infty(\Omega \times \Omega), K \geq 0$ e $K \neq 0$.

No Capítulo 2 estudaremos a existência de um autovalor para o problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\mathcal{I}} u = \lambda u \text{ sobre } \Omega, \\ \mathfrak{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

que possua uma autofunção com sinal definido, onde

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} := -div(A\nabla\cdot) + \sum_{j=1}^{N} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + c(x) - \int_\Omega K(x,y) \cdot dy, \tag{3}$$

sendo $K \in L^\infty(\Omega \times \Omega), K \geq 0$. Para isso iniciaremos apresentando uma série de resultados que nos auxiliarão na garantia da existência e unicidade de soluções para o problema linear

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + \omega)u = f \text{ sobre } \Omega, \\ \mathfrak{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Também apresenta algumas noções de espaços de Banach ordenados e utiliza destas para apresentar o teorema de Krein-Rutman. Teorema este que será utilizado como auxílio na garantia de existência e unicidade de um autovalor para o problema de autovalor relacionado a (4) cuja autofunção não muda de sinal. Tal autovalor será chamado de autovalor principal. Por fim, no terceiro capítulo, daremos uma caracterização do princípio do máximo para operadores da forma (3) relacionado a existência de um autovalor principal positivo. Precisamente, mostraremos que são equivalentes os cinco itens

i) $\sigma_0 := \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega] > 0$;

ii) $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ possui uma supersolução estrita $h \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$;

iii) $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ satisfaz o princípio do máximo forte;

iv) $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ satisfaz o princípio do máximo;

v) O operador resolvente do problema linear de valor de fronteira

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\mathcal{I}} u = f \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B} u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

denotado por $\mathfrak{R}_0 : C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega})$, é bem definido e fortemente positivo. Finalizamos o capítulo apresentando algumas consequências desta caracterização, a saber: monotonia e continuidade com respeito a alguns parâmetros do autovalor principal, caracterização pontual do autovalor principal e existência e não existência de soluções positivas de certas equações elípticas não lineares com termo não local.

Capítulo 1

Princípio do Máximo

Neste capítulo iremos apresentar e demonstrar alguns resultados de princípio do máximo para operadores lineares elípticos de segunda ordem. Este resultado é extremamente importante pois permite, por exemplo, concluir positividade de certas funções a partir de uma inequação diferencial. Apresentaremos os resultados no contexto das funções nos espaços de Sobolev. Mais precisamente em $W^{2,p}(\Omega), p > N$. Devemos observar que a escolha de $p > N$ é motivada pela imersão compacta,

$$W^{2,p}(\Omega) \subset C^{1,1-\frac{N}{p}}(\overline{\Omega}),$$

para $p > N$ (conforme Teorema A.5). Também, pelo Teorema A.6, qualquer função $u \in W^{2,p}(\Omega)$, com $p > N$, é duas vezes classicamente diferenciável q.t.p em Ω. Estes resultados se mostram importantes nas construções dos resultados, conforme poderemos observar no decorrer do trabalho. Para resultados sobre princípio do máximo em contextos de espaço de Sobolev para $p \leq N$, recomendamos o artigo [4].

Dividiremos o capítulo da seguinte maneira: Primeiro apresentaremos uma série de resultados técnicos que nos auxiliarão na demonstração do princípio do máximo de Bony, que será um dos principais resultados deste capítulo. Este resultado irá estabelecer quando uma função não pode atingir seu mínimo local em um conjunto, a partir de uma inequação diferencial estrita. Depois disso, apresentaremos uma versão de princípio do máximo, agora estabelecida por Hopf. Esta versão pode ser considerada como uma melhora da versão apresentada por Bony, uma vez que considera não apenas desigualdade estrita. Além disso estabelecerá o comportamento da função no interior do conjunto, bem como na fronteira. Após estes resultados, será apresentado um princípio do máximo para funções que satisfazem certas propriedades no bordo. Por fim, estabeleceremos um resultado análogo ao anterior para um operador linear uniformemente elíptico com um termo não local.

1.1 Noções preliminares

Iremos considerar no decorrer deste capítulo as hipóteses gerais:

H1. Ω é um domínio de $\mathbb{R}^N, N \geq 1$, cuja fronteira consiste de dois subconjuntos abertos e fechados, Γ_0 e Γ_1, de classe C^1

$$\partial\Omega := \Gamma_0 \cup \Gamma_1.$$

Necessariamente, Γ_0 e Γ_1 devem possuir uma quantidade finita de componentes e Γ_0 ou Γ_1 podem ser o conjunto vazio.

H2. Sejam $\beta \in C(\Gamma_1)$ e $\nu = (\nu_1, ..., \nu_N) \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}^N)$ um campo vetorial apontado para fora, no sentido de que

$$\langle \eta(x), \nu(x) \rangle > 0$$

para cada ponto $x \in \partial\Omega$, onde $\eta(x)$ é o campo de vetores normais unitário exterior.

Denotaremos por

$$\mathfrak{B} : C(\Gamma_0) \otimes C^1(\Gamma_1) \longrightarrow C(\partial\Omega)$$

o operador de fronteira definido por

$$\mathfrak{B}\psi := \begin{cases} \psi, \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial \nu} + \beta\psi, \text{ sobre } \Gamma_1. \end{cases}$$

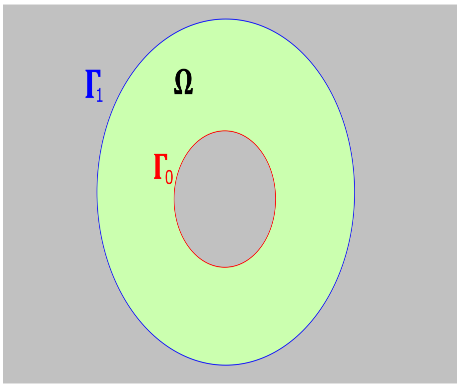
H3. Consideraremos

$$\begin{cases} A := (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}, A \in \mathcal{M}_N^{Sym}(C(\overline{\Omega})), \\ b = (b_1, ..., b_N) \in (L^\infty(\Omega))^N, c \in L^\infty(\Omega), \end{cases} \tag{1.1}$$

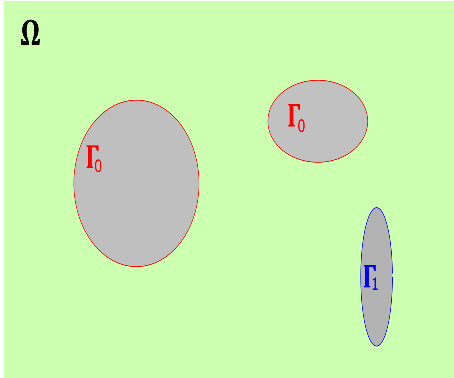
onde $\mathcal{M}_N^{Sym}(C(\overline{\Omega}))$ é o conjunto das matrizes simétricas de ordem N com entradas em $C(\overline{\Omega})$. Estamos interessados em estudar operadores diferencias de segunda ordem da forma

$$\mathcal{L} := -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} + c. \tag{1.2}$$

As seguintes definições desempenham um papel fundamental.



(a) Domínio limitado



(b) Domínio ilimitado

Figura 1.1 Exemplos de domínios regulares

Definição 1. (Operador Elíptico) Dado $x \in \Omega$, dizemos que $\mathcal{L}$ é elíptico no ponto x se existe uma constante $\mu_x > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu_x|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Isto é, forma bilinear associada à matriz A_x,

$$B(\xi,\eta) := \xi^T A_x \eta, (\xi,\eta) \in (\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$$

é positiva definida, onde a matriz A_x representa a matriz cujas entradas estão fixadas no único ponto x. Chamamos μ_x de constante de elipticidade de $\mathcal{L}$ em x.

O operador $\mathcal{L}$ é dito elíptico, se for elíptico em todo ponto $x \in \Omega$. Dizemos que ele é uniformemente elíptico, se existe uma constante $\mu > 0$ (que independe de x), de modo que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu|\xi|^2, \quad \forall (x,\xi) \in (\Omega, \mathbb{R}^N).$$

O maior μ para o qual esta condição é satisfeita é chamada de constante de elipticidade de $\mathcal{L}$ em Ω.

Utilizaremos para um conjunto $M \subset \mathbb{R}^N$ a notação $|M|$ para indicar sua medida de Lebesgue. Vamos fazer a seguinte convenção: Se $u \in C(\Omega)$, então escrevemos

- $u \geq 0$ se, e somente se, $u(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$;
- $u > 0$ se, e somente se, $u(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$;

Se $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável, escrevemos

- $u \geq 0$ se, e somente se, $u(x) \geq 0$ q.t.p em Ω;
- $u > 0$ se, e somente se, $u(x) \geq 0$ q.t.p em Ω e $u(x) > 0$ em $K \subset \Omega$, com $|K| > 0$.

Definição 2. Seja $u \in W^{2,p}(\Omega), p > N$. Então, u é dita supersolução de $(\mathcal{L}, \mathfrak{B}, \Omega)$ se

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \geq 0 \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}u \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Quando alguma dessas desigualdades é estrita, u é dita supersolução estrita de $(\mathcal{L}, \mathfrak{B}, \Omega)$. Diremos que u é superhamônica se $\mathcal{L}u \geq 0$ em Ω.

Definimos

$$\nu := A\eta$$

como o campo vetorial co-normal, ou seja

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \nabla u, A\eta \rangle = \langle A\nabla u, \eta \rangle$$

para todo $u \in C^1(\Gamma_1)$. Observe que

$$\langle \nu, \eta \rangle = \langle A\eta, \eta \rangle \geq \mu |\eta|^2 = \mu > 0$$

onde μ é a constante de elipticidade de $\mathcal{L}$ em Ω. Isso caracteriza ν como um vetor unitário apontado para fora.

Observação 3. A escolha de $\nu := A\eta$ é motivada pela definição de solução fraca. Isso ficará mais claro na Seção 2.4.

Ao final do capítulo será apresentado um resultado para o operador

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} := -div(A\nabla \cdot) + \langle b, \nabla \cdot \rangle + c - \int_{\Omega} K(x,y) \cdot dy$$

onde $K \in L^{\infty}(\Omega \times \Omega)$ é uma função não negativa e não identicamente nula. Este operador será por vezes referido como operador diferencial linear com termo não local ou simplesmente operador com termo não local.

A seguir apresentaremos algumas noções de regularidade de domínios limitados.

Definição 4. Dizemos que um conjunto Ω satisfaz a propriedade da esfera interior em um ponto $x \in \partial\Omega$ se existe $z_x \in \Omega$ e $r_x > 0$ tal que

$$|x - z_x| = r_x,\ B_{r_x}(z_x) \subset \Omega$$

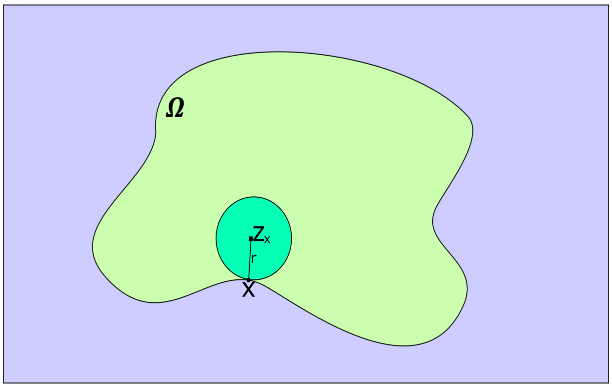


Figura 1.2 Propriedade da esfera interior em x.

Agora, seja Γ uma componente de $\partial\Omega$. Então:

(a) Ω satisfaz a *propriedade da esfera interior* em Γ se existe $r > 0$ (que depende de x) tal que, para todo $x \in \Gamma$, existe um ponto $z_x \in \Omega$

$$|x - z_x| = r,\ B_r(z_x) \subset \Omega.$$

Em tal caso, dizemos que Ω satisfaz a propriedade da esfera interior em Γ. Quando $\Gamma = \partial\Omega$, dizemos simplesmente que Ω satisfaz a propriedade da esfera interior uniforme.

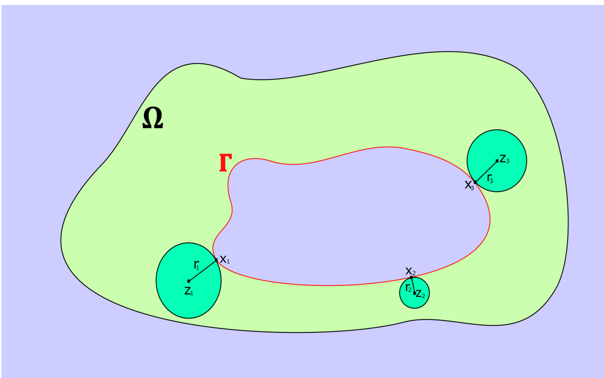


Figura 1.3 Propriedade da esfera interior em $\Gamma \subset \partial\Omega$.

(b) Ω satisfaz a *propriedade da esfera interior uniforme no sentido forte* em Γ se existe $r > 0$ tal que para todo $z \in \Omega$ com $\operatorname{dist}(z,\Gamma) \leq r$, existe um ponto $x_z \in \Gamma$ para o qual

$$\operatorname{dist}(z,\partial\Omega) = |z - x_z|,\ B_r\left(x_z + r\frac{z - x_z}{|z - x_z|}\right) \subset \Omega.$$

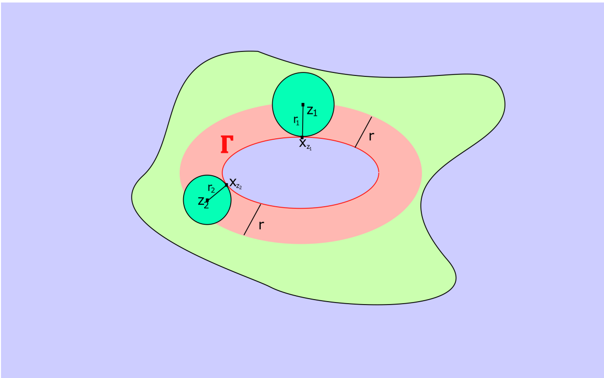


Figura 1.4 Propriedade da esfera interior no sentido forte.

Em tal caso, dizemos que Ω satisfaz a propriedade da esfera interior uniforme no sentido forte em Γ com parâmetro r. Quando $\Gamma = \partial\Omega$, dizemos simplesmente que Ω satisfaz a propriedade da esfera interior no sentido forte.

Em [20] mostra-se que se Ω satisfaz a propriedade da esfera interior uniforme no sentido forte em Γ com parâmetro $r > 0$, então ele também satisfaz a propriedade da esfera interior uniforme em Γ com mesmo parâmetro. Para a recíproca é necessário que Γ seja, no mínimo de classe C^1.

Observação: Se um conjunto for de classe C^2 então ele satisfaz a propriedade da esfera interior no sentido forte. (Ver [20], Theorem 1.8.4).

1.2 O Princípio do Máximo de Bony

Nesta seção estamos interessados em apresentar e demonstrar o Princípio do Máximo de Bony. Para isso, inicialmente daremos uma série de resultados técnicos preliminares que nos auxiliará na obtenção deste teorema. Um deles é o próximo lema, que garante que uma aplicação com uma certa regularidade leva conjuntos de medida nula em conjuntos de medida nula.

Lema 5. *Seja*

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad f = (f_1, \ldots, f_N)$$

com $f_i \in W^{1,p}(\Omega), p > N$*, para todo* $1 \leq i \leq N$*. Assim, se* $M \subset \Omega$ *e* $|M| = 0$ *então* $|f(M)| = 0$.

Demonstração. Para todo $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $\gamma > 0$, denotemos por $C_\gamma(x_0)$ o γ-cubo fechado centrado em x_0

$$C_\gamma(x_0) = \prod_{i=1}^{N} \left[x_i - \frac{\gamma}{2}, x_i + \frac{\gamma}{2}\right], \quad x_0 = (x_1, ..., x_n).$$

Dada uma função $g : D \longrightarrow \mathbb{R}^N, g = (g_1, ..., g_N)$, com $g_i \in W^{1,p}(D), 1 \leq i \leq N$, $D = C_1(0)$, onde $C_1(0)$ é o cubo de diâmetro 1 e centro na origem, vamos obter uma estimativa para a amplitude de $g(D)$. Pelo Teorema A.5, $u \in C^\alpha, \alpha = 1 - N/p$ e existe uma constante $C > 0$ tal que,

$$\begin{aligned} \|g\|_{C^{0,\alpha}(D)} &\leq C\|g\|_{W^{1,p}(D)}, \\ \|g\|_{C(\bar{D})} + \sup_{x,y \in D} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^\alpha} &\leq C(\|g\|_{L^p(D)} + \|\nabla g\|_{L^p(D)}) \end{aligned}$$

Usando que $\|g\|_{L^p(D)} \leq C_1 \|\nabla g\|_{L^p(D)}$ para alguma constante $C_1 > 0$, (ver [17], Theorem 7.10) e que $\|g\|_{C(\bar{D})} \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned} \sup_{x,y \in D} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^\alpha} &\leq C(C_1 \|\nabla g\|_{L^p(D)} + \|\nabla g\|_{L^p(D)} \\ &= (CC_1 + 1)\|\nabla g\|_{L^p(D)}. \end{aligned}$$

Logo, para todos $x, y \in D$,

$$|g(x) - g(y)| \leq K \left(\int_D |\nabla g|^p \right)^{\frac{1}{p}} |x - y|^\alpha,$$

onde $K = CC_1 + 1$. Como $D = C_1(0)$ é o cubo de centro 0 e raio 1, temos que para todo $x, y \in D$, $|x - y|^\alpha < 1$. Assim,

$$|g(x) - g(y)| \leq K \left(\int_{C_1(0)} |\nabla g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall x, y \in C_1(0),$$

e, portanto,

$$\max_{x,y \in C_1(0)} |g(x) - g(y)| \leq K \left(\int_{C_1(0)} |\nabla g|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Consideremos agora um cubo $C_\gamma(x_0)$ qualquer em Ω e defina

$$g_i(x) := f_i(\gamma x + x_0), \quad x \in C_1(0), 1 \leq i \leq N,$$

observamos que $g_i \in W^{1,p}(C_1(0)), 1 \leq i \leq N$. Portanto

$$\begin{aligned}
\max_{x,y\in C_\gamma(x_0)} |f_i(x) - f_i(y)| &= \max_{x,y\in C_1(0)} |f_i(\gamma x + x_0) - f_i(\gamma y + x_0)| \\
&= \max_{x,y\in C_1(0)} |g_i(x) - g_i(y)| \\
&\leq K \left(\int_{C_1(0)} |\nabla g_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Como $\nabla g_i(x) = \gamma \nabla f_i(\gamma x + x_0)$ segue que

$$\max_{x,y\in C_\gamma(x_0)} |f_i(x) - f_i(y)| \leq K\gamma \left(\int_{C_1(0)} |\nabla f_i(\gamma x + x_0)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Vamos utilizar o teorema de mudança de variável (ver Teorema A.3) para $h : C_\gamma(x_0) \longrightarrow C_1(0)$, o difeomorfismo dado por $h(z) = 1/\gamma(z - x_0)$. Temos que

$$\text{Jac } h(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$|\text{Jac } h(x)| = \frac{1}{\gamma^N}.$$

Assim segue que,

$$\begin{aligned}
K\gamma \left(\int_{C_1(0)} |\nabla f_i(\gamma x + x_0)|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= K\gamma \left(\int_{C_\gamma(x_0)} |\nabla f_i(z)|^p \frac{1}{\gamma^N} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= K\gamma^{1-\frac{N}{p}} \left(\int_{C_\gamma(x_0)} |\nabla f_i(z)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Sabendo que

$$|\nabla f_i| = \left(\sum_{j=1}^{N} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{j=1}^{N} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq \sum_{i,j=1}^{N} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|,$$

vale,

$$\max_{x,y\in C_\gamma(x_0)} |f_i(x)-f_i(y)| \le K\gamma^{1-\frac{N}{p}}\left[\int_{C_\gamma(x_0)}\left(\sum_{i,j=1}^{N}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Assim

$$\begin{aligned} |f(C_\gamma(x_0))| &\le \prod_{i=1}^{N}\max_{x,y\in C_\gamma(x_0)}|f_i(x)-f_i(y)| \\ &\le K^N\gamma^{N(1-\frac{N}{p})}\left[\int_{C_\gamma(x_0)}\left(\sum_{i,j=1}^{N}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|\right)^p\right]^{\frac{N}{p}}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Agora, consideremos $M\subset\Omega$ tal que $|M|=0$. Então, para todo $\varepsilon>0$ existe uma sequência de cubos, digamos $C_n := C_{\gamma_n}(x)$, $n\ge 1$, tais que

$$M\subset\bigcup_{n\ge1}C_n\subset\Omega \text{ e } \sum_{n\ge1}|C_n|\le\sum_{n\ge1}\gamma_n^N\le\varepsilon. \tag{1.4}$$

Pela desigualdade de Hölder, sabemos que, para $1/\beta+1/\beta'=1$,

$$\sum a_nb_n\le\left(\sum a_n^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}\left(\sum b_n^{\beta'}\right)^{\frac{1}{\beta'}}.$$

Tomando $1/\beta = 1-N/p$, $1/\beta' = N/p$, $a_n=\gamma_n^{\frac{N}{\beta}}, b_n = l_n^{\frac{1}{\beta'}}$ onde $l_n = \int_{C_n}\left(\sum_{i,j=1}^{N}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|\right)^p$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{n\ge1}a_nb_n &= \sum_{n\ge1}\gamma_n^{N(1-\frac{N}{p})}\left[\int_{C_n}\left(\sum_{i,j=1}^{N}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|\right)^p\right]^{\frac{N}{p}} \\ &\le\left(\sum_{n\ge1}(\gamma_n^{\frac{N}{\beta}})^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}\left(\sum_{n\ge1}(l_n^{\frac{1}{\beta'}})^{\beta'}\right)^{\frac{1}{\beta'}} \\ &=\left(\sum_{n\ge1}\gamma_n^N\right)^{1-\frac{N}{p}}\left[\sum_{n\ge1}\int_{C_n}\left(\sum_{i,j=1}^{N}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|\right)^p\right]^{\frac{N}{p}}. \end{aligned}$$

Substituindo a desigualdade anterior em (1.3) e usando (1.4) temos :

$$\begin{aligned}
|f(M)| &\leq \sum_{n\geq 1} |f(C_n)| \\
&\leq K^N \sum_{n\geq 1} \gamma_n^{N(1-\frac{N}{p})} \left[\int_{C_n} \left(\sum_{i,j=1}^{N} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \right)^p \right]^{\frac{N}{p}} \\
&\leq K^N \left(\sum_{n\geq 1} \gamma_n^N \right)^{1-\frac{N}{p}} \left[\sum_{n\geq 1} \int_{C_n} \left(\sum_{i,j=1}^{N} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \right)^p \right]^{\frac{N}{p}} \\
&\leq \varepsilon^{1-\frac{N}{p}} K^N \left[\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{N} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \right)^p \right]^{\frac{N}{p}}.
\end{aligned}$$

Como ε foi tomado arbitrário, segue o resultado. ■

A seguir mostraremos que a forma quadrática hessiana é localmente não negativa em qualquer mínimo local estrito de funções em $W^{2,p}(\Omega)$ com $p > N$.

Lema 6. *Seja $u \in W^{2,p}(\Omega), p > N$ e $x_0 \in \Omega$ tal que u atinge um mínimo local estrito $m \in \mathbb{R}$ em x_0, ou seja, existe $\delta_0 > 0$ tal que*

$$u(x) > u(x_0) = m, \quad \forall x \in \overline{B_{\delta_0}(x_0)} \setminus \{x_0\}. \tag{1.5}$$

Então, para todo $\varepsilon \in (0, \delta_0)$, existe um subconjunto M de $B_\varepsilon(x_0)$, mensurável com $|M| > 0$ tal que a forma quadrática

$$D^2u(x) := \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{1\leq i,j\leq N}$$

é não negativa q.t.p em M.

Demonstração. Seja S a superfície de classe C^1 de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ determinada pelo gráfico de $y = u(x)$, ou seja,

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}; x \in \Omega,\ y = u(x)\}.$$

Dado $\varepsilon \in (0, \delta_0)$, defina

$$M = \{\overline{x} \in B_\varepsilon(x_0);\ \exists \overline{\delta} = \overline{\delta}(x) > 0 \text{ tal que } \langle \nabla u(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle + u(\overline{x}) \leq u(x), \quad \forall x \in B_{\overline{\delta}}(\overline{x}) \subset \Omega\}.$$

Isto é, M é o conjunto dos pontos $\overline{x}$ de $B_\varepsilon(x_0)$ cujo hiperplano tangente está abaixo do gráfico de u em uma vizinhança de $\overline{x}$. Note que M é um conjunto fechado e portanto, mensurável.

Agora vamos mostrar que para cada $\varepsilon \in (0, \delta_0)$, existe $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ de modo que, para todo $h \in B_\eta(0) \subset \mathbb{R}^N$, vale

$$\langle h, x - x_0 \rangle + u(x_0) \leq u(x) \quad \forall x \in D_\varepsilon := \{x \in \Omega; \varepsilon < |x - x_0| < \delta_0\}.$$

De fato, defina $\eta = \eta(\varepsilon) = \dfrac{1}{\delta_0}\left(\inf_{D_\varepsilon} u - u(x_0)\right)$. Daí, para todo $h \in B_\eta(0)$, temos que

$$|h| < \eta = \frac{1}{\delta_0}\left(\inf_{D_\varepsilon} u - u(x_0)\right) < \frac{1}{\delta_0}\left(u(x) - u(x_0)\right), \quad \forall x \in D_\varepsilon. \tag{1.6}$$

Por outro lado, para todo $x \in D$,

$$|h|\delta_0 > |h||x - x_0| \geq |\langle h, x - x_0 \rangle| \geq \langle h, x - x_0 \rangle. \tag{1.7}$$

De (1.6) e (1.7), obtemos que, para todo $x \in D_\varepsilon$,

$$\langle h, x - x_0 \rangle + u(x_0) < u(x).$$

Pela construção, para todo $h \in B_\eta(0)$ deve existir um único hiperplano paralelo a

$$y = \langle h, x - x_0 \rangle + u(x_0)$$

tangente a S em algum ponto $x \in M \subset B_\varepsilon(x_0)$.

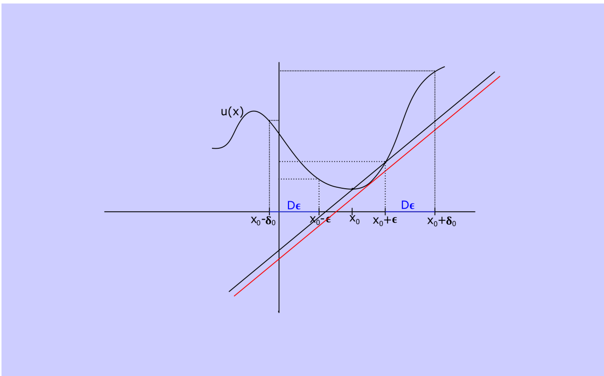


Figura 1.5 Caso $N = 1$. Reta secante e reta tangente em um ponto $x \in M \subset B_\varepsilon(x_0)$.

Agora considere $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ a aplicação dada por $f(x) = \nabla u(x)$, $x \in \Omega$. Conforme visto acima, para todo $h \in B_\eta(0)$, existe $x \in M$ tal que $f(x) = \nabla u(x) = h$, isto é, $B_\eta(0) \subset f(M)$.

Como $|B_\eta(0)| > 0$, segue que $|f(M)| > 0$. Por outro lado, $u \in W^{2,p}(\Omega), p > N$ implica que

$$f_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Logo, pelo Lema 5 vale que $|M| > 0$.

Vamos mostrar agora que, nos pontos $\overline{x} \in M$ tais que u é duas vezes diferenciável, a forma quadrática $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ é não negativa. Com efeito, sabemos que para $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$

$$D^2u(x) \cdot v^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{u(x+tv) + u(x-tv) - 2u(x)}{t^2},$$

e que se $\overline{x} \in M$, existe $\overline{\delta}$ tal que a seguinte desigualdade é satisfeita

$$u(x) - u(\overline{x}) \geq \langle \nabla u(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle, \quad \forall x \in B_{\overline{\delta}}(\overline{x}).$$

Daí, tomando $v \in \mathbb{R}^N$ de modo que $\overline{x} + tv \in B_{\overline{\delta}}(\overline{x})$ e $\overline{x} - tv \in B_{\overline{\delta}}(\overline{x})$ obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{u(\overline{x}+tv) + u(\overline{x}-tv) - 2u(\overline{x})}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \frac{u(\overline{x}+tv) - u(\overline{x}) + u(\overline{x}-tv) - u(\overline{x})}{t^2} \\
&\geq \lim_{t \to 0} \frac{\langle \nabla u(\overline{x}), \overline{x}+tv-\overline{x} \rangle + \langle \nabla u(\overline{x}), \overline{x}-tv-\overline{x} \rangle}{t^2} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\langle \nabla u(\overline{x}), tv \rangle - \langle \nabla u(\overline{x}), tv \rangle}{t^2} = 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}(\overline{x}) \geq 0 \text{ q.t.p em } M,$$

e consequentemente $D^2u(x)$ é uma forma quadrática não negativa q.t.p em M. ■

Antes do próximo resultado, precisamos da seguinte definição:

Definição 7. Dada uma aplicação mensurável $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e um ponto $x_0 \in \Omega$, dizemos que f satisfaz

$$\limsup_{x \to x_0} \operatorname{ess} f(x) \leq 0$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe $M \subset B_\varepsilon(x_0) \cap \Omega$, com $|M| > 0$ tal que $f(x) \leq 0$ q.t.p em M.

Como último resultado técnico temos a seguinte

Proposição 8. *Suponha que* $c \geq 0$ *e* $u \in W^{2,p}(\Omega), p > N$*, possua um mínimo local* $m \leq 0$ *em algum* $x_0 \in \Omega$*. Então,*

$$\limsup_{x \to x_0} \operatorname{ess} \mathcal{L}u(x) \leq 0. \tag{1.8}$$

Demonstração. Suponha que u possua um mínimo local estrito em x_0. Pelo Lema 6, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existe $M \subset B_\varepsilon(x_0)$ com $|M| > 0$, tal que

$$D^2u(x) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

é positiva definida q.t.p $x \in M$. Isto é, para todo $v \in \mathbb{R}^N, v = (v_1, ..., v_N)$

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) v_i v_j \text{ q.t.p } x \in M.$$

Em particular, tomando $v = e_i,\ i = 1, ..., N$, os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^N$, obtemos que

$$0 \leq \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x), \text{ q.t.p em } M$$

e consequentemente

$$\Delta u(x) \geq 0 \text{ q.t.p em } M.$$

Logo,

$$\liminf_{x \to x_0} \operatorname{ess} \Delta u(x) \geq 0. \tag{1.9}$$

Como a matriz $A = (a_{ij})$ é simétrica e $\mathcal{L}$ é uniformemente elíptico, então A é positiva definida e portanto todos seus autovalores são positivos. Além disso, $\mathbb{R}^N$ possui uma base de autovetores ortogonais. Sejam $w_1 = (w_{11}, ..., w_{N1}), ..., w_N = (w_{1N}, ..., w_{NN})$ esses autovetores com autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_N$, respectivamente e considere as matrizes,

$$C = \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N1} & \cdots & w_{NN} \end{pmatrix}$$

e

$$N = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_N}} \end{pmatrix}.$$

Logo podemos fazer a mudança de variável

$$-\sum_{j}^{N} \frac{\partial^2 v}{\partial y_j^2} = -\sum_{j}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

onde, $v(y) = u(x)$, $y = NC^T x$. Assim obtemos de (1.9) que

$$\limsup_{x \to x_0} \operatorname{ess} \left(-\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) \leq 0, \quad \text{q.t.p } x \in M. \tag{1.10}$$

Como x_0 é mínimo local, temos que $\nabla u(x_0) = 0$. Portanto,

$$\limsup_{x \to x_0} \operatorname{ess} \langle b, \nabla u(x) \rangle = 0. \tag{1.11}$$

Também, sendo $c \geq 0$ e $m = u(x_0) \leq 0$, vale que

$$u(x_0)c \leq 0. \tag{1.12}$$

Combinando (1.10), (1.11) e (1.12) tem-se que

$$\limsup_{x \to x_0} \operatorname{ess} \mathcal{L}u(x) \leq 0.$$

No caso geral, quando x_0 não é um mínimo local estrito de u, pode-se aplicar o resultado anterior para a função auxiliar $v(x) := u(x) + |x - x_0|^4$, $x \in \Omega$, donde obtemos

$$\limsup_{x \to x_0} \operatorname{ess} \mathcal{L}v(x) = \limsup_{x \to x_0} \operatorname{ess} \left(\mathcal{L}u(x) + \mathcal{L}|x - x_0|^4 \right) \leq 0.$$

Como $|x - x_0|^4$ é de classe C^4, temos que

$$\limsup_{x \to x_0} \operatorname{ess} \mathcal{L}|x - x_0|^4 = \lim_{x \to x_0} \mathcal{L}|x - x_0|^4 = 0.$$

Assim,

$$\limsup_{x \to x_0} \mathrm{ess}\, \mathcal{L}v(x) = \limsup_{x \to x_0} \mathrm{ess}\, \mathcal{L}u(x) \leq 0$$

e isso finaliza a demonstração. ■

O próximo resultado é o mais importante desta seção.

Teorema 9 (Princípio do Máximo de Bony)**.** *Suponha que $c \geq 0$ e $u \in W^{2,p}(\Omega), p > N$, satisfazem*

$$\inf_K \mathrm{ess}\, \mathcal{L}u > 0 \text{ , } \forall K \subset \Omega \text{ compacto .}$$

Então, u não pode atingir um mínimo local não positivo em Ω.

Demonstração. Se fosse $m = \inf_{\Omega} u \leq 0$ em Ω, então, pela Proposição 8

$$\limsup_{x \to x_0} \mathrm{ess}\, \mathcal{L}u(x) \leq 0.$$

Consequentemente

$$\liminf_K \mathrm{ess}\, \mathcal{L}u(x) \leq \lim_{x \to x_0} \sup \mathrm{ess}\, \mathcal{L}u(x) \leq 0,$$

onde $K = \overline{B_r(x_0)}$ é tal que $u(x) \geq m$, para todo $x \in \overline{B_r(x_0)}$ o que contradiz

$$\inf_K \mathrm{ess}\, \mathcal{L}u > 0 \text{ , } \forall K \subset \Omega \text{ compacto.}$$

■

1.3 Princípio do máximo fraco de Hopf

O principal objetivo desta seção consiste em apresentar e demonstrar uma versão do princípio do máximo de Hopf para funções $u \in W^{2,p}(\Omega), p > N$. Precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 10 (Princípio do máximo fraco de Hopf)**.** *Suponha que $c \geq 0$ e $u \in W^{2,p}(\Omega), p > N$, satisfazem*

$$\mathcal{L}u \geq 0 \text{ q.t.p em } \Omega \text{ e } m := \inf_{\Omega} u \in (-\infty, 0].$$

Então, ou $u = m$ em Ω, ou $u(x) > m$ para todo $x \in \Omega$. Em outras palavras, u não pode atingir m em Ω, a menos que $u = m$. Além disso,

$$\inf_{\bar{\Omega}} u = \inf_{\partial\Omega} u = m$$

quando Ω *é limitado.*

Demonstração. Vamos argumentar por contradição. Suponha que existam $x_0, x_1 \in \Omega$ tais que

$$m = u(x_0) = \inf_{\Omega} u \leq 0 \quad e \quad u(x_1) > m. \tag{1.13}$$

Ou seja, estamos supondo que u é não constante e atinge seu ínfimo em Ω.Vamos mostrar que isso gera uma contradição. Para isso, sabendo que Ω é aberto e conexo podemos tomar $\gamma \in C([0,1],\Omega)$ uma curva contínua ligando x_0 a x_1 em Ω, ou seja, tal que $\gamma(t) \in \Omega$, para todo $t \in [0,1]$ e $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$. Uma vez que $u \in W^{2,p}(\Omega), p > N$, temos que $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Assim, de acordo com (1.13), pela continuidade de $t \longmapsto u(\gamma(t))$, existe $t_m \in [0,1)$ tal que

$$u(\gamma(t_m)) = m \text{ e } u(\gamma(t)) > m, \quad \forall t \in (t_m, 1].$$

Isto é, $y_0 = \gamma(t_m)$ é o primeiro ponto ao longo da curva γ partindo de x_1 e chegando em x_0 onde u atinge m. Note que $t_m = 0$ se $u(\gamma(t)) > m$ para todo $t \in (0,1]$. Embora, nesse caso, $y_0 = x_0$, em geral $y_0 \neq x_0$. Essa situação é ilustrada pela Figura 1.6. Agora, defina

$$\mathrm{Tra}\,\gamma := \{\gamma(t) : 0 \leq t \leq 1\} \quad \text{e} \quad d := \mathrm{dist}(\mathrm{Tra}\,\gamma, \partial\Omega) > 0.$$

Note que $d > 0$ pois $\partial\Omega$ é fechado e $\mathrm{Tra}\,\gamma$ é compacto. Escolha $y_1 \in \{\gamma(t) : t_m < t < 1\}$ tal que $|y_0 - y_1| < \frac{d}{2}$. Por construção, $u(y_1) > m$. Daí, pela continuidade de u, existe $r > 0$ tal que

$$u(x) > m, \quad \forall x \in B_r(y_1). \tag{1.14}$$

Mais ainda, como $u(y_0) = m$, necessariamente

$$r \leq |y_0 - y_1| < \frac{d}{2}. \tag{1.15}$$

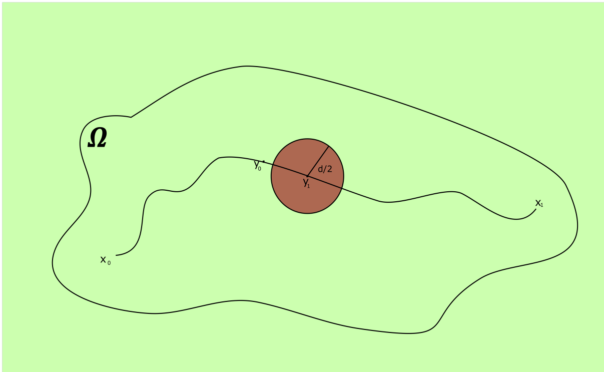


Figura 1.6 Construindo y_0 e y_1

Seja ρ o maior $r > 0$ satisfazendo (1.14). Por (1.15), $\rho > 0$ é bem definido e satisfaz

$$\rho \leq |y_0 - y_1| < \frac{d}{2}, \tag{1.16}$$

em particular, $\overline{B_\rho(y_1)} \subset \Omega$ (ver Figura 1.6). Pela continuidade de u e a maximalidade de ρ, existe $y_2 \in \partial B_\rho(y_1)$ tal que $u(y_2) = m$. Se $\rho = |y_0 - y_1|$ podemos, tomar $y_2 = y_0$. Considere agora z o ponto médio do segmento ligando y_1 a y_2, isto é, $z := (y_1 + y_2)/2$ e a bola $B_{\frac{\rho}{2}}(z)$. Essa bola é tangente a $B_\rho(y_1)$ em y_2 e satisfaz

$$B_{\frac{\rho}{2}}(z) \backslash \{y_2\} \subset B_\rho(y_1) \tag{1.17}$$

(ver Figura 1.7). Como $u(x) > m$ para todo $x \in B_\rho(y_1)$, (1.17) implica

$$u(x) > m, \quad \forall x \in \overline{B_{\frac{\rho}{2}}(z)} \backslash \{y_2\}. \tag{1.18}$$

Finalmente, considere a bola de raio $\rho/4$ centrada em y_2, $B_{\frac{\rho}{4}}(y_2)$. A figura 1.7 esboça a construção anterior. Note que (1.16) implica

$$\overline{B_{\frac{\rho}{4}}(y_2)} \subset \Omega$$

e, pelas hipóteses gerais iniciais, os coeficientes de $\mathcal{L}$ são limitados em $\overline{B_{\frac{\rho}{4}}(y_2)}$.

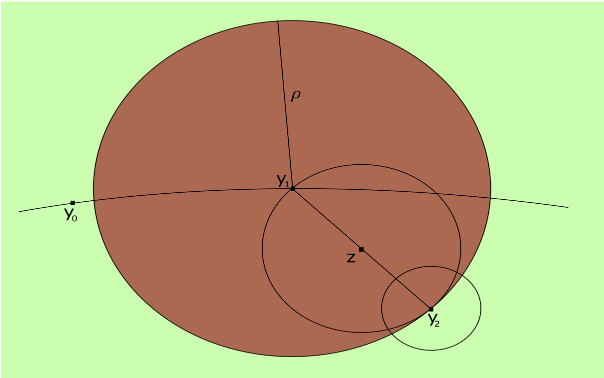


Figura 1.7 A bola $B_{\frac{\rho}{4}}(y_2)$

O restante da prova consiste na construção de uma função não-constante

$$w \in W^{2,p}\big(B_{\frac{\rho}{4}}(y_2)\big)$$

tal que

$$w(y_2) = m, \tag{1.19}$$

$$w(x) > m, \quad \forall x \in \partial B_{\frac{\rho}{4}}(y_2), \tag{1.20}$$

$$\mathcal{L}w(x) > 0, \quad \text{q.t.p em } B_{\frac{\rho}{4}}(y_2). \tag{1.21}$$

Por (1.19) e (1.20), w atinge seu mínimo absoluto (necessariamente menor do que ou igual a $m = w(y_2) \leq 0$) em $B_{\frac{\rho}{4}}(y_2)$. De acordo com o Teorema 9, uma tal função não pode satisfazer (1.21). Essa contradição conclui a prova do teorema.

Agora, vamos considerar as funções

$$v(x) := e^{-\alpha|x-z|^2} - e^{-\alpha\frac{\rho^2}{4}},\ x \in \mathbb{R}^N \tag{1.22}$$

e

$$w(x) := u(x) - \varepsilon v(x),\ x \in \Omega,$$

onde $\alpha > 0$ e $\varepsilon > 0$ são constantes. Por construção $w \in W^{2,p}\big(B_{\frac{\rho}{4}}(y_2)\big)$. Assim, para completar a prova do teorema é suficiente mostrar que existem $\alpha > 0$ e $\varepsilon > 0$ para as quais w satisfaz (1.19), (1.20) e (1.21).

Como $|y_2 - z| = \rho/2$, e $u(y_2) = m$, temos $w(y_2) = u(y_2) - \varepsilon v(y_2) = m - \varepsilon\big(e^{-\alpha\frac{\rho^2}{4}} - e^{-\alpha\frac{\rho^2}{4}}\big) = m$ e portanto (1.19) se verifica. Em seguida, vamos provar que, para $\alpha > 0$

suficientemente grande,

$$\mathcal{L}v(x) < 0, \quad \forall x \in B_{\frac{\rho}{4}}(y_2). \tag{1.23}$$

Como $\mathcal{L}u \geq 0$ em Ω, (1.23) implicará que $\mathcal{L}w(x) = \mathcal{L}u(x) - \varepsilon \mathcal{L}v(x) > 0$ para todo $x \in \overline{B_{\frac{\rho}{4}}(y_2)}$ e $\varepsilon > 0$, consequentemente (1.21) se cumpre. De fato, para cada $j \in \{1,...,N\}$ e $x \in \mathbb{R}^N$, obtemos de (1.22) que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v(x)}{\partial x_j} &= -2\alpha(x_j - z_j)e^{-\alpha|x-z|^2} \\
\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_j^2} &= -2\alpha e^{-\alpha|x-z|^2} + (4\alpha^2(x_j - z_j)^2)e^{-\alpha|x-z|^2} = [-2\alpha + 4\alpha^2(x_j - z_j)^2]e^{-\alpha|x-z|^2}
\end{aligned}$$

onde x_i e $z_i, i \in \{1,...N\}$, representam as i-ésimas coordenadas de x e z, respectivamente. Além disso, para cada $i, j \in \{1,...,N\}$, com $i \neq j$ e $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}[-2\alpha(x_j - z_j)e^{-\alpha|x-z|^2}] = 4\alpha^2(x_i - z_i)(x_j - z_j)e^{-\alpha|x-z|^2}$$

e assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}v(x) =& - \sum_{i,j=1, i\neq j}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{j=1}^{N} a_{jj} \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_j^2} + \sum_{j=1}^{N} b_j \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} + c(x)v(x) \\
=& - 4\alpha^2 \sum_{i,j=1, i\neq j}^{N} a_{ij}(x_i - z_i)(x_j - z_j)e^{-\alpha|x-z|^2} \\
& - \sum_{j=1}^{N} a_{jj} \left[-2\alpha + 4\alpha^2(x_j - z_j)^2\right] e^{-\alpha|x-z|^2} \\
& - 2\alpha \sum_{j=1}^{N} b_j(x_j - z_j)e^{-\alpha|x-z|^2} + c(x)\left(e^{-\alpha|x-z|^2} - e^{-\alpha\frac{\rho^2}{4}}\right) \\
=& - 4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_i - z_i)(x_j - z_j)e^{-\alpha|x-z|^2} - 2\alpha \sum_{j=1}^{N} b_j(x_j - z_j)e^{-\alpha|x-z|^2} \\
& + c(x)e^{-\alpha|x-z|^2} - c(x)e^{-\alpha\frac{\rho^2}{4}} \\
=& - c(x)e^{-\alpha\frac{\rho^2}{4}} + \{-4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_i - z_i)(x_j - z_j) \\
& + 2\alpha \sum_{j=1}^{N} [a_{jj} - b_j(x_j - z_j)] + c(x)\}e^{-\alpha|x-z|^2}.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Como $\mathcal{L}$ é uniformemente elíptico em Ω, existe uma contante $\mu > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_i - z_i)(x_j - z_j) \geq \mu |x - z|^2, \quad \forall x \in \Omega$$

e daí

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_i - z_i)(x_j - z_j) \geq \mu \frac{\rho^2}{16}, \quad \forall x \in B_{\frac{\rho}{4}}(y_2).$$

Para $x \in B_{\frac{\rho}{4}}(y_2)$ temos que $|x - z| \geq \rho/4$ (ver figura 1.7). Além disso, como $\overline{B_{\frac{\rho}{4}}(y_2)}$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$, segue-se que existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ tais que

$$\sum_{j=1}^{N} |a_{jj}(x) - b_j(x)(x_j - z_j)| \leq C_1, |c(x)| \leq C_2$$

q.t.p em $\overline{B_{\frac{\rho}{4}}(y_2)}$. Substituindo as estimativas acima em (1.24) concluímos que:

$$\mathcal{L}v(x) \leq \big(-\mu \frac{\rho}{4} \alpha^2 + 2\alpha C_1 + C_2 \big) e^{-\alpha|x-z|^2}$$

desde que $c \geq 0$. Portanto (1.23) vale para $\alpha > 0$ suficientemente grande, basta tomar

$$\alpha > \frac{-2C_1 \pm \sqrt{4C_1^2 + 4\mu \frac{\rho^2}{4} C_2}}{-2\mu \frac{\rho^2}{4}}.$$

Daqui em diante, no restante desta prova, iremos assumir que $\alpha > 0$ foi escolhido dessa forma.

Para completar a prova do teorema é suficiente mostrar que (1.20) vale para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Assim defina

$$S_1 := \partial B_{\frac{\rho}{4}}(y_2) \cap \overline{B_{\frac{\rho}{2}}(z)}, S_2 := \partial B_{\frac{\rho}{4}}(y_2) \backslash S_1.$$

Observamos que S_1 é um subconjunto compacto de $\overline{B_{\frac{\rho}{2}}(z)} \backslash (y_2)$ (ver Figura 1.8) e, em particular, uma vez que

$$u(x) > m, \quad \forall x \in \overline{B_{\frac{\rho}{2}}(z)} \backslash (y_2)$$

vale

$$u(x) > m, \quad \forall x \in S_1.$$

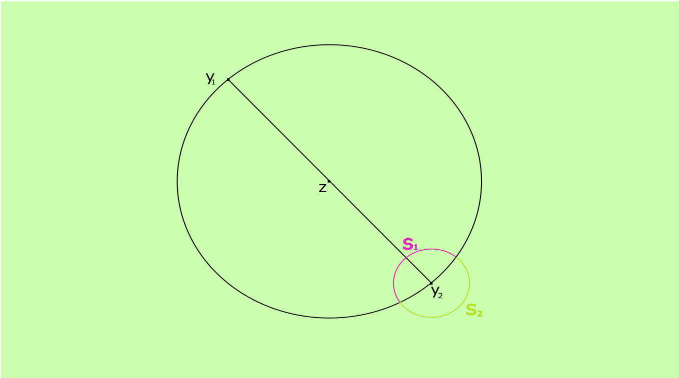


Figura 1.8 As partes S_1 e S_2 de $\partial B_{\frac{\rho}{4}}(y_2)$

Além disso, como u é contínua, existe $\xi > 0$ tal que

$$u(x) \geq m + \xi, \quad \forall x \in S_1. \tag{1.25}$$

Agora, considere $\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$0 < \varepsilon < \frac{\xi}{1 - e^{\alpha \frac{\rho^2}{4}}}$$

e vamos analisar o sinal de $v(x)$. Em $B_{\frac{\rho}{2}}(z)$ temos:

$$|x-z|^2 < \frac{\rho^2}{4} \Rightarrow e^{-\alpha|x-z|^2} > e^{-\alpha\frac{\rho^2}{4}} \Rightarrow v(x) > 0.$$

Em $\partial B_{\frac{\rho}{2}}(z)$,

$$|x-z|^2 = \frac{\rho^2}{4} \Rightarrow e^{-\alpha|x-z|^2} = e^{-\alpha\frac{\rho^2}{4}} \Rightarrow v(x) = 0.$$

Se $x \notin \overline{B_{\frac{\rho}{2}}(z)}$,

$$|x-z|^2 > \frac{\rho^2}{4} \Rightarrow e^{-\alpha|x-z|^2} > e^{-\alpha\frac{\rho^2}{4}} \Rightarrow v(x) < 0$$

donde obtemos

$$\begin{cases} v(x) > 0 \text{ se, e só se, } x \in B_{\frac{\rho}{2}}(z), \\ v(x) = 0 \text{ se, e só se, } x \in \partial B_{\frac{\rho}{2}}(z), \\ v(x) < 0 \text{ se, e só se, } x \notin \bar{B}_{\frac{\rho}{2}}(z). \end{cases} \tag{1.26}$$

Assim, para todo $x \in S_1$, temos que

$$0 \leq v(x) = e^{-\alpha|x-z|^2} - e^{-\alpha\frac{\rho^2}{4}} < 1 - e^{-\alpha\frac{\rho^2}{4}},$$

e pela escolha de ε

$$0 \leq \varepsilon v(x) < \varepsilon(1 - e^{-\alpha\frac{\rho^2}{4}}) < \xi.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} u(x) \geq m + \xi \Rightarrow w(x) &= u(x) - \varepsilon v(x) \\ &> m + \xi - \xi = m. \end{aligned}$$

Finalmente, por (1.26), para todo $x \in S_2 := \partial B_{\frac{\rho}{4}}(y_2) \backslash (y_2)$ temos que $v(x) < 0$ e, portanto

$$w(x) = u(x) - \varepsilon v(x) > u(x) \geq \inf_{\Omega} u = m.$$

Uma vez que $S_1 \cup S_2 = \partial B_{\frac{\rho}{4}}(y_2)$, a condição

$$w(x) > m, \quad \forall x \in \partial B_{\frac{\rho}{4}}(y_2)$$

está satisfeita, o que conclui a prova. ■

O próximo resultado complementa o teorema anterior, fornecendo o comportamento da função na fronteira.

Teorema 11 (Lema da fronteira fraco de Hopf)**.** *Suponha que $c \geq 0$ e $u \in W^{2,p}(\Omega), p > N$, é uma função não constante satisfazendo*

$$\mathcal{L}u \geq 0 \text{ em } \Omega \text{ e } m := \inf_{\Omega} u \in (-\infty, 0]$$

Suponha ainda que exista $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $u(x_0) = m$, com Ω satisfazendo a propriedade da esfera interior em x_0. Então,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} \langle \nu, \nabla u(x) \rangle < 0$$

Observação 12. Como estamos assumindo que u é uma função não constante e com as demais hipóteses do Teorema 11 temos, pelo Teorema 10, que

$$u(x) > m, \quad \forall x \in \Omega.$$

Portanto, o Teorema 11 estabelece que qualquer função super harmônica não constante $u(x)$ decai linearmente em direção do seu mínimo, $m = u(x_0)$, quando $x \in \Omega$ se aproxima de $x_0 \in \partial\Omega$, se $m \leq 0$. Ou seja, a função deve atingir seu mínimo local com derivada exterior negativa (não podendo ser nula).

Demonstração. Como, por hipótese, Ω satisfaz a propriedade da esfera anterior, dado $z \in \Omega$ podemos obter $r > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$B_r(z) \subset \Omega, \overline{B_r(z)} \cap \partial\Omega = \{x_0\}, \langle \nu, x_0 - z \rangle > 0 \text{ e } u \in W^{2,p}(B_r(z)), p > N.$$

Agora, considere o domínio $D := B_{\frac{r}{2}}(x_0) \cap B_r(z)$ e defina

$$S_1 = \partial B_{\frac{r}{2}}(x_0) \cap \overline{B_r(z)},\ S_2 = B_{\frac{r}{2}}(x_0) \cap \partial B_r(z).$$

Então, $\partial D = \partial S_1 \cup S_2$ e S_1 é um subconjunto compacto de Ω.

Tomando

$$v(x) := e^{-\alpha|x-z|^2} - e^{-\alpha r^2}, x \in \mathbb{R}^N,$$

podemos encontrar $\alpha > 0$ suficientemente grande tal que

$$\mathcal{L}v(x) < 0, \quad \forall x \in B_r(z), \tag{1.27}$$

basta repetir os passos apresentados na demonstração do Teorema 10, substituindo $\rho/2$ por r. No restante da demonstração, iremos supor que $\alpha > 0$ foi escolhido para satisfazer (1.27). Além disso, temos novamente que

$$\begin{cases} v(x) > 0 \text{ se, e só se, } x \in B_r(z) \\ v(x) = 0 \text{ se, e só se, } x \in \partial B_r(z) \\ v(x) < 0 \text{ se, e só se, } x \notin \bar{B}_r(z) \end{cases}$$

Pelo Teorema 10,

$$u(x) > m, \quad \forall x \in \Omega. \tag{1.28}$$

Assim, como S_1 é um subconjunto compacto de Ω, existe $\xi > 0$ tal que

$$u(x) \geq \xi + m, \quad \forall x \in S_1. \tag{1.29}$$

Agora fixe $\varepsilon > 0$ tal que

$$0 < \varepsilon < \frac{\xi}{1 - e^{-\alpha r^2}}$$

e considere a função auxiliar $w(x) := u(x) - \varepsilon v(x), x \in \Omega$. Note que $\partial w/\partial \nu$ está bem definida se $\partial u/\partial \nu$ existe, pois $v \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Em tal caso

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0). \tag{1.30}$$

Como $\mathcal{L}v(x) < 0,$ q.t.p $x \in B_r(z)$, temos que

$$\mathcal{L}w(x) = \mathcal{L}u(x) - \varepsilon \mathcal{L}v(x) \geq -\varepsilon \mathcal{L}v(x) > 0, \quad \text{q.t.p } x \in D,$$

pois $D \subset B_r(z) \subset \Omega$. Além disso, para cada $x \in S_1$, temos que $0 \leq v(x) < 1 - e^{-\alpha r^2}$ e daí,

$$0 \leq \varepsilon v(x) < \varepsilon(1 - e^{-\alpha r^2}) < \xi.$$

Portanto, obtemos de (1.29) que, para todo $x \in S_1$,

$$w(x) = u(x) - \varepsilon v(x) \geq m + \xi - \varepsilon v(x) > m + \xi - \xi = m.$$

Temos também que, por ser $v(x) = 0$, para todo $x \in S_2 \subset \partial B_r(z)$, a seguinte igualdade é satisfeita

$$w(x) = u(x) - \varepsilon v(x) = u(x) \text{ em } S_2.$$

Daí, por (1.28)

$$w(x) = u(x) > m, \quad \forall x \in S_2 \backslash \{x_0\} \subset \Omega,$$

enquanto $w(x_0) = u(x_0) = m$. Consequentemente, $w \in W^{2,p}(D), p > N$ e satisfaz as seguintes propriedades

1. $\inf\operatorname{ess} \mathcal{L}w(x) > 0$ em D;

2. $w(x) > m, \forall x \in \partial D \backslash \{x_0\}$;

3. $w(x_0) = m$.

Portanto, o Teorema 10 implica que $w(x) > m,$ para todo $x \in \overline{D} \backslash \{x_0\}$ e, necessariamente,

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) \leq 0. \tag{1.31}$$

Deve-se notar que $w(x) > m,\ x \in D$, não pode ser obtido diretamente da definição de w, pois $v(x) > 0$ para todo $x \in D$. Por (1.30) e (1.31) temos que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \leq \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = \varepsilon \langle \nu, \nabla v(x_0) \rangle$$

Por outro lado, para $1 \leq i \leq N$

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = -2\alpha(x_i - z_i)e^{-\alpha|x-z|^2}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \nabla v(x) &= -2\alpha(x - z)e^{-\alpha|x-z|^2} \\ \nabla v(x_0) &= -2\alpha(x_0 - z)e^{-\alpha|x_0-z|^2} = -2\alpha(x_0 - z)e^{-\alpha r^2} \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \leq \varepsilon \langle \nu, \nabla v(x_0) \rangle = -2\alpha\varepsilon e^{-\alpha r^2} \langle \nu, x_0 - z \rangle < 0,$$

pois $\langle \nu, x_0 - z \rangle > 0$. Isso mostra que $\partial u(x_0)/\partial \nu < 0$. ■

Como consequência obtemos o seguinte resultado que nos fornece algumas propriedades de positividade das funções super harmônicas de $\mathcal{L}$ em Ω.

Teorema 13. *Suponha que Ω é limitado, $c \geq 0$ e $u \in W^{2,p}(\Omega) \backslash \{0\}, p > N$ satisfaz*

$$\begin{cases} \inf\text{ess}\, \mathcal{L}u \geq 0 \text{ em } \Omega, \\ u \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então, $u(x) > 0$, $x \in \Omega$. Além disso, se Ω satisfaz a propriedade da esfera interior e ν é um vetor apontado para fora de Ω em x, vale que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) < 0,$$

para todo $x \in \partial\Omega \cap u^{-1}(0)$.

Demonstração. Defina $m := \inf_{\overline{\Omega}} u$. Se $m > 0$, então $u(x) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ e a demonstração está completa. Agora, suponha que $m \leq 0$, pelo Teorema 10,

$$\inf_{\overline{\Omega}} u = \inf_{\partial\Omega} u = m$$

donde obtemos $m = 0$, uma vez que $u \geq 0$ sobre $\partial\Omega$. Além disso $u(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$, pois $u \neq 0$. As afirmações restantes seguem do Teorema 11. ∎

1.4 Caracterização das supersoluções

Nesta seção, mantemos as hipóteses gerais **H2** e **H3** e a hipótese **H1** é substituída por

H1'. Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N, N \geq 1$, cuja fronteira consiste de dois subconjuntos abertos e fechados, Γ_0 e Γ_1, de classe C^1

$$\partial\Omega := \Gamma_0 \cup \Gamma_1.$$

Necessariamente, Γ_0 e Γ_1 devem possuir uma quantidade finita de componentes e Γ_0 ou Γ_1 podem ser o conjunto vazio.

Note que os resultados anteriores exigem que $c \geq 0$ no operador $\mathcal{L}$. O próximo resultado substitui esta hipótese pela existência de uma supersolução que seja estrita maior que zero em cada ponto de $\overline{\Omega}$.

Teorema 14. *Suponha que $(\mathcal{L}, \mathfrak{B}, \Omega)$ possua uma supersolução $h \in W^{2,p}(\Omega), p > N$, tal que*

$$h(x) > 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Então, qualquer supersolução $u \in W^{2,p}(\Omega), p > N$, de $(\mathcal{L}, \mathfrak{B}, \Omega)$ deve satisfazer algumas das seguintes alternativas:

A1. $u = 0$ *em* Ω.

A2. u *é fortemente positiva, isto é,* $u(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega \cup \Gamma_1$ *e*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) < 0, \forall x \in u^{-1}(0) \cap \Gamma_0.$$

A3. Existe uma constante $m < 0$ tal que $u = mh$ em $\overline{\Omega}$. Neste caso $\Gamma_0 = \emptyset$ e

$$u(x) < 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Além disso, $\tau = 0$ deve ser o único autovalor para uma função positiva do problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}\varphi = \tau\varphi \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}\varphi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.32}$$

Demonstração. Seja $u \in W^{2,p}(\Omega), p > N$, uma supersolução de $(\mathcal{L}, \mathfrak{B}, \Omega)$, ou seja

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \geq 0 \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}u \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $h(x) > 0$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, podemos definir

$$v := \frac{u}{h} \in W^{2,p}(\Omega), p > N.$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}u = \mathcal{L}(hv) &= -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2(hv)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j \frac{\partial(hv)}{\partial x_j} + c(x)hv \\
&= -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\big(h\frac{\partial v}{\partial x_j} + v\frac{\partial h}{\partial x_j}\big)\right] + \sum_{j=1}^{N} b_j\big(h\frac{\partial v}{\partial x_j} + v\frac{\partial h}{\partial x_j}\big) + c(x)hv \\
&= -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\big(h\frac{\partial^2 v}{\partial x_i x_j} + \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_i} + v\frac{\partial^2 h}{\partial x_i x_j} + \frac{\partial h}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\big) \\
&+ h\sum_{j=1}^{N} b_j \frac{\partial v}{\partial x_j} + v\sum_{j=1}^{N} b_j\frac{\partial h}{\partial x_j} + c(x)hv \\
&= -v\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i x_j} + v\sum_{j=1}^{N} b_j \frac{\partial h}{\partial x_j} + c(x)hv \\
&- \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\left(h\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + 2\frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + h\sum_{j=1}^{N} b_j\frac{\partial v}{\partial x_j} \\
&= -h\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i,j=1}^{N} 2a_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + h\sum_{j=1}^{N} b_j\frac{\partial v}{\partial x_j} + v\mathcal{L}h \\
&= h\left[-\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N}\big(b_j - \frac{2}{h}\sum_{i=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_i}\big)\frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\mathcal{L}h}{h}v\right]
\end{aligned}$$

e daí,

$$\mathcal{L}u = h\mathcal{L}_h v \text{ em } \Omega, \tag{1.33}$$

onde

$$\mathcal{L}_h := -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_{hj}\frac{\partial \cdot}{\partial x_j} + c_h, \tag{1.34}$$

com

$$c_h := \frac{\mathcal{L}h}{h}, \quad b_{hj} := bj - \frac{2}{h}\sum_{i=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_i}, \; j = 1, ..., N.$$

Como $h \in W^{2,p}(\Omega), p > N$, $h \in C^1(\overline{\Omega})$ e é duas vezes classicamente diferenciável, logo

$$\frac{\mathcal{L}h}{h} \in L^\infty(\Omega), \; b_j - \frac{2}{h}\sum_{i=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_i} \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq j \leq N.$$

Além disso,

$$\frac{\mathcal{L}h}{h} \geq 0 \text{ em } \Omega$$

e, consequentemente, os Teoremas 10 e 11 podem ser aplicados para o operador $\mathcal{L}_h$ definido por (1.34) .

Como u é uma supersolução de $(\mathcal{L}, \mathfrak{B}, \Omega)$ e $h(x) > 0$, para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $\mathcal{L}u = h\mathcal{L}_h v$ em Ω, temos que

$$\mathcal{L}_h v \geq 0 \text{ em } \Omega. \tag{1.35}$$

Mais ainda, $\mathfrak{B}u \geq 0$ sobre $\partial\Omega$ e, em particular, $\mathfrak{B}u = u \geq 0$ sobre Γ_0, donde

$$v = \frac{u}{h} \geq 0 \text{ sobre } \Gamma_0. \tag{1.36}$$

Similarmente, sobre Γ_1, temos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathfrak{B}u = \mathfrak{B}(hv) &= \frac{\partial(hv)}{\partial \nu} + \beta hv = h\frac{\partial v}{\partial \nu} + v\frac{\partial h}{\partial \nu} + \beta hv = h\frac{\partial v}{\partial \nu} + \left(\frac{\partial h}{\partial \nu} + \beta h\right)v \\ &= h\left(\frac{\partial v}{\partial \nu} + \frac{\mathfrak{B}_h v}{h}\right) \end{aligned}$$

e consequentemente

$$0 \leq \mathfrak{B}u = h\mathfrak{B}_h v \text{ sobre } \Gamma_1 \tag{1.37}$$

onde $\mathfrak{B}_h$ representa o operador de fronteira

$$\mathfrak{B}_h\psi := \begin{cases} \psi \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\nu} + \beta_h\psi \text{ sobre } \Gamma_1, \quad \beta_h := \dfrac{\mathfrak{B}h}{h} \end{cases}$$

para todo $\psi \in C(\Gamma_0) \otimes C^1(\Gamma_1)$. Observe que

$$\beta_h = \frac{\mathfrak{B}h}{h} \geq 0 \text{ sobre } \Gamma_1, \tag{1.38}$$

uma vez que $\mathfrak{B}h \geq 0$ sobre $\partial\Omega$. Além disso, $\beta_h \in C(\Gamma_1)$. Note que, (1.38) independe do sinal de $\beta \in C(\Gamma_1)$, uma vez que a única hipótese imposta sobre β na definição de $\mathfrak{B}$ é que β seja contínua e como, por hipótese $h \in W^{2,p}(\Omega), p > N$, é uma supersolução de $(\mathcal{L}, \mathfrak{B}, \Omega)$ então

$$\mathfrak{B}h \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega$$

e, uma vez que $h(x) > 0,$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, vale que

$$\frac{\mathfrak{B}h}{h} \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega$$

em particular sobre Γ_1. Combinando (1.35), (1.36) e (1.37), obtemos que v é uma supersolução de $(\mathcal{L}_h, \mathfrak{B}_h, \Omega)$, onde $\mathcal{L}_h$ é o operador definido em (1.34).

Vamos mostrar que alguma das duas primeiras alternativas ocorrem se $u \geq 0$ em $\overline{\Omega}$. Então suponha que $u \geq 0$ em $\overline{\Omega}$. Logo, ou

$$u(x_0) = 0 \text{ para algum } x_0 \in \Omega \tag{1.39}$$

ou

$$u(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega. \tag{1.40}$$

Suponha que vale (1.39). Então, $v \geq 0$ em $\overline{\Omega}$ e $v(x_0) = 0$. Isto é, v atinge seu mínimo em Ω. Como vale, $\mathcal{L}_h v \geq 0$ em Ω, obtemos do Teorema 10, que $v = u/h = 0$ em $\overline{\Omega}$. Portanto $u = 0$ em $\overline{\Omega}$.

Suponha agora que vale (1.40). Logo $v(x) > 0$, para todo $x \in \Omega$ e, como v é uma supersolução de $(\mathcal{L}_h, \mathfrak{B}_h, \Omega)$, pelo Teorema 11, temos que

$$\frac{\partial v}{\partial\nu}(x) < 0, \quad \forall x \in v^{-1}(0) \cap \partial\Omega. \tag{1.41}$$

Supondo $\Gamma_1 \neq \emptyset$ e $v(x_1) = 0$ para algum $x_1 \in \Gamma_1$, temos

$$0 \leq \mathfrak{B}_h v(x_1) = \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_1) + \beta_h(x_1)v(x_1) = \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_1)$$

o que contradiz (1.41). Portanto, $v(x_1) > 0$, para todo $x_1 \in \Gamma_1$. Além disso, para todo $x_0 \in \Gamma_0 \cap u^{-1}(0)$, temos que $v(x_0) = 0$ e por (1.41) segue que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = \frac{\partial (hv)}{\partial \nu}(x_0) = h(x_0)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) + v(x_0)\frac{\partial h}{\partial \nu}(x_0) = h(x_0)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

Isso mostra a validade da Alternativa $A2$.

Agora, mostraremos que a Alternativa $A3$ ocorre se $u(x_0) < 0$, para algum $x_0 \in \Omega$. De fato, nesse caso, temos

$$v(x_0) = \frac{u(x_0)}{h(x_0)} < 0$$

e daí,

$$m := \min_{\overline{\Omega}} v < 0.$$

Portanto, como $c_h \geq 0$ e v é uma função super harmônica de $\mathcal{L}_h$ em Ω, segue do Teorema 10 que

$$v(x) > m, \quad \forall x \in \Omega \tag{1.42}$$

ou

$$v = m \text{ em } \Omega. \tag{1.43}$$

Suponha que vale (1.42). Então, como $m < 0$, (1.36) implica em

$$v(x) > m, \quad \forall x \in \Omega \cup \Gamma_0. \tag{1.44}$$

Sendo v contínua em $\overline{\Omega}$ (compacto), existe $x_1 \in \overline{\Omega}$ tal que $m = v(x_1)$. Por (1.44), $x \in \Gamma_1$. Consequentemente, usando o Teorema 11 vale que $(\partial v/\partial \nu)(x_1) < 0$. Assim, de acordo com (1.37) e a definição de $\mathfrak{B}_h$ temos que

$$0 \leq \mathfrak{B}_h v(x_1) = \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_1) + \beta_h(x_1)v(x_1) < \beta_h(x_1)v(x_1) = \beta_h(x_1)m$$

e, consequentemente,

$$\beta_h(x_1) < 0,$$

o que contradiz (1.38), portanto (1.43) ocorre e assim

$$u = mh \text{ em } \Omega. \tag{1.45}$$

Por continuidade, (1.45) deve ser satisfeita em $\overline{\Omega}$, o que garante a validade da primeira parte da Alternativa $A3$. As afirmações restantes da Alternativa $A3$ seguem de (1.45). De fato, suponha que $\Gamma_0 \neq \emptyset$ e tome $x_0 \in \Gamma_0$. Então $h(x_0) > 0$ e daí,

$$u(x_0) = mh(x_0) < 0,$$

o que é impossível, pois $u \geq 0$ sobre Γ_0. Logo, $\Gamma_0 = \emptyset$. Além disso, a estimativa

$$0 \leq \mathcal{L}u = m\mathcal{L}h \leq 0 \text{ em } \Omega$$

implica em $\mathcal{L}u = 0$ em Ω e

$$0 \leq \mathfrak{B}u = m\mathfrak{B}h \leq 0 \text{ sobre } \partial\Omega = \Gamma_1,$$

nos fornece $\mathfrak{B}u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Portanto, temos que $h > 0$ é solução de (1.32) com $\tau = 0$. Vamos mostrar que $\tau = 0$ é o único autovalor de (1.32) para uma autofunção positiva φ. De fato, suponha que $\tau \neq 0$ e existe $\varphi > 0$ solução de (1.32). Caso $\tau < 0$ então $\mathcal{L}(-\varphi) = -\tau\varphi > 0$ em Ω e $\mathfrak{B}\varphi = 0$ sobre $\partial\Omega$. Logo, $-\varphi$ é uma supersolução de $(\mathcal{L}, \mathfrak{B}, \Omega)$ e como $-\varphi < 0$, ela deve satisfazer a primeira parte da alternativa $A3$. Logo, existe $m_\varphi < 0$, tal que $\varphi = m_\varphi h$. Daí, temos

$$0 < \mathcal{L}(-\varphi) = m_\varphi \mathcal{L}h \leq 0 \quad \text{em } \Omega,$$

o que é um absurdo.

Então, devemos ter que $\tau \geq 0$. Neste caso, $\mathcal{L}\varphi = \tau\varphi \geq 0$ em Ω e $\mathfrak{B}\varphi = 0$ sobre $\partial\Omega$. Portanto φ é uma supersolução de $(\mathcal{L}, \mathfrak{B}, \Omega)$. Logo, pelo caso anterior, φ satisfaz $A2$. Além disso, como $\Gamma_0 = \emptyset$, $\varphi(x) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma_1$. Daí, repetindo os passos da primeira parte da demonstração da alternativa $A3$ trocando h por φ, obtemos

$$\begin{cases} \mathcal{L}\varphi = 0 \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}\varphi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Portanto $\tau = 0$, mostrando a unicidade de τ. ■

Nosso objetivo agora é enfraquecer a hipótese $h(x) > 0$ em $\overline{\Omega}$, substituindo por $h \geq 0$ em Ω. Esta importante melhora irá permitir usar soluções de problemas de valores de fronteira como supersoluções. Para obter este refinamento no resultado serão necessários alguns lemas auxiliares.

O próximo teorema nos fornece uma estimativa por baixo para a taxa de decaimento das funções super harmônicas positivas de $\mathcal{L}$ em Ω nos pontos de $\partial\Omega$ onde elas se anulam.

Teorema 15 (Propriedade de decaimento uniforme fraco de Hopf)**.** *Para todo $R > 0$ existe uma constante $M := M(\mathcal{L}, R) > 0$ tal que para qualquer $x_0 \in \Omega$ com $B_R(x_0) \subset \Omega$ e cada função $u \in W^{2,p}(B_R(x_0)), p > N$, satisfazendo*

$$u(x) > 0 \text{ para todo } x \in B_R(x_0) \tag{1.46}$$

e

$$\mathcal{L}u(x) \geq 0 \text{ q.t.p em } B_R(x_0). \tag{1.47}$$

Então vale a seguinte estimativa

$$u(x) \geq \left(M \min_{\overline{B_{\frac{R}{2}}(x_0)}} u \right) \operatorname{dist}(x; \partial B_R(x_0)), \quad \forall x \in \overline{B_R(x_0)} \tag{1.48}$$

Demonstração. Sejam $R > 0$ e $x_0 \in \Omega$ tal que $B_R(x_0) \subset \Omega$ e suponha que $u \in W^{2,p}(B_R(x_0))$ satisfaz (1.46) e (1.47). Considere as funções auxiliares

$$E(x) := e^{\alpha(R^2 - |x-x_0|^2)}, v(x) := E(x) - 1, x \in \mathbb{R}^N$$

onde α é uma constante a ser escolhida posteriormente. Pondo $x = (x_1, ..., x_N)$ e $x_0 = (x_{01}, ..., x_{0N})$ temos:

$$\frac{\partial E(x)}{\partial x_j} = -2\alpha(x_j - x_{0j})e^{\alpha(R^2 - |x-x_0|^2)} = -2\alpha(x_j - x_{0j})E(x).$$

Para $i = j$,

$$\frac{\partial^2 E(x)}{\partial x_i^2} = [4\alpha^2(x_i - x_{0i})^2 - 2\alpha]e^{\alpha(R^2 - |x-x_0|^2)} = [4\alpha^2(x_i - x_{0i})^2 - 2\alpha]E(x),$$

e para $i \neq j$,

$$\frac{\partial^2 E(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 4\alpha^2(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j})e^{\alpha(R^2 - |x-x_0|^2)} = 4\alpha^2(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j})E(x).$$

Observe que v satisfaz

$$\begin{cases} v(x) > 0 \iff |x - x_0| < R, \\ v(x) = 0 \iff |x - x_0| = R, \\ v(x) < 0 \iff |x - x_0| > R. \end{cases}$$

Agora defina
$D := \left\{x \in \mathbb{R}^N : R/2 < |x - x_0| < R\right\} \subset \Omega,\ c^+ := max\{c, 0\} \geq c$ e $\mathcal{L}^+ := \mathcal{L} - c + c^+$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^+ v = & - \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 E(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j(x) \frac{\partial E(x)}{\partial x_j} + c^+(x)v(x) \\
= & - \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \left[4\alpha^2 (x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) - 2\alpha\right] E(x) \\
& + \sum_{j=1}^{N} b_j(x) \left(-2\alpha(x_j - x_{0j})E(x)\right) + c^+(x)v(x) \\
= & - 4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j})E(x) \\
& + 2\alpha \sum_{j=1}^{N} a_{jj}(x)E(x) - 2\alpha \sum_{j=1}^{N} b_j(x)(x_j - x_{0j})E(x) + c^+(x)E(x) - c^+(x) \\
= & \Bigg\{ - 4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) \\
& + 2\alpha \sum_{j=1}^{N} \left[a_{jj}(x) - b_j(x)(x_j - x_{0j})\right] + c^+(x) \Bigg\} E(x) - c^+(x) \\
= & \Big\{ - 4\alpha^2 (x - x_0)^T A_x (x - x_0) + 2\alpha[\operatorname{tr} A_x - \langle b(x), x - x_0 \rangle] + c^+(x) \Big\} E(x) - c^+(x),
\end{aligned}$$

onde A_x é a matriz dos coeficientes principais de $\mathcal{L}$, $\operatorname{tr} A_x$ representa o traço de A_x e $b := (b_1, ..., b_N)$. Seja $\mu > 0$ a constante de elipticidade de $\mathcal{L}$ em Ω, então para todo $x \in D$,

$$(x - x_0)^T A_x (x - x_0) \geq \mu |x - x_0|^2 > \mu \frac{R^2}{4}.$$

Além disso

$$\begin{aligned}|\operatorname{tr} A_x - \langle b(x), x - x_0\rangle| &\leq |\operatorname{tr} A_x| + |\langle b(x), x - x_0\rangle| \\ &\leq |\operatorname{tr} A_x| + |b(x)||x - x_0| \\ &\leq |\operatorname{tr} A_x| + |b(x)|R\end{aligned}$$

e daí, por (1.1) existe uma constante $C := C(\|a_{jj}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|b_j\|_{L^\infty(\Omega)}, R) = C(\mathcal{L}, R) > 0$ tal que

$$|\operatorname{tr} A_x - \langle b(x), x - x_0\rangle| \leq C \text{ para todo } x \in D,$$

independentemente de x_0. Assim, em D, temos que

$$\mathcal{L}^+ v(x) \leq \big(-\alpha^2 \mu R^2 + 2\alpha C + \|c^+\|_{L^\infty(\Omega)}\big) E(x) - c^+(x).$$

Argumentando como no Teorema 10, podemos escolher $\alpha := \alpha(\mathcal{L}, R) > 0$ suficientemente grande tal que

$$\mathcal{L}^+ v(x) < 0 \text{ q.t.p em } D. \tag{1.49}$$

Ao longo do restante dessa prova, vamos supor que $\alpha > 0$ foi escolhido para satisfazer (1.49).

Por (1.46), $u(x) > 0$ para cada $x \in \overline{B_{\frac{R}{2}}(x_0)}$ e daí, pela continuidade de u

$$u_R := \inf_{\overline{B_{\frac{R}{2}}(x_0)}} u > 0.$$

Agora, consideremos a função auxiliar

$$w := u - \varepsilon v \, , \, \varepsilon := \frac{u_R}{e^{\alpha R^2} - 1} \tag{1.50}$$

que está bem definida em $\overline{B_R(x_0)}$. Por (1.50), podemos observar que

$$w \geq u_R - \varepsilon(e^{\alpha R^2} - 1) = 0 \text{ em } \overline{B_{\frac{R}{2}}(x_0)}$$

pois

$$u \geq u_R \text{ em } \overline{B_{\frac{R}{2}}(x_0)} \text{ e } v \leq v(x_0) = e^{\alpha R^2} - 1$$

Em particular $w \geq 0$ em $\partial B_{\frac{R}{2}}(x_0)$. Além disso, como $v = 0$ em $\partial B_R(x_0)$ e $u \geq 0$ em $\overline{B_R(x_0)}$, temos que

$$w \geq 0 \text{ em } \partial B_R(x_0).$$

Consequentemente,

$$w \geq 0 \text{ em } \partial D = \partial B_R(x_0) \cup \partial B_{\frac{R}{2}}(x_0) \tag{1.51}$$

e ainda, de (1.49), em D vale que $\mathcal{L}^+ v < 0$ e portanto,

$$\mathcal{L}^+ w = \mathcal{L}^+ u - \varepsilon \mathcal{L}^+ v > \mathcal{L}^+ u = (\mathcal{L} - c + c^+)u \geq (c^+ - c)u \geq 0$$

pois $\mathcal{L}u \geq 0, c^+ \geq c$ e $u \geq 0$.

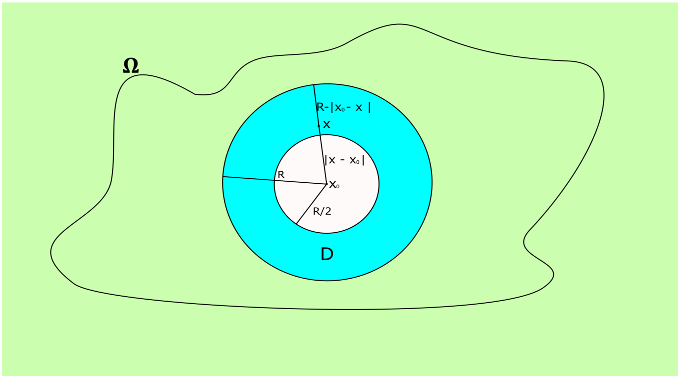


Figura 1.9 O conjunto D.

Daí, w é uma função super harmônica de $\mathcal{L}^+$ em D satisfazendo (1.51) e portanto, pelo Teorema 13, observa-se que

$$w = u - \varepsilon v \geq 0 \text{ em } D. \tag{1.52}$$

Por outro lado, para todo $x \in D$, temos que

$$v(x) = e^{\alpha(R^2 - |x - x_0|^2)} - 1 = e^{\alpha(R + |x - x_0|)(R - |x - x_0|)} - 1.$$

Sabendo que a função real $f(s) = e^s$, $s \geq 0$ é crescente, $|x - x_0| > R/2$ e que $e^x - 1 \geq x$, para todo $x \geq 0$ temos

$$v(x) \geq e^{\frac{3}{2}\alpha R(R - |x - x_0|)} - 1 \geq \frac{3}{2}\alpha R(R - |x - x_0|) = \frac{3}{2}\alpha R \operatorname{dist}(x, \partial B_R(x_0)).$$

Assim, segue de (1.50) e (1.52) que, para todo $x \in D$,

$$u(x) \geq \varepsilon v(x) \geq \frac{3\alpha R}{2(e^{\alpha R^2} - 1)} u_R \operatorname{dist}(x, \partial B_R(x_0)). \tag{1.53}$$

Finalmente, levando em consideração que, para cada $x \in \bar{B}_{\frac{R}{2}}(x_0)$,

$$u(x) \geq u_R \geq \frac{u_R}{R}\,\mathrm{dist}(x, \partial B_R(x_0)),$$

obtemos de (1.53) que

$$u \geq \min\left\{\frac{3\alpha R}{2(e^{\alpha R^2}-1)}, \frac{1}{R}\right\} u_R\,\mathrm{dist}(\cdot, \partial B_R(x_0)) \quad \text{ em } \bar{B}_R(x_0).$$

Como a constante

$$M(\mathcal{L}, R) = \min\left\{\frac{3\alpha R}{2(e^{\alpha R^2}-1)}, \frac{1}{R}\right\},$$

satisfaz (1.48), obtemos o resultado desejado. ■

Se considerarmos domínios limitados e satisfazendo a propriedade da esfera interior uniforme no sentido forte, o resultado anterior pode ser melhorado conforme veremos no seguinte:

Teorema 16. *Suponha que Ω é um domínio limitado satisfazendo a propriedade da esfera interior no sentido forte em um subconjunto aberto e fechado Γ_0 de $\partial\Omega$ e seja $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$, uma função super harmônica de $\mathcal{L}$ em Ω tal que*

$$u(x) > 0 \textit{ para todo } x \in \overline{\Omega}\backslash\Gamma_0.$$

Então, existe $\delta > 0$ tal que

$$u(x) \geq \delta\,\mathrm{dist}(x, \Gamma_0) \textit{ para todo } x \in \Omega.$$

Demonstração. Suponha que Ω satisfaz a propriedade da esfera interior no sentido forte em Γ_0 com parâmetro $R > 0$ e considere o subconjunto compacto de $\overline{\Omega}$ definido por

$$K_R := \left\{x \in \overline{\Omega}; \mathrm{dist}(x, \Gamma_0) \geq \frac{R}{2}\right\}.$$

Seja $u \in W^{2,p}(\Omega), p > N$, tal que $\mathcal{L}u \geq 0$ em Ω e $u(x) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}\backslash\Gamma_0$. Então

$$u_L := \min_{K_R} u > 0$$

Seja $x \in \Omega$ com $\mathrm{dist}(x, \Gamma_0) \leq R$ e considere $y_x \in \Gamma_0$ tal que

$$\mathrm{dist}(x, \Gamma_0) = |x - y_x| \text{ e } B_R(x_0) \subset \Omega,$$

onde
$$x_0 := y_x + R\frac{x-y_x}{|x-y_x|}.$$

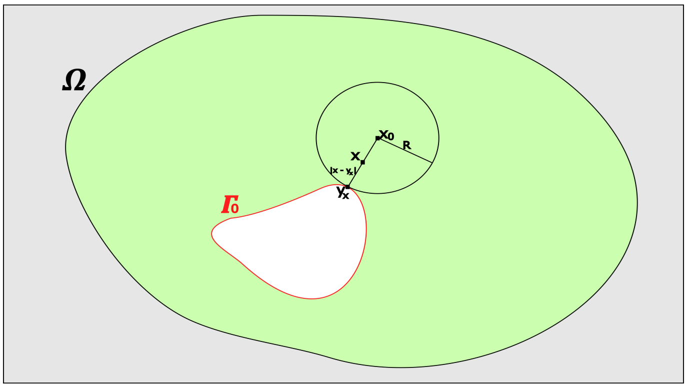


Figura 1.10 A construção de $B_R(x_0)$

Uma vez que
$$\min_{\overline{B}_{\frac{R}{2}}(x_0)} u \geq u_L,$$
de acordo com o Teorema 15, existe uma constante $M = M(\mathcal{L}, R)$ (que não depende de x) tal que
$$u(z) \geq M u_L \operatorname{dist}(z, \partial B_R(x_0)), \quad \forall z \in \overline{B_R(x_0)}$$
portanto, para todo $x \in \Omega \cap (\Gamma_0 + \overline{B_R}) := \{x \in \Omega;\ x = y+z,\ y \in \Gamma_0,\ z \in \overline{B_R}\}$, temos que
$$u(x) \geq M u_L \operatorname{dist}(x, \partial B_R(x_0)) = M u_L |x - y_x| = M u_L \operatorname{dist}(x, \Gamma_0).$$
Agora, uma vez que u é contínua, K_R é compacto, $u(x) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega} \backslash \Gamma_0$ e $\Gamma_0 \subset \Omega$ é limitado vale que
$$\eta := \inf_{x \in K_R} \frac{u(x)}{\operatorname{dist}(x, \Gamma_0)} > 0$$
fazendo a escolha
$$\delta := \min\{\eta, M u_L\}$$
obtemos o resultado desejado. ■

O próximo resultado mostrará que, quando o termo independente c de $\mathcal{L}$ é muito grande, então este operador está nas condições do Teorema 14, ou seja, que admitem supersoluções estrita positivas em $\overline{\Omega}$.

Lema 17. *Suponha que Ω seja de classe C^2. Então existe $\omega_0 > 0$ de modo que $(\mathcal{L} + \omega_0, \mathfrak{B}, \Omega)$ admite uma supersolução estrita positiva $h \in C^2(\overline{\Omega})$ com $h(x) > 0$, para todo $x \in \overline{\Omega}$.*

Demonstração. Seja $h(x) = e^{M\psi(x)}, \quad x \in \overline{\Omega}$ e $M > 0$, onde ψ é conforme o Lema A.1. Como $h(x) > 0$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, em particular $h(x) > 0$, para todo $x \in \Gamma_0$. Além disso sobre Γ_1, vale que

$$\mathfrak{B}h = \frac{\partial h}{\partial \nu} + \beta h = Mh\frac{\partial \psi}{\partial \nu} + \beta h = h(M\frac{\partial \psi}{\partial \nu} + \beta) \geq h(M\gamma + \beta) > 0$$

para $M > 0$ suficientemente grande. Isto significa que $\mathfrak{B}h > 0$. Ora, uma vez que $h \in C^2(\overline{\Omega})$ e $a_{ij}, b_j, c \in L^\infty(\Omega)$, existe $K_1 > 0$ tal que $|\mathcal{L}h| \leq K_1$. Daí, tomando $\omega_0 > 0$ tal que $|\omega_0 h| > K_1$, temos que

$$(\mathcal{L} + \omega_0)h > 0.$$

Por fim, sabendo que h é uma supersolução estrita de $(\mathcal{L} + \omega_0, \mathfrak{B}, \Omega)$, então

$$(\mathcal{L} + \omega)h = (\mathcal{L} + \omega)h + (\omega_0 - \omega_0)h = (\mathcal{L} + \omega_0)h + (\omega - \omega_0)h > 0$$

e fixando M como acima podemos tomar $\omega_0 \in \mathbb{R}$ suficientemente grande de modo que

$$(\mathcal{L} + \omega_0)h > 0 \text{ em } \Omega.$$

Logo h satisfaz o requerido. ■

Observação 18. O Lema A.1 garante a existência da ψ se Ω for de classe C^2.

Finalmente estamos em condições de melhorar o Teorema 14.

Teorema 19. *Suponha que Ω seja de classe C^2 e $(\mathcal{L}, \mathfrak{B}, \Omega)$ possua uma supersolução positiva $h \in W^{2,p}(\Omega), p > N$. Então, qualquer supersolução $u \in W^{2,p}(\Omega)$ de $(\mathcal{L}, \mathfrak{B}, \Omega)$ deve satisfazer alguma das Alternativas $A1$,$A2$ ou $A3$ do Teorema 14.*

Demonstração. Pelo Lema 17, existe $\omega > 0$ e $g \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ e g é uma supersolução de $(\mathcal{L} + \omega, \mathfrak{B}, \Omega)$. Como h é uma supersolução de $(\mathcal{L}, \mathfrak{B}, \Omega)$, $h > 0$, vale que

$$(\mathcal{L} + \omega)h = \mathcal{L}h + \omega h \geq \omega h > 0 \text{ em } \Omega.$$

Além disso, $\mathfrak{B}h \geq 0$ sobre $\partial\Omega$. Logo, $h \in W^{2,p}(\Omega), p > N$, é uma supersolução de $(\mathcal{L} + \omega, \mathfrak{B}, \Omega)$ e como $h > 0$, deve satisfazer a hipótese $A.2$ do Teorema 14. Assim, $h(x) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega} \backslash \Gamma_0$ e sendo Ω de classe C^2, segue do Teorema 16 que existe uma constante $\delta > 0$

tal que

$$h(x) \geq \delta \operatorname{dist}(x, \Gamma_0). \tag{1.54}$$

Agora, seja $u \in W^{2,p}(\Omega), p > N$ uma supersolução de $(\mathcal{L}, \mathfrak{B}, \Omega)$. Se $u = 0$ então vale a alternativa A1. Se $u > 0$, repetimos os mesmos argumentos feito acima para h e obtemos a validade da alternativa $A.2$.

Por fim, resta mostrar que a alternativa A3 vale se u é negativa em algum ponto. Assim suponha que exista $x_- \in \overline{\Omega}$ tal que

$$u(x_-) < 0. \tag{1.55}$$

Primeiro note que $x_- \notin \Gamma_0$, pois $\mathfrak{B}u \geq 0$ sobre $\partial\Omega$, em particular, $u \geq 0$ sobre Γ_0. Assim, pela continuidade da u podemos tomar, sem perda de generalidade, $x_- \in \Omega$. Em seguida, para $\lambda \geq 0$, consideremos a função

$$v_\lambda(x) := u(x) + \lambda h(x), \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Defina

$$\Lambda := \{\lambda > 0; v_\lambda \geq 0 \text{ em } \Omega\}.$$

Afirmamos que $v_\lambda \geq 0$ em Ω para $\lambda > \lambda_0$, λ_0 suficientemente grande, o que mostra que $\Lambda \neq \emptyset$. De fato, suponha por absurdo que para cada inteiro $k \geq 1$, exista $x_k \in \Omega$ tal que

$$v_k(x_k) = u(x_k) + kh(x_k) < 0. \tag{1.56}$$

Como Ω é limitado, $\overline{\Omega}$ é compacto. Logo existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ e uma subsequência de $\{k\}_{k\geq 1}$, digamos $\{k_m\}_m$ tal que

$$\lim_{m \to +\infty} x_{k_m} = x_0.$$

Por (1.56), temos que

$$\frac{1}{k_m} u(x_{k_m}) + h(x_{k_m}) < 0, \quad m \geq 1, \tag{1.57}$$

pois $k_m > 0$. Além disso, se $m \to +\infty$, $1/k_m \to 0$ e, pela continuidade de u em $\overline{\Omega}$, $u(x_{k_m}) \to u(x_0)$. Logo

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{1}{k_m} u(x_{k_m}) = 0.$$

Portanto, tomando $m \to +\infty$ em (1.57), obtemos

$$\lim_{m\to+\infty}\left(\frac{1}{k_m}u(x_{k_m})+h(x_{k_m})\right)=h(x_0)\leq 0.$$

Uma vez que $h \geq 0$ em Ω, pela desigualdade acima devemos ter $h(x_0)=0$. Assim, como $h(x)>0$, para todo $x \in \Omega\cup\Gamma_1$, temos que $x_0 \in \Gamma_0$. Isso implica que $\Gamma_0 \neq \emptyset$. Daí, se $\Gamma_0=\emptyset$, então $v_\lambda \geq 0$ para $\lambda > \lambda_0$. Suponha que $\Gamma_0 \neq \emptyset$. Como $\{x_{k_m}\}$ é compacto e Γ_0 é fechado podemos escolher, para cada $m \geq 1$, $y_{k_m} \in \Gamma_0$ tal que

$$\mathrm{dist}(x_{k_m},\Gamma_0)=|x_{k_m}-y_{k_m}|.$$

Uma vez que u é uma supersolução de $(\mathcal{L},\mathfrak{B},\Omega)$, $u \geq 0$ sobre Γ_0. Logo $u(y_{k_m}) \geq 0$, para todo $m \geq 1$ e daí,

$$-u(x_{k_m}) \leq u(y_{k_m})-u(x_{k_m}), \quad m \geq 1.$$

Ora, sendo $u \in W^{2,p}(\Omega), p>N$, temos que u é Lipschitziana em $\overline{\Omega}$. Assim,

$$-u(x_{k_m}) \leq L|y_{k_m}-x_{k_m}| = L\,\mathrm{dist}(x_{k_m},\Gamma_0), \quad m \geq 1, \tag{1.58}$$

onde $L \geq 0$ é a constante de Lipschitz de u em $\overline{\Omega}$.

Agora, combinando (1.57) e (1.58) segue que

$$k_m h(x_{k_m}) < -u(x_{k_m}) \leq L\,\mathrm{dist}(x_{k_m},\Gamma_0), \quad m \geq 1$$

e portanto, por (1.54), temos

$$L\,\mathrm{dist}(x_{k_m},\Gamma_0) > k_m h(x_{k_m}) \geq \delta k_m\,\mathrm{dist}(x_{k_m},\partial\Omega).$$

Isto é,

$$\delta k_m\,\mathrm{dist}(x_{k_m},\partial\Omega) < L\,\mathrm{dist}(x_{k_m},\Gamma_0), \quad m \geq 1. \tag{1.59}$$

Finalmente, afirmamos que para m suficientemente grande

$$\mathrm{dist}(x_{k_m},\partial\Omega)=\mathrm{dist}(x_{k_m},\Gamma_0).$$

De fato, como Ω satisfaz a propriedade da esfera interior uniforme em Γ_0 e $x_{k_m} \to x_0 \in \Gamma_0$, se $m \to +\infty$, podemos obter $m_0 > 0$ e uma bola $B_r(x_0) \subset \Omega$ de modo que

$$\operatorname{dist}(x_{k_m}, \Gamma_0) = \operatorname{dist}(x_{k_m}, \partial\Omega), \quad \forall x_{k_m} \in B_r(x_0),$$

para todo $m \geq m_0$ e sendo

$$\operatorname{dist}(x_{k_m}, \partial\Omega) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x_{k_m} - y|$$

vale o afirmado acima. Daí, de (1.59) obtemos que, para $m \geq m_0$, $\delta k_{k_m} < L$, o que é impossível, pois

$$\lim_{m \to +\infty} k_m = +\infty.$$

Essa contradição mostra que $v_\lambda \geq 0$, para $\lambda > 0$ suficientemente grande.

Provemos agora que o ínfimo de Λ é positivo. Com efeito, como $u(x_-) < 0$, tomando $0 < \lambda_0 < -u(x_-)/h(x_-)$, vale que

$$v_{\lambda_0}(x_-) = u(x_-) + \lambda_0 h(x_-) < u(x_-) - \frac{u(x_-)}{h(x_-)} h(x_-) = 0.$$

Portanto $0 < \lambda_0 \notin \Lambda$. O que mostra que Λ possui cota inferior positiva e portanto

$$\mu := \inf_{\lambda \in \Lambda} \Lambda > 0.$$

Vamos mostrar que $v_\mu \geq 0$. De fato, sendo μ o ínfimo, existe $\lambda_k \in \Lambda$, sequência minimizante, com $\lim\limits_{k \to \infty} \lambda_k = \mu$. Agora, como $\lambda_k \in \Lambda$, então

$$v_{\lambda_k}(x) = u(x) + \lambda_k h(x) \geq 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.60}$$

Fazendo $k \to +\infty$ em (1.60), temos para todo $x \in \overline{\Omega}$

$$\lim_{k \to \infty} v_{\lambda_k}(x) = v_\mu(x) \geq 0.$$

Isso mostra que $\mu \in \Lambda$. Observe também que

$$\mathcal{L} v_\mu = \mathcal{L} u + \mu \mathcal{L} h \geq 0 \text{ em } \Omega,$$

e

$$\mathfrak{B} v_\mu = \mathfrak{B} u + \mu \mathfrak{B} h \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

pois u e h são supersoluções de $(\mathcal{L},\mathfrak{B},\Omega)$. Portanto, $v_\mu \in W^{2,p}(\Omega), p > N$, é uma supersolução não negativa da terna $(\mathcal{L},\mathfrak{B},\Omega)$. Então em Ω vale que

$$(\mathcal{L}+\omega_0)v_\mu = \mathcal{L}v_\mu + \omega_0 v_\mu \geq \omega_0 v_\mu \geq 0$$

e $\mathfrak{B}v_\mu \geq 0$ sobre $\partial\Omega$. Donde se conclui que v_μ é uma supersolução de $(\mathcal{L}+\omega_0,\mathfrak{B},\Omega)$. Consequentemente deve satisfazer uma das alternativas $A1$, $A2$ ou $A3$ do Teorema 14. Uma vez que $v_\mu \geq 0$, a alternativa $A3$ é imediatamente descartada. Consequentemente vale,

$$v_\mu = 0 \tag{1.61}$$

ou

$$v_\mu(x) > 0, \forall x \in \Omega \cup \Gamma_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v_\mu}{\partial \nu} < 0, \forall x \in v_\mu^{-1}(0) \cap \Gamma_0. \tag{1.62}$$

Suponha que vale (1.61). Definindo $m := -\mu < 0$, temos que $0 = v_\mu = u - mh$ e portanto $u = mh$ em $\overline{\Omega}$. Conforme vimos acima se $v_\mu \geq 0$ obtemos necessariamente que $\Gamma_0 = \emptyset$. Por fim, sabendo que u e h são supersoluções de $(\mathcal{L},\mathfrak{B},\Omega)$ e $m < 0$, temos que, em Ω, $0 \leq \mathcal{L}u = m\mathcal{L}h \leq 0$ e portanto

$$\mathcal{L}h = 0 \text{ em } \Omega.$$

E sobre $\partial\Omega$, $0 \leq \mathfrak{B}u = m\mathfrak{B}h \leq 0$. Isto é,

$$\mathfrak{B}h = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Assim, $\tau = 0$ é o único autovalor para uma autofunção positiva do problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}h = \tau h \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}h = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

ou seja, vale a alternativa A3. Por fim, mostraremos que a validade de (1.62) contradiz a minimalidade de μ. De fato, pela definição de μ, para todo $k \geq 1$ existe um ponto $x_k \in \Omega$ tal que

$$v_{\mu-\frac{1}{k}} = u(x_k) + \left(\mu - \frac{1}{k}\right)h(x_k) = u(x_k) + \mu h(x_k) - \frac{1}{k}h(x_k) = v_\mu(x_k) - \frac{1}{k}h(x_k) < 0. \tag{1.63}$$

Argumentando como anteriormente, existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ e uma subsequência de $\{k\}_{k\geq 1}$, digamos $\{k_m\}_{m\geq 1}$ tal que $\lim\limits_{m\to+\infty} x_{k_m} = x_0$. De (1.63) obtemos que

$$v_\mu(x_{k_m}) < \frac{h(x_{k_m})}{k_m}, \quad m \geq 1. \tag{1.64}$$

Além disso, pela continuidade de h em $\overline{\Omega}$,

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{h(x_{k_m})}{k_m} = 0.$$

Logo, tomando $m \to +\infty$ em (1.64) vale que $v_\mu(x_0) \leq 0$ e, portanto, de acordo com (1.62), temos que $x_0 \in v_\mu^{-1}(0) \cap \Gamma_0$. Como antes, isso implica que $\Gamma_0 \neq \emptyset$, o que significa que o teorema vale quando $\Gamma_0 = \emptyset$. Então, suponha que $\Gamma_0 \neq \emptyset$ e para todo $m \geq 1$, seja $y_{k_m} \in \Gamma_0$ tal que

$$\mathrm{dist}(x_{k_m}, \Gamma_0) = |x_{k_m} - y_{k_m}|$$

com os mesmos argumentos aplicados anteriormente obtemos (1.58) ou seja

$$-u(x_{k_m}) \leq L|y_{k_m} - x_{k_m}| = L\,\mathrm{dist}(x_{k_m}, \Gamma_0), m \geq 1.$$

Por outro lado, por (1.63) temos que

$$-u(x_{k_m}) > \left(\mu - \frac{1}{k_m}\right) h(x_{k_m}), \quad m \geq 1.$$

Daí, combinando a desigualdade acima com (1.58) obtemos:

$$L\,\mathrm{dist}(x_{k_m}, \Gamma_0) \geq -u(x_{k_m}) > \left(\mu - \frac{1}{k_m}\right) h(x_{k_m}),$$
$$\left(\mu - \frac{1}{k_m}\right) h(x_{k_m}) < L\,\mathrm{dist}(x_{k_m}, \Gamma_0), \quad m \geq 1.$$

Ora, sendo $\lim\limits_{m\to+\infty} 1/k_m = 0$ temos que, para m suficientemente grande, $\mu - 1/k_m > 0$ e daí,

$$h(x_{k_m}) < L \frac{k_m}{\mu k_m - 1} \mathrm{dist}(x_{k_m}, \Gamma_0). \tag{1.65}$$

Como Ω é de classe C^2, v_μ satisfaz (1.62) e é uma supersolução positiva de $(\mathcal{L},\mathfrak{B},\Omega)$, pelo Teorema 16 existe $\delta_\mu := \delta_\mu(v_\mu) > 0$ tal que

$$v_\mu \geq \delta_\mu \operatorname{dist}(x_{k_m},\Gamma_0), \forall x_{k_m} \in \Omega. \tag{1.66}$$

Utilizando as desigualdades (1.63), (1.65) e (1.66) concluímos que:

$$\begin{aligned} 0 > v_\mu(x_{k_m}) - \frac{h(x_{k_m})}{k_m} &\geq \delta_\mu \operatorname{dist}(x_{k_m},\Gamma_0) - \frac{L}{\mu k_m - 1}\operatorname{dist}(x_{k_m},\Gamma_0) \\ &= \left(\delta_\mu - \frac{L}{\mu k_m - 1}\right)\operatorname{dist}(x_{k_m},\Gamma_0). \end{aligned} \tag{1.67}$$

A desigualdade (1.67) não pode ser satisfeita, uma vez que $\delta_\mu - L/(\mu k_m - 1) > 0$ para m suficientemente grande de modo que $\operatorname{dist}(x_{k_m},\Gamma_0) = \operatorname{dist}(x_{k_m},\partial\Omega)$. Isso implicaria que

$$\operatorname{dist}(x_{k_m},\Gamma_0) < 0.$$

Essa contradição implica que (1.62) não pode ocorrer. Logo devemos ter $v_\mu = 0$. ■

Finalizamos este capítulo com um resultado que caracteriza supersoluções da terna $(\mathcal{L}_\mathcal{I},\mathfrak{B},\Omega)$ e é uma consequência do Teorema 19.

Corolário 20. *Suponha que Ω seja de classe C^2 e $(\mathcal{L}_\mathcal{I},\mathfrak{B},\Omega)$ possua uma supersolução positiva $h \in W^{2,p}(\Omega), p > N$. Então, qualquer supersolução $u \in W^{2,p}(\Omega)$ de $(\mathcal{L}_\mathcal{I},\mathfrak{B},\Omega)$ deve satisfazer alguma das Alternativas A1,A2 ou A3 do Teorema 14.*

Demonstração. Vamos mostrar que se h é uma supersolução de $(\mathcal{L}_\mathcal{I},\mathfrak{B},\Omega)$ e $h \geq 0$, então h também é supersolução de $(\mathcal{L},\mathfrak{B},\Omega)$. De fato, seja $h \geq 0$ uma supersolução de $(\mathcal{L}_\mathcal{I},\mathfrak{B},\Omega)$. Por hipótese, $K(x,y) \geq 0$. Então

$$-\int_\Omega K(x,y)h(y)dy \leq 0$$

consequentemente

$$0 \leq \mathcal{L}_\mathcal{I} h = \mathcal{L}h - \int_\Omega K(x,y)h(y)dy \leq \mathcal{L}h \text{ em } \Omega.$$

Uma vez que $\mathfrak{B}h \geq 0$ sobre $\partial\Omega$, então $h \geq 0$ também é supersolução de $(\mathcal{L},\mathfrak{B},\Omega)$. Isso significa que qualquer supersolução não negativa $u \in W^{2,p}(\Omega)$, de $(\mathcal{L}_\mathcal{I},\mathfrak{B},\Omega)$ é também supersolução de $(\mathcal{L},\mathfrak{B},\Omega)$. Segue então do Teorema 19, que $u \geq 0$ deve satisfazer alguma das Alternativas A1, A2 ou A3, do Teorema 14.

Suponha agora que exista algum $x_- \in \Omega$ tal que $u(x_-) < 0$, logo podemos considerar, o conjunto Λ dos $\lambda > 0$ para os quais a função,

$$v_\lambda(x) := u(x) + \lambda h(x), \quad x \in \overline{\Omega},$$

definida no Teorema 19 seja positiva. Uma vez que $v_\lambda \geq 0$, vale que,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} v_\lambda = \mathcal{L} v_\lambda - \int_\Omega K(x,y) v_\lambda(y) dy \leq \mathcal{L} v_\lambda.$$

Por outro lado, como u e h são supersoluções de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$, temos

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} v_\lambda = \mathcal{L}_{\mathcal{I}} u + \lambda \mathcal{L}_{\mathcal{I}} h \geq 0.$$

Portanto, v_λ é supersolução de $(\mathcal{L}, \mathfrak{B}, \Omega)$, e daí podemos repetir os mesmos passos da demonstração do Teorema 19 para garantir que $v_\mu = 0$, onde

$$\mu := \inf \Lambda > 0$$

e consequentemente, garantir que vale a Alternativa A3 do Teorema 14. ■

Capítulo 2

Autovalor Principal

Nosso objetivo neste capítulo é garantir a existência de um autovalor para um problema linear elíptico com termo não local e condições de contorno, cuja autofunção associada seja positiva. A garantia de existência de tal autovalor se mostrará importante na caracterização do princípio do máximo para este mesmo problema.

Dividiremos o capítulo da seguinte maneira: apresentamos inicialmente algumas noções preliminares essenciais para o desenvolvimento do conteúdo. Em seguida introduzimos alguns conceitos de ordens e espaços de Banach ordenados que são necessários para apresentar o importante Teorema de Krein-Rutman e fazemos um estudo sobre as soluções do problema linear elíptico com termo não local.

2.1 Noções preliminares

Assumiremos aqui as seguintes hipótese gerais

H1. Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ de classe C^2, cuja fronteira consiste de dois subconjuntos abertos e fechados Γ_0 e Γ_1,

$$\partial\Omega := \Gamma_0 \cup \Gamma_1.$$

Γ_0 e Γ_1 devem possuir uma quantidade finita de componentes e qualquer um deles podem ser o conjunto vazio.

H2. Consideraremos

$$\begin{cases} A := (a_{ij})_{1\leq i,j\leq N}, A \in \mathcal{M}_N^{Sym}(W^{1,\infty}(\Omega)), \\ b = (b_1,...,b_N) \in (L^\infty(\Omega))^N, c \in L^\infty(\Omega). \end{cases} \tag{2.1}$$

H3. $\beta \in C(\Gamma_1)$, η denota o vetor normal unitário apontado para fora de Ω, e

$$\nu := A\eta$$

é o campo vetorial co-normal, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \nabla u, A\eta \rangle = \langle A\nabla u, \eta \rangle$$

para todo $u \in C^1(\Gamma_1)$.

Neste capítulo iremos estudar a existência de autovalores para o problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\mathcal{I}}\varphi = \tau\varphi \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}\varphi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} := -div(A\nabla\cdot) + \langle b, \nabla\cdot \rangle + c - \int_{\Omega} K(x,y) \cdot dy \tag{2.3}$$

e $K \in L^{\infty}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R})$ é uma função não negativa e não identicamente nula.

Vamos mostrar que estamos trabalhando com um caso particular dos operadores estudados no Capítulo 1. Mais precisamente,

$$-div(A\nabla\cdot) + \langle b, \nabla\cdot \rangle + c = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} \tilde{b}_j \frac{\partial}{\partial x_j} + c, \tag{2.4}$$

onde $\tilde{b}_j = b_j - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}$. Para mostrar (2.4), observemos que

- $b = (b_1, ..., b_N)$
- $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ é uma matriz simétrica
- $div(v_1, ..., v_N) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$.

Assim, temos que

$$A\nabla u = \left(\sum_{j=1}^{N} a_{1j} \frac{\partial u}{\partial x_j}, ..., \sum_{j=1}^{N} a_{Nj} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right).$$

Portanto,

$$div(A\nabla u) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Além disso,

$$\langle b, \nabla u\rangle = \sum_{j=1}^{N} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}
-div(A\nabla u) + \langle b, \nabla u\rangle + uc &= -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + uc \\
&= -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + uc \\
&= -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N}\left(b_j - \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j} + uc \\
&= -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} \tilde{b}_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + uc,
\end{aligned}$$

onde $\tilde{b}_j := b_j - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}$. Como, por hipótese $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, temos que $\tilde{b}_j \in L^\infty(\Omega)$. Assim, $a_{ij}, \tilde{b}_j, c \in L^\infty(\Omega)$. Portanto, (2.3) pode ser rescrita como

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} \tilde{b}_j \frac{\partial \cdot}{\partial x_j} + c - \int_\Omega K(x,y)\cdot dy. \tag{2.5}$$

O que nos motiva a estudar $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ na forma (2.3) é a definição de solução fraca.

Vamos apresentar um primeiro conceito de solução para o problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\mathcal{I}} u = f \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B} u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

Definição 21. Seja $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^p$ e $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Então, u é dita uma solução de (2.6) se u satisfaz $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + \omega)u = f$ q.t.p em Ω e $\mathfrak{B}u = 0$ sobre $\partial\Omega$ no sentido dos traços, ou seja

$$T_{\Gamma_0} u = 0 \text{ e } \langle T_{\Gamma_1}\nabla u, \nu\rangle + \beta T_{\Gamma_1} u = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \tag{2.7}$$

ou, equivalentemente,

$$u \in W^{1,p}_{\Gamma_0}(\Omega) \text{ e } \langle T_{\Gamma_1}\nabla u, \nu\rangle + \beta T_{\Gamma_1} u = 0 \text{ sobre } \Gamma_1.$$

Observação 22. Daqui em diante, omitiremos o operador traço por comodidade e escreveremos simplesmente

$$T_\Gamma u = u,$$

onde $\Gamma \in \{\Gamma_0, \Gamma_1, \partial\Omega\}$.

Para realizar o estudo do problema de autovalor (2.3), apresentamos as seguintes definições:

Definição 23. Um número $\tau \in \mathbb{C}$ será dito autovalor de (2.2) se esta equação admite uma solução não trivial. Denotaremos por $\Sigma(\mathcal{L}_\mathcal{I}, \mathfrak{B}, \Omega)$, o conjunto de todos os autovalores de (2.2).

Um autovalor $\tau \in \mathbb{R}$, de (2.2) será chamado de autovalor principal se possui uma autofunção associada que não muda de sinal. A autofunção associada ao autovalor principal será chamada de autofunção principal.

Definição 24 (Autovalor simples)**.** Seja

$$\tau \in \mathbb{R} \cap \Sigma(\mathcal{L}_\mathcal{I}, \mathfrak{B}, \Omega)$$

para o qual (2.2) admite uma única autofunção φ a menos de multiplicação por uma constante. Então, τ é dito um autovalor simples de (2.2) se

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_\mathcal{I} - \tau)u = \varphi \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.8}$$

não admite solução $u \in W^{2,p}_{\Gamma_0}(\Omega)$.

2.2 Ordens e Espaços de Banach Ordenados

Para garantir a existência de um autovalor para o problema (2.2), utilizaremos do Teorema de Krein-Rutman. Para enunciá-lo precisaremos introduzir alguns conceitos sobre ordens em espaços de Banach.

Dado um conjunto não vazio X, uma ordem, que denotaremos por $\leq$, em X é uma relação que é antissimétrica, reflexiva e transitiva. Um conjunto não-vazio X junto com uma ordem, $(X, \leq)$ é chamado um *conjunto ordenado*.

Dado um conjunto ordenado $(X,\leq)$ e um par $(x,y)\in X^2$, dizemos que $y\geq x$ se $x\leq y$, enquanto que escrevemos $x<y$ (ou equivalentemente $y>x$) para dizer que $x\leq y$ com $x\neq y$ (ou equivalentemente $y\geq x$ com $x\neq y$).

Seja V um espaço vetorial real. Então, uma ordem $\leq$ em V é dita *linear* se para todo $x,y,z\in V$ e $\lambda\in\mathbb{R}_+ := [0,+\infty)$ valem

- $x\leq y \Rightarrow x+z\leq y+z$
- $x\leq y \Rightarrow \lambda x\leq \lambda y$

Um espaço vetorial real V junto com uma ordem linear, $(V,\leq)$ será chamado de *espaço vetorial ordenado* (e.v.o).

Dado um espaço vetorial real V, um subconjunto $P\subset V$ é dito um *cone* se

- $P+P\subset P$
- $\mathbb{R}_+P\subset P$
- $P\cap(-P)=\{0\}$

Quando $(V,\leq)$ é um espaço vetorial ordenado, então pode-se observar que o conjunto P definido por

$$P := \{x\in V; x\geq 0\} \tag{2.9}$$

é um cone, o qual chamaremos de *cone positivo associado à ordem* $\leq$. De fato, P é um cone, pois, dados $x,y\in P$ arbitrários e $\lambda\in\mathbb{R}_+$ vale que

$$x\in P\Rightarrow x\geq 0\Rightarrow x+y\geq 0+y=y\geq 0\Rightarrow x+y\in P\Rightarrow P+P\subset P$$

$$x\in P\Rightarrow x\geq 0\Rightarrow \lambda x\geq \lambda 0=0\Rightarrow \lambda x\in P\Rightarrow \mathbb{R}_+P\subset P$$

Além disso, se $x\in P\cap(-P)$, onde $-P := \{x\in V; x\leq 0\}$, temos que

$$x\in P\Rightarrow x\geq 0 \text{ e } x\in(-P)\Rightarrow x\leq 0$$

consequentemente, pela antissimetria $x=0$, ou seja

$$x\in P\cap(-P)\iff x=0\iff P\cap(-P)=\{0\}$$

logo, P é um cone.

Agora, seja V um espaço vetorial real junto com um cone $P\subset V$. A relação definida por

$$x\leq y \text{ se e somente se } y-x\in P \tag{2.10}$$

é uma ordem linear em V cujo cone positivo associado é P. De fato, sejam $x,y,z \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}_+$ e suponha que $y-x \in P$, logo, com V é um espaço vetorial vale que

$$y-x = y+z-z-x \in P \Longleftrightarrow y+z \leq x+z$$

e como P é um cone, temos que

$$y-x \in P \Longleftrightarrow \lambda(y-x) \in P \Longleftrightarrow \lambda x - \lambda y \in P \Longleftrightarrow \lambda x \leq \lambda y$$

isso mostra que $\leq$ é linear. O fato de P ser o cone positivo associado a $\leq$ segue da construção. Isso estabelece uma correspondência biunívoca entre o conjunto de ordens lineares de um espaço vetorial e seu conjunto de cones, de modo que dada uma ordem linear seu cone positivo associado é dado por (2.9). E reciprocamente, para cada cone em E podemos definir uma relação de ordem (2.10) que torna este cone o cone positivo associado a esta relação de ordem.

Os vetores de $P \backslash \{0\} = \{x \in V; x > 0\}$ são chamados positivos.

Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach ordenado por um cone como em (2.10). Então

$$E := (E, \|\cdot\|, P)$$

é dito um espaço de Banach ordenado (e.B.o) se P é fechado. Em tal caso denotaremos por $int(P)$ o interior do cone P, que pode ser vazio. No exemplo a seguir apresentaremos um espaço de Banach ordenado cujo cone positivo possui interior vazio.

Exemplo 25. Considere o espaço de Banach ordenado $L^2(\Omega)$ cujo cone positivo associado é dado por

$$P_{L^2(\Omega)} = \{u \in L^2(\Omega); u \geq 0 \text{ q.t.p em } \Omega\}. \tag{2.11}$$

Vamos mostrar que $int(P_{L^2(\Omega)}) = \emptyset$. Para isso é suficiente mostrar que dados $u \in P_{L^2(\Omega)}$ e $R > 0$, existem $v \in B_R(0) \subset L^2(\Omega)$ e $M \subset \Omega$ com $|M| > 0$ tais que

$$u + v < 0 \text{ em } M.$$

Ou seja, $u+v \in B_R(u) \backslash P_{L^2(\Omega)}$ e portanto, $u \notin int(P_{L^2(\Omega)})$. Note que, como $u \geq 0$ q.t.p em Ω, existe

$$0 \leq m := \inf_{\Omega} \operatorname{ess} u.$$

Pela definição de ínfimo essencial, o conjunto

$$K := \{x \in \Omega; u(x) < m+1\}$$

possui medida positiva.

Considere $K_n \subset K$, com $0 < |K_n| \to 0$, se $n \to +\infty$ e defina

$$v := \begin{cases} -(m+1) \text{ em } K_n, \\ 0 \text{ em } \Omega \backslash K_n. \end{cases}$$

Note que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (-m-1)^2 = (m+1)^2 \int_{K_n} 1 = (m+1)^2 |K_n| < +\infty,$$

pois $|K_n| < +\infty$. Logo $v \in L^2(\Omega)$. Além disso, $v \in B_R(0)$, onde $R := (m+1)\sqrt{|K_n|}$, que pode ser tomado arbitrariamente pequeno (basta fazer $|K_n| \to 0$). Por fim, resta observar que

$$u + v = u - (m+1) < 0 \text{ q.t.p em } K_n \subset K,$$

pela definição de K. Isso mostra o resultado.

Agora vamos apresentar um exemplo de um e.B.o cujo cone positivo associado é não vazio.

Exemplo 26. Defina o conjunto

$$C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega}) := \{u \in C^1(\overline{\Omega}); \mathfrak{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

Este conjunto é um espaço de Banach ordenado cujo cone positivo associado é dado por

$$P = \{u \in C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega}); u \geq 0 \text{ em } \overline{\Omega}\}.$$

Vamos mostrar que o interior de P é não vazio e dado por

$$int(P) = \left\{ u \in C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega}); u(x) > 0, \forall x \in \Omega \cup \Gamma_1 \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) < 0, \forall x \in \Gamma_0 \right\}.$$

Considere

$$A = \left\{ u \in C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega}); u(x) > 0, \forall x \in \Omega \cup \Gamma_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) < 0, \forall x \in \Gamma_0 \right\} \subset C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega}).$$

Vamos mostrar primeiramente que $A \subset int(P)$. Isto é, queremos mostrar que para todo $u \in A$, existe $R > 0$ de modo que $B_R(u) \subset P$ ou, equivalentemente,

$$u + v \geq 0, \quad \forall v \in B_R(0).$$

Note que, por ser $u \in A \subset C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega})$, então a função

$$x \in \Gamma_0 \mapsto \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \langle \nabla u(x), \nu \rangle < 0$$

é contínua. Além disso, sabendo que Γ_0 é compacto, existe $x_0 \in \Gamma_0$ tal que,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) < \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) := c_0 < 0, \quad \forall x \in \Gamma_0.$$

Considere $R_1 := |c_0|/\|\nu\|_\infty$ e seja $v \in B_{R_1}(0) \subset C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega})$. Assim, dado $x \in \Gamma_0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial (u+v)}{\partial \nu}(x) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) + \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) \leq c_0 + \left| \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) \right| \leq c_0 + |\nabla v| \|\nu\|_\infty \\ \leq c_0 + \|v\|_{C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega})} \|\nu\|_\infty < c_0 + |c_0| \leq 0. \end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{\partial (u+v)}{\partial \nu}(x) < 0, \quad \forall x \in \Gamma_0, \quad \forall v \in B_{R_1}(0). \tag{2.12}$$

Em particular, como $x \in \Gamma_0 \mapsto \dfrac{\partial (u+v)}{\partial \nu}(x)$ é contínua e Γ_0 é compacto, existe $\bar{x} \in \Gamma_0$ tal que

$$\frac{\partial (u+v)}{\partial \nu}(x) \leq \frac{\partial (u+v)}{\partial \nu}(\bar{x}), \quad \forall x \in \Gamma_0, \quad \forall v \in B_{R_1}(0). \tag{2.13}$$

Por (2.12), existe $\bar{t} > 0$ tal que $(u+v)(\bar{x} - t\nu) \geq 0$, para todo $t \in (0, \bar{t})$. Por (2.13) devemos ter também

$$(u+v)(x - t\nu) \geq 0, \quad \forall t \in (0, \bar{t}), \quad \forall x \in \Gamma_0, \quad \forall v \in B_{R_1}(0).$$

Logo, existe $\delta > 0$ tal que

$$\Gamma_0^\delta := \{x \in \Omega;\ \mathrm{dist}(x, \Gamma_0) < \delta\} \subset \bigcup_{x \in \Gamma_0} \{x - t\nu;\ t \in (0, \bar{t})\}. \tag{2.14}$$

Portanto,

$$u + v \geq 0 \text{ em } \Gamma_0^\delta, \quad \forall v \in B_{R_1}(0). \tag{2.15}$$

Por outro lado, como

$$u(x) > 0, \quad \overline{\Omega \cup \Gamma_1 \backslash \Gamma_0^{\delta}} := W,$$

e W é compacto, segue que $R_2 := \inf_W u > 0$. Daí, dado $v \in B_{R_2}(0)$, temos que

$$u + v \geq R_2 + v \geq 0 \text{ em } W. \tag{2.16}$$

Tomando $R := \min\{R_1, R_2\}$, em vista de (2.15) e (2.16), vale

$$u + v \geq 0 \quad \forall v \in B_R(0).$$

Segue daí que $A \subset int(P)$.

Agora, suponha por absurdo que exista $u \in int(P) \setminus A$. Logo u não satisfaz alguma das seguintes alternativas:

(a) $u(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega \cup \Gamma_1$,

(b) $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) < 0, \quad \forall x \in \Gamma_0$.

Suponha que (a) não vale. Então deve existir $x_- \in \Omega \cup \Gamma_1$ tal que $u(x_-) = 0$, pois $u \geq 0$.

Se $x_- \in \Omega$, considere a bola $B_r(x_-), R > 0$, de modo que $\text{dist}(B_r(x_-), \partial\Omega) > 0$ e defina, para $r > 0$,

$$v(x) := \begin{cases} -e^{\overline{\frac{1}{|x_- - x|^2 - r}}}, & \text{se } |x_- - x| < r \\ 0, & \text{se } |x_- - x| > r \end{cases}$$

Note que $v \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ e como $\text{dist}(B_r(x_-), \partial\Omega) > 0$ devemos ter $v = 0$ sobre $\partial\Omega$ e consequentemente $\mathfrak{B}v = 0$ sobre $\partial\Omega$. Daí, $v \in C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega})$. Observe que

$$u(x_-) + v(x_-) = 0 - e^{\frac{1}{-r}} < 0$$

Como $r > 0$ pode ser tomado arbitrariamente pequeno, podemos obter $\|v\|_{C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega})} < R$, com $R > 0$ tão pequeno quanto se queira. Assim, temos que, para todo $R > 0$, exite $v \in B_R(0) \subset C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega})$ tal que $u(x_-) + v(x_-) < 0$. Donde concluímos que $u \notin int(P)$, o que é absurdo.

Se $x_- \in \Gamma_1$, uma vez que $u \in C^1_{\mathfrak{B}}(\Omega)$, devemos ter sobre Γ_1,

$$0 = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_-) + \beta u(x_-) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_-).$$

Considere $v \in C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega})$, tal que $\partial v(x_-)/\partial(-\nu) < 0$ e $v \leq 0$ em $\overline{\Omega}$. Dado ε positivo segue que

$$\frac{\partial(u + \varepsilon v)}{\partial(-\nu)}(x_-) = \frac{\partial u}{\partial(-\nu)}(x_-) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial(-\nu)}(x_-) < 0 \tag{2.17}$$

Uma vez que $-\nu$ é um vetor que aponta para o interior de Ω, existe $t_0 > 0$ tal que $C := \{x_- - t\nu; t \in (0,t_0)\} \subset \Omega$. Por (2.17), $u + \varepsilon v$ é decrescente na direção de $-\nu$ e daí existe $x_0 \in C$ tal que

$$u(x_0) + \varepsilon v(x_0) < u(x_-) + \varepsilon v(x_-) \leq 0$$

Como ε pode ser tomado arbitrariamente pequeno concluímos que $u \notin int(P)$, o que é absurdo. Portanto, se $u \in int(P)$, então (a) deve ser satisfeita.

Agora suponhamos que (b) não ocorre, logo existe $x_- \in \Gamma_0$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_-) \geq 0.$$

Se $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_-) = 0$, argumentamos como no caso anterior para garantir a existência de $v \in C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega})$ tal que $u(x_0) + \varepsilon v(x_0) < 0$ para algum $x_0 \in \Omega$ e para todo $\varepsilon > 0$, que implicaria que $u \notin int(P)$, novamente um absurdo.

Se $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_-) > 0$, então, $\dfrac{\partial u}{\partial(-\nu)}(x_-) < 0$. Como $-\nu$ é um vetor que aponta para o interior de Ω, existe $t_0 > 0$ tal que $\{x_- - t\nu; t \in (0,t_0)\} \subset \Omega$. Logo, deve existir $x_0 \in \Omega$ tal que

$$u(x_0) < u(x_-) = 0,$$

o que contradiz a hipótese de $u \geq 0$ em Ω. Portanto, se $u \in int(P)$, (b) deve ser satisfeita. Segue então que $int(P) \subset A$, e obtemos o resultado desejado.

Observação 27. Note que no exemplo anterior, ν pode ser considerado um campo vetorial exterior qualquer.

2.3 O Teorema de Krein-Rutman

Vamos relembrar algumas noções de operadores lineares compactos. Essas noções podem ser encontradas, por exemplo, no capítulo 6 de [8].

Considere $(E, ||\cdot||)$ um espaço de Banach real e denote por $\mathfrak{L}(E)$ o conjunto das transformações lineares contínuas de E em E. Dado $T \in \mathfrak{L}(E)$ então o limite

$$r(T) := \lim_{n \longrightarrow +\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}}_{\mathfrak{L}(E)} \tag{2.18}$$

existe e é chamado de raio espectral de T. Observe que para $n \geq 1$

$$\|T^n\|_{\mathfrak{L}(E)} \leq \|T\|^n_{\mathfrak{L}(E)} \Rightarrow \|T^n\|^{\frac{1}{n}}_{\mathfrak{L}(E)} \leq (\|T\|^n_{\mathfrak{L}(E)})^{\frac{1}{n}} = \|T\|_{\mathfrak{L}(E)}$$

e passando o limite, obtemos que $r(T) \leq \|T\|_{\mathfrak{L}(E)}$. Também, tomando $\zeta \in \mathbb{C}$ com $|\zeta| > r(T)$ vale

$$r(\frac{T}{\zeta}) < 1$$

e podemos obter o operador

$$R(\zeta;T) := (\zeta I - T)^{-1} = \zeta^{-1}(I - \zeta T)^{-1}$$

o qual chamaremos de operador resolvente.

Definição 28. Considerando $T \in \mathfrak{L}(E)$ e E um espaço de Banach complexo, denotamos por :

- $\sigma(T)$ o conjunto de valores $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda I - T$ não é um isomorfismo de $E_{\mathbb{C}} := E + iE$, onde i é a unidade imaginária dos complexos. $\sigma(T)$ é chamado de espectro de T.
- Um autovalor de T é um elemento $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $N[\lambda I - T] \neq \{0\}$.
- $\rho(T) := \mathbb{C} \backslash \sigma(T)$, o conjunto resolvente de T.
- Um autovalor λ de T é dito algebricamente simples se $N[(\lambda I - T)^m] = N[\lambda I - T]$, para todo $m \in \mathbb{N}$ e $dim(N[\lambda I - T]) = 1$.

Sabe-se que

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Considerando E um espaço de Banach real e $T \in \mathfrak{L}(E)$ o operador adjunto de T é o único operador $T^* \in \mathfrak{L}(E')$ que satisfaz, para todo $(x, x') \in E \times E'$

$$T^*x'(x) = x'(Tx)$$

Um operador $T \in \mathfrak{L}(E)$ é dito compacto se, para todo $B \subset E$ limitado, o conjunto $\overline{T(B)}$ for compacto. Denotaremos por $\mathcal{K}(E)$ o conjunto dos operadores $T \in \mathfrak{L}(E)$ compactos. Valem os seguinte resultados

1. $T \in \mathcal{K}(E)$ se e somente se $T^* \in \mathcal{K}(E')$
2. $Im[\zeta I - T]$ é fechada, $dimN[\zeta I - T] < +\infty$ e

$$\begin{cases} Im[\zeta I - T] = N[\zeta I - T]^{\perp} \\ dimN[\zeta I - T] = dimN[\zeta' I - T^*] \end{cases} \tag{2.19}$$

.

Considere $(X, \|\cdot\|_X, P_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y, P_Y)$ dois espaços de Banach ordenados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Então

- T é dito positivo se
$$T(P_X) \subset P_Y;$$
- T é dito estritamente positivo se
$$T(P_X \backslash \{0\}) \subset P_Y \backslash \{0\};$$
- T é dito fortemente positivo se
$$int(P_Y) \neq \emptyset \text{ e } T(P_X \backslash \{0\}) \subset int(P_Y).$$

Estamos agora em condições de enunciar o Teorema de Krein-Rutman, que desempenha um papel essencial para garantir a existência de um autovalor para o problema

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + \omega)u = \tau u \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.20}$$

Teorema 29 (Krein-Rutman). *Seja $(E, \|\cdot\|, P)$ um e.B.o com $int(P) \neq \emptyset$ e $T \in \mathcal{K}(E)$ um operador compacto fortemente positivo, ou seja*

$$T(P \backslash \{0\}) \subset int(P) \tag{2.21}$$

Então valem as seguintes afirmações:

(a) $r(T) > 0$ *é um autovalor algebricamente simples de T com*
$$N[r(T)I - T] = span[x_0]$$
para algum $x_0 \in int(P)$.

(b) $r(T)$ *é o único autovalor real de T para um vetor $P \backslash \{0\}$.*

(c) $r(T)$ *é o único autovalor de T no círculo espectral*
$$|\zeta| = r(T)$$
Em outras palavras, $|\lambda| < r(T), \forall \lambda \in \sigma(T) \backslash \{r(T)\}$.

(d) *Para todo número real* $\lambda > r(T)$*, o operador resolvente* $R(\lambda;T) \in \mathfrak{L}(E)$*, definido anteriormente é fortemente positivo, ou seja*

$$R(\lambda;T)(P\backslash\{0\}) \subset int(P).$$

(e) *Existe* $\varepsilon > 0$ *e* $x > 0$ *tal que*

$$R(\lambda,T)x \ll 0, \forall \lambda \in (r(T)-\varepsilon, r(T)).$$

(f) *Para todo* $x \in P\backslash\{0\}$ *a equação*

$$r(T)u - Tu = x \tag{2.22}$$

não admite uma solução $u \in E$.

Demonstração. Para as demonstrações de $a) - e)$, ver, por exemplo, [20, Theorem 6.3.1], [3, Theorem 3.2] ou [10, Theorem 12.3].

Uma vez que o item $f)$ foi enunciado ligeiramente diferente dos apresentados nas bibliografias, apresentaremos sua demonstração aqui.

Considere $P^* \subset E'$ definido por:

$$P^* := \{x' \in E'; x'(x) \geq 0, \forall x \in P\}.$$

O comentário feito após a demonstração do Lema 6.14 de [20] nos diz que

$$int(P) \neq \emptyset \Rightarrow P^* \text{ é um cone em } E'.$$

Além disso, conforme observação 6.3.2, página 183 de [20], $r(T) = r(T^*)$ e existe x_0' autofunção associada a $r(T)$ com $x_0' \in P^*$.

Observe que, dado $x \in P\backslash\{0\}$, dizer que (2.22) não admite solução é equivalente a dizer que

$$x \notin Im[r(T)I - T].$$

Vamos dividir a demonstração em três passos.

Passo 1. A equação (2.22) não admite solução para $y = x_0$. Com efeito, se existisse $u \in E$ tal que $r(T)u - Tu = x_0$, então $u \neq 0$ e aplicando $r(T)I - T$ a ambos os lados teríamos, por (a) que

$$(r(T)I - T)^2 u = (r(T)I - T)x_0 = 0,$$

ou seja, $u \in N[(r(T)I - T)^2] \backslash N[r(T)I - T]$. Isso contradiz o fato de $r(T)$ ser algebricamente simples.

Passo 2. $Im[r(T)I - T] = N[x_0']$. De fato, pela Alternativa de Fredholm, (ver [8, Theorem 6.6]),

$$Im[r(T)I - T] = N[r(T)I - T^*]^{\perp}.$$

Ora, mas $N[r(T)I - T^*] = span[x_0']$, daí,

$$Im[r(T)I - T] = span[x_0']^{\perp}.$$

Mas por definição,

$$span[x_0']^{\perp} = \{x \in E; x_0'(x) = 0\} = N[x_0'].$$

O que conclui a prova do passo 2.

Pelo passo 1 e passo 2, temos que $x_0 \notin N[x_0']$, o que equivale a dizer que $x_0'(x_0) \neq 0$. Como $x_0' \in P^* \backslash \{0\}$ e $x_0 \in P \backslash \{0\}$, vale que $x_0'(x_0) \geq 0$. Consequentemente $x_0'(x_0) > 0$.

Passo 3. Para todo $x \in P \backslash \{0\}, x_0'(x) > 0$. Com efeito,

$$x_0'(x) = \frac{1}{r(T)} r(T) x_0'(x) = \frac{1}{r(T)} T^* x_0'(x) = \frac{1}{r(T)} x_0'(Tx)$$

Já sabemos que $r(T) > 0$. Além disso, como T é fortemente positivo e $x \in P \backslash \{0\}$, segue que $Tx \in int(P)$. Como $x_0' \in P^*$ e $Tx \in P \backslash \{0\}$, vale que

$$x_0'(Tx) \geq 0.$$

Mais ainda, como $Tx \in int(P)$ e $x_0 \in P$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $Tx - \varepsilon x_0 \in P \backslash \{0\}$. Daí,

$$x_0'(Tx - \varepsilon x_0) \geq 0$$

ou seja,

$$x_0'(Tx) \geq \varepsilon x_0'(x_0) > 0.$$

Com isso temos que

$$x_0'(x) = \frac{1}{r(T)} x_0'(Tx) > 0,$$

finalizando a demonstração do passo 3.

Por fim, o passo anterior nos diz que para todo $y \in P \backslash \{0\}$,

$$y \notin N[x_0'] = Im[r(T)I - T].$$

Mostrando a validade do item f). ■

2.4 Soluções fracas

Nesta seção iremos definir o que é uma solução fraca para o problema com termo não local

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\mathcal{I}}u = f \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.23}$$

Antes disso, iremos apresentar uma motivação para a definição destas soluções. A ideia aqui é estabelecer um conjunto maior de soluções para o problema (2.23), diminuindo as exigências sobre sua regularidade. Assim, considere o seguinte

Exemplo 30. Sejam $p \in [2, +\infty)$, $f \in L^p(\Omega)$ e suponha que $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_{\Gamma_0}(\Omega)$ é uma solução do problema (2.23). Vamos mostrar que u verifica a seguinte igualdade

$$\int_\Omega f\phi = \int_{\Gamma_1} \phi\beta u dS + \int_\Omega \langle \nabla\phi, A\nabla u\rangle + \int_\Omega \phi\Big(\langle b, \nabla u\rangle + uc + u\omega\Big) - \int_\Omega \left[\phi \int_\Omega K(x,y)u(y)dy\right],$$

para todo $\phi \in C^\infty_{\Gamma_0}(\Omega)$.

Com efeito, multiplicando a primeira igualdade de (2.23) por $\phi \in C^\infty_{\Gamma_0}(\Omega)$ e integrando em Ω, obtemos

$$\int_\Omega f\phi = \int_\Omega \phi\mathcal{L}_{\mathcal{I}}u.$$

De acordo com a definição de derivadas fracas de ordem α e suas propriedades operacionais, para todo $\phi \in C^\infty_{\Gamma_0}(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega f\phi &= \int_\Omega \phi\left(-div(A\nabla u) + \langle b, \nabla u\rangle + uc - \int_\Omega K(x,y)u(y)dy\right) \\ &= -\int_\Omega \phi div(A\nabla u) + \int_\Omega \phi\langle b, \nabla u\rangle + \int_\Omega \phi uc - \int_\Omega \left[\phi \int_\Omega K(x,y)u(y)dy\right] \end{aligned} \tag{2.24}$$

Observemos que $\phi A\nabla u = (..., \phi\tilde{u}_i, ...)$, onde $\phi\tilde{u}_i = \sum_{j=1}^N \phi a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}$. Daí,

$$\frac{\partial\phi\tilde{u}_i}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial(\phi a_{ij})}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \phi a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right] = \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}a_{ij} + \phi\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \phi a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right],$$

e assim

$$
\begin{aligned}
div(\phi A\nabla u) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial \phi \tilde{u}_i}{\partial x_i} &= \sum_{i,j=1}^{N} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} a_{ij} + \phi \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \phi a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} a_{ij} + \phi \left[\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} a_{ij} + \phi div(A\nabla u).
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
div(\phi A\nabla u) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} a_{ij} + \phi div(A\nabla u). \tag{2.25}
$$

Sabendo que,

$$
\begin{aligned}
A\nabla u &= \left(\sum_{j=1}^{N} a_{1j} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \ldots, \sum_{j=1}^{N} a_{Nj} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), \quad \nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \phi}{\partial x_N} \right), \\
\langle \nabla \phi, A\nabla u \rangle &= \left\langle \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \phi}{\partial x_N} \right), \left(\sum_{j=1}^{N} a_{1j} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \ldots, \sum_{j=1}^{N} a_{Nj} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \right\rangle \\
&= \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \sum_{j=1}^{N} a_{1j} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial \phi}{\partial x_N} \sum_{j=1}^{N} a_{Nj} \frac{\partial u}{\partial x_j} \\
&= \sum_{j=1}^{N} a_{1j} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \ldots + \sum_{j=1}^{N} a_{Nj} \frac{\partial \phi}{\partial x_N} \frac{\partial u}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{Nj} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}.
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$
\langle \nabla \phi, A\nabla u \rangle = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}. \tag{2.26}
$$

Substituindo (2.26) em (2.25) obtemos

$$
\begin{aligned}
div(\phi A\nabla u) &= \langle \nabla \phi, A\nabla u \rangle + \phi div(A\nabla u) \\
\phi div(A\nabla u) &= div(\phi A\nabla u) - \langle \nabla \phi, A\nabla u \rangle. \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

Substituindo (2.27) em (2.24),

$$\int_\Omega f\phi = -\int_\Omega div(\phi A\nabla u) + \int_\Omega \langle \nabla\phi, A\nabla u\rangle + \int_\Omega \phi\langle b,\nabla u\rangle$$
$$+\int_\Omega \phi(uc+u\omega) - \int_\Omega\left[\phi\int_\Omega K(x,y)u(y)dy\right]$$

. Ora, sendo

$$div(\phi A\nabla u) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \phi\tilde{u}_i}{\partial x_i}, \text{ onde } \tilde{u}_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j},$$

pelo Teorema de Gauss para derivadas fracas (Ver Teorema A.2),

$$\int_\Omega div(\phi A\nabla u) = \int_{\partial\Omega}\langle \phi A\nabla u, \eta\rangle dS,$$

onde $\eta = (\eta_1,...,\eta_N)$ é o vetor normal unitário apontado para para fora de Ω. Daí

$$\int_\Omega f\phi = -\int_{\partial\Omega}\langle \phi A\nabla u,\eta\rangle dS + \int_\Omega\langle\nabla\phi, A\nabla u\rangle$$
$$+\int_\Omega \phi\left(\langle b,\nabla u\rangle + \int_\Omega uc+u\omega\right) - \int_\Omega\left[\phi\int_\Omega K(x,y)u(y)dy\right]. \quad (2.28)$$

Além disso, como $\phi\in C^\infty_{\Gamma_0}(\Omega)$, ϕ se anula em uma vizinhança de Γ_0 e como $\partial\Omega = \Gamma_0\cup\Gamma_1$, vale que

$$\int_{\partial\Omega}\langle\phi A\nabla u,\eta\rangle dS = \int_{\Gamma_1}\langle\phi A\nabla u,\eta\rangle dS = \int_{\Gamma_1}\phi\frac{\partial u}{\partial\nu}dS,$$

pois, $\partial u/\partial\nu = \langle\nabla u, A\eta\rangle = \langle A\nabla u,\eta\rangle$. Lembrando que, sobre Γ_1

$$0 = \mathfrak{B}u = \frac{\partial u}{\partial\nu} + \beta u,$$

vale que

$$\int_{\partial\Omega}\langle\phi A\nabla u,\eta\rangle dS = \int_{\Gamma_1}\phi\frac{\partial u}{\partial\nu}dS = -\int_{\Gamma_1}\phi\beta u dS.$$

Substituindo a igualdade acima em (2.28) obtemos o resultado.

Isso nos motiva a seguinte

Definição 31. Seja $f \in L^p(\Omega),\ p \geq 2$. Uma função $u \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$ é dita solução fraca de (2.23) se

$$\mathfrak{b}(u,\phi) = \langle f,\phi\rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \phi \in C^\infty_{\Gamma_0}(\Omega), \tag{2.29}$$

onde $\mathfrak{b} : W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega) \times W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ representa a forma bilinear definida por

$$\mathfrak{b}(u,v) = \int_{\Gamma_1} v\beta u dS + \int_\Omega \langle \nabla v, A\nabla u\rangle + \int_\Omega v\Big(\langle b,\nabla u\rangle + uc\Big) - \int_\Omega\int_\Omega vK(x,y)u(y)dy.$$

Daqui em diante, $\mathfrak{b}(\cdot,\cdot)$ será referida como a forma bilinear associada a (2.23), ou equivalentemente, à terna $(\mathcal{L}_\mathcal{I},\mathfrak{B},\Omega)$.

O exemplo 30 mostra que toda solução forte de (2.23) é também uma solução fraca. Vamos mostrar agora que uma solução fraca é forte se possuir a regularidade necessária.

Proposição 32. *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $u \in W^{2,p}(\Omega)\cap W^{1,p}_{\Gamma_0}(\Omega)$ para algum $p \geq 2$. Então, u é uma solução forte de* (2.23) *se, e somente se, u é uma solução fraca.*

Demonstração. Já vimos no exemplo 30 que se u é solução forte de (2.23), então é uma solução fraca.

Reciprocamente, suponha que u é uma solução fraca de (2.23). Então u satisfaz (2.29) isto é, para todo $\phi \in C^\infty_{\Gamma_0}(\Omega)$, temos a igualdade

$$\begin{aligned}\langle f,\phi\rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega f\phi = \mathfrak{b}(u,\phi)\\ &= \int_{\Gamma_1}\phi\beta u dS + \int_\Omega \langle\nabla\phi, A\nabla u\rangle + \int_\Omega \phi\Big(\langle b,\nabla u\rangle + uc\Big)\\ &\quad - \int_\Omega\int_\Omega \phi K(x,y)u(y)dy.\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\phi\mathcal{L}_\mathcal{I}u = -\,\phi div(A\nabla u) + \phi\langle b,\nabla u\rangle + \phi uc - \int_\Omega \phi K(x,y)u(y)dy$$

e

$$\phi div(A\nabla u) = div(\phi A\nabla u) - \langle\nabla\phi, A\nabla u\rangle$$

temos,

$$\phi\mathcal{L}_\mathcal{I}u + div(\phi A\nabla u) = \langle A\nabla u,\nabla\phi\rangle + \phi\Big(\langle b,\nabla u\rangle + uc\Big) - \int_\Omega \phi K(x,y)u(y)dy.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f\phi &= \int_\Omega \phi\mathcal{L}_{\mathcal{I}}u + \int_\Omega div(\phi A\nabla u) + \int_{\Gamma_1} \beta u\phi dS \\
&= \int_\Omega \phi\mathcal{L}_{\mathcal{I}}u + \int_{\partial\Omega} \langle \phi A\nabla u, \eta\rangle dS + \int_{\Gamma_1} \beta u\phi dS \\
&= \int_\Omega \phi\mathcal{L}_{\mathcal{I}}u + \int_{\Gamma_1} \phi\frac{\partial u}{\partial \nu} dS + \int_{\Gamma_1} \beta u\phi dS \\
&= \int_\Omega \phi\mathcal{L}_{\mathcal{I}}u + \int_{\Gamma_1} \phi\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u\right) dS.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Agora, fixe $\psi \in C^\infty(\Gamma_1)$ e seja $\phi_n \in C^\infty_{\Gamma_0}(\Omega)$, $n \geq 1$ uma sequência de funções testes tais que

$$\phi_n\Big|_{\Gamma_1} = \psi \text{ e } \operatorname{supp}\phi_n \subset \left\{x\in\Omega : \operatorname{dist}(x,\Gamma_1) \leq \frac{1}{n}\right\}$$

para n suficientemente grande e

$$\|\phi_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C, \quad n \geq 1,$$

para alguma constante positiva C. Tomando ϕ_n como funções teste em (2.30) temos que,

$$\int_\Omega f\phi_n = \int_\Omega \phi_n\mathcal{L}_{\mathcal{I}}u + \int_{\Gamma_1} \phi_n\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u\right) dS, \tag{2.31}$$

para todo $n \geq 1$. Queremos passar ao limite esta igualdade. Para isto, vamos analisar a convergência de cada parcela.

Fixando $x \in \Omega$, podemos tomar $N_0 \in \mathbb{N}$ de modo que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > N_0$, $d(x.\Gamma_1) > 1/N_0$, consequentemente, para todo $n > N_0$,

$$\phi_n = 0 \text{ em } \Omega \setminus A_n$$

onde

$$A_n := \{x\in\Omega; \operatorname{dist}(x,\Gamma_1) < \frac{1}{n}\}.$$

Daí $\phi_n(x) \longrightarrow 0$ em Ω. Além disso, como $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^1(\Omega)$ e

$$|f\phi_n| \leq Cf \in L^1(\Omega).$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_\Omega f\phi_n = 0.$$

Além do mais, como $A \in \mathcal{M}^{sym}(W^{1,\infty}(\Omega))$, $b \in (L^\infty(\Omega))^N$ e $c \in L^\infty(\Omega)$, segue que $\mathcal{L}_\mathcal{I}u \in L^1(\Omega)$, com

$$|\mathcal{L}_\mathcal{I}u\phi_n| \leq |\mathcal{L}_\mathcal{I}u|C \in L^1(\Omega).$$

Daí, novamente pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_\Omega \mathcal{L}_\mathcal{I}u\phi_n = 0.$$

Finalmente, sobre Γ_1, vale que

$$\psi = \phi_n\Big|_{\Gamma_1} \in C^\infty(\Gamma_1).$$

Daí,

$$\phi_n\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}+\beta u\right) = \psi\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}+\beta u\right) \text{ sobre } \Gamma_1.$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$0 = \lim\int_\Omega f\phi_n = \lim\left[\int_\Omega \phi_n\mathcal{L}_\mathcal{I}+u+\int_{\Gamma_1}\phi_n\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}+\beta u\right)dS\right] = \int_{\Gamma_1}\psi\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}+\beta u\right).$$

Como isso é válido para todo $\psi \in C^\infty(\Gamma_1)$, pelo Teorema A.1 resulta que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}+\beta u = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \tag{2.32}$$

Uma vez que $u \in W^{1,p}_{\Gamma_0}(\Omega)$ e $\partial u/\partial\nu + \beta u = 0$ sobre Γ_1, vale que $\mathfrak{B}u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Além disso, substituindo (2.32) em (2.30), resulta que

$$\int_\Omega f\phi = \int_\Omega \phi\mathcal{L}_\mathcal{I}u, \quad \forall\phi \in C^\infty_{\Gamma_0}(\Omega)$$

Pelo Teorema A.1

$$\mathcal{L}_\mathcal{I}u = f \quad \text{ q.t.p em } \Omega,$$

mostrando que u é solução forte de (2.23). ■

2.5 Existência de solução fraca

Nesta seção estamos interessados em estabelecer a existência de solução fraca para um problema relacionado com (2.23). Para isso, utilizaremos o Teorema de Lax-Milgram. Nossa análise será feita em dois casos: $\beta \geq 0$ e β qualquer.

2.5.1 Caso $\beta \geq 0$.

Considere o problema

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + \omega)u = f \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.33}$$

onde ω é um número real. A forma bilinear associada a $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + \omega, \mathfrak{B}, \Omega)$, é análoga a de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$, definida em (2.29), apenas trocando c por $c+\omega$ e por isso também a denotaremos por $\mathfrak{b}(\cdot,\cdot)$. Precisamente,

$$\mathfrak{b}(u,v) = \int_{\Gamma_1} v\beta u dS + \int_{\Omega} \langle \nabla v, A\nabla u\rangle + \int_{\Omega} v\Big(\langle b, \nabla u\rangle + uc + u\omega\Big) - \int_{\Omega}\int_{\Omega} vK(x,y)u(y)dy.$$

Nas proposições seguintes, vamos mostrar que estamos nas condições do Teorema de Lax-Milgram.

Proposição 33 (Continuidade da forma bilinear)**.** *Para todo $\omega \in \mathbb{R}$ existe uma constante $C := C(\omega) > 0$ tal que*

$$|\mathfrak{b}(u,v)| \leq C\|u\|_{W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)}\|v\|_{W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)} \tag{2.34}$$

para todo $u, v \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$. Isto é, a forma bilinear $\mathfrak{b}$ é contínua.

Demonstração. Sejam $u, v \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$. Então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} |\mathfrak{b}(u,v)| =& \left| \int_{\Gamma_1} v\beta u dS + \int_{\Omega} \langle \nabla v, A\nabla u\rangle + \int_{\Omega} v\Big(\langle b, \nabla u\rangle + uc + u\omega\Big) \right. \\ & \left. - \int_{\Omega}\left[v\int_{\Omega} K(x,y)u(y)dy\right] \right| \\ \leq& \left| \int_{\Gamma_1} v\beta u dS\right| + \left|\int_{\Omega} \langle \nabla v, A\nabla u\rangle\right| + \left|\int_{\Omega} v\Big(\langle b, \nabla u\rangle + uc + u\omega\Big)\right| \\ & + \left|\int_{\Omega}\left[v\int_{\Omega} K(x,y)u(y)dy\right]\right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{\Gamma_1} |v\beta u| dS + \int_{\Omega} |\langle \nabla v, A\nabla u\rangle| + \int_{\Omega} \Big| v\Big(\langle b, \nabla u\rangle + uc + u\omega\Big)\Big| \\
&\quad + \int_{\Omega} \Big| \int_{\Omega} vK(x,y)u(y)\Big| dy \\
&\leq \int_{\Gamma_1} |v||\beta||u| dS + \int_{\Omega} |\nabla v||A\nabla u| + \int_{\Omega} |v|\Big(|b||\nabla u| + |c+\omega||u|\Big) \\
&\quad + \int_{\Omega} \Big(\int_{\Omega} |K(x,y)||u(y)|\Big)|v| dy \\
&\leq \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \int_{\Gamma_1} |v||u| dS + \int_{\Omega} |\nabla v||A\nabla u| + \int_{\Omega} |v|\Big(|b||\nabla u| + \|c+\omega\|_{L^\infty(\Omega)}|u|\Big) \\
&\quad + \int_{\Omega} \Big(\int_{\Omega} |K(x,y)||u(y)|\Big)|v| dy.
\end{aligned}
$$

Agora definindo

$$
\|A\|_\infty := \max_{1\leq i,j\leq N}\{\|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}\},\ \|b\|_\infty := \max_{1\leq j\leq N}\{\|b_j\|_{L^\infty(\Omega)}\} \text{ e } \|K\|_\infty := \max_{x,y\in\Omega} K(x,y) \quad (2.35)
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
|\mathfrak{b}(u,v)| \leq& \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \int_{\Gamma_1} |v||u| dS + \|A\|_\infty \int_{\Omega} |\nabla v||\nabla u| + \|b\|_\infty \int_{\Omega} |v||\nabla u| \\
&+ \|c+\omega\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |v||u| + \|K\|_\infty \int_{\Omega} \Big(\int_{\Omega} |u(y)|\Big)|v| dy.
\end{aligned}
$$

Utilizando a desigualdade de Hölder e a observação 22, que diz que

$$
u\Big|_{\Gamma} := \mathcal{T}_{\Gamma} u \in L^p(\Gamma), \forall p \geq 1, \quad u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad \Gamma \in \{\Gamma_0, \Gamma_1, \partial\Omega\}
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
|\mathfrak{b}(u,v)| \leq& \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \|\mathcal{T}_{\Gamma_1} u\|_{L^2(\Gamma_1)} \|\mathcal{T}_{\Gamma_1} v\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|A\|_\infty \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ \|b\|_\infty \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|c+\omega\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ \|K\|_\infty \|u\|_{L^1(\Omega)} \|v\|_{L^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, sabendo que

$$
\|\mathcal{T}_{\Gamma_1} w\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathcal{T}_{\Gamma_1}\|_{\mathcal{L}(W^{1,2}(\Omega), L^2(\Gamma_1))} \|w\|_{W^{1,2}(\Omega)}
$$

para todo $w \in W^{1,2}(\Omega)$ e lembrando que

$$\|w\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \|w\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)},$$

obtemos a desigualdade

$$\|w\|_{W^{1,2}(\Omega)} \geq \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}.$$

Além disso, pela imersão contínua $W^{1,2} \hookrightarrow L^1(\Omega)$, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

para todo $w \in W^{1,2}(\Omega)$. Assim,

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{b}(u,v)| \leq & \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \|\mathcal{T}_{\Gamma_1}\|^2_{\mathcal{L}(W^{1,2}(\Omega),L^2(\Gamma_1))} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|A\|_\infty \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \\
& + \|b\|_\infty \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|c+\omega\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \\
& + \|K\|_\infty \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \\
= & \Big(\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \|\mathcal{T}_{\Gamma_1}\|^2_{\mathcal{L}(W^{1,2}(\Omega),L^2(\Gamma_1))} + \|A\|_\infty \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|b\|_\infty \\
& + \|c+\omega\|_{L^\infty(\Omega)} + \|K\|_\infty \Big) \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Tomando

$$\begin{aligned}
C := C(\omega) = & \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \|\mathcal{T}_{\Gamma_1}\|^2_{\mathcal{L}(W^{1,2}(\Omega),L^2(\Gamma_1))} + \|A\|_\infty \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \\
& + \|b\|_\infty + \|c+\omega\|_{L^\infty(\Omega)} + \|K\|_\infty > 0,
\end{aligned}$$

obtemos que

$$|\mathfrak{b}(u,v)| \leq C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Logo $\mathfrak{b}$ é contínuo. ■

Cabe observar aqui que ω não desempenha papel algum na continuidade de $\mathfrak{b}$. O mesmo não ocorre com relação a coercividade, como veremos a seguir.

Teorema 34. *(de Garding) Suponha que $\beta \geq 0$. Então, existe $\omega_0 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $\omega \geq \omega_0$, existe uma constante $\alpha := \alpha(\omega) > 0$ para a qual*

$$|\mathfrak{b}(u,u)| \geq \alpha \|u\|^2_{W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega). \tag{2.36}$$

Consequentemente, $\mathfrak{b}(u,u)$ *é coerciva no espaço de Hilbert* $W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$ *para todo* $\omega \geq \omega_0$.

Demonstração. Relembremos que o produto interno de $W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$ é dado por

$$\langle u,v\rangle_{W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)} := \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle + \int_\Omega uv, \quad \forall u,v \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega).$$

Como $\beta \geq 0$ e $u^2 \geq 0$, vale que

$$\int_{\Gamma_1} \beta u^2 dS \geq 0, \quad u \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega).$$

Então, para todo $u \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$, temos:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}(u,u) &= \int_{\Gamma_1} \beta u^2 dS + \int_\Omega \langle \nabla u, A\nabla u\rangle + \int_\Omega u\Big(\langle b,\nabla u\rangle + uc + u\omega\Big) \\
&\quad - \int_\Omega\int_\Omega uK(x,y)u(y)dy \\
\mathfrak{b}(u,u) &\geq \int_\Omega \langle \nabla u, A\nabla u\rangle + \int_\Omega u\Big(\langle b,\nabla u\rangle + uc + u\omega\Big) - \int_\Omega\int_\Omega uK(x,y)u(y)dy. \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

Vamos obter estimativas por baixo para cada uma das parcelas acima. Seja $\mu > 0$ a constante de elipticidade de $\mathcal{L}$ em Ω. Logo

$$\begin{aligned}
\langle \nabla u, A\nabla u\rangle &\geq \mu\langle \nabla u, \nabla u\rangle \\
\int_\Omega \langle \nabla u, A\nabla u\rangle &\geq \mu \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla u\rangle = \mu||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)}, \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

pois $u \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$. Além disso,

$$\left|\int_\Omega \langle b, \nabla u\rangle u\right| \leq \|b\|_\infty \int_\Omega |u||\nabla u|,$$

onde $\|b\|_\infty := \max\limits_{1\leq j\leq N}\{\|b_j\|_{L^\infty(\Omega)}\}$. Note que, para todo $\varepsilon > 0$, usando a desigualdade de Young,

$$|u||\nabla u| = \varepsilon|u|\frac{|\nabla u|}{\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon^2}{2}|u|^2 + \frac{|\nabla u|^2}{2\varepsilon^2}.$$

Definindo $\eta := \varepsilon^2$, vale que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \langle b, \nabla u\rangle u\right| &\le \|b\|_\infty \int_\Omega |u||\nabla u| \le \|b\|_\infty \int_\Omega \left(\frac{\eta}{2}|u|^2 + \frac{|\nabla u|^2}{2\eta}\right) \\ &= \frac{\|b\|_\infty}{2}\int_\Omega \left(\eta |u|^2 + \frac{|\nabla u|^2}{\eta}\right) \le \frac{\|b\|_\infty}{2}\left(\eta \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}}{\eta}\right).\end{aligned}$$

Em particular,

$$\int_\Omega \langle b, \nabla u\rangle u \ge -\frac{\|b\|_\infty}{2}\left(\eta \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}}{\eta}\right). \tag{2.39}$$

Além disso,

$$\int_\Omega (uc + \omega u)u = (c+\omega)\int_\Omega u^2 \ge (\omega + \inf_\Omega c)\int_\Omega u^2 = (\omega + \inf_\Omega c)\|u\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.40}$$

Por fim, pela imersão contínua $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, existe $C_1 > 0$, tal que $\|u\|_{L^1(\Omega)} \le C_1\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ e daí,

$$\left|\int_\Omega\int_\Omega uK(x,y)u(y)dy\right| \le \|K\|_\infty \|u\|^2_{L^1(\Omega)} \le \|K\|_\infty C_1^2 \|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Em particular,

$$-\|K\|_\infty C_1^2\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \le \int_\Omega\int_\Omega uK(x,y)u(y)dy. \tag{2.41}$$

Consequentemente, substituindo (2.38), (2.39), (2.40) e (2.41) em (2.37) temos que

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}(u,u) \ge & \mu\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\|b\|_\infty}{2}\left(\eta\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}}{\eta}\right) + (\omega + \inf_\Omega c)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \|K\|_\infty C_1^2 \|u\|^2_{W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)} \\ = & \left(\mu - \frac{\|b\|_\infty}{2\eta}\right)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\omega + \inf_\Omega c - \frac{\|b\|_\infty}{2}\eta\right)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \|K\|_\infty C_1^2\|u\|^2_{W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.42}$$

Escolhendo $\delta \in (0,\mu)$, seja $\eta > 0$ suficientemente grande tal que

$$\mu - \frac{\|b\|_\infty}{2\eta} > \mu - \delta > 0$$

e defina

$$\omega_0 := -\inf_{\Omega} c + \frac{\|b\|_\infty}{2\eta} + \mu - \delta.$$

Daí, para todo $\omega \geq \omega_0$ e $u \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}(u,u) &\geq (\mu - \delta)\left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \|K\|_\infty C_1^2 \|u\|^2_{W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)} \\
&= (\mu - \delta + \|K\|_\infty C_1^2)\|u\|^2_{W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\mathfrak{b}(u,u) \geq \left(\mu - \delta + \|K\|_\infty C_1^2\right)\|u\|_{W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)},$$

onde $\mu - \delta + \|K\|_\infty C_1^2 > 0$, o que conclui a prova. ■

Estamos agora em condições de estabelecer a existência de soluções fracas para (2.33) e consequentemente apresentar o conceito de operador resolvente. Para isto, utilizaremos o Teorema A.4, o Teorema de Lax-Milgram.

Daqui em diante vamos considerar ω_0 como no teorema acima de modo que a forma bilinear $\mathfrak{b}(\cdot,\cdot)$ associada ao problema (2.33) é coerciva para todo $\omega \geq \omega_0$.

Teorema 35. *Seja $\omega \geq \omega_0$. Então,* (2.33) *possui uma única solução fraca $u \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$.*

***Demonstração*.** Considere o espaço de Hilbert $W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$ e a forma bilinear

$$\mathfrak{b} : W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega) \times W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

associada a (2.33). Pela Proposição 5, $\mathfrak{b}(\cdot.\cdot)$ é contínua. Além disso, para todo $f \in L^2(\Omega)$, a aplicação $\langle f, \cdot\rangle_{L^2(\Omega)} : W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega fu$$

é linear e contínua. De fato, sejam $u, v \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$ e $A \in \mathbb{R}$, assim

$$\langle f, Au + v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(Au+v) = A\int_\Omega fu + \int_\Omega fv = A\langle f, u\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)},$$

o que mostra a linearidade. Para mostrar a continuidade, basta observar que

$$|\langle f, u\rangle_{L^2(\Omega)}| = \left|\int_\Omega fu\right| \leq \int_\Omega |fu| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Lembrando que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)},$$

definindo $0 \leq C := \|f\|_{L^2(\Omega)} < +\infty$, temos que

$$|\langle f, u\rangle_{L^2(\Omega)}| \leq C\|u\|_{W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)}.$$

Mostrando que de fato esta aplicação é um funcional linear contínuo definido em $W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$. Portanto, pelo Teorema de Lax-Milgram, para todo $f \in L^2(\Omega)$ existe um único $u = u_f \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$, tal que

$$\mathfrak{b}(u,v) = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega).$$

Em particular, a igualdade acima é válida para toda $v \in C^{\infty}_{\Gamma_0}(\Omega)$. Deve-se observar que, conforme construído, u é a única solução fraca de (2.20). Isso finaliza a demonstração.

■

2.5.2 Caso $\beta \in C(\Gamma_1)$ qualquer

Vamos retirar a condição $\beta \geq 0$ na garantia de existência de solução fraca para o problema (2.33), para isso vamos construir um outro problema relacionado ao problema (2.33), de modo que o "novo" β seja maior do que ou igual a zero. O próximo resultado nos auxiliará neste quesito.

Lema 36. *Considere Ω de classe C^2. Então existe $\omega_0 > 0$ suficientemente grande de modo que $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + \omega_0, \mathfrak{B}, \Omega)$ admite uma supersolução estrita positiva $h \in C^2(\overline{\Omega})$, com $h(x) > 0$, para todo $x \in \overline{\Omega}$.*

***Demonstração*.** A demonstração é análoga a do Lema 17, por isso a omitiremos aqui. ■

Vamos agora a construção do novo problema. Seja h como acima e consideremos o operador

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}h} := -div(A\nabla\cdot) + \langle b_h, \nabla\cdot\rangle + c_h\cdot - \int_{\Omega} K_h(x,y)\cdot dy$$

onde,

$$b_h := b - \frac{2}{h}A\nabla h, \quad c_h := \frac{\mathcal{L}h}{h} \quad \text{e} \quad K_h(x,y) := K(x,y)\frac{h(y)}{h(x)}.$$

Vale notar que $b_h \in (L^{\infty}(\Omega))^N$, $c_h \in L^{\infty}(\Omega)$. Por conveniência, chamaremos

$$\mathcal{L} := -div(A\nabla\cdot) + \langle b, \nabla\cdot\rangle + c\cdot, \quad \mathcal{L}_h := -div(A\nabla\cdot) + \langle b_h, \nabla\cdot\rangle + c_h\cdot.$$

Tomando $\mathcal{L}$ na forma (2.5), é possível mostrar que, dado $u \in W^{2,p}_{\Gamma_0}(\Omega)$ e definindo

$$v(x) := \frac{u(x)}{h(x)}, \quad x \in \Omega,$$

a igualdade

$$\mathcal{L}u = \mathcal{L}(hv) = h\mathcal{L}_h v$$

é satisfeita, basta repetir os passos como na demonstração do Teorema 14. Observando que

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} = \mathcal{L} - \int_\Omega K(x,y)\cdot dy \ \text{ e } \ \mathcal{L}_{\mathcal{I}h} = \mathcal{L}_h - \int_\Omega K_h(x,y)\cdot dy,$$

vale que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{I}}u = \mathcal{L}_{\mathcal{I}}(vh) &= \mathcal{L}(vh) - \int_\Omega K(x,y)h(y)v(y)dy = h\mathcal{L}_h v - h\int_\Omega K(x,y)\frac{h(y)}{h}v(y)dy \\ &= h\left(\mathcal{L}_h v - \int_\Omega K_h(x,y)v(y)dy\right) = h\mathcal{L}_{\mathcal{I}h}v. \end{aligned}$$

Além disso, denotaremos por

$$\mathfrak{B}_h := \begin{cases} \mathfrak{D} \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial \cdot}{\partial \nu} + \beta_h \text{ sobre } \Gamma_1, \end{cases}$$

onde $\beta_h := \mathfrak{B}h/h$ e $\mathfrak{D}$ é o operador de fronteira de Dirichlet. Assim,

$$\begin{aligned} \beta_h = \frac{\mathfrak{B}h}{h} &= \left(\frac{\partial h}{\partial \nu} + \beta h\right)\frac{1}{h} = \left(\frac{\partial(e^{M\psi(x)})}{\partial \nu} + \beta h\right)\frac{1}{h} \\ &= \left(Mh\frac{\partial \psi}{\partial \nu} + \beta h\right)\frac{1}{h} = M\frac{\partial \psi}{\partial \nu} + \beta \geq M\gamma + \beta > 0 \end{aligned}$$

para M suficientemente grande. Ou seja, escolhendo M desta maneira obtemos $\beta_h > 0$ sobre Γ_1. E como $\beta \in C(\Gamma_1)$ e $h \in C^2(\overline{\Omega})$, temos que $\beta_h \in C(\Gamma_1)$. Por fim, observamos que para todo $u \in C^1(\overline{\Omega})$,

$$\mathfrak{B}u = h\mathfrak{B}_h \frac{u}{h} \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Isso nos diz que, se tomarmos $u \in W^{2,p}(\Omega), p > N$, que seja solução forte de

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + \omega)u = f \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.43}$$

e realizarmos a mudança de variável $v := u/h$, então v é solução forte de

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}h} + \omega)v = \dfrac{f}{h} \text{ sobre } \Omega, \\ \mathfrak{B}_h v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.44}$$

Vale notar que a recíproca é verdadeira, ou seja, dada v solução de (2.44), obtemos que $u = hv$ é uma solução de (2.43) e isso estabelece uma bijeção entre as soluções fortes destes dois problemas. Como $\beta_h \geq 0$, podemos utilizar os resultados encontrados até aqui para $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ e aplicar em $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}h}, \mathfrak{B}, \Omega)$.

Vamos mostrar que também existe uma relação entre as soluções fracas destes problemas. Para isso, considere

$$\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_h : W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega) \times W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

as formas bilineares associadas a (2.20) e (2.44), respectivamente. Assim, para todos $u, v \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$,

$$\mathfrak{b}(u,v) := \int_\Omega \langle \nabla v, A\nabla u \rangle + \int_\Omega v \Big(\langle b, \nabla u \rangle + uc + u\omega \Big) + \int_{\Gamma_1} v\beta u dS - \int_\Omega \int_\Omega vK(x,y)u(y)dy$$

e

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_h(u,v) := & \int_\Omega \langle \nabla v, A\nabla u \rangle + \int_\Omega v \Big(\langle \tilde{b}_h, \nabla u \rangle + uc_h + u\omega \Big) + \int_{\Gamma_1} v\beta_h u dS \\ & - \int_\Omega \int_\Omega vK_h(x,y)u(y)dy \end{aligned}$$

cujas integrais sobre Γ_1 devem ser entendidas no sentido dos traços. Daí vale o seguinte resultado:

Lema 37. *Para todos $v, w \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$,*

$$\mathfrak{b}(hv, \frac{w}{h}) = \mathfrak{b}_h(v, w).$$

Demonstração. Sejam $v, w \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$. Então, por definição

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(hv, \frac{w}{h}) : = & \int_\Omega \langle \nabla \left(\frac{w}{h} \right), A\nabla hv \rangle + \int_\Omega \frac{w}{h} \Big(\langle b, \nabla hv \rangle + hvc + hv\omega \Big) + \int_{\Gamma_1} \left(\frac{w}{h} \right) \beta(hv) dS \\ & - \int_\Omega \int_\Omega \frac{w}{h} K(x,y)h(y)v(y)dy. \end{aligned}$$

Como $A\nabla(hv) = A(h\nabla v + v\nabla h) = hA\nabla v + vA\nabla h$ e $\nabla(w/h) = (h\nabla w - w\nabla h)/h^2$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}(hv, \frac{w}{h}) &= \int_\Omega \langle \frac{h\nabla w - w\nabla h}{h^2}, hA\nabla v + vA\nabla h\rangle + \int_\Omega \frac{w}{h}\Big(\langle b, h\nabla v + v\nabla h\rangle + hvc + hv\omega\Big) \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} \beta wv dS - \int_\Omega\int_\Omega \frac{w}{h} K(x,y)h(y)v(y)dy \\
&= \int_\Omega \langle \nabla w, A\nabla v\rangle + \int_\Omega \langle \frac{1}{h}\nabla w, vA\nabla h\rangle - \int_\Omega \langle \frac{1}{h} w\nabla h, A\nabla v\rangle - \int \langle \frac{w}{h^2}\nabla h, vA\nabla h\rangle \\
&\quad + \int_\Omega \frac{w}{h}\langle b, h\nabla v\rangle + \int_\Omega \frac{vw}{h}\langle b, \nabla h\rangle + \int_\Omega wv(c+w) + \int_{\Gamma_1} \beta wv dS \\
&\quad - \int_\Omega\int_\Omega \frac{w}{h} K(x,y)h(y)v(y)dy \\
&= \int_\Omega \langle \nabla w, A\nabla v\rangle + \int_\Omega \frac{v}{h}\langle \nabla w, A\nabla h\rangle - \int_\Omega \frac{w}{h}\langle \nabla h, A\nabla v\rangle - \int \frac{vw}{h^2}\langle \nabla h, A\nabla h\rangle \\
&\quad + \int_\Omega w\langle b, \nabla v\rangle + \int_\Omega \frac{vw}{h}\langle b, \nabla h\rangle + \int_\Omega wv(c+w) + \int_{\Gamma_1} \beta wv dS \\
&\quad - \int_\Omega\int_\Omega \frac{w}{h} K(x,y)h(y)v(y)dy.
\end{aligned}$$

E ainda

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \langle b, \nabla v\rangle w - \int_\Omega \langle A\nabla v, \nabla h\rangle \frac{w}{h} &= \int_\Omega \langle b, \nabla v\rangle w - \int_\Omega \langle \frac{A\nabla h}{h}, \nabla v\rangle w \\
&= \int_\Omega \langle b - \frac{A\nabla h}{h}, \nabla v\rangle w = \int_\Omega \langle b - 2\frac{A\nabla h}{h} + \frac{A\nabla h}{h}, \nabla v\rangle w \\
&= \int_\Omega \langle b - \frac{2}{h}A\nabla h, \nabla v\rangle w + \int_\Omega \langle A\nabla h, \nabla v\rangle \frac{w}{h} \\
&= \int_\Omega \langle b_h, \nabla v\rangle w + \int_\Omega \langle A\nabla h, \nabla v\rangle \frac{w}{h}.
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}(hv, \frac{w}{h}) &= \int_\Omega \langle \nabla w, A\nabla v\rangle + \int_\Omega \frac{v}{h}\langle \nabla w, A\nabla h\rangle + \int_\Omega \langle b_h, \nabla v\rangle w + \int_\Omega \langle A\nabla h, \nabla v\rangle \frac{w}{h} \\
&\quad - \int \frac{vw}{h^2}\langle \nabla h, A\nabla h\rangle + \int_\Omega \frac{vw}{h}\langle b, \nabla h\rangle + \int_\Omega wv(c+w) + \int_{\Gamma_1} \beta wv dS \\
&\quad - \int_\Omega\int_\Omega \frac{w}{h} K(x,y)h(y)v(y)dy. \qquad (2.45)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int_\Omega \langle A\nabla h, \nabla v\rangle \frac{w}{h} + \int_\Omega \frac{v}{h}\langle \nabla w, A\nabla h\rangle = \int_\Omega \langle \frac{A\nabla h}{h}, w\nabla v + v\nabla w\rangle = \int_\Omega \langle \frac{A\nabla h}{h}, \nabla(vw)\rangle$$

e

$$\int_\Omega \langle \frac{A\nabla h}{h}, \nabla(vw)\rangle - \int \frac{vw}{h^2}\langle \nabla h, A\nabla h\rangle = \int_\Omega \langle A\nabla h, \frac{h}{h^2}\nabla(vw) - \frac{vw}{h^2}\nabla h\rangle = \int_\Omega \langle A\nabla h, \nabla\left(\frac{vw}{h}\right)\rangle$$
$$= \int_\Omega div\left(\frac{vw}{h}A\nabla h\right) - \int_\Omega \frac{vw}{h} div(A\nabla h).$$

Pelo Teorema de Gauss para derivadas fracas (ver Teorema A.2)

$$\int_\Omega div\left(\frac{vw}{h}A\nabla h\right) = \int_{\partial\Omega} \langle \frac{vw}{h}A\nabla h, \eta\rangle dS,$$

onde η é o campo normal unitário exterior a $\partial\Omega$. Como $v, w \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$ e por hipótese $\langle A\nabla h, \eta\rangle = \partial h/\partial \nu$, temos

$$\int_\Omega \langle A\nabla h, \nabla\left(\frac{vw}{h}\right)\rangle = \int_{\partial\Omega} \langle \frac{vw}{h}A\nabla h, \eta\rangle dS - \int_\Omega \frac{vw}{h} div(A\nabla h)$$
$$= \int_{\Gamma_1} \frac{vw}{h}\frac{\partial h}{\partial \nu} dS - \int_\Omega \frac{vw}{h} div(A\nabla h).$$

Assim, substituindo a igualdade acima em (2.45), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}(hv, \frac{w}{h}) &= \int_\Omega \langle A\nabla v, \nabla w\rangle + \int_\Omega \langle b_h, \nabla v\rangle w - \int_\Omega div(A\nabla h)\frac{vw}{h} + \int_\Omega \frac{vw}{h}\langle b, \nabla h\rangle \\
&\quad + \int_\Omega wv(c+\omega) + \int_{\Gamma_1} \frac{vw}{h}\frac{\partial h}{\partial \nu} dS + \int_{\Gamma_1} \beta wv dS - \int_\Omega\int_\Omega \frac{w}{h}K(x,y)h(y)v(y)dy \\
&= \int_\Omega \langle A\nabla v, \nabla w\rangle + \int_\Omega \langle b_h, \nabla v\rangle w - \int_\Omega div(A\nabla h)\frac{vw}{h} + \int_\Omega \frac{vw}{h}\langle b, \nabla h\rangle \\
&\quad + \int_\Omega \frac{hvw}{h}(c+\omega) + \int_{\Gamma_1}\left(\frac{\partial h}{\partial \nu} + \beta h\right)\frac{vw}{h} dS - \int_\Omega\int_\Omega wK(x,y)\frac{h(y)}{h}v(y)dy \\
&= \int_\Omega \langle A\nabla v, \nabla w\rangle + \int_\Omega \langle b_h, \nabla v\rangle w + \int_\Omega \frac{\mathcal{L}h}{h}vw + \int_\Omega \omega vw + \int_{\Gamma_1} \beta_h vw dS \\
&\quad - \int_\Omega\int_\Omega wK_h(x,y)v(y)dy \\
&= \mathfrak{b}_h(v,w).
\end{aligned}$$

■

O próximo resultado, que é um corolário do resultado anterior, estabelece uma bijeção entre as soluções fracas de (2.43) e (2.44)

Teorema 38. *Seja h como no Lema 36. Então uma função $v \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$ é uma solução fraca de* (2.44) *se, e somente se, $u := hv \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$ é uma solução fraca de* (2.43).

Demonstração. Suponha que $v = u/h$ é uma solução fraca de (2.44). Assim, vale que,

$$\mathfrak{b}_h(v,\phi) = \langle \frac{f}{h}, \phi \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \phi \in C^{\infty}_{\Gamma_0}. \tag{2.46}$$

Pelo Lema 37, isso é equivalente a

$$\mathfrak{b}(u, \frac{\phi}{h}) = \mathfrak{b}(hv, \frac{\phi}{h}) = \langle f, \frac{\phi}{h} \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \phi \in C^{\infty}_{\Gamma_0}(\Omega).$$

Vamos usar a densidade de $C^{\infty}_{\Gamma_0}(\Omega)$ em $W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$ (ver Teorema A.11) para mostrar que

$$\mathfrak{b}(u,\psi) = \langle f, \psi \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \psi \in C^{\infty}_{\Gamma_0}(\Omega). \tag{2.47}$$

Assim, considere $\psi \in C^{\infty}_{\Gamma_0}(\Omega), \phi = h\psi \in C^{2}_{\Gamma_0}(\Omega) \subset W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$. Pela densidade de $C^{\infty}_{\Gamma_0}(\Omega)$ em $W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$ existe uma sequência $\phi_n \in C^{\infty}_{\Gamma_0}(\Omega), n \geq 1$ tal que

$$\phi_n \to h\psi \text{ em } W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega).$$

Usando (2.46) com ϕ_n temos,

$$\mathfrak{b}(u, \frac{\phi_n}{h}) = \langle f, \frac{\phi_n}{h} \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Fazendo $n \to \infty$ e usando a continuidade de $\mathfrak{b}$, obtemos (2.47). O que mostra que $u = hv \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$ é solução fraca de (2.43).

Agora, suponha que $u = hv$ é solução fraca de (2.43). Temos então que

$$\mathfrak{b}(u,\phi) = \mathfrak{b}(hv,\phi) = \langle f, \phi \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \phi \in C^{\infty}_{\Gamma_0}(\Omega). \tag{2.48}$$

Assim, dada $\phi \in C^{\infty}_{\Gamma_0}(\Omega)$, temos que $\phi/h \in C^{2}_{\Gamma_0}(\Omega) \subset W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$. Usando novamente a densidade de $C^{\infty}_{\Gamma_0}(\Omega)$ em $W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$, existe uma sequência $\psi_n \in C^{\infty}_{\Gamma_0}(\Omega)$ tal que

$$\psi_n \to \frac{\phi}{h} \text{ em } W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega).$$

Fazendo $n \to \infty$ e usando a continuidade de $\mathfrak{b}$, temos que

$$\mathfrak{b}(hv, \frac{\phi}{h}) = \langle f, \frac{\phi}{h} \rangle = \langle \frac{f}{h}, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in C^{\infty}_{\Gamma_0}(\Omega). \tag{2.49}$$

Pelo Lema 37, isso é equivalente a

$$\mathfrak{b}_h(v,\phi) = \langle \frac{f}{h}, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in C^{\infty}_{\Gamma_0}(\Omega).$$

Portanto v é solução fraca de (2.44).

■

O próximo resultado garante a unicidade da solução fraca associada a (2.43). No entanto observe que não se faz nenhuma exigência sobre o sinal de β.

Teorema 39. *Suponha que Ω seja de classe C^2. Então existe $\omega_0 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $\omega \geq \omega_0$ o problema* (2.43) *possui uma única solução fraca*

$$u := (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + \omega)^{-1} f \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega).$$

***Demonstração**.* Seja $h(x) = e^{M\psi(x)}$, com $M\gamma + \beta > 0$. Então pela escolha de h, $\beta_h \geq 0$. Assim pelo Teorema 35, existe $\omega_0 > 0$ tal que, para cada $\omega \geq \omega_0$ o problema (2.44) possui uma única solução fraca

$$v := (\mathcal{L}_{\mathcal{I}h} + \omega)^{-1} \frac{f}{h} \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega).$$

Pelo Teorema 38, a função

$$u := hv = h(\mathcal{L}_{\mathcal{I}h} + \omega)^{-1} \frac{f}{h} \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$$

nos fornece a única solução fraca de (2.43). ■

2.6 Construção do operador resolvente

Estamos interessados em utilizar o Teorema de Krein-Rutman em um espaço de Banach ordenado que possua um cone positivo associado cujo interior é não vazio. Isso nos ajudará a garantir a existência de autovalores para o problema (2.2).

O Teorema 39 garante a existência e unicidade de solução fraca do problema (2.33). Isso nos permite definir o operador $\overline{\mathfrak{R}} : L^2(\Omega) \longrightarrow W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$, que a cada $f \in L^2(\Omega)$, associa a $u = \overline{\mathfrak{R}} f \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$ a única solução fraca de (2.33). Note que $\overline{\mathfrak{R}}$ é linear e contínuo. De fato, consideremos $A, B \in \mathbb{R}, f, g \in L^2(\Omega)$ e $v \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$.Temos

$$\begin{aligned} \langle Af + Bg, \rangle_{L^2(\Omega)} &= A\langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)} + B\langle g, v\rangle_{L^2(\Omega)} = A\mathfrak{b}(\overline{\mathfrak{R}} f, v) + B\mathfrak{b}(\overline{\mathfrak{R}} g, v) \\ &= \mathfrak{b}(A\overline{\mathfrak{R}} f, v) + \mathfrak{b}(B\overline{\mathfrak{R}} g, v) = \mathfrak{b}(A\overline{\mathfrak{R}} f + B\overline{\mathfrak{R}} g, v) \end{aligned}$$

segue da unicidade da solução fraca provada acima que

$$\overline{\mathfrak{R}}(Af+Bg)=A\overline{\mathfrak{R}}f+B\overline{\mathfrak{R}}g$$

o que mostra a linearidade do operador $\overline{\mathfrak{R}}$.

Vamos mostrar a continuidade de $\overline{\mathfrak{R}}$. Para isso é suficiente mostrar que existe uma constante $D>0$ tal que

$$\|\overline{\mathfrak{R}}f\|_{W^{1,2}(\Omega)}\leq D\|f\|_{L^2(\Omega)},\quad \forall f\in L^2(\Omega).$$

Combinando o Teorema 34, a desigualdade de Hölder e a imersão $W^{1,2}(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned}\alpha\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}\leq \mathfrak{b}(u,u)=\int_\Omega fu &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)},\\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}C_1\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Logo, tomando $D:=C_1/\alpha$,

$$\|\overline{\mathfrak{R}}f\|_{W^{1,2}(\Omega)}=\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}\leq D\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Mostrando assim que $\overline{\mathfrak{R}}$ é contínua. Então, considerando a imersão compacta $\overline{J}:W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ (ver Teorema A.5), temos que $T:=\overline{J}\overline{\mathfrak{R}}:L^2(\Omega)\longrightarrow L^2(\Omega)$ é tal que $T\in\mathcal{K}(L^2(\Omega))$. Porém, conforme Exemplo 25, $int(P_{L^2(\Omega)})=\emptyset$. Por este motivo não podemos aplicar o Teorema de Krein Rutman no operador T.

Para contornar este problema, vamos mostrar que podemos definir um operador de forma análoga em um espaço de Banach ordenado cujo cone positivo associado possua interior não vazio. Para isso considere o espaço de Banach ordenado

$$C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega}):=\{u\in C^1(\overline{\Omega});\mathfrak{B}u=0 \text{ sobre } \partial\Omega\},$$

cujo cone positivo associado é

$$P=\{u\in C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega});u\geq 0 \text{ em } \overline{\Omega}\}.$$

Conforme Exemplo 26, temos que

$$int(P)=\left\{u\in P;u(x)>0,\forall x\in\Omega\cup\Gamma_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)<0,\forall x\in\Gamma_0\cap u^{-1}(0)\right\}. \tag{2.50}$$

O seguinte resultado nos ajudará a contornar este problema.

Teorema 40. *Dado $f \in L^p(\Omega), p \geq 2$, então qualquer solução fraca $u \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$ de*

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\mathcal{I}} u = f \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.51}$$

é solução forte, isto é, $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Em particular , se $f \in C(\overline{\Omega})$, então $u \in W^{2,p}(\Omega)$, para todo $p \geq 2$.

Demonstração. Seja $u \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$ uma solução fraca de (2.51). Logo u verifica, para todo $v \in C^{\infty}_{\Gamma_0}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla v\rangle + \int_\Omega \langle b, \nabla u\rangle v + \int_\Omega ucv + \int_{\Gamma_1} \beta uvdS - \int_\Omega v \int_\Omega K(x,y)u(y)dy = \int_\Omega fv.$$

Donde obtemos para todo $v \in C^{\infty}_{\Gamma_0}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla v\rangle + \int_\Omega \langle b, \nabla u\rangle v + \int_\Omega ucv + \int_{\Gamma_1} \beta uvdS = \int_\Omega \left(f + \int_\Omega K(x,y)u(y) \right) vdy.$$

Isso significa que u é solução fraca de

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f + \int_\Omega K(x,y)u(y) \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.52}$$

Uma vez que $\mathfrak{B}u = 0$, se $\tilde{f} := f + \int_\Omega K(x,y)u(y)dy$ pertencer a $L^p(\Omega)$, podemos utilizar o Teorema A.9 para garantir que $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Por hipótese, $f \in L^p(\Omega)$. Vamos mostrar que $\bar{K}(x) := \int_\Omega K(x,y)u(y)dy \in L^p(\Omega)$. De fato, temos que,

$$|\bar{K}(x)| = \left| \int_\Omega K(x,y)u(y)dy \right| \leq \int_\Omega |K(x,y)u(y)dy| \leq \|K\|_\infty \int_\Omega |u(y)|dy < \infty,$$

pois $u \in W^{1,2}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$. Logo, $\bar{K} \in L^\infty(\Omega)$ e, consequentemente, $\bar{K} \in L^p(\Omega)$, para todo $p \in [1, \infty]$. Isso mostra que $\tilde{f} \in L^p(\Omega)$. Portanto u satisfaz

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \tilde{f} \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $\tilde{f} \in L^p(\Omega), p \geq 2$. Pelo Teorema A.9 obtemos que $u \in W^{2,p}(\Omega)$. ■

Este teorema nos permite definir o operador $\mathfrak{R} : C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega}) \longrightarrow W^{2,p}(\Omega), p > N$, que a cada $f \in C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega}) \subset C(\overline{\Omega})$ associa a $u = \mathfrak{R}f \in W^{2,p}(\Omega)$ a única solução fraca de

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + \omega)u = f \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.53}$$

cuja existência é garantida pelo Teorema 39. Note que o operador $\mathfrak{R}$ é linear. A demonstração disso é análoga a feita para o operador $\overline{\mathfrak{R}}$ no início da seção. Assim, se considerarmos a imersão compacta $\mathcal{J} : W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega})$, $p > N$, podemos definir o operador

$$\mathfrak{R}_\omega := \mathcal{J}\mathfrak{R} : C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega}). \tag{2.54}$$

Uma vez que $\mathcal{J}$ é uma imersão compacta e $\mathfrak{R}$ é linear, temos que $\mathfrak{R}_\omega$ é um operador linear e compacto (ver [8, Proposition 6.3]). É sabido que se um operador é linear e compacto então ele é contínuo (ver, por exemplo, o comentário na página 68 de [24]), logo o operador $\mathfrak{R}_\omega$ é contínuo.

Como estamos interessados em aplicar o Teorema de Krein-Rutman em $\mathfrak{R}_\omega$, vamos mostrar que vale o seguinte

Teorema 41. *O operador $\mathfrak{R}_\omega$ definido em* (2.54)*, é linear, contínuo, compacto e fortemente positivo.*

Demonstração. A linearidade, a continuidade e a compacidade foram mostradas acima. Assim, resta apenas mostrar que $\mathfrak{R}_\omega$ é fortemente positivo, isto é

$$\mathfrak{R}_\omega(P \setminus \{0\}) \subset int(P),$$

onde P é o cone positivo associado a $C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega})$, cujo interior é dado por (2.50). Para isso, tome $f \in P \setminus \{0\}$. Temos que $f > 0$ e $u = \mathfrak{R}_\omega f$ é a única solução forte de (2.53). Observe que, sendo $f > 0$, devemos ter $u \neq 0$. Portanto, $0 \neq u$ é uma supersolução de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + \omega, \mathfrak{B}, \Omega)$. Por outo lado, pelo Lema 36, esta terna admite um supersolução $h \in C^2(\overline{\Omega})$, com $h(x) > 0$ em $\overline{\Omega}$. Então estamos nas condições do Corolário 20 o que significa que u deve satisfazer alguma das alternativas $A1, A2$ ou $A3$ do Teorema 14. Como $u \neq 0$, $A1$ não ocorre. Se $A3$ fosse verdadeira, teríamos que $u = mh$ com $m < 0$ uma constante. Em particular

$$0 < f = (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + \omega)u = m(\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + \omega)h < 0,$$

o que é absurdo. Logo u deve satisfazer a alternativa $A2$, o que equivale a dizer que $u \in int(P)$, mostrando assim que $\mathfrak{R}_\omega$ é fortemente positivo.

■

Observe que o princípio do máximo teve influência direta na positividade do operador resolvente. Pois basicamente verificar que $\mathfrak{R}_\omega$ é fortemente positivo equivale a mostrar que $u = \mathfrak{R}_\omega f$ satisfaz a alternativa $A2$ do Teorema 14, sempre que $f > 0$.

Observação 42. Devemos enfatizar a importância da positividade da aplicação $K(x,y)$ para o uso do teorema de Krein Rutman. É conhecido que sem esta condição não é satisfeita, a positividade do operador não pode ser garantida em geral (veja, por exemplo, [2]). Além disso, em [16] os autores apresentam algumas dificuldades encontradas nesse problema. O exemplo 1.1 deste trabalho nos mostra que a positividade do operador $\mathfrak{R}_\omega$ pode ser perdida se K puder assumir valores negativos. De fato, considere $\mathcal{L} = -\Delta$. É possível mostrar que $-\Delta$ possui uma sequência de autovalores $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq ...$, tais que $v_j, j = 1,2,...$, as autofunções associadas a λ_j, são uma base ortonormal de autofunções de $L^2(\Omega)$ (ver por exemplo, [14, Theorem 1], da seção 6.5.1). Além disso, conforme observação que segue abaixo deste mesmo teorema, as autofunções são tais que $v_j \in C^\infty(\Omega)$. Por fim, segue de regularidade elíptica que $v_j \in C^1(\overline{\Omega})$. A autofunção principal v_1 é positiva. Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \varepsilon v_1 \displaystyle\int_\Omega v_2(y)u(y)dy = v_1 + \delta v_2 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.55}$$

onde ε e δ são constantes reais. Observe que neste caso estamos supondo $K(x,y) = \varepsilon v_1(x)v_2(y)$. Onde K assume valores negativos, pois v_2 necessariamente muda de sinal, caso contrário, violaria a unicidade do autovalor principal. Além disso, $K \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$, uma vez que $v_1, v_2 \in C^\infty(\Omega)$.

Vamos procurar soluções para (2.55) do tipo $u = \alpha v_1 + \beta v_2$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ou seja, queremos encontrar α e β de modo que u assim tomada satisfaça a primeira equação de (2.55). Observe que a segunda equação é satisfeita pois $v_j, j = 1,2$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta v_j = \lambda_j v_j \text{ em } \Omega, \\ v_j = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ora, para que $u = \alpha v_1 + \beta v_2$ seja solução de (2.55), devemos ter

$$-\Delta(\alpha v_1 + \beta v_2) + \varepsilon v_1 \int_\Omega v_2(y)(\alpha v_1 + \beta v_2)(y)dy = v_1 + \delta v_2,$$
$$-\alpha\Delta v_1 - \beta\Delta v_2 + \varepsilon\alpha v_1 \int_\Omega v_2(y)v_1(y)dy + \varepsilon\beta v_1 \int_\Omega v_2(y)v_2(y)dy = v_1 + \delta v_2.$$

Como estamos tomando autofunções associadas a $(-\Delta, \mathfrak{D}, \Omega)$, normalizadas e ortogonais, temos que

$$\int_\Omega v_2(y)v_1(y)dy = 0 \text{ e } \int_\Omega v_2(y)v_2(y)dy = 1.$$

Assim temos,

$$\begin{aligned} \alpha\lambda_1 v_1 + \beta\lambda_2 v_2 + \varepsilon\beta v_1 &= v_1 + \delta v_2, \\ (\alpha\lambda_1 + \varepsilon\beta - 1)v_1 + (\beta\lambda_2 - \delta)v_2 &= 0. \end{aligned}$$

Donde obtemos

$$\begin{cases} \alpha\lambda_1 + \varepsilon\beta - 1 = 0, \\ \beta\lambda_2 - \delta = 0, \end{cases}$$

pois v_1 e v_2 são linearmente independentes. Portanto os valores de α e β são:

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_1}\left(1 - \frac{\delta}{\lambda_2}\varepsilon\right) \text{ e } \beta = \frac{\delta}{\lambda_2}.$$

Logo,

$$u_1 = \frac{1}{\lambda_1}\left(1 - \frac{\delta}{\lambda_2}\varepsilon\right)v_1 + \frac{\delta}{\lambda_2}v_2$$

é solução de (2.55).

Vamos mostrar agora que esta é a única solução de (2.55). Para isso, consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f - \varepsilon v_1 R \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.56}$$

onde $f := v_1 + \delta v_2$. Observe que, como $v_1, v_2 \in L^2(\Omega)$, então $f - \varepsilon v_1 R \in L^2(\Omega)$. Pelo Teorema 39, para cada $R \in \mathbb{R}$, o problema (2.56) possui uma única solução u_R. Vamos encontrar $R \in \mathbb{R}$ de modo que u_R seja solução de (2.55). Na verdade, queremos que $R = \int_\Omega v_2(y)u_R(y)dy$. Ora, sendo u_R solução de (2.56), para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ vale que

$$\int_\Omega -\Delta u_R\phi = \int_\Omega f\phi - \int_\Omega R\varepsilon v_1\phi \Leftrightarrow \int_\Omega \nabla u_R \nabla\phi = \int_\Omega f\phi - R\varepsilon\int_\Omega v_1\phi.$$

Em particular, tomando $\phi = v_2$, temos

$$\int_\Omega \nabla u_R\nabla v_2 = \int_\Omega f v_2 - R\varepsilon\int_\Omega v_1 v_2 \Leftrightarrow \int_\Omega \nabla u_R \nabla v_2 = \int_\Omega f v_2.$$

Como v_2 é autofunção de $(-\Delta,\mathfrak{D},\Omega)$ associada a λ_2, temos que $\displaystyle\int_\Omega \nabla u_R \nabla v_2 = \lambda_2 \int_\Omega u_R v_2$, daí

$$\int_\Omega \nabla u_R \nabla v_2 = \int_\Omega f v_2 \Leftrightarrow \int_\Omega u_R v_2 = \frac{1}{\lambda_2}\int_\Omega f v_2.$$

Assim, escolhendo $R = \dfrac{1}{\lambda_2}\displaystyle\int_\Omega f(y)v_2(y)dy$, temos que u_R é solução de (2.55). De fato, se u_R é solução de (2.56) para $R = \dfrac{1}{\lambda_2}\displaystyle\int_\Omega f(y)v_2(y)dy$, então u_R verifica em Ω,

$$\begin{aligned}-\Delta u_R = f - \varepsilon v_1 \frac{1}{\lambda_2}\int_\Omega f(y)v_2(y)dy &\Leftrightarrow -\Delta u_R + \varepsilon v_1 \frac{1}{\lambda_2}\int_\Omega f(y)v_2(y)dy = f\\ &\Leftrightarrow -\Delta u_R + \varepsilon v_1 \int_\Omega u_R(y)v_2(y)dy = f\end{aligned}$$

e $u_R = 0$ sobre $\partial\Omega$. Mostrando que u_R é solução de (2.55).

Agora, seja u_1 uma solução de (2.55). Vamos mostrar que u_1 é solução de (2.56) para $R = \dfrac{1}{\lambda_2}\displaystyle\int_\Omega f(y)v_2(y)dy$. Daí a unicidade da solução de (2.56) garante a unicidade da solução de (2.55). Temos que u_1 satisfaz

$$-\Delta u_1 + \varepsilon v_1 \int_\Omega u_1(y)v_2(y)dy = f \quad \text{em } \Omega.$$

De modo que para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$-\int_\Omega \Delta u_1 \phi + \varepsilon \int_\Omega v_1\phi \int_\Omega u_1(y)v_2(y)dy = \int_\Omega f\phi.$$

Em particular, tomando $\phi = v_2$, e fazendo integração por partes temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u_1 \nabla v_2 + \varepsilon \int_\Omega v_1 v_2 \int_\Omega u_1(y)v_2(y)dy &= \int_\Omega f v_2,\\ \int_\Omega \nabla u_1 \nabla v_2 = \lambda_2 \int_\Omega u_1 v_2 &= \int_\Omega f v_2,\\ \int_\Omega u_1 v_2 &= \frac{1}{\lambda_2}\int_\Omega f v_2.\end{aligned}$$

Isso significa que u_1 é solução de (2.56) para $R = \dfrac{1}{\lambda_2}\displaystyle\int_\Omega f v_2$ e consequentemente, u_1 é a única solução de (2.55).

Por fim, vamos encontrar $\varepsilon > 0$ suficientemente grande e $\delta > 0$ suficientemente pequenos, de modo que o lado direito da primeira equação de (2.55) seja positivo, mas que sua solução

u_1 seja negativa. Como v_1 satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta v_1 = \lambda_1 v_1 > 0 \text{ em } \Omega, \\ v_1 = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

então, v_1 deve satisfazer a alternativa $A2$ do Teorema 14. Pelo Teorema 16, existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que

$$v_1(x) \geq \tilde{\delta}\,\mathrm{dist}(x, \partial\Omega), \quad \forall x \in \Omega. \tag{2.57}$$

Lembrando que $v_2 \in C^1(\overline{\Omega})$, vale então que v_2 é Lipschitziana com constante de Lipschitz $M > 0$. Agora dado $x \in \Omega$, pela regularidade de Ω existe $y \in \partial\Omega$ tal que $\mathrm{dist}(x, \Omega) = |x - y|$. Portanto, lembrando que $v_2 = 0$ sobre $\partial\Omega$, temos que,

$$-v_2(x) \leq |v(x)| = |v(x) - v(y)| \leq M\,\mathrm{dist}(x, \partial\Omega), \quad \forall x \in \Omega. \tag{2.58}$$

De (2.57) e (2.58), temos que,

$$-\frac{1}{M} v_2(x) \leq \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \leq \frac{1}{\tilde{\delta}} v_1(x) \Leftrightarrow -\frac{\tilde{\delta}}{M} v_2(x) \leq v_1(x).$$

Tomando $\delta := \delta_0 = \dfrac{\tilde{\delta}}{M}$, vale que $v_1 + \delta_0 v_2(x) \geq 0$. Por fim, vamos encontrar $\varepsilon > 0$ suficientemente grande de maneira que

$$\frac{1}{\lambda_1}\left(1 - \frac{\delta_0}{\lambda_2}\varepsilon\right) v_1 + \frac{\delta_0}{\lambda_2} v_2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda_2}{\delta_0} v_1 + \lambda_1 v_2 \leq \varepsilon v_1.$$

Assim, é suficiente encontrar $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{\varepsilon}{2} v_1 \geq \frac{\lambda_2}{\delta_0} v_1 \text{ e } \frac{\varepsilon}{2} v_1 \geq \lambda_1 v_2. \tag{2.59}$$

Para a primeira desigualdade de (2.59) temos

$$\frac{\varepsilon}{2} v_1 \geq \frac{\lambda_2}{\delta_0} v_1 \Leftrightarrow \varepsilon \geq 2\frac{\lambda_2}{\delta_0}.$$

Para a segunda desigualdade de (2.59), basta lembrar que

$$v_2 \leq M\,\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \text{ e } v_1 \geq \tilde{\delta}\,\mathrm{dist}(x, \partial\Omega).$$

Portanto
$$v_1 \geq \frac{\tilde{\delta}}{M} v_2.$$
Tomando $\varepsilon \geq 2$, vale que $\varepsilon v_1/2 \geq v_1 \geq \tilde{\delta} v_2/M$. Daí, escolhendo $\varepsilon := \varepsilon_0 = \max\{2, 2\lambda_2/\tilde{\delta}\}$, (2.59) é satisfeito. Ou equivalentemente
$$\frac{1}{\lambda_1}\left(1 - \frac{\delta_0}{\lambda_2}\varepsilon_0\right) v_0 + \frac{\delta_0}{\lambda_2} v_1 \leq 0.$$

Este exemplo mostra que se $K(x,y) \leq 0$, o operador resolvente de (2.55), se existir, não será fortemente positivo.

2.7 Existência do autovalor principal

Conforme mencionado anteriormente, estamos interessados em garantir a existência de um autovalor para a terna $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ cuja autofunção associada possua sinal definido. Este resultado se mostrará importante na caracterização do princípio do máximo.

O resultado a seguir é uma consequência imediata do Teorema 29 combinado com o Teorema 41.

Corolário 43. *Para todo $\omega \geq \omega_0$ as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(a) $r(\mathfrak{R}_\omega) > 0$ *é um autovalor algebricamente simples de* $\mathfrak{R}_\omega$ *e existe* $\varphi_0 \in int(P)$ *tal que*
$$N[r(\mathfrak{R}_\omega)I - \mathfrak{R}_\omega] = span[\varphi_0]$$
onde I *representa a identidade de* $C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega})$;

(b) $r(\mathfrak{R}_\omega)$ *é o único autovalor real de* $\mathfrak{R}_\omega$ *de um autovetor* $P\backslash\{0\}$;

(c) $|\lambda| < r(\mathfrak{R}_\omega), \forall \lambda \in \sigma(\mathfrak{R}_\omega)\backslash\{r(\mathfrak{R}_\omega)\}$;

(d) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ *com* $\lambda > r(\mathfrak{R}_\omega)$, *o operador resolvente*
$$(\lambda I - \mathfrak{R}_\omega)^{-1} \in \mathfrak{L}(C^1_{\mathfrak{B}})$$
é fortemente positivo;

(e) $\sigma(\mathfrak{R}_\omega) = \sigma(\mathfrak{R}^*_\omega)$ *e* $r(\mathfrak{R}_\omega) = r(\mathfrak{R}^*_\omega)$ *é um autovalor simples de* $\mathfrak{R}^*_\omega$. *Além disso, ele é o único autovalor de* $r(\mathfrak{R}^*_\omega)$ *no círculo espectral*
$$|\varsigma| = r(\mathfrak{R}_\omega);$$

(f) Para todo $x \in P\backslash\{0\}$, a equação

$$r(\mathfrak{R}_\omega)u - \mathfrak{R}_\omega u = x$$

não admite solução $u \in C^1_{\mathfrak{B}}(\bar{\Omega})$.

Agora estamos em condições de garantir a existência e unicidade do autovalor principal de (2.2).

Teorema 44 (Existência e unicidade do autovalor)**.** *Considere o problema de autovalor* (2.2)*. Então valem as seguintes propriedades:*

(a) Existe um único autovalor principal de (2.2)*, que será denotado por*

$$\sigma_0 := \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega];$$

(b) A autofunção principal φ_0 é única a menos de uma multiplicação por um número real, satisfaz $\varphi_0 \in W^{2,\infty}(\Omega)$, é fortemente positiva e é uma solução forte de (2.2)*.*

(c) O autovalor principal é simples;

(d) O autovalor principal é dominante, no sentido de que

$$Re\tau \geq \sigma_0, \quad \forall \tau \in \Sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega). \tag{2.60}$$

Em particular

$$\tau > \sigma_0 \text{ se } \tau \in \mathbb{R} \cap [\Sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)\backslash\{\sigma_0\}].$$

Demonstração. (a) A existência é garantida pelo Corolário 43. De fato, por este resultado, sabemos que existe $r(\mathfrak{R}_\omega) > 0$ autovalor de $\mathfrak{R}_\omega$, cuja autofunção associada é $\varphi_0 \in int(P) \subset C^1_{\mathfrak{B}}(\bar{\Omega})$, isto é, $\varphi_0 > 0$. Donde temos,

$$\mathfrak{R}_\omega \varphi_0 = r(\mathfrak{R}_\omega)\varphi_0.$$

Logo a função φ_0 verifica:

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + \omega)\varphi = \dfrac{1}{r(\mathfrak{R}_\omega)}\varphi \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}\varphi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Teorema 40, $\varphi_0 \in W^{2,p}(\Omega), p > N$, é uma solução forte de (2.43). Como

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}+\omega)\varphi_0 = \frac{1}{r(\mathfrak{R}_\omega)}\varphi_0 \Longleftrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{I}}\varphi_0 = (\frac{1}{r(\mathfrak{R}_\omega)}-\omega)\varphi_0,$$

vale que

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\mathcal{I}}\varphi_0 = \left(\dfrac{1}{r(\mathfrak{R}_\omega)}-\omega\right)\varphi_0 \text{ em } \Omega \\ \mathfrak{B}\varphi_0 = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

E portanto, o valor $\tau := 1/(r(\mathfrak{R}_\omega)-\omega) \in \mathbb{R}$ é um valor que satisfaz (2.2) com autofunção positiva φ_0.

Para a unicidade, suponhamos que existam $\sigma_1,\sigma_2 \in \mathbb{R}$ e $\varphi_1,\varphi_2 \in P\backslash\{0\}$ tais que

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\mathcal{I}}\varphi_j = \sigma_j\varphi_j \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}\varphi_j = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

para $j = 1,2$. Então, para $\omega \geq \max\{\omega_0,\sigma_1,\sigma_2\}$, temos que

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}}+\omega)\varphi_j = (\sigma_j+\omega)\varphi_j > 0 \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}\varphi_j = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e daí

$$\mathfrak{R}_\omega\varphi_j = \frac{1}{\sigma_j+\omega}\varphi_j.$$

Segue do Corolário 43 item (b), que

$$\begin{aligned} r(\mathfrak{R}_\omega) = \frac{1}{\sigma_1+\omega} &= \frac{1}{\sigma_2+\omega} \\ \sigma_1+\omega &= \sigma_2+\omega \\ \sigma_1 &= \sigma_2, \end{aligned}$$

o que mostra a unicidade do autovalor principal.

(b) Vamos mostrar a unicidade da autofunção principal. Pelo item (a) sabemos que existe uma autofunção principal positiva φ_0 associada a σ_0. Agora, suponha que exista outra autofunção φ_1 associada a σ_0. Para $j = 0,1$ temos

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\mathcal{I}}\varphi_j = \sigma_0\varphi_j \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}\varphi_j = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo, para $\omega \geq \omega_0$ suficientemente grande e $j = 0,1$ temos que

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + \omega)\varphi_j = (\sigma_0 + \omega)\varphi_j > 0 \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}\varphi_j = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde obtemos

$$\mathfrak{R}_\omega\varphi_j = \frac{1}{\sigma_0 + \omega}\varphi_j.$$

Como $\varphi_0 > 0$, pelo Corolário 43 item (b), temos que

$$r(\mathfrak{R}_\omega) = \frac{1}{\sigma_0 + \omega},$$

e portanto

$$\mathfrak{R}_\omega\varphi_j = r(\mathfrak{R}_\omega)\varphi_j, j = 0,1.$$

Consequentemente, graças ao item (a) do Corolário 43,

$$N[r(\mathfrak{R}_\omega)I - \mathfrak{R}_\omega] = span[\varphi_1] = span[\varphi_0].$$

Logo, deve existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi_1 = \lambda\varphi_0,$$

o que mostra que a autofunção principal é única a menos de multiplicação por constante.

A regularidade da autofunção principal e a positividade forte seguem diretamente do Teorema 40 e Teorema 41.

(c) Para mostrar a simplicidade do autovalor, argumentamos por contradição. Assim, seja $\varphi \in P\backslash\{0\}$ uma autofunção principal de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ e suponha que

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \sigma_0)u = \varphi \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.61}$$

admite uma solução fraca $u \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$. Tome $\omega \geq \omega_0$ tal que $\omega + \sigma_0 > 0$. Observe que, se tomamos $\omega \geq \omega_0$ e $u \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$ solução fraca de (2.8), então u também é solução fraca de

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + \omega)u = (\omega + \tau)u + \varphi \in C^1_{\mathfrak{B}}(\bar{\Omega}) \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e pelo Teorema 40, elas devem ser soluções fortes de (2.8). Assim,

$$u = (\omega + \sigma_0)\mathfrak{R}_\omega u + \mathfrak{R}_\omega \varphi. \tag{2.62}$$

Por outro lado, como φ é autofunção, vale

$$\mathfrak{R}_\omega \varphi = \frac{1}{\sigma_0 + \omega}\varphi.$$

Pelo Corolário 43 itens (a) e (b), temos que

$$\mathfrak{R}_\omega \varphi = r(\mathfrak{R}_\omega)\varphi = \frac{1}{\sigma_0 + \omega}\varphi,$$

agora, dividindo (2.62) por $\omega + \sigma_0$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_0 + \omega}u &= \mathfrak{R}_\omega u + \frac{1}{(\sigma_0 + \omega)^2}\varphi, \\ r(\mathfrak{R}_\omega)u - \mathfrak{R}_\omega u &= r^2(\mathfrak{R}_\omega)\varphi, \\ (r(\mathfrak{R}_\omega)I - \mathfrak{R}_\omega)u &= r^2(\mathfrak{R}_\omega)\varphi. \end{aligned}$$

Consequentemente $r^2(\mathfrak{R}_\omega)\varphi \in Im[r(\mathfrak{R}_\omega)I - \mathfrak{R}_\omega]$. Isso significa que u é uma solução fraca satisfazendo a equação

$$(r(\mathfrak{R}_\omega)I - \mathfrak{R}_\omega)u = r^2(\mathfrak{R}_\omega)\varphi.$$

Isso contradiz o Corolário 43 item (f). Logo σ_0 deve ser um autovalor simples de (2.2).

(d) Vamos mostrar agora que

$$Re\tau \geq \sigma_0, \quad \forall \tau \in \Sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega). \tag{2.63}$$

Tomemos então $\tau \in \Sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)\backslash\{\sigma_0\}$. Note que, para todo $\omega \geq \omega_0$

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + \omega)\varphi &= (\tau + \omega)\varphi, \\
\varphi &= (\tau + \omega)\mathfrak{R}_\omega \varphi, \\
\mathfrak{R}_\omega \varphi &= \frac{1}{\tau + \omega}\varphi, \\
\frac{1}{\tau + \omega} &\in \sigma(\mathfrak{R}_\omega)\backslash\{0\},
\end{aligned}
$$

e daí, pelo Corolário 43 item (c), vale que

$$\left|\frac{1}{\tau + \omega}\right| < r(\mathfrak{R}_\omega) = \frac{1}{\sigma_0 + \omega}, \forall \omega \geq \omega_0.$$

Então, para todo $\omega \geq \omega_0$

$$
\begin{aligned}
(Re\tau + \omega)^2 + (Im\tau)^2 &> (\sigma_0 + \tau)^2, \\
(Re\tau)^2 + 2Re\tau\omega + \omega^2 + (Im\tau)^2 - \sigma_0^2 - 2\sigma_0\omega - \omega^2 &> 0, \\
(Re\tau)^2 + 2\omega(Re\tau - \sigma_0) + (Im\tau)^2 - \sigma_0^2 &> 0, \\
\frac{(Re\tau)^2}{\omega} + 2(Re\tau - \sigma_0) + \frac{(Im\tau)^2 - \sigma_0^2}{\omega} &> 0.
\end{aligned}
$$

Tomando $\omega \to +\infty$ obtemos $Re\tau \geq \sigma_0$. Isso prova (2.63). Se $\tau \in \mathbb{R}, \tau = Re\tau, Im\tau = 0$ e como vimos

$$\tau^2 + 2\omega(\tau - \sigma_0) - \sigma_0^2 > 0.$$

Pelo que acabamos de mostrar $Re\tau = \tau \geq \sigma_0$. Resulta da desigualdade acima que

$$
\begin{aligned}
2\omega(\tau - \sigma_0) &> 0, \\
\tau &> \sigma_0,
\end{aligned}
$$

pois $2\omega > 0$, isso finaliza a prova.

■

Capítulo 3

Caracterização do Princípio do Máximo e Aplicações

Este capítulo consiste em relacionar o princípio do máximo com a existência de um autovalor principal positivo e também com a existência de uma supersolução estrita de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$.

Dividimos este capítulo da seguinte maneira: primeiro apresentamos e demonstramos uma caracterização do princípio do máximo para operadores lineares elípticos de segunda ordem com termo não local. Em seguida veremos uma série de consequências deste resultado, dentre elas, propriedades de monotonia do autovalor principal com respeito a operador de fronteira, domínio e termo integral. Também obtemos um resultado de garantia de não existência de soluções e uma caracterização pontual do autovalor principal. Por último, como consequência da caracterização do princípio do máximo junto com o teorema da função implícita obtemos um resultado que garante existência e unicidade de soluções de um dado problema.

Lembremos que uma função $h \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$, é dita supersolução estrita de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ se

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\mathcal{I}} h \geq 0 \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B} h \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

com uma das desigualdades estrita. Apresentamos outras definições que serão fundamentais.

Definição 45. Dizemos que a terna $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$:

- Satisfaz o princípio do máximo forte se qualquer supersolução $h \in W^{2,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, $p > N$, de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ é fortemente positiva, isto é,

$$h(x) > 0, \forall x \in \Omega \cup \Gamma_1, \quad \text{e} \quad \frac{\partial h}{\partial \nu}(x) < 0, \forall x \in h^{-1}(0) \cap \Gamma_0;$$

- Satisfaz o princípio do máximo se qualquer supersolução $h \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$, de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ satisfaz $h \geq 0$.

Lembre-se que a existência de um autovalor principal nos fornece uma função que não muda de sinal. O seguinte resultado estabelece condições necessárias e suficientes para a validade do princípio do máximo.

Teorema 46 (Caracterização do Princípio do Máximo)**.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\sigma_0 := \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega] > 0$*;*

ii) $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ *possui uma supersolução estrita positiva* $h \in W^{2,p}(\Omega), p > N$*;*

iii) $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ *satisfaz o princípio do máximo forte;*

iv) $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ *satisfaz o princípio do máximo;*

v) O operador resolvente do problema linear

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\mathcal{I}} u = f \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B} u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

denotado por $\mathfrak{R}_0 : C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega})$*, está bem definido e é fortemente positivo.*

Demonstração. $i) \Rightarrow ii)$ Suponha que $\sigma_0 > 0$ e seja $h = \varphi_0$ onde $\varphi_0 > 0$ é uma autofunção principal associada a σ_0. Então, $\mathfrak{B}h = 0$ sobre $\partial\Omega$ e

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} h = \sigma_0 h > 0 \text{ em } \Omega.$$

Pelos Teoremas 38 e 40, $h \in W^{2,p}(\Omega)$ para todo $p > N$. Assim, $h = \varphi_0$ é uma supersolução estrita positiva estrita de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ e, portanto, $i)$ implica em $ii)$.

$ii) \Rightarrow iii)$ Suponha que $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ possua uma supersolução estrita positiva $h \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$, e seja $u \in W^{2,p}(\Omega) \backslash \{0\}, p > N$, uma supersolução de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$. Observe que estamos sob as hipóteses do Corolário 20. Então, dado $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$ uma supersolução de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$, temos que esta função deve cumprir uma das alternativas $A1, A2$ ou $A3$. Como, por hipótese, $u \neq 0$, a Alternativa $A1$ não pode ser satisfeita. Como h é supersolução estrita positiva, u não pode satisfazer a Alternativa $A3$. De fato, se u satisfizesse a Alternativa $A3$, então existiria uma constante $m < 0$ tal que $u = mh$. Daí, valeria

$$0 \leq \mathcal{L}_{\mathcal{I}} u = m \mathcal{L}_{\mathcal{I}} h < 0,$$

se $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}h > 0$, ou

$$0 \leq \mathfrak{B}u = m\mathfrak{B}h < 0,$$

se $\mathfrak{B}h > 0$. Pois h é supersolução estrita de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$. Em qualquer um dos casos temos uma contradição. Portanto u não pode satisfazer a Alternativa $A3$. Assim deve valer a Alternativa $A2$ que equivale dizer que u é fortemente positiva. Como u foi tomada arbitrária, $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ satisfaz o princípio do máximo forte.

iii) $\Rightarrow$ *iv)* Se $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ satisfaz o princípio do máximo forte, então, qualquer supersolução $u \in W^{2,p}(\Omega)\backslash\{0\}, p > N$, de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ satisfaz

$$u(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega \cup \Gamma_1, \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) < 0, \quad \forall x \in u^{-1}(0) \cap \Gamma_0,$$

e sendo

$$\mathfrak{B}u \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

vale que $u \geq 0$ sobre Γ_0. Logo temos que

$$u(x) \geq 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Isso significa que $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ satisfaz o princípio do máximo.

iv) $\Rightarrow$ *i)* Suponha que $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ satisfaz o princípio do máximo e suponha por absurdo que $\sigma_0 \leq 0$. Então, uma autofunção principal $\varphi_0 > 0$ de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ satisfaz:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}}(-\varphi_0) = -\sigma_0\varphi_0 \geq 0 \text{ em } \Omega,$$

e $\mathfrak{B}(-\varphi_0) = 0$ sobre $\partial\Omega$. Assim, $-\varphi_0$ é uma supersolução de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$. Pelo Corolário 20, devemos ter $-\varphi_0 \geq 0$, ou seja, $\varphi_0 \leq 0$. Mas isso contradiz o fato de $\varphi_0 > 0$. Esse absurdo surgiu do fato de supormos $\sigma_0 \leq 0$. Logo, se $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ satisfaz o princípio do máximo devemos ter $\sigma_0 > 0$.

i) $\Rightarrow$ *v)* Seja $f \in C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega})$. Considere $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$, uma solução de

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\mathcal{I}}u = f \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

Escolha $\omega > \max\{\omega_0, 0\}$. Assim, as seguintes equivalências ocorrem em Ω:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + \omega)u &= \omega u + f \\
\omega \mathfrak{R}_\omega u + \mathfrak{R}_\omega f &= u \\
u - \omega \mathfrak{R}_\omega u &= \mathfrak{R}_\omega f \\
\frac{u}{\omega} - \mathfrak{R}_\omega u &= \frac{\mathfrak{R}_\omega f}{\omega} \\
\left(\frac{1}{\omega} - \mathfrak{R}_\omega\right) u &= \frac{1}{\omega} \mathfrak{R}_\omega f.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Como $\sigma_0 > 0$,

$$r(\mathfrak{R}_\omega) = \frac{1}{\sigma_0 + \omega} < \frac{1}{\omega}.$$

Assim, pelo Corolário 43 item (d), o operador $(1/\omega - \mathfrak{R}_\omega)^{-1} \in \mathfrak{L}(C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega}))$ está bem definido e é fortemente positivo. Tendo em vista (3.4), dizer que u é solução de (3.3) é equivalente a

$$u = \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{\omega} - \mathfrak{R}_\omega\right)^{-1} \mathfrak{R}_\omega f.$$

Logo, pela forma que foi construído, devemos ter

$$\mathfrak{R}_0 := \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{\omega} - \mathfrak{R}_\omega\right)^{-1} \mathfrak{R}_\omega.$$

Pelo Teorema 41, $\mathfrak{R}_\omega$ é fortemente positivo. Ora, sendo $\mathfrak{R}_0$ a composição de dois operadores fortemente positivos, ele é também fortemente positivo. Isso conclui a implicação de $i)$ em $v)$.

$v) \Rightarrow ii)$ Suponha que $\mathfrak{R}_0$ esteja bem definido e seja fortemente positivo, então dada $f \in C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega}), f > 0$, seja u a única solução de

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\mathcal{I}} u = f \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B} u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sendo $\mathfrak{R}_0$ fortemente positiva, segue que $u(x) > 0$ em Ω. O que nos fornece uma supersolução estrita de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$.

$\blacksquare$

3.1 Propriedades de monotonia do autovalor principal

Nesta seção estamos interessados em apresentar algumas propriedades de monotonia do autovalor principal. Vamos estudar, por exemplo, qual a relação do autovalor principal de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ com o autovalor de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega_0)$, onde Ω_0 é um subdomínio próprio de Ω; Qual a relação do autovalor de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_1], \Omega)$ e $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_2], \Omega)$, onde $\mathfrak{B}[\beta_1]$ e $\mathfrak{B}[\beta_2]$, são operadores lineares de fronteira como $\mathfrak{B}$ mudando a função $\beta \in C(\Gamma_1)$ por β_1 e β_2, respectivamente, com $\beta_1, \beta_2 \in C(\Gamma_1)$ e $\beta_1 \leq \beta_2$. Estes e outros questionamentos serão respondido aqui. Para facilitar nosso estudo, vamos introduzir algumas definições e notações.

Dado um subdomínio próprio Ω_0 de Ω de classe C^2, com

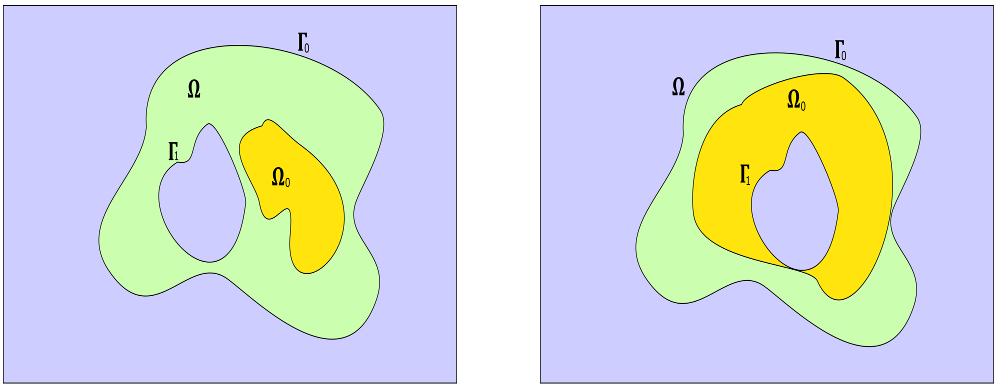
$$\operatorname{dist}(\Gamma_1, \partial\Omega_0 \cap \Omega) > 0, \tag{3.5}$$

denotaremos por

$$\mathfrak{B}[\Omega_0]\varphi := \begin{cases} \varphi \text{ em } \partial\Omega_0 \cap \Omega, \\ \mathfrak{B}\varphi \text{ sobre } \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

Observe que esse operador separa a fronteira de Ω_0 em dois subconjuntos abertos e fechados $\partial\Omega_0 \cap \Gamma_0$ e $\partial\Omega_0 \cap \Gamma_1$ de $\partial\Omega_0$. A hipótese (3.5) garante que em cada componente de $\partial\Omega_0$, $\mathfrak{B}[\Omega_0]$ assuma apenas uma das condições de fronteira: Dirichlet ou mista.

Quando $\Omega_0 = \Omega$, denotaremos $\mathfrak{B}[\Omega_0]$ simplesmente por $\mathfrak{B}$.



(a) $\operatorname{dist}(\Gamma_1, \partial\Omega_0 \cap \Omega) > 0$ (b) $\operatorname{dist}(\Gamma_1, \partial\Omega_0 \cap \Omega) = 0$

Figura 3.1 Exemplos de subdomínios

Na figura esquerda acima temos um exemplo de um subdomínio onde o operador de fronteira $\mathfrak{B}[\Omega_0]$ pode ser bem definido, enquanto que à direita isso não pode ocorrer, visto que $\operatorname{dist}(\Gamma_1, \partial\Omega_0 \cap \Omega) = 0$ e isso faz com que $\mathfrak{B}[\Omega_0]$ possa assumir dois valores distintos em um mesmo ponto. Observe que se $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$, então temos que $\partial\Omega_0 \subset \Omega$ e consequentemente,

$$\partial\Omega_0 \cap \Omega = \partial\Omega_0 \text{ e } \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega = \emptyset.$$

Neste caso, $\mathfrak{B}[\Omega_0]\varphi = \varphi$. Em outras palavras, se $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$, então o operador $\mathfrak{B}[\Omega_0]$ se torna o operador de Dirichlet. Além disso, denotaremos por $\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\Omega_0], \Omega_0]$ o autovalor principal do problema linear de valor de fronteira

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\mathcal{I}}\varphi = \lambda\varphi \text{ em } \Omega_0, \\ \mathfrak{B}[\Omega_0]\varphi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Como já foi visto anteriormente, o autovalor principal do problema (2.2), será denotado por

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega] := \sigma_0.$$

Se $\Gamma_1 \neq \emptyset$ e no operador $\mathfrak{B}$ tomarmos uma outra função $\beta_1 \in C(\Gamma_1)$ no lugar de β, indicaremos por

$$\mathfrak{B}[\beta_1]\varphi := \begin{cases} \varphi \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} + \beta_1\varphi \text{ sobre } \Gamma_1. \end{cases} \tag{3.8}$$

Quando $\beta_1 = \beta$, denotaremos $\mathfrak{B}[\beta]$ simplesmente por $\mathfrak{B}$.

Se $\Gamma_1 \neq \emptyset$ e tomarmos em $\mathfrak{B}$ uma outra função $\beta_1 \in C(\Gamma_1)$ no lugar de β e considerarmos um subdomínio próprio Ω_0 de Ω, definimos

$$\mathfrak{B}[\beta_1, \Omega_0]\varphi := \begin{cases} \varphi \text{ sobre } \partial\Omega_0 \cap \Omega, \\ \mathfrak{B}[\beta_1]\varphi \text{ sobre } \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.9}$$

Como consequência imediata do Teorema 44, obtemos o seguinte resultado, que desempenha um papel fundamental nesta seção.

Lema 47. *Considere $s \in \mathbb{R}$ e $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + s, \mathfrak{B}, \Omega)$. Se denotarmos por $\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + s, \mathfrak{B}, \Omega]$ o autovalor principal de*

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + s)\varphi = \lambda\varphi \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}\varphi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

então vale que

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + s, \mathfrak{B}, \Omega] = \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega] + s.$$

Demonstração. Seja φ_s a autofunção principal associada ao autovalor $\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}+s,\mathfrak{B},\Omega]$. Vale que,

$$\begin{cases}(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}+s)\varphi_s=\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}+s,\mathfrak{B},\Omega]\varphi_s \text{ em } \Omega,\\ \mathfrak{B}\varphi_s=0 \text{ sobre } \partial\Omega,\end{cases}$$

e consequentemente

$$\begin{cases}\mathcal{L}_{\mathcal{I}}\varphi_s=(\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}+s,\mathfrak{B},\Omega]-s)\varphi_s \text{ em } \Omega,\\ \mathfrak{B}\varphi_s=0 \text{ sobre } \partial\Omega,\end{cases}$$

como $\varphi_s>0$ e satisfaz o problema de autovalor (2.2), segue da unicidade do autovalor principal, garantida pelo Teorema 44, que

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}},\mathfrak{B},\Omega]=\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}+s,\mathfrak{B},\Omega]-s,$$

isto é

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}+s,\mathfrak{B},\Omega]=\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}},\mathfrak{B},\Omega]+s.$$

■

Os seguintes resultados são consequências do Lema 47 e Teorema 46 e nos apresentam algumas propriedades de monotonia do autovalor principal. O primeiro estabelece a dominância do autovalor $\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}},\mathfrak{B},\Omega]$ sob o autovalor $\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}},\mathfrak{D},\Omega]$.

Proposição 48. *Suponha que* $\Gamma_1\neq\emptyset$. *Então*

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}},\mathfrak{B},\Omega]<\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}},\mathfrak{D},\Omega].$$

Demonstração. Vamos mostrar que o autovalor principal de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}-\sigma_0,\mathfrak{B},\Omega)$ satisfaz $\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}-\sigma_0,\mathfrak{B},\Omega]>0$. Pela caracterização do princípio do máximo, é suficiente mostrar que $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}-\sigma_0,\mathfrak{D},\Omega)$ admite uma supersolução estrita positiva. Assim, seja $\varphi_{\mathfrak{B}}$ a autofunção associada ao autovalor $\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}},\mathfrak{B},\Omega]:=\sigma_0$. Sabemos, do Teorema 44, que $\varphi_{\mathfrak{B}}$ é fortemente positiva. Assim, para cada $x\in\Omega\cup\Gamma_1$, $\varphi_{\mathfrak{B}}(x)>0$ e sobre Γ_0, $\varphi_{\mathfrak{B}}=0$, ou seja

$$\varphi_{\mathfrak{B}}>0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Além disso, em Ω, temos que $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}\varphi_{\mathfrak{B}}=\sigma_0\varphi_{\mathfrak{B}}$. Daí,

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}-\sigma_0)\varphi_{\mathfrak{B}}=0 \quad \text{em } \Omega.$$

Portanto, como $\varphi_{\mathfrak{B}}$ satisfaz

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \sigma_0)\varphi_{\mathfrak{B}} = 0 \text{ sobre } \Omega, \\ \mathfrak{D}\varphi_{\mathfrak{B}} = \varphi_{\mathfrak{B}} > 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \sigma_0, \mathfrak{D}, \Omega)$ admite uma supersolução estrita positiva. Consequentemente, pelo Teorema 46 vale que o autovalor associado a $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \sigma_0, \mathfrak{D}, \Omega)$ satisfaz

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \sigma_0, \mathfrak{D}, \Omega] > 0.$$

Pelo Lema 47,

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \sigma_0, \mathfrak{D}, \Omega] = \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{D}, \Omega] - \sigma_0.$$

Logo

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{D}, \Omega] > \sigma_0 := \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega].$$

■

O próximo resultado estabelece a monotonia do autovalor principal com respeito ao domínio.

Proposição 49. *Seja Ω_0 um subdomínio próprio de Ω de classe C^2 satisfazendo* (3.5). *Então*

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega] < \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\Omega_0], \Omega_0].$$

***Demonstração*.** Seja $\varphi_{\mathfrak{B}}$ a autofunção associada a $\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega]$. Logo $\varphi_{\mathfrak{B}}$ satisfaz

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\mathcal{I}}\varphi_{\mathfrak{B}} = \sigma_0\varphi_{\mathfrak{B}} \text{ sobre } \Omega, \\ \mathfrak{B}\varphi_{\mathfrak{B}} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e é fortemente positiva, de modo que $\varphi(x) > 0$ para todo $x \in \Omega \cup \Gamma_1$. Além disso como Ω_0 é subdomínio próprio de Ω, temos que $\partial\Omega_0 \cap \Omega \neq \emptyset$ e

1. $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \sigma_0)\varphi_{\mathfrak{B}} = 0$ em Ω_0;

2. $\varphi_{\mathfrak{B}}(x) > 0, \quad \forall x \in \partial\Omega_0 \cap \Omega$;

3. $\varphi_{\mathfrak{B}}(x) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega_0 \cap \Gamma_0$;

4. $\dfrac{\partial \varphi_{\mathfrak{B}}}{\partial \nu}(x) + \beta(x)\varphi_{\mathfrak{B}}(x) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega_0 \cap \Gamma_1.$

Portanto, $\varphi_{\mathfrak{B}}$ satisfaz

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \sigma_0)\varphi_{\mathfrak{B}} = 0 \text{ em } \Omega_0, \\ \mathfrak{B}[\Omega_0]\varphi_{\mathfrak{B}} > 0 \text{ sobre } \partial\Omega_0, \end{cases}$$

ou seja, $\varphi_{\mathfrak{B}}$ é uma supersolução estrita positiva de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \sigma_0, \mathfrak{B}[\Omega_0], \Omega_0)$. Pelo Teorema 46,

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \sigma_0, \mathfrak{B}[\Omega_0], \Omega_0] > 0$$

e pelo Lema 47,

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \sigma_0, \mathfrak{B}[\Omega_0], \Omega_0] = \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\Omega_0], \Omega_0] - \sigma_0,$$

logo

$$\sigma_0 := \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega] < \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\Omega_0], \Omega_0].$$

∎

O próximo resultado nos fornece uma relação mais ampla entre autovalores principais, no sentido que podemos tomar funções em $L^\infty(\Omega)$ em vez de apenas números reais. Estes valores somados ao operador $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ serão chamados de potenciais.

Proposição 50. *Sejam $P_1, P_2 \in L^\infty(\Omega)$ tais que $P_1 < P_2$ sobre um conjunto de medida positiva. Então*

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + P_1, \mathfrak{B}, \Omega] < \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + P_2, \mathfrak{B}, \Omega].$$

***Demonstração*.** Sejam φ_1 a autofunção principal associada a $\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + P_1, \mathfrak{B}, \Omega]$. Temos que, em Ω

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + P_1)\varphi_1 &= \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + P_1, \mathfrak{B}, \Omega]\varphi_1 \\ (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + P_1, \mathfrak{B}, \Omega])\varphi_1 &= -P_1\varphi_1 \end{aligned}$$

Agora note que

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + P_2 - \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + P_1, \mathfrak{B}, \Omega])\,\varphi_1 &= (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + P_1, \mathfrak{B}, \Omega]\varphi_1) + P_2\varphi_1 \\ &= -P_1\varphi_1 + P_2\varphi_1 = (P_2 - P_1)\varphi_1 > 0, \end{aligned}$$

pois $P_1 < P_2$ em Ω.

Além disso, sobre $\partial\Omega$, $\mathfrak{B}\varphi_1 = 0$. Portanto φ_1 é uma supersolução estrita positiva de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + P_2 - \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + P_1, \mathfrak{B}, \Omega], \mathfrak{B}, \Omega)$. Pelo Teorema 46,

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + P_2 - \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + P_1, \mathfrak{B}, \Omega], \mathfrak{B}, \Omega] > 0,$$

e pelo Corolário 47,

$$0 < \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + P_2 - \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + P_1, \mathfrak{B}, \Omega], \mathfrak{B}, \Omega] = \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + P_2, \mathfrak{B}, \Omega] - \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + P_1, \mathfrak{B}, \Omega].$$

Daí,

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + P_1, \mathfrak{B}, \Omega] < \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + P_2, \mathfrak{B}, \Omega].$$

■

A propriedade de monotonia apresentada no Corolário 50 nos fornece uma ferramenta bastante útil para garantir a não existência de soluções de alguns problemas elípticos não lineares. O exemplo a seguir nos fornece uma aplicação bem útil deste resultado.

Exemplo 51. Seja $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(s)/s|$ é limitada. Se $f(s) < 0$, para todo $s > 0$, então o problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\mathcal{I}} u = \lambda u + f(u) \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.10}$$

não admite solução positiva para $\lambda \leq \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega]$.

Solução: Suponha que $u > 0$ seja uma solução em $W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$, do problema (3.10). Note que esta função verifica,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} u = \lambda u + f(u) \Leftrightarrow \left(\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \frac{f(u)}{u}\right) u = \lambda u,$$

em Ω. E $\mathfrak{B}u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Uma vez que $|f(s)/s|$ é limitada, devemos ter $f(u)/u \in L^\infty(\Omega)$. Pela unicidade do autovalor principal segue que $\lambda = \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - f(u)/u, \mathfrak{B}, \Omega]$. Agora, pela Proposição 50 e sabendo que $-f(u)/u > 0$, temos

$$\lambda = \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - f(u)/u, \mathfrak{B}, \Omega] > \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega].$$

Isso significa que o problema (3.10) não admite solução para $\lambda \leq \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega]$.

Podemos ainda utilizar a Proposição 50 para estabelecer a relação entre o autovalor principal de um operador $\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + P_n$ onde $P_n \in L^\infty(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência convergente a um valor $P \in L^\infty(\Omega)$ e o autovalor de $\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + P$. Isso estabelece que o autovalor principal é contínuo com respeito ao potencial.

Corolário 52. *Sejam $P_n \in L^\infty(\Omega)$, $n \geq 1$, uma sequência e $P \in L^\infty(\Omega)$ tais que*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} P_n = P \text{ em } L^\infty(\Omega).$$

Então

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sigma[\mathcal{L}_\mathcal{I} + P_n, \mathfrak{B}, \Omega] = \sigma[\mathcal{L}_\mathcal{I} + P, \mathfrak{B}, \Omega].$$

Demonstração. Pela definição de sequência convergente, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq n(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \|P_n - P\|_\infty &\leq \varepsilon \\ |P_n - P| &\leq \varepsilon \quad \text{q.t.p em } \Omega \\ P - \varepsilon \leq P_n &\leq P + \varepsilon \quad \text{q.t.p em } \Omega. \end{aligned}$$

Pela Proposição 50, para cada $n \geq n(\varepsilon)$ vale que

$$\sigma[\mathcal{L}_\mathcal{I} + P, \mathfrak{B}, \Omega] - \varepsilon \leq \sigma[\mathcal{L}_\mathcal{I} + P_n, \mathfrak{B}, \Omega] \leq \sigma[\mathcal{L}_\mathcal{I} + P, \mathfrak{B}, \Omega] + \varepsilon,$$

como ε foi tomado arbitrário, temos que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sigma[\mathcal{L}_\mathcal{I} + P_n, \mathfrak{B}, \Omega] = \sigma[\mathcal{L}_\mathcal{I} + P, \mathfrak{B}, \Omega].$$

■

Vale também uma relação de monotonia entre os autovalores principais quando mudamos a função $K(x,y)$ do termo não local. Para estabelecer este resultado, vamos fixar algumas notações. No operador $\mathcal{L}_\mathcal{I}$, quando mudarmos a função $K(x,y)$ por uma função $K_j(x,y)$, $j \in \mathbb{N}$ indicaremos essa mudança por $\mathcal{L}_{\mathcal{I}j}$, ou seja,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}j} := \mathcal{L} - \int_\Omega K_j(x,y) \cdot (y) dy,$$

e $\mathcal{L}$ é um operador linear elíptico de segunda ordem conforme definido no início do capítulo 2. Os autovalores associados a $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}j}, \mathfrak{B}, \Omega)$ serão denotados por $\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}j}, \mathfrak{B}, \Omega]$. Com isso podemos enunciar a

Proposição 53. *Sejam $K_1, K_2 \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$ funções não negativas e não identicamente nulas. Se $K_1 < K_2$ em $\Omega \times \Omega$, então*

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}2}, \mathfrak{B}, \Omega] < \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}1}, \mathfrak{B}, \Omega].$$

Demonstração. Seja φ_2 a autofunção principal associada a $\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}2},\mathfrak{B},\Omega]$. Em Ω, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathcal{I}2}\varphi_2 &= \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}2},\mathfrak{B},\Omega]\varphi_2 \\
\mathcal{L}\varphi_2 - \int_\Omega K_2(x,y)\varphi_2(y)dy &= \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}2},\mathfrak{B},\Omega]\varphi_2 \\
\mathcal{L}\varphi_2 - \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}2},\mathfrak{B},\Omega]\varphi_2 &= \int_\Omega K_2(x,y)\varphi_2(y)dy.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{\mathcal{I}1} - \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}2},\mathfrak{B},\Omega])\varphi_2 &= \mathcal{L}\varphi_2 - \int_\Omega K_1(x,y)\varphi_2(y)dy - \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}2},\mathfrak{B},\Omega])\varphi_2 \\
&= \int_\Omega K_2(x,y)\varphi_2(y)dy - \int_\Omega K_1(x,y)\varphi_2(y)dy \\
&= \int_\Omega (K_2(x,y) - K_1(x,y))\varphi_2(y)dy > 0,
\end{aligned}$$

pois $K_1 < K_2$ em $\Omega\times\Omega$ e φ_2 é autofunção principal. Além disso, $\mathfrak{B}\varphi_2 = 0$ sobre $\partial\Omega$. Logo, $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}1} - \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}2},\mathfrak{B},\Omega],\mathfrak{B},\Omega)$ possui uma supersolução estrita positiva. Pelo Teorema de Caracterização do Princípio do Máximo,

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}1} - \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}2},\mathfrak{B},\Omega],\mathfrak{B},\Omega] > 0.$$

Pelo Corolário 47,

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}1} - \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}2},\mathfrak{B},\Omega],\mathfrak{B},\Omega] = \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}1},\mathfrak{B},\Omega] - \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}2},\mathfrak{B},\Omega].$$

Portanto,

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}2},\mathfrak{B},\Omega] < \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}1},\mathfrak{B},\Omega].$$

■

Com a ajuda deste resultado podemos estabelecer a continuidade do autovalor principal com relação a função $K(x,y)$, no seguinte sentido:

Corolário 54. *Sejam $K_n \in L^\infty(\Omega\times\Omega), n\geq 1$, uma sequência de funções não negativas e não identicamente nulas, $K \in L^\infty(\Omega\times\Omega)$ com $K\geq 0$ e suponha que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} K_n = K \text{ em } L^\infty(\Omega\times\Omega).$$

Então,

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}n},\mathfrak{B},\Omega] \longrightarrow \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}},\mathfrak{B},\Omega].$$

Demonstração. Para simplificar a notação, escreveremos $\sigma_n := \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}n}, \mathfrak{B}, \Omega]$. Como $K_n \longrightarrow K$ em $L^\infty(\Omega \times \Omega)$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \|K_n - K\|_\infty &\leq \varepsilon, \\ |K_n - K| &\leq \varepsilon, \quad \text{q.t.p em } \Omega \\ 0 \leq K_n &\leq K + \varepsilon, \quad \text{q.t.p em } \Omega. \end{aligned}$$

Uma vez que $K + \varepsilon \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$, pelo Teorema 53, vale que

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}+\varepsilon}, \mathfrak{B}, \Omega] \leq \sigma_n \leq \sigma[\mathcal{L}, \mathfrak{B}, \Omega],$$

onde $\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}+\varepsilon}, \mathfrak{B}, \Omega]$ representa o autovalor de

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}+\varepsilon} = \mathcal{L} - \int_\Omega (K(x,y) + \varepsilon) \cdot (y) dy.$$

Logo, (σ_n) é limitada em $\mathbb{R}$. Assim, existe $\sigma^* \in \mathbb{R}$ tal que, a menos de subsequência,

$$\sigma_n \to \sigma^* \tag{3.11}$$

Pelo Teorema 38 $u \in W^{2,p}(\Omega), p > N$, é solução fraca de

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_\mathcal{I} + \omega)u = f \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.12}$$

se e somente se $v := u/h$, é solução fraca de

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}h} + \omega)v = \dfrac{f}{h} \text{ sobre } \Omega, \\ \mathfrak{B}_h v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.13}$$

Lembre-se também que $\beta_h \geq 0$, que a forma bilinear $b_h(u,v)$ associada a (3.13) é contínua e que pelo Teorema 34, existe $\omega_0 > 0$ suficientemente grande de modo Para todo $\omega \geq \omega_0$, $b_h(u,v)$ é coerciva.

Agora, note que φ_n é autofunção de

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}n} + \omega)\varphi_n = (\sigma_n + \omega)\varphi_n \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}\varphi_n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.14}$$

se e somente se $v_n = \varphi_n/h$ é uma auto função de

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}hn} + \omega)v = (\sigma_n + \omega)v \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}_h v_n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.15}$$

onde

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}hn} = \mathcal{L}_h - \int_\Omega K_{hn}(x,y), \quad K_{hn}(x,y) = K_n(x,y)\frac{h(y)}{h(x)}.$$

Sabendo que $K_n \to K$ em $L^\infty(\Omega \times \Omega)$, vale que

$$\begin{aligned} |K_{hn}(x,y) - K_h(x,y)| &= \left| K_n(x,y)\frac{h(y)}{h(x)} - K(x,y)\frac{h(y)}{h(x)} \right| = \left|\frac{h(y)}{h(x)}\right| \left| K_n(x,y) - K(x,y) \right| \\ &\leq \left|\frac{h(y)}{h(x)}\right| \|K_n - K\|_{L^\infty(\Omega\times\Omega)}. \end{aligned}$$

Portanto $K_{hn} \to K_h$ em $L^\infty(\Omega \times \Omega)$, e consequente, $\|K_{hn}\|_{L^\infty(\Omega\times\Omega)}$ é limitada.

Tomemos v_n as autofunções de (3.15) ortogonais e normalizadas em $L^2(\Omega)$. Vale que, para cada $n \in \mathbb{N}$ a forma bilinear $\mathfrak{b}_{hn}$ associada a (3.15) é contínua. De fato, conforme vimos na demonstração do Teorema 33, adaptando a $\mathfrak{b}_{hn}$, obtemos que para todo $u, v \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$,

$$|\mathfrak{b}_{hn}(u,v)| \leq C\|u\|_{W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)}\|v\|_{W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)}$$

onde

$$0 < C := \|\beta_h\|_{L^\infty(\Gamma_1)}\|\mathcal{T}_{\Gamma_1}\|^2_{\mathcal{L}(W^{1,2}(\Omega),L^2(\Gamma_1))} + \|A\|_\infty + \|b_h\|_\infty + \|c_h + \omega\|_{L^\infty(\Omega)} + \|K_{hn}\|_\infty < +\infty,$$

pois $\|K_{hn}\|_{L^\infty(\Omega\times\Omega)}$ é limitada. De maneira análoga, utilizando o Teorema 34 para $\mathfrak{b}_{hn}$ com suas devidas adaptações, e o fato de $\|K_{hn}\|_{L^\infty(\Omega\times\Omega)}$ ser limitada, garantimos a existência de $\omega_0 > 0$ suficientemente grande de modo que $\mathfrak{b}_{hn}$ seja coerciva para todo $\omega \geq \omega_0$. Logo, existe $\overline{\alpha} > 0$ tal que

$$\overline{\alpha}\|u\|^2_{W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)} \leq \mathfrak{b}_{hn}(u,u)$$

para todo $u \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$.

Note que v_n satisfaz $b_h(v_n, \phi) = \langle \sigma_n v_n, \phi \rangle_{L^2(\Omega)}$, para toda $\phi \in C^\infty_{\Gamma_0}(\Omega)$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{b}_{hn}$ é contínua e coerciva, vale que

$$\overline{\alpha}\|v_n\|^2_{W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)} \leq \mathfrak{b}(v_n, v_n) \leq C\|v_n\|_{W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)}.$$

Daí, v_n é limitada em $W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$. Sabendo que $W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo, deve existir um $v^* \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência

$$v_n \rightharpoonup v^* \text{ em } W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega),$$

e pela imersão compacta $W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos também que

$$v_n \to v^* \text{ em } L^2(\Omega).$$

Seja $\psi \in C^{\infty}_{\Gamma_0}(\Omega)$ arbitrário e defina $T : W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$T(v) = \mathfrak{b}_{hn}(v,\psi) + \int_{\Omega} \psi \int_{\Omega} K_{hn}(x,y)v(y)dy.$$

Claramente T é linear. Além disso, usando que $W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ e fazendo contas análogas as da demonstração do Teorema 33, obtemos que

$$|T(v)| \leq |\mathfrak{b}_{hn}(v,\psi)| + \left| \int_{\Omega} \psi \int_{\Omega} K_{hn}(x,y)v(y)dy \right| \leq \left(C + C_1^2 \|K_{hn}\|_{\infty} \|\psi\|_{W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)} \right) \|v\|_{W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)},$$

o que significa que T é contínuo. Daí, como $v_n \rightharpoonup v^*$ em $W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$, temos que

$$T(v_n) \to T(v^*). \tag{3.16}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\Omega} \psi \int_{\Omega} K_{hn}(x,y)v_n(y)dy - \int_{\Omega} \psi \int_{\Omega} K_h(x,y)v^*(y)dy \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} \psi \left[\int_{\Omega} K_{hn}(x,y)v_n(y)dy - \int_{\Omega} K_h(x,y)v^*(y)dy \right] \right| \\
&\leq \int_{\Omega} |\psi| \int_{\Omega} |K_{hn}(x,y)v_n(y) - K_h(x,y)v^*(y)|\, dy \\
&= \int_{\Omega} |\psi| \int_{\Omega} |K_{hn}(x,y)v_n(y) - K_{hn}(x,y)v^*(y) + K_{hn}(x,y)v^*(y) - K_h(x,y)v^*(y)|\, dy \\
&\leq \int_{\Omega} |\psi| \left[\int_{\Omega} |K_{hn}(x,y)||v_n(y) - v^*(y)|dy + \int_{\Omega} |K_{hn}(x,y) - K_h(x,y)||v^*(y)||dy \right] \\
&\leq \int_{\Omega} |\psi| \left[\int_{\Omega} \left(K_{hn}^2(x,y)dy \right)^{\frac{1}{2}} \|v_n - v^*\|_{L^2(\Omega)} + \|K_{hn} - K_h\|_{\infty} \|v^*\|_{L^1(\Omega)} \right] \\
&\leq \int_{\Omega} |\psi| \left[\int_{\Omega} \|K_{hn}\|_{\infty} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|v_n - v^*\|_{L^2(\Omega)} + \|K_{hn} - K_h\|_{\infty} \|v^*\|_{L^1(\Omega)} \right]
\end{aligned}$$

e como $K_{hn} \to K_h$ em $L^\infty(\Omega \times \Omega)$ e $v \to v^*$ em $L^2(\Omega)$, temos que:

$$\int_\Omega \psi \int_\Omega K_{hn}(x,y)v_n(y)dy \to \int_\Omega \psi \int_\Omega K_h(x,y)v^*(y)dy \text{ se } n \to +\infty. \tag{3.17}$$

Por (3.16) e (3.17), vale que, a menos de subsequência,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathfrak{b}_{hn}(v_n,\psi) = \mathfrak{b}_h(v^*,\psi), \quad \forall \psi \in C^\infty_{\Gamma_0}(\Omega). \tag{3.18}$$

Lembrando que, a menos de subsequência $\sigma_n \to \sigma$ em $\mathbb{R}$ e $v_n \to v^*$ em $L^2(\Omega)$, e como para toda $\psi \in C^\infty_{\Gamma_0}(\Omega)$ $\langle \cdot, \psi \rangle_{L^2(\Omega)}$ é um funcional linear em $L^2(\Omega)$, obtemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \langle \sigma_n v_n, \psi \rangle = \langle \sigma^* v^*, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in C^\infty_{\Gamma_0}(\Omega). \tag{3.19}$$

Isso significa que v^* é uma solução fraca de

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}h} + \omega)v = (\sigma_n + \omega)v \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}_h v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.20}$$

Por fim, note que como $v_n \geq 0$, $\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ e $v_n \to v^*$, temos que $\|v^*\|_{L^2(\Omega)} = 1$ e daí $v^* > 0$. Isso significa que σ^* é o autovalor valor principal de (3.20). Observando que $v^*h/h > 0$ é solução de (3.20), temos que $v^*h > 0$ é solução de (3.14). Portanto σ^* é o autovalor principal de (3.14). Isso finaliza a prova. ∎

Seguindo esta linha de estabelecer a monotonia do autovalor principal, vejamos o que ocorre quando mudamos no operador de fronteira $\mathfrak{B}$ a função $\beta \in C(\Gamma_1)$.

Proposição 55. *Suponha que $\Gamma_1 \neq \emptyset$ e sejam $\beta_1, \beta_2 \in C(\Gamma_1)$ tais que $\beta_1 < \beta_2$. Então*

$$\sigma[\mathcal{L}_\mathcal{I}, \mathfrak{B}[\beta_1], \Omega] < \sigma[\mathcal{L}_\mathcal{I}, \mathfrak{B}[\beta_2], \Omega].$$

***Demonstração*.** Seja φ_1 a autofunção associada a $\sigma[\mathcal{L}_\mathcal{I}, \mathfrak{B}[\beta_1], \Omega]$. Então, sobre Ω,

$$\mathcal{L}_\mathcal{I}\varphi_1 = \sigma[\mathcal{L}_\mathcal{I}, \mathfrak{B}[\beta_1], \Omega]\varphi_1$$
$$(\mathcal{L}_\mathcal{I}\varphi_1 - \sigma[\mathcal{L}_\mathcal{I}, \mathfrak{B}[\beta_1], \Omega])\varphi_1 = 0, \tag{3.21}$$

sobre Γ_0, $\varphi_1 = 0$ e sobre Γ_1

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} + \beta_1(x)\varphi_1 = 0$$
$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} = -\beta_1\varphi_1$$

daí,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} + \beta_2(x)\varphi_1 = -\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_1 = (\beta_2 - \beta_1)\varphi_1 > 0$$

pois $\beta_2 > \beta_1$. Isto significa que

$$\mathfrak{B}[\beta_1]\varphi_1 > 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \tag{3.22}$$

De (3.21) e (3.22), obtemos que φ_1 é uma supersolução estrita positiva da terna $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_1], \Omega], \mathfrak{B}[\beta_2], \Omega)$. Pelo Teorema 46,

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_1], \Omega], \mathfrak{B}[\beta_2], \Omega] > 0$$

e pelo Corolário 47,

$$0 < \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_1], \Omega], \mathfrak{B}, \mathfrak{B}[\beta_2], \Omega] = \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_2], \Omega] - \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_1], \Omega].$$

Daí,

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_1], \Omega] < \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_2], \Omega].$$

■

Vamos agora estabelecer relação de monotonia entre autovalores principais, agora envolvendo subdomínios e operadores de fronteira ligeiramente diferentes. Na verdade, o próximo resultado é ema consequência direta das Proposições 49 e 55.

Proposição 56. *Suponha que* $\Gamma_1 \neq \emptyset$. *Sejam* $\beta_1, \beta_2 \in C(\Gamma_1)$ *tais que* $\beta_1 < \beta_2$ *e seja* $\Omega_0 \subset \Omega$ *um subdomínio de classe* C^2 *satisfazendo* (3.5). *Então,*

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_1], \Omega] < \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_2, \Omega_0], \Omega_0].$$

Demonstração. Se $\Omega = \Omega_0$,

$$\mathfrak{B}[\beta_2, \Omega_0] = \mathfrak{B}[\beta_2].$$

Como $\beta_1 \leq \beta_2$ e $\beta_1 \neq \beta_2$, pela Proposição 55,

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_1], \Omega] < \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_2, \Omega], \Omega_0] = \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_2], \Omega].$$

Suponha então que Ω_0 é um subdomínio próprio de Ω. Pela Proposição 55,

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_1], \Omega] < \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_2], \Omega].$$

Agora, pela Proposição 49, $\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_2], \Omega] < \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_2, \Omega_0], \Omega_0]$. Logo,

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_1], \Omega] < \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_2], \Omega] < \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_2, \Omega_0], \Omega_0],$$

ou seja,

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_1], \Omega] < \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}[\beta_2, \Omega_0], \Omega_0].$$

■

Finalizamos esta seção com o próximo teorema, que estabelece uma caracterização pontual do autovalor principal.

Teorema 57. *Suponha que $p > N$ e definamos o seguinte conjunto*

$$\mathfrak{P} := \left\{ \psi \in W^{2,p}(\Omega); \psi(x) > 0, \forall x \in \overline{\Omega} \quad e \quad \mathfrak{B}\psi > 0 \text{ sobre } \partial\Omega \right\}.$$

Então,

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega] = \sup_{\psi \in \mathfrak{P}} \inf_{x \in \Omega} \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{I}}\psi}{\psi}.$$

Demonstração. Denotemos por $\sigma_0 := \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega]$ o autovalor principal de $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega)$ e φ_0 a autofunção principal associada a σ_0. Tomemos $\lambda < \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega]$. Vamos mostrar que

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega] \leq \sup_{\psi \in \mathfrak{P}} \inf_{x \in \Omega} \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{I}}\psi}{\psi}.$$

Para isso, note que em Ω,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}}\varphi_0 = \sigma_0\varphi_0$$

e como $\lambda < \sigma_0$,

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \lambda)\varphi_0 = (\sigma_0 - \lambda)\varphi_0 > 0.$$

Além disso, $\mathfrak{B}\varphi_0 = 0$ sobre $\partial\Omega$. Ou seja, φ_0 é uma supersolução estrita positiva da terna $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \lambda, \mathfrak{B}, \Omega)$. Pelo Corolário 47, vale que

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \lambda, \mathfrak{B}, \Omega] = \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega] - \lambda = \sigma_0 - \lambda > 0.$$

Pelo Teorema 46, $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \lambda, \mathfrak{B}, \Omega)$ satisfaz o princípio do máximo forte.

Como $\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \lambda, \mathfrak{B}, \Omega] > 0$, pela Caracterização do Princípio do Máximo, o operador resolvente de $\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \lambda$ existe e está bem definido. Portanto, dado $f \in L^p(\Omega), p > N$, o problema

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \lambda)u = f \text{ em } \Omega \\ \mathfrak{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

possui única solução fraca. Fixado $h \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfazendo

$$\mathfrak{B}h = 1 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

consideremos $f := 1 - (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \lambda)h$ e façamos a mudança de variável

$$w := h + u.$$

Logo,

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \lambda)w = (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \lambda)h + (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \lambda)u = (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \lambda)h + 1 - (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \lambda)h = 1 \text{ em } \Omega,$$

e

$$\mathfrak{B}w = \mathfrak{B}h + \mathfrak{B}u = \mathfrak{B}h = 1 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Pela construção feita acima, o problema

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \lambda)w = 1 \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}w = 1 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui única solução forte, a saber $w = u + h$. Seja ψ_1 esta solução. Como $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \lambda, \mathfrak{B}, \Omega)$ satisfaz o princípio do máximo forte e ψ_1 é supersolução estrita positiva desta terna, ela é fortemente positiva e por isso, $\psi_1(x) > 0,$ para todo $x \in \Omega \cup \Gamma_1$. Logo

$$\psi_1(x) > 0, \forall x \in \overline{\Omega}$$

e

$$\mathfrak{B}\psi_1 = 1 > 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

donde podemos concluir que $\psi_1 \in \mathfrak{P}$ e $\mathfrak{P} \neq \emptyset$. Agora, em Ω, vale que

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{\mathcal{I}} - \lambda)\psi_1 &= 1\\ \mathcal{L}_{\mathcal{I}}\psi_1 &= 1 + \lambda\psi_1\\ \mathcal{L}_{\mathcal{I}}\psi_1 &> \lambda\psi_1\\ \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{I}}\psi_1}{\psi_1} &> \lambda,\end{aligned}$$

daí,

$$\lambda \leq \inf_{x\in\Omega}\frac{\mathcal{L}_{\mathcal{I}}\psi_1(x)}{\psi_1(x)} \leq \sup_{\psi\in\mathfrak{P}}\inf_{x\in\Omega}\frac{\mathcal{L}_{\mathcal{I}}\psi(x)}{\psi(x)}. \tag{3.23}$$

Como (3.23) vale para qualquer $\lambda < \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega]$, tomando uma sequência $\lambda_n \in \mathbb{R}, n \geq 1$ tal que $\lambda_n < \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\lambda_n = \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega],$$

obtemos

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\lambda_n = \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega] \leq \lim_{n\longrightarrow\infty}\sup_{\psi\in\mathfrak{P}}\inf_{x\in\Omega}\frac{\mathcal{L}_{\mathcal{I}}\psi(x)}{\psi(x)}.$$

Logo

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega] \leq \sup_{\psi\in\mathfrak{P}}\inf_{x\in\Omega}\frac{\mathcal{L}_{\mathcal{I}}\psi(x)}{\psi(x)}.$$

Vamos mostrar por contradição que não poderia ocorrer

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega] < \sup_{\psi\in\mathfrak{P}}\inf_{x\in\Omega}\frac{\mathcal{L}_{\mathcal{I}}\psi(x)}{\psi(x)}. \tag{3.24}$$

De fato, se vale (3.24) então, pela definição de supremo, dado $\varepsilon > 0$, $\sup_{\psi\in\mathfrak{P}}\inf_{x\in\Omega}\frac{\mathcal{L}_{\mathcal{I}}\psi(x)}{\psi(x)} - \varepsilon$ não é cota superior. Daí, existe $\psi \in \mathfrak{P}$ tal que

$$\sup_{\psi\in\mathfrak{P}}\inf_{x\in\Omega}\frac{\mathcal{L}_{\mathcal{I}}\psi(x)}{\psi(x)} - \varepsilon \leq \inf_{x\in\Omega}\frac{\mathcal{L}_{\mathcal{I}}\psi(x)}{\psi(x)} \leq \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{I}}\psi(x)}{\psi(x)}$$

Tomando

$$0 < 2\varepsilon < \sup_{\psi\in\mathfrak{P}}\inf_{x\in\Omega}\frac{\mathcal{L}_{\mathcal{I}}\psi(x)}{\psi(x)} - \sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{B}, \Omega],$$

temos que

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}},\mathfrak{B},\Omega]+\varepsilon < \sup_{\psi\in\mathfrak{P}}\inf_{x\in\Omega}\frac{\mathcal{L}_{\mathcal{I}}\psi(x)}{\psi(x)}-\varepsilon \leq \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{I}}\psi(x)}{\psi(x)}, \quad \forall x\in\Omega,$$

e portanto, para todo $x\in\Omega$,

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}},\mathfrak{B},\Omega]+\varepsilon < \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{I}}\psi(x)}{\psi(x)}.$$

Donde obtemos que em Ω vale

$$\begin{aligned}(\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}},\mathfrak{B},\Omega]+\varepsilon)\psi(x) &< \mathcal{L}_{\mathcal{I}}\psi(x)\\ (\mathcal{L}_{\mathcal{I}}-\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}},\mathfrak{B},\Omega]-\varepsilon)\psi &> 0.\end{aligned}$$

Lembrando que, $\psi\in\mathfrak{P}$, ou seja, $\psi(x)>0$ em $\overline{\Omega}$ e $\mathfrak{B}\psi>0$ sobre $\partial\Omega$. Logo, ψ é uma supersolução estrita positiva da terna $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}}-\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}},\mathfrak{B},\Omega]-\varepsilon,\mathfrak{B},\Omega)$. Pelo Teorema 46,

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}-\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}},\mathfrak{B},\Omega]-\varepsilon,\mathfrak{B},\Omega]>0.$$

Usando o Corolário 47, temos

$$0<\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}}-\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}},\mathfrak{B},\Omega]-\varepsilon,\mathfrak{B},\Omega]=\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}},\mathfrak{B},\Omega]-\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}},\mathfrak{B},\Omega]-\varepsilon=-\varepsilon<0$$

o que é uma contradição. Tal contradição surgiu de supormos que (3.24). Portanto, devemos ter

$$\sigma[\mathcal{L}_{\mathcal{I}},\mathfrak{B},\Omega]=\sup_{\psi\in\mathfrak{P}}\inf_{x\in\Omega}\frac{\mathcal{L}_{\mathcal{I}}\psi_1(x)}{\psi_1(x)}.$$

■

3.2 Encontrando conjunto de soluções

Vamos utilizar a caracterização do princípio do máximo e o Teorema da função implícita para garantir a existência e unicidade de um conjunto de soluções de uma equação elíptica não-linear.

Proposição 58. *Seja* $f:\mathbb{R}\times\Omega\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *contínua, com*

$$s\mapsto f(\lambda,x,s)$$

de classe C^1. Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\mathcal{I}} u = f(\lambda, x, u)u \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.25}$$

Suponha que $(\lambda_0, u_0) \in W^{2,p}(\Omega), p > N$, uma solução de (3.25)*. Se $u_0 > 0$ e*

$$\partial f(\lambda_0, x, s)/\partial s < 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

então existem $r > 0$, $\delta > 0$ e uma aplicação contínua $T : (\lambda_0 - r, \lambda_0 + r) \longrightarrow B_\delta(u_0)$, tais que $(\lambda, T(\lambda))$ são as únicas soluções de (3.25) *em $(\lambda_0 - r, \lambda_0 + r) \times B_\delta(u_0) \subset \mathbb{R} \times W^{2,p}(\Omega), p > N$.*

Demonstração. Seja $\omega > 0$ suficientemente grande. Assim, temos que (λ, u) é solução de (3.25) se, e somente se,

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_{\mathcal{I}} + \omega)u = f(\lambda, x, u)u + \omega u \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.26}$$

Ou, equivalentemente,

$$u = \mathfrak{R}_\omega(f(\lambda, x, u)u + \omega u).$$

Vamos definir uma aplicação F que satisfaça as hipóteses do Teorema da função implícita. Para isto, considere $F : \mathbb{R} \times C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega})$, dada por

$$F(\lambda, u) = u - \mathfrak{R}_\omega(f(\lambda, x, u)u + \omega u).$$

Conforme construído, podemos observar que (λ, u) é solução de (3.25) se, e somente se, $F(\lambda, u) = 0$. Como, por hipótese, $s \mapsto f(\lambda_0, x, s)$ é diferenciável para todo $s > 0$, e sendo $u_0 > 0$, temos que F é diferenciável. A derivada de Fréchet de F com relação a u em (λ_0, u_0) é dada por:

$$D_u F(\lambda_0, u_0)\xi = \xi - \mathfrak{R}_\omega(f_s(\lambda_0, x, u_0)u_0\xi + f(\lambda_0, x, u_0)\xi + \omega\xi).$$

Vamos mostrar que $D_u F(\lambda_0, u_0)$ é uma bijeção. Lembrando que $\mathfrak{R}_\omega$ é compacto, podemos observar que $D_u F(\lambda_0, u_0)$ é uma perturbação compacta da identidade. Isso implica que, para mostrar que $D_u F(\lambda_0, u_0)$ é bijetiva, é suficiente mostrar que é injetiva. Vamos mostrar que ela é injetiva. Argumentamos por contradição. Suponha que $D_u F(\lambda_0, u_0)$ não seja injetiva, logo, existe $0 \neq \xi \in C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega})$ tal que $D_uF(\lambda_0,u_0)\xi = 0$. Assim, em Ω temos

$$\begin{aligned}
D_uF(\lambda_0,u_0)\xi &= 0,\\
\xi &= \mathfrak{R}_\omega(f_s(\lambda_0,x,u_0)u_0\xi + f(\lambda_0,x,u_0)\xi + \omega\xi),\\
(\mathcal{L}_\mathcal{I}+\omega)\xi &= f_s(\lambda_0,x,u_0)u_0\xi + f(\lambda_0,x,u_0)\xi + \omega\xi,\\
\mathcal{L}_\mathcal{I}\xi &= f_s(\lambda_0,x,u_0)u_0\xi + f(\lambda_0,x,u_0)\xi,\\
0 &= \mathcal{L}_\mathcal{I}\xi - f_s(\lambda_0,x,u_0)u_0\xi - f(\lambda_0,x,u_0)\xi. \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

Tendo em vista (3.27) e o fato de $0 \neq \xi \in C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega})$, obtemos que 0 é um autovalor do problema,

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_\mathcal{I} - f_s(\lambda_0,x,u_0)u_0 - f(\lambda_0,x,u_0))\,u = \tau u \text{ em } \Omega,\\ \mathfrak{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \qquad (3.28)$$

Pela dominância do autovalor principal estabelecida pelo Teorema 44, temos que

$$\sigma[\mathcal{L}_\mathcal{I} - f_s(\lambda_0,x,u_0)u_0 - f(\lambda_0,x,u_0),\mathfrak{B},\Omega] \leq 0. \qquad (3.29)$$

Vamos mostrar que $(\mathcal{L}_\mathcal{I} - f(\lambda_0,x,u_0)u_0 - f(\lambda_0,x,u_0),\mathfrak{B},\Omega)$ admite uma supersolução estrita positiva o que faz com que (3.29) não possa ocorrer, devido a caracterização do princípio do máximo estabelecida pelo Teorema 46. Recorde que $u_0 > 0$ e $\mathcal{L}_\mathcal{I}u_0 = f(\lambda_0,x,u_0)u_0$. Portanto,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_\mathcal{I} - f_s(\lambda_0,x,u_0)u_0 - f_s(\lambda_0,x,u_0))u_0 &= \mathcal{L}_\mathcal{I}u_0 - f_s(\lambda_0,x,u_0)(u_0)^2 - f(\lambda_0,x,u_0)u_0\\
&= -f_s(\lambda_0,x,u_0)(u_0)^2 > 0,
\end{aligned}$$

pois $f_s(\lambda_0,x,u_0) < 0$. Pelo Teorema 46, temos que

$$\sigma[\mathcal{L}_\mathcal{I} - f_s(\lambda_0,x,u_0)u_0 - f(\lambda_0,x,u_0),\mathfrak{B},\Omega] > 0.$$

Isso significa que (3.29) não pode ocorrer e consequentemente, devemos ter

$$N[\mathcal{L}_\mathcal{I} - f_s(\lambda_0,x,u_0)u_0 - f(\lambda_0,x,u_0)] = 0.$$

Daí, $F : \mathbb{R}\times C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega})$ satisfaz:

1. É contínua e diferenciável com $F(\lambda_0,u_0) = 0$;

2. $D_uF(\lambda_0,u_0)$ é bijetiva.

Pelo Teorema A.12, existem $(\lambda_0 - r, \lambda_0 + r) \subset \mathbb{R}$, $B_\delta(u_0) \subset C^1_{\mathfrak{B}}(\overline{\Omega})$ e uma aplicação contínua $T : (\lambda_0 - r, \lambda_0 + r) \to B_\delta(u_0)$, caracterizada por $T\lambda_0 = u_0$ e $F(\lambda, T\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in (\lambda_0 - r, \lambda_0 + r)$. Isso equivale a dizer que $(\lambda, T\lambda)$ são as únicas soluções de (3.25) em $(\lambda_0 - r, \lambda_0 + r) \times B_\delta(u_0)$. ■

Além de fornecer condições necessárias e suficientes para que o princípio do máximo ocorra, podemos observar também que a caracterização do princípio do máximo possui um papel importante em diversas aplicações, como garantia de existência e unicidade de soluções de certas equações diferenciais não lineares, monotonia do autovalor principal com respeito a diversos parâmetros como domínio, potenciais, operador de fronteira e termo não local e também nos auxilia em uma caracterização pontual do autovalor principal. Por esses e outros motivos, este teorema é uma poderosa ferramenta de Análise que pode ser utilizada no estudo de Equações Diferenciais Parciais.

Apêndice A

Apresentaremos aqui alguns conceitos e resultados básicos utilizados ao longo do texto e daremos algumas referências para as demonstrações.

Seja $\phi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞. Definimos o suporte de ϕ como

$$\operatorname{supp}\phi := \overline{\{x \in \Omega;\, \phi(x) \neq 0\}},$$

e vamos denotar por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\phi \in C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto. Supondo que Ω é limitado temos

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\overline{\Omega});\, \operatorname{supp}\phi \subset \Omega\}.$$

Analogamente se tomamos $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, onde Γ_0 e Γ_1 são subconjuntos abertos e fechados de $\partial\Omega$, podemos definir

$$C_\Gamma^\infty(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\overline{\Omega});\operatorname{supp}\phi \subset \Omega\backslash\Gamma\},$$

onde $\Gamma \in \{\Gamma_0, \Gamma_1, \partial\Omega\}$.

Para $1 \leq p < \infty$ denotamos por $L^p(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis, segundo Lebesgue, tais que

$$\int_\Omega |u|^p < +\infty.$$

e $L^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções reais mensuráveis, segundo Lebesgue, que são limitadas. Sabe-se que $L^p(\Omega)$ e $L^\infty(\Omega)$ são espaços de Banach com as normas

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ e } \|u\|_\infty := \inf\{M > 0;\, |u| < M \text{ q.t.p } \Omega\}$$

respectivamente. Além disso denotamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto das funções reais mensuráveis tais que

$$\int_K |u|^p < \infty$$

para todo subconjunto compacto K de Ω. E $L^\infty_{loc}(\Omega)$ representa o conjunto das funções reais mensuráveis tais que

$$\sup_K \operatorname{ess} |u| < \infty$$

para todo subconjunto compacto K de Ω. É sabido que o conjunto $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega uv, \quad u,v \in L^2(\Omega).$$

Para qualquer multi-índice

$$\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_N) \in \mathbb{N}^N$$

temos as seguintes notações

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^N \alpha_j, \quad D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}.}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Usando integração por partes vale que, dado $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega uD^\alpha\phi = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \phi D^\alpha u. \tag{A.1}$$

Para uma demonstração desse resultado veja, por exemplo, [24, Lemma 6.1.1]. Note que como $D^\alpha\phi$ possui suporte compacto, o lado esquerdo da igualdade (A.1) faz sentido mesmo que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. De fato, temos que

$$\left|\int_\Omega uD^\alpha\phi\right| \le \int_S |u||D^\alpha\phi| \le \|\phi\|_\infty \int_S |u| < \infty,$$

onde $S \subset \Omega$ representa o suporte compacto de ϕ. Essa observação nos motiva a seguinte definição.

Definição 59. Sejam $u,v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Então dizemos que

$$v = D^\alpha u$$

no sentido fraco ou equivalentemente, que v é a derivada fraca de ordem α de u, se

$$\int_\Omega uD^\alpha\phi = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \phi u, \quad \forall\phi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{A.2}$$

A derivada fraca, se existir é única. De fato, se $v,w \in L^1_{loc}(\Omega)$ satisfazem

$$\int_\Omega v\phi = \int_\Omega w\phi, \quad \forall\phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

então $v = w$ q.t.p em Ω (veja [8, Corolário 4.24]).

Sejam $1 \le p \le \infty$, $k \in \mathbb{N}^N$ e $\alpha \in \mathbb{N}^N$ com $|\alpha| \le k$ definimos o espaço de Sobolev como

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^1_{loc}(\Omega); \exists\, D^\alpha u \text{ e } D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

Tal espaço é de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } p < \infty, \\ \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, \text{ se } p = \infty. \end{cases}$$

Se $p = 2$, $W^{k,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, com produto interno

$$\langle u, v\rangle_{W^{k,2}(\Omega)} := \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v, \quad u, v \in W^{k,2}(\Omega).$$

Enunciaremos agora alguns resultados clássicos que são utilizados ao longo do trabalho.

Teorema A.1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tais que

$$\int u\phi = 0, \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Então, $u = 0$ q.t.p em Ω.

Demonstração. Ver [8, Corollary 4.24.], ■

Teorema A.2 (Teorema da Divergência). Sejam Ω um subconjunto aberto aberto de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1 com fronteira $\partial\Omega$ limitada e $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Então

$$\int_\Omega div(u)dx = \int_{\partial\Omega} \langle \mathcal{T}_{\partial\Omega}(u), \eta\rangle dS.$$

Demonstração. Ver [24, Theorem 6.3.4]. ■

Teorema A.3. Suponha que Ω é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^N$ e $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é um difeomorfismo de classe C^1. Se f é uma função Lebesgue mensurável em $h(\Omega)$, então $f \circ h$ é Lebesgue mensurável em Ω. Além disso, se $f \in L^1(h(\Omega))$, então

$$\int_{h(\Omega)} f(x)dx = \int_\Omega f \circ h(x)|\operatorname{Jac} h(x)|dx$$

Demonstração. Ver [15, Theorem 2.47] ■

Teorema A.4 (Teorema de Lax-Milgran). Sejam H um espaço de Hilbert e $\mathfrak{a} : H^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua e coerciva. Então, para todo $\varphi \in H'$ existe um único $u_\varphi \in H$ tal que

$$\varphi(u) = \mathfrak{a}(u_\varphi, u), \quad \forall u \in H.$$

Demonstração. Ver [8, Theorem 5.6.], ■

Teorema A.5 (Imersão de Sobolev). Seja $p \in (1, +\infty)$ então as seguintes imersões são contínuas

i) $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega)$ se $p < N$.

ii) $W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\varsigma}(\overline{\Omega})$, se $p > N$.

iii) $W^{2,p}(\Omega) \subset L^{\frac{Np}{N-2p}}(\Omega)$ se $p < N/2$.

iv) $W^{2,p}(\Omega) \subset C^{1,\varsigma}(\overline{\Omega})$, se $p > N/2$, onde

$$\varsigma := \begin{cases} \left[\dfrac{N}{p}\right] + 1 - \dfrac{N}{p}, \text{ se } \left[\dfrac{N}{p}\right] < \dfrac{N}{p} \\ 1^-, \text{ se } \left[\dfrac{N}{p}\right] = \dfrac{N}{p}. \end{cases}$$

Demonstração. Ver [1, Theorem 5.4] ■

Teorema A.6. Suponha que

$$u \in \bigcup_{N<p\leq+\infty} W^{2,p}(\Omega)$$

então $u \in C^1(\Omega)$ e é duas vezes classicamente diferenciável q.t.p em Ω. Além disso, a derivada clássica $D^\alpha u$ é igual a correspondente derivada fraca q.t.p em Ω para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ com $|\alpha| \leq 2$.

Demonstração. [23, Cap. viii, Theorem 1] ■

Teorema A.7 (Teorema de Rellich-Kondrachov). Suponha que $p \in [1, +\infty)$. Então as seguintes imersões são compactas

i) $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ se $p < N/2$ para todo $1 \leq q < \dfrac{Np}{N-2p}$.

ii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\varsigma}$ para todo $\varsigma < \gamma$ se $p > N$ e $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\varsigma}$ se $p > N/2$, para todo $\varsigma < \gamma$, onde γ é dado por

$$\gamma := \begin{cases} \left[\dfrac{N}{p}\right] + 1 - \dfrac{N}{p}, \text{ se } \left[\dfrac{N}{p}\right] < \dfrac{N}{p} \\ 1^-, \text{ se } \left[\dfrac{N}{p}\right] = \dfrac{N}{p} \end{cases}$$

Além disso,

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)\ , \forall p \in [1, +\infty]$$

Demonstração. [24, Theorem 6.2] ■

Teorema A.8 (Desigualdade de Hölder). Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e q o seu expoente conjugado, ou seja

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Suponha que $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}$$

Demonstração. Ver [8, Pág. 92, Theorem 4.6], ■

Teorema A.9 (de regularidade de soluções fracas). Sejam $\mathcal{L}$ um operador uniformemente elíptico satisfazendo as hipóteses do Capítulo 1, $f \in L^p(\Omega)$, $p > 1$. Suponha que o problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \text{ em } \Omega, \\ \mathfrak{B}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

possua uma solução fraca. Então, $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

Demonstração. Ver [17, Theorem 9.15 e Lemma 9.17] ■

Lema A.1. Suponha que Ω seja de classe C^2. Então existem $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ e $\gamma > 0$ tais que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \geq \gamma, \quad \forall x \in \Gamma_1$$

Demonstração. Ver [20, Lemma 2.2.2] ■

Teorema A.10 (Teorema do Traço). Suponha que Ω é de classe C^1 e sejam $p \in [1, +\infty)$ e $\Gamma \in \{\Gamma_0, \Gamma_1, \partial\Omega\}$. Então existe um único operador linear e contínuo

$$\mathcal{T}_\Gamma \in \mathfrak{L}(W^{1,p}(\Omega), L^p(\Gamma))$$

tal que

$$\mathcal{T}_\Gamma u = u\Big|_\Gamma, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$

$\mathcal{T}_\Gamma$ será chamado de operador dp traço de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre Γ e, para todo $u \in W^{1,p}(\Omega), \mathcal{T}_\Gamma u \in L^p(\Gamma)$ será referido como o traço de u sobre Γ.

Pela unicidade, obtemos também que

$$\mathcal{T}_{\partial\Omega} = \mathcal{T}_{\Gamma_0} \otimes \mathcal{T}_{\Gamma_1}$$

Demonstração. Ver [24, Theorem 6.3.3.]. ■

Este resultado nos permite definir o conjunto

$$W^{1,p}_\Gamma(\Omega) := \left\{u \in W^{1,p}(\Omega); \mathcal{T}_\Gamma u = 0\right\} = N[\mathcal{T}_\Gamma],$$

onde $\Gamma \in \{\Gamma_0, \Gamma_1, \partial\Omega\}$.

Teorema A.11. Sejam $\Gamma \in \{\Gamma_0, \Gamma_1, \partial\Omega\}$ e $p \in [1, \infty)$. Então,

$$W^{1,p}_\Gamma(\Omega) = \overline{C^\infty_\Gamma(\Omega)}^{W^{1,p}_\Gamma(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [20, Theorem 4.2.2] e seção 5.3.2 de [14]. ■

Teorema A.12 (Teorema da Função Implícita para espaços de Banach). Sejam X, Y, Z espaços de Banach, $U \subset X$ e $V \subset Y$ vizinhanças de x_0 e y_0 respectivamente e $F : U \times V \to Z$ contínua e diferenciável com respeito a y. Suponha também que $F(x_0, y_0) = 0$ e $F_u(x_0, y_0)$ seja bijetiva. Então, existem bolas $\overline{B}_r(x_0) \subset U, \overline{B}_\delta(y_0) \subset V$ e uma única aplicação contínua $T : B_r(x_0) \to B_\delta(y_0)$ tal que $Tx_0 = y_0$ e cujas únicas soluções de $F(x,y) = 0$ em $B_r(x_0) \times B_\delta(y_0)$ são (x, Tx).

Demonstração. Ver [11, Theorem 15.1] ■

Bibliografia

[1] Adams, R. A. (1975). *Sobolev spaces*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London.

[2] Allegretto, W. and Barabanova, A. (1996). Positivity of solutions of elliptic equations with nonlocal terms. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 126(3):643–663.

[3] Amann, H. (1977). Errata: "Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces" (SIAM Rev. **18** (1976), no. 4, 620–709). *SIAM Rev.*, 19(4):vii.

[4] Amann, H. (2005). Maximum principles and principal eigenvalues. In *Ten mathematical essays on approximation in analysis and topology*, pages 1–60. Elsevier B. V., Amsterdam.

[5] Amann, H. and López-Gómez, J. (1998). A priori bounds and multiple solutions for superlinear indefinite elliptic problems. *J. Differential Equations*, 146(2):336–374.

[6] Berestycki, H., Nirenberg, L., and Varadhan, S. R. S. (1994). The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains. *Comm. Pure Appl. Math.*, 47(1):47–92.

[7] Bony, J.-M. (1967). Principe du maximum dans les espaces de Sobolev. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 265:A333–A336.

[8] Brezis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York.

[9] Cano-Casanova, S. and López-Gómez, J. (2002). Properties of the principal eigenvalues of a general class of non-classical mixed boundary value problems. *J. Differential Equations*, 178(1):123–211.

[10] Daners, D. and Koch Medina, P. (1992). *Abstract evolution equations, periodic problems and applications*, volume 279 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York.

[11] Deimling, K. (1985). *Nonlinear functional analysis*. Springer-Verlag, Berlin.

[12] Delgado, M., Suárez, A., and Duarte, I. B. M. (2019). Nonlocal problems arising from the birth-jump processes. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 149(2):447–469.

[13] Du, Y. (2006). *Order structure and topological methods in nonlinear partial differential equations. Vol. 1*, volume 2 of *Series in Partial Differential Equations and Applications*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ. Maximum principles and applications.

[14] Evans, L. C. (1998). *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI.

[15] Folland, G. B. (1999). *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.

[16] Freitas, P. and Sweers, G. (1998). Positivity results for a nonlocal elliptic equation. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 128(4):697–715.

[17] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S. (2001). *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin. Reprint of the 1998 edition.

[18] Hopf, E. (1927). Elementare bemerkungen über die lösungen partieller differntialgleichungen zweiter ordnung vom elliptischen typus. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, 19:147–152.

[19] Hopf, E. (1952). A remark on linear elliptic differential equations of second order. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3:791–793.

[20] López-Gómez, J. (2009). The strong maximum principle. In *Mathematical analysis on the self-organization and self-similarity*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B15, pages 113–123. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto.

[21] López-Gómez, J. and Molina-Meyer, M. (1994). The maximum principle for cooperative weakly coupled elliptic systems and some applications. *Differential Integral Equations*, 7(2):383–398.

[22] Protter, M. H. and Weinberger, H. F. (1984). *Maximum principles in differential equations*. Springer-Verlag, New York. Corrected reprint of the 1967 original.

[23] Stein, E. M. (1970). *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J.

[24] Willem, M. (2013). *Functional analysis*. Cornerstones. Birkhäuser/Springer, New York. Fundamentals and applications.