

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO, CONTABILIDADE E GESTÃO**  
**PÚBLICA**

**DEPARTAMENTO DE ECONOMIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA**

**LIMITES AO ENDIVIDAMENTO SOB RESTRIÇÕES OCASIONAIS**

**Marcelo Araujo da Costa**  
**Orientador: Prof. Dr. Joaquim Pinto de Andrade**

**Brasília-DF**

**2020**



MARCELO ARAUJO DA COSTA

**LIMITES AO ENDIVIDAMENTO SOB RESTRIÇÕES OCASIONAIS**

Tese apresentada ao Programa de PósGraduação em Economia do Departamento de Economia da Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Gestão Pública da Universidade de Brasília como requisito à obtenção do título de Doutor em Economia

Orientador: Prof. Dr. Joaquim Pinto de Andrade

**Brasília-DF**

**2020**

## **Agradecimentos**

Agradeço ao Prof. Joaquim Andrade por todas as sugestões, críticas e indicações de caminhos a seguir. Essa jornada, sem sua participação, seria muito mais difícil e, talvez, não fosse possível. As virtudes do presente trabalho tem a sua participação, direta ou indiretamente. As eventuais falhas são exclusividades do autor.

Agradeço, ainda, corpo funcional do Departamento de Economia, em especial, aos demais professores do programa, através da forma dedicada e instigante como proferiram suas aulas e seminários, por contribuírem para o meu enriquecimento acadêmico. Entre os gigantes que o compõem, um agradecimento especial aos professores Roberto Ellery e Jorge Arbache. Ainda dentro do Departamento, não é possível deixar de prestar às devidas homenagens aos servidores da secretaria de pós-graduação, especialmente Joana e Carina pelo apoio e diligência.

Aos colegas da pós-graduação, agradeço o convívio, a troca de conhecimentos, e a colaboração dos estudos em grupo que me ajudaram a transpor os árduos obstáculos durante essa trajetória. Entre tantos, Thiago Cavalcanti foi essencial, auxiliando, principalmente na área de informática, a conclusão desse trabalho.

Aos meus amores:  
Carina e Guilherme



## **Resumo**

Este artigo investiga as flutuações dos ciclos econômicos em uma economia hipotética em que agentes econômicos enfrentam um teto agregado de endividamento. O teto da dívida visa capturar a dinâmica recorrente enfrentada pelos países emergentes, tais como escassez de colateral e imperfeições no mercado de capitais. Os principais resultados mostram que uma economia operando neste cenário apresenta um crescimento lento em função de restrições ocasionalmente vinculantes. A abordagem teórica lança luzes sobre eventos históricos passados em economias de mercados emergentes usando um modelo DSGE. Como resultado, o impacto dos choques positivos sobre a dívida é amplificado e seus efeitos perduram por mais tempo. As dinâmicas de equilíbrio implícitas são comparadas àquelas que surgem de um modelo em que restrições ocasionalmente vinculantes sobre a dívida não são válidas.

**Palavras-chave:** otimização, modelos de equilíbrio geral, ciclos de negócios.

**Classificação JEL:** C61, D58, E32.

## **Abstract**

This paper investigates business cycles fluctuations in a hypothetical economy in which economic agents face an aggregate debt ceiling. The debt ceiling aims to capture recurrent dynamics faced by emerging countries such as lack of collateral and capital markets imperfections. The main results show that an economy operating in such scenario presents a sluggish growth as consequence of occasionally binding constraints. The theoretical approach sheds lights over past historical events in emerging markets economies using a DSGE model. As a result, the impact of positive shocks on debt is amplified and its effects last for a longer span of time. The implied equilibrium dynamics are compared to those arising from a model in which occasionally binding constraints over the debt is not valid.

**Keywords:** optimization, general equilibrium models, business cycles, fiscal policy.

**JEL Classification:** C61, D58, E32, E62.



## Sumário

1 Introdução .....	10
2 Referencial Teórico.....	12
2.1 Métodos de Soluções Numéricas .....	13
2.1.1 Perturbação .....	14
2.1.2 Projeção .....	15
2.1.3 Simulação Estocástica .....	18
2.2 Métodos Aplicados a Restrições Ocasioneis .....	21
3 Endividamento Excessivo: riscos e abordagens.....	26
3.1 Modelo .....	28
3.2 Calibragem e Funções Impulso Resposta .....	31
4. Conclusão .....	35
5 Anexos .....	36
6 Bibliografia .....	41

## 1. Introdução

No esteio das medidas para o enfrentamento da pandemia, mais de dois terços dos governos em todo o mundo aumentaram seu apoio fiscal para mitigar as consequências econômicas decorrentes das ações de isolamento social. Dados consolidados pelo FMI (IMF, 2020) reportam, até o momento, US\$ 10,8 trilhões, subdivididos entre gastos adicionais e receitas perdidas (US\$ 5,4 trilhões) e suporte à liquidez (demais US\$ 5,4 trilhões) – via operações de empréstimos, injeções de capital e garantias –, visando a manter fluxos de caixa e limitar as falências. O quantum final desse apoio fiscal, contudo, ainda é incerto, pois é dependente da evolução de passivos contingentes (suporte de liquidez e perdas/não-pagamentos de financiamentos) vinculados às referidas intervenções. A esperada forte contração no produto, conjugada com a conseqüente queda nas receitas e o necessário apoio discricionário, conduzem ao aumento da dívida e déficits do governo.

A escalada dos gastos e da dívida coloca um *puzzle* para os formuladores de política. Como destacado por Uribe (2002), certos arranjos monetário-fiscais são incompatíveis com a estabilidade de preços e a solvência do governo. Para evitar a materialização de tais arranjos, a literatura advoga a adoção de regras fiscais para restringir o endividamento excessivo – na forma de limites aos índices de dívida/PIB ou déficit / PIB –, acoplado com alguma penalidade, em caso de violação do critério selecionado.

Embora regras fiscais tenham sido estudadas em vários ambientes como estratégia de solução para problemas de inconsistência intertemporal por diversos autores – por exemplo, Athey et al. (2005), Golosov e Iovino (2019), Halac e Yared (2014 e 2018) e Dovis e Kirpalani (2018) – pouco foi discutido sobre o comportamento de uma economia nas proximidades dos limites estabelecidos. A questão de economias operarem próximo a limites recebeu impulso a partir dos desdobramentos da Crise Financeira Global, no período 2008-10, quando, face às medidas monetárias empregadas, a política monetária viu-se restringida a ajustar as taxas de juros devido ao limite inferior zero (ZLB).

A partir dessa literatura, observou-se a presença de respostas assimétricas na relação entre variáveis endógenas, bem como a importância da efetividade da restrição como determinante

do tipo de resposta, duração de efeitos e incentivos envolvidos. Quando as restrições são frouxas, as demais variáveis dispõem de plena liberdade para ajuste. Variáveis de preço e quantidade ajustam-se de modo suave à exposição de um determinado choque. Por outro lado, quando a restrição está ativa, impossibilitando o deslocamento para além de determinado patamar, as variáveis assumem um canal preferencial de deslocamento.

Com os níveis de dívida pública superando 80% do PIB, em um contexto de agravamento do quadro fiscal, discussões sobre a dominância fiscal e/ou rompimento da *regra de ouro* tornam-se recorrentes. Ao longo das décadas, a questão do *funding* do Estado brasileiro esteve sempre como plano de fundo das principais discussões macroeconômicas. Se, por décadas, a inflação forneceu os recursos necessários, a partir da estabilização em 1994, o aumento da carga tributária tornou-se uma estratégia recorrente. Contudo, a partir de 2016, um corte institucional mais profundo ocorreu, o deslocamento do financiamento via impostos (inflacionários ou não) para a introdução de medidas de restrição de despesas (*Teto dos Gastos*).

Em que pese essa profunda alteração estrutural, escassos são os trabalhos que podem lançar uma luz sobre os efeitos de uma economia sob tais condições. Adicionalmente, dada a evolução fiscal recente, os limites impostos por tal mudança de regime se aproximam com velocidade muito acima da imaginada pelo formulador de política. Nesse cenário, como responderia uma economia similar à brasileira em um contexto de restrição de despesas ativas? O presente trabalho busca preencher essa lacuna, investigando os impactos de um endividamento excessivo sobre uma economia. Para tanto, faz-se uso de um modelo DSGE inspirado no trabalho de Uribe (2006).

## 2. Referencial Teórico

Após a crise financeira, descortinou-se uma rápida expansão na literatura acadêmica sobre as implicações de variáveis econômicas alcançando limites nominais, implicando na presença de respostas assimétricas de variáveis econômicas. Em grande medida, essa literatura enfatizava a presença de restrições circunscritas em períodos de tempo. Fenômenos macroeconômicos, em sua maioria, apresentam restrições, mesmo que ocasionais, implícitas tais como a positividade sobre o investimento, o limite superior<sup>1</sup> em horas e restrições sobre níveis de empréstimos contraídos por famílias, empresas ou bancos (Holden, 2016).

Nesse sentido, natural que uma nova classe de modelos, superadas restrições computacionais, buscasse incorporar tais elementos. Em resposta à crise do *subprime*, modelos investigando o comportamento de fenômenos macroeconômicos na proximidade do limite inferior zero (ZLB) sobre as taxas de juros nominais tornaram-se proeminentes. Para captar esses fenômenos, diversos algoritmos foram propostos com destaques para os trabalhos de Holden (2010), Holden e Paetz (2012), Judd, Maliar e Maliar (2012), Guerrieri e Iacoviello (2015) e Kiley e Roberts (2017).

Esses modelos, mais ricos e complexos, em regra não admitem soluções fechadas, e, portanto, devem ser explicitados em termos de soluções aproximadas. Essas soluções, por sua vez, subdividem-se em dois grupos principais. O primeiro grupo, representativo de análises locais, expressa as soluções como uma combinação de funções elementares cujos resultados são válidos em uma vizinhança do ponto investigado. Um segundo grupo, denominado análise global, busca realizar a junção de sucessivas vizinhanças, cujos comportamento local é conhecido, via uma aproximação uniforme ao longo de todo o intervalo sob estudo. (Bender e Orszag, 2013).

Em importante *survey* sobre métodos numéricos aplicados a modelos econômicos dinâmicos, Maliar e Maliar (2014) destacam a existência de três distintas classes de solução numérica: perturbação, projeção e simulação estocástica. Introduzidos à literatura econômica por Judd e

---

<sup>1</sup> Fato que algumas dessas restrições, tais como horas de trabalho ou positividade do investimento, surgem como restrições naturais. Contudo, outras restrições, tais como limites impostos por regras, emergem como construções sociais e podem, eventualmente, ser abandonadas, colocando questões tais como a probabilidade de abandono. Nesse último caso, inscreve-se, por exemplo, modelos cambiais que lidam com possibilidade de troca de regime.

Guu (1993), os métodos de perturbação se tornaram uma ferramenta popular na literatura<sup>2</sup>. Práticos para problemas com alta dimensionalidade, esses modelos, contudo, estão sujeitos à perda de precisão das soluções locais se o ponto no qual as soluções são computadas corresponder à uma singularidade distinta da observada pelo verdadeiro *steady state*, especialmente na presença de fortes não linearidades e comportamento não-diferenciável nas funções de decisão.

Métodos de projeção, por seu turno, são precisos e rápidos em modelos com poucas variáveis. Mas, conforme o número de variáveis cresce, os modelos se tornam intratáveis face à presença de dois elementos intrínsecos ao método: regras computacionalmente onerosas, tanto de produto tensorial (na interpolação de funções de decisão e cálculo de integrais aproximadas) quanto método de Newton (necessário para a resolução de sistemas de equações não-lineares).

Finalmente, métodos baseados em simulação, introduzidos por Fair and Taylor (1983) e Marcet (1988), não são fortemente restritos por problemas de alta dimensionalidade, porém, sob a abordagem usual (integração de Monte Carlo) verifica-se uma baixa taxa de convergência, limitando consideravelmente a precisão. Consequentemente, para se obter uma solução precisa, requer-se numerosas interações do método. Cada um desses métodos é discutido, apresentando pontos fortes e eventuais limitações na próxima seção.

## 2.1 Métodos de Soluções Numéricas

Modelos DSGE são flexíveis o suficiente para rastrear com precisão e prever, adequadamente, séries temporais macroeconômicas. Uma característica comum desses modelos é que as regras de decisão dos agentes são derivadas de suposições sobre preferências, tecnologias e informações diversas sobre regime(s) de política fiscal e (ou) monetária vigente(s) na forma de otimização intertemporal. Como consequência, esse paradigma entrega modelos empíricos com forte grau de coerência teórica.

Não obstante, conforme modelos econômicos crescem e avançam em complexidade, em ritmo ainda mais rápido, a eficiência computacional torna-se um fator crítico na seleção dos

---

<sup>2</sup> Em parte, pelo principal software aplicado a resolução desses problemas, Dynare, ser uma coleção de métodos de perturbação.

distintos algoritmos de solução. O objetivo desta seção é fornecer uma visão ilustrativa da solução de última geração de métodos usados para obter mensurações de modelos DSGE.

### 2.1.1 Perturbação

Métodos de perturbação, como o proposto por Judd e Guu (1993) realizam expansões de Taylor das regras de decisão dos agentes econômicos, ao redor do *steady state*, condicionadas por um parâmetro de perturbação<sup>3</sup>. Segundo Fernández-Villaverde *et alli* (2016), algumas razões contribuíram para a popularização desse método entre pesquisadores.

Em primeiro lugar, as soluções de perturbação são precisas em torno de uma solução aproximada que é inerentemente local<sup>4</sup>. Adicionalmente, a estrutura aproximada da solução é intuitiva e facilmente interpretável. Por fim, uma perturbação de primeira ordem é equivalente à uma linearização tradicional, facilitando a incorporação de resultados tradicionais da literatura econômica.

*Grosso modo*, o método de perturbação é operacionalizado via substituição, no equilíbrio, das funções de decisão desconhecidas. Em seguida, diferencia-se em relação às variáveis de interesse e a perturbação. Assim, dadas as funções políticas descritas como:

- $G_p^1(x^1, x^2, \sigma) = \sum_{i,j,m} a_{ijm}^1 (x^1 - x_{ss}^1)^i (x^2 - x_{ss}^2)^j \sigma^m$
- $G_p^2(x^1, x^2, \sigma) = \sum_{i,j,m} a_{ijm}^2 (x^1 - x_{ss}^1)^i (x^2 - x_{ss}^2)^j \sigma^m$
- $G_p^3(x^1, x^2, \sigma) = \sum_{i,j,m} a_{ijm}^3 (x^1 - x_{ss}^1)^i (x^2 - x_{ss}^2)^j \sigma^m$

Dado que, em equilíbrio, quaisquer valores das variáveis de interesse conjugados com o parâmetro de perturbação as condições de primeira ordem são iguais, um sistema criado por derivadas de qualquer ordem também será igual a zero. Em sua especificação padrão, ao

---

<sup>3</sup> Judd e Guu (2001) enfatizam a importância do desvio padrão, como parâmetro de perturbação, em modelos de tempo discretos, já que momentos ímpares podem ser importantes para efeitos de calibragem.

<sup>4</sup> No entanto, pesquisadores têm documentado que a perturbação frequentemente exibe boas propriedades globais ao longo de uma ampla gama de valores variáveis de estado tal como apresentado por Aruoba *et alli* (2006) e Judd (1992)

avaliar as derivadas em *steady state* e  $\sigma = 0^5$ , obtem-se um sistema de equações nos coeficientes desconhecidos  $a_{ijm}^1$ ,  $a_{ijm}^2$  e  $a_{ijm}^3$ . Encontrados os coeficientes, é possível obter um sistema linear, de segunda ordem, das regras de decisão. Iterando (i.e., tomando uma derivada de uma ordem superior, substituindo coeficientes encontrados, e resolvendo para os novos coeficientes desconhecidos), obtem-se os coeficientes de segunda ordem e assim, sucessivamente, para ordens superiores<sup>6</sup>.

Por sinal, como destaca Fernández-Villaverde *et alli* (2016), perturbações de ordem superior, apesar de intuitivas, são suscetíveis a gerar trajetórias explosivas, mesmo quando a aproximação linear correspondente é estável. Essas trajetórias explosivas emergem pela indução de pontos fixos adicionais, criados pelos termos de ordem superior, para o sistema, em torno dos quais a solução aproximada é instável.

Diversos artigos, tais como Kim *et alli* (2008), Lan e Meyer-Godhe (2013) e Den Haan e De Wind (2012), mostram estratégias alternativas para eliminar essas soluções instáveis: aproximações aparadas (*pruning approximations*). *Grosso modo*, a ideia consiste em eliminar, nas recursões, os termos de ordem superior à ordem da solução. Kim *et alli* (2008), para o caso das aproximações de segunda ordem, mostram que a solução aparada não é explosiva. Posteriormente, Andreasen *et alli* (2013, *apud* Fernández-Villaverde *et alli* (2016)) generalizam os resultados de Kim *et alli* ao demonstrar como aplicar aproximações aparadas de qualquer ordem arbitrária.

Note que, pelo procedimento descrito, métodos de perturbação requerem a existência de todas as derivadas demandadas, o que inviabiliza a adoção do procedimento padrão em casos de *occasionally binding constraints*, posto que, no ponto em que a restrição está ativa, não existe a derivada. Kim *et alli* (2010) e Mertens e Judd (2013), entre outros, buscam preencher essa lacuna via a introdução de funções de penalidade. Adicionalmente, uma estratégia usual para enfrentar problemas de não-linearidade, é a mudança de variáveis. Uma mudança adequada pode transformar um problema não-linear em linear e, desse modo, permitir a aplicação do método. Por fim, Foester *et alli* (2014) conseguem tratar essa restrição no contexto de

---

<sup>5</sup>Segundo Bender e Orczag (1999), o procedimento geral da teoria da perturbação é identificar um pequeno parâmetro, geralmente denotado por  $\varepsilon$ , de tal forma que quando  $\varepsilon = 0$  o problema se torna solúvel. Ao se impor  $\sigma = 0$ , recai-se em um modelo determinístico, e, portanto, torna-se uma escolha natural.

<sup>6</sup> Ao implementar a perturbação, duas decisões são necessárias: a ordem da perturbação e escolher se realizamos nossa perturbação em níveis e logs.

modelos DSGE com estrutura de Markov-Switching (MSDSGE) ao introduzir partições do espaço paramétrico de Markov-Switching visando manter um número máximo de parâmetros variantes no tempo para uma dada perturbação.

### 2.1.2 Projeção

Judd (1992) introduz o método de projeção, um método numérico desenvolvido para tratar equações diferenciais parciais, à literatura econômica. O método busca expressar o equilíbrio como a solução de alguma equação de operadores<sup>7</sup>, conjugando-a com um espaço topológico – em regra, infinito – no qual a solução está inserida. Para ser operacional, o método foca em subespaços de dimensão finita de aproximações da verdadeira solução passíveis de representação computacional, definindo um espaço de soluções factíveis. Nesse espaço de soluções factíveis, seleciona-se àquela com melhor ajuste.

Embora simples, em termos conceituais, sua operacionalização envolve um conjunto significativo de elementos, a saber: a definição do espaço de soluções factíveis, o conceito de melhor ajuste e a métrica, a partir da qual, o melhor ajuste é determinado. Dado um operador na forma  $Ly = 0$ , é possível representar as potenciais soluções do problema em questão como o limite uniforme de uma sequência de polinômios na forma:

$$\hat{y}(t; a) \equiv 1 + \sum_{i=1}^n a_i t^i$$

Ao escrever  $y$  como uma função polinomial obtém-se a necessária redução do espaço de soluções a um subespaço finito. Entre as definições de melhor ajuste, Judd (1992) define uma função residual como

$$R(t; a) \equiv L\hat{y}(t, a)$$

Se o parâmetro  $a$  é solução de  $\hat{y}(t; a)$ , então  $a$  torna a função residual nula para todo  $t \in [0, T]$ . Nesse sentido, métodos de projeção selecionam  $a$  de sorte que  $R(t; a)$ , como uma função de  $t$ , seja tão próximo de zero quanto possível. Nesse ponto, os modelos existentes definem duas estratégias para a definição de funções de base que minimizam a função

---

<sup>7</sup> Por equações de operadores, entende-se equações diferenciais ordinárias, equações de diferenças, equações diferenciais parciais e equações diferenciais fracionárias.



residual: elementos finitos (onde as funções são não-nulas apenas localmente) e espectrais (onde as funções de base são não-nulas globalmente).

Aruoba *et alli* (2006) discutem essas duas abordagens. Elementos finitos busca uma regra de decisão na forma  $P_{fe}(x^1, x^2, \bar{\theta}) = \sum_{i,j} \bar{\theta}_{ij} \psi_{ij}(x^1, x^2)$ , onde  $\psi_{ij}(x^1, x^2)$  é um conjunto de funções de base e  $\bar{\theta}$  um vetor de parâmetros a se determinar. Por construção, o método fornece flexibilidade quanto ao tamanho dos intervalos de validade das funções de base (viabilizando aproximações acuradas da regra de decisão) ao mesmo tempo em que é aderente a alguns procedimentos redutores do tempo de computação<sup>8</sup>.

A abordagem spectral, tal qual a de elementos finitos, busca uma regra de decisão na forma  $P_{sm}(x^1, x^2, \bar{\theta}) = \sum_{i,j} \bar{\theta}_{ij} \psi_{ij}(x^1, x^2)$ , onde  $\psi_{ij}(x^1, x^2)$  é um conjunto de funções de base e  $\bar{\theta}$  um vetor de parâmetros a se determinar. A diferença reside no fato que as funções de base são não-nulas por quase a totalidade do intervalo. Comparativamente, o método spectral apresenta duas vantagens em relação a abordagem de elementos finitos: facilidade de implementação e acurácia da solução (ante a maior disponibilidade de funções de base).

Em contrapartida, se a regra de decisão apresentar uma rápida mudança no comportamento local ou não-diferenciabilidade, a aproximação resultante pode não entregar um bom ajuste. Por fim, uma escolha recorrente de funções de base (métrica) reside na seleção de polinômios de Chebyshev, posto que oferecem, com a devida transformação das variáveis, uma relação contínua de ortogonalidade ao mesmo tempo em que define um mapeamento linear da variável de interesse (Dou *et alli*, 2017).

Em modelos simples, o método conjuga acurácia e rapidez, porém se o número de endógenas cresce, o tempo de execução cresce de forma exponencial. A razão, como destaca, Maliar e Maliar (2014), reside na adoção de produtos tensoriais – tanto para interpolar as regras de decisão, quanto para a aproximação de integrais – e pela adoção do Método de Newton para a resolução de sistemas de equações não-lineares. Os autores, contudo, discutem alternativas para reduzir o custo dos métodos de projeção tais como a substituição do *grid* de produtos tensoriais, por um *grid* esparsos de Smolyak – como proposto por Krueger e Kubler (2004).

---

<sup>8</sup> Tipicamente, o processo de execução em máquinas paralelas que desacopla a sincronização das partes de computação de um programa, permitindo que elas executem assincronamente

Métodos de projeção, comparativamente à perturbação, apresentam uma vantagem considerável: fornecem uma solução global. Chebyshev e elementos finitos produzem soluções com elevada acurácia em toda a faixa de valores de variáveis de estado<sup>9</sup>. Adicionalmente, dispõem de flexibilidade para lidar com problemas mais complexos, tais como *restrições ocasionais* e outras estruturas não-lineares. Contudo, a capacidade computacional e flexibilidade têm um custo: esforço computacional.

### 2.1.3 Simulação Estocástica

Uma classe não desprezível de modelos requer a otimização associado a existência de algum valor esperado. Em casos onde o valor esperado apresentar uma forma fechada, soluções analíticas são factíveis e métodos convencionais produzem bons resultados. Contudo, se essas soluções não estão disponíveis, diversos problemas emergem. Entre eles, a eventual ausência de convexidade e a dificuldade em garantir a convergência para um ótimo global.

De fato, quando um sistema dinâmico está sujeito a choques ou a uma variação de parâmetros que não pode ser antecipado no tempo, então os métodos convencionais de otimização encontram severas limitações na determinação de soluções ótimas. A incapacidade de incorporar um histórico dos choques, conduz à uma satisfação de objetivos *pela média*. Implícito nessa estratégia está a conversão dos eventos, de futuro incerto em passado certo, e a eliminação da incerteza (Stengel, 1994).

Em regra, sistemas dinâmicos não-lineares cujas trajetórias são governadas por choques incertos apresentam duas possíveis estratégias de solução: funções objetivas quadráticas (para as quais é possível a construção de uma solução analítica) e sistemas dinâmicos invariantes no tempo. Asmussen e Glynn (2007) descrevem uma classe geral de algoritmos iterativos úteis para a resolução da segunda classe de sistemas.

Por hipótese, um vetor de variáveis (endógenas e exógenas)  $z_t$ ,  $z_t \in Z$ , e  $u_t$ , um vetor de choques exógenos,  $u_t \in U$ , onde  $Z, Z \subset R^n$ , e  $U, U \subset R^s$ , representam o conjunto de valores factíveis para as variáveis e choques exógenos, respectivamente. Os vetores  $\{z_t, u_t\}$

---

<sup>9</sup>Aruoba *et alii* (2006) produzem evidências nesse sentido.

satisfazem, em equilíbrio,  $g(E_t[\phi(z_{t+1})], z_t, z_{t-1}, u_t) = 0$ , e  $g$  e  $\phi$  são funções conhecidas definidas por  $g: R^{m+2n+s} \rightarrow R^n$  e  $\phi: R^n \rightarrow R^m$ , onde  $n$  é o número de endógenas do modelo,  $m$  o número de expectativas condicionais e  $s$  o número de choques que incidem sobre o modelo. Por fim,  $u_t$  segue um processo de Markov de primeira ordem<sup>10</sup>.

Condições suficientes de equilíbrio incluem, além do sistema descrito por  $g(E_t[\phi(z_{t+1})], z_t, z_{t-1}, u_t) = 0$ , um conjunto de condições de transversalidade<sup>11</sup>. Adicionalmente, a informação passada, relevante para determinar  $\phi(z_{t+1})$ , uma expressão do valor esperado de  $z_t$ , é factível de ser expressa em termos de um vetor, finito, de variáveis de estado,  $x \in X$ ,  $X \subset R^l$ , que satisfaz  $x_t = f(z_{t-1}, u_t)$ ,  $f(\cdot)$  uma função conhecida. Logo, o valor esperado de  $z_{t+1}$  pode ser expresso como

$$E_t[\phi(z_{t+1})] = E_t[\phi(z_{t+1})|x_t]$$

Subsidiariamente, o modelo admite uma forma recursiva, de sorte que a expectativa condicional possa ser expressa na forma de uma função,  $\mathcal{E}(\cdot)$ , invariante no tempo, na forma

$$\mathcal{E}(x_t) \equiv E_t[\phi(z_{t+1})|x_t]$$

Por definição, a função satisfaz  $\mathcal{E} = \arg \min_{\{h: R^l \rightarrow R^m\}} E \|\phi(z_{t+1}) - h(x_t)\|^2$ ,  $\forall t$ , onde  $h(x_t)$  é uma representação alternativa do valor esperado em função de  $x_t$ . Logo, determinar a solução para  $g(E_t[\phi(z_{t+1})], z_t, z_{t-1}, u_t)$  é equivalente a encontrar uma função  $\mathcal{E}(\cdot)$  que, para um processo estocástico  $\{z_t, u_t\}$  satisfaça  $g(\mathcal{E}(x_t), z_t, z_{t-1}, u_t) = 0$ .

Um problema recorrente nessa especificação está em determinar a função  $\mathcal{E}(\cdot)$  e isso pressupõe o conhecimento pleno de  $z_t$  e este, por hipótese, inclui a esperança condicional de  $\mathcal{E}(\cdot)$  ( $\mathcal{E}(x_t) = E_t[\phi(z_{t+1})]$ ). Para solucionar essa questão, é necessário substituir  $\mathcal{E}(\cdot)$  por uma função aproximada,  $\psi(\cdot)$ , que apresenta algumas propriedades.

Formalmente, seja  $P$  uma classe de funções densa em  $\{h: R^l \rightarrow R^m\}$ . Por hipótese, cada elemento em  $P$  é caracterizado por um vetor  $\beta$ , composto por um número finito de elementos

<sup>10</sup>Um processo clássico de Markov de primeira ordem é tal que a próxima transição do estado depende somente do estado atual e não de como o estado atual foi atingido.

<sup>11</sup>Se o processo estocástico  $z_t$  satisfaz a solução do sistema, então satisfará as condições de transversalidade, se, e somente se,  $z_t$  é estacionário.

não-nulos<sup>12</sup>. A função  $\mathcal{E}(\cdot)$  é então aproximada por uma função que satisfaça  $\mathcal{E} = \arg \min_{\{h: R^l \rightarrow R^m\}} E \|\phi(z_{t+1}) - h(x_t)\|^2$  e  $g(\mathcal{E}(x_t), z_t, z_{t-1}, u_t) = 0$ .

Em termos específicos, para um dado inteiro positivo  $\nu$ ,  $\beta \in D_\nu$ , onde  $D_\nu \subset \{\beta \in R^\infty: i - \text{ésimo elemento de } \beta \text{ é nulo} > \nu\}$  é o conjunto de parâmetros admissíveis com, no máximo,  $\nu$  elementos não-nulos, e  $\{u_t\}_{t=0}^\infty$  definem um processo  $\{z_t(\beta), u_t\}_{t=0}^\infty$  como solução, para qualquer  $t$ , do sistema

$$g(\psi(\beta, x_t(\beta)), z_t(\beta), z_{t-1}(\beta), u_t) = 0$$

Para  $\mathcal{E}(\cdot)$ , soluciona-se  $\mathcal{E} = \arg \min_{\{h: R^l \rightarrow R^m\}} E \|\phi(z_{t+1}) - h(x_t)\|^2$ . Analogamente, para determinar  $\psi(\beta, \cdot)$  deve-se determinar

$$G_\nu(\beta) = \arg \min_{\xi \in D_\nu} E \|\phi(z_{t+1}(\beta)) - \psi(\xi, x_t(\beta))\|^2$$

Nesse ponto, é importante notar a semelhança com a função resíduo, explicitada no método de projeção. Os métodos, contudo, divergem quanto a forma em que a aproximação é buscada, o *grid* de buscas e os pesos escolhidos.

Se a discussão acima focou na definição de características gerais do método de solução, fica em aberto a forma específica assumida por  $\psi(\xi, x_t(\beta))$ . Entre os métodos existentes na literatura econômica, destaque-se o *Parameterized Expectations Approach* (PEA). Segundo Christiano e Fisher (2000), o método, originariamente proposto por Wright e Williams (1982), posteriormente desenvolvido por Miranda (1985) e modificado por Marcet (1988)<sup>13</sup>, cujo foco permite realizar um mapeamento conveniente das expectativas condicionais diretamente, na forma

<sup>12</sup> Marcet e Marshall (1994) destacam que esses elementos podem representar os coeficientes de um polinômio ou os elementos de uma rede neural que definem a função que se aproxima de  $\mathcal{E}(\cdot)$ .

<sup>13</sup>A abordagem de Marcet aproxima a expectativa condicional das variáveis de estado no início do período, enquanto Wright e Williams propõem aproximar a expectativa condicional da variável de decisão no período corrente. A abordagem de Marcet tende a gerar pontos não-diferenciáveis quando ocasionalmente existem restrições efetivas. O foco de Wright e Williams, por outro lado, tende a produzir respostas mais suaves.

$$G_v(\beta) = \arg \min_{\xi \in D_v} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \|\phi(z_{t+1}(\beta)) - \psi(\xi, x_t(\beta))\|^2$$

Os valores são calculados com base em séries gerados por processos de Monte Carlo, de sorte que os valores gerados,  $\{x_t(\beta)\}_{t=1}^T$ , e os pesos são determinados pela probabilidade empírica de cada valor de  $x$  nas séries geradas. Portanto, o *grid* e os pesos são determinados endógenamente pelo algoritmo<sup>14</sup>, reduzindo o tempo de busca. Além disso, a busca pela expectativa condicional que resolve o modelo pode ser realizada sem se preocupar em impor condições adicionais, reduzindo-se o número de incógnitas a se determinar e de restrições embaraçosas e, conseqüentemente, reforçando a redução do tempo de processamento.

## 2.2 Métodos Aplicados a Restrições Ocasionais

Restrições ocasionais fazem parte do cenário econômico: crises cambiais conduzem a interrupções nos fluxos financeiros e comerciais, enquanto crises bancárias deflagram, via modificações nas condições de liquidez e solvência de instituições financeiras sistemicamente relevantes, flutuações significativas no produto e no comportamento das taxas que regem os mercados financeiros. A história econômica é repleta em tais fenômenos e a ciência econômica sempre buscou o desenvolvimento de técnicas para mensurar seus efeitos.

Do ponto de vista metodológico, restrições ocasionais envolvem um aspecto de política: a entrada e saída da restrição são funções do regime e impactam variáveis diversas tais como dívida e garantias, políticas macroprudenciais e limites em taxas. Fato que tentativas de modelar restrições ocasionais possuem um largo histórico.

Um exemplo nesse sentido reside no método *eternally binding constraints* (EBC), comumente usadas na modelagem de restrições financeiras, na forma de restrições de crédito nos moldes do seminal artigo de Kiyotaki & Moore (1997) onde a capacidade dos agentes (empresários ou famílias) está limitada pela evolução dos colaterais. Em seu paradigma, a restrição (colateral) é identificada como eterna. Essa característica permite a adoção de técnicas usuais de perturbação, facilitando a solução do modelo.

---

<sup>14</sup> Esse processo é denominado *endogenous oversampling*. Esse procedimento implica que PEA somente considera os pontos onde a solução efetivamente ocorra. Nesse sentido, apenas a região relevante do espaço de estado é explorada (Marcet e Marshall, 1994).

Contudo, conforme destacado por Brzoza-Brzezina *et alli* (2012), a natureza permanente das restrições colaterais gera reações fortes, de curta duração e simétricas de variáveis macroeconômicas a choques. Fato que, para que o método seja válido, as condições de Blanchard Kahn precisam ser mantidas, mesmo quando a restrição está ativa (Binning e Maih, 2017). Na prática, EBC não permite distinguir períodos "normais" e "estressados". Nesse sentido, o método torna-se aderente a situações em que os choques sejam suficientemente pequenos.

A literatura de DSGE, contudo, foi bem-sucedida ao abordar o problema de restrições ocasionais sob uma variedade de metodologias distintas, mas que podem ser sintetizados em duas abordagens alternativas: métodos globais (projeções) e abordagens variantes do *extended path* (Fair e Taylor, 1983).

No caso de métodos globais, destaca Aruoba *et alli* (2020), regras de decisão dos agentes (ou funções de valor associadas a problemas de otimização) são representadas por uma família de funções flexíveis - por exemplo, polinômios de Chebyshev - ou por um mapeamento discreto em um domínio finito de espaço de estado. As funções flexíveis são parametrizadas por coeficientes que são escolhidos de modo que as regras de decisão resultantes (aproximadamente) satisfaçam as condições de equilíbrio do modelo e resolvam os problemas subjacentes de otimização intertemporal.

Exemplos não exaustivos nesse sentido são os trabalhos de Christiano e Fisher (2000), Mendoza e Smith (2004) e Judd *et alli* (2012). O primeiro fez uso de métodos globais para reforçar a restrição de não negatividade ao investimento, enquanto Mendoza e Smith resolvem para uma restrição ocasional de dívida. Por fim, Judd *et alli* investigam o impacto do limite inferior nominal das taxas de juros.

Esses métodos permitem que o comportamento dos agentes, na vizinhança da restrição, seja afetado, mesmo quando a restrição, ainda, não estiver ativa (em outras palavras, não estão condicionados por alguma propriedade de certo-equivalente). O custo computacional desses métodos, contudo, pode ser alto, colocando um limite superior baixo no número de variáveis de estado dos modelos factíveis de resolução.

A segunda abordagem parte da suposição que, após  $J$  períodos, o sistema retorna ao estado estacionário (quando a restrição não está ativa). Esse método resolve, numericamente, as trajetórias das variáveis, assumindo *perfect foresight* em cada ponto no tempo. Especificamente, após a definição de uma estimativa inicial, acerca da efetividade da restrição em um certo instante de tempo  $t$  e os  $j$ 's períodos subsequentes ( $j = 1, \dots, J$ ), resolve-se o sistema dinâmico para os valores das variáveis endógenas. Em seguida, torna-se factível comparar a estimativa inicial sobre a duração do regime restrito, iterando até que a solução seja consistente. Como os cálculos são baseados no estado inicial, as iterações necessitam ser repetidas, para cada  $t$ , em uma simulação de vários períodos.

A partir da solução do modelo, constrói-se uma representação de espaço de estados para um modelo empírico estimado. A solução, *per se*, gera equações de transição de estado e um conjunto de equações de mensuração vincula as variáveis de estado às observáveis. Como a solução do modelo não é linear, a representação no espaço de estados também é. Assim, é necessário um filtro não linear para calcular a função de probabilidade. A principal vantagem dessa abordagem está em simular grandes modelos, com uma precisão arbitrária, sem incorrer em problemas de dimensionalidade<sup>15</sup>. Subsidiariamente, é aderente a modelos caracterizados por fortes não-linearidades, tais como restrições ocasionais. Binning e Maih (2017), contudo, destacam uma importante limitação do método: a estrutura de certo-equivalente e a consequente inalterância do comportamento dos agentes, mesmo na proximidade de restrições ocasionais.

Adjemian e Juillard (2013) propõem uma extensão à abordagem de *extended path*, considerando que as inovações estruturais em  $t + 1$  são diferentes de zero e mantendo as inovações em  $t + s$  ( $s > 1$ ) iguais ao seu valor esperado (zero). Para superar a hipótese inicial e permitir choques não-nulos para  $t + 1, t + 2, \dots, t + S$  ( $S > 1$ ), é necessário obter as expectativas (condicionais) implícitas no sistema.

Esse procedimento é feito ao aproximar  $E[\varphi(x)]$ , onde  $x$ , por hipótese, comporta-se como uma variável aleatória de média zero e variância  $\sigma_x^2 > 0$ , e expresso por

---

<sup>15</sup>O número de operações necessárias aumenta polinomialmente com o número de endógenas e não exponencialmente, típico do método de projeções.

$$E[\varphi(x)] = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-x^2} dx$$

por

$$E[\varphi(x)] \cong \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^n w_i \phi(x_i)$$

As expectativas, em  $t$ , são obtidas ao se resolver  $p^{S n_s}$ <sup>16</sup> modelos de *perfect foresight* e obter a média entre eles. Essa abordagem, claramente, sofre com problemas de dimensionalidade.

*Piecewise linear* methods, uma variante do método *extended path*, foram desenvolvidos por Jung *et alli* (2005), Cagliarini e Kulish (2013) e Guerrieri e Iacoviello (2015) para modelar restrições ocasionais. A ideia básica do método é aproximar as regras de decisão dos agentes, globalmente, por funções lineares por partes contínuas, porém não diferenciáveis na região do espaço de estado onde a restrição se torna ativa. Por construção, as regras de decisão definem se, no próximo período, a restrição será ativa ou não e, portanto, elas capturam comportamentos de precaucionais. Adicionalmente, as regras de decisão são computadas uma única uma vez (em oposição ao compto, em cada período  $t$ , separadamente da abordagem *extended path*).

Se comparada aos demais métodos globais, baseadas em polinômios de Chebyshev de ordem superior, a *piecewise linear* reduz drasticamente o número de coeficientes a se determinar, simplificando os cálculos. Contudo, as regras de decisão, em ambos os lados do ponto contínuo e não-diferenciável, permanecem aproximadamente linear, implicando em um comportamento similar ao observado em algoritmos nos moldes *extended path*: a imutabilidade do comportamento na vizinhança da restrição.

Restrições ocasionais podem ser impostas através da adição de choques. Mais especificamente, Holden e Paetz (2012) propuseram o uso de novos choques para impor restrições de empréstimos e o limite inferior das taxas de juros, enquanto Lindé *et alli* (2016) usaram choques antecipados para reforçar o limite mais baixo das taxas de juros. Holden

---

<sup>16</sup> Número de trajetórias geradas por  $n_s$  inovações.



(2019) implementa uma versão modificada do *stochastic extended path* de Adjemian e Juillard (2013) projetado para explorar as propriedades especiais da perturbação aparada.

Enquanto na abordagem original de Adjemian e Juillard (2013), a integração, por  $S$  períodos de incerteza futura, exigia várias soluções para o problema de previsão perfeito que era exponencial, tanto no número de períodos futuros quanto de choques incidindo sobre o modelo. Entre as principais virtudes, o fato da metodologia suportar aproximações de segunda ordem, rompendo a limitação clássica de certo-equivalente, e permitindo alterações no comportamento dos agentes na proximidade da restrição.

### 3. Endividamento Excessivo: riscos e abordagens

Economias estão a caminho de um prolongado período de estresse fiscal para o qual não se visualiza uma solução. A explosiva combinação de gastos extraordinários, redução de receitas e incertezas acerca da duração de fenômenos colocam desafios importantes para os formuladores de políticas. No cerne dessa discussão, a decisão, por governos, entre suavizar o consumo ou não (e sua contraparte de acúmulo ou não de dívidas e, portanto, maior exposição ao risco de inadimplência).

Nesse sentido, o gerenciamento da dívida assume uma posição de centralidade para assegurar importantes objetivos macroeconômicos e, portanto, da política fiscal. Não obstante, em que pese sua relevância para *policymakers* a política fiscal é pouco explorada na literatura<sup>17</sup>. Em muitos casos, como destaca Tovar (2008), minimizando, portanto, qualquer possível interação das políticas fiscais com a política monetária. Em parte, face à hipótese de equivalência ricardiana.

Como resultado, questões relevantes para a gestão macroeconômica, tais como a distribuição de impostos ao longo do tempo se torna irrelevante, relegando a um papel secundário a riqueza financeira ou mesmo sua distribuição entre os agentes para a dinâmica da economia. Incorporar de maneira mais significativa o papel das políticas fiscais requer o abandono de estruturas com a equivalência ricardiana<sup>18</sup> e a incorporação de imperfeições de mercado, tanto atemporal quanto intertemporalmente. É necessário, portanto, compreender as razões para a não validade de dois pilares relevantes: Modigliani-Miller e a equivalência ricardiana. Sem modelos que incorporem tais imperfeições questões como a estrutura e o tamanho dos balanços do banco central são colocadas à margem da discussão<sup>19</sup>.

---

<sup>17</sup> Em verdade, essa questão é bastante explorada no âmbito de artigos vinculados à Ciência Política, como resultados de grupos de pressão e da interação desses grupos com instituições regentes da governança da gestão da dívida.

<sup>18</sup> Grosso modo, a literatura tem consolidada duas abordagens para incorporar efeitos de longo prazo em um modelo de DSGE: adoção de uma estrutura de gerações sobrepostas (OLG) e um modelo de horizonte infinito com agentes enfrentando restrição de liquidez. Embora ambos os modelos possam capturar os efeitos de curto prazo da política fiscal, apenas as estruturas OLG parecem capazes de gerar efeitos de exclusão de médio e longo prazo da política fiscal. De fato, Kumhof e Laxton (2007) desenvolveram um modelo muito abrangente para a análise de políticas fiscais, que incorpora quatro características não-ricardianas.<sup>23</sup> Em sua análise dos efeitos de um aumento permanente nos déficits e dívidas fiscais dos EUA, eles descobriram efeitos a médio e longo prazo que diferem significativamente daqueles dos agentes com restrição de liquidez. Além disso, eles descobrem que os déficits têm um efeito significativo na conta corrente.

<sup>19</sup> A composição da dívida pública, por prazo, em um modelo Novo-Keynesiano padrão é irrelevante. Essa proposição, contudo, contrasta com a prática de bancos centrais no enfrentamento a crises, tais como a do

Missale (2012), por sua vez, sugere que a importância da dívida de longo prazo – uma constante nas análises empíricas, seja pela abordagem de mecanismos de correção de erros, seja pelo procedimento de *policy reaction function*<sup>20</sup> – surge quando um regime de política não-ricardiano é adotado. Nesse cenário, a política fiscal passa a ser percebida como insustentável. Crises de dívida são desencadeadas por revisões no crescimento, fundamentos fiscais ou na confiança dos investidores. Em síntese, mudanças na percepção de risco dos agentes.

Esse aspecto do risco, por sinal, é destacado por Niemann e Pichler (2020). Segundo os autores, a investigação das propriedades da política fiscal sujeita a risco, em especial o risco soberano, tem apresentado crescente interesse. *Grosso modo*, esse interesse pode ser subdividido em três principais áreas: a) o contraste empírico observado entre economias maduras e emergentes, enfatizando o caráter procíclico entre gastos e arrecadação<sup>21</sup>, b) a integração da política fiscal, endogeneizando a inadimplência, sob a perspectiva da tributação ideal<sup>22</sup> e c) a análise de default soberano no contexto de regras ou restrições fiscais, resgates e condicionalidades impostas por instituições financeiras internacionais.

O presente artigo inclui-se nessa última vertente e alinha-se com os trabalhos produzidos por Gonçalves e Guimarães (2012) e Juessen e Schabert (2013), entre outros. Esses artigos buscam identificar a racionalidade de *defaults* condicionais em um contexto de elevado endividamento. Nesse cenário, a crise, definida como um evento de restrição ocasional, é um evento endógeno, dependente, portanto, de decisões dos agentes, do regime da economia e do estado da economia.

---

*subprime*, de aquisição de grandes quantidades de títulos (públicos e privados) na tentativa de sustentar a atividade econômica e conter as pressões deflacionárias. Esses movimentos são justificados, por exemplo, como estratégias de rebalanceamento de portfólio, algo que não está bem compreendido em um nível conceitual e, portanto, mesmo análise empírica, ante a escassa robustez teórica, pode ser questionada.

<sup>20</sup>Esta alternativa, devida a Bohn (1998). Em outro artigo, mostra a insuficiência dos testes de cointegração (Bohn, 2008). Esses testes constituem uma condição necessária, mas não suficiente para averiguar a solvência da dívida pública. Bystrov e Mackiewicz (2020) trazem uma síntese dos argumentos de Bohn.

<sup>21</sup> Perotti (2001), Kaminsky *et alli* (2005) e Vegh e Vuletin (2015) são exemplos nessa vertente.

<sup>22</sup> Exemplo nesse sentido é o trabalho de Nieman e Pichler (2017).

### 3.1 Modelo

O modelo apresentado nesta seção se baseia, em grande medida, em Uribe (2006). Considere uma pequena economia povoada por infinitas famílias idênticas com preferências descritas por:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \theta_t U(c_t, h_t)$$

onde  $U(c_t, h_t)$ , a função utilidade no período, assume a forma

$$U(c_t, h_t) = \frac{(c_t - h_t^\omega / \omega)^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

ou seja,  $U(c_t, h_t)$  representa preferências na forma GHH, face ao trabalho de Greenwood, Hercowitz e Huffman (1988). O consumo é representado por  $c_t$  enquanto  $h_t$  denota horas trabalhadas e  $\omega > 1$ , por hipótese, . O fator de desconto,  $\theta_t$ , segue uma lei de formação representada por:

$$\theta_{t+1} = \theta_t \beta(\tilde{c}_t, \tilde{h}_t)$$

e  $\beta \in (0,1)$ , depende de variáveis endógenas, mas que são tomadas exógenamente pelos agentes. Isso é alcançado pela suposição que  $\tilde{c}_t$  e  $\tilde{h}_t$  representam o consumo e as horas de trabalho médio dessa economia, fatores que agentes individuais não são capazes de influenciar. Adicionalmente, assumindo-se que, em equilíbrio, valores individuais são idênticos aos valores médios da economia. Com efeito, a forma funcional de  $\beta(\tilde{c}_t, \tilde{h}_t)$  é da forma

$$\beta(c_t, h_t) = \left(1 + c_t - \frac{h_t^\omega}{\omega}\right)^{-\psi}$$

onde  $\psi > 0$ , assegurando que aumentos de consumo e lazer tornam os agentes mais impacientes. A restrição orçamentária, período a período, da família representativa é dada por

$$d_t = (1 + r_{t-1})d_{t-1} - (1 - \tau^h)w_t h_t - (1 - \tau^k)u_t k_t - i_t \\ + (1 + \tau^c)c_t + \Phi(k_{t+1} - k_t) + \varepsilon_t^d$$

$d_t$  representando o estoque de dívida da família ao fim do período  $t$ ,  $r^*$  é a taxa de juros real na qual as famílias contraem dívidas,  $y_t$  é a expressão do produto doméstico,  $i_t$  definido por  $i_t = k_{t+1} - (1 - \delta)k_t$  e  $k_t$  é representativo do estoque de capital físico. As remunerações do capital e do trabalho são, respectivamente  $u_t$  e  $w_t$ . Os parâmetros  $\delta$ ,  $\tau^k$ ,  $\tau^h$  e  $\tau^c$  representam, respectivamente, a taxa de depreciação física do capital e impostos *lump-sum* cobrados sobre o capital, trabalho e consumo.

A função  $\Phi(\cdot)$  busca captar os custos de ajustamento do capital, satisfazendo  $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$ . A restrição imposta sobre  $\Phi(\cdot)$  visa assegurar que, em *steady state*, os custos de ajustamento sejam nulos e que o preço relativo dos bens de capital, mensurado em relação aos bens de consumo, seja unitário. A hipótese de custo de ajustamento, segundo Uribe e Schmidt-Grohé (2014), visa conter a volatilidade excessiva do investimento (uma característica de economias emergentes) em resposta a variações na produtividade do capital<sup>23</sup>.

O produto, por sua vez, é produzido por meio de uma função de produção homogênea na forma  $y_t = A_t k_t^\alpha h_t^{1-\alpha}$ , onde  $A_t$  é um choque de produtividade estocástico e exógeno. A lei do movimento desse choque de produtividade, por sinal, é dada pelo seguinte processo autoregressivo de primeira ordem,  $\ln A_{t+1} = \rho \ln A_t + \varepsilon_{t+1}^a$ , onde o parâmetro  $\rho$  mede a correlação serial dos choques tecnológicos, definida no intervalo  $(-1,1)$ . Por fim,  $\varepsilon_t^a$  e  $\varepsilon_t^d$  seguem *i. i. d.*  $(0,1)$ .

Para investigar os efeitos de uma restrição ao endividamento, adiciona-se uma expressão do tipo temporária, na forma:

$$d_t = \min \left( d_{lim}, \frac{(1 + r_{t-1})d_{t-1} - (1 - \tau^h)w_t h_t - (1 - \tau^k)u_t k_t}{-i_t + (1 + \tau^c)c_t + \Phi(k_{t+1} - k_t) + \varepsilon_t^d} \right)$$

onde  $d_{lim}$  representa o limite superior do endividamento. O problema de otimização pode ser expresso na forma:

---

<sup>23</sup> Uribe e Schmidt-Grohé (2014) citam um outro elemento que influencia a volatilidade do investimento em nações emergentes: a taxa de juros internacional.

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \theta_t \left[ U(c_t, h_t) + \lambda_t \left( \begin{aligned} & d_t - (1 + r_{t-1})d_{t-1} + (1 - \tau^h)w_t h_t + i_t \\ & + (1 - \tau^k)u_t k_t - (1 + \tau^c)c_t - \Phi(k_{t+1} - k_t) + \varepsilon_t^d \\ & + \eta_t(\theta_{t+1} - \theta_t \beta(\tilde{c}_t, \tilde{h}_t) - \varepsilon_t^\theta) \end{aligned} \right) \right]$$

sujeito a

$$d_t = \min \left( \begin{aligned} & d_{lim}, (1 + r_{t-1})d_{t-1} - (1 - \tau^h)w_t h_t - (1 - \tau^k)u_t k_t \\ & - k_{t+1} + (1 - \delta)k_t + (1 + \tau^c)c_t + \Phi(k_{t+1} - k_t) + \varepsilon_t^d \end{aligned} \right)$$

As condições de primeira ordem são expressas por:

- (1)  $U_c - \lambda_t(1 - \tau^c) = 0$
- (2)  $U_h + \lambda_t(1 - \tau^h)w_t = 0$
- (3)  $\lambda_t \left( 1 + \Phi'(k_{t+1} - k_t) \right) - \beta(\tilde{c}_t, \tilde{h}_t)\lambda_{t+1} \left( 1 - \delta + (1 - \tau^k)u_{t+1} + \Phi'(k_{t+2} - k_{t+1}) \right) = 0$
- (4)  $\theta_{t+1} - \theta_t \beta(\tilde{c}_t, \tilde{h}_t) = 0$
- (5)  $d_t = \min \left( \begin{aligned} & d_{lim}, (1 + r_{t-1})d_{t-1} - (1 - \tau^h)w_t h_t - (1 - \tau^k)u_t k_t \\ & - k_{t+1} + (1 - \delta)k_t + (1 + \tau^c)c_t + \Phi(k_{t+1} - k_t) + \varepsilon_t^d \end{aligned} \right)$

onde, a última equação representa a condição de restrição temporária. A otimização do setor produtivo, por sua vez, segue a estrutura usual dos modelos padronizados de DSGE. O equilíbrio competitivo, portanto, é caracterizado pelos processos  $\{k_{t+1}, y_t, c_t, h_t, d_t, u_t, w_t, a_t\}$  e os processos exógenos  $\varepsilon_t^a$  e  $\varepsilon_t^d$  que satisfazem as equações (1)-(5).

As firmas, operando em mercados perfeitamente competitivos, produzem bens finais combinando capital e trabalho. A tecnologia de produção é fornecida por  $y_t = a_t k_t^\alpha h_t^{1-\alpha}$ . Em cada período  $t$ ,  $t \geq 0$ , contratam trabalhadores e capital ao custo. As condições de equilíbrio, para a firma, são dadas por

- $\alpha a_t (k_t/h_t)^{\alpha-1} = (1 - \tau^k)u_t$
- $(1 - \alpha)a_t (k_t/h_t)^\alpha = (1 - \tau^h)w_t$

Subsidiariamente, essa economia é governada por um conjunto de leis de movimento que regem o comportamento de  $\beta_t$ ,  $A_t$  e  $\theta_t$ , já descritos anteriormente, e  $r_t$  na forma

- $r_t = r^* + \psi_1 \left( e^{(d_t - \bar{d}) + \varepsilon_t^d} - 1 \right)$

Por fim, a economia dispõe de um governo que gasta exatamente aquilo que arrecada. Esse componente, tal como apresentado, deve ser entendido como um *building block* de investigações futuras (onde espera-se dinâmicas mais complexas). Nesse cenário, a evolução dos gastos governamentais se expressa na forma  $g_t = \tau^h w_t h_t + \tau^k u_t k_t + \tau^c c_t + \varepsilon_t^d$ . Ainda assim, uma variante é testada fazendo-se uso desse componente. Impondo-se restrições sobre a evolução do gasto do governo,  $g_t \leq g_{lim}$ , ao invés do endividamento das famílias. Cabe ressaltar que apenas uma restrição é imposta por vez.

Ante a discussão realizada no capítulo anterior, observa-se que a adequação do método depende da natureza do problema estudado assim como o grau de complexidade (inclusive o seu tamanho) do modelo. Entre as alternativas disponíveis, emprega-se, no presente artigo, a abordagem proposta por Holden (2016, 2019). Essa abordagem suporta uma aproximação de segunda ordem, afastando-se das abordagens alternativas baseadas em *extended path*, e, conseqüentemente da hipótese de certo-equivalente. Isso implica em alteração nas respostas das variáveis na proximidade da restrição tornar-se ativa.

Holden, ainda, em seu *toolkit*, DynareOBC<sup>24</sup>, agrega uma versão modificada do algoritmo de *stochastic extended path* proposto por Adjemian e Julliard (2013). Esse algoritmo permite a construção de expectativas, por um período finito, baseado na integração do modelo sobre um determinado número de períodos incertos. Diversos períodos foram testados e não se verifica alteração significativa no padrão de resposta para valores superiores a 40 períodos. Finalmente, as condições iniciais estão descritas no anexo, no arquivo ‘.mod’.

### 3.2 Calibragem e Funções Impulso Resposta

A exceção do inverso de Frisch da elasticidade de oferta de trabalho ( $\omega$ ), determinado no processo de calibragem, os demais parâmetros, que guiam as respostas do modelo, são apresentados na tabela abaixo:

---

<sup>24</sup><https://github.com/tholden/dynareOBC>

Descrição	Parâmetro	Valor
Fator de Desconto Subjetivo	$\beta$	0.97561
Participação do Capital	$\alpha$	0.33000
Depreciação do Capital	$\delta$	0.08000
Sensibilidade dos Juros Relativa a Dívida	$\psi_1$	0.00074
Coefficiente de Aversão Relativa ao Risco	$\sigma$	2.00000
Imposto sobre o Capital	$\tau^k$	0.18000
Imposto sobre o Trabalho	$\tau^h$	0.15000
Imposto sobre o Consumo	$\tau^c$	0.25000

Explorando os efeitos da restrição, dois choques estocásticos são aplicados ao modelo: sobre a produtividade e sobre a evolução da dívida dos agentes. Adicionalmente, com o fito de demonstrar a importância de explicitamente considerar o impacto de comportamentos assimétricos e não-linearidades, compara-se o resultado do modelo com um modelo alternativo na qual esses comportamentos não estão presentes<sup>25</sup>.

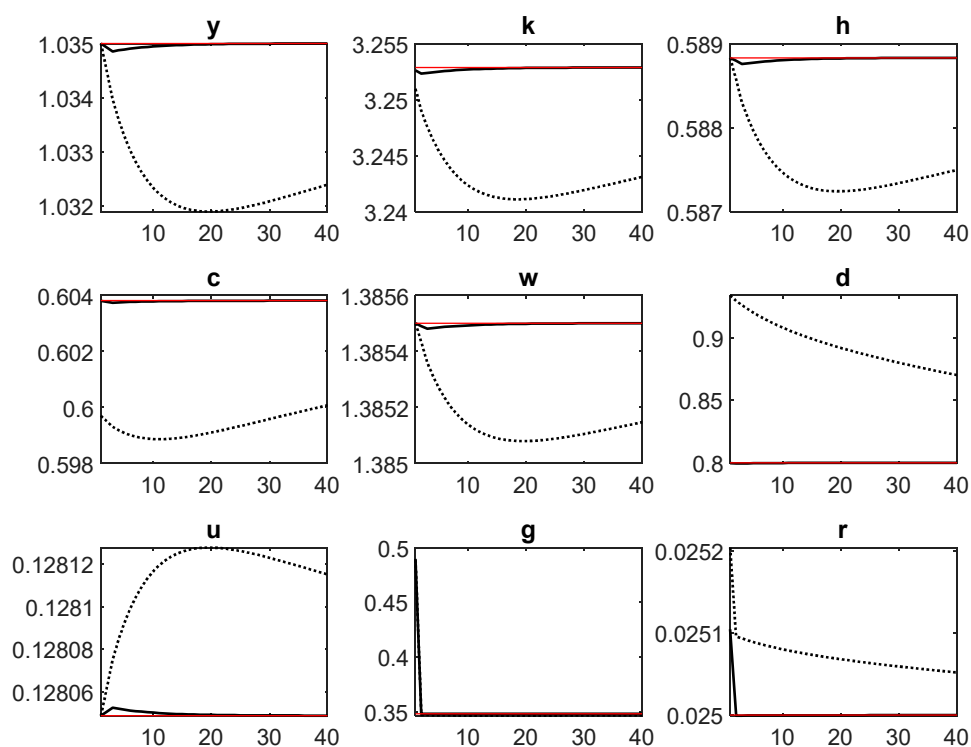


Figura 1 – Funções Impulso Resposta de Choque sobre a Dívida

<sup>25</sup> Explicitamente, substitui-se a equação de restrição ocasional sobre a dívida, por uma forma mais simples: a restrição orçamentária, período a período, sem a inclusão de tetos ao endividamento.



A função impulso-resposta mostra o comportamento da dívida, em poder das famílias, no contexto de validade da restrição ocasional (linha pontilhada), quando submetida a um choque, por exemplo, uma mudança na percepção do risco dessa dívida. O impulso considerado foi um choque positivo de 2% sobre o prêmio de risco.

Quando comarado ao modelo sem a restrição ocasional ativa, o comportamento das funções impulso-resposta mostra que essa forma de “viscosidade” induz à uma dinâmica mais lenta, com a resposta inicial exibindo um padrão mais agudo, antes de recuperar o equilíbrio estacionário, mesmo após a economia escapar às restrições<sup>26</sup>. Uma possível razão para o comportamento observado reside na estrutura do modelo. A discussão acima pode ser melhor explicitada reescrevendo a equação da restrição ocasional da dívida como três equações alternativas:

- $d_t \leq d_{lim}$  e  $\xi_t \geq 0$ ;
- $(d_t - d_{lim})\xi_t = 0$ ;
- $d_t = (1 + r_{t-1})d_{t-1} - (1 - \tau^h)w_t h_t - (1 - \tau^k)u_t k_t - i_t + (1 + \tau^c)c_t + \Phi(k_{t+1} - k_t) + \varepsilon_t^d$

onde  $\xi_t$  denota o multiplicador de Lagrange associado a restrição da dívida.

Quando a restrição é ativa,  $d_t = d_{lim}$ ,  $\xi_t$  é estritamente positivo e as famílias se deparam com o preço sombra do endividamento. Em outras palavras, com a restrição ativa, os agentes estão desejosos por tomar dívida a taxas superiores ao valor de estado estacionário. Esse comportamento é refletido nas taxas de juros, que não apenas excedem a observado em um modelo sem a validade da restrição ocasional mas também apresenta um retorno mais lento ao observado pelo modelo base.

Como reflexo do choque, a dinâmica das horas trabalhadas mostra a necessidade de compensação, ofertando, no curto prazo, maiores horas de trabalho para compensar a queda do salário real. Importante, o excesso de endividamento, reduz o total de gastos governamentais, no curto prazo.

---

<sup>26</sup> Esse resultado é compatível com o observado em outros modelos de restrições ocasionais, tais como Jiang (2018), em diversos contextos.

Em linha com o resultado apresentado, o comportamento de restrições impostas sobre os gastos do governo, também, segue os padrões descritas anteriormente. No caso sem a imposição de restrições, os gastos governamentais ajustam-se rapidamente. Já quando a restrição sobre gastos é imposta, um ajuste mais lento é verificado.

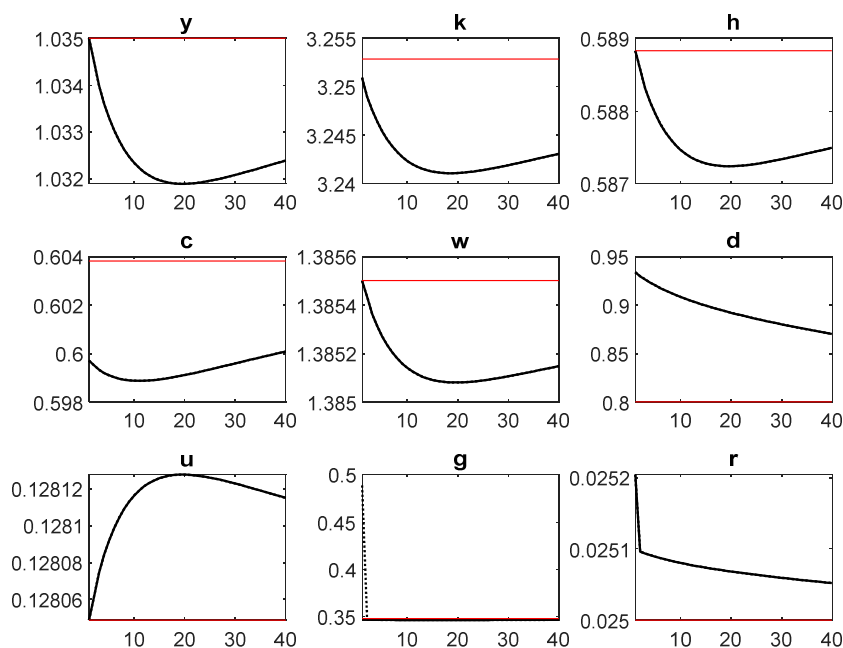


Figura 2 – Funções Impulso Resposta de Choque sobre Gastos

A análise comparativa, contudo, mostra certa similaridade de respostas. Em parte, pela estrutura similar e simples, não explorando elementos de discussões acerca da evolução de bem-estar. Esses resultados, entretanto, alertam para a importância de tratar questões vinculadas à dinâmica do endividamento e limites de gastos do governo com maiores rigores precauccionais. Caso contrário, os custos – em termos de produto, consumo e bem-estar – podem ser bastantes significativos e conduzir a uma situação que demandem esforços significativos para o retorno à condição de equilíbrio.

#### 4. Conclusão

Investigar o comportamento de economias quando estas estão submetidas a período de intenso estresse fiscal deve se converter em uma das principais preocupações de formuladores de políticas nos próximos anos. O presente artigo buscou investigar dinâmicas associadas a essa questão.

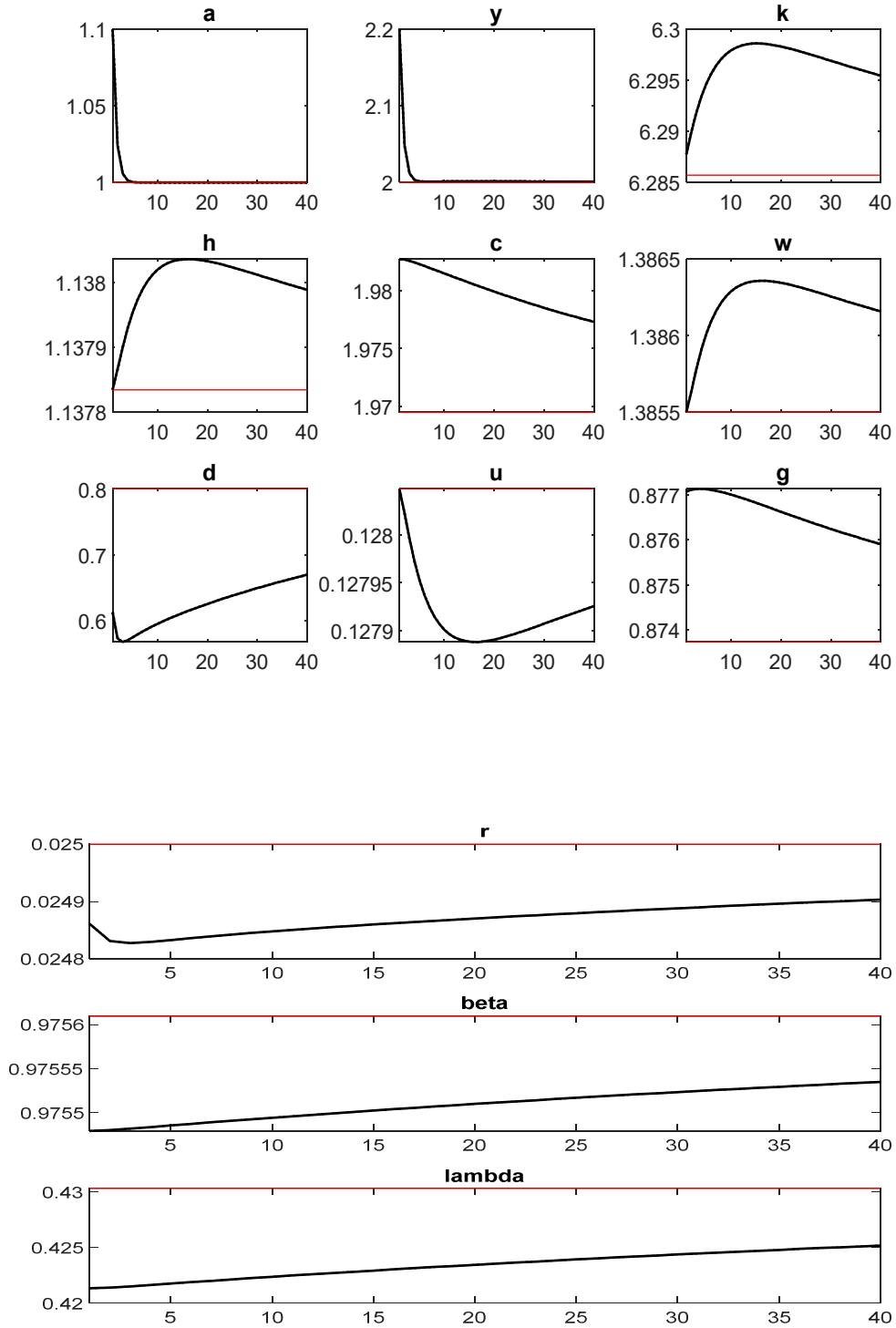
Os resultados, contudo, na visão desse autor, foram aquém do esperado. Em parte, pela própria dinâmica do método. Mesmo em uma versão bem simples, o modelo apresentou intensa sensibilidade a variação de parâmetros, restringindo significativamente as estratégias de calibragem bem como o alcance dos valores de estado estacionário. Outra severa limitação decorre da estrutura simples do prêmio de risco, permitindo um ajuste mais simples e direto. O enriquecimento do modelo, incorporando, por exemplo, a de taxa internacional de juros, permitiria a exploração de dinâmicas mais complexas.

Não obstante, a natureza dos resultados encontrados clama por investigações futuras, por exemplo, incorporando juros internacionais – nos termos da já citada sugestão de Uribe e Schmidt-Grohé (2014) – e (ou) incorporando fricções financeiras no processo de decisão ótima dos agentes. Não obstante, mesmo com uma estrutura flexível e simples, facilitando o retorno ao equilíbrio, é possível identificar certas dinâmicas que servem de alerta aos formuladores de políticas.

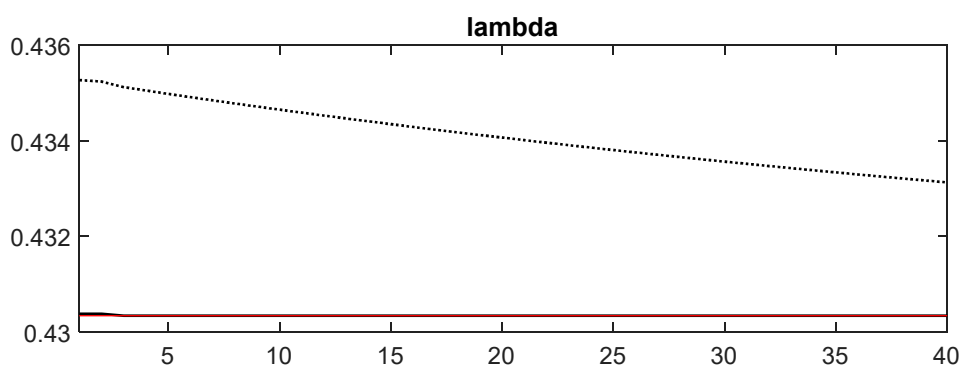
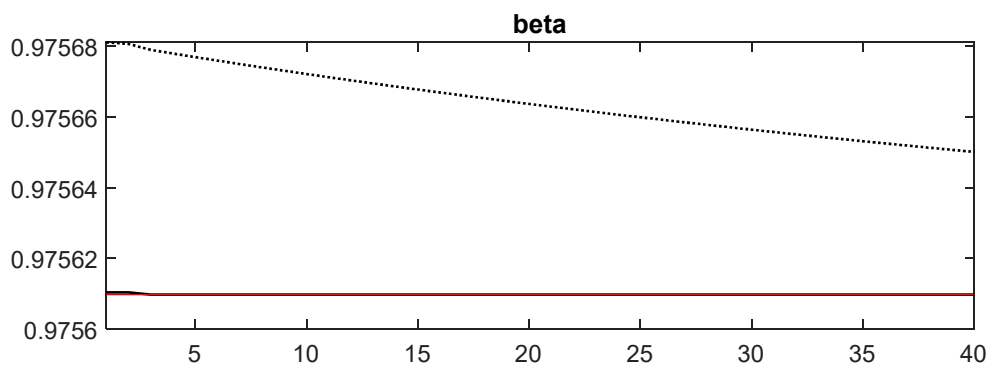
## Anexos

### Anexo A: Funções Impulso Resposta

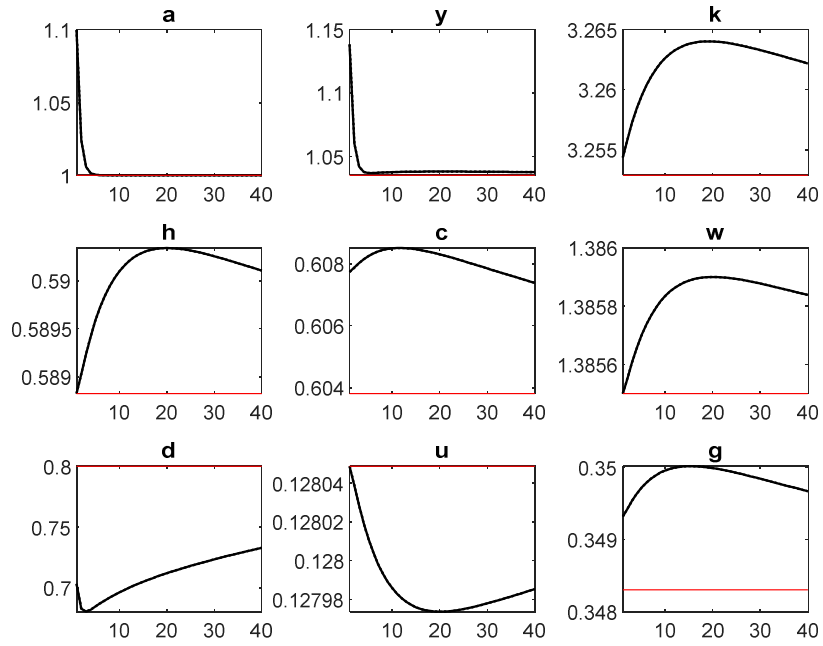
Funções Impulso Resposta de Choque sobre a Produtividade sob Restrições Ocasionais de Dívida



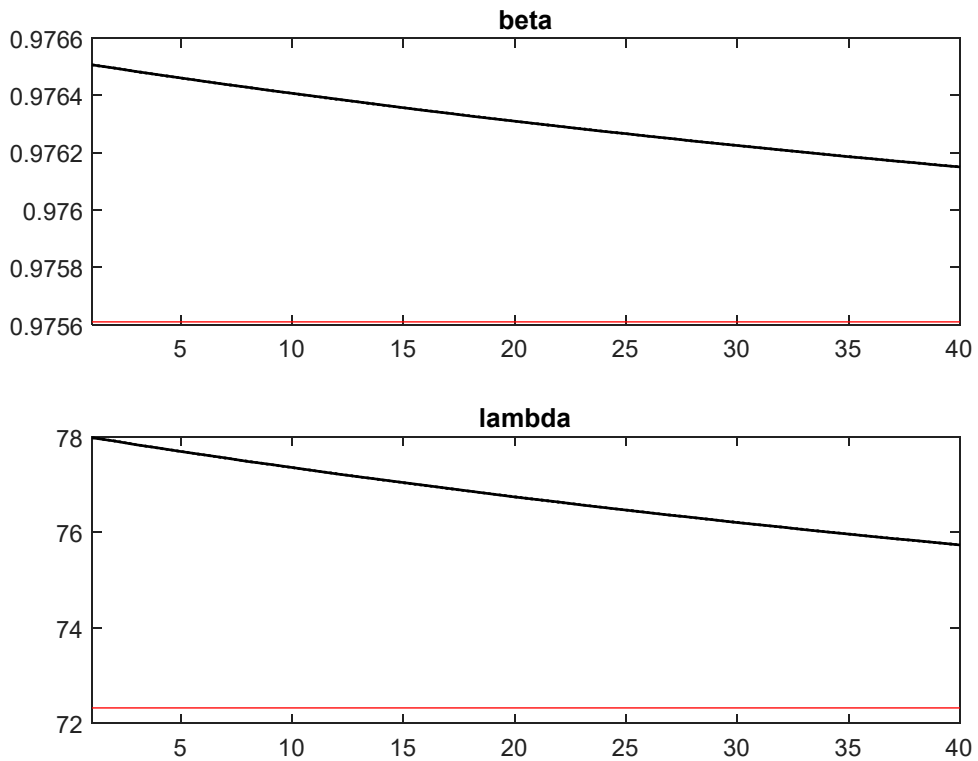
Funções Impulso Resposta de Choque sobre a Dívida sob Restrições Ocasionais



Funções Impulso Resposta de Choque sobre a Produtividade sob Restrições Ocasionais de Gastos



Funções Impulso Resposta de Choque sobre Gastos sob Restrições Ocasionais



## Anexo B: Código Dynare

```

% Modelo executado com base no toolkit DynareOBC (requer download e incorporação dos
% pacotes de MatLab descritos https://github.com/tholden/dynareOBC). Impostos sobre
% consumo (tauc) e fatores (tauh e tauk), G(dummy), restrição sobre nível de dívida
% (d =< dlim) e gastos do governo (g =< glim). Beta é função de endógenas agregadas%
% (i.e., dbeta/dc = dbeta/dh = 0).

var a, y, k, h, c, w, d, u, g, r, beta, theta, lambda;
varexo epsa, epsd;

parameters alpha, delta, psi, sigma, rstar, phi, rhoa, rhog, tauc, tauk, tauh,
          dbar, phid, psil, psi3, ybar, omega, kappa, hbar, kbar, cbar, wbar;

alpha = 0.330000;
delta = 0.080000;
psi = 0.001000;
sigma = 2.000000;
rstar = 0.025000;
phi = 0.280000;
rhoa = 0.240000;
rhog = 0.240000;
psil = 0.000742;
tauc = 0.250000;
tauk = 0.180000;
tauh = 0.150000;
dbar = 0.800000;
phid = 1.0000399;
ybar = 1.035000;
kappa = ((rstar+delta)/(alpha))^(1/(alpha-1));
hbar = ybar/(kappa^alpha);
kbar = kappa*hbar;
wbar = ((1-alpha)/(1-tauh))*(kappa^alpha);
omega = 1 + (ln(wbar) + ln(1-tauh) - ln(1+tauc))/ln(hbar);
cbar = (ybar - delta*kbar - dbar*rstar)/(1+tauc);
psi3 = ln(1+rstar)/ln((1+cbar-(hbar^omega)/omega));

model;
% Consumidor
w = ((1+tauc)/(1-tauh))*(h^(omega-1)); % FOC Labour/FOC Consumption
# daux = (1+rstar)*d(-1)-a*(k(-1)^alpha)*(h^(1-alpha))+(1+tauc)*c + k(-1)-
delta*k(-1)+phi*(k-k(-1)); % Local Var.
# dlim = phid*daux; % Local Var.

d = min(daux + epsd, dlim); % OBC Debt Evolution
% d = daux + epsd; % Unlimited Debt Evolution
lambda = beta*(1+r(-1))*lambda(+1); % FOC Debt
lambda = beta*(lambda(+1))*(alpha*(k/h(+1))^(alpha-1)+1-delta+phi*(k(+1)-
k))/(1+phi*(k-k(-1))); % (4.46)FOC Capital
lambda = ((c-(h^omega)/omega)^(-sigma))/(1+tauc); % dL/dC

% Firma
y = a*(k(-1)^alpha)*(h^(1-alpha)); % Output
u = (alpha/(1-tauk))*((k(-1)/h)^(alpha-1)); % Capital return
w = ((1-alpha)/(1-tauh))*(k(-1)/h)^(alpha); % FOC Labour/ FOC Capital

% Governo
# gaux = tauc*c+tauk*u*k+tauh*w*h; % Local Var.
# glim = phid*gaux; % Local Var.
% g = min(gaux + epsd, glim); % OBC G Evolution
g = gaux + epsd; % Unlimited G Evolution

% Law of Motion
beta = (1+c-(h^omega)/omega)^(-psi3); % Beta LoM

```

```

log(a) = rhoa*log(a(-1)) + epsa;           % Technology Evolution
theta = beta*theta(-1);                   % Law of Motion
r      = rstar + psil*(exp(d-dbar + epsd)-1); % LoM EDEIR
end;

shocks;
var epsa = (0.01);
var epsd = (0.02);
end;

steady_state_model;
a      = 1;
y      = ybar;
d      = dbar;
r      = rstar;
beta   = 1/(1+r);                         % SS FOC Debt / Lambda = Uc
h      = y/(kappa^alpha);
k      = kappa*h;
w      = ((1-alpha)/(1-tauh))*(kappa)^(alpha); % - PmgL/(1-tauh)
u      = alpha*(kappa^(alpha-1))/(1-tauk); % FOC Labour / FOC Capital
c      = (y - delta*k - d*rstar)/(1+tauc);
g      = tauc*c+tauk*u*k+tauh*w*h;
theta  = 0;                               % Theoretical initial value
lambda = ((c-(h^omega)/omega)^(-sigma))/(1+tauc); % lambda <> Uc

end;

steady;
check;
stoch_simul(order = 1, periods = 0, irf = 40);

```



## Bibliografia

- Adjemian, S. & Juillard, M. (2013). 'Stochastic Extended Path Approach'. CEIS Tor Vergata.
- Anagnostopoulos, A., & Tang, X. (2015). Evaluating linear approximations in a two-country model with occasionally binding borrowing constraints. *The BE Journal of Macroeconomics*, 15(1), 43-91.
- Aruoba, S. B., Fernandez-Villaverde, J., & Rubio-Ramirez, J. F. (2006). Comparing solution methods for dynamic equilibrium economies. *Journal of Economic dynamics and Control*, 30(12), 2477-2508.
- Aruoba, S. B., Cuba-Borda, P., Higa-Flores, K., Schorfheide, F., & Villalvazo, S. (2020). *Piecewise-Linear Approximations and Filtering for DSGE Models with Occasionally Binding Constraints* (No. 20-13). Federal Reserve Bank of Philadelphia.
- Asmussen, S., & Glynn, P. W. (2007). *Stochastic simulation: algorithms and analysis* (Vol. 57). Springer Science & Business Media.
- Athey, S., Atkeson, A., & Kehoe, P. J. (2005). The optimal degree of discretion in monetary policy. *Econometrica*, 73(5), 1431-1475.
- Bender, C. M., & Orszag, S. A. (2013). *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory*. Springer Science & Business Media.
- Benigno, G., Chen, H., Otrok, C., Rebucci, A., & Young, E. R. (2011). Revisiting Overborrowing and Its Policy Implications (No. 1965). Inter-American Development Bank.
- Bi, H., Shen, W., & Yang, S. C. S. (2016). Debt-dependent effects of fiscal expansions. *European Economic Review*, 88, 142-157.
- Braun, R. A., Boneva, L. M., & Waki, Y. (2012). Some Unpleasant Properties of Loglinearized Solutions When the Nominal Rate Is Zero. Federal Reserve Bank of Atlanta, Working Paper Series, 2012(5).
- Brzoza-Brzezina, M., Gelain, P., & Kolasa, M. (2014). Monetary and Macroprudential Policy with Multi-Period Loans (No. 16). Norges Working Papers..
- Brzoza-Brzezina, M., Kolasa, M., & Makarski, K. (2012). Occasionally binding credit constraints. *Manuscrito*, <https://ssl.nbp.pl/badania/konferencje/2012/currenttrends/BrzozaBrzezinaKolasaMakarski2.pdf>
- Bystrov, V., & Mackiewicz, M. (2020). Recurrent explosive public debts and the long-run fiscal sustainability. *Journal of Policy Modeling*, 42(2), 437-450.
- Cao, D., & Nie, G. (2017). Amplification and asymmetric effects without collateral constraints. *American Economic Journal: Macroeconomics*, 9(3), 222-66.

- Casalin, F., Dia, E., & Hallett, A. H. (2020). Public debt dynamics with tax revenue constraints. *Economic Modelling*, 90, 501-515.
- Christiano, L. J., and Fisher, J.D.M. 2000. Algorithms for Solving Dynamic Models with Occasionally Binding Constraints. *Journal of Economic Dynamics & Control* 24: 1179-1232.
- Den Haan, W. J., & De Wind, J. (2012). Nonlinear and stable perturbation-based approximations. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 36(10), 1477-1497.
- Evans, C. (2019). Optimal Monetary Policy with Downward Nominal Wage Rigidity. *Manuscript*, <https://christoperevans.github.io/Econ/DNWR%20Oct%202019%20-%20Chris%20Evans.pdf>
- Fair, R. C., & Taylor, J. B. (1980). *Solution and Maximum Likelihood Estimation of Dynamic Nonlinear Rational Expectations Models* (No. t0005). National Bureau of Economic Research.
- Farmer, R. E., Waggoner, D. F., & Zha, T. (2009). Understanding Markov-switching rational expectations models. *Journal of Economic theory*, 144(5), 1849-1867.
- Fernández-Villaverde, J., Gordon, G., Guerrón-Quintana, P., & Rubio-Ramirez, J. F. (2015). Nonlinear adventures at the zero lower bound. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 57, 182-204.
- Fernández-Villaverde, J., Ramírez, J. F. R., & Schorfheide, F. (2016). Solution and Estimation Methods for DSGE Models (No. w21862). National Bureau of Economic Research.
- Foerster, A., Rubio-Ramirez, J., Waggoner, D. F., & Zha, T. (2014). *Perturbation methods for Markov-switching DSGE models* (No. w20390). National Bureau of Economic Research.
- Fudenberg, D., & Levine, D. K. (1993). Self-confirming equilibrium. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 523-545.
- Guerrieri, L., & Iacoviello, M. (2015). OccBin: A toolkit for solving dynamic models with occasionally binding constraints easily. *Journal of Monetary Economics*, 70, 22-38.
- Golosov, M., & Iovino, L. (2019). Social Insurance, Information Revelation, and Lack of Commitment (No. 14116). CEPR Discussion Papers.
- Gonçalves, C. E., & Guimarães, B. (2012). Sovereign default risk and commitment for fiscal adjustment (No. wp 2012-23). Department of Economics, FEA-USP.
- Halac, M., & Yared, P. (2014). Fiscal rules and discretion under persistent shocks. *Econometrica*, 82(5), 1557-1614.
- . (2018). Fiscal rules and discretion in a world economy. *American Economic Review*, 108(8), 2305-34.

- Heer, B., & Maussner, A. (2009). *Dynamic general equilibrium modeling: computational methods and applications*. Springer Science & Business Media.
- Holden, T. D. (2010). *Products, patents and productivity persistence: A DSGE model of endogenous growth* (No. 512). University of Oxford, Department of Economics.
- . (2016). *Computation of solutions to dynamic models with occasionally binding constraints*. ZBW-Leibniz Information Centre for Economics.
- . (2019). *Existence and uniqueness of solutions to dynamic models with occasionally binding constraints*. ZBW-Leibniz Information Centre for Economics.
- Holden, T., & Paetz, M. (2012). *Efficient simulation of DSGE models with inequality constraints*(No. 1612). School of Economics, University of Surrey.
- Holmes, M. H. (2012). *Introduction to perturbation methods* (Vol. 20). Springer Science & Business Media.
- IMF. (2020). A Crisis Like No Other, An Uncertain Recovery. World Economic Outlook Update, June.
- Jiang, S. (2018). *Four essays in international macroeconomics* (Doctoral dissertation, University of Glasgow).
- Judd, K. L. (1992). Projection methods for solving aggregate growth models. *Journal of Economic Theory*, 58(2), 410-452.
- Judd, K. L., Maliar, L., & Maliar, S. (2010). *A cluster-grid projection method: solving problems with high dimensionality* (No. w15965). National Bureau of Economic Research.
- . (2012). *Merging simulation and projection approaches to solve high-dimensional problems* (No. w18501). National Bureau of Economic Research.
- Judd, K. L., & Skrainka, B. (2011). *High performance quadrature rules: how numerical integration affects a popular model of product differentiation* (No. CWP03/11). CEMMAP working paper.
- Juessen, F., & Schabert, A. (2013). *Fiscal Policy, Sovereign Default, and Bailouts* (No. 67). University of Cologne, Department of Economics.
- Jung, T., Teranishi, Y., & Watanabe, T. (2005). Optimal monetary policy at the zero-interest-rate bound. *Journal of Money, Credit, and Banking*, 37(5), 813-835.
- Kiley, M. T., & Roberts, J. M. (2017). Monetary policy in a low interest rate world. *Brookings Papers on Economic Activity*, 2017(1), 317-396.

- Kim, S. H., Kollmann, R., & Kim, J. (2010). Solving the incomplete market model with aggregate uncertainty using a perturbation method. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 34(1), 50-58.
- Kim, J., Kim, S. H., Schaumburg, E., & Sims, C. A. (2008). Calculating and using second-order accurate solutions of discrete time dynamic equilibrium models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32(11), 3397-3414.
- Lan, H., & Meyer-Gohde, A. (2013a). Solving DSGE models with a nonlinear moving average. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 37(12), 2643-2667.
- . (2013b). Pruning in Perturbation DSGE Models - Guidance from Nonlinear Moving Average Approximations. SFB 649 Discussion Papers. Sonderforschungsbereich 649, Humboldt University, Berlin, Germany.
- Leeper, E. M., Leith, C. B., & Liu, D. (2019). *Optimal time-consistent monetary, fiscal and debt maturity policy* (No. w25658). National Bureau of Economic Research.
- Maliar, L., & Maliar, S. (2005). Solving nonlinear stochastic growth models: iterating on value function by simulations. *Economics Letters*, 87, 135-140.
- . (2014). Numerical methods for large-scale dynamic economic models. In *Handbook of computational economics* (Vol. 3, pp. 325-477). Elsevier.
- Marcet, A. (1991). Solving non-linear stochastic models by parameterizing expectations: An application to asset pricing with production.
- Marcet, A., & Marshall, D. A. (1994). Solving Nonlinear Rational Expectations Models by Parameterized Expectations: Convergence to Stationary Solutions (No. 91). FRB Minneapolis Discussion Papers.
- McCallum, B. T. (1998). Solutions to linear rational expectations models: a compact exposition. *Economics letters*, 61(2), 143-147.
- . (1999). Role of the minimal state variable criterion in rational expectations models. In *International Finance and Financial Crises* (pp. 151-176). Springer, Dordrecht.
- . (2004). On the relationship between determinate and MSV solutions in linear RE models. *Economics Letters*, 84(1), 55-60.
- Missale, A. (2012). Sovereign debt management and fiscal vulnerabilities. *BIS Paper*, (65j).
- Niemann, S., & Pichler, P. (2020). Optimal fiscal policy and sovereign debt crises. *Review of Economic Dynamics*.
- Nöh, L. (2019). Increasing public debt and the role of central bank independence for debt maturities. *European Economic Review*, 119, 179-198.

- Richter, A. W., & Throckmorton, N. A. (2014). *The Zero Lower Bound: Frequency, Duration, and Numerical Convergence* (No. auwp2014-09). Department of Economics, Auburn University.
- Robert, C., & Casella, G. (2013). *Monte Carlo statistical methods*. Springer Science & Business Media.
- Rotemberg, J., & Woodford, M. (1998). Interest-Rate Rules in an Estimated Sticky Price Model (No. w6618). National Bureau of Economic Research.
- Sakuragawa, M., & Sakuragawa, Y. (2020). Government fiscal projection and debt sustainability. *Japan and the World Economy*, 54, 101010.
- Schmitt-Grohé, S., & Uribe, M. (2004). Closing small open economy models *Journal of International Economics* vol. 61.
- Schorfheide, F., Cuba-Borda, P., & Aruoba, S. B. (2016). Macroeconomic Dynamics Near the ZLB: A Tale of Two Countries. FRB International Finance Discussion Paper, (1163).
- Stengel, R. F. (1994). *Optimal Control and Estimation*. Courier Corporation.
- Taylor, J. B., & Uhlig, H. (1989). *Solving Nonlinear Stochastic Growth Models: A Comparison of Alternative Solution Methods* (No. w3117). National Bureau of Economic Research.
- Tovar, C. (2008). *DSGE Models and Central Banks* (No. 2008-30). Kiel Institute for the World Economy (IfW).
- Uribe, M. (2006). On overborrowing. *American Economic Review*, 96(2), 417-421.
- Uribe, M., & Schmitt-Grohé, S. (2017). *Open economy macroeconomics*. Princeton University Press.
- Williamson, S. D. (2019). Low real interest rates and the zerolower bound. *Review of Economic Dynamics*, 31, 36-62.
- Winschel, V., & Krätzig, M. (2010). Solving, estimating, and selecting nonlinear dynamic models without the curse of dimensionality. *Econometrica*, 78(2), 803-821.