

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

**Dinâmica em Órbitas Projetivas Compactas  
e a Decomposição de Jordan**

por

André Caldas de Souza

2009

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Dinâmica Topológica em Variedades Flag e a Decomposição de Jordan

por

**André Caldas de Souza**<sup>1</sup>

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

**MESTRE EM MATEMÁTICA**

Brasília, 2009.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Mauro M. A. Patrão - MAT/UnB (Orientador)

---

Prof. Dr. Luiz A. B. San Martin - DM/UNICAMP - Membro

---

Prof. Dr. Raderson R. da Silva - MAT/UnB - Membro

---

<sup>1</sup>O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração de parte deste trabalho.

## AGRADECIMENTOS

Sempre achei muito clichê mencionar o orientador na página de agradecimentos. Não que o orientador não mereça gratidão. Obviamente que o trabalho e a dedicação do orientador devem ser reconhecidos. Eu, no entanto, quero agradecer meu orientador não apenas pela orientação em si. Quero agradecer por, apesar da óbvia hierarquia que nos separa, não ter me tratado como discípulo, mas como colega. Valeu, Mauro!

# Resumo

Introduzimos os conceitos de recorrência, recorrência por cadeias e decomposição de Morse para analisar os comportamentos recorrente e transiente de um fluxo topológico num espaço métrico compacto. A partir dessas ferramentas, fornecemos uma descrição precisa do comportamento recorrente de um fluxo linear em um espaço projetivo através da sua decomposição de Jordan. O resultado principal diz que o conjunto recorrente por cadeias coincide com os pontos fixos da componente de Jordan hiperbólica e o conjunto recorrente coincide com a interseção dos pontos fixos das componentes de Jordan hiperbólica e unipotente. Essa descrição é estendida para um fluxo linear induzido em uma órbita projetiva compacta de um subgrupo de Lie semi-simples linear qualquer. O ponto chave é mostrar que as órbitas projetivas compactas são invariantes pelas componentes de Jordan do fluxo. Exemplos de órbitas projetivas compactas incluem as grasmanianas e as variedades flag.

**Palavras-chave:** decomposição de Jordan, decomposição de Morse, grupos de Lie semi-simples, recorrência, recorrência por cadeias, espaço projetivo.

# Abstract

We introduce the concepts of recurrence, chain recurrence and Morse decomposition in order to analyze the recurrent and transient behavior of a topological flow in a compact metric space. Using these tools, we provide a precise description of the recurrent behavior of a linear flow over a projective space by means of its Jordan decomposition. The main result states that the chain recurrent set is precisely the fix points of the hiperbolic Jordan component, and the recurrent set is the intersection of the fixed points of the hiperbolic and unipotent Jordan components. This characterization is further extended to a linear flow induced in a projective compact orbit of an arbitrary semisimple linear Lie subgroup. The key step is showing that the projective compact orbits are invariant by the action of the Jordan components of the flow. Examples of projective compact orbits include the grassmanians and the flag varieties.

**Keywords:** Jordan decomposition, Morse decomposition, semisimple Lie groups, recurrence, chain recurrence, projective space.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Dinâmica Topológica</b>	<b>5</b>
1.1 Fluxos . . . . .	5
1.1.1 Propriedades dos Fluxos . . . . .	10
1.2 Conjuntos Invariantes . . . . .	11
1.3 Órbitas e Conjuntos Limites . . . . .	12
1.4 Atratores e Repulsores . . . . .	15
1.4.1 Repulsor Complementar e Atrator Complementar . . . . .	17
1.4.2 Repulsor Relativo a Outro Repulsor . . . . .	21
1.5 Decomposição de Morse . . . . .	24
1.6 Funções de Lyapunov . . . . .	30
1.7 Recorrência por Cadeias . . . . .	36
1.7.1 Fluxos que Comutam . . . . .	41
1.8 Decomposição de Morse e Transitividade por Cadeias . . . . .	42
<b>2 Dinâmica no Projetivo</b>	<b>49</b>
2.1 Decomposição de Jordan . . . . .	49
2.1.1 Caso Aditivo: álgebra linear geral . . . . .	50
2.1.2 Caso Multiplicativo: grupo linear geral . . . . .	58
2.2 Dinâmica no Projetivo . . . . .	60
<b>3 Dinâmica em Flags</b>	<b>67</b>
3.1 Decomposição de Jordan . . . . .	67
3.1.1 Caso Aditivo: álgebra de lie semi-simples . . . . .	68
3.1.2 Caso Multiplicativo: grupo de Lie semi-simples . . . . .	71
3.2 Dinâmica em Órbitas Projetivas Compactas . . . . .	75
3.3 Teoria de Floquet . . . . .	85
<b>A Pré-Requisitos e Notação</b>	<b>92</b>
A.1 Topologia . . . . .	92

A.2	Distância de Hausdorff . . . . .	97
A.3	Produto Exterior . . . . .	98
A.4	Grupos e Ações de Grupos . . . . .	99
A.5	Grupos e Álgebras de Lie . . . . .	105

# Introdução

Não se discute a utilidade do estudo de equações diferenciais. Os sistemas dinâmicos surgiram do estudo de soluções para equações diferenciais autônomas

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

baseado em seu *fluxo* associado. Na mecânica clássica são tratados problemas onde cada ponto de um *espaço de fases* representa uma configuração possível do sistema em questão. O “tempo” age no espaço de fases levando um determinado estado inicial em outro estado “continuamente”. É notável o fato de que para equações diferenciais autônomas, o tempo (denotado por  $\mathbb{T}$ ) de fato age, dessa vez como grupo topológico ou como grupo de Lie, no conjunto do *espaço de fases*. A formalização dessa “ação do tempo” nos leva ao conceito de *fluxo*, tratado no capítulo 1.

No capítulo 1 a dinâmica é estudada do ponto de vista puramente topológico. As referências utilizadas são o trabalho publicado por Charles Conley ([Con76]) e a tese de doutorado [Pat06]. Por vezes, o conhecimento de propriedades qualitativa do sistema é muito mais interessante do que a solução analítica ou numérica da equação diferencial que o define. Após formalizar o conceito de *fluxo* na seção 1.1, Descrevemos várias propriedades topológicas do comportamento assintótico do sistema. Os conceitos buscam identificar as partes do sistema que têm propriedades recorrentes e as partes transientes. Neste trabalho conseguimos demonstrações mais elementares dos resultados e também uma definição alternativa de *função de Lyapunov* (definição 1.6.2).

A *função de Lyapunov* e a *decomposição de Morse* são maneiras equivalentes de expressar a transiência e recorrência do sistema. Se tivermos uma função de Lyapunov para a *decomposição de Morse* mais fina, as órbitas onde essa função tem valor constante (os *platôs*) são a parte recorrente. Demonstramos que as *componentes de Morse* da decomposição mais fina são justamente as *componentes transitivas por cadeias*. Para chegarmos nesse resultado, introduzimos conceitos de limite, necessários à descrição de o que se entende por *comportamento assintótico*, como  $\omega$ -limite. Classificamos a



recorrência em *recorrência* e *recorrência por cadeias*. Problemas relacionados com a “estabilidade” dos sistemas dinâmicos podem ser melhor entendidos através do emprego das técnicas e conceitos aqui desenvolvidos. Conhecendo-se a função de Lyapunov da decomposição de Morse minimal, podemos identificar as chamadas variedades estáveis e instáveis do fluxo em questão. Veja, por exemplo, a seção 1.6 de [Chi99]. Infelizmente, a maioria das técnicas depende de se supor propriedades talvez não tão “naturais” do espaço de fases, como compacidade, por exemplo. No caso de um fluxo induzido por uma transformação linear de um espaço vetorial de dimensão finita, podemos estudar a ação correspondente no espaço projetivo, que é compacto.

O artigo [PSS08], no qual se baseia parte deste trabalho, é uma abordagem mais direta e mais construtiva para o problema da decomposição de Jordan no caso em que as transformações consideradas são sobre espaços vetoriais *reais*, o que não é tão simples quanto o caso *complexo*, já que  $\mathbb{R}$  não é algebricamente fechado. Munidos da decomposição de Jordan e suas propriedades, a principal delas sendo o fato de as componentes de Jordan de uma transformação  $T$  serem dadas por polinômios reais de  $T$ , partimos para a análise do caso específico de fluxos induzidos pela ação de grupos lineares em espaços projetivos. Os grupos lineares são grupos topológicos e ainda mais, são grupos de Lie. Por *fluxos induzidos pela ação de grupos lineares*, entendemos, no caso contínuo, a ação do grupo a um parâmetro  $g^t = e^{tX}$  em um espaço  $\mathbb{P}$  (no caso, o *projetivo*), onde  $X$  é uma transformação linear qualquer. No caso discreto, o grupo a um parâmetro é dado simplesmente por  $g^t$ , onde  $g$  é uma transformação linear inversível.

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{T} \times \mathbb{P} &\rightarrow \mathbb{P} \\ (t, x) &\mapsto g^t x \end{aligned} .$$

Tentamos descrever as componentes de Morse deste fluxo através da análise das transformações lineares  $X$  e  $g$ . Dada a decomposição de Jordan aditiva (veja 2.1.1)

$$X = E + H + N,$$

ou multiplicativa (veja 2.1.13)

$$g = ehu,$$

definimos a decomposição de Jordan do fluxo, dada por

$$g^t = e^t h^t u^t,$$

onde as componentes, respectivamente, elíptica, hiperbólica e unipotente são dadas, no caso contínuo, por

$$e^t = e^{tE}, \quad h^t = e^{tH} \quad e \quad u^t = e^{tN},$$

e, no caso discreto, pela iteração respectivamente de  $e$ ,  $h$ ,  $u$ . Em seguida, utilizamos essa decomposição para determinar a decomposição de Morse minimal do fluxo  $g^t$ , e por conseqüência determinar o conjunto recorrente por cadeias (teorema 2.2.10):

$$\mathcal{R}^C(g^t) = \text{fix}(h^t),$$

onde  $\text{fix}(h^t)$  é o conjunto dos pontos fixos do fluxo  $h^t$ . Indo um pouco além, utilizando os mesmos argumentos contidos no trabalho [Fer07], a partir da decomposição de Jordan de  $g$ , descrevemos também quais são os pontos recorrentes do fluxo  $g^t$  (teorema 2.2.11):

$$\mathcal{R}(g^t) = \text{fix}(h^t) \cap \text{fix}(u^t).$$

Finalmente, no capítulo 3, estendemos as conclusões sobre os fluxos induzidos por transformações lineares sobre o espaço projetivo, para o caso mais geral de fluxos induzidos pela ação transitiva de um grupo de Lie (linear) semi-simples  $G$  sobre um subconjunto  $\mathbb{F}$  do *espaço projetivo*. Nossa referência é [FPS08]. Os resultados se estendem às *grasmanianas* e conseqüentemente, aos flags (veja 3.2.4 e 3.2.5). A principal ferramenta é o *mergulho de Plücker* (definição 3.2.7), que nos permite mergulhar a grasmaniana em um espaço projetivo maior. Duas são as dificuldades que surgem com esta generalização. Primeiramente, para que possamos decompor o fluxo  $g^t$  em componentes de Jordan, precisamos que cada uma dessas componentes permaneça dentro do grupo de Lie considerado, já que a ação sobre  $\mathbb{F}$  está definida apenas para elementos de  $G$ . A segunda dificuldade está relacionada com o fato de algumas propriedades dos fluxos não serem preservadas quando se considera o fluxo restrito a um subconjunto invariante. Veja a observação em 3.2.1. Analogamente ao caso anterior, obtemos a descrição do conjunto recorrente por cadeias e do conjunto recorrente no caso das órbitas projetivas compactas (teoremas 3.2.2 e 3.2.3):

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mathbb{F}}^C(g^t) &= \text{fix}_{\mathbb{F}}(h^t) \\ \mathcal{R}_{\mathbb{F}}(g^t) &= \text{fix}_{\mathbb{F}}(h^t) \cap \text{fix}_{\mathbb{F}}(u^t).\end{aligned}$$

Como aplicação, na seção 3.3, utilizamos os resultados anteriores para determinar os conjuntos recorrente e recorrente por cadeias de um fluxo que associamos à equação diferencial

$$g'(t) = X(t)g(t),$$

onde  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{g}$  é contínua e periódica, e  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra de Lie (linear) semi-simples. A estratégia adotada é definir a partir de  $g(t)$  um fluxo  $\phi^t$  no

produto cartesiano  $S^1 \times \mathbb{F}$ , dado por

$$\begin{aligned} \phi^t : S^1 \times \mathbb{F} &\rightarrow S^1 \times \mathbb{F} \\ (s, x) &\mapsto (s + t, \frac{g(s+t)}{g(s)}a) \end{aligned} ,$$

e associar a este fluxo um fluxo linear  $g^t$ . Por fim, descreveremos os conjuntos recorrente e recorrente por cadeias do fluxo  $\phi^t$  (teoremas 3.3.7 e 3.3.6)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^C(\phi^t) &= \{(s, a(s)x) \mid s \in S^1, x \in \text{fix}_{\mathbb{F}}(h^t)\} \\ \mathcal{R}(\phi^t) &= \{(s, a(s)x) \mid s \in S^1, x \in \text{fix}_{\mathbb{F}}(h^t) \cap \text{fix}_{\mathbb{F}}(u^t)\}, \end{aligned}$$

onde  $a : S^1 \rightarrow G$  está definido na equação (3.3).

# Capítulo 1

## Dinâmica Topológica

Os sistemas dinâmicos são a grosso modo, transformações de um espaço  $X$  em si próprio, parametrizadas pelo “tempo”. O espaço  $X$  é chamado de *espaço de fases*. Neste trabalho o “tempo” será  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{R}$ , mas em uma teoria mais geral, poderia ser qualquer grupo ou até mesmo um monóide. A transformação do espaço de fases deve possuir certas propriedades, e é chamada de *fluxo* (ou *semi-fluxo*, quando o tempo for um monóide e não um grupo). No caso da *dinâmica topológica*, estaremos interessados nas propriedades topológicas do *fluxo*. Em outras situações, poderíamos estar interessados, por exemplo, nas propriedades diferenciáveis ou métricas, quando o *espaço de fases* for uma variedade ou uma variedade Riemanniana. Veja a definição 1.1.1.

A motivação para o estudo de sistemas dinâmicos vem da mecânica, e por conseqüência, da necessidade de se estudar equações diferenciais onde cada ponto do espaço de fases é uma configuração possível do sistema, e o *fluxo* descreve como essa configuração se modifica com o “passar do tempo”.

### 1.1 Fluxos

Um *fluxo* representa a família de transformações do espaço de fases parametrizadas pelo tempo  $\mathbb{T}$ . Seja  $x$  é uma determinada configuração do espaço de fases e  $s$  e  $t$  são tempos. Denotando por  $\phi^t(x)$  a configuração em que  $x$  é transformada após o tempo  $t$ , essencialmente esperamos que após o tempo  $t + s$   $x$  seja transformada na mesma configuração em que  $\phi^t(x)$  é transformada quando transcorre o tempo  $s$ . Ou seja, o fluxo será a ação do grupo  $\mathbb{T}$  no espaço de fases. Veja a seção A.4 para maiores informações sobre ações de grupos.

Nos nossos exemplos, e na teoria que segue nos capítulos seguintes, o espaço de fases será um espaço vetorial  $V$  ou um espaço topológico “de-

“rivado” de um espaço vetorial pela *topologia induzida* (definição A.1.6) no caso por exemplo da esfera, ou pela *topologia quociente* (definição A.1.7) no caso do espaço projetivo ou da grasmiana. Da mesma forma, os fluxos serão induzidos por homomorfismos de grupos topológicos entre  $\mathbb{T}$  e o grupo topológico das transformações lineares inversíveis de  $V$ ,  $\text{Gl}(V)$ . As definições e notações necessárias podem ser consultadas na seção A.4 do apêndice.

**Definição 1.1.1** (Fluxo). *Seja  $X$  um espaço topológico. E seja uma aplicação contínua*

$$\phi : \mathbb{T} \times X \rightarrow X,$$

onde  $\mathbb{T}$  é o conjunto  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{R}$ .

Para cada  $t \in \mathbb{T}$ , denotamos por  $\phi^t : X \rightarrow X$  a aplicação (contínua)  $\phi^t(x) = \phi(t, x)$ .

Dizemos que  $\phi$  é um fluxo sobre  $X$ , se satisfaz:

1.  $\phi^0 = \text{id}_X$ .
2.  $\forall s, t \in \mathbb{T}, \phi^{s+t} = \phi^s \circ \phi^t$ .

Por um abuso de linguagem, também dizemos que  $\phi^t$  é um fluxo sobre  $X$ .

**Observação 1.1.2.** *Seja  $X$  um espaço topológico. Uma aplicação*

$$\phi : \mathbb{T} \times X \rightarrow X,$$

onde  $\mathbb{T}$  é o conjunto  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{R}$ , é um fluxo se, e somente se for uma ação do grupo topológico  $\mathbb{T}$  no espaço  $X$ . Ou seja, se  $X$  for um  $\mathbb{T}$ -espaço.

Um caso muito útil é o seguinte:

Seja  $G$  um grupo topológico agindo em um espaço topológico  $X$ , e  $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow G$  um homomorfismo contínuo de grupos topológicos. Então,

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{T} \times X &\rightarrow X \\ (t, x) &\mapsto \gamma(t)x \end{aligned}$$

é uma ação contínua de  $\mathbb{T}$  em  $X$ . Portanto,  $\phi$  é um fluxo sobre  $X$ .

O *fluxo* é definido sobre um espaço topológico  $X$  qualquer. No entanto, muitas das propriedades que vamos estudar dependem de compacidade, e muitas dependem de  $X$  ter uma métrica. Em geral, os fluxos que vamos estudar serão sobre espaços métricos compactos. Apesar disso, algumas demonstrações não requerem metrizabilidade, apenas que  $X$  seja Hausdorff, por exemplo.

**Exemplo 1.1.3** (Rotação). Uma rotação de  $S^1$  por um ângulo  $\theta \in \mathbb{T}$  induz em  $\text{Gl}(2)$  a curva

$$g: \mathbb{T} \rightarrow \text{Gl}(2) \\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t\theta) & -\sin(t\theta) \\ \sin(t\theta) & \cos(t\theta) \end{pmatrix} .$$

Esta curva, por sua vez, induz o seguinte fluxo em  $S^1$ :

$$\phi: \mathbb{T} \times S^1 \rightarrow S^1 \\ (\theta, x) \mapsto g(t)x .$$

No caso em que  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ , o exemplo não tem nada de muito interessante. No entanto, para  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ , se  $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$  temos um fluxo *periódico*, caso contrário o fluxo não é periódico, mas é *recorrente*. (Veja seção 1.7).

**Exemplo 1.1.4** (Exponenciação de matrizes). Seja  $Y \in \mathfrak{gl}(2)$ . A partir de  $Y$  definimos a curva  $g(t) = e^{tY}$  em  $\text{Gl}(2)$ . Esta curva induz um fluxo em  $S^1$  da seguinte maneira:

$$\phi: \mathbb{T} \times S^1 \rightarrow S^1 \\ (t, x) \mapsto g(t)x/|g(t)x| .$$

Também podemos considerar a ação de  $G$  em  $\mathbb{P}^1$ :

$$\psi: \mathbb{T} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \\ (t, [x]) \mapsto [g(t)x] .$$

Quando  $Y$  é *hiperbólico* (veja definição 2.1.1), por exemplo, quando

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ e^{tY} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} ,$$

os fluxos  $\phi^t$  e  $\psi^t$  são como esboçado na figura 1.1. Nos esboços, os pontos escuros representam os pontos fixos.

Quando  $Y$  é *nilpotente* (veja definição 2.1.1), por exemplo, quando

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ e^{tY} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

os fluxos  $\phi^t$  e  $\psi^t$  são como esboçado na figura.

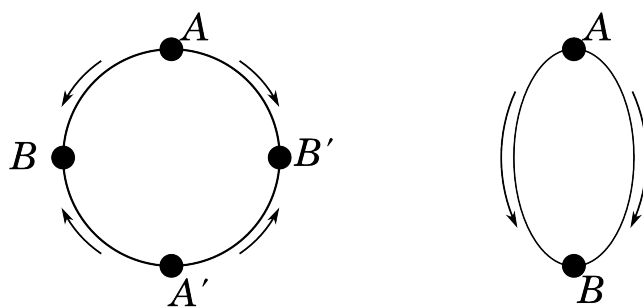


Figura 1.1: Fluxos em  $S^1$  e  $\mathbb{P}^1$  induzidos pela curva  $e^{tY}$  para  $t > 1$ . Caso em que  $Y$  é hiperbólico. Os pontos escuros  $A$ ,  $A'$ ,  $B$  e  $B'$  representam pontos fixos.

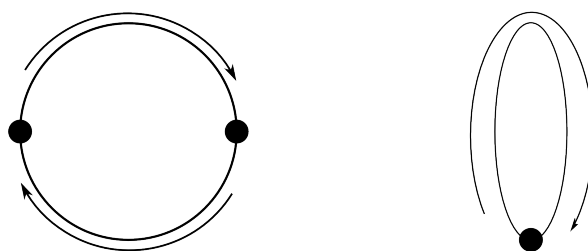


Figura 1.2: Fluxos em  $S^1$  e  $\mathbb{P}^1$  induzidos pela curva  $e^{tY}$  para  $t > 1$ . Caso em que  $Y$  é nilpotente.

Os exemplos anteriores são casos específicos dos exemplos apresentados a seguir.

**Exemplo 1.1.5.** Se  $G$  é um grupo de Lie (em geral, um grupo topológico), as aplicações

$$\begin{aligned} p : G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh \\ I : G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

são ações contínuas do grupo topológico  $G$  em si mesmo. E para grupos de Lie compactos, dado  $Y \in \mathfrak{g}$ , onde  $\mathfrak{g}$  é a álgebra de Lie de  $G$ , a aplicação  $t \mapsto e^{tY}$  é um homomorfismo contínuo de  $\mathbb{T}$  em  $G$ . Portanto, as aplicações

$$\begin{aligned} p_Y : \mathbb{T} \times G &\rightarrow G \\ (t, g) &\mapsto p(e^{tY}, g) = e^{tY}g \\ I_Y : \mathbb{T} \times G &\rightarrow G \\ (t, g) &\mapsto I(e^{tY}, g) = e^{tY}ge^{-tY} \end{aligned}$$

são fluxos em  $G$ .

**Exemplo 1.1.6** (Exponenciação). Seja  $V$  um espaço vetorial e  $G = \text{Gl}(V)$  o grupo das transformações lineares inversíveis de  $V$  dotado da topologia induzida de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , onde  $n = \dim(V)$ . Se tomarmos qualquer homomorfismo contínuo  $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow G$ , teremos o seguinte fluxo sobre  $V$ :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{T} \times V &\rightarrow V \\ (t, v) &\mapsto \gamma(t)v \end{aligned} .$$

Em particular, dado  $Y \in \mathfrak{gl}(V)$ , a exponencial de  $Y$  é uma curva em  $G$ , e o fluxo induzido por esta curva é:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{T} \times V &\rightarrow V \\ (t, v) &\mapsto e^{tY}v \end{aligned} .$$

**Exemplo 1.1.7** (Iteração de matrizes ( $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ )). Quando o tempo é discreto, o exemplo 1.1.6 é um caso particular de *iteração de matrizes*. Dado  $g \in \text{Gl}(V)$ , o fluxo sobre  $V$  dado pela iteração de  $g$  é

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z} \times V &\rightarrow V \\ (t, v) &\mapsto g^t v \end{aligned} .$$



**Exemplo 1.1.8.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie, e  $G = \text{Int}(\mathfrak{g})$ . Então  $G$  age em  $\mathfrak{g}$  através da *representação adjunta*. Neste caso,  $\mathfrak{g}$  é um espaço vetorial, e a representação adjunta é um homomorfismo contínuo de  $G$  em  $\text{Gl}(\mathfrak{g})$ . Estamos de volta ao caso do exemplo 1.1.6. Dado  $g \in G$ , existe  $Y \in \mathfrak{g}$ , tal que  $g = e^Y$ . Então a curva  $e^{tY}$  é tal que o fluxo induzido em  $\mathfrak{g}$  é dado por:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{T} \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ (t, v) &\mapsto \text{Ad}(e^{tY})v \end{aligned} .$$

**Exemplo 1.1.9** (Projetivo e grasmaniana). Do mesmo modo que  $G = \text{Gl}(V)$  age sobre o espaço vetorial  $V$ ,  $\text{Gl}(V)$  também age sobre o conjunto de todos os subespaços de  $V$  de uma dada dimensão  $d$ . Este conjunto é denotado por  $\text{Gr}_d(V)$ , e é chamado de *grasmaniana*. (Veja a definição A.4.17).

Assim como no exemplo 1.1.6, se tivermos um homomorfismo contínuo de grupos  $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow G$ , temos um fluxo definido na grasmaniana  $\text{Gr}_d(V)$ . O espaço projetivo  $\mathbb{P}V$  é o mesmo que  $\text{Gr}_1(V)$ .

**Exemplo 1.1.10** (Curva integral). Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , e seja  $\phi(x, t)$  a solução de

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = f(\phi(x, t)),$$

com condição inicial  $\phi(x, 0) = x$ . Se o domínio de  $\phi$  for todo o  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , então  $\phi$  é um fluxo. Para maiores detalhes, veja a seção 1.4, páginas 12 e 13 de [Chi99]. A proposição 1.16 de [Chi99] mostra que  $f$  pode ser *reparametrizada* de modo que o domínio de definição de  $\phi$  seja de fato  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

### 1.1.1 Propriedades dos Fluxos

Se  $\phi^t$  é fluxo em  $X$ , então para todo  $t \in \mathbb{T}$ ,  $\phi^t$  é um homeomorfismo de  $X$ , já que  $\phi^{-t}$  é seu inverso contínuo. Em particular, para todo  $t \in \mathbb{T}$  e todo  $A \subset X$ ,  $\text{cl}(\phi^t(A)) = \phi^t(\text{cl}(A))$ .

Também podemos definir o conceito de *semi-fluxo*

$$\phi : \mathbb{T} \times X \rightarrow X,$$

onde  $\mathbb{T}$  é o semi-grupo aditivo  $\mathbb{Z}^+$  ou  $\mathbb{R}^+$ . Para que propriedades interessantes de homomorfismo continuem valendo, exigimos que, além de ser contínuo sobre  $\mathbb{T} \times X$ , o *semi-fluxo*  $\phi^t$  satisfaça:

1.  $\phi^t$  é sobrejetivo para todo  $t \in \mathbb{T}$ .
2.  $\phi^t$  é uma aplicação aberta para todo  $t \in \mathbb{T}$ .
3.  $\phi^t$  é uma aplicação fechada para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

Note que neste caso, um *semi-fluxo* não é simplesmente uma “ação de monóides”. Esta generalização pode ser vista em [Pat06] e [Pat07].

## 1.2 Conjuntos Invariantes

Ao estudarmos a dinâmica de um determinado espaço de fases, é natural tentar decompor este espaço em subconjuntos mais simples. Um *conjunto invariante* é um subconjunto do espaço de fases que podemos “isolar do resto” para estudar a dinâmica do sistema restrita a este subconjunto. Se um conjunto  $A$  é tal que a ação do tempo mantém  $A$  invariante, então podemos tratar  $A$  como se fosse um espaço de fase e estudar o comportamento do sistema restrito a  $A$ .

**Definição 1.2.1** (Conjunto invariante). *Dado um fluxo  $\phi^t$  em  $X$ , um conjunto  $A \subset X$  é denominado invariante se  $\phi^t(A) = A$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .*

Na definição 1.2.1 é suficiente que  $\phi^t(A) \subset A$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . De fato, neste caso, aplicando  $\phi^t$  em ambos os lados de  $\phi^{-t}(A) \subset A$  teremos que para todo  $t \in \mathbb{T}$ ,  $A = \phi^t(\phi^{-t}(A)) \subset \phi^t(A)$ . Ou seja,  $A = \phi^t(A)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Assim, vale o seguinte lema:

**Lema 1.2.2.** *Se  $\phi^t$  é um fluxo em  $X$ , então  $A \subset X$  é um subconjunto invariante se e somente se para todo  $t \in \mathbb{T}$ ,  $\phi^t(A) \subset A$ .*

**Lema 1.2.3.** *Se  $\phi^t$  é um fluxo em  $X$  e  $A \subset X$  é um subconjunto invariante, então  $\text{cl}(A)$  também é invariante.*

*Demonstração.* Se  $A$  é invariante, então,  $\forall t \in \mathbb{T}$ ,  $\phi^t(\text{cl}(A)) = \text{cl}(\phi^t(A)) = \text{cl}(A)$ . □

Os conjuntos invariantes são uniões de *órbitas*, ou seja, de conjuntos do tipo  $\phi(\mathbb{T}, x)$ , para algum  $x \in X$ . Para exemplificar o conceito de conjuntos invariantes, vamos determinar as órbitas de alguns fluxos dos exemplos da seção 1.1.

**Exemplo 1.2.4.** No caso do fluxo  $p_Y$  do exemplo 1.1.5, cada órbita é a translação (por multiplicação à direita) da órbita da identidade, ou seja, cada órbita é uma classe lateral à esquerda do subgrupo de  $G$  dado por  $\phi(\mathbb{T}, x) = e^{\mathbb{T}Y}$ . O mesmo já *não* acontece no caso do fluxo  $I_Y$  do exemplo 1.1.5. O fluxo  $I_Y$  possui pontos fixos. Por exemplo,  $e^Y$  é ponto fixo de  $I_Y$ . Se  $e^Y$  não estiver no centro de  $\mathfrak{g}$ , então  $I_Y$  não é o fluxo constante. Diferentemente de  $p_Y$ , as órbitas de  $I_Y$  não são todas homeomorfas. A dinâmica de  $I_Y$  é mais rica que a de  $p_Y$ .

**Exemplo 1.2.5.** No exemplo 1.1.3, quando  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ , os únicos conjuntos invariantes são o vazio e todo o espaço  $X$ . Já no caso em que  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ , existem

vários conjuntos invariantes. De fato, as órbitas do fluxo são enumeráveis, e são conjuntos invariantes.

Na figura 1.1 do exemplo 1.1.4, as órbitas são cada um dos “pontos escuros” e cada um dos “arcos” que ligam esses pontos. Os conjuntos invariantes são quaisquer uniões dessas órbitas. Já no caso projetivo da figura 1.2, os conjuntos invariantes são, além do vazio: o “ponto fixo”, o “arco” e todo o  $X$ .

### 1.3 Órbitas e Conjuntos Limites

Os *conjuntos limites* são uma generalização do conceito de limite e ajudam no estudo do comportamento assintótico do sistema dinâmico. Estamos interessados em saber “para onde vai” um subconjunto  $A$  (ou um ponto) do espaço de fases quando o tempo tende para  $\infty$  ou  $-\infty$ .

Daqui por diante,  $\phi^t$  será sempre um fluxo definido sobre  $X$ . As propriedades de  $X$ , ou um subconjunto  $A \subset X$  relacionadas ao fluxo  $\phi^t$  também terão a locução “por  $\phi^t$ ” omitida. Por exemplo, como já viemos fazendo, diremos que  $A$  é *invariante*, ao invés de *invariante com relação a  $\phi^t$*  (por  $\phi^t$ ).

**Definição 1.3.1.** *Dado  $A \subset X$ , e  $t \in \mathbb{T}$ , definimos a órbita progressiva posterior a  $t$  e a órbita progressiva até  $t$  de  $A$ , respectivamente, por:*

$$A_t^+ = \bigcup_{s \geq t} \phi^s(A).$$

$$A_+^t = \bigcup_{0 \leq s \leq t} \phi^s(A).$$

*Analogamente, a órbita regressiva anterior a  $-t$  e a órbita regressiva até  $-t$ , respectivamente, por:*

$$A_t^- = \bigcup_{s \geq t} \phi^{-s}(A).$$

$$A_-^t = \bigcup_{0 \leq s \leq t} \phi^{-s}(A).$$

**Definição 1.3.2** ( $\omega$ -limite). *Seja  $A \subset X$ . Definimos o  $\omega$ -limite de  $A$  por*

$$\omega(A) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \text{cl}(A_t^+)$$

*e o  $\omega^*$ -limite de  $A$  por*

$$\omega^*(A) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \text{cl}(A_t^-).$$

Essa noção de limite é muito parecida com o conceito usual de limite de uma seqüência  $x_n$ . Quando o limite de  $x_n$  existe, o conjunto dos pontos que são limite de  $x_n$  é exatamente  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{cl}(X_n)$ , onde  $X_n = \{x_m \mid m \geq n\}$ .

O  $\omega^*$ -limite relativo ao fluxo  $\phi^t$  é exatamente o  $\omega$ -limite relativo ao fluxo inverso  $\psi^t = \phi^{-t}$ . Assim, resultados como o lema 1.3.4 valem também para o  $\omega^*$ -limite.

**Definição 1.3.3** (Recorrência). *Dado um fluxo  $\phi^t$ , dizemos que um ponto  $x \in X$  é recorrente quando  $x \in \omega(x)$ . Denotamos por*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\phi^t) = \{x \in X \mid x \in \omega(x)\}.$$

o conjunto de todos os pontos recorrentes.

**Lema 1.3.4.** *Valem as seguintes propriedades do  $\omega$ -limite:*

1. Se  $A \subset X$ , então  $\omega(A) = \omega(\text{cl}(A))$ .
2. Se  $A \subset X$  é fechado e invariante, então  $\omega(A) = A$ .
3. Para todo  $s \in \mathbb{T}$ ,

$$\omega(\phi^s(A)) = \omega(A).$$

*Demonstração.* Para o item (1), temos que

$$\begin{aligned} \text{cl}(A_t^+) &\subset \text{cl}(\text{cl}(A)_t^+) = \text{cl}\left(\bigcup_{s \geq t} \phi^s(\text{cl}(A))\right) = \\ &= \text{cl}\left(\bigcup_{s \geq t} \text{cl}(\phi^s(A))\right) \subset \text{cl}\left(\text{cl}\left(\bigcup_{s \geq t} \phi^s(A)\right)\right) = \\ &= \text{cl}\left(\bigcup_{s \geq t} \phi^s(A)\right) = \text{cl}(A_t^+). \end{aligned}$$

Portanto,  $\text{cl}(A_t^+) = \text{cl}(\text{cl}(A)_t^+)$ . E então,

$$\omega(A) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \text{cl}(A_t^+) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \text{cl}(\text{cl}(A)_t^+) = \omega(\text{cl}(A)).$$

Para o item (2), como  $A$  é invariante, temos que

$$A_t^+ = \bigcup_{s \geq t} \phi^s(A) = \bigcup_{s \geq t} A = A.$$

Portanto,

$$\omega(A) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \text{cl}(A_t^+) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \text{cl}(A) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} A = A.$$

O item (3) vale pois  $(\phi^s(A))_t^+ = A_{t+s}^+$  e  $\mathbb{T} = \mathbb{T} + s$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \omega(\phi^s(A)) &= \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \text{cl}(\phi^s(A)_t^+) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \text{cl}(A_{t+s}^+) = \\ &= \bigcap_{t \in \mathbb{T}+s} \text{cl}(A_t^+) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \text{cl}(A_t^+) = \omega(A). \end{aligned}$$

□

**Lema 1.3.5.** *A operação de união de finitos subconjuntos de  $X$  comuta com a operação de  $\omega$ -limite. Ou seja,*

$$\omega(A \cup B) = \omega(A) \cup \omega(B).$$

*Demonstração.* Note que, para  $s, t \in \mathbb{T}$ , fazendo  $t' = \max(s, t)$ ,

$$\begin{aligned} \bigcap_{t \in \mathbb{T}} (\text{cl}(A_t^+) \cup \text{cl}(B_t^+)) &\subset \bigcap_{(s,t) \in \mathbb{T}^2} (\text{cl}(A_{t'}^+) \cup \text{cl}(B_{t'}^+)) \subset \\ &\subset \bigcap_{(s,t) \in \mathbb{T}^2} (\text{cl}(A_s^+) \cup \text{cl}(B_t^+)) \subset \bigcap_{(t,t) \in \mathbb{T}^2} (\text{cl}(A_t^+) \cup \text{cl}(B_t^+)). \end{aligned}$$

Assim,

$$\bigcap_{t \in \mathbb{T}} (\text{cl}(A_t^+) \cup \text{cl}(B_t^+)) = \bigcap_{(s,t) \in \mathbb{T}^2} (\text{cl}(A_s^+) \cup \text{cl}(B_t^+)).$$

E portanto,

$$\begin{aligned} \omega(A \cup B) &= \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \text{cl}((A \cup B)_t^+) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} (\text{cl}(A_t^+) \cup \text{cl}(B_t^+)) = \\ &= \bigcap_{(s,t) \in \mathbb{T}^2} (\text{cl}(A_s^+) \cup \text{cl}(B_t^+)) = \left( \bigcap_{s \in \mathbb{T}} \text{cl}(A_s^+) \right) \cup \left( \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \text{cl}(B_t^+) \right) = \omega(A) \cup \omega(B). \end{aligned}$$

□

**Exemplo 1.3.6.** Na figura 1.1 do exemplo 1.1.4, os  $\omega$ -limites são os pontos  $B$  e  $B'$ . Os  $\omega^*$ -limites são os pontos  $A$  e  $A'$ . Já no caso projetivo da figura 1.2, o “ponto fixo” é um  $\omega$ -limite e também um  $\omega^*$ -limite.

**Exemplo 1.3.7.** No exemplo 1.1.3, para o caso em que  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  e  $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$ , como as órbitas são formadas por finitos pontos e o fluxo é periódico, então, dado  $x \in S^1$ ,  $\omega^*(x) = \omega(x) = \phi(\mathbb{T}, x)$ . Para o caso em que  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  e  $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$ , teremos que  $\omega^*(x) = \omega(x) = S^1$ . Para verificar isso, vamos primeiro mostrar

que para todo  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $x_t^+$  é denso em  $S^1$ . Se não fosse este o caso, denotando por  $A$  o conjunto complementar do fecho de  $x_t^+$ ,  $A$  seria aberto não vazio. Para todo  $t \in \mathbb{N}$ ,  $\phi^t(A) \subset A$ , pois isto é verdade para  $x_0^+$ . Vamos denotar por  $(a, b)$  a componente conexa de  $A$  com “extremos” e contendo os pontos entre  $a$  e  $b$  quando se “caminha no sentido anti-horário”. Para todo  $t \in \mathbb{T}$ ,  $\phi^t((a, b)) = (\phi^t(a), \phi^t(b))$  é uma componente conexa de  $A$  de comprimento igual ao de  $(a, b)$ , pois a rotação é uma isometria que preserva orientação. Como  $S^1$  tem comprimento finito, então existem  $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$ , com  $t_2 > t_1$ , tais que  $\phi^{t_1}((a, b)) = \phi^{t_2}((a, b))$ . Em particular, como a rotação preserva orientação,  $\phi^{t_1}(a) = \phi^{t_2}(a)$ . Portanto,

$$a = \phi^{t_2 - t_1}(a).$$

Isso é uma contradição, pois no caso em que  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  e  $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$ , nenhum ponto é periódico. Portanto,

$$\omega(x) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \text{cl}(x_t^+) = S^1.$$

O mesmo vale para  $\omega^*(x)$ . Basta tomar o fluxo inverso, por exemplo.

## 1.4 Atratores e Repulsores

Em um espaço de fases compacto, o  $\omega$ -limite e o  $\omega^*$ -limite de um subconjunto  $A$  são sempre diferente de vazio e são invariantes e fechados. Os conjuntos fechados e invariantes são por sua vez o  $\omega$ -limite (ou  $\omega^*$ -limite) de si mesmos. Vamos estudar a estabilidade dos conjuntos invariantes e fechados através da análise do comportamento assintótico de suas vizinhanças. Considere a figura 1.2. Um ponto fixo na figura é um conjunto invariante e fechado. No entanto, em sua vizinhança existem pontos que com o tempo “se aproximam” do ponto fixo, e pontos que “se distanciam”. Uma classe mais restrita dos conjuntos que não apresentam esse tipo de comportamento instável, são os *atratores* (e *repulsores*). Os *atratores* são conjuntos que além de invariantes e fechados, podem ser isolados por vizinhanças que “assintoticamente se contraem” para o próprio *atrator*. Aqui a expressão “assintoticamente” enfatiza o fato de que em um “curto espaço de tempo” a vizinhança pode até se expandir, mas assintoticamente será reduzida ao *atrator*.

**Definição 1.4.1.** *Um subconjunto  $A \subset X$  é chamado atrator, quando existir uma vizinhança  $U$  de  $A$ , tal que  $A = \omega(U)$ . Se existir  $V$ , vizinhança de  $R \subset X$ , tal que  $R = \omega^*(V)$ ,  $R$  é chamado repulsor.*

*As vizinhanças  $U$  e  $V$  são ditas vizinhança atratora e vizinhança repulsora, respectivamente.*

Os atratores e repulsores são respectivamente os repulsores e atratores do fluxo inverso  $\psi^t = \phi^{-t}$ .

**Exemplo 1.4.2.** Na figura 1.1 do exemplo 1.1.4, os atratores são, além do conjunto vazio, os conjuntos  $\{B\}$ ,  $\{B'\}$ ,  $\{B, B'\}$  e  $S^1$  no caso  $S^1$  e  $\{B\}$ ,  $\mathbb{P}^1$  no caso projetivo. O caso dos repulsores é análogo, com os pontos  $A$  e  $A'$ . A figura 1.3 ilustra com linhas pontilhadas, um exemplo de vizinhanças atratoras.

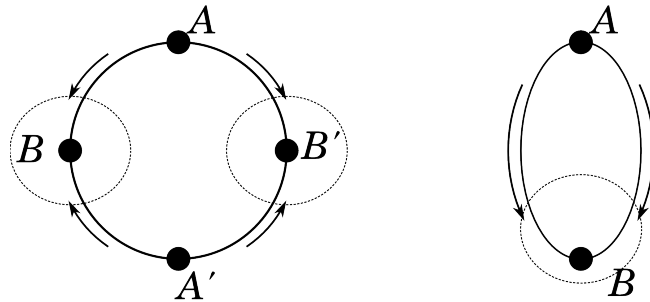


Figura 1.3: Vizinhanças atratoras em  $S^1$  e  $\mathbb{P}^1$ .

**Exemplo 1.4.3.** Na figura 1.2 do exemplo 1.1.4, tanto no caso  $S^1$  quanto no caso projetivo, os únicos atratores são os atratores triviais. É fácil ver que no caso do projetivo, por exemplo, toda vizinhança  $V$  do “ponto fixo” é tal que  $\omega(V) = X$ . Portanto, os únicos atratores são o vazio e todo o  $X$ . No entanto, no caso  $S^1$ , se uma das “setas” tivesse sua direção invertida, um dos pontos fixos seria um atrator, e o outro um repulsor. Veja a figura 1.4.

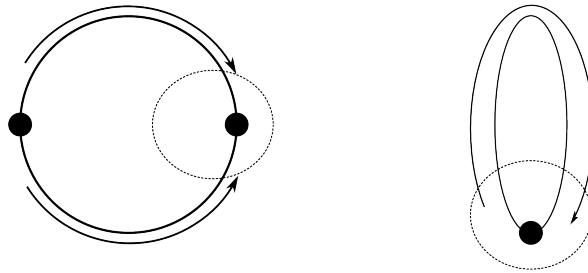


Figura 1.4: A vizinhança marcada em  $S^1$  (esquerda) é uma vizinhança atratora. O ponto em  $\mathbb{P}^1$  (direita) não é um atrator.

**Exemplo 1.4.4** (Rotação). Continuando o exemplo 1.3.7 para o caso em que  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  e  $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$ , já vimos que para todo  $x \in S^1$ ,  $\omega(x) = S^1$ . Portanto, os únicos atratores são o vazio e  $S^1$ . Quanto ao caso em que  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  e  $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$ , todos os pontos são recursivos. Assim, dado um conjunto  $V$  qualquer,  $V \subset \omega(V)$ . Portanto,  $\text{cl}(V) \subset \omega(V)$ , e em particular,  $V$  será vizinhança de  $\omega(V)$  apenas quando for vizinhança de  $\text{cl}(V)$ . Ou seja, quando  $V$  for aberto e fechado. Assim, também neste caso, os únicos atratores são o vazio e  $S^1$ .

**Exemplo 1.4.5.** As figuras 1.5 esboçam um fluxo com um atrator dado pelo “pequeno círculo”, com vizinhança atratora  $V$ . Note que se o sentido de uma das setas verticais fosse invertido em qualquer uma das figuras,  $V$  não seria mais uma vizinhança atratora. Os únicos atratores seriam os triviais. Uma diferença entre o fluxo da direita e o da esquerda, é que no fluxo da direita, o ponto  $a$  também é tal que  $\{a\}$  é um atrator com vizinhança atratora  $U$ . No fluxo da esquerda,  $\{a\}$  não é um atrator.

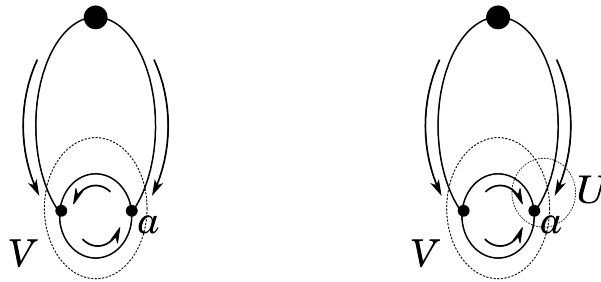


Figura 1.5: Uma vizinhança atratora  $V$  de um atrator, e uma vizinhança atratora  $U$  de  $\{a\}$ .

### 1.4.1 Repulsor Complementar e Atrator Complementar

Seja  $A \subset X$  um atrator. Sabemos que existem muitos pontos  $x \in X$  tais que  $\omega(x) \subset A$ . No mínimo todos os pontos de uma vizinhança atratora de  $A$ . Por sorte, quando  $X$  é um espaço compacto Hausdorff, demonstramos que  $\omega(x) \subset A$  ou  $\omega(x) \cap A = \emptyset$ . Veja o item (1) de 1.4.9. O conjunto dos pontos cujo  $\omega$ -limite não está em  $A$  será denotado por  $A^*$ , e será um repulsor (pelo item (2) de 1.4.10). Assim, conseguiremos separar  $X$  em três componentes  $A$ ,  $A^*$  e  $\kappa(A, A^*)$  (definição 1.5.1). Por 1.4.9, todos os pontos em  $\kappa(A, A^*)$  serão tais que assintoticamente se aproximarão de  $A$  quando o tempo se aproximar



de  $\infty$  e de  $A^*$  quando o tempo se aproximar de  $-\infty$ . Veja por exemplo a figura 1.8. Ou seja, para  $x \in \kappa(A, A^*)$  teremos que  $\omega(x) \subset A$  e  $\omega(x)^* \subset A^*$ .

**Definição 1.4.6.** Quando  $X$  é compacto Hausdorff e  $A \subset X$  é um atrator, então

$$A^* = \{x \in X \mid \omega(x) \cap A = \emptyset\}$$

é chamado repulsor complementar de  $A$ . O item (2) da proposição 1.4.10 mostrará que o conjunto  $A^*$  é de fato um repulsor.

Quando  $X$  é compacto Hausdorff e  $R \subset X$  é um repulsor, então

$$R_* = \{x \in X \mid \omega^*(x) \cap R = \emptyset\}$$

é chamado atrator complementar de  $R$ . Da mesma forma que para  $A^*$ ,  $R_*$  também é de fato um atrator. Basta considerar o fluxo inverso.

Na definição 1.4.6, utilizaremos o fato de que  $X$  é um espaço compacto Hausdorff para demonstrar que os conjuntos  $A^*$  e  $R_*$  são de fato um repulsor e um atrator quando  $A$  for um atrator e  $R$  um repulsor. Mesmo que  $X$  não seja compacto Hausdorff,  $A$  e  $R$  não sejam necessariamente um atrator ou repulsor, os conjuntos  $A^*$  e  $R_*$  estão sempre definidos. Estes conjuntos no entanto não serão necessariamente um repulsor e um atrator se as condições da definição 1.4.6 não forem satisfeitas. (Veja o item (2) de 1.4.10.)

**Exemplo 1.4.7.** As figuras 1.6 esboçam um fluxo com um atrator e uma vizinhança atratora ( $V$  e  $U$ ). Os repulsores complementares desses atratores são dados por  $\omega^*(V')$  e  $\omega^*(U')$ . No primeiro caso, o repulsor complementar é dado pelo ponto fixo contido em  $V'$ . No segundo caso, o repulsor complementar é composto pelos dois pontos fixos contidos em  $U'$  e pelo “arco” que liga esses dois pontos.

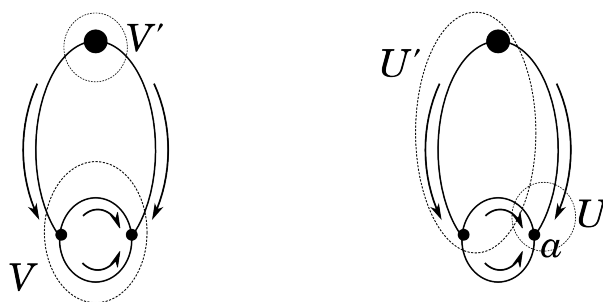


Figura 1.6: Repulsores complementares (vizinhanças repulsoras  $U'$  e  $V'$ ).

**Lema 1.4.8.** *Se  $X$  é compacto,  $A \subset X$  é um atrator com vizinhança atratora  $U$  e  $K \subset X$  um conjunto compacto tal que  $\omega(K) \subset A$ , então  $\exists t \in \mathbb{T}$  tal que  $K_t^+ \subset \text{int}(U)$ .*

*Em particular, se a própria vizinhança  $U$  for compacta,  $\exists t \in \mathbb{T}$  tal que  $U_t^+ \subset \text{int}(U)$ .*

*Demonstração.* Seja  $V = \text{int}(U)$ . Suponha que não existe  $t \in \mathbb{T}$  tal que  $K_t^+ \subset V$ . Neste caso, para todo  $t$ , a seqüência decrescente de compactos  $V^c \cap \text{cl}(K_t^+)$  nunca é vazia. Portanto, pela compacidade de  $X$ ,

$$\bigcap_{t \in \mathbb{T}} (V^c \cap \text{cl}(K_t^+)) \neq \emptyset.$$

Mas isso contradiz a hipótese de que  $\omega(K) \subset A$ , pois

$$\emptyset = V^c \cap \omega(K) = V^c \cap \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \text{cl}(K_t^+) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} (V^c \cap \text{cl}(K_t^+)).$$

□

**Proposição 1.4.9.** *1. Se  $X$  é compacto Hausdorff,  $A \subset X$  um atrator e  $K \subset X$  um conjunto compacto disjunto de  $A^*$ . Então,  $\omega(K) \subset A$ .*

*2. Sejam  $X$  compacto Hausdorff,  $A \subset X$  um atrator e  $K \subset X$  um conjunto compacto disjunto de  $A$ , então,  $\omega^*(K) \subset A^*$ .*

*Demonstração.* Para o item (1), seja  $U$  uma vizinhança atratora de  $A$ , aberta. Para todo  $x \in K$ , existe  $t_x \in \mathbb{T}$  tal que  $\phi^{t_x}(x) \in U$ . Então,  $K$  é coberto pelos abertos  $V_x = \phi^{-t_x}(U)$ . Pelo item (3) de 1.3.4, esses abertos são tais que  $\omega(V_x) = \omega(U) = A$ . Como  $K$  é compacto, existe uma subcobertura finita  $V_1, \dots, V_n$ . Por 1.3.5,  $\omega(K) \subset \bigcup \omega(V_i) = A$ .

Vamos mostrar (2). Como  $X$  é compacto Hausdorff,  $K$  é disjunto de  $A$ , e ambos são compactos, então, existe  $V$ , uma vizinhança compacta de  $A$ , disjunta de  $K$  e  $A^*$ .  $V$  é uma vizinhança atratora de  $A$  pelo item (1) de 1.4.10. Por 1.4.8, existe  $t \in \mathbb{T}$  tal que  $V_t^+ \subset V$ .

Suponha, para obter uma contradição, que  $\omega^*(K) \not\subset A^*$ . Ou seja, que existe  $x \in \omega^*(K) \setminus A^*$ . Como  $\omega^*(K)$  é invariante e fechado, temos que  $\omega(x) \subset \omega^*(K)$ . Por outro lado, pelo item (1),  $\omega(x) \subset A$ . Em particular,  $A \cap \omega^*(K) \neq \emptyset$ .

Como  $A \cap \omega^*(K) \neq \emptyset$ , temos que existe  $s > t$  tal que  $\phi^{-s}(K) \cap V \neq \emptyset$ . Portanto, existe  $y \in K \cap \phi^s(V)$ . Mas  $s > t$  implica que  $\phi^s(V) \subset V_t^+ \subset V$ . Então,  $y \in K \cap V$ , contradizendo a escolha de  $V$  como sendo disjunto de  $K$ .

Portanto,  $\omega^*(K) \subset A^*$ . □

**Proposição 1.4.10.** *Se  $X$  é compacto Hausdorff e  $A \subset X$  um atrator, então o repulsor complementar  $A^*$  possui as seguintes propriedades:*

1. *Se  $K \subset X$  é uma vizinhança compacta de  $A$  disjunta de  $A^*$ , então  $K$  é uma vizinhança atratora de  $A$ .*
2. *O conjunto  $A^*$  é de fato um repulsor e toda vizinhança compacta de  $A^*$ , disjunta de  $A$  é repulsora.*

*Demonstração.* Pelo item (1) de 1.4.9,  $\omega(K) \subset A$ . Por outro lado,  $A = \omega(A) \subset \omega(K)$ . Isso demonstra o item (1).

Para o item (2), basta observar que para todo  $K$ , vizinhança compacta de  $A^*$  disjunta de  $A$ ,

$$A^* = \omega^*(A^*) \subset \omega^*(K) \subset A^*,$$

onde a última inclusão segue do item (2) de 1.4.9. O fato de  $X$  ser compacto Hausdorff implica que uma tal vizinhança de  $A^*$  sempre existe, e portanto,  $A^*$  é um repulsor.  $\square$

**Observação 1.4.11.** Analogamente ao item (2) de 1.4.10, se considerarmos o fluxo inverso  $\psi^t = \phi^{-t}$ , teremos que se  $X$  é compacto Hausdorff, e  $R \subset X$  um repulsor, então  $R_*$  é um atrator.

**Lema 1.4.12.** *Seja  $A \subset X$  um atrator e  $R \subset X$  um repulsor. O repulsor complementar  $A^*$  e o atrator complementar  $R_*$  possuem as seguintes propriedades:*

1. *Se  $B \subset X$  é um conjunto invariante fechado disjunto de  $A$ , então,  $B \subset A^*$ . Uma afirmação análoga vale para os repulsores.*
2. *Se  $X$  é compacto, então,  $A^*$  é compacto (fechado) e invariante. Em particular,  $\omega(A^*) = A^*$ .*
3. *Analogamente, se  $X$  é compacto e  $R \subset X$  é um repulsor, então,  $R_*$  é compacto (fechado) e invariante. Em particular,  $\omega(R_*) = R_*$ .*

*Demonstração.* Pelo item (2) de 1.3.4, se  $x \in B$ , então  $\omega(x) \subset B$ . Ou seja,  $\omega(x) \cap A = \emptyset$ . Isso demonstra o item (1).

Para o item (2), o fato de  $A^*$  ser invariante é uma consequência do item (3) de 1.3.4. Ou seja, se  $x \in A^*$ , então, dado  $t \in \mathbb{T}$ ,  $\omega(\phi^t(x)) = \omega(x) \subset A^c$ . Portanto,  $\phi^t(x) \in A^*$ .

Vamos mostrar que  $A^*$  é fechado. Sejam  $x \notin A^*$  e  $U \supset A$  uma vizinhança atratora de  $A$ . Então, existe  $t \in \mathbb{T}$  tal que  $\phi^t(x) \in U$ . Ou seja,  $V = \phi^{-t}(U)$  é

uma vizinhança de  $x$ , tal que  $\omega(V) = \omega(U) = A$ , onde a primeira igualdade vem do item (3) de 1.3.4. Assim, para todo  $y \in V$ ,  $\omega(y) \subset \omega(V) = A$ . Em particular,  $V \cap A^* = \emptyset$ . Portanto,  $A^*$  é fechado.

Por ser fechado e invariante, o item (2) de 1.3.4 implica que  $\omega(A^*) = A^*$ .

Para o item (3), basta olhar para o fluxo inverso, e aplicar o item (2).  $\square$

**Observação 1.4.13.** Se  $X$  é compacto Hausdorff e  $A \subset X$  é um atrator. Então,  $A^*$  é o maior conjunto invariante disjunto de  $A$ . Como  $A^*$  é repulsor e os repulsores são invariantes, em particular,  $A^*$  também é o maior repulsor disjunto de  $A$ . Analogamente, para um repulsor  $R \subset X$ .

**Proposição 1.4.14.** Se  $X$  é compacto Hausdorff e  $A \subset X$  é um atrator, então,  $A = (A^*)_*$ . Da mesma forma, se  $R \subset X$  é um repulsor, então,  $R = (R_*)^*$ .

*Demonstração.*  $A$  é um atrator disjunto de  $A^*$ . Portanto, por 1.4.13,  $A \subset (A^*)_*$ . Por outro lado,  $(A^*)_*$  é um conjunto compacto disjunto de  $A^*$ . Portanto,  $(A^*)_* = \omega((A^*)_*) \subset A$ . Onde a igualdade vem do item (3) de 1.4.12, e a inclusão vem do item 1 de 1.4.9.

O caso do repulsor  $R$  segue tomando-se o fluxo inverso.  $\square$

**Lema 1.4.15.** Seja  $x \in X$  então,

$$\begin{aligned}\omega(x) \subset A^* &\Rightarrow x \in A^* \\ \omega^*(x) \subset A &\Rightarrow x \in A.\end{aligned}$$

*Demonstração.* A primeira implicação segue diretamente da definição, pois  $\omega(x) \subset A^*$  implica que  $\omega(x) \cap A = \emptyset$ , o que significa pela definição de  $A^*$  que  $x \in A^*$ .

Por 1.4.14, podemos substituir  $A$  por  $(A^*)_*$ . Assim, basta mostrar que

$$\omega^*(x) \subset (A^*)_* \Rightarrow x \in (A^*)_*.$$

Mas isso também segue da definição de atrator complementar, pois  $\omega^*(x) \subset (A^*)_*$  implica que  $\omega^*(x) \cap A^* = \emptyset$ , o que significa pela definição de atrator complementar que  $x \in (A^*)_*$ .  $\square$

## 1.4.2 Repulsor Relativo a Outro Repulsor

Podemos restringir o fluxo de um espaço  $X$ , a qualquer conjunto invariante. Podemos então falar de atratores e repulsores relativos a este conjunto invariante. Em especial, dado um repulsor  $R \subset X$ , podemos falar de um repulsor  $\bar{R} \subset R$ , relativo à  $R$ . Ou seja, um repulsor  $\bar{R}$  de  $\phi^t|_R$ .

O objetivo desta seção é mostrar que  $\bar{R}$  é também um repulsor relativo ao espaço todo  $X$ . Ou seja,  $\bar{R}$  é um repulsor do fluxo  $\phi^t$ . Para tanto, precisaremos encontrar uma vizinhança  $V$  de  $\bar{R}$  em  $X$ , que seja tal que  $\omega^*(V) = \bar{R}$ . Obviamente que o caso de um atrator relativo a outro atrator é análogo. Basta considerar o fluxo inverso.

Primeiramente, vamos demonstrar o fato, para o caso em que  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ . A demonstração para o caso  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  é muito parecida, mas exige um pouco mais de cuidado.

Precisaremos do seguinte critério para concluir que um determinado conjunto  $R \subset X$  é de fato um repulsor.

**Lema 1.4.16** (Caso  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ). *Seja  $R \subset X$  um conjunto invariante, e  $N \subset X$  uma vizinhança compacta de  $R$ , tal que  $R$  é invariante maximal em  $N$ . Quando, para todo  $x \in N \setminus \text{int}(N)$ , a órbita progressiva  $x_0^+$  não estiver toda contida em  $N$ , então,  $R$  será um repulsor.*

*Demonstração.* Vamos encontrar uma vizinhança repulsora de  $R$ . Ou seja, vamos construir um conjunto aberto  $V$ , contendo  $R$ , tal que  $\omega^*(V) = R$ .

**Afirmção 1.** *Existe  $\bar{t} \in \mathbb{T}$ , tal que para todo  $x \in N \setminus \text{int}(N)$ ,  $x_+^{\bar{t}} \not\subset N$ .*

De fato, para todo  $x \in N \setminus \text{int}(N)$ , existe  $t_x \in \mathbb{T}$  tal que  $\phi^{t_x}(x) \notin N$ . Faça  $U_x = \phi^{-t_x}(N^c)$ . Então,  $U_x$  é uma vizinhança de  $x$ . Pela compacidade de  $N \setminus \text{int}(N)$ , existem  $x_1, \dots, x_n$  tais que

$$N \setminus \text{int}(N) \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}.$$

Tome  $\bar{t} = \max(t_{x_1}, \dots, t_{x_n})$ . Neste caso, para todo  $x \in N \setminus \text{int}(N)$ ,  $x_+^{\bar{t}} \not\subset N$ .

**Afirmção 2.** *Para  $x \in N$  tal que  $x_-^{\bar{t}} \subset N$ , temos que  $x_0^- \subset N$ .*

Caso contrário,

$$t = \sup\{s \in \mathbb{T} \mid x_-^s \subset N\} \geq \bar{t}$$

é finito. Pela definição de  $t$ , temos que  $\phi((-t, 0], x) \subset N$ . Assim,

$$\phi([-t, 0], x) = \text{cl}(\phi((-t, 0], x)) \subset \text{cl}(N) = N.$$

Ou seja,  $x_-^t \subset N$ . Em particular, pela afirmação 1,  $y = \phi^{-t}(x) \notin N \setminus \text{int}(N)$ , pois  $y_+^t \subset x_-^t \subset N$ . Ou seja,  $y \in \text{int}(N)$ . Então, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $y_-^\varepsilon \subset N$ . Ou seja,  $x_-^{t+\varepsilon} = x_-^t \cup y_-^\varepsilon \subset N$ . Contradizendo a definição de  $t$ .

**Afirmção 3.** *Para todo  $x \in R$ , existe uma vizinhança  $V_x$  de  $x$ , tal que  $(V_x)_-^{\bar{t}} \subset N$ .*

Seja  $U \subset \mathbb{T} \times X$  a imagem inversa de  $N$  pelo fluxo  $\phi$ . Então  $U$  é uma vizinhança de  $[-\bar{t}, 0] \times \{x\}$ . Para cada  $(t, x) \in [-\bar{t}, 0] \times \{x\}$ , temos uma vizinhança de  $(t, x)$  contida em  $U$ , na forma  $I_t \times V_t$ . Como  $[-\bar{t}, 0] \times \{x\}$  é compacto, existe um número finito dessas vizinhanças,  $I_1 \times V_1, \dots, I_n \times V_n$ , cobrindo  $[-\bar{t}, 0] \times \{x\}$ . Tome

$$V = V_1 \cap \dots \cap V_n.$$

Então,  $[-\bar{t}, 0] \times V \subset U$ . Ou seja,  $V_{-\bar{t}} \subset N$ .

**Afirmção 4.** *O conjunto  $V = \bigcup_{x \in R} V_x$  é uma vizinhança repulsora de  $R$ .*

Obviamente que  $R \subset V$ . Como  $R$  é invariante por hipótese, temos que  $R = \omega^*(R) \subset \omega^*(V)$ . Bastando portanto mostrar que  $\omega^*(V) \subset R$ . Juntando as duas afirmações anteriores, temos que  $(V_x)_0^- \subset N$ . Em particular,  $\omega^*(V_x) \subset N$ . Mas por hipótese,  $R$  é invariante maximal em  $N$ . Portanto,  $\omega^*(V_x) \subset R$ . Concluindo a demonstração.  $\square$

**Proposição 1.4.17** (Caso  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ). *Sejam  $R \subset X$  um repulsor, e  $\bar{R} \subset R$  um repulsor em  $R$ . Então  $\bar{R}$  é um repulsor em  $X$ .*

*Demonstração.* Vamos denotar o atrator complementar a  $\bar{R}$  dentro de  $R$  por  $\bar{R}_*$ . Seja  $N$  uma vizinhança compacta de  $\bar{R}$  disjunta de  $R_*$  e disjunta de  $\bar{R}_*$ . Seja  $x \in N \setminus \text{int}(N)$ . Se  $x \in R$ , então  $\omega(x) \subset \bar{R}_*$ . Se  $x \notin R$ , então  $\omega(x) \subset R_*$ . Em ambos os casos,  $\omega(x)$  é disjunto de  $N$ . Em particular, existe  $t \in \mathbb{T}$  tal que  $x_+^t \notin N$ . Agora, basta aplicar o lema 1.4.16.  $\square$

No caso  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ , não podemos simplesmente argumentar como na demonstração de 1.4.16 que  $x_0^- \subset N$ . A dificuldade agora é que como  $\mathbb{T}$  é discreto, não segue da argumentação de 1.4.16 que  $x_0^- \subset N$ . Assim, na hipótese substituímos  $\text{int}(N)$  por um conjunto aberto menor  $L$ , de modo a garantir que quando  $x_-^t \subset N$  para  $t > \bar{t}$ , teremos que  $x_-^{t+1} \subset N$ . A técnica de indução é análoga ao caso  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ , onde tivemos que  $x_-^{t+\varepsilon} \subset N$ .

**Lema 1.4.18** (Caso  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ). *Seja  $R \subset X$  um conjunto invariante, e  $N \subset X$  uma vizinhança compacta de  $R$ , tal que  $R$  é invariante maximal em  $N$ . Sejam também,  $K = \phi^1(N)$  e  $L = \text{int}(N) \cap \text{int}(K)$ . Se para todo  $x \in N \setminus L$ , a órbita progressiva  $x_0^+$  não estiver toda contida em  $N$ , então,  $R$  será um repulsor.*

*Demonstração.* Vamos encontrar uma vizinhança repulsora de  $R$ . Ou seja, vamos construir um conjunto aberto  $V$ , contendo  $R$ , tal que  $\omega^*(V) = R$ . Exatamente como fizemos no lema 1.4.16, sendo que a dificuldade agora é que como  $\mathbb{T}$  é discreto, não conseguimos concluir, apenas com o argumento de 1.4.16, que  $x_0^- \subset N$ .

**Afirmção 1.** *Existe  $\bar{t} \in \mathbb{T}$ , tal que para todo  $x \in N \setminus L$ ,  $x_+^{\bar{t}} \notin N$ .*

Como em 1.4.16, trocando  $\text{int}(N)$  por  $L$ .

**Afirmção 2.** *Para  $x \in N$  tal que  $x_-^{\bar{t}} \subset N$ , temos que  $x_0^- \subset N$ .*

Basta mostrar que se, para  $t \geq \bar{t}$ ,  $x_-^t \subset N$ , então  $\phi^{-(t+1)}(x) \subset N$ . Mas  $x_-^t \subset N$  implica que  $y = \phi^{-t}(x)$  é tal que  $y_+^t \subset N$ . Pela afirmção anterior,  $y \in L \subset K$ . Portanto,

$$\phi^{-(t+1)}(x) = \phi^{-1}(y) \subset \phi^{-1}(K) = N.$$

**Afirmção 3.** *Para todo  $x \in R$ , existe uma vizinhança  $V_x$  de  $x$ , tal que  $(V_x)_-^{\bar{t}} \subset N$ .*

Como em 1.4.16, substituindo  $[-\bar{t}, 0]$  por  $[-\bar{t}, 0] \cap \mathbb{T}$ .

**Afirmção 4.** *O conjunto  $V = \bigcup_{x \in R} V_x$  é uma vizinhança repulsora de  $R$ .*

Exatamente como em 1.4.16.  $\square$

**Proposição 1.4.19** (Caso  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ). *Sejam  $R \subset X$  um repulsor, e  $\bar{R} \subset R$  um repulsor em  $R$ . Então  $\bar{R}$  é um repulsor em  $X$ .*

*Demonstração.* Vamos denotar o atrator complementar a  $\bar{R}$  dentro de  $R$  por  $\bar{R}_*$ . Seja  $K$  uma vizinhança compacta de  $\bar{R}$  disjunta de  $R_*$  e disjunta de  $\bar{R}_*$ . Faça  $N = \phi^{-1}(K)$ . Então,  $N$  é também uma vizinhança compacta de  $\bar{R}$ , disjunta de  $R_*$  e de  $\bar{R}_*$ . De fato, como  $\bar{R}$  é invariante e  $\phi^{-1}$  é um homeomorfismo, temos que  $\phi^{-1}$  leva uma vizinhança de  $\bar{R}$  em outra vizinhança de  $\bar{R}$ . Da mesma maneira, como  $R_*$  é invariante, não pode ter interseção com  $N$ , pois isso implicaria em  $R_*$  tendo interseção com  $K$ .

Vamos mostrar que os conjuntos  $N$ ,  $K$  e  $L = \text{int}(K) \cap \text{int}(N)$  satisfazem as condições do lema 1.4.18. Seja  $x \in K \setminus L$ . Se  $x \in R$ , então  $\omega(x) \subset \bar{R}_*$ . Se  $x \notin R$ , então  $\omega(x) \subset R_*$ . Em ambos os casos,  $\omega(x)$  é disjunto de  $N$ . Em particular, como  $N$  é fechado, existe  $t \in \mathbb{T}$  tal que  $x_+^t \notin N$ . Agora, basta aplicar o lema 1.4.18.  $\square$

## 1.5 Decomposição de Morse

Nesta seção, a menos que mencionado o contrário, estaremos tratando de um fluxo  $\phi^t$  sobre um espaço  $X$  compacto Hausdorff.

**Definição 1.5.1.** Dado um atrator  $A \subset X$ , o conjunto  $\kappa(A, A^*) = X \setminus (A \cup A^*)$  é chamado de conjunto das órbitas conectantes do par atrator-repulsor  $(A, A^*)$ .

A proposição 1.4.9, mostra que dado um par atrator-repulsor  $(A, A^*)$ , todo ponto  $x \in \kappa(A, A^*)$  é tal que  $\omega(x) \in A$  e  $\omega^*(x) \in A^*$ . Um refinamento deste conceito é a chamada *decomposição de Morse*.

**Definição 1.5.2.** Uma coleção  $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_n\}$  de subconjuntos de  $X$ , não vazios, dois a dois disjuntos, compactos e invariantes é uma decomposição de Morse do fluxo  $\phi^t$  se satisfizer:

1. Para todo  $x \in X$  existem  $M_i, M_j \in \mathcal{M}$  tais que  $\omega(x) \subset M_i$  e  $\omega^*(x) \subset M_j$ .
2. Se, dado  $x \in X$ ,  $\omega(x)$  e  $\omega^*(x)$  estiverem contidos em um mesmo  $M \in \mathcal{M}$ , então  $x \in M$ .
3. O fecho transitivo e reflexivo  $\preceq$  da relação

$$R = \{(M_i, M_j) \in \mathcal{M}^2 \mid \exists x \in X, \omega^*(x) \subset M_i, \omega(x) \subset M_j\}$$

é uma ordem parcial.

Cada elemento de  $\mathcal{M}$  é chamado de uma componente de Morse (da decomposição  $\mathcal{M}$ ).

**Observação 1.5.3.** O fecho transitivo e reflexivo de uma relação qualquer é uma pré-ordem. Para que uma pré-ordem  $\prec$  seja uma ordem parcial, basta que seja anti-simétrica. Ou seja, que  $a \prec b$  e  $b \prec a$  implique em  $a = b$ . No caso da definição 1.5.2, o conjunto em questão é finito, portanto, a pré-ordem do ítem (3) será uma ordem parcial se, e somente se, os índices das componentes puderem ser escolhidos de modo que  $M_i \preceq M_j \Rightarrow j \leq i$ . De fato, se tal escolha for possível, então  $M_i \preceq M_j, M_i \preceq M_j \Rightarrow j \leq i, i \leq j \Rightarrow i = j \Rightarrow M_i = M_j$ . Por outro lado, se  $\preceq$  for de fato uma ordem parcial, então podemos escolher  $M_1$  maximal em  $\mathcal{M}$ ; e tendo escolhido  $M_i$ , podemos escolher  $M_{i+1}$  maximal dentre os que ainda não foram escolhidos. Assim, teremos que  $M_i \preceq M_j \Rightarrow j \leq i$ .

Portanto, o ítem (3) da definição é equivalente a:

- 3'. Os conjuntos  $M_i$  podem ser ordenados de modo que  $M_i \preceq M_j \Rightarrow j \leq i$ .

Por outro lado, para que a condição acima seja satisfeita é suficiente que  $(M_i, M_j) \in R \Rightarrow j \leq i$ .



**Definição 1.5.4.** *Dada uma decomposição de Morse  $\mathcal{M}$ . Uma decomposição de Morse  $\mathcal{N}$  é um refinamento de  $\mathcal{M}$  quando para todo  $N \in \mathcal{N}$  existir  $M \in \mathcal{M}$  tal que  $N \subset M$ . A decomposição  $\mathcal{M}$  é minimal se não existir um refinamento próprio de  $\mathcal{M}$ .*

**Exemplo 1.5.5.** Seja o fluxo esboçado no lado esquerdo da figura 1.7. Cada ponto escuro compõe uma componente da decomposição de Morse minimal deste fluxo. Do lado direito da figura está representada a ordem  $\preceq$  dessas componentes. Note que  $A$  e  $A'$ , bem como  $B$  e  $B'$  não são comparáveis.

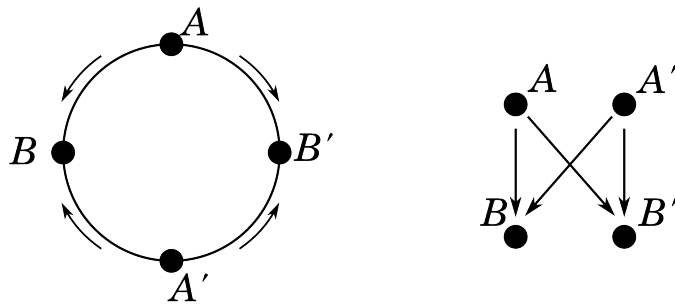


Figura 1.7: Decomposição de Morse do exemplo 1.1.4 no caso do  $S^1$ .

No caso do projetivo  $\mathbb{P}^1$ , a ordem se torna total, pois todas as componentes são comparáveis. (Veja a figura 1.8)

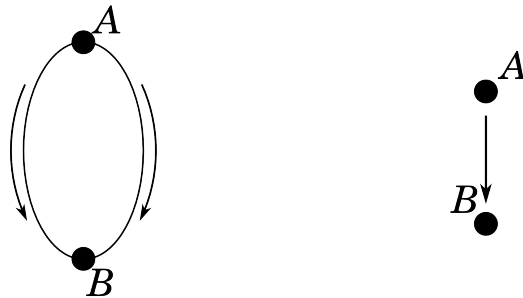


Figura 1.8: Decomposição de Morse do exemplo 1.1.4 no caso do  $\mathbb{P}^1$ .

**Exemplo 1.5.6.** Sejam os fluxos esboçados na figura 1.9. Então, o fluxo da esquerda tem decomposição de Morse minimal como indicado na esquerda da figura 1.10. Já o fluxo no lado direito da figura 1.9 tem decomposição de Morse como indicado em qualquer uma das decomposições representadas na figura 1.10, sendo que o lado direito é a decomposição minimal.

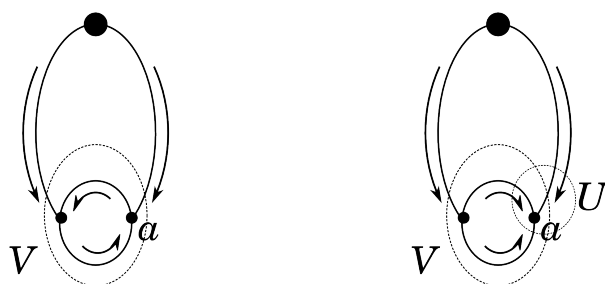


Figura 1.9: Fluxos do exemplo 1.4.5.



Figura 1.10: Decomposições de Morse do exemplo 1.4.5.

**Lema 1.5.7.** *Sejam  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$  decomposições de Morse. Então a “interseção das decomposições”,*

$$\mathcal{N} = \left\{ \bigcap_{i=1}^n M_i \mid M_i \in \mathcal{M}_i, \bigcap_{i=1}^n M_i \neq \emptyset \right\},$$

*é uma decomposição de Morse.*

*Demonstração.* Vamos verificar as condições da definição 1.5.2.

**Afirmção 1.** *As componentes são compactas, invariantes, não-vazias, disjuntas.*

Cada elemento de  $\mathcal{N}$  é fechado, compacto e invariante, pois essas propriedades são preservadas por interseções finitas. Também é óbvio que todas as componentes são disjuntas. São não vazias por definição.

**Afirmção 2.**  *$\omega$  e  $\omega^*$ -limites estão em alguma componente.*

Seja  $x \in X$ . Existem  $M_i \in \mathcal{M}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) tais que,  $\omega(x) \in M_i$ . Portanto,  $\omega(x) \in \bigcap_{i=1}^n M_i \in \mathcal{N}$ .

**Afirmção 3.** *Se  $x \in X$ ,  $\omega(x)$  e  $\omega^*(x)$  estão na mesma componente  $N = \bigcap_{i=1}^n M_i$ , então  $x \in N$ .*

Imediato, pois  $\omega(x), \omega^*(x) \subset M_i$  implica que  $x \in M_i$ .

**Afirmção 4.**  *$\preceq_{\mathcal{N}}$  é relação de ordem parcial.*

Basta notar que  $\preceq_{\mathcal{N}}$  é a ordem parcial dada pelo produto das ordens  $\preceq_{\mathcal{M}_i}$ :

$$\bigcap_{i=1}^n M_i \preceq_{\mathcal{N}} \bigcap_{i=1}^n N_i \Leftrightarrow M_i \preceq_{\mathcal{M}_i} N_i \quad i = 1, \dots, n.$$

□

**Lema 1.5.8.** *Seja  $A \subset X$  um atrator. Então  $A, A^*$  é uma decomposição de Morse.*

*Demonstração.* Já sabemos que  $A$  e  $A^*$  são compactos, invariantes, não vazios e disjuntos. Também temos por 1.4.9 que para todo  $x \in \kappa(A, A^*)$ ,  $\omega(x) \subset A$  e  $\omega^*(x) \subset A^*$ . Para  $x \in A$  (e, analogamente para  $x \in A^*$ ) vale que  $\omega(x) \subset A$  e  $\omega^*(x) \subset A$ .

Se  $x \in X$  é tal que  $\omega^*(x) \subset A$ , então, por 1.4.15,  $x \in A$ . Em particular, sempre que  $\omega(x), \omega^*(x) \subset A$ , teremos  $x \in A$ . Analogamente para  $A^*$ .

A relação  $\preceq$  é dada por

$$A \preceq A^*, A \preceq A \text{ e } A^* \preceq A^*.$$

É portanto uma ordem total e, em particular, uma ordem parcial.  $\square$

O resultado seguinte generaliza o lema 1.5.8, mostrando que toda decomposição de Morse é dada pelo refinamento de decomposições da forma  $\mathcal{M}_A = \{A, A^*\}$ , onde  $A \subset X$  é um atrator.

**Proposição 1.5.9.** *Seja  $\emptyset = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_n = X$  uma seqüência de atratores. Então, os conjuntos  $M_j = A_j \cap A_{j-1}^*$ , ( $j = 1, \dots, n$ ) formam uma decomposição de Morse.*

*Demonstração.* Por 1.5.8, sabemos que  $\mathcal{M}_i = \{A_i, A_i^*\}$  são decomposições de Morse. Usando 1.5.7, basta mostrar que  $\mathcal{M} = \{A_i \cap A_{i-1}^* \mid i = 0, \dots, n\}$  é a interseção das decomposições  $\mathcal{M}_i$ . Um elemento da interseção é da forma  $B_0 \cap \dots \cap B_n$ , com  $B_i = A_i$  ou  $B_i = A_i^*$ . Sendo que  $B_0 = A_0^*$  e  $B_n = A_n$ , pois  $A_0 = A_n^* = \emptyset$ .

Vamos supor que existam  $k < l$  tais que  $B_k = A_k$  e  $B_l = A_l^*$ . Então  $B_k$  e  $B_l$  são disjuntos, pois  $B_k = A_k \subset A_l$  implica que  $B_l = A_l^* \subset A_k^*$ . Neste caso  $B_0 \cap \dots \cap B_n$  seria vazio. Portanto, podemos assumir que um elemento da interseção é da forma  $A_0^* \cap \dots \cap A_{j-1}^* \cap A_j \cap \dots \cap A_n$ . Mas como os primeiros termos contém  $A_{j-1}^*$ , e os últimos contém  $A_j$ , temos que um elemento genérico da interseção é da forma  $A_j \cap A_{j-1}^*$  para algum  $j = 1, \dots, n$ , concluindo a demonstração.  $\square$

A seguinte proposição é a recíproca de 1.5.9. Ou seja, afirma que toda decomposição de Morse é “formada” por uma seqüência ascendente de atratores.

**Proposição 1.5.10.** *Seja  $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_n\}$  uma decomposição de Morse. Então, existe uma seqüência de atratores  $\emptyset = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_n = X$  tal que  $M_i = A_i \cap A_{i-1}^*$ .*

*Demonstração.* Vamos utilizar indução em  $n$ . Para o caso  $n = 1$ , necessariamente  $M_1 = X$ , pois para todo  $x \in X$ ,  $\omega(x) \subset M_1$  e  $\omega^*(x) \subset M_1$ . O que implica que  $x \in M_1$ . Mostrando que a afirmação vale para o caso  $n = 1$ .

Podemos assumir que  $M_i \preceq M_j \Rightarrow j \leq i$ . Assim,  $M_1$  é uma componente maximal da família  $\mathcal{M}$ . Tome  $A_1 = M_1$ .

$A_1$  é atrator, pois, pela maximalidade de  $M_1$ , para todo  $x \notin A_1$ ,  $\omega^*(x) \subset \bigcup_{i>1} M_i$ . Como  $\bigcup_{i>1} M_i$  é invariante e fechado disjunto de  $A_1$ , segue do item (1) de 1.4.12, que  $A_1^* \supset \bigcup_{i>1} M_i$ . Restringindo  $\phi^t$  a  $R = A_1^*$ , temos que

$M_2, \dots, M_n$  é uma decomposição de Morse de  $\phi^t|_R$ . Pela hipótese de indução, existem atratores  $\emptyset = B_1, \dots, B_{n-1}$  tais que  $M_i = B_i \cap B_{i-1}^*$  ( $i = 2, \dots, n$ ). Note que  $B_{i-1}^*$  é o repulsor complementar de  $B_{i-1}$ , relativo a  $R$  (ou seja, relativo ao fluxo  $\phi^t|_R$ ).

É claro que  $M_1 = A_1 = A_1 \cap A_0^*$ . Para  $i = 2, \dots, n$ , vamos escolher atratores  $A_i$ , de modo que  $M_i = A_i \cap A_{i-1}^*$ . Por 1.4.17 e 1.4.19,  $R_i = B_i^* \subset R$  são repulsores em  $X$ . Para  $i = 2, \dots, n$ , fazendo  $A_i = (R_i)_*$ , onde  $(R_i)_*$  é o atrator complementar de  $R_i$  pelo fluxo  $\phi^t$  (relativo a  $X$ , e não restrito a  $R$ ), temos que  $A_i \cap R$  é o maior conjunto fechado invariante disjunto de  $A_i^*$ . Em particular,  $A_i \cap R$  é o maior fechado invariante em  $R$  disjunto de  $A_i^* = R_i = B_i^*$ . Portanto, pela observação 1.4.13,

$$A_i \cap R = B_i.$$

Note que para  $i = 2, \dots, n$   $A_i^* = R_i \subset R$ . Assim, para  $i = 2, \dots, n$ ,

$$M_i = B_i \cap R_{i-1} = A_i \cap R_{i-1} = A_i \cap A_{i-1}^*.$$

Também é verdade que  $A_n = X$ , pois  $R_n = \emptyset$ . Para terminar, basta mostrar que  $A_1 \subset \dots \subset A_n$ . A inclusão  $A_2 \subset \dots \subset A_n$  segue de  $B_2 \subset \dots \subset B_n$ . Já  $A_1 \subset A_2$  segue de  $R \supset R_2$ . Concluindo a demonstração.  $\square$

## 1.6 Funções de Lyapunov

A *função de Lyapunov* associa ao espaço de fase uma espécie de função potencial. Apesar de estarmos tratando apenas dos aspectos topológicos, a “ação do tempo” sugere uma certa natureza “gradiente” do fenômeno. Nesta seção vamos estudar as *funções de Lyapunov* e a relação delas com as decomposições de Morse, os atratores e repulsores.

**Definição 1.6.1.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo fechado e uma função  $L : X \rightarrow I$ . Dado  $x \in X$ , a seção  $L_x$  de  $L$  é definida por*

$$\begin{aligned} L_x : \mathbb{T} &\rightarrow I \\ t &\mapsto L \circ \phi^t(x) \end{aligned} .$$

*Um ponto crítico  $x \in X$  de  $L$  é um ponto tal que a seção  $L_x$  é constante. Um valor crítico é a imagem de um ponto crítico.*

**Definição 1.6.2.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo fechado e uma função  $L : X \rightarrow I$  contínua com finitos valores críticos tal que para cada  $x \in X$ , a seção  $L_x$  é constante ou estritamente decrescente. Neste caso dizemos que  $L$  é uma função de Lyapunov.*

**Proposição 1.6.3.** *Seja  $L : X \rightarrow [0, 1]$  uma função de Lyapunov. Então, a família  $\mathcal{M}_L$  formada pelos conjuntos  $M_c$  da forma*

$$M_c = \{x \in X \mid L_x = c\},$$

onde  $c$  é um valor crítico de  $L$  é uma decomposição de Morse.

*Demonstração.* Vamos verificar que  $\mathcal{M}_L$  satisfaz a definição 1.5.2.

Seja  $M_c \in \mathcal{M}_L$ , e  $x \in M_c$ .  $M_c$  é invariante, pois  $L_x = c \Leftrightarrow L_{\phi^t(x)} = c$ . Pela continuidade de  $L \circ \phi$ , se  $L \circ \phi(\mathbb{T} \times M_c) = c$ , então

$$\mathbb{T} \times \text{cl}(M_c) = \text{cl}(\mathbb{T} \times M_c) \subset (L \circ \phi)^{-1}(c).$$

Pela definição de  $M_c$ , temos então que  $\text{cl}(M_c) \subset M_c$ . E portanto,  $M_c$  é compacto.

Para o item (1) da definição 1.5.2, dado  $x \in X$ , basta tomar  $c = \lim_{t \rightarrow \infty} L_x(t)$ . De fato,  $\mathbb{T} \times \text{cl}(x_t^+) \subset (L \circ \phi)^{-1}([c, L_x(t)])$ . Tomando  $t \rightarrow \infty$ , temos que

$$\mathbb{T} \times \omega(x) \subset (L \circ \phi)^{-1}(c).$$

Ou seja,  $\omega(x) \subset M_c$ . De forma análoga, tomando  $d = \lim_{t \rightarrow -\infty} L_x(t)$ , concluimos que  $\omega^*(x) \subset M_d$ .

O item (2) da definição 1.5.2 segue de

$$\omega(x) \subset M_c \Rightarrow L(x) \geq c, \quad (1.1)$$

$$\omega^*(x) \subset M_c \Rightarrow L(x) \leq c. \quad (1.2)$$

Já o item (3) segue da observação 1.5.3. De fato, as equações (1.1) e (1.2) mostram que

$$M_c \preceq M_d \Rightarrow d \leq c.$$

□

A proposição 1.6.3 mostra que a toda função de Lyapunov  $L$  temos a decomposição de Morse  $\mathcal{M}_L$  associada. Vamos agora mostrar que toda decomposição de Morse é a decomposição associada a uma função de Lyapunov.

Assim como os pares atrator-repulsor  $(A, A^*)$ , que formam as decomposições de Morse mais elementares foram usados como base para construirmos todas as decomposições de Morse (veja 1.5.10), vamos utilizá-los para construir funções de Lyapunov mais simples, cuja decomposição associada seja  $\{A, A^*\}$ . Dada então uma decomposição de Morse  $\mathcal{M}$ , vamos “compor” essas funções de Lyapunov elementares para formar uma função de Lyapunov  $L$ , tal que  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_L$ .

**Proposição 1.6.4.** *Dado um par atrator-repulsor  $(A, A^*)$ , existe uma função de Lyapunov  $L$  tal que  $\mathcal{M}_L = \{A, A^*\}$ .*

*Demonstração.* Vamos primeiro construir uma aplicação contínua  $\psi : X \rightarrow [0, 1]$  que é não-crescente ao longo das órbitas do fluxo. Seja

$$\begin{aligned} \ell : X &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, A^*)} \end{aligned} ,$$

onde  $d$  é a função distância. A aplicação  $\ell$  está bem definida porque  $A$  e  $A^*$  são compactos disjuntos e portanto, para todo  $x \in X$ ,  $d(x, A) \neq 0$  ou  $d(x, A^*) \neq 0$ . A aplicação também é contínua. E como  $A$  e  $A^*$  são compactos invariantes, temos que  $\ell(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$  e  $\ell(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A^*$ . Defina agora

$$\begin{aligned} \psi : X &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \sup_{z \in x_0^+} \ell(z) \end{aligned} .$$

Para mostrar que  $\psi$  é contínua, vamos primeiro mostrar a continuidade nos pontos de  $A$  e  $A^*$ . Seja  $x \in A$ . Então  $\psi(x) = 0$ . Para  $\varepsilon > 0$ , faça  $U = \ell^{-1}([0, \varepsilon])$ . Então  $U$  é uma vizinhança de  $A$  pela continuidade de  $\ell$ . Tome uma vizinhança  $K$  de  $A$  compacta e disjunta de  $A^*$ . Então existe  $\bar{t}$  tal que  $\phi^t(K) \subset U$  para todo  $t \geq \bar{t}$ . Ou seja,  $\tilde{K} = \phi^{\bar{t}}(K)$  é uma vizinhança de  $A$  tal que  $\psi(\tilde{K}) < \varepsilon$ . Portanto,  $\psi$  é contínua nos pontos de  $A$ . Notando que para  $x \in A^*$ ,  $\psi(x) = 1$ , a continuidade nos pontos de  $A^*$  segue do fato de que  $\psi^{-1}([1 - \varepsilon, 1])$  contém a vizinhança  $\ell^{-1}([1 - \varepsilon, 1])$  de  $A^*$ .

Seja agora  $x \in \kappa(A, A^*)$ , e  $\varepsilon > 0$  tal que  $\varepsilon < \ell(x)$ . Considere a vizinhança compacta de  $A$  dada por

$$U = \ell^{-1}([0, \varepsilon]).$$

Se tomarmos uma vizinhança compacta  $K$  de  $x$  disjunta de  $U$  e  $A^*$ , novamente teremos que existe  $\bar{t}$  tal que  $\phi^t(K) \subset U$  para todo  $t \geq \bar{t}$ . Implicando que para todo  $k \in K$ ,

$$\sup_{t \geq \bar{t}} \ell(\phi^t(k)) \leq \varepsilon < \ell(k) \leq \psi(k).$$

Portanto, em  $K$ ,

$$\begin{aligned} \psi|_K : K &\rightarrow [0, 1] \\ k &\mapsto \max_{z \in k_0^{\bar{t}}} \ell(z) \end{aligned} .$$

A função  $\tilde{\ell} = \ell \circ \phi$  é contínua. Portanto, para todo  $t \in \mathbb{T}$ , dada uma vizinhança  $I$  de  $\tilde{\ell}(t, x)$ , existe uma vizinhança de  $(t, x)$  na forma  $V_t = J_t \times$

$K_t$  tal que  $\tilde{\ell}(V_t) \subset I$ . Como  $[0, \bar{t}]$  é compacto, existe uma seqüência finita  $t_1, \dots, t_n$ , tal que  $J_{t_1}, \dots, J_{t_n}$  cobrem  $[0, \bar{t}]$ . Fazendo

$$K' = \bigcap_{i=1}^n K_{t_i},$$

temos que  $\tilde{\ell}([0, \bar{t}] \times K') \subset I$ . Portanto,

$$\psi(K \cap K') = \max_{z \in K_0^+} \ell(z) \in \tilde{\ell}([0, \bar{t}] \times K') \subset I.$$

Ou seja,  $\psi^{-1}(I) \supset K \cap K'$  é uma vizinhança de  $x$ . E portanto,  $\psi$  é contínua em  $x$ .

A aplicação  $\psi$  não é crescente ao longo das órbitas do fluxo. De fato, dado  $x \in X$ , e  $s_1, s_2 \in \mathbb{T}$  com  $s_1 < s_2$ ,

$$\psi(\phi^{s_1}(x)) = \sup_{z \in x_{s_1}^+} \ell(z) \geq \sup_{z \in x_{s_2}^+} \ell(z) = \psi(\phi^{s_2}(x)).$$

Como  $A$  é fechado e invariante, é evidente que  $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$ . Vamos mostrar que  $\psi(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A^*$ , sendo que a implicação ( $\Leftarrow$ ) é evidente do fato de  $A^*$  ser invariante. Suponha que  $x \notin A^*$ . Então  $\omega(x) \subset A$ . Tomando uma vizinhança atratora compacta  $K$  de  $A$ , temos que existe  $t \in \mathbb{T}$  tal que  $x_t^+ \subset K$ . Portanto, pela compacidade de  $K \cup x_0^+$  e pela continuidade de  $\ell$ , existe  $y \in K \cup x_0^+$  tal que

$$1 > \ell(\phi^t(y)) = \sup_{z \in K \cup x_0^+} \ell(z) \geq \sup_{z \in x_0^+} \ell(z) = \psi(x).$$

A partir de  $\psi$ , defina

$$L : X \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto \int_0^\infty e^{-t} \psi(\phi^t(x)) dt.$$

Então,  $L$  é uma função de Lyapunov para o par  $(A, A^*)$ . É fácil verificar que  $L(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$ , e também que  $L(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A^*$ . A parte não trivial é verificar que  $L$  é estritamente decrescente nas órbitas de  $x \in \kappa(A, A^*)$ . Para isso, tome  $x \in \kappa(A, A^*)$ , e assuma que existam  $s_1, s_2 \in \mathbb{T}$ , tais que  $L_x(s_1) = L_x(s_2)$ . Como  $L_x(t) = L_{\phi^{s_1}(x)}(t - s_1)$ , podemos assumir sem perda de generalidade que  $s_1 = 0$  e  $s_2 = s$ . Então,

$$\int_0^\infty e^{-t} (\psi(\phi^{s+t}(x)) - \psi(\phi^t(x))) dt = L_x(s) - L_x(0) = 0.$$



Como  $e^{-t}$  é estritamente positivo, temos que

$$\psi(\phi^t(x)) = \psi(\phi^{s+t}(x))$$

para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Em particular, para todo  $k > 1$ , tomando  $t = ks$ ,

$$\psi(\phi^{(k-1)s}(x)) = \psi(\phi^{ks}(x)).$$

Por indução,

$$\psi(x) = \psi(\phi^{ks}(x)) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

pois  $A$  é atrator, e  $\phi(A) = 0$ . Resultando que  $\psi(x) = 0$ , e contradizendo a hipótese de que  $x \notin A$ .  $\square$

**Observação 1.6.5.** A condição de  $X$  ser um espaço métrico na proposição 1.6.4 pode ser substituída pela validade do Lema de Urysohn. (Veja [Kel58])

**Observação 1.6.6.** Na demonstração da proposição 1.6.4, a função  $e^{-t}$  poderia ser substituída por qualquer função  $f > 0$  que satisfaça  $\int_0^\infty e^{-t} dt = 1$ .

**Proposição 1.6.7.** *Dada uma decomposição de Morse  $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_n\}$ , existe uma função de Lyapunov  $L$  tal que  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_L$ . Podemos construir  $L$  de modo que  $L(M_i) = i$ .*

*Demonstração.* Seja  $\emptyset = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_n = X$  a seqüência de atratores associada à decomposição de Morse  $\mathcal{M}$ , dada pela proposição 1.5.10. Para cada  $A_i$ , temos a função de Lyapunov  $L_i$  associada ao par  $(A_i, A_i^*)$ . Defina

$$\begin{aligned} L : X &\rightarrow [1, n] \\ x &\mapsto 1 + \sum_{i=1}^n L_i(x) \end{aligned} .$$

Vamos verificar que  $L$  é uma função de Lyapunov associada a  $\mathcal{M}$ .

Se  $x \in M_i = A_i \cap A_{i-1}^*$  para algum  $i$ , então  $x \in A_j$  para todo  $j \geq i$ , e  $x \in A_j^*$  para todo  $j < i$ . Assim,  $L_{j,x}$  é constante para todo  $j$ . Portanto, para todo  $i$ , e todo  $x \in M_i$ ,  $L_x$  é constante. Suponha que  $x \notin \bigcup M_i$ . Tome o maior  $i$  tal que  $x \notin A_i$ . Como  $x \notin M_{i+1} = A^{i+1} \cap A_i^*$ , então como  $x \in A^{i+1}$ , temos que  $x \notin A_i^*$ . Assim,  $x \in \kappa(A, A^*)$ . Portanto,  $L_{i,x}$  é estritamente decrescente. Conseqüentemente,  $L_x$  é estritamente decrescente.

Falta apenas mostrar que  $L$  assume valores distintos em componentes de Morse distintas. O que segue do primeiro parágrafo da demonstração, pois se  $x \in M_i$ ,

$$L(M_i) = 1 + \sum_{j=1}^{i-1} 1 = i.$$

$\square$

Vamos ilustrar alguns exemplos de função de Lyapunov. Nos esboços, os pontos fixos têm o valor da função indicado ao lado, e as setas mostram órbitas onde a função deve ser estritamente decrescente ou então contínua, como no caso da ilustração do lado direito da figura 1.11. Quando a função for contínua em determinada órbita, então esta órbita faz parte da componente de Morse associada a este valor crítico.

**Exemplo 1.6.8.** Do lado esquerdo da figura 1.11, está esboçado um fluxo e uma função de Lyapunov associada. Do lado direito da figura, temos um outro fluxo ao qual as únicas funções de Lyapunov que podem ser associadas são aplicações com valor constante. Isso porque se ao longo de uma órbita a função fosse estritamente decrescente, então ao longo da outra órbita a função não poderia ser não crescente. Assim, em todos os pontos a função deve ser constante.

Esse fenômeno nos faz questionar as condições que obrigam que em uma determinada órbita tenha necessariamente valores constantes em todas as funções de Lyapunov possíveis. A condição é a recorrência por cadeias (definição 1.7.2) ou equivalentemente o fato de a órbita estar em uma componente de Morse da decomposição minimal. Veja 1.8.7.

Note que na figura da direita a única decomposição de Morse existente é a decomposição trivial, onde a única componente de Morse é todo o  $S^1$ .

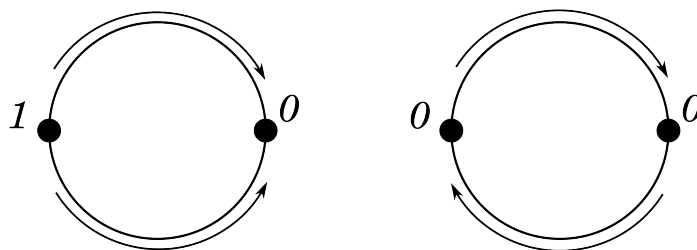


Figura 1.11: Esboço de dois fluxos e uma função de Lyapunov associada a cada um.

**Exemplo 1.6.9.** A figura 1.12 esboça uma função de Lyapunov para o fluxo do exemplo 1.5.5. A função para o caso projetivo (direita) pode ser “levantada” para uma função de Lyapunov do caso  $S^1$  (esquerda).

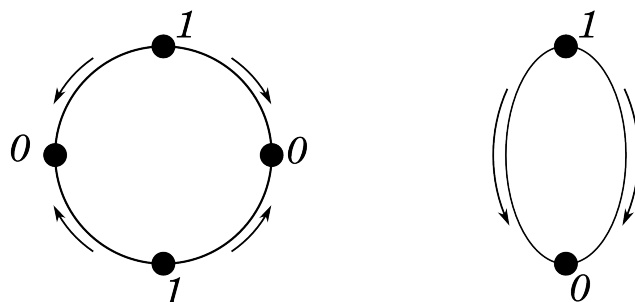


Figura 1.12: Esboço de uma função de Lyapunov associada a cada um dos fluxos do exemplo 1.5.5.

## 1.7 Recorrência por Cadeias

O conceito de recorrência por cadeias surge quando estudamos condições para que um determinado ponto deva necessariamente pertencer à alguma componente de Morse independentemente de qual decomposição de Morse se esteja tratando. Um ponto que é recorrente por cadeias é tal que qualquer que seja a função de Lyapunov definida, esta função deverá ser constante em toda a órbita deste ponto.

**Definição 1.7.1** ( $\Omega$ -limite). *Seja  $\phi^t$  um fluxo definido sobre um espaço métrico  $X$ .*

*Dados  $x, y \in X$ ,  $t \in \mathbb{T}$  e  $\varepsilon > 0$ , uma  $(\varepsilon, t)$ -cadeia de  $x$  para  $y$  é uma seqüência de pontos  $\{x = x_0, \dots, x_n = y\} \subset X$  e tempos  $\{t_0, \dots, t_{n-1}\} \subset \mathbb{T}$ , tais que para todo  $i = 1, \dots, n$ ,  $t_i \geq t$  e  $d(\phi^{t_i}(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$ . Por motivos práticos, às vezes é conveniente fazer  $t_n = 0$ . Vamos chamar os pontos  $x_i$  de pontos iniciais da seqüência.*

*Sejam  $y \in X$ ,  $t \in \mathbb{T}$  e  $\varepsilon > 0$ , denotamos o conjunto de todos os pontos  $x \in X$  tais que existe uma  $(\varepsilon, t)$ -cadeia de  $y$  para  $x$  por  $\Omega(y, \varepsilon, t)$ . E, para  $Y \subset X$ , definimos*

$$\Omega(Y, \varepsilon, t) = \bigcup_{y \in Y} \Omega(y, \varepsilon, t).$$

*Por fim, para  $Y \subset X$ , definimos*

$$\Omega(Y) = \bigcap_{\varepsilon > 0, t \in \mathbb{T}} \Omega(Y, \varepsilon, t).$$

*Para  $x \in X$ , escrevemos  $\Omega(x)$  no lugar de  $\Omega(\{x\})$ .*

**Definição 1.7.2** (Conjunto recorrente por cadeias). *Seja  $\phi^t$  um fluxo definido sobre um espaço métrico  $X$ .*

*Dizemos que um ponto  $x \in X$  é recorrente por cadeias quando  $x \in \Omega(x)$ . Denotamos por*

$$\mathcal{R}^C = \mathcal{R}^C(\phi^t) = \{x \in X \mid x \in \Omega(x)\}$$

*o conjunto de todos os pontos recorrentes por cadeias.*

**Exemplo 1.7.3** (Recorrente por cadeias que não é recorrente). A figura 1.13 esboça dois fluxos tais que todos os pontos são recorrentes por cadeias mas não são necessariamente recorrentes. Os *pontos fixos* são tanto recorrentes quanto recorrentes por cadeias. No entanto, nenhum ponto que não é *ponto fixo* é recorrente, já que os  $\omega$ -limites são exatamente os *pontos fixos*. Vamos mostrar, apenas para o caso mais simples da esquerda, que todos os pontos são recorrentes por cadeias. Sejam  $x \in X$  e  $t \in \mathbb{T}$ . Sabemos que  $\omega(x) = \{p\}$  e  $\omega^*(x) = \{p\}$ , onde  $p$  é o *ponto fixo*. Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $s > t$  tal que  $d(\phi^s(x), p) < \frac{\varepsilon}{2}$ , e  $d(\phi^{-s}(x), p) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Portanto, a seqüência  $x, \phi^{-s}(x), x$  é uma  $(\varepsilon, t)$ -cadeia com tempos  $\{s, s\}$ , de  $x$  para  $x$ .

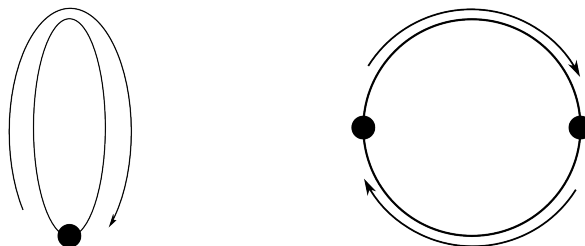


Figura 1.13: Dois fluxos onde todos os pontos são recorrentes por cadeias, mas apenas os pontos fixos são recorrentes.

Repare que o subconjunto de  $S^1$  que exclui um dos “arcos” entre os *pontos fixos* é tal que apenas os *pontos fixos* são recorrentes por cadeias. O que mostra que o conceito de ponto recorrente por cadeias não é preservado em fluxos *mergulhados*. (Veja 3.2.1.)

**Exemplo 1.7.4.** A figura 1.14 esboça dois fluxos tais que nem todo ponto é recorrente por cadeias. Note que para esses fluxos existe uma decomposição de Morse não trivial e uma função de Lyapunov não constante.

Já a figura 1.15 esboça dois fluxos onde todos os pontos são recorrentes por cadeias. Para esses fluxos não existe uma função de Lyapunov não constante e portanto, também não existe uma decomposição de Morse não trivial.



Figura 1.14: Dois fluxos onde apenas os pontos fixos são recorrentes por cadeias.

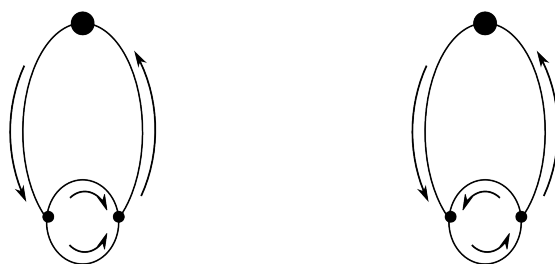


Figura 1.15: Dois fluxos onde todos os pontos são recorrentes por cadeias.

**Definição 1.7.5.** Definimos  $\preceq$  por

$$x \preceq y \Leftrightarrow y \in \Omega(x).$$

Definimos a relação  $\sim$  por

$$x \sim y \Leftrightarrow x \preceq y, y \preceq x.$$

Note que um ponto  $x \in X$  é recorrente por cadeias quando  $x \sim x$  (ou seja,  $x \preceq x$ ).

Um conjunto  $A \subset X$  é chamado de transitivo por cadeias quando para todo  $x, y \in A$  tivermos que  $x \preceq y$ . O que equivale a dizer que para todo  $x, y \in A$ ,  $x \sim y$ .

**Observação 1.7.6.** Na definição 1.7.5 usamos o símbolo  $\preceq$  apesar desta relação não ser uma ordem parcial. No entanto,  $\preceq$  está relacionada com a relação da decomposição de Morse mais fina. (Veja 1.8.7).

**Proposição 1.7.7.** A relação  $\preceq$  definida em 1.7.5 é transitiva.

*Demonstração.* Se  $x \preceq y$  e  $y \preceq z$ , então, para todo  $\varepsilon > 0$  e  $t \in \mathbb{T}$ , existe uma  $(\varepsilon, t)$ -cadeia de  $x$  a  $y$ , e uma de  $y$  a  $z$ . A concatenação destas duas cadeias é uma  $(\varepsilon, t)$ -cadeia de  $x$  até  $z$ . Ou seja,  $x \preceq z$ .  $\square$

**Proposição 1.7.8.** A relação  $\sim$  definida em 1.7.5, restrita ao conjunto  $\mathcal{R}^C$  dos pontos recorrentes por cadeias é uma relação de equivalência.

*Demonstração.* Se  $x \in \mathcal{R}^C$ , então  $x \preceq x$ . Ou seja,  $x \sim x$ .

Se  $x \sim y$  e  $y \sim z$ , então, em particular,  $x \preceq y$  e  $y \preceq z$ . Por 1.7.7, temos que  $x \preceq z$ . Do mesmo modo,  $z \preceq x$ , e portanto,  $x \sim z$ .  $\square$

**Proposição 1.7.9.** A relação  $\preceq$  definida em 1.7.5 é invariante por  $\phi$ , ou seja, para todos  $x, y \in X$  e  $t, s \in \mathbb{T}$ ,  $x \preceq y \Rightarrow \phi_t(x) \preceq \phi_s(y)$ .

*Demonstração.* É imediato que  $x \preceq y \Rightarrow \phi^t(x) \preceq \phi^t(y)$ . Portanto, basta demonstrar a invariância para os casos onde  $t = 0$  e  $s \geq 0$ ; e  $t \leq 0$  e  $s = 0$ .

Se  $s = 0$  e  $t \leq 0$ , então dada uma  $(\varepsilon, t')$ -seqüência de  $x$  até  $y$ , substituindo o primeiro ponto da seqüência por  $\phi^t(x)$ , temos uma  $(\varepsilon, t')$ -seqüência de  $\phi^t(x)$  até  $y$ .

Se  $t = 0$  e  $s \geq 0$ , então dada um  $\varepsilon > 0$ , e  $t' \in \mathbb{T}$ , como  $\phi^s$  é um homeomorfismo, escolha  $\delta > 0$  tal que  $\delta < \varepsilon$  e  $\phi^s(B_{\delta/2}(y)) \subset B_{\varepsilon/2}(\phi^s(y))$ . Tome uma  $(\delta, t')$ -seqüência de  $x$  até  $y$ , substituindo o último “tempo”  $t_n$  da seqüência por  $t_n + s$ , temos uma  $(\varepsilon, t')$ -seqüência de  $x$  até  $\phi^s(y)$ , pois  $d(\phi^{t_n}(x_n), y) < \delta$  implica que  $d(\phi^{t_n+s}(x_n), \phi^s(y)) < \varepsilon$ .  $\square$

**Corolário 1.7.10.** *Para todo  $Y \subset X$ ,  $\Omega(Y)$  é invariante e fechado. Em particular,  $\omega(\Omega(Y)) = \Omega(Y)$ .*

*Demonstração.* Por 1.7.9,  $\Omega(Y)$  é invariante. E é fechado, por que se  $x \in \text{cl}(\Omega(Y))$ , para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $y \in \Omega(Y)$  tal que  $d(x, y) \leq \varepsilon/2$ . Assim, para todo  $t \in \mathbb{T}$  existe uma  $(\varepsilon/2, t)$ -cadeia de  $Y$  até  $y$ , e portanto substituindo o último ponto dessa cadeia por  $x$ , temos uma  $(\varepsilon, t)$ -cadeia de  $Y$  até  $x$ . Ou seja,  $\text{cl}(\Omega(Y)) \subset \Omega(Y)$ .

Por fim, pelo item (2) de 1.3.4,  $\omega(\Omega(Y)) = \Omega(Y)$ .  $\square$

**Proposição 1.7.11.** *Para todo  $x \in \mathcal{R}^C$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $t \in \mathbb{T}$ , o conjunto  $\mathcal{R}^C \cap \Omega(x, \varepsilon, t)$  é aberto e fechado em  $\mathcal{R}^C$ . Em particular, esse conjunto é união de componentes conexas de  $\mathcal{R}^C$ .*

*Se  $M$  é uma componente transitiva por cadeias,  $M$  é intersecção de conjuntos da forma  $\mathcal{R}^C \cap \Omega(y)$ , e portanto, é também uma união de componentes conexas de  $\mathcal{R}^C$ .*

*Demonstração.* Sejam  $x \in \mathcal{R}^C$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $t \in \mathbb{T}$ . Seja  $y \in \mathcal{R}^C \cap \Omega(x, \varepsilon, t)$  e  $z \in \mathcal{R}^C$  tal que  $d(y, z) < \varepsilon/2$ . Tome uma  $(\varepsilon, t)$ -cadeia  $c_1$  de  $x$  para  $y$  e uma  $(\varepsilon/2, t)$ -cadeia  $c_2$  de  $y$  para  $z$ . Substituindo o último ponto de  $c_2$  por  $z$ , temos uma  $(\varepsilon, t)$ -cadeia  $c_3$  de  $y$  para  $z$ . Concatenando  $c_1$  e  $c_3$  temos uma  $(\varepsilon, t)$ -cadeia de  $x$  para  $z$ . Portanto,  $\mathcal{R}^C \cap \Omega(x, \varepsilon, t)$  é aberto.

Vamos mostrar que o complemento de  $\mathcal{R}^C \cap \Omega(x, \varepsilon, t)$  é aberto. Seja  $y \in \mathcal{R}^C$  tal que  $y \notin \mathcal{R}^C \cap \Omega(x, \varepsilon, t)$  e  $z \in \mathcal{R}^C$  tal que  $d(y, z) < \varepsilon/2$ . Se  $z \in \mathcal{R}^C \cap \Omega(x, \varepsilon, t)$ , então, da mesma forma que no parágrafo anterior, obtemos uma  $(\varepsilon, t)$ -cadeia de  $x$  para  $z$ , e uma de  $z$  para  $y$ . Isso implicaria na contradição  $y \in \mathcal{R}^C \cap \Omega(x, \varepsilon, t)$ . Portanto,  $z \notin \mathcal{R}^C \cap \Omega(x, \varepsilon, t)$ . Ou seja,  $\mathcal{R}^C \cap \Omega(x, \varepsilon, t)$  é fechado.

Seja  $M \subset X$  uma componente transitiva por cadeias. Então, para  $x \in M$ ,

$$M = \{y \in X \mid x \sim y\} = \bigcap \{\Omega(y) \mid y \in \Omega(x), x \in \Omega(y)\}.$$

Mas, por definição,  $M \subset \mathcal{R}^C$ . Portanto,

$$M = \bigcap \{\Omega(y) \cap \mathcal{R}^C \mid y \in \Omega(x), x \in \Omega(y)\}.$$

Como cada  $\Omega(y)$  é da forma  $\bigcap \Omega(y, \varepsilon, t)$ , temos que  $M$  é uma intersecção de conjuntos da forma  $\Omega(y, \varepsilon, t) \cap \mathcal{R}^C$ , concluindo a demonstração.  $\square$

**Corolário 1.7.12.** *Se  $\mathcal{R}^C$  é conexo, então é transitivo por cadeias.*

*Demonstração.* Tome uma componente transitiva por cadeias  $M$ . Pela proposição 1.7.11,  $M$  é união de componentes conexas de  $\mathcal{R}^C$ . Como  $\mathcal{R}^C$  é conexo, então  $M = \mathcal{R}^C$ . Ou seja,  $\mathcal{R}^C$  é transitivo por cadeias.  $\square$

### 1.7.1 Fluxos que Comutam

No capítulo 2, vamos estudar a dinâmica de transformações dadas por exponenciais de matrizes (ou iteração de matrizes no caso  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ) agindo em um espaço projetivo. Note que um espaço projetivo de dimensão finita é compacto. Neste caso, usaremos  $g^t$  no lugar de  $\phi^t$ . Veremos que podemos decompor esse fluxo de exponenciais (ou iteração) de matrizes em sua chamada decomposição de Jordan multiplicativa, onde  $g^t = h^t e^t u^t$  e as componentes  $h^t$ ,  $e^t$  e  $u^t$  comutam. Veremos também que é possível escolher uma métrica no espaço projetivo de modo que  $e^t$  é uma isometria. Nos pontos fixos de  $h^t$ , temos que  $g^t = e^t u^t$ , e essa decomposição nos ajudará a determinar a decomposição de Morse minimal de  $g^t$  e também o conjunto recorrente.

**Lema 1.7.13.** *Seja  $e^t$  um fluxo em  $X$ , tal que para todo  $t \in \mathbb{T}$ ,  $e^t$  é uma isometria. Então, dado  $T \in \mathbb{T}$  e  $x \in X$ , existe uma seqüência  $n_k \rightarrow \infty$ , tal que  $e^{n_k T} x \rightarrow x$ .*

*Demonstração.* Substituindo  $e^T$  por  $e$ , podemos assumir que  $T = 1$ . Pela compacidade de  $X$ , existe uma sub-sequência convergente da seqüência  $e^{n_k} x$ , que converge para um  $y \in X$ . Para todo  $k$  existem  $l_k$  e  $m_k$  tais que  $m_k > k + l_k$ ,  $d(e^{l_k} x, y) < 1/k$  e  $d(e^{m_k} x, y) < 1/k$ . Definindo  $n_k = m_k - l_k$  temos que  $d(e^{n_k} x, x) = d(e^{m_k} x, e^{l_k} x) < 2/k \rightarrow 0$ . Ou seja,  $e^{n_k} x \rightarrow x$ . Em particular, todo ponto de  $X$  é recorrente por  $e^t$ . □

**Lema 1.7.14.** *Sejam  $e^t$  e  $u^t$  dois fluxos em  $X$  que comutam. Se  $e^t$  é uma isometria para todo  $t \in \mathbb{T}$ , e que para todo  $x \in X$  existe  $y \in X$  tal que os  $\omega$  e  $\omega^*$ -limites de  $x$  pelo fluxo  $u^t$  são iguais a  $y$ . Então, o fluxo composto  $e^t u^t$  é recorrente por cadeias.*

*Demonstração.* Para  $x \in X$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $t_0 > 0$ , vamos construir uma  $(\varepsilon, t_0)$ -cadeia de  $x$  para  $x$ . Por hipótese,  $u$  é tal que existe  $y \in X$  e  $t_1 > t_0$  tais que

$$u^t(x), u^{-t}(x) \in B(y, \varepsilon/2),$$

para todo  $t > t_1$ . Então, para todo  $t > t_1$ , os pontos  $\{x, u^{-t}(x), x\}$  e os tempos  $\{t, t\}$  compõem uma  $(\varepsilon, t_0)$ -cadeia de  $u$ , pois

$$d(u^t(x), u^{-t}(x)) < \varepsilon \quad \text{e} \quad d(u^t u^{-t}(x), x) = 0 < \varepsilon.$$

Vamos ver agora, o que acontece com essa cadeia quando consideramos o fluxo  $e^t u^t$ . Pelo Lema 1.7.13, tomando  $T = 2$ , existe  $s > t_1$  tal que  $d(e^{2s}(x), x) < \varepsilon$ . Portanto, os pontos  $\{x, e^s u^{-s}(x), x\}$  e os tempos  $\{s, s\}$



definem uma  $(\varepsilon, t_0)$ -cadeia de  $e^t u^t$ . De fato, usando o fato de que  $e^s$  é uma isometria, temos que

$$d(e^s u^s(x), e^s u^{-s}(x)(x)) = d(u^s(x), u^{-s}(x)) < \varepsilon.$$

E finalmente, pela comutatividade de  $e^t$  e  $u^t$ , temos que

$$d((eu)^s e^s u^{-s}(x), x) = d(e^{2s}(x), x) < \varepsilon.$$

Portanto, todo ponto é recorrente por cadeias quando o fluxo é  $e^t u^t$ . □

## 1.8 Decomposição de Morse e Transitividade por Cadeias

Uma função de Lyapunov é necessariamente constante nas órbitas dos pontos recorrentes por cadeias. De modo mais geral, em uma mesma componente transitiva por cadeias a função de Lyapunov deve também ter valor constante. Vendo pela ótica das componentes de Morse, temos que nas componentes de uma decomposição de Morse minimal qualquer função de Lyapunov deve ser constante. Neste capítulo estudamos a relação entre a decomposição de Morse e o fenômeno de transitividade por cadeias. Concluimos com um teorema que demonstra que as componentes da decomposição Minimal (quando existir) serão justamente as componentes transitivas por cadeias. Veja 1.8.7.

**Proposição 1.8.1.** *O conjunto  $\Omega(Y)$  é igual à interseção de todos os atratores que contém  $\omega(Y)$ .*

*Demonstração.*

**Afirmção 1.**  *$\Omega(Y)$  está em todo atrator que contém  $\omega(Y)$ .*

Seja  $A \supset \omega(Y)$  um atrator, e  $N$  uma vizinhança compacta de  $A$  disjunta de  $A^*$ . Fazendo  $K = \text{cl}(Y) \cup N$ , pelo item (1) de 1.3.4, temos que  $\omega(K) \subset A$ . De fato, basta observar que

$$\omega(\text{cl}(Y)) = \omega(Y) \subset A,$$

e portanto,  $\text{cl}(Y) \cap A^* = \emptyset$ . Por 1.4.8, existe  $t \in \mathbb{T}$ , tal que  $\text{cl}(K_t^+) \subset \text{int}(N)$ .

Tome  $\varepsilon > 0$ , com  $\varepsilon < d(\text{int}(N)^c, \text{cl}(Y_t^+))$ . Então,  $\varepsilon$  é tal que  $d(x, \text{cl}(Y_t^+)) \leq \varepsilon \Rightarrow x \in \text{int}(N)$ . Como para todo  $s \geq t$ ,  $\phi^s(Y) \subset K_t^+ \subset \text{int}(N)$  e  $\phi^s(N) \subset \text{int}(N)$ , temos que toda  $(\varepsilon, t)$ -cadeia partindo de  $Y$  termina em  $N$ . Ou seja,  $\Omega(Y) \subset N$ . Portanto, por 1.7.10,  $\Omega(Y) = \omega(\Omega(Y)) \subset \omega(N) = A$ .

**Afirmção 2.**  $\omega(\Omega(Y, \varepsilon, t))$  é um atrator com vizinhança atratora  $\Omega(Y, \varepsilon, t)$ .

É imediato verificar que  $C = \text{cl}(\Omega(Y, \varepsilon, t)_t^+)$  é tal que  $\{x \in X \mid d(x, C) \leq \varepsilon\} \subset \Omega(Y, \varepsilon, t)$ . Temos que,  $\text{cl}(\Omega(Y, \varepsilon, t)_t^+) \subset \text{int}(\Omega(Y, \varepsilon, t))$ . E portanto,  $\omega(\Omega(Y, \varepsilon, t))$  é um atrator com vizinhança atratora  $\Omega(Y, \varepsilon, t)$ .

**Afirmção 3.**  $\omega(\Omega(Y, \varepsilon, t))$  contém  $\Omega(Y)$  e  $\omega(Y)$ .

De fato, como  $\Omega(Y) \subset \Omega(Y, \varepsilon, t)$ , temos que

$$\omega(\Omega(Y)) \subset \omega(\Omega(Y, \varepsilon, t)).$$

Por 1.7.10, temos que  $\Omega(Y) = \omega(\Omega(Y))$ , e é evidente que  $\omega(Y) \subset \Omega(Y)$ . Portanto,

$$\omega(Y) \subset \Omega(Y) = \omega(\Omega(Y)) \subset \omega(\Omega(Y, \varepsilon, t)).$$

A primeira afirmação implica que

$$\Omega(Y) \subset \bigcap \{A \subset X \mid A \text{ é atrator, } \omega(Y) \subset A\}.$$

Juntando as duas afirmações seguintes, temos que

$$\begin{aligned} \bigcap \{A \subset X \mid A \text{ é atrator, } \omega(Y) \subset A\} &\subset \bigcap_{\substack{\varepsilon > 0 \\ t \in \mathbb{T}}} \omega(\Omega(Y, \varepsilon, t)) \subset \\ &\subset \bigcap_{\substack{\varepsilon > 0 \\ t \in \mathbb{T}}} \Omega(Y, \varepsilon, t) = \Omega(Y). \end{aligned}$$

Portanto, a igualdade vale em todas as inclusões.  $\square$

**Proposição 1.8.2.** O conjunto recorrente por cadeias é dado por

$$\mathcal{R}^C = \bigcap \{A \cup A^* \mid A \text{ é um atrator}\}.$$

*Demonstração.* Seja  $x \in \mathcal{R}^C$ . Note que  $x \in \mathcal{R}^C \Leftrightarrow x \in \Omega(x)$ . Dado um atrator  $A \subset X$ , por 1.8.1,

$$\omega(x) \subset A \Rightarrow x \in \Omega(x) \subset A.$$

Por outro lado, por 1.4.15,

$$\omega(x) \not\subset A \Rightarrow x \in A^*.$$

Portanto,  $x \in \Omega(x) \Rightarrow x \in A \cup A^*$ .

Por outro lado, se para todo atrator  $A$ ,  $x \in A \cup A^*$ , então, para um atrator  $A$  qualquer,  $\omega(x) \subset A \Leftrightarrow x \in A$ , pois não é possível que  $\omega(x) \subset A$  e  $x \in A^*$ . Portanto,  $x \in \bigcap \{A \mid A \text{ é um atrator, e } \omega(x) \subset A\}$ . Isto, por 1.8.1 é o mesmo que  $x \in \Omega(x)$ .  $\square$

**Corolário 1.8.3.** *Se  $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_n\}$  é uma decomposição de Morse, e  $M \subset X$  é transitivo por cadeias, então existe  $M_i \in \mathcal{M}$  tal que  $M \subset M_i$ . Em particular,*

$$\mathcal{R}^C \subset \bigcup_{i=1}^n M_i.$$

*Demonstração.* Por 1.5.10, temos uma seqüência de atratores  $\emptyset = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_n = X$ , tal que  $M_i = A_i \cap A_{i-1}^*$ .

Todo ponto de um conjunto transitivo por cadeias é recorrente por cadeias. Portanto,  $M \subset \mathcal{R}^C$ . Para  $x \in M$ , seja  $i$  o maior índice tal que  $x \notin A_i$ . Por 1.8.2,  $x \in A_i^*$ . Portanto,  $x \in A_{i+1} \cap A_i^* = M_{i+1}$ . Para todo  $y \in M$ ,  $y \sim x$ . E assim como para  $x$ , existe  $M_j \in \mathcal{M}$  tal que  $y \in M_j$ . Temos que  $x \in M_i$ ,  $y \in M_j$  e  $y \sim x$ , então  $x \in \Omega(y)$  e  $y \in \Omega(x)$ . Mas isso implica que  $M_i \preceq M_j$  e  $M_j \preceq M_i$ . Ou seja,  $M_i = M_j$  e portanto,  $M \subset M_i$ .

A última afirmação vale porque o conjunto  $\mathcal{R}^C$  é particionado em componentes transitivas por cadeias.  $\square$

Para a demonstração da proposição 1.8.5, vamos precisar de um certo aparato técnico. Dado um espaço métrico compacto  $X$ , podemos dar ao conjunto de todos os subconjuntos compactos de  $X$  uma métrica que o torna essa família de subconjuntos de  $X$  um espaço métrico compacto.

**Lema 1.8.4.** *Sejam  $y \in \mathcal{R}^C$ ,  $x \in X$ . Então, para que para todo  $\varepsilon > 0$  e  $t \in \mathbb{T}$  exista uma  $(\varepsilon, t)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ , basta que exista um  $T \in \mathbb{T}$ , tal que existe uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ . Em particular, para que  $x \preceq y$ , basta que para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $y \in \Omega(\{x\}, \varepsilon, 1)$ .*

*Demonstração.* Basta mostrar que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe uma  $(\varepsilon, 2T)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ . O fluxo  $\phi$ , restrito ao compacto  $X \times [0, 3T]$  é uniformemente contínuo. Portanto, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que para  $t \in [0, 3T]$ ,  $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(\phi^t(x), \phi^t(y)) < \varepsilon/3$ . Obviamente que podemos assumir  $\delta < \varepsilon/3$ . Existe uma  $(\delta, t)$ -cadeia,  $x = x_0, \dots, x_n = y$ , com tempos  $t_0, \dots, t_{n-1}$ . Podemos assumir que  $t_i \in [T, 2T]$ , pois caso contrário, podemos tomar indutivamente a  $(\varepsilon, T)$ -cadeia  $x = x_0, \dots, x_i, \phi^{t_i/2}(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n = y$ , com tempos  $t_0, \dots, t_i/2, t_i/2, \dots, t_{n-1}$ . Como  $y \in \mathcal{R}^C$ , podemos também assumir que  $n > 1$ . Sendo assim, podemos escrever  $n = 2m + r$ , onde  $r \in \{2, 3\}$  e  $m \in \mathbb{N}$ . Vamos mostrar que a cadeia  $x = X_0, \dots, X_m = y$ , com tempos  $T_0, \dots, T_{m-1}$  é uma  $(\varepsilon, 2T)$ -cadeia. Onde

$$X_i = x_{2i}, \text{ exceto por } X_m = y$$

$$T_i = t_{2i} + t_{2i+1}, \text{ exceto por } T_{m-1} = \sum_{j=2m}^{n-1} t_j.$$

De fato,  $T_i > 2T$  para todo  $i$ . Para  $i \neq m - 1$ , ou para quando  $r = 2$ , temos

$$\begin{aligned} d(X_{i+1}, \phi^{T_i}(X_i)) &< \\ &< d(x_{2i+2}, \phi^{t_{2i+1}}(x_{2i+1})) + d(\phi^{t_{2i+1}}(x_{2i+1}), \phi^{t_{2i+1}+t_{2i}}(x_{2i})) < \\ &< \delta + \varepsilon/3 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Para  $i = m - 1$  e  $r = 3$ , temos

$$\begin{aligned} d(X_{i+1}, \phi^{T_i}(X_i)) &< d(x_{2i+2}, \phi^{t_{2i+2}}(x_{2i+2})) + \\ &\quad + d(\phi^{t_{2i+2}}(x_{2i+2}), \phi^{t_{2i+2}+t_{2i+1}}(x_{2i+1})) + \\ &\quad + d(\phi^{t_{2i+2}+t_{2i+1}}(x_{2i+1}), \phi^{t_{2i+2}+t_{2i+1}+t_{2i}}(x_{2i})) < \delta + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Proposição 1.8.5.** *Cada componente transitiva por cadeias é fechada, invariante e internamente transitiva por cadeias. Em particular, o conjunto recorrente por cadeias  $\mathcal{R}^C$  é internamente transitivo por cadeias.*

*Demonstração.* Seja  $M \subset X$  uma componente transitiva por cadeias. Então, para  $x \in M$ ,

$$M = \{y \in X \mid x \sim y\} = \bigcap \{\Omega(y) \mid y \in \Omega(x), x \in \Omega(y)\}. \quad (1.3)$$

Como intersecção de conjuntos fechados do tipo  $\Omega(y)$ ,  $M$  é fechado.

**Afirmção 1.**  *$M$  é invariante.*

Sabemos por 1.7.9 que cada  $\Omega(y)$  da equação 1.3 é invariante. Portanto,  $M$  é invariante.

**Afirmção 2.** *Uma componente transitiva por cadeias  $M \subset \mathcal{R}^C$  é internamente transitiva por cadeias*

Sejam  $x, y \in M$  e  $\varepsilon > 0$ . Por 1.8.4, basta mostrar que existe uma  $(\varepsilon, 1)$ -cadeia  $x = x_0, \dots, x_n = y$  onde todos os  $x_i$  estão em  $M$ . Neste caso, como  $M$  é invariante, teremos que esta é uma  $(\varepsilon, 1)$ -cadeia do fluxo restrito à  $M$ .

Para cada  $\delta > 0$ , temos uma  $(\delta, 1)$ -cadeia  $x = x_0^\delta, \dots, x_i^\delta, \dots, y, \dots, x_j^\delta, \dots, x_{n_\delta}^\delta = x$  com tempos  $t_0^\delta, \dots, t_{n_\delta-1}^\delta$ , passando por  $y$ , de  $x$  para  $x$ . Podemos assumir que  $t_i^\delta \in [0, 2]$ . Defina

$$K^\delta = \bigcup_{i=0}^{n_\delta} \{x_i, \phi^{t_i}(x_i)\}.$$

Por compacidade da família  $\mathcal{C}$  (veja A.2.1), os pontos  $K^{\delta_i} \in \mathcal{C}$ , com  $\delta_i \rightarrow 0$ , têm um ponto de acumulação  $K \in \mathcal{C}$ . Note que  $x, y \in K$ . Vamos provar que existe um subconjunto  $K' \subset K$ , com  $x, y \in K'$ , tal que para todo  $z_1, z_2 \in K'$ , existe uma  $(\varepsilon, 1)$ -cadeia de  $z_1$  para  $z_2$ , de tal modo que todos os pontos iniciais da cadeia estão em  $K'$ . Em particular, isso mostra que  $K' \subset M$ , e portanto que, como  $M$  é invariante, existe uma  $(\varepsilon, 1)$ -cadeia  $x = x_0, \dots, x_n = y$  totalmente contida em  $M$ , concluindo a demonstração.

Como o fluxo  $\phi$  é uniformemente contínuo em  $X \times [0, 4]$ , podemos escolher  $\gamma > 0$  tal que  $\gamma < \varepsilon/3$  e  $\forall t \in [0, 4]$ ,

$$d(a, b) < \gamma \Rightarrow d(\phi^t(a), \phi^t(b)) < \varepsilon/3.$$

Escolha  $\delta > 0$  tal que  $\delta < \gamma/2$  e  $d_H(K, K^\delta) < \gamma/2$ . Seja então  $z \in K$ . Existe um ponto em  $z' \in K_\delta$ , tal que  $d(z, z') < \gamma/2$ . Existe  $x_i^\delta$  tal que  $d(z', x_i^\delta) < \gamma/2$ . Portanto,  $d(z, x_i^\delta) < \gamma$ . E isso implica que  $d(\phi^{t_i}(z), \phi^{t_i}(x_i^\delta)) < \varepsilon/3$ . E portanto,  $d(\phi^{t_i}(z), x_{i+1}^\delta) < 2\varepsilon/3$ . Em particular,  $d_H(\phi^{t_i}(z), K) < 2\varepsilon/3 + \delta < \varepsilon$ . Portanto, existe  $z'' \in K$ , tal que  $z, z'', x_{i+2}^\delta, \dots, x$  é uma  $(\varepsilon, 1)$ -cadeia de  $z$  para  $x$ , passando por  $y$ . Se fizermos esse processo, começando por  $x$ , e continuando, recursivamente, podemos substituir todos os  $x_i^\delta$  da seqüência por elementos de  $K$ , tomando o cuidado de não substituir  $x$  ou  $y$ , formando uma  $(\varepsilon, 1)$ -cadeia de  $x$  para  $x$  passando por  $y$ , com todos os pontos contidos em  $K$ . Basta agora fazer com que  $K' \subset K$  seja o conjunto de todos os “pontos iniciais” dessa seqüência. É imediato que  $K'$  satisfaz as condições descritas no parágrafo anterior.  $\square$

**Lema 1.8.6.**  *$X$  é transitivo por cadeias se, e somente se, a decomposição de Morse trivial é a única existente.*

*Demonstração.* Por 1.5.9 e 1.5.10 a decomposição de Morse trivial é a única existente se, e somente se, os únicos atratores são  $X$  e  $\emptyset$ . Por 1.8.1, isso acontece, se, e somente se, para todo  $x \in X$ ,  $\Omega(x) = X$ . Ou seja, se, e somente se,  $X$  é transitivo por cadeias.  $\square$

**Teorema 1.8.7.** *Existe a decomposição de Morse minimal se, e somente se, o número de componentes transitivas por cadeias é finito. Neste caso, as componentes transitivas por cadeias são exatamente as componentes de Morse da decomposição de Morse minimal.*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_n\}$  a decomposição de Morse minimal. Então, para cada  $M \in \mathcal{M}$ , a restrição do fluxo à  $M$  é tal que a decomposição de Morse de  $M$  trivial é a única existente, caso contrário, substituindo  $M$  por sua decomposição de Morse em  $\mathcal{M}$ , obteríamos um refinamento de  $\mathcal{M}$ . Por 1.8.6,  $M$  é um conjunto transitivo por cadeias. Por outro lado, por 1.8.3, se

$x \in M$  e  $y \notin M$ , então  $x$  e  $y$  não pertencem à mesma componente transitiva por cadeias. Como  $\mathcal{R}^C \subset \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$ , temos que  $\mathcal{M}$  é exatamente a coleção das componentes transitivas por cadeias.

**Afirmção 1.** *Se o número de componentes transitivas por cadeias é finito, então, a família  $\mathcal{M}$  formada por essas componentes é uma decomposição de Morse.*

Vamos mostrar que  $\mathcal{M}$  satisfaz as condições da definição 1.5.2.

Ss componentes transitivas por cadeias são, por 1.8.5, compactas e invariantes. Por serem classes de equivalência, são também duas a duas disjuntas.

Vamos então verificar os itens listados na definição 1.5.2. Para o item (1), precisamos mostrar que para todo  $x \in X$ ,  $\omega(x)$  e  $\omega^*(x)$  são recorrentes por cadeias e estão cada um em uma componente transitiva por cadeias. É suficiente mostrar que para todo  $x \in X$ , dados  $y, z \in \omega(x)$  (ou  $y, z \in \omega^*(x)$ ) teremos  $y \preceq z$ . Como  $y, z$  são arbitrários, concluímos em particular que  $y \sim y$ . Ou seja, todos os pontos de  $\omega(x)$  são recorrentes por cadeias. Também, pela arbitrariedade de  $y$  e  $z$ , podemos concluir que  $y \sim z$ . Ou seja,  $M_y = M_z$ , e portanto,  $\omega(x) \subset M_y$  para qualquer  $y \in \omega(x)$ .

Sejam  $t \in \mathbb{T}$  e  $\varepsilon > 0$ . Se  $y, z \in \omega(x)$ , como  $\omega(x)$  é invariante, temos  $y' = \phi^t(y) \in \omega(x)$ . Existe  $w \in x_t^+$ , tal que  $d(y', w) < \varepsilon$ , pois  $y' \in \text{cl}(x_t^+)$ . Ou seja, temos uma  $(\varepsilon, t)$ -cadeia de  $y$  para  $w$ . Como  $z \in \omega(x) = \omega(w)$ , temos que  $z \in \text{cl}(w_t^+)$ . Portanto, existe  $w' \in w_t^+$ , tal que  $d(w', z) < \varepsilon$ . Ou seja, existe uma  $(\varepsilon, t)$ -cadeia de  $w$  para  $z$ . Por transitividade,  $y \preceq z$ .

Do mesmo modo, para  $y, z \in \omega^*(x)$ , como  $\omega^*(x)$  é invariante, temos  $y' = \phi^t(y) \in \omega^*(x)$ . Existe  $w' \in x_t^-$  tal que  $d(z, w') < \varepsilon$ . E existe  $w \in w_t^-$  tal que  $d(y, w) < \varepsilon$ . Neste caso,  $y \preceq w \preceq z$ . Concluindo a demonstração do item (1) da definição.

Para o item (2), basta notar que se  $y \in \omega(x)$ , então  $x \preceq y$ . E se  $z \in \omega^*(x)$ , então  $z \preceq x$ . Portanto, se  $\omega(x)$  e  $\omega^*(x)$  estão na mesma componente transitiva por cadeias ( $M_y = M_z$ ), então  $x \preceq y \sim z \preceq x$ . Mostrando que  $x$  é recorrente por cadeias e  $x \sim y$ . Ou seja,  $x \in M_y \in \mathcal{M}$ .

Finalmente, para o item (3), note que  $\preceq$  restrita a  $\mathcal{R}^C$  é uma ordem parcial, e pode ser vista como uma ordem parcial  $\preceq$  sobre  $\mathcal{M}$ . Ou seja,  $M_x \preceq N_y \Leftrightarrow x \preceq y$ , onde  $M_x$  é a componente de  $x$  e  $N_y$  a componente de  $y$ . Neste caso, se  $x \in X$  é tal que  $\omega^*(x) \subset M \in \mathcal{M}$  e  $\omega(x) \subset N \in \mathcal{M}$ , teremos que  $M \preceq N$ . Isso quer dizer, que se denotarmos a ordem parcial em  $\mathcal{M}$  da definição 1.5.2 por  $\preceq_M$ , então  $M \preceq_M N \Rightarrow M \preceq N$ . Em particular, se  $M \preceq_M N$  e  $N \preceq_M M$ , então  $M = N$ . Pela observação 1.5.3, este fato mostra que  $\preceq_M$  é de fato uma ordem parcial sobre  $\mathcal{M}$ .

**Afirmção 2.** *A decomposição de Morse  $\mathcal{M}$  dada pelas finitas componentes transitivas por cadeias é minimal.*

Por 1.8.5, cada componente é internamente transitiva por cadeias, e portanto, por 1.8.6, cada componente possui apenas a decomposição de Morse trivial.

Suponha que  $\mathcal{N}$  é uma outra decomposição de Morse. Então, dado  $M \in \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}_M = \{M \cap N \mid N \in \mathcal{N}, M \cap N \neq \emptyset\}$  é uma decomposição de Morse de  $M$ . Pelo parágrafo anterior, essa decomposição é trivial. Em particular, não existe  $N \in \mathcal{N}$  tal que  $N \subsetneq M$ .  $\square$

# Capítulo 2

## Dinâmica no Projetivo

Vamos utilizar o ferramental desenvolvido no capítulo 1 para estudar a ação de grupos lineares nos espaços projetivos. A estratégia será decompor os elementos desse grupo em componentes tais que cada componente seja responsável por determinar comportamentos como recorrência e recorrência por cadeias do fluxo induzido no espaço projetivo. Veja 2.2.10 e 2.2.11. Os conceitos e notações necessários para este capítulo estão resumidos na seção A.4 do apêndice.

### 2.1 Decomposição de Jordan

Seja  $V$  um espaço vetorial real de dimensão finita, e  $T$  um endomorfismo de  $V$ . Definimos o espaço vetorial complexo  $V_{\mathbb{C}} = \{u+iv \mid u, v \in V\}$ , e identificamos  $V$  naturalmente com o subconjunto  $\{u+i0 \mid u \in V\}$ . Podemos então estender  $T$  a  $V_{\mathbb{C}}$  por  $T(u+iv) = Tu + iTv$ , de modo que  $\mathfrak{gl}(V)$  é identificado com o subconjunto das transformações em  $\mathfrak{gl}(V_{\mathbb{C}})$  que levam  $V \subset V_{\mathbb{C}}$  em  $V$ . Como o determinante de  $T \in \mathfrak{gl}(V)$ , visto como um operador sobre  $V$ , coincide com o determinante de  $T \in \mathfrak{gl}(V_{\mathbb{C}})$ , visto como um operador sobre  $V_{\mathbb{C}}$ , temos também que  $\text{Gl}(V) \subset \text{Gl}(V_{\mathbb{C}})$ .

Nesta seção, demonstraremos a existência e unicidade da decomposição de Jordan aditiva (multiplicativa) de um endomorfismo (automorfismo)  $T$  de  $V$ .

Na decomposição de Jordan mais comum (caso aditivo), escrevemos  $T$  como uma soma comutativa de um endomorfismo semi-simples e um nilpotente. Onde um endomorfismo semi-simples é aquele que é diagonalizável quando visto como um operador sobre  $V_{\mathbb{C}}$ . Um refinamento disso, é quando a parte semi-simples é decomposta em uma soma de um endomorfismo hiperbólico (aditivo) e um elíptico (aditivo) (definição 2.1.1), onde todas as



três componentes comutam entre si.

Quando  $T \in \text{Gl}(V)$ , pode-se obter também a decomposição de Jordan do caso multiplicativo. Neste caso,  $T$  é escrito como o produto comutativo de um automorfismo unipotente, um automorfismo hiperbólico multiplicativo e um automorfismo elíptico multiplicativo. (definição 2.1.13)

### 2.1.1 Caso Aditivo: álgebra linear geral

O objetivo é decompor o grupo das transformações lineares inversíveis, como faremos na sub-seção 2.1.2. No entanto as transformações inversíveis não são as únicas que aparecem no estudo. Por exemplo, se  $I$  é a transformação identidade, e  $N$  é uma transformação nilpotente (veja definição 2.1.1,  $I + N$  é inversível e possui propriedades que podem ser analisadas a partir dessa decomposição. Outro caso é o de exponenciação de transformações lineares. Se  $H$  é uma transformação linear qualquer, então  $e^H$  será sempre inversível. A exponenciação é um homomorfismo do grupo aditivo das transformações lineares no grupo multiplicativo das transformações inversíveis.

**Definição 2.1.1.** *Um endomorfismo  $T : V \rightarrow V$  é chamado:*

**Nilpotente** *Se existir  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $T^n = 0$ .*

**Semi-simples** *Se  $T$  é diagonalizável quando visto como um operador sobre  $V_{\mathbb{C}}$ .*

**Hiperbólico (aditivo)** *Se  $T$  é semi-simples, e seus auto-valores são todos reais.*

**Elíptico (aditivo)** *Se  $T$  é semi-simples, e seus auto-valores são puramente imaginários.*

Vamos começar com uma caracterização dos endomorfismos semi-simples.

**Lema 2.1.2.** *As seguintes afirmações sobre o endomorfismo  $T$  são equivalentes:*

1.  $T$  é semi-simples.
2.  $V_{\mathbb{C}}$  possui uma base de auto-vetores de  $T$ . Ou seja,  $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{x \in \beta} \langle x \rangle$ , onde  $\beta$  é uma base de auto-vetores.
3.  $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus W_{\alpha}$ , onde  $W_{\alpha}$  é o auto-espaco com auto-valores  $\alpha$ .
4. Todo subespaco invariante  $W \subset V_{\mathbb{C}}$  possui um complemento invariante  $W' \subset V_{\mathbb{C}}$ . Ou seja,  $T(W') \subset W'$  e  $V_{\mathbb{C}} = W \oplus W'$ .

*Demonstração.*

**Afirmção 1.** (1)  $\Leftrightarrow$  (2)  $\Leftrightarrow$  (3)

Trivial.

**Afirmção 2.** (2)  $\Rightarrow$  (4)

Seja  $W \subsetneq V_{\mathbb{C}}$  maximal dentre os invariantes sem complemento invariante. Tome  $x \in \beta \setminus W$ . Pela maximalidade de  $W$ ,  $W \oplus \langle x \rangle$  tem complemento invariante  $W'$ . Ou seja,  $V_{\mathbb{C}} = W \oplus \langle x \rangle \oplus W'$ . Neste caso,  $\langle x \rangle \oplus W'$  é complemento invariante de  $W$ , contradizendo a não existência de um complemento invariante de  $W$ . Assim, todos os subespaços invariantes de  $V_{\mathbb{C}}$  possuem complemento invariante.

**Afirmção 3.** (4)  $\Rightarrow$  (2)

Seja  $\beta \subset V_{\mathbb{C}}$  um subconjunto maximal linearmente independente formado por auto-vetores de  $T$ . Seja  $W'$  um complemento invariante de  $\langle \beta \rangle$ . Como  $\mathbb{C}$  é algebricamente fechado, se  $W' \neq \{0\}$ , temos que existe um auto-vetor de  $T|_{W'}$ . Isso porque existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $\det(T|_{W'} - \lambda I) = 0$ . Ou seja,  $T|_{W'} - \lambda I$  não é injetivo, e portanto, existe  $v \in W'$  tal que  $Tv = \lambda v$ . Para este auto-vetor  $v$ ,  $\beta \cup \{v\}$  é linearmente independente, estritamente maior que  $\beta$  e formado por auto-vetores de  $T$ . Contradizendo a maximalidade de  $\beta$ . Portanto,  $W' = \{0\}$ . Ou seja,  $\beta$  é uma base de auto-vetores.  $\square$

**Corolário 2.1.3.** *Se  $W \subset V$  é invariante pelo endomorfismo semi-simples  $T$ , então,  $T|_W$  também é semi-simples.*

*Demonstração.* Suponha que  $T|_W$  não seja semi-simples. Então, pelo item 4 do Lema 2.1.2, existe um subespaço  $U \subsetneq W_{\mathbb{C}}$  invariante e maximal dentre os invariantes que não possuem complemento invariante em  $W_{\mathbb{C}}$ . Seja  $U'$  o complemento invariante de  $U$  em  $V_{\mathbb{C}}$ .

Se  $\{0\} \neq M = W_{\mathbb{C}} \cap U'$ , então, pela maximalidade de  $U$ ,  $U \oplus M$  tem complemento invariante  $M'$ , em  $W_{\mathbb{C}}$ , pois como  $M$  e  $U$  são invariantes,  $U \oplus M$  também é. Ou seja,  $W_{\mathbb{C}} = U \oplus M \oplus M'$ . Isso é uma contradição, pois  $M \oplus M'$  seria um complemento invariante de  $U$  em  $W_{\mathbb{C}}$ . Portanto,  $M = W_{\mathbb{C}} \cap U'$  é trivial, e então,  $V_{\mathbb{C}} = W_{\mathbb{C}} + U' = W_{\mathbb{C}} \oplus U'$ . E como  $U \subset W_{\mathbb{C}}$  e  $V_{\mathbb{C}} = U \oplus U'$ , temos que  $U = W_{\mathbb{C}}$ . O que é novamente uma contradição, pois  $W_{\mathbb{C}}$  tem complemento invariante  $\{0\}$ .

Ou seja, não existem conjuntos invariantes sem complemento invariante. Pelo item 4 do lema 2.1.2, isso significa que  $T|_W$  é semi-simples.  $\square$

**Corolário 2.1.4.** *Se dois endomorfismos semi-simples  $L, T \in \mathfrak{gl}(V_{\mathbb{C}})$  comutam, então existe uma base de  $V_{\mathbb{C}}$  formada por auto-vetores de  $T$  e  $L$  ao mesmo tempo. Ou seja,  $T$  e  $L$  são simultaneamente diagonalizáveis.*

*Demonstração.* O fato de  $L$  e  $T$  comutarem implica que os auto-espços  $W_\alpha$  de  $L$  são invariantes por  $T$ . De fato, se  $x \in W_\alpha$ , então,  $LTx = T Lx = T(\alpha x) = \alpha T x$ . Ou seja,  $T(W_\alpha) \subset W_\alpha$ . Por 2.1.3,  $T|_{W_\alpha}$  é diagonalizável para cada  $W_\alpha$ . Portanto, existe uma base de auto-vetores de  $T$  composta apenas por elementos dos auto-espços de  $L$ ,  $W_\alpha$ . Como os elementos de  $W_\alpha$  são auto-vetores de  $L$ , temos que existe uma base de  $V_{\mathbb{C}}$  formada por auto-vetores de  $T$  e  $L$  ao mesmo tempo.  $\square$

O seguinte lema será utilizado quando mostrarmos a existência e unicidade da decomposição de Jordan aditiva.

**Lema 2.1.5.** *Sejam  $L, T$  dois endomorfismos de  $V$  que comutam.*

1. *Se ambos  $L, T$  forem semi-simples, elípticos aditivos ou hiperbólicos aditivos, então,  $L + T$ , também será.*
2. *Se ambos  $L, T$  forem nilpotentes, então  $L + T$  é nilpotente.*
3. *Se  $T$  é ao mesmo tempo semi-simples e nilpotente então  $T = 0$ .*
4. *Se  $T$  é elíptico aditivo e hiperbólico aditivo, então,  $T = 0$ .*

*Demonstração.* Os itens (3) e (4) são imediatos.

Para o item (2), se  $n \in \mathbb{N}$  for tal que  $L^n = T^n = 0$ , então

$$(L + T)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} L^i T^{2n-i} = 0,$$

pois  $i < n \Rightarrow 2n - i > n$ .

Vamos demonstrar o item (1) para o caso em que  $L$  e  $T$  são semi-simples. Seja  $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus W_\alpha$ , onde  $W_\alpha$  são os auto-espços de  $L$  com auto-valor  $\alpha$ .

O fato de  $L$  e  $T$  comutarem implica, por 2.1.4, que existe uma base de  $V_{\mathbb{C}}$  formada por auto-vetores de  $T$  e  $L$  ao mesmo tempo. Conseqüentemente, os elementos dessa base são auto-vetores de  $L + T$ . Pelo item (2) de 2.1.2,  $L + T$  é semi-simples.

Nesta base, os auto-valores de  $L + T$  são somas de auto-valores de  $L$  e  $T$ . Portanto, se além de semi-simples, os auto-valores de  $L$  e  $T$  forem todos reais (puramente imaginários), o mesmo acontece com os auto-valores de  $L + T$ . Assim, se ambos forem hiperbólicos aditivos (elípticos aditivos), a soma  $L + T$  também será.  $\square$

Nosso objetivo é demonstrar que todos os automorfismos de  $V$  podem ser escritos unicamente como a soma de três automorfismos, sendo um elíptico, um hiperbólico e um nilpotente. Esta é a conclusão do teorema 2.1.10. Seja  $T$  o automorfismo a ser decomposto e  $\lambda_k$  seus auto-valores em  $\mathbb{C}$ , com todos os  $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$  distintos. A estratégia para a demonstração, será decompor  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ , de modo que as projeções  $P_k(v_1 + \cdots + v_n) = \beta_k$  sejam tais que  $(T - \lambda_k)^{m_k} P_k = 0$ . Neste caso,  $T = E + H + N$ , onde  $E = \sum i\beta_k P_k$  é elíptico,  $H = \sum \alpha_k P_k$  hiperbólico, e  $N = \sum (T|_{\beta_k} - \lambda_k) P_k$  é nilpotente. Mais do que isso, se as projeções  $P_k$  forem polinômios em  $T$ , então  $E$ ,  $H$  e  $N$  serão também polinômios em  $T$ , e por isso comutarão. Por exemplo, se  $H = f(T)$  e  $N = g(T)$ , então  $HN = f(T)g(T) = g(T)f(T) = NH$ .

Para construirmos as projeções  $P_k$ , vamos utilizar alguns fatos relacionados ao homomorfismo de anéis

$$\begin{aligned} F_T : \mathbb{R}[x] &\rightarrow \mathfrak{gl}(V) , \\ p(x) &\mapsto p(T) \end{aligned}$$

onde  $\mathbb{R}[x]$  é o anel dos polinômios em  $x$  com coeficientes nos reais. O núcleo do homomorfismo acima é o ideal principal gerado pelo polinômio minimal de  $T$ ,  $p_T(x) = \prod (x - \lambda_k)^{m_k}$ , com todos os  $\lambda_k$  distintos.

**Observação 2.1.6.** Note que  $\mathbb{C}$  é algebricamente fechado, portanto todo elemento de  $T \in \mathfrak{gl}(V_{\mathbb{C}})$  possui auto-valores. Cada auto-valor possui ao menos um auto-vetor associado. Por exemplo, se a dimensão de  $V_{\mathbb{C}}$  for igual ao número de raízes distintas do polinômio característico  $\det(T - xI)$ , então  $T$  é diagonalizável.

**Observação 2.1.7.** O polinômio minimal de  $T$  é real. Isso implica que se algum  $\lambda_i$  não for real, então existe  $j$  tal que  $\lambda_j = \overline{\lambda_i}$  e  $m_j = m_i$ .

Vamos assumir que os  $\lambda_k$  são todos distintos, e estão ordenados de modo que existe  $0 \leq l < n$ , tal que  $\lambda_k = \overline{\lambda_{l+k}}$  para  $k \leq l$ , e  $\lambda_k \in \mathbb{R}$  para  $2l < k \leq n$ .

Denotamos por  $\overline{p}(x)$  o polinômio cujos coeficientes são os conjugados dos coeficientes de  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ .

**Lema 2.1.8.** *Se  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ , então, existem polinômios  $\pi_k$ , onde  $1 \leq k \leq n$ , e  $l$  são tais que*

1.  $\pi_k \in \mathbb{C}[x]$ , para  $1 \leq k \leq 2l$ , e  $\pi_k \in \mathbb{R}[x]$ , para  $2l < k \leq n$ .
2. Para  $k \leq l$ ,  $\pi_k = \overline{\pi_{l+k}}$ . Ou seja, para  $k \leq l$ ,  $\pi_k + \pi_{l+k} \in \mathbb{R}[x]$ , e  $\pi_k - \pi_{l+k}$  tem coeficientes puramente imaginários.

3. Se  $r \neq s$ , então  $\pi_r \pi_s$  e  $(x - \lambda_r)^{m_r} \pi_r$  são múltiplos de  $p$ .

4.  $1 = \sum_{k=1}^n \pi_k$ .

*Demonstração.* Seja  $p(x) = \sum (x - \lambda_k)^{m_k}$  como na observação 2.1.7.

Para  $1 \leq k \leq n$ , definimos os polinômios

$$q_k = \prod_{i \neq k} (x - \lambda_i)^{m_i}.$$

Como os polinômios constantes são os únicos que dividem todos os  $q_k$ , segue que o ideal gerado por eles é todo o  $\mathbb{C}[x]$ . Portanto, existem polinômios  $a_k$  tais que

$$\sum_{k=1}^n a_k q_k = 1. \quad (2.1)$$

Somando a equação acima com seu conjugado e dividindo por dois, temos

$$1 = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2} q_k + \sum_{k=1}^n \frac{\overline{a_k}}{2} \overline{q_k} = \sum_{k=1}^{2l} \frac{(a_k + \overline{a_{k+l}})}{2} q_k + \sum_{k=2l+1}^n \frac{(a_k + \overline{a_k})}{2} q_k,$$

onde a última igualdade segue de  $q_k = \overline{q_{k+l}}$  para  $k \leq 2l$  e  $q_k = \overline{q_k}$  para  $2l < k \leq n$ . Portanto, podemos substituir  $a_k$  por  $\frac{a_k + \overline{a_{k+l}}}{2}$  para  $k \leq 2l$  e por  $\frac{(a_k + \overline{a_k})}{2}$  para  $2l < k \leq n$  em (2.1), e assim assumir que  $a_k = \overline{a_{l+k}}$  para  $k \leq 2l$ , e  $a_k \in \mathbb{R}$  para  $2l < k \leq n$ . O resultado segue se fizermos  $\pi_k = a_k q_k$ .  $\square$

**Lema 2.1.9.** *Seja  $p_T(x)$  o polinômio minimal de  $T$ . Denotando por  $P_k = \pi_k(T)$ , onde  $\pi_k$  são os polinômios do lema 2.1.8, temos o seguinte resultado.*

1.  $I = \sum_{k=1}^n P_k$ .
2. Se  $r \neq s$ , então  $P_r P_s = 0$ .
3. Para  $r = 1, \dots, n$  temos que  $P_r^2 = P_r$ .

*Demonstração.* O item (1) vem de  $1 = \sum \pi_k$ . E (2) vem do fato que  $\pi_r \pi_s$  é múltiplo de  $p_T$ .

Para o item (3), basta aplicar  $P_k$  em ambos os lados da igualdade do item (1), e usar o item (2).  $\square$

**Teorema 2.1.10.** *Seja  $T \in \mathfrak{gl}(V)$  e faça  $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ . Então  $T$  pode ser escrito unicamente como a soma comutativa  $T = E + H + N$ , onde  $E$  é elíptico,  $H$  é hiperbólico e  $N$  é nilpotente.*

*Ainda,  $E, H, N$  são dados pelos seguintes polinômios reais em  $T$ :*

1.  $E = \sum_{k=1}^l i\beta_k(P_k - P_{l+k})$ .
2.  $H = \sum_{k=1}^l \alpha_k(P_k + P_{l+k}) + \sum_{k=2l+1}^n \alpha_k P_k$ .
3.  $N = \sum_{k=1}^n (T - \lambda_k)P_k$ .

*Demonstração.* Pelo item (2) do lema 2.1.8, é imediato que  $E$  e  $H$  são dados por polinômios reais em  $T$ . Como  $N = T - E - H$ , segue que  $N$  também é dado por um polinômio real de  $T$ .

O lema 2.1.9 implica que  $E = \sum_{k=1}^l i\beta_k(P_k - P_{l+k})$  e  $H = \sum_{k=1}^l \alpha_k(P_k + P_{l+k}) + \sum_{k=2l+1}^n \alpha_k P_k$  são diagonalizáveis e portanto  $E$  é elíptico e  $H$ , hiperbólico. De fato, o lema implica que cada  $P_r$  é diagonalizável, pois  $P_r^2 = P_r$  é o mesmo que dizer que  $P_r$  restito à sua imagem é a identidade. Basta tomar uma base da imagem de  $P_r$  e completá-la com elementos do núcleo a uma base do espaço todo. Assim, cada termo da soma é diagonalizável. O fato de que para  $r \neq s$ ,  $P_r P_s = 0$  implica em particular que  $P_r$  e  $P_s$  comutam. Por 2.1.5, temos que  $E$  e  $H$  são diagonalizáveis.

$N$  é nilpotente, pois para  $m > \max(m_k)$ ,  $(x - \lambda_k)^m \pi_k$  é múltiplo do polinômio minimal de  $T$ , e portanto,  $N^m = \sum (T - \lambda_k)^m P_k = 0$ .

Para a unicidade, considere a soma comutativa  $T = \tilde{E} + \tilde{H} + \tilde{N}$ , com  $\tilde{E}$  elíptico,  $\tilde{H}$  hiperbólico e  $\tilde{N}$  nilpotente. Defina  $\tilde{S} = \tilde{E} + \tilde{H}$ . Como  $\tilde{E}$  e  $\tilde{H}$  comutam, pelo lema 2.1.5, temos que  $\tilde{S}$  é semi-simples. Como  $E, H, N$  são polinômios em  $T$ , eles comutam com  $\tilde{E}, \tilde{H}, \tilde{N}$ . Usando o fato que  $T = S + N = \tilde{S} + \tilde{N}$ , pelo lema 2.1.5, temos que  $S - \tilde{S} = \tilde{N} - N$  é tanto semi-simples quanto nilpotente e portanto,  $S = \tilde{S}$  e  $\tilde{N} = N$ . Agora, usando o fato de que  $S = E + H = \tilde{E} + \tilde{H}$ , pelo lema 2.1.5, temos que  $E - \tilde{E} = \tilde{H} - H$  é tanto elíptico quanto hiperbólico, e portanto,  $E = \tilde{E}$  e  $\tilde{H} = H$ .  $\square$

**Observação 2.1.11.** A existência de uma parte nilpotente de  $T$  está relacionada com a multiplicidade das raízes do polinômio minimal de  $T$ . Por exemplo, se  $T \neq 0$  é tal que  $T^2 = 0$ , então  $p_T(x) = x^2$  é o polinômio minimal de  $T$  e possui raiz 0 com multiplicidade 2. No entanto, se  $T$  fosse diagonalizável, denotando por  $A$  o conjunto dos auto-valores de  $T$ , então,  $q(x) = \prod_{\alpha \in A} (T - \alpha)$  é tal que  $q(T) = 0$ . Portanto,  $p_T \mid q$ . Isso seria uma contradição, pois  $q$  não tem raízes múltiplas.

Não é difícil mostrar que se  $T$  é semi-simples, então  $p_T$  não tem raízes múltiplas. De fato, tomando uma base de auto-vetores  $v_1, \dots, v_n$ . Se  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  são os auto-valores de  $T$  distintos, então  $p(x) = \prod_{i=1}^m (x - \lambda_i)$  é tal que  $p(T)v_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Assim,  $p(T) = 0$ , e portanto,  $p_T \mid p$  (de fato,  $p_T = p$ ). Isso significa que  $p_T$  não tem raízes múltiplas. A afirmação em sentido oposto, que se o polinômio minimal de  $T$  não tiver raízes múltiplas, então  $T$  é semi-simples, é uma consequência direta de

2.1.10. De fato, pelo item (3) de 2.1.8, fazendo  $p = p_T$ , temos que para cada auto-valor  $\lambda_r$ ,  $(x - \lambda_r)\pi_r$  é múltiplo de  $p_T$ . Portanto,  $(T - \lambda_r)P_r = 0$ . Consequentemente,  $N = 0$  e  $T$  é semi-simples.

**Exemplo 2.1.12.** Vamos mostrar que todos os  $X \in \mathfrak{sl}(3)$  podem, através de uma mudança de base  $g^{-1}Xg$ , tal que  $g \in \text{Sl}(3)$ , ser escritos em uma das seguintes formas:  $(a, b \in \mathbb{R})$

$$X_1 = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} -a & -b & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X_5 = \begin{pmatrix} -a & 1 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

Note que o traço e o determinante de  $X$  são iguais ao traço e o determinante de  $g^{-1}Xg$  respectivamente. Para demonstrar a existência de  $g$  tal que  $X$  pode ser escrito de uma das formas listadas, vamos utilizar o polinômio característico de  $X$ ,

$$p(x) = \det(X - xI).$$

Note também, que basta mostrar para  $g \in \text{Gl}(3)$ , pois neste caso,  $g' = \frac{g}{\sqrt[3]{\det(g)}} \in \text{Sl}(3)$  é tal que  $g'^{-1}Xg' = g^{-1}Xg$ .

**Caso 1.** *O polinômio  $p$  tem três raízes reais distintas.*

Sejam  $-a$  e  $-b$  duas raízes de  $p$ . Como  $\text{tr}(X) = 0$ , temos que a terceira raiz é  $a + b$ . Cada raiz é um auto-valor de  $X$  e possui um auto-espaço de dimensão maior que 0. Basta então escolher auto-vetores  $(v_{11}, v_{12}, v_{13})$ ,  $(v_{21}, v_{22}, v_{23})$  e  $(v_{31}, v_{32}, v_{33})$ , associados aos auto-valores  $-a$ ,  $-b$  e  $a + b$  respectivamente, e fazer

$$g = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Neste caso,  $g^{-1}Xg$  será da forma  $X_1$ .

**Caso 2.** *O polinômio  $p$  tem três raízes idênticas.*

Como  $\text{tr}(X) = 0$ , temos que as três raízes são iguais a 0, e  $X$  é nilpotente. Se a dimensão do auto-espaço  $V_0$ , associado ao auto-valor 0 for 3, então  $X = 0$ . Se a dimensão for 2, então existe  $v \notin V_0$  tal que  $Xv \in V_0$ . De fato, tomando  $v' \notin V_0$ , tomando o maior  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $X^n v' \neq 0$ , basta fazer  $v = X^{n-1} v'$ ,

notando que como  $v' \notin V_0$ , então  $n \geq 1$ . Faça  $Xv = (v_{11}, v_{12}, v_{13})$ , tome  $(v_{21}, v_{22}, v_{23}) \in V_0 \setminus \langle Xv \rangle$ , denote  $v = (v_{31}, v_{32}, v_{33})$  e faça  $g$  como em (2.2). Neste caso,  $g^{-1}Xg$  será da forma  $X_3$ .

Se a dimensão de  $V_0$  for 1, então, assim como para o caso com dimensão de  $V_0$  igual a 2, existe  $v \notin V_0$  tal que  $Xv \in V_0$ . Existe  $w \notin V_0 \oplus \langle v \rangle$  tal que  $Xw = v$ . De fato, tomando  $w' \notin V_0 \oplus \langle v \rangle$ , se  $Xw' \in V_0 = \langle Xv \rangle$ , então existe  $\lambda$  tal que  $Xw' = \lambda Xv$ . Portanto,  $w' - \lambda v \in V_0$ . Contradizendo a hipótese de que  $w' \notin V_0 \oplus \langle v \rangle$ . Portanto,  $Xw' \notin V_0 = \langle Xv \rangle$ . Por outro lado,  $Xw' \in V_0 \oplus \langle v \rangle$ , pois caso contrário,  $X^n w'$  sempre teria uma componente em  $w'$  quando decomposto em  $V_0 \oplus \langle v \rangle \oplus \langle w' \rangle$ , contradizendo a nilpotência de  $X$ . Portanto,

$$Xw' = \alpha Xv + \beta v,$$

com  $\beta \neq 0$ . Tomando  $w = \frac{w' - \alpha v}{\beta}$ , teremos que

$$Xw = v$$

e  $w \notin V_0 \oplus \langle v \rangle$ . Escrevendo  $Xv = (v_{11}, v_{12}, v_{13})$ ,  $v = (v_{21}, v_{22}, v_{23})$  e  $w = (v_{31}, v_{32}, v_{33})$ ; basta então fazer  $g$  como em (2.2). Neste caso,  $g^{-1}Xg$  será da forma  $X_2$ .

**Caso 3.** *O polinômio  $p$  tem duas raízes (reais) idênticas e uma raiz (real) distinta.*

Note que se um polinômio de terceiro grau sobre os reais tem duas raízes idênticas, então todas as raízes são reais. Seja  $-a$  a raiz com multiplicidade 2, como o traço de  $X$  é 0, temos que a outra raiz é  $2a$ . Seja  $v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})$  um auto-vetor associado ao auto-valor  $-a$  e  $v_3 = (v_{31}, v_{32}, v_{33})$  um auto-vetor associado ao auto-valor  $2a$ . Se  $X$  é diagonalizável, então, então  $X$  é diagonalizável *nos reais* e existe  $g \in \text{Gl}(3)$  tal que  $g^{-1}Xg$  é da forma  $X_1$  com  $a = b$ . Se  $X$  não é diagonalizável, então pela observação em 2.1.11, existe  $v \in V$  tal que  $(X + a)(X - 2a)v \neq 0$ . Faça  $v' = (X + a)(X - 2a)v$ . Então

$$(X + a)v' = p(X)v = 0.$$

Ou seja,  $Xv' \in V_{-a}$ , onde  $V_{-a}$  é o auto-espço associado ao auto-valor  $-a$ . Mas, como  $X$  não é diagonalizável,  $V_{-a}$  tem dimensão 1. Portanto,  $V_{-a} = \langle v_1 \rangle$ , e  $Xv' = \alpha v_1$ . Fazendo  $v_2 = (v_{21}, v_{22}, v_{23}) = \frac{v'}{\alpha}$ , temos que  $Xv_2 = v_1$ . Basta agora tomar  $g$  como em (2.2) para que  $g^{-1}Xg$  seja da forma  $X_5$ .

**Caso 4.** *O polinômio  $p$  tem uma raiz não real.*



Note que neste caso, pela observação 2.1.7,  $p$  tem duas raízes complexas conjugadas, e uma raiz real. A raiz real possui um auto espaço de dimensão um associado. Seja  $V_1$  e  $V_2$  os auto-espacos associados aos auto-valores não reais de  $X$ , então faça  $W = V_1 \oplus V_2$ . Considere a decomposição de Jordan de  $X|_W = H + E + N$ . Como as raízes do polinômio característico de  $X|_W$  não são reais, temos que a parte elíptica  $E$  não é nula.

Vamos mostrar que a parte nilpotente  $N$  é nula. Suponha que  $N \neq 0$ . Então a dimensão do núcleo de  $N$  é menor que 2 (pois a dimensão de  $W$ , domínio de  $N$ , é 2). Por outro lado, como  $N$  é nilpotente, seu núcleo tem dimensão não nula. Portanto, o núcleo de  $N$  tem dimensão 1, e é gerado por um vetor  $v$ . Como  $N$  e  $E$  comutam, segue que

$$NEv = ENv = E0 = 0.$$

Ou seja,  $Ev$  está no núcleo de  $N$  e portanto  $Ev \in \langle v \rangle$ . Ou seja, existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $Ev = \alpha v$ , contradizendo o fato de que  $E$  é elíptico. Essa contradição mostra que  $N = 0$ .

Sejam  $-a + bi$  e  $-a - bi$  as raízes complexas de  $p$ . Então,  $H = -aI$ , onde  $I$  é a matriz identidade. As raízes do polinômio característico de  $E$  são  $bi$  e  $-bi$ . Vendo  $E$  como uma transformação sobre  $\mathbb{C}^2$ , existe uma base onde  $\frac{E}{b}$  pode ser escrito

$$\frac{E}{b} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Assim,  $(\frac{E}{b})^2 = -I$ , onde  $I$  é a identidade. Obviamente que sobre  $W$  também vale que  $(\frac{E}{b})^2 = -I$ . Tomando  $v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13}) \in W$ , e fazendo  $v_2 = (v_{21}, v_{22}, v_{23}) = -\frac{E}{b}v_1$ , temos que  $\frac{E}{b}v_2 = v_1$ . Portanto, na base  $v_1, v_2$ , escrevemos

$$E = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Basta agora tomar um auto-vetor  $v_3 = (v_{31}, v_{32}, v_{33})$ , relativo ao auto-valor real, e definir  $g$  como em (2.2) para que  $g^{-1}Xg$  seja da forma  $X_4$ .

### 2.1.2 Caso Multiplicativo: grupo linear geral

Vamos agora obter a decomposição de Jordan do caso multiplicativo, que nos dará condições de descrever o comportamento dos fluxos induzidos por exponenciais (ou iterações) de transformações lineares agindo no espaço projetivo. A demonstração da decomposição multiplicativa se utiliza da decomposição aditiva descrita na seção 2.1.1.

**Definição 2.1.13.** *Um automorfismo  $T : V \rightarrow V$  é chamado:*

**Unipotente** *Se  $T - I$  é nilpotente.*

**Semi-simples** *Se  $T$  é diagonalizável quando visto como um operador sobre  $V_{\mathbb{C}}$ .*

**Hiperbólico (multiplicativo)** *Se  $T$  é semi-simples, e seus auto-valores são todos reais positivos.*

**Elíptico (multiplicativo)** *Se  $T$  é semi-simples, e seus auto-valores têm valor absoluto igual a 1.*

O seguinte lema é análogo à 2.1.5.

**Lema 2.1.14.** *Sejam  $L, T$  dois endomorfismos de  $V$  que comutam.*

1. *Se ambos  $L, T$  forem semi-simples, ou elípticos multiplicativos ou hiperbólicos multiplicativos, então,  $LT$ , também será.*
2. *Se ambos  $L, T$  forem unipotentes, então  $LT$  é unipotente.*
3. *Se  $T$  é ao mesmo tempo semi-simples e unipotente então  $T = I$ .*
4. *Se  $T$  é elíptico multiplicativo e hiperbólico multiplicativo, então,  $T = I$ .*

*Demonstração.* Vamos demonstrar apenas o item (1). Assim como no lema 2.1.5, o fato de  $L$  e  $T$  comutarem implica por 2.1.4, que  $V_{\mathbb{C}}$  tem uma base composta por vetores que são auto-vetores comuns a  $L$  e  $T$ . Obviamente esses vetores são também auto-vetores de  $LT$ . E portanto  $LT$  é semi-simples.

Nesta mesma base, os auto-valores de  $LT$  são produtos de auto-valores de  $L$  e  $T$ . Portanto, se além de semi-simples, os auto-valores de  $L$  e  $T$  forem todos reais positivos (de norma 1), o mesmo acontece com os auto-valores de  $LT$ . Assim, se ambos forem hiperbólicos multiplicativos (elípticos multiplicativos), o produto  $LT$  também será.  $\square$

O seguinte resultado dá a descrição das componentes de Jordan multiplicativas como polinômios.

**Teorema 2.1.15.** *Seja  $g \in \text{Gl}(V)$  e faça  $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ . Então  $g$  pode ser escrito unicamente como um produto comutativo  $g = eh u$ , onde  $e$  é elíptico,  $h$  é hiperbólico e  $u$  é unipotente. E  $e, h$  e  $u$  são dados pelos seguintes polinômios reais:*

- $e = \sum_{k=1}^l |\lambda_k|^{-1} (\lambda_k P_k + \lambda_{l+k} P_{l+k}) + \sum_{k=2l+1}^n \lambda_k |\lambda_k|^{-1} P_k.$
- $h = \sum_{k=1}^n |\lambda_k| P_k.$

$$\bullet u = I + N \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k^{-1} P_k \right),$$

onde  $N$  é a componente nilpotente de  $g$ . Além disso, temos que  $h = e^H$ , onde

$$H = \sum_{k=1}^n \log(|\lambda_k|) P_k.$$

*Demonstração.* Pelo item (2) do lema 2.1.8, é imediato que  $e$  e  $h$  podem ser escritos por polinômios com coeficientes reais. Como  $\overline{\lambda_k^{-1} P_k} = \lambda_{l+k}^{-1} P_{l+k}$  para  $1 \leq k < l$ , e  $N$  pode ser escrito como um polinômio em  $T$  com coeficientes reais, segue a afirmação para  $u$ .

Pela demonstração do teorema 2.1.10, temos que  $g = S + N$ . Notando que  $u = I + NS^{-1}$ , temos  $Su = S + N = g$ . É imediato que  $S = eh$ , e que  $g = ehu$ . Como  $S, N$  comutam e  $N$  é nilpotente, segue que  $u$  é unipotente. É imediato que  $e$  é elíptico, que  $h$  é hiperbólico. Usando a base de auto-vetores de  $h$  em  $V_{\mathbb{C}}$  é imediato que  $h = e^H$ .

Para a unicidade, considere o produto comutativo  $g = \tilde{e}\tilde{h}\tilde{u}$ , com  $\tilde{e}$  elíptico,  $\tilde{h}$  hiperbólico e  $\tilde{u}$  unipotente. Defina  $\tilde{S} = \tilde{e}\tilde{h}$ . Como  $\tilde{e}$  e  $\tilde{h}$  comutam, pelo lema 2.1.14, temos que  $\tilde{S}$  é semi-simples. Como  $e, h, u$  são polinômios em  $g$ , eles comutam com  $\tilde{e}, \tilde{h}, \tilde{u}$ . Usando o fato que  $g = Su = \tilde{S}\tilde{u}$ , pelo lema 2.1.14, temos que  $\tilde{S}^{-1}S = \tilde{u}u^{-1}$  é ambos semi-simples e unipotente e portanto,  $S = \tilde{S}$  e  $\tilde{u} = u$ . Agora, usando que  $S = eh = \tilde{e}\tilde{h}$ , pelo lema 2.1.14, temos que  $\tilde{e}^{-1}e = \tilde{h}h^{-1}$  é ambos, elíptico e hiperbólico, e portanto,  $e = \tilde{e}$  e  $h = \tilde{h}$ .  $\square$

## 2.2 Dinâmica no Projetivo

Nesta seção trataremos de um tipo específico de fluxo. Trataremos dos fluxos induzidos pela ação de transformações lineares em um espaço projetivo. Os conceitos e notação necessários podem ser consultados na seção A.4 do apêndice.

Dada uma matriz  $g \in \text{Gl}(n)$ , quando  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ , definimos o fluxo dado pela ação de  $g^t$ , com  $t \in \mathbb{T}$ , no espaço projetivo  $\mathbb{P}^{n-1}$ . Quando  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ , e  $g \in \text{Gl}(n)$  for tal que  $g = e^Y$  para algum  $Y \in \mathfrak{gl}(n)$ , definimos o fluxo dado pela ação de  $g^t = e^{tY}$ , com  $t \in \mathbb{T}$ , no espaço projetivo  $\mathbb{P}^{n-1}$ . Todos os fluxos desta seção são da forma mencionada acima. Neste caso, o elemento de  $\text{Gl}(n)$  em questão será em geral denotado por  $g$ , e sua decomposição de Jordan Multiplicativa por  $g = ehu$ . É importante fazer a correta distinção entre  $e$ , a parte elíptica da decomposição, e o símbolo  $e$ , que representa o *número de Euler*, base dos logaritmos naturais.

Dado um fluxo  $g^t \in \text{Gl}(V)$ , onde  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita, podemos utilizar a decomposição de Jordan multiplicativa de  $g^t$  para estudar sua dinâmica sobre o espaço projetivo  $\mathbb{P}V$ . Nesta seção, iremos caracterizar a decomposição de Morse minimal de  $g^t$  e determinar os conjuntos  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}^C$ .

**Lema 2.2.1.** *Seja  $e \in \text{Gl}(V)$ , elíptica. Então podemos escolher uma norma para  $V$ , tal que  $e^t$  é uma isometria para todo  $t$ .*

*Demonstração.* Como  $e$  é elíptica, então existe uma base de auto-vetores de  $v_i$  de  $e$  em  $V_{\mathbb{C}}$ . Vamos definir a seguinte norma em  $V_{\mathbb{C}}$ :

$$|v| = \max|\alpha_i|, \text{ para } v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

Como todos os auto-valores de  $e^t$  têm norma 1, e  $v_i$  são auto-vetores de  $e^t$ , temos que  $e^t$  é uma isometria nesta norma. Basta então restringir a norma a  $V$ . A restrição de  $e^t$  a  $V$  continua sendo uma isometria.  $\square$

**Observação 2.2.2.** Se  $e$  e  $h$  são as componentes elíptica e hiperbólica da decomposição de Jordan de  $g$ , então, por 2.1.4, da mesma forma que na demonstração de 2.1.5, podemos escolher uma base  $v_i$  de  $V_{\mathbb{C}}$  de modo que seja formada por auto-vetores de  $e$  e  $h$  ao mesmo tempo. A norma do máximo definida por esta base é tal que  $|h^t| = \max\{|\lambda|^t \mid \lambda \text{ é auto-valor de } h\} = \max\{|\lambda|^t \mid \lambda \text{ é auto-valor de } g\}$ .

**Observação 2.2.3.** Se  $V$  é um espaço normado (definição A.1.12) com norma  $|\cdot|$ , utilizamos  $|\cdot|$  também para denotar a norma de um operador linear sobre  $V$ . Ou seja,  $|\cdot|$  é também uma norma sobre  $\mathfrak{gl}(V)$ . (Veja definição A.1.14.)

No caso de  $V$  ter dimensão finita,  $\mathfrak{gl}(V)$  também tem. Por isso, podemos falar de convergência em  $V$  ou  $\mathfrak{gl}(V)$ , como sendo convergência em qualquer norma, já que todas são equivalentes.

**Lema 2.2.4.** *Seja  $V = U \oplus W$  e  $v_n = u_n + w_n$  uma seqüência, tal que  $u_n \in U$  e  $w_n \in W$ . Suponha também que  $u_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e que  $\lim \frac{w_n}{|u_n|} = 0$ . Considerando o espaço projetivo, se  $[v_n] \in \mathbb{P}V$  converge a  $[v] \in \mathbb{P}V$ , então  $[v] \in \mathbb{P}U$ .*

*Demonstração.* Existe uma subseqüência convergente  $\frac{u_{n_k}}{|u_{n_k}|} \rightarrow u \in U$ , pois  $\frac{u_n}{|u_n|}$  está na esfera, que é compacta; e  $U$  é fechado.

Como  $[v_{n_k}] = \left[ \frac{v_{n_k}}{|u_{n_k}|} \right] = \left[ \frac{u_{n_k}}{|u_{n_k}|} + \frac{w_{n_k}}{|u_{n_k}|} \right]$  e  $\lim \frac{w_{n_k}}{|u_{n_k}|} = 0$ , temos que

$$[v] = \lim_{k \rightarrow \infty} [v_{n_k}] = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{u_{n_k}}{|u_{n_k}|} + \frac{w_{n_k}}{|u_{n_k}|} \right] = [u] \in \mathbb{P}U.$$

Onde a última igualdade vem da continuidade da projeção  $[\cdot]$ . □

**Lema 2.2.5.** *Dada uma norma  $|\cdot|$  em  $V$ . Se  $h = I$ , então, para cada  $v \neq 0$  existe  $\varepsilon_v > 0$  tal que  $|g^t v| > \varepsilon_v$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .*

*Demonstração.* Como todas as normas em  $V$  são equivalentes, basta provar para uma norma específica. Podemos então assumir que  $|\cdot|$  é a norma definida em 2.2.2. Nesta norma,  $|g^t| = |e^t u^t| = |u^t|$ .

Em uma base apropriada,  $u$  é escrita como uma matriz triangular superior com valor 1 na diagonal, já que qualquer transformação nilpotente, em uma base apropriada, pode ser escrita como uma matriz triangular superior com valor 0 na diagonal. Escreva  $v$  nesta base como  $v = (v_1, \dots, v_k, 0, \dots, 0)$ , onde  $v_k$  é a última coordenada não nula de  $v$ . Então,  $u^t$  fixa a última coordenada  $v_k$  de  $v$ . Dessa forma, se denotarmos por  $|\cdot|_u$  a norma euclidiana relativa a esta base, teremos que  $|u^t v|_u \geq |v_k|$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

As normas  $|\cdot|_u$  e  $|\cdot|$  são equivalentes. Ou seja, existe  $C > 0$  tal que  $|g^t v| = |u^t v| \geq C |u^t v|_u \geq C |v_k|$ . Basta tomar  $\varepsilon_v < C |v_k|$ . □

**Lema 2.2.6.** *Se todos os auto-valores de  $g$  tiverem valor absoluto menor que 1, então  $g^t \rightarrow 0$  (convergência em norma) quando  $t \rightarrow \infty$ .*

*Demonstração.* Sejam  $g^t = e^t h^t u^t$  a decomposição de Jordan de  $g^t$  e  $|\cdot|$  a norma definida em 2.2.2. Nesta norma,  $|e^t| = 1$  e  $|h^t| \leq |h|^t$  para  $t \geq 1$ .

Como  $u$  é unipotente, por A.5.4, temos que  $u = e^N$  para uma transformação nilpotente  $N$ . Assim, existe  $k \in \mathbb{N}$  com

$$u^t = e^{tN} = I + tN + \dots + (tN)^k / k!.$$

Como  $|N^l| \leq |N|^l$ , segue que para  $v \in V$ ,

$$|u^t v| \leq |v| (1 + |N|t + \dots + (|N|^k / k!) t^k) = |v| p(t),$$

onde  $p(t)$  é um polinômio em  $t$ . Desta forma,  $|u^t| \leq p(t)$ , e portanto,

$$|g^t| \leq |e^t| |h^t| |u^t| \leq |h|^t p(t) \rightarrow 0,$$

quando  $t \rightarrow \infty$ , pois, por hipótese,  $|h| < 1$ . □

**Lema 2.2.7.** *Seja  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$  a decomposição de  $V$  em auto-espacos de  $h$ , associados aos auto-valores  $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > 0$ . Seja  $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ ,  $v \neq 0$ , com  $v_i \in V_i$ . Tome  $i$  como sendo o primeiro índice tal que  $v_i \neq 0$ , e  $j$  como o último índice tal que  $v_j \neq 0$ . Então,*

$$\begin{aligned}\omega([v]) \subset \mathbb{P}V_k &\Leftrightarrow k = i \\ \omega^*([v]) \subset \mathbb{P}V_k &\Leftrightarrow k = j.\end{aligned}$$

*Demonstração.* Vamos demonstrar a implicação ( $\Leftarrow$ ). Denote a restrição de  $\frac{g}{\lambda_i}$  a  $V_k$  por  $g_k$ . Temos que os auto-valores de  $g_k$  têm norma menor que 1 para  $k > i$ , e  $g_i$  tem a parte hiperbólica igual à identidade. Por 2.2.6 temos que para  $k > i$ ,  $|g_k^t v_k| \leq |g_k^t| |v_k| \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . Por 2.2.5, temos que  $|g_i v_i| \geq \varepsilon$  para algum  $\varepsilon > 0$ .

Agora, seja  $[w] \in \omega([v])$ . Existe  $t_j \rightarrow \infty$  tal que  $\lim_{j \rightarrow \infty} g^{t_j} [v] = [w]$ . Então

$$\left[ g_i^{t_j} v_i + \sum_{k>i} g_k^{t_j} v_k \right] = g^{t_j} [v] \rightarrow [w].$$

Assim, por 2.2.4, segue que  $[w] = \lim_{j \rightarrow \infty} [g^{t_j} v_i] \in \mathbb{P}V_i$ . A demonstração para  $\omega^*([v])$  é análoga.

Para a implicação ( $\Rightarrow$ ), se  $k \neq i$ , então  $\omega([v]) \cap \mathbb{P}V_k = \emptyset$ , pois já sabemos que  $\omega([v]) \subset \mathbb{P}V_i$ , mas  $\mathbb{P}V_i$  e  $\mathbb{P}V_k$  são disjuntos.  $\square$

Utilizando este lema, vamos mostrar que os auto-espacos projetivos da parte hiperbólica de  $g^t$  formam componentes de Morse do fluxo  $g^t$  no projetivo.

**Proposição 2.2.8.** *A família  $\{\mathbb{P}V_1, \dots, \mathbb{P}V_n\}$  é uma decomposição de Morse.*

*Demonstração.* Os conjuntos  $\mathbb{P}V_k$  são obviamente compactos, não vazios e dois a dois disjuntos. Para ver que são invariantes, observe que, como  $g^t$  e  $h^t$  comutam, para todo  $v_k \in V_k$ ,

$$h^t g^t v_k = g^t h^t v_k = \lambda_k g^t v_k.$$

Portanto,  $g^t v_k$  está em  $\mathbb{P}V_k$ , o auto-espaco de  $h^t$  associado ao auto-valor  $\lambda_k$ . Ou seja,  $\mathbb{P}V_k$  é invariante por  $g^t$ .

Vamos verificar cada item da definição 1.5.2. Por 2.2.7 temos o item (1). Novamente por 2.2.7, temos que se  $\omega(x), \omega^*(x) \in \mathbb{P}V_i$ , então  $x = v_i$  para algum  $v_i \in V_i$ . Ou seja,  $x \in \mathbb{P}V_i$ . Mostrando a validade do item (2) da definição de decomposição de Morse.

Finalmente, por 2.2.7, temos ainda que se  $\omega(x) \in \mathbb{P}V_i$  e  $\omega^*(x) \in \mathbb{P}V_j$ , então,  $i \leq j$ . Assim, o item (3) fica demonstrado pelas observações feitas em 1.5.3.  $\square$

A decomposição de Morse acima é na verdade a decomposição minimal. Para mostrar tal fato vamos precisar considerar o comportamento da componente unipotente de  $g^t$ . O seguinte lema é uma generalização do comportamento do fluxo  $e^{tN}$  da matriz nilpotente

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

sobre a linha projetiva. Veja figura 1.2.

**Lema 2.2.9.** *Sejam  $w \neq 0$  um vetor, e  $N$  uma transformação nilpotente. Se  $k$  é tal que  $N^{k+1}w = 0$  e  $v = N^k w \neq 0$ , então  $e^{tN}[w] \rightarrow [v]$ , quando  $t \rightarrow \pm\infty$ , onde  $t \in \mathbb{T}$ . Além disso,  $e^{tN}v = v$ , para todo  $t \in \mathbb{T}$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, note que

$$e^{tN}v = \left( \sum_{j \geq 0} \frac{t^j}{j!} N^j \right) N^k w = v + \sum_{j \geq 1} \frac{t^j}{j!} N^{k+j} w = v.$$

Como

$$e^{tN}[w] = \left[ w + tN + \cdots + \frac{t^k}{k!} v \right],$$

multiplicando por  $k!/t^k$ , temos que

$$e^{tN}[w] = \left[ v + \frac{k!}{t^k} \left( tNw + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^{k-1}w \right) \right] \rightarrow [v]$$

quando  $t \rightarrow \pm\infty$ , onde  $t \in \mathbb{T}$ . □

Agora podemos finalmente obter a desejada caracterização da decomposição de Morse minimal.

**Teorema 2.2.10.** *Seja  $g \in \text{Gl}(V)$ , onde  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita. Seja  $g = eh$  a decomposição de Jordan multiplicativa de  $g$ . E seja  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$  a decomposição de  $V$  nos auto-espacos de  $h$  associados aos auto-valores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .*

*Neste caso, cada  $\mathbb{P}V_i$  é transitivo por cadeias e  $\{\mathbb{P}V_1, \dots, \mathbb{P}V_n\}$  é a decomposição de Morse minimal de  $g^t$ . Em particular, o conjunto recorrente por cadeias de  $\mathbb{P}V$  é dado por*

$$\mathcal{R}^C(g^t) = \text{fix}(h^t) = \bigcup_i \mathbb{P}V_i.$$

*Demonstração.* Como  $\mathbb{P}V_i$  é conexo, por 1.7.12, basta mostrar que  $\mathbb{P}V_i$  é recorrente por cadeias. Note que a segunda igualdade na equação acima é imediata, já que  $V_i$  são os auto-espços de  $h$ . Por 2.2.8 e por 1.8.3, temos que  $\mathcal{R}^C(g) \subset \text{fix}(h^t)$ .

Vamos mostrar que  $\text{fix}(h^t)$  é recorrente por cadeias. A restrição de  $g^t$  a  $\text{fix}(h^t)$  é dada por  $e^t u^t$ . Por 2.2.1, podemos escolher uma norma para  $V$ , onde  $e^t$  é uma isometria para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Esta métrica induz uma métrica em  $\mathbb{P}V$  tal que  $e^t$  é isometria em  $\mathbb{P}V$ . Por 2.2.9 e 1.7.14 aplicados a  $u^t$  e  $e^t$ , segue que  $g^t$  é recorrente por cadeias em  $\text{fix}(h^t)$ .  $\square$

A decomposição de Jordan multiplicativa também determina os pontos que são não somente recorrentes por cadeias, mas que são também recorrentes. A situação da figura 1.2 sugere que para um ponto recorrente por cadeias no espaço projetivo ser também recorrente, é necessário que a ação da parte unipotente seja trivial. O teorema seguinte formaliza essa intuição.

**Teorema 2.2.11.** *Seja  $g \in \text{Gl}(V)$ , onde  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita. Neste caso, o conjunto recorrente de  $g^t$  em  $\mathbb{P}V$  é dado por*

$$\mathcal{R}(g^t) = \text{fix}(h^t) \cap \text{fix}(u^t).$$

*Demonstração.* Seja  $[v]$  tal que  $[v] \in \omega([v])$ . Pelo teorema 2.2.10, temos que  $[v] \in \text{fix}(h^t)$ . Seja  $t_j \rightarrow \infty$  tal que  $g^{t_j}[v] \rightarrow [v]$ . Como  $e^t$  é elíptico, por 2.2.1,  $e^t$  está contido em um subconjunto compacto (a esfera, na norma de 2.2.1). Portanto, podemos assumir que  $e^{t_j} \rightarrow \tilde{e}$ . Note que  $\tilde{e}$  comuta com as componentes de Jordan de  $g$ . Por 2.2.9, existe um ponto fixo  $[w]$  de  $u^t$  tal que  $u^{t_j}[v] \rightarrow [w]$ . Como  $g^{t_j} = e^{t_j} u^{t_j} h^{t_j}$ , segue que

$$[v] = \lim g^{t_j}[v] = \lim e^{t_j} u^{t_j}[v] = \tilde{e}[w].$$

O teorema segue, pois como  $\tilde{e}$  comuta com  $u^t$  e  $[w]$  é ponto fixo de  $u^t$ , temos que  $u^t[v] = u^t \tilde{e}[w] = \tilde{e} u^t[w] = \tilde{e} u^t[v]$ . ou seja,  $[v] \in \text{fix}(u^t)$ .  $\square$

**Exemplo 2.2.12.** No exemplo 2.1.12, escolhendo uma base adequada, conseguimos descrever todos os elementos de  $\mathfrak{sl}(3)$ .

Seja  $g^t$  o fluxo sobre o espaço projetivo, gerado pelo elemento  $g = e^{X_n} \in \text{Sl}(3)$ . Este fluxo é a projetivização do fluxo  $(v, t) \mapsto e^{tX_n}v$  sobre  $\mathbb{R}^3$ . Fixado  $v$ ,  $e^{tX_n}v$  é a curva tal que em cada ponto  $v'$ , a tangente é dada por  $X_n v'$ . O fluxo induzido na esfera é portanto, tal que a tangente às curvas integrais em cada ponto são dadas pela componente de  $X_n v'$  ortogonal a  $v'$ . Com esta informação foi feito o esboço dos casos  $X_4$  e  $X_5$  na figura 2.1.

Para  $X_1$ , existe apenas a parte hiperbólica de  $g$ , e portanto  $\mathcal{R}(g^t) = \mathcal{R}^C(g^t)$ . Se todos os auto-valores forem distintos, a decomposição de Morse



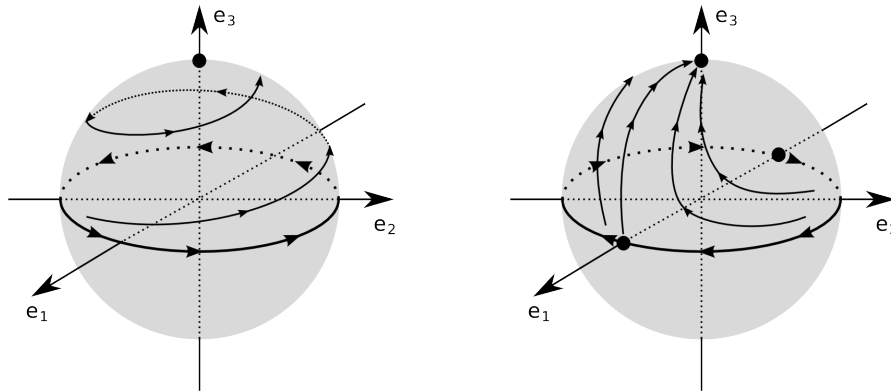


Figura 2.1: Fluxos gerados pela exponenciação de  $X_4$  (esquerda) e  $X_5$  (direita) para  $a, b > 0$ .

minimal possui três componentes:  $[e_1]$ ,  $[e_2]$  e  $[e_3]$ . Se dois auto-valores forem iguais, admitindo sem perda de generalidade que  $a = b$ , existem duas componentes de Morse da decomposição minimal:  $[\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2]$  e  $[e_3]$ .

Para  $X_3$ ,  $e^{X_3} = I + X_3$ . Existe apenas a parte unipotente. Portanto, todos os pontos são recorrentes por cadeias. Por conseqüência, a única decomposição de Morse é a decomposição trivial. Os pontos recorrentes são  $[\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2]$ . O caso  $X_2$  é análogo. (Veja figura 1.2.)

Para o caso  $X_4$ ,  $g^t$  não possui componente unipotente. Portanto, os pontos recorrentes e recorrentes por cadeias são os mesmos. A decomposição de Morse minimal é dada por  $[\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2]$  e  $[e_3]$ . A diferença entre os casos  $X_4$  e  $X_5$ , é que para o caso  $X_5$ , os pontos  $[\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2] \setminus [e_1]$  não são recorrentes, mas são recorrentes por cadeias. No entanto, a decomposição de Morse minimal dos dois casos é idêntica. (Veja a figura 2.1.)

# Capítulo 3

## Dinâmica em Flags

Podemos estender as decomposições de Jordan obtidas no capítulo 2 ao contexto de álgebras e grupos de Lie semi-simples para então estudarmos fluxos induzidos pela ação de subgrupos de  $\text{Gl}(V)$  em subconjuntos das grasmannianas  $\text{Gr}_d(V)$ . Esta é uma situação mais geral que a do capítulo 2. Os conceitos e notação utilizados neste capítulo estão resumidos nas seções A.5 do apêndice. A teoria geral de grupos e álgebras de Lie pode ser consultada em [Kna02] ou [Var74]. Ao final, na seção 3.3, vamos utilizar essa generalização para analisar soluções de equações diferenciais sobre um grupo de Lie  $G = \text{Int}(\mathfrak{g})$ , onde  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra de Lie semi-simples

$$g'(t) = X(t)g(t),$$

onde  $X : \mathbb{T} \rightarrow \mathfrak{g}$  é contínua e  $T$ -periódica. Veja A.5.14 para definição de  $\text{Int}(\mathfrak{g})$ .

### 3.1 Decomposição de Jordan

Os conceitos e notação utilizados nesta seção estão resumidos em A.5. As representações adjuntas  $\text{ad}$  e  $\text{Ad}$  estão definidas em A.5.9. Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie semi-simples e  $G$  um grupo de Lie com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Seja  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  a representação adjunta de  $\mathfrak{g}$  e  $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Gl}(\mathfrak{g})$  a representação adjunta de  $G$ . Para  $X \in \mathfrak{g}$ , dizemos que  $X = E + H + N$  é uma decomposição de Jordan abstrata de  $X$  se  $\text{ad}(E) + \text{ad}(H) + \text{ad}(N)$  é a decomposição de Jordan aditiva de  $\text{ad}(X)$ . Repare que para  $\mathfrak{g}$  semi-simples,  $\text{ad}$  é injetiva, garantindo a unicidade da decomposição abstrata. Para  $g \in G$ , dizemos que  $g = ehu$  é uma decomposição de Jordan abstrata de  $g$  se  $\text{Ad}(e)\text{Ad}(h)\text{Ad}(u)$  é a decomposição de Jordan multiplicativa de  $\text{Ad}(g)$ . Nosso objetivo nesta

seção é mostrar que, para um elemento  $X$  de uma álgebra de Lie semi-simples  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$  (ou um elemento  $g$  de um grupo de Lie semi-simples conexo  $G \subset \text{Gl}(V)$ ), a decomposição de Jordan usual é uma decomposição de Jordan abstrata.

### 3.1.1 Caso Aditivo: álgebra de lie semi-simples

Vamos obter a decomposição de Jordan Aditiva para álgebras de Lie semi-simples  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ . E vamos mostrar que cada componente está em  $\mathfrak{g}$ . Para  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$  temos que  $\text{ad}(X)Y = XY - YX$ . Seja  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$  uma álgebra de Lie semi-simples. Vamos denotar por  $\mathfrak{n}(\mathfrak{g})$  o normalizador de  $\mathfrak{g}$  em  $\mathfrak{gl}(V)$ . Ou seja,

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) : \text{ad}(X)\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}\}.$$

Por definição,  $\mathfrak{g}$  é um ideal em  $\mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ . E em particular,  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ .

Considere a representação  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_{\mathbb{C}})$ , de  $\mathfrak{g}$  em  $V_{\mathbb{C}}$ , dada por

$$\rho(X)(u + iv) = Xu + iXv, \quad (3.1)$$

onde  $u + iv$  é um elemento qualquer de  $V_{\mathbb{C}}$ .

**Observação 3.1.1.** Quando o contexto for claro, omitiremos a representação  $\rho$ , e trataremos indistintamente os elementos de  $\mathfrak{g}$  como se fossem elementos de  $\mathfrak{gl}(V_{\mathbb{C}})$ . Em particular, se  $W \subset V_{\mathbb{C}}$  for um subespaço invariante por  $\rho(\mathfrak{g})$ , diremos que  $W$  é invariante por  $\mathfrak{g}$ , e para  $X \in \mathfrak{g}$ , usaremos  $X|_W$ , ao invés de  $\rho(X)|_W$ .

Como  $\mathfrak{g}$  é semi-simples e  $V_{\mathbb{C}}$  tem dimensão finita, pelo teorema de decomposição de Weyl (A.5.16), temos que existem subespaços  $V_1, \dots, V_m$  tais que

$$V_{\mathbb{C}} = V_1 \oplus \dots \oplus V_m \quad (3.2)$$

onde cada  $V_k$ ,  $1 \leq k \leq m$  é invariante e irredutível por  $\rho(\mathfrak{g})$ . Para cada  $k = 1, \dots, m$ , denote por  $\mathfrak{g}_k$  a sub-álgebra de  $\mathfrak{gl}(V)$  dada por

$$\mathfrak{g}_k = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid XV_k \subset V_k, \text{tr}(X|_{V_k}) = 0\}. \quad (3.3)$$

**Lema 3.1.2.** *Temos que  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_k$ .*

*Demonstração.* Por A.5.15, o fato de  $\mathfrak{g}$  ser semi-simples implica que  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ . Como  $V_k$  é invariante por cada elemento de  $\mathfrak{g}$ , a aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(V_k) \\ X &\mapsto X|_{V_k} \end{aligned}$$

é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Temos que  $f(\mathfrak{g}) = f([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = [f(\mathfrak{g}), f(\mathfrak{g})]$ . Mas como para  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ,  $[f(X), f(Y)]$  tem traço 0, e  $f(\mathfrak{g}) = [f(\mathfrak{g}), f(\mathfrak{g})]$  é gerado por elementos dessa forma, temos que para todo  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $f(X)$  tem traço 0. Ou seja,  $\text{tr}(X|_{V_k}) = 0$ , e portanto,  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_k$ .  $\square$

Assim, se denotarmos por  $\tilde{\mathfrak{g}}$  a sub-álgebra de  $\mathfrak{gl}(V)$  dada por

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{n}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{g}_m, \quad (3.4)$$

teremos que  $\mathfrak{g}$  é um ideal de  $\tilde{\mathfrak{g}}$ , pois  $\tilde{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ .

**Lema 3.1.3.** *Temos que  $\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}}$ .*

*Demonstração.* Por 3.1.2 já sabemos que  $\mathfrak{g} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$ .

A restrição da representação adjunta  $\text{ad} : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\tilde{\mathfrak{g}})$  a  $\mathfrak{g}$  é uma representação  $\text{ad}|_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\tilde{\mathfrak{g}})$  de  $\mathfrak{g}$  em  $\tilde{\mathfrak{g}}$ . Pelo teorema de decomposição de Weyl (A.5.16), como  $\mathfrak{g}$  é semi-simples e  $\tilde{\mathfrak{g}}$  tem dimensão finita, então  $\text{ad}|_{\mathfrak{g}}$  é completamente redutível. Como  $\mathfrak{g}$  é invariante por  $\text{ad}|_{\mathfrak{g}}$ , existe um subespaço  $\mathfrak{h} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$  invariante por  $\text{ad}|_{\mathfrak{g}}$ , tal que

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}.$$

O fato de  $\mathfrak{g}$  ser um ideal de  $\tilde{\mathfrak{g}}$  implica que  $\text{ad}|_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ . Por outro lado,  $\mathfrak{h}$  é invariante por  $\text{ad}|_{\mathfrak{g}}$ . Isso implica que  $\text{ad}|_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$ . Ou seja,  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = 0$ , e todo elemento  $X \in \mathfrak{g}$  comuta com todo elemento  $Y \in \mathfrak{h}$ . Portanto,  $\rho(X)$  comuta com  $\rho(Y)$ . Pelo lema de Schur, existe  $c \in \mathbb{C}$  tal que  $\rho(Y)|_{V_k} = cI_k$ , onde  $I_k$  é a identidade em  $V_k$ . Como  $\tilde{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g}_k$ , temos que

$$0 = \text{tr}(\rho(Y)|_{V_k}) = \text{tr}(cI_k) = c \dim V_k.$$

E portanto,  $c = 0$  e  $\rho(Y)|_{V_k} = 0$ . Como  $k$  era arbitrário,  $\rho(Y) = 0$ , e portanto,  $Y = 0$ . Assim,  $\mathfrak{h} = \{0\}$ . Ou seja,  $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$ .  $\square$

**Teorema 3.1.4.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma sub-álgebra de Lie semi-simples de  $\mathfrak{gl}(V)$ , e  $X \in \mathfrak{g}$ . Então, as componentes de Jordan de  $X$  estão em  $\mathfrak{g}$ .*

*Demonstração.* Seja  $X = E + H + N$  a decomposição de Jordan aditiva de  $X$ . Vamos mostrar que cada componente de Jordan de  $X$  está em  $\tilde{\mathfrak{g}}$ . E por 3.1.3 teremos que as componentes estarão em  $\mathfrak{g}$ .

Pelo lema 3.1.5, temos que  $\text{ad}(X) = \text{ad}(E) + \text{ad}(H) + \text{ad}(N)$  é a decomposição de Jordan aditiva de  $\text{ad}(X)$ . Por hipótese,  $X \in \mathfrak{g}$ . Isso significa que para todo  $Y \in \mathfrak{g}$ ,  $\text{ad}(X)Y \in \mathfrak{g}$ . Pelo teorema 2.1.10, segue que cada uma das

componentes de Jordan de  $\text{ad}(X)$  é um polinômio real em  $\text{ad}(X)$ . Portanto, para todo  $Y \in \mathfrak{g}$ ,  $\text{ad}(E)Y, \text{ad}(H)Y, \text{ad}(N)Y \in \mathfrak{g}$ . Ou seja,  $E, H, N \in \mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ .

Basta agora mostrar que  $E, H, N \in \mathfrak{g}_k$ . Como  $X \in \mathfrak{g}$ , pela definição de  $V_k$ , sabemos que  $V_k$  é invariante por  $X$ . Como  $E, H$  e  $N$  são polinômios em  $X$ , temos que  $V_k$  é invariante por  $E, H$  e  $N$ .

Vamos mostrar que  $\text{tr}(E|_{V_k}) = \text{tr}(H|_{V_k}) = \text{tr}(N|_{V_k}) = 0$ . Como  $N$  é nilpotente,  $N|_{V_k}$  também é. E portanto,  $\text{tr}(N|_{V_k}) = 0$ , e  $N \in \mathfrak{g}_k$ . Como  $X \in \mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}}$ ,  $\text{tr}(E|_{V_k}) + \text{tr}(H|_{V_k}) + \text{tr}(N|_{V_k}) = \text{tr}(X|_{V_k}) = 0$ . Assim,  $\text{tr}(E|_{V_k}) = -\text{tr}(H|_{V_k})$ . No entanto, Como  $E$  é elíptico, temos que  $E|_{V_k}$  também é. Assim,  $\text{tr}(E|_{V_k})$  é puramente imaginário. Do mesmo modo,  $\text{tr}(H|_{V_k})$  é real. Então,  $\text{tr}(E|_{V_k})$  e  $\text{tr}(H|_{V_k})$  são ao mesmo tempo reais e puramente imaginários. Temos então que  $\text{tr}(E|_{V_k}) = \text{tr}(H|_{V_k}) = 0$ . Ou seja,  $E, H \in \mathfrak{g}_k$ .  $\square$

**Lema 3.1.5.** *Seja  $X \in \mathfrak{gl}(V)$ , e  $X = E + H + N$  a decomposição de Jordan aditiva de  $X$ . Então  $\text{ad}(X) = \text{ad}(E) + \text{ad}(H) + \text{ad}(N)$  é a decomposição de Jordan de  $\text{ad}(X)$ .*

*Demonstração.* Pela unicidade da decomposição de Jordan, basta mostrar que  $\text{ad}(E)$ ,  $\text{ad}(H)$  e  $\text{ad}(N)$  comutam e são respectivamente elíptica, hiperbólica e nilpotente quando  $E, H$  e  $N$  o são.

Para ver que comutam, basta notar que  $\text{ad}$  é um homomorfismo de álgebras de Lie. Portanto,

$$[\text{ad}(E), \text{ad}(H)] = \text{ad}([E, H]) = \text{ad}(0) = 0.$$

Escolha uma base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de  $V_{\mathbb{C}}$  formada por auto-vetores de  $E$  (ou  $H$ ). Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  seus respectivos auto-valores puramente imaginários (reais). Considere a base de  $\mathfrak{gl}(V_{\mathbb{C}})$  dada por

$$T_{rs} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}} \quad , \\ v_k \mapsto \delta_{sk} v_r$$

onde  $\delta_{sk}$  é o delta de Kronecker. Neste caso,

$$\begin{aligned} ET_{rs}v_k &= E\delta_{sk}v_r \\ &= \lambda_r\delta_{sk}v_r \\ &= \lambda_r T_{rs}v_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{rs}Ev_k &= T\lambda_k v_k \\ &= \lambda_k\delta_{sk}v_r \\ &= \lambda_s\delta_{sk}v_r \\ &= \lambda_s T_{rs}v_k \end{aligned}$$

e portanto,

$$\text{ad}(E)T_{rs}v_k = (\lambda_r - \lambda_s)T_{rs}v_k.$$

Isso mostra que  $T_{rs}$  é auto-vetor de  $\text{ad}(E)$  associado ao auto-valor  $\lambda_r - \lambda_s$ . Portanto,  $\text{ad}(E)$  é elíptico ( $\text{ad}(H)$  é hiperbólico).

Para ver que  $\text{ad}(N)$  é nilpotente, basta notar que  $\text{ad}(N) = L_N - R_N$ , onde  $L_N : Y \mapsto NY$  e  $R_N : Y \mapsto YN$  são nilpotentes e comutam. Assim, por 2.1.5,  $\text{ad}(N)$  também é nilpotente.  $\square$

**Proposição 3.1.6.** *Se  $\mathfrak{g}$  é uma sub-álgebra de Lie semi-simples de  $\mathfrak{gl}(V)$ , então a decomposição de Jordan usual de  $X \in \mathfrak{g}$  é uma decomposição de Jordan abstrata.*

*Demonstração.* Seja  $X = E + H + N$  a decomposição de Jordan aditiva usual de  $X$ . Por 3.1.4, temos que  $E, H, N \in \mathfrak{g}$ . Por 3.1.5,  $E, H, N$  são também a decomposição de Jordan aditiva abstrata de  $X$ .  $\square$

### 3.1.2 Caso Multiplicativo: grupo de Lie semi-simples

O estudo da decomposição de Jordan abstrata multiplicativa de um grupo de Lie conexo  $G \subset \text{Gl}(V)$  com álgebra de Lie semi-simples  $\mathfrak{g}$ , sub-álgebra de  $\mathfrak{gl}(V)$  será análogo ao que foi realizado em 3.1.1. Fora a necessidade de usarmos alguns argumentos de geometria algébrica (veja 3.1.8), o fato de um grupo de Lie conexo ser gerado por exponenciais de elementos de sua álgebra, bem como as relações

$$\begin{aligned} e^{\text{ad}(X)} &= \text{Ad}(e^X) \\ \text{ad}(X) &= \left. \frac{d}{dt} \text{Ad}(e^{tX}) \right|_{t=0} \\ e^{\text{tr}(X)} &= \det(e^X), \end{aligned}$$

onde  $X \in \mathfrak{g}$  e  $t \in \mathbb{R}$  (veja A.5.10), nos permitem trabalhar de forma análoga ao que foi feito em 3.1.1. Em particular, definiremos abaixo um grupo  $N(\mathfrak{g})$  por analogia com  $\mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ , e também  $G_k$  analogamente a  $\mathfrak{g}_k$ .

O normalizador de  $\mathfrak{g}$  em  $\text{Gl}(V)$  é dado por:

$$N(\mathfrak{g}) = \{g \in \text{Gl}(V) \mid \text{Ad}(g)\mathfrak{g} = \mathfrak{g}\}.$$

Seja  $V_{\mathbb{C}} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ , a decomposição de  $V_{\mathbb{C}}$  invariante por  $\mathfrak{g}$  usada na seção 3.1.1. Para cada  $k = 1, \dots, m$ , defina  $G_k$  como o subgrupo de  $\text{Gl}(V)$  dado por

$$G_k = \{g \in \text{Gl}(V) \mid g(V_k) \subset V_k, \det(g|_{V_k}) = 1\}.$$

Considere o subgrupo de  $\text{Gl}(V)$  dado por

$$\tilde{G} = N(\mathfrak{g}) \cap G_1 \cap \cdots \cap G_m.$$

**Lema 3.1.7.** *Temos que  $G \subset G_k$ .*

*Demonstração.* Por ser conexo,  $G$  é gerado por elementos da forma  $e^X$ , com  $X \in \mathfrak{gl}(V)$ . Como  $e^X$  é uma série em  $X$ , e  $V_k$  é invariante por  $X$ ,  $V_k$  é também invariante por  $e^X$ . Portanto,  $V_k$  é invariante por  $G$ .

Note que  $e^{X|_W} = e^X|_W$ . Por 3.1.2, temos que  $\text{tr}(X|_W) = 0$ . É sabido que  $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$ . Portanto, temos que  $\det(e^{tX|_W})' = \text{tr}(tX|_W) = t \text{tr}(X|_W) = 0$ . Assim, o determinante de  $e^{tX|_W}$  é constante, e portanto,  $\det(e^{X|_W}) = \det(e^{0X|_W}) = \det(I) = 1$ .

A última afirmação segue dos resultados acima e da definição de  $G_k$ .  $\square$

**Lema 3.1.8.** *O subgrupo  $\tilde{G} \subset \text{Gl}(V)$  é algébrico.*

*Demonstração.* Basta mostrar que  $N(\mathfrak{g})$  e cada  $G_k$  são algébricos.

Para  $N(\mathfrak{g})$ , seja  $T \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$ , tal que  $\mathfrak{g} = \ker T$ . Dado  $g \in \text{Gl}(V)$ ,  $g \in N(\mathfrak{g})$  é equivalente a  $T(gXg^{-1}) = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{gl}(V)$ . O que por sua vez equivale a  $T(gXg^{-1} \det(g)) = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{gl}(V)$ . Sabemos que  $g^{-1} \det(g)$  é um polinômio em  $g$ . Dada uma base de  $\mathfrak{gl}(V)$ , e um  $X \in \mathfrak{gl}$  fixo, a  $n$ -ésima componente de  $T(gXg^{-1} \det(g))$  nesta base é um polinômio  $p_{n,X}(x_{ij})$ , onde  $g = (x_{ij})$  nesta base. Portanto, a condição  $T(gXg^{-1} \det(g)) = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{gl}(V)$  é algébrica, dada pelos polinômios  $p_{n,X}$ .

Para ver que cada  $G_k$  é algébrico, tome uma base de  $V_k$ ,  $\{v_1, \dots, v_l\}$ , e extenda a uma base de  $V_{\mathbb{C}}$ ,  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Seja  $z_{rs}(g)$ , a entrada  $(r, s)$  da matriz de  $g \in \text{Gl}(V)$  nesta base. A condição  $gV_k \subset V_k$  equivale a  $z_{rs}(g) = 0$  para  $r > l$  e  $s \leq l$ . E quando  $gV_k \subset V_k$ ,

$$\det(g|_{V_k}) = \det((z_{rs}(g))_{1 \leq r, s \leq l}).$$

Assim, a condição  $g \in G_k$  é polinomial.  $\square$

**Lema 3.1.9.** *A componente conexa da identidade de  $\tilde{G} \subset \text{Gl}(V)$  é  $G$ .*

*Demonstração.* Como  $G \subset \tilde{G}$  por 3.1.7, e  $G$  é conexo, basta mostrar que a álgebra de Lie de  $G$  contém a de  $\tilde{G}$ . Por 3.1.3, é suficiente mostrar que a álgebra de Lie de  $N(\mathfrak{g})$  está contida em  $\mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ , e a de  $G_k$  está contida em  $\mathfrak{g}_k$ .

Seja  $Y$  um elemento da álgebra de Lie de  $N(\mathfrak{g})$ . Então,  $e^{tY} \in N(\mathfrak{g})$  para todo  $t$ . Logo  $e^{t \text{ad}(Y)} \mathfrak{g} = \text{Ad}(e^{tY}) \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$ . Derivando em  $t = 0$ , temos que  $\text{ad}(Y) \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$ . Ou seja,  $Y \in \mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ .

Do mesmo modo, se  $Y$  é um elemento da álgebra de Lie de  $G_k$ , então  $e^Y \in G_k$ . Logo  $\det(e^{Y|_{V_k}}) = 1$ . É sabido que  $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$ . Portanto,  $\text{tr}(Y|_{V_k}) = 0$ . Ou seja,  $Y \in \mathfrak{g}_k$ .  $\square$

**Lema 3.1.10.** *Seja  $g \in \text{Gl}(V)$ , e  $g = ehu$  a decomposição de Jordan multiplicativa de  $g$ . Então  $\text{Ad}(g) = \text{Ad}(e) \text{Ad}(h) \text{Ad}(u)$  é a decomposição de Jordan de  $\text{Ad}(g)$ .*

*Demonstração.* Pela unicidade da decomposição de Jordan, basta mostrar que  $\text{Ad}(e)$ ,  $\text{Ad}(h)$  e  $\text{Ad}(u)$  são transformações respectivamente elíptica, hiperbólica e unipotente quando  $e$ ,  $h$  e  $u$  o são. Note que pela comutatividade de  $e$ ,  $h$  e  $u$  temos a comutatividade de  $\text{Ad}(e)$ ,  $\text{Ad}(h)$  e  $\text{Ad}(u)$ , pois  $\text{Ad}$  é um homomorfismo de grupos.

Seja  $\{v_1, \dots, v_n\}$  uma base de  $V_{\mathbb{C}}$  que diagonalize  $e$  e  $h$ . Considere a seguinte base de  $\mathfrak{gl}(V_{\mathbb{C}})$ :

$$\begin{aligned} T_{rs} : V_{\mathbb{C}} &\rightarrow V_{\mathbb{C}} \quad , \\ v_k &\mapsto \delta_{sk} v_r \end{aligned}$$

onde  $\delta_{sk}$  é o delta de Kronecker. Então,  $T_{rs}$  é uma base de auto-vetores de  $\text{Ad}(e)$  (ou  $\text{Ad}(h)$ ). De fato,

$$\begin{aligned} \text{Ad}(e)T_{rs}v_k &= eT_{rs}e^{-1}v_k = eT_{rs}\lambda_k^{-1}v_k = \lambda_k^{-1}\delta_{sk}ev_r \\ &= \lambda_r\lambda_s^{-1}\delta_{sk}v_r = \lambda_r\lambda_s^{-1}T_{rs}v_k. \end{aligned}$$

Onde  $\lambda_k$  é o auto-valor de  $e$  associado ao auto-espço  $V_k$ . Isso mostra que  $T_{rs}$  são auto-vetores de  $\text{Ad}(e)$  com auto-valor  $\lambda_r\lambda_s^{-1}$  de norma 1. O mesmo pode ser feito para  $h$ .

Para mostrar que  $\text{Ad}(u)$  é unipotente, note que por A.5.4,  $u = e^N$ , onde  $N \in \mathfrak{g}$  é nilpotente. Portanto,  $\text{Ad}(u) = \text{Ad}(e^N) = e^{\text{ad}(N)}$ . Pelo lema 3.1.5, temos que  $\text{ad}(N)$  é nilpotente e portanto,  $\text{Ad}(u)$ , como exponencial de uma aplicação nilpotente é unipotente.  $\square$

**Teorema 3.1.11.** *Seja  $G$  um sub-grupo de Lie semi-simples de  $\text{Gl}(V)$  e  $g \in G$ . Então as componentes de Jordan multiplicativas de  $g$  pertencem a  $G$ .*

*Demonstração.* Vamos mostrar que as componentes estão em  $\tilde{G}$ , e depois que estão na mesma componente conexa que a identidade. O resultado segue por 3.1.9.

Seja  $g = ehu$  a decomposição de Jordan multiplicativa de  $g$ . Por 3.1.10, temos que  $\text{Ad}(g) = \text{Ad}(e)\text{Ad}(h)\text{Ad}(u)$  é a decomposição de Jordan multiplicativa de  $\text{Ad}(g)$ . Pelo teorema 2.1.15, segue que cada componente de  $\text{Ad}(g)$  é um polinômio em  $\text{Ad}(g)$ . Como  $\text{Ad}(g)\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ , temos que  $\text{Ad}(e)\mathfrak{g} = \text{Ad}(h)\mathfrak{g} = \text{Ad}(u)\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ . Ou seja, todas as componentes estão em  $N(\mathfrak{g})$ .

Do mesmo modo, como  $V_k$  é invariante por  $g$  e as componentes de  $g$  são polinômios em  $g$ , temos que  $V_k$  é invariante por cada uma de suas componentes multiplicativas. Para mostrar que as componentes estão em  $G_k$ , basta então mostrar que  $\det(e|_{V_k}) = \det(h|_{V_k}) = \det(u|_{V_k}) = 1$ .

Sabemos que  $\det(u|_{V_k}) = 1$  é sempre verdade, pois  $u|_{V_k}$  é unipotente.



Como  $e$  é elíptico e  $h$ , hiperbólico, suas restrições ao subespaço invariante  $V_k$  também são. Assim,  $\det(e|_{V_k})$  é real e tem valor absoluto igual a 1, e  $\det(h|_{V_k})$  é real e positivo.

A identidade  $\det(e|_{V_k})\det(h|_{V_k})\det(u|_{V_k}) = \det(g|_{V_k}) = 1$  implica que  $\det(e|_{V_k}) = \det(h|_{V_k})^{-1}$ . Ou seja,  $\det(e|_{V_k}) = \det(h|_{V_k}) = 1$ , pois ambos são reais, positivos com valor absoluto igual a 1. Concluindo a demonstração de que as componentes de  $g$  estão em  $\tilde{G}$ .

Seja  $\beta = \{v_1, \dots, v_l\} \subset V_{\mathbb{C}}$  uma base de auto-vetores de  $h$  com auto-valores  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  positivos. Por 3.1.8,  $\tilde{G}$  é algébrico. Sejam  $Q_i$  os polinômios que nesta base definem  $\tilde{G}$ .

Vamos então mostrar que  $u = e^N$  está na componente conexa da identidade. Considere  $u^t = e^{tN}$ . Como  $N$  é nilpotente, temos que cada entrada  $(r, s)$  de  $u^t$  na base  $\beta$  é um polinômio  $p_{rs}(t)$ . Então,  $q_i(t) = Q_i(p_{rs}(t))$  são polinômios em  $t$  tais que para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $q_i(n) = Q_i(u^n) = 0$ , pois  $u^n \in \tilde{G}$ . Portanto,  $q_i = 0$  e  $Q_i(u^t) = q_i(t) = 0$ , implicando que para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $u^t \in \tilde{G}$ . Ou seja,  $u = u^1$  está na componente conexa da identidade  $I = u^0$ .

Para a componente hiperbólica, temos, pela última afirmação de 2.1.15, que  $h = e^H$ , onde  $H \in \mathfrak{gl}(V)$  é diagonal na base  $\beta$ , com auto-valores  $\log(\lambda_k)$ . Seja  $q_i(t) = Q_i(h^t)$ . Então  $q_i$  é uma soma da forma

$$\sum_n a_n b_n^t,$$

onde  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  e todos os  $b_n$  são distintos e maiores que zero. Se houver algum  $b_n > 1$  com  $a_n \neq 0$ , tome o maior deles. Então,  $q_i \rightarrow \pm\infty$  ( $t \rightarrow \infty$ ), conforme o sinal de  $a_n$ , contradizendo o fato de que para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $Q_i(h^n) = 0$ . Do mesmo modo, se houver algum  $b_n < 1$  com  $a_n \neq 0$ , tome o maior deles, e do mesmo modo, conclua que  $q_i \rightarrow \pm\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ), conforme o sinal de  $a_n$ , contradizendo o fato de que para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $Q_i(h^n) = 0$ . Assim, temos que  $q_i$  é constante igual a 0. Portanto, para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $Q_i(h^t) = 0$ . Ou seja, para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $h^t \in \tilde{G}$ . Em particular,  $h$  está na componente conexa da identidade de  $\tilde{G}$ .

Para  $e$ , basta notar que  $e = g(hu)^{-1}$ . Como  $g, h, u \in G$ , e  $G$  é um grupo, temos que  $e \in G$ .  $\square$

A seguinte proposição prova a existência da decomposição de Jordan multiplicativa abstrata em  $G$ . Mostra também que a decomposição usual e a abstrata coincidem.

**Proposição 3.1.12.** *Seja  $G$  um subgrupo de Lie conexo e semi-simples de  $\text{Gl}(V)$ . Então a decomposição de Jordan usual de  $g \in G$  é uma decomposição de Jordan abstrata.*

*Demonstração.* Pelo teorema 3.1.11, a decomposição usual está contida em  $G$ . E pelo lema 3.1.10, a decomposição usual é também a decomposição abstrata.  $\square$

## 3.2 Dinâmica em Órbitas Projetivas Compactas

Nesta seção, estudaremos a dinâmica das órbitas projetivas compactas. Esta classe inclui os chamados flags clássicos (veja 3.2.4) e as variedades flag (veja 3.2.5). Para mostrarmos que as órbitas projetivas compactas são uma classe que de fato inclui os flags, a principal ferramenta utilizada será o mergulho de Plücker (definição 3.2.7), que nos permitirá identificar o flag – de fato, a grasmaniana (definição A.4.17) – com uma órbita compacta de um espaço projetivo maior. Assim, precisaremos de uma notação adequada para que possamos fazer a correta distinção entre elementos da dinâmica em um espaço  $X$ , e a dinâmica em um subconjunto  $Y \subset X$ .

**Observação 3.2.1** (Dinâmica em subconjuntos). Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre o espaço  $X$ . E  $Y \subset X$  um subconjunto invariante. Neste caso,  $\phi^t|_Y$  é um fluxo sobre  $Y$ . Vamos utilizar o sub-índice  $Y$  para indicar que estamos considerando o fluxo  $\phi^t|_Y$ . Por exemplo,

$$\text{fix}_Y(\phi^t) = \{x \in Y \mid \forall t \in \mathbb{T}, x = \phi^t(x)\}$$

é o conjunto dos pontos fixos de  $\phi^t|_Y$ . O conjunto dos pontos recorrentes, e o conjunto dos pontos recorrentes por cadeias de  $\phi^t|_Y$  serão denotados por  $\mathcal{R}_Y$  e  $\mathcal{R}_Y^C$ , respectivamente.

Note que no caso de  $\text{fix}_Y$ , temos que  $\text{fix}_Y = \text{fix} \cap Y$ , mas que esse tipo de relação não vale em geral. Por exemplo,  $\mathcal{R}_Y^C = \mathcal{R}^C \cap Y$  só é válido quando todos os pontos recorrentes por cadeias de  $Y$  forem internamente recorrentes por cadeias.

**Notação** (Órbitas Projetivas Compactas). *Sejam  $\mathbb{F} \subset \mathbb{P}V$  um subconjunto compacto de  $\mathbb{P}V$ , e  $G \subset \text{Gl}(V)$  um grupo de Lie semi-simples agindo transitivamente em  $\mathbb{F}$ . Neste caso, dizemos que  $\mathbb{F}$  é uma órbita projetiva compacta ou uma  $G$ -órbita projetiva compacta.*

**Teorema 3.2.2.** *Seja  $g^t$  um fluxo em uma órbita projetiva compacta  $\mathbb{F}$ , e  $g^t = e^t h^t u^t$  sua decomposição de Jordan. Então o conjunto recorrente por cadeias de  $g^t$  em  $\mathbb{F}$  é dado por*

$$\mathcal{R}_{\mathbb{F}}^C(g^t) = \text{fix}_{\mathbb{F}}(h^t).$$

*Demonstração.* Como  $G$  é semi-simples, temos por 3.1.11 que cada componente de Jordan pertence a  $G$ . Portanto, faz sentido falar nos fluxos  $e^t$ ,  $h^t$  e  $u^t$  sobre  $\mathbb{F}$ . É imediato que

$$\mathcal{R}_{\mathbb{F}}^C(g^t) \subset \mathcal{R}^C(g^t) \cap \mathbb{F} = \text{fix}(h^t) \cap \mathbb{F} = \text{fix}_{\mathbb{F}}(h^t).$$

A inclusão é devido ao fato de que internamente recorrente por cadeias implica em recorrente por cadeias. E a primeira igualdade é o teorema 2.2.10.

Portanto, basta mostrar que

$$\text{fix}_{\mathbb{F}}(h^t) \subset \mathcal{R}_{\mathbb{F}}^C(g^t).$$

Ou seja, devemos mostrar que dados  $\varepsilon > 0$ ,  $s \in \mathbb{T}$  e  $x \in \text{fix}_{\mathbb{F}}(h^t)$ , existe uma  $(\varepsilon, s)$ -cadeia de  $x$  para  $x$ , onde todos os pontos dessa cadeia pertencem a  $\mathbb{F}$ . Note que na demonstração do teorema 2.2.10, a  $(\varepsilon, s)$ -cadeia construída (veja 1.7.14) é dada pelos pontos  $x, e^s u^{-s} x, x$ . Como  $\mathbb{F}$  é invariante por  $e^s$  e  $u^{-s}$ , temos que  $e^s u^{-s} x \in \mathbb{F}$ . Assim, todos os pontos da cadeia estão em  $\mathbb{F}$ .  $\square$

**Teorema 3.2.3.** *Seja  $g^t$  um fluxo em uma órbita projetiva compacta  $\mathbb{F}$ , e  $g^t = e^t h^t u^t$  sua decomposição de Jordan. Então o conjunto recorrente de  $g^t$  em  $\mathbb{F}$  é dado por*

$$\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(g^t) = \text{fix}_{\mathbb{F}}(h^t) \cap \text{fix}_{\mathbb{F}}(u^t).$$

*Demonstração.* Como  $G$  é semi-simples, temos por 3.1.11 que cada componente de Jordan pertence a  $G$ . Portanto, faz sentido falar nos fluxos  $e^t$ ,  $h^t$  e  $u^t$  sobre  $\mathbb{F}$ .

Note que  $\mathbb{F} \subset \mathbb{P}V$  é invariante e fechado. Portanto, pelo item (2) de 1.3.4, se  $x \in \mathbb{F}$ , então,  $\omega(x) \in \mathbb{F}$ . Assim,  $x \in \mathbb{F}$  é recorrente em  $\mathbb{F}$  se, e somente se, for recorrente em  $\mathbb{P}V$ . O resultado segue do teorema 2.2.11.  $\square$

**Notação** (Órbitas Grasmanianas Compactas). *Sejam  $\mathbb{E} \subset \text{Gr}_d(V)$  um subconjunto compacto de  $\text{Gr}_d(V)$ , e  $G \subset \text{Gl}(V)$  um grupo de Lie semi-simples agindo transitivamente em  $\mathbb{E}$ . Neste caso, dizemos que  $\mathbb{E}$  é uma órbita grasmaniana compacta ou uma  $G$ -órbita grasmaniana compacta.*

As órbitas projetivas compactas são obviamente órbitas grasmanianas compactas. Por outro lado, mostraremos em 3.2.17 que as órbitas grasmanianas compactas também podem ser vistas como órbitas projetivas compactas de um espaço maior. Em geral, será mais fácil demonstrar propriedades referentes às órbitas projetivas compactas. No entanto, é mais simples e direto mostrar que determinados conjuntos são órbitas grasmanianas compactas. É o que faremos nos exemplos a seguir.

**Exemplo 3.2.4** (Flags Clássicos). Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n$ . E dado  $k \leq n$ , seja

$$d = (d_0, d_1, \dots, d_k)$$

tal que  $d_0 = 0$ ,  $d_k = n$  e  $d_i < d_{i+1}$ . Considere a família  $\mathbb{F}_d$ , onde cada elemento é uma cadeia de subespaços vetoriais

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_k,$$

onde  $\dim(V_i) = d_i$ . Cada elemento de  $\mathbb{F}_d$  é chamado de um *flag clássico*. Dado um flag clássico  $x \in \mathbb{F}_d$ , podemos associar a  $x$  uma base ordenada  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $V$ , tal que  $(v_1, \dots, v_{d_k})$  seja uma base de  $V_k$ . Assim, por um abuso de notação, podemos dizer que  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{F}_d$ .

Vamos mostrar que os *flags clássicos* são órbitas grasmanianas compactas. Seja  $G = \text{Sl}(V) \subset \text{Gl}(V)$ . Definimos a ação (transitiva) de  $\text{Sl}(V)$  em  $\mathbb{F}_d$  por

$$g : \mathbb{F}_d \quad \rightarrow \quad \mathbb{F}_d \quad , \\ (v_1, \dots, v_n) \mapsto (gv_1, \dots, gv_n)$$

para cada  $g \in \text{Sl}(V)$ . Para mostrarmos que são órbitas grasmanianas compactas, precisamos primeiro identificar cada elemento de  $\mathbb{F}_d$  com um ponto de  $\text{Gr}_r(W)$  para algum  $r$  e algum espaço vetorial  $W$ . Tome  $W = \mathfrak{gl}(V)$ , o conjunto de todos os endomorfismos lineares de  $V$ . Agora, vamos identificar cada ponto  $v = (V_0 \subset \dots \subset V_k) \in \mathbb{F}_d$  com o subespaço  $W_v \subset W$  dado por

$$W_v = \{h \in W \mid hV_i \subset V_i, i = 0, \dots, k\}.$$

Note que, representando  $v$  por uma base ordenada  $(v_1, \dots, v_n)$ ,  $W_v$  é o conjunto das transformações lineares que nesta base assume o formato de uma “matriz escada” onde o  $k$ -ésimo degrau tem altura e largura  $d_k - d_{k-1}$ . Por exemplo, para  $d = (0, 2, 3, 4)$ , são as matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

O primeiro degrau (da esquerda para a direita) tem altura 2, o segundo e o terceiro têm altura 1. Assim, a dimensão de  $W_v$  depende apenas de  $d$ , e não de  $v$ . Portanto, fazendo  $r = \dim(W_v)$  para um  $v$  qualquer pertencente a  $\mathbb{F}_d$ , temos uma identificação de  $\mathbb{F}_d$  com um subconjunto de  $\text{Gr}_r(W)$ . A ação de  $\text{Sl}(V)$  em  $\text{Gr}_r(W)$ , dada por

$$g : \text{Gr}_r(W) \quad \rightarrow \quad \text{Gr}_r(W) \quad , \\ H \quad \mapsto \quad \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$$

é tal que

$$gW_v = W_{gv}.$$

A ação de  $\mathrm{Sl}(V)$  em  $\mathbb{F}_d$ , e consequentemente em  $\mathbb{E}$ , é transitiva, pois dados  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{F}_d$  e  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{F}_d$ , a transformação  $g$ , que leva  $v_i$  em  $w_i$ , tem determinante  $\pm 1$ . Se necessário, trocando  $v$  por  $(-v_1, v_2, \dots, v_n)$ , podemos assumir que o determinante de  $g$  é 1. Assim, temos que o conjunto

$$\mathbb{E} = \{W_v \mid v \in \mathbb{F}_d\} \subset \mathrm{Gr}_r(W)$$

forma uma órbita grasmaniana em  $\mathrm{Gr}_r(W)$ . Segue de A.4.13 que esta órbita é compacta, pois  $\mathrm{Sl}(V)$  é compacto e sua ação é transitiva.

**Exemplo 3.2.5** (Variedades Flag). Dado um grupo de Lie semi-simples  $G$  com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , e seja  $\mathfrak{p}$  uma sub-álgebra parabólica de  $\mathfrak{g}$  (veja [SM99] ou [Hum94]). Temos que  $\mathfrak{p} \in \mathrm{Gr}_d(\mathfrak{g})$ , onde  $d = \dim(\mathfrak{p})$ . A órbita adjunta de  $\mathfrak{p}$  em  $\mathrm{Gr}_d(\mathfrak{g})$ , dada por

$$\mathbb{F} = \mathrm{Ad}(G)\mathfrak{p} \subset \mathrm{Gr}_d(\mathfrak{g}),$$

é uma órbita projetiva compacta chamada de *variedade flag*. De fato, pode-se mostrar que existe um sub-grupo compacto  $K \subset G$  tal que  $KP = G$ , onde  $P = N(\mathfrak{p})$  é a isotropia da ação adjunta de  $G$  em  $\mathfrak{p}$ , denominado sub-grupo parabólico.

Os flags clássicos do exemplo 3.2.4, são variedades flag. Neste caso, os conjuntos  $W_v$  são uma sub-álgebra parabólica de  $\mathfrak{sl}(V)$ .

Nosso objetivo agora é mostrar que toda órbita grasmaniana compacta é também uma órbita projetiva compacta (3.2.17). Primeiramente, vamos construir um *mergulho* que identificará o conjunto  $\mathrm{Gr}_d(V)$  com um subconjunto de  $\mathbb{P}W$  para um certo  $W$ .

**Definição 3.2.6.** *Seja  $V$  um espaço vetorial e  $d \in \mathbb{N}$ . Vamos denotar por  $\bigwedge_d V = (\pi_\wedge, \bigwedge_d V)$  o produto exterior de  $V$ , onde  $\pi_\wedge : V^d \rightarrow \bigwedge_d V$  é uma aplicação  $d$ -linear alternada.*

*Denotamos  $\pi_\wedge(v_1, \dots, v_d)$  por  $v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ .*

O apêndice A.3 trata das propriedades que necessitaremos do produto exterior. De particular importância é a caracterização de  $(\pi_\wedge, \bigwedge_d V)$  dada em A.3.2.

**Definição 3.2.7** (Mergulho de Plücker). *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita. A seguinte aplicação  $i$  é chamada de Mergulho de Plücker.*

$$\begin{aligned} i : \mathrm{Gr}_d(V) &\rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge_d V) \\ x = \langle v_1, \dots, v_d \rangle &\mapsto [v_1 \wedge \dots \wedge v_d] \end{aligned} .$$

A proposição 3.2.8 mostra que a aplicação  $i$  está bem definida. E 3.2.14 mostra que  $i$  é de fato um mergulho.

**Proposição 3.2.8.** *O mergulho de Plücker da definição 3.2.7 está bem definido. Ou seja, se*

$$\langle v_1, \dots, v_d \rangle = \langle w_1, \dots, w_d \rangle,$$

então,

$$[v_1 \wedge \dots \wedge v_d] = [w_1 \wedge \dots \wedge w_d].$$

*Demonstração.* Escreva

$$v_i = \sum_{j_i=1}^d \alpha_{ij} w_j, \text{ onde } j_i = 1, \dots, d.$$

Então,

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_d = \left( \sum_{j_1=1}^d \alpha_{1j_1} w_{j_1} \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{j_d=1}^d \alpha_{dj_d} w_{j_d} \right).$$

Pela multilinearidade,

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_d = \sum_{j_1=1}^d \dots \sum_{j_d=1}^d (\alpha_{1,j_1} \dots \alpha_{d,j_d}) w_{j_1} \wedge \dots \wedge w_{j_d}.$$

Como  $w_{j_1} \wedge \dots \wedge w_{j_d} = 0$  quando para algum  $p \neq q$ ,  $j_p = j_q$ , podemos considerar apenas  $(j_1, \dots, j_d)$  da forma  $(\sigma(1), \dots, \sigma(d))$ , onde  $\sigma \in S_d$  é um elemento do grupo  $S_d$  de permutações dos inteiros de 1 a  $d$ . Então, pela alternância do produto exterior,

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \dots \wedge v_d &= \sum_{\sigma \in S_d} (\alpha_{1,\sigma(1)} \dots \alpha_{d,\sigma(d)}) w_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge w_{\sigma(d)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_d} (\alpha_{1,\sigma(1)} \dots \alpha_{d,\sigma(d)}) \text{sig}(\sigma) w_1 \wedge \dots \wedge w_d. \end{aligned}$$

Onde  $\text{sig}(\sigma)$  é o sinal da permutação  $\sigma$ . Portanto,

$$[v_1 \wedge \dots \wedge v_d] = [w_1 \wedge \dots \wedge w_d].$$

□

**Proposição 3.2.9.** *O mergulho de Plücker da definição 3.2.7 é injetivo.*

*Demonstração.* Sejam  $x = \langle v_1, \dots, v_d \rangle$  e  $y = \langle w_1, \dots, w_d \rangle$  elementos distintos de  $\text{Gr}_d(V)$  tais que  $[v_1 \wedge \dots \wedge v_d] = [w_1 \wedge \dots \wedge w_d]$ . Então existe  $\alpha \neq 0$ , tal que

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_d = \alpha(w_1 \wedge \dots \wedge w_d) = (\alpha w_1) \wedge \dots \wedge w_d.$$

Como  $\langle \alpha w_1, \dots, w_d \rangle = \langle w_1, \dots, w_d \rangle$ , podemos assumir sem perda de generalidade que

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_d = w_1 \wedge \dots \wedge w_d.$$

Como  $\langle v_1, \dots, v_d \rangle \neq \langle w_1, \dots, w_d \rangle$ , existe  $v = v_i \notin \langle w_1, \dots, w_d \rangle$ . Ou seja,  $w_1, \dots, w_d, v$  são linearmente independentes, e podem ser estendidos a uma base  $w_1, \dots, w_n$  de  $V$ , onde  $v = w_{d+1}$ . Vamos definir

$$\begin{aligned} \text{Det} : V^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (z_1, \dots, z_n) &\mapsto \det(A) \end{aligned} ,$$

onde  $z_i = \alpha_{i1}w_1 + \dots + \alpha_{id}w_d$  e  $A = [\alpha_{ij}]$ . Sabemos que  $\text{Det} : V^n \rightarrow \mathbb{R}$  é multilinear, e  $\text{Det}(z_1, \dots, z_n) = 0$  se, e somente se,  $z_1, \dots, z_n$  forem linearmente dependentes. Defina

$$\begin{aligned} \psi : V^d &\rightarrow \mathbb{R} \\ (z_1, \dots, z_d) &\mapsto \text{Det}(z_1, \dots, z_d, w_{d+1}, \dots, w_n) \end{aligned} .$$

Então,  $\psi$  é uma aplicação multilinear alternada partindo de  $V^d$ . Note que

$$\begin{aligned} \psi(w_1, \dots, w_d) &= \text{Det}(w_1, \dots, w_n) = 1, \\ \psi(v_1, \dots, v_d) &= \text{Det}(v_1, \dots, v_d, v, w_{d+2}, \dots, w_n) = 0. \end{aligned}$$

Em particular, por A.3.2 existe  $\tilde{\psi} : \bigwedge_d V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\psi = \tilde{\psi} \circ \pi_\wedge$ , e assim temos que  $\pi_\wedge(w_1, \dots, w_d) \neq \pi_\wedge(v_1, \dots, v_d)$ . Contradizendo a hipótese de que  $v_1 \wedge \dots \wedge v_d = w_1 \wedge \dots \wedge w_d$ .  $\square$

**Definição 3.2.10.** *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita. A representação canônica  $\rho : \text{Gl}(V) \rightarrow \text{Gl}(\bigwedge_d V)$  de  $\text{Gl}(V)$  em  $\text{Gl}(\bigwedge_d V)$ , onde  $\rho(g) : \bigwedge_d V \rightarrow \bigwedge_d V$  é a única aplicação linear tal que para todo  $(v_1, \dots, v_d) \in V^d$  satisfaz*

$$\rho(g)(v_1 \wedge \dots \wedge v_d) = (gv_1 \wedge \dots \wedge gv_d). \quad (3.5)$$

**Proposição 3.2.11.** *A representação canônica  $\rho : \text{Gl}(V) \rightarrow \text{Gl}(\bigwedge_d V)$  da definição 3.2.10 está bem-definida.*

*Demonstração.* Para cada  $g \in \text{Gl}(V)$ , de acordo com A.3.2, existe uma única  $\rho g$  que satisfaz a equação 3.5. Portanto,  $\rho g$  está bem definida.  $\square$

**Observação 3.2.12** (Convergência em dimensão finita). Em um espaço vetorial de dimensão finita  $V$ , as topologias *da norma*, *fraca* (A.1.16) e se for o caso, *fraca\** (A.1.17) coincidem. Assim, mostrar que  $v_n \in V$  converge para  $v \in V$  é equivalente a mostrar que para uma determinada base, cada componente de  $v_n$  converge para a componente equivalente de  $v$ . Quando  $V = \text{Gl}(W)$  tem dimensão finita, a equivalência entre as topologias citadas significa que  $g_n \in V$  converge para  $g \in V$  em qualquer uma dessas topologias se, e somente se, para uma determinada base  $w_1, \dots, w_d$  de  $W$ ,  $g_n(v_i) \rightarrow g(v_i)$ .

**Proposição 3.2.13.** *A representação canônica  $\rho : \text{Gl}(V) \rightarrow \text{Gl}(\bigwedge_d V)$  é contínua.*

*Demonstração.* Seja  $g_n \in \text{Gl}(V)$ , com  $g_n \rightarrow g \in \text{Gl}(V)$ . Vamos mostrar que  $\rho(g_n) \rightarrow \rho(g)$ . Pela observação 3.2.12 e por A.3.3, basta mostrar que para  $x \in \pi_\wedge(V^d)$ ,  $\rho(g_n)x \rightarrow \rho(g)x$ . Seja então  $x = v_1 \wedge \dots \wedge v_d \in \bigwedge_d V$ , um elemento qualquer de  $\pi_\wedge(V^d)$ . Novamente, pela observação 3.2.12, é fácil ver que  $(g_nv_1, \dots, g_nv_d) \rightarrow (gv_1, \dots, gv_d)$ . Então, pela continuidade de  $\pi_\wedge$ , (veja A.3.3)

$$\begin{aligned} \rho(g_n)x &= g_nv_1 \wedge \dots \wedge g_nv_d = \\ &= \pi_\wedge(g_nv_1, \dots, g_nv_d) \rightarrow \pi_\wedge(gv_1, \dots, gv_d) = gv_1 \wedge \dots \wedge gv_d = \rho(g)x. \end{aligned}$$

Portanto,  $\rho(g_n) \rightarrow \rho(g)$ . □

**Proposição 3.2.14.** *O mergulho de Plücker é de fato um mergulho, e é equivariante no seguinte sentido*

$$i(gq) = \rho(g)i(q),$$

para todo  $g \in \text{Gl}(V)$  e todo  $x \in \text{Gr}_d(V)$ .

*Demonstração.* A equivariância é trivialmente verificada através das definições de  $\rho$  e do mergulho de Plücker.

Faça  $G = \text{Gl}(V)$ ,  $H = \text{Gl}(\bigwedge_d V)$ , e tome  $b \in G$ . Note que, como a ação de  $G$  em  $\text{Gr}_d V$  e a ação de  $H$  em  $\mathbb{P}(\bigwedge_d V)$  podem ser fatoradas por  $G/G_b$  e  $H/H_{i(b)}$  respectivamente, então, a equivariância do mergulho de Plücker implica na comutatividade da parte “externa” do seguinte diagrama, onde



$$\tilde{\rho} = \psi_{i(b)}^{-1} \circ i \circ \psi_b.$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\rho} & H \\ \pi_b \downarrow & & \downarrow \pi_{i(b)} \\ G/G_b & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & H/H_{i(b)} \\ \psi_b \downarrow & & \downarrow \psi_{i(b)} \\ \text{Gr}_d V & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}(\wedge_d V) \end{array}$$

De fato, dado  $g \in G$ ,

$$i(\psi_b \circ \pi_b(g)) = i(gb) = \rho(g)i(b) = \psi_{i(b)} \circ \pi_{i(b)}(\rho(g)).$$

É fácil ver que pela definição de  $\tilde{\rho}$ , e o fato de  $\psi_b$  e  $\psi_{i(b)}$  serem bijeções, que o diagrama todo comuta. Como  $\psi_b$  e  $\psi_{i(b)}$  são homeomorfismos, basta mostrar que  $\tilde{\rho}$  é contínua para que  $i$  seja um mergulho.

Sabemos por 3.2.13 que  $\rho$  é contínua. Pela definição de topologia quociente,  $\pi_{i(b)}$  também é contínua. Portanto,  $\tilde{\rho} \circ \pi_b = \pi_{i(b)} \circ \rho$  é contínua. Pela caracterização de continuidade na topologia quociente, descrita em A.1.9,  $\tilde{\rho}$  é contínua. Assim,  $i$  é contínua, injetiva e fechada, pois seu domínio é compacto e seu contra-domínio, Hausdorff. Ou seja,  $i$  é um mergulho.  $\square$

**Observação 3.2.15.** O mergulho de Plücker nos permite identificar a órbita grasmaniana compacta  $\mathbb{E}$  homeomorficamente, com o subconjunto  $\mathbb{F} = i(\mathbb{E})$  do espaço projetivo  $\mathbb{P}(\wedge_d V)$ . Já a equivariância do mergulho, mostra que quando essa identificação é feita, a ação de  $g \in \text{Gl}(V)$  em  $\mathbb{E}$  é identificada com a ação de  $\rho(g)$  restrita a  $\mathbb{F}$ , de modo que  $\mathbb{F}$  é uma órbita projetiva compacta.

Em particular, temos:

$$\begin{aligned} i(\text{fix}_{\mathbb{E}}(g^t)) &= \text{fix}_{\mathbb{F}}(\rho(g)^t) \\ i(\mathcal{R}_{\mathbb{E}}(g^t)) &= \mathcal{R}_{\mathbb{F}}(\rho(g)^t) \\ i(\mathcal{R}_{\mathbb{E}}^C(g^t)) &= \mathcal{R}_{\mathbb{F}}^C(\rho(g)^t). \end{aligned}$$

**Lema 3.2.16.** *Seja a representação canônica  $\rho : \text{Gl}(V) \rightarrow \text{Gl}(\wedge_d V)$ . Então,*

1. *Seja  $X \in \mathfrak{gl}(V)$ . Se  $X$  for elíptico aditivo (resp. hiperbólico ou nilpotente), então  $d_1 \rho X$  é elíptico aditivo (resp. hiperbólico, nilpotente). Em particular, se  $X = E + H + N$  é a decomposição de Jordan aditiva de  $X$ , então  $d_1 \rho X = d_1 \rho E + d_1 \rho H + d_1 \rho N$  é a decomposição de Jordan aditiva de  $d_1 \rho X$ .*

2. Seja  $g \in \text{Gl}(V)$ . Se  $g$  for elíptico multiplicativo (resp. hiperbólico ou unipotente), então  $\rho(g)$  é elíptico multiplicativo (resp. hiperbólico, unipotente). Em particular, se  $g = ehu$  é a decomposição de Jordan multiplicativa de  $g$ , então  $\rho(g) = \rho(e)\rho(h)\rho(u)$  é a decomposição de Jordan multiplicativa de  $\rho(g)$ .
3. Se  $g^t = e^t h^t u^t$  é a decomposição de Jordan multiplicativa de  $g^t$ , então  $\rho(g)^t = \rho(e)^t \rho(h)^t \rho(u)^t$  é a decomposição de Jordan multiplicativa de  $\rho(g)^t$ .

*Demonstração.* Primeiro, observe que pela proposição A.3.4, temos que

$$\left( \bigwedge_d V \right)_{\mathbb{C}} = \bigwedge_d V_{\mathbb{C}}.$$

Observe também que

$$(d_1 \rho X)v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = \sum_{i=1}^d v_1 \wedge \cdots \wedge Xv_i \wedge \cdots \wedge v_d.$$

Vamos mostrar que

$$(d_1 \rho X)^m v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = \sum_i w_{i1} \wedge \cdots \wedge w_{id},$$

onde  $w_{ij} \in X^{m_{ij}}(V)$  tal que  $\sum_{j=1}^d m_{ij} = m$ . Para  $m = 0$  é imediato. Por indução em  $m$ ,

$$\begin{aligned} (d_1 \rho X)^{m+1} v_1 \wedge \cdots \wedge v_d &= (d_1 \rho X) \sum_i w_{i1} \wedge \cdots \wedge w_{id} \\ &= \sum_i \sum_{j=1}^d w_{i1} \wedge \cdots \wedge Xw_{ij} \wedge \cdots \wedge w_{id} \end{aligned}$$

Como  $w_{ij} \in X^{m_{ij}}(V)$ , segue que  $Xw_{ij} \in X^{m_{ij}+1}(V)$ .

Para demonstrar o item (1), tomando  $X$  nilpotente, existe  $l$  tal que  $X^l = 0$ . Do parágrafo anterior, segue que  $(d_1 \rho X)^{dl} = 0$ . De fato,

$$(d_1 \rho X)^{dl} v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = \sum_i w_{i1} \wedge \cdots \wedge w_{id},$$

onde  $w_{ij} \in X^{m_{ij}}(V)$  tal que  $\sum_{j=1}^d m_{ij} = dl$ . Assim, para cada  $i$  existe  $j$  tal que  $m_{ij} \geq l$ . E portanto, para esse  $j$ ,  $w_{ij} = 0$ . O que implica que

$w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_d} = 0$ , para todo  $i$ . Agora, se  $X$  for elíptico, existe uma base  $v_1, \dots, v_n$  de  $V_{\mathbb{C}}$  tal que  $Xv_k = \lambda_k v_k$ , onde  $\lambda_k$  é puramente imaginário. Então,

$$\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d} \mid 1 \leq i_j \leq n\}$$

contém uma  $\mathbb{C}$ -base de  $\bigwedge_d V_{\mathbb{C}}$  tal que

$$(d_1 \rho X)v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d} = (\lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_d})v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d}.$$

Isso implica que  $d_1 \rho X$  é elíptico, pois  $\lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_d}$  é puramente imaginário. O caso hiperbólico é análogo.

Para o item (2), tome  $g$  unipotente, então, por A.5.4,  $g = e^N$  com  $N$  nilpotente. Então,  $\rho(g) = e^{d_1 \rho(N)}$  é unipotente, pois pelo item (1),  $d_1 \rho(N)$  é nilpotente. Agora, se  $g$  é elíptico, existe uma base  $v_1, \dots, v_n$  of  $V_{\mathbb{C}}$ , tal que  $gv_k = \lambda_k v_k$ , onde  $\lambda_k \in \mathbb{C}$  com  $|\lambda_k| = 1$ . Então,

$$\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d} \mid 1 \leq i_j \leq n\}$$

contém uma  $\mathbb{C}$ -base de  $\bigwedge_d V_{\mathbb{C}}$  tal que

$$(d_1 \rho X)v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d} = (\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_d})v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d}.$$

Isso implica que  $\rho(g)$  é elíptico, pois  $|\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_d}| = 1$ . O caso hiperbólico é análogo.

O item (3) segue do item (2) □

**Proposição 3.2.17.** *Seja  $g^t$  um fluxo em uma  $G$ -órbita grassmaniana compacta  $\mathbb{E}$ . Então  $\rho(g)^t$  é um fluxo na  $\rho(G)$ -órbita projetiva compacta  $\mathbb{F} = i(\mathbb{E})$  conjugado por  $i$  ao fluxo  $g^t$*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \xrightarrow{g^t} & \mathbb{E} \\ i \downarrow & & \downarrow i \\ \mathbb{F} & \xrightarrow{\rho(g)^t} & \mathbb{F} \end{array}$$

Além disso, se  $g^t = e^t h^t u^t$  é a decomposição de Jordan multiplicativa de  $g^t$ , então

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathbb{E}}^C(g^t) &= \text{fix}_{\mathbb{E}}(h^t) \\ \mathcal{R}_{\mathbb{E}}(g^t) &= \text{fix}_{\mathbb{E}}(h^t) \cap \text{fix}_{\mathbb{E}}(u^t). \end{aligned}$$

*Demonstração.* A comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \xrightarrow{g^t} & \mathbb{E} \\ i \downarrow & & \downarrow i \\ \mathbb{F} & \xrightarrow{\rho(g)^t} & \mathbb{F} \end{array}$$

é a equivariância demonstrada em 3.2.14. Pela comutatividade do diagrama,  $\rho(g)^t$  é um fluxo em  $\mathbb{F} = i(\mathbb{E})$ . E, de fato,  $i(\mathbb{E})$  é a  $\rho(G)$ -órbita de  $i(x)$  para qualquer  $x \in \mathbb{E}$ , já que  $\mathbb{E}$  é a  $G$ -órbita de  $x$ .

Temos pelo item (3) de 3.2.16 que  $\rho(g)^t = \rho(e)^t \rho(h)^t \rho(u)^t$  é a decomposição de Jordan multiplicativa de  $\rho(g)^t$ . Portanto, sabemos por 3.2.2 e 3.2.3 que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathbb{F}}^C(\rho(g)^t) &= \text{fix}_{\mathbb{F}}(\rho(h)^t) \\ \mathcal{R}_{\mathbb{F}}(\rho(g)^t) &= \text{fix}_{\mathbb{F}}(\rho(h)^t) \cap \text{fix}_{\mathbb{F}}(\rho(u)^t). \end{aligned}$$

Notando que

$$\text{fix}_{\mathbb{F}}(\rho(h)^t) = i(\text{fix}_{\mathbb{E}}(h^t)) \quad \text{e} \quad \text{fix}_{\mathbb{F}}(\rho(u)^t) = i(\text{fix}_{\mathbb{E}}(u^t))$$

Juntando com a observação 3.2.15, segue que

$$\begin{aligned} i(\mathcal{R}_{\mathbb{E}}^C(g^t)) &= i(\text{fix}_{\mathbb{E}}(h^t)) \\ i(\mathcal{R}_{\mathbb{E}}(g^t)) &= i(\text{fix}_{\mathbb{E}}(h^t)) \cap i(\text{fix}_{\mathbb{E}}(u^t)). \end{aligned}$$

Agora, basta observar que  $i : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  é uma aplicação bijetiva. □

### 3.3 Teoria de Floquet

Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie semi-simples, e  $G = \text{Int}(\mathfrak{g})$ . Nesta seção, assumindo  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ , vamos estudar a solução da equação

$$g'(t) = X(t)g(t) \tag{3.6}$$

tal que  $g(0) = I$ , onde  $X : \mathbb{T} \rightarrow \mathfrak{g}$  é contínua e  $T$ -periódica. Quando  $X(t)$  é constante, sabemos que  $g(t) = e^{tX}$  é solução de (3.6). Na seção 3.2, estudamos a dinâmica da ação de  $e^{tX}$  em órbitas projetivas compactas de  $G$ . Quando  $X(t)$  não é constante,  $g(t)$  não é um fluxo.

Dado uma  $G$ -órbita projetiva compacta  $\mathbb{F}$ , iremos associar a  $g(t)$  um fluxo

$$\phi^t : S^1 \times \mathbb{F} \rightarrow S^1 \times \mathbb{F},$$

e estudar sua dinâmica.

**Definição 3.3.1.** *A solução de (3.6) é chamada de solução fundamental associada à função  $X(t)$ .*

Note que

$$\begin{aligned} \rho_s : \mathbb{T} &\rightarrow G \\ t &\mapsto g(s+t)g(s)^{-1} \end{aligned}$$

é solução fundamental associada a  $X(s+t)$ . Como  $X$  é  $T$ -periódica, temos que  $X(T+t) = X(t)$ . Pela unicidade da solução de (3.6), temos que  $g(t+T)g(T)^{-1} = \rho_T(t) = g(t)$ . Portanto, para todo  $m \in \mathbb{Z}$ ,

$$g(t+mT) = g(t)g(T)^m.$$

Vamos mostrar que a seguinte aplicação, que por um abuso de notação vamos chamar também de  $\phi$ , é um fluxo: (note que este é um fluxo sobre  $\mathbb{T} \times \mathbb{F}$ , e não  $S^1 \times \mathbb{F}$ )

$$\begin{aligned} \phi^t : \mathbb{T} \times \mathbb{F} &\rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{F} \\ (s, a) &\mapsto (s+t, \rho_s(t)a) \end{aligned} \quad (3.7)$$

**Proposição 3.3.2.** *A função  $\phi^t$  de (3.7) é de fato um fluxo.*

*Demonstração.* Note que

$$\rho_s(t+u) = \frac{g(s+t+u)}{g(s)} = \frac{g(s+t+u)}{g(s+t)} \frac{g(s+t)}{g(s)} = \rho_{s+t}(u)\rho_s(t).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \phi^{t+u}(s, a) &= (s+t+u, \rho_s(t+u)a) \\ &= ((s+t)+u, \rho_{s+t}(u)\rho_s(t)a) \\ &= \phi^u(s+t, \rho_s(t)a) \\ &= \phi^u \circ \phi^t(s, a). \end{aligned}$$

A continuidade de  $\phi^t$  em  $\mathbb{T} \times S^1 \times \mathbb{F}$  segue da continuidade de  $g(t)$ , da continuidade das operações em  $G$  e da continuidade da ação de  $G$  em  $\mathbb{F}$ .  $\square$

Vamos agora verificar que existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\phi^t$  induz o fluxo

$$\begin{aligned} \phi^t : S^1 \times \mathbb{F} &\rightarrow S^1 \times \mathbb{F} \\ (s, a) &\mapsto (s+t, \rho_s(t)a) \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde  $S^1 = \mathbb{T}/mT\mathbb{Z}$ . Vamos precisar do seguinte lema.

**Lema 3.3.3.** *Seja  $G = \text{Int}(\mathfrak{g})$ . Para todo  $g \in G$ , existem  $m \in \mathbb{N}$  e  $X \in \mathfrak{g}$  tais que  $g^m = e^X$ .*

*Demonstração.* Veja o lema 5.1 de [FPS08].  $\square$

Para mostrar que  $\phi^t$  está bem definido para  $m$  dado pelo lema 3.3.3, vamos escrever  $\phi^t$  em função da seguinte aplicação contínua  $a(t)$ .

$$a(t) = g(t)g^{-t},$$

onde  $g = e^X$  é tal que satisfaz o lema 3.3.3, de modo que  $g(mT) = g^{mT}$ . É fácil verificar que  $a(t)$  é  $mT$ -periódica. De fato,

$$a(t + mT) = g(t + mT)g^{-t-mT} = g(t) + g(mT)g^{-t}g^{-mT} = g(t)g^{-t} = a(t). \quad (3.9)$$

Note que a continuidade de  $a(t)$  implica na continuidade de  $a(t)$  quando vista como uma aplicação com domínio em  $S^1$ .

Também é fácil ver que para todo  $s \in \mathbb{T}$ ,

$$\rho_s(t) = a(t + s)g^t a(s)^{-1}.$$

Note que todo elemento de  $(s, b) \in S^1 \times \mathbb{F}$  pode ser escrito na forma  $(s, a(s)a)$ . Basta tomar  $a = a(s)^{-1}b$ . Assim, podemos escrever

$$\phi^t(s, a(s)a) = (s + t, a(s + t)g^t a). \quad (3.10)$$

**Proposição 3.3.4.** *O fluxo definido por (3.8) está bem definido.*

*Demonstração.* Observando a equação (3.10), vemos que basta mostrar que

$$(s + t, a(s + t)g^t a) = ((s + mT) + t, a((s + mT) + t)g^t a) \text{ em } S^1 \times \mathbb{F}.$$

Mas isso é evidente da definição de  $S^1$  para a primeira coordenada, e da  $mT$ -periodicidade de  $a(t)$ . (equação (3.9).)  $\square$

**Lema 3.3.5.** *A aplicação*

$$\begin{aligned} \gamma : S^1 \times \mathbb{F} &\rightarrow S^1 \times \mathbb{F} \\ (s, a) &\mapsto (s, a(s)a) \end{aligned}$$

*é um homeomorfismo.*

*Demonstração.* A aplicação  $\gamma$  é uma bijeção. De fato,  $\gamma^{-1}(s, b) = (s, a(s)^{-1}b)$  é sua inversa. As aplicações  $\gamma$  e  $\gamma^{-1}$  são contínuas pois  $a(t)$  é contínua, a operação de inversão em  $G$  é contínua, e a ação de  $G$  em  $\mathbb{F}$  é contínua em  $G \times \mathbb{F}$ .  $\square$

**Teorema 3.3.6.** *O conjunto recorrente de  $\phi^t$  em  $S^1 \times \mathbb{F}$  é dado por*

$$\mathcal{R}(\phi^t) = \{(s, a(s)x) \mid s \in S^1, x \in \text{fix}_{\mathbb{F}}(h^t) \cap \text{fix}_{\mathbb{F}}(u^t)\},$$

*onde  $g = ehu$  é a decomposição de Jordan de  $g \in G$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, note que, pelo teorema 3.2.3,

$$\mathcal{R}(g^t) = \text{fix}_{\mathbb{F}}(h^t) \cap \text{fix}_{\mathbb{F}}(u^t).$$

Vamos denotar por  $R$  o conjunto  $R = \{(s, a(s)x) \mid s \in S^1, x \in \mathcal{R}(g^t)\}$ . Seja  $(s, a(s)x) \in \mathcal{R}(\phi^t)$ . Então, existe uma seqüência  $t_k \rightarrow \infty$ , tal que

$$(t_k + s, a(t_k + s)g^{t_k}x) = \phi^{t_k}(s, a(s)x) \rightarrow (s, a(s)x).$$

A primeira componente implica que  $t_k + s \rightarrow s$  em  $S^1$ , e portanto, por continuidade,  $a(t_k + s) \rightarrow a(s)$ . A segunda componente implica que  $a(t_k + s)g^{t_k}x \rightarrow a(s)x$ . Portanto,  $g^{t_k}x \rightarrow x$ . Ou seja,  $x \in \mathcal{R}(g^t)$ . Isso mostra que  $\mathcal{R}(\phi^t) \subset R$ .

Seja agora,  $(s, a(s)x) \in R$ , onde  $x \in \mathcal{R}(g^t)$ . Em  $\mathcal{R}(g^t)$ ,  $g^t = e^t$ . Se mostrarmos que existe uma métrica em  $\mathbb{F}$  compatível com sua topologia, tal que  $e^t$  é isometria para todo  $t \in \mathbb{T}$ , então, pelo lema 1.7.13, teremos uma seqüência  $n_k \in \mathbb{T}$  convergindo para  $\infty$ , tal que  $g^{n_k m T} x \rightarrow x$ . Assim,

$$\begin{aligned} \phi^{n_k m T}(s, a(s)x) &= (s + n_k m T, a(s + n_k m T)g^{n_k m T}x) \\ &= (s, a(s)g^{n_k m T}x) \rightarrow (s, a(s)x). \end{aligned}$$

Portanto,  $(s, a(s)x) \in \mathcal{R}(\phi^t)$ .

Vamos usar a representação de  $\mathbb{F}$  por  $\rho$  de 3.2.10 para mostrar que podemos colocar em  $\mathbb{F}$  uma métrica (compatível com sua topologia) que torna  $e^t$  uma isometria. Pelo lema 3.2.16, temos que  $\rho(e)$  é elíptico. Pelo lema 2.2.1, existe uma métrica (norma) em  $\Lambda_d \mathfrak{g}$  tal que  $\rho(e)$  é uma isometria. Podemos restringir esta métrica à esfera unitária. Identificando os pontos antípodas, inuzimos uma métrica na projetivização de  $\Lambda_d \mathfrak{g}$ . Como  $\rho(e)$  leva pontos antípodas em pontos antípodas,  $\rho(e)$  também age isometricamente na projetivização de  $\Lambda_d \mathfrak{g}$ . Agora, através do mergulho de Plücker, trazemos esta métrica para  $\mathbb{F}$ , e pela equivariância, temos que  $e^t$  age isometricamente em  $\mathbb{F}$ .  $\square$

**Teorema 3.3.7.** *O conjunto recorrente por cadeias de  $\phi^t$  em  $S^1 \times \mathbb{F}$  é dado por*

$$\mathcal{R}^C(\phi^t) = \{(s, a(s)x) \mid s \in S^1, x \in \text{fix}_{\mathbb{F}}(h^t)\},$$

onde  $g = ehu$  é a decomposição de Jordan de  $g \in G$ .

*Demonstração.* Primeiramente, note que, pelo teorema 3.2.2,

$$\mathcal{R}^C(g^t) = \text{fix}_{\mathbb{F}}(h^t).$$

Pelo mesmo teorema, temos que existe uma decomposição de Morse minimal de  $g^t$ . Sejam  $M_1, \dots, M_m$  as componentes de Morse da decomposição minimal, e  $f : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Lyapunov para esta decomposição.

Vamos denotar por  $R$  o conjunto

$$R = \{(s, a(s)x) \mid s \in S^1, x \in \mathcal{R}^C(g^t)\},$$

e por  $\bar{M}_i$  o conjunto

$$\bar{M}_i = \{(s, a(s)x) \mid s \in S^1, x \in M_i\}.$$

Note que  $R = \bigcup \bar{M}_i$ .

**Afirmção 1.** *Os conjuntos  $\bar{M}_i$  formam uma decomposição de Morse de  $\phi^t$ .*

Defina

$$\begin{aligned} F : S^1 \times \mathbb{F} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (s, a(s)x) &\mapsto f(x) \end{aligned}.$$

Esta é uma função de Lyapunov do fluxo  $\phi^t$ . De fato,

$$F \circ \phi^t(s, a(s)x) = (s + t, a(s+t)g^t x) = f(g^t x),$$

e portanto,  $F_{(s, a(s)x)} = f_x$  é estritamente decrescente quando  $x$  não pertence a nenhum  $M_i$ , e é constante caso contrário. Portanto, por 1.6.3,  $\bar{M}_i$  é uma decomposição de Morse.

**Afirmção 2.** *Os conjuntos  $\bar{M}_i$  são transitivos por cadeias.*

Esta última afirmação conclui a demonstração, pois o fato de  $\bar{M}_i$  serem transitivos por cadeias implica que nenhuma componente de Morse de uma decomposição de Morse qualquer estará propriamente contida em nenhum dos  $\bar{M}_i$ . Assim, esta decomposição é minimal. Basta então usar o teorema 1.8.7. Vamos então demonstrar a afirmação.

Note que  $S^1$  e  $\mathbb{F}$  são metrizáveis. Para verificar que  $\mathbb{F}$  é metrizável, basta tomar uma métrica qualquer em  $\mathbb{P}(\bigwedge_d V)$ , e utilizar o mergulho de Plücker, como foi feito na demonstração do teorema 3.3.6. Vamos denotar por  $d_1$  e  $d_2$  as métricas em  $S^1$  e  $\mathbb{F}$ . Então, vamos tomar para  $S^1 \times \mathbb{F}$  a métrica da soma

$$d((s, x), (r, y)) = d_1(s, r) + d_2(x, y).$$

**Afirmção 3.** *Para que  $\bar{M}_i$  seja transitivo por cadeias, basta que dados  $\varepsilon > 0$ ,  $s, t \in \mathbb{T}$  e  $x, y \in M_i$ , exista uma  $(\varepsilon, t)$ -cadeia de  $(0, x)$  para  $(s, a(s)y)$ .*



Queremos uma  $(\varepsilon, t)$ -cadeia de  $(\hat{s}, a(\hat{s})x)$  para  $(\tilde{s}, a(\tilde{s})y)$ . Como  $S^1 \times \mathbb{F}$  é compacto,  $\phi^{\hat{s}}$  é uniformemente contínuo. Então, existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $\eta, \xi \in S^1 \times \mathbb{F}$ ,  $d(\eta, \xi) < \delta \Rightarrow d(\phi^{\hat{s}}(\eta), \phi^{\hat{s}}(\xi)) < \varepsilon$ . Por hipótese, existe uma  $(\delta, t)$ -cadeia  $\eta_1, \dots, \eta_n$  de  $(0, x)$  para  $(\tilde{s} - \hat{s}, a(\tilde{s} - \hat{s})g^{-\hat{s}}y)$ . Então  $\phi^{\hat{s}}(\eta_1), \dots, \phi^{\hat{s}}(\eta_n)$  é uma  $(\varepsilon, t)$ -cadeia de  $\phi^{\hat{s}}(0, x) = (\hat{s}, a(\hat{s})x)$  para  $\phi^{\hat{s}}(\tilde{s} - \hat{s}, a(\tilde{s} - \hat{s})g^{-\hat{s}}y) = (\tilde{s}, a(\tilde{s})y)$ .

**Afirmção 4.** *Dados  $\varepsilon > 0$ ,  $s, t \in \mathbb{T}$  e  $x, y \in M_i$ , existe uma  $(\varepsilon, t)$ -cadeia de  $(0, x)$  para  $(s, a(s)y)$ .*

Pela continuidade  $\phi$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$d((s', x), (t', y)) < \delta \Rightarrow d(\phi^{s'}(x), \phi^{t'}(y)) < \varepsilon.$$

Em particular, fazendo  $s' = t'$ , temos que para todo  $t' \in \mathbb{T}$

$$d_2(x, y) < \delta \Rightarrow d(\phi^{t'}(x), \phi^{t'}(y)) < \varepsilon. \quad (3.11)$$

Seja  $x = x_0, \dots, x_n = y$ , com tempos  $t_1, \dots, t_n$  uma  $(\delta, t)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ . Fazendo  $t_0 = 0$ , se tomarmos os pontos

$$\xi_j = (t_0 + \dots + t_j, a(t_0 + \dots + t_j)g^{t_j}x_j),$$

então, teríamos uma  $(\varepsilon, t)$ -cadeia de  $(0, x)$  para  $(t_0 + \dots + t_n, a(t_0 + \dots + t_n)g^{t_n}y)$ . De fato, usando (3.11),

$$d(\phi^{t_{j+1}}(\xi_j), \xi_{j+1}) = d_2(a(t_0 + \dots + t_{j+1})g^{t_{j+1}}g^{t_j}x_j, a(t_0 + \dots + t_{j+1})g^{t_{j+1}}x_{j+1}) < \varepsilon,$$

pois  $d_2(g^{t_j}x_j, x_{j+1}) < \delta$ . Para concluir a demonstração da afirmação, basta mostrarmos que podemos escolher a cadeia  $x_0, \dots, x_n$ , de modo que  $t_0 + \dots + t_n \sim s$ , onde  $\sim$  indica que  $t_0 + \dots + t_n$  está sendo visto como elemento de  $S^1$ .

**Afirmção 5.** *Existe uma  $(\delta, t)$ -cadeia de  $x$  para  $y$  com  $t_1 + \dots + t_n \sim s$ .*

Pela compacidade de  $\mathbb{F}$ , existe  $\tau > 0$  tal que para todo  $z \in \mathbb{F}$ ,  $\hat{t} \in [0, \tau] \Rightarrow d_2(g^{\hat{t}}z, z) < \delta/2$ . De fato, basta notar que  $\mathbb{F}$  é a união dos conjuntos abertos  $V_\tau = \{z \in \mathbb{F} \mid d(g^\tau z, z) < \delta/2\}$ . Então é só tomar uma subcobertura finita e escolher o menor  $\tau$  desta cobertura.

Tome uma  $(\delta/2, t)$ -cadeia com tempos  $\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_n$ . Como  $y$  é um ponto recorrente por cadeias, podemos assumir que  $n$  é suficientemente grande para que  $mT/n < \tau$ . Seja  $\hat{t}$  o representante de  $s - t_1 + \dots + t_n$  em  $[0, mT)$ . Então, fazendo

$$\hat{t}_j = t_j + \hat{t}/n,$$

teremos que  $\hat{t}_1 + \dots + \hat{t}_n \sim s$ . Além disso,  $x_1, \dots, x_n$ , com tempos  $\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_n$  é uma  $(\delta, t)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ . De fato,

$$d_2(g^{\hat{t}_{j+1}}x_j, x_{j+1}) \leq d_2(g^{t_{j+1}}g^{\hat{t}/n}x_j, g^{t_{j+1}}x_j) + d_2(g^{t_{j+1}}x_j, x_{j+1}) < \delta/2 + \delta/2 = \delta.$$

□

# Apêndice A

## Pré-Requisitos e Notação

### A.1 Topologia

Os principais conceitos de topologia necessários à leitura deste texto estão listados aqui. Demonstrações maiores explicações podem ser encontradas em qualquer livro de topologia geral. Veja, por exemplo, [Kel58].

O conceito mais importante para este trabalho é o de *topologia quociente*, da definição A.1.7, que é utilizado na definição do espaço projetivo e das grasmanianas. (Definições A.4.14 e A.4.17.)

**Definição A.1.1** (Topologia). *Seja  $X$  um conjunto. Uma topologia em  $X$  é uma família de subconjuntos de  $X$ ,  $\Omega$  que satisfaz:*

1.  $\emptyset, X \in \Omega$ .
2. Dados  $A, B \subset X$ , então

$$A, B \in \Omega \Rightarrow A \cap B \in \Omega.$$

3. Dada uma família qualquer de subconjuntos  $A_\lambda$ , ( $\lambda \in \Lambda$ ), então

$$\forall \lambda \in \Lambda A_\lambda \in \Omega \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \Omega.$$

*Dizemos que  $(X, \Omega)$  é um espaço topológico e  $\Omega$  uma topologia (sobre  $X$ ). Normalmente omitimos a família  $\Omega$ , que em muitos casos está subentendida, e dizemos que  $X$  é um espaço topológico.*

*Os elementos de  $\Omega$  são chamados de  $A$  abertos. Dado  $x \in X$ , um conjunto  $V$  que contém um conjunto de  $\Omega$  é uma vizinhança de  $x$ .*

Se  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são duas topologias em  $X$  tais que  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ , então dizemos que  $\Omega_2$  é mais fina, mais forte ou simplesmente maior que  $\Omega_1$ . Ou que  $\Omega_1$  é mais fraca ou simplesmente menor que  $\Omega_2$ .

**Proposição A.1.2.** *Se  $X$  é um conjunto, então a coleção de todas as topologias sobre  $X$  forma um reticulado completo com relação à ordem parcial  $\subset$ . Ou seja, se  $\mathcal{W}$  uma coleção não vazia de topologias de  $X$ , então existem as topologias mais fraca e mais forte que todas as topologias de  $\mathcal{W}$ .*

*Em particular, dada uma família  $\mathcal{C}$  de subconjuntos de  $X$ , então existe a menor topologia que contém  $\mathcal{C}$ , chamada de topologia gerada por  $\mathcal{C}$ .*

**Definição A.1.3** (Topologia produto). *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. A topologia produto é a topologia em  $X \times Y$  gerada pela família de conjuntos*

$$A \times B \subset X \times Y,$$

*onde  $A$  é um aberto de  $X$  e  $B$  um aberto de  $Y$ . Em geral simplesmente nos referimos ao espaço topológico  $X \times Y$ , com a topologia produto subentendida.*

**Definição A.1.4** (Convergência de seqüências). *Seja  $X$  um espaço topológico. Dizemos que uma seqüência  $x_i \in X$  é convergente quando existir  $x \in X$  tal que para toda vizinhança  $A \subset X$  de  $x$ , existir  $N_A \in \mathbb{N}$  satisfazendo*

$$i \geq N_A \Rightarrow x_i \in A.$$

**Definição A.1.5** (Aplicação contínua). *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e*

$$f : X \rightarrow Y.$$

*Então, dizemos que  $f$  é contínua no ponto  $x \in X$  quando*

$$V \subset Y \text{ é vizinhança de } f(x) \Rightarrow f^{-1}(V) \text{ é vizinhança de } x.$$

*Dizemos que  $f$  é contínua quando for contínua em todos os pontos de  $X$  ou, equivalentemente, quando*

$$A \subset Y \text{ é aberto em } Y \Rightarrow f^{-1}(A) \text{ é aberto em } X.$$

**Definição A.1.6** (Topologia induzida). *Se  $(X, \Omega)$  é um espaço topológico e  $Y \subset X$ , então a família*

$$\{Y \cap A \mid A \in \Omega\}$$

*é uma topologia sobre  $Y$ , e é chamada de topologia induzida.*

**Definição A.1.7** (Topologia quociente). *Seja  $X$  um espaço topológico e  $\sim$  uma relação de equivalência sobre  $X$ . O conjunto das classes de equivalência da relação  $\sim$  é uma família de subconjuntos de  $X$ , e é definido por*

$$X/\sim = \{A \subset X \mid x, y \in A \Leftrightarrow x \sim y\}.$$

A projeção natural  $\pi = \pi_{\sim}$  é

$$\begin{aligned} \pi_{\sim} : X &\rightarrow X/\sim \\ x &\mapsto A, \text{ tal que } x \in A \end{aligned} .$$

A topologia quociente é a maior topologia em  $X/\sim$  tal que  $\pi_{\sim}$  é contínua. Ou equivalentemente, é a topologia  $\Omega_{\sim}$  dada por

$$\Omega_{\sim} = \{A \in X/\sim \mid \pi_{\sim}^{-1}(A) \in \Omega\}.$$

**Observação A.1.8.** Equivalente a definir uma relação de equivalência  $\sim$  sobre  $X$  é construir uma família de *classes de equivalência* que particionem  $X$ . Por exemplo, se  $G$  é um grupo, e  $H < G$  um sub-grupo de  $G$ , então o conjunto

$$G/H = \{gH \mid g \in G\}$$

é uma família de subconjuntos que particionam  $G$ . A relação de equivalência correspondente é

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow \exists gH \in G/H \text{ } g_1, g_2 \in gH.$$

Ou equivalentemente, para o caso específico de grupos,

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1^{-1}g_2 \in H.$$

**Lema A.1.9.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos, e  $\sim$  uma relação de equivalência em  $X$ . Então, uma aplicação  $f : X/\sim \rightarrow Y$  será contínua se, e somente se,  $f \circ \pi_{\sim}$  for contínua.*

**Definição A.1.10** (Espaço métrico). *Seja  $X$  um conjunto, e  $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para todo  $x, y, z \in X$ ,*

1.  $d(x, y) \geq 0$ .
2.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Então dizemos que  $(X, d)$  é um espaço métrico, e  $d$  uma métrica sobre  $X$ . Por abuso de linguagem, quando  $d$  está subentendido, dizemos que  $X$  é um espaço métrico.

A topologia da métrica de um espaço métrico  $(X, d)$  é aquela onde um conjunto  $A \subset X$  é aberto se, e somente se, para todo  $x \in A$  existir  $\delta > 0$  tal que a bola

$$B_\delta(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \delta\}$$

esteja contida em  $A$ .

**Proposição A.1.11.** Se  $X$  e  $Y$  são espaços métricos, então  $f : X \rightarrow Y$  é contínua se, e somente se, para toda seqüência convergente  $x_i \in X$ ,  $f(x_i)$  for uma seqüência convergente em  $Y$ .

**Definição A.1.12** (Espaço normado). Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ , e  $|\cdot| : V \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que, para  $v, w \in V$  e  $a \in \mathbb{K}$ ,

1.  $|v| \geq 0$ .
2.  $|v| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ .
3.  $|av| = |a||v|$ .
4.  $|v + w| \leq |v| + |w|$ .

Então dizemos que  $(V, |\cdot|)$  é um espaço normado e  $|\cdot|$  é uma norma sobre  $V$ . Por um abuso de linguagem, quando  $|\cdot|$  está subentendida, dizemos que  $V$  é um espaço normado.

A métrica da norma de um espaço normado  $(V, |\cdot|)$  é a métrica  $d_{|\cdot|}$  dada por

$$\begin{aligned} d_{|\cdot|} : V^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto |v - w| \end{aligned} .$$

A topologia da norma de  $(X, |\cdot|)$  é a topologia da métrica  $d_{|\cdot|}$ . É a menor topologia tal que a aplicação  $|\cdot|$  é contínua.

**Observação A.1.13.** Todo espaço vetorial de dimensão finita possui ao menos uma norma. Basta fixar uma base qualquer e definir a *norma euclidiana*, *norma da soma* ou *norma do máximo*.

**Definição A.1.14** (Norma de operador). Sejam  $V$  e  $W$  dois espaços vetoriais normados, e  $B(V, W)$  o conjunto de todas as aplicações lineares contínuas de  $V$  para  $W$ . Então podemos definir a seguinte norma em  $B(V, W)$

$$\begin{aligned} |\cdot| : B(V, W) &\rightarrow \mathbb{R} \\ T &\mapsto \sup_{\substack{v \in V \\ |v|=1}} |Tv| \end{aligned} .$$

Esta é a norma do operador definida em  $B(V, W)$ .

**Definição A.1.15** (Funcionais lineares). *Seja  $V$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ . Então os funcionais lineares de  $V$  são os elementos de  $V^* = B(V, \mathbb{K})$ .*

**Definição A.1.16** (Topologia fraca). *Seja  $V$  um espaço vetorial normado. A topologia fraca de  $V$  é a menor topologia (mais fraca) tal que todos os elementos de  $V^*$  são contínuos.*

**Definição A.1.17** (Topologia fraca-\*). *Seja  $V$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ . Então  $W = V^*$  também é um espaço vetorial normado. Vamos chamar de  $W_*$  a família de todos os funcionais lineares de  $W$  da forma*

$$\begin{aligned} \gamma_x : W &\rightarrow \mathbb{K} \quad , \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

onde  $x \in V$ . A topologia mais fraca tal que todos os elementos de  $W_*$  são contínuos é a topologia fraca-\* de  $W$ . Note que essa topologia é igual ou mais fraca que a topologia fraca de  $W$  pois  $W_* \subset W^*$ .

**Proposição A.1.18.** *Se  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita, então:*

1. *Todas as normas em  $V$  geram a mesma topologia.*
2. *A topologia fraca de  $V$  é igual à topologia de qualquer norma.*
3. *O espaço  $V^*$  também tem dimensão finita, e a topologia fraca-\* de  $V^*$  é igual à topologia de qualquer norma em  $V^*$ .*

**Observação A.1.19.** A proposição A.1.18 nos permite falar em topologia da norma de um espaço vetorial de dimensão finita sem nos referirmos a uma norma específica.

**Observação A.1.20.** Se  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita, então, dada uma base  $e_1, \dots, e_n$ ,  $V^*$  é gerado pelas projeções

$$\begin{aligned} \pi_i : V &\rightarrow \mathbb{K} \quad . \\ a_1e_1 + \dots + a_n e_n &\mapsto a_i \end{aligned}$$

Por A.1.11, convergência de uma seqüência  $x_i = a_{1i}e_1 + \dots + a_{ni}e_n$  a  $x = a_1e_1 + \dots + a_n e_n$  é equivalente à convergência de cada uma das coordenadas:  $a_{1i} \rightarrow a_1$ .

**Definição A.1.21** (Aplicação multilinear). *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais, e  $d \in \mathbb{N}$  maior que zero. Então, uma aplicação*

$$\begin{aligned} f : V^d &\rightarrow W \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

é multilinear quando  $f$  é linear em cada coordenada. Ou seja, para todo  $i = 1, \dots, n$ , se fixarmos  $x_1, \dots, x_{i-1}$  e  $x_{i+1}, \dots, x_n$ , a aplicação  $f$  é linear quando restrita a  $\{x_1\} \times \dots \times \{x_{i-1}\} \times V \times \{x_{i+1}\} \times \dots \times \{x_n\}$ .

Se além do mais,  $\sigma$  for uma permutação de  $1, \dots, n$ , então a aplicação multilinear  $f$  será dita alternada quando  $f(x_1, \dots, x_n) = \text{sig}(\sigma)f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ , onde  $\text{sig}(\sigma)$  é o sinal da permutação.

**Proposição A.1.22.** *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais de dimensão finita, e  $d \in \mathbb{N}$  maior que zero. Então, uma aplicação multilinear  $f : V^d \rightarrow W$  é contínua.*

## A.2 Distância de Hausdorff

Utilizaremos a distância de Hausdorff em 1.8.5. É uma técnica que utilizamos para introduzirmos uma topologia compacta na família formada por todos os subconjuntos compactos de um espaço métrico compacto  $X$ . Por não ter muita relação com o assunto do capítulo 1, essa demonstração é feita aqui. A distância de Hausdorff também é usada, sem demonstração, em [CK00] (teorema B.1.3).

**Proposição A.2.1.** *Seja  $X$  um espaço métrico compacto, e  $\mathcal{C}$  a família formada por todos os subconjuntos compactos não vazios de  $X$ . Então,*

$$\begin{aligned} d_H : \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto \max \{ \max_{x \in A} d(x, B), \max_{y \in B} d(A, y) \} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

é uma métrica em  $\mathcal{C}$  que o torna um espaço métrico compacto.

*Demonstração.* Para  $\varepsilon \geq 0$  e  $A \subset X$ , vamos denotar por  $A_\varepsilon$  o conjunto

$$A_\varepsilon = \bigcup_{a \in A} \{x \in X \mid d(x, a) \leq \varepsilon\}.$$

Então, para  $A, B \in \mathcal{C}$ ,  $d_H(A, B) \leq \varepsilon$  equivale a  $B \subset A_\varepsilon$  e  $A \subset B_\varepsilon$ . Em particular,  $d_H(A, B) = 0$  se, e somente se  $A = B$ . Note que para  $A, B \subset X$  e  $\varepsilon \geq 0$ ,  $A \subset B \Rightarrow A_\varepsilon \subset B_\varepsilon$ . Portanto, para  $A, B, C \in \mathcal{C}$ , com  $a = d_H(A, B)$  e  $b = d_H(B, C)$ , temos  $A \subset B_a \Rightarrow (C_b)_a = C_{a+b}$ . Do mesmo modo,  $C \subset A_{a+b}$ . Isso significa que  $d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C)$ . Assim,  $d_H$  é uma métrica sobre  $\mathcal{C}$ .

Para mostrar que com esta métrica  $\mathcal{C}$  é compacto, vamos mostrar que é completo e totalmente limitado. Seja  $A_i \in \mathcal{C}$  uma sequência de Cauchy. Vamos mostrar que essa sequência converge para o conjunto compacto

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{cl} \left( \bigcup_{i \geq n} A_i \right).$$



De fato, seja  $\varepsilon > 0$ . Então, existe  $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que  $n, m \geq N \Rightarrow d_H(A_n, A_m) < \varepsilon$ . O que implica que para todo  $n, m \geq N$ ,  $A_m \subset (A_n)_\varepsilon$ . Assim,  $\bigcup_{m \geq N} A_m \subset (A_n)_\varepsilon$ . Como  $(A_n)_\varepsilon$  é fechado, temos que para todo  $n \geq N$ ,

$$A \subset \text{cl} \left( \bigcup_{m \geq N} A_m \right) \subset (A_n)_\varepsilon. \quad (\text{A.2})$$

Por outro lado,  $A \subset \text{int}(A_\varepsilon)$ . Ou seja,  $(\bigcap_{n=1}^{\infty} \text{cl}(\bigcup_{i \geq n} A_i)) \cap \text{int}(A_\varepsilon)^c = \emptyset$ . Por compacidade de  $\text{cl}(\bigcup_{i \geq n} A_i) \cap \text{int}(A_\varepsilon)^c$ , temos que existe  $M = M_\varepsilon$ , tal que  $(\bigcap_{n=1}^M \text{cl}(\bigcup_{i \geq n} A_i)) \cap \text{int}(A_\varepsilon)^c = \emptyset$ . Em particular, para todo  $n \geq M$ ,

$$A_n \subset \bigcap_{m=1}^M \text{cl} \left( \bigcup_{i \geq m} A_i \right) \subset A_\varepsilon. \quad (\text{A.3})$$

As equações A.2 e A.3 mostram que para  $n \geq \max(M, N)$ ,  $d_H(A, A_n) \leq \varepsilon$ . Ou seja,  $A_n$  converge para  $A$ . Concluimos que toda seqüência de Cauchy converge e portanto  $\mathcal{C}$  é completo.

Vamos então mostrar que  $\mathcal{C}$  é totalmente limitado. Seja  $\varepsilon > 0$ . Como  $X$  é compacto, existe um conjunto finito  $A \subset X$ , tal que  $A_\varepsilon = X$ . Defina a seguinte família (finita)  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ :

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(A).$$

Onde  $\mathcal{P}(A)$  é o conjunto das partes de  $A$ . Vamos mostrar que para todo  $C \in \mathcal{C}$ , existe um  $B \in \mathcal{A}$  tal que  $d_H(B, C) \leq \varepsilon$ . De fato, basta tomar  $B = \{a \in A \mid d(a, C) < \varepsilon\}$ . Se  $c \in C$ , então existe  $a \in A$ , tal que  $d(a, c) \leq \varepsilon$ , pois  $X = A_\varepsilon$ . Pela definição de  $B$ , temos que  $a \in B$ , e assim,  $C \subset B_\varepsilon$ . Por outro lado, para  $b \in B$ , temos que  $d(b, C) \leq \varepsilon$ , e pela compacidade de  $C$ , existe  $c_b \in C$ , tal que  $d(b, c_b) \leq \varepsilon$ . Ou seja,  $B \subset C_\varepsilon$ . O que conclui a demonstração de que  $d_H(B, C) \leq \varepsilon$ , e portanto,  $\mathcal{C}$  é totalmente limitado.  $\square$

### A.3 Produto Exterior

Os conceitos e resultados desta seção podem ser consultados nas seções 2.1 a 2.6 de [War83]. O *produto exterior* será utilizado para a construção do *mergulho de Plücker* (definição 3.2.7) na seção 3.2.

**Definição A.3.1.** *Seja  $V$  um espaço vetorial e  $d \in \mathbb{N}$ . Vamos denotar por  $\bigwedge_d V = (\pi_\wedge, \bigwedge_d V)$  o produto exterior de  $V$ , onde  $\pi_\wedge : V^d \rightarrow \bigwedge_d V$  é uma aplicação  $d$ -linear alternada. (Definição A.1.21)*

*Denotamos  $\pi_\wedge(v_i, \dots, v_d)$  por  $v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ .*

**Proposição A.3.2.** *O produto exterior  $\Lambda_d V = (\pi_\wedge, \Lambda_d V)$  é, a menos de isomorfismos, único tal que para toda aplicação multilinear alternada  $\psi : V^d \rightarrow W$ , existe uma única  $\tilde{\psi} : \Lambda_d V \rightarrow W$  tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} V^d & & \\ \pi_\wedge \downarrow & \searrow \psi & \\ \Lambda_d V & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & W \end{array}$$

**Proposição A.3.3.** *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita. Então Todo elemento de  $\Lambda_d V$  é uma soma finita de elementos da forma  $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$ . Em particular, se  $V$  tem dimensão finita, então  $\Lambda_d V$  também tem. E neste caso,  $\pi_\wedge$  é contínua.*

*Demonstração.* Fazendo  $\psi = 0$  e  $W$  tal que  $\dim(W) \neq 0$  na proposição A.3.2, pela unicidade de  $\tilde{\psi}$ , é fácil ver que  $\Lambda_d V$  é gerado pela imagem de  $\pi_\wedge$ . Caso contrário, existiria uma base  $w_0, \dots, w_n$  de  $\Lambda_d V$  tal que a imagem de  $\pi_\wedge$  está contida no espaço gerado por  $w_1, \dots, w_n$ . Então, para todo  $0 \neq w \in W$ , poderíamos definir

$$\tilde{\psi}_w : \Lambda_d V \rightarrow \Lambda_d V, \quad \sum_{i=0}^m \alpha_i w_i \mapsto \alpha_0 w$$

contradizendo a unicidade de  $\tilde{\psi}$ , pois  $0 = \tilde{\psi}_w \circ \pi_\wedge$ . Concluindo a primeira parte da demonstração.

Também é fácil ver, que se  $B$  é base de  $V$ , então, pela multilinearidade de  $\pi_\wedge$ , o conjunto  $\pi_\wedge(B^d)$  gera a imagem de  $\pi_\wedge$ . Se  $V$  tem dimensão  $n$ , então  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ , e  $B^d$  tem  $n^d$  elementos. Assim,  $\Lambda_d V$  tem dimensão no máximo  $n^d$ .

Como toda aplicação multilinear entre espaços de dimensão finita com topologia da norma,  $\pi_\wedge$  é contínua. Veja A.1.22.  $\square$

**Proposição A.3.4.** *Seja  $V$  um espaço vetorial em  $\mathbb{R}$  e  $d \in \mathbb{N}$ . Então, a complexificação de  $(\Lambda_d V)_\mathbb{C}$  é igual a  $\Lambda_d V_\mathbb{C}$ .*

## A.4 Grupos e Ações de Grupos

Os principais exemplos de fluxo (definição 1.1.1), e também os fluxos que são objeto de estudo deste trabalho, são sobre os espaços projetivos e as grasmanianas (definições A.4.14 e A.4.17) induzidos por ações do grupo linear geral (definição A.4.15) e seus sub-grupos.

**Definição A.4.1** (Operação). *Dado um conjunto  $X$ . Uma operação (binária) sobre  $X$  é uma aplicação*

$$p : X \times X \rightarrow X \\ (x, y) \mapsto p(x, y)$$

*Em geral, denotamos  $p(x, y)$  por  $x \cdot y$  ou simplesmente por  $xy$ . O ordem de aplicação da operação é representada por parenteses:  $x(yz)$  significa  $p(x, p(y, z))$ .*

**Definição A.4.2** (Grupo). *Um grupo é um conjunto  $G$ , munido de uma operação binária que satisfaça:*

1. *Existe  $1 \in G$  tal que para todo  $g \in G$ ,  $eg = ge = g$ . Este é o elemento neutro, e neste trabalho será denotado por  $1$  ou  $1_G$ .*
2. *Para todo  $g \in G$ , existe um elemento  $g' \in G$ , tal que  $gg' = g'g = 1_G$ . O elemento  $g'$  é chamado de inverso de  $g$  e é denotado por  $g^{-1}$ .*
3. *Para todos  $g, h, k \in G$  vale a relação de comutatividade:*

$$(gh)k = g(hk).$$

*Se  $G$  é um grupo e  $H \subset G$  um subconjunto tal que a operação de  $G$  restrita a  $H \times H$  é uma operação sobre  $H$ , então  $H$ , munido dessa operação é chamado de sub-grupo de  $G$ . Denotamos  $H < G$ .*

**Definição A.4.3** (Homomorfismo). *Sejam  $G$  e  $H$  dois grupos. Uma aplicação  $\rho : G \rightarrow H$  é um homomorfismo quando para todo  $g_1, g_2 \in G$ ,  $\rho(g_1g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$ .*

**Definição A.4.4** (Classes laterais). *Se  $G$  é um grupo e  $H$  um sub-grupo de  $G$ , então a família das classes laterais de  $H$  em  $G$  é o conjunto*

$$G/H = \{gH \mid g \in G\},$$

*onde  $gH = \{gh \in G \mid h \in H\}$ . Essa família particiona  $G$  (ou seja é composta por conjuntos disjuntos tais que a união é igual a  $G$ ), e portanto equivale à relação de equivalência*

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1H = g_2H,$$

*já que  $g_1H$  e  $g_2H$  são as classes que contém  $g_1$  e  $g_2$  respectivamente. Para o caso específico de grupos, essa relação equivale a*

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1g_2^{-1} \in H.$$

**Definição A.4.5** (Ação de um grupo). *Seja  $X$  um conjunto e  $G$  um grupo. Uma ação de  $G$  em  $X$  é uma aplicação*

$$\begin{aligned} a : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto a(g, x) \end{aligned} ,$$

que, escrevendo  $g \cdot x$  para  $a(g, x)$ , satisfaz

$$g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x,$$

para todo  $g, h \in G$  e todo  $x \in X$ . Novamente, escrevemos simplesmente  $gx$  no lugar de  $g \cdot x$ . Dizemos que o conjunto  $X$  é um  $G$ -conjunto, ou que  $G$  age em (ou age sobre)  $X$ .

**Definição A.4.6** (Órbita e grupo de isotropia). *Sejam  $X$  um conjunto,  $G$  um grupo que age em  $X$  e  $x \in X$ . Neste caso, a órbita de  $x$  é o conjunto*

$$Gx = \{gx \in X \mid g \in G\}.$$

*E o grupo de isotropia de  $x$  é o sub-grupo  $G_x \subset G$ , dado por*

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}.$$

*Quando, para dado  $x \in X$  (e conseqüentemente, para todo  $x \in X$ ),  $Gx = X$ , dizemos que  $G$  age transitivamente sobre  $X$ , ou que ação de  $G$  é transitiva.*

**Observação A.4.7.** *Seja  $G$  um grupo agindo em um espaço  $X$ . Dado  $x \in X$ , podemos identificar  $Gx$  com  $G/G_x$  através da aplicação*

$$\begin{aligned} \psi_x : G/G_x &\rightarrow Gx \\ gG_x &\mapsto gx \end{aligned} .$$

**Definição A.4.8** (Grupo topológico). *Um grupo  $G$  que é simultaneamente um espaço topológico é chamado de grupo topológico, quando a operação do grupo,  $(x, y) \mapsto xy$ , e a operação de inverso,  $g \mapsto g^{-1}$ , forem contínuas. (Note que  $G \times G$  é dotado da topologia produto – definição A.1.3.)*

**Observação A.4.9.** *Para um grupo topológico  $G$ , um sub-grupo  $H < G$  é dotado da topologia induzida de  $G$  (definição A.1.6). O conjunto das classes laterais  $G/H$  é dotado da topologia quociente (definição A.1.7).*

**Definição A.4.10** (Ação de um grupo topológico). *Se  $G$  é um espaço topológico agindo como grupo em um espaço topológico em  $X$ , então dizemos que  $G$  age como grupo topológico em  $X$ , ou simplesmente, apesar da ambigüidade, que  $G$  age em  $X$ , quando a ação for uma aplicação contínua de  $G \times X$  em  $X$ .*

**Proposição A.4.11.** *Seja  $G$  um grupo topológico agindo em um espaço topológico  $X$ . Neste caso, dado  $g \in G$ , a aplicação*

$$\begin{aligned} \psi : G/G_x &\rightarrow G/G_{gx} \\ hG_x &\mapsto ghg^{-1}G_{gx} \end{aligned}$$

*está bem definida, e é um homeomorfismo.*

*Demonstração.* Note que  $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ . Portanto,  $ghg^{-1}G_{gx} = ghG_xg^{-1}$  independe da escolha de  $h$ , dependendo apenas da escolha de  $hG_x$ . Então a aplicação  $\psi$  está bem definida. Para mostrar que  $\psi$  é um homeomorfismo, basta mostrar que  $\psi$  é contínua, pois pelo mesmo argumento, substituindo  $x$  por  $gx$  e  $g$  por  $g^{-1}$ , temos a continuidade de  $\psi^{-1}$ .

Para a continuidade de  $\psi$ , observe a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{C_g} & G \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ G/G_x & \xrightarrow{\psi} & G/G_{gx} \end{array}$$

onde  $\pi$  são as projeções naturais, e

$$\begin{aligned} C_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

é a conjugação por  $g$ . Então,  $f \circ \pi$  é contínua, pois  $I_g$  e  $\pi$  são contínuas. Por uma caracterização bastante conhecida da topologia quociente, descrita em A.1.9, a continuidade de  $f \circ \pi$  é equivalente à continuidade de  $f$ .  $\square$

**Observação A.4.12.** Se  $G$  é um grupo topológico agindo (como grupo) transitivamente num conjunto  $X$ , então, dado  $x \in X$ , podemos através da identificação descrita na observação A.4.7, induzir em  $X$  a topologia de  $G/G_x$ . A proposição A.4.11 mostra que a topologia induzida em  $X$  independe do ponto base  $x \in X$  escolhido.

**Proposição A.4.13.** *Se  $X$  é Hausdorff e  $K \subset G$  é um sub-grupo compacto tal que  $Kx = Gx$ , então*

$$\begin{aligned} \kappa : K/K_x &\rightarrow G/G_x \\ kK_x &\mapsto kG_x \end{aligned}$$

*também é um homeomorfismo. Em particular, neste caso,  $G/G_x$  é compacto.*

*Demonstração.* Note que  $\kappa$  está bem definida, pois  $K_x \subset G_x$ , e portanto,  $kK_x = k'K_x \Rightarrow k'k^{-1} \in K_x \Rightarrow k'k^{-1} \in G_x \Rightarrow kG_x = k'G_x$ . Para a continuidade de  $\kappa$ , usamos um argumento semelhante ao que fizemos para a continuidade de  $f$  na proposição A.4.11. Basta observar a comutatividade do seguinte diagrama para ver que  $\kappa \circ \pi$  é contínua.

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\text{id}} & G \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ K/K_x & \xrightarrow{\kappa} & G/G_x \end{array}$$

A aplicação  $\kappa$  também é bijetiva. De fato, a injetividade segue de  $\kappa(kK_x) = \kappa(k'K_x) \Leftrightarrow k'k^{-1} \in K_x = G_x \cap K$ . Para a sobrejetividade, note que para  $g \in G$ , existe  $k \in K$ , tal que  $gx = kx$ . Neste caso,  $g^{-1}k \in G_x$ , e portanto,  $gG_x = kG_x = \kappa(kK_x)$ .

Pela continuidade da projeção natural, temos que  $K/K_x$  é a imagem do compacto  $K$ , e portanto é compacto. Por outro lado, como  $X$  é Hausdorff, temos que  $\{x\}$  é fechado, e portanto  $G_x$  também é fechado. Assim,  $G/G_x$  é Hausdorff. Para concluir, observe que uma bijeção contínua de um espaço compacto em um espaço de Hausdorff é uma aplicação fechada e portanto é um homeomorfismo.  $\square$

**Definição A.4.14** (Espaço projetivo). *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita com a topologia da norma. Introduzimos a seguinte relação de equivalência em  $V \setminus \{0\}$*

$$x \sim y \Leftrightarrow x \in \langle y \rangle,$$

onde  $\langle y \rangle$  é o subespaço gerado por  $y$ . O espaço projetivo  $\mathbb{P}V$  é  $X/\sim$  e a aplicação  $\pi_\sim$ , que é contínua por definição, é denotada por  $[\cdot]$ . Ou seja,  $[x] = \pi_\sim(x)$ .

Também denotamos  $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$  por  $\mathbb{P}^{n-1}$ .

**Definição A.4.15** (Grupos lineares). *Seja  $V$  um espaço vetorial normado de dimensão finita. Então denotamos por  $\mathfrak{gl}(V)$  o conjunto das transformações lineares sobre  $V$ . O conjunto  $\mathfrak{gl}(V)$  é um espaço vetorial de dimensão finita. As observações A.1.13 e A.1.19 mostram que  $\mathfrak{gl}(V)$  é dotado de uma topologia natural.*

Sejam  $\mathfrak{sl} \subset \mathfrak{gl}(V)$  o conjunto das transformações lineares de traço zero,  $\text{Gl}(V) \subset \mathfrak{gl}(V)$  as transformações lineares inversíveis, e  $\text{Sl}(V) \subset \text{Gl}(V)$  o conjunto das transformações lineares inversíveis de determinante 1, então todos possuem uma topologia natural induzida de  $\mathfrak{gl}(V)$ . O grupo  $\text{Gl}(V)$  é chamado de grupo linear geral.

Além disso,  $\text{Gl}(V)$  é um grupo topológico onde o produto é dado pela composição  $g \circ h$  ( $g, h \in \text{Gl}(V)$ ), e  $\text{Sl}(V)$  é um sub-grupo de  $\text{Gl}(V)$ .

**Definição A.4.16** (Ação dos grupos lineares). *Seja  $V$  um espaço vetorial normado de dimensão finita. O grupo linear geral  $\text{Gl}(V)$ , e seus sub-grupos, agem sobre  $V$  naturalmente por*

$$\begin{aligned} a : \text{Gl}(V) \times V &\rightarrow V \\ (g, v) &\mapsto gv \end{aligned}$$

A ação de  $\text{Gl}(V)$  sobre  $V$  induz uma ação sobre  $\mathbb{P}V$  da seguinte maneira:

$$g[v] = [gv].$$

Essa ação está bem definida pois os elementos de  $\text{Gl}(V)$  levam subespaços de dimensão 1 em subespaços de dimensão 1. Da mesma forma, dado  $1 < d < \dim(V)$ ,  $\text{Gl}(V)$  age na família  $\text{Gr}_d(V)$  de todos os subespaços de dimensão  $d$ . Veja A.4.17.

**Definição A.4.17** (Grasmaniana). *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita  $n$ . Dado  $d \leq n$ , a grasmaniana  $\text{Gr}_d(V)$  é o conjunto formado pelos subespaços de  $V$  de dimensão  $d$ . O grupo  $G = \text{Gl}(V)$  age transitivamente em  $\text{Gr}_d(V)$ . Portanto está bem definida a topologia em  $\text{Gr}_d(V)$  descrita na observação A.4.12.*

Todo ponto  $x \in \text{Gr}_d(V)$  pode ser representado como o subespaço de  $V$  gerado por  $d$  vetores adequados (linearmente independentes). Ou seja, existem  $v_1, \dots, v_d \in V$ , tais que  $x = \langle v_1, \dots, v_d \rangle$ , onde  $\langle v_1, \dots, v_d \rangle$  representa o subespaço gerado pelos vetores  $v_1, \dots, v_d$ . O espaço projetivo  $\mathbb{P}V$  é exatamente igual a  $\text{Gr}_1(V)$ .

**Proposição A.4.18** (Compacidade da grasmaniana). *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita  $n$ . Dado  $d \leq n$ , a grasmaniana  $\text{Gr}_d(V)$  é compacta.*

*Demonstração.* Seja  $\text{SO}(V) \in \text{Gl}(V)$  o sub-grupo compacto das transformações ortogonais de determinante positivo. Pela proposição A.4.13, basta mostrar que  $\text{SO}(V)$  age transitivamente em  $\text{Gr}_d(V)$ .

Sejam  $x = \langle v_1, \dots, v_d \rangle, y = \langle w_1, \dots, w_d \rangle \in \text{Gr}_d V$ . Podemos assumir sem perda de generalidade que  $v_1, \dots, v_d$  e  $w_1, \dots, w_d$  são bases ortogonais de  $x$  e  $y$ . Assim, a transformação linear que leva  $v_i$  em  $w_i$  é ortogonal. Se o determinante dessa transformação não for positivo, podemos por exemplo, trocar o sinal de  $w_1$ , fazendo com que essa transformação pertença a  $\text{SO}(V)$ . Como  $x$  e  $y$  eram elementos arbitrários de  $\text{Gr}_d(V)$ , temos que  $\text{SO}(V)$  age transitivamente em  $\text{Gr}_d(V)$ .  $\square$

## A.5 Grupos e Álgebras de Lie

No capítulo 3 utilizamos vários conceitos da teoria de Lie. Os principais resultados e notação estão descritos nesta seção. Para a teoria geral, é necessário definir primeiro os conceitos de *variedade diferenciável* e *aplicação diferenciável*. Neste trabalho utilizamos especificamente os sub-grupos de  $\text{Gl}(V)$ , onde  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita  $n$  sobre  $\mathbb{R}$ . Como este grupo tem uma estrutura de variedade induzida de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , não nos preocuparemos em formalizar a definição de variedade diferencial. Os colchetes de Lie e a função exponencial não serão definidos com toda a generalidade que a teoria possibilita. Todos os resultados desta seção podem ser encontrados, por exemplo, em [Kna02] ou [War83].

**Definição A.5.1** (Grupo de Lie). *Dado um espaço vetorial de dimensão finita sobre  $\mathbb{R}$ , neste trabalho, os grupos de Lie são  $\text{Gl}(V)$  e os subgrupos fechados de  $\text{Gl}(V)$ .*

**Observação A.5.2.** Na teoria geral, os grupos de Lie são variedades diferenciáveis onde a operação do grupo e a operação de inverso são diferenciáveis. O grupo  $\text{Gl}(V)$ , por poder ser identificado com um subconjunto aberto de  $\mathfrak{gl}(V) = \mathbb{R}^{n \times n}$ , já que  $\text{Gl}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid \det(X) \neq 0\}$  e  $\det$  é contínua. Portanto,  $\text{Gl}(V)$  tem estrutura de variedade induzida de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

O teorema 3.42 de [War83] mostra que  $\text{Sl}(V)$  também tem estrutura diferenciável por ser um sub-grupo topológico fechado de  $\text{Gl}(V)$ . Note que  $\text{Sl}(V)$  é fechado pois  $\text{Sl}(V) = \det^{-1}(1)$  e  $\det$  é contínua.

**Definição A.5.3** (Exponencial de matrizes). *Dado  $X \in \mathfrak{gl}(V)$ , a exponencial  $e^X$  é dada por*

$$e^X = I + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^k}{k!} + \cdots .$$

Veja o exemplo 3.35 de [War83].

**Lema A.5.4.** *Se  $g \in \text{Gl}(V)$  é unipotente (definição 2.1.13), então existe  $N \in \mathfrak{gl}(V)$  nilpotente (definição 2.1.1) tal que  $g = e^N$ .*

*Demonstração.* Lemma IX.7.3 p.431 de [Hel78], temos que □

**Definição A.5.5** (Álgebra de Lie). *Sejam  $X, Y \in \mathfrak{gl}(V)$ , o comutador de  $X$  e  $Y$  é definido por*

$$[X, Y] = XY - YX.$$



Uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é um subconjunto de  $\mathfrak{gl}(V)$  tal que o comutador leve elementos de  $\mathfrak{g}$  em elementos de  $\mathfrak{g}$ . Se  $\mathfrak{h}, \mathfrak{k} \subset \mathfrak{gl}(V)$ , então  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}]$  é a álgebra de Lie gerada por elementos da forma  $[X, Y]$ , onde  $X \in \mathfrak{h}$  e  $Y \in \mathfrak{k}$ .

Dado um grupo de Lie  $G < \text{Gl}(V)$ . A álgebra de Lie de  $G$  é o conjunto

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid e^{tX} \in G \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}.$$

**Proposição A.5.6.** A álgebra de Lie de  $\text{Gl}(V)$  é  $\mathfrak{gl}(V)$  e a álgebra de Lie de  $\text{Sl}(V)$  é  $\mathfrak{sl}(V)$ .

*Demonstração.* Sessão 3.37 de [War83]. □

**Definição A.5.7** (Homomorfismo). Sejam  $G$  e  $H$  grupos de Lie. Uma aplicação  $\rho : G \rightarrow H$  é um homomorfismo quando além de ser um homomorfismo de grupos (definição A.4.3), for também diferenciável.

Sejam  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$  duas álgebras de Lie. Uma aplicação  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  é um homomorfismo quando além de ser um homomorfismo dos grupos aditivos  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$ , também satisfizer

$$\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)]$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$ .

**Definição A.5.8** (Representação). Seja  $G$  um grupo de Lie. Dado um espaço vetorial  $V$ , uma representação de  $G$  em  $V$  é um homomorfismo de  $G$  em  $\text{Gl}(V)$ .

Analogamente, seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie. Dado um espaço vetorial  $V$ , uma representação de  $\mathfrak{g}$  em  $V$  é um homomorfismo de  $\mathfrak{g}$  em  $\mathfrak{gl}(V)$ .

**Definição A.5.9** (Representação adjunta). Seja  $G \subset \text{Gl}(V)$  um grupo de Lie e  $\mathfrak{g}$  sua álgebra de Lie. A representação adjunta  $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Gl}(\mathfrak{g})$  é dada por

$$\text{Ad}(X) : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{g} \\ X & \mapsto & gXg^{-1} \end{array} .$$

Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie. Denotamos por  $\text{ad}$  a representação de  $\mathfrak{g}$  em  $\mathfrak{g}$  dada por

$$\text{ad}(X) : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{g} \\ Y & \mapsto & [X, Y] \end{array} .$$

**Proposição A.5.10.** Seja  $X \in \mathfrak{gl}(V)$ . Então, valem as relações:

$$\begin{aligned} e^{\text{ad}(X)} &= \text{Ad}(e^X) \\ \text{ad}(X) &= \left. \frac{d}{dt} \text{Ad}(e^{tX}) \right|_{t=0} . \end{aligned}$$

*Demonstração.* Sessão 3.46 de [War83].  $\square$

**Definição A.5.11.** *Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie. Uma representação  $\rho$  de  $\mathfrak{g}$  em  $V$  é chamada de irreduzível quando os únicos subespaços de  $V$  invariantes por  $\rho$  são  $\{0\}$  e  $V$ . Os subespaços,  $W \subset V$ , invariantes por  $\rho$  são aqueles que para todo  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $\rho(X)W \subset W$ .*

*Quando  $\rho$  é a representação adjunta, então os subespaços invariantes são chamados de ideais de  $\mathfrak{g}$ .*

**Definição A.5.12** (Representação completamente redutível). *Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie. Uma representação  $\rho$  de  $\mathfrak{g}$  em  $V$  é chamada de completamente redutível quando todo subespaço invariante  $W \subset V$  admitir um complemento  $W' \subset V$  invariante. Ou seja, quando existir um subespaço invariante  $W'$  tal que  $V = W \oplus W'$ . Equivalentemente, a representação será completamente redutível quando  $V$  puder ser decomposto em uma soma direta de subespaços irreduzíveis. Isto é, existirem  $W_1, \dots, W_n \subset V$  irreduzíveis, e tais que*

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n.$$

*Onde um ideal  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  é uma sub-álgebra  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ , tal que  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ . No caso da representação adjunta, esta será completamente redutível quando todo ideal  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  admitir um ideal  $\mathfrak{h}'$  tal que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}'$ .*

**Definição A.5.13** (Álgebra de Lie semi-simples). *Uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é semi-simples quando a representação adjunta é completamente redutível e o centro de  $\mathfrak{g}$ ,*

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{A \in \mathfrak{g} \mid [A, X] = 0 \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}\}$$

*é trivial.*

**Definição A.5.14.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie semi-simples. O grupo de Lie  $G = \text{Int}(\mathfrak{g})$  é o sub-grupo de  $\text{Gl}(\mathfrak{g})$  gerado pelos elementos da forma  $e^{\text{ad}(X)}$  para  $X \in \mathfrak{g}$ .*

**Proposição A.5.15.** *Se  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra de Lie semi-simples, então  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ .*

**Teorema A.5.16** (Teorema de decomposição de Weyl). *Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita,  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie semi-simples e  $\rho$  uma representação de  $\mathfrak{g}$  em  $V$ . Então esta representação é completamente redutível.*

*Demonstração.* Teorema 5.6 de [SM99].  $\square$

O Teorema de decomposição de Weyl diz que dada uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  com centro zero, então, se a representação adjunta for completamente redutível, todas as representações serão completamente redutíveis.

**Teorema A.5.17** (Lema de Schur). *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre  $\mathbb{C}$ , e  $\Gamma \subset \mathfrak{gl}(V)$  um subconjunto irredutível. Então, o centralizador*

$$\mathfrak{z}(\Gamma) = \{A \in \mathfrak{gl}(V) \mid [A, X] = 0 \text{ para todo } X \in \Gamma\}$$

*é o subespaço das transformações múltiplas da identidade.*

*Demonstração.* Proposição 3.5, p.82 de [SM99]. □

# Referências Bibliográficas

- [Chi99] Carmen Chicone, *Ordinary differential equations with applications*, Texts in Applied Mathematics, vol. 34, Springer-Verlag New York, Inc., 1999.
- [CK00] Fritz Colonius and Wolfgang Kliemann, *The dynamics of control*, Birkhäuser, Boston, 2000.
- [Con76] Charles C. Conley, *Isolated invariant sets and the morse index*, Expository Lectures from the CBMS Regional Conference, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 38, Conference Board of the Mathematical Sciences, American Mathematical Society, 1976.
- [Fer07] Thiago Ferraiol, *Entropia e ações de grupos de Lie*, Dissertação de Mestrado, Campinas – São Paulo, 2007.
- [FPS08] Thiago Ferraiol, Mauro Patrão, and Lucas Seco, *Jordan decomposition and dynamics on flag manifolds*, 2008.
- [Hel78] Sigurdur Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.
- [Hum94] James E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 9, Springer-Verlag New York, Inc., 1994.
- [Kel58] John L. Kelley, *General topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 27, Springer-Verlag New York, Inc., 1958.
- [Kna02] Anthony W. Knaapp, *Lie groups: Beyond an introduction*, Birkhäuser, Boston, 2002.
- [Pat06] Mauro Patrão, *Semifluxos em fibrados flag e seus semigrupos de sombreamento*, Tese de Doutorado, Campinas – São Paulo, 2006.

- [Pat07] ———, *Morse decomposition of semiflows on topological spaces*, Journal of Dynamics and Differential Equations **19** (2007), 181–198.
- [PSS08] Mauro Patrão, Laercio Santos, and Lucas Seco, *A note on the Jordan decomposition*, 2008.
- [SM99] Luiz A. B. San Martin, *Álgebras de Lie*, Unicamp, 1999.
- [Var74] V. S. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras and their representations*, Prentice-Hall Inc., 1974.
- [War83] Frank W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 94, Springer-Verlag New York, Inc., 1983.