



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

CONSTRUÇÃO DE TABELAS DE SENOS NAS CIVILIZAÇÕES GREGA, ÁRABE E INDIANA

MARCOS VINÍCIUS SOARES RODRIGUES

Brasília, 2020

MARCOS VINÍCIUS SOARES RODRIGUES

**CONSTRUÇÃO DE TABELAS DE SENOS NAS
CIVILIZAÇÕES GREGA, ÁRABE E INDIANA**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de mestre

Dissertação de Mestrado

Orientador: Prof. Dr. Nilton Barroso

Brasília
2020

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

RR696c RODRIGUES, Marcos
CONSTRUÇÃO DE TABELAS DE SENOS NAS CIVILIZAÇÕES GREGA,
ÁRABE E INDIANA / Marcos RODRIGUES; orientador Nilton
BARROSO. -- Brasília, 2020.
73 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em
Matemática) -- Universidade de Brasília, 2020.

1. Trigonometria. 2. História da Matemática. I. BARROSO,
Nilton, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Construções de Tabelas de Seno nas Civilizações Grega, Árabe e Indiana

por

MARCOS VINÍCIUS SOARES RODRIGUES

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 05 de março de 2020.

Comissão Examinadora:

Prof. Nilton Moura Barroso Neto (Orientador)

Prof. Adail de Castro Cavalheiro – MAT/UnB

Prof. Marcelo Fernandes Furtado - MAT/UnB

Resumo

A dissertação a seguir aborda a evolução do desenvolvimento trigonométrico na história da matemática a partir de três olhares: dos gregos, árabes e indianos; iniciando com um estudo minucioso da base sexagesimal dos babilônicos, o sistema numérico usado total ou parcialmente por estes povos. Com relação aos gregos, um estudo do raciocínio de Ptolomeu para a escrita da primeira tábua trigonométrica com precisão confiável – a tábua de cordas – é feita na dissertação. Com respeito aos árabes, tais como Al-Biruni, Al-Kashi e Abu'l-Wafa, descreve-se como eles receberam os trabalhos de gregos e indianos e os refinaram na época de ouro do Oriente Médio. Sobre os indianos, que utilizaram de maneira independente técnicas de interpolação de análise numérica, esta dissertação descreve como eles construíram tábuas de senos tendo como inspiração os trabalhos de Ptolomeu e Ariabata I, este último considerado um dos pioneiros no desenvolvimento científico do Oriente.

Abstract

The following work addresses the evolution of trigonometric development in the history of mathematics from three perspectives: the Greeks, the Arabs, and the Indians; starting with a meticulous study of the sexagesimal basis of the Babylonians, the number system used totally or partially by these people. Regarding to the Greeks, an evolutionary study of Ptolemy's argument to write the first trigonometric table with reliable accuracy – the chords table – is made. Concerning the Arabs, such as Al-Biruni, Al-Kashi and Abu'l-Wafa, this thesis describes how they received works from the greeks and indians and then refined their results in the golden age of the Middle East. About the Indians, who used interpolation methods of numerical analysis in an independent way, this thesis reports how they built sine tables taking inspiration from the works of Ptolemy and Ariabata I, the latter regarded as one of the pioneers in the scientific development of the East.

Sumário

Introdução	1
1 Sistema Numérico Babilônico	4
2 Trigonometria Grega	11
2.1 Primeiros passos: um problema de Hiparco	11
2.2 O Almagesto de Ptolomeu	14
2.3 Cálculo das primeiras cordas	17
2.4 O Teorema de Ptolomeu	19
2.5 A Tábua de Cordas de Ptolomeu	23
3 Trigonometria árabe	28
3.1 Notas Preliminares	28
3.2 Al Biruni	30
3.3 Al-Kashi	32
3.4 Ibn Yunus	36
3.5 Abu'l-Wafa	37
4 Trigonometria Indiana	40
4.1 Notas preliminares	40
4.2 O trabalho de Ariabata e o método das diferenças	42
4.3 A escola de Kerala	45
4.4 Cálculo das Séries de Taylor de seno e cosseno	50
4.5 A fórmula de aproximação para o seno de Bhaskara I	56

Lista de Figuras

1.1	Região denominada Mesopotâmia	4
1.2	Escavações nas colinas da Mesopotâmia: cidade de Ur.	5
1.3	Tablete YBC [<i>Yale Babylonian Collection</i>] 7289.	7
2.1	A eclíptica na esfera celeste.	12
2.2	O ângulo α subtende uma corda $\text{crd } \alpha$	13
2.3	Posição T da Terra em relação à eclíptica.	14
2.4	Variante geocêntrica a partir dos movimentos de epiciclos e deferentes.	15
2.5	A Terra deslocada do centro e o ponto notável E afastados do centro.	15
2.6	Triângulo isósceles de base AB lado de um decágono regular.	17
2.7	Construção de um pentágono regular.	18
2.8	A , B e C são vértices de um triângulo retângulo.	20
2.9	BE definido de forma que $\angle ABE = \angle DBC$	20
2.10	AB e AC são conhecidos.	21
2.11	Determinando arco metade a partir de valores conhecidos.	22
2.12	Determinando a soma de cordas.	23
2.13	Teorema proposto por Aristarco de Samos.	25
3.1	Uso de semelhança de triângulos para determinação da altura da montanha.	30
3.2	Semelhança de triângulos para determinação do raio da Terra.	31
3.3	Método de interpolação para $\text{sen}(1^\circ)$	35
3.4	Concavidade da função no intervalo.	38
4.1	Definições indianas de medidas no círculo.	41
4.2	Método das diferenças.	44
4.3	48
4.4	Visualização da soma de uma progressão aritmética.	48
4.5	Método das diferenças para aproximação em série de potências de seno e cosseno.	52
4.6	As funções $\text{sen}(x)$ e $s(x)$	57

Lista de Tabelas

1.1	Algarismos babilônicos.	6
1.2	Tábua babilônia de multiplicação por 9	8
1.3	Símbolos especiais babilônicos.	9
1.4	Tábua babilônica de recíprocos.	9
2.1	Tábua de cordas de Ptolomeu.	27
3.1	Tabela de senos de al-Samaw'al.	33
3.2	Tabela de sen_R de Al-Kashi	35
3.3	Tabela de sen_R de Ibn-Yunus.	37
4.1	Tabela de sen_R de Varahamihira.	42
4.2	Tabela de senos de Ariabata.	45
4.3	Tabela de sen_R de Madhava.	55
4.4	Tabela de senos pela fórmula de aproximação de Bhaskhara I.	57

Introdução

A história da Matemática revela a evolução científica da humanidade através da resolução de problemas e caracterização de fenômenos da Natureza. Povos, reinos e dinastias deixaram legados perpétuos através de suas conquistas, entre elas as científicas. Falando especificamente da Matemática, três civilizações distintas - gregos, árabes e indianos - produziram resultados na Trigonometria que pavimentaram a estrada para que os europeus dos séculos XV e XVI pudessem consolidá-la como um dos grandes temas da Matemática moderna. Esta dissertação abordará parte do desenvolvimento criado por esses povos nesta disciplina, com enfoque nos métodos utilizados por essas civilizações para a elaboração de tabelas de senos.

Em comum estes povos usavam, definitivamente ou parcialmente, o sistema babilônico de numeração. As nações que habitavam entre o rio Tigres e Eufrates desenvolveram em torno de 2000 a.C. (antes de Cristo, ou Era Comum) um sistema numérico com dois símbolos apenas – Υ e \blacktriangleleft – com contagem em base 60, ou base sexagesimal.

Não há um consenso para explicar o motivo pelo qual 60 foi escolhido, mas certamente traz uma conveniência Matemática chave para o desenvolvimento trigonométrico posterior: evita o inconveniente das frações geratrizes de dízimas periódicas em uma época em que os métodos aritméticos estavam em seus primórdios. Para se ter ideia, considerando 1 como numerador e denominadores de 2 a 20, 12 denominadores levariam a dízimas periódicas na base decimal, enquanto que na base sexagesimal, teríamos apenas 6. De fato, no estudo de funções trigonométricas sabe-se que a maioria dos valores são irracionais¹, exigindo dos matemáticos imensa precisão nos cálculos e técnicas de aproximação cada vez mais sofisticadas para que os grandes resultados surgissem. Com certeza a base sexagesimal dos babilônicos é a melhor escolha nesse caso e é sobre o sistema numérico babilônico que trata o capítulo 1 do presente trabalho.

Na Grécia, berço ocidental da ciência como a conhecemos hoje, temos na pessoa de Ptolomeu (séc. II d.C.) a principal referência no tratamento minucioso das funções trigonométricas. Seus objetivos eram intimamente ligados à Astronomia (como veremos o mesmo se dava com os árabes e indianos), ele usava seus resultados para obter maior precisão em cálculos de posição e movimento de corpos celestes capazes de melhor explicar seu modelo para o universo. Assim sendo, ele se inspirou no movimento aparente dos corpos celestes e na função circular outrora definida por Hiparco de Niceia (séc. II a.C.), chamada corda de um arco circular ($\text{crd}(\alpha)$, na notação que adotamos no texto) para construir uma das primeiras tábuas trigonométricas de alta precisão. Infelizmente não temos acesso aos registros dos trabalhos de Hiparco, apenas menções às suas te-

¹O Teorema de Niven (1956), assim nomeado em homenagem ao matemático canadense Ivan Morton Niven (1915-1999), estabelece que os únicos valores racionais de θ no intervalo $[0, 90^\circ]$ para os quais $\text{sen}(\theta)$ também é um número racional são 0 , $\frac{1}{2}$ e 1 .

orias astronômicas e seu modelo geocêntrico, no qual a Terra é deslocada do centro para permitir que as hipóteses conciliem-se às observações empíricas. No capítulo 2 veremos como a teoria de Hiparco motivou a construção de uma tábua trigonométrica e como isso inspirou Ptolomeu a obter uma tabela completa de cordas variando de meio em meio grau usando apenas alguns resultados obtidos geometricamente, a saber, 36° , 60° , 72° , 90° e 120° e relações métricas no círculo, análogas de conhecidas fórmulas da trigonometria moderna.

Conforme veremos, ao contrário do seno atual, a função crd depende do raio do círculo em questão. A relação entre a função crd e o seno moderno é dada por $\text{crd}(\alpha) = 2R \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Apesar de parecer uma limitação, a liberdade de escolha para os valores de R permitiu reduzir os inconvenientes com frações cujo cálculo era muito penoso com os métodos disponíveis à época.

O mundo árabe recebeu o bastão dos gregos para se tornar referência mundial do conhecimento e da ciência. Também na Matemática, uma geração de astrônomos e cientistas de um modo geral aperfeiçoaram os trabalhos que receberam tanto da Grécia quanto da Índia. Motivados pelo forte apego à religião, a incessante busca pela precisão em cálculos diversos, desde o calendário até a direção de Meca, os árabes desenvolveram o que há de melhor na trigonometria pré-moderna oriental.

O capítulo 3 descreve primeiramente os resultados de Abu al-Rayhan Muhammad ibn Ahmad Al-Biruni, ou simplesmente Al-Biruni (973-1048 d.C.), um polímata que escreveu trabalhos desde medicina até mineralogia. Em um de seus mais famosos resultados de Matemática e Astronomia, ele usou semelhança de triângulos e o cosseno do arco de 34 minutos para determinar o raio da Terra com erro de aproximadamente 2%. Considerando as tábuas de cordas, elaborou um método engenhoso para chegar ao valor de $\text{crd}(1^\circ)$ a partir do arco de 42° . Partindo daí, usando as fórmulas de soma e do arco metade, Al-Biruni obteve um valor incrivelmente preciso para $\text{crd}(40^\circ)$, ângulo que não pode ser construído com recursos elementares de geometria. Finalmente, novas sucessivas aplicações de fórmulas trigonométricas conhecidas o levaram a um valor incrivelmente preciso de $\text{crd}(1^\circ)$.

O astrônomo Jamshid Al-Kashi (c. 1380) teve uma abordagem bem moderna para obter valores mais precisos para sua respectiva tábua de senos. Usando análise numérica ao procurar a igualdade entre as duas funções $f(x) = x$ e $g(x) = \frac{\text{sen}(3^\circ) + 4x^3}{3}$, sendo que a $g(x)$ é obtida a partir da relação do seno do arco triplo, Al-Kashi utilizou a técnica chamada iteração do ponto fixo para conseguir um valor com precisão até a sétima casa sexagesimal, ou seja, até a décima segunda casa decimal. Ibn Yunus, astrônomo egípcio que viveu no final do século X, melhora os argumentos usados por Ptolomeu, usando valores mais próximos de 1° para realizar as aproximações. Além disso, ele teve uma ideia inovadora ao usar o valor de um mesmo arco a partir de dois caminhos diferentes para refinar o erro da aproximação e assim obter $\text{sen}(1^\circ) = 1; 2, 49, 43, 4$, sendo que a única alteração necessário seria o 4 da última casa por 11. Abu'l-Wafa (940-998) descobriu que a função seno é côncava entre 0° e 90° , a partir disso ele observou que sucessivas diferenças de senos diminuem à medida que o arco aumenta. Com esse resultado e os valores dos senos de $\left(\frac{15^\circ}{32}\right)$ e $\left(\frac{18^\circ}{32}\right)$ como suportes, ele chegou ao valor do seno de meio grau com uma precisão maior que a de Ibn Yunus com um grau.

Índia, nação mais conhecida pelo sincretismo religioso, superpopulação e história

como capital portuária de especiarias, guarda em seus registros uma produção científica de grande valia. Também motivados pelos estudos astronômicos, os indianos produziram um vasto material na busca por uma tábua de senos precisa. O capítulo 4 aborda os trabalhos de Ariabata (500 d.C.) que para construir sua tábua de sen_R elaborou o que hoje é conhecido como método das diferenças para obter maior precisão nos resultados.

A partir deste e de outros resultados de Ariabata em sua obra *Aryabhatiya*, reuniram-se em Kerala os principais estudiosos da Índia para discutir os avanços na Astronomia e Matemática. Esta reunião acabou se tornando com o tempo uma escola, um centro de estudos de alto nível que formou mais de uma dezena de matemáticos e astrônomos de grande relevância no campo científico oriental durante cinco séculos. As principais descobertas da escola de Kerala surpreendem por antecipar em mais de um século resultados obtidos na época da revolução do Cálculo na Europa. Desde a convergência de séries infinitas até métodos sofisticados de interpolação, alguns resultados impressionam pela maneira independente com que foram alcançados. Talvez os principais deles sejam as séries de potências de seno, cosseno e arco tangente, derivando dessa última a fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

para a qual elaboraram engenhosos métodos de arredondamento para calcular π com enorme precisão para a época.

O capítulo sobre trigonometria indiana encerra-se com a surpreendente aproximação racional para a função sen descoberta por Bhaskhara I (c. 600 d.C.)

$$s(x) = \frac{4x(180 - x)}{[40500 - x(180 - x)]},$$

em que x é medido em graus e $0 \leq x \leq 180$. Essa aproximação tem grande precisão, errando por não mais que 1%.

Capítulo 1

Sistema Numérico Babilônico

Na construção de suas tábuas trigonométricas, gregos, indianos e árabes têm uma coisa em comum: de uma forma ou de outra utilizaram o sistema numérico sexagesimal babilônico para escrevê-las. Portanto, para bem compreender os pensamentos e raciocínios destas três diferentes culturas, convém que façamos uma breve explicação das principais características desse sistema numérico deixando claro qual sua vantagem sobre os demais sistemas disponíveis à época.

Chamamos de Mesopotâmia a região entre os rios Tigres e Eufrates que ocupa hoje regiões do Iraque e uma pequena parte do Kuwait. Nessa região habitaram ou co-habitaram diversos povos que alternaram-se no poder político e econômico. Cada um desses povos elegeu uma cidade diferente como capital do seu império, assim temos as cidades da Babilônia, Ur, Uruk, Nippur, entre outras (ver figura 1.1). De uma forma geral chamaremos de babilônicos aos povos que viveram na Mesopotâmia entre 4000 a.C. e 300 a.C.



Figura 1.1: Região denominada Mesopotâmia

Historiadores acreditam que a escrita foi inventada na Mesopotâmia por um gênio sumério, cerca de 6000 anos atrás. O primeiro sistema de escrita era parcial, ou seja, não era adequado para representar os sons da voz humana, mas tinha fins práticos: auxiliar

na administração cada dia mais complicada das grandes cidades que começavam a surgir após a revolução agrícola de 12.000 anos atrás: coleta de impostos, divisão da terra, manutenção de um calendário, registro de previsões astronômicas, etc. A invenção da escrita foi um passo necessário quando o processamento de dados requerido nessas atividades ultrapassou em muito a capacidade do cérebro humano. Foi nesse contexto que a Matemática surgiu como mais um sistema de linguagem parcial: não é útil para escrever poesias mas sua beleza e poder como ferramenta de processamento de dados era certamente ignorado ou subestimado pelos seus pioneiros inventores; até hoje desconhecemos seus limites.

No começo do século XIX, escavações nas colinas da Mesopotâmia trouxeram à tona cerca de meio milhão de escritos babilônicos dos quais quase quinhentos eram puramente matemáticos. A partir da tradução desses textos que foi possível caracterizar e estudar o que conhecemos hoje sobre a Matemática babilônica, sua forma de escrita e alguns resultados importantes. A maioria desses escritos são datados entre 1800 e 1600 a.C.. O segredo para sua preservação está na forma como esses escritos foram produzidos. Eram feitos em tábuas de barro úmidas marcadas com o uso de uma espécie de estilete; a argila então era cozida ao sol ou em fornos e o resultado são impressões na tábua em forma de cunha, por isso chama-se essa escrita de *cuneiforme*. Essas tábuas eram escritas na linguagem babilônica, uma variante semítica na maioria das vezes relacionada com a linguagem arábica e hebraica.



Figura 1.2: Escavações nas colinas da Mesopotâmia: cidade de Ur.

A partir de cerca de 2000 a.C., os babilônicos desenvolveram um sistema numérico em que somente dois símbolos eram usados: um com formato de “T” ou de um prego que representava a unidade numérica, e outro com formato de asa ou triângulo apontando para a esquerda que representava a dezena numérica. A tabela 1.1 mostra a representação babilônica para os números de alguns números:

┘	▯	▯▯	▯▯▯	▯▯▯▯	▯▯▯▯▯	▯▯▯▯▯▯	▯▯▯▯▯▯▯
1	2	3	4	5	6	7	8
▯▯▯	◁	◁┘	◁▯	◁▯▯	◁▯▯▯	◁▯▯▯▯	◁▯▯▯▯▯
9	10	11	12	13	14	15	16
◁◁	◁◁◁	◁◁◁◁	◁◁◁◁◁	◁◁◁◁◁┘	◁◁◁◁◁▯	◁◁◁◁◁▯▯	┘
20	30	40	50	51	52	59	60(!)
┘┘	┘▯	┘◁	┘◁◁	┘◁◁◁	┘◁◁◁◁	▯▯◁◁	▯▯▯
61	62	70	80	90	100	200	300

Tabela 1.1: Algarismos babilônicos.

Os babilônicos foram os primeiros a perceber que os mesmos símbolos podem representar valores diferentes de acordo com a posição entre eles: começamos de um até 59, daí em diante acrescentamos uma cunha \top à direita e reiniciamos a contagem de 1 até 59 e assim prosseguimos. Lendo os símbolos da esquerda pra direita podemos facilmente saber o número que eles representam. Por exemplo, o número 95 poderia ser representado como

$$\top \lll \text{▯}$$

isto é,

$$1 \times 60 + 35,$$

o símbolo da unidade à esquerda e o símbolo para 35 à direita. Tudo se passa exatamente como fazemos para representar nossos números, a diferença é que utilizamos apenas dez símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, enquanto os babilônicos utilizavam 59 (ou $\lll \text{▯}$, se fosse um babilônico a escrever esse texto!).

Havia neste sistema numérico uma limitação: como não havia símbolo para representar o zero, o sistema apresentava ambiguidades; por exemplo, o número ▯ pode significar 5, $5 \times 60 = 300$, $5 \times 60^2 = 18.000$, etc., dependendo de qual posição atribuímos ao símbolo em questão [1]. Em alguns textos, caso fosse necessário representar alguma “casa vazia”, os babilônios apenas deixavam um espaço maior entre dois símbolos:

$$\begin{aligned} \text{▯} &= 5 \\ \text{▯} &= 300 \quad (5 \times 60) \\ \text{▯} &= 18.000 \quad (5 \times 60^2) \end{aligned}$$

Para melhor entendimento dos números babilônicos, os tradutores adicionaram a vírgula (,) para poder distinguir a posição dos números e o ponto-e-vírgula (;) para separar os valores inteiros dos valores fracionários. Portanto, nessa notação, a representação decimal do número pode ser alcançada (i) multiplicando-se sucessivamente os números à esquerda do ponto-e-vírgula por 60^0 , 60^1 , 60^2 , etc., (ii) dividindo-se os números à direita do ponto-e-vírgula sucessivamente por 60^1 , 60^2 , etc. e (iii) somando-se os valores obtidos. Por exemplo, o número babilônico $\top \lll \text{▯}$ é traduzido como 1,15 e sua representação em base decimal é $1 \cdot 60^1 + 15 \times 60^0 = 75$. Outro exemplo é 1;20 equivale a

$$1 + \frac{20}{60} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Um exemplo famoso é o número 1; 24, 51, 10; ele foi encontrado em uma tábua com um desenho de um quadrado e suas diagonais, com o número “1; 24, 51, 10” escrito, veja a figura 1.3.



Figura 1.3: Tablete YBC [Yale Babylonian Collection] 7289.

No tablete YBC 7289 vemos 3 números

$$\begin{aligned} a &= \lll, \\ b &= \lrcorner \lll \lll \lrcorner, \\ c &= \lll \lll \lll. \end{aligned}$$

Traduzindo-se

$$\begin{aligned} a &= 30, \\ b &= 1, 24, 51, 10, \\ c &= 42, 25, 35. \end{aligned}$$

Observa-se que

$$c = ab.$$

Se a representa o lado de um quadrado, como é sugerido pela figura, então, pelo teorema de Pitágoras, a sua diagonal satisfaz $c^2 = 2a^2$, ou seja, $c = a\sqrt{2}$; assim

b deveria ser uma aproximação para $\sqrt{2}$. De fato, interpretando o número b como 1; 24, 51, 10, ou seja,

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$$

temos que

$$b = 1,414212963$$

que é igual a $\sqrt{2}$ até a quarta casa decimal! Esse exemplo demonstra que o calculistas babilônicos possuíam grande habilidade na manipulação algébrica. De fato, como mencionado em [1], eles eram capazes de realizar qualquer cálculo numérico com a mesma desenvoltura que fazemos hoje. Vejamos como isso era possível.

A seguir reproduzimos uma tábua babilônica encontrada durante as escavações da mesopotâmia:

Frente		Verso	
1	9	15	2,15
2	18	16	2,24
3	27	17	2,33
4	36	18	2,42
5	45	19	2,51
6	54	20	3,0
7	1,3	30	4,30
8	1,12	40	6,0
9	1,21	50	7,30
10	1,30	8,20	$\times 1$ 8,20
11	1,39		
12	1,48		
13	1,57		
14	2,6		

Tabela 1.2: Tábua babilônica de multiplicação por 9

Uma rápida análise demonstra que trata-se, claramente, de uma tábua de multiplicação por 9. A última linha do verso, onde lê-se

$$500 \times 1 = 500,$$

é chamada de *linha de transição* e corresponde à primeira linha da próxima tabela que se inicia no mesmo tablete. Observe que a tábua tem a forma

$$\begin{array}{ll} 2 & 2p \\ 3 & 3p \\ & \vdots \\ 20 & 20p \\ 30 & 30p \\ 40 & 40p \\ 50 & 50p \end{array}$$

em que $p = 9$. Toda as tabelas de multiplicação encontradas seguem esse mesmo padrão. A multiplicação por números diferentes daqueles encontrados nas tabelas era feita por adição; assim, para multiplicar 9 por 27, somava-se

$$9 \times 7 + 9 \times 20 = 1,3 + 3,0 = 4,13 = 7 \times 60 + 30 = 243.$$

Em notação babilônica, os mesmos símbolos eram usados para representar frações e o valor de cada símbolo deve ser inferido pelo contexto do problema em que se encontra. Por exemplo, o símbolo \llcorner , pensado como uma fração, é o nosso $\frac{20}{60}$; da mesma forma $\llcorner\lrcorner$ representa em base 10 o número $\frac{21}{60}$ ou $\frac{20}{60} + \frac{1}{60^2}$ (também $21, 20 \times 60 + 1, \dots$). Algumas frações eram representadas por símbolos especiais:

1/2	1/3	2/3	5/6
\lrcorner	$\lrcorner\lrcorner$	$\lrcorner\lrcorner\lrcorner$	$\lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner$

Tabela 1.3: Símbolos especiais babilônicos.

Considere agora a seguinte tábua babilônica:

2	0;30	16	0;3,45	45	0;1,20
3	0;20	18	0;3,20	48	0;1,15
4	0;15	20	0;3	50	0;1,12
5	0;12	24	0;2,30	54	0;1,6,40
6	0;10	25	0;2,24	60	0;1
8	0;7,30	27	0;2,13,20	1,4	0;0,56,15
9	0;6,40	30	0;2	1,12	0;0,50
10	0;6	32	0;1,52,30	1,15	0;0,48
12	0;5	36	0;1,40	1,20	0;0,45
15	0;4	40	0;1,30	1,21	0;0,44,26,40

Tabela 1.4: Tábua babilônica de recíprocos.

A tabela 1.4 é chamada de tabela de recíprocos e dá o inverso do número a esquerda na coluna seguinte. De fato, por exemplo, na última linha encontramos à esquerda $1,21 = 1 \times 60 + 21 = 81$ e à direita $0;0,44,26,40$ que é igual a

$$\frac{44}{60^2} + \frac{26}{60^3} + \frac{40}{60^4} = \frac{1}{81}.$$

Havia diversas tabelas de multiplicação e recíprocos como as que vimos. Os babilônios as utilizavam da mesma forma que utilizamos as tábuas de multiplicação por 10 para realizar nossos cálculos. Por exemplo, se desejamos representar o nosso número $7/3 = 7 \times \frac{1}{3}$ no sistema numérico babilônico, começamos procurando em uma tabela o recíproco de 3 ($\lrcorner\lrcorner$), que é $0;20$ (\llcorner). Checamos agora em uma tabela de multiplicação por 7 e obtemos $2,20$ ($\lrcorner\llcorner$). De fato,

$$2 + \frac{20}{60} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Na tabela 1.4 observa-se a ausência de alguns números nas colunas da esquerda: começamos com 2, 3, 4, 5, 6, mas pula-se o sete; segue-se do oito até o dez, mas pula-se o onze. Esses números são evitados porque não possuem expansão sexagesimal finita, isto é, não podem ser escritos a partir de um número finito de símbolos babilônicos. Lembre que um número $\frac{a}{b}$ tem expansão *decimal* finita se, e somente se, b por ser escrito como uma potência de 10; como $10 = 2 \times 5$ isso é possível apenas quando b tem apenas 2 ou 5 como fatores primos. Semelhantemente, como $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, o número $\frac{a}{b}$ terá expansão *sexagesimal* finita se o denominador tiver como fatores primos apenas 2, 3 ou 5 (quando expressamos b em base 10).

Assim temos mais frações com representações sexagesimais finitas do que suas análogas decimais. Por exemplo, entre as frações

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{20}$$

apenas sete darão decimais exatas (finitas), mas treze darão sexagesimais finitas. Vê-se agora a vantagem de um sistema de numeração sexagesimal: *ele é muito mais preciso que o decimal*, porque há mais frações exatas. Essa foi a propriedade fundamental que levou grandes pensadores da antiguidade a escolher o sistema babilônico no momento de construir suas tabelas: eles simplesmente procuravam diminuir o inconveniente das frações.

Entre os anos 700 e 300 a.C. os babilônicos adicionaram um símbolo especial para indicar a separação de dois símbolos: \sphericalangle . Entretanto, nenhum símbolo é usado para representar o zero à direita como no nosso número 340 – as ambigüidades eram dirimidas pelo contexto em que os símbolos ocorriam. Apesar disso, este desenvolvimento foi um passo adiante no uso do zero como nulo posicional. Este novo símbolo eliminava os mal entendidos que aconteciam com frequência nos registros anteriores, por exemplo, $\Uparrow \sphericalangle \nabla$ significa $1 \times 60^2 + 0 \times 60 + 4 = 3604$

Ainda é controversa a explicação do motivo pelo qual os babilônicos teriam escolhido o número 60 como base do seu sistema de numeração. Pode-se especular que tal escolha tenha relação com o maior número de frações exatas nesse sistema, mas outras explicações são possíveis. Um hipótese [1] assegura que unidades de medida muito usadas na época eram tais que uma era um múltiplo de 60 da outra e isso favoreceu o sistema sexagesimal em detrimento dos outros. Fato é que a adoção da base 60 pelos babilônios nos legou a divisão da circunferência em 360 partes iguais (grau), a divisão do dia em 24 horas, horas e minutos em 60 minutos e segundos respectivamente e daí em diante. Os números 360, 60 e 24 são todos exatos em base sexagesimal.

Capítulo 2

Trigonometria Grega

2.1 Primeiros passos: um problema de Hiparco

Hiparco de Nicea (190 - 120 a.C.) talvez tenha sido o maior astrônomo da antiguidade. Ptolomeu, de quem trataremos na seção seguinte, faz referências a suas observações entre 161 e 126 a.C., de onde inferimos o período em que viveu. Hiparco é lembrado especialmente por ter previsto o que hoje chamamos de *precessão dos equinócios*, uma espécie de balanço executado pelo eixo de rotação da Terra muito semelhante ao movimento de um peão; concluiu esse fato comparando suas observações com aquelas feitas por astrônomos Babilônicos cerca de 150 anos antes – embora a precessão se dê de forma muito lenta com período de 46.000 anos, as diferenças já eram observáveis nesse lapso de tempo. Mais ainda, Hiparco elaborou um mapa do céu noturno com mais de 850 estrelas fixas, construiu instrumentos usados em observações astronômicas por gerações, verificou que o ano solar trópico é de 365 dias, 5 horas, 55 minutos e 12 segundos (valor que excede o atual por 6 minutos e meio) e calculou o período sinódico da Lua, ou seja, o que observamos da Terra, como sendo 29,530585 dias, menos de um segundo daquele que é atualmente adotado 29,530596.

Hiparco foi o primeiro cientista grego a fazer uso sistemático da trigonometria em seu trabalho e é quase certo que foi o primeiro a construir o equivalente a uma tabela de senos, embora nenhum fragmento dela tenha sido preservada. A necessidade para elaboração de tal tabela veio da busca pela solução de um intrigante problema sobre o movimento planetário que aparentemente colocava em xeque toda a concepção grega sobre a perfeição e uniformidade do movimento dos corpos celestes. Para perfeita compreensão do problema, convém fazer uma rápida digressão sobre a astronomia grega da época.

Observações do céu noturno demonstram que as estrelas deslocam-se em trajetórias concêntricas no sentido horário, fato que pode ser facilmente verificado por um observador diligente e boa disposição. Baseados em suas observações e em alguns outros fatos bem convincentes – o simples fato que não percebemos qualquer movimento da Terra ou a ausência de paralaxe estelar, por exemplo – os antigos astrônomos gregos acreditavam que a Terra ocupava uma posição fixa no centro do universo enquanto todos os demais corpos celestes giravam ao redor dela em movimentos *circulares* e *uniformes*¹ Acreditava-se que esses movimentos eram perfeitamente circulares e uni-

¹O cientista grego Aristarco de Samos (310-230 a.C.) sugeriu um modelo heliocêntrico para o

formas por puro preconceito, uma vez que a concepção grega da natureza sugeria que ela deveria ser explicada a partir de formas perfeitas e dos movimentos mais simples. Hoje sabemos que esse movimento de rotação das estrelas é apenas aparente, devido ao movimento de rotação da Terra no sentido anti-horário.

Tomando a Terra como ponto de referência fixo, podemos projetar todos os corpos celestes em uma esfera de raio muito grande com centro na Terra, chamada *esfera celeste*. Assim, pelo que vimos, todos os corpos celestes devem se deslocar em movimento circular uniforme sobre a esfera celeste. Entretanto, uma observação mais detalhada do Sol demonstra que, descontado seu movimento diurno aparente, após um dia completo ele não terá retornado ao mesmo ponto inicial: isso pode ser verificado a cada por-do-Sol, quando as estrelas aparecem; cada noite o sol terá se deslocado aproximadamente um 1° em relação às estrelas vizinhas, o equivalente a duas vezes o seu diâmetro aparente. Dessa forma, ao longo de um ano, $365\frac{1}{4}$ dias aproximadamente, o Sol terá descrito na esfera celeste um círculo chamado de *eclíptica*. Esse círculo é descrito no sentido anti-horário e está inclinado aproximadamente $23\frac{1}{2}^\circ$ em relação ao plano do equador celeste – o correspondente à linha do Equador, só que na esfera celeste. Veja figura abaixo.

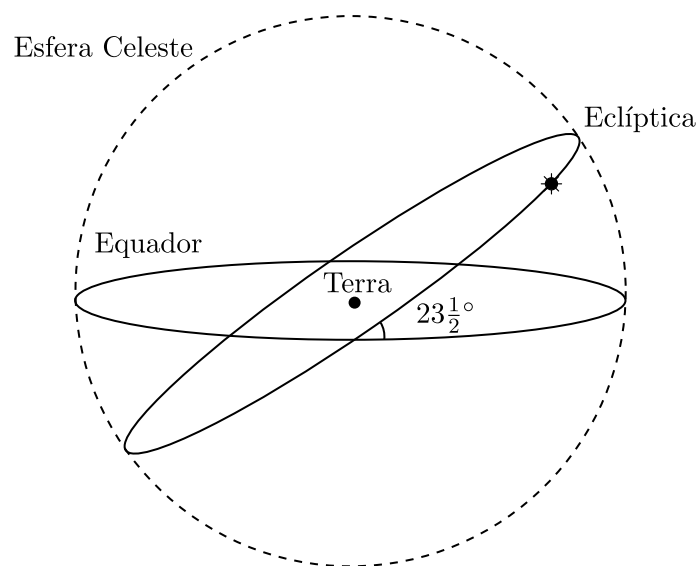


Figura 2.1: A eclíptica na esfera celeste.

Os pontos onde a eclíptica encontra-se com o equador celeste correspondem aos únicos dias do ano em que o Sol nasce no verdadeiro leste e põe-se no verdadeiro oeste, também são os únicos dias em que as durações do dia e da noite são iguais. São os dias 21 de março e 22 de setembro, chamados no hemisfério norte de *equinócios* da primavera e outono, respectivamente (no hemisfério sul os papéis se invertem). Esses pontos marcam o início da primavera e do outono. Os pontos que marcam o início do

universo. Seu trabalho que chegou até nós *Sobre os Tamanhos e Distâncias do Sol e da Lua* é o primeiro a utilizar matemática para abordar o assunto. Em seu tratado *O Contador de Areia*, Arquimedes (288-212 a.C.), um contemporâneo mais jovem, nos dá uma boa descrição do modelo de Aristarco. Quando Hiparco adotou o modelo geocêntrico sua autoridade no assunto fez com que as ideias de Aristarco fossem esquecidas até serem redescobertas por Copérnico quase dois mil anos mais tarde!

verão e do inverno são chamados de *solstícios*. Para mais detalhes sobre o assunto o leitor interessado pode consultar [14] ou [11].

Hiparco, bem como os astrônomos babilônicos antes dele, conheciam todos esses movimentos celestiais. Entretanto Hiparco fez novas descobertas ao analisar mais cuidadosamente o movimento do Sol. Ele observou que o tempo que o Sol leva do equinócio de primavera até o de outono é aproximadamente 186 dias, restando apenas 179 dias para a outra metade da órbita solar ao longo da eclíptica. Isso significaria que, em média, o Sol desloca-se mais lentamente entre março e setembro do que no restante do ano! Como explicar essa observação? Hiparco não estava pronto para romper com a tradição dos movimentos circulares uniformes e a única forma que encontrou para conciliar tais hipóteses com as observações foi propor que a Terra não ocuparia o centro da eclíptica; movendo a Terra para uma posição excêntrica, afastando-a do Sol na primavera, Hiparco pôde efetivamente prolongar essa estação.

Mas qual a posição exata da Terra? Para responder essa pergunta Hiparco inventou a primeira função trigonométrica da história: a corda subtendida pelo ângulo, fundando a disciplina que hoje conhecemos como trigonometria. Veja a figura 2.2

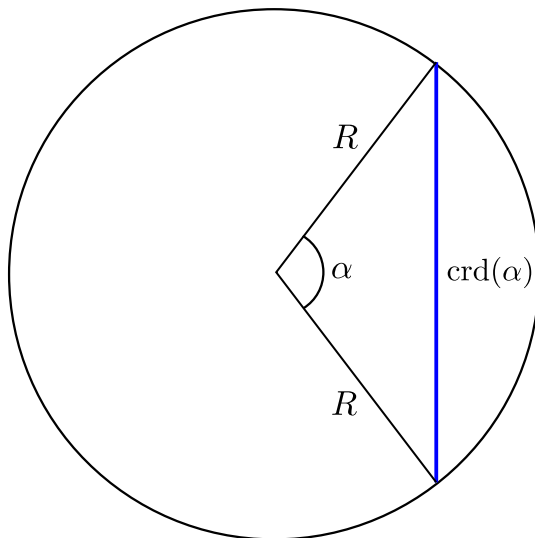


Figura 2.2: O ângulo α subtende uma corda $\text{crd} \alpha$.

Para entender como o conhecimento da corda associada ao ângulo permite resolver o problema, basta observar a figura 2.3. Primeiramente, lembrando que $365\frac{1}{4}$ dias correspondem a 360° , Hiparco converteu a duração das estações para graus. Assim, calculou que o ângulo entre os solstícios de verão e inverno era de aproximadamente $176^\circ 18'2$. Com uma tabela de cordas em mãos pode-se calcular o comprimento do segmento AC usando o teorema de Pitágoras pois o triângulo retângulo formado por A , C e o ponto correspondente ao solstício de verão tem hipotenusa igual ao raio do círculo e outro cateto dado pela metade de $\text{crd}(176^\circ 18')$. O mesmo método é utilizado para calcular BC e finalmente, uma vez mais pelo teorema de Pitágoras, encontramos

$$TC = \sqrt{AC^2 + BC^2}.$$

²Desde os primeiros astrônomos da antiguidade até Isaac Newton no século XVII, o *grau* representava uma medida de comprimento (de arco), não de ângulos. Dessa forma seria mais preciso dizer que Hiparco calculou que o *arco* entre os solstício de verão e inverno valia aproximadamente $176^\circ 18'$.

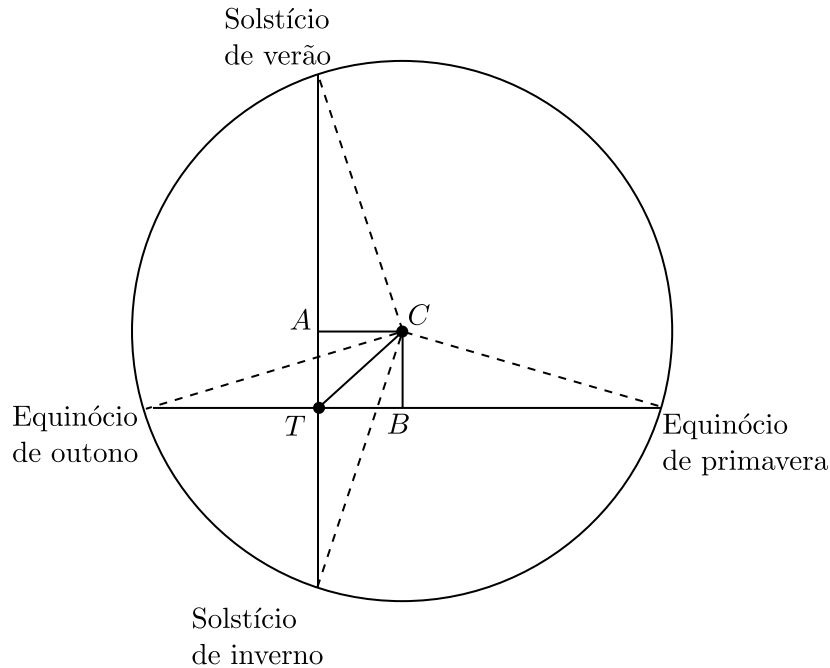


Figura 2.3: Posição T da Terra em relação à eclíptica.

O cálculo da distância TC , ou seja, o cálculo da excentricidade da órbita do Sol, talvez tenha sido o primeiro problema trigonométrico da história [1]. Embora não tenhamos informações mais precisas sobre as tabelas de Hiparco, sua influência e impacto nas gerações futuras de astrônomos foi inquestionavelmente fundamental e duradoura, conforme veremos ao longo desse trabalho.

2.2 O Almagesto de Ptolomeu

Cláudio Ptolomeu, que floresceu na segunda metade do século II, viveu em Alexandria e são devidos a ele os primeiros registros históricos de tábuas trigonométricas. Sua obra prima, cujo título original **Μαθηματικῆς Συναχισ βιβλία ιγ** é geralmente traduzido como *Coleção Matemática*, forma um compêndio de 13 livros sobre os corpos celestes e seus movimentos. Quando chegou às mãos dos árabes o trabalho de Ptolomeu recebeu o título *Kitab al-majisti*, que significa *O Maior dos Livros*. Desde então a obra de Ptolomeu é conhecida pela versão latina do seu título árabe: O Almagesto.

Ptolomeu propôs um modelo para o universo que explicava o movimento dos corpos celestes a partir da noção de diferentes movimentos circulares uniformes acoplados³: em uma versão simplificada desse modelo, um planeta desloca-se em movimento circular uniforme em um círculo chamado de *epiciclo*, enquanto o centro do epiciclo C descreve um movimento circular uniforme em um outro círculo chamado *deferente* que tem seu centro na Terra. Assim Ptolomeu conseguiu explicar o movimento retrógrado dos planetas e, mais importante, a observação de que durante esse movimento retrógrado o brilho aparente dos planetas aumenta, significando que nessa fase de suas órbitas devem estar mais próximos da Terra.

³Essas ideias são, provavelmente, de Hiparco tendo sido compiladas e elaboradas por Ptolomeu no *Almagesto*.

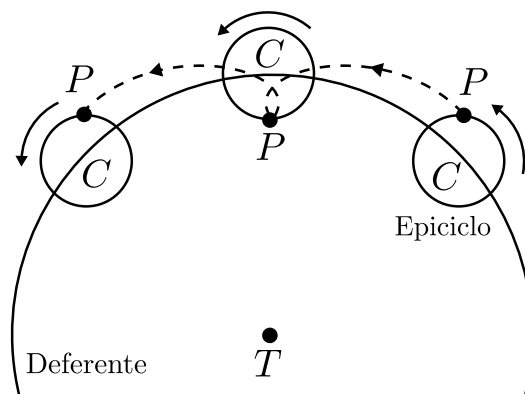


Figura 2.4: Variante geocêntrica a partir dos movimentos de epiciclos e deferentes.

Posteriormente, para melhor ajustar seu modelo às observações, Ptolomeu deslocou a Terra do centro do deferente O para uma posição excêntrica T ; no raio oposto a OT Ptolomeu tomou um ponto E tal que $EO = OT$ e o chamou de *equante*; nessa situação o centro do epiciclo executa um movimento circular uniforme no deferente mas em relação ao ponto E , não mais em relação a Terra T ou ao centro do deferente O . Com isso Ptolomeu conseguiu explicar porque os movimentos retrógrados dos planetas não tinham sempre o mesmo aspecto e duração. O modelo de Ptolomeu se ajustava às observações com um nível de precisão de menos de 2° , o que deu enorme credibilidade ao seu trabalho e fez com que prevalecesse durante mais de 15 séculos – até hoje o modelo astronômico mais bem sucedido por mais tempo na história.

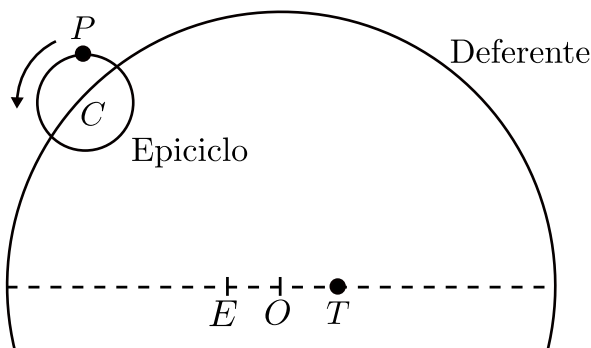


Figura 2.5: A Terra deslocada do centro e o ponto notável E afastados do centro.

Para o estudo do movimento dos corpos celestes que como vimos, seguindo a tradição da época, deveriam deslocar-se em trajetórias circulares com movimentos uniformes, as funções circulares como os nossos atuais senos e cossenos são indispensáveis. Ptolomeu, seguindo Hiparco, adotou a corda subtendida pelo ângulo como função trigonométrica fundamental.

Quando o trabalho de Ptolomeu chegou aos indianos eles substituíram a corda pela meia-corda, que chamaram de *jya*. Alguns anos mais tarde, os trabalhos dos matemáticos indianos caíram nas mãos dos árabes e a palavra *jya*, sem significado em árabe, foi transliterada como *jiba*; seguindo o costume de omitir as vogais de uma palavra deixando que o leitor as acrescente – semelhante ao que fazemos com as palavras *você* (vc), *também* (tmb) – os matemáticos árabes escreviam em seus trabalhos simplesmente

jb. Em pouco tempo as vogais foram preenchidas de maneira a formar uma palavra que tinha sentido no idioma: *jaib*, que significa *enseada*, *litoral*. Por fim, quando os trabalhos dos árabes chegaram aos matemáticos europeus a meia-corda dos indianos foi batizada pela palavra latina para litoral: *sinus*. Eis a origem da palavra *seno*.

Deve-se notar que o *seno* definido pelos indianos depende do raio do círculo utilizado para realizar os cálculos: para diferentes círculos, diferentes senos. A moderna concepção do seno como o quociente do lado oposto pela hipotenusa de um triângulo retângulo é devida ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), tendo sido formulada, portanto, apenas no século XVIII; o seno de Euler tem a vantagem de variar apenas em função do ângulo, sem depender do círculo em questão, fato que pode ser rapidamente verificado por semelhança de triângulos. Portanto, em um círculo de raio R , se sen_R e sen representam os senos antes e depois de Euler, respectivamente, então eles mantêm a seguinte relação fundamental:

$$\text{sen}_R(\theta) = R \text{sen}(\theta), \quad (2.1)$$

em que R é o raio do círculo em questão. O que lemos nas tábuas trigonométricas de astrônomos gregos, indianos e árabes são valores e $\text{sen}_R(\theta)$ para algum R apropriado e, por essa razão, em algumas referências pesquisadas, o primeiro é chamado de *Rseno*. A fim de trazer uniformidade ao trabalho, tentaremos, sempre que possível, reformular conceitos e tabelas em função de $\text{sen}(\theta)$. Entretanto, para eventuais referências é bom lembrar do conceito de $\text{sen}_R(\theta)$.

Como em uma circunferência o triângulo em que um lado é a corda e um dos vértices é o centro da circunferência é sempre um triângulo isósceles (veja a figura 2.2), é simples observar que a metade da corda de Ptolomeu é igual ao seno do ângulo $\frac{\alpha}{2}$ multiplicado pelo raio do círculo, isto é,

$$\frac{\text{crd}(\alpha)}{2} = R \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right),$$

ou seja,

$$\text{crd}(\alpha) = 2R \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right). \quad (2.2)$$

Com essa informação, a tabela de cordas de Ptolomeu pode ser rapidamente reformulada para uma tabela de senos.

Está claro pela expressão acima que a corda subtendida pelo ângulo α depende do raio do círculo que tomamos para defini-la. No *Almagesto* Ptolomeu escolhe $R = 60$ e há uma boa razão para isso: ao elaborar sua tabela, Ptolomeu utiliza o sistema numérico sexagesimal babilônico para escrever os valores das cordas e a escolha acima é conveniente para, nas suas próprias palavras, “aliviar o incômodo das frações” [10]. Conforme veremos isso será uma constante no processo de elaboração das tabelas trigonométricas daqui em diante; se sen é a função seno usual, o que encontramos sempre é uma tabela de $\text{sen}_R(\theta) = R \text{sen}(\theta)$, para algum R convenientemente escolhido a fim de simplificar os cálculos fracionários muito penosos na época.

Para ser precisos, devemos notar que Ptolomeu não é absolutamente fiel à notação babilônica no momento de utilizar seu sistema numérico. Por exemplo, usando a nossa notação para os números, Ptolomeu escreve

$$109^\circ 37' 45'',$$

enquanto deveria escrever

$$1, 49^{\circ}37'45''.$$

2.3 Cálculo das primeiras cordas

Ptolomeu inicia a elaboração da sua tábua trigonométrica realizando uma construção que permite calcular algumas cordas fundamentais. Para entendê-la precisamos relembrar uma propriedade fundamental que existe entre o lado de um decágono, pentágono e hexágono regulares inscritos em um círculo de raio R .

O lado AB de um decágono regular inscrito em um círculo de centro O e raio R subtende um ângulo de $\frac{360}{10} = 36^{\circ}$. Isso significa que os ângulos da base do triângulo isósceles $\triangle OAB$ são iguais a 72° . Se a bissetriz do ângulo $\angle OAB$ intercepta o lado OB em C , temos que o triângulo $\triangle ABC$ tem ângulo em A igual a 36° , em B igual a 72° e, conseqüentemente, em C também igual a 72° ; também é isósceles o triângulo $\triangle AOB$ pois tem os ângulos em A e O iguais a 36 . Veja figura 2.6.

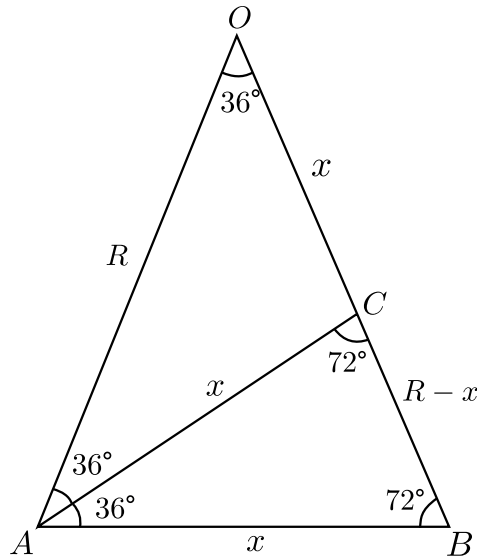


Figura 2.6: Triângulo isósceles de base AB lado de um decágono regular.

Então temos que $AB = AC = CO = x$. Como os triângulos $\triangle OAB$ e $\triangle ABC$ são semelhantes temos que

$$\frac{x}{R-x} = \frac{R}{x},$$

isto é,

$$x^2 + Rx - R^2 = 0,$$

cuja raiz positiva é

$$x = \frac{-R + \sqrt{R^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-R^2)}}{2} = \frac{-R + \sqrt{5R^2}}{2} = R \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Importante afirmar que essa derivação do lado do decágono regular não consta no Almagesto e foi inserida aqui apenas para fins de clareza do argumento. No original [10],

Ptolomeu apenas cita algumas proposições dos *Elementos* de Euclides para embasar o seu argumento.

Nesse ponto Ptolomeu chama atenção para a seguinte construção geométrica: em um círculo de raio R e centro O , tome dois diâmetros mutuamente perpendiculares AB e CD ; seja E o ponto médio do segmento OD ; tomando E como centro, trace um círculo de raio EA interceptando o segmento OC em F . Veja a figura abaixo.

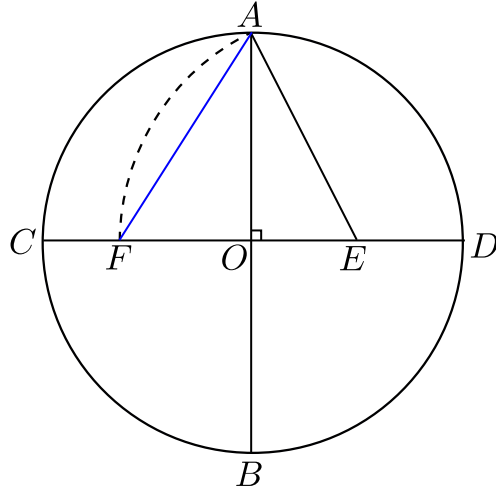


Figura 2.7: Construção de um pentágono regular.

Afirmamos que OF é o lado do decágono regular inscrito nesse círculo. De fato, pelo teorema de Pitágoras temos que

$$EA^2 = OE^2 + OA^2 = R^2 + \frac{R^2}{4} = \frac{5R^2}{4},$$

isto é, $EA = EF = \frac{R\sqrt{5}}{2}$. Por último, note que $OF = EF - OE$, ou seja

$$OF = \frac{R\sqrt{5}}{2} - \frac{R}{2} = R \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Portanto, no triângulo retângulo $\triangle OAF$ o lado OF é o lado do decágono regular inscrito nesse círculo. Temos ainda que $OA = R$ é o lado do hexágono regular inscrito no círculo, o que pode ser observado se lembramos que um lado do hexágono regular subtende um ângulo de $\frac{360}{6} = 60^\circ$, logo definem triângulos equiláteros de lado R . Pela proposição 10 do livro XIII dos *Elementos* de Euclides, temos que os lados do decágono, hexágono e pentágono regulares formam um triângulo retângulo, de onde concluímos que FA é o lado do pentágono regular inscrito no círculo.

Com isso, lembrando que $R = 60$ temos que

$$\begin{aligned} OE &= 30, & OE^2 &= 900 \\ OA &= 60, & OA^2 &= 3600 \\ FE^2 &= AE^2 = OA^2 + OE^2 &= 4500 \end{aligned}$$

De onde Ptolomeu obtém, após extração da raiz quadrada⁴, que

$$FE = 67^{\circ}4'55'',$$

aproximadamente. Daí, o lado do decágono regular inscrito no círculo é dado por $OF = FE - OE = 37^{\circ}4'55''$, ou seja,

$$\boxed{\text{crd}(36^{\circ}) = 37^{\circ}4'55''}.$$

Agora, como $OF^2 = (37^{\circ}4'55'')^2 = 1375^{\circ}4'15''$, o lado do pentágono regular inscrito FA satisfaz $FA^2 = OF^2 + OA^2 = 1375^{\circ}4'15'' + 3600 = 4975^{\circ}4'15''$, de onde obtém-se, após nova extração de raiz quadrada, que

$$\boxed{\text{crd}(72^{\circ}) = 70^{\circ}32'3''}.$$

Ainda de acordo com a figura 2.7 o lado do quadrado regular inscrito no círculo é dado por $AC = \sqrt{OC^2 + OA^2} = \sqrt{2 \cdot 3600} = 84^{\circ}51'10''$, de onde concluímos que

$$\boxed{\text{crd}(90^{\circ}) = 84^{\circ}51'10''}.$$

Por fim, sabe-se que os lados do hexágono e triângulo regulares inscritos no círculo são dados respectivamente por R e $\sqrt{3}R^2$, de onde concluímos que

$$\boxed{\begin{aligned} \text{crd}(60^{\circ}) &= 60^{\circ}, \\ \text{crd}(120^{\circ}) &= 103^{\circ}55'23''. \end{aligned}}$$

2.4 O Teorema de Ptolomeu

Tendo calculado $\text{crd}(36^{\circ})$, $\text{crd}(60^{\circ})$, $\text{crd}(72^{\circ})$, $\text{crd}(90^{\circ})$ e $\text{crd}(120^{\circ})$ conforme vimos na seção anterior, Ptolomeu busca identidades que permitam alcançar novas cordas a partir dessas já calculadas. Por exemplo, observando que na figura 2.8 $AB = \text{crd}(180^{\circ} - \alpha)$, $BC = \text{crd}(\alpha)$, $AC = 2R$ e o ângulo em B é reto pois subtende um diâmetro, Ptolomeu concluiu que

$$\text{crd}^2(\alpha) + \text{crd}^2(180^{\circ} - \alpha) = 120^2, \quad (2.3)$$

fórmula que nos permite calcular $\text{crd}(180^{\circ} - \alpha)$ conhecido $\text{crd}(\alpha)$, ou seja, de $\text{crd}(36^{\circ})$ calculamos $\text{crd}(144^{\circ})$, de $\text{crd}(72^{\circ})$ calculamos $\text{crd}(108^{\circ})$, etc.

Dividindo essa última equação por $(2R)^2 = 120^2$ vem

$$\left(\frac{\text{crd } \alpha}{2R}\right)^2 + \left(\frac{\text{crd}(180^{\circ} - \alpha)}{2R}\right)^2 = 1,$$

de onde obtemos pela relação (2.2) que

$$\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{180^{\circ} - \alpha}{2}\right) = 1,$$

⁴Para detalhes sobre o método utilizado pelos gregos pra calcular a raiz quadrada, o leitor interessado pode consultar [5], pp. 60–63.

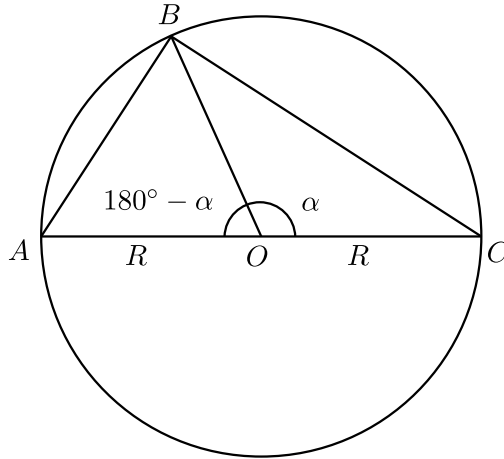


Figura 2.8: A , B e C são vértices de um triângulo retângulo.

ou seja,

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{cos}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1.$$

Conclui-se daí, portanto, que a equação (2.3) de Ptolomeu nada mais é do que a identidade fundamental da trigonometria reformulada em termos de cordas.

Com o intuito de calcular as cordas associadas a outros ângulos, o próximo passo de Ptolomeu é derivar uma fórmula que dê $\operatorname{crd}(\alpha - \beta)$ conhecidos $\operatorname{crd}(\alpha)$ e $\operatorname{crd}(\beta)$. Esse é o conteúdo de um famoso resultado provado no *Almagesto* que ficou universalmente conhecido como teorema de Ptolomeu embora provavelmente já fosse utilizado pelo matemáticos gregos muito antes.

Teorema 1 (Teorema de Ptolomeu). *Se $ABCD$ é um quadrilátero inscrito em um círculo com diagonais AC e BD , então a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais. Ou seja,*

$$AD \cdot BC = AB \cdot DC + AC \cdot BD. \quad (2.4)$$

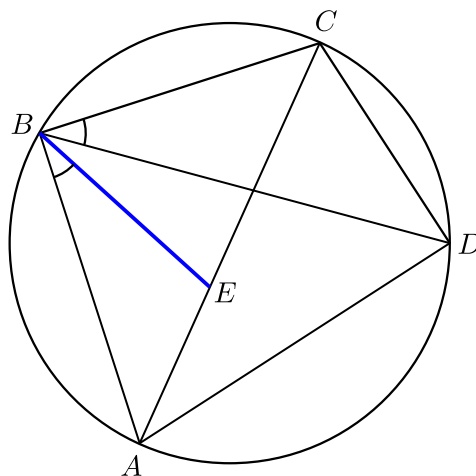


Figura 2.9: BE definido de forma que $\angle ABE = \angle DBC$.

Dem. Tome um ponto E no segmento AC tal que $\angle ABE = \angle DBC$. Com isso, adicionando $\angle EBD$ em ambos os lados da igualdade acima, temos $\angle ABD = \angle EBC$. Contudo, $\angle BDA = \angle BCE$ pois subtendem o mesmo arco na circunferência. Concluímos que os triângulos ABD e BCE são semelhantes, de onde obtemos que

$$\frac{BC}{CE} = \frac{BD}{DA},$$

ou seja,

$$BC \cdot AD = BD \cdot CE.$$

De maneira análoga, como $\angle ABE = \angle DBC$ e $\angle BAE = \angle BDC$ temos que os triângulos ABE e BCD são semelhantes, resultando na igualdade

$$AB \cdot CD = BD \cdot AE.$$

Somando essas duas últimas equações obtemos

$$\begin{aligned} AB \cdot CD + BC \cdot AD &= BD \cdot CE + BD \cdot AE \\ &= BD \cdot (CE + AE) \\ &= BD \cdot AC, \end{aligned}$$

que é a fórmula de Ptolomeu (2.4) □

Com esse resultado, podemos encontrar um arco dado a diferença entre dois arcos conhecidos. Para tanto, observe a figura 2.10. Nela vamos assumir conhecidos os valores de $AB = \text{crd } \alpha$ e de $AC = \text{crd } \beta$. Para encontrar BC , veja que pela equação (2.4) temos

$$AB \cdot CD + 120 \cdot BC = BD \cdot AC,$$

uma vez que AD é o diâmetro da circunferência, com o valor de 120 unidades. Notando que $BD = \text{crd}(180^\circ - \alpha)$ e $CD = \text{crd}(180^\circ - \beta)$ podemos reescrever a equação acima como

$$120 \text{ crd}(\beta - \alpha) = \text{crd}(\beta) \cdot \text{crd}(180^\circ - \alpha) - \text{crd}(\alpha) \cdot \text{crd}(180^\circ - \beta) \quad (2.5)$$

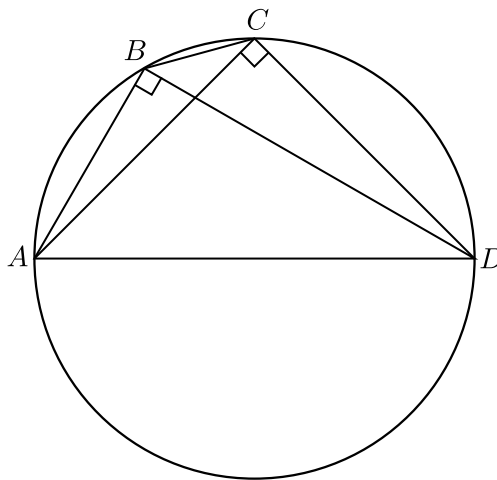


Figura 2.10: AB e AC são conhecidos.

Dividindo (2.5) por $(2R)^2 = 120^2$ e usando a identidade (2.2) vem

$$\frac{\text{crd}(\beta - \alpha)}{2R} = \frac{\text{crd}(\beta)}{2R} \frac{\text{crd}(180^\circ - \alpha)}{2R} - \frac{\text{crd}(\alpha)}{2R} \frac{\text{crd}(180^\circ - \beta)}{2R},$$

ou seja,

$$\text{sen} \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) = \text{sen} \left(\frac{\beta}{2} \right) \text{sen} \left(\frac{180^\circ - \alpha}{2} \right) - \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \text{sen} \left(\frac{180^\circ - \beta}{2} \right),$$

ou seja,

$$\text{sen} \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) = \text{sen} \left(\frac{\beta}{2} \right) \text{sen} \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) - \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \text{sen} \left(90^\circ - \frac{\beta}{2} \right),$$

ou seja,

$$\text{sen} \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \text{sen} \left(\frac{\beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) - \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\beta}{2} \right).$$

Esses cálculos demonstram que a fórmula (2.5) é equivalente à identidade trigonométrica do seno da diferença de dois ângulos. Por meio da fórmula (2.5) Ptolomeu obteve

$$\begin{aligned} \text{crd}(12^\circ) &= \text{crd}(72^\circ - 60^\circ) \\ &= \frac{1}{120} [\text{crd}(72^\circ) \text{crd}(60^\circ) - \text{crd}(60^\circ) \text{crd}(108^\circ)] \\ &= 12^\circ 32' 36''. \end{aligned}$$

Para obter as cordas de ângulos ainda menores, Ptolomeu parte para a derivação de uma identidade equivalente ao seno do arco metade. Para isso, dado um círculo de diâmetro AC , seja $BC = \text{crd} \alpha$ um arco desse círculo dividido ao meio em D . Com o objetivo de determinar a corda CD inicialmente traça-se a perpendicular DF ao diâmetro AC e em seguida os segmentos AB , AD , BD e DC . Por fim marca-se o segmento AE em AC de maneira que $AE = AB$, conforme a figura 2.11

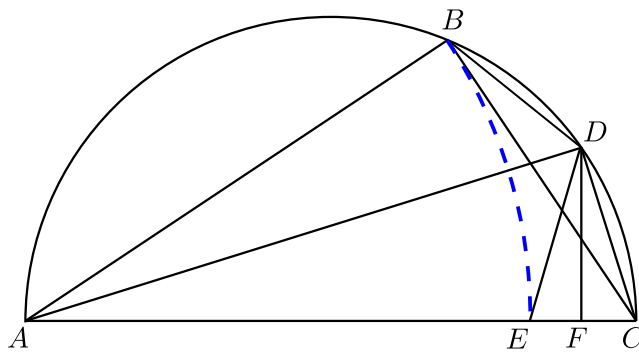


Figura 2.11: Determinando arco metade a partir de valores conhecidos.

Observe que os triângulos ABD e ADE são congruentes pois $AE = AB$, o lado AD é comum e $\angle DAB = \angle DAE$, pois subtendem o mesmo arco de circunferência. Dessa forma o triângulo EDC é isósceles, de onde obtemos que $EF = FC$. Assim

$$CF = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}(AC - AE) = \frac{1}{2}(AC - AB).$$

Por fim, no triângulo retângulo ACD temos que $DC^2 = FC \cdot AC$, isto é,

$$CD^2 = \frac{1}{2}AC \cdot (AC - AB),$$

que pode ser reescrita como

$$\text{crd}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\text{crd}(180^\circ) [\text{crd}(180^\circ) - \text{crd}(180^\circ - \alpha)], \quad (2.6)$$

fórmula equivalente a

$$\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}.$$

Lembrando que $\text{crd}(180^\circ) = 2R = 120$ a equação acima fica

$$\text{crd}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 60 [120 - \text{crd}(180^\circ - \alpha)],$$

de onde Ptolomeu deriva sucessivamente $\text{crd}(6^\circ)$, $\text{crd}(3^\circ)$, $\text{crd}\left(\frac{3^\circ}{2}\right)$ e finalmente $\text{crd}\left(\frac{3^\circ}{4}\right)$.

2.5 A Tábua de Cordas de Ptolomeu

Devemos lembrar que Ptolomeu busca por uma tábua de cordas variando de meio em meio grau e, analisando tudo o que fizemos até aqui, observamos que duas coisas mais são necessárias: (i) o cálculo de $\text{crd}\left(\frac{1^\circ}{2}\right)$ e (ii) uma fórmula de adição que permita calcular $\text{crd}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$ desde que $\text{crd}(\alpha)$ seja conhecido. Vejamos primeiramente como Ptolomeu trata a questão (ii).

Dadas duas cordas justapostas $AB = \text{crd}(\alpha)$ e $BC = \text{crd}(\beta)$, desejamos encontrar a corda $AC = \text{crd}(\alpha + \beta)$. Para tanto, se AD e BE são diâmetros do círculo em questão, traçamos os segmentos BD , CA , CD , CE e DE , conforme representado na figura 2.12.

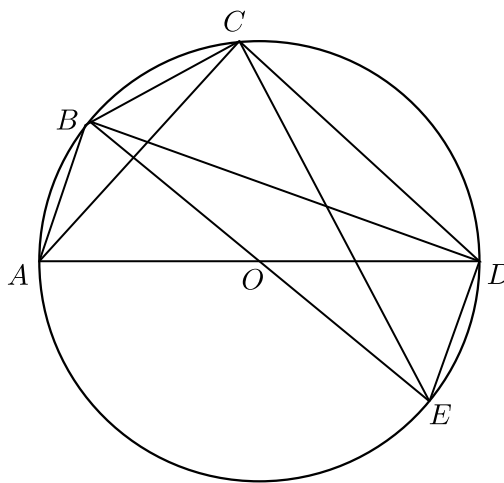


Figura 2.12: Determinando a soma de cordas.

Observe que as cordas AB , BC e CD subtendem um ângulo reto, bem como as cordas BC , CD e DE , de onde conclui-se que $DE = AB$. Note ainda que

$$\begin{aligned} BD &= \text{crd}(180^\circ - \alpha), \\ CE &= \text{crd}(180^\circ - \beta). \end{aligned}$$

Pela fórmula de Ptolomeu (2.4) aplicada ao quadrilátero $BCDE$ temos que

$$BD \cdot CE = BC \cdot DE + BE \cdot CD,$$

ou seja,

$$\text{crd}(180^\circ - \alpha) \text{crd}(180^\circ - \beta) = \text{crd}(\beta) \text{crd}(\alpha) + \text{crd}(180^\circ) \text{crd}(180^\circ - (\alpha + \beta)).$$

Escrito de outra forma, lembrando que $\text{crd}(180^\circ) = 2R = 120$ temos

$$120 \text{crd}(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \text{crd}(180^\circ - \alpha) \text{crd}(180^\circ - \beta) - \text{crd}(\alpha) \text{crd}(\beta). \quad (2.7)$$

Note que a partir dessa identidade, dados $\text{crd}(\alpha)$ e $\text{crd}(\beta)$, podemos encontrar $\text{crd}(180^\circ - (\alpha + \beta))$ e daí $\text{crd}(\alpha + \beta)$ pela identidade (2.3). Dividindo essa última equação por $(2R)^2 = 120^2$ e usando a identidade (2.2) vem

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

o que demonstra que a equação (2.7) é equivalente á fórmula do cosseno da soma de dois ângulos.

Contudo, o pilar da tabela de senos reside em determinar o valor de $\text{sen}(1^\circ)$. Na Astronomia, determinar tal seno era de mais valia que determinar o valor de π . Ptolomeu atacou este problema usando interpolação, ou seja, observado que $\frac{3}{4} < 1 < \frac{3}{2}$ e conhecidos os valores das cordas de $\frac{3}{4}^\circ$ e $\frac{3}{2}^\circ$, determinar aproximadamente o valor de $\text{crd}(1^\circ)$. Seu engenhoso método de interpolação é baseado em um teorema já conhecido pelo astrônomo grego Aristarco de Samos⁵ (310 a.C. - 230 a.C.)

Proposição 1. *Se AB e BC são duas cordas em um círculo tais que $BC > AB$, então*

$$\frac{BC}{AB} < \frac{\text{arco } BC}{\text{arco } AB}. \quad (2.8)$$

isto é, a razão entre as cordas BC e AB é menor do que a razão entre os arcos correspondentes.

Dem. Seja BD o raio que divide o ângulo $\angle ABC$ ao meio, interceptando o segmento AC em E e o círculo em D em acordo com a figura 2.13. Note que as cordas AD e CD são iguais pois subtendem ângulos iguais.

⁵Embora pouco se saiba sobre a vida de Aristarco, ele tem importante papel na história da ciência pois foi o primeiro astrônomo a sugerir um modelo heliocêntrico para o universo quase dois mil anos antes de Copérnico. Sabemos disso graças a uma menção ao seu trabalho feita por Arquimedes no tratado conhecido como *O Contador de Areia*.

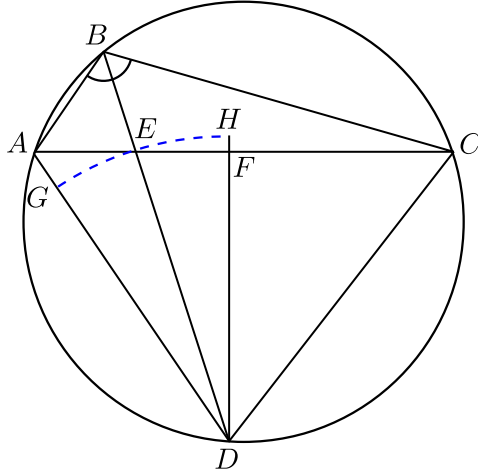


Figura 2.13: Teorema proposto por Aristarco de Samos.

Além disso, pela proposição VI.3 dos *Elementos* [2] de Euclides, sabemos que

$$\frac{CB}{AB} = \frac{CE}{AE}.$$

de onde concluímos que $CE > AE$. Além disso, pelo teorema de Pitágoras vem que $AD > DE > DF$, em que de D baixamos a perpendicular DF sobre AC . O que significa que o círculo de centro em D e raio DE interceptará o segmento AD em um ponto, digamos G , e o prolongamento do segmento DF em um ponto que chamaremos de H (veja novamente a figura 2.13). Agora, observando que os triângulos ADE e DEF têm a mesma altura, temos que

$$\frac{EF}{AE} = \frac{\text{área}(DEF)}{\text{área}(ADE)}$$

Como a área do setor circular DEH é maior que a área do triângulo DEF e a área do setor circular DEG e menor que a área do triângulo ADE temos que

$$\frac{EF}{AE} < \frac{\text{área do setor } DEH}{\text{área do setor } DEG} = \frac{\angle FDE}{\angle ADE}.$$

em que utilizamos o fato que a área de um setor circular definido por um ângulo θ (em graus) é $\frac{\pi r^2 \theta}{360}$. Assim, pela desigualdade acima,

$$\frac{AF}{AE} = \frac{AE + EF}{AE} = \frac{EF}{AE} + 1 < \frac{\angle FDE}{\angle EDA} + 1 = \frac{\angle FDE}{\angle ADE} + \frac{\angle ADE}{\angle ADE} = \frac{\angle FDA}{\angle ADE}.$$

Observe ainda que os triângulos ADF e CDF são congruentes pois compartilham o lado DF , o ângulo em F é reto e como vimos $AD = DC$. Concluímos daí que $AF = CF$, logo se multiplicarmos por 2 a última desigualdade obtemos

$$\frac{AC}{AE} < \frac{\angle ADC}{\angle ADE}.$$

Finalmente chegamos a

$$\frac{CE}{AE} = \frac{AC - AE}{AE} = \frac{AC}{AE} - 1 < \frac{\angle ADC}{\angle ADE} - 1 = \frac{\angle ADC - \angle ADE}{\angle ADE} = \frac{\angle CDE}{\angle ADE},$$

ou seja,

$$\frac{BC}{AB} < \frac{\angle CDB}{\angle ADB} = \frac{\text{arco } BC}{\text{arco } AB}.$$

como queríamos demonstrar. \square

Se escrevemos $\text{crd}(\alpha) = AB$ e $\text{crd}(\beta) = BC$, então o resultado do último teorema se reescreve como

$$\frac{\text{crd}(\beta)}{\text{crd}(\alpha)} < \frac{\beta}{\alpha}.$$

Segue que

$$\frac{\text{crd}(1^\circ)}{\text{crd}\left(\frac{3^\circ}{4}\right)} < \frac{1}{3/4} \quad \text{e} \quad \frac{\text{crd}\left(\frac{3^\circ}{2}\right)}{\text{crd}(1^\circ)} < \frac{3/2}{1},$$

ou seja,

$$\frac{2}{3} \text{crd}\left(\frac{3^\circ}{2}\right) < \text{crd}(1^\circ) < \frac{4}{3} \text{crd}\left(\frac{3^\circ}{4}\right).$$

De acordo com cálculos prévios

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \text{crd}\left(\frac{3^\circ}{4}\right) &= \frac{4}{3}(0^\circ 47' 8'') = 1^\circ 2' 50'' \text{ (na verdade } 1^\circ 2' 50 \frac{2}{3}'') \text{ e} \\ \frac{2}{3} \text{crd}\left(\frac{3^\circ}{2}\right) &= \frac{2}{3}(1^\circ 34' 15'') = 1^\circ 2' 50'', \end{aligned}$$

ou seja, $\text{crd}(1^\circ)$ é maior e menor do que um valor que difere muito pouco de $1^\circ 2' 50''$. Assim, Ptolomeu assume que

$$\boxed{\text{crd}(1^\circ) = 1^\circ 2' 50''}.$$

Daí, utilizando (2.6), Ptolomeu deriva que $\text{crd}\left(\frac{1^\circ}{2}\right) = 0^\circ 31' 25''$ e com o auxílio das demais identidades que demonstramos até aqui constrói sua tabela de cordas com incrementos de $\frac{1^\circ}{2}$. Na tabela 2.1 vemos uma transcrição da tábua de cordas de Ptolomeu

A terceira coluna da tabela, chamada por Ptolomeu de *sexagésimos*, é utilizada para encontrar, aproximadamente, as cordas dos ângulos que contém um número ímpar de minutos entre $0'$ e $30''$. O valor que encontramos nessa coluna corresponde a $\frac{1}{30}$ do excesso entre a corda daquela linha e a corda da linha anterior, isto é, a corda contendo $\frac{1^\circ}{2} = 30''$ a menos que a corda em questão; assim fica clara a escolha da palavra *sexagésimo* para essa coluna: $\frac{1}{30}$ de $30''$ corresponde a $1'$, isto é, um sexagésimo de grau. Por exemplo, na tabela 2.1 lemos

$$\begin{aligned} \text{crd}(2^\circ) &= 2^\circ 5' 40'' \\ \text{crd}\left(2\frac{1^\circ}{2}\right) &= 2^\circ 37' 4'' \end{aligned}$$

A diferença desses números é $0^\circ 31' 24''$ e $\frac{1}{30}$ desse valor dá $0^\circ 1' 2'' 48''$, que é o encontrado na terceira coluna na linha correspondente a corda de $2\frac{1^\circ}{2}$. Dessa forma, se queremos a corda de $2^\circ 25''$ podemos (i) somar 25 vezes $0^\circ 1' 2'' 48''$ a $\text{crd}(2^\circ) = 2^\circ 5' 40''$ ou (ii) subtrair 5 vezes $0^\circ 1' 2'' 48''$ a $\text{crd}\left(2\frac{1^\circ}{2}\right) = 2^\circ 37' 4''$. Por exemplo

$$\begin{aligned} \text{crd}(2^\circ 25'') &= 2^\circ 37' 4'' - 5 \times 0^\circ 1' 2'' 48'' \\ &= 2^\circ 37' 4'' - 0^\circ 5' 11'' 36''' \\ &= 2^\circ 31' 52'' 24'''. \end{aligned}$$

Arco	Corda	Sexagésimos
$\frac{1}{2}^\circ$	0°31'25"	0°1'2''50'''
1°	1°2'50"	0°1'2''50'''
$1\frac{1}{2}^\circ$	1°34'15"	0°1'2''50'''
2°	2°5'40"	0°1'2''50'''
$2\frac{1}{2}^\circ$	2°37'4"	0°1'2''48'''
3°	3°8'28"	0°1'2''48'''
$3\frac{1}{2}^\circ$	3°39'52"	0°1'2''48'''
4°	4°11'16"	0°1'2''47'''
$4\frac{1}{2}^\circ$	4°42'40"	0°1'2''47'''
5°	5°14'4"	0°1'2''46'''
$5\frac{1}{2}^\circ$	5°45'27"	0°1'2''45'''
⋮		
178°	119°58'55"	0°0'0''57'''
$178\frac{1}{2}^\circ$	119°59'24"	0°0'0''41'''
179°	119°59'44"	0°0'0''25'''
$179\frac{1}{2}^\circ$	119°59'56"	0°0'0''9'''
180°	120°0'0"	0°0'0''0'''

Tabela 2.1: Tábua de cordas de Ptolomeu.

Capítulo 3

Trigonometria árabe

3.1 Notas Preliminares

A história do Império Árabe inicia-se com a figura de Maomé. Nascido por volta do ano 570 na cidade de Meca, na Arábia, aos 40 anos Maomé foi tomado por um profundo sentimento religioso que culminou com o início das suas pregações por volta de 613. Maomé morreu na cidade de Medina aos 62 anos e foi sucedido por Ali, seu genro, tendo sido nomeado califa, palavra que em árabe significa *sucessor*. Unidos em torno dos ensinamentos do profeta, mais tarde reunidos no livro sagrado do Islamismo, o Corão (que deriva da palavra árabe que significa *recitação*), o que era no início um punhado de tribos nômade do deserto transformou-se subitamente em um poderoso e obstinado exército que conquistou os países vizinhos um após o outro em uma sucessão incrível de conquistas que levaram a uma expansão poucas vezes testemunhada na história da humanidade.

A cidade histórica de Damasco e primeira capital do Império caiu em 635 e Jerusalém em 637. Foi em 641, durante o califado de Omar, que o Egito caiu sob domínio árabe e os 600.000 manuscritos da lendária Biblioteca de Alexandria, onde outrora Ptolomeu trabalhara, queimaram durante meses nos banhos públicos da cidade. Omar determinou a queima dos pergaminhos porque, nas suas palavras [14], “ou estavam de acordo com os ensinamentos do Corão, caso em que eram supérfluas, ou os contrariavam, caso em que eram nocivos. Em qualquer caso deveriam ser queimados”.

Esse triste fato poderia levar à crença que o Império Árabe foi marcado pela superstição e pelo obscurantismo, no entanto o que observou-se a partir daí foi o exato oposto disso. Em 762 uma nova capital para o Império foi construída: Bagdad, que rapidamente tornou-se o centro comercial e cultural do mundo civilizado. No século IX a população de Bagdad alcançou a marca de 800.000, fazendo-a mais populosa que Constantinopla. O Árabe tornou-se a língua oficial da ciência, posto antes ocupado pelo grego. Um dos maiores responsáveis pelo progresso dos árabes nas ciências foi o califa Harum al-Rachid, imortalizado no *Conto das Mil e uma Noites*, que ordenou que os *Elementos* de Euclides fosse vertido para o Árabe. Seu filho al-Mamun, seguindo a obra do pai, ordenou que todos os antigos manuscritos gregos que pudessem ser encontrados fossem traduzidos para o árabe (muitas dessas obras foram obtidas por meio de barganhas com Constantinopla). Foi nessa época que fundou-se em Bagdad a *Casa da Sabedoria*, um local comparável à grande biblioteca de Alexandria onde cientistas

e estudiosos de todo o império e do estrangeiro encontravam o ambiente ideal para colaborar e desenvolver suas pesquisas.

Al-Mamun convidou para sua corte os melhores cientistas do mundo, entre eles o famoso Abu-Abdullah Muhammed Ibn-Musa al-Khwarizmi¹(c.780-850), de quem herdamos as palavras *algarismo* e *algoritmo*. Al-Mamun solicitou a Al-Khwarizmi que escrevesse um tratado popular sobre equações e o resultado foi o livro *Al-Kitab Al-Jabr wa'l Muqabalah*, que tem uma tradução possível como *O Livro do Equilíbrio e da Restauração*, título que certamente deriva do método mecânico pelo qual resolvemos uma equação algébrica: mantendo o *equilíbrio* para *restaurar* a variável do problema:

$$x - 3 = 5,$$

ou seja,

$$x - 3 + 3 = 5 + 3,$$

ou seja,

$$x = 8.$$

No século XII o livro de Al-Khwarizmi foi traduzido para o Latim como *Liber Algebrae et Almucabola*, de onde derivou a palavra *álgebra*, tão comum nos livros-texto modernos de Matemática.

Al-Khwarizmi escrevia com grande preocupação para fazer-se suficientemente claro aos seus leitores e tendo adotado o sistema decimal posicional utilizado pelos matemáticos indianos, ajudou a difundir esse sistema de numeração quando as obras em árabes vertidas para o Latim inundaram a Europa a partir do século XII. Outros matemáticos árabes de relevância histórica são: Abu-Kamil, Thabit Ibn-Qurra, Al-Karkhi e Omar Khayyam; esse último também poeta e astrônomo, escreveu os famosos *Rubayats*, série de poemas em quartetos que faz ode aos prazeres e sentidos tendo sido oferecidos em inúmeras edições até os dias atuais.

A astronomia sempre foi um ponto de apoio para alavancar o desenvolvimento da Matemática no mundo árabe. Parte da tradição do Islamismo, nome pelo qual ficou conhecida a doutrina de Maomé, dita que cinco vezes por dia, em horários precisos e voltado em uma direção prescrita (Meca), todo muçulmano deve prostrar-se em oração; além disso a festa religiosa mais importante dessa tradição, o jejum do *Ramadã*, deve ser observado, ano após ano, no mesmo período exato. Para seguir sua fé, portanto, a elaboração de avançados conhecimentos astronômicos fazia-se necessária. O supracitado Omar Khayyam, por exemplo, ajudou na elaboração do calendário persa ou jalaliano, o mais preciso já elaborado até hoje, atrasando não mais do que um dia em 5000 anos! O calendário gregoriano, adotado na maioria dos países do planeta, atrasa um dia em cerca de 3300 anos. Foi nesse contexto que desenvolveu-se as trigonometria e astronomia árabes, da qual faremos um brevíssimo apanhado nas seções que seguem. Mais informações podem ser encontradas nas referências que acompanham o presente trabalho.

¹Literalmente: Maomé, pai de Abdullah, filho de Musa, de Khwarizmi.

3.2 Al Biruni

Historicamente, os árabes foram referência no estudo astronômico e matemático durante séculos, desenvolvendo de maneira independente muitas das equações comumente usadas no Ocidente.

No período medieval, Abu al-Rayhan Muhammad ibn Ahmad Al-Biruni (973-1048), ou simplesmente Al-Biruni, escreveu em torno de 150 tratados e artigos em praticamente todas as áreas das ciências conhecidas na época: mecânica, medicina, astronomia, além de mineralogia. Seu trabalho *Kitab Tahdid Al-Amakin* (Livro da Determinação das Coordenadas das Cidades) foi inspirado pelo problema de determinar o que ele próprio chama de *qibla*, isto é, a direção exata da cidade de Meca para qual, pela tradição, todo muçulmano deve prostrar-se em oração cinco vezes ao dia. Na realidade a maior parte do trabalho árabe sobre astronomia tinha como fim questões religiosas: da direção mais precisa de Meca à confecção de calendários mais precisos que garantissem que as datas religiosas fossem comemoradas no período correto.

Um dos feitos mais impressionantes de Al-Biruni, embora pouco conhecido, consiste na determinação do raio da Terra (assumindo obviamente que o planeta tem formato aproximadamente esférico) usando trigonometria. A explicação que se segue, embora utilize notação moderna, segue rigorosamente os mesmos passos do grande astrônomo.

Inicialmente determina-se a altura EZ de uma montanha próxima à cidade de Nadana, noroeste do Paquistão. Para esse fim Al-Biruni utiliza um instrumento de medição de formato quadrado, que na figura a seguir é representado por $ABGD$.

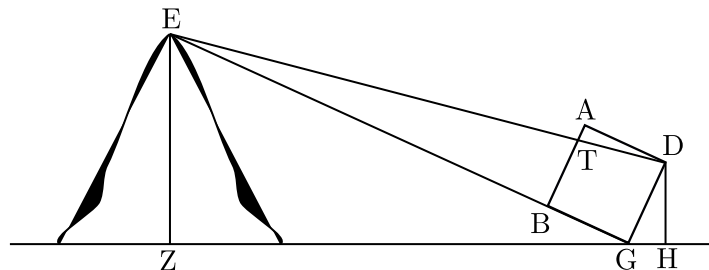


Figura 3.1: Uso de semelhança de triângulos para determinação da altura da montanha.

Então alinha-se a base BG com o cume da montanha em E , ou seja, inclina-se o quadrado de tal forma que o prolongamento de BG toca o topo da montanha. Sendo H a projeção ortogonal de D sobre o solo, e T a interseção entre ED e AB , por semelhança de triângulos temos

$$\frac{GE}{GD} = \frac{AD}{AT} \quad \text{e} \quad \frac{EZ}{GE} = \frac{GH}{DG}$$

Por simplicidade supomos que $AB = 1\text{m}$. Os segmentos GH e AT podem ser medidos, para os quais obtemos $GH = 5,028\text{cm}$ e $AT = 0,01648\text{cm}$. A fim de evitar as dificuldades técnicas envolvidas na medida de uma magnitude tão pequena quanto AT , fica claro que o instrumento quadrado usado por Al-Biruni era muito grande.

Com tais valores a mão e utilizando as fórmulas acima chegamos à conclusão que a altura da montanha é $EZ = 305,1\text{m}$. O próximo passo é então escalar tal montanha. Uma vez no topo da montanha, observa-se o horizonte. Com alguns instrumentos de

medição razoavelmente precisos, nota-se que o horizonte não é exatamente horizontal, mas é ligeiramente inclinado para baixo, conforme ilustrado na figura (3.2).

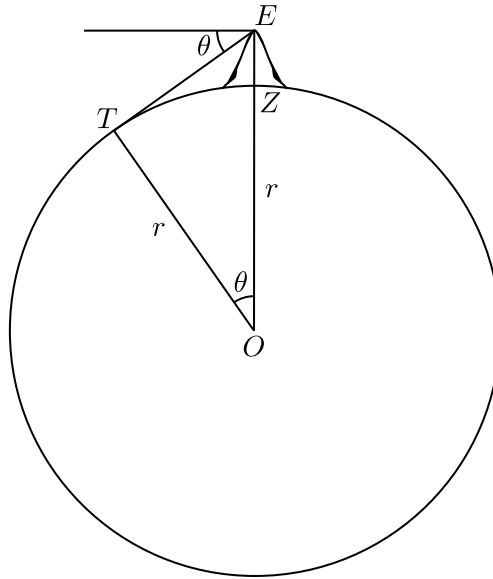


Figura 3.2: Semelhança de triângulos para determinação do raio da Terra.

Em suas medições, Al-Biruni aferiu uma inclinação de $\theta = 34' \approx 0,56667^\circ$, um valor minúsculo, mas ainda assim observável para os seus instrumentos. Sabemos que θ é também $\angle TOZ$, no centro do planeta, e que o raio r é $r = OT = OZ$. Agora, como $\triangle OTE$ é um triângulo retângulo, temos

$$\cos(\theta) = \frac{OT}{OE} = \frac{r}{r + 305,1}.$$

Como sabemos θ , então temos $\cos(0,56667^\circ)$. Do outro lado da equação resta a incógnita r . Calculando $\cos(0,56667^\circ)$ com o auxílio de uma calculadora e resolvendo para r obtemos o valor do raio da Terra

$$r = \frac{305,1 \times \cos(0,56667^\circ)}{1 - \cos(0,56667^\circ)} \approx 6238\text{km}.$$

No que tange a construção de tabelas de cordas mais precisas, em um capítulo do seu trabalho *Qanun al-Masudi*, Al-Biruni discute a construção de um polígono regular de 9 lados, um eneágono regular, raciocínio que o leva a uma excelente aproximação para a corda de 1° .

O lado de um eneágono regular subtende um ângulo de $\frac{360}{9} = 40^\circ$, que, como sabemos, não pode ser obtido pelos métodos da geometria euclidiana. Entretanto $\text{crd}(42^\circ)$ pode ser obtido com relativa facilidade para o qual Al-Biruni obtém o valor 0; 43, 0, 14, 57, 15. Aplicando a fórmula do arco-metade duas vezes o leva a

$$\text{crd}\left(10\frac{1}{2}^\circ\right) = 0; 10, 58, 48, 41, 56.$$

Combinando esse resultado com $\text{crd}(30^\circ)$ e usando a fórmula do arco da soma vem

$$\text{crd}\left(40\frac{1}{2}^\circ\right) = 0; 41, 32, 2, 34, 6.$$

Usando o raciocínio sucessivas vezes, chega-se a

$$\text{crd}(40; 0, 0, 0, 24, 43, 9, 15, 28, 7, 30^\circ) = 0; 41, 2, 32, 42, 29,$$

que difere do valor real apenas pela última casa sexagesimal que deveria ser um 7. Daqui é uma tarefa simples encontrar $\text{crd}(1^\circ)$: usamos a fórmula da diferença com o valor acima e $\text{crd}(36^\circ)$ para obter uma aproximação de $\text{crd}(4^\circ)$ ($= 0; 4, 11, 16, 56, 53$) e em seguida duas vezes o arco-metade para obter $\text{crd}(1^\circ)$.

$$\boxed{\text{crd}(1^\circ) = 0; 1, 2, 49, 57, 17.}$$

Para finalizar essa seção vale salientar que, do ponto de vista histórico, há um detalhe relevante na trigonometria de Al-Biruni: no exemplo que mencionamos acima ele utiliza $R = 1$, de maneira que o as funções sen_R e sen coincidem. As vantagens dessa hipótese já haviam sido consideradas por outros matemáticos árabes, em particular Abu l'Wafa e o professor de Al-Biruni, Abu Nasir Mansur.

3.3 Al-Kashi

A aproximação obtida para o raio da Terra na seção anterior não é completamente honesta do ponto de vista histórico, pois utilizamos uma calculadora moderna pra obter o valor $\cos(0,56667^\circ)$. (Muito provavelmente Al-Biruni o obteve manualmente, desenhando cuidadosamente o arco de $34'$). Contudo, também foi do interesse dos árabes a construção de tábuas trigonométricos precisas baseadas em processos mais confiáveis do que aqueles empregados por Ptolomeu, o que significava, na maioria das vezes, o abandono de métodos numéricos e a estrita utilização de geometria.

De fato, apesar do seu enorme sucesso, não foram poucas as críticas ao trabalho de Ptolomeu por introduzir, deliberadamente, aproximações numéricas ao preciso e perfeito mundo da geometria. O teólogo e filósofo do século XVI Giordano Bruno, por exemplo, sentia que os métodos trigonométricos envolvidos na elaboração das tábuas trigonométricas eram tão pouco confiáveis que teria dito “fora com essas inúteis tábuas de senos” [14]. No trabalho *Exposição dos Erros dos Astrônomos*, o iraniano do século XII Ibn-Yahya al-Maghribi al-Samaw'al estava tão incomodado com esse fato que calculou sua própria tábua de senos considerando uma circunferência com 480° no lugar dos tradicionais 360° . Com essa mudança seriam conhecidas a corda do pentágono de 96° , a do hexágono de 80° , a sua diferença 16° , a sua metade 8° e dividindo mais três vezes à metade chegamos à corda de 1° sem a necessidade de recorrer a métodos aproximativos. Abaixo reproduzimos um excerto da sua tabela de senos.

Até onde sabemos a ideia de al-Samaw'al perdeu-se com o tempo e deve-se ao astrônomo persa Jamshid al-Kashi (c. 1380) a elaboração uma técnica inovadora para obter o valor de $\text{sen}(1^\circ)$ com mais precisão. Al-Kashi também foi muito conhecido por obter o valor de π como

$$\pi = 3, 14159265358979324,$$

correto até a 16ª casa decimal, cálculo que superou em larga medida todas as estimativas anteriores e permaneceu como o mais acurado até o século XVI quando o matemático alemão Ludolph Van Ceulen (1540-1610) encontrou uma aproximação de π correta com 35 casas decimais.

θ	sen θ
1°	0;47,8
2°	1;34,15
3°	2;21,20
⋮	⋮
40°	30;0,0
⋮	⋮
60°	42;25,35
⋮	⋮
80°	51;57,41
⋮	⋮
118°	59;58,33
119°	59;59,35
120°	60;0,0

Tabela 3.1: Tabela de senos de al-Samaw'al.

A técnica de al-Kashi consiste na utilização da equação do seno do ângulo triplo $\text{sen}(3\theta) = 3 \text{sen}(\theta) - 4 \text{sen}^3(\theta)$ que se obtém de maneira razoavelmente simples:

$$\begin{aligned}
\text{sen}(3\theta) &= \text{sen}(2\theta + \theta) = \text{sen}(2\theta) \cos(\theta) + \text{sen}(\theta) \cos(2\theta) \\
&= 2 \text{sen}(\theta) \cos^2(\theta) + \text{sen}(\theta)(\cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta)) \\
&= 2 \text{sen}(\theta)(1 - \text{sen}^2(\theta)) + \text{sen}(\theta)((1 - \text{sen}^2(\theta)) - \text{sen}^2(\theta)) \\
&= 2 \text{sen}(\theta) - 2 \text{sen}^2(\theta) + \text{sen}(\theta) - 2 \text{sen}^2(\theta) \\
&= 3 \text{sen}(\theta) - 4(\text{sen} \theta)^3.
\end{aligned}$$

Multiplicando os dois lados da equação por R obtemos

$$\begin{aligned}
R \text{sen}(3\theta) &= 3R \text{sen}(\theta) - 4R(\text{sen}(\theta))^3 \\
&= 3R \text{sen}(\theta) - \frac{4}{R^2}(R \text{sen}(\theta))^3,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\text{sen}_R(3\theta) = 3 \text{sen}_R(\theta) - 0;0,4(\text{sen}_R(\theta))^3.$$

Nessa última equação utilizamos a definição (2.1) e o fato que $R = 60$, de onde obtemos $\frac{4}{60^2} = 0;0,4$ na base sexagesimal utilizada por al-Kashi. Tomando $\theta = 1^\circ$, temos $\text{sen}(3^\circ) = 3 \text{sen}(1^\circ) - 4 \text{sen}^3(1^\circ)$. Daí, definindo $x = \text{sen}(1^\circ)$ e substituindo o valor já calculado para $\text{sen}_R(3^\circ)$, essa última expressão se reescreve como

$$x = \frac{\frac{4}{60^2}x^3 + \text{sen}_R(3^\circ)}{3} = \frac{x^3 + 900 \cdot \text{sen}_R(3^\circ)}{2700} = \frac{x^3 + 47,6;8,29,53,37,3,45}{2700}. \quad (3.1)$$

Métodos algébricos para solução dessa equação cúbica seriam desenvolvidos apenas a partir do final da primeira metade do século XVI pelos trabalhos dos matemáticos

italianos Cardano, Del Ferro e Tartaglia. Al-Kashi não podia esperar tanto tempo pela solução e assim desenvolveu um método geométrico de iteração que lhe permitia calcular $\text{sen}(1^\circ)$ com qualquer precisão desejada.

Para isso, sabendo de estimativas anteriores que $x = \text{sen}_R(1^\circ) > 1$, al-Kashi pôe

$$1 + \epsilon_1, \quad 0 < \epsilon_1 < 1. \quad (3.2)$$

Substituindo em (3.1) obtemos

$$x = 1 + \epsilon_1 = \frac{(1 + \epsilon_1)^3 + 47,6;8,29,53,37,3,45}{2700},$$

ou seja,

$$\epsilon_1 = \frac{1 + 3\epsilon_1 + 3\epsilon_1^2 + \epsilon_1^3 + 47,6;8,29,53,37,3,45}{2700} - 1,$$

Desprezando os termos de ordem superior em ϵ_1 e simplificando obtemos

$$\epsilon_1 = \frac{2,7;8,29,53,\dots}{2697} = 0;2,\dots$$

e de (3.2) obtemos $x = 1;2,\dots$. Agora escrevemos

$$x = 1;2 + \epsilon_2, \quad 0 < \epsilon_2 < 0;1$$

e repetindo os passos acima encontramos

$$\epsilon_2 = 0;0,49,\dots,$$

ou seja, $x = 1;2 + \epsilon_2 = 1;2,49,\dots$. Al-Kashi continuou o processo para dez casas sexagesimais, concluindo com

$$\text{sen}_R(1^\circ) = 1;2,49,43,11,14,44,16,19,16. \quad (3.3)$$

Este valor é preciso exceto pelas duas últimas casas sexagesimais, que deveriam ser 26,18 – muito além das necessidades astronômicas práticas.

As ferramentas usadas por Al-Kashi neste caso estavam disponíveis há séculos, por exemplo, nos trabalhos de Al-Biruni sobre o nonecágono. Contudo Al-Kashi foi o primeiro a juntar essas ideias usando linguagem algébrica. Alguns séculos mais tarde, esse mesmo método foi utilizado pelo matemático francês François Viète (1540-1603) e pelo físico inglês Isaac Newton (1642-1727), entre outros, para calcular aproximações de raízes de equações algébricas. Presume-se que uma tabela monumental de senos com cinco casas sexagesimais para cada minuto de arco que encontramos no trabalho *Sultani Zij*, elaborado durante o reinado do sultão Ulugh Beg, seja obra sua – essa tabela foi referência máxima no assunto até a obra *Opus Palatinum* ser elaborada por Georg Rheticus quase dois séculos mais tarde. Abaixo um excerto da referida tabela:

O método iterativo de Al-Kashi pode ter sido inspirado na seguinte observação geométrica: fazendo $\theta = 1^\circ$ e $x = \text{sen}(1^\circ)$, da fórmula do arco triplo obtemos

$$x = \frac{\text{sen}(3^\circ) + 4x^3}{3}.$$

sen _R				
	0°	1°	...	4°
0'	0;0,0,0,0	1;2,49,43,11	...	4;11,7,23,54
1'	0;1,2,49,55	1;3,52,32,31	...	4;12,10,4,35
2'	0;2,5,39,49	1;4,55,21,50	...	4;13,12,45,12
3'	0;3,8,29,44	1;5,58,11,7	...	4;14,15,25,44
4'	0;4,11,19,38	1;7,1,0,23	...	4;15,18,6,12
5'	0;5,14,9,33	1;8,3,49,38	...	4;16,20,46,35

Tabela 3.2: Tabela de sen_R de Al-Kashi

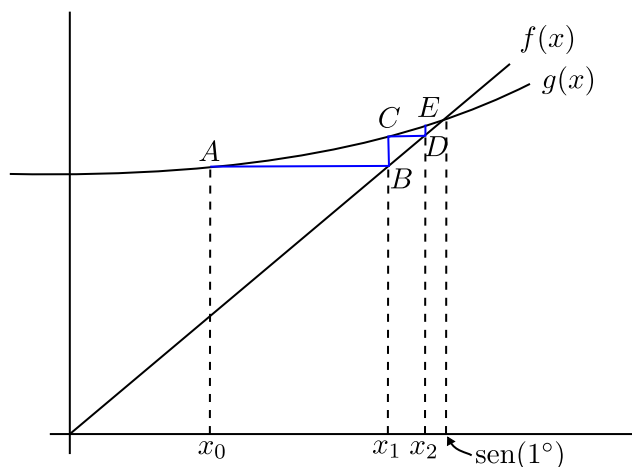


Figura 3.3: Método de interpolação para sen(1°).

Portanto, o que estamos procurando é o ponto em que os gráficos de $f(x) = x$ e $g(x) = \frac{\text{sen}(3^\circ) + 4x^3}{3}$ se interceptam. Uma primeira tentativa razoável é $x_0 = \frac{\text{sen}(3^\circ)}{3} = 0;1,2,48,11,20,3,15,50,23,59$. Calculando obtemos $x_1 = g(x_0) = 0;1,2,49,43,3,54,25,55,12$, valor que utilizamos para uma nova iteração. Daí $x_2 = g(x_1) = 0;1,2,49,43,10,54,20,9,36,1$ e assim por diante. No gráfico isso significa que devemos converter a altura x_0A em uma coordenada x (veja figura 3.3). Geometricamente, podemos dar esse passo se nos movemos horizontalmente de A para B , uma vez que $f(x) = x$; um raciocínio análogo para os demais passos demonstra que ao longo do processo iterativo nos movemos pela linha poligonal azul $ABCDE\dots$ que aproxima-se arbitrariamente do ponto de intersecção dos gráficos de f e g . Vale observar que o valor de x_3 coincide com o de x_2 nas primeiras nove casas decimais; isso significa que já obtemos $\text{sen}(1^\circ)$ com 9 dígitos de precisão após a segunda iteração! Al-Kashi parou no equivalente a 16 dígitos. Esta técnica, conhecida como *iteração do ponto fixo* pode não funcionar para todas as equações deste tipo, porém, felizmente, funciona muito bem para esta equação em particular.

3.4 Ibn Yunus

Lembramos que para calcular $\text{sen}_R(1^\circ)$, Ptolomeu utilizou métodos de interpolação partindo da seguinte desigualdade:

$$\frac{2}{3} \text{sen}_R\left(\frac{3^\circ}{2}\right) < \text{sen}_R(1^\circ) < \frac{4}{3} \text{sen}_R\left(\frac{3^\circ}{4}\right).$$

Os limites superior e inferior acima coincidem até a terceira casa sexagesimal, o suficiente para a precisão desejada por Ptolomeu porém limitada se desejamos um cálculo mais acurado para $\text{sen}_R(1^\circ)$. O primeiro grande aprimoramento no método de Ptolomeu é devido ao astrônomo egípcio Ibn Yunus que floresceu no final do século X. Em seu trabalho *Hakimi Zij* ele inicia seu raciocínio com uma desigualdade que utiliza limites inferior e superior construtíveis mais próximos de $\text{sen}_R(1^\circ)$:

$$1; 2, 49, 40, 4 = \frac{8}{9} \text{sen}_R\left(\frac{9^\circ}{8}\right) < \text{sen}_R(1^\circ) < \frac{16}{15} \text{sen}_R\left(\frac{15^\circ}{16}\right) = 1; 2, 49, 45, 10.$$

Observando que

$$\frac{9}{8} - 1 = 0,125 = 2 \times 0,0625 = 2 \left(1 - \frac{15}{16}\right),$$

ou seja, que $\frac{9}{8}$ está duas vezes mais distante 1 do que $\frac{15}{16}$, Ibn Yunus tomou como estimativa um valor de $\text{sen}_R(1^\circ)$ supondo que a mesma propriedade valha em relação aos seus limites inferior e superior, isto é,

$$\text{sen}_R(1^\circ) = 1; 2, 49, 40, 4 + \frac{2}{3}(1; 2, 49, 45, 10 - 1; 2, 49, 40, 4) = 1; 2, 49, 43, 28.$$

Porém Ibn Yunus não havia terminado. Ele tomou o valor obtido de $\text{sen}_R(1^\circ)$ como base para dois cálculos distintos de $\text{sen}_R(2^\circ)$: uma usando a fórmula do seno do arco duplo, outra usando $\text{sen}_R(3^\circ)$ e a fórmula do seno da diferença de arcos. Os dois novos valores de $\text{sen}_R(2^\circ)$ obtidos são utilizados como os novos limites para interpolação. Escrevendo

$$\text{sen}_R(2^\circ) - \epsilon_1 < \text{sen}_R(2^\circ) < \text{sen}_R(2^\circ) + \epsilon_2,$$

em que ϵ_1 e ϵ_2 representam os erros em relação ao valor correto de $\text{sen}_R(2^\circ)$, a diferença entre os limites superior e inferior, respectivamente é a soma dos erros $\text{sen}_R(2^\circ) + \epsilon_2 - (\text{sen}_R(2^\circ) - \epsilon_1) = \epsilon_2 + \epsilon_1$. Tendo calculado a diferença como 0;0,0,0,48, Ibn Yunus considerou metade deste número como o erro em seu valor de $\text{sen}(1^\circ)$ e subtraiu, resultando em

$$\text{sen}(1^\circ) = 1, 2, 49, 43, 28 - \frac{1}{2}(0; 0, 0, 48) = 1; 2, 49, 43, 4,$$

muito próximo do valor correto 1;2,49,43,11.

Com base no seu cálculo para $\text{sen}_R(1^\circ)$, Ibn Yunus construiu uma tabela de senos com ângulos que variam em 10 minutos de arco. Ela está denotada em (3.3)

Este trabalho de Ibn Yunus está disponível apenas em uma tese de doutorado não publicada por David A. King em 1972 e depois resumida na *Encyclopedia of the History of Arabic Science* por Marie-Thérèse Debarnot em 1996. Mesmo carecendo de precisão, a ideia de usar dois cálculos distintos de $\text{sen}_R(2^\circ)$ para dar um valor mais aproximado

θ	$\text{sen}_R(\theta)$
0;10	0;10,28,19
0;20	0;20,56,38
0;30	0;31,24,57
\vdots	\vdots
1;0	1;2,49,43
\vdots	\vdots
2;0	2;5,38,19
\vdots	\vdots
10;0	10;25,8,1
\vdots	\vdots
40;0	38;34,2,8
\vdots	\vdots
89;30	59;59,51,47
89;40	59;59,56,21
89;50	59;59,59,5
90	60;0,0,0

Tabela 3.3: Tabela de sen_R de Ibn-Yunus.

de $\text{sen}_R(1^\circ)$ é bastante interessante. Se ϵ é o erro no valor inicial de $\text{sen}_R(1^\circ)$, então o seno obtido com a fórmula do arco duplo geraria um erro próximo de 2ϵ enquanto que a fórmula da diferença de arcos daria um erro próximo de $-\epsilon$. Nessa situação a diferença entre os dois seria 3ϵ , logo, se Ibn Yunus tivesse calculado um terço ao invés da metade na hora de interpolar, ele teria obtido um seno de valor ainda mais próximo para $\text{sen}_R(1^\circ)$: 1;2,49,43,12.

3.5 Abu'l-Wafa

Abu'l-Wafa (940-998), contemporâneo de Ibn Yunus, é responsável pela elaboração de um método de aproximação para $\text{sen}_R(1^\circ)$ que foi utilizado por não menos do que quatro séculos. Seu método se baseava no seguinte lema:

$$\text{sen}_R(\alpha + \beta) - \text{sen}_R(\alpha) < \text{sen}_R(\alpha) - \text{sen}_R(\alpha - \beta),$$

em que $0^\circ < \beta < \alpha < \alpha + \beta < 90^\circ$. Esse lema significa que sucessivas diferenças de senos diminuem à medida que o arco aumenta, isto é, o gráfico da função seno é côncavo no intervalo $0^\circ < \theta < 90^\circ$. De fato, se f é côncava em um intervalo $[a, b]$, então para todo $x \in (a, b)$ vale que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

A figura 3.4 ilustra uma função côncava. Geometricamente, a propriedade acima implica que a inclinação da reta passando por $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$ é maior do que a

inclinação da reta passando por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ que, da sua parte, é maior do que a inclinação da reta passando por $(x, f(x))$ e $(b, f(b))$. Para maiores informações sobre funções convexas (côncavas) o leitor interessado pode consultar [13].

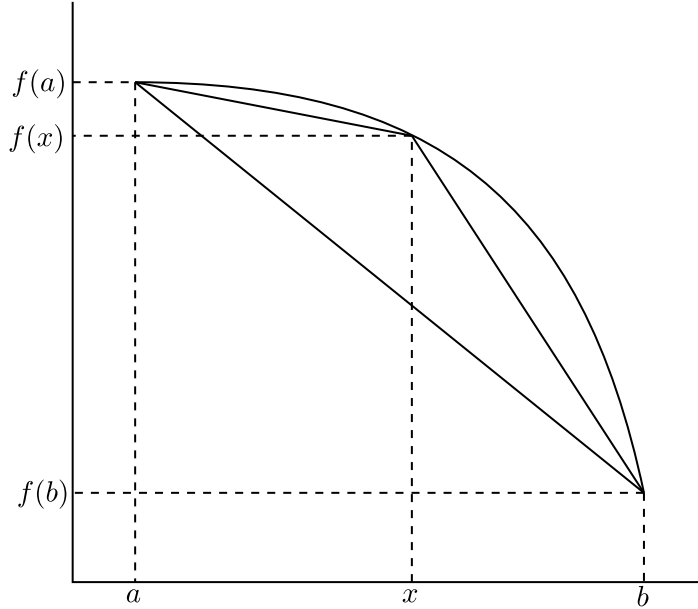


Figura 3.4: Concavidade da função no intervalo.

Tomando $a = \alpha - \beta$, $x = \alpha$ e $b = \alpha + \beta$ temos que

$$\frac{\text{sen}_R(\alpha) - \text{sen}_R(\alpha - \beta)}{\alpha - (\alpha - \beta)} > \frac{\text{sen}_R(\alpha + \beta) - \text{sen}_R(\alpha)}{\alpha + \beta - \alpha}$$

de onde obtemos o desejado.

Abu'l-Wafa, procurando pelo $\text{sen}_R\left(\frac{1^\circ}{2}\right)$ aplicou o lema duas vezes como se segue. Dois valores de suporte, $\text{sen}_R\left(\frac{15^\circ}{32}\right)$ e $\text{sen}_R\left(\frac{18^\circ}{32}\right)$, foram encontrados usando resultados conhecidos de trigonometria plana. Como temos que

$$\text{sen}_R\left(\frac{16^\circ}{32}\right) - \text{sen}_R\left(\frac{15^\circ}{32}\right) > \text{sen}_R\left(\frac{17^\circ}{2}\right) - \text{sen}_R\left(\frac{16^\circ}{32}\right) > \text{sen}_R\left(\frac{18^\circ}{32}\right) - \text{sen}_R\left(\frac{17^\circ}{32}\right),$$

segue que $\text{sen}_R\left(\frac{16^\circ}{32}\right) - \text{sen}_R\left(\frac{15^\circ}{32}\right)$, a maior diferença desta desigualdade, é maior que um terço da soma de todas as diferenças. Nessa soma os termos $\text{sen}_R\left(\frac{16^\circ}{32}\right)$ e $\text{sen}_R\left(\frac{17^\circ}{32}\right)$ aparecem duas vezes com o sinal trocado, restando apenas $\text{sen}_R\left(\frac{18^\circ}{32}\right) - \text{sen}_R\left(\frac{15^\circ}{32}\right)$ que, como vimos, podem ser obtidos por meios puramente geométricos. Consequentemente

$$\text{sen}_R\left(\frac{1^\circ}{2}\right) = \text{sen}_R\left(\frac{16^\circ}{32}\right) > \text{sen}_R\left(\frac{15^\circ}{32}\right) + \frac{1}{3} \left(\text{sen}_R\left(\frac{18^\circ}{32}\right) - \text{sen}_R\left(\frac{15^\circ}{32}\right) \right).$$

Usando um argumento similar, temos

$$\text{sen}_R\left(\frac{1^\circ}{2}\right) < \text{sen}_R\left(\frac{15^\circ}{32}\right) + \frac{1}{3} \left(\text{sen}_R\left(\frac{18^\circ}{32}\right) - \text{sen}_R\left(\frac{15^\circ}{32}\right) \right).$$

Com isso temos limites superior e inferior para $\text{sen}_R\left(\frac{1^\circ}{2}\right)$.

Trabalhar com diferença de senos ao invés dos próprios senos colocou Abu'l-Wafa um passo à frente sobre Ptolomeu e Ibn Yunus. Isto levou a estimativas superiores e inferiores cerca de 6 vezes mais próximos do valor real que os cálculos de Ptolomeu sobre os mesmos valores. O valor encontrado Abu'l-Wafa foi $\text{sen}_R\left(\frac{1^\circ}{2}\right) = 0; 31, 24, 55, 54, 55$, que diverge do valor real apenas na quinta casa sexagesimal (nona casa decimal), uma aproximação melhor que a de Ibn Yunus para $\text{sen}_R(1^\circ)$. Esses cálculos teriam servido para a elaboração de uma tabela de senos com quatro casas sexagesimais de aproximação, entretanto tal trabalho foi perdido.

Capítulo 4

Trigonometria Indiana

4.1 Notas preliminares

Do ponto de vista ocidental, a Índia - ou o povo indiano - sempre foi coberta de desconhecimento e fracas caracterizações. Para muitos pesquisadores e historiadores europeus, a palavra “Índia” foi virtualmente um sinônimo da Ásia¹: desde os gregos que criaram os termos Ásia e Índia, sendo que o último termo significava “o fim de um mundo inabitado” até os escritos de Maximiliano da Transilvânia, “os nativos de todos os países desconhecidos são normalmente chamados de indianos”. Índia se tornou uma entidade política-social concreta apenas quando a excursão Britânica chamou sua colônia de Império Indiano. No século XX, com a independência do Paquistão e Bangladesh (nome atual), temos a visão atual do que a Índia significa como nação e país.

Como vimos nos capítulos anteriores, o estudo sistemático de trigonometria remonta aos trabalhos dos astrônomos gregos Hiparco de Rhodes (c. 150 a.C) e Ptolomeu (c. 150 d.C.). Foi a partir do terceiro e quarto séculos da era cristã que a astronomia grega iniciou sua incursão na Índia, possivelmente por meio das rotas comerciais que levavam àquele país. Posteriormente, após a expansão do Império Árabe, esse conhecimento foi transmitido para o mundo islâmico que aperfeiçoou e refinou o tema. Finalmente, a partir do século XII o assunto chegou à Europa de onde se popularizou e difundiu no mundo ocidental.

Referências a conceitos trigonométricos da Matemática grega misturadas com aritmética babilônica são vistas em textos indianos consolidados como os *Pancha Siddhanta* e *Surya Siddhanta* de Varahmira (cerca de 500 d.C.) e o *Brahmasphuta Siddhanta* de Brahmagupta (628 d.C.)². Os tópicos abordados pelos astrônomos indianos são os mesmos: determinação das posições dos planetas, do Sol e da Lua, predição de eclipses, mapeamento do céu, cálculo do comprimento da sombra em um relógio de sol, etc.

Nossa conhecida função seno e demais acompanhantes funções trigonométricas são praticamente indispensáveis para um tratamento matemático adequado de fenômenos circulares uniformes – muito próximos do movimento observado dos astros no céu noturno. Foi natural, portanto, o surgimento de diversos trabalhos astronômicos na Índia devotados ao cálculo de tabelas de senos. Lembremos que no lugar da corda

¹Palat (2002)

²A palavra *siddhanta* significa *tratado*

associada ao ângulo, matemáticos indianos preferiram adotar a meia corda, definição muito mais próxima do seno moderno (coincidindo com ele no caso de um círculo de raio 1). Quando expostos aos métodos trigonométricos grego e indiano, os árabes escolheram a versão indiana e ela disseminou-se na cultura ocidental a partir daí.

A fim de tornar claras definições e nomenclaturas, considere a figura (3.1), que representa um círculo de raio R . As relações que damos a seguir podem ser deduzidas com referência a esta imagem

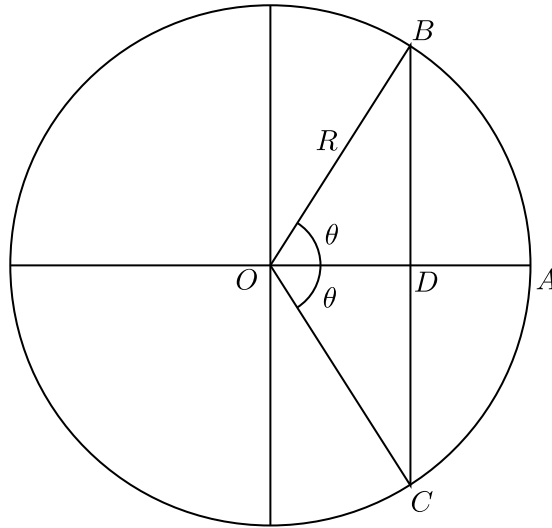


Figura 4.1: Definições indianas de medidas no círculo.

1. O arco BC da circunferência era conhecido como *capa*;
2. A corda BC era conhecida como *samastajya*;
3. A meia-corda BD (o seno indiano) era conhecida como *ardhajya* ou *jyardha* ou *bhujaya* e também era abreviada para *jya*. Assim, o seno indiano é o definido como $\text{sen}_R(\theta)$ em (2.1);
4. O segmento OM era chamado *kotijya* (ou *kojya*) e equivale a $R \cos(\theta)$;
5. O segmento DA era chamado de *utkrama-jya* (seno reverso). Essa função, que caiu em desuso, é dada por $R - R \cos(\theta)$;
6. O raio R do círculo era chamado de *trijiya*, que em sânscrito significa *seno de três signos*. Como cada signo do zodíaco ocupa 30° de uma circunferência, o seno de três signos é $\text{sen}_R(90^\circ) = R$, de acordo com a definição de seno indiano.

Diferentes astrônomos adotavam diferentes valores para o raio do círculo em questão, embora alguns valores apareçam mais frequentemente que outros. Por exemplo, o valor $R = 120$ é o adotado no trabalho do sexto século *Pancasiddhantika* devido ao astrônomo Varahamihira, também responsável por valiosos comentários de trabalhos astronômicos anteriores cujos originais foram perdidos (talvez pela própria existência de tais cometários). Embora não mencione explicitamente a adoção de tal valor para R , podemos inferi-lo a partir de sua tabela de senos dada no sistema sexagesimal:

θ	3;45	7;30	11;15	15	18;45	22;30	26;15	30	...	90
$\text{sen}_R(\theta)$	7;51	15;40	23;25	31;4	38;34	45;56	53;5	1,0;0	...	120

Tabela 4.1: Tabela de sen_R de Varahamihira.

O mais curioso sobre a tabela de Varahamihira é a escolha dos valores dos senos calculados em passos de $3\frac{3}{4}^\circ$. Presume-se que essa estrutura, padrão nas primeira tabelas indianas, seja influência das tabelas de Hiparco divididas em passos de $7\frac{1}{2}^\circ$. Da sua parte, acredita-se que Hiparco adotou esses valores porque podiam ser obtidos com o mínimo de ferramentas geométricas: pode-se construir facilmente um triângulo equilátero (ângulo de 60°) e daí, dividindo sucessivamente à metade obtemos 30° , 15° e $7\frac{1}{2}^\circ$. Dividindo mais uma vez à metade chegamos à escolha de Varahamihira: $3\frac{3}{4}^\circ$.

Muitas tabelas indianas também utilizam o valor $R = 3438$. Os astrônomos indianos chegaram a esse valor da seguinte forma: uma circunferência tem $360 \cdot 60 = 21.600$ minutos. Usando suas estimativas mais acuradas de π (veja mais sobre esse assunto nas seções que seguem), igualando

$$21.600 = 2\pi R$$

encontravam o valor acima para R . Esse valor é encontrado, por exemplo, no trabalho *Aryabhaiya* (c. 500 d.C.) de Ariabata e tem a vantagem que para valores pequenos de θ temos que o valor de $\text{sen}_R(\theta)$ é aproximadamente θ , exatamente o que ocorre quando medimos θ em radianos. Por fim, observe que se usamos $R = 3438$ na expressão acima obtemos para π o valor de

$$3,141361257,$$

uma excelente estimativa para a época.

4.2 O trabalho de Ariabata e o método das diferenças

Nessa seção aprenderemos um método singular utilizado pelos matemáticos indianos desde meados do século V para construção de tabelas de $\text{sen}_R(\theta)$ (ou *gyas*), o assim chamado *método das diferenças*.

No seu livro *Aryabhatiya*, Ariabata (500 d.C.) afirma o seguinte:

Divida um quadrante de um círculo [em quantas partes desejar]. Então dos triângulos [retângulos] e dos quadriláteros, pode-se encontrar tantos $\text{sen}_R(\theta)$ de arcos iguais quanto se deseja... O primeiro $\text{sen}_R(\theta)$ dividido por ele mesmo e diminuído pelo quociente resulta no segundo sen_R -diferença. O mesmo primeiro $\text{sen}_R(\theta)$ diminuído pelos quocientes obtidos dividindo cada um dos $\text{sen}_R(\theta)$ anteriores pelo primeiro $\text{sen}_R(\theta)$ resulta nos sen_R -diferença restantes.

Em um dos comentários do *Aryabhatiya*, Bhaskara I (cerca de 500 d.C.) concede três exemplos para ilustrar o texto acima. No primeiro, realiza-se seis divisões de 15°

no quadrante de círculo de raio R , no próximo, 12 divisões de 15° e 30 minutos. O último exemplo, que como vimos acabou sendo um protótipo para as tabelas indianas de seno, com 24 divisões de 3° e $45'$. No que se segue daremos uma explicação do método de acordo com Nilakantha, um matemático indiano do século XV, portanto muito posterior a Ariabata, mas que deixou explicações detalhadas do método.

Para explicar o método nos referimos à figura 4.2. Nela o quadrante ilustrado é dividido em 24 partes iguais pelos pontos A_i , definindo 24 ângulos iguais a $\Delta\theta = 3\frac{3}{4}^\circ = 3^\circ 45' = 225'$; se denotamos $\text{sen}_R(i) = \text{sen}_R(i\Delta\theta)$, definimos a diferença $\Delta_i = \Delta \text{sen}_R(i) = \text{sen}_R(i) - \text{sen}_R(i-1)$. Por exemplo, na figura 4.2 temos que

$$\Delta_{i+1} = \Delta \text{sen}_R(i+1) = \text{sen}_R(i+1) - \text{sen}_R(i) = P_{i+1}A_{i+1} - P_iA_i = CA_{i+1}.$$

Se os pontos B_i representam os pontos médios dos arcos determinados pelos A_i , então temos que os triângulos $\triangle OB_{i+1}T_{i+1}$ e $\triangle A_iCA_{i+1}$ são semelhantes, pois têm lados correspondentes perpendiculares. Pela relação de semelhança e observando que $A_iA_{i+1} = B_iB_{i+1} = \text{crd}(1)$ temos que

$$\frac{CA_{i+1}}{OT_{i+1}} = \frac{A_iA_{i+1}}{OB_{i+1}} = \frac{CA_i}{T_{i+1}B_{i+1}}, \quad (4.1)$$

de onde obtemos pela primeira igualdade,

$$\frac{\Delta_{i+1}}{OT_{i+1}} = \frac{\text{crd}(1)}{R},$$

ou seja,

$$\Delta_{i+1} = \frac{\text{crd}(1)}{R} OT_{i+1}.$$

De maneira análoga obtemos

$$\Delta_i = \frac{\text{crd}(1)}{R} OT_i,$$

e daí

$$\Delta_i - \Delta_{i+1} = \frac{\text{crd}(1)}{R} (OT_i - OT_{i+1}) = \frac{\text{crd}(1)}{R} T_{i+1}T_i. \quad (4.2)$$

Agora vejamos como podemos reescrever o segmento segmento $T_{i+1}T_i$. Observando que os triângulos $\triangle B_iDB_{i+1}$ e $\triangle A_iP_iO$ também são semelhantes, encontramos que

$$\frac{B_iD}{B_iB_{i+1}} = \frac{A_iP_i}{A_iO},$$

ou seja,

$$T_{i+1}T_i = B_iD = \frac{\text{crd}(1)}{R} \text{sen}_R(i).$$

Substituindo em (4.2) vem que

$$\frac{\Delta_i - \Delta_{i+1}}{\text{sen}_R(i)} = \left[\frac{\text{crd}(1)}{R} \right]^2,$$

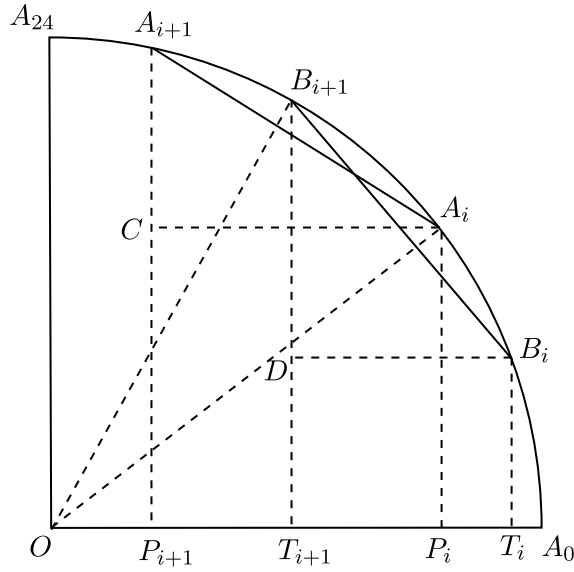


Figura 4.2: Método das diferenças.

isto é, o lado direito não depende de i ; é igual para qualquer valor de i que escolhamos! Até que ponto Ariabata estava ciente dessa propriedade não sabemos. O fato é que Varahamihira vários séculos mais tarde reconheceu-a e igualando a expressão do lado esquerdo com ela própria no caso $i = 1$, chegou a seguinte fórmula fundamental

$$\frac{\Delta_i - \Delta_{i+1}}{\text{sen}_R(i)} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\text{sen}_R(1)},$$

ou ainda

$$\Delta_i - \Delta_{i+1} = (\Delta_1 - \Delta_2) \frac{\text{sen}_R(i)}{\text{sen}_R(1)}. \quad (4.3)$$

Dados os valores de $\text{sen}_R(1)$ e $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$, a equação (4.3) permite calcular todos os 23 senos restantes. De fato, lembrando que $\text{sen}_R(0) = 0$, somando as equações

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \text{sen}_R(1) - \text{sen}_R(0), \\ \Delta_2 &= \text{sen}_R(2) - \text{sen}_R(1), \\ \Delta_3 &= \text{sen}_R(3) - \text{sen}_R(2), \\ &\vdots \\ \Delta_{n-1} &= \text{sen}_R(n-1) - \text{sen}_R(n-2), \\ \Delta_n &= \text{sen}_R(n) - \text{sen}_R(n-1), \end{aligned}$$

e cancelando termos semelhantes concluímos que

$$\text{sen}_R(n) = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \cdots + \Delta_n.$$

Para calcular as diferenças observamos inicialmente que

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \text{sen}_R(1) - \text{sen}_R(0) = \text{sen}_R(1), \\ \Delta_2 &= \Delta_1 - \Delta = \text{sen}_R(1) - \Delta, \end{aligned}$$

com as quais já podemos calcular $\text{sen}_R(2)$. Agora, usando (4.3), calculamos Δ_3 como

$$\Delta_3 = \Delta_2 - \Delta \frac{\text{sen}_R(2)}{\text{sen}_R(1)} = \text{sen}_R(1) - \Delta \left(\frac{\text{sen}_R(1) + \text{sen}_R(2)}{\text{sen}_R(1)} \right),$$

e com Δ_1 , Δ_2 e Δ_3 calculamos $\text{sen}_R(3)$. Para Δ_4 temos

$$\Delta_4 = \Delta_3 - \Delta \frac{\text{sen}_R(3)}{\text{sen}_R(1)} = \text{sen}_R(1) - \Delta \left(\frac{\text{sen}_R(1) + \text{sen}_R(2) + \text{sen}_R(3)}{\text{sen}_R(1)} \right).$$

Com Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 e Δ_4 podemos calcular $\text{sen}_R(4)$ e assim prosseguimos. Já podemos ver um padrão emergindo nas fórmulas para a diferença; em geral temos que

$$\Delta_{n+1} = \text{sen}_R(1) - \Delta \left(\frac{\text{sen}_R(1) + \text{sen}_R(2) + \text{sen}_R(3) + \cdots + \text{sen}_R(n)}{\text{sen}_R(1)} \right).$$

Com um pouco de boa vontade conseguimos vislumbrar nuances do método das diferenças no palavrório de Ariabata que citamos acima. Abaixo segue um excerto da tabela de senos de Ariabata e aconselhamos vigorosamente ao leitor diligente que verifique, de acordo com as regras que vimos acima, os valores de Δ_i e $\text{sen}_R(i)$ nela listados. As colunas restantes comparam os valores do seno moderno pelos cálculos de Ariabata com aqueles que obtemos com a calculadora do computador que utilizei para escrever esses trabalhos. O erro ε_i destacado na última coluna mostra a impressionante precisão dessa tabela construída há mais de 1500 anos.

i	$i\Delta\theta$	Δ_i	$\text{sen}_R(i)$	$\frac{\text{sen}_R(i)}{R}$	$\text{sen}(i)$	$\varepsilon_i = \frac{\text{sen}_R(i)}{R} - \text{sen}(i)$
1	225	225	225	0.065445026	0.065403129	0.00004190
2	450	224	449	0.130599186	0.130526192	0.00007299
3	675	222	671	0.195171611	0.195090322	0.00008129
4	900	219	890	0.258871437	0.258819045	0.00005239
⋮						
21	4725	51	3372	0.980802792	0.98078528	0.00001751
22	4950	37	3409	0.99156486	0.991444861	0.00012000
23	5175	22	3431	0.997963933	0.997858923	0.00010501
24	5400	7	3438	1	1	0

Tabela 4.2: Tabela de senos de Ariabata.

4.3 A escola de Kerala

Duas poderosas ferramentas contribuíram para a criação da Matemática moderna no século XVII: a descoberta dos algoritmos do Cálculo e o desenvolvimento e aplicação de técnicas usando séries infinitas. A maior parte da literatura atual sobre o tema nos leva a crer que os pioneiros destas técnicas são Newton e Leibniz, seguindo os trabalhos de antecessores europeus como P. Fermat, B. Pascal, E. Torricelli, J. Wallis

e B. Cavalieri, no meio século precedente. O que parece ser bem menos conhecido na comunidade científica é o fato que elementos fundamentais do cálculo incluindo técnicas de integração numéricas e o cálculo de séries infinitas para π e algumas funções trigonométricas como $\sin(x)$, $\cos(x)$ e $\tan^{-1}(x)$ já eram conhecidas em Kerala cerca de 250 anos antes. O leitor interessado em mais informações sobre o assunto pode consultar [3, 4]

Kerala, hoje um estado da Índia, é uma região costeira no sul do país, banhado pelo mar árabe. Durante a maior parte do século XX, historiadores da ciência acreditavam que a Matemática e Astronomia na Índia deixara de fazer progresso depois de 1200 e que Bhaskaracharya (1114-1185), também conhecido na literatura como Bhaskara II, o autor de *Lilavati* e *Bijaganita*, foi o último grande matemático e astrônomo indiano. Contudo, hoje em dia sabe-se que a escola em Kerala de Matemática e Astronomia contou com o esforço de pelo menos 11 grande matemáticos entre 1400 e 1900 e que esses nomes tiveram importância imensa no desenvolvimento científico no Oriente, porém poucas vezes reconhecido no Ocidente.

Em 683 d.C., um encontro/conferência marcado em Tirunavaya, no norte de Kerala, pretendia discutir o desenvolvimento da astronomia, principalmente a partir dos estudos de Ariabata I e seus seguidores. Desse ponto em diante Kerala teve sua escola que durante séculos reuniu mentes brilhantes que impulsionaram a elaboração de estudos avançados em Matemática e Astronomia. Esta escola progrediu através de séculos atravessando turbulentas transformações sociais decorrentes da alternância do poder central Indiano, guerras civis (como o conflito *Cera-Chola* que durou mais de 100 anos), o período colonial português (1100 a 1498 d.C.) entre outras mudanças geopolíticas. Apesar disso, uma vasta riqueza de conhecimento foi produzida a partir de nomes como Govindasvamin (pioneiro, 850 d.C.), Madhava (1340-1425), Paramesvara (1360-1460), Nilakhanta (1443-1560), Sankara Variyar(1500-1560) e Sankaravarman (1833-?).

Uma lista com as principais descobertas desta escola milenar para o contexto da Matemática e Astronomia inclui:

1. A primeira formulação correta da equação do centro de Mercúrio e Vênus, por Nilakantha na obra *Tantrasangraha*, cerca de um século antes que o astrônomo alemão Johannes Kepler.
2. O comentário de Nilakhanta sobre a obra *Aryabhatiya* contém diversas demonstrações geométricas relevantes, incluindo a soma de uma série infinita convergente. Esse resultado deriva de uma aproximação da medida de um arco em função de suas cordas.

A soma de uma série infinita cujos termos (a partir do segundo) se obtém pela redução dos termos anteriores pelo mesmo divisor é sempre igual ao numerador do primeiro termo dividido por um menos o divisor comum.

Isso equivale a lei moderna para a soma de uma progressão geométrica com o módulo da razão entre 0 e 1: se o primeiro termo é a e a razão (divisor comum) é q , então a soma infinita

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

é dada por $S = \frac{a}{1-q}$, desde que $|q| < 1$. Para ilustrar a aplicação de Nilakhanta, considere a seguinte série geométrica

$$\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$$

Este problema expresso por Nilakhanta da seguinte maneira:

Toda a série das potências de $\frac{1}{4}$ soma apenas para $\frac{1}{3}$. À medida que vamos somando mais potências de $\frac{1}{4}$, a diferença entre $\frac{1}{3}$ e a soma vai diminuindo, mas nunca se reduz a zero. Apenas quando juntamos todos os infinitos termos obtemos igualdade perante $\frac{1}{3}$.

Nilakhanta tentava explicar o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} - \frac{1}{4} &= \frac{1}{12} = \frac{1}{3 \cdot 4} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} &= \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4^2} = \frac{1}{3 \cdot 4^2} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^3} &= \frac{1}{3 \cdot 4^2} - \frac{1}{4^3} = \frac{1}{3 \cdot 4^3} \\ &\vdots \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} - \dots - \frac{1}{4^n} &= \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}} - \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3 \cdot 4^n}. \end{aligned}$$

Quando n fica muito grande o número $\frac{1}{3 \cdot 4^n}$ aproxima-se de 0, mas é positivo; estará tão próximo de 0 quanto quisermos desde que escolhamos n suficientemente grande. Portanto, os cálculos acima demonstram que a diferença

$$\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}\right) = \frac{1}{3 \cdot 4^n}$$

fica arbitrariamente próxima de zero, desde que somemos um número suficiente de termos da série. É precisamente nesse sentido que dizemos que a série tem soma $\frac{1}{3}$. De fato, substituindo $a = q = \frac{1}{4}$ na fórmula para a soma vem que

$$S = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Outras demonstrações da fórmula para a soma da série geométrica são encontradas no tratado *Yuktibhasa* escrito pelo matemático Narayana. Em uma delas, se $r < 1$, Narayana observa que

$$1 - r + r - r^2 + r^2 - r^3 + r^3 - r^4 + r^4 - r^5 + \dots = 1$$

ou seja,

$$(1 - r) + r(1 - r) + r^2(1 - r) + r^3(1 - r) + \dots = 1$$

ou seja,

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1 - r}.$$

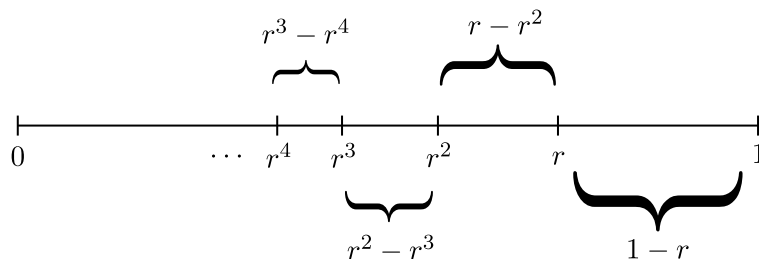


Figura 4.3

Vale destacar que na Matemática indiana tal regra teve aplicação na formulação da série da função arco tangente e posteriormente no cálculo de π , um grande feito na matemática de Kerala.

3. Nilakhanta elaborou ainda um método geométrico para calcular a soma de uma série aritmética:

$$S = a_0 + \underbrace{(a_0 + r)}_{a_1} + \underbrace{(a_0 + 2r)}_{a_2} + \cdots + \underbrace{(a_0 + nr)}_{a_n}.$$

Nesse caso os termos da soma são representados por retângulos de altura 1 e de comprimento igual ao seu valor. Esses retângulos são dispostos em pilha como ilustrado na figura 4.4.

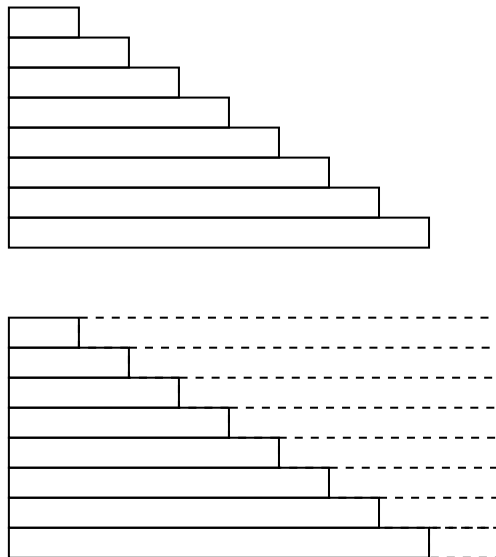


Figura 4.4: Visualização da soma de uma progressão aritmética.

Após um giro conveniente os retângulos na pilha encaixam-se (pois a soma de termos simétricos $a_0 + a_n$, $a_1 + a_{n-1}$, etc. é constante) para formar um retângulo maior cuja altura é o número de termos e o comprimento a soma do primeiro e do último termos. Sendo a soma da série a metade da área do retângulo obtém-se

$$S = \frac{n(a_0 + a_n)}{2}.$$

4. Nos comentários de *Lilavati*, escrito por Bhaskara II, Paramesvara relatou uma quantidade de fórmulas relacionando quadriláteros inscritíveis. Tais fórmulas foram depois importantes para conseguir resultados trigonométricos como

$$\operatorname{sen}^2(a) - \operatorname{sen}^2(b) = \operatorname{sen}(a+b) \cdot \operatorname{sen}(a-b)$$

que pode ser reescrita como

$$\operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{a+b}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

5. A série de potências de seno e cosseno. Essa descoberta está registrada na obra *Aryabhatiyabhasa* de Nilakhanta, porém atribuída ao matemático Madhava. Na notação moderna, expressa em graus, essas duas séries de potência são

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\theta) &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \\ \operatorname{cos}(\theta) &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\end{aligned}$$

Madhava usou a primeira fórmula para construir uma tabela de seno de 24 valores, dividindo o primeiro quadrante em 24 arcos iguais, o que hoje corresponde a 3 graus e 45 minutos. Os valores são corretos na maioria dos casos pra 8 casas decimais. Estas séries de potências apareceram pela primeira vez no Ocidente em 1676 numa carta de Newton ao secretário da Sociedade Real de Londres.

6. A descoberta da fórmula de interpolação de Gregory-Newton para um caso particular (segunda ordem) por Govindasvamin (800-850), muito antes dos nomes citados na fórmula. Esta fórmula pode ser expressa em notação moderna como

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{b} \Delta f(a) + \frac{\frac{h}{b}(\frac{h}{b}-1)}{2} \Delta^2 f(a) + \dots$$

em que

$$\begin{aligned}\Delta f(a) &= f(a+b) - f(a) \\ \Delta^2 f(a) &= \Delta f(a+b) - \Delta f(a) = f(a+2b) - 2f(a+b) + f(a) \\ \Delta^3 f(a) &= \Delta^2 f(a+b) - \Delta^2 f(a) = f(a+3b) - 3f(a+2b) + 3f(a+b) - f(a) \\ &\vdots\end{aligned}$$

Essa espetacular fórmula permite encontrar o valor de f em um ponto arbitrário $a+h$ a partir de seus valores em pontos de uma sequência aritmética $a, a+b, a+2b$, etc. Newton descobriu essa fórmula após suas investigações sobre interpolação que o levaram à descoberta da expressão do binômio. Gregory trilhou o caminho oposto: descobriu a fórmula geral primeiramente e dela chegou a fórmula do binômio, independentemente de Newton. Há sérias evidências de que Gregory utilizou a fórmula acima para chegar às séries de Taylor aproximadamente 44

anos que este último as publicasse oficialmente. Na realidade pode-se mostrar que a série de Taylor

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \dots$$

é o caso limite da fórmula de Gregory-Newton quando $b \rightarrow 0$.

A descoberta da fórmula de Gregory-Newton pelo matemáticos indianos é resultado de uma pesquisa incessante de novos e melhores métodos de interpolação usados para cálculos precisos, particularmente para seno de ângulos pequenos.

7. Em obras distintas de Nilakhanta e Jysthadeva encontramos citações detalhando aproximações para seno e cosseno atribuídas a Madhava:

Coloque as cordas (de seno e cosseno) o mais próximas do arco em que as cordas de seno e cosseno são desejadas e obtenha o arco da diferença para ser somada ou subtraída. A fim de correção, 13.751 deve ser dividido pelo dobro do arco diferença em minutos e o quociente deve ser colocado como divisor. Divida o seno por seu divisor e adicione ou subtraia do outro (cosseno), dependendo se o arco diferença deve ser somado ou subtraído. Dobre o resultado e faça como anteriormente (isto é, divida pelo divisor). Adicione ou subtraia o resultado do primeiro seno ou cosseno para obter os valores de seno ou cosseno desejados.

Usando notação moderna, a regra acima pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta + h) &\approx \text{sen}(\theta) + \frac{h}{r}\text{cos}(\theta) - \frac{h^2}{2r^2}\text{sen}(\theta), \\ \text{cos}(\theta + h) &\approx \text{cos}(\theta) - \frac{h}{r}\text{sen}(\theta) + \frac{h^2}{2r^2}\text{cos}(\theta), \end{aligned}$$

Estes resultados são casos particulares da fórmula da série de Taylor

$$f(\theta + u) = f(\theta) + u \cdot f'(\theta) + \left(\frac{u^2}{2}\right) \cdot f''(\theta) + \dots,$$

em que $u = \frac{h}{r}$ é a medido em radianos .

4.4 Cálculo das Séries de Taylor de seno e cosseno

Para ilustrar alguns resultados da Matemática feita em Kerala, vejamos como usar o método das diferenças explicado na seção anterior para obter as expansões de Taylor de $\text{sen}(\alpha)$ e $\text{cos}(\alpha)$. No que segue seguimos o trabalho *Yuktibhasa* de Jysthadeva, um dos primeiro escritos sobre como obter tais séries, embora todo o mérito seja atribuído a Madhava. Nesse ponto tomaremos $R = 1$, caso em que $\text{sen}_R(\alpha) = \text{sen}(\alpha)$, e assumiremos que todas as funções trigonométricas envolvidas utilizam medidas angulares em

radianos a fim de evitar uma série de constantes adicionais que surgem naturalmente quando utilizamos a função seno Indiana.

Em relação à figura 4.2 da página 44, note que se definimos $\angle A_0OA_i = i\Delta\theta = \theta$ e temos $\sin(1) = \sin(\Delta\theta) \approx \Delta\theta$, a equação (4.1) pode ser reescrita como

$$\frac{\Delta \sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\Delta\theta}{1} = \frac{\Delta \cos(\theta)}{\sin(\theta)}, \quad (4.4)$$

em que $\Delta \cos(\theta) = \cos(\theta) - \cos(\theta + \Delta\theta)$. Chegamos assim às equações³,

$$\begin{aligned} \Delta \sin(\theta) &= \cos(\theta)\Delta\theta \\ \Delta \cos(\theta) &= -\sin(\theta)\Delta\theta. \end{aligned} \quad (4.5)$$

As equações (4.5) permitem calcular facilmente a segunda diferença da função seno:

$$\begin{aligned} \Delta^2 \sin(\theta) &= \Delta \sin(\theta) - \Delta \sin(\theta + \Delta\theta) \\ &= \cos(\theta)\Delta\theta - \cos(\theta + \Delta\theta)\Delta\theta \\ &= [\cos(\theta) - \cos(\theta + \Delta\theta)] \Delta\theta \\ &= \Delta \cos(\theta)\Delta\theta \\ &= \sin(\theta)\Delta\theta^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Agora considere a figura 4.5. Nela temos que $\theta = n\Delta\theta$, $\sin(i) = A_iP_i$ e $\cos(i) = OP_i$. Estamos prontos para o primeiro passo que nos levará às séries de Taylor de \sin e \cos ; para isso usaremos a aproximação de primeira ordem $\sin(\theta) \approx \theta$ a fim de gerar uma aproximação de segunda ordem para o cosseno. De fato, pela figura 4.5 temos que

$$1 - \cos(\theta) = A_0P_n = P_0P_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + \cdots + P_{n-1}P_n,$$

mas $P_{i-1}P_i = \Delta \cos(i) = \sin(i)\Delta\theta$, logo

$$\cos(\theta) = 1 - [\sin(1) + \sin(2) + \cdots + \sin(n)] \Delta\theta. \quad (4.7)$$

Usando a aproximação de primeira ordem $\sin(\theta) \approx \theta$ e a igualdade $\Delta\theta = \frac{\theta}{n}$ vem que

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 - [\Delta\theta + 2\Delta\theta + \cdots + n\Delta\theta] \Delta\theta \\ &= 1 - [1 + 2 + \cdots + n] \Delta\theta^2 \\ &\approx 1 - \frac{n^2}{2} \Delta\theta^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

em que também utilizamos a aproximação

$$1 + 2 + \cdots + n \approx \frac{n^2}{2}.$$

³No trabalho de Jysthadeva não fica claro sobre qual ângulo devemos calcular as funções \sin e \cos na expressão (4.5). De acordo com a figura 4.2 deveríamos calculá-las em $\theta + \frac{\Delta\theta}{2}$, mas desde que $\Delta\theta$ é uma quantidade muito pequena, não é necessário escolher o argumento das funções trigonométricas precisamente no intervalo $[\theta, \theta + \Delta\theta]$.

Nm verdade, os matemáticos indianos sabiam que

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2},$$

garantindo que para valores muito grandes de n (ou muito pequenos de $\Delta\theta$) o termo de grau 2 prevalece sobre o termo de grau 1. De forma geral, o matemático egípcio Abu Ali al-Hasan ibn Al-Hasan ibn al-Haytham (965-1039) mostrou que

$$1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + p(n)$$

em que $p(n)$ é um polinômio em n de grau menor do que m . Assim, pelo mesmo raciocínio anterior, se n é bem grande temos que

$$1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m \approx \frac{n^{m+1}}{m+1},$$

em que o quociente do lado direito representa uma aproximação tanto melhor da soma do lado esquerdo quanto maior o valor de n tomado. Essas fórmulas foram enunciadas de maneira correta em meados do século XIV nos trabalhos de Narayana Pandita sem qualquer referência aos resultados de al-Haytham⁴. Para maiores informações sobre o assunto indicamos ao leitor a referência [4] ou ainda [7], página 282.

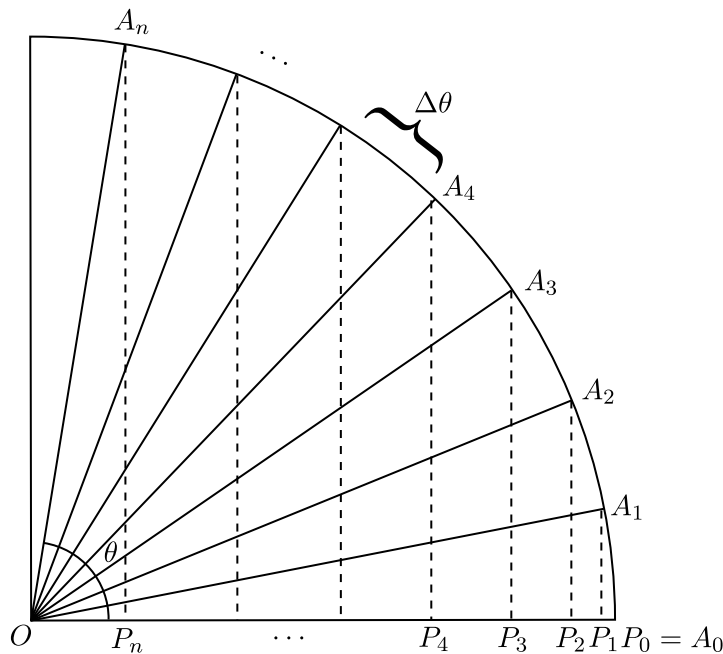


Figura 4.5: Método das diferenças para aproximação em série de potências de seno e cosseno.

Lembrando que $\theta = n\Delta\theta$ a equação (4.8) nos dá

$$\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}. \tag{4.9}$$

⁴Somas dessa natureza foram estudadas por diversos matemáticos europeus nos séculos que se seguiram; destaque para os trabalhos do matemático francês Blaise Pascal e do matemático alemão Johannes Faulhaber (1580-1635)

Nosso próximo passo é obter uma aproximação de terceira ordem para o seno a partir da aproximação de segunda ordem para o cosseno que acabamos de calcular. Para isso note que⁵

$$\begin{aligned}\Delta \text{sen}(1) &= \cos\left(1 - \frac{1}{2}\right) \Delta\theta \\ \Delta \text{sen}(2) &= \cos\left(2 - \frac{1}{2}\right) \Delta\theta \\ \Delta \text{sen}(3) &= \cos\left(3 - \frac{1}{2}\right) \Delta\theta \\ &\vdots \\ \Delta \text{sen}(n) &= \cos\left(n - \frac{1}{2}\right) \Delta\theta\end{aligned}$$

Dessa forma vem que

$$\Delta \text{sen}(1) - \Delta \text{sen}(n) = \left[\cos\left(\frac{1}{2}\right) - \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] \Delta\theta.$$

Usando as aproximações $\cos\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1$ e $\cos\left(n - \frac{1}{2}\right) \approx \cos(n)$ ⁶ que chegamos a

$$\Delta \text{sen}(1) - \Delta \text{sen}(n) \approx [1 - \cos(n)] \Delta\theta$$

e, por fim, usando (4.9) obtemos

$$[1 - \cos(n)] \Delta\theta = [1 - \cos(n\Delta\theta)] \Delta\theta = \left[1 - \left(1 - \frac{n^2}{2} \Delta\theta^2\right)\right] \Delta\theta = \frac{n^2}{2} \Delta\theta^3.$$

fazendo o mesmo para as demais diferenças $\Delta \text{sen}(1) - \Delta \text{sen}(i)$ obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}\Delta \text{sen}(1) - \Delta \text{sen}(n) &\approx \frac{n^2}{2} \Delta\theta^3, \\ \Delta \text{sen}(1) - \Delta \text{sen}(n-1) &\approx \frac{(n-1)^2}{2} \Delta\theta^3, \\ \Delta \text{sen}(1) - \Delta \text{sen}(n-2) &\approx \frac{(n-2)^2}{2} \Delta\theta^3, \\ &\vdots \\ \Delta \text{sen}(1) - \Delta \text{sen}(2) &\approx \frac{2^2}{2} \Delta\theta^3.\end{aligned}\tag{4.10}$$

A soma procurada fica

$$(n-1)\Delta \text{sen}(1) - [\Delta \text{sen}(2) + \Delta \text{sen}(3) + \cdots + \Delta \text{sen}(n)] = n\Delta \text{sen}(1) - \sum_{i=1}^n \Delta \text{sen}(i).$$

Lembrando que $\Delta \text{sen}(1) = \text{sen}(1) - \text{sen}(0) = \text{sen}(1) \approx \Delta\theta$ e

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \Delta \text{sen}(i) &= \Delta \text{sen}(1) + \Delta \text{sen}(2) + \Delta \text{sen}(3) + \cdots + \Delta \text{sen}(n-1) + \Delta \text{sen}(n) \\ &= \left[\cancel{\text{sen}(1)} - \cancel{\text{sen}(0)}\right]^0 + \left[\cancel{\text{sen}(2)} - \cancel{\text{sen}(1)}\right] + \left[\text{sen}(3) - \cancel{\text{sen}(2)}\right] + \cdots + \\ &\quad + \left[\cancel{\text{sen}(n-1)} - \text{sen}(n-2)\right] + \left[\text{sen}(n) - \cancel{\text{sen}(n-1)}\right] \\ &= \text{sen}(n) = \text{sen}(n\Delta\theta) = \text{sen}(\theta),\end{aligned}$$

⁵Nas equações abaixo as equações (4.5) são usadas exatamente como descrito na figura 4.2.

⁶A primeira decorre de (4.8) após observar que $\cos\left(\frac{1}{2}\right) = \cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$. A segunda aproximação segue da identidade $\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \text{sen}(A)\text{sen}(B)$ lembrando que $\text{sen}\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \approx \frac{\Delta\theta}{2} \approx 0$.

a soma dos lados direitos dá

$$n\Delta\theta - \text{sen}(\theta) = \theta - \text{sen}(\theta)$$

Portanto, se somarmos os dois lados de (4.10) obtemos

$$\theta - \text{sen}(\theta) = \left[n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2 \right] \frac{\Delta\theta^3}{2} \approx \frac{n^3}{3} \frac{\Delta\theta^3}{2} = \frac{(n\Delta\theta)^3}{3 \cdot 2} = \frac{\theta^3}{3!},$$

de onde obtemos a aproximação de terceira ordem para o seno

$$\text{sen}(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!}. \quad (4.11)$$

O processo recursivo agora pode ser automatizado. Para chegar à estimativa de segunda ordem do cosseno (4.9) aplicamos a estimativa de primeira ordem $\text{sen } \theta \approx \theta$ à equação (4.7). Se aplicarmos a estimativa mais acurada (4.11) vem

$$\begin{aligned} 1 - \cos(\theta) &= \left[\left(\Delta\theta - \frac{\Delta\theta^3}{3!} \right) + \left(2\Delta\theta - \frac{(2\Delta\theta)^3}{3!} \right) + \dots + \left(n\Delta\theta - \frac{(n\Delta\theta)^3}{3!} \right) \right] \\ &= [1 + 2 + \dots + n] \Delta\theta^2 - [1^3 + 2^3 + \dots + n^3] \frac{\Delta\theta^4}{3!} \\ &\approx \frac{n^2}{2} \Delta\theta^2 - \frac{n^4}{4} \frac{\Delta\theta^4}{3!}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!}. \quad (4.12)$$

Usando essa aproximação de quarta ordem para o cálculo das equações (4.10), podemos produzir uma aproximação de quinta ordem para os seno:

$$\begin{aligned} \theta - \text{sen}(\theta) &= \left(\frac{1^2}{2} \Delta\theta^3 - \frac{1^4}{4!} \Delta\theta^5 \right) + \left(\frac{2^2}{2} \Delta\theta^3 - \frac{2^4}{4!} \Delta\theta^5 \right) + \dots + \left(\frac{n^2}{2} \Delta\theta^3 - \frac{n^4}{4!} \Delta\theta^5 \right) \\ &= (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \frac{\Delta\theta^3}{2} - [1^4 + 2^4 + \dots + n^4] \frac{\Delta\theta^5}{4!} \\ &\approx \frac{n^3}{3} \frac{\Delta\theta^3}{2} + \frac{n^5}{5} \frac{\Delta\theta^5}{4!}, \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\text{sen}(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}. \quad (4.13)$$

Se continuamos nesse processo iterativo produzimos estimativas de ordem superior para o seno e o cosseno acrescentando um termo a cada etapa. O padrão obedecido por esses termos já deve estar claro para o leitor.

Atualmente expressamos as funções seno e cosseno em termos de suas séries de potências (somadas infinitas) como

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta) &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \\ \cos(\theta) &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

As expressões acima, embora também chamadas séries de Taylor em homenagem ao matemático britânico Brook Taylor (1635-1721), fizeram sua primeira aparição na Matemática europeia em uma carta escrita em 1676 pelo também britânico Isaac Newton (1642-1727) para o secretário da *Royal Society* de Londres Henry Oldenburg (1619-1677), mas destinada ao matemático alemão Gottfried Leibniz (1646-1716) em resposta a um pedido desse último por mais informações sobre o cálculo.

Para exemplificar o funcionamento da série de Taylor para o cálculo do seno ou cosseno de um arco, considere $\theta = \frac{\pi}{2}$. Sabemos que $\text{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$, usando a série de potências, temos

$$\begin{aligned} \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^7}{7!} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^9}{9!} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{11}}{11!} + \dots \\ &\approx 1; 34, 14, 52, 0, 23 - 0; 38, 45, 28, 14, 42 + 0; 4, 46, 53, 36, 25 - 0; 0, 16, 51, 15, 31 + \\ &\quad + 0; 0, 0, 34, 39, 18 - 0; 0, 0, 0, 46, 38 + \dots \\ &\approx 0; 59, 59, 59, 59, 15 \end{aligned}$$

O que gera uma aproximação com erro de apenas $-5,7 \cdot 10^{-8}$. É exatamente assim que uma calculadora realiza seus cálculos.

Abaixo segue um excerto da tabela de senos de Madhava que foi a mais acurada tabela produzida na Índia medieval. Embora em passos de $3; 45^\circ = 225'$ os valores de seno são corretos até a sétima casa decimal o que a faz comparável às melhores tabelas produzidas pelos árabes nesse período.

θ	3; 45°	7; 30°	11; 15°	15°	...	86; 15°	90°
$\text{sen}_R(\theta)$	224;50,22	448;42,58	670;40,16	889;45,15	...	3430;23,11	3437;44,48

Tabela 4.3: Tabela de sen_R de Madhava.

Para obter uma tabela com esse nível de precisão faz-se necessário uma excelente aproximação para π (lembre-se como o valor $R = 3438$ era obtido). De fato, uma das séries infinitas de Madhava, em notação moderna, afirma que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (4.14)$$

Essa expressão é um caso particular da série de Taylor para a função inversa da tangente:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots,$$

que obtemos quando pomos $x = 1$ observando que $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. A série de potências acima é também conhecida como série de Gregory pois foi em 1668, nos trabalhos do matemático escocês James Gregory (1638-1675), que ela fez seu debute na Matemática europeia.

Uma coisa mais precisa ser dita sobre o trabalho de Madhava: observa-se que a equação (4.14) converge muito lentamente e para calcular os primeiros 10 dígitos de

π corretamente são necessários cerca de 5.000.000.000 de termos! Madhava não tinha todo esse tempo para perder e a fim contornar essa dificuldade concebeu algumas correções engenhosas capazes de acelerar o processo de cálculo. O leitor interessado em aprender mais sobre os métodos indianos para aproximação de π pode consultar [6], páginas 368-380 ou [12], página 303.

4.5 A fórmula de aproximação para o seno de Bhaskara I

Bhaskara I (c. 600 d.C.), em sua obra *Mahabhaskariya*, deu dois métodos para construção de sen_R . O primeiro deles utiliza a regra das diferenças que já explicamos; o segundo aborda o problema de uma forma completamente original e é para ele que dedicamos essa seção.

O capítulo 7 de seu trabalho supracitado contém três versos que dão uma aproximação para a função trigonométrica seno através de uma fração racional. A fórmula é incrivelmente precisa levando a um erro de no máximo 1%. A fórmula, expressa em termos modernos, é dada por

$$s(x) = \frac{4x(180 - x)}{[40500 - x(180 - x)]}, \quad (4.15)$$

em que x é medido em graus e $0 \leq x \leq 180$. Se x é medido em radianos, isto é $0 \leq x \leq \pi$, temos a seguinte expressão:

$$s_r(x) = \frac{16x(\pi - x)}{[5\pi^2 - 4x(\pi - x)]}. \quad (4.16)$$

A figura abaixo mostra os gráficos de $\text{sen}(x)$ e $s(x)$ em vermelho e azul, respectivamente. Note que quase não há diferença visual entre as funções em $[0, 180]$ e somente fora desse intervalo percebemos facilmente a separação entre elas.

Bhaskara atribui esta fórmula a Ariabata, embora não se encontre qualquer vestígio dela nos trabalhos desse último que chegaram até nós. A tabela 4.4 dá os valores da aproximação de Bhaskara para valores de x entre 0 e 90° .

A equação de Bhaskara I é simples, elegante e além disso, calcula valores de seno precisos para a maioria dos propósitos práticos. A questão intrigante é: como Bhaskara I chegou a esta função? Segundo [6], o começo da história pode estar no fato de que a função seno tem raízes $x = 0$ e $x = 180$ e sua curva no intervalo definido por essas raízes “parece-se” como uma função quadrática $f(x) = x(180 - x)$. Entretanto, $\text{sen}(90^\circ) = 1$ enquanto $f(90) = 8100$, indicando que devemos ter um fator de redução para a função f , nesse caso igual a 8100.

Por outro lado, como $\text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$ e $f(30) = 4500$, o que implica um fator de redução de 9000 para f , concluímos que esse fator não é constante. Mais ainda, os valores $\text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $f(60) = 7200$ o que implica em um fator de redução de $\frac{14400}{\sqrt{3}}$.

Todos juntos, esses fatos garantem que o fator de redução também não pode ser uma função linear: enquanto no intervalo $[30, 90]$ temos uma inclinação de $\frac{8100-9000}{90-30} = -15$, no intervalo $[60, 90]$ temos uma inclinação de $\frac{8100-\frac{14400}{\sqrt{3}}}{90-60} = -7,12$.

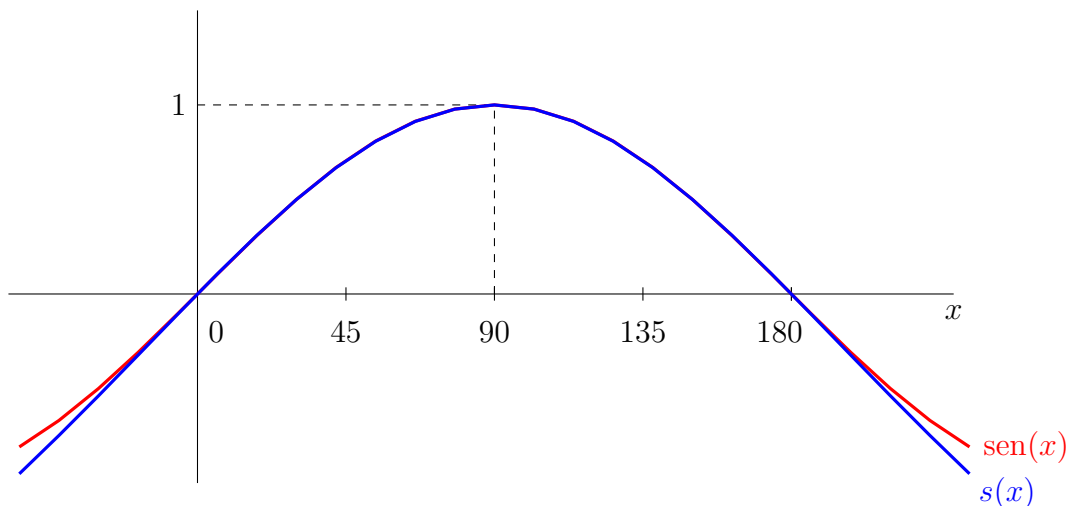


Figura 4.6: As funções $\text{sen}(x)$ e $s(x)$.

Graus	$\text{sen}(x)$	$s(x)$	Erro
0	0	0	0
5	0.087155743	0.088328076	-0.00117233
10	0.173648178	0.175257732	-0.00160955
15	0.258819045	0.26035503	-0.00153598
20	0.342020143	0.343163539	-0.0011434
25	0.422618262	0.423208191	-0.00058993
30	0.5	0.5	0
35	0.573576436	0.573041637	0.000534799
40	0.64278761	0.641833811	0.000953799
45	0.707106781	0.705882353	0.001224428
50	0.766044443	0.764705882	0.001338561
55	0.819152044	0.817843866	0.001308178
60	0.866025404	0.864864865	0.001160539
65	0.906307787	0.905374716	0.000933071
70	0.939692621	0.93902439	0.000668231
75	0.965925826	0.965517241	0.000408585
80	0.984807753	0.984615385	0.000192368
85	0.996194698	0.99614495	0.000049748
90	1	1	0

Tabela 4.4: Tabela de senos pela fórmula de aproximação de Bhaskara I

A partir dessas observações Bhaskara pode ter conjecturado que o fator de redução seria quadrático. Seguindo essa pista, ponhamos então

$$s(x) = \frac{x(180 - x)}{ax^2 + bx + c}. \quad (4.17)$$

Os matemáticos indianos desde o tempo de Ariabata sabiam os valores de senos de

um vasto número de ângulos. Em particular, sabiam que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(90^\circ) &= 1, \\ \operatorname{sen}(30^\circ) &= \operatorname{sen}(150^\circ) = \frac{1}{2}, \\ \operatorname{sen}(60^\circ) &= \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Substituindo $x = 30$ e $x = 150$ na expressão (4.17) temos

$$\frac{4500}{900a + 30b + c} = \frac{1}{2} = \frac{4500}{22500a + 150b + c}.$$

Igualando os denominadores obtemos $21600a = -120b$ ou ainda $b = -180a$. Substituindo $b = -180a$ e $x = 30$ na expressão (4.17) nós temos

$$\frac{1}{2} = \frac{8100}{8100a - 16200a + c}.$$

Portanto, $c = 8100(a + 1)$. Com esse valor para c e com $x = 60$ nós temos

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866 &= \frac{7200}{3600a - 10800a + 8100a + 8000} \\ &= \frac{7200}{8100 - 900a} = \frac{8}{9 - a}.\end{aligned}$$

Isso significa que $a = \frac{8}{0,866} - 9 = 0,238$ corrigido para 3 casas decimais. Nesse ponto Bhaskara I deve ter adotado a aproximação $a = \frac{1}{4}$. Usando-a e simplificando temos

$$s(x) = \frac{x(180 - x)}{\left(\frac{x^2 - 180x}{4}\right) + \frac{8100}{4} + 8100} = \frac{4x(180 - x)}{40500 - x(180 - x)},$$

que é idêntica à fórmula de aproximação dada acima em (4.15). Para aprender como calcular a fórmula de Bhaskara em radianos sugerimos ao leitor [6], páginas 409 e 410.

Referências Bibliográficas

- [1] AABOE, A. *Episódios da História Antiga da Matemática*. Sociedade Brasileira de Matemática. 3ª Edição, 2013.
- [2] BICUDO, I. *Elementos*, UNESP, 2009;
- [3] BRESSOUD, D. *Was Calculus Invented in India?*. The College Mathematics Journal, **33**, (2002), pp.2-13.
- [4] DREYER J. L. C. *A History of Astronomy from Thales to Kepler*. Dover Publications Inc. 1953.
- [5] HEATH, L. T. *A History of Greek Mathematics*, Volume 1. Dover Publications INC.. 1981.
- [6] JOSEPH, GEORGE G. *Indian Mathematics: Engaging with the World from Ancient to Modern Times*. World Scientific Publishing (UK). 2016.
- [7] KATZ, V. J. *A History of Mathematics: an Introduction*, 3ª edição, Addison-Wesley, 2009.
- [8] KATZ, V. J. *Ideas of Calculus in Islam and India*. Magazine, **68** (1995) pp.163-174.
- [9] NEUGEBAUER, O. *The Exact Sciences in Antiquity*. Dover Publications Inc. 2ª edição. 1969.
- [10] PTOLOMEU. *O Almagesto - Traduzido por G. J. Toomer* Duckworth. 1ª edição, 1984.
- [11] RODRIGUES, M. *Relógios de Sol: Seu Funcionamento e sua Construção*. Disponível em www.mat.unb.br/pibid/modules/cadernos/pdf/75.pdf, acesso em 20/01/2020.
- [12] ROY, R. *The Discovery of the Series Formula for π by Leibniz, Gregory and Nilakantha*. Math. Magazine, **63**, (1990) pp.291-306.
- [13] SPIVAK, M. *Calculus*, Publish or Perish, 4ª Edição, 2009.
- [14] VAN BRUMMELEN, GLEN *Heavenly Mathematics: The Forgotten Art of Spherical Trigonometry*. Princeton University Press. 2013.
- [15] VAN BRUMMELEN, GLEN *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry*. Princeton University Press. 2009.