

Hara Dessano Farias

*Mecânica Quântica Simplética e Sistemas
Dissipativos*

Tese apresentada ao Instituto de Física da
Universidade de Brasília para obtenção do tí-
tulo de doutor em Física

Orientador:
Ademir Eugênio de Santana

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

Brasília
dezembro de 2019

Dedico este trabalho à minha esposa, Aline Menezes Pereira Dessano, pela parceria, cumplicidade e dedicação durante toda a nossa jornada.

Dedico à minha mãe, Fátima Paes Loureiro e ao meu irmão, Tahian Dessano Farias, por todo o apoio e compreensão pelas minhas ausências nesses últimos anos.

Dedico também aos meus velhos e sempre atuais amigos, Kleuber, Sérgio (Chico), Arthur, Renato, Maurício (Bart), Girão, Lott, Guigui, Júlio, Igor, Rafael (Refs), suas respectivas e Bruno (bem vindo de volta!). E aos novos, Vinícius, Felipe e Diego.

Dedico aos meus sogros, José Gonçalves e Josenira Menezes, por toda consideração e carinho que têm por mim.

Agradeço aos colegas da pós Gustavo Petronilo e Rendisley Aristóteles pelas discussões e desabafos.

Agradeço aos professores Ronni Amorim e Sérgio Ulhôa pela disposição em discutir os entraves deste trabalho.

Agradeço ao professor Ademir Santana pela orientação e iluminação, tornando possível o término deste trabalho.

Agradeço, também, aos funcionários da secretaria da pós-graduação, que, nos bastidores, agilizam todo o processo burocrático de nossas pesquisas.

*"And then we'll rise in victory
We'll return stronger than ever
We shall rise from agony
Stand our ground
Stronger than ever."
(Gamma Ray)*

Resumo

O formalismo da mecânica quântica simplética é utilizado para a análise de sistemas dissipativos. Para isso, previamente, foi feita uma revisão bibliográfica do formalismo de Wigner da mecânica quântica e do produto estrela. A mecânica quântica simplética é construída através do grupo de Galilei, permitindo escrever a equação de Schrödinger no espaço de fase a fim de encontrarmos *quasi*-amplitudes de probabilidades associadas à função de Wigner. Esse formalismo foi aplicado a sistemas dissipativos, considerando as seguintes situações: a) oscilador quântico amortecido; b) sistema de osciladores com um parâmetro dissipativo; c) sistema de osciladores acoplados do tipo imagem espelhada de Bateman; d) sistema com amortecimento associado à parte imaginária de um Hamiltoniano não-hermitiano; e) por fim, uma partícula que se move em um campo no qual os efeitos dissipativos estão associados com o quadrado da velocidade. Em todos os casos, a partir das soluções analíticas para as *quasi*-distribuição de probabilidades, a função de Wigner correspondente foi calculada e analisada.

Abstract

The symplectic quantum mechanics formalism is used for the analysing dissipative systems. For this purpose, previously, a bibliographic review of Wigner's formalism of quantum mechanics and the star product are presented. The symplectic quantum mechanics is constructed through the Galilei group, allowing to writing the Schrödinger equation in phase space in order to find *quasi*-distributions associated with Wigner function. This formalism is applied to dissipative systems, considering the following situations: a) damped quantum oscillator; b) oscillator systems with a dissipative parameter; c) Bateman mirror-image oscillator system; d) damping associated with the imaginary part of a non-hermitian Hamiltonian; e) a moving particle in a field in wich dissipative effects are associated to the square of its velocity. In all cases, from the analytical solutions for the *quasi*-distributions, the corresponding Wigner function have been calculated and analysed.

Sumário

Lista de Figuras

1	Introdução	p. 9
2	Revisão: Formalismo de Wigner e o produto de Weyl-Wigner	p. 14
2.1	Matriz densidade	p. 14
2.2	Função de Wigner	p. 16
2.3	Quantização de Weyl	p. 20
2.4	O produto de Weyl-Wigner (produto estrela)	p. 26
2.5	Propriedades do produto de Weyl-Wigner	p. 29
2.6	Evolução Temporal da Função de Wigner	p. 35
2.7	Equação característica envolvendo a Função de Wigner	p. 37
3	Revisão: Mecânica Quântica Simplética	p. 39
3.1	Amplitudes e operadores no espaço de fase \mathcal{H}_Γ	p. 40
3.2	Equação de Schrödinger em \mathcal{H}_Γ	p. 45
3.3	Associação com a Função de Wigner	p. 46
3.4	Teorema de Ehrenfest	p. 49
3.5	A Função de Green em \mathcal{H}_Γ	p. 50
4	Oscilador Amortecido e Osciladores Acoplados com dissipação	p. 52
4.1	Oscilador Amortecido	p. 52
4.2	Sistema de Osciladores com dissipação via acoplamento	p. 58

5 Hamiltoniano dual de Bateman	p. 66
5.1 Descrição do problema	p. 66
5.2 Quantização em \mathcal{H}_Γ	p. 69
6 Hamiltoniano complexo de Dekker	p. 76
6.1 Descrição do problema	p. 76
6.2 Quantização em \mathcal{H}_Γ	p. 78
7 Dissipação com o quadrado da velocidade	p. 88
7.1 Descrição do problema	p. 88
7.2 Quantização em \mathcal{H}_Γ	p. 91
8 Conclusão e perspectivas	p. 96
Referências	p. 98

Lista de Figuras

1	Função de Wigner, $n = 0, \lambda = 0, 1$	p. 55
2	Função de Wigner, $n = 1, \lambda = 0, 1$	p. 55
3	Função de Wigner, $n = 5, \lambda = 0, 1$	p. 56
4	Função de Wigner, $n = 10, \lambda = 0, 1$	p. 56
5	Função de Wigner, $n = 0, \lambda = 0, 9$	p. 56
6	Função de Wigner, $n = 1, \lambda = 0, 9$	p. 56
7	Função de Wigner, $n = 5, \lambda = 0, 9$	p. 56
8	Função de Wigner, $n = 10, \lambda = 0, 9$	p. 56
9	O indicador de não classicidade versus número quântico para o oscilador amortecido $n \leq 25, \lambda = 0, 9$	p. 58
10	Função de Wigner, $n_u = n_v = 0$ e $\xi = 0, 9$	p. 64
11	Função de Wigner, $n_u = 1, n_v = 0$ e $\xi = 0, 9$	p. 64
12	Função de Wigner, $n_u = 0, n_v = 1$ e $\xi = 0, 9$	p. 65
13	Função de Wigner, $n_u = 1, n_v = 1$ e $\xi = 0, 9$	p. 65
14	Função de Wigner, $n_A = n_B = 0$	p. 74
15	Função de Wigner, $n_A = 1, n_B = 0$	p. 74
16	Função de Wigner, $n_A = 2, n_B = 0$	p. 74
17	Função de Wigner, $n_A = 5, n_B = 0$	p. 74
18	Função de Wigner, $n_A = 1, n_B = 1$	p. 75
19	Função de Wigner, $n_A = 2, n_B = 1$	p. 75
20	Função de Wigner, $n_A = 2, n_B = 2$	p. 75
21	Função de Wigner, $n_A = 5, n_B = 5$	p. 75

22	<i>Quasi</i> -amplitude, $n = 0$, $\lambda = 0.1$	p.84
23	Função de Wigner, $n = 0$, $\lambda = 0.1$	p.84
24	Função de Wigner, $n = 0$, $\lambda = 0.1$	p.85
25	Função de Wigner, $n = 3$, $\lambda = 0.1$	p.85
26	Função de Wigner, $n = 0$, $\lambda = 0.8$	p.85
27	Função de Wigner, $n = 2$, $\lambda = 0.8$	p.85
28	Função de Wigner, $n = 3$, $\lambda = 0.8$	p.86
29	Função de Wigner, $n = 0$, $\lambda = 0.9$	p.86
30	Função de Wigner, $n = 2$, $\lambda = 0.9$	p.86
31	Função de Wigner, $n = 3$, $\lambda = 0.9$	p.86
32	Função de Wigner, $n = 0$, $\lambda = 0.99$	p.87
33	Função de Wigner, $n = 1$, $\lambda = 0.99$	p.87
34	Função de Wigner, $n = 2$, $\lambda = 0.99$	p.87
35	Função de Wigner, $n = 3$, $\lambda = 0.99$	p.87
36	Função de Wigner, $n = 0$	p.95
37	Função de Wigner, $n = 1$	p.95
38	Função de Wigner, $n = 2$	p.95
39	Função de Wigner, $n = 3$	p.95

1 *Introdução*

Em sua fase inicial, o desenvolvimento histórico da mecânica quântica apresentou pouco interesse a formalismos para sistemas dissipativos, em parte porque a ideia de atrito é um conceito tipicamente macroscópico. Entretanto, nos anos 1950, a dissipação começou chamar a atenção em função da análise quântica do campo de radiação de cavidades de microondas [1, 2]. A descrição da dissipação quântica se fez necessária para analisar fenômenos associados à emissão espontânea de sistemas microscópicos acoplados ao campo, levando em consideração perdas na cavidade. A partir dos anos 1970, o estudo da dissipação se fortaleceu com a física nuclear e experimentos de colisões de íons pesados [3].

A introdução da dissipação na mecânica quântica seguiu praticamente dois métodos diferentes. O primeiro consiste em iniciar com as equações clássicas de Newton para o movimento, onde a dissipação provém de forças que dependem da velocidade. A seguir, encontra-se a Lagrangiana que leva a essas equações de movimento e então procede-se com a quantização através dos métodos usuais [4–7]. O segundo método consiste em considerar a dissipação como consequência do acoplamento de dois sistemas. Por exemplo, um oscilador harmônico sem amortecimento e o sistema que produz o amortecimento [1, 2, 8]. O primeiro método foi criticado por Brittin [9], em 1950, com o argumento no qual a quantização de sistemas com forças dissipativas que dependem da velocidade são incompatíveis com as relações de comutação e com o princípio da incerteza de Heisenberg. No segundo, existe uma dificuldade técnica em função do alto número de graus de liberdade do reservatório. Não obstante, sabe-se que dissipação surge da interação de um sistema com sua vizinhança, de modo que, a troca de energia se dá de maneira irreversível. Um exemplo é o estudo de um sistema quântico sendo investigado através do acoplamento com os instrumentos de medida utilizados, os quais geram influências que não podem ser negligenciadas no objeto quântico a ser medido [10].

Várias abordagens foram propostas para sistemas dissipativos ao longo dos anos. Em 1941, Caldirola [11] apresentou um trabalho mostrando ser possível quantizar um

sistema dissipativo utilizando um formalismo hamiltoniano que depende explicitamente do tempo. De uma maneira aparentemente independente, Kanai [4], em 1948, formulou uma descrição similar do problema. Porém, Brittin [9] mostrou que tal sistema viola a relação de comutação e conjecturou que, apesar do sistema dissipativo ser completamente descrito classicamente, sua versão quântica somente seria possível se o sistema dissipativo fosse considerado como um sub-sistema de um não dissipativo, não existindo uma representação de Schrödinger, a não ser que as forças fossem não dissipativas. Procurando uma alternativa, Dekker [12], em 1975, partiu de uma equação complexa de primeira ordem e mostrou que o amortecimento pode ser introduzido como uma parte imaginária de uma Lagrangiana, da qual um Hamiltoniano não-hermitiano foi deduzido. Em 1977, Feshbach e Tikochinsky [13] propuseram um método de quantização para o problema de um sistema acoplado com um modo do reservatório do tipo imagem espelhada, proposto para um sistema dissipativo puramente clássico por Bateman [14], em 1931. Muitos outros aspectos da dissipação quântica foram analisados no devir das décadas seguintes [15–18]. Vale destaque o trabalho de Mensky [19], em 2003, no qual sustenta que uma teoria quântica da dissipação deveria ser universal, isto é, independente do modelo utilizado. Isso porque a dissipação deve conter flutuações de natureza puramente quântica que podem estar relacionadas, de alguma forma, com o atrito proporcional à velocidade, no limite clássico. Porém, a mecânica quântica nos mostra que as flutuações ocorrem em virtude do princípio da incerteza de Heisenberg, independente dos objetos físicos considerados. Numa perspectiva mais ampla, compreender um sistema quântico imerso em um ambiente nos trás não apenas significados práticos no processamento da informação quântica [20], mas ajuda também a elucidar questionamentos fundamentais como o processo de medida, a fronteira clássico-quântica e o mecanismo da decoerência [10, 21–28].

Claramente, temos uma certa dificuldade no mapeamento do nível clássico para o nível quântico em sistemas dissipativos. Dentre as três formulações da mecânica quântica, a padrão, onde operadores no espaço de Hilbert \mathcal{H} são empregados, a integral de trajetórias e a mecânica quântica no espaço de fase, esta última compartilha a mesma estrutura e linguagem com a mecânica clássica. Dessa forma, a mecânica quântica no espaço de fase em seu limite clássico traz uma conexão mais natural e intuitiva do que as outras duas formulações. Nesse formalismo, o estado do sistema é descrito pela função de Wigner, $f_w(q, p)$ [29–33], originalmente concebida para ser uma função de distribuição no espaço de fase. Mas, apesar de ser real, normalizada e carregar informações estatísticas dos estados quânticos, ela pode assumir valores negativos, o que contraria o sentido usual da ideia de distribuição. Por esse motivo ela é conhecida como uma função de *quasi-*

distribuição. Uma outra característica é que as variáveis dinâmicas são representadas por funções sobre o espaço de fase e não por operadores. Nesse formalismo de Wigner, cada operador representado por A e definido em um espaço de Hilbert, \mathcal{H} , é associado a uma função, denotada por $a_w(q, p)$, no espaço de fase, Γ [30]. Esta associação consiste em uma aplicação $\Omega_w : A \rightarrow a_w(q, p)$ tal que a álgebra associativa de operadores em \mathcal{H} corresponde a uma álgebra também associativa, mas não-comutativa, em Γ . Portanto, o produto de operadores, em \mathcal{H} , fica definido em Γ pelo chamado produto estrela \star , ou produto de Moyal, ou, ainda, produto de Weyl [34, 35].

O produto de dois operadores é mapeado de acordo com $\Omega_w : AB \rightarrow a_w(q, p) \star b_w(q, p)$. Assim, o produto estrela de duas funções no espaço de fase corresponde ao produto de operadores no espaço de Hilbert e é definido por [30]

$$a_w(q, p) \star b_w(q, p) = a_w(q, p) e^{\frac{i\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)} b_w(q, p).$$

O produto de Moyal torna-se imprescindível nesse formalismo, pois ao representar o estado de um sistema, a função de Wigner obedece a uma equação análoga à de Liouville - von Neumann, com o parentêses de Moyal substituindo o comutador, isto é

$$i\hbar \frac{\partial f_w(q, p, t)}{\partial t} = \{H_w, f_w\}_M = H_w \star f_w - f_w \star H_w.$$

Essa formulação da mecânica quântica é útil na descrição de processos de transporte na hidrodinâmica quântica [36], na ótica quântica [37–40], na física de plasma [41], nuclear e de partículas [42–48], na física da matéria condensada [49–55], no estudo dos limites semiclássicos em sistemas mesoscópicos [56–62] e na transição para a mecânica estatística clássica [24, 39, 63–72]. Além disso, esse formalismo possui uma linguagem natural para investigar assinaturas quânticas do caos [73–79] e da decoerência [80–88], esta última, muito útil na computação quântica [89–93]. Esse formalismo também fornece suporte na medida de sistemas atômicos [94–97], além da medição direta da própria função de Wigner [98–104].

Porém, existem algumas dificuldades no uso direto da função de Wigner, como por exemplo, a ausência da simetria de calibre, já que se trata de uma função real. Uma outra dificuldade é de razão técnica: a equação de Liouville-von Neumann no espaço de fase possui uma natureza intrincada, sem solução perturbativa prática. Esses problemas motivaram uma intensa pesquisa, sob diversas perspectivas, do formalismo de Wigner [105–117], e alguns avanços foram realizados, incluindo representações das equações da mecânica quântica diretamente no espaço de fase [118]. A equação de Schrödinger é

escrita no espaço de fase [119, 120] e utilizada na análise harmônica [121–125], mas de maneira preliminar, pois a interpretação física para as funções de onda não possui um caráter geral.

Um formalismo consistente é construído, inicialmente [126], através do estudo de representações da álgebra de Lie do grupo de Galilei no espaço de fase, no qual as funções de onda, denominadas *quasi*-amplitudes de probabilidades, estão associadas com a função de Wigner através do produto de Moyal. Esta noção de estrutura simplética e o produto de Weyl são explorados para estudar representações unitárias do grupo de Galilei, levando a uma representação da equação de Schrödinger no espaço de fase [126]. Esta abordagem proporciona um procedimento interessante para deduzir a função de Wigner, usando, consistentemente, a invariância de calibre e os efeitos de superposição [127–129]. Essa representação simplética tem sido aplicada na teoria cinética e estendida para o contexto relativístico, dando origem às equações de Klein-Gordon e de Dirac no espaço de fase [130–134].

Neste trabalho, retomamos o estudo das representações unitárias do grupo (não da álgebra de Lie) de Galilei [135]. Este procedimento evidencia o papel das simetrias de calibre no espaço de fase, ao tempo em que interpreta, como antes [126], as funções de onda como *quasi*-amplitudes de probabilidades associadas à função de Wigner através do produto de Moyal. Dessa forma, a equação de Schrödinger no espaço de fase é escrita em uma estrutura simplética, na qual $\{q, p\}$ correspondem às coordenadas no espaço de fase Γ , formando uma base para a construção de funções de onda em um espaço de Hilbert com conteúdo de espaço de fase \mathcal{H}_Γ . Esse formalismo será aplicado em sistemas dissipativos, a fim de estudar o comportamento da função de Wigner.

A apresentação desse trabalho está disposta da seguinte maneira. No Capítulo 2 revisaremos o formalismo de Wigner, explorando suas propriedades. No Capítulo 3 revisaremos o formalismo da mecânica quântica simplética, enfatizando a construção da equação de Schrödinger no espaço de fase e a associação da função de Wigner com funções de *quasi*-amplitudes de probabilidades através da noção do grupo de Galilei. No Capítulo 4 aplicaremos esse formalismo aos problemas do oscilador quântico amortecido e do sistema de osciladores com dissipação. No Capítulo 5 trataremos da quantização proposta por Feshbach e Tikochinsky [13] para o Hamiltoniano dual de Bateman [14]. O Capítulo 6 trará o modelo dissipativo com um Hamiltoniano complexo, proposto por Dekker [12]. No Capítulo 7 discutiremos o movimento de uma partícula em um campo com forças dissipativas que dependem do quadrado da velocidade [136]. Finalmente, no

Capítulo 8 apresentaremos nossas considerações finais e perspectivas.

2 *Revisão: Formalismo de Wigner e o produto de Weyl-Wigner*

Em 1932, Wigner [29] percebeu que para altas temperaturas, a probabilidade de uma configuração dada pela teoria clássica de Boltzmann é também compatível com a teoria quântica. Porém, para baixas temperaturas era necessária uma correção. Para isso, foi introduzida uma função capaz de calcular probabilidades tanto nas coordenadas quanto nos *momenta*. Tal função é conhecida, hoje, como função de Wigner, que estatisticamente, representa uma função de *quasi*-distribuição (ou *quasi*-probabilidade) no espaço de fase. O formalismo proposto por Wigner tem sido utilizado em diversas áreas como óptica quântica e física da matéria condensada, tendo inclusive sua medição sendo realizada em experimentos de cavidade quântica [100]. Esse capítulo é dedicado à revisão desse formalismo, definindo a função de Wigner através da matriz densidade e explorando suas propriedades. Por último, será introduzido o produto estrela, ferramenta necessária para o desenvolvimento da mecânica quântica simplética.

2.1 Matriz densidade

O conceito de probabilidade surge naturalmente quando se trata com problemas de muitas partículas. Nesse universo, as ideias da mecânica clássica dão suporte para a formulação da mecânica estatística. Assim, um ponto no espaço de fase representa o estado do sistema e sua evolução temporal é caracterizada por uma trajetória bem definida nesse espaço. Mas, no âmbito microscópico é impossível conhecer as condições iniciais, tornando essa trajetória não definida. Na mecânica quântica, uma forma de lidar com esse problema é representar o estado macroscópico de um sistema como sendo constituído

de uma infinidade de estados microscópicos (ensemble) através do operador densidade ¹

$$\rho = \sum_i \omega_i |\psi_i(t)\rangle \langle \psi_i(t)|, \quad (2.1)$$

onde $\{|\psi_i\rangle\}$ são os estados microscópicos possíveis do ensemble estatístico e $\omega_i = \frac{N_i}{N}$ é o peso estatístico para o estado quântico $|\psi_i\rangle$. Considera-se que a matriz densidade ρ contém todas as informações sobre o sistema e permite descrever qualquer sistema físico. Para estados puros, teremos

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|. \quad (2.2)$$

O valor esperado de um operador A na formulação da mecânica quântica estatística usual é dado por

$$\langle A \rangle = Tr(\rho A) = Tr(A\rho), \quad (2.3)$$

com a matriz densidade, ρ , apresentando as seguintes propriedades,

(i) hermiticidade: $\rho^\dagger = \rho$;

(ii) traço: $Tr\rho = 1$.

Para completar esse formalismo falta somente a equação que governa a evolução temporal do operador densidade ρ . Essa equação surge naturalmente da equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle,$$

onde H representa a energia total do sistema.

Derivando a matriz densidade, dada na Eq. (2.2), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle \right) \langle \psi(t)| + |\psi(t)\rangle \left(\frac{\partial}{\partial t} \langle \psi(t)| \right) \\ &= \frac{1}{i\hbar} H(t) |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| + \frac{1}{-i\hbar} |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| H(t). \end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$i\hbar \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [H(t), \rho(t)]. \quad (2.4)$$

Essa é a equação que determina a evolução temporal do operador densidade, conhecida como equação de Liouville-von Neumann.

¹A notação utilizada nesse trabalho será da seguinte forma: operadores usuais da mecânica quântica não apresentarão *chapéu* e quando representados pelo alfabeto latino apresentarão letras maiúsculas. O *chapéu* será utilizado para representar os operadores estrelas que serão construídos ao longo do texto.

2.2 Função de Wigner

A função de Wigner representa uma distribuição conjunta das variáveis canonicamente conjugadas q e p , que se assemelha a uma distribuição clássica de probabilidades. Essa função é real e é definida pela transformada de Fourier dos elementos não diagonais da matriz densidade, isto é,

$$f_w(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle, \quad (2.5)$$

ou, na representação dos *momenta*,

$$f_w(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dk e^{-\frac{iqk}{\hbar}} \langle p - \frac{k}{2} | \rho | p + \frac{k}{2} \rangle. \quad (2.6)$$

Apesar de estarmos trabalhando com apenas uma dimensão, a generalização para casos que possuam maior número dimensional pode ser feita sem maiores problemas. Para estados puros, dados pela Eq. (2.2), a função de Wigner fica na forma

$$f_w(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{\frac{ipz}{\hbar}} \psi^\dagger(q + \frac{z}{2}) \psi(q - \frac{z}{2}) dz. \quad (2.7)$$

Matematicamente, a função de Wigner não pode ser interpretada como uma função de distribuição de probabilidades no espaço de fase, pois, apesar de ser real, pode assumir valores negativos. Essas regiões são associadas a não classicidade de um sistema, de forma que quanto mais negativa, mais o sistema se afasta do comportamento clássico [137]. Porém, a função de Wigner carrega propriedades inerentes à interpretação física de um sistema, pois densidades de probabilidades surgem quando a integramos.

Uma propriedade básica da função de Wigner é o limite de seus valores. Tomemos como exemplo um estado puro, dado pela Eq. (2.7). Se definirmos as funções de onda normalizadas

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{ipz}{\hbar}} \psi(x + \frac{z}{2}) \quad e \quad \varphi_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi(x - \frac{z}{2}),$$

vemos que a função de Wigner pode ser interpretada como o produto escalar

$$f_w(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dz \varphi_1^\dagger(z) \varphi_2(z) = \frac{1}{\pi\hbar} \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle,$$

e, portanto,

$$|f_w(q, p)| = \frac{1}{\pi\hbar} |\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle|.$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle|^2 \leq \langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle \langle \varphi_2 | \varphi_2 \rangle,$$

temos que, já que as funções φ_1 e φ_2 são normalizadas,

$$|\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle|^2 \leq 1.$$

Portanto,

$$|f_w(q, p)| \leq \frac{1}{\pi\hbar}. \quad (2.8)$$

Assim, a função de Wigner para sistemas puros normalizados não pode assumir valores maiores que $\frac{1}{\pi\hbar}$ ou menores que $-\frac{1}{\pi\hbar}$.

Integrando a função de Wigner, informações estatísticas importantes sobre um sistema físico são encontradas. Por exemplo, quando integramos em relação a p , temos

$$\int dp f_w(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp dz \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle e^{\frac{ipz}{\hbar}}.$$

Podemos reconhecer a função delta de Dirac, em sua forma integral, $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ikx} dk$, se reorganizarmos os termos dentro da integral na seguinte forma

$$\int dp f_w(q, p) = \int dz \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{ipz}{\hbar}} \right).$$

Logo, temos

$$\int dp f_w(q, p) = \int dz \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle \delta(z).$$

Como $\int f(x)\delta(x)dx = f(0)$, encontramos

$$\int dp f_w(q, p) = \langle q | \rho | q \rangle.$$

Esta propriedade mostra a densidade de probabilidade de se encontrar uma partícula entre q e $q + dq$.

Analogamente, podemos integrar a função de Wigner em q . Neste caso, temos

$$\int dq f_w(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp dk \langle p - \frac{k}{2} | \rho | p + \frac{k}{2} \rangle e^{\frac{-iqk}{\hbar}}.$$

Novamente, separando as integrais

$$\int dq f_w(q, p) = \int dk \langle p - \frac{k}{2} | \rho | p + \frac{k}{2} \rangle \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \int dq e^{\frac{-iqk}{\hbar}} \right),$$

notamos que o termo entre parenteses é a função delta de Dirac, $\delta(k)$, e assim

$$\int dq f_w(q, p) = \int dk \langle p - \frac{k}{2} | \rho | p + \frac{k}{2} \rangle \delta(k).$$

Utilizando, outra vez, a definição da delta, tem-se

$$\int dq f_w(q, p) = \langle p | \rho | p \rangle,$$

que expressa a densidade de probabilidades para se encontrar uma partícula com momento entre p e $p + dp$.

É interessante notar que a integração em p revela uma densidade de probabilidade nas coordenadas e a integração em q , uma densidade de probabilidade nos *momenta*. Mas, além disso, podemos também integrar sobre todo o espaço de fase, ou seja,

$$\int f_w(q, p) dq dp = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dz dq dp e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle.$$

Se for calculada a integral na variável p , tem-se

$$\int f_w(q, p) dq dp = \int dz dq \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{ipz}{\hbar}} \right),$$

onde o termo entre parenteses é a função delta de Dirac. Com isso, temos

$$\begin{aligned} \int f_w(q, p) dq dp &= \int dz dq \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle \delta(z) \\ &= \int dq \langle q | \rho | q \rangle = \text{Tr} \rho = 1. \end{aligned}$$

Ou seja, a função de Wigner é normalizada, o que expressa uma consistência com a normalização da matriz densidade. Agora, se a integração sobre o espaço de fase for realizada em um produto de duas funções de Wigner referentes a dois estados distintos, caracterizados por ρ_1 e ρ_2 , encontraremos uma propriedade que diz respeito ao traço do produto de duas matrizes de densidade. Dessa forma, usando a Eq. (2.5), segue que

$$\int dq dp f_{w_1}(q, p) f_{w_2}(q, p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^2 \int dq dp dz_1 dz_2 e^{\frac{ip(z_1+z_2)}{\hbar}} \langle q - \frac{z_1}{2} | \rho_1 | q + \frac{z_1}{2} \rangle \langle q - \frac{z_2}{2} | \rho_2 | q + \frac{z_2}{2} \rangle.$$

A integração em p revela-se uma delta de Dirac, $\delta(z_1 + z_2)$, de forma que, após integrarmos em z_2 , teremos

$$\int dq dp f_{w_1}(q, p) f_{w_2}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dq dz_1 \langle q - \frac{z_1}{2} | \rho_1 | q + \frac{z_1}{2} \rangle \langle q + \frac{z_1}{2} | \rho_2 | q - \frac{z_1}{2} \rangle.$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$x' = q - \frac{z_1}{2} \quad x'' = q + \frac{z_1}{2},$$

chegamos a

$$\int dqdp f_{w_1}(q, p) f_{w_2}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx' dx'' \langle x'' | \rho_1 | x' \rangle \langle x' | \rho_2 | x'' \rangle.$$

Utilizando a relação de fechamento, temos

$$\int dqdp f_{w_1}(q, p) f_{w_2}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx'' \langle x'' | \rho_1 \rho_2 | x'' \rangle,$$

que pode ser escrito como

$$\int dqdp f_{w_1}(q, p) f_{w_2}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \text{Tr}(\rho_1 \rho_2).$$

Ou seja, o traço do produto de dois operadores densidade pode ser determinado pelo produto das funções de Wigner correspondentes a cada estado, integrado sobre todo o espaço de fase. Se for considerado o estado puro, dado pela Eq. (2.2), associado ao fato que $\text{Tr}|u\rangle\langle v| = \langle v|u\rangle$, temos

$$\int dqdp f_{w_1}(q, p) f_{w_2}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2.$$

Note que caso os estados sejam ortogonais, isto é, $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0$, então

$$\int dqdp f_{w_1}(q, p) f_{w_2}(q, p) = 0.$$

Portanto, apesar da integral no espaço de fase ser nula, as funções f_{w_1} e f_{w_2} não são necessariamente nulas, nos forçando a concluir que podem assumir valores negativos. Por esse motivo a função de Wigner é conhecida como uma distribuição de *quasi*-probabilidade, já que, quando integrada, pode ser interpretada como uma distribuição de probabilidades, como já foi visto. A parte negativa da função de Wigner pode ser vista como um fator de não classicidade de um estado, pois para interpretá-la como uma distribuição clássica de probabilidades seria necessária sua não-negatividade. Porém, isso só acontece com os estados coerentes e com os estados de vácuo comprimido, pois possuem comportamento análogo ao clássico. Portanto, a negatividade da função de Wigner pode ser interpretada como uma assinatura do nível quântico do sistema. É possível obter um indicador da não classicidade de um sistema através do volume da parte negativa da função de Wigner. O

dobro do volume da parte negativa pode ser escrito como [137]

$$\eta(\psi) = \int dqdp \{|f_w(q,p)| - f_w(q,p)\}.$$

Assim, $\eta(\psi)$ corresponde a um indicador de negatividade para um estado $|\psi\rangle$, que, utilizando o fato que a função de Wigner é normalizada, pode ser escrito como

$$\eta(\psi) = \int dqdp |f_w(q,p)| - 1. \quad (2.9)$$

Note que, por definição, η deve ser igual a zero para os estados coerentes e estados de vácuo comprimido.

2.3 Quantização de Weyl

A quantização, de certa forma, é uma receita de como associar a um sistema quântico, variáveis clássicas de uma maneira razoável e consistente. Desde a quantização da energia eletromagnética à segunda quantização, um questionamento que pode ser feito é: "por que a quantização é realmente necessária e será que existe um princípio mais profundo e fundamental a ela?". O fato é que a mecânica quântica é uma das teorias mais bem sucedidas experimentalmente. Aparentemente a natureza é quantizada. Porém, mesmo existindo várias formas de se quantizar um sistema, é imprescindível que a teoria quântica adotada descreva o sistema clássico quando os efeitos quânticos puderem ser ignorados, isto é, obedeça ao princípio da correspondência. Um outro viés interessante é que a descrição quântica de um fenômeno possui mais informação que a clássica, do mesmo fenômeno. Ou seja alguns efeitos apenas se revelam quando o sistema é tratado quanticamente.

A forma tradicional de quantizar um sistema clássico é simplesmente promover as variáveis clássicas de um Hamiltoniano em seus respectivos operadores que obedeçam as regras de comutação canônica. Perceba que mesmo concordando muito bem com dados experimentais e obedecendo ao princípio da correspondência, essa teoria não diz muita coisa sobre os aspectos fundamentais da quantização. Essa quantização canônica é bastante útil em algumas situações, quando não há ambiguidade na ordem em que as variáveis aparecem no Hamiltoniano clássico. Por exemplo, o oscilador harmônico é facilmente quantizado promovendo as variáveis posição e *momentum* q e p a operadores Q e P , de forma que $[Q, P] = i\hbar$, isto é

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \longrightarrow H(Q, P) = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 Q^2}{2}.$$

Agora se a função que desejamos quantizar for ambígua, por exemplo, $H(q, p) = qp$, a simples promoção não fornece uma informação coerente pois QP é diferente de PQ . Nesses casos, normalmente é feita uma simetrização antes de realizar a quantização, isto é

$$H = \frac{(qp + pq)}{2}.$$

Além do problema da ambiguidade, outros aparecem quando, por exemplo, funções não-polinomiais precisam ser quantizadas. Dessa forma, outras técnicas de quantização foram sendo construídas com o passar dos anos. Na década de 20, do século passado, Weyl, à procura de uma formulação alternativa da mecânica quântica, propôs uma correspondência entre funções de distribuições clássicas no espaço de fase e operadores na mecânica quântica, relacionando cada sistema clássico (variedade simplética) a um sistema quântico (espaço de Hilbert) [138]. O produto estrela emerge naturalmente desse método, sendo por esse motivo, também chamada de quantização por deformação. A regra de quantização de Weyl consiste em associar um operador quântico $\widehat{\mathcal{W}}[f]$ a uma função no espaço de fase, seguindo o mapa $\widehat{\mathcal{W}}[f] : f \rightarrow \widehat{f}$, definido por

$$\widehat{\mathcal{W}}[f] = f(Q, P) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\sigma d\tau dq dp f(q, p) e^{i\sigma(Q-q) + i\tau(P-p)}. \quad (2.10)$$

Essa regra é inversível, pois

$$\widehat{\mathcal{W}}^{-1}[f(Q, P)] = f(q, p) = \int dz \langle q - \frac{z}{2} | f(Q, P) | q + \frac{z}{2} \rangle e^{\frac{ipz}{\hbar}}. \quad (2.11)$$

A Eq. (2.11) é conhecida como transformada de Weyl da função $f(q, p)$.

Para provar que a quantização de Weyl é de fato inversível, vamos substituir a Eq. (2.10) na Eq. (2.11), de modo que,

$$f(q, p) = \int dz \langle q - \frac{z}{2} | \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\sigma d\tau dq' dp' f(q', p') e^{i\sigma(Q-q') + i\tau(P-p')} | q + \frac{z}{2} \rangle e^{\frac{ipz}{\hbar}}.$$

Reorganizando os termos, temos

$$f(q, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dz d\sigma d\tau dq' dp' f(q', p') e^{-i(\sigma q' + \tau p')} \langle q - \frac{z}{2} | e^{i(\sigma Q + \tau P)} | q + \frac{z}{2} \rangle e^{\frac{ipz}{\hbar}}.$$

Através da relação de *Baker-Campbell-Hausdorff*

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \quad (2.12)$$

encontramos,

$$e^{i(\sigma Q + \tau P)} = e^{i\sigma Q} e^{i\tau P} e^{\frac{i\hbar\sigma\tau}{2}},$$

uma vez que $[Q, P] = i\hbar$, o que nos leva a

$$f(q, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dz d\sigma d\tau dq' dp' f(q', p') e^{-i(\sigma q' + \tau p')} e^{\frac{i\hbar\sigma\tau}{2}} \langle q - \frac{z}{2} | e^{i\sigma Q} e^{i\tau P} | q + \frac{z}{2} \rangle e^{\frac{ipz}{\hbar}}.$$

Como $Q|q\rangle = q|q\rangle$ e $e^{iaP}|q\rangle = |q - \hbar a\rangle$, o *bracket* da equação acima fica dado por

$$\begin{aligned} \langle q - \frac{z}{2} | e^{i\sigma Q} e^{i\tau P} | q + \frac{z}{2} \rangle &= e^{i\sigma(q + \frac{z}{2} - \hbar\tau)} \langle q - \frac{z}{2} | q + \frac{z}{2} - \hbar\tau \rangle \\ &= e^{i\sigma(q + \frac{z}{2} - \hbar\tau)} \delta(z - \hbar\tau). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Logo, temos

$$f(q, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dz d\sigma d\tau dq' dp' f(q', p') e^{-i(\sigma q' + \tau p')} e^{\frac{i\hbar\sigma\tau}{2}} e^{i\sigma(q + \frac{z}{2} - \hbar\tau)} e^{\frac{ipz}{\hbar}} \delta(z - \hbar\tau).$$

A integração em z nos fornece

$$f(q, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\sigma d\tau dq' dp' f(q', p') e^{i\sigma(q - q')} e^{i\tau(p - p')} f(q', p').$$

Podemos identificar as funções delta

$$\delta(q - q') = \frac{1}{2\pi} \int d\sigma e^{i\sigma(q - q')}$$

e

$$\delta(p - p') = \frac{1}{2\pi} \int d\tau e^{i\tau(p - p')},$$

de forma que, finalmente,

$$f(q, p) = \int dq' dp' \delta(q - q') \delta(p - p') f(q', p') = f(q, p).$$

Assim, nessa representação, os operadores quânticos definidos no espaço de Hilbert são representados por funções no espaço de fase através da transformada de Weyl, dada pela Eq. (2.11). Dessa forma, um operador A no espaço de Hilbert é representado, no espaço de fase por

$$a_w(q, p) = \int e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2} | A | q + \frac{z}{2} \rangle dz, \quad (2.14)$$

ou, analogamente, na representação dos *momenta*,

$$a_w(q, p) = \int e^{-\frac{iqk}{\hbar}} \langle p - \frac{k}{2} | A | p + \frac{k}{2} \rangle dk. \quad (2.15)$$

Nota-se, portanto que a função de Wigner nada mais é que a transformada de Weyl do operador matriz densidade, ou seja,

$$f_w = \frac{1}{2\pi\hbar} \rho_w, \quad (2.16)$$

onde

$$\rho_w = \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle.$$

Como uma das metas da mecânica quântica é calcular valores esperados, precisamos saber se essas funções estão de acordo com a estrutura padrão. Ou seja, é necessário conferir se a relação

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \int dq dp a_w(q, p) f_w(q, p) = \text{Tr} \rho A \quad (2.17)$$

é válida. Vamos, então, substituir as Eqs.(2.14) e (2.5) na integral acima.

$$\langle A \rangle = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right) \int dq dp dz dz' e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2} | A(Q, P) | q + \frac{z}{2} \rangle e^{\frac{ipz'}{\hbar}} \langle q - \frac{z'}{2} | \rho | q + \frac{z'}{2} \rangle.$$

Organizando os termos da seguinte maneira,

$$\langle A \rangle = \int dq dz dz' \left(\left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right) \int dp e^{\frac{ip(z+z')}{\hbar}} \right) \langle q - \frac{z}{2} | A(Q, P) | q + \frac{z}{2} \rangle \langle q - \frac{z'}{2} | \rho | q + \frac{z'}{2} \rangle,$$

fica claro que a integração em p é a função delta de Dirac. Assim, chega-se a

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \int dq dz dz' \langle q - \frac{z}{2} | A(Q, P) | q + \frac{z}{2} \rangle \langle q - \frac{z'}{2} | \rho | q + \frac{z'}{2} \rangle \delta(z + z') \\ &= \int dq dz \langle q - \frac{z}{2} | A(Q, P) | q + \frac{z}{2} \rangle \langle q + \frac{z}{2} | \rho | q - \frac{z}{2} \rangle. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável, que possui jacobiano igual a 1

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \left(q - \frac{z}{2} \right) \\ \bar{z} &= \left(q + \frac{z}{2} \right), \end{aligned}$$

tem-se

$$\langle A \rangle = \int d\bar{q} d\bar{z} \langle \bar{q} | A(Q, P) | \bar{z} \rangle \langle \bar{z} | \rho | \bar{q} \rangle.$$

Utilizando a relação de fechamento

$$\int d\bar{z} | \bar{z} \rangle \langle \bar{z} | = \mathbf{1},$$

chegamos a

$$\int d\bar{q} \langle \bar{q} | A(Q, P) \rho | \bar{q} \rangle = \text{Tr} \rho A = \langle A \rangle.$$

Portanto, as funções *c-number* sobre o espaço de fase que representam os operadores quânticos no espaço de Hilbert são compatíveis com a teoria quântica padrão.

Algumas propriedades importantes surgem desse formalismo. Por exemplo, se tivermos um operador independente de P , ($A = A(Q)$), então o seu recíproco na

abordagem de Wigner também será da mesma forma funcional, com a diferença que os operadores Q serão substituídos pelas variáveis q . Isso pode ser facilmente visto se for feita uma expansão de $A(Q)$ em séries de Q , ou seja,

$$A(Q) = A(0) + QA'(0) + \frac{Q^2}{2!}A''(0) + \dots$$

Substituindo esta expansão na Eq. (2.14), tem-se

$$a_w(q, p) = \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2} | A(0) + QA'(0) + \frac{Q^2}{2!}A''(0) + \dots | q + \frac{z}{2} \rangle.$$

Porém, $Q|q\rangle = q|q\rangle$, então

$$\begin{aligned} a_w(q, p) = & A(0) \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2} | q + \frac{z}{2} \rangle \\ & + A'(0) \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} (q + \frac{z}{2}) \langle q - \frac{z}{2} | q + \frac{z}{2} \rangle \\ & + A''(0) \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \frac{(q + \frac{z}{2})^2}{2!} \langle q - \frac{z}{2} | q + \frac{z}{2} \rangle + \dots \end{aligned}$$

Como $\langle q - \frac{z}{2} | q + \frac{z}{2} \rangle = \delta(z)$, após o cálculo da integral em z , chega-se a

$$a_w(q) = A(0) + qA'(0) + \frac{q^2}{2!}A''(0) + \dots = A(q).$$

Analogamente, se o operador for independente de Q , isto é $A = A(P)$, então $a_w(q, p) = A(p)$. Agora, basta expandir $A(P)$ em séries de P ,

$$A(P) = A(0) + PA'(0) + \frac{P^2}{2!}A''(0) + \dots$$

e substituir na Eq. (2.15), isto é,

$$a_w(q, p) = \int dk e^{\frac{-iqk}{\hbar}} \langle p - \frac{k}{2} | A(0) + PA'(0) + \frac{P^2}{2!}A''(0) + \dots | p + \frac{k}{2} \rangle.$$

Como, $P|p\rangle = p|p\rangle$, então

$$\begin{aligned} a_w(q, p) = & A(0) \int dk e^{\frac{-iqk}{\hbar}} \langle p - \frac{k}{2} | p + \frac{k}{2} \rangle \\ & + A'(0) \int dk e^{\frac{-iqk}{\hbar}} (p + \frac{k}{2}) \langle p - \frac{k}{2} | p + \frac{k}{2} \rangle \\ & + A''(0) \int dk e^{\frac{-iqk}{\hbar}} \frac{(p + \frac{k}{2})^2}{2!} \langle p - \frac{k}{2} | p + \frac{k}{2} \rangle + \dots \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade da delta $\delta(k)$ para calcular a integral em k , chega-se a

$$a_w(p) = A(0) + pA'(0) + \frac{p^2}{2!}A''(0) + \dots = A(p).$$

Mas se o operador for independente tanto de Q , quanto de P , isto é, for uma constante, então a função recíproca também o será. Essa propriedade segue facilmente se substituirmos $A(Q, P) = c$ na Eq. (2.14).

$$a_w(q, p) = \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2} | c | q + \frac{z}{2} \rangle.$$

Como constantes não atuam em kets e notando que $\langle q - \frac{z}{2} | q + \frac{z}{2} \rangle = \delta(z)$, chegamos a

$$a_w(q, p) = c \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \delta(z).$$

O que, após a integração em z , leva a

$$a_w(q, p) = c = A(q, p).$$

Vimos que a função de Wigner, quando integrada, resulta em probabilidades. E já que tal função exhibe a mesma forma da *transformada de Weyl* dos operadores, podemos explorar também a integração dessas funções. Começamos integrando a Eq. (2.14) sobre todo o espaço de fase, ou seja,

$$\int dq dp a_w(q, p) = \int dq dp \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2} | A(Q, P) | q + \frac{z}{2} \rangle.$$

Reorganizando os termos, podemos notar a função delta na forma integral, isto é,

$$\int dq dp a_w(q, p) = \int dq dz \langle q - \frac{z}{2} | A(Q, P) | q + \frac{z}{2} \rangle \left(\int dp e^{\frac{ipz}{\hbar}} \right).$$

Dessa maneira,

$$\int dq dp a_w(q, p) = \int dq dz \langle q - \frac{z}{2} | A(Q, P) | q + \frac{z}{2} \rangle (2\pi\hbar) \delta(z),$$

o que nos leva a

$$\int dq dp a_w(q, p) = 2\pi\hbar \int dq \langle q | A(Q, P) | q \rangle = 2\pi\hbar \text{Tr} A.$$

Ou seja,

$$\text{Tr} A = (2\pi\hbar)^{-1} \int dq dp a_w(q, p).$$

Agora, se integrarmos a Eq. (2.14) em p , teremos

$$\int dp a_w(q, p) = \int dp \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2} | A(Q, P) | q + \frac{z}{2} \rangle.$$

Reorganizando novamente os termos, identificamos a forma integral da delta de Dirac, de

maneira que

$$\int dp a_w(q, p) = \int dz \langle q - \frac{z}{2} | A(Q, P) | q + \frac{z}{2} \rangle \left(\int dp e^{\frac{ipz}{\hbar}} \right).$$

Após a integração em p , tem-se

$$\int dp a_w(q, p) = \int dz \langle q - \frac{z}{2} | A(Q, P) | q + \frac{z}{2} \rangle (2\pi\hbar) \delta(z),$$

o que nos leva a

$$\int dp a_w(q, p) = 2\pi\hbar \langle q | A(Q, P) | q \rangle.$$

Por simetria, a integração da Eq. (2.15) em q fica

$$\int dq a_w(q, p) = \int dq \int dk e^{\frac{-iqk}{\hbar}} \langle p - \frac{k}{2} | A(Q, P) | p + \frac{k}{2} \rangle.$$

Após uma integração análoga à feita anteriormente, teremos

$$\int dq a_w(q, p) = \int dk \langle p - \frac{k}{2} | A(Q, P) | p + \frac{k}{2} \rangle (2\pi\hbar) \delta(k),$$

logo,

$$\int dq a_w(q, p) = 2\pi\hbar \langle p | A(Q, P) | p \rangle.$$

O próximo passo será estudar o produto de operadores na representação de Wigner, o qual é fundamental na descrição de dinâmica de um sistema.

2.4 O produto de Weyl-Wigner (produto estrela)

Para estudarmos o produto de estrela, vamos retomar a regra de quantização de Weyl, dada pela Eq. (2.10),

$$\widehat{\mathcal{W}}[f] = f(Q, P) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\sigma d\tau dq dp f(q, p) e^{i\sigma(Q-q) + i\tau(P-p)}.$$

Podemos reorganizar essa equação de modo que

$$f(Q, P) = \frac{1}{2\pi} \int d\sigma d\tau \left(\frac{1}{2\pi} \int dq dp f(q, p) e^{-i(\sigma q + \tau p)} \right) e^{i(\sigma Q + \tau P)},$$

de tal forma que o termo entre parênteses corresponde à transformada de Fourier da função $f(q, p)$, dada por

$$\tilde{f}(\sigma, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int dq dp f(q, p) e^{-i(\sigma q + \tau p)}.$$

Logo, a quantização de Weyl pode ser escrita na forma

$$f(Q, P) = \frac{1}{2\pi} \int d\sigma d\tau \tilde{f}(\sigma, \tau) e^{i(\sigma Q + \tau P)}.$$

Sejam duas funções, no espaço de fase, $a(q, p)$ e $b(q, p)$, que, através do mapa de Weyl são escritas por

$$A(Q, P) = \frac{1}{2\pi} \int d\sigma d\tau \tilde{a}(\sigma, \tau) e^{i(\sigma Q + \tau P)}$$

e

$$B(Q, P) = \frac{1}{2\pi} \int d\sigma d\tau \tilde{b}(\sigma, \tau) e^{i(\sigma Q + \tau P)}.$$

O produto das funções operacionais fica dado por

$$A(Q, P)B(Q, P) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\sigma d\tau d\sigma' d\tau' \tilde{a}(\sigma, \tau) \tilde{b}(\sigma', \tau') e^{i(\sigma Q + \tau P)} e^{i(\sigma' Q + \tau' P)}.$$

Para resolver a parte que contém os operadores, é necessário usar a relação de *Baker-Campbell-Hausdorff*, dada pela Eq.(2.12), isto é,

$$e^{i(\sigma Q + \tau P)} e^{i(\sigma' Q + \tau' P)} = e^{i((\sigma + \sigma')Q + (\tau + \tau')P)} e^{\frac{i\hbar}{2}(\sigma'\tau - \sigma\tau')}.$$

Logo,

$$A(Q, P)B(Q, P) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\sigma d\tau d\sigma' d\tau' \tilde{a}(\sigma, \tau) \tilde{b}(\sigma', \tau') e^{i((\sigma + \sigma')Q + (\tau + \tau')P)} e^{\frac{i\hbar}{2}(\sigma'\tau - \sigma\tau')}.$$

Introduzindo a mudança de variáveis

$$\bar{\sigma} = \sigma + \sigma'$$

e

$$\bar{\tau} = \tau + \tau',$$

segue que

$$A(Q, P)B(Q, P) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\bar{\sigma} d\bar{\tau} d\sigma' d\tau' \tilde{a}(\bar{\sigma} - \sigma', \bar{\tau} - \tau') \tilde{b}(\sigma', \tau') e^{\frac{i\hbar}{2}(\sigma'\bar{\tau} - \bar{\sigma}\tau')} e^{i(\bar{\sigma}Q + \bar{\tau}P)}.$$

Fazendo a identificação

$$C(Q, P) = A(Q, P)B(Q, P),$$

com

$$C(Q, P) = \frac{1}{2\pi} \int d\sigma d\tau \tilde{c}(\sigma, \tau) e^{i(\sigma Q + \tau P)},$$

temos, para o nosso caso,

$$C(Q, P) = \frac{1}{2\pi} \int d\bar{\sigma} d\bar{\tau} \tilde{c}(\bar{\sigma}, \bar{\tau}) e^{i(\bar{\sigma}Q + \bar{\tau}P)}.$$

Então, temos

$$\tilde{c}(\bar{\sigma}, \bar{\tau}) = \frac{1}{2\pi} \int d\sigma' d\tau' \tilde{a}(\bar{\sigma} - \sigma', \bar{\tau} - \tau') \tilde{b}(\sigma', \tau') e^{\frac{i\hbar}{2}(\sigma'\bar{\tau} - \bar{\sigma}\tau')}.$$

Tomando a transformada inversa de Fourier de $\tilde{c}(\bar{\sigma}, \bar{\tau})$, ficamos com

$$c(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int d\bar{\sigma} d\bar{\tau} \tilde{c}(\bar{\sigma}, \bar{\tau}) e^{i(\bar{\sigma}q + \bar{\tau}p)},$$

e, então

$$c(q, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\bar{\sigma} d\bar{\tau} d\sigma' d\tau' \tilde{a}(\bar{\sigma} - \sigma', \bar{\tau} - \tau') \tilde{b}(\sigma', \tau') e^{\frac{i\hbar}{2}(\sigma'\bar{\tau} - \bar{\sigma}\tau')} e^{i(\bar{\sigma}q + \bar{\tau}p)}.$$

Fazendo a mudança de variáveis, novamente,

$$\bar{\sigma} = \sigma + \sigma'$$

e

$$\bar{\tau} = \tau + \tau',$$

segue que

$$c(q, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\sigma d\tau d\sigma' d\tau' \tilde{a}(\sigma, \tau) \tilde{b}(\sigma', \tau') e^{\frac{i\hbar}{2}(\sigma'\tau - \sigma\tau')} e^{i((\sigma + \sigma')q + (\tau + \tau')p)},$$

ou

$$c(q, p) = \left(\frac{1}{2\pi} \int d\sigma d\tau \tilde{a}(\sigma, \tau) e^{i(\sigma q + \tau p)} \right) e^{\frac{i\hbar}{2}(\sigma'\tau - \sigma\tau')} \left(\frac{1}{2\pi} \int d\sigma' d\tau' \tilde{b}(\sigma', \tau') e^{i(\sigma'q + \tau'p)} \right).$$

Note que a exponencial fora dos parênteses pode ser reescrita da seguinte forma

$$e^{\frac{i\hbar}{2}(\sigma'\tau - \sigma\tau')} = e^{\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)},$$

e os termos entre parentes são as transformadas de Fourier das funções $a(q, p)$ e $b(q, p)$.

Assim,

$$c(q, p) = a(q, p) e^{\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)} b(q, p),$$

ou

$$c(q, p) = a(q, p) e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}} b(q, p),$$

onde

$$\Lambda = \overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q$$

é o operador bidiferencial de Poisson. Finalmente, podemos definir o produto de Weyl ou produto estrela na forma

$$c(q, p) = a(q, p)e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}}b(q, p) = a(q, p) \star b(q, p).$$

Assim, o produto de dois operadores no espaço de Hilbert é deformado via um produto de Weyl-Wigner no espaço de fase, motivo pelo qual esse procedimento também é conhecido como quantização por deformação.

2.5 Propriedades do produto de Weyl-Wigner

O produto estrela é uma das ferramentas matemáticas mais importantes para a descrição de Wigner da mecânica quântica. Em toda equação dinâmica envolvendo a função de Wigner estará o produto estrela envolvido. Além do que o produto estrela é peça-chave para a definição do operador estrela, que será explorado na construção de representações unitárias de uma mecânica quântica simplética.

Na intenção de facilitar a visualização de algumas situações, vamos reescrever o produto estrela de algumas formas diferentes, porém equivalentes, que se reduzem uma na outra. O produto estrela, entre duas funções $f(q, p)$ e $g(q, p)$ é definido por

$$f(q, p) \star g(q, p) = f(q, p)e^{[\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_{p'} - \overleftarrow{\partial}_{p'} \overrightarrow{\partial}_q)]}g(q, p). \quad (2.18)$$

Ao invés de indicar as funções a serem diferenciadas por setas, pode-se rotular as variáveis com uma linha indicando qual função será diferenciada, ou seja

$$f(q, p) \star g(q, p) = \lim_{q' \rightarrow q, p' \rightarrow p} e^{\frac{i\hbar}{2}(\partial_q \partial_{p'} - \partial_{p'} \partial_q)} f(q, p)g(q', p').$$

A exponencial pode ser expandida numa série de potências

$$e^{[\frac{i\hbar}{2}(\partial_q \partial_{p'} - \partial_{p'} \partial_q)]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n (\partial_q \partial_{p'} - \partial_{p'} \partial_q)^n,$$

assim como o termo $(\partial_q \partial_{p'} - \partial_{p'} \partial_q)^n$, através do binômio de Newton, isto é,

$$(\partial_q \partial_{p'} - \partial_{p'} \partial_q)^n = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q \partial_{p'}]^{n-m} [\partial_{p'} \partial_q]^m.$$

Dessa forma, chegamos a uma forma operacionalmente útil de escrever o produto estrela,

$$f(q, p) \star g(q, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m f(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} g(q, p)]. \quad (2.19)$$

Essas reescritas do produto estrela viabilizam o estudo de suas propriedades, as quais serão muito úteis nos desenvolvimentos posteriores.

Propriedade 1 Se um dos fatores for uma constante, o produto estrela trivializa-se.

Isto é,

$$c \star f(q, p) = f(q, p) \star c = cf(q, p). \quad (2.20)$$

Com $c \in C$. Tal propriedade é facilmente notada se utilizarmos a expansão em série para o produto estrela.

$$c \star f(q, p) = c \left\{ 1 + \frac{i\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q) + \frac{1}{2!} \frac{i\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)^2 + \dots \right\} f(q, p).$$

Os operadores diferenciais que atuam à esquerda se anulam, pois c é uma constante, restando apenas o primeiro termo. O mesmo acontece quando o produto estrela por c for efetuado pelo lado direito, isto é $f(q, p) \star c$.

Propriedade 2 Definição do operador estrela.

O produto estrela entre duas funções no espaço de fase eleva uma delas à categoria de operador,

$$\begin{aligned} f(q, p) \star g(q, p) &= f\left(q + \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p, p - \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p\right) g(q, p) \\ &= f(q, p) \star g(q, p) = f(q, p) g\left(q - \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_p, p + \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_q\right). \end{aligned}$$

Definindo $a = \overrightarrow{\partial}_p$ e $b = \overleftarrow{\partial}_q$, a Eq. (2.18) assume a forma

$$f(q, p) \star g(q, p) = f(q, p) e^{\frac{i\hbar}{2} (a \overleftarrow{\partial}_q - b \overleftarrow{\partial}_p)} g(q, p).$$

Como as exponenciais em questão geram translações, isto é $e^{a\partial_x} f(x) = f(x+a)$, chega-se a

$$f(q, p) \star g(q, p) = f\left(q + \frac{i\hbar}{2} a, p - \frac{i\hbar}{2} b\right) g(q, p);$$

e, finalmente, substituindo a e b , temos

$$f(q, p) \star g(q, p) = f\left(q + \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p, p - \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p\right) g(q, p).$$

Conseqüentemente, podemos definir o operador estrela como sendo

$$\widehat{f}(q, p) = f(q, p) \star.$$

Propriedade 3 Associatividade.

Sejam f , g e h funções no espaço de fase. Então,

$$(f(q, p) \star g(q, p)) \star h(q, p) = f(q, p) \star (g(q, p) \star h(q, p)). \quad (2.21)$$

Pela propriedade anterior,

$$(f(q, p) \star g(q, p)) \star h(q, p) = \left\{ f\left(q + \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p, p - \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p\right) g(q, p) \right\} h\left(q - \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_p, p + \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_q\right),$$

e também,

$$f(q, p) \star (g(q, p) \star h(q, p)) = f\left(q + \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p, p - \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p\right) \left\{ g(q, p) h\left(q - \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_p, p + \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_q\right) \right\}.$$

Como os operadores diferenciais envolvidos aqui são associativos, pode-se concluir que o produto estrela também será.

Propriedade 4 Não-comutatividade.

O produto estrela não é comutativo, ou seja

$$f(q, p) \star g(q, p) \neq g(q, p) \star f(q, p).$$

O que temos, de fato é

$$f(q, p) e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}} g(q, p) = g(q, p) e^{-\frac{i\hbar\Lambda}{2}} f(q, p), \quad (2.22)$$

que pode ser visto no exemplo,

$$q \star p = \left(q + \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p\right) p = qp + \frac{i\hbar}{2},$$

e

$$p \star q = \left(p - \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_q\right) q = pq - \frac{i\hbar}{2}.$$

Este é um resultado básico em geometrias não-comutativas e um ingrediente fundamental da mecânica quântica. Observe que esses operadores obedecem à relação de incerteza de Heisenberg.

Propriedade 5 A conjugação complexa.

A conjugação complexa inverte a ordem do produto estrela, da mesma forma que ocorre com o conjugado complexo de dois operadores usuais.

$$(f \star g)^\dagger = g^\dagger \star f^\dagger. \quad (2.23)$$

Se tomarmos o complexo conjugado da Eq. (2.19), teremos

$$(f(q, p) \star g(q, p))^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n \{(-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m f^\dagger(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} g^\dagger(q, p)]\}, \quad (2.24)$$

onde o fator $(-1)^n$ vem da conjugação complexa da parte imaginária $(\frac{i\hbar}{2})^n$. Esse fator pode ser agregado ao binômio

$$(-1)^n (\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})^n = (\partial_p \partial_{q'} - \partial_q \partial_{p'})^n = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_p \partial_{q'}]^{n-m} [\partial_q \partial_{p'}]^m.$$

Portanto, ao aplicarmos esses operadores acima em um produto de duas funções no espaço de fase, $f(q, p)g(q', p')$, teremos

$$(\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})^n f(q, p)g(q', p') = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m f(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} g(q, p)],$$

e

$$(-1)^n (\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})^n f(q, p)g(q', p') = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m g(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} f(q, p)].$$

Comparando essas duas últimas equações, conclui-se que

$$\begin{aligned} & (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m f(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} g(q, p)] \\ &= \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m g(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} f(q, p)]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Se substituirmos a Eq. (2.25) na Eq. (2.24), tem-se

$$\begin{aligned} (f(q, p) \star g(q, p))^\dagger &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n \{(-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m g^\dagger(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} f^\dagger(q, p)]\} \\ &= g^\dagger \star f^\dagger. \end{aligned}$$

Propriedade 6 A forma integral do produto estrela

Assim como feito com a Eq. (2.19), existe uma outra forma útil de representar o produto estrela, que pode ser feito através de integrais. Para isso, uma função $f(q, p)$ no espaço de fase pode ser escrita por

$$f(q, p) = \int dq' dp' f(q', p') \delta(q' - q) \delta(p' - p). \quad (2.26)$$

As funções deltas de Dirac, na forma integral, são escritas como

$$\delta(q' - q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{\frac{-iu(q'-q)}{\hbar}} du, \quad (2.27)$$

e

$$\delta(p' - p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{\frac{-iv(p'-p)}{\hbar}} dv. \quad (2.28)$$

O que, substituindo na Eq. (2.26), nos leva a

$$f(q, p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int dudvdq'dp' f(q', p') e^{\frac{-i}{\hbar}[v(p'-p)+u(q'-q)]}.$$

Já foi visto que o produto estrela entre duas funções eleva uma delas à categoria de operador, portanto

$$\begin{aligned} f(q, p) \star g(q, p) &= f\left(q + \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p, p - \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p\right) g(q, p) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int dudvdq'dp' f(q', p') e^{\frac{-i}{\hbar}[v(p'-p)+u(q'-q)]} e^{(\frac{v}{2}\partial_q - \frac{u}{2}\partial_p)} g(q, p). \end{aligned}$$

As exponenciais atuando sobre a função $g(q, p)$ geram translações, ou seja

$$e^{(\frac{v}{2}\partial_q - \frac{u}{2}\partial_p)} g(q, p) = g\left(q + \frac{v}{2}, p - \frac{u}{2}\right).$$

Então,

$$f(q, p) \star g(q, p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int dudvdq'dp' f(q', p') e^{\frac{-i}{\hbar}[v(p'-p)+u(q'-q)]} g\left(q + \frac{v}{2}, p - \frac{u}{2}\right).$$

Se fizermos a mudança de variáveis, que tem jacobiano igual a 4,

$$q'' = q + \frac{v}{2} \quad e \quad p'' = p - \frac{u}{2},$$

obtemos o resultado

$$f(q, p) \star g(q, p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int 4dq'' dp'' dq' dp' f(q', p') e^{\frac{-2i}{\hbar}[(q''-q)(p'-p)+(p-p'')(q'-q)]} g(q'', p'').$$

De onde segue que

$$f(q, p) \star g(q, p) = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^2 \int dq' dq'' dp' dp'' f(q', p') e^{\frac{-2i}{\hbar}[p(q'-q'')+p'(q''-q)+p''(q-q')]} g(q'', p''). \quad (2.29)$$

Essa é a forma integral do produto estrela.

Propriedade 7 A Integral do produto estrela no Espaço de Fase

Se integrarmos o produto estrela entre duas funções no espaço de fase, representado pela Eq. (2.29), teremos

$$\int f \star g dq dp = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^2 \int dq dq' dq'' dp dp' dp'' f(q', p') g(q'', p'') e^{\frac{-2i}{\hbar}[p(q'-q'')+p'(q''-q)+p''(q-q')]}.$$

Reorganizando os termos, podemos escrever

$$\int f \star g dq dp = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^2 \int dq dq' dq'' dp dp' dp'' f(q', p') g(q'', p'') e^{\frac{-2i}{\hbar}[p'(q''-q)+p''(q-q')]} \left[e^{\frac{-2i}{\hbar}p(q'-q'')} \right].$$

Fazendo uso da forma integral da função delta de Dirac, é possível reconhecer que

$$\frac{1}{\pi\hbar} \int dp e^{\frac{-2ip(q'-q'')}{\hbar}} = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{-ip(q'-q'')}{\hbar}} = \delta(q' - q'').$$

Logo,

$$\int f \star g dq dp = \frac{1}{\pi\hbar} \int dq dq' dq'' dp' dp'' f(q', p') g(q'', p'') e^{\frac{-2i}{\hbar}[p'(q''-q)+p''(q-q')]} \delta(q' - q'').$$

Integrando em dq' , temos

$$\int f \star g dq dp = \frac{1}{\pi\hbar} \int dq dq'' dp' dp'' f(q'', p') g(q'', p'') e^{\frac{-2i[p'(q''-q)+p''(q-q')]}{\hbar}}.$$

Rearranjando os termos, podemos escrever que

$$\int f \star g dq dp = \frac{1}{\pi\hbar} \int dq dq'' dp' dp'' f(q'', p') g(q'', p'') e^{\frac{-2i[q''(p'-p'')]}{\hbar}} \delta(p'' - p'),$$

e finalmente, integrando em dp' , ficamos com

$$\int f(q, p) \star g(q, p) dq dp = \int dq'' dp'' f(q'', p'') g(q'', p'').$$

Como as variáveis são mudas, podemos trocar q'' por q e p'' por p , conduzindo a

$$\int f(q, p) \star g(q, p) dq dp = \int dq dp f(q, p) g(q, p).$$

Conclui-se, portanto, que o produto estrela se trivializa ao ser integrado no espaço

de fase. Porém, essa propriedade é coerente apenas se houver convergência da integral. Para isso, é necessário que as funções $f(q, p)$ e $g(q, p)$ se anulem no infinito ($-\infty$ e $+\infty$).

2.6 Evolução Temporal da Função de Wigner

Um formalismo completo da mecânica quântica supõe o conhecimento de uma função que caracterize o estado físico, de uma expressão que permita calcular os valores esperados de observáveis e de uma expressão que forneça a evolução temporal desse estado. Por enquanto, já temos os dois primeiros. Nos falta a evolução temporal. Essa equação, por construção, também deve expressar a evolução de um operador na representação de Wigner. O mapeamento utilizado até aqui foi da forma $\Omega_w : A \rightarrow a_w(q, p)$. De maneira que

$$\Omega_w(A) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2} | A | q + \frac{z}{2} \rangle.$$

Ou seja, o mapeamento que leva um operador, definido no espaço de Hilbert H , a uma função no espaço de fase Γ é conduzido através do operador Ω_w , dado por

$$\Omega_w = (2\pi\hbar)^{-1} \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2} | \cdot | q + \frac{z}{2} \rangle.$$

Vamos aplicá-lo à equação de Liouville - von Neumann, dada pela Eq. (2.4), o que nos leva a

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (2\pi\hbar)^{-1} \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle \right\} &= (2\pi\hbar)^{-1} \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2} | H \rho | q + \frac{z}{2} \rangle \\ &\quad - (2\pi\hbar)^{-1} \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2} | \rho H | q + \frac{z}{2} \rangle. \end{aligned}$$

Então, ficamos com

$$i\hbar \frac{\partial f_w(q, p, t)}{\partial t} = H_w(q, p, t) \star f_w(q, p, t) - f_w(q, p, t) \star H_w(q, p, t).$$

O lado direito dessa expressão é conhecido como parêntese de Moyal, $\{a, b\}_M = a \star b - b \star a$, que conduz a

$$i\hbar \frac{\partial f_w(q, p, t)}{\partial t} = \{H_w, f_w\}_M. \quad (2.30)$$

Fica evidente que essa equação dinâmica é muito parecida com a equação de Liouville-von Neumann habitual, notando que o estado do sistema é descrito pela função de Wigner e o comutador foi substituído pelo parêntese de Moyal.

Agora, se lembrarmos que $e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}} - e^{\frac{-i\hbar\Lambda}{2}} = 2i \sin\left(\frac{\hbar\Lambda}{2}\right)$, o parêntese de Moyal poderá

ser reescrito na forma

$$\{a(q, p), b(q, p)\}_w = 2ia(q, p) \sin\left[\frac{\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)\right] b(q, p). \quad (2.31)$$

O operador $\sin(\frac{\hbar\Lambda}{2})$ pode ser expandido em série de potências,

$$\sin\left(\frac{\hbar\Lambda}{2}\right) = \frac{\hbar\Lambda}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\hbar\Lambda}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\hbar\Lambda}{2}\right)^5 + \dots,$$

o que nos leva a um interessante resultado, pois, ao tomarmos o limite em que $\hbar \rightarrow 0$, a evolução temporal terá a forma

$$\frac{\partial f_w(q, p, t)}{\partial t} = f_w(\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q) H_w,$$

isto é

$$\frac{\partial f_w}{\partial t} = \frac{\partial H_w}{\partial q} \frac{\partial f_w}{\partial p} - \frac{\partial H_w}{\partial p} \frac{\partial f_w}{\partial q} = \{H_w, f_w\}. \quad (2.32)$$

Fica claro, portanto, que a função de Wigner, nesse limite, obedece à equação de Liouville clássica, com H_w no lugar da função Hamiltoniana, o que induz a

$$-\frac{\partial H_w}{\partial q} = \dot{p} \quad e \quad \frac{\partial H_w}{\partial p} = \dot{q}. \quad (2.33)$$

Então, o formalismo de Wigner recupera as equações canônicas da mecânica clássica [139], quando tomamos o limite clássico, o que mostra que esse formalismo é compatível com o princípio da correspondência, fortalecendo a importância da descrição de Wigner na mecânica quântica no estudo do limite clássico e no desenvolvimento de métodos semi-clássicos. Este resultado é o que justifica o tipo de transformada de Fourier utilizada na definição da função de Wigner, dada pelas Eqs. (2.5) e (2.6).

O estudo apresentado sobre o método de Wigner, até o momento, foi baseado na descrição de Schrödinger da mecânica quântica, ou seja, considerando que apenas os estados (e não os operadores) evoluem com o tempo. No entanto, é possível desenvolver um tratamento análogo em termos de operadores expressos na descrição de Heisenberg (onde os operadores evoluem com o tempo, e os estados ficam estáticos), sem maiores problemas [140].

2.7 Equação característica envolvendo a Função de Wigner

Assim como no formalismo usual da mecânica quântica, no qual existe uma equação de autovalores envolvendo operadores com seus respectivos autoestados, no formalismo apresentado nesse trabalho deve existir uma equação análoga. A diferença é que no lugar de operadores, temos funções no espaço de fase com o produto estrela envolvido. Para isso, basta que a função de Wigner corresponda a uma autofunção do Hamiltoniano. Ou seja, para a equação de autovalores no formalismo usual,

$$H(Q, P)\psi(q) = E\psi(q), \quad (2.34)$$

é interessante a existência da equação estrela

$$H_w(q, p) \star f_w(q, p) = Ef_w(q, p), \quad (2.35)$$

já que a proposta é construir um formalismo que descreva a teoria quântica em sua completude. Aqui, E é um autovalor do Hamiltoniano $H_w(q, p) \star$.

Para testar a validade da Eq. (2.35) vamos escrever o Hamiltoniano como

$$H(Q, P) = \frac{P^2}{2m} + V(Q),$$

e supor que $f_w(q, p)$ seja a função de Wigner correspondente a autofunção $\psi(q)$ de $H(Q, P)$, isto é, $H(Q, P)\psi(q) = E\psi(q)$. A função de Wigner, como vimos, é dada por

$$f_w(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \psi^\dagger\left(q + \frac{z}{2}\right) \psi\left(q - \frac{z}{2}\right).$$

Através da Propriedade **2**, o produto estrela entre $H(q, p)$ e $f(q, p)$ pode ser escrito por

$$H(q, p) \star f(q, p) = H\left(q, p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q\right) f\left(q, p + \frac{i\hbar}{2}\partial_q\right).$$

Portanto,

$$H_w(q, p) \star f_w(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dz \frac{1}{2m} \left[\left(p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q \right)^2 + V\left(q - \frac{z}{2} \right) \right] e^{\frac{ipz}{\hbar}} \psi^\dagger\left(q + \frac{z}{2} \right) \psi\left(q - \frac{z}{2} \right),$$

o que leva a

$$H_w(q, p) \star f_w(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dz \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\partial_z - \frac{\partial_q}{2} \right)^2 + V\left(q - \frac{z}{2} \right) \right] e^{\frac{ipz}{\hbar}} \psi^\dagger\left(q + \frac{z}{2} \right) \psi\left(q - \frac{z}{2} \right).$$

Os operadores diferenciais nesta equação, quando aplicados a ψ^\dagger , se anulam, pois,

$$(\partial_z - \frac{\partial_q}{2})\psi^\dagger(q + \frac{z}{2}) = \frac{1}{2}\dot{\psi}^\dagger(q + \frac{z}{2}) - \frac{1}{2}\dot{\psi}^\dagger(q + \frac{z}{2}) = 0,$$

onde o ponto sobre ψ^\dagger indica a derivada com respeito ao argumento. Assim, a Eq. (2.35) fica dada por

$$[\frac{-\hbar^2}{2m}(\partial_z - \frac{\partial_q}{2})^2 + V(q - \frac{z}{2})]\psi(q - \frac{z}{2}) = E\psi(q - \frac{z}{2}).$$

Com isso, finalmente temos,

$$H_w(q, p) \star f_w(q, p) = E\{\frac{1}{2\pi\hbar} \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \psi^\dagger(q + \frac{z}{2})\psi(q - \frac{z}{2})\} = Ef_w(q, p), \quad (2.36)$$

logo,

$$H_w(q, p) \star f_w(q, p) = Ef_w(q, p).$$

Se a função de Wigner, $f_w(q, p)$, corresponde a uma autofunção do Hamiltoniano, então satisfará à equação estrela de autovalor.

Uma das dificuldades em se trabalhar com esse formalismo reside em resolver a evolução temporal da função de Wigner, dada pela Eq. (2.30), em função do operador bidiferencial, além da implementação de teorias de calibre e estudos generalizados para efeitos de superposição de estados. Porém, tal função fornece um formalismo alternativo ao da mecânica quântica para a função de onda na representação de Schrödinger e Heisenberg, sendo capaz de identificar importantes propriedades estatísticas de sistemas quânticos, além de fornecer uma base de comparação com a mecânica clássica. Motivações que levam a procurar novos métodos para abordá-la, como o uso de funções de onda no espaço de fase de modo a se compatibilizar com a simetria de calibre.

No próximo capítulo, serão definidos alguns operadores estrela para construirmos uma representação unitária do grupo de Galilei. Isto permite a construção de uma mecânica quântica compatível com o formalismo de Wigner, empregando a noção de funções de onda (*quasi*-distribuições) no espaço de fase.

3 *Revisão: Mecânica Quântica Simplética*

Conforme visto no Capítulo 2, no formalismo de Wigner cada operador, representado por A , definido em um espaço de Hilbert \mathcal{H} , é associado a uma função $a_w(q, p)$, no espaço de fase Γ . Esta associação consiste em uma aplicação $\Omega_w : A \rightarrow a_w(q, p)$ de tal forma que o produto de operadores em \mathcal{H} fica definido em Γ através do produto estrela, ou produto de Moyal. Assim, para dois operadores temos $\Omega_w : AB \rightarrow a_w(q, p) \star b_w(q, p)$. Tal formalismo é vantajoso, por exemplo, no sentido em que estabelece conexões com a mecânica clássica, já que os resultados clássicos são obtidos quando tomamos o limite simbólico $\hbar \rightarrow 0$.

Porém, o estudo de estados quânticos torna-se limitado, pois o formalismo de Wigner não permite a introdução de fases, impossibilitando a construção de teorias de calibre. Teorias de perturbação representam outra dificuldade, já que não aparecem efeitos de superposição na função de Wigner. Uma forma de contornar esses problemas seria a obtenção de uma função de onda no espaço de fase que esteja relacionada com a função de Wigner, além de sua evolução temporal, isto é, uma equação de Schrödinger no espaço de fase. Torres e Vegas [119, 120] propuseram uma função desse tipo, porém carecia de uma interpretação física consistente. Apesar dos operadores posição e *momentum* propostos respeitarem a relação de Heisenberg, a projeção da função de onda foi realizada em uma base que não expandia todo o espaço. Tal interpretação foi alcançada [126] utilizando a noção de uma estrutura simplética aliada ao produto estrela, de tal forma que representações unitárias do grupo de Galilei foram estudadas culminando na obtenção da equação de Schrödinger no espaço de fase. Essa abordagem permite um novo procedimento para encontrar a função de Wigner sem o uso da intrincada equação de Liouville-von Neumann, ponto de partida original do método de Wigner. Essa representação foi estendida para o caso relativístico [141], onde, utilizando simetrias do grupo de Poincaré, foram obtidas as equações de Klein-Gordon e Dirac no espaço de fase. Uma revisão dessa representação usando a álgebra de Lie pode ser encontrada na referência [142]. Recentemente, esse for-

malismo foi adotado nos estudos do átomo de Hidrogênio submetido a uma interação do tipo *Henon-Heiles* [143] e da não-classicidade no espaço de fase [144]. Na referência [135], operadores no espaço de Hilbert \mathcal{H}_Γ , construído a partir de funções complexas definidas em Γ , munido com uma estrutura simplética, são introduzidos através de mapeamentos unitários do grupo de Galilei com o auxílio do produto estrela. Dessa forma, foram construídos operadores que representam observáveis físicos como a posição, o *momentum* linear, o *momentum* angular e a energia, essa última expressa pelo Hamiltoniano. Nessa representação, foram deduzidas funções que obedecem à equação de Schrödinger em \mathcal{H}_Γ , cujas variáveis carregam conteúdo de posição e *momentum* linear. Essas funções, denotadas por $\psi(q, p)$, representam *quasi*-amplitudes no espaço de fase e se associam com a função de Wigner através do produto estrela $f_w(q, p) = \psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p)$, obedecendo à mesma equação de autovalores. Dessa maneira, a equação de Schrödinger no espaço de fase representa um fundamental ponto de partida para a descrição de sistemas quânticos no espaço de fase, totalmente compatível com o formalismo de Wigner. Nesse capítulo, re-deduzimos a mecânica quântica simplética utilizando a noção de grupo unitário seguindo um procedimento, portanto, diferente do modo usual, que emprega a álgebra de Lie. Elementos preliminares se encontram na referência [135]. Como um resultado de interesse, deduzimos aqui a função de Green da equação de Schrödinger no espaço de fase.

3.1 Amplitudes e operadores no espaço de fase \mathcal{H}_Γ

A geometria simplética é o modo formal de se estudar a evolução de sistemas mecânicos conservativos, descritos pelas equações de Hamilton, dadas por

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

onde $H = H(q_i, p_i)$ é a função Hamiltoniana do sistema. O espaço $\mathfrak{R}^3 = \{(q_i = q_1, q_2, q_3)\}$ de possíveis posições de uma partícula é chamado de espaço de configurações. Já o espaço $\mathfrak{R}^6 = \mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}^3 = \{(q_i, p_i) = (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)\}$, constituído de posições e momentos, é conhecido como espaço de fase. Nesse contexto, a partir do espaço euclidiano \mathfrak{R}^3 com vetores definidos por $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ é possível construir uma variedade simplética dada por $\Gamma = \mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}^3$, de tal forma que, nesse espaço Γ , um vetor ω_i fica especificado por $\omega_i = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6)$. Sem perder a generalidade, podemos fazer a associação

$$\omega_1 = q_1, \quad \omega_2 = q_2, \quad \omega_3 = q_3 \tag{3.1}$$

e

$$\omega_4 = p_1, \quad \omega_5 = p_2, \quad \omega_6 = p_3. \quad (3.2)$$

Vamos, então, equipar o espaço Γ com a estrutura simplética

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou, de forma mais compacta,

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

onde I é a matriz identidade 3×3 . Essa métrica induz o parênteses de Poisson de duas funções em Γ , $f(\omega)$ e $g(\omega)$ [145]

$$\{f, g\} = \sum_{a=1}^6 \sum_{b=1}^6 \frac{\partial f}{\partial \omega_a} \frac{\partial g}{\partial \omega_b} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i},$$

ou

$$\{f, g\} = \eta_{ab} \frac{\partial f}{\partial \omega_a} \frac{\partial g}{\partial \omega_b} = \eta_{ab} \partial_a f \partial_b g.$$

O espaço Γ , assim equipado, é denominado espaço simplético e sua aplicação mais difundida é no espaço de fase da mecânica clássica. Nesse caso, as variáveis q_i e p_i são, respectivamente, as coordenadas generalizadas e os *momenta* canonicamente conjugados, como veremos adiante.

O espaço de Hilbert \mathcal{H}_Γ associado ao espaço de fase Γ é construído através de um conjunto de funções de quadrado integrável em Γ , $\mathcal{H}_\Gamma = (\phi(q, p), \psi(q, p), \dots)$, de forma que, em uma dimensão,

$$\int \phi(q, p) \psi(q, p) dq dp < \infty,$$

tendo como caso particular $\phi(q, p) = \psi(q, p)$, o que leva a

$$\int |\psi(q, p)|^2 dq dp = 1.$$

Assim, nesse espaço vetorial complexo com um número infinito de dimensões, cada estado físico de um sistema é representado por um vetor de estado, chamado de *ket* e denotado por $|\psi\rangle$. Assumiremos que $|\psi\rangle$ contém informação completa acerca do estado físico, analogamente ao formalismo usual da mecânica quântica [146–149], porém aqui, os vetores

de estado pertencem ao espaço de fase \mathcal{H}_Γ .

O conjunto completo $|q, p\rangle$ gera uma base no espaço de Hilbert \mathcal{H}_Γ de tal forma que q e p são um conjunto de autovalores, satisfazendo

$$\overline{Q}|q, p\rangle = q|q, p\rangle$$

e

$$\overline{P}|q, p\rangle = p|q, p\rangle,$$

em que,

$$\langle q', p'|q, p\rangle = \delta(q' - q)\delta(p' - p),$$

valendo a relação de fechamento

$$\int dqdp|q, p\rangle\langle q, p| = \mathbf{1}.$$

Assim, $\phi(q, p)$ é a projeção do estado ϕ no espaço de Hilbert \mathcal{H}_Γ gerado pela base $|q, p\rangle$, isto é

$$\phi(q, p) = \langle q, p|\phi\rangle.$$

Mapeamentos unitários, $U(\alpha)$, em \mathcal{H}_Γ são introduzidos naturalmente através do produto estrela, na forma

$$U(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}},$$

onde

$$\hat{a} = a(q, p)\star = a(q, p)e^{\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_q\overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p\overrightarrow{\partial}_q)} = A(q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p, p - \frac{i\hbar}{2}\partial_p).$$

Assim, podemos escrever para as funções q e p (vetores euclidianos tridimensionais),

$$\hat{q}_i = q_i\star = q_i + \frac{i\hbar}{2}\partial_{p_i} \quad (3.3)$$

e

$$\hat{p}_i = p_i\star = p_i - \frac{i\hbar}{2}\partial_{q_i}. \quad (3.4)$$

Uma interpretação física desses operadores é possível através das relações de Heisenberg e do grupo de Galilei. Note que esses operadores satisfazem as relações de comutação

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}.$$

Classicamente, uma transformação de Galilei é feita quando há necessidade de comparar resultados obtidos por observadores situados em diferentes referenciais inerciais. Sua

forma mais geral possível é dada por

$$\begin{aligned} q'_i &= Rq_i + v_it + a_i, \\ t' &= t + \tau, \\ p'_i &= p_i + mv_i, \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde R é uma matriz ortogonal 3×3 e representa uma rotação espacial; a_i é um vetor em \mathfrak{R}^3 , representando uma translação espacial; τ é um escalar e representa uma translação temporal; m , a massa da partícula; e v_i , a velocidade relativa entre os dois referenciais. As Eqs. (3.5) definem a estrutura do grupo de Galilei, que é composto pelos sub-grupos das translações temporais, das translações espaciais, da transformação pura de Galilei e das rotações. A transformação pura de Galilei, também conhecida como *boost*, é realizada fazendo $R = 1$, $a = 0$ e $\tau = 0$. Ou seja, em uma dimensão,

$$\begin{aligned} q' &= q + vt, \\ t' &= t \end{aligned}$$

e

$$p' = p + mv.$$

Na mecânica quântica, a transformação pura de Galilei é definida através do operador

$$\hat{k}_i = m\hat{q}_i - t\hat{p}_i,$$

onde m e t representam os parâmetros massa e tempo, respectivamente. No espaço de fase \mathcal{H}_Γ , encontramos o operador *boost* substituindo as Eqs. (3.3) e (3.4),

$$\hat{k}_i = k_{i\star} = m(q_i + \frac{i\hbar}{2}\partial_{p_i}) - t(p_i - \frac{i\hbar}{2}\partial_{q_i}). \tag{3.6}$$

Aplicando a transformação via *boost* nos operadores \hat{q} e \hat{p} , temos

$$e^{-\frac{i\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{k}}}{\hbar}}\hat{q}_j e^{\frac{i\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{k}}}{\hbar}} = \hat{q}_j + v_j t$$

e

$$e^{-\frac{i\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{k}}}{\hbar}}\hat{p}_j e^{\frac{i\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{k}}}{\hbar}} = \hat{p}_j + mv_j,$$

onde foi usada a relação de *Baker-Hausdorff*

$$e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} [A, B]_n, \tag{3.7}$$

onde

$$[A, B]_0 = B, \quad [A, B]_1 = [A, B], \dots, \quad [A, B]_n = [A, [A, B]_{n-1}], \quad n \geq 2.$$

Esses resultados, associados às relações de comutação, mostram que \hat{q} e \hat{p} são os operadores físicos posição e *momentum*, respectivamente. Note que os operadores \overline{Q} e \overline{P} não representam observáveis físicos, pois $[\overline{Q}, \overline{P}] = 0$, mas se transformam como posição e *momentum*, de acordo com

$$e^{-iv\frac{\hat{k}}{\hbar}} 2\overline{Q} e^{iv\frac{\hat{k}}{\hbar}} = 2\overline{Q} + vt\mathbf{1}$$

e

$$e^{-iv\frac{\hat{k}}{\hbar}} 2\overline{P} e^{iv\frac{\hat{k}}{\hbar}} = 2\overline{P} + mv\mathbf{1}$$

Dessa forma, mesmo não podendo ser interpretados como posição e *momentum*, as variáveis $\{q_i, p_i\}$ carregam informação de posição e *momentum*, respectivamente. Portanto, a base $|q_i, p_i\rangle$ pode ser usada para construir um referencial no espaço de Hilbert com conteúdo de espaço de fase, com as variáveis $\{q_i, p_i\}$ representando as coordenadas posição e *momentum* da variedade simplética. Além disso, o operador *boost*, dado pela Eq. (3.6) obedece às relações de comutação

$$[\hat{k}_i, \hat{q}_j] = -t[\hat{p}_i, \hat{q}_j] = i\hbar t \delta_{ij} \mathbf{1} \quad (3.8)$$

e

$$[\hat{k}_i, \hat{p}_j] = m[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar m \delta_{ij} \mathbf{1}. \quad (3.9)$$

Essas relações sugerem uma álgebra de Galilei-Lie.

Assim como na mecânica clássica, aqui o gerador de rotações é associado ao *momentum* angular L_i . Classicamente, é definido como o produto vetorial entre o vetor posição \vec{q} e o vetor momento linear \vec{p} ,

$$\vec{L} = \vec{q} \times \vec{p}.$$

Assim, vamos introduzir o operador momento angular, em \mathcal{H}_Γ , da seguinte maneira

$$\hat{l}_i = \epsilon_{ijk} \hat{q}_j \hat{p}_k,$$

onde ϵ_{ijk} é o símbolo de *Levi-Civita*. Substituindo as Eqs. (3.3) e (3.4) temos o correspondente operador estrela

$$\hat{l}_i = l_{i\star} = \epsilon_{ijk} q_j p_k - \frac{i\hbar}{2} \epsilon_{ijk} q_j \partial_{p_k} + \frac{i\hbar}{2} \epsilon_{ijk} p_k \partial_{q_j} + \frac{\hbar^2}{4} \partial_{q_j} \partial_{p_k}. \quad (3.10)$$

Note, ainda, que

$$[\widehat{l}_i, \widehat{q}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{q}_k \quad (3.11)$$

e

$$[\widehat{l}_i, \widehat{p}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{p}_k. \quad (3.12)$$

É importante ressaltar que rotações em torno de diferentes eixos não comutam, pois

$$[\widehat{l}_i, \widehat{l}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{l}_k. \quad (3.13)$$

Por isso o grupo de rotações em três dimensões é chamado de não-abeliano, ao contrário do grupo das translações, já que $[\widehat{p}_i, \widehat{p}_j] = 0$.

3.2 Equação de Schrödinger em \mathcal{H}_Γ

Um estado físico específico de um sistema quântico sujeito a mudanças em relação ao parâmetro tempo pode ser representado em \mathcal{H}_Γ por $|\psi(t)\rangle$. Ao projetarmos esse vetor de estado, $|\psi(t)\rangle$, na base $\{|q_i, p_i\rangle\}$, encontramos uma função das variáveis q_i , p_i e t . Isto é

$$\langle q_i, p_i | \psi(t) \rangle = \psi(q_i, p_i; t).$$

Como q e p não representam autovalores dos operadores posição e *momentum*, mas sim coordenadas da variedade simplética, $|\psi(q_i, p_i; t)\rangle$ não pode ser interpretada como uma função de onda com o mesmo conteúdo entendido na mecânica quântica usual. A evolução temporal do estado $\psi(q, p, t)$ é dada pelo operador unitário $U(t, t_0)$, de forma que

$$\psi(q, p; t) = U(t, t_0)\psi(q, p; t_0),$$

onde,

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i(t-t_0)\widehat{h}}{\hbar}},$$

e, assim como na mecânica clássica, aqui, \widehat{h} corresponde ao Hamiltoniano do sistema e gerador da evolução temporal dos estados. No caso de uma partícula em um campo externo, o Hamiltoniano é dado por

$$\widehat{h} = \frac{p^{2\star}}{2m} + V(q\star) = \frac{p^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{8m}\partial_q^2 - \frac{i\hbar p}{2m}\partial_q + V\left(q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p\right). \quad (3.14)$$

Para $t_0 = 0$, temos

$$\psi(q, p; t) = e^{-\frac{it\widehat{h}}{\hbar}}\psi(q, p). \quad (3.15)$$

Derivando essa equação em relação ao tempo,

$$i\hbar\partial_t\psi(q, p; t) = \hat{h}\psi(q, p; t) = h \star \psi(q, p; t). \quad (3.16)$$

Substituindo a Eq. (3.14) na Eq. (3.16), encontramos, para uma dimensão,

$$i\hbar\partial_t\psi(q, p; t) = \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{8m}\partial_q^2 - \frac{i\hbar p}{2m}\partial_q\right)\psi(q, p; t) + V\left(q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p\right)\psi(q, p; t), \quad (3.17)$$

que é a equação de Schrödinger representada no espaço de fase.

As relações de comutação dadas pelas Eqs. (3.8), (3.9), (3.11), (3.12) e (3.13) sugerem que tais operadores satisfaçam a álgebra de Galilei-Lie. Adicionando o operador \hat{h} a essa lista, temos a união do grupo das translações $T(3)$ com o das rotações $SO(3)$, formando, portanto, o grupo de Galilei, como era esperado. Essa representação satisfaz as seguintes relações

$$[\hat{l}^i, \hat{l}^j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{l}^k,$$

$$[\hat{l}^i, \hat{k}^j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{k}^k,$$

$$[\hat{l}^i, \hat{p}^j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{p}^k,$$

$$[\hat{k}^i, \hat{k}^j] = 0,$$

$$[\hat{k}^i, \hat{p}^j] = i\hbar m\delta_{ij}\mathbf{1},$$

$$[\hat{k}^i, \hat{h}] = i\hbar\hat{p}^i,$$

$$[\hat{p}^i, \hat{p}^j] = 0,$$

$$[\hat{p}^i, \hat{h}] = 0,$$

$$[\hat{l}^i, \hat{h}] = 0.$$

Esse resultado foi amplamente discutido e demonstrados na referências [140, 141].

3.3 Associação com a Função de Wigner

O formalismo de Wigner, apesar de ser vantajoso, possui algumas dificuldades, como já frisamos. Por exemplo, encontrar a função de Wigner que descreve um determinado estado quântico que se altera com o tempo esbarra na dificuldade em encontrar a solução da intrincada equação de evolução temporal dada pela Eq. (2.30), em virtude dos operadores bidiferenciais. Outro problema reside na obtenção de teorias de calibre que, na mecânica quântica, é realizada através da introdução de fases nas funções de onda; e

a função de Wigner não possui fase. A necessidade de um espaço vetorial torna-se um problema para estudar teorias de perturbação através do formalismo de Wigner, além de não aparecerem efeitos de superposição. Nas referências [119, 120] tentou-se a construção de amplitudes no espaço de fase com o objetivo de contornar esses problemas. Porém, tal tentativa carecia de uma interpretação física consistente. No presente trabalho, construímos funções de ondas no espaço de fase, com o intuito de associá-las à função de Wigner de maneira que os resultados físicos sejam obtidos consistentemente. Se considerarmos uma função $f(q, p)$ definida por [126]

$$f(q, p; t) = \psi(q, p; t) \star \psi^\dagger(q, p; t), \quad (3.18)$$

poderemos identificá-la como a função de Wigner, caso as propriedades apresentadas no Capítulo 2 sejam satisfeitas.

Primeiro, tomemos a Eq. (3.16) e seu conjugado hermitiano

$$i\hbar\partial_t\psi(q, p; t) = h(q, p) \star \psi(q, p; t) \quad (3.19)$$

e

$$-i\hbar\partial_t\psi(q, p; t)^\dagger = \psi^\dagger(q, p; t) \star h(q, p). \quad (3.20)$$

Multiplicando-se a Eq. (3.19) à direita por $\star\psi^\dagger(q, p; t)$, a Eq. (3.20) à esquerda por $\psi(q, p; t)\star$ e, em seguida subtrair as equações, chegamos a

$$i\hbar\partial_t(\psi(q, p; t)\star\psi^\dagger(q, p; t)) = h(q, p)\star(\psi(q, p; t)\star\psi^\dagger(q, p; t)) - (\psi(q, p; t)\star\psi^\dagger(q, p; t))\star h(q, p).$$

Utilizando a relação proposta pela Eq. (3.18) temos

$$i\hbar\partial_t f(q, p; t) = h(q, p) \star f(q, p; t) - f(q, p; t) \star h(q, p),$$

e, portanto,

$$i\hbar\partial_t f(q, p; t) = \{h(q, p), f(q, p; t)\}_M,$$

que é a equação que descreve a evolução temporal da função de Wigner, cujo limite clássico obedece a equação de Liouville.

Foi visto que a função de Wigner é normalizada no Capítulo 2. Este fato também é verificado na função $f(q, p)$, dada pela Eq. (3.18), isto é,

$$\int dqdp f(q, p) = \int dqdp \psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p) = \int dqdp |\psi(q, p)|^2 = 1,$$

motivo pelo qual nos leva a interpretar $\psi(q, p)$ como uma *quasi*-amplitude de probabili-

dades.

O valor esperado de um observável é definido como a média dos valores possíveis, ponderados pelas respectivas probabilidades de ocorrências. O valor médio para o observável \hat{q} , em um estado $|\psi\rangle$, por exemplo, é dado por

$$\langle \hat{q} \rangle = \langle \psi | \hat{q} | \psi \rangle = \int dq dp dq' dp' \langle \psi | q, p \rangle \langle q, p | \hat{q} | q', p' \rangle \langle q', p' | \psi \rangle.$$

Utilizando a Eq. (3.3), vemos que

$$\langle q, p | \hat{q} | q', p' \rangle = (q + \frac{i\hbar}{2} \partial_p) \langle q, p | q', p' \rangle = q_w(q, p) \delta(q - q') \delta(p - p'),$$

onde $q_w(q, p) = q(q, p) \star$ e, portanto,

$$\langle \hat{q} \rangle = \int dq dp \psi^\dagger(q, p) q_w(q, p) \psi(q, p).$$

As propriedades do produto estrela nos permite escrever essa média da seguinte forma

$$\langle \hat{q} \rangle = \int dq dp q_w(q, p) (\psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p)) = \int dq dp q_w(q, p) f(q, p),$$

que é outra propriedade da função de Wigner. Note que

$$\langle \hat{q} \rangle = \int dq dp q_w(q, p) (\psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p)) = \int dq q_w(q, p) \sigma(q),$$

onde

$$\sigma(q) = \int dp (\psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p)) = \int dp f(q, p)$$

representa a densidade de probabilidade associada à medida do observável \hat{q} , na posição q , reproduzindo uma das propriedades da função de Wigner. Analogamente, o valor esperado do operador \hat{p} será dado por

$$\langle \hat{p} \rangle = \int dq dp p_w(q, p) (\psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p)) = \int dq p_w(q, p) \sigma(p),$$

em que $p_w(q, p) = p(q, p) \star$. Então,

$$\sigma(p) = \int dq (\psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p)) = \int dq f(q, p)$$

corresponde à densidade de probabilidade associada à medida do operador \hat{p} com *momentum* p . Em geral, o valor esperado de um operador estrela qualquer $\hat{a}(q, p) = a(q, p) \star$ é dado por

$$\langle \hat{a}(q, p) \rangle = \int dq dp a_w(q, p) (\psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p)) = \int dq dp a_w(q, p) f(q, p). \quad (3.21)$$

Além disso, sabe-se que a função de Wigner é real, como garante a Eq. (3.18), pois

$$(\psi \star \psi^\dagger)^\dagger = (\psi^\dagger)^\dagger \star (\psi)^\dagger = \psi \star \psi^\dagger,$$

isto é,

$$f(q, p) = f^\dagger(q, p).$$

Assim, podemos concluir que a função $f(q, p)$ é a função de Wigner. Portanto, temos que

$$f_w(q, p; t) = \psi(q, p; t) \star \psi^\dagger(q, p; t). \quad (3.22)$$

Por último, podemos escrever uma equação de autovalores para o Hamiltoniano, em \mathcal{H}_Γ ,

$$h(q, p) \star \psi(q, p) = E\psi(q, p), \quad (3.23)$$

e multiplicar à direita por $\star\psi^\dagger(q, p)$, encontrando

$$h(q, p) \star f_w(q, p) = E f_w(q, p).$$

Isso mostra que $\psi(q, p)$ e $f_w(q, p)$ satisfazem a mesma equação de autovalor. Portanto, funções de Wigner podem ser encontradas quando procuramos por soluções reais de $\psi(q, p)$. Conclui-se, dessa forma, que o produto dado pela Eq. (3.22) promove um outro formalismo para a mecânica quântica, com uma interpretação física consistente, adicionando ferramentas matemáticas necessárias para resolver problemas com teorias de calibre, pois fases podem ser introduzidas na solução de ψ ou efeitos de interferência, já que podemos ter soluções do tipo $\psi = \phi_1 + \phi_2$.

3.4 Teorema de Ehrenfest

O valor médio de um operador estrela é calculado pela Eq. (3.21) e, para o operador posição \hat{q} é expresso por

$$\langle \hat{q} \rangle = \int dqdp \hat{q} (\psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p)).$$

Se derivarmos o valor médio da posição em relação ao tempo, lembrando que \hat{q} é independente do tempo, e usarmos a Eq. (3.16), temos

$$\partial_t \langle \hat{q} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \int dqdp [\hat{q}, \hat{h}] \psi \star \psi^\dagger. \quad (3.24)$$

Analogamente, para o operador *momentum* \hat{p} , temos

$$\partial_t \langle \hat{p} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \int dq dp [\hat{p}, \hat{h}] \psi \star \psi^\dagger. \quad (3.25)$$

Vamos considerar um Hamiltoniano do tipo $\hat{h} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})$ aliado ao fato que [146]

$$[\hat{q}, F(\hat{p})] = i\hbar \frac{\partial F(\hat{p})}{\partial \hat{p}},$$

e

$$[\hat{p}, F(\hat{q})] = -i\hbar \frac{\partial F(\hat{q})}{\partial \hat{q}},$$

as Eqs.(3.24) e (3.25) ficam na forma

$$\partial_t \langle \hat{q} \rangle = \frac{1}{m} \int dq dp p \hat{p} f_w = \frac{\langle \hat{p} \rangle}{m},$$

e

$$\partial_t \langle \hat{p} \rangle = -\langle \partial_{\hat{q}} V(\hat{q}) \rangle,$$

resultado conhecido como segunda lei de Newton, indicando que os resultados clássicos são obtidos quando considerarmos a constante de Planck suficientemente pequena, isto é $\hbar \rightarrow 0$ [150].

3.5 A Função de Green em \mathcal{H}_Γ

De um modo geral, a função de Green representa uma resposta de um sistema físico a uma fonte pontual. Nesse contexto, podemos estudar, por exemplo, interações no espaço de fase. A equação de Schrödinger independente do tempo, no espaço de fase é dada por

$$\frac{\hat{p}_i^2}{2m} \psi(q_i, p_i) + V(\hat{q}_i) \psi(q_i, p_i) = E \psi(q_i, p_i),$$

que pode ser escrita na forma

$$\left(E - \frac{\hat{p}_i^2}{2m}\right) \psi(q_i, p_i) = V(\hat{q}_i) \psi(q_i, p_i).$$

Usando o método da Função de Green, podemos escrever

$$\left(E - \frac{\hat{p}_i^2}{2m}\right) G(q_i, q'_i, p_i, p'_i) = \delta(q_i - q'_i) \delta(p_i - p'_i), \quad (3.26)$$

de modo que, em uma dimensão, temos

$$\left(E - \frac{\hat{p}^2}{2m}\right) \psi(q, p) = \int d^3 q' d^3 p' \left(E - \frac{\hat{p}'^2}{2m}\right) G(q, q', p, p') V(\hat{q}') \psi(q', p') \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^3q' d^3p' \delta(q - q') \delta(p - p') V(\hat{q}') \psi(q', p') \\
&= V(\hat{q}) \psi(q, p).
\end{aligned}$$

Podemos utilizar a transformada de Fourier apenas nas coordenadas q , já que p é apenas um parâmetro. Dessa forma, seja

$$G(q, q', p, p') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3k \tilde{G}(k, p, p') e^{\frac{ik(q-q')}{\hbar}}. \quad (3.28)$$

Substituindo a Eq. (3.28) na Eq. (3.26), ficamos com

$$\left(E - \frac{\hat{p}^2}{2m}\right) \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3k \tilde{G}(k, p, p') e^{\frac{ik(q-q')}{\hbar}} = \delta(q - q') \delta(p - p'),$$

em que,

$$\delta(q - q') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3k e^{\frac{ik(q-q')}{\hbar}}.$$

Além disso,

$$\hat{p} = p - \frac{i\hbar}{2} \partial_q$$

e

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{8m} \partial_q^2 - \frac{i\hbar p}{2m} \partial_q.$$

Assim,

$$\left(E - \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{8m} \partial_q^2 - \frac{i\hbar p}{2m} \partial_q\right)\right) \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3k \tilde{G}(k, p, p') e^{\frac{ik(q-q')}{\hbar}} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3k \delta(p-p') e^{\frac{ik(q-q')}{\hbar}}$$

e

$$\left(E - \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{ik}{\hbar}\right) \left(\frac{ik}{\hbar}\right) - \frac{i\hbar p}{2m} \left(\frac{ik}{\hbar}\right)\right)\right) \tilde{G}(k, p, p') = \frac{\delta(p - p')}{(2\pi\hbar)^{3/2}}.$$

Logo,

$$\tilde{G}(k, p, p') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{\delta(p - p')}{\left(E - \frac{p^2}{2m} - \frac{k^2}{8m} - \frac{pk}{2m}\right)}. \quad (3.29)$$

Finalmente, substituindo a Eq. (3.29) na Eq. (3.28), temos

$$G(q, q', p, p') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3k \frac{\delta(p - p') e^{\frac{ik(q-q')}{\hbar}}}{E - \frac{p^2}{2m} - \frac{k^2}{8m} - \frac{pk}{2m}}, \quad (3.30)$$

que representa a função de Green no espaço de fase \mathcal{H}_Γ .

No próximo capítulo, o formalismo até aqui construído será aplicado ao oscilador amortecido e a um sistema de osciladores acoplados.

4 *Oscilador Amortecido e Osciladores Acoplados com dissipação*

Neste capítulo apresentaremos a aplicação do formalismo descrito no capítulo anterior para dois sistemas envolvendo dissipação. O primeiro representa um oscilador harmônico simples com um termo de amortecimento e o segundo, uma aproximação da interação entre dois elétrons através da força elástica de Hooke. Tais resultados foram publicados na referência [151].

4.1 Oscilador Amortecido

Uma primeira tentativa de estudar os efeitos da dissipação quântica é começar pelo oscilador harmônico e introduzir um termo associado ao amortecimento. O Hamiltoniano desse tipo de sistema, em uma dimensão, pode ser escrito na forma [152, 153]

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m}\widehat{p}^2 + \frac{m\omega_0^2}{2}\widehat{q}^2 - \frac{\lambda}{2}(\widehat{q}\widehat{p} + \widehat{p}\widehat{q}), \quad (4.1)$$

onde λ corresponde à frequência de amortecimento, m é a massa da partícula e ω_0 , a frequência natural de oscilação. Usando os operadores dados nas Eqs. (3.3) e (3.4),

$$\widehat{q} = q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p$$

e

$$\widehat{p} = p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q,$$

a Eq. (4.1) se torna

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m} \left(p^2 - i\hbar p \partial_q - \frac{\hbar^2}{4} \partial_q^2 \right) + \frac{m\omega_0^2}{2} \left(q^2 + i\hbar q \partial_p - \frac{\hbar^2}{4} \partial_p^2 \right)$$

$$- \frac{\lambda}{2} \left(2qp - i\hbar q \partial_q + i\hbar p \partial_p + \frac{\hbar^2}{2} \partial_q \partial_p \right).$$

Aplicando este Hamiltoniano à equação de autovalores $\widehat{H}\psi(q, p) = E\psi(q, p)$, em que podemos fazer a decomposição

$$\psi(q, p) = \psi_R(q, p) + i\psi_I(q, p),$$

obtemos, para a parte real

$$\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q^2}{2} - \lambda qp - E \right) \psi_R(q, p) - \frac{\lambda \hbar^2}{4} \partial_q \partial_p \psi_R(q, p) - \frac{\hbar^2}{8} \left(\frac{1}{m} \partial_q^2 + m\omega_0^2 \partial_p^2 \right) \psi_R(q, p) = 0 \quad (4.2)$$

e

$$\left(\frac{m\omega_0^2 \hbar q}{2} \partial_p - \frac{\hbar p}{2m} \partial_q + \frac{\lambda \hbar q}{2} \partial_q - \frac{\lambda \hbar p}{2} \partial_p \right) \psi_I(q, p) = E\psi_I(q, p), \quad (4.3)$$

para a imaginária. Introduzindo a nova variável

$$z = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q^2}{2} - \lambda qp,$$

as derivadas ficam dadas por

$$\begin{aligned} \partial_q &= (m\omega_0^2 q - \lambda p) \partial_z, \\ \partial_q^2 &= m\omega_0^2 \partial_z + (m\omega_0^2 q - \lambda p)^2 \partial_z^2, \\ \partial_p &= \left(\frac{p}{m} - \lambda q \right) \partial_z, \\ \partial_p^2 &= \frac{1}{m} \partial_z + \left(\frac{p}{m} - \lambda q \right)^2 \partial_z^2 \end{aligned}$$

e

$$\partial_q \partial_p = -\lambda \partial_z + \left(\frac{p}{m} - \lambda q \right) (m\omega_0^2 q - \lambda p) \partial_z^2.$$

Substituindo essas derivadas na Eq. (4.3), temos

$$\psi_I(q, p) = 0.$$

A substituição na Eq. (4.2) nos leva a

$$\frac{\hbar^2 \omega^2}{4} z \partial_z^2 \psi(z) + \frac{\hbar^2 \omega^2}{4} \partial_z \psi(z) + (z - E) \psi(z) = 0,$$

onde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}. \quad (4.4)$$

Adotando

$$a = \frac{\hbar^2 \omega^2}{4},$$

temos

$$az\partial_z^2\psi(z) + a\partial_z\psi(z) - (z - E)\psi(z) = 0.$$

Vamos propor uma solução do tipo

$$\psi(z) = e^{-\frac{z}{\sqrt{a}}}g(z),$$

com derivadas

$$\partial_z\psi(z) = -\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{z}{\sqrt{a}}}g(z) + e^{-\frac{z}{\sqrt{a}}}g'(z)$$

e

$$\partial_z^2\psi(z) = \frac{1}{a}e^{-\frac{z}{\sqrt{a}}}g(z) - \frac{2}{\sqrt{a}}e^{-\frac{z}{\sqrt{a}}}g'(z) + e^{-\frac{z}{\sqrt{a}}}g''(z),$$

onde $g'(z) = \partial_z g(z)$ e $g''(z) = \partial_z^2 g(z)$. Dessa forma, chegamos a

$$\left(\frac{E}{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)g(z) + \left(1 - \frac{2z}{\sqrt{a}}\right)g'(z) + zg''(z) = 0.$$

Tomando uma nova mudança de variáveis

$$y = \frac{2z}{\sqrt{a}},$$

de modo que

$$\partial_z = \frac{2}{\sqrt{a}}\partial_y$$

e

$$\partial_z^2 = \frac{4}{a}\partial_y^2,$$

chegamos à seguinte expressão

$$y\partial_y^2g(y) + (1 - y)\partial_yg(y) + \left(\frac{E}{2\sqrt{a}} - \frac{1}{2}\right)g(y) = 0. \quad (4.5)$$

A solução da Eq. (4.5) é dada pela função de *Kummer* (função hipergeométrica confluyente) na forma

$$\omega(z) = F\left(\frac{E}{2\sqrt{a}} - \frac{1}{2}; 1; \frac{2z}{\sqrt{a}}\right).$$

Uma condição da função hipergeométrica confluyente é tal que

$$\frac{E}{2\sqrt{a}} - \frac{1}{2} = n,$$

onde $n \in \mathbf{Z}$. Esta relação nos dá

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

Usando a Eq. (4.4), o autovalor E fica dado por

$$E_n = \hbar\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (4.6)$$

Note que esse resultado é idêntico ao espectro de energia do oscilador harmônico simples, caso $\lambda = 0$.

A solução da Eq. (4.5) poder ser escrita em termos dos polinômios de Laguerre, dados por

$$\left(x \frac{d^2}{dx^2} + (m + 1 - x) \frac{d}{dx} + n \right) L_n^m(x) = 0, \quad (4.7)$$

Assim, $m = 0$ e a solução não-normalizada para $\psi(z)$ fica na forma

$$\psi(z) = e^{-\frac{2z}{\hbar\omega}} L_n^0 \left(\frac{4z}{\hbar\omega} \right). \quad (4.8)$$

A solução dependente do tempo é calculada através da relação

$$\Psi(z, t) = e^{-\frac{iE_n}{\hbar}t} \psi(z).$$

A partir da Eq. (4.8), é possível calcular as funções de Wigner através da relação $f_w(q, p) = \psi \star \psi^\dagger$. Porém, quando os efeitos da dissipação se sobrepõe ao sistema, isto é, quando $\lambda > \omega_0$, a Eq. (4.8) não produz funções de Wigner fisicamente consistentes. Isto nos mostra que as soluções aqui encontradas não são as mais gerais possíveis. O comportamento da função de Wigner estacionária para $\lambda = 0, 1$ é mostrado nas Figuras (1) - (4) e para $\lambda = 0, 9$ é mostrado nas Figuras (5) - (8). Para fins práticos, adotamos $\hbar = \omega_0 = m = 1$ na construção dos gráficos.

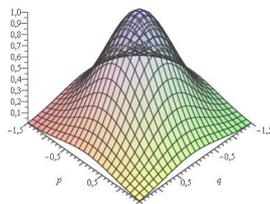


Figura 1: Função de Wigner, $n = 0$, $\lambda = 0, 1$

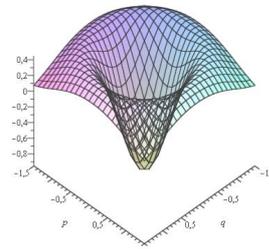


Figura 2: Função de Wigner, $n = 1$, $\lambda = 0, 1$

A medida da não classicidade dos estados quânticos é definida pelo volume da parte negativa da função de Wigner, que pode ser interpretada como uma assinatura da

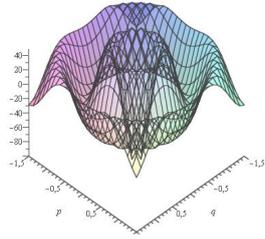


Figura 3: Função de Wigner, $n = 5$, $\lambda = 0, 1$

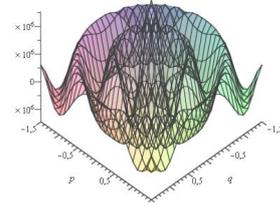


Figura 4: Função de Wigner, $n = 10$, $\lambda = 0, 1$

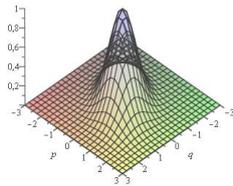


Figura 5: Função de Wigner, $n = 0$, $\lambda = 0, 9$

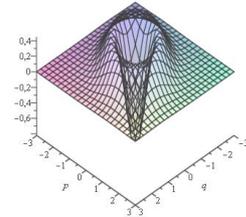


Figura 6: Função de Wigner, $n = 1$, $\lambda = 0, 9$

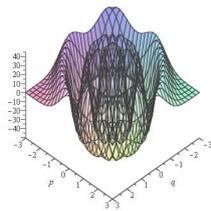


Figura 7: Função de Wigner, $n = 5$, $\lambda = 0, 9$

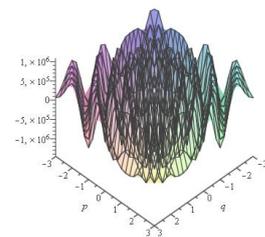


Figura 8: Função de Wigner, $n = 10$, $\lambda = 0, 9$

interferência quântica. Assim, o indicador de não classicidade (negatividade) nos permite distinguir os estados com comportamento mais próximo do clássico (o estado coerente, por exemplo), daqueles que possuem efeitos quânticos mais acentuados. Esse indicador é dado por [137]

$$\begin{aligned}
\eta(\psi) &= \int \int [|f_w(q, p)| - f_w(q, p)] dq dp \\
&= \int \int |f_w(q, p)| dq dp - 1.
\end{aligned}
\tag{4.9}$$

Este indicador representa o dobro do volume da parte negativa integrada. As Tabelas 1 e 2 abaixo apresentam o cálculo numérico para esse indicador para o oscilador amortecido. Nota-se que o parâmetro $\eta(\psi)$ depende de λ , conforme esperado.

n	$\eta(\psi), \lambda = 0.9$
0	0
1	0.4261226344263795
2	0.7289892587057898
3	0.9766730799293403
4	1.1913424288065964
5	1.3834384856692004
6	1.5588521972493026
7	1.7212933835545317
8	1.873265816082318
9	2.016572434609475

Tabela 1. O indicador de não classicidade em função da ordem n da função de Wigner, para $\lambda = 0, 9$.

n	$\eta(\psi), \lambda = 0.1$
0	0
1	0.5367235498765983
2	0.8298745655538895
3	0.9957478374530056
4	1.21045749693345208
5	1.45987546307934771
6	1.62345098621689579
7	1.77980374568037570
8	1.95688276504037623
9	2.13987564392078583

Tabela2. O indicador de não classicidade em função da ordem n da função de Wigner, para $\lambda = 0, 1$.

A Figura (9) mostra a dependência do indicador de não classicidade $\eta(\psi)$ e a ordem n da função de Wigner para o oscilador amortecido, para $\lambda = 0,9$. Note que, apesar do espectro de energia se aproximar do comportamento contínuo quando n aumenta, quanto mais excitado é o sistema, maior é o valor do indicador de não classicidade.

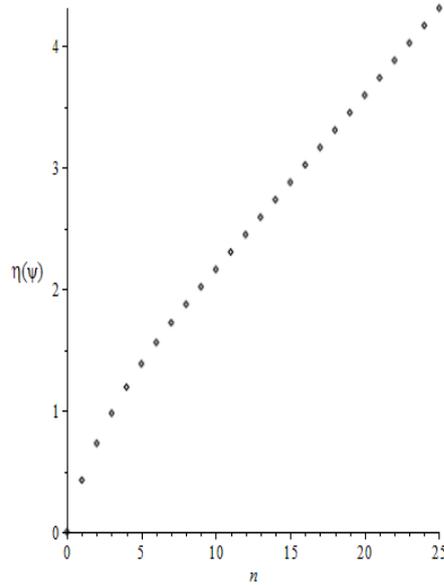


Figura 9: O indicador de não classicidade versus número quântico para o oscilador amortecido $n \leq 25$, $\lambda = 0,9$

4.2 Sistema de Osciladores com dissipação via acoplamento

Para análises práticas, é interessante notar que a combinação de dois osciladores quânticos amortecidos pode descrever um átomo de dois elétrons. Nesse caso, a equação de Schrödinger não possui solução exata. Os resultados obtidos para esses sistemas são baseados em métodos aproximativos ou formalismos variacionais. Contudo, devido à semelhança entre a função de onda gaussiana do oscilador harmônico esfericamente simétrico e o primeiro estado do átomo de hidrogênio, alguns modelos são usados para estudar as soluções da equação de Schrödinger para o átomo de Hélio. Isso é feito trocando a interação coulombiana pelo potencial do oscilador harmônico. Em particular, no trabalho de Kestner [154, 155], a interação elétron-núcleo foi substituída pelo potencial do oscilador harmônico, mas a interação elétron-elétron permaneceu coulombiana. Dessa maneira, foi mostrado que os valores das energias obtidas eram muito próximas dos dados experimen-

tais. Um sistema com dois osciladores pode ser usado como uma aproximação para o estudo do átomo de Hélio, substituindo a interação Coulombiana por forças elásticas de Hooke, incluindo a interação elétron-elétron [154–156]. Nessa seção, usaremos a equação de Schrödinger no espaço de fase para obter a função de Wigner para um sistema de osciladores com dissipação. O Hamiltoniano clássico desse tipo de sistema é escrito como [156]

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2 + x_2^2) - \frac{\lambda}{4}(x_1 - x_2)^2, \quad (4.10)$$

onde os índices 1 e 2 identificam os osciladores e λ é um pequeno parâmetro de dissipação. Utilizando as novas variáveis

$$\begin{aligned} u &= \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \\ v &= \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, \\ p_u &= \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{2}}, \\ p_v &= \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

a Eq. (4.10) pode ser escrita na forma

$$H = \frac{p_u^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 u^2 + \frac{p_v^2}{2m} + \frac{1}{2}v^2(m\omega^2 - \lambda).$$

Introduzindo o parâmetro adimensional $\xi = \frac{\lambda}{m\omega^2}$, temos

$$H = \frac{p_u^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 u^2 + \frac{p_v^2}{2m} + \frac{(1 - \xi)}{2}m\omega^2 v^2. \quad (4.11)$$

É conveniente separar o Hamiltoniano em duas partes, $H = H_u + H_v$, onde

$$H_u = \frac{p_u^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 u^2,$$

e

$$H_v = \frac{p_v^2}{2m} + \frac{(1 - \xi)}{2}m\omega^2 v^2.$$

A equação de Schrödinger independente do tempo, no espaço de fase é dada por

$$H \star \psi_{n_u n_v}(u, v, p_u, p_v) = E \psi_{n_u n_v}(u, v, p_u, p_v). \quad (4.12)$$

Para resolver essa equação, fazemos a separação de variáveis

$$\psi_{n_u n_v}(u, v, p_u, p_v) = \varphi_{n_u}(u, p_u) \chi_{n_v}(v, p_v),$$

e

$$E = E_u + E_v. \quad (4.13)$$

Dessa forma, a equação de autovalores, no espaço de fase, para u fica na forma

$$H_u \star \varphi_{n_u}(u, p_u) = E_u \varphi_{n_u}(u, p_u),$$

ou seja,

$$\left(\frac{p_u^2 \star}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 u^2 \star \right) \varphi_{n_u} = E_u \varphi_{n_u}, \quad (4.14)$$

onde os operadores $u \star$ e $p_u \star$ são definidos de acordo com a Eq. (3.3) e Eq. (3.4), isto é

$$u \star = u + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p_u} \quad (4.15)$$

e

$$p_u \star = p_u - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial u}. \quad (4.16)$$

Podemos, agora, introduzir os operadores

$$a_u \star = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(u \star + \frac{i}{m\omega} p_u \star \right) \quad (4.17)$$

e

$$a_u^\dagger \star = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(u \star - \frac{i}{m\omega} p_u \star \right), \quad (4.18)$$

satisfazendo as relações

$$[a_u \star, a_u^\dagger \star] = \mathbf{1},$$

$$a_u \star \varphi_n \propto \varphi_{n-1},$$

$$a_u^\dagger \star \varphi_n \propto \varphi_{n+1},$$

onde $n_u = 0, 1, 2, \dots$. Dessa forma, o Hamiltoniano dado pela Eq. (4.14) pode ser escrito na forma

$$H_u \star = \hbar\omega \left(a_u^\dagger \star a_u \star + \frac{1}{2} \right). \quad (4.19)$$

Aplicando o operador destruição ao estado fundamental teremos

$$a_u \star \varphi_0(u, p_u) = 0,$$

isto é,

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(u \star + \frac{i}{m\omega} p_u \star \right) \varphi_0(u, p_u) = 0, \quad (4.20)$$

onde

$$\varphi_0(u, p_u) = \varphi_0^{(a)}(u) \varphi_0^{(b)}(p_u).$$

Utilizando os operadores dados na Eq. (4.15) e Eq. (4.16) e separando a parte real e imaginária da equação, teremos

$$\left(u + \frac{\hbar}{2m\omega} \partial_u \right) \varphi_0^{(a)} = 0,$$

com solução dada por

$$\varphi_0^{(a)}(u) = A e^{-\frac{m\omega}{\hbar} u^2},$$

onde A é uma constante de normalização, e

$$\left(\frac{p_u}{m\omega} + \frac{\hbar}{2} \partial_{p_u} \right) \varphi_0^{(b)} = 0,$$

cuja solução é

$$\varphi_0^{(b)}(p_u) = A e^{-\frac{1}{\hbar m\omega} p_u^2}.$$

Portanto,

$$\varphi_0(u, p_u) = A e^{-\left(\frac{m\omega}{\hbar} u^2 + \frac{1}{\hbar m\omega} p_u^2\right)}. \quad (4.21)$$

De maneira análoga, podemos obter a solução para χ . Primeiro, escrevemos a equação de autovalores

$$H_v \star \chi_{n_v}(v, p_v) = E_v \chi_{n_v}(v, p_v),$$

isto é,

$$\left(\frac{p_v^2 \star}{2m} + \frac{(1-\xi)}{2} m\omega^2 v^2 \star \right) \chi_{n_v}(v, p_v) = E_v \chi_{n_v}(v, p_v), \quad (4.22)$$

onde os operadores $v \star$ e $p_v \star$ são dados por

$$v \star = v + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p_v} \quad (4.23)$$

e

$$p_v \star = p_v - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial v}. \quad (4.24)$$

Introduzindo os operadores

$$a_{v \star} = \sqrt{\frac{m\omega(1-\xi)}{2\hbar}} \left(v \star + \frac{i}{m\omega(1-\xi)^{1/2}} p_v \star \right) \quad (4.25)$$

e

$$a_v^\dagger \star = \sqrt{\frac{m\omega(1-\xi)}{2\hbar}} \left(v \star - \frac{i}{m\omega(1-\xi)^{1/2}} p_v \star \right), \quad (4.26)$$

que também satisfazem as relações

$$[a_v \star, a_v^\dagger \star] = \mathbf{1},$$

$$a_v \star \chi_{n_v} \propto \chi_{n_v-1},$$

$$a_v^\dagger \star \chi_{n_v} \propto \chi_{n_v+1},$$

onde $n_v = 0, 1, 2, \dots$. Assim, o Hamiltoniano da Eq. (4.22) pode ser escrito na forma

$$H_{v\star} = \hbar\omega(a_v^\dagger \star a_v \star + \frac{(1-\xi)^{1/2}}{2}). \quad (4.27)$$

Aplicando o operador destruição ao estado fundamental nos leva a

$$a_v \star \chi_0(v, p_v) = 0,$$

$$\sqrt{\frac{m\omega(1-\xi)}{2\hbar}} \left(v \star + \frac{i}{m\omega(1-\xi)^{1/2}} p_v \star \right) \chi_0(v, p_v) = 0. \quad (4.28)$$

Fazendo

$$\chi_0(v, p_v) = \chi_0^{(a)}(v) \chi_0^{(b)}$$

e substituindo os operadores dados na Eq. (4.23) e na Eq. (4.24), a parte real da Eq. (4.28) fica dada por

$$\left(v + \frac{\hbar}{2m\omega(1-\xi)^{1/2}} \partial_v \right) \chi_0^{(a)} = 0,$$

com solução

$$\chi_0^{(a)} = A e^{\left(-\frac{m\omega(1-\xi)^{1/2}}{\hbar} v^2 \right)}. \quad (4.29)$$

Já a parte imaginária fica

$$\left(\frac{p_v}{m\omega(1-\xi)^{1/2}} + \frac{\hbar}{2} \partial_{p_v} \right) \chi_0^{(b)} = 0,$$

cuja solução é

$$\chi_0^{(b)} = A e^{\left(-\frac{1}{\hbar m\omega(1-\xi)^{1/2}} p_v^2 \right)}. \quad (4.30)$$

Portanto, a solução da equação de Schrödinger dada pela Eq. (4.12) é

$$\psi_{00}(u, v, p_u, p_v) = A e^{\left(-\frac{m\omega}{\hbar} [u^2 + (1-\xi)^{1/2} v^2] \right)} e^{\left(-\frac{1}{m\omega\hbar} [p_u^2 + (1-\xi)^{-1/2} p_v^2] \right)} \quad (4.31)$$

Utilizando a condição de normalização

$$\int dudvd p_u dp_v \psi_n^\dagger(u, v, p_u, p_v) \star \psi_n(u, v, p_u, p_v) = 1,$$

encontramos

$$A = \frac{2}{\pi \hbar}.$$

Finalmente, temos

$$\psi_{00}(u, v, p_u, p_v) = \frac{2}{\pi \hbar} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}[u^2 + (1-\xi)^{1/2}v^2]} e^{-\frac{1}{m\omega\hbar}[p_u^2 + \frac{p_v^2}{(1-\xi)^{1/2}}]} \quad (4.32)$$

Para obter as funções de onda para estados mais altos, basta usar a relação

$$\psi_{n_u n_v}(u, v, p_u, p_v) = (a_u^\dagger \star)^{n_u} (a_v^\dagger \star)^{n_v} \psi_{00}(u, v, p_u, p_v).$$

A função de Wigner é encontrada através de

$$f_w^{(n_u n_v)}(u, v, p_u, p_v) = \psi_{n_u n_v}(u, v, p_u, p_v) \star \psi_{n_u n_v}^\dagger(u, v, p_u, p_v). \quad (4.33)$$

Em particular, para $n_u = n_v = 0$, temos

$$\begin{aligned} f_w^{(00)}(x_1, x_2, p_1, p_2) &= \left(\frac{2}{\pi \hbar} \right) e^{-\frac{m\omega}{\hbar} \frac{(x_1+x_2)^2}{2}} \\ &\times e^{-\frac{m\omega}{\hbar} (1-\xi)^{1/2} \frac{(x_1-x_2)^2}{2}} \\ &\times e^{-\frac{1}{m\omega\hbar} \frac{(p_1+p_2)^2}{2}} \\ &\times e^{-\frac{1}{m\omega\hbar} (1-\xi)^{-1/2} \frac{(p_1-p_2)^2}{2}}. \end{aligned}$$

Os autovalores do operador H_u , dado pela Eq. (4.19) são

$$E_u = \hbar\omega \left(n_u + \frac{1}{2} \right).$$

E, para H_v , Eq. (4.27), os autovalores são

$$E_v = \hbar\omega \left(n_v + \frac{(1-\xi)^{1/2}}{2} \right).$$

Portanto, através das Eqs. (4.12) e (4.13), a energia do estado fundamental é dada por

$$E_{00} = \frac{\hbar\omega}{2} (1 + (1-\xi)^{1/2}).$$

Para $\xi \ll 1$, temos que

$$E_{00} = \hbar\omega\left(1 - \frac{\xi}{4}\right),$$

que é consistente com os procedimentos padrões.

Esses resultados são interessantes, pois podemos comparar o sistema de osciladores com átomos do tipo Hélio. Portanto, ao calcular a função de Wigner analiticamente para átomos desse tipo, abrem-se novas possibilidades para analisar o emaranhamento quântico, já que uma das aplicações da função de Wigner reside na computação quântica. Através da Eq. (4.33) é possível construir os gráficos para a função de Wigner de estados mais energéticos, mostrados nas Figuras (10) - (13), onde adotamos $m = \omega = \hbar = 1$, $x_2 = p_2 = 0$ e $\xi = 0,9$. A Figura (10) corresponde à função de Wigner para o estado fundamental do sistema apresentando um pico centrado na origem. Conforme a energia do sistema aumenta, aumenta também o número de picos para a função de Wigner. Em nenhum dos casos calculados a função de Wigner apresentou valores negativos.

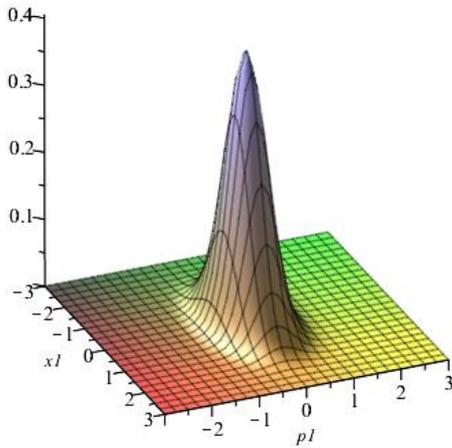


Figura 10: Função de Wigner, $n_u = n_v = 0$ e $\xi = 0,9$

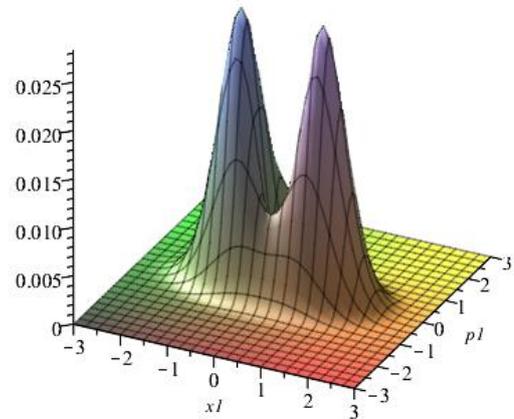


Figura 11: Função de Wigner, $n_u = 1, n_v = 0$ e $\xi = 0,9$

No próximo capítulo resolveremos o problema de um sistema composto por dois osciladores em que um deles representa a oscilação a ser estudada e o outro, o acoplamento deste com um modo do reservatório que absorve energia do sistema, gerando a dissipação.

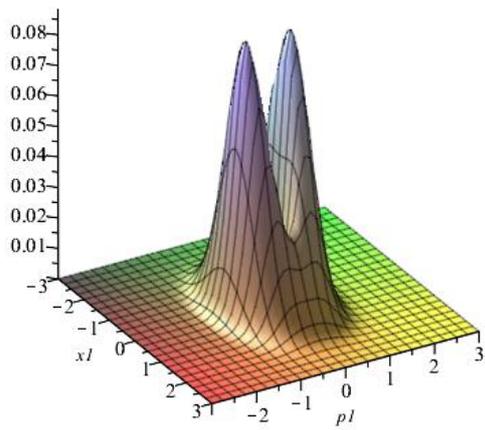


Figura 12: Função de Wigner, $n_u = 0, n_v = 1$ e $\xi = 0,9$

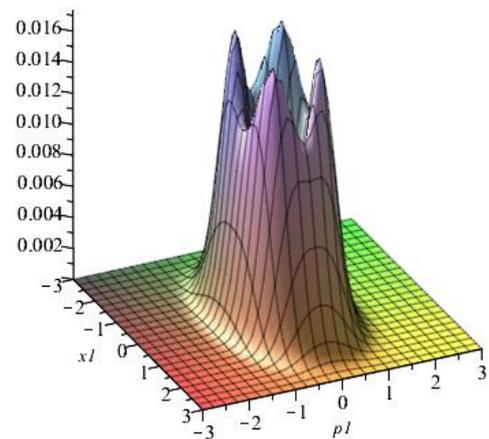


Figura 13: Função de Wigner, $n_u = 1, n_v = 1$ e $\xi = 0,9$

5 *Hamiltoniano dual de Bateman*

Em 1931, Bateman [14] apresentou um modelo puramente clássico de um oscilador harmônico amortecido. O Hamiltoniano independente do tempo descreve um oscilador amortecido com o auxílio de um sistema complementar do tipo imagem espelhada. Assim, a energia dissipada pelo oscilador que queremos estudar, é absorvida pelo outro oscilador, que funciona como um modo acoplado do reservatório. Dessa forma, a energia total do sistema seria uma constante do movimento. Neste capítulo vamos adotar o processo de quantização desse Hamiltoniano sistema-reservatório apresentado por Feshbach e Tikhonchinsky, em 1977 [13], e aplicar a teoria descrita no Capítulo 3 para encontrar as funções de Wigner desse sistema.

5.1 Descrição do problema

A equação de movimento clássica para o oscilador harmônico amortecido é dada por

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0, \quad (5.1)$$

onde x corresponde à distância em relação à posição de equilíbrio, m é a massa do oscilador, k é a constante elástica e γ , a constante de amortecimento. Para implementar uma quantização canônica para o sistema descrito pela Eq. (5.1), é necessária uma Lagrangiana contendo uma variável auxiliar y que pode ser escrita como

$$L = m\dot{x}y + \frac{1}{2}\gamma(xy - \dot{x}y - kxy). \quad (5.2)$$

A equação para a variável y é encontrada através de

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{y} - \gamma\dot{y} + ky = 0. \quad (5.3)$$

A Eq. (5.3) representa a Eq. (5.1) invertida temporalmente, ($\gamma \rightarrow -\gamma$) de maneira que os valores de y aumentam à medida que a solução de x diminui. Assim, a variável y representa

um grau de liberdade efetivo, com os mesmos parâmetros, para o reservatório térmico ao qual o sistema dado pela Eq. (5.1) está acoplado. Para construir o Hamiltoniano à maneira usual, precisaremos dos momentos canônicos, dados por

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{y} - \frac{1}{2}\gamma y \quad (5.4)$$

e

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{x} - \frac{1}{2}\gamma x \quad (5.5)$$

Portanto, o Hamiltoniano procurado

$$H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L$$

é encontrado substituindo as Eq (5.4) e (5.5), resultando

$$H = \frac{1}{m} p_x p_y + \frac{\gamma}{2m} (y p_y - x p_x) + \left(k - \frac{\gamma^2}{4m}\right) xy. \quad (5.6)$$

Note que, como esperado, esse Hamiltoniano é independente do tempo.

A quantização canônica pode ser realizada através das relações de comutação

$$[x, y] = 0 = [p_x, p_y]$$

$$[x, p_x] = [y, p_y] = i\hbar$$

Então, usando as Eq. (5.4) e (5.5), temos

$$[x, \dot{y}] = [y, \dot{x}] = \frac{i\hbar}{m}$$

$$[\dot{x}, \dot{y}] = -\frac{i\hbar\gamma}{2m^2}.$$

Definindo o conjunto de operadores criação e destruição

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(\frac{p_x}{\sqrt{m}} - i\sqrt{m\omega}x \right); \quad (5.7)$$

$$a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(\frac{p_x}{\sqrt{m}} + i\sqrt{m\omega}x \right);$$

$$b \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(\frac{p_y}{\sqrt{m}} - i\sqrt{m\omega}y \right);$$

$$b^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(\frac{p_y}{\sqrt{m}} + i\sqrt{m\omega}y \right),$$

com

$$[a, a^\dagger] = 1 = [b, b^\dagger]$$

e

$$[a, b] = 0 = [a, b^\dagger],$$

onde

$$\omega \equiv \left[\frac{1}{m} \left(k - \frac{\gamma}{4m} \right) \right]^{1/2},$$

e, ainda, fazendo as transformações

$$A \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b) \quad e \quad B \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a - b), \quad (5.8)$$

obtemos o Hamiltoniano quântico

$$H = H_0 + H_1,$$

onde

$$H_0 = \hbar\omega(A^\dagger A - B^\dagger B) \quad (5.9)$$

e

$$H_1 = i\hbar\Gamma(A^\dagger B^\dagger - AB), \quad (5.10)$$

em que

$$\Gamma = \frac{\gamma}{2m}.$$

No limite $\gamma \rightarrow 0$, temos

$$H \rightarrow \hbar\omega(A^\dagger A - B^\dagger B),$$

onde $\omega^2 = k/m$. Nota-se que esse Hamiltoniano se transforma no oscilador não amortecido apenas se os estados ψ satisfazem $B\psi = 0$. Então, os estados gerados por B^\dagger representam o ralo por onde a energia dissipada pelo oscilador quântico amortecido flui. Isto é, o oscilador B representa um modo do reservatório acoplado ao oscilador A. Substituindo as Eqs. (5.7) nas Eqs. (5.8), temos

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}\hbar\omega} \left(\frac{1}{\sqrt{m}}(p_x + p_y) - i\omega\sqrt{m}(x + y) \right) \right)$$

e

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}\hbar\omega} \left(\frac{1}{\sqrt{m}}(p_x - p_y) - i\omega\sqrt{m}(x - y) \right) \right).$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y),$$

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_x + p_y) \quad e \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_x - p_y),$$

ficamos com

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(\frac{p_1}{\sqrt{m}} - i\sqrt{m\omega}q_1 \right)$$

e

$$B = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(\frac{p_2}{\sqrt{m}} - i\sqrt{m\omega}q_2 \right).$$

Vamos considerar, na próxima seção, o problema no espaço de fase.

5.2 Quantização em \mathcal{H}_Γ

A quantização no espaço de fase é feita substituindo os operadores A e B por A^\star e B^\star . Temos, então, que

$$A^\star = \hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(\frac{\hat{p}_1}{\sqrt{m}} - i\sqrt{m\omega}\hat{q}_1 \right),$$

$$A^{\dagger\star} = \hat{A}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(\frac{\hat{p}_1}{\sqrt{m}} + i\sqrt{m\omega}\hat{q}_1 \right),$$

$$B^\star = \hat{B} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(\frac{\hat{p}_2}{\sqrt{m}} - i\sqrt{m\omega}\hat{q}_2 \right),$$

$$B^{\dagger\star} = \hat{B}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(\frac{\hat{p}_2}{\sqrt{m}} + i\sqrt{m\omega}\hat{q}_2 \right).$$

onde

$$q_{i^\star} = \hat{q}_i = q_i + \frac{i\hbar}{2}\partial_{p_i} \quad (5.11)$$

e

$$p_{i^\star} = \hat{p}_i = p_i - \frac{i\hbar}{2}\partial_{q_i}, \quad (5.12)$$

em que $i = 1, 2$. Dessa forma, os Hamiltonianos dados pelas Eqs. (5.9) e (5.10) ficam, no espaço de fase,

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega(\hat{A}^\dagger \hat{A} - \hat{B}^\dagger \hat{B})$$

e

$$\hat{H}_1 = i\hbar\Gamma(\hat{A}^\dagger \hat{B}^\dagger - \hat{A}\hat{B}),$$

satisfazendo

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1. \quad (5.13)$$

Para resolver a equação de Schrödinger no espaço de fase

$$\widehat{H}\psi(q_1, q_2, p_1, p_2) = E\psi(q_1, q_2, p_1, p_2),$$

vamos prosseguir da seguinte maneira. Primeiro, note que \widehat{H}_0 corresponde à parte real de \widehat{H} e, \widehat{H}_1 , à parte imaginária. De modo que podemos escrever

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + i\widehat{H}_1,$$

em que \widehat{H}_1 fica definido por

$$\widehat{H}_1 = \hbar\Gamma(\widehat{A}^\dagger\widehat{B}^\dagger - \widehat{A}\widehat{B}).$$

Como o operador \widehat{H} é hermitiano, seus autovalores são reais. Logo, fazendo a decomposição

$$(\widehat{H}_0 + i\widehat{H}_1)(\psi_R + i\psi_I) = E(\psi_R + i\psi_I),$$

temos como uma solução particular

$$\widehat{H}_0\psi_R = E\psi_R \tag{5.14}$$

e

$$\widehat{H}_1\psi_I = 0. \tag{5.15}$$

Como \widehat{H}_0 corresponde à dois osciladores desacoplados, podemos fazer a separação

$$\widehat{H}_0 = \widehat{H}_A + \widehat{H}_B,$$

onde

$$\widehat{H}_A = \hbar\omega\widehat{A}^\dagger\widehat{A}$$

e

$$\widehat{H}_B = -\hbar\omega\widehat{B}^\dagger\widehat{B}.$$

Assim, definindo

$$\psi_R(q_1, q_2, p_1, p_2) = \phi_A(q_1, p_1)\phi_B(q_2, p_2),$$

temos

$$\widehat{H}_A\phi_A(q_1, p_1) = E_A\phi_A(q_1, p_1) \tag{5.16}$$

e

$$\widehat{H}_B\phi_B(q_2, p_2) = E_B\phi_B(q_2, p_2), \tag{5.17}$$

com

$$E = E_A + E_B. \tag{5.18}$$

Substituindo as Eqs. (5.11) e (5.12) na Eq. (5.16), temos

$$\left(\frac{p_1^2}{2m} - \frac{\hbar^2 \omega^2 m}{8} \partial_{p_1}^2 + \frac{m\omega^2 q_1^2}{2} - \frac{\hbar^2}{8m} \partial_{q_1}^2 - \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{i}{2} \left(\hbar\omega^2 q_1 \partial_{p_1} - \frac{\hbar}{m} p_1 \partial_{q_1} \right) \right) \phi_A(q_1, p_1) = E_A \phi_A(q_1, p_1).$$

Definindo

$$z_1 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q_1^2,$$

as derivadas ficam dadas por

$$\begin{aligned} \partial_{p_1} &= \frac{\partial z_1}{\partial p_1} \frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{p_1}{m} \partial_{z_1}, \\ \partial_{p_1}^2 &= \partial_{p_1} \left(\frac{p_1}{m} \partial_{z_1} \right) = \frac{p_1^2}{m^2} \partial_{z_1}^2 + \frac{1}{m} \partial_{z_1}, \\ \partial_{q_1} &= \frac{\partial z_1}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial z_1} = m\omega^2 q_1 \partial_{z_1} \end{aligned}$$

e

$$\partial_{q_1}^2 = \partial_{q_1} \left(\frac{q_1}{m} \partial_{z_1} \right) = m^2 \omega^4 q_1^2 \partial_{z_1}^2 + m\omega^2 \partial_{z_1}.$$

Dessa forma, obtemos

$$\left(z_1 - E_A - \frac{\hbar\omega}{2} - a \partial_{z_1} - a z_1 \partial_{z_1} \right) \phi_A(q_1, p_1) = E_A \phi_A(q_1, p_1),$$

onde $a = \frac{\hbar^2 \omega^2}{4}$. Propondo uma solução do tipo

$$\phi_A(q_1, p_1) = e^{-\frac{z_1}{\sqrt{a}}} f(z_1),$$

teremos as derivadas

$$\partial_{z_1} \phi_A = -\frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{z_1}{\sqrt{a}}} f(z_1) + e^{-\frac{z_1}{\sqrt{a}}} f'(z_1)$$

e

$$\partial_{z_1}^2 \phi_A = \frac{1}{a} e^{-\frac{z_1}{\sqrt{a}}} f(z_1) - \frac{2}{\sqrt{a}} e^{-\frac{z_1}{\sqrt{a}}} f'(z_1) + e^{-\frac{z_1}{\sqrt{a}}} f''(z_1),$$

onde $f'(z_1) = \partial_{z_1} f(z_1)$ e $f''(z_1) = \partial_{z_1}^2 f(z_1)$. Dessa forma,

$$\left(\frac{E_A + \frac{\hbar\omega}{2}}{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) f(z_1) + \left(1 - \frac{2z_1}{\sqrt{a}} \right) f'(z_1) + z f''(z_1) = 0.$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$y_1 = \frac{2z_1}{\sqrt{a}},$$

com

$$\partial_{z_1} = \frac{2}{\sqrt{a}} \partial_{y_1}$$

e

$$\partial_{z_1}^2 = \frac{4}{a} \partial_{y_1}^2,$$

chegamos a

$$\left(\frac{E_A + \frac{\hbar\omega}{2}}{2\sqrt{a}} - \frac{1}{2} \right) f(y_1) + (1 - y_1)f'(y_1) + y_1 f''(y_1) = 0.$$

Comparando esse resultado com equação geradora dos polinômios de Laguerre, dada pela Eq. (4.7), concluimos que

$$m = 0$$

e

$$n_A = \frac{E_A + \frac{\hbar\omega}{2}}{2\sqrt{a}} - \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$E_A = \hbar\omega n_A,$$

e

$$\phi_A(z_1) = e^{-\frac{2z_1}{\hbar\omega}} L_{n_A}^0 \left(\frac{4z_1}{\hbar\omega} \right).$$

Procedendo da mesma maneira para a Eq. (5.17) teremos

$$E_B = -\hbar\omega n_B$$

e

$$\phi_B(z_2) = e^{-\frac{2z_2}{\hbar\omega}} L_{n_B}^0 \left(\frac{4z_2}{\hbar\omega} \right).$$

onde

$$z_2 = -\frac{p_2^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2} q_2^2.$$

Então a solução não normalizada para ψ_R fica dada por,

$$\psi_R(z_1, z_2) = e^{-\frac{2(z_1+z_2)}{\hbar\omega}} L_{n_A}^0 \left(\frac{4z_1}{\hbar\omega} \right) L_{n_B}^0 \left(\frac{4z_2}{\hbar\omega} \right)$$

e a energia total do sistema é

$$E = \hbar\omega(n_A - n_B).$$

Vamos, agora, substituir as Eqs. (5.11) e (5.12) na Eq. (5.15). Dessa maneira,

$$\begin{aligned} & i\Gamma \left((q_1 p_2 + q_2 p_1) + \frac{\hbar^2}{4} (\partial_{q_1} \partial_{p_2} + \partial_{q_2} \partial_{p_1}) \right) \psi_I(q_1, p_1, q_2, p_2) \\ & + \frac{\Gamma \hbar}{2} (q_1 \partial_{q_2} + q_2 \partial_{q_1} - p_1 \partial_{p_2} - p_2 \partial_{p_1}) \psi_I(q_1, p_1, q_2, p_2) = 0. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$u = q_1 p_2 + q_2 p_1,$$

com derivadas

$$\partial_{p_1} = \frac{\partial u}{\partial p_1} \frac{\partial}{\partial u} = q_2 \partial_u,$$

$$\partial_{p_2} = \frac{\partial u}{\partial p_2} \frac{\partial}{\partial u} = q_1 \partial_u,$$

$$\partial_{q_1} = \frac{\partial u}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial u} = p_2 \partial_u$$

e

$$\partial_{q_2} = \frac{\partial u}{\partial q_2} \frac{\partial}{\partial u} = p_1 \partial_u,$$

chegamos a

$$u\psi_I(q_1, p_1, q_2, p_2) + bu\partial_u^2\psi_I(q_1, p_1, q_2, p_2) = 0,$$

que possui solução dada por

$$\psi_I(q_1, p_1, q_2, p_2) = e^{\frac{iu}{\sqrt{b}}},$$

onde $b = \frac{\hbar^2}{4}$. Assim, a solução não normalizada para ψ fica

$$\psi(z_1, z_2, u) = e^{-\frac{2(z_1+z_2)}{\hbar\omega}} L_{n_A}^0\left(\frac{4z_1}{\hbar\omega}\right) L_{n_B}^0\left(\frac{4z_2}{\hbar\omega}\right) + ie^{\frac{2iu}{\hbar}}. \quad (5.19)$$

A partir da Eq. (5.19) podemos obter os gráficos da função de Wigner independente do tempo. Nas Figuras (14) - (17) é possível ver o comportamento da função de Wigner para alguns estados do sistema de osciladores acoplados. Note que podemos interpretar os estados em que $n_A = n_B$ como o estado de vácuo, já que $E = 0$. A Figura (14) corresponde à função de Wigner para o estado fundamental. Existe uma leve deformação na base. Conforme o número quântico n_A aumenta, surgem sulcos assimétricos nos gráficos da função de Wigner. Entretanto, quando $n_A = n_B$, os sulcos se tornam simétricos. Todas as figuras apresentam uma parte ligeiramente negativa, inclusive para o estado fundamental. Este fato não fica evidente nas figuras por que a função de Wigner não se encontra normalizada. Para a construção dos gráficos, foi adotado $\hbar = \omega = m = 1$ e $q_2 = p_2 = 1$.

No próximo capítulo estudaremos uma abordagem do oscilador harmônico construído a partir de uma Lagrangiana complexa.

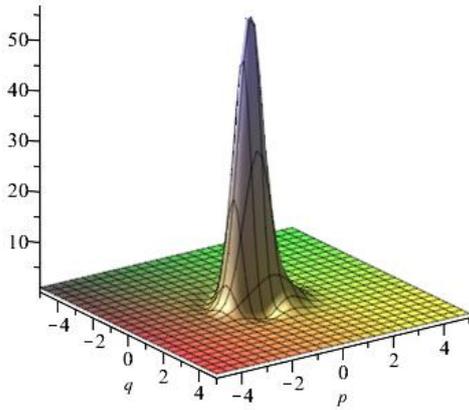


Figura 14: Função de Wigner, $n_A = n_B = 0$

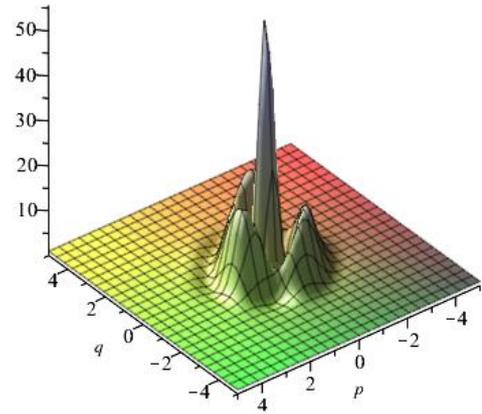


Figura 15: Função de Wigner, $n_A = 1, n_B = 0$

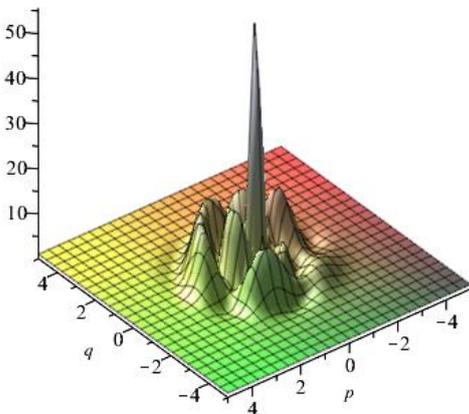


Figura 16: Função de Wigner, $n_A = 2, n_B = 0$

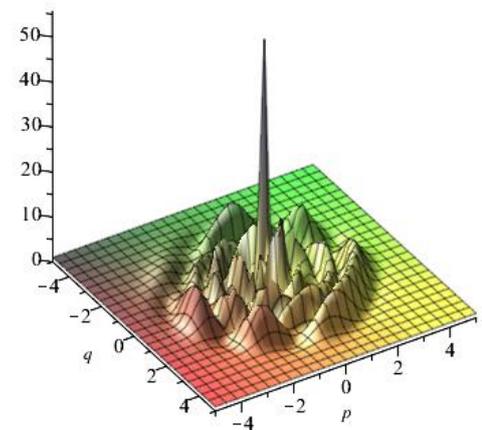


Figura 17: Função de Wigner, $n_A = 5, n_B = 0$

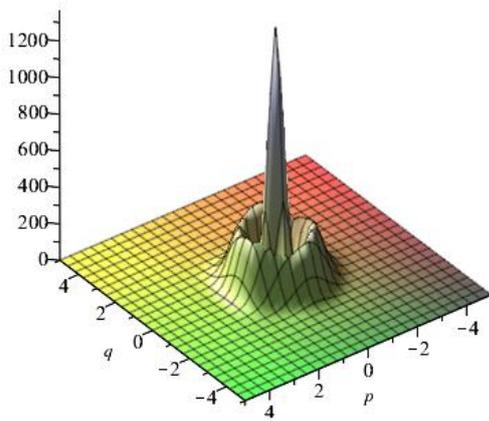


Figura 18: Função de Wigner, $n_A = 1$, $n_B = 1$

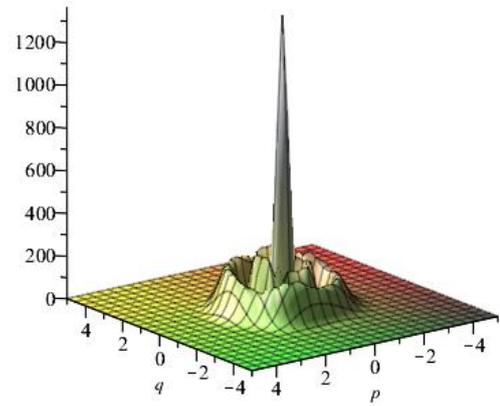


Figura 19: Função de Wigner, $n_A = 2$, $n_B = 1$

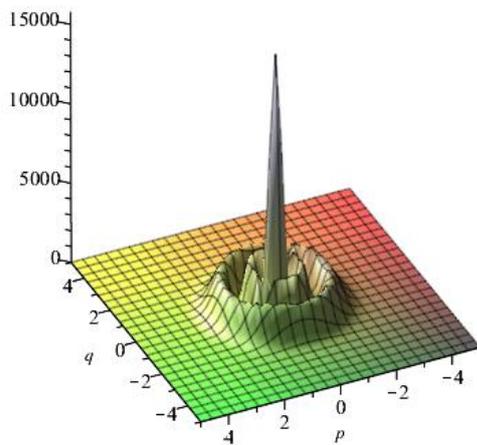


Figura 20: Função de Wigner, $n_A = 2$, $n_B = 2$

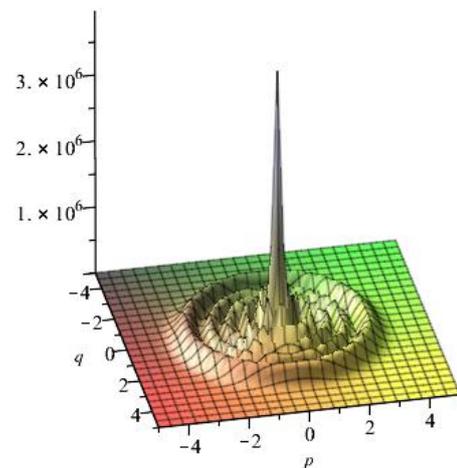


Figura 21: Função de Wigner, $n_A = 5$, $n_B = 5$

6 *Hamiltoniano complexo de Dekker*

Dekker [12], em 1975, construiu um Hamiltoniano complexo para o oscilador harmônico amortecido, no qual a parte imaginária está relacionada à dissipação. Neste capítulo estudaremos esse modelo no espaço de fase.

6.1 Descrição do problema

Para construir um Hamiltoniano complexo¹, Dekker fatorou equação típica do oscilador amortecido, de massa unitária,

$$\ddot{x} + \Lambda \dot{x} + \Omega^2 x = 0, \quad (6.1)$$

onde $x \in \mathfrak{R}$, em duas equações com variáveis complexas

$$\dot{q} + i\omega q + \lambda q = 0 \quad (6.2)$$

e

$$\dot{q}^* - i\omega q^* + \lambda q^* = 0. \quad (6.3)$$

Isso é possível usando a definição

$$q = (2\omega)^{-1/2}(\dot{x} - i\omega x + \lambda x). \quad (6.4)$$

Ao substituir a Eq. (6.4) na Eq. (6.2), encontramos

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + (\lambda^2 + \omega^2)x = 0,$$

¹Por se tratar de um Hamiltoniano não hermitiano, seu espectro pode possuir autovalores complexos. Assim, não podemos interpretá-los como energia do sistema, mas sim, autovalores do operador evolução temporal \hat{H} .

que é exatamente a Eq. (6.1), com $\Lambda = 2\lambda$ e $\Omega^2 = \lambda^2 + \omega^2$. Tomando $\lambda = 0$, a Eq. (6.1) se reduz a um oscilador harmônico sem dissipação e $\Omega = \omega$. Assim, λ é a constante de amortecimento e Ω é a frequência natural do oscilador não amortecido. Além disso, se derivarmos a Eq. (6.2) em relação ao tempo, teremos

$$\ddot{q} + i\omega\dot{q} + \lambda\dot{q} = 0$$

$$\ddot{q} + (i\omega - \lambda)\dot{q} + 2\lambda\dot{q} = 0$$

e, da Eq. (6.2), $\dot{q} = -(i\omega + \lambda)q$, chegamos a

$$\ddot{q} + \Lambda\dot{q} + \Omega^2q = 0. \quad (6.5)$$

Portanto, a partir da Eq. (6.5) podemos encontrar soluções reais para $x(t)$.

Uma consequência em se usar variáveis complexas é que a Lagrangiana do sistema também pode ser complexa. A Eq (6.2) pode ser encontrada através da Lagrangiana

$$L = \frac{i}{2}(q^*\dot{q} - q\dot{q}^*) - (\omega - i\lambda)q^*q, \quad (6.6)$$

tomando a derivada em relação a q^* , isto é,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^*} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^*} = \dot{q} + i\omega q + \lambda q = 0.$$

O complexo conjugado da Eq. (6.6) fica

$$L^* = -\frac{i}{2}(q\dot{q}^* - q^*\dot{q}) - (\omega + i\lambda)qq^*, \quad (6.7)$$

e a Eq. (6.3) é escrita através da derivada em relação a q da Eq. (6.7). Ou seja,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial q} = \dot{q}^* - i\omega q^* + \lambda q^* = 0.$$

Note que para um sistema sem dissipação, $\lambda = 0$, a Lagrangiana dada pela Eq. (6.6) é real. Para incluir a dissipação, uma parte imaginária foi adicionada.

Os momentos canonicamente conjugados são definidos através de

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{iq^*}{2} \quad (6.8)$$

e

$$\bar{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^*} = -\frac{iq}{2} = p^*. \quad (6.9)$$

O Hamiltoniano procurado é

$$H = p\dot{q} + p^*\dot{q}^* - L, \quad (6.10)$$

com as equações de movimento dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= \dot{q} + \left(p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} + \left(p^* - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^*}\right) \frac{\partial \dot{q}^*}{\partial p} \\ &= \dot{q} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q} &= \left(p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \left(p^* - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^*}\right) \frac{\partial \dot{q}^*}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \\ &= -\dot{p} \end{aligned}$$

Substituindo a Eq. (6.6) no Hamiltoniano dado pela Eq. (6.10) e usando as Eqs. (6.8) e (6.9), temos

$$H = (i\omega + \lambda)(q^*p^* - pq) \quad (6.11)$$

Note que esse Hamiltoniano não é hermitiano, pois o conjugado da Eq. (6.10) é dado por

$$H^* = p^*\dot{q}^* + p\dot{q} - L^*.$$

Com o auxílio da Eq. (6.7), chegamos a

$$H^* = (i\omega - \lambda)(q^*p^* - pq), \quad (6.12)$$

que é o mesmo resultado caso tomássemos o conjugado da Eq. (6.11) diretamente. Usando as Eqs. (6.8) e (6.9), chegamos a

$$H = -(i\omega + \lambda)(pq + qp). \quad (6.13)$$

Na próxima seção consideraremos o problema no espaço de fase.

6.2 Quantização em \mathcal{H}_Γ

Neste trabalho, seguiremos um caminho de quantização diferente do proposto por Dekker, pois estamos interessados na função de Wigner. A relação entre a coordenada real x e o momento p_x é dada por

$$\dot{x} = p_x,$$

de maneira que, através da Eq. (6.1), temos

$$\dot{p}_x = -2\lambda p_x - \Omega^2 x.$$

Utilizando as Eqs. (6.4), (6.8) e (6.9), podemos escrever os operadores \hat{q} e \hat{p} em função dos operadores \hat{x} e \hat{p}_x na forma

$$\hat{q} = (2\omega)^{-1/2}(\hat{p}_x - i\omega\hat{x} + \lambda\hat{x}) \quad (6.14)$$

e

$$\hat{p} = \frac{(2\omega)^{-1/2}}{2}(i\hat{p}_x - \omega\hat{x} + i\lambda\hat{x}), \quad (6.15)$$

com

$$[\hat{q}, \hat{p}] = [\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar.$$

Elevando a Eq. (6.13) à categoria de operador

$$\widehat{H} = -(i\omega + \lambda)(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}),$$

e substituindo as Eqs. (6.14) e (6.15), chegamos a

$$\widehat{H} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{i\lambda}{\omega} \right) \left(\hat{p}_x + \lambda(\hat{p}_x\hat{x} + \hat{x}\hat{p}_x) + \Omega^2\hat{x}^2 \right). \quad (6.16)$$

Note que, caso $\lambda = 0$, o Hamiltoniano se reduz a um oscilador harmônico não dissipativo.

No espaço de fase, os operadores \hat{x} e \hat{p}_x são dados por

$$\hat{x} = x + \frac{i\hbar}{2}\partial_{p_x}$$

e

$$\hat{p}_x = p_x - \frac{i\hbar}{2}\partial_x.$$

Assim, a Eq. (6.16) fica na forma

$$\begin{aligned} \widehat{H} &= \left(1 - \frac{i\lambda}{\omega} \right) \left(\frac{p_x^2}{2} - \frac{i\hbar p_x}{2}\partial_x - \frac{\hbar^2}{8}\partial_x^2 + \lambda x p_x - \frac{i\hbar\lambda x}{2}\partial_x \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\hbar\lambda p_x}{2}\partial_{p_x} + \frac{\hbar^2\lambda}{4}\partial_x\partial_{p_x} + \frac{\Omega^2 x^2}{2} + \frac{i\hbar\Omega^2 x}{2}\partial_{p_x} - \frac{\hbar^2\Omega^2}{8}\partial_{p_x}^2 \right). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Definindo a mudança de variáveis

$$z = \frac{p_x^2}{2} + \lambda x p_x + \frac{\Omega^2 x^2}{2},$$

com derivadas

$$\partial_x = (\lambda p_x + \Omega^2 x)\partial_z,$$

$$\begin{aligned}\partial_x^2 &= \Omega^2 \partial_z + (\lambda^2 p_x^2 + 2\lambda\Omega^2 x p_x + \Omega^4 x^2) \partial_z^2, \\ \partial_{p_x} &= p_x + \lambda x, \\ \partial_{p_x}^2 &= \partial_z + (p^2 + 2\lambda x p + \lambda^2 x^2) \partial_z^2, \\ \partial_x \partial_{p_x} &= \lambda \partial_z + (\lambda p^2 + \Omega^2 x p_x + \lambda^2 x p_x + \lambda \Omega^2 x^2) \partial_z^2,\end{aligned}$$

a Eq. (6.17) fica dada por

$$\widehat{H} = \left(1 - \frac{i\lambda}{\omega}\right) \left(z + \frac{\hbar^2}{4}(\lambda^2 - \Omega^2)\partial_z + \frac{\hbar^2}{4}(\lambda^2 - \Omega^2)z\partial_z^2\right).$$

Como $\Omega^2 = \lambda^2 + \omega^2$, temos

$$\widehat{H} = \left(1 - \frac{i\lambda}{\omega}\right) \left(z - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\partial_z - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}z\partial_z^2\right). \quad (6.18)$$

Como esse Hamiltoniano não é hermitiano, não podemos interpretar seus autovalores como energia mensurável, mas sim como autovalores do operador de translação temporal. A equação de autovalores do operador \widehat{H} fica escrita na forma

$$\widehat{H}\psi = \varepsilon\psi,$$

logo,

$$\left(1 - \frac{i\lambda}{\omega}\right) \left(z - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\partial_z - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}z\partial_z^2\right) \psi = \varepsilon\psi.$$

Tomando o complexo conjugado da Eq. (6.18) e assumindo que a amplitude pode conter partes imaginárias, podemos escrever

$$\widehat{H}^\dagger\psi^* = \varepsilon^*\psi^*,$$

e

$$\left(1 + \frac{i\lambda}{\omega}\right) \left(z - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\partial_z - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}z\partial_z^2\right) \psi^* = \varepsilon^*\psi^*.$$

Fazendo a decomposição de ε e ψ em

$$\varepsilon = \varepsilon_R + i\varepsilon_I$$

e

$$\psi = \psi_R + i\psi_I,$$

temos

$$\left(1 - \frac{i\lambda}{\omega}\right) \left(z - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\partial_z - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}z\partial_z^2\right) (\psi_R + i\psi_I) = (\varepsilon_R + i\varepsilon_I)(\psi_R + i\psi_I).$$

e

$$\left(1 + \frac{i\lambda}{\omega}\right) \left(z - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\partial_z - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}z\partial_z^2\right) (\psi_R - i\psi_I) = (\varepsilon_R - i\varepsilon_I)(\psi_R - i\psi_I).$$

Assim, chegamos ao conjunto de equações

$$\begin{aligned} \left(z - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\partial_z - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}z\partial_z^2\right) \psi_R &= \varepsilon_R\psi_R, \\ \frac{\lambda}{\omega} \left(z - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\partial_z - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}z\partial_z^2\right) \psi_I &= -\varepsilon_I\psi_I, \\ \left(z - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\partial_z - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}z\partial_z^2\right) \psi_I &= \varepsilon_R\psi_I, \\ \frac{\lambda}{\omega} \left(z - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\partial_z - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}z\partial_z^2\right) \psi_R &= -\varepsilon_I\psi_R. \end{aligned}$$

Portanto, tanto a parte real quanto a imaginária da amplitude obedecem às mesmas equações de autovalores. Reescrevendo a equação

$$\left(z - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\partial_z - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}z\partial_z^2\right) \psi_R = \varepsilon_R\psi_R$$

na forma

$$(z - \varepsilon_R - a\partial_z - az\partial_z^2)\psi_R = 0, \quad (6.19)$$

onde foi feita a definição

$$a = \frac{\hbar^2\omega^2}{4}.$$

Podemos propor uma solução do tipo

$$\psi_R(z) = e^{-z\sqrt{\frac{1}{a}}}\varphi(z). \quad (6.20)$$

As derivadas da Eq. (6.20) são

$$\partial_z\psi_R(z) = -\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-z\sqrt{\frac{1}{a}}}\varphi(z) + e^{-z\sqrt{\frac{1}{a}}}\varphi'(z)$$

e

$$\partial_z^2\psi_R(z) = \frac{1}{a}e^{-z\sqrt{\frac{1}{a}}}\varphi(z) - \frac{1}{\sqrt{a}}e^{-z\sqrt{\frac{1}{a}}}\varphi'(z) - \frac{1}{\sqrt{a}}e^{-z\sqrt{\frac{1}{a}}}\varphi'(z) + e^{-z\sqrt{\frac{1}{a}}}\varphi''(z),$$

onde $\varphi'(z) = \partial_z\varphi(z)$ e $\varphi''(z) = \partial_z^2\varphi(z)$. Substituindo na Eq. (6.19), ficamos com

$$z\varphi''(z) + \left(1 - \frac{2z}{\sqrt{a}}\right)\varphi'(z) + \left(\frac{\varepsilon_R}{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\varphi(z) = 0. \quad (6.21)$$

Introduzindo a mudança de variáveis

$$y = \frac{2z}{\sqrt{a}},$$

com derivadas dadas por

$$\partial_z = \frac{\partial_y}{\partial_z} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{2}{\sqrt{a}} \partial_y$$

e

$$\partial_z^2 = \frac{2}{\sqrt{a}} \partial_z \partial_y = \frac{4}{a} \partial_y^2,$$

a Eq. (6.21) fica na forma

$$y\varphi''(y) + (1-y)\varphi'(y) + \left(\frac{\varepsilon_R}{2\sqrt{a}} - \frac{1}{2} \right) \varphi(y). \quad (6.22)$$

Comparando a Eq. (6.22) com os polinômios associados de Laguerre, dados por

$$\left(x \frac{d^2}{dx^2} + (m+1-x) \frac{d}{dx} + n \right) L_n^m(x) = 0,$$

concluimos que

$$m = 0$$

e que

$$n = \frac{\varepsilon_R}{2\sqrt{a}} - \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$\varepsilon_R = 2\sqrt{a} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\varepsilon_R = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Em termos dos polinômios de Laguerre, as soluções para a Eq. (6.20) são dadas por

$$\psi_R = e^{-\frac{2z}{\hbar\omega}} L_n^0(z). \quad (6.23)$$

Para a parte imaginária da amplitude, dada pela equação

$$\frac{\lambda}{\omega} \left(z - \frac{\hbar^2\omega^2}{4} \partial_z - \frac{\hbar^2\omega^2}{4} z \partial_z^2 \right) \psi_I = -\varepsilon_I \psi_I,$$

podemos fazer um procedimento análogo. Reescrevendo-a na forma

$$\left(z + \frac{\omega\varepsilon_I}{\lambda} - a\partial_z - az\partial_z^2 \right) \psi_R = 0, \quad (6.24)$$

É proposta a mesma solução de ψ_R , de forma que

$$\psi_I(z) = e^{-z\sqrt{\frac{1}{a}}}\varphi(z). \quad (6.25)$$

Seguindo os mesmos passos de ψ_R , chegamos a

$$y\varphi''(y) + (1-y)\varphi'(y) - \left(\frac{\omega\varepsilon_I}{2\lambda\sqrt{a}} + \frac{1}{2}\right)\varphi(y). \quad (6.26)$$

Novamente, quando comparamos com os polinômios de Laguerre, concluimos que

$$m = 0$$

e

$$n = -\frac{\omega\varepsilon_I}{2\lambda\sqrt{a}} - \frac{1}{2}.$$

Assim, encontramos

$$\varepsilon_I = -\hbar\lambda\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Finalmente os autovalores do operador translação temporal \widehat{H} , dado pela Eq. (6.18) são

$$\varepsilon = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - i\hbar\lambda\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

ou

$$\varepsilon = \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)(\omega - i\lambda). \quad (6.27)$$

Note, novamente, que sem dissipação, o autovalor pode ser interpretado fisicamente como a energia de um oscilador harmônico. A solução para ψ em termos dos polinômios de Laguerre é dada por

$$\psi(z) = e^{-\frac{2z}{\hbar\omega}} L_n^0(z)(1+i).$$

A solução completa, dependente do tempo é encontrada usando os autovalores ε

$$\bar{\Psi}(z, t) = e^{-\frac{i\varepsilon t}{\hbar}} \psi(z).$$

Logo,

$$\Psi(z, t) = e^{-\frac{i\varepsilon t}{\hbar}} e^{-\frac{2z}{\hbar\omega}} L_n^0(z)(1+i). \quad (6.28)$$

Para o estado fundamental, onde $n = 0$ e $L_0^0(z) = 1$, temos

$$\Psi_0(z, t) = e^{-\frac{\lambda t}{2}} \left(\cos \frac{\omega t}{2} - i \sin \frac{\omega t}{2}\right) e^{-\frac{2z}{\hbar}\omega}(1+i), \quad (6.29)$$

com parte real dada por

$$\Psi_0(z, t) = e^{-\frac{\lambda t}{2}} \left(\cos \frac{\omega t}{2} + \sin \frac{\omega t}{2} \right) e^{-\frac{2z}{\hbar} \omega}. \quad (6.30)$$

Na Figura (22) é mostrado o decaimento da *quasi*-distribuição $\psi(q, p; t)$ para o estado fundamental em relação ao tempo. E na Figura (23) nota-se o decaimento da função de Wigner para o estado fundamental em relação ao tempo. Nestas figuras, adotamos $p_x = 1$, para a construção dos gráficos. Note que nas Figuras (24) - (35), o comportamento da função de Wigner é sensível à mudança no valor do parâmetro λ para o mesmo estado quântico. Compare, por exemplo, as Figuras (25), (28), (31) e (35).

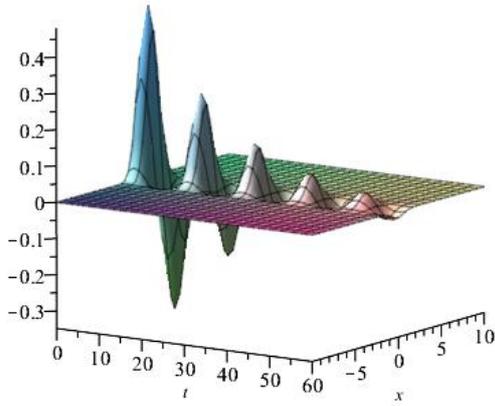


Figura 22: *Quasi*-amplitude, $n = 0$, $\lambda = 0.1$

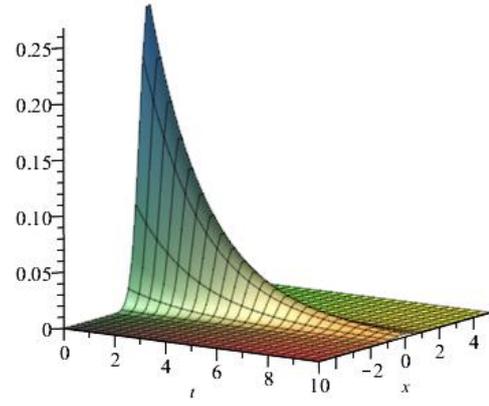


Figura 23: Função de Wigner, $n = 0$, $\lambda = 0.1$

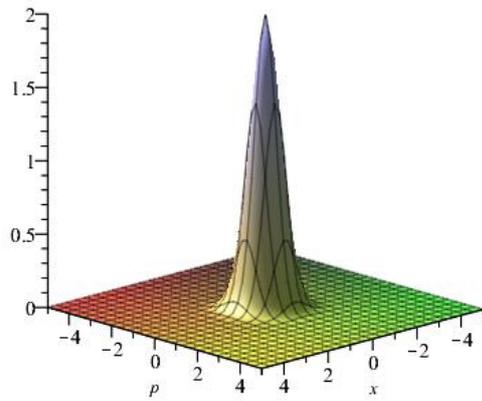


Figura 24: Função de Wigner, $n = 0$,
 $\lambda = 0.1$

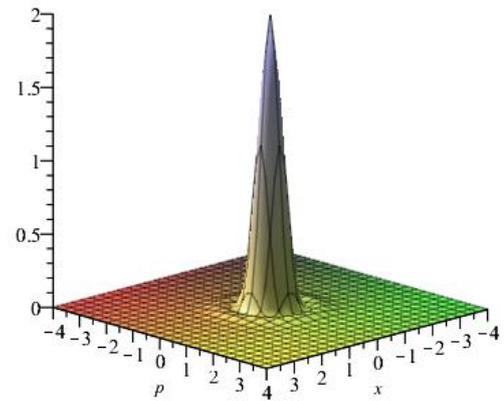


Figura 25: Função de Wigner, $n = 3$,
 $\lambda = 0.1$

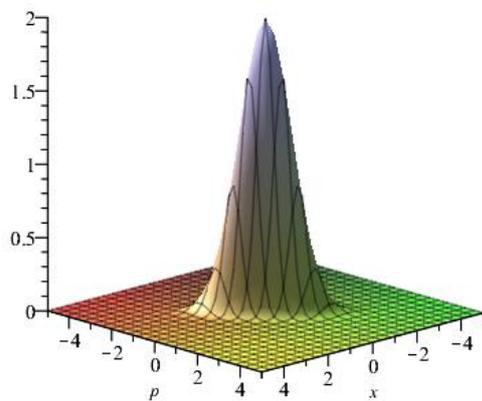


Figura 26: Função de Wigner, $n = 0$,
 $\lambda = 0.8$

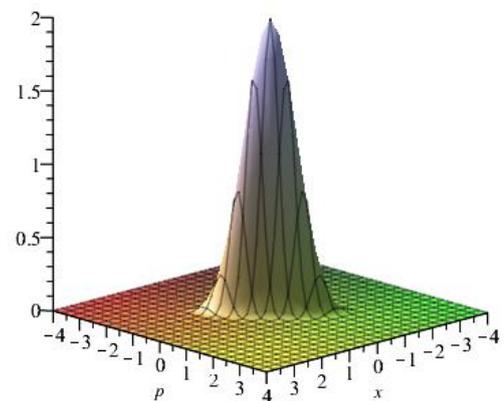


Figura 27: Função de Wigner, $n = 2$,
 $\lambda = 0.8$

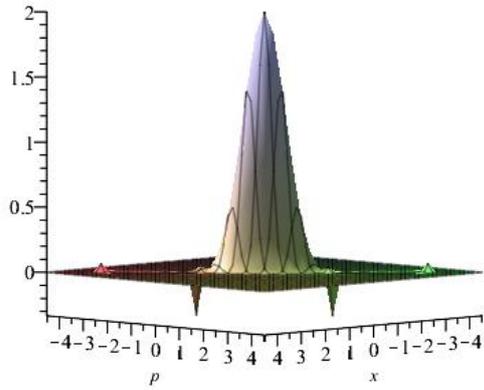


Figura 28: Função de Wigner, $n = 3$,
 $\lambda = 0.8$

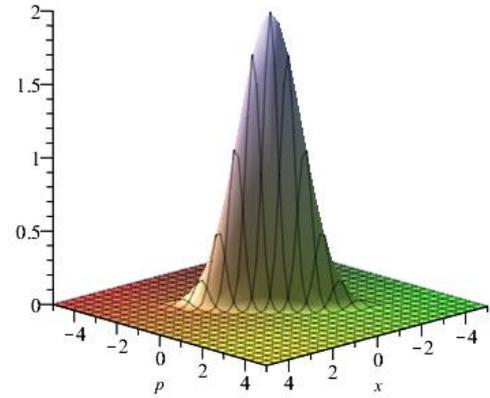


Figura 29: Função de Wigner, $n = 0$,
 $\lambda = 0.9$

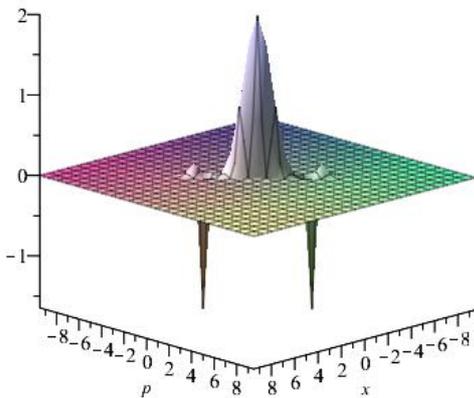


Figura 30: Função de Wigner, $n = 2$,
 $\lambda = 0.9$

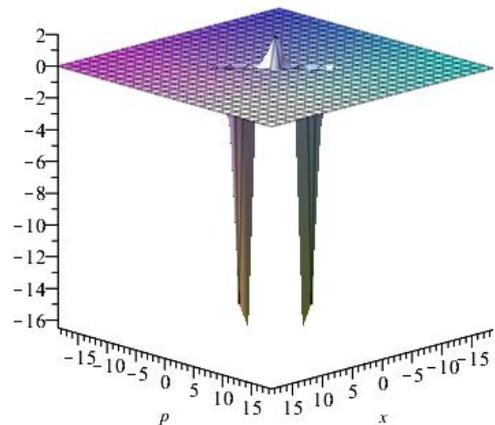


Figura 31: Função de Wigner, $n = 3$,
 $\lambda = 0.9$

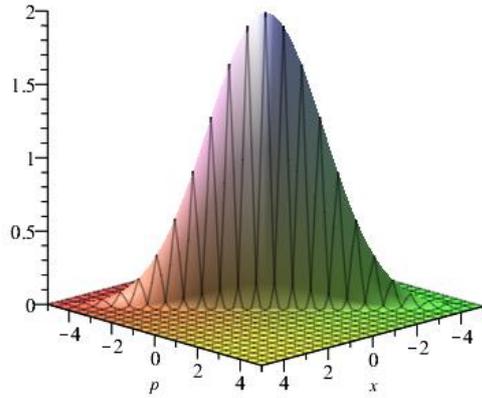


Figura 32: Função de Wigner, $n = 0$,
 $\lambda = 0.99$

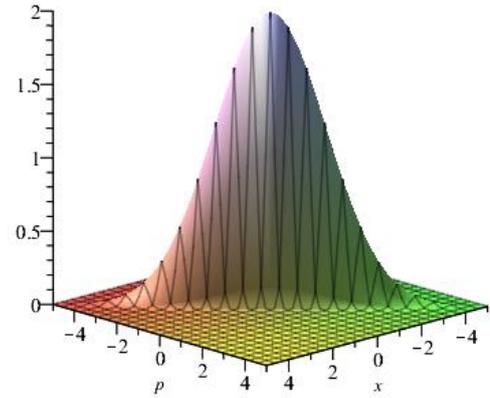


Figura 33: Função de Wigner, $n = 1$,
 $\lambda = 0.99$

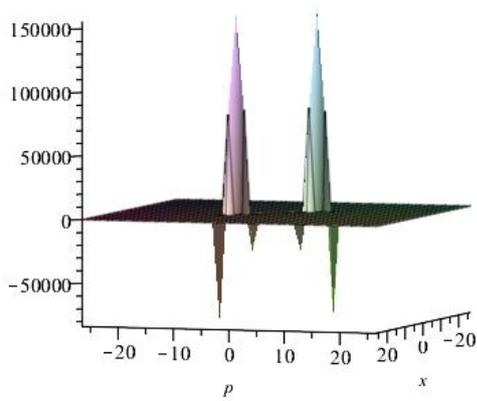


Figura 34: Função de Wigner, $n = 2$,
 $\lambda = 0.99$

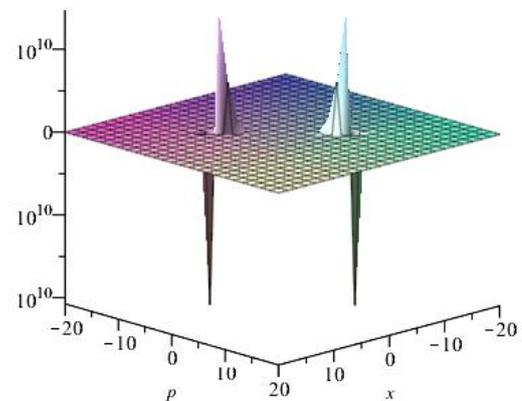


Figura 35: Função de Wigner, $n = 3$,
 $\lambda = 0.99$

7 *Dissipação com o quadrado da velocidade*

Essencialmente, a ideia de atrito surge clássica e macroscopicamente, porém existem algumas aplicações no nível microscópico. Dissipação em radiação e interações de um objeto quântico em um sistema de vários corpos são alguns exemplos. Quando consideramos o atrito no nível quântico, o processo dissipativo não tem necessariamente uma dependência linear da velocidade. Neste capítulo, vamos lidar com dissipação que depende da velocidade ao quadrado. Este problema foi estudado primeiro por Tartaglia [136].

7.1 Descrição do problema

A equação de movimento clássico de uma partícula de massa m que se movimenta em um meio viscoso, cujo atrito depende do quadrado da velocidade é dada por

$$m\ddot{q} + m\gamma\dot{q}^2 = 0, \quad (7.1)$$

onde o ponto corresponde à derivada em relação ao tempo. Porém, a Eq. (7.1) não pode ser encontrada a partir de uma função Lagrangiana. Um método que possibilita obter uma Lagrangiana desse movimento é multiplicar a Eq. (7.1) por uma função $f(q, \dot{q}, t)$ de modo que a nova equação, classicamente equivalente à primeira, possa ser derivada de uma Lagrangiana [136]. Isto é,

$$f(q, \dot{q}, t)(\ddot{q} + \gamma\dot{q}^2) = 0.$$

Essa função f deve ser uma solução de [157]

$$\gamma\dot{q}^2 \frac{\partial \ln f}{\partial \dot{q}} + 2\gamma\dot{q} = \frac{\partial \ln f}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial \ln f}{\partial t}. \quad (7.2)$$

Note que

$$f = e^{2\gamma q}$$

satisfaz a Eq. (7.2). Portanto, a nova equação de movimento pode ser escrita na forma

$$e^{2\gamma q}(m\ddot{q} + m\gamma\dot{q}^2) = 0. \quad (7.3)$$

Uma possível Lagrangiana para a Eq. (7.3) é

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 e^{2\gamma q},$$

de modo que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Assim, o *momentum* canônico é

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}e^{2\gamma q}$$

e o Hamiltoniano fica dado por [136]

$$H = \frac{p^2}{2m} e^{-2\gamma q}.$$

Para quantizá-lo, utilizaremos a regra de quantização de Weyl, dada pela Eq. (2.10).

Dessa forma, adotando $m = 1$,

$$H(q, p) \rightarrow \widehat{H}(\widehat{q}, \widehat{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\sigma d\tau dq dp \frac{p^2}{2} e^{-2\gamma q} e^{i\sigma(\widehat{q}-q)+i\tau(\widehat{p}-p)}.$$

Reorganizando, temos

$$\widehat{H}(\widehat{q}, \widehat{p}) = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int d\sigma d\tau dq dp p^2 e^{-2\gamma q} e^{-i\sigma q} e^{-i\tau p} e^{i\sigma\widehat{q}+i\tau\widehat{p}}.$$

A última exponencial deve ser tratada diferentemente, por conter operadores. Usando a relação de *Baker-Campbell-Hausdorff*, Eq. (2.12), ficamos com

$$\begin{aligned} e^{i\sigma\widehat{q}+i\tau\widehat{p}} &= e^{i\sigma\widehat{q}} e^{i\tau\widehat{p}} e^{-\frac{1}{2}[i\sigma\widehat{q}, i\tau\widehat{p}]} \\ &= e^{i\sigma\widehat{q}} e^{i\tau\widehat{p}} e^{\frac{i\hbar\sigma\tau}{2}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\widehat{H}(\widehat{q}, \widehat{p}) = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int d\sigma d\tau dq dp p^2 e^{-2\gamma q} e^{i\sigma(\widehat{q}-q)} e^{i\tau(\widehat{p}-p+\frac{\hbar\sigma}{2})}.$$

A última exponencial é uma delta de Dirac quando integrada em τ . Assim,

$$\widehat{H}(\widehat{q}, \widehat{p}) = \frac{1}{2(2\pi)} \int d\sigma dq dpp^2 e^{-2\gamma q} e^{i\sigma(\widehat{q}-q)} \delta\left(p - \widehat{p} - \frac{\hbar\sigma}{2}\right),$$

o que nos leva a

$$\widehat{H}(\widehat{q}, \widehat{p}) = \frac{1}{2(2\pi)} \int d\sigma dq \left(\widehat{p} + \frac{\hbar\sigma}{2}\right)^2 e^{-2\gamma q} e^{i\sigma(\widehat{q}-q)}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \widehat{H}(\widehat{q}, \widehat{p}) &= \frac{1}{2(2\pi)} \int d\sigma dq \widehat{p}^2 e^{-2\gamma q} e^{i\sigma(\widehat{q}-q)} \\ &+ \frac{1}{2(2\pi)} \int d\sigma dq \widehat{p} \hbar \sigma e^{-2\gamma q} e^{i\sigma(\widehat{q}-q)} \\ &+ \frac{1}{2(2\pi)} \int d\sigma dq \frac{\hbar^2 \sigma^2}{4} e^{-2\gamma q} e^{i\sigma(\widehat{q}-q)} \end{aligned}$$

e, identificando as deltas, temos

$$\begin{aligned} \widehat{H}(\widehat{q}, \widehat{p}) &= \frac{\widehat{p}^2}{2} e^{-2\gamma \widehat{q}} + \frac{1}{2} \int dq i \widehat{p} \hbar \frac{d}{dq} \delta(\widehat{q} - q) e^{-2\gamma q} \\ &- \frac{1}{2} \int dq \frac{\hbar^2}{4} \frac{d^2}{dq^2} \delta(\widehat{q} - q) e^{-2\gamma q}. \end{aligned}$$

Utilizando as relações

$$\int \frac{d}{dx} \delta(x - x') f(x) = -\frac{d}{dx} f(x)_{(x=x')}$$

e

$$\int \frac{d^2}{dx^2} \delta(x - x') f(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)_{(x=x')},$$

chegamos a

$$\widehat{H}(\widehat{q}, \widehat{p}) = \left(\frac{\widehat{p}^2}{2} + i\hbar\widehat{p} - \frac{\hbar^2\gamma^2}{2} \right) e^{-2\gamma\widehat{q}}. \quad (7.4)$$

Dessa forma, a equação de Schrödinger independente do tempo, $\widehat{H}(\widehat{q}, \widehat{p})\psi(q, p) = E\psi(q, p)$ fica dada por

$$\left(\frac{\widehat{p}^2}{2} + i\hbar\widehat{p} - \frac{\hbar^2\gamma^2}{2} \right) e^{-2\gamma\widehat{q}}\psi(q, p) = E\psi(q, p). \quad (7.5)$$

Vamos considerar, a seguir, a representação simplética.

7.2 Quantização em \mathcal{H}_Γ

A substituição dos operadores \hat{q} e \hat{p} , dados pelas Eqs. (3.3) e (3.4) na Eq. (7.5) nos leva a

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p^2}{2} + 2i\hbar\gamma p - 2\hbar^2\gamma^2 \right) e^{-2\gamma(q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p)} \psi(q, p) \\ & + \left(\hbar^2\gamma - \frac{i\hbar p}{2} \right) e^{-2\gamma(q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p)} \partial_q \psi(q, p) \\ & - \frac{\hbar^2}{8} e^{-2\gamma(q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p)} \partial_q^2 \psi(q, p) = E\psi(q, p), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{p^2}{2} + 2i\hbar\gamma p - 2\hbar^2\gamma^2 \right) e^{-2\gamma q} + \left(\hbar^2\gamma - \frac{i\hbar p}{2} \right) e^{-2\gamma q} \partial_q - \frac{\hbar^2}{8} e^{-2\gamma q} \partial_q^2 \right) e^{-i\hbar\gamma\partial_p} \psi(q, p) \\ & = E\psi(q, p). \end{aligned}$$

Uma condição que satisfaz a equação acima é a periodicidade em p . Pois, fazendo

$$e^{-i\hbar\gamma\partial_p} \psi(q, p) = \psi(q, p)$$

e usando o fato que $e^{a\partial_x} f(x) = f(x + a)$, podemos considerar a solução

$$\psi(q, p - i\hbar\gamma) = \psi(q, p), \quad (7.6)$$

ou seja, a função $\psi(q, p)$ é cíclica em p com período $i\hbar\gamma$. Então,

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{p^2}{2} + 2i\hbar\gamma p - 2\hbar^2\gamma^2 \right) e^{-2\gamma q} + \left(\hbar^2\gamma - \frac{i\hbar p}{2} \right) e^{-2\gamma q} \partial_q - \frac{\hbar^2}{8} e^{-2\gamma q} \partial_q^2 \right) \psi(q, p) = E\psi(q, p), \end{aligned} \quad (7.7)$$

e, fazendo a decomposição

$$\psi(q, p) = \psi_1(q, p) + i\psi_2(q, p),$$

a parte real da Eq. (7.7) é dada por

$$\left(\left(\frac{p^2}{2} - 2\hbar^2\gamma^2 \right) e^{-2\gamma q} + \hbar^2\gamma e^{-2\gamma q} \partial_q - \frac{\hbar^2}{8} e^{-2\gamma q} \partial_q^2 \right) \psi_1(q, p) = E\psi_1(q, p).$$

Assim, definindo

$$\begin{aligned} a &= \frac{p^2}{2} - 2\hbar^2\gamma^2, \\ b &= \hbar^2\gamma, \end{aligned}$$

$$c = \frac{\hbar^2}{8}, \quad (7.8)$$

e reorganizando, temos

$$(a + b\partial_q - c\partial_q^2)\psi_1(q, p) = e^{2\gamma q}E\psi_1(q, p) = e^{\frac{b}{4c}q}E\psi_1(q, p).$$

Propondo o *ansatz*

$$\psi_1(q, p) = e^{\frac{b}{2c}q}f(q, p),$$

cujas derivadas são

$$\partial_q\psi_1(q, p) = \frac{b}{2c}e^{\frac{b}{2c}q}f(q, p) + e^{\frac{b}{2c}q}f'(q, p)$$

e

$$\partial_q^2\psi_1(q, p) = \frac{b^2}{4c^2}e^{\frac{b}{2c}q}f(q, p) + \frac{b}{c}e^{\frac{b}{2c}q}f'(q, p) + e^{\frac{b}{2c}q}f''(q, p),$$

temos

$$f''(q, p) + \left(\frac{E}{c}e^{\frac{b}{4c}q} - \frac{b^2 + 4ac}{4c^2} \right) f(q, p) = 0.$$

Introduzindo a mudança de variáveis

$$z = \frac{b}{8c}q,$$

em que

$$\partial_q = \frac{b}{8c}\partial_z$$

e

$$\partial_q^2 = \frac{b^2}{8^2c^2}\partial_z^2,$$

encontramos

$$f''(z) + \left(\frac{8^2cE}{b^2}e^{2z} - \frac{8^2}{4b^2}(b^2 + 4ac) \right) f(z) = 0.$$

Fazendo a nova mudança de variável

$$e^{2y} = \frac{8^2cE}{b^2}e^{2z}$$

ou

$$e^y = \frac{8}{b}e^z\sqrt{cE},$$

que não produz alteração nas derivadas, isto é, $\partial_y = \partial_z$ e definindo

$$\nu^2 = \frac{8^2(b^2 + 4ac)}{4b^2},$$

chegamos a

$$f''(y) + (e^{2y} - \nu^2)f(y) = 0. \quad (7.9)$$

A Eq. (7.9) é geradora das funções de Bessel, isto é

$$f(y) = J_\nu(e^y).$$

Portanto, voltando com as constantes dadas na Eq. (7.8), temos como solução para $\psi_1(q, p)$

$$\psi_1(q, p) = e^{4\gamma q} J_{\frac{2p}{\hbar^2\gamma}} \left(\frac{4e^{\gamma q}}{\hbar\gamma} \sqrt{\frac{E}{2}} \right).$$

Caso seja adotada simetria cilíndrica, temos a condição

$$n = \frac{2p}{\hbar^2\gamma} \quad (7.10)$$

ou

$$p = \frac{\hbar^2\gamma}{2}n,$$

com $n \in \mathbf{N}$. Já para simetrias esféricas, ficamos com

$$n + \frac{1}{2} = \frac{2p}{\hbar^2\gamma} \quad (7.11)$$

ou

$$p = \frac{\hbar^2\gamma}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

com $n \in \mathbf{N}$.

A parte imaginária da Eq. (7.7) pode ser escrita na forma

$$2\hbar\gamma p\psi_2(q, p) - \frac{\hbar p}{2}\partial_q\psi_2(q, p) = 0,$$

ou

$$A\psi_2(q, p) - B\partial_q\psi_2(q, p) = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} A &= 2\hbar\gamma p \\ B &= \frac{\hbar p}{2}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

A solução para $\psi_2(q, p)$ é

$$\psi_2(q, p) = e^{\frac{A}{B}q}.$$

Retornando as constantes dadas nas Eqs. (7.12), a solução para $\psi_2(q, p)$ fica na forma

$$\psi_2(q, p) = e^{4\gamma q}.$$

Logo, a solução não normalizada para $\psi(q, p)$ fica dada por

$$\psi(q, p) = e^{4\gamma q} \left(J_{\frac{2p}{\hbar^2\gamma}} \left(\frac{4e^{\gamma q}}{\hbar\gamma} \sqrt{\frac{E}{2}} \right) + i \right). \quad (7.13)$$

Esse resultado é análogo ao encontrado por Tartaglia [136], porém, no espaço de fase. Uma informação extra que encontramos no presente formalismo é a discretização de p . A função de onda encontrada diverge quando $q \rightarrow +\infty$, o que mostra que a partícula nunca para, enquanto a densidade de probabilidade de encontrá-la quando $q \rightarrow -\infty$ tende a zero. Assim, uma aplicação prática é considerar o campo de fricção limitado no espaço para evitar divergências nas funções de onda. Um problema típico a ser abordado seria, por exemplo, a penetração de uma partícula em uma barreira de potencial viscosa ou uma piscina de água pesada com paredes de potencial infinito. De qualquer maneira, é necessário estabelecer as condições de contorno e estudar os zeros da função de Bessel. Assim, teríamos

$$\frac{4e^{\gamma q}}{\hbar\gamma} \sqrt{\frac{E}{2}} = \alpha_{n,m}$$

onde $\alpha_{n,m}$ corresponde à m -ésima raiz da função de Bessel de ordem n e parte imaginária da Eq. (7.13), nula. Logo,

$$E_\alpha = \frac{\hbar^2\gamma^2 e^{-2\gamma q}}{4} \alpha_{n,m}^2.$$

Através da Eq. (7.13), podemos encontrar as funções de Wigner. Nas figuras (36) - (39) são mostradas as funções de Wigner para valores fixos de p . Para a construção dos gráficos, adotamos somente a parte real da Eq. (7.13), e que $\hbar = 1$, $E = 2$ e $\gamma = 0.1$.

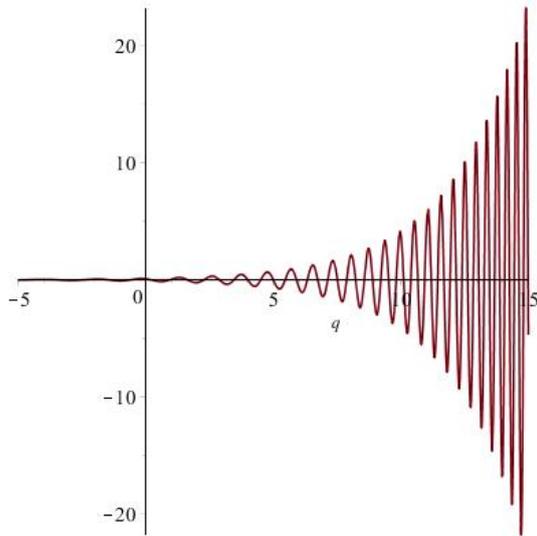


Figura 36: Função de Wigner, $n = 0$

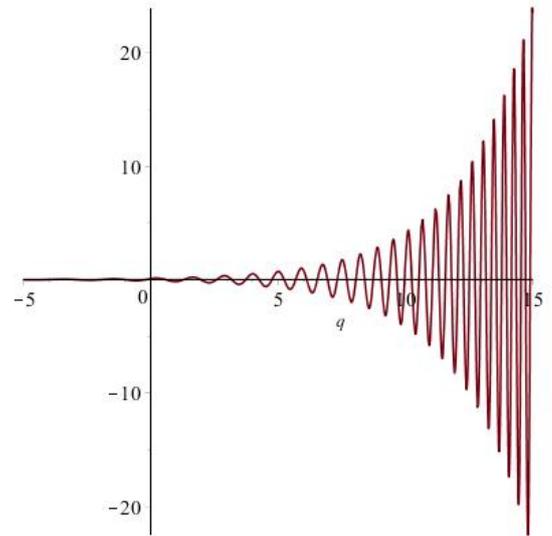


Figura 37: Função de Wigner, $n = 1$

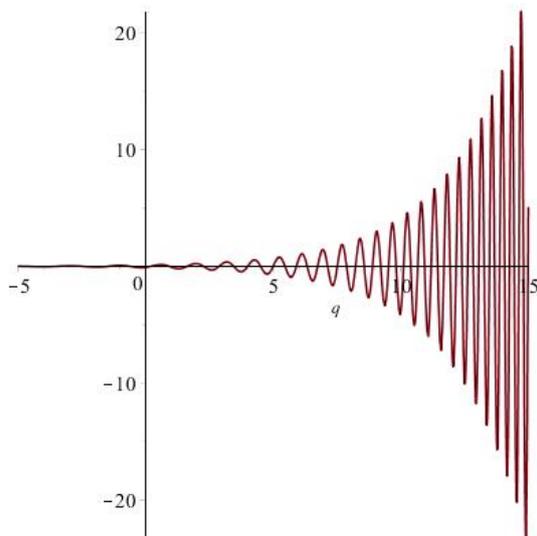


Figura 38: Função de Wigner, $n = 2$

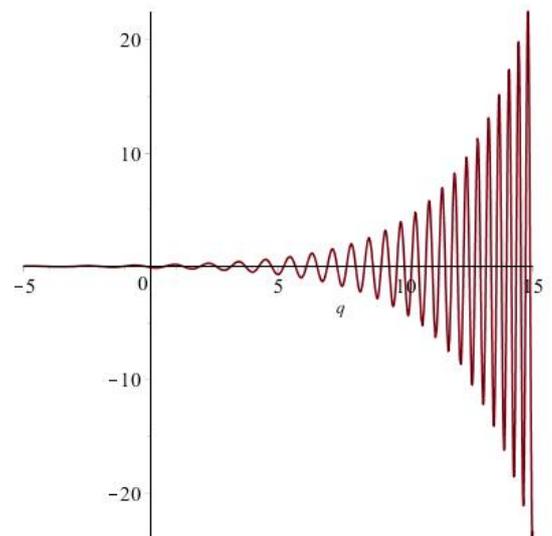


Figura 39: Função de Wigner, $n = 3$

8 *Conclusão e perspectivas*

Utilizando a noção de produto estrela e representações unitárias do grupo de Galilei, o formalismo da mecânica quântica no espaço de fase é construído, no qual as funções de onda são interpretadas como *quasi*-amplitudes de probabilidades e estão associadas com a função de Wigner através da relação $f_w(q, p) = \psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p)$ [126]. Dessa forma, a equação de Schrödinger no espaço de fase é escrita em uma estrutura simplética, na qual $\{q, p\}$ correspondem às coordenadas com conteúdo de espaço de fase Γ , formando uma base para a construção de funções de onda e da função de Green no espaço de Hilbert H_Γ . Neste trabalho, utilizamos este formalismo para estudar sistemas dissipativos.

No Capítulo 4 aplicamos a mecânica quântica simplética ao oscilador quântico amortecido e a um sistema de osciladores com um parâmetro de acoplamento. No caso do oscilador amortecido, concluímos que o indicador de negatividade da função de Wigner possui valores maiores para estados mais excitados. Encontramos, também, o espectro de energia de ambos os sistemas. No Capítulo 5 estudamos a quantização introduzida por Feshbach e Tikochinsky [13] para o Hamiltoniano dual de Bateman [14], no qual um representa o sistema com dissipação e o outro, o ralo, por onde flui a energia dissipada. Nesse problema, quando os osciladores possuem o mesmo nível de excitação, o sistema corresponde ao estado de vácuo. No Capítulo 6, tratamos do modelo dissipativo com Hamiltoniano complexo proposto por Dekker [12]. Para esse sistema verificamos que o espectro de energia possui uma parte real e uma imaginária. Esta última está associada à dissipação. Por último, no Capítulo 7, estudamos uma partícula que se move em um meio no qual a dissipação está relacionada ao quadrado da velocidade. Aqui, concluímos que função de Wigner diverge quando posição da partícula tende ao infinito, consistentemente com os resultados obtidos por Tartaglia [136]. O estudo desse tipo de movimento no espaço de fase apresenta, ainda, uma discretização no *momentum* da partícula. Em todos os cinco casos estudados, a ênfase foi analisar a função de Wigner, que se mostra útil para descrever parte da natureza estatística dos estados quânticos. É importante ressaltar que todas as soluções encontradas para as *quasi*-amplitudes de probabilidades

foram analíticas. Para o cálculo da função de Wigner, observamos convergências até a segunda ordem na constante de Planck \hbar , que aparece no produto de Weyl.

Aspectos interessantes ainda precisam ser explorados no contexto da dissipação quântica no espaço de fase. Um deles é o estudo do espalhamento através da função de Green construída na seção 3.6 do presente trabalho. Outra perspectiva é tentar encontrar soluções mais gerais para os sistemas discutidos, uma vez que, em alguns casos, a solução não contempla situações no qual a dissipação se torna muito forte, de modo a se sobrepor ao sistema. Este é o caso do oscilador quântico amortecido, estudado na seção 4.1. A investigação da manutenção das relações de comutação à medida que sistemas dissipativos evoluem com o tempo também é objeto de interesse para estudos posteriores. Além disso, a análise da quebra de simetria, dos processos de decoerência e o emaranhamento quântico no espaço de fase também merecem atenção em estudos futuros.

...

Referências

- [1] H. B. Callen, T. A. Welton, Phys. Rev. **83**, 34 (1951).
- [2] I. R. Senitzky, Phys. Rev. **115**, 227 (1959).
- [3] H. W. Hasse Rep. Prog. Phys. **41**, 1028 (1978).
- [4] E. Kanai, Progr. Theoret. Phys. (Kyoto) **3**, 440 (1948).
- [5] V. W. Myers, Am. J. Phys. **27**, 507 (1959).
- [6] E. H. Kerner, Can. J. Phys. **36**, 371 (1958).
- [7] W. K. H. Stevens, Proc. Phys. Soc. (London) **72**, 1027 (1958).
- [8] J. Weber, Phys. Rev. **90**, 977 (1953).
- [9] W. K. Brittin, Phys. Rev. **77**, 396 (1950).
- [10] H. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford University Press, Oxford, 2002).
- [11] P. Caldirola. Nuovo Cimento. **18**, 391 (1941).
- [12] Dekker, H. Z. Physik B **21**, 295 (1975).
- [13] H. Feshbach and Y. Tikochinsky. *In: A Festschrift for I.I. Rabi. Trans. New York Ac. Sc. Ser. 2. Vol. 38* A977 44 (1977).
- [14] H. Bateman, Phys. Rev. **38**, 815 (1931).
- [15] H. Dekker, Phys. Rep. **80**, 1 (1981).
- [16] U. Weiss, Series in Modern Condensed Matter Physics, Vol. **13**, *Quantum Dissipative Systems* (World Scientific, 2008).
- [17] Chung-In Uma, Kyu-Hwang Yeonb, Thomas F. George, Phys. Rep. **362**, 63 (2002).
- [18] M. Razavy, *Classical and Quantum Dissipative Systems* (Imperial College Press, 2008).
- [19] M. B. Menski, Physics Uspekhi **46**, 11 1163 (2003)
- [20] M. Schlosshauer, *Decoherence: and the quantum-to-classical transition*(Springer-Verlag, Berlin, 2007).

- [21] P. Hänggi and G.L. Ingold, *Acta Phys. Pol. B* **37**, 1537 (2006).
- [22] P. Hänggi, G.L. Ingold, and P. Talkner, *New J. Phys.* **10**, 115008 (2008).
- [23] A.O. Caldeira and A. J. Leggett, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 211 (1981).
- [24] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, *Ann. Phys. (NY)* **149**, 374 (1983).
- [25] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, *Physica A* **121**, 587 (1983).
- [26] A. J. Leggett, S. Chakravarty, A. T. Dorsey, M. P. A. Fisher, A.Garg, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **59**, 1 (1987).
- [27] C. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise* (Springer-Verlag,Berlin, 1999).
- [28] A. Leggett, B. Ruggiero, and P. Silvestrini, *Quantum Computing and Quantum Bits in Mesoscopic Systems* (Springer, Berlin,2004).
- [29] E.P. Wigner, *Z. Phys. Chem. B* **19**, 749 (1932).
- [30] M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully, E. P. Wigner, *Phys. Rep.* **106**, 121 (1984).
- [31] Y.S. Kim, M.E. Noz, *Phase Space Picture and Quantum Mechanics - Group Theoretical Approach* (W. Scientific, London, 1991).
- [32] T. Curtright, D. Fairlie, C. Zachos, *Phys. Rev. D* **58**, 25002 (1998).
- [33] D. Galetti and A.F.R. de Toledo Piza, *Physica A* **214**, 207 (1995).
- [34] H. Weyl, *Z. Phys.* **46**, 1 (1927).
- [35] J.E. Moyal, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **45**, 99 (1949).
- [36] J. Irving, R. Zwanzig, *J Chem Phys* **19**, 1173 (1951).
- [37] W. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space* (Wiley-VCH, 2002).
- [38] U. Leonhardt, *Measuring the Quantum State of Light* (Cambridge University Press,Cambridge, 1997).
- [39] R. Simon, N. Mukunda, *J. Opt. Soc. Am. A* **17**, 2440 (2000).
- [40] M. Raiford, *Phys. Rev. A* **2**, 1541 (1970).
- [41] E. Tracy, A. Brizard, A. Richardson, A. Kaufman, *Ray Tracing and Beyond: PhaseSpace Methods in Plasma Wave Theory* (Cambridge University Press, 2014).
- [42] G. Baker, I. McCarthy, C. Porter, *Phys. Rev.* **120**, 254 (1960).
- [43] C. Y. Wong, *Phys. Rev. C* **25**, 1460 (1982).
- [44] S. Shlomo, M. Prakash, *Nucl. Phys. A* **357**, 157 (1981).
- [45] U. Wiedemann, U. Heinz, *Phys. Rep.* **319**, 145 (1999).
- [46] A. Cafarella, C. Corianò, M. Guzzi, *JHEP* **11**, 059 (2003).

- [47] A. Belitsky, X. Ji, F. Yuan, Phys. Rev. D **69**, 074014 (2004).
- [48] A. Belitsky, A. Radyushkin, Phys. Rep. **418**, 1 (2005).
- [49] R. Dickman, O'Connell, Phys. Rev. B **32**, 471 (1985).
- [50] P. Markowich, N. Mauser, F. Poupaud, J. Math. Phys. **35**, 1066 (1995).
- [51] F. Dorda, F. Schürerer, Jou. Comp. Phys. **284**, 95 (2015).
- [52] J. Rammer, *Quantum Transport Theory* (Frontiers in Physics, Westview Press, Boulder, 2004).
- [53] K. Y. Kim, B. Lee, Phys. Rev. B **64**, 115304 (2001).
- [54] O. Morandi, F. Schuerrer, J. Phys. A **44**, 265301 (2011).
- [55] A. Savio, A. Poncet, Jou. App. Phys. **109**, 033713 12 (2011).
- [56] K. Ýmre, K. Özizmir, M. Rosenbaum, P. Zweifel, J. Math. Phys. **8**, 1097 (1967).
- [57] J. Schipper, Phys. Rev. **184**, 1283 (1969).
- [58] A. Voros, Phys. Rev. A **40**, 6814 (1989).
- [59] T. Osborn, M. Kondrat'eva, G. Tabisz, B. McQuarrie, J. Phys. A **32**, 4149 (1999).
- [60] S. Robinson, Math. Phys. **31**, 2185 (1993).
- [61] A. Carvalho, R. de Matos Filho, L. Davidovich, Phys. Rev. E **70**, 026211 (2004).
- [62] M. Pulvirenti, J. Math. Phys. **47**, 052103 (2006).
- [63] J. Vlieger, P. Mazur, S. de Groot, Physica **27**, 353 (1961).
- [64] J. Vlieger, P. Mazur, S. de Groot, Physica **27**, 957 (1961).
- [65] J. Vlieger, P. Mazur, S. de Groot, Physica **27**, 974 (1961).
- [66] A. Joshi, H-T Dung, Mod. Phys. Lett. B **13**, 143 (1999).
- [67] H. Dekker, Phys. Rev. A **16**, 2126 (1977).
- [68] H. Dekker, Physica A **95**, 311 (1979).
- [69] A. Rajagopal, Phys. Rev. A **27**, 558 (1983).
- [70] S. Chountasis, A. Vourdas, Phys. Rev. A **58**, 1794 (1998).
- [71] A. Fedorova, M. Zeitlin, 18th Advanced ICFA *Beam Dynamics Workshop on Quantum Aspects of Beam Physics* (World Scientific, River Edge, NJ, 2002).
- [72] W. Coffey, Yu Kalmykov, S. Titov, B. Mulligan, Phys. Rev. E **75** (2007).
- [73] H. Korsch, M. Berry, Physica D **3**, 627 (1981).
- [74] J. Hutchinson, R. Wyatt, Chem. Phys. Lett. **72** 378 (1980).

- [75] B. Greenbaum, S. Habib, K. Shizume, B. Sundaram, *Chaos* **15**, 033302 (2005).
- [76] A. Bracken, J. Wood, *Phys. Rev. A* **73** 012104 (2006).
- [77] R. Maia, F. Nicasio, R. Vallejos, F. Toscano, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 184102 (2008).
- [78] S. Chaudhury, A. Smith, B. Anderson, S. Ghose, and P. Jessen, *Nature* **461**, 768 (2009).
- [79] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos* (Springer Series in Synergetics, 54, Springer, 2010).
- [80] J. Jensen, Q. Niu, *Phys. Rev. A* **42**, 2513 (1990).
- [81] W. Zurek, *Nature* **412**, 712 (2001).
- [82] W. Zurek, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 715 (2003).
- [83] M. Benedict, A. Czirj'ak, *Phys. Rev. A* **60**, 4034 (1999).
- [84] Z. Karkuszewski, J. Zakrzewski, W. Zurek, *Phys. Rev. A* **65**, 042113 (2002).
- [85] C. C. Meaney, R. McKenzie, G. Milburn, *Phys. Rev. E* **83**, 056202 (2011).
- [86] P. Kazemi, S. Chaturvedi, I. Marzoli, R. O'Connell, W. Schleich, *New J. Phys.* **15**, 013052 (2013).
- [87] R. Cabrera, D. Bondar, K. Jacobs, H. Rabitz, *Phys. Rev. A* **92**, 042122 (2015).
- [88] S. Deleglise, I. Dotsenko, C. Sayrin, J. Bernu, M. Brune, JM. Raimond, S. Haroche, *Nature* **455**, 7212 510 (2008).
- [89] P. Bianucci, C. Miquel, J. P. Paz, M. Saraceno, *Phys. Lett. A* **297**, 353 (2002).
- [90] C. Miquel, J. P. Paz, M. Saraceno, *Phys. Rev. A* **65**, 062309 (2002).
- [91] S. Braunstein P. Van Loock, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 513 (2005).
- [92] M. Terraneo, B. Georgeot, D. L. Shepelyansky, *Phys. Rev. E* **71**, 066215 (2005).
- [93] V. Veitch *et al*, *New J. Phys.* **14**, 113011 (2012).
- [94] T. Dunne *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 884 (1995).
- [95] C. Kurtsiefer, T. Pfau, J. Mlynek, *Nature* **386**, 150 (1997).
- [96] Y. Japha, B. Segev, *Phys. Rev. A* **65**, 063411 (2002).
- [97] M. Bienert, F. Haug, W. Schleich, M. Raizen, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 050403 (2002).
- [98] D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer, A. Faridani, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1244 (1993).
- [99] D. Leibfried, D. M. Meekhof, B. E. King, C. Monroe, W.M. Itano, D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4281 (1996).

- [100] L. G. Lutterbach, L. Davidovich, Phys. Rev. Lett. **78**, 2547 (1997).
- [101] R. L. de Matos Filho, W. Vogel, Phys. Rev. A **58**, R1661 (1998).
- [102] A. Ibort, V. I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, F. Ventriglia, Phys. Scripta **79**, 065013 (2009).
- [103] A. Ibort, V. I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, F. Ventriglia, Phys. Lett. A **374**, 2614 (2010).
- [104] A. Ibort, A. Lopez-Yela, V. I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, E. C. G. Sudarshan, F. Ventriglia, Phys. Lett. A **376**, 1417 (2012).
- [105] V.V. Dodonov, Phys. Lett. A **364**, 368 (2007).
- [106] V. V. Dodonov, O.V. Man'ko, V. I. Man'ko, Phys. Rev. A **50**, 813 (1994).
- [107] V. V. Dodonov, O.V. Man'ko, V. I. Man'ko, Phys. Rev. A **49**, 2993 (1994).
- [108] L. S. F. Olavo, Phys. Rev. A **61**, 052109 (2000).
- [109] L. S. F. Olavo, Found. Phys. **34**, 891 (2004).
- [110] F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, A. E. Santana, *Thermal Quantum Field Theory: Algebraic Aspects and Applications* (W. Scientific, Singapore, 2009).
- [111] S. A. Smolyansky, A. V. Prozorkevich, G. Maino, S. G. Mashnic, Ann. Phys. (N.Y.) **277**, 193 (1999).
- [112] L.M. Abreu, A.E. Santana, A. Ribeiro Filho, Ann. Phys.(N.Y.) **297**, 396 (2002).
- [113] M.C.B. Fernandes, J.D.M. Vianna, Braz. J. Phys. **28**, 2 (1999).
- [114] M.C.B. Fernandes, A. E. Santana, J. D. M. Vianna, J. Phys. A Math. Gen. **36**, 3841 (2003).
- [115] A.E. Santana, A. Matos Neto, J.D.M. Vianna, F.C. Khanna, Physica A **280**, 405 (2001).
- [116] M.C.B. Andrade, A.E. Santana, J.D.M. Vianna, J. Phys. A Math. Gen. **33**, 4015 (2000).
- [117] M.A. Alonso, G.S. Pogosyan, K.B. Wolf, J. Math. Phys. **43**, 5857 (2002).
- [118] J. Dito, J. Math. Phys. **33**, 791 (1992).
- [119] G. Torres-Vega, J.H. Frederick, J. Chem. Phys. **93**, 8862 (1990).
- [120] G. Torres-Vega, J.H. Frederick, J. Chem. Phys. **98**, 3103 (1993).
- [121] O. F. Dayi, L. T. Kelleyane, Mod. Phys. Lett. A **17**, 1937 (2002).
- [122] M.A. de Gosson, Bull. Sci. Math. **121**, 301 (1997).

- [123] M.A. de Gosson, Ann. Inst. H Poincaré **70**, 547 (1999).
- [124] M.A. de Gosson, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 7297 (2004).
- [125] M.A. de Gosson, Lett. Math. Phys. **72**, 293 (2005).
- [126] M.D. Oliveira, M.C.B. Fernandes, F.C. Khanna, A.E. Santana, J.D.M. Vianna, Ann. Phys. (N.Y.) **312**, 492 (2004).
- [127] R.G.G. Amorim, F.C. Khanna, A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, A.E. Santana, *Realization of the Noncommutative Seiberg-Witten Gauge Theory by Fields in Phase Space* arXiv:1402.1446 [hep-th].
- [128] R. G. G. Amorim, F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson and A. E. Santana, Int. J. Mod. Phys. A **30**, 1550135 (2015).
- [129] R. G. G. Amorim, F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson and A. E. Santana, Int. J. Mod. Phys. A **34**, 1950037 (2019).
- [130] R.G.G. Amorim, M.C.B. Fernandes, F.C. Khanna, A.E. Santana, J.D.M. Vianna, Phys. Lett. A **361**, 464 (2007).
- [131] R.G.G. Amorim, F.C. Khanna, A.E. Santana, J.D.M. Vianna, Physica A **388**, 3771 (2009).
- [132] R.G.G. Amorim, M.C.B. Fernandes, F.C. Khanna, A.E. Santana, J.D.M. Vianna, Int. J. Mod. Phys. A **28**, 1350013 (2013).
- [133] R.G.G. Amorim, S.C. Ulhoa, A.E. Santana, Braz. J. Phys. **43**, 78 (2013).
- [134] M.C.B. Fernandes, F.C. Khanna, M.G.R. Martins, A.E. Santana, J.D.M. Vianna, Physica A **389**, 3409 (2010).
- [135] H. Dessano, *Função de Wigner, quasi-amplitudes de probabilidades e sistemas dissipativos*, Dissertação de Mestrado, IF-UnB, Brasília, 2014.
- [136] A. Tartaglia, Phys. Lett. A **77** 1 (1980).
- [137] A. Kenfack, K. Zyczkowski, J. Opt. B: *Quantum Semiclass Opt.* **6**, 396 (2004).
- [138] H. Weyl, Quantenmechanik und Gruppentheorie, Zeitschrift für Physik **46**, 1 (1927).
- [139] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Second Edition, (Addison-Wesley, New York, 1980).
- [140] R. G. G. Amorim, *Formulação de Teorias Campos via estruturas simpléticas e o produto de Weyl*, Dissertação de Mestrado, IF-UnB, Brasília, 2006.
- [141] R.G.G. Amorim, *Geometria Não-Comutativa e Teoria de Campos Simplética*, Tese de Doutorado, IF-UnB, Brasília, 2009.
- [142] R. G. G. Amorim, M. C. Fernandes, A. R. Queiroz, A. E. Santana, J. D. M. Vianna, Rev. Bras. Ens. Fís. **35**, 3604 (2013).

- [143] J. S. Cruz Filho, R. G. G. Amorim, F. C. Khanna, A. E. Santana, J. D. M. Vianna, S. C. Ulhoa, *Int. J. Mod. Phys. A* **31**, 10 (2016).
- [144] R. A. S. Paiva, *Mecânica Quântica Simplética e Não-Classicalidade*, Tese de Doutorado, IF-UnB, Brasília, 2019.
- [145] E. C. G. Sudarshan e N. Mukunda, *Classical Dynamics: A modern Perspective*, (John Wiley, New York, 1974).
- [146] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, *Quantum Mechanics*, (Jonh Wiley, New York, 1977).
- [147] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, (Jonh Wiley, New York, 1961).
- [148] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, 3^aEd., (Jonh Wiley, New York, 1977).
- [149] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley, New York, 1994).
- [150] M. D. Oliveira, *Mecânica Quântica no Espaço de Fase*, Dissertação de Mestrado, UFBA, Salvador, 2002.
- [151] H. Dessano, R. A. S. Paiva, R. G. G. Amorim, S. C. Ulhôa, A. E. Santana, *Braz. J. Phys.* **49**, 715 (2019).
- [152] R. Cordero-Soto, E. Suazo, S. K. Suslov, *J. Phys. Math.* **1**, 1 (2009).
- [153] A. Isar, A. Sandulescu, W. Scheid, *Int. J. Mod. Phys. B* **10**, 2767 (1996).
- [154] N.R. Kestner, *J. Chem. Phys.* **45**, 213 (1995).
- [155] N.R. Kestner, O Sinanoglu, *Phys. Rev.* **128**, 2687 (1962).
- [156] R. Crandall, R. Whitnell, R. Betttega, *Am. J. Phys.* **52**, 438 (1984).
- [157] P. Havas, *Nuovo Cimento* **5**, 363 (1957).
- [158] R. W. Hasse, *J. Math. Phys.* **16**, 2005 (1975).
- [159] E. B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems* (Academic Press, New York, 1976).
- [160] K. H. Li, *Phys. Rep.* **134**, 1 (1986).
- [161] Y. N. Srivastava, G. Vitiello, *Ann. Phys. (N.Y.)* **238**, 2001 (1995).
- [162] A. Iorio, G. Vitiello, A. Widom, *Ann. Phys. (N.Y.)* **241**, 496 (1995).
- [163] M. Blasone, P. Jizba, G. Vitiello, *Phys. Lett. A* **287**, 205 (2001).
- [164] E. Kanai, *Prog. Theor. Phys.* **3**, 440 (1948).
- [165] M. Gauthier, et al, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 14 (2002).
- [166] H. F. Hofmann, K. Kojima, S. Takeuchi, K. Sasaki, *J. Op. B* **5**, 3 (2003).
- [167] H. T. C. Stoof, M. Houbiers, C. A. Sackett and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 10 (1996).

- [168] C. J. Myatt, E. A. Burt, R. W. Ghrist, E. A. Cornell and C. E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 586 (1997).
- [169] E. Hodby, S. T. Thompson, C. A. Regal, M. Greiner, A. C. Wilson, D. S. Jin, E. A. Cornell, C. E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 120402 (2005).
- [170] K. E. Strecker, G. B. Partridge and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 080406 (2003).
- [171] J. Cubizolles, T. Bourdel, S. J. J. M. F. Kokkelmans, G. V. Shlyapnikov, and C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 240401 (2003).
- [172] T. Bourdel, L. Khaykovich, J. Cubizolles, J. Zhang, F. Chevy, M. Teichmann, L. Tarruell, S. J. J. M. F. Kokkelmans, and C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 050401 (2004).
- [173] A. Shimony, *Measures of Entanglement*, in *The Dilemma of Einstein, Podolsky and Rosen 60 Years Later*, Edited by A. Mann and M. Revzen (IOP, Bristol, 1996).
- [174] G. Alber, T. Beth, M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, M. Rötteler, H. Weinfurter, R. Werner, and A. Zeilinger, *Quantum Information* (Springer-Verlag, Berlin, 2001).
- [175] D. Segal, D. Reichman, A. J. Millis, *Phys. Rev. Lett. B* **76**, 195316 (2007).
- [176] S. Diehl, E. Rico, M. A. Baranov, P. Zoller, *Nat. Phys.* **7**, 971 (2011).
- [177] W. B. Case, *Am. J. Phys.* **76**, 937-946 (2008).
- [178] E. Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932).
- [179] H. W. Lee, *Phys. Rep.* **259**, 147-211 (1995).
- [180] W. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*, (Wiley-VCH, Berlin, 2001).
- [181] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, 2nd Ed. (Prentice Hall, 2005).