



**PROJETO DE DESACOPLADORES PARA SISTEMAS INCERTOS  
VIA LMIS**

**CAIO GUSTAVO MESQUITA ÂNGELO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

**PROJETO DE DESACOPLADORES PARA SISTEMAS INCERTOS  
VIA LMIS**

**CAIO GUSTAVO MESQUITA ÂNGELO**

**ORIENTADOR: EDUARDO STOCKLER TOGNETTI**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA

PUBLICAÇÃO: PGEA.DM-724/2019

BRASÍLIA/DF: JULHO - 2019

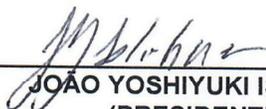
**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**PROJETO DE DESACOPLADORES PARA SISTEMAS INCERTOS  
VIA LMIS**

**CAIO GUSTAVO MESQUITA ÂNGELO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

APROVADA POR:



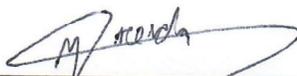
---

JOÃO YOSHIYUKI ISHIHARA, Dr., ENE/UNB  
(PRESIDENTE DA COMISSÃO)



---

RENATO ALVES BORGES, Dr., ENE/UNB  
(EXAMINADOR INTERNO)



---

MÁRCIO JÚNIOR LACERDA, Dr., UFSJ  
(EXAMINADOR EXTERNO)

Brasília, 05 de julho de 2019.

## FICHA CATALOGRÁFICA

ÂNGELO, CAIO GUSTAVO MESQUITA

Projeto de desacopladores para sistemas incertos via LMIs [Distrito Federal] 2019.

xvi+85 p., 210 x 297 mm (ENE/FT/UnB, Mestre, Engenharia Elétrica, 2019).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Elétrica

1. Dominância diagonal

2. LMI

3. Robustez

4. KYP generalizado

I. ENE/FT/UnB

II. Título (série)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ÂNGELO, C. G. M. (2019). Projeto de desacopladores para sistemas incertos via LMIs, Dissertação de Mestrado, Publicação PGEA.DM-724/2019, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, xvi+85.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Caio Gustavo Mesquita Ângelo

TÍTULO: Projeto de desacopladores para sistemas incertos via LMIs.

GRAU: Mestre ANO: 2019

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.



Caio Gustavo Mesquita Ângelo

Departamento de Eng. Elétrica (ENE) - FT

Universidade de Brasília (UnB)

Campus Darcy Ribeiro

CEP 70919-970 - Brasília - DF - Brasil

*Aos meus pais, Delmon e Rúbia.*

## AGRADECIMENTOS

*Antes de me dirigir às pessoas que mais contribuíram para minha jornada, agradeço a Deus por proporcionar tudo que me permeia. Toda a "sorte" que tive em minha vida não é mera coincidência, e devo isso a Ele.*

*Em especial, agradeço a meus pais, Rúbia e Delmon, por todas as formas de apoio empenhadas, do moral ao financeiro. O amor e a educação que me deram contribuíram fortemente para me tornar quem sou e, naturalmente, chegar até aqui. Além disso, foram os principais incentivadores de que eu cursasse Mestrado.*

*Em muitas ocasiões no decorrer do desenvolvimento deste trabalho, tive que sacrificar momentos com pessoas próximas, em especial minha esposa, Danusa, que inclusive colaborou com a elaboração deste documento. Agradeço a ela e aos demais a compreensão e o apoio.*

*Agradeço também ao meu orientador, Prof. Eduardo, pelo suporte, principalmente no tocante às LMIs, realizado com muita paciência, tomando muito de seu tempo no decorrer das idas e vindas deste trabalho de pesquisa.*

## RESUMO

**Título:** Projeto de desacopladores para sistemas incertos via LMIs

**Autor:** Caio Gustavo Mesquita Ângelo

**Orientador:** Eduardo Stockler Tognetti

Na teoria de controle de sistemas multivariáveis, um dos principais entraves é o acoplamento entre malhas, quando se deseja utilizar controladores monovariáveis. Para contornar esse problema, uma estratégia popular consiste no desacoplamento das malhas por meio de pré-compensador e/ou pós-compensador, permitindo a sintonização independente dos controladores. Este trabalho propõe projetos de pré-compensadores dinâmicos que consideram as incertezas do modelo da planta, de forma que o sistema compensado tenha dominância diagonal. Para tal, os métodos propostos se basearam na minimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , por meio de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*), da diferença entre o sistema compensado e um modelo de referência diagonal, dado ou como variável de projeto. Os resultados foram generalizados para tratar faixas finitas de frequência de interesse por meio do Lema de KYP generalizado. Para obter as LMIs, foi utilizada técnica de linearização recorrente na literatura, em que são fixadas estruturas para variáveis de folga. Essa técnica foi formalizada neste trabalho e estudada para compreender o conservadorismo introduzido. Para avaliar a efetividade dos métodos propostos e discutir sua parametrização, exemplos numéricos foram gerados em ambiente computacional. Os resultados mostraram que os métodos propostos têm capacidade de obter pré-compensadores e pós-compensadores que promovem desacoplamento significativo das malhas, a depender das características da planta e da parametrização, cuja escolha foi discutida neste trabalho.



## ABSTRACT

**Title:** Design of decouplers for uncertain systems by means of LMIs

**Author:** Caio Gustavo Mesquita Ângelo

**Supervisor:** Eduardo Stockler Tognetti

In multivariable control systems, one of the main obstacles is the coupling between control loops, when monovariable controllers are desired. To overcome this issue, a popular strategy is to decouple the loops by means of a precompensator and/or postcompensator, allowing the independent tuning of the controllers. This work propose design methods for dynamic precompensators that consider the uncertainties of the plant model, so that the compensated system is diagonally dominant. To accomplish this, the proposed methods were based on the minimization of the  $\mathcal{H}_\infty$  norm, by means of linear matrix inequalities (LMI), of the difference between the compensated system and a diagonal reference model, as decision variable or given system. The results were generalized to treat finite bands of frequencies of interest by means of the generalized KYP Lemma. In order to obtain LMIs, a recurrent technique in literature was used, in which structures of slack variables are predefined. This technique was formalized in this work and studied, so one could understand the conservatism introduced by this technique. To evaluate the effectiveness of the proposed methods and discuss their parametrization, numerical examples were generated in computational environment. The results showed that the proposed methods can obtain precompensators and postcompensators that promote significant decoupling of the plant, depending on the characteristics of the plant and the parametrization, which was discussed in this work.

## SUMÁRIO

---

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	1
1.2	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	2
1.3	APRESENTAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	4
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO</b>	<b>5</b>
2.1	TEORIA DE CONTROLE VIA LMIS	5
2.1.1	LMIS E TEOREMAS BÁSICOS	5
2.1.2	ESTABILIDADE DE SISTEMAS DINÂMICOS CONTÍNUOS NO TEMPO	6
2.1.3	LEMA DE KALMAN-YAKUBOVICH-POPOV (KYP)	7
2.1.3.1	NORMA $\mathcal{H}_\infty$ DE SISTEMAS DINÂMICOS CONTÍNUOS NO TEMPO	7
2.1.3.2	KYP GENERALIZADO	10
2.2	DOMINÂNCIA DIAGONAL	13
2.3	LINEARIZAÇÃO DE BMIS	15
<b>3</b>	<b>CONTRIBUIÇÕES</b>	<b>19</b>
3.1	LINEARIZAÇÃO DE BMIS	20
3.2	DESACOPLAMENTO DE SISTEMAS	22
3.2.1	REPERCUSSÃO DA ESCOLHA DE $\Lambda$	24
3.2.2	PROJETO DO DESACOPLADOR	29
3.2.2.1	MÉTODO 1	29
3.2.2.2	MÉTODO 2	33
3.2.2.3	MÉTODO 3	37
3.2.2.4	PARAMETRIZAÇÃO	48
3.3	INDICADOR DE ACOPLAMENTO PARA SISTEMAS POLITÓPICOS	50
<b>4</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS</b>	<b>53</b>
4.1	EXEMPLO 1: SISTEMA DE QUATRO TANQUES	53
4.1.1	MÉTODO 1	57
4.1.1.1	APLICADO A TODAS AS FREQUÊNCIAS	57
4.1.1.2	APLICADO A BAIXAS FREQUÊNCIAS	60
4.1.2	MÉTODO 2	62
4.1.2.1	AValiação DO PROCEDIMENTO ITERATIVO	65
4.1.2.2	AValiação DA ESCOLHA DE $\Lambda$	67
4.1.3	MÉTODO 3	72
4.1.4	RESPOSTA TEMPORAL	74
4.2	EXEMPLO 2: PROCESSO DE DESTILAÇÃO	76
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>82</b>
5.1	CONSIDERAÇÕES FINAIS	82
5.2	PERSPECTIVAS FUTURAS	83
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>84</b>

## Lista de Figuras

---

1.1	Topologia de controle.....	4
4.1	Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema $G(s, \alpha)$ do Exemplo 1.....	55
4.2	Valores singulares em função da frequência para $G_D(j\omega, \alpha)^{-1}G(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ , no Exemplo 1....	55
4.3	Diagrama de Bode do pré-compensador $K_r(s)$ , obtido por Siqueira et al. (2014), desenhado na mesma faixa de frequência das Figuras 4.1 e 4.2. ....	56
4.4	Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema $G(s, \alpha)K_r(s)$ , no Exemplo 1.....	56
4.5	Valores singulares em função da frequência para $H_D(j\omega, \alpha)^{-1}H(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ , em que $H(s, \alpha) = G(s, \alpha)K_r(s)$ , no Exemplo 1.....	57
4.6	Diagrama de Bode do pré-compensador $K(s)$ obtido pelo Método 1 no Exemplo 1, desenhado na mesma faixa de frequência das Figuras 4.1 e 4.2. ....	59
4.7	Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema $G(s, \alpha)K(s)$ , com $K(s)$ projetado pelo Método 1 no Exemplo 1. ....	59
4.8	Valores singulares em função da frequência para $H_D(j\omega, \alpha)^{-1}H(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ , em que $H(s, \alpha) = G(s, \alpha)K(s)$ , com $K(s)$ projetado pelo Método 1 no Exemplo 1. ....	60
4.9	Diagrama de Bode do pré-compensador $K(s)$ obtido pelo Método 1 considerando apenas baixas frequências no Exemplo 1, desenhado na mesma faixa de frequência das Figuras 4.1 e 4.2. ....	61
4.10	Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema $G(s, \alpha)K(s)$ , com $K(s)$ projetado pelo Método 1 considerando apenas baixas frequências no Exemplo 1. ....	61
4.11	Valores singulares em função da frequência para $H_D(j\omega, \alpha)^{-1}H(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ , em que $H(s, \alpha) = G(s, \alpha)K(s)$ , com $K(s)$ projetado pelo Método 1 considerando apenas baixas frequências no Exemplo 1. ....	62
4.12	Diagrama de Bode do pré-compensador $K(s)$ obtido pelo Método 2 no Exemplo 1, desenhado na mesma faixa de frequência das Figuras 4.1 e 4.2. ....	64
4.13	Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema $G(s, \alpha)K(s)$ , com $K(s)$ projetado pelo Método 2 no Exemplo 1. ....	64
4.14	Valores singulares em função da frequência para $H_D(j\omega, \alpha)^{-1}H(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ , em que $H(s, \alpha) = G(s, \alpha)K(s)$ , com $K(s)$ projetado pelo Método 2 no Exemplo 1. ....	65
4.15	Diagrama de Bode do pré-compensador $K(s)$ obtido pelo Método 2 com uma iteração no Exemplo 1, desenhado na mesma faixa de frequência das Figuras 4.1 e 4.2.....	66
4.16	Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema $G(s, \alpha)K(s)$ , com $K(s)$ projetado pelo Método 2 com uma iteração no Exemplo 1. ....	66
4.17	Valores singulares em função da frequência para $H_D(j\omega, \alpha)^{-1}H(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ , em que $H(s, \alpha) = G(s, \alpha)K(s)$ , com $K(s)$ projetado pelo Método 2 com uma iteração no Exemplo 1. ....	67
4.18	Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema $G(s, \alpha)\mathbf{K}_2$ no Exemplo 1. ....	68
4.19	Valores singulares em função da frequência para $H_D(j\omega, \alpha)^{-1}H(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ , em que $H(s, \alpha) = G(s, \alpha)\mathbf{K}_2$ no Exemplo 1. ....	69

4.20 Diagrama de Bode do pré-compensador $K_*(s)$ para o Exemplo 1, desenhado na mesma faixa de frequência das Figuras 4.1 e 4.2.....	70
4.21 Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema $G(s, \alpha)K_*(s)$ no Exemplo 1.....	70
4.22 Valores singulares em função da frequência para $H_D(j\omega, \alpha)^{-1}H(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ , em que $H(s, \alpha) = G(s, \alpha)K_*(s)$ , no Exemplo 1.....	71
4.23 Diagrama de Bode do pré-compensador $K(s)$ obtido pelo Método 3 no Exemplo 1, desenhado na mesma faixa de frequência das Figuras 4.1 e 4.2. ....	73
4.24 Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema $G(s, \alpha)K(s)$ , com $K(s)$ projetado pelo Método 3 no Exemplo 1. ....	73
4.25 Valores singulares em função da frequência para $H_D(j\omega, \alpha)^{-1}H(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ , em que $H(s, \alpha) = G(s, \alpha)K(s)$ , com $K(s)$ projetado pelo Método 3 no Exemplo 1. ....	74
4.26 Resposta transiente para os quatro vértices do politopo (linhas sólidas), as saídas do modelo de referência (curvas tracejadas) e os sinais de entrada de referência (curvas pontilhadas), utilizando o controlador PI e o desacoplador projetados por Siqueira et al. (2014). ....	75
4.27 Resposta transiente para os quatro vértices do politopo (linhas sólidas), as saídas do modelo de referência (curvas tracejadas) e os sinais de entrada de referência (curvas pontilhadas), utilizando o controlador PI projetado por Siqueira et al. (2014) com adaptação dos ganhos proporcionais e o pré-compensador (4.2).....	75
4.28 Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema $G(s, \alpha)$ no Exemplo 2.....	77
4.29 Valores singulares em função da frequência para $G_D(j\omega, \alpha)^{-1}G(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ no Exemplo 2. ...	78
4.30 Diagrama de Bode do pré-compensador $K_{pré}(s)$ obtido pelo Método 2, desenhado na mesma faixa de frequência das Figuras 4.28 e 4.29. ....	79
4.31 Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema $G(s, \alpha)K_{pré}(s)$ , com $K_{pré}(s)$ projetado pelo Método 2 no Exemplo 2. ....	79
4.32 Valores singulares em função da frequência para $H_D(j\omega, \alpha)^{-1}H(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ , em que $H(j\omega, \alpha) = G(s, \alpha)K_{pré}(s)$ , com $K_{pré}(s)$ projetado pelo Método 2 no Exemplo 2.....	80
4.33 Diagrama de Bode do pós-compensador $K_{pós}(s)$ obtido pelo Método 2 no Exemplo 2, desenhado na mesma faixa de frequência das Figuras 4.28 e 4.29. ....	80
4.34 Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema $K_{pós}(s)G(s, \alpha)$ , com $K_{pós}(s)$ projetado pelo Método 2 no Exemplo 2. ....	81
4.35 Valores singulares em função da frequência para $H_D(j\omega, \alpha)^{-1}H(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ , em que $H(j\omega, \alpha) = K_{pós}(s)G(s, \alpha)$ , com $K_{pós}(s)$ projetado pelo Método 2 no Exemplo 2.....	81

## Lista de Tabelas

---

2.1	Valores de $\Psi$ para diferentes intervalos de frequências desejados.....	12
2.2	Valores de $\Xi$ para diferentes intervalos de frequências desejados. ....	13
4.1	Parâmetros escolhidos para projetar o desacoplador pelo Método 1, no Exemplo 1. ....	58
4.2	Parâmetros escolhidos para projetar o desacoplador pelo Método 2, no Exemplo 1. ....	63
4.3	Parâmetros escolhidos para projetar o desacoplador pelo Método 3, no Exemplo 1. ....	72
4.4	Parâmetros escolhidos para projetar o desacoplador pelo Método 2, no Exemplo 2. ....	77

## Lista de Siglas e Acrônimos

---

BMI	<i>Bilinear Matrix Inequality</i> (desigualdade matricial bilinear)
BRL	<i>Bounded Real Lemma</i>
gKYP	Kalman-Yakubovich-Popov generalizado
KYP	Kalman-Yakubovich-Popov
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> (desigualdade matricial linear)
LPV	<i>Linear parameter-varying</i> (variante com dependência de parâmetros)
PI	Proporcional-Integral
RMS	<i>Root Mean Square</i> (raiz da média quadrática)
ROLMIP	<i>Robust LMI Parser</i>
SISO	<i>Single-input single-output</i> (sistema monovariável)

## Lista de Símbolos e Notação

---

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto das matrizes reais de $n$ linhas e $m$ colunas
$\mathbb{C}^{n \times m}$	Conjunto das matrizes complexas de $n$ linhas e $m$ colunas
$\mathbb{S}^n$	Conjunto das matrizes reais simétricas de ordem $n$
$\mathbb{H}^n$	Conjunto das matrizes complexas hermitianas de ordem $n$
$\mathcal{L}_2$	Espaço das funções contínuas quadraticamente integráveis
$\mathcal{P}$	Espaço das funções contínuas de potência finita
$\mathcal{P}$	Politopo
$\Lambda_N$	Simplex de $N$ vértices
$\mathbf{A}$	Matriz
$\mathbf{b}$	Vetor (matriz linha ou matriz coluna)
$c$	Escalar
$\mathbf{A}_{i,:}$	$i$ -ésima linha da matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}_{:,i}$	$i$ -ésima coluna da matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}_{i,j}$	Elemento da $i$ -ésima linha e $j$ -ésima coluna da matriz $\mathbf{A}$
$\mathcal{R}(\mathbf{A})$	Imagem ( <i>range</i> ) de $\mathbf{A}$
$\mathcal{N}(\mathbf{A})$	Espaço nulo de $\mathbf{A}$
$\text{rank}(\mathbf{A})$	Posto da matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^T$	Matriz transposta de $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^*$	Matriz conjugada transposta de $\mathbf{A}$
$\otimes$	Operador do produto de Kronecker
$\mathbf{I}$	Matriz identidade de dimensões apropriadas
$\mathbf{0}$	Matriz de zeros de dimensões apropriadas
$\text{He}(\mathbf{A})$	$\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$
$\rho(\cdot)$	Raio espectral
$\sigma_{\max}(\cdot)$	Maior valor singular de uma matriz
sup	Supremo
det	Determinante
$\text{diag}(\mathbf{A}_i)$	Matriz bloco-diagonal formada pelas matrizes $\mathbf{A}_i$
$G_D(s)$	Diagonal da matriz de transferência $G(s)$
$\mathbf{A} > \mathbf{0}$	$\mathbf{A}$ é uma matriz simétrica definida positiva
$\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{A}$ é uma matriz simétrica semi-definida positiva
$B \leftarrow A$	É atribuído à variável $B$ o valor da variável $A$
$j$	Número imaginário ( $j^2 = -1$ )
<i>s.a.</i>	Sujeito a

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Na indústria, a produção ocorre via processos caracterizados por diversas variáveis que devem ser controladas. O controle dessas variáveis que, originalmente era manual, passou a ser efetuado por controladores, conforme a complexidade dos processos aumentou e a tecnologia progrediu. Os avanços tecnológicos permitiram inclusive que ambientes e objetos do dia-a-dia, tais como veículos, fossem controlados. Esses sistemas, que possuem diversas variáveis a serem controladas, são chamados de sistemas multivariáveis.

Os controladores são responsáveis por controlar as variáveis de interesse (saídas do sistema), definindo as entradas do sistema para alcançar os objetivos traçados para as saídas controladas. Esses controladores podem ser puramente mecânicos, eletromecânicos ou até dotados de poder computacional (controladores digitais). Independentemente da realização do controlador (eletrônico, digital, mecânico, etc.), sua lei de atuação pode ser representada matematicamente, permitindo que a teoria de controle de sistemas se desenvolvesse de forma independente às aplicações.

A principal característica dos sistemas multivariáveis que dificulta o projeto do controle é o acoplamento entre várias entradas e saídas, ou seja, a dependência que uma saída tem de mais de uma entrada. O forte acoplamento impede que o controle seja feito com eficiência em malhas monovariáveis (controle descentralizado). Uma estratégia para contornar esse problema é projetar um pré-compensador que desacople as malhas, de forma que cada saída só dependa da entrada correspondente. Essa estratégia é popular, pois o desacoplamento entre malhas é desejável em diversas aplicações práticas, em especial na indústria química e de processos, pois permite que os técnicos ajustem o controle de várias variáveis de forma independente (Wang, 2003).

Uma das formas de reduzir as interações entre malhas de uma planta é a obtenção de dominância diagonal (Rosenbrock, 1974) por meio de um pré-compensador. Isso permite que o projeto de controle seja feito por técnicas clássicas monovariáveis, ainda que a matriz de transferência do sistema compensado não seja totalmente diagonal. Nesse contexto, foram explorados outros critérios de dominância diagonal menos conservadores que o utilizado por Rosenbrock (1974) e que podiam ser utilizados no método para garantir estabilidade assintótica de um sistema em malha fechada com controlador diagonal (descentralizado), tais como a dominância diagonal generalizada (Limebeer, 1982) e a dominância fundamental (Yeung and F. Bryant, 1992).

O controle de desacoplamento tem sido estudado pelo menos desde a década de 1930 (Wang, 2003), tanto com uso de funções de transferência, quanto no espaço de estados. Matrizes de transferências não quadradas já foram consideradas, assim como atrasos no tempo. O projeto de desacopladores já está bem desenvolvido para modelos nominais dos sistemas. Contudo, ainda não há muitos estudos que consideram incertezas no projeto dos pré-compensadores, em especial utilizando sistemas incertos modelados por politopos.

A maioria dos trabalhos que consideram incertezas não o fazem diretamente no projeto do pré-compensador. Chughtai et al. (2005) propuseram um projeto de desacoplador com base no sistema nominal para, em seguida, projetar o controlador descentralizado robusto, que leva em consideração incertezas não estruturadas. Outros trabalhos consideram incertezas estruturadas no projeto do desacoplador, por etapas e de forma iterativa, normalmente não garantindo a robustez em uma primeira etapa e depois analisando se o resultado obtido é robusto (Siqueira et al., 2014; Chang and Chang, 2001; Gonçalves et al., 2012). Em uma estratégia (Jetto et al.,

2017), é projetado um pré-compensador estático para ser usado em malha fechada, considerando incertezas não estruturadas.

Uma das ferramentas utilizadas no controle de sistemas politópicos são as desigualdades matriciais lineares (LMIs, acrônimo para *Linear Matrix Inequalities*), que têm se popularizado com o aumento do poder computacional. Nos trabalhos de Chughtai and Munro (2004) e Chughtai et al. (2005), o projeto de controladores estáticos e dinâmicos, respectivamente, foi elaborado como problema de minimização de norma  $\mathcal{H}_\infty$  com uso de LMIs, sem contudo utilizar a ferramenta para considerar incertezas estruturadas. Nesses trabalhos, é minimizada a norma em relação a um modelo de referência diagonal estático (identidade) como termo dominante, o que insere conservadorismo, uma vez que os sistemas são dinâmicos.

Dentre as opções de pré-compensadores estáticos ou dinâmicos, a estabilidade do controle em malha fechada ao usar pré-compensadores estáticos pode se mostrar menos suscetível a erros de modelagem da planta, mas o desempenho do desacoplamento é pobre em frequência, limitando sua eficiência (Vhora and Patel, 2017). Assim, pré-compensadores dinâmicos têm recebido maior atenção na literatura. Para diminuir o conservadorismo no desempenho para faixas de frequências de interesse, métodos com uso de pesos em função da frequência foram explorados na literatura (Wang, 2003). Baseado em LMIs, o Lema de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) generalizado (Iwasaki and Hara, 2005) tem sido usado em diferentes contextos (Du and Yang, 2010; Lee, 2013; Zheng et al., 2017).

Dessa forma, carece na literatura mais estudos sobre projeto de desacopladores que considere incertezas estruturadas da planta, em especial politópicas, com uso de LMIs. Este trabalho busca, então, propor condições LMIs para o projeto de pré-compensadores dinâmicos robustos por meio da minimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema compensado com uma dinâmica diagonal de referência. As incertezas do sistema são consideradas na forma politópica.

## 1.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Seja  $G(s, \alpha)$  um sistema linear e invariante no tempo com incerteza e mesmo número de entradas e saídas (sistema quadrado) dado pela seguinte representação no espaço de estados:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}}(t) &= \mathbf{A}_{\mathbf{g}}(\alpha)\mathbf{x}_{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{B}_{\mathbf{g}}(\alpha)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_{\mathbf{g}}(\alpha)\mathbf{x}_{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{D}_{\mathbf{g}}(\alpha)\mathbf{u}(t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

em que  $\mathbf{x}_{\mathbf{g}}(t) \in \mathbb{R}^{n_g}$  é o vetor de variáveis de estado,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entradas (sinais de controle),  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de saídas (sinais controlados) e  $\mathbf{A}_{\mathbf{g}}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_g \times n_g}$ ,  $\mathbf{B}_{\mathbf{g}}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_g \times m}$ ,  $\mathbf{C}_{\mathbf{g}}(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n_g}$ ,  $\mathbf{D}_{\mathbf{g}}(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  são matrizes com representação politópica, ou seja, pertencem a um domínio politópico. Um politopo  $\mathcal{P}$  pode ser definido da seguinte maneira:

$$\mathcal{P} = \left\{ M(\alpha) : M(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i M_i, \alpha \in \Lambda_N \right\}\tag{1.2}$$

$$\Lambda_N = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1 \dots N \right\}$$

Nesse caso,  $\Lambda_N$  é um simplex unitário. Como o sistema é incerto e invariante no tempo,  $\alpha$  é constante e desconhecido. Para simplificar a notação, doravante nesta dissertação o parâmetro  $\alpha$  poderá ser omitido fora das definições.

A representação no espaço de estados de um sistema pode ser dada por

$$G(s, \alpha) := \{\mathbf{A}_g(\alpha), \mathbf{B}_g(\alpha), \mathbf{C}_g(\alpha), \mathbf{D}_g(\alpha)\}$$

$$G(s, \alpha) := \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_g(\alpha) & \mathbf{B}_g(\alpha) \\ \hline \mathbf{C}_g(\alpha) & \mathbf{D}_g(\alpha) \end{array} \right]$$

No domínio da frequência, o sistema  $G(s, \alpha)$  pode ser representado como uma matriz de transferência quadrada:

$$\begin{bmatrix} g_{1,1}(s, \alpha) & \cdots & g_{1,m}(s, \alpha) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m,1}(s, \alpha) & \cdots & g_{m,m}(s, \alpha) \end{bmatrix}, g_{i,j} = \mathbf{C}_{g i,:}(\alpha)(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_g(\alpha))^{-1}\mathbf{B}_{g :,j}(\alpha) + \mathbf{D}_{g i,j}(\alpha)$$

Em uma estratégia de controle com malhas monovariáveis (SISO), o acoplamento entre entradas e saídas não correspondentes, representado pelas funções de transferência  $g_{i,j}$  com  $i \neq j$ , deve ser minimizado. Dessa forma, em sistemas com forte acoplamento entre malhas, é interessante a aplicação de um pré-compensador estático ou dinâmico  $K(s)$  de forma que a matriz de transferência do sistema compensado  $H(s, \alpha)$  seja o mais diagonal possível. A topologia de controle mais simples para inserir o pré-compensador e a mais explorada para o fim de desacoplamento é a de malha aberta, em que  $H(s, \alpha) = G(s, \alpha)K(s)$ , conforme Figura 1.1.

Quando dinâmico, o pré-compensador terá a seguinte representação no espaço de estados:

$$K(s) := \{\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k, \mathbf{D}_k\}$$

No contexto da topologia de controle (Figura 1.1), o sistema do pré-compensador assume as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_k(t) &= \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k(t) + \mathbf{B}_k \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k(t) + \mathbf{D}_k \mathbf{v}(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

em que  $\mathbf{x}_k(t) \in \mathbb{R}^{n_k}$  é o vetor de estados do pré-compensador,  $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entradas (sinais de controle do controlador em malha fechada) e  $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ ,  $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{n_k \times m}$ ,  $\mathbf{C}_k \in \mathbb{R}^{m \times n_k}$ ,  $\mathbf{D}_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$  são matrizes de estado constantes (não dependentes do parâmetro de incerteza).

Este trabalho busca propor soluções para o seguinte problema:

**PROBLEMA** Dados o sistema linear invariante no tempo com incerteza politópica quadrado  $G(s, \alpha)$ , representado por (1.1), e uma faixa de frequências de interesse  $\Omega$ , determinar o pré-compensador  $K(s)$ , dado em (1.3), tal que o sistema  $G(s, \alpha)K(s)$  seja o mais diagonal possível em  $\Omega$ .

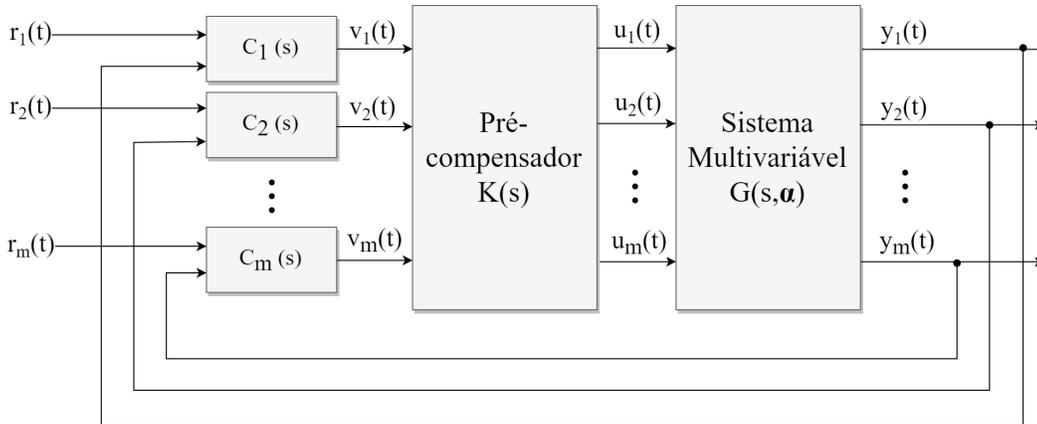


Figura 1.1: Topologia de controle.

*Observação 1.1.* O foco deste trabalho é o projeto de pré-compensadores, com o objetivo de tornar o sistema compensado  $G(s, \alpha)K(s)$  o mais desacoplado possível. Contudo, para a classe de sistemas estudado, podemos projetar um pré-compensador  $K_*(s)$  para o sistema  $G(s, \alpha)^T$ . O resultado é um pós-compensador  $K_{pós}(s) = K_*(s)^T$  tal que  $K_{pós}(s)G(s, \alpha)$  fica desacoplado.

### 1.3 APRESENTAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Além desta Introdução, os Capítulos 2 a 5 compõem esta dissertação, conforme o disposto a seguir.

No Capítulo 2, serão apresentados os conceitos e os resultados da literatura que serviram de base e inspiração para este trabalho: resultados da teoria de controle com uso de LMIs; conceitos de dominância diagonal, necessários para guiar o projeto de desacopladores, e o uso de um desses conceitos para projeto de desacopladores na literatura; e apresentação de alguns métodos de linearização de desigualdades matriciais utilizados na literatura, com foco na estratégia de restrição da estrutura de variáveis de folga, utilizada neste trabalho.

No Capítulo 3, serão desenvolvidas as contribuições deste trabalho. Primeiramente, será formalizada e generalizada a estratégia de linearização restringindo a estrutura de variáveis de folga. Em seguida, essa estratégia será aplicada à formulação em LMIs do problema de desacoplamento, cujo conservadorismo introduzido será estudado para mostrar uma repercussão da escolha da estrutura para variável de folga. Na sequência, serão propostos alguns métodos de projeto de desacopladores para sistemas incertos, com uso dessa técnica de linearização e do lema de KYP generalizado, que permite restringir as desigualdades para faixas de frequências de interesse. Por fim, será proposto um indicador de acoplamento para sistemas politópicos, baseado na discussão do uso de dominância fundamental para projetar desacopladores por meio de LMIs.

No Capítulo 4, os métodos serão aplicados em exemplos numéricos da literatura, com intuito de compará-los e discutir as diferentes possibilidades de escolha de parâmetros.

Por fim, no Capítulo 5 serão realizadas conclusões acerca dos resultados obtidos e indicadas possibilidades de pesquisas para avançar no tema.

# 2

## FUNDAMENTAÇÃO

Neste capítulo, serão detalhados os fundamentos teóricos que serviram como base e inspiração para propor os métodos descritos no Capítulo 3.

### 2.1 TEORIA DE CONTROLE VIA LMIS

As desigualdades matriciais lineares são ferramentas importantes na teoria de controle, em especial para sistemas lineares incertos ou com dependência paramétrica. Aqui serão apresentados alguns teoremas e lemas utilizados neste trabalho e nos resultados da literatura que lhe serviram de referência.

#### 2.1.1 LMIs e Teoremas Básicos

**Lema 2.1.** (Complemento de Schur - Boyd et al., 1994) Sejam  $A \in \mathbb{S}^n$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $C \in \mathbb{S}^m$ . As seguintes proposições são equivalentes.

- i)  $\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} < 0$ .
- ii)  $A - BC^{-1}B^T < 0$ ,  $C < 0$ .
- iii)  $C - B^T A^{-1}B < 0$ ,  $A < 0$ .

**Lema 2.2.** (Lema da Projeção para sistemas dependentes de parâmetros - Bachelier and Mehdi, 2015) Sejam  $R \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $M : R \mapsto \mathbb{S}^n$ ,  $\Gamma : R \mapsto \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $\Delta : R \mapsto \mathbb{R}^{p \times n}$ , tais que  $M$ ,  $\Gamma$  e  $\Delta$  são continuamente dependentes de  $r \in R$ . Então as seguintes proposições são equivalentes:

i)

$$\begin{cases} N_{\Gamma}(r)^T M(r) N_{\Gamma}(r) < 0 \\ N_{\Delta}(r)^T M(r) N_{\Delta}(r) < 0 \end{cases}, \quad \forall r \in R$$

ii)

$$\exists X(r) \in \mathbb{R}^{p \times m} : M(r) + \Delta(r)^T X(r) \Gamma(r) + \Gamma(r)^T X(r) \Delta(r) < 0, \quad \forall r \in R \quad (2.1)$$

em que  $\mathcal{R}(N_{\Gamma}) = \mathcal{N}(\Gamma)$  e  $\mathcal{R}(N_{\Delta}) = \mathcal{N}(\Delta)$ .

Outro conhecido e muito utilizado lema na literatura é produto de um caso especial do Lema da Projeção (definindo  $\Delta = I$ ) e de resultado de Finsler. Esse lema é conhecido por Lema de Finsler, e sua versão com dependência de parâmetros é estabelecida a seguir.

**Lema 2.3.** (Lema de Finsler para sistemas dependentes de parâmetros - Ishihara et al., 2017) Sejam  $R \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $M : R \mapsto \mathbb{S}^n$  e  $\Gamma : R \mapsto \mathbb{R}^{m \times n}$ . Então as seguintes proposições são equivalentes:

- i)  $(\forall \mathbf{r} \in R) : x^T M(\mathbf{r}) x < 0, \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^n : x \neq 0, \Gamma(\mathbf{r}) x = 0\}$ .
- ii)  $(\forall \mathbf{r} \in R) (\exists \mu(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}) : M(\mathbf{r}) - \mu(\mathbf{r}) \Gamma(\mathbf{r})^T \Gamma(\mathbf{r}) < \mathbf{0}$ .
- iii)  $(\forall \mathbf{r} \in R) (\exists X(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^{n \times m}) : M(\mathbf{r}) + X(\mathbf{r}) \Gamma(\mathbf{r}) + \Gamma(\mathbf{r})^T X(\mathbf{r})^T < \mathbf{0}$ .
- iv)  $(\forall \mathbf{r} \in R) : N_\Gamma(\mathbf{r})^T M(\mathbf{r}) N_\Gamma(\mathbf{r}) < \mathbf{0}$ , em que  $\mathcal{R}(N_\Gamma(\mathbf{r})) = \mathcal{N}(\Gamma(\mathbf{r}))$ .

## 2.1.2 Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Contínuos no Tempo

Seja o sistema linear e invariante no tempo  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}(t)$ , em que  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}$  é um politopo como definido na Eq. (1.2). A teoria de estabilidade de Lyapunov pode ser utilizada para análise de estabilidade assintótica desse sistema ao definir a função quadrática  $\mathbf{x}^T \mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}$  em que  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) > \mathbf{0}$  como uma função de Lyapunov, resultando no Lema (2.4).

**Lema 2.4** (Estabilidade assintótica). *O sistema  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}(t)$  é assintoticamente estável se, e somente se, existir  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})^T > \mathbf{0}$  tal que*

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})^T < \mathbf{0}, \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N \quad (2.2)$$

A condição necessária e suficiente acima, contudo, é de dimensão infinita, devendo ser testada para todo  $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N$ . Condições suficientes podem ser obtidas por meio de um conjunto finito de LMIs, restringindo as funções da variáveis secundárias (no caso,  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})$ ) em relação a  $\boldsymbol{\alpha}$ . A forma mais simples é impondo  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{P}$  (constante). Uma forma menos conservadora é restringir  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})$  ao politopo  $\mathcal{P}$  com vértices  $\mathbf{P}_i, i = 1, \dots, N$ , resultando no Lema 2.5.

**Lema 2.5** (Condições para matriz de Lyapunov com dependência afim de parâmetros - Oliveira and Peres, 2005). *Se existirem matrizes  $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^T > \mathbf{0}, i = 1, \dots, N$ , tais que*

$$\mathbf{A}_i \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i^T < \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\mathbf{A}_i \mathbf{P}_j + \mathbf{P}_j \mathbf{A}_i^T + \mathbf{A}_j \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{A}_j^T < \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = i+1, \dots, N$$

*então  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})^T > \mathbf{0}$ , em que  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{P}_i, \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N$ , é uma função de Lyapunov dependente de parâmetros que certifica a estabilidade do sistema  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}(t)$  para todo  $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N$ .*

A desigualdade (2.2) pode ser reescrita com variável de folga, utilizando o Lema de Finsler (Lema 2.3), definindo  $\boldsymbol{\alpha} \in R = \Lambda_N \subseteq \mathbb{R}^N$  e

$$M(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P(\alpha) \\ P(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad N_\Gamma(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\alpha)^T \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(\alpha) = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A}(\alpha)^T \end{bmatrix}$$

resultando no seguinte Lema:

**Lema 2.6.** *Seja a matriz de estados representada na forma politópica  $\mathbf{A}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\alpha \in \Lambda_N$ .  $\mathbf{A}(\alpha)$  é Hurwitz estável se, e somente se, existirem matrizes  $\mathbf{X}_s(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  e  $\mathbf{P}_s(\alpha) \in \mathbb{S}^n$  tais que, para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ ,*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}_s(\alpha) \\ \mathbf{P}_s(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} -\mathbf{I} \\ \mathbf{A}(\alpha) \end{bmatrix} \mathbf{X}_s(\alpha)^T \right) < \mathbf{0}$$

$$\mathbf{P}_s(\alpha) > \mathbf{0}$$

### 2.1.3 Lema de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP)

Trata-se de um dos resultados mais importantes da teoria de controle, com aplicações em estabilidade, hiperestabilidade, dissipatividade, passividade, controle ótimo, controle adaptativo, controle estocástico e filtragem (Brogliato et al., 2007). Dentre os diferentes enunciados deste lema, destaca-se a seguinte versão com LMIs.

**Lema 2.7** (Lema de Kalman-Yakubovich-Popov - Rantzer, 1996). *A desigualdade*

$$\begin{bmatrix} (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}$$

*é garantida para todo  $\omega \in \mathbb{R}$  se, e somente se, existir  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$  tal que*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \Theta \leq \mathbf{0}$$

Escolhas apropriadas de  $\Theta$  permitem lidar com propriedades conhecidas, como a condição do sistema ser real positivo (também conhecido como passivo) e a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas, a qual é abordada na próxima Subseção.

#### 2.1.3.1 Norma $\mathcal{H}_\infty$ de Sistemas Dinâmicos Contínuos no Tempo

**DEFINIÇÃO 2.1** (Norma  $\mathcal{H}_\infty$  - Poznyak, 2008) Seja a função  $H : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^{m \times n}$  analítica no semi-plano complexo direito, ou seja, em  $\mathbb{C}_{Re>0} = \{s \in \mathbb{C} : s = \alpha + j\omega, \alpha, \omega \in \mathbb{R}, \alpha > 0\}$ , tal que  $\sigma_{max}(H(s)) < \infty, \forall s \in \mathbb{C}_{Re>0}$ . A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $H(s)$  é definida como o supremo do máximo valor singular:

$$\|H\|_\infty \triangleq \sup_{Re(s)>0} \sigma_{max}(H(s)) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{max}(H(j\omega))$$

Sistemas lineares estáveis são modelados por funções de transferência racionais sem polos no semi-plano complexo direito, possuindo, portanto, norma  $\mathcal{H}_\infty$ .

A definição acima, quando aplicada a sinais no tempo  $w(t)$ , é equivalente a

$$\|H\|_\infty = \sup_{\|w\|_2 \neq 0} \frac{\|Hw\|_2}{\|w\|_2}, \quad w(t) \in \mathcal{L}_2$$

$$\|H\|_\infty = \sup_{\|w\|_{RMS} \neq 0} \frac{\|Hw\|_{RMS}}{\|w\|_{RMS}}, \quad w(t) \in \mathcal{P}$$

em que  $\mathcal{L}_2$  é o espaço dos sinais de energia finita e  $\mathcal{P}$  é o espaço dos sinais de potência finita.

Se aplicarmos o Lema 2.7 para um sistema  $\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{C}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$  com  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  reais, definindo

$$\Theta = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

teremos

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{H}(j\omega) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}(j\omega) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{H}(j\omega)^* \mathbf{H}(j\omega) - \gamma^2 \mathbf{I} \leq \mathbf{0}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} \mathbf{PA} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} & \mathbf{PB} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{C}^T \mathbf{D} \\ \mathbf{D}^T \mathbf{C} & \mathbf{D}^T \mathbf{D} - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} \mathbf{PA} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{PB} + \mathbf{C}^T \mathbf{D} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{D}^T \mathbf{C} & \mathbf{D}^T \mathbf{D} - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Repare que  $\mathbf{H}(j\omega)^* \mathbf{H}(j\omega) - \gamma^2 \mathbf{I} \leq \mathbf{0}$  é equivalente a  $\sigma(\mathbf{H}(j\omega)) \leq \gamma$ . Dessa forma, a desigualdade (2.4) é condição suficiente e necessária para  $\|\mathbf{H}(j\omega)\|_\infty \leq \gamma$ . Esse resultado é conhecido na literatura como *Bounded Real Lemma* (BRL).

Resultado dual é obtido ao considerar a desigualdade  $\mathbf{H}(j\omega)\mathbf{H}(j\omega)^* - \gamma^2 \mathbf{I} \leq \mathbf{0}$  que é equivalente a  $\mathbf{H}(j\omega)^* \mathbf{H}(j\omega) - \gamma^2 \mathbf{I} \leq \mathbf{0}$ , uma vez que se trata de matrizes de transferência quadradas. Ainda que fossem

retangulares, os valores singulares adicionais seriam iguais a zero. Assim, o problema pode ser resolvido para  $\tilde{H}(j\omega) = H(j\omega)^* = B^T(-j\omega I - A^T)^{-1}C^T + D^T$  com  $P = P^T$ .

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \tilde{H}(-j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}(-j\omega) \\ I \end{bmatrix} = H(-j\omega)H(-j\omega)^* - \gamma^2 I \leq 0, \forall \omega \in \mathbb{R} \\
& \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^T & D^T \\ 0 & I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T & D^T \\ 0 & I \end{bmatrix} \leq 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A & I \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & I \\ C & 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} B & 0 \\ D & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \\ D & I \end{bmatrix}^* \leq 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{bmatrix} AP + PA^T + BB^T & PC^T + BD^T \\ CP + DB^T & DD^T - \gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \tag{2.5}
\end{aligned}$$

O resultado acima, associado à estabilidade de  $A$ , pode ser enunciado como o seguinte Lema:

**Lema 2.8.** *Seja o sistema  $H(s) = \{A, B, C, D\}$  com  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $D \in \mathbb{R}^{p \times r}$ .  $A$  é Hurwitz estável e a desigualdade  $\|H(j\omega)\|_\infty < \gamma$  é válida para todo  $\omega \in \mathbb{R}$  se, e somente se, existir  $P \in \mathbb{S}^n$  tal que*

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} A & I \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & I \\ C & 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} B & 0 \\ D & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \\ D & I \end{bmatrix}^* < 0 \tag{2.6} \\
& P > 0
\end{aligned}$$

Na desigualdade (2.6), os produtos  $AP$  e  $CP$  podem ser evitados após algumas manipulações matemáticas. Considere a desigualdade abaixo:

$$\begin{bmatrix} A & I \\ C & 0 \end{bmatrix} \Xi \begin{bmatrix} A & I \\ C & 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} B & 0 \\ D & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \\ D & I \end{bmatrix}^* < 0 \tag{2.7}$$

em que  $\Xi$ , no caso da desigualdade (2.6), é dado por  $\begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix}$ . Para  $B$  e  $D$  reais, a desigualdade (2.7) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} A & I \\ C & 0 \end{bmatrix} \Xi \begin{bmatrix} A & I \\ C & 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} (-I) \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}^T < 0 \tag{2.8}$$

Utilizando complemento de Schur (Lema 2.1), a desigualdade acima é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} A & I \\ C & 0 \end{bmatrix} \Xi \begin{bmatrix} A & I \\ C & 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \right) & \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B^T & D^T \end{bmatrix} & -I \end{bmatrix} < 0$$

Utilizando o Lema de Finsler (Lema 2.3) e definindo

$$\Gamma^T = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad N_\Gamma^T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \Xi & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{D} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}^T \end{bmatrix} & \mathbf{D}^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

temos que

$$N_\Gamma^T M N_\Gamma = \begin{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Xi \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \right) & \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{D} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & \mathbf{D}^T \end{bmatrix} & \end{bmatrix} < \mathbf{0} \\ \iff \exists \mathbf{X} : M + \mathbf{X} \Gamma + \Gamma^T \mathbf{X}^T < \mathbf{0} \quad (2.10)$$

resultando no seguinte Lema:

**Lema 2.9.** *Seja o sistema politópico  $H(s, \alpha) = \{\mathbf{A}(\alpha), \mathbf{B}(\alpha), \mathbf{C}(\alpha), \mathbf{D}(\alpha)\}$  com  $\mathbf{A}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ ,  $\mathbf{C}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$  e  $\mathbf{D}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ .  $\mathbf{A}(\alpha)$  é Hurwitz estável e a desigualdade  $\|H(j\omega, \alpha)\|_\infty < \gamma$  é válida para todo  $\alpha \in \Lambda_N$  se, e somente se, existirem  $\mathbf{X}(\alpha) \in \mathbb{R}^{(2n+n_y+n_u) \times n}$  e  $\mathbf{P}(\alpha) \in \mathbb{S}^n$  tais que*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}(\alpha) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{D}(\alpha) \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}(\alpha)^T & \mathbf{D}(\alpha)^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} -\mathbf{I} \\ \mathbf{A}(\alpha) \\ \mathbf{C}(\alpha) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{X}(\alpha)^T \right) < \mathbf{0} \\ \mathbf{P}(\alpha) > \mathbf{0}$$

### 2.1.3.2 KYP generalizado

Na última década, um importante resultado foi publicado, estendendo o lema de KYP para lidar com faixas de frequência e com diferentes tipos de sistemas. O principal teorema é apresentado a seguir.

**Lema 2.10** (KYP generalizado - Iwasaki and Hara, 2005). *Sejam dadas as matrizes  $\Theta \in \mathbb{H}^{n+m}$ ,  $F \in \mathbb{C}^{2n \times (n+m)}$  e  $\Phi, \Psi \in \mathbb{H}^2$  e definidas  $\Lambda, \bar{\Lambda}$  e  $\Gamma_\lambda$ :*

$$\Lambda(\Phi, \Psi) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Phi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Psi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \right\}$$

$$\bar{\Lambda} := \begin{cases} \Lambda & \text{se } \Lambda \text{ é limitado} \\ \Lambda \cup \{\infty\} & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\Gamma_\lambda := \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & -\lambda \mathbf{I}_n \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_n \end{bmatrix} & \lambda \in \mathbb{C} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I}_n \end{bmatrix} & \lambda = \infty \end{cases}$$

Suponha que  $\Lambda$  represente curvas no plano complexo. Denote por  $N_\lambda$  uma base do espaço nulo de  $\Gamma_\lambda F$ . As seguintes proposições são equivalentes:

- i)  $N_\lambda^* \Theta N_\lambda < 0 \quad \forall \lambda \in \bar{\Lambda}(\Phi, \Psi)$ .
- ii) Existem  $P, Q \in \mathbb{H}^n$  tais que  $Q > 0$  e

$$F^*(\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q)F + \Theta < 0$$

Ainda, se  $\text{rank}(\Gamma_\lambda F) = n, \forall \lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , então as versões com desigualdades não estritas das proposições acima também são equivalentes.

Escolhendo

$$F := \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

temos que

$$N_\lambda = \begin{bmatrix} (\lambda I - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix}$$

resultando na mesma estrutura de sistema do lema de KYP. As matrizes  $\Phi$  e  $\Psi$  definem o conjunto válido de frequências complexas  $\lambda$  em que é válida a equivalência entre as proposições. Para o caso do lema de KYP, em que era válido para  $\lambda = j\omega, \omega \in \mathbb{R}$ , as matrizes

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

definem esse conjunto:

$$\Lambda(\Phi, \Psi) := \{\lambda \in \mathbb{C} : 2 \times \text{Re}(\lambda) = 0\} = \{j\omega : \omega \in \mathbb{R}\}$$

Assim, a utilização dessa matriz  $\Phi$  limita as frequências ao eixo imaginário. A definição de intervalos  $\Omega$  de  $\omega$  pode ser feita com escolhas apropriadas de  $\Psi$ , conforme a Tabela 2.1.

Para o caso de garantir a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , de especial interesse neste trabalho, podemos generalizar o resultado da LMI (2.5) para o caso de intervalos de frequências  $\Omega$  substituindo a matriz  $\begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix}$  pela expressão derivada do KYP generalizado:

Tabela 2.1: Valores de  $\Psi$  para diferentes intervalos de frequências desejados.

	Todas Frequências	Baixas Frequências	Faixa de frequências	Altas frequências
$\Omega$	$\mathbb{R}$	$ \omega  \leq \omega_l$	$\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$	$ \omega  \geq \omega_h$
$\Psi$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \omega_l^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & j\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2} \\ -j\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2} & -\omega_1\omega_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\omega_h^2 \end{bmatrix}$

$$\Xi = \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P \\ P & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \Psi \otimes Q$$

em que  $\Psi$  é dado pela Tabela 2.1. Assim, a versão do resultado em LMI da norma  $\mathcal{H}_\infty$  para o caso de intervalos de frequência é dada pelo seguinte Lema:

**Lema 2.11.** *Seja o sistema  $H(s, \alpha) = \{\mathbf{A}(\alpha), \mathbf{B}(\alpha), \mathbf{C}(\alpha), \mathbf{D}(\alpha)\}$  com  $\mathbf{A}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ ,  $\mathbf{C}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$  e  $\mathbf{D}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ . A desigualdade  $\sigma_{max}(H(j\omega, \alpha)) < \gamma$  é válida para todo  $\omega \in \Omega$  e todo  $\alpha \in \Lambda_N$  se, e somente se, existirem  $\mathbf{P}(\alpha), \mathbf{Q}(\alpha) \in \mathbb{S}^n$  tais que*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\alpha) & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Xi \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\alpha) & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}(\alpha) & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}(\alpha) & \mathbf{I} \end{bmatrix}^* < \mathbf{0} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{Q}(\alpha) > \mathbf{0}$$

em que  $\Xi$  é escolhido conforme Tabela 2.2.

A desigualdade (2.11) pode ser reescrita de forma a evitar os produtos  $\mathbf{AP}$ ,  $\mathbf{CP}$ ,  $\mathbf{AQ}$  e  $\mathbf{CQ}$  com a equivalência mostrada na Subseção 2.1.3.1, o que resulta no seguinte Lema:

**Lema 2.12.** *Seja o sistema politópico  $H(s, \alpha) = \{\mathbf{A}(\alpha), \mathbf{B}(\alpha), \mathbf{C}(\alpha), \mathbf{D}(\alpha)\}$  com  $\mathbf{A}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ ,  $\mathbf{C}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$  e  $\mathbf{D}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ . A desigualdade  $\sigma_{max}(H(j\omega, \alpha)) < \gamma$  é válida para todo  $\omega \in \Omega$  e todo  $\alpha \in \Lambda_N$  se, e somente se, existirem  $\mathbf{X}(\alpha) \in \mathbb{R}^{(2n+n_y+n_u) \times n}$  e  $\mathbf{P}(\alpha), \mathbf{Q}(\alpha) \in \mathbb{S}^n$  tais que*

$$\begin{bmatrix} \Xi & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}(\alpha) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{D}(\alpha) \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}(\alpha)^T \end{bmatrix} & \mathbf{D}(\alpha)^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} -\mathbf{I} \\ \mathbf{A}(\alpha) \\ \mathbf{C}(\alpha) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{X}(\alpha)^T \right) < \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Q}(\alpha) > \mathbf{0}$$

em que  $\Xi$  é escolhido conforme Tabela 2.2.

*Observação 2.1.* Ao contrário do Lema 2.9, os Lemas 2.11 e 2.12 não garantem estabilidade de  $H(s, \alpha)$ . O Lema 2.9 garante a estabilidade pois, ao utilizarmos o Lema 2.12 para  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\Xi$  é escolhido como

Tabela 2.2: Valores de  $\Xi$  para diferentes intervalos de frequências desejados.

	Todas Frequências	Baixas Frequências	Faixa de frequências	Altas frequências
$\Omega$	$\mathbb{R}$	$ \omega  \leq \omega_l$	$\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$	$ \omega  \geq \omega_h$
$\Xi$	$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\mathbf{Q} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \omega_l^2 \mathbf{Q} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\mathbf{Q} & \mathbf{P} + j \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} - j \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} \mathbf{Q} & -\omega_1 \omega_2 \mathbf{Q} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & -\omega_h^2 \mathbf{Q} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}(\alpha) \\ \mathbf{P}(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

resultando em  $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{P}(\alpha) + \mathbf{P}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^T < \mathbf{0}$ . Assim, ao exigir  $\mathbf{P}(\alpha) > \mathbf{0}$ , o Lema 2.9 garante a estabilidade, conforme Lema 2.4.

## 2.2 DOMINÂNCIA DIAGONAL

Dominância diagonal é um conhecido conceito matemático, cuja aplicação no contexto de controle de sistemas multivariáveis foi introduzida por Rosenbrock (1974).

**DEFINIÇÃO 2.2** (Dominância Diagonal) Uma matriz  $m \times m$  própria e racional  $G(s)$  é chamada estritamente diagonal dominante por linhas no contorno  $D$  se

$$\max_i \sum_{j=1, j \neq i}^m \frac{|g_{ij}(s)|}{|g_{ii}(s)|} = d_r(s) < 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \forall s \in D$$

e estritamente diagonal dominante por colunas se

$$\max_i \sum_{j=1, j \neq i}^m \frac{|g_{ji}(s)|}{|g_{ii}(s)|} = d_c(s) < 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \forall s \in D$$

assumindo que  $G(s)$  não possui polos em  $D$ .

A definição de dominância diagonal é útil, pois há teoremas que garantem a estabilidade de sistemas em malha fechada com controle descentralizado (controlador diagonal) a partir da dominância diagonal do sistema original.

Contudo, esse conceito de dominância mostrou-se conservador, levando pesquisadores a buscar alternativas como, por exemplo, a dominância generalizada (Yeung and F. Bryant, 1992), a qual estende as condições da Definição 2.2 com multiplicadores (pesos) diagonais, resultando na seguinte definição:

**DEFINIÇÃO 2.3** (Dominância Diagonal Generalizada) Uma matriz  $m \times m$  própria e racional  $G(s)$  é chamada diagonal dominante no sentido generalizado se

$$\rho \left( \left| G_D(s)^{-1} (G(s) - G_D(s)) \right| \right) = d_g(s) < 1$$

em que  $\rho(\cdot)$  é o raio espectral (maior magnitude de autovalor),  $G_D(s)$  é a diagonal de  $G(s)$  e  $G_D(s)$  é não-singular. O operador  $|\mathbf{A}|$  denota a matriz  $\mathbf{A}$  com todos seus elementos substituídos por suas magnitudes.

Trata-se de uma definição menos conservadora que a anterior, já que é possível provar que  $d_g(s) \leq \min \{d_r(s); d_c(s)\}$ , sem prejudicar os teoremas de estabilidade de sistemas com controle em malha fechada aplicados a sistemas com dominância diagonal.

Yeung and F. Bryant (1992) introduzem o conceito de dominância fundamental, que pode ser aplicado ao caso da dominância diagonal de forma ainda menos conservador que os anteriores.

**DEFINIÇÃO 2.4** (Dominância Fundamental) Sejam  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tais que  $\mathbf{B}$  seja não-singular e  $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{B}$ . Diz-se que  $\mathbf{D}$  é termo dominante de  $\mathbf{A}$  se

$$\rho(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}) < 1$$

Quando  $\mathbf{D}$  é definido como a diagonal de  $\mathbf{A}$ , obtém-se a definição de dominância fundamental da diagonal. Para o caso de um sistema  $G(s)$ , seria

$$\rho \left( G_D(s)^{-1} (G(s) - G_D(s)) \right) = d_f(s) < 1 \quad (2.12)$$

Como se pode notar, a expressão  $G_D(s)^{-1} (G(s) - G_D(s))$  surge tanto na definição de dominância diagonal generalizada quanto na definição que utiliza dominância fundamental. Grosdidier and Morari (1986), ao analisarem diferentes medidas de interações em sistemas multivariáveis, ressaltam a importância dessa expressão e mostram que há relação direta com a análise de estabilidade de sistemas multivariáveis com controle em malha fechada.

O indicador  $d_f(s)$  pode ser utilizado como uma medida de dominância diagonal menos conservadora que  $d_r(s)$ ,  $d_c(s)$ ,  $d_g(s)$  pois, conforme demonstram Yeung and F. Bryant (1992),

$$d_f(s) \leq d_g(s) \leq \min \{d_r(s); d_c(s)\}$$

Para aplicar os indicadores acima ao sistema  $G(s)$  como um todo, podemos definir o indicador

$$d_z = \sup_s d_z(s)$$

em que  $z = f, g, r, c$ , conforme o caso.

A partir da definição de dominância fundamental, Chughtai and Munro (2004) e Chughtai et al. (2005) propuseram método para o projeto do pré-compensador  $K(s)$  a fim de diagonalizar o sistema  $G(s)$ . O autor aplica a Definição 2.4 a uma matriz de transferência  $G(s)$  que é assumida como  $G(s) = X(s) + Y(s)$ , em que

$X(s)$  é não-singular e  $\rho(X(s)^{-1}Y(s)) < 1$ . Em seguida, ele define o pré-compensador tal que  $X(s)K(s) = \mathbf{I}$ . Assim, a identidade será o termo dominante do sistema compensado

$$G(s)K(s) = \mathbf{I} + Y(s)K(s)$$

$$\rho(\mathbf{I}^{-1}Y(s)K(s)) = \rho(G(s)K(s) - \mathbf{I}) < 1$$

Como  $\rho \leq \sigma_{max}$ , em que  $\sigma_{max}$  é o maior valor singular, Chughtai and Munro (2004) chegam ao seguinte problema de minimização em  $\gamma$ :

$$\rho(G(s)K(s) - \mathbf{I}) \leq \sigma_{max}(G(s)K(s) - \mathbf{I}) \leq \|G(s)K(s) - \mathbf{I}\|_{\infty} < \gamma$$

Trata-se, portanto, de um problema de controle em malha aberta por modelo de referência, em que a matriz diagonal  $\mathbf{I}$  é o modelo de referência. Apesar de se tratar de um modelo de referência diagonal, que é o que se procura para um sistema desacoplado, é um modelo conservador, como salientam Chughtai et al. (2005).

Uma forma de evitar a necessidade de matriz não estritamente própria no termo diagonal dominante é escolher  $K(s)$  tal que  $X(s)K(s) = G_r(s)$ , em que  $G_r(s)$  é uma matriz de transferência diagonal invertível que serve como referência para a diagonalização, resultando em

$$\|G_r(s)^{-1}G(s)K(s) - \mathbf{I}\|_{\infty} < \gamma \quad (2.13)$$

A estratégia de utilização de matriz diagonal estritamente própria como referência foi utilizada por Lan et al. (2015). Contudo, por abordar o caso de sistema linear com parâmetros variantes (LPV - do inglês *linear parameter-varying*) e medidos, no citado trabalho foi escolhido um pré-compensador também dependente de parâmetros, o que não é viável no caso de sistemas incertos.

## 2.3 LINEARIZAÇÃO DE BMIS

As desigualdades matriciais bilineares (BMIs, acrônimo para *Bilinear Matrix Inequalities*) surgem quando há produto de duas variáveis. Uma das principais inconveniências é que a restrição deixa de ser convexa. Assim, há o interesse em tornar as desigualdades matriciais não lineares em lineares.

Uma técnica iterativa conhecida é fixar uma das variáveis com um valor inicial, o que transforma a BMI em LMI para fins de cálculo da segunda variável. Obtido o valor ótimo dessa variável, ela é fixada nesse valor, enquanto a primeira variável é otimizada por nova LMI. Em seguida, o primeiro passo é repetido fixando a primeira variável por seu valor obtido na otimização anterior. Esse processo iterativo é mantido enquanto os critérios de parada não forem atendidos. Apesar de permitir o uso de programação convexa para resolver o problema de BMI, não há garantia de otimalidade.

Há estratégias, por sua vez, que conseguem, para alguns tipos de BMIs, encontrar LMIs equivalentes. Complemento de Schur (Lema 2.1), por exemplo, pode ser utilizado em desigualdes matriciais da forma ii) do Lema 2.1 para transformá-las na forma i). Outra estratégia recorrente em controle de sistemas é a mudança de variáveis, que busca substituir o produto de variáveis por uma terceira variável que tenha uma relação bijetora com uma das variáveis para manter a equivalência entre as desigualdades.

**EXEMPLO 2.1** Sejam  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $P = P^T > 0$ . A desigualdade matricial

$$AP + PA^T - BKP - PK^T B^T < 0$$

é bilinear nas variáveis  $P$  e  $K$ . Definindo a mudança de variáveis  $\tilde{K} = KP$ , é obtida a desigualdade

$$AP + PA^T - B\tilde{K} - \tilde{K}^T B^T < 0$$

que é linear nas variáveis  $P$  e  $\tilde{K}$ . A variável original  $K$  pode ser obtida de forma única por  $K = \tilde{K}P^{-1}$ .

No contexto de estabilidade e normas de sistemas dinâmicos controlados, é comum que haja o produto entre matrizes do espaço de estados  $A$  e  $B$  (ou  $C$ ) e a matriz de Lyapunov  $P$ . Nesses casos, normalmente há variáveis de projeto (matrizes do controlador) nas matrizes do sistema compensado. O Exemplo 2.1 mostra um caso particular, que é a condição de estabilidade de um sistema com controlador estático  $K$  utilizado com realimentação de estados.

Nem sempre é possível encontrar uma LMI equivalente a uma BMI utilizando as técnicas citadas acima, principalmente quando são abordados sistemas incertos. Por exemplo, para o problema de filtragem de sistemas com incertezas politópicas, Geromel and C. De Oliveira (2001) propuseram uma mudança de variáveis para linearizar o problema utilizando particionamento de uma matriz de Lyapunov constante (estabilidade quadrática).

Outro método para linearizar a desigualdade é fixar estruturas para variáveis intermediárias como a matriz de Lyapunov ou a variável de folga do Lema da Projeção (variável  $X$  do Lema 2.2). Apesar de permitir que a matriz de Lyapunov seja dependente de parâmetros, isso traz evidente perda de equivalência entre a LMI obtida e a desigualdade original e, conseqüentemente, conservadorismo. Para diminuir esse conservadorismo, podem ser mantidas matriz invertíveis livres nessas matrizes com restrição de estrutura, de forma a possibilitar mudança de variáveis. Essa técnica tem sido utilizada recentemente em problemas de filtragem e redução de ordem (Du and Yang, 2010; Lacerda et al., 2011; Mazzocante and Oliveira, 2016).

Du and Yang (2010) usam Lema da Projeção para evitar o produto direto entre as matrizes de sistema total  $\bar{A}$  e  $\bar{C}$  com as matrizes  $P$  e  $Q$  associados a  $\Xi$  da Tabela 2.2. As matrizes de sistema passam a multiplicar a variável de folga  $G$ . O termo do Lema da Projeção que tem esse produto é retratado a seguir.

$$\begin{bmatrix} -I \\ \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

em que  $\bar{A}$  e  $\bar{C}$  possuem as variáveis de projeto  $A_r$  e  $C_r$ :

$$\begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_r & 0 \\ 0 & A \\ -C_r & C \end{bmatrix}$$

A linearização é feita, em um primeiro momento, restringindo a variável de folga  $G$  a

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_3 \end{bmatrix}$$

No mesmo trabalho, os autores sugerem adicionar um multiplicador ( $\lambda$ ) para busca linear e, assim, diminuir o conservadorismo da estrutura de  $\mathbf{G}$  escolhida:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{G}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_3 \end{bmatrix}$$

No caso dessas estruturas de  $\mathbf{G}$ , a matriz  $\mathbf{G}_1$  deve ser invertível para recuperar  $\mathbf{A}_r$  e  $\mathbf{C}_r$  após uso da mudança de variáveis  $\tilde{\mathbf{A}}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{G}_1$  e  $\tilde{\mathbf{C}}_r = \mathbf{C}_r \mathbf{G}_1$ .

Lacerda et al. (2011) utilizam, para o caso de filtragem  $\mathcal{H}_\infty$ , Lema de Finsler também para evitar produto entre as matrizes de sistema  $\tilde{\mathbf{A}}(\alpha)$  e  $\tilde{\mathbf{B}}(\alpha)$  com a matriz de Lyapunov  $\mathbf{W}(\alpha)$ , resultando no produto  $\mathbf{X}(\alpha)\mathbf{B}(\alpha)$  em que

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}(\alpha) & -\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{B}}(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\alpha) & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_f \mathbf{C}_2(\alpha) & \mathbf{A}_f & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{B}_f \mathbf{D}_{21}(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Para evitar o produto entre variáveis de folga e as variáveis de projeto do filtro  $\mathbf{A}_f$  e  $\mathbf{B}_f$ , foi definida a seguinte estrutura para  $\mathbf{X}(\alpha)$ :

$$\mathbf{X}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}(\alpha) & \lambda_1 \hat{\mathbf{K}} \\ \mathbf{K}_{21}(\alpha) & \lambda_2 \hat{\mathbf{K}} \\ \mathbf{E}_{11}(\alpha) & \hat{\mathbf{K}} \\ \mathbf{E}_{21}(\alpha) & \hat{\mathbf{K}} \\ \mathbf{Q}_1(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_1(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

em que  $\hat{\mathbf{K}}$  deve ser invertível para recuperar  $\mathbf{A}_f$  e  $\mathbf{B}_f$  após a mudança de variáveis  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{A}_f \hat{\mathbf{K}}$  e  $\mathbf{K}_2 = \mathbf{B}_f \hat{\mathbf{K}}$ . Da mesma forma que Du and Yang (2010), os multiplicadores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são utilizados para busca linear para diminuir o conservadorismo.

Mazzocante and Oliveira (2016) utilizam o resultado de Lacerda et al. (2011) aplicado ao problema de redução de ordem. O incremento principal relatado no trabalho é a flexibilização da estrutura de  $\mathbf{X}(\alpha)$ , uma vez que as dimensões de  $\mathbf{K}_{11}(\alpha)$  e  $\mathbf{E}_{11}(\alpha)$  são maiores que  $\mathbf{K}_{21}(\alpha)$ ,  $\mathbf{E}_{21}(\alpha)$  e  $\hat{\mathbf{K}}$ :

$$\mathbf{X}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}(\alpha) & \beta_k \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\sigma \times r} \\ \hat{\mathbf{K}} \\ \mathbf{0}_{n-r-\sigma \times r} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{21}(\alpha) & \hat{\mathbf{K}} \\ \mathbf{E}_{11}(\alpha) & \beta_e \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\sigma \times r} \\ \hat{\mathbf{K}} \\ \mathbf{0}_{n-r-\sigma \times r} \end{bmatrix} \\ \mathbf{E}_{21}(\alpha) & \hat{\mathbf{K}} \\ \mathbf{Q}_1(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_1(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Assim, além dos multiplicadores  $\beta_k$  e  $\beta_e$ , é adicionado o parâmetro  $\sigma$ , também para busca linear, a fim de diminuir o conservadorismo.

O leitor atento pode observar a semelhança no método de linearização dos três trabalhos citados acima. Por ser de interesse no projeto do desacoplador para sistemas incertos, em especial ao considerar faixas de frequência de interesse, essa técnica será generalizada e estudada no Capítulo 3.

# 3

## CONTRIBUIÇÕES

Neste Capítulo, será desenvolvida a metodologia de projeto de desacopladores para sistemas incertos por meio de LMIs. Para isso, serão mostradas as principais restrições em forma de desigualdades matriciais utilizadas no projeto. Contudo, por se mostrarem bilineares, será estudada uma técnica de linearização por pré-definição da estrutura de variáveis de folga para linearizar essas desigualdades e transformá-las em LMIs. Em seguida, serão apresentados os métodos propostos com as devidas discussões de escolha paramétrica. Por fim, será proposto um indicador que tenha a capacidade de avaliar o acoplamento de sistemas incertos.

A metodologia de projeto de pré-compensadores foi baseada na estratégia explorada por Chughtai and Munro (2004); Chughtai et al. (2005). Utilizando-se modelo de referência diagonal  $G_r(s)$ , chega-se à desigualdade (2.13), que é o ponto de partida para o projeto de desacopladores desta dissertação e segue transcrita abaixo:

$$\|G_r(s)^{-1}G(s)K(s) - \mathbf{I}\|_\infty < \gamma_0$$

Para simplificar numericamente o problema de otimização, podemos utilizar uma propriedade de normas:

$$\|G_r(s)^{-1}G(s)K(s) - \mathbf{I}\|_\infty \leq \|G_r(s)^{-1}\|_\infty \|G(s)K(s) - G_r(s)\|_\infty \quad (3.1)$$

Considerando que  $\|G_r(s)^{-1}\|_\infty$  é limitado superiormente, pode-se optar por resolver o problema de otimização de minimizar  $\gamma$  sujeito à restrição

$$\|G(s)K(s) - G_r(s)\|_\infty < \gamma \quad (3.2)$$

Limitar superiormente  $G_r(s)^{-1}$  significa evitar que o modelo de referência seja próximo a zero. Em uma situação em que  $G_r(s)$  é considerado variável de decisão para cálculo de  $K(s)$ , se não houver essa limitação de  $G_r(s)$ , o resultado mais trivial para minimizar  $\gamma$  é  $G_r(s) \rightarrow 0$  e  $K(s) \rightarrow 0$ .

De forma mais geral, em relação à frequência, a restrição acima pode ser modificada para atender o conjunto de frequências de interesse  $\Omega$ . Contudo, limitar o valor singular a uma faixa de frequências finita não garante a estabilidade do sistema (vide Observação 2.1). Assim, para tratar de  $\Omega$  genérico, temos as seguintes restrições:

$$\begin{cases} \sigma_{max}(G(j\omega)K(j\omega) - G_r(j\omega)) < \gamma & \forall \omega \in \Omega \\ G(s)K(s) - G_r(s) & \text{estável} \\ \sigma_{max}(G_r(j\omega)^{-1}) < \infty & \forall \omega \in \Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

O interesse pela expressão  $G(s)K(s) - G_r(s)$  em detrimento da expressão  $G_r(s)^{-1}G(s)K(s) - \mathbf{I}$  é justificada principalmente quando utilizamos modelo de referência dependente de parâmetros ( $G_r(s, \alpha)$ ), pois além de ter que lidar com a inversa de um sistema dependente de parâmetros, haveria produto entre sistemas dependentes de parâmetros, o que aumenta o conservadorismo das restrições por LMIs utilizando os vértices.

As duas primeiras restrições de (3.3) podem ser formuladas em desigualdades matriciais, conforme Lemas 2.6, 2.9 e 2.12, em que  $H(s, \alpha) = G(s, \alpha)K(s) - G_r(s, \alpha)$ . A terceira restrição pode ser trabalhada para ser

garantida também por meio de desigualdades matriciais. Contudo, há produto das matrizes  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})$  e  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\alpha})$  com as variáveis de folga  $\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha})$  e  $\mathbf{X}_s(\boldsymbol{\alpha})$ , o que resulta em produto entre variáveis, uma vez que  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})$  e  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\alpha})$  possuem variáveis associadas a  $K(s)$  e, eventualmente, a  $G_r(s, \boldsymbol{\alpha})$ , dependendo do quão pré-determinado está o modelo de referência diagonal. Assim, as desigualdades são bilineares, fazendo-se necessário aplicar algum método de linearização para obtenção de LMIs, abordado a seguir.

### 3.1 LINEARIZAÇÃO DE BMIS

A estratégia de linearização de BMIs utilizada por Du and Yang (2010); Lacerda et al. (2011); Mazzocante and Oliveira (2016), conforme discutido na Seção 2.3, se baseia na fixação de estruturas das variáveis que multiplicam matrizes que possuem variáveis de projeto, tais como de um controlador. Nesses trabalhos, parte das variáveis de folga que surgem da aplicação do Lema de Finsler ou do Lema da Projeção multiplicam partes de matrizes sem variáveis. Assim, apenas as partes que multiplicam variáveis de projeto foram restringidas de forma a possibilitar mudança de variáveis e recuperação das variáveis de projeto.

Contudo, as restrições de estrutura utilizadas possuíam poucos parâmetros de escolha, tais como multiplicadores escalares, para alterar a escolha da estrutura. A adição de parâmetros escalares para alterar a estrutura é considerado um ganho no aumento de graus de liberdade (Mazzocante and Oliveira, 2016). A escolha desses parâmetros e, conseqüentemente, da estrutura das variáveis de folga é tratada de forma secundária nos trabalhos citados acima, sem estudar a repercussão das escolhas tomadas. Lacerda et al. (2011), por exemplo, reconhecem a importância de estudar a escolha feita e deixa para trabalhos futuros. Nesse contexto, será estudado o impacto da escolha da estrutura, em particular para o caso tratado neste trabalho, na Subseção 3.2.1.

#### Descrição da Técnica

A fim de formalizar e generalizar a estratégia de linearização por definição *a priori* da estrutura de variáveis de folga, será considerada a desigualdade iii) do Lema de Finsler (Lema 2.3). A aplicação para a desigualdade no Lema de Projeção é direta se  $\Delta$  na Eq. 2.1 não possuir variáveis.

Considere a desigualdade matricial

$$\mathbf{M} + \mathbf{X}\boldsymbol{\Gamma} + (\mathbf{X}\boldsymbol{\Gamma})^T < \mathbf{0} \quad (3.4)$$

Considere, ainda, que  $\mathbf{X}$  seja uma variável de folga, tal qual na proposição iii) do Lema 2.3 e  $\boldsymbol{\Gamma}$  pode ser particionado da seguinte forma

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_0 \\ \boldsymbol{\Gamma}_{C_1}\boldsymbol{\Gamma}_1 + \boldsymbol{\Gamma}_{01} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Gamma}_{C_N}\boldsymbol{\Gamma}_N + \boldsymbol{\Gamma}_{0N} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

em que  $\boldsymbol{\Gamma}_i, \boldsymbol{\Gamma}_{0i}, i = 1, \dots, N$ , são conhecidas e  $\boldsymbol{\Gamma}_{C_i}$  são matrizes de variáveis (por exemplo, de um controlador).

Defina a seguinte estrutura para  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 & \Lambda_1 \mathbf{X}_1 & \cdots & \Lambda_N \mathbf{X}_N \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

tal que  $\mathbf{X}_i, i = 1, \dots, N$ , são matrizes quadradas variáveis e não dependentes de parâmetros,  $\mathbf{X}_0$  é uma variável que pode ser dependente de parâmetros e  $\Lambda_i, i = 1, \dots, N$  são matrizes conhecidas e escolhidas *a priori*, que também podem ser dependentes de parâmetros.

Com essa estrutura escolhida para  $\mathbf{X}$ , a desigualdade matricial (3.4) passa a ser

$$\mathbf{M} + He \left( \mathbf{X}_0 \Gamma_0 + \sum_{i=1}^N \Lambda_i \mathbf{X}_i \Gamma_{0i} + \sum_{i=1}^N \Lambda_i \mathbf{X}_i \Gamma_{C_i} \Gamma_i \right) < \mathbf{0} \quad (3.7)$$

em que o operador  $He(\mathbf{A})$  representa  $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ . Fazendo as mudanças de variáveis  $\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_i \Gamma_{C_i}$ , a BMI (3.7) pode ser reescrita como

$$\mathbf{M} + He \left( \mathbf{X}_0 \Gamma_0 + \sum_{i=1}^N \Lambda_i \mathbf{X}_i \Gamma_{0i} + \sum_{i=1}^N \Lambda_i \mathbf{Y}_i \Gamma_i \right) < \mathbf{0} \quad (3.8)$$

que é linear nas variáveis  $\mathbf{X}_i$  e  $\mathbf{Y}_i$ . Após solucionar o problema de otimização que utilize essa LMI, as variáveis originais  $\Gamma_{C_i}$  podem ser recuperadas:

$$\Gamma_{C_i} = \mathbf{X}_i^{-1} \mathbf{Y}_i, \quad i = 1, \dots, N$$

*Observação 3.1.* Para que haja equivalência entre a BMI (3.7) e a LMI (3.8), as variáveis  $\mathbf{X}_i$  devem ser quadradas e invertíveis.

*Observação 3.2.* Para o caso em que todas as matrizes  $\Gamma_{C_i}$  são variáveis distintas, temos que  $\mathbf{X}_i$  podem ser deixadas livres. Para o caso de duplas  $(i, j)$  em que  $\Gamma_{C_i} = \Gamma_{C_j}$ , devemos forçar que  $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_j$  e  $\mathbf{Y}_i = \mathbf{Y}_j$ , para que a mudança de variáveis permita a recuperação de valores iguais para as variáveis  $\Gamma_{C_i}$  e  $\Gamma_{C_j}$ .

## Exemplos na Literatura

Nos trabalhos citados anteriormente que utilizam essa técnica (Du and Yang, 2010; Lacerda et al., 2011; Mazzocante and Oliveira, 2016), as variáveis de folga utilizadas são casos particulares da estrutura (3.6).

A variável de folga  $\mathbf{G}$  proposta por Du and Yang (2010), dada na Eq. (3.9), pode ser rearranjada na forma

$$\mathbf{G}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 & \Lambda_1 \mathbf{X}_1 \end{bmatrix}$$

em que  $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1$  e  $\Lambda_1$  são dados por (3.10).

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{G}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_3 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_2^T \\ \mathbf{G}_3^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_1 = \mathbf{G}_1^T, \quad \Lambda_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \lambda \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Da mesma forma, as variáveis de folga propostas por Lacerda et al. (2011) e Mazzocante and Oliveira (2016) (Eq. (3.11)) podem ser reescritas na forma  $\mathbf{X}_1(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0(\boldsymbol{\alpha}) & \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{X}_1 \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{X}_2(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0(\boldsymbol{\alpha}) & \boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{X}_1 \end{bmatrix}$ , respectivamente, em que  $\mathbf{X}_0$ ,  $\mathbf{X}_1$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}_1$  e  $\boldsymbol{\Lambda}_2$  são dados em (3.12).

$$\mathbf{X}_1(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}(\boldsymbol{\alpha}) & \lambda_1 \hat{\mathbf{K}} \\ \mathbf{K}_{21}(\boldsymbol{\alpha}) & \lambda_2 \hat{\mathbf{K}} \\ \mathbf{E}_{11}(\boldsymbol{\alpha}) & \hat{\mathbf{K}} \\ \mathbf{E}_{21}(\boldsymbol{\alpha}) & \hat{\mathbf{K}} \\ \mathbf{Q}_1(\boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_2(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}(\boldsymbol{\alpha}) & \beta_k \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\sigma \times r} \\ \hat{\mathbf{K}} \\ \mathbf{0}_{n-r-\sigma \times r} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{21}(\boldsymbol{\alpha}) & \hat{\mathbf{K}} \\ \mathbf{E}_{11}(\boldsymbol{\alpha}) & \beta_e \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\sigma \times r} \\ \hat{\mathbf{K}} \\ \mathbf{0}_{n-r-\sigma \times r} \end{bmatrix} \\ \mathbf{E}_{21}(\boldsymbol{\alpha}) & \hat{\mathbf{K}} \\ \mathbf{Q}_1(\boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}(\boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{K}_{21}(\boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{E}_{11}(\boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{E}_{21}(\boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{Q}_1(\boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_1 = \hat{\mathbf{K}}, \quad \boldsymbol{\Lambda}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I} \\ \lambda_2 \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\sigma \times r} \\ \beta_k \mathbf{I} \\ \mathbf{0}_{n-r-\sigma \times r} \end{bmatrix} \\ \mathbf{I} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\sigma \times r} \\ \beta_e \mathbf{I} \\ \mathbf{0}_{n-r-\sigma \times r} \end{bmatrix} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

### 3.2 DESACOPLAMENTO DE SISTEMAS

No início deste Capítulo foram mostradas as restrições (3.2)-(3.3) que podem ser usadas em problemas de otimização para projetar pré-compensadores dinâmicos. Os Lemas 2.9 e 2.12, que formulam essas restrições na forma de desigualdades matriciais, lidam com a seguinte desigualdade em comum:

$$\begin{bmatrix} \Xi & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{D}(\boldsymbol{\alpha}) \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})^T \end{bmatrix} & \mathbf{D}(\boldsymbol{\alpha})^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} -\mathbf{I} \\ \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{C}(\boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha})^T \right) < \mathbf{0} \quad (3.13)$$

em que  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})$ ,  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})$ ,  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\alpha})$  e  $\mathbf{D}(\boldsymbol{\alpha})$  são matrizes da representação no espaço de estados de  $H(s, \boldsymbol{\alpha}) = G(s, \boldsymbol{\alpha})K(s) - G_r(s, \boldsymbol{\alpha})$ , quando aplicado ao sistema das restrições (3.2)-(3.3). No desenvolvimento a seguir, para simplificar a notação, o parâmetro  $\boldsymbol{\alpha}$  será omitido.

Considere o sistema  $G(s) := \{\mathbf{A}_g, \mathbf{B}_g, \mathbf{C}_g, \mathbf{D}_g\}$ , o pré-compensador (ou desacoplador)  $K(s) := \{\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k, \mathbf{D}_k\}$  e o modelo de referência  $G_r(s) := \{\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{C}_r, \mathbf{D}_r\}$ . Então

$$G(s)K(s) - G_r(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} \mathbf{A}_g & \mathbf{0} & \mathbf{B}_g \mathbf{C}_k & \mathbf{B}_g \mathbf{D}_k \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_r & \mathbf{0} & \mathbf{B}_r \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_k & \mathbf{B}_k \\ \hline \mathbf{C}_g & -\mathbf{C}_r & \mathbf{D}_g \mathbf{C}_k & \mathbf{D}_g \mathbf{D}_k - \mathbf{D}_r \end{array} \right] \quad (3.14)$$

Como as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$  possuem as variáveis do pré-compensador  $\mathbf{A}_k$  e  $\mathbf{C}_k$ , na desigualdade (3.13) há produto entre variáveis, já que  $\mathbf{X}$  também é variável, constituindo-se, portanto, de uma desigualdade matricial bilinear. Assim, busca-se agora que essa desigualdade seja representada na forma de LMIs com o uso do método de linearização apresentado na Seção 3.1.

A desigualdade (3.13) está na forma da desigualdade (3.4), em que

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A}^T & \mathbf{C}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

o que permite a aplicação direta da técnica. Expandindo as matrizes de sistema  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$  da matriz  $\mathbf{\Gamma}$ , obtemos

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_g^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_g^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_r^T & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_r^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{C}_k^T \mathbf{B}_g^T & \mathbf{0} & \mathbf{A}_k^T & \mathbf{C}_k^T \mathbf{D}_g^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Considerando que, dentre as matrizes de  $\mathbf{\Gamma}$ , apenas  $\mathbf{A}_k$  e  $\mathbf{C}_k$  são variáveis, podemos particionar  $\mathbf{\Gamma}$  conforme Eq. (3.5):

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_0 \\ \mathbf{\Gamma}_C \mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{\Gamma}_{01} \end{bmatrix}$$

em que

$$\mathbf{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_g^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_g^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_r^T & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_r^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{\Gamma}_{01} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k^T & \mathbf{C}_k^T \end{bmatrix}, \mathbf{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_g^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_g^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Assim, há uma estrutura para  $\mathbf{X}$  tal que a desigualdade (3.13) se torna linear, conforme Eq. (3.6), em que  $\mathbf{\Lambda}$  é dado e  $\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{0g} & \mathbf{X}_{0r} \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{X}_1$  são variáveis de folga:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 & \mathbf{\Lambda} \mathbf{X}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{0g} & \mathbf{X}_{0r} & \mathbf{\Lambda} \mathbf{X}_1 \end{bmatrix}$$

Considere a seguinte mudança de variáveis para linearizar o produto de variáveis:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1 \mathbf{\Gamma}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \mathbf{A}_k^T & \mathbf{X}_1 \mathbf{C}_k^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_A & \mathbf{Y}_C \end{bmatrix}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
& M + He \left( \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 & \Lambda \mathbf{X}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A}^T & \mathbf{C}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} \mathbb{E} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{D} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}^T \end{bmatrix} & \mathbf{D}^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \\
&+ He \left( \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{0g} & \mathbf{X}_{0r} & \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_g^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_g^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_r^T & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_r^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{X}_1 & \mathbf{Y}_C \mathbf{B}_g^T & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_A & \mathbf{Y}_C \mathbf{D}_g^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) < \mathbf{0} \quad (3.15)
\end{aligned}$$

é uma condição suficiente para a desigualdade (3.13), pois se existe  $\mathbf{X}_0$  e  $\mathbf{X}_1$  tal que (3.15) é satisfeita, então existe  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 & \Lambda \mathbf{X}_1 \end{bmatrix}$  tal que (3.13) é satisfeita.

As variáveis  $\mathbf{A}_k$  e  $\mathbf{C}_k$  podem se recuperadas pelas variáveis  $\mathbf{X}_1$ ,  $\mathbf{Y}_A$  e  $\mathbf{Y}_C$ :  $\mathbf{A}_k = (\mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{Y}_A)^T$  e  $\mathbf{C}_k = (\mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{Y}_C)^T$ .

*Observação 3.3.* A LMI com restrição de estrutura da variável de folga  $\mathbf{X}$  é condição apenas suficiente na Eq. (3.15), pois não considera todas as possibilidades para  $\mathbf{X}$ . A repercussão (conservadorismo) da escolha da estrutura  $\Lambda$  é explorada na Subseção 3.2.1.

*Observação 3.4.* Para o caso de sistema com dependência de parâmetros  $G(s, \alpha)$ , a variável de folga também pode ser dependente de parâmetros, contudo, para recuperar as matrizes não dependentes de parâmetros  $\mathbf{A}_k$  e  $\mathbf{C}_k$ ,  $\mathbf{X}_1$  não pode ser dependente de parâmetros. Assim,  $\mathbf{X}$  deve assumir a forma  $\begin{bmatrix} \mathbf{X}_0(\alpha) & \Lambda(\alpha) \mathbf{X}_1 \end{bmatrix}$ .

### 3.2.1 Repercussão da Escolha de $\Lambda$

A restrição imposta à variável de folga introduz conservadorismo (vide Observação 3.3), o qual deve ser estudado para que boas escolhas de estrutura ( $\Lambda$ ) sejam feitas. A linearização da desigualdade (3.13) servirá de exemplo para uma análise das consequências da escolha de  $\Lambda$ , sem a ambição de exauri-las.

Seja a LMI (3.15), obtida pela técnica de linearização, condição suficiente para a desigualdade (3.13) (equivalente a (2.7)), com  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{\Gamma}_0 \in \mathbb{R}^{n_0 \times n}$ ,  $\mathbf{\Gamma}_C \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_v}$ ,  $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ :

$$\begin{aligned}
& \exists \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 & \Lambda \mathbf{X}_1 \end{bmatrix} : M + He(\mathbf{X}\mathbf{\Gamma}) < \mathbf{0} \\
& \iff \exists \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1 : M + He \left( \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 & \Lambda \mathbf{X}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_0 \\ \mathbf{\Gamma}_C \mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{\Gamma}_{01} \end{bmatrix} \right) < \mathbf{0} \\
& \iff \exists \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1 : M + He(\Lambda \mathbf{X}_1 (\mathbf{\Gamma}_C \mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{\Gamma}_{01})) + He(\mathbf{X}_0 \mathbf{\Gamma}_0) < \mathbf{0} \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Aplicando as relações equivalentes iii) e iv) do Lema de Finsler (Lema 2.3) na LMI (3.16), temos que

$$\begin{aligned}
& \exists \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1 : M + He(\Lambda \mathbf{X}_1 (\mathbf{\Gamma}_C \mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{\Gamma}_{01})) + He(\mathbf{X}_0 \mathbf{\Gamma}_0) < \mathbf{0} \\
& \iff \exists \mathbf{X}_1 : \mathbf{N}_{\mathbf{\Gamma}_0}^T [M + He(\Lambda \mathbf{X}_1 (\mathbf{\Gamma}_C \mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{\Gamma}_{01}))] \mathbf{N}_{\mathbf{\Gamma}_0} < \mathbf{0}, \quad \mathcal{R}(\mathbf{N}_{\mathbf{\Gamma}_0}) = \mathcal{N}(\mathbf{\Gamma}_0) \\
& \iff \exists \mathbf{X}_1 : \mathbf{N}_{\mathbf{\Gamma}_0}^T \mathbf{M} \mathbf{N}_{\mathbf{\Gamma}_0} + He \left( \mathbf{N}_{\mathbf{\Gamma}_0}^T \Lambda \mathbf{X}_1 (\mathbf{\Gamma}_C \mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{\Gamma}_{01}) \mathbf{N}_{\mathbf{\Gamma}_0} \right) < \mathbf{0} \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Para encontrar um possível  $N_{\Gamma_0}$ , lembremos que  $\Gamma_0 N_{\Gamma_0} = \mathbf{0}$  e a matriz formada por  $\Gamma_0$  e  $N_{\Gamma_0}^T$  tem posto completo:

$$\text{rank} \left( \begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ N_{\Gamma_0}^T \end{bmatrix} \right) = n$$

Então  $N_{\Gamma_0} \in \mathbb{R}^{n \times (n-n_0)}$ . Da mesma forma, temos que  $N_{\Gamma} \in \mathbb{R}^{n \times (n-n_0-n_1)}$ , pois

$$\begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_C \Gamma_1 + \Gamma_{01} \end{bmatrix} N_{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma_0 N_{\Gamma} \\ (\Gamma_C \Gamma_1 + \Gamma_{01}) N_{\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \text{rank} \left( \begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_C \Gamma_1 + \Gamma_{01} \\ N_{\Gamma}^T \end{bmatrix} \right) = n$$

Portanto, podemos escolher

$$N_{\Gamma_0}^T = \begin{bmatrix} N_1^T \\ N_{\Gamma}^T \end{bmatrix}$$

tal que  $N_1 \in \mathbb{R}^{n \times n_1}$  e suas colunas não pertençam a  $\mathcal{R}(N_{\Gamma})$  e  $\Gamma_0 N_1 = \mathbf{0}$ . Retomando a LMI (3.17) com as seguintes definições

$$\Delta_p = \Lambda^T N_{\Gamma_0} = \begin{bmatrix} \Lambda^T N_1 & \Lambda^T N_{\Gamma} \end{bmatrix} \quad \Gamma_p = (\Gamma_C \Gamma_1 + \Gamma_{01}) N_{\Gamma_0} = \begin{bmatrix} (\Gamma_C \Gamma_1 + \Gamma_{01}) N_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

podemos usar o Lema da Projeção (Lema 2.2):

$$\exists X_1 : \begin{bmatrix} N_1^T \\ N_{\Gamma}^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} N_1 & N_{\Gamma} \end{bmatrix} + \text{He} \left( \begin{bmatrix} N_1^T \Lambda \\ N_{\Gamma}^T \Lambda \end{bmatrix} X_1 \begin{bmatrix} (\Gamma_C \Gamma_1 + \Gamma_{01}) N_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) < \mathbf{0} \quad (3.18)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} N_{\Delta_p}^T \begin{bmatrix} N_1^T \\ N_{\Gamma}^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} N_1 & N_{\Gamma} \end{bmatrix} N_{\Delta_p} < \mathbf{0}, \quad \mathcal{R}(N_{\Delta_p}) = \mathcal{N}(\Delta_p) & (a) \\ N_{\Gamma_p}^T \begin{bmatrix} N_1^T \\ N_{\Gamma}^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} N_1 & N_{\Gamma} \end{bmatrix} N_{\Gamma_p} < \mathbf{0}, \quad \mathcal{R}(N_{\Gamma_p}) = \mathcal{N}(\Gamma_p) & (b) \end{cases} \quad (3.19)$$

Considerando que  $\text{rank}((\Gamma_C \Gamma_1 + \Gamma_{01}) N_1) = n_1$ , já que  $N_1$  completa o posto de  $\begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ N_1^T \\ N_{\Gamma}^T \end{bmatrix}$  assim como

$\Gamma_C \Gamma_1 + \Gamma_{01}$  completa o posto de  $\begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_C \Gamma_1 + \Gamma_{01} \\ N_{\Gamma}^T \end{bmatrix}$ , podemos definir

$$N_{\Gamma_p} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{n-n_0-n_1} \end{bmatrix}$$

Assim, a condição (3.19)(b) pode ser escrita como

$$N_{\Gamma_p}^T \begin{bmatrix} N_1^T \\ N_{\Gamma}^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} N_1 & N_{\Gamma} \end{bmatrix} N_{\Gamma_p} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^T \\ N_{\Gamma}^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} N_1 & N_{\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = N_{\Gamma}^T M N_{\Gamma} < \mathbf{0}$$

que é a condição (2.8), originalmente desejada. Dessa forma, a condição (3.19)(a) seria uma segunda condição que surge da fixação da estrutura de  $\Gamma$ . Para encontrar essa condição no caso do sistema (3.14), lembremos a definição de  $N_{\Gamma}^T$  utilizada para o caso (Eq. (2.9)):

$$N_{\Gamma}^T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_g & \mathbf{0} & \mathbf{B}_g \mathbf{C}_k & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_g & -\mathbf{C}_r & \mathbf{D}_g \mathbf{C}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Consideremos o seguinte particionamento de  $\Lambda$  e a escolha de  $N_1$ , cujos elementos são de dimensões compatíveis com  $N_{\Gamma}^T$ :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{Ig} \\ \Lambda_{Ir} \\ \Lambda_{Ik} \\ \Lambda_{Ag} \\ \Lambda_{Ar} \\ \Lambda_{Ak} \\ \Lambda_c \\ \Lambda_{\gamma} \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

em que a nomenclatura dos subíndices remete às linhas de  $\Gamma^T$  expandido:

$$\Gamma^T = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{A}_g & \mathbf{0} & \mathbf{B}_g \mathbf{C}_k \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_k \\ \mathbf{C}_g & -\mathbf{C}_r & \mathbf{D}_g \mathbf{C}_k \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

As matrizes  $\Lambda$  e  $N_1$  possuem mesmas dimensões do bloco-coluna de  $\Gamma^T$  relativa ao pré-compensador.

Repare que essa escolha de  $N_1$  é válida pois

$$\Gamma_0 N_1 = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_g^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_g^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_r^T & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_r^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\text{rank} \left( \begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ N_1^T \\ N_\Gamma^T \end{bmatrix} \right) = \text{rank} \begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_g^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_g^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_r^T & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_r^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_g & \mathbf{0} & \mathbf{B}_g \mathbf{C}_k & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_g & -\mathbf{C}_r & \mathbf{D}_g \mathbf{C}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = n$$

Com a definição de  $N_1$  apresentada, temos que

$$\Delta_p^T = \begin{bmatrix} N_1^T \Lambda \\ N_\Gamma^T \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Lambda_{Ik} \\ N_\Gamma^T \Lambda \end{bmatrix}$$

Se supormos  $\Lambda_{Ik}$  escolhido de forma a ser invertível, podemos escolher a seguinte base do espaço nulo de  $\Delta_p$ :

$$N_{\Delta_p}^T = \begin{bmatrix} N_\Gamma^T \Lambda \Lambda_{Ik}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Nesse caso, a condição (3.19)(a) passa a ser

$$N_{\Gamma^*}^T M N_{\Gamma^*} < \mathbf{0}$$

em que

$$\begin{aligned}
N_{\Gamma^*}^T &= \begin{bmatrix} N_{\Gamma}^T \Lambda \Lambda_{Ik}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^T \\ N_{\Gamma}^T \end{bmatrix} = N_{\Gamma}^T + N_{\Gamma}^T \Lambda \Lambda_{Ik}^{-1} N_1^T \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_g & \mathbf{0} & \mathbf{B}_g \mathbf{C}_k & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_g & -\mathbf{C}_r & \mathbf{D}_g \mathbf{C}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \\
&\quad \begin{bmatrix} \mathbf{A}_g & \mathbf{0} & \mathbf{B}_g \mathbf{C}_k & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_g & -\mathbf{C}_r & \mathbf{D}_g \mathbf{C}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\Lambda_{Ig} \Lambda_{Ik}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\Lambda_{Ir} \Lambda_{Ik}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\Lambda_{Ag} \Lambda_{Ik}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\Lambda_{Ar} \Lambda_{Ik}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\Lambda_{Ak} \Lambda_{Ik}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\Lambda_c \Lambda_{Ik}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\Lambda_{\gamma} \Lambda_{Ik}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_g & \mathbf{0} & -\mathbf{A}_g \Lambda_{Ig} \Lambda_{Ik}^{-1} - \Lambda_{Ag} \Lambda_{Ik}^{-1} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_r & -\mathbf{A}_r \Lambda_{Ir} \Lambda_{Ik}^{-1} - \Lambda_{Ar} \Lambda_{Ik}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\Lambda_{Ak} \Lambda_{Ik}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_g & -\mathbf{C}_r & -\mathbf{C}_g \Lambda_{Ig} \Lambda_{Ik}^{-1} + \mathbf{C}_r \Lambda_{Ir} \Lambda_{Ik}^{-1} - \Lambda_c \Lambda_{Ik}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\Lambda_{\gamma} \Lambda_{Ik}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

que é, na prática, a matriz original de interesse  $N_{\Gamma}^T$  com colunas relativas ao controlador substituídas por termos que associam os elementos de  $\Lambda$  e as colunas relativas a  $G(s)$  e  $G_r(s)$  (conhecidas *a priori*).

*Observação 3.5.* Como a variável de folga  $X_1$  possui mesmas dimensões de  $\Lambda_{Ik}$ , não há perda de generalidade em escolher  $\Lambda_{Ik} = -\mathbf{I}$  para o caso em que for escolher  $\Lambda_{Ik}$  invertível. Nesse caso, como queremos que a condição colateral  $N_{\Gamma^*}^T M N_{\Gamma^*} < \mathbf{0}$ , devemos escolher  $\Lambda_{Ak}$  com autovalores no semi-plano esquerdo dos complexos, para garantir estabilidade.

*Observação 3.6.* Se  $\Lambda$  for escolhido da seguinte forma:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} \\ \mathbf{B}_g \mathbf{C}_{k^*} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{k^*} \\ \mathbf{D}_g \mathbf{C}_{k^*} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

A condição adicional (LMI (3.19)(a)) se torna a condição (2.8) para o sistema (3.14) em que  $K(s) := \{\mathbf{A}_{k^*}, \mathbf{B}_{k^*}, \mathbf{C}_{k^*}, \mathbf{D}_{k^*}\}$ . Idealmente, não há conservadorismo quando  $\mathbf{A}_{k^*} = \mathbf{A}_k$  e  $\mathbf{C}_{k^*} = \mathbf{C}_k$ , levando a um procedimento iterativo para um problema de otimização que utilize LMI (3.15), apresentado a seguir, pelo Algoritmo 3.1.

Os valores de inicialização de  $\mathbf{A}_{k^*}$  e  $\mathbf{C}_{k^*}$  devem ser aqueles dos quais se esperam melhor desempenho na

---

**Algoritmo 3.1** Procedimento iterativo

---

- 1: Inicialize as matrizes  $\mathbf{A}_{k^*}$  e  $\mathbf{C}_{k^*}$  com valores arbitrários.
  - 2: **repita**
  - 3:  $\mathbf{\Lambda} \leftarrow \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} \\ \mathbf{B}_g \mathbf{C}_{k^*} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{k^*} \\ \mathbf{D}_g \mathbf{C}_{k^*} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$
  - 4: Solucione o problema de otimização, obtendo as variáveis  $\mathbf{X}_1$ ,  $\mathbf{Y}_A$  e  $\mathbf{Y}_C$
  - 5:  $\mathbf{A}_k \leftarrow (\mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{Y}_A)^T$  e  $\mathbf{C}_k \leftarrow (\mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{Y}_C)$
  - 6: **até** (Critério de parada não atingido)  
**devolve**  $\mathbf{A}_k$ ,  $\mathbf{C}_k$ ,  $\mathbf{B}_k$  e  $\mathbf{D}_k$
- 

otimização e vai ser discutido na Subseção 3.2.2.4. O critério de parada, definido pelo projetista, pode ser dependente da diferença entre os resultados de iterações consecutivas ou número de iterações, por exemplo. Essa mesma ideia de processo iterativo já foi proposta em um trabalho que trata de redução de ordem (Mazzocante and Oliveira, 2016).

*Observação 3.7.* Para recuperarmos  $\mathbf{A}_k$  e  $\mathbf{C}_k$  não dependente de parâmetros, a variável de folga  $\mathbf{X}_1$  não pode ser dependentes de parâmetros. Assim, no caso de sistemas incertos, as LMIs (3.19) são condições apenas necessárias (e não suficientes) para a LMI (3.18).

A importância de boas escolhas para  $\mathbf{\Lambda}$  será mostrada em exemplos numéricos no Capítulo 4, assim como a avaliação do procedimento iterativo proposto.

## 3.2.2 Projeto do Desacoplador

A seguir, serão apresentados três métodos de projeto de pré-compensadores que consideram as incertezas do sistema multivariável na forma politópica, com base na metodologia apresentada no início deste Capítulo, que, em resumo, define as restrições para tratar o desacoplamento.

### 3.2.2.1 Método 1

Considerando o modelo referência diagonal  $G_r(s)$  dado de forma que  $\|G_r(s)^{-1}\|_\infty < \infty$ , o projeto pode ser escrito como o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} & \min_{K(s)} \gamma \\ \text{s.a.} \quad & \begin{cases} \sigma_{\max}(G(j\omega)K(j\omega) - G_r(j\omega)) < \gamma \quad \forall \omega \in \Omega \\ G(s)K(s) - G_r(s) \text{ estável} \end{cases} \end{aligned}$$

As restrições acima podem ser convertidas em desigualdades matriciais por meio do Lema 2.9 ou 2.12, conforme o caso de  $\Omega$ . Essas desigualdades podem ser linearizadas com o método descrito na Subseção 3.1, como foi feito na Subseção 3.2, permitindo chegar aos Teoremas 3.1 e 3.2.

### Teorema 3.1 *Validade das restrições do Método 1 em todas as frequências*

Sejam dados o sistema linear invariante no tempo com incerteza politópica  $G(s, \alpha) = \{\mathbf{A}_g(\alpha), \mathbf{B}_g(\alpha), \mathbf{C}_g(\alpha), \mathbf{D}_g(\alpha)\}$ , o sistema diagonal dependente de parâmetros  $G_r(s, \alpha) = \{\mathbf{A}_r(\alpha), \mathbf{B}_r(\alpha), \mathbf{C}_r(\alpha), \mathbf{D}_r(\alpha)\}$  e o parâmetro  $\Lambda(\alpha) \in \mathbb{R}^{2(n+m) \times n_k}$ , em que  $n = n_g + n_r + n_k$ . Se existirem matrizes  $\mathbf{P}(\alpha) \in \mathbb{S}^n$ ,  $\mathbf{X}_0(\alpha) \in \mathbb{R}^{2(n+m) \times (n_g+n_r)}$ ,  $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ ,  $\mathbf{Y}_A \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ ,  $\mathbf{Y}_C \in \mathbb{R}^{n_k \times m}$ ,  $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{n_k \times m}$  e  $\mathbf{D}_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tais que  $\mathbf{P}(\alpha) > \mathbf{0}$  e

$$\mathbf{M}(\alpha) + \text{He}(\mathbf{Z}(\alpha) \boldsymbol{\Sigma}(\alpha)) < \mathbf{0}, \quad \forall \alpha \in \Lambda_N$$

em que

$$\mathbf{M}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}(\alpha) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{D}(\alpha) \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}(\alpha)^T & \mathbf{D}(\alpha)^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0(\alpha) & \Lambda(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}(\alpha) = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_r(\alpha)^T & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_r(\alpha)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{X}_1 & \mathbf{Y}_C \mathbf{B}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_A & \mathbf{Y}_C \mathbf{D}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_g(\alpha) \mathbf{D}_k \\ \mathbf{B}_r(\alpha) \\ \mathbf{B}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(\alpha) = \mathbf{D}_g(\alpha) \mathbf{D}_k - \mathbf{D}_r(\alpha)$$

então  $\mathbf{A}_k = (\mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{Y}_A)^T$ ,  $\mathbf{C}_k = (\mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{Y}_C)^T$ ,  $\mathbf{B}_k$  e  $\mathbf{D}_k$  são as matrizes do pré-compensador  $K(s) := \{\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k, \mathbf{D}_k\}$  que garantem  $G(s, \alpha)K(s) - G_r(s, \alpha)$  estável e  $\|G(s, \alpha)K(s) - G_r(s, \alpha)\|_\infty < \gamma$ , para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ .

#### Prova.

Seja  $H(s, \alpha) = G(s, \alpha)K(s) - G_r(s, \alpha)$ :

$$H(s, \alpha) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}(\alpha) & \mathbf{B}(\alpha) \\ \hline \mathbf{C}(\alpha) & \mathbf{D}(\alpha) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} \mathbf{A}_g(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{B}_g(\alpha) \mathbf{C}_k & \mathbf{B}_g(\alpha) \mathbf{D}_k \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_r(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{B}_r(\alpha) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_k & \mathbf{B}_k \\ \hline \mathbf{C}_g(\alpha) & -\mathbf{C}_r(\alpha) & \mathbf{D}_g(\alpha) \mathbf{C}_k & \mathbf{D}_g(\alpha) \mathbf{D}_k - \mathbf{D}_r(\alpha) \end{array} \right] \quad (3.22)$$

Sejam as matrizes

$$\mathbf{X}(\alpha) = \mathbf{Z}(\alpha) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0(\alpha) & \Lambda(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0(\alpha) & \Lambda(\alpha) \mathbf{X}_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha) &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_1^{-1} \end{bmatrix} \Sigma(\alpha) \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_r(\alpha)^T & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_r(\alpha)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{X}_1 & \mathbf{Y}_C \mathbf{B}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_A & \mathbf{Y}_C \mathbf{D}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_g^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_g^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_r^T & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_r^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{C}_k^T \mathbf{B}_g^T & \mathbf{0} & \mathbf{A}_k^T & \mathbf{C}_k^T \mathbf{D}_g^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A}(\alpha)^T & \mathbf{C}(\alpha)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\mathbf{X}(\alpha) \Gamma(\alpha) = \mathbf{Z}(\alpha) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_1^{-1} \end{bmatrix} \Sigma(\alpha) = \mathbf{Z}(\alpha) \Sigma(\alpha)$$

Se a condição  $\mathbf{M}(\alpha) + \text{He}(\mathbf{Z}(\alpha) \Sigma(\alpha)) < \mathbf{0}$ ,  $\forall \alpha \in \Lambda_N$ , é satisfeita, então existe  $\mathbf{X}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0(\alpha) & \Lambda(\alpha) \mathbf{X}_1 \end{bmatrix}$  tal que  $\mathbf{M}(\alpha) + \text{He}(\mathbf{X}(\alpha) \Gamma(\alpha)) < \mathbf{0}$  também é satisfeita. Além disso,  $\mathbf{P}(\alpha) > \mathbf{0}$ , então, a partir do Lema 2.9, conclui-se que  $\mathbf{A}(\alpha)$  é Hurwitz estável e a desigualdade  $\|H(j\omega, \alpha)\|_\infty < \gamma$  é válida para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ . ■

Antes de enunciar o Teorema 3.2, que trata do caso em que a faixa de frequências de interesse  $\Omega \neq \mathbb{R}$ , é importante salientar que o Lema 2.12 não garante estabilidade do sistema compensado. Portanto, para garantir isso, temos que adicionar as restrições do Lema 2.6. Nesse caso, mais produtos de variáveis surgem com as mesmas variáveis de projeto ( $\mathbf{A}_k$  e  $\mathbf{C}_k$ ), fazendo-se necessário utilizar mesmas mudanças de variáveis para recuperar de forma única essas variáveis de projeto.

### Teorema 3.2 *Validade das restrições do Método 1 em faixa finita de frequências*

Sejam dados o sistema linear invariante no tempo com incerteza politópica  $G(s, \alpha) = \{\mathbf{A}_g(\alpha), \mathbf{B}_g(\alpha), \mathbf{C}_g(\alpha), \mathbf{D}_g(\alpha)\}$ , o sistema diagonal dependente de parâmetros  $G_r(s, \alpha) = \{\mathbf{A}_r(\alpha), \mathbf{B}_r(\alpha), \mathbf{C}_r(\alpha), \mathbf{D}_r(\alpha)\}$  e os parâmetros  $\Lambda(\alpha) \in \mathbb{R}^{2(n+m) \times n_k}$ ,  $\Lambda_s(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times n_k}$  e  $\Omega$ , em que  $n = n_g + n_r + n_k$ . Se existirem matrizes  $\mathbf{P}(\alpha) \in \mathbb{S}^n$ ,  $\mathbf{P}_s(\alpha) \in \mathbb{S}^n$ ,  $\mathbf{Q}(\alpha) \in \mathbb{S}^n$ ,  $\mathbf{X}_0(\alpha) \in \mathbb{R}^{2(n+m) \times (n_g+n_r)}$ ,  $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ ,  $\mathbf{X}_{s0}(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times (n_g+n_r)}$ ,  $\mathbf{Y}_A \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ ,  $\mathbf{Y}_C \in \mathbb{R}^{n_k \times m}$ ,  $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{n_k \times m}$  e  $\mathbf{D}_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tais que  $\mathbf{Q}(\alpha) > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{P}_s(\alpha) > \mathbf{0}$  e

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(\alpha) + \text{He}(\mathbf{Z}(\alpha) \Sigma(\alpha)) &< \mathbf{0}, & \forall \alpha \in \Lambda_N \\
\mathbf{M}_s(\alpha) + \text{He}(\mathbf{Z}_s(\alpha) \Sigma_s(\alpha)) &< \mathbf{0}, & \forall \alpha \in \Lambda_N
\end{aligned}$$

em que

$$M(\alpha) = \begin{bmatrix} \Xi & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}(\alpha) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{D}(\alpha) \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}(\alpha)^T \end{bmatrix} & \mathbf{D}(\alpha)^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0(\alpha) & \Lambda(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\Sigma(\alpha) = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_r(\alpha)^T & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_r(\alpha)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{X}_1 & \mathbf{Y}_C \mathbf{B}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_A & \mathbf{Y}_C \mathbf{D}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_s(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}_s(\alpha) \\ \mathbf{P}_s(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_s(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{s0}(\alpha) & \Lambda_s(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_s(\alpha) = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_r(\alpha)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{X}_1 & \mathbf{Y}_C \mathbf{B}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_A \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_g(\alpha) \mathbf{D}_k \\ \mathbf{B}_r(\alpha) \\ \mathbf{B}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(\alpha) = \mathbf{D}_g(\alpha) \mathbf{D}_k - \mathbf{D}_r(\alpha)$$

e  $\Xi$  é dado pela Tabela 2.2, conforme  $\Omega$ . Então  $\mathbf{A}_k = (\mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{Y}_A)^T$ ,  $\mathbf{C}_k = (\mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{Y}_C)^T$ ,  $\mathbf{B}_k$  e  $\mathbf{D}_k$  são as matrizes do pré-compensador  $K(s) := \{\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k, \mathbf{D}_k\}$  que garantem  $G(s, \alpha)K(s) - G_r(s, \alpha)$  estável e  $\sigma_{max}(G(j\omega, \alpha)K(j\omega) - G_r(j\omega, \alpha)) < \gamma$  para todo  $\omega \in \Omega$  e todo  $\alpha \in \Lambda_N$ .

### Prova.

A prova pode ser feita de forma similar à do Teorema 3.1. Seja  $H(s, \alpha) = G(s, \alpha)K(s) - G_r(s, \alpha)$  representado no espaço de estados por (3.22). Defina as matrizes

$$\mathbf{X}(\alpha) = \mathbf{Z}(\alpha) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0(\alpha) & \Lambda(\alpha) \mathbf{X}_1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_1^{-1} \end{bmatrix} \Sigma(\alpha) = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \Lambda(\alpha)^T & \mathbf{C}(\alpha)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_s(\alpha) = \mathbf{Z}_s(\alpha) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{s0}(\alpha) & \Lambda_s(\alpha) \mathbf{X}_1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_s(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_1^{-1} \end{bmatrix} \Sigma_s(\alpha) = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \Lambda_s(\alpha)^T \end{bmatrix}$$

Dessa forma,

$$\mathbf{X}(\alpha) \Gamma(\alpha) = \mathbf{Z}(\alpha) \Sigma(\alpha) \quad \mathbf{X}_s(\alpha) \Gamma_s(\alpha) = \mathbf{Z}_s(\alpha) \Sigma_s(\alpha)$$

Se a condição  $M(\alpha) + He(Z(\alpha)\Sigma(\alpha)) < \mathbf{0}$ ,  $\forall \alpha \in \Lambda_N$ , é satisfeita, então existe  $X(\alpha) = \begin{bmatrix} X_0(\alpha) & \Lambda(\alpha) X_1 \end{bmatrix}$  tal que  $M(\alpha) + He(X(\alpha)\Gamma(\alpha)) < \mathbf{0}$  também é satisfeita. Além disso,  $Q(\alpha) > \mathbf{0}$ , então, com base no Lema 2.12, conclui-se que a desigualdade  $\sigma_{max}(H(j\omega, \alpha)) < \gamma$  é válida para todo  $\omega \in \Omega$  e todo  $\alpha \in \Lambda_N$ .

Se a condição  $M_s(\alpha) + He(Z_s(\alpha)\Sigma_s(\alpha)) < \mathbf{0}$ ,  $\forall \alpha \in \Lambda_N$ , por sua vez, é satisfeita, então existe  $X_s(\alpha) = \begin{bmatrix} X_{s0}(\alpha) & \Lambda_s(\alpha) X_1 \end{bmatrix}$  tal que  $M_s(\alpha) + He(X_s(\alpha)\Gamma_s(\alpha)) < \mathbf{0}$  também é satisfeita. Ademais,  $P(\alpha) > \mathbf{0}$ , então, com base no Lema 2.6, conclui-se que  $A(\alpha)$  é Hurwitz estável. ■

Por conveniência,  $\Lambda_s(\alpha)$  pode ser escolhido a partir de  $\Lambda(\alpha)$ , tomando suas  $2n$  primeiras linhas, uma vez que  $\Gamma_s(\alpha)$  é composto pelas  $2n$  primeiras colunas de  $\Gamma(\alpha)$ . Por exemplo, para  $\Lambda$  dado pela Eq. (3.20), podemos utilizar

$$\Lambda_s = \begin{bmatrix} \Lambda_{Ig} \\ \Lambda_{Ir} \\ \Lambda_{Ik} \\ \Lambda_{Ag} \\ \Lambda_{Ar} \\ \Lambda_{Ak} \end{bmatrix}$$

O projeto do desacoplador proposto consiste no Algoritmo 3.2, apresentado a seguir.

---

#### Algoritmo 3.2 Método 1

---

**Entradas:**  $A_g(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_g \times n_g}$ ,  $B_g(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_g \times m}$ ,  $C_g(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n_g}$ ,  $D_g(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $A_r(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ ,  $B_r(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_r \times m}$ ,  $C_r(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n_r}$ ,  $D_r(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\Lambda(\alpha) \in \mathbb{R}^{2(n_g+n_r+n_k) \times n_k}$  e  $\Omega$

**Requisitos:** O sistema  $G_r(s, \alpha) := \{A_r(\alpha), B_r(\alpha), C_r(\alpha), D_r(\alpha)\}$  deve ser diagonal

$\Omega$  deve ser escolhido dentre as opções da Tabela 2.2

- 1: **se**  $\Omega = \mathbb{R}$  **então**
  - 2: Solucione o Teorema 3.1, minimizando  $\gamma$   
**devolve**  $A_k = (X_1^{-1}Y_A)^T$ ,  $C_k = (X_1^{-1}Y_C)^T$ ,  $B_k$  e  $D_k$
  - 3: **senão**
  - 4:  $\Lambda_s(\alpha) \leftarrow \begin{bmatrix} I_{2(n_g+n_r+n_k)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Lambda(\alpha)$
  - 5: Solucione o Teorema 3.2, minimizando  $\gamma$   
**devolve**  $A_k = (X_1^{-1}Y_A)^T$ ,  $C_k = (X_1^{-1}Y_C)^T$ ,  $B_k$  e  $D_k$
  - 6: **fim se**
- 

#### 3.2.2.2 Método 2

O Método 1 pode ser modificado para flexibilizar o modelo de referência diagonal  $G_r(s)$ . Podemos fazer isso considerando as matrizes  $B_r$  e  $D_r$  variáveis de projeto, já que não multiplicam outras variáveis. Para manter a variável de folga  $X_0$  completamente livre, devemos definir *a priori* as matrizes  $A_r$  e  $C_r$ . Nesse caso, para garantirmos que  $G_r(s)$  seja diagonal, devemos escolher  $A_r$  e  $C_r$  diagonais por blocos, assim como restringir as variáveis  $B_r$  e  $D_r$  a diagonal por blocos e diagonal, respectivamente, sendo que  $A_r$  deve ser formada por matrizes quadradas em sua diagonal,  $C_r$  por matrizes linha,  $B_r$  por matrizes colunas:  $A_r = \text{diag}(A_{r_i})$ ,  $B_r = \text{diag}(b_{r_i})$ ,  $C_r = \text{diag}(c_{r_i})$  e  $D_r = \text{diag}(d_{r_i})$ .

Contudo, incluir como variáveis matrizes do modelo de referência diagonal  $G_r(s)$  impede que façamos uso da desigualdade (3.1) sem restringir de alguma forma  $\|G_r(s)^{-1}\|_\infty$ . O ideal seria que  $\|G_r(s)^{-1}\|_\infty$  fosse constante para que minimizar  $\|G(s)K(s) - G_r(s)\|_\infty$  significasse minimizar um limitante superior de  $\|G_r(s)^{-1}G(s)K(s) - \mathbf{I}\|_\infty$ . No entanto, essa é uma restrição muito forte, que impediria o uso de um modelo de referência dependente de parâmetros. Se não aplicarmos um limitante superior a  $\|G_r(s)^{-1}\|_\infty$ , é possível que a diminuição de  $\|G(s)K(s) - G_r(s)\|_\infty$  esteja associada à simples diminuição de  $G_r(s)$  e  $K(s)$ , que aumenta automaticamente  $\|G_r(s)^{-1}\|_\infty$ , não dando garantia da diminuição de  $\|G_r(s)^{-1}G(s)K(s) - \mathbf{I}\|_\infty$ .

Como lidar diretamente com  $G_r(s)^{-1}$  envolve o produto entre  $\mathbf{B}_r$ ,  $\mathbf{C}_r$  e  $\mathbf{D}_r^{-1}$ , para obtermos restrições com LMIs, temos que limitar superiormente  $\|G_r(s)^{-1}\|_\infty$  limitando inferiormente  $\sigma_{\min}(G_r(j\omega))$  em alguma faixa de frequência de interesse  $\Omega_r$ . Podemos fazer isso limitando superiormente  $\sigma_{\max}(G_r(j\omega) - \mathbf{I})$  nessa faixa, forçando com que  $G_r(j\omega)$  se aproxime de  $\mathbf{I}$  para  $\omega \in \Omega_r$ .

### Teorema 3.3

Sejam uma matriz de transferência diagonal  $G_r(s) = \text{diag}(g_{ri}(s))$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sem polos no eixo imaginário e uma constante  $m_r \in \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ . Se  $\sigma_{\max}(G_r(j\omega) - \mathbf{I}) < m_r$ , então  $\sigma_{\max}(G_r(j\omega)^{-1}) < \frac{1}{1-m_r}$ .

#### Prova.

Os valores singulares de  $G_r(j\omega)$  são os módulos de  $g_{ri}(j\omega)$ , uma vez que

$$G_r(j\omega)^* G_r(j\omega) = \text{diag}(g_{ri}(j\omega)^* g_{ri}(j\omega)) = \text{diag}(|g_{ri}(j\omega)|^2)$$

$$\therefore \sigma_i(G_r(j\omega)) = |g_{ri}(j\omega)|, \quad i = 1, \dots, m$$

Por esse mesmo raciocínio, as matrizes de transferência diagonais  $G_r(j\omega)^{-1} = \text{diag}(g_{ri}(j\omega)^{-1})$  e  $G_r(j\omega) - \mathbf{I} = \text{diag}(g_{ri}(j\omega) - 1)$  possuem os seguintes valores singulares:

$$\sigma_i(G_r(j\omega)^{-1}) = |g_{ri}(j\omega)^{-1}| = |g_{ri}(j\omega)|^{-1}, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sigma_i(G_r(j\omega) - \mathbf{I}) = |g_{ri}(j\omega) - 1|, \quad i = 1, \dots, m$$

Se  $\sigma_{\max}(G_r(j\omega) - \mathbf{I}) < m_r$ , então  $\sigma_i(G_r(j\omega) - \mathbf{I}) = |g_{ri}(j\omega) - 1| < m_r$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Ou seja,  $g_{ri}(j\omega)$  assume valores complexos restritos ao disco aberto de raio  $m_r$  centrado em 1. Portanto,  $|g_{ri}(j\omega)| > 1 - m_r$ , uma vez que  $m_r < 1$ . Consequentemente,  $|g_{ri}(j\omega)|^{-1} < \frac{1}{1-m_r}$ , limitando superiormente os valores singulares de  $G_r(j\omega)^{-1}$  a  $\frac{1}{1-m_r}$ . ■

Dessa forma, o Método 2 consiste basicamente no Método 1, adicionando as variáveis  $\mathbf{B}_r$  e  $\mathbf{D}_r$  e a seguinte restrição

$$\sigma_{\max}(G_r(j\omega) - \mathbf{I}) < m_r, \quad \forall \omega \in \Omega_r \quad (3.23)$$

em que  $m_r$  é um parâmetro que diz respeito à margem com que  $G_r(j\omega)$  pode se afastar de  $\mathbf{I}$  dentro da faixa de frequências  $\Omega_r$ . É essencial que  $0 < m_r < 1$  e  $\Omega_r \subseteq \Omega$ , para que a limitação de  $\sigma_{max}(G_r(j\omega)^{-1})$  aconteça dentro de  $\Omega$  e impeça que  $G_r(j\omega) = 0, \forall \omega \in \Omega$ . Isso garante  $K(s) \neq 0$ , mas fora de  $\Omega_r$ ,  $G_r(s)$  e  $K(s)$  poderiam se tornar desprezíveis, o que deve ser considerado ao definir  $\Omega_r$ , com base nos objetivos para o sistema compensado.

Então, o Método 2 consiste no seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \min_{K(s)} \gamma \\ \text{s.a.} \quad & \begin{cases} \sigma_{max}(G(j\omega)K(j\omega) - G_r(j\omega)) < \gamma & \forall \omega \in \Omega \\ G(s)K(s) - G_r(s) \text{ estável} \\ \sigma_{max}(G_r(j\omega) - \mathbf{I}) < m_r & \forall \omega \in \Omega_r \subseteq \Omega \end{cases} \end{aligned}$$

Para tratar as restrições acima na forma de LMIs, o Método 2 utiliza os seguintes Teoremas:

### Teorema 3.4 *Validade das restrições do Método 2 em todas as frequências*

Sejam dados o sistema linear invariante no tempo com incerteza politópica  $G(s, \alpha) = \{\mathbf{A}_g(\alpha), \mathbf{B}_g(\alpha), \mathbf{C}_g(\alpha), \mathbf{D}_g(\alpha)\}$ , o parâmetro  $\Lambda(\alpha) \in \mathbb{R}^{2(n+m) \times n_k}$ , as matrizes  $\mathbf{A}_{r_i}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_{r_i} \times n_{r_i}}$  Hurwitz estáveis e os vetores  $\mathbf{c}_{r_i}(\alpha) \in \mathbb{R}^{1 \times n_{r_i}}, i = 1, \dots, m, m_r \in \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$  e  $\Omega_r$ , em que  $n = n_g + n_r + n_k$  e  $n_r = \sum_{i=1}^m n_{r_i}$ . Se existirem matrizes  $\mathbf{P}(\alpha) \in \mathbb{S}^n, \mathbf{X}_0(\alpha) \in \mathbb{R}^{2(n+m) \times (n_g+n_r)}, \mathbf{P}_r(\alpha) \in \mathbb{S}^{n_r}, \mathbf{Q}_r(\alpha) \in \mathbb{S}^{n_r}, \mathbf{X}_r(\alpha) \in \mathbb{R}^{2(n_r+m) \times n_r}, \mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}, \mathbf{Y}_A \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}, \mathbf{Y}_C \in \mathbb{R}^{n_k \times m}, \mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{n_k \times m}, \mathbf{D}_k \in \mathbb{R}^{m \times m}, \mathbf{b}_{r_i}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_{r_i} \times 1}$  e  $d_{r_i}(\alpha) \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$ , tais que  $\mathbf{P}(\alpha) > \mathbf{0}, \mathbf{Q}_r(\alpha) > \mathbf{0}$  e

$$\begin{aligned} M(\alpha) + He(\mathbf{Z}(\alpha)\Sigma(\alpha)) &< \mathbf{0}, & \forall \alpha \in \Lambda_N \\ M_r(\alpha) + He(\mathbf{X}_r(\alpha)\Gamma_r(\alpha)) &< \mathbf{0}, & \forall \alpha \in \Lambda_N \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} M(\alpha) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}(\alpha) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{D}(\alpha) \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}(\alpha)^T & \mathbf{D}(\alpha)^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0(\alpha) & \Lambda(\alpha) \end{bmatrix} \\ \Sigma(\alpha) &= \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_r(\alpha)^T & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_r(\alpha)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{X}_1 & \mathbf{Y}_C \mathbf{B}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_A & \mathbf{Y}_C \mathbf{D}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ M_r(\alpha) &= \begin{bmatrix} \Xi_r & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_r(\alpha) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & -m_r^2 \mathbf{I} & \mathbf{I} - \mathbf{D}_r(\alpha) \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_r(\alpha)^T \end{bmatrix} & \mathbf{I} - \mathbf{D}_r(\alpha)^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_r(\alpha) = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A}_r(\alpha)^T & \mathbf{C}_r(\alpha)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_g(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{D}_k \\ \mathbf{B}_r(\boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{B}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{D}_g(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{D}_k - \mathbf{D}_r(\boldsymbol{\alpha})$$

$$\mathbf{A}_r(\boldsymbol{\alpha}) = \text{diag}(\mathbf{A}_{r_i}(\boldsymbol{\alpha})), \mathbf{B}_r(\boldsymbol{\alpha}) = \text{diag}(\mathbf{b}_{r_i}(\boldsymbol{\alpha})), \mathbf{C}_r(\boldsymbol{\alpha}) = \text{diag}(\mathbf{c}_{r_i}(\boldsymbol{\alpha})), \mathbf{D}_r(\boldsymbol{\alpha}) = \text{diag}(d_{r_i}(\boldsymbol{\alpha}))$$

e  $\Xi_r$  é dado pela Tabela 2.2, conforme  $\Omega_r$ . Então  $\mathbf{A}_k = (\mathbf{X}_1^{-1}\mathbf{Y}_A)^T$ ,  $\mathbf{C}_k = (\mathbf{X}_1^{-1}\mathbf{Y}_C)^T$ ,  $\mathbf{B}_k$  e  $\mathbf{D}_k$  são as matrizes do pré-compensador  $K(s) = \{\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k, \mathbf{D}_k\}$  que garantem, para todo  $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N$ ,  $G(s, \boldsymbol{\alpha})K(s) - G_r(s, \boldsymbol{\alpha})$  estável,  $\|G(s, \boldsymbol{\alpha})K(s) - G_r(s, \boldsymbol{\alpha})\|_\infty < \gamma$  e  $\sigma_{\max}(G_r(j\omega, \boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{I}) < m_r$ ,  $\forall \omega \in \Omega_r$ , em que  $G_r(s, \boldsymbol{\alpha}) = \{\mathbf{A}_r(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{B}_r(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{C}_r(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{D}_r(\boldsymbol{\alpha})\}$ .

### Prova.

A prova segue o mesmo desenvolvimento da prova do Teorema 3.1, adicionando-se que se as LMIs  $M_r(\boldsymbol{\alpha}) + He(\mathbf{X}_r(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\Gamma}_r(\boldsymbol{\alpha})) < \mathbf{0}$  e  $\mathbf{Q}_r(\boldsymbol{\alpha}) > \mathbf{0}$  forem satisfeitas, então, pelo Lema 2.12, a desigualdade  $\sigma_{\max}(G_r(j\omega, \boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{I}) = \sigma_{\max}(\mathbf{I} - G_r(j\omega, \boldsymbol{\alpha})) < m_r$  é válida para todo  $\omega \in \Omega_r$  e para todo  $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N$ . ■

### Teorema 3.5 Validade das restrições do Método 2 em faixa finita de frequências

Sejam dados o sistema linear invariante no tempo com incerteza politópica  $G(s, \boldsymbol{\alpha}) = \{\mathbf{A}_g(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{B}_g(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{C}_g(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{D}_g(\boldsymbol{\alpha})\}$ , os parâmetros  $\Lambda(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{2(n+m) \times n_k}$  e  $\Lambda_s(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{2n \times n_k}$ , as matrizes  $\mathbf{A}_{r_i}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{n_{r_i} \times n_{r_i}}$  Hurwitz estáveis e os vetores  $\mathbf{c}_{r_i}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{1 \times n_{r_i}}, i = 1, \dots, m$ ,  $m_r \in \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$   $\Omega$  e  $\Omega_r$ , em que  $n = n_g + n_r + n_k$  e  $n_r = \sum_{i=1}^m n_{r_i}$ . Se existirem matrizes  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{S}^n$ ,  $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{S}^n$ ,  $\mathbf{X}_0(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{2(n+m) \times (n_g+n_r)}$ ,  $\mathbf{P}_s(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{S}^n$ ,  $\mathbf{X}_{s0}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{2n \times (n_g+n_r)}$ ,  $\mathbf{P}_r(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{S}^{n_r}$ ,  $\mathbf{Q}_r(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{S}^{n_r}$ ,  $\mathbf{X}_r(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{2(n_r+m) \times n_r}$ ,  $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ ,  $\mathbf{Y}_A \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ ,  $\mathbf{Y}_C \in \mathbb{R}^{n_k \times m}$ ,  $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{n_k \times m}$ ,  $\mathbf{D}_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\mathbf{b}_{r_i}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{n_{r_i} \times 1}$  e  $d_{r_i}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$ , tais que  $\mathbf{P}_s(\boldsymbol{\alpha}) > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}) > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{Q}_r(\boldsymbol{\alpha}) > \mathbf{0}$  e

$$\begin{aligned} M(\boldsymbol{\alpha}) + He(\mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\alpha})) &< \mathbf{0}, & \forall \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N \\ M_s(\boldsymbol{\alpha}) + He(\mathbf{Z}_s(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\Sigma}_s(\boldsymbol{\alpha})) &< \mathbf{0}, & \forall \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N \\ M_r(\boldsymbol{\alpha}) + He(\mathbf{X}_r(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\Gamma}_r(\boldsymbol{\alpha})) &< \mathbf{0}, & \forall \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} M(\boldsymbol{\alpha}) &= \begin{bmatrix} \Xi & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{D}(\boldsymbol{\alpha}) \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})^T \end{bmatrix} & \mathbf{D}(\boldsymbol{\alpha})^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0(\boldsymbol{\alpha}) & \Lambda(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\alpha}) &= \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_g(\boldsymbol{\alpha})^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_g(\boldsymbol{\alpha})^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_r(\boldsymbol{\alpha})^T & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_r(\boldsymbol{\alpha})^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{X}_1 & \mathbf{Y}_C \mathbf{B}_g(\boldsymbol{\alpha})^T & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_A & \mathbf{Y}_C \mathbf{D}_g(\boldsymbol{\alpha})^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$M_s(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}_s(\alpha) \\ \mathbf{P}_s(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad Z_s(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{s0}(\alpha) & \Lambda_s(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_s(\alpha) = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_r(\alpha)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{X}_1 & \mathbf{Y}_C \mathbf{B}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_A \end{bmatrix}$$

$$M_r(\alpha) = \begin{bmatrix} \Xi_r & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_r(\alpha) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & -m_r^2 \mathbf{I} & \mathbf{I} - \mathbf{D}_r(\alpha) \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_r(\alpha)^T \end{bmatrix} & \mathbf{I} - \mathbf{D}_r(\alpha)^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_r(\alpha) = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A}_r(\alpha)^T & \mathbf{C}_r(\alpha)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_g(\alpha) \mathbf{D}_k \\ \mathbf{B}_r(\alpha) \\ \mathbf{B}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(\alpha) = \mathbf{D}_g(\alpha) \mathbf{D}_k - \mathbf{D}_r(\alpha)$$

$$\mathbf{A}_r(\alpha) = \text{diag}(\mathbf{A}_{ri}(\alpha)), \quad \mathbf{B}_r(\alpha) = \text{diag}(\mathbf{b}_{ri}(\alpha)), \quad \mathbf{C}_r(\alpha) = \text{diag}(\mathbf{c}_{ri}(\alpha)), \quad \mathbf{D}_r(\alpha) = \text{diag}(d_{ri}(\alpha))$$

e  $\Xi$  e  $\Xi_r$  são dados pela Tabela 2.2, conforme  $\Omega$  e  $\Omega_r$ , respectivamente. Então  $\mathbf{A}_k = (\mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{Y}_A)^T$ ,  $\mathbf{C}_k = (\mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{Y}_C)^T$ ,  $\mathbf{B}_k$  e  $\mathbf{D}_k$  são as matrizes do pré-compensador  $K(s) = \{\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k, \mathbf{D}_k\}$  que garantem, para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ ,  $G(s, \alpha)K(s) - G_r(s, \alpha)$  estável,  $\sigma_{\max}(G(j\omega, \alpha)K(j\omega) - G_r(j\omega, \alpha)) < \gamma$ ,  $\forall \omega \in \Omega$  e  $\sigma_{\max}(G_r(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}) < m_r$ ,  $\forall \omega \in \Omega_r$ , em que  $G_r(s, \alpha) = \{\mathbf{A}_r(\alpha), \mathbf{B}_r(\alpha), \mathbf{C}_r(\alpha), \mathbf{D}_r(\alpha)\}$ .

#### Prova.

A prova segue o mesmo desenvolvimento da prova do Teorema 3.2, adicionando-se que se as LMIs  $M_r(\alpha) + \text{He}(\mathbf{X}_r(\alpha)\Gamma_r(\alpha)) < \mathbf{0}$  e  $\mathbf{Q}_r(\alpha) > \mathbf{0}$  forem satisfeitas, então, pelo Lema 2.12, a desigualdade  $\sigma_{\max}(G_r(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}) = \sigma_{\max}(\mathbf{I} - G_r(j\omega, \alpha)) < m_r$  é válida para todo  $\omega \in \Omega_r$  e para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ . ■

Agora, o Método 2 pode ser enunciado formalmente, por meio do Algoritmo 3.3.

### 3.2.2.3 Método 3

Uma extensão lógica ao Método 2 é incluir  $\mathbf{A}_r$  e  $\mathbf{C}_r$  também como variáveis de projeto, resultando no mesmo problema de otimização:

$$\min_{K(s)} \gamma$$

---

**Algoritmo 3.3 Método 2**


---

**Entradas:**  $\mathbf{A}_g(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{n_g \times n_g}$ ,  $\mathbf{B}_g(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{n_g \times m}$ ,  $\mathbf{C}_g(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{m \times n_g}$ ,  $\mathbf{D}_g(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\mathbf{A}_{r_i}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{n_{r_i} \times n_{r_i}}$ ,  $\mathbf{c}_{r_i}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{1 \times n_{r_i}}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{2(n_g+n_r+n_k+m) \times n_k}$ ,  $m_r \in \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  e  $\Omega_r$

**Requisitos:** As matrizes  $\mathbf{A}_{r_i}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{n_{r_i} \times n_{r_i}}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , devem ser Hurwitz estáveis

$$0 < m_r < 1$$

$\Omega$  e  $\Omega_r$  devem ser escolhidos dentre as opções da Tabela 2.2

$$\Omega_r \subseteq \Omega$$

1: **se**  $\Omega = \mathbb{R}$  **então**

2: Solucione o Teorema 3.4, minimizando  $\gamma$

$$\text{devolve } \mathbf{A}_k = (\mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{Y}_A)^T, \mathbf{C}_k = (\mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{Y}_C)^T, \mathbf{B}_k \text{ e } \mathbf{D}_k$$

3: **senão**

$$4: \boldsymbol{\Lambda}_s(\boldsymbol{\alpha}) \leftarrow \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2(n_g+n_r+n_k)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha})$$

5: Solucione o Teorema 3.5, minimizando  $\gamma$

$$\text{devolve } \mathbf{A}_k = (\mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{Y}_A)^T, \mathbf{C}_k = (\mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{Y}_C)^T, \mathbf{B}_k \text{ e } \mathbf{D}_k$$

6: **fim se**

---

$$s.a. \quad \begin{cases} \sigma_{max}(G(j\omega)K(j\omega) - G_r(j\omega)) < \gamma & \forall \omega \in \Omega \\ G(s)K(s) - G_r(s) & \text{estável} \\ \sigma_{max}(G_r(j\omega) - \mathbf{I}) < m_r & \forall \omega \in \Omega_r \subseteq \Omega \end{cases}$$

Nesse caso, porém, a variável de folga  $\mathbf{X}$  deve ser reformulada, assim como a estrutura de  $\boldsymbol{\Gamma}$  das versões LMI das restrições acima.

As estruturas de  $\mathbf{A}_r$  e  $\mathbf{C}_r$  devem ser diagonais por blocos para garantir  $G_r(s)$  diagonal, como discutido na Subseção 3.2.2.2. Dessa forma,  $\boldsymbol{\Gamma}$  possui a seguinte estrutura:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_g^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{g1,:}^T & \cdots & \mathbf{C}_{gm,:}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{r1}^T & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{c}_{r1}^T & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{rm}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{c}_{rm}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{C}_k^T \mathbf{B}_g^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_k^T & \mathbf{C}_k^T \mathbf{D}_{g1,:}^T & \cdots & \mathbf{C}_k^T \mathbf{D}_{gm,:}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Considerando as variáveis  $\mathbf{A}_{r_i}^T$ ,  $\mathbf{c}_{r_i}^T$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\mathbf{A}_k^T$  e  $\mathbf{C}_k^T$ , a variável de folga  $\mathbf{X}$  deve ter a seguinte estrutura:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 & \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{X}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Lambda}_{m+1} \mathbf{X}_{m+1} \end{bmatrix}$$

resultando em

$$\mathbf{X}\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 & \Lambda_1 & \cdots & \Lambda_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_g^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{X}_1 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{\mathbf{A}_{r1}} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{X}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Y}_{\mathbf{A}_{rm}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{X}_{m+1} & \mathbf{Y}_{\mathbf{C}_k} \mathbf{B}_g^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ & & & & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{g1,:}^T & \cdots & \mathbf{C}_{gm,:}^T & \mathbf{0} \\ & & & & \mathbf{0} & -\mathbf{y}_{\mathbf{C}_{r1}} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{y}_{\mathbf{C}_{rm}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_{\mathbf{A}_k} & [ & \mathbf{Y}_{\mathbf{C}_k} \mathbf{D}_g^T & ] & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

O fato de  $\mathbf{A}_r$  e  $\mathbf{C}_r$  agora serem variáveis também repercute nas LMIs relacionadas às restrições (3.23) e de estabilidade, pois  $\mathbf{X}_r$  e  $\mathbf{X}_{s0}$  também precisam assumir estruturas que lidem com as variáveis  $\mathbf{A}_{ri}^T$ ,  $\mathbf{C}_{ri,:}^T$ ,  $i = 1, \dots, m$  em  $\Gamma_r$ :

$$\begin{aligned}
\Gamma_r &= \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A}_r^T & -\mathbf{C}_r^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{r1}^T & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{c}_{r1}(\boldsymbol{\alpha})^T & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{rm}^T & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{c}_{rm}(\boldsymbol{\alpha})^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
\mathbf{X}_r &= \begin{bmatrix} \Lambda_{r1} \mathbf{X}_1 & \cdots & \Lambda_{rm} \mathbf{X}_m \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_s &= \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_g^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{r1}^T & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{rm}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{C}_k^T \mathbf{B}_g^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_k^T \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{X}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{s0} & \Lambda_{s1} \mathbf{X}_1 & \cdots & \Lambda_{sm+1} \mathbf{X}_{m+1} \end{bmatrix}$$

Assim, os produtos  $\mathbf{X}_r \Gamma_r$  e  $\mathbf{X}_s \Gamma_s$  se tornam lineares e com mesmas variáveis de  $\mathbf{X}\Gamma$ , permitindo recuperar de forma única as variáveis  $\mathbf{A}_{ri}^T$ ,  $\mathbf{C}_{ri,:}^T$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\mathbf{A}_k^T$  e  $\mathbf{C}_k^T$ :

$$\mathbf{X}_r \Gamma_r = \begin{bmatrix} \Lambda_{r1} & \cdots & \Lambda_{rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{X}_1 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{\mathbf{A}_{r1}} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{X}_m & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Y}_{\mathbf{A}_{rm}} \\ & & & & & & -\mathbf{y}_{\mathbf{C}_{r1}} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{y}_{\mathbf{C}_{rm}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{X}_s \Gamma_s = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{s0} & \Lambda_{s1} & \cdots & \Lambda_{sm+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{X}_1 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{X}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{X}_{m+1} \\ & & & & & \mathbf{A}_g^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{\mathbf{A}_{r1}} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Y}_{\mathbf{A}_{rm}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_{\mathbf{C}_k} \mathbf{B}_g^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{\mathbf{A}_k} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

### Teorema 3.6 *Validade das restrições do Método 3 em todas as frequências*

Sejam dados o sistema linear invariante no tempo com incerteza politópica  $G(s, \alpha) = \{\mathbf{A}_g(\alpha), \mathbf{B}_g(\alpha), \mathbf{C}_g(\alpha), \mathbf{D}_g(\alpha)\}$ , os parâmetros  $\Lambda_{ri}(\alpha) \in \mathbb{R}^{2(n_r+m) \times n_{ri}}$ ,  $\Lambda_i(\alpha) \in \mathbb{R}^{2(n+m) \times n_{ri}}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\Lambda_{m+1}(\alpha) \in \mathbb{R}^{2(n+m) \times n_k}$ ,  $m_r \in \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$  e  $\Omega_r$ , em que  $n = n_g + n_r + n_k$  e  $n_r = \sum_{i=1}^m n_{ri}$ . Se existirem matrizes  $\mathbf{P}(\alpha) \in \mathbb{S}^n$ ,  $\mathbf{X}_0(\alpha) \in \mathbb{R}^{2(n+m) \times n_g}$ ,  $\mathbf{P}_r(\alpha) \in \mathbb{S}^{n_r}$ ,  $\mathbf{Q}_r(\alpha) \in \mathbb{S}^{n_r}$ ,  $\mathbf{X}_{m+1} \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ ,  $\mathbf{Y}_{\mathbf{A}_k} \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ ,  $\mathbf{Y}_{\mathbf{C}_k} \in \mathbb{R}^{n_k \times m}$ ,  $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{n_k \times m}$ ,  $\mathbf{D}_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^{n_{ri} \times n_{ri}}$ ,  $\mathbf{Y}_{\mathbf{A}_{ri}}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_{ri} \times n_{ri}}$ ,  $\mathbf{y}_{\mathbf{C}_{ri}}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_{ri} \times 1}$ ,  $\mathbf{b}_{ri}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_{ri} \times 1}$  e  $d_{ri}(\alpha) \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , tais que  $\mathbf{P}(\alpha) > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{Q}_r(\alpha) > \mathbf{0}$  e

$$\begin{aligned} M(\alpha) + He(\mathbf{Z}(\alpha) \Sigma(\alpha)) &< \mathbf{0}, & \forall \alpha \in \Lambda_N \\ M_r(\alpha) + He(\mathbf{Z}_r(\alpha) \Sigma_r(\alpha)) &< \mathbf{0}, & \forall \alpha \in \Lambda_N \end{aligned}$$

em que

$$M(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}(\alpha) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{D}(\alpha) \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}(\alpha)^T & \mathbf{D}(\alpha)^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0(\alpha) & \Lambda_1(\alpha) & \cdots & \Lambda_{m+1}(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\Sigma(\alpha) = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{X}_1 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{\mathbf{A}_{r_1}}(\alpha) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{X}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Y}_{\mathbf{A}_{r_m}}(\alpha) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{X}_{m+1} & \mathbf{Y}_{\mathbf{C}_k} \mathbf{B}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{0} & & \mathbf{C}_g(\alpha)^T & & & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{0} & & \begin{bmatrix} -\mathbf{y}_{\mathbf{C}_{r_1}}(\alpha) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{y}_{\mathbf{C}_{r_m}}(\alpha) \end{bmatrix} & & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{Y}_{\mathbf{A}_k} & & \mathbf{Y}_{\mathbf{C}_k} \mathbf{D}_g(\alpha)^T & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_r(\alpha) = \begin{bmatrix} \Xi_r & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_r(\alpha) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & -m_r^2 \mathbf{I} & \mathbf{I} - \mathbf{D}_r(\alpha) \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_r(\alpha)^T \end{bmatrix} & \mathbf{I} - \mathbf{D}_r(\alpha)^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_r(\alpha) = [\Lambda_{r_1}(\alpha) \quad \cdots \quad \Lambda_{r_m}(\alpha)]$$

$$\Sigma_r(\alpha) = \begin{bmatrix} -\mathbf{X}_1 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{\mathbf{A}_{r_1}}(\alpha) & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{y}_{\mathbf{C}_{r_1}}(\alpha) & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{X}_m & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Y}_{\mathbf{A}_{r_m}}(\alpha) & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{y}_{\mathbf{C}_{r_m}}(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_g(\alpha) \mathbf{D}_k \\ \mathbf{B}_r(\alpha) \\ \mathbf{B}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(\alpha) = \mathbf{D}_g(\alpha) \mathbf{D}_k - \mathbf{D}_r(\alpha)$$

$$\mathbf{B}_r(\alpha) = \text{diag}(\mathbf{b}_{r_i}(\alpha)) \quad \mathbf{D}_r(\alpha) = \text{diag}(d_{r_i}(\alpha))$$

e  $\Xi_r$  é dado pela Tabela 2.2, conforme  $\Omega_r$ . Então  $\mathbf{A}_k = (\mathbf{X}_{m+1}^{-1} \mathbf{Y}_{\mathbf{A}_k})^T$ ,  $\mathbf{C}_k = (\mathbf{X}_{m+1}^{-1} \mathbf{Y}_{\mathbf{C}_k})^T$ ,  $\mathbf{B}_k$  e  $\mathbf{D}_k$  são as matrizes do pré-compensador  $K(s) = \{\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k, \mathbf{D}_k\}$  que garantem, para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ ,  $G(s, \alpha)K(s) - G_r(s, \alpha)$  estável,  $\|G(s, \alpha)K(s) - G_r(s, \alpha)\|_\infty < \gamma$  e  $\sigma_{max}(G_r(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}) < m_r$ ,  $\forall \omega \in \Omega_r$ , em que  $\mathbf{A}_{r_i}(\alpha) = (\mathbf{X}_i^{-1} \mathbf{Y}_{\mathbf{A}_{r_i}})^T$ ,  $\mathbf{c}_{r_i}(\alpha) = (\mathbf{X}_i^{-1} \mathbf{y}_{\mathbf{C}_{r_i}})^T$ ,  $\mathbf{A}_r(\alpha) = \text{diag}(\mathbf{A}_{r_i}(\alpha))$ ,  $\mathbf{C}_r(\alpha) = \text{diag}(\mathbf{c}_{r_i}(\alpha))$  e  $G_r(s, \alpha) = \{\mathbf{A}_r(\alpha), \mathbf{B}_r(\alpha), \mathbf{C}_r(\alpha), \mathbf{D}_r(\alpha)\}$ .

### Prova.

Seja  $H(s, \alpha) = G(s, \alpha)K(s) - G_r(s, \alpha)$ :

$$H(s, \alpha) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}(\alpha) & \mathbf{B}(\alpha) \\ \hline \mathbf{C}(\alpha) & \mathbf{D}(\alpha) \end{array} \right] =$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cc} \mathbf{A}_g(\alpha) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{B}_g(\alpha)\mathbf{C}_k & \mathbf{B}_g(\alpha)\mathbf{D}_k \\ \mathbf{0} & \left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{A}_{r1}(\alpha) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{rm}(\alpha) \end{array} \right] & & & \mathbf{0} & \mathbf{B}_r(\alpha) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_k & \mathbf{B}_k \\ \hline \mathbf{C}_g(\alpha) & \left[ \begin{array}{ccc} -\mathbf{c}_{ri}(\alpha) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{c}_{ri}(\alpha) \end{array} \right] & & & \mathbf{D}_g(\alpha)\mathbf{C}_k & \mathbf{D}_g(\alpha)\mathbf{D}_k - \mathbf{D}_r(\alpha) \end{array} \right] \quad (3.27)$$

Sejam as matrizes

$$\mathbf{X}(\alpha) = \mathbf{Z}(\alpha) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_1 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{X}_{m+1} \end{bmatrix} = \left[ \mathbf{X}_0(\alpha) \quad \Lambda_1(\alpha)\mathbf{X}_1 \quad \cdots \quad \Lambda_{m+1}(\alpha)\mathbf{X}_{m+1} \right]$$

$$\mathbf{\Gamma}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_1^{-1} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}_m^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{X}_{m+1}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{\Sigma}(\alpha)$$

$$= \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{r1}(\alpha)^T & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{rm}(\alpha)^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{C}_k^T \mathbf{B}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_k^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left[ \begin{array}{ccc} -\mathbf{c}_{r1}(\alpha)^T & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{c}_{rm}(\alpha)^T \end{array} \right] & \mathbf{0} \\ \vdots & & \vdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_k^T \mathbf{D}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_g^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_g^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_r^T & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_r^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{C}_k^T \mathbf{B}_g^T & \mathbf{0} & \mathbf{A}_k^T & \mathbf{C}_k^T \mathbf{D}_g^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \left[ -\mathbf{I} \quad \mathbf{A}(\alpha)^T \quad \mathbf{C}(\alpha)^T \quad \mathbf{0} \right]$$

$$\mathbf{X}_r(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{Z}_r(\boldsymbol{\alpha}) \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}_m \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\Lambda}_{r1}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{X}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Lambda}_{rm}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{X}_m]$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}_r(\boldsymbol{\alpha}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^{-1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}_m^{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_r(\boldsymbol{\alpha}) \\ &= \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{r1}(\boldsymbol{\alpha})^T & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{c}_{r1}(\boldsymbol{\alpha})^T & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{rm}(\boldsymbol{\alpha})^T & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{c}_{rm}(\boldsymbol{\alpha})^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= [-\mathbf{I} \quad \mathbf{A}_r(\boldsymbol{\alpha})^T \quad -\mathbf{C}_r(\boldsymbol{\alpha})^T \quad \mathbf{0}] \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha}) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_1^{-1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}_{m+1}^{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\alpha})$$

$$\mathbf{X}_r(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Gamma}_r(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{Z}_r(\boldsymbol{\alpha}) \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^{-1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}_m^{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_r(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{Z}_r(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Sigma}_r(\boldsymbol{\alpha})$$

Se a condição  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\alpha}) + \text{He}(\mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\alpha})) < \mathbf{0}$ ,  $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N$ , é satisfeita, então existe  $\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}) = [\mathbf{X}_0(\boldsymbol{\alpha}) \quad \boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{X}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Lambda}_{m+1}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{X}_{m+1}]$  tal que  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\alpha}) + \text{He}(\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha})) < \mathbf{0}$  também é satisfeita. Além disso,  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) > \mathbf{0}$ , então, a partir do Lema 2.9, conclui-se que  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})$  é Hurwitz estável e a desigualdade  $\|H(j\omega, \boldsymbol{\alpha})\|_\infty < \gamma$  é válida para todo  $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N$ .

Ainda, se a condição  $\mathbf{M}_r(\boldsymbol{\alpha}) + \text{He}(\mathbf{Z}_r(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Sigma}_r(\boldsymbol{\alpha})) < \mathbf{0}$ ,  $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N$ , é satisfeita, então existe  $\mathbf{X}_r(\boldsymbol{\alpha}) = [\boldsymbol{\Lambda}_{r1}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{X}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Lambda}_{rm}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{X}_m]$  tal que  $\mathbf{M}_r(\boldsymbol{\alpha}) + \text{He}(\mathbf{X}_r(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Gamma}_r(\boldsymbol{\alpha})) < \mathbf{0}$  também é satisfeita. Além disso,  $\mathbf{Q}_r(\boldsymbol{\alpha}) > \mathbf{0}$ , então, pelo Lema 2.12, a desigualdade  $\sigma_{max}(G_r(j\omega, \boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{I}) = \sigma_{max}(\mathbf{I} - G_r(j\omega, \boldsymbol{\alpha})) < m_r$  é válida para todo  $\omega \in \Omega_r$  e para todo  $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N$ . ■

### Teorema 3.7 Validade das restrições do Método 3 em faixa finita de frequências

Sejam dados o sistema linear invariante no tempo com incerteza politópica  $G(s, \boldsymbol{\alpha}) = \{\mathbf{A}_g(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{B}_g(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{C}_g(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{D}_g(\boldsymbol{\alpha})\}$ , os parâmetros  $\boldsymbol{\Lambda}_{r_i}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{2(n_r+m) \times n_{r_i}}$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}_{s_i}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{2n \times n_{r_i}}$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}_i(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{2(n+m) \times n_{r_i}}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}_{s_{m+1}}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{2n \times n_k}$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}_{m+1}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{2(n+m) \times n_k}$ ,  $m_r \in$

$\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$  e  $\Omega_r$ , em que  $n = n_g + n_r + n_k$  e  $n_r = \sum_{i=1}^m n_{ri}$ . Se existirem matrizes  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{S}^n$ ,  $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{S}^n$ ,  $\mathbf{X}_0(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{2(n+m) \times n_g}$ ,  $\mathbf{P}_s(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{S}^n$ ,  $\mathbf{X}_{s0}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{2n \times n_g}$ ,  $\mathbf{P}_r(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{S}^{n_r}$ ,  $\mathbf{Q}_r(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{S}^{n_r}$ ,  $\mathbf{X}_{m+1} \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ ,  $\mathbf{Y}_{\mathbf{A}_k} \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ ,  $\mathbf{Y}_{\mathbf{C}_k} \in \mathbb{R}^{n_k \times m}$ ,  $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{n_k \times m}$ ,  $\mathbf{D}_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^{n_{ri} \times n_{ri}}$ ,  $\mathbf{Y}_{\mathbf{A}_{r_i}}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{n_{ri} \times n_{ri}}$ ,  $\mathbf{y}_{\mathbf{C}_{r_i}}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{n_{ri} \times 1}$ ,  $\mathbf{b}_{r_i}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{n_{ri} \times 1}$  e  $d_{r_i}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , tais que  $\mathbf{P}_s(\boldsymbol{\alpha}) > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}) > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{Q}_r(\boldsymbol{\alpha}) > \mathbf{0}$  e

$$\begin{aligned} M(\boldsymbol{\alpha}) + He(\mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\alpha})) &< \mathbf{0}, & \forall \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N \\ M_s(\boldsymbol{\alpha}) + He(\mathbf{Z}_s(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\Sigma}_s(\boldsymbol{\alpha})) &< \mathbf{0}, & \forall \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N \\ M_r(\boldsymbol{\alpha}) + He(\mathbf{Z}_r(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\Sigma}_r(\boldsymbol{\alpha})) &< \mathbf{0}, & \forall \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N \end{aligned}$$

em que

$$M(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \Xi & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{D}(\boldsymbol{\alpha}) \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})^T \end{bmatrix} & \mathbf{D}(\boldsymbol{\alpha})^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0(\boldsymbol{\alpha}) & \boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{\alpha}) & \cdots & \boldsymbol{\Lambda}_{m+1}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_g(\boldsymbol{\alpha})^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{X}_1 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{\mathbf{A}_{r_1}}(\boldsymbol{\alpha}) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{X}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Y}_{\mathbf{A}_{r_m}}(\boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{X}_{m+1} & \mathbf{Y}_{\mathbf{C}_k} \mathbf{B}_g(\boldsymbol{\alpha})^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{0} & & \mathbf{C}_g(\boldsymbol{\alpha})^T & & & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{0} & & \begin{bmatrix} -\mathbf{y}_{\mathbf{C}_{r_1}}(\boldsymbol{\alpha}) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{y}_{\mathbf{C}_{r_m}}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} & & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{Y}_{\mathbf{A}_k} & & \mathbf{Y}_{\mathbf{C}_k} \mathbf{D}_g(\boldsymbol{\alpha})^T & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$M_s(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}_s(\boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{P}_s(\boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_s(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{s0}(\boldsymbol{\alpha}) & \boldsymbol{\Lambda}_{s1}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{X}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Lambda}_{sm+1}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{X}_{m+1} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_s(\alpha) = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{X}_1 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{X}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{X}_{m+1} \\ & & & \mathbf{A}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{A_{r1}}(\alpha) & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Y}_{A_{rm}}(\alpha) & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{Y}_{C_k} \mathbf{B}_g(\alpha)^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{A_k} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_r(\alpha) = \begin{bmatrix} \Xi_r & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_r(\alpha) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & -m_r^2 \mathbf{I} & \mathbf{I} - \mathbf{D}_r(\alpha) \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_r(\alpha)^T \end{bmatrix} & \mathbf{I} - \mathbf{D}_r(\alpha)^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_r(\alpha) = [\Lambda_{r1}(\alpha) \quad \cdots \quad \Lambda_{rm}(\alpha)]$$

$$\Sigma_r(\alpha) = \begin{bmatrix} -\mathbf{X}_1 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{A_{r1}}(\alpha) & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{y}_{C_{r1}}(\alpha) & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{X}_m & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Y}_{A_{rm}}(\alpha) & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{y}_{C_{rm}}(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_g(\alpha) \mathbf{D}_k \\ \mathbf{B}_r(\alpha) \\ \mathbf{B}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(\alpha) = \mathbf{D}_g(\alpha) \mathbf{D}_k - \mathbf{D}_r(\alpha)$$

$$\mathbf{B}_r(\alpha) = \text{diag}(\mathbf{b}_{ri}(\alpha)) \quad \mathbf{D}_r(\alpha) = \text{diag}(d_{ri}(\alpha))$$

e  $\Xi$  e  $\Xi_r$  são dados pela Tabela 2.2, conforme  $\Omega$  e  $\Omega_r$ , respectivamente. Então  $\mathbf{A}_k = (\mathbf{X}_{m+1}^{-1} \mathbf{Y}_{A_k})^T$ ,  $\mathbf{C}_k = (\mathbf{X}_{m+1}^{-1} \mathbf{Y}_{C_k})^T$ ,  $\mathbf{B}_k$  e  $\mathbf{D}_k$  são as matrizes do pré-compensador  $K(s) = \{\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k, \mathbf{D}_k\}$  que garantem, para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ ,  $G(s, \alpha)K(s) - G_r(s, \alpha)$  estável,  $\sigma_{max}(G(j\omega, \alpha)K(j\omega) - G_r(j\omega, \alpha)) < \gamma$ ,  $\forall \omega \in \Omega$ , e  $\sigma_{max}(G_r(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}) < m_r$ ,  $\forall \omega \in \Omega_r$ , em que  $\mathbf{A}_{ri}(\alpha) = (\mathbf{X}_i^{-1} \mathbf{Y}_{A_{ri}})^T$ ,  $\mathbf{c}_{ri}(\alpha) = (\mathbf{X}_i^{-1} \mathbf{y}_{C_{ri}})^T$ ,  $\mathbf{A}_r(\alpha) = \text{diag}(\mathbf{A}_{ri}(\alpha))$ ,  $\mathbf{C}_r(\alpha) = \text{diag}(\mathbf{c}_{ri}(\alpha))$  e  $G_r(s, \alpha) = \{\mathbf{A}_r(\alpha), \mathbf{B}_r(\alpha), \mathbf{C}_r(\alpha), \mathbf{D}_r(\alpha)\}$ .

### Prova.

A prova pode ser feita de forma similar à do Teorema 3.6. Seja  $H(s, \alpha) = G(s, \alpha)K(s) - G_r(s, \alpha)$  representado no espaço de estados por (3.27). Defina as matrizes

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha}) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0(\boldsymbol{\alpha}) & \boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{X}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Lambda}_{m+1}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{X}_{m+1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_1^{-1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}_{m+1}^{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})^T & \mathbf{C}(\boldsymbol{\alpha})^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_r(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{Z}_r(\boldsymbol{\alpha}) \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{r1}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{X}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Lambda}_{rm}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{X}_m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_r(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^{-1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}_{m+1}^{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_r(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A}_r(\boldsymbol{\alpha})^T & -\mathbf{C}_r(\boldsymbol{\alpha})^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_s(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{Z}_s(\boldsymbol{\alpha}) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{s0}(\boldsymbol{\alpha}) & \boldsymbol{\Lambda}_{s1}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{X}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Lambda}_{sm+1}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{X}_{m+1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_s(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_1^{-1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}_{m+1}^{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_s(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})^T \end{bmatrix}$$

Dessa forma,

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\alpha}) \quad \mathbf{X}_s(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Gamma}_s(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{Z}_s(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Sigma}_s(\boldsymbol{\alpha}) \quad \mathbf{X}_s(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Gamma}_s(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{Z}_s(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Sigma}_s(\boldsymbol{\alpha})$$

Se a condição  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\alpha}) + \text{He}(\mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\alpha})) < \mathbf{0}$ ,  $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N$ , é satisfeita, então existe  $\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0(\boldsymbol{\alpha}) & \boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{X}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Lambda}_{m+1}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{X}_{m+1} \end{bmatrix}$  tal que  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\alpha}) + \text{He}(\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha})) < \mathbf{0}$  também é satisfeita. Além disso,  $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}) > \mathbf{0}$ , então, com base no Lema 2.12, conclui-se que a desigualdade  $\sigma_{\max}(H(j\omega, \boldsymbol{\alpha})) < \gamma$  é válida para todo  $\omega \in \Omega$  e todo  $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N$ .

Se a condição  $\mathbf{M}_s(\boldsymbol{\alpha}) + \text{He}(\mathbf{Z}_s(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Sigma}_s(\boldsymbol{\alpha})) < \mathbf{0}$ ,  $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N$ , por sua vez, é satisfeita, então existe  $\mathbf{X}_s(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{s0}(\boldsymbol{\alpha}) & \boldsymbol{\Lambda}_{s1}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{X}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Lambda}_{sm+1}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{X}_{m+1} \end{bmatrix}$  tal que  $\mathbf{M}_s(\boldsymbol{\alpha}) + \text{He}(\mathbf{X}_s(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Gamma}_s(\boldsymbol{\alpha})) < \mathbf{0}$ .

$\mathbf{0}$  também é satisfeita. Ademais,  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) > \mathbf{0}$ , então, com base no Lema 2.6, conclui-se que  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})$  é Hurwitz estável.

Ainda, se a condição  $\mathbf{M}_r(\boldsymbol{\alpha}) + \text{He}(\mathbf{Z}_r(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Sigma}_r(\boldsymbol{\alpha})) < \mathbf{0}$ ,  $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N$ , é satisfeita, então existe  $\mathbf{X}_r(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{r1}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{X}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Lambda}_{rm}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{X}_m \end{bmatrix}$  tal que  $\mathbf{M}_r(\boldsymbol{\alpha}) + \text{He}(\mathbf{X}_r(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Gamma}_r(\boldsymbol{\alpha})) < \mathbf{0}$  também é satisfeita. Além disso,  $\mathbf{Q}_r(\boldsymbol{\alpha}) > \mathbf{0}$ , então, pelo Lema 2.12, a desigualdade  $\sigma_{max}(G_r(j\omega, \boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{I}) = \sigma_{max}(\mathbf{I} - G_r(j\omega, \boldsymbol{\alpha})) < m_r$  é válida para todo  $\omega \in \Omega_r$  e para todo  $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N$ . ■

Por conveniência, assim como  $\boldsymbol{\Lambda}_s(\boldsymbol{\alpha})$  pode ser escolhido a partir de  $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha})$  nos Métodos 1 e 2, para uso do Método 3, podemos escolher  $\boldsymbol{\Lambda}_{s_i}(\boldsymbol{\alpha})$  a partir das escolhas de  $\boldsymbol{\Lambda}_i(\boldsymbol{\alpha})$ , tomando apenas as  $2n$  primeiras linhas, já que  $\boldsymbol{\Gamma}_s(\boldsymbol{\alpha})$  é composto pelas  $2n$  primeiras colunas de  $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha})$ .

Da mesma forma, os parâmetros  $\boldsymbol{\Lambda}_{r_i}(\boldsymbol{\alpha})$  podem ser escolhidos a partir de  $\boldsymbol{\Lambda}_i(\boldsymbol{\alpha})$ , tomando apenas as linhas correspondentes a  $G_r(s, \boldsymbol{\alpha})$ :

$$\boldsymbol{\Lambda}_{r_i}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_r \times n_g} & \mathbf{I}_{n_r} & \mathbf{0}_{n_r \times (n_k + n_g)} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n_r \times n_k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}_{n_r \times n_g} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n_r \times (n_k + n_g)} & \mathbf{I}_{n_r} & \mathbf{0}_{n_r \times n_k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}_{2m \times n_g} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{2m \times (n_k + n_g)} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{2m \times n_k} & \mathbf{I}_{2m} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_i(\boldsymbol{\alpha})$$

Por fim, podemos enunciar o Método 3 proposto neste trabalho, por meio do Algoritmo 3.4.

---

#### Algoritmo 3.4 Método 3

---

**Entradas:**  $\mathbf{A}_g(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{n_g \times n_g}$ ,  $\mathbf{B}_g(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{n_g \times m}$ ,  $\mathbf{C}_g(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{m \times n_g}$ ,  $\mathbf{D}_g(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}_i(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{2(n_g + n_r + n_k + m) \times n_{r_i}}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}_{m+1}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{2(n_g + n_r + n_k + m) \times n_k}$ ,  $m_r \in \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  e  $\Omega_r$ .

**Requisitos:**  $0 < m_r < 1$

$\Omega$  e  $\Omega_r$  devem ser escolhidos dentre as opções da Tabela 2.2

$\Omega_r \subseteq \Omega$

1: **para**  $i \leftarrow 1$  **até**  $m$  **faça**

$$2: \quad \boldsymbol{\Lambda}_{r_i}(\boldsymbol{\alpha}) \leftarrow \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_r \times n_g} & \mathbf{I}_{n_r} & \mathbf{0}_{n_r \times (n_k + n_g)} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n_r \times n_k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}_{n_r \times n_g} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n_r \times (n_k + n_g)} & \mathbf{I}_{n_r} & \mathbf{0}_{n_r \times n_k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}_{2m \times n_g} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{2m \times (n_k + n_g)} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{2m \times n_k} & \mathbf{I}_{2m} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_i(\boldsymbol{\alpha})$$

3: **fim para**

4: **se**  $\Omega = \mathbb{R}$  **então**

5: Solucione o Teorema 3.6, minimizando  $\gamma$

**devolve**  $\mathbf{A}_k = (\mathbf{X}_{m+1}^{-1} \mathbf{Y}_{\mathbf{A}_k})^T$ ,  $\mathbf{C}_k = (\mathbf{X}_{m+1}^{-1} \mathbf{Y}_{\mathbf{C}_k})^T$ ,  $\mathbf{B}_k$  e  $\mathbf{D}_k$

6: **senão**

7: **para**  $i \leftarrow 1$  **até**  $m+1$  **faça**

$$8: \quad \boldsymbol{\Lambda}_{s_i}(\boldsymbol{\alpha}) \leftarrow \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2(n_g + n_r + n_k)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_i(\boldsymbol{\alpha})$$

9: **fim para**

10: Solucione o Teorema 3.7, minimizando  $\gamma$

**devolve**  $\mathbf{A}_k = (\mathbf{X}_{m+1}^{-1} \mathbf{Y}_{\mathbf{A}_k})^T$ ,  $\mathbf{C}_k = (\mathbf{X}_{m+1}^{-1} \mathbf{Y}_{\mathbf{C}_k})^T$ ,  $\mathbf{B}_k$  e  $\mathbf{D}_k$

11: **fim se**

---

### 3.2.2.4 Parametrização

Em todos os métodos de projeto de pré-compensadores propostos, há a necessidade de pré-definir a estrutura da variável de folga que multiplica as variáveis do pré-compensador  $\mathbf{A}_k$  e  $\mathbf{C}_k$  ( $\mathbf{\Lambda}(\alpha)$  nos Métodos 1 e 2 e  $\mathbf{\Lambda}_{m+1}(\alpha)$  no Método 3). Conforme estudo apresentado na Subseção 3.2.1, esse parâmetro está relacionado a uma condição necessária que surge a mais. O formato da Eq. (3.21) é particularmente interessante, pois os parâmetros  $\mathbf{A}_{k^*}(\alpha)$  e  $\mathbf{C}_{k^*}(\alpha)$  fazem parte da solução de um pré-compensador dependente de parâmetros  $K_*(s, \alpha) = \{\mathbf{A}_{k^*}(\alpha), \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_{k^*}(\alpha), \mathbf{D}_k\}$  que compartilha o mesmo custo garantido  $\gamma$  com a solução procurada não dependente de parâmetros  $K(s) = \{\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k, \mathbf{D}_k\}$ . Assim, escolhas ruins para  $\mathbf{A}_{k^*}(\alpha)$  e  $\mathbf{C}_{k^*}(\alpha)$  limitam o desempenho na minimização de  $\gamma$ . Uma estratégia é projetar o pré-compensador  $K_*(s, \alpha)$  de forma a tornar o sistema compensado o mais diagonal possível, obtendo as matrizes  $\mathbf{A}_{k^*}(\alpha)$  e  $\mathbf{C}_{k^*}(\alpha)$ , que são utilizadas para montar  $\mathbf{\Lambda}(\alpha)$  (ou  $\mathbf{\Lambda}_{m+1}(\alpha)$  no Método 3) :

$$\mathbf{\Lambda}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} \\ \mathbf{B}_g(\alpha) \mathbf{C}_{k^*}(\alpha) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{k^*}(\alpha) \\ \mathbf{D}_g(\alpha) \mathbf{C}_{k^*}(\alpha) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Neste trabalho, o projeto de  $K_*(s, \alpha)$  foi feito de forma simplista, definindo-o como  $G(s, \alpha)^{-1}$  se possível ( $G(s, \alpha)$  próprio e  $G(s, \alpha)^{-1}$  estável). Em tese, poderia ser, idealmente, qualquer sistema  $G(s, \alpha)^{-1T}(s, \alpha)$ , em que  $T(s, \alpha)$  seria o sistema compensado diagonal. A escolha por  $G(s, \alpha)^{-1}$ , além de simplificar, harmoniza com a estratégia de limitação de  $G_r(s, \alpha)^{-1}$  utilizada neste trabalho, uma vez que  $G_r(s, \alpha)$  é forçado, quando variável, a ser suficientemente próximo de  $\mathbf{I}$  em uma faixa de frequências  $\Omega_r$  (restrição (3.23)). Contudo, na prática, na maioria dos casos  $\mathbf{D}_g(\alpha) = \mathbf{0}$  e  $G(s, \alpha)$ , conseqüentemente, é estritamente próprio. Nesse caso, devemos escolher  $\mathbf{D}_{g^*}$  suficientemente pequeno, para que  $G(s, \alpha) + \mathbf{D}_{g^*} = G_*(s, \alpha) \simeq G(s, \alpha)$ , ao menos na faixa de interesse  $\Omega$ . Como a representação no espaço de estados de  $G_*(s, \alpha)$  depende diretamente de  $\mathbf{D}_{g^*}$ , é interessante que essa matriz não seja dependente de parâmetros.

Assim, a expressão utilizada neste trabalho para  $\mathbf{A}_{k^*}(\alpha)$  e  $\mathbf{C}_{k^*}(\alpha)$  são as matrizes correspondentes no espaço de estados de  $G_*(s, \alpha)$ :

$$\mathbf{A}_{k^*}(\alpha) = \mathbf{A}_g(\alpha) - \mathbf{B}_g(\alpha)\mathbf{D}_{g^*}^{-1}\mathbf{C}_g(\alpha) \quad \mathbf{C}_{k^*}(\alpha) = \mathbf{D}_{g^*}^{-1}\mathbf{C}_g(\alpha)$$

em que  $\mathbf{D}_{g^*}$  é escolhido suficientemente pequeno e que resulte em  $\mathbf{A}_{k^*}(\alpha)$  Hurwitz estável. Esse teste pode ser feito via LMIs. Uma forma de encontrar  $\mathbf{D}_{g^*}$  é resolvendo o problema de realimentação estática de saída  $\mathbf{A}_{k^*}(\alpha) = \mathbf{A}_g(\alpha) + \mathbf{B}_g(\alpha)\mathbf{L}\mathbf{C}_g(\alpha)$  em que o ganho de realimentação de saída é  $\mathbf{L} = -\mathbf{D}_{g^*}^{-1}$ , o que garantiria  $\mathbf{A}_{k^*}(\alpha)$  estável.

Outros parâmetros que devem ser escolhidos são aqueles ligados ao modelo de referência diagonal  $G_r(s, \alpha)$ . No Método 1, esse sistema deve ser dado completamente *a priori*, enquanto que no Método 2 apenas as matrizes  $\mathbf{A}_r(\alpha)$  e  $\mathbf{C}_r(\alpha)$  devem ser dadas. Na falta de objetivo específico para o modelo de referência além de ser diagonal, uma escolha é a diagonal de  $G(s, \alpha)$ , que é uma escolha razoável, pois conserva a dinâmica do sistema original. Para o Método 2, nessa ideia, podemos definir  $\mathbf{A}_{ri}(\alpha) = \mathbf{A}_g(\alpha)$  e  $\mathbf{c}_{ri}(\alpha) = \mathbf{C}_{g_i}(\alpha)$ .

Um cuidado que deve ser tomado para que o acoplamento de um canal não seja desprezível frente aos demais canais é dimensionar as funções de transferência de  $G_r(s, \alpha)$  de forma a terem aproximadamente mesma magnitude na faixa de interesse  $\Omega$ . Por exemplo, se, em um sistema de quatro entradas e saídas, os três primeiros elementos de  $G_r(s, \alpha)$  possuírem magnitude da ordem de 1 (0 dB) e o último elemento possuir magnitude da ordem de 0,01 (-40 dB), uma diferença de 0,005 entre os elementos da diagonal de  $G(s, \alpha)K(s)$  e de  $G_r(s, \alpha)$  representaria erro percentual de 0,5% para os três primeiros canais e 50% para o quarto canal, então durante a otimização a aproximação percentual entre o quarto elemento da diagonal do sistema compensado e o quarto elemento do modelo de referência seria preterido pela aproximação dos demais canais. Nesse sentido, se os elementos da diagonal de  $G(s, \alpha)$  tiverem magnitudes muito díspares, é interessante, quando utilizando o Método 1, aplicar um ganho inverso a essas magnitudes às matrizes  $\mathbf{B}_g(\alpha)$  (ou  $\mathbf{C}_g(\alpha)$ ) e  $\mathbf{D}_g(\alpha)$  de forma a equilibrar essas magnitudes.

No caso do Método 2, a restrição  $\sigma_{max}(G_r(j\omega) - \mathbf{I}) < m_r$  já força que as magnitudes sejam equilibradas, se  $m_r$  for pequeno (um  $m_r$  de até 0,5, por exemplo, deixa as magnitudes na mesma ordem de grandeza). Contudo, não é interessante escolher  $m_r$  pequeno demais, para não limitar a dinâmica e a variação em relação a  $\alpha$  que o modelo de referência variável  $G_r(s, \alpha)$  pode assumir.

Ainda que no Método 3 não haja necessidade de fornecer integral ou parcialmente o modelo de referência  $G_r(s, \alpha)$ , é necessário escolher os parâmetros de estrutura de variável de folga  $\Lambda_i(\alpha)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , que estão associados indiretamente a  $\mathbf{A}_r(\alpha)$  e  $\mathbf{C}_r(\alpha)$ , conforme estudo de  $\Lambda(\alpha)$  em relação a  $\mathbf{A}_k$  e  $\mathbf{C}_k$ . Assim, com base na mesma estratégia sugerida para escolher  $\Lambda(\alpha)$ , de forma a utilizar bons candidatos das matrizes variáveis, podemos escolher  $\Lambda_i(\alpha)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , da forma:

$$[\Lambda_1 \quad \dots \quad \Lambda_m] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{r1*}(\alpha) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_{rm*}(\alpha) \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}_{ri*}(\alpha) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{c}_{ri*}(\alpha) \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

em que  $\mathbf{A}_{ri*}(\alpha)$  e  $\mathbf{c}_{ri*}(\alpha)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , devem ser escolhidos *a priori*, assim como  $\mathbf{A}_{ri}(\alpha)$  e  $\mathbf{c}_{ri}(\alpha)$  no Método 2. Então a escolha pode seguir os mesmos critérios, como escolher  $\mathbf{A}_{ri*}(\alpha) = \mathbf{A}_g(\alpha)$ ,  $\mathbf{c}_{ri*}(\alpha) = \mathbf{C}_{g_{i,:}}(\alpha)$ ,  $i = 1, \dots, m$  para trazer informações dinâmicas de  $G(s)$ , principalmente em relação aos polos e à incerteza.

Por conveniência,  $\mathbf{A}_{ri}$  pode ser definido a partir da escolha de  $\Lambda_i$ , utilizando apenas as linhas relacionadas a  $G_r(s)$ :

$$[\Lambda_{r1} \quad \cdots \quad \Lambda_{rm}] = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{I} \\ \mathbf{A}_{r1*} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{rm*} \\ -\mathbf{C}_{r1,*} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{C}_{rm,*} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Em relação à faixa de frequências  $\Omega_r$ , ela assume papel importante ao definir o espectro em que há garantia de que  $G_r(s, \alpha)$  não seja desprezível e, conseqüentemente, o sistema compensado  $G(s, \alpha)K(s)$ . Entretanto, assim como ocorre quando se escolhe  $m_r$  muito pequeno, escolher  $\Omega_r$  muito amplo dentro de  $\Omega$  limita as variações dinâmicas, principalmente próximo a zeros e polos no diagrama de Bode do sistema compensado. Dessa forma, se há interesse em uma faixa de baixas frequências  $\Omega$ , é interessante que  $\Omega_r$  também seja de baixas frequências até pouco antes da frequência de corte. Por exemplo, se  $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R} : |\omega| \leq \omega_l\}$ , podemos escolher  $\Omega_r = \{\omega \in \mathbb{R} : |\omega| \leq 10^{-3}\omega_l\}$ .

### 3.3 INDICADOR DE ACOPLAMENTO PARA SISTEMAS POLITÓPICOS

Para avaliar diferentes métodos de desacoplamento de sistemas multivariáveis, é necessário utilizar alguma métrica. As medidas mais clássicas se referem às definições de dominância diagonal e dominância diagonal generalizada (valores  $d_r$ ,  $d_c$  e  $d_g$  apresentados na Seção 2.2). A definição de dominância fundamental aplicada à diagonal de sistemas multivariáveis permite avaliar o acoplamento com LMIs, uma vez que  $\rho(\cdot) \leq \|\cdot\|$ , relação utilizada por Chughtai and Munro (2004); Chughtai et al. (2005) para projeto de desacopladores. Assim, para medir o acoplamento de sistemas multivariáveis com incertezas politópicas, o indicador originado do conceito de dominância fundamental se mostra conveniente e menos conservador. Propõe-se, então, o seguinte indicador de acoplamento para um sistema  $H(s)$ , que pode ser calculado via LMIs:

$$\delta(s) = \sigma_{max} \left( H_D(s)^{-1} (H(s) - H_D(s)) \right) = \sigma_{max} \left( H_D(s)^{-1} H(s) - \mathbf{I} \right)$$

em que  $H_D(s)$  é a diagonal de  $H(s)$ . Como  $\rho(\cdot) \leq \sigma_{max}(\cdot)$ , se  $\delta(s) < 1$ ,  $H(s)$  é diagonal dominante à luz da definição de dominância fundamental (Definição 2.4).

O indicador acima se aplica a cada frequência. Como indicador do sistema em todas as frequências, podemos utilizar

$$\delta = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{max} \left( H_D(j\omega)^{-1} H(j\omega) - \mathbf{I} \right) = \left\| H_D(s)^{-1} H(s) - \mathbf{I} \right\|_{\infty}$$

A norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  pode ser calculada via LMIs com uso do *Bounded Real Lemma* ou Lema de KYP (vide Sub-

seção 2.1.3.1). Se houver um conjunto de interesse para a frequência, diga-se  $\Omega$ , podemos definir o indicador de acoplamento

$$\delta_{\Omega} = \sup_{\omega \in \Omega} \sigma_{max} \left( H_D(j\omega)^{-1} H(j\omega) - \mathbf{I} \right)$$

que pode ser calculado via LMIs com uso do Lema de KYP generalizado (vide Subseção 2.1.3.2). A vantagem de se utilizarem LMIs é a possibilidade de tratar sistemas com incertezas politópicas.

Seja  $H(s, \alpha) := \{\mathbf{A}(\alpha), \mathbf{B}(\alpha), \mathbf{C}(\alpha), \mathbf{D}(\alpha)\}$  o sistema com incerteza politópica, de  $m$  entradas e saídas, do qual se deseja calcular o indicador de acoplamento. A representação no espaço de estados da diagonal de sua matriz de transferência ( $H_D(s, \alpha)$ ) pode ser obtida a partir das funções de transferência dos elementos da diagonal:

$$H_{i,i}(s, \alpha) = \mathbf{C}_{i,:}(\alpha) (s\mathbf{I} - \mathbf{A}(\alpha))^{-1} \mathbf{B}_{:,i}(\alpha) + \mathbf{D}_{i,i}(\alpha)$$

em que  $\mathbf{C}_{i,:}(\alpha)$  representa a  $i$ -ésima linha de  $\mathbf{C}(\alpha)$ ,  $\mathbf{B}_{:,i}(\alpha)$  a  $i$ -ésima coluna de  $\mathbf{B}(\alpha)$  e  $\mathbf{D}_{i,i}(\alpha)$  o elemento  $(i,i)$  de  $\mathbf{D}(\alpha)$ .

Agrupando essas funções de transferência, o sistema  $H_D(s, \alpha)$  é dado por

$$H_D(s, \alpha) := \{\mathbf{A}_{H_D}(\alpha), \mathbf{B}_{H_D}(\alpha), \mathbf{C}_{H_D}(\alpha), \mathbf{D}_{H_D}(\alpha)\}$$

$$\mathbf{A}_{H_D}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\alpha) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}(\alpha) \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{H_D}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{:,1}(\alpha) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{B}_{:,m}(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{H_D}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1,:}(\alpha) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{C}_{m,:}(\alpha) \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{H_D}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{1,1}(\alpha) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{D}_{m,m}(\alpha) \end{bmatrix}$$

A inversa da diagonal ( $H_D(s, \alpha)^{-1}$ ) só pode ser representada no espaço de estados se a matriz  $\mathbf{D}_{H_D}(\alpha)$  não for singular, ou seja, for invertível. Como  $\mathbf{D}_{H_D}(\alpha)$  é uma matriz diagonal, basta que  $\mathbf{D}_{i,i}(\alpha) \neq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ .

Por simplicidade, consideremos o caso de  $\mathbf{D}$  não dependente de parâmetros, pois o tratamento da inversa de uma matriz dependente de parâmetros não permitiria o uso direto em LMIs. Além disso, a inversa de matriz não dependente de parâmetros não implica no aumento de conservadorismo por não aumentar o grau do produto de politopos, o que é desejável para encontrar um indicador mais fiel. Note que considerar  $\mathbf{D}$  não dependente de parâmetros não é incomum, pois em geral trataremos sistemas estritamente próprios ( $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ )

Uma representação para  $H_D(s, \alpha)^{-1}$  no espaço de estados é dada a seguir.

$$H_D(s, \alpha)^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{H_D}(\alpha) - \mathbf{B}_{H_D}(\alpha) \mathbf{D}_{H_D}^{-1} \mathbf{C}_{H_D}(\alpha) & \mathbf{B}_{H_D}(\alpha) \mathbf{D}_{H_D}^{-1} \\ \hline -\mathbf{D}_{H_D}^{-1} \mathbf{C}_{H_D}(\alpha) & \mathbf{D}_{H_D}^{-1} \end{array} \right]$$

Por fim, o sistema para o qual se deseja calcular máximo valor singular é obtido por cascata entre  $H_D(s, \alpha)^{-1}$  e  $H(s, \alpha)$ , seguida de subtração da matriz identidade (que ocorre diretamente no termo de transmissão direta do sistema em cascata):

$$H_D(s)^{-1} H(s) - \mathbf{I} = \left[ \begin{array}{cc|c} \mathbf{A}_{H_D}(\alpha) - \mathbf{B}_{H_D}(\alpha)\mathbf{D}_{H_D}^{-1}\mathbf{C}_{H_D}(\alpha) & \mathbf{B}_{H_D}(\alpha)\mathbf{D}_{H_D}^{-1}\mathbf{C}(\alpha) & \mathbf{B}_{H_D}(\alpha)\mathbf{D}_{H_D}^{-1}\mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}(\alpha) & \mathbf{B}(\alpha) \\ \hline -\mathbf{D}_{H_D}^{-1}\mathbf{C}_{H_D}(\alpha) & \mathbf{D}_{H_D}^{-1}\mathbf{C}(\alpha) & \mathbf{D}_{H_D}^{-1}\mathbf{D} - \mathbf{I} \end{array} \right]$$

No caso específico em que  $\mathbf{D}$  é diagonal, temos que  $\mathbf{D}_{H_D} = \mathbf{D}$ , levando a matriz de transmissão direta ( $\mathbf{D}_{H_D}^{-1}\mathbf{D} - \mathbf{I}$ ) a zero. Se existirem elementos na diagonal de  $\mathbf{D}_{H_D}$  iguais a zero, é importante que sejam substituídos por números suficientemente pequenos ( $\epsilon$ ), de forma que a consequente adição de zeros ao sistema  $H_D(s, \alpha)$  seja desprezível (zeros adicionados longe dos zeros e polos originais). Como comentado acima, na prática, quase sempre  $\mathbf{D}$  é igual a zero; nesse caso, basta definirmos  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{I}$  e  $\epsilon$  suficientemente pequeno de forma que a nova representação seja uma boa aproximação do sistema original. Considerando  $\mathbf{D}$  diagonal, a representação de  $H_D(s)^{-1} H(s) - \mathbf{I}$  se torna mais simples:

$$\begin{aligned} H_D(s)^{-1} H(s) - \mathbf{I} &= \left[ \begin{array}{cc|c} \mathbf{A}_{H_D}(\alpha) - \mathbf{B}_{H_D}(\alpha)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}_{H_D}(\alpha) & \mathbf{B}_{H_D}(\alpha)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}(\alpha) & \mathbf{B}_{H_D}(\alpha) \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}(\alpha) & \mathbf{B}(\alpha) \\ \hline -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}_{H_D}(\alpha) & \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}(\alpha) & \mathbf{0} \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_\delta(\alpha) & \mathbf{B}_\delta(\alpha) \\ \hline \mathbf{C}_\delta(\alpha) & \mathbf{0} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Para calcular um majorante do indicador  $\delta_\Omega$  ( $\delta_\Omega^*$ ), basta minimizá-lo sujeito à restrição

$$\sigma_{max} \left( H_D(j\omega)^{-1} H(j\omega) - \mathbf{I} \right) < \delta_\Omega^*$$

a qual pode ser transformado em LMI por meio do Lema 2.12. Isso resulta no seguinte problema de otimização convexo:

### Cálculo do indicador $\delta_\Omega^*$

$$\min_{\mathbf{X}_0(\alpha), \mathbf{P}(\alpha)=\mathbf{P}(\alpha)^T, \mathbf{Q}(\alpha)=\mathbf{Q}(\alpha)^T} \delta_\Omega^{*2} \quad (3.29)$$

s.a.

$$\left[ \begin{array}{cc|c} \Xi & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_\delta(\alpha) \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & -\delta_\Omega^{*2}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_\delta(\alpha)^T \end{bmatrix} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{array} \right] + He \left( \begin{bmatrix} -\mathbf{I} \\ \mathbf{A}_\delta(\alpha) \\ \mathbf{C}_\delta(\alpha) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{X}_0(\alpha)^T \right) < \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Q}(\alpha) > \mathbf{0}$$

em que  $\Xi$  é dado pela Tabela 2.2 conforme a escolha de  $\Omega$ .

# 4

## EXEMPLOS NUMÉRICOS

Os resultados apresentados nesta seção foram computados no software MATLAB®, versão 9.0.0.341360 (R2016a) 64-bit, usando Yalmip (Löfberg, 2004) e Mosek, em um computador com processador Intel® Core™ i7-3537U, 2,0 GHz, 8 GB de memória RAM e Windows 10 Home de 64 bits. O pacote ROLMIP (Aguilhari et al., 2012) foi utilizado para implementar as condições dependentes de parâmetros em um conjunto de LMIs de dimensão finita. Para as soluções apresentadas neste Capítulo, foi definido grau 1 para as variáveis dependentes de parâmetros, mas graus maiores poderiam ser utilizados de forma imediata por meio do ROLMIP, ao custo de maior esforço computacional.

Para fins de comparação entre os acoplamentos entre malhas do sistema original  $G(s, \alpha)$  e do sistema compensado  $G(s, \alpha)K(s)$ , serão mostradas duas figuras, sendo uma com as magnitudes das funções de transferência associadas ao sistema e outra figura com os valores singulares de  $H_D(j\omega)^{-1}H(j\omega) - \mathbf{I}$ , em que  $H(s)$  é o sistema em análise, uma vez que essa expressão está associada à dominância diagonal, conforme discussão na Seção 3.3. Nas simulações, buscando mostrar toda a faixa possível em que o sistema incerto pode estar, serão calculados os valores (magnitudes e valores singulares) para todos os sistemas com  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ , tais que

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i = 1; \quad \alpha_i \in \{0; 0, 2; 0, 4; 0, 6; 0, 8; 1\}$$

resultando em 56 combinações. Nas figuras serão mostradas as curvas dos valores máximo e mínimo dos sistemas considerados encontrados para cada frequência.

Com os objetivos de mostrar a efetividade dos métodos, compará-los, avaliar o procedimento iterativo proposto na Observação 3.6, mostrar o ganho em restringir o projeto a uma faixa de frequências de interesse e mostrar a importância da escolha da estrutura das variáveis de folga ( $\Lambda$ ), os métodos serão utilizados para cálculo de pré-compensadores para um sistema explorado na literatura. Em seguida, um dos métodos será aplicado a outro exemplo para mostrar possíveis limitações e alternativas.

### 4.1 EXEMPLO 1: SISTEMA DE QUATRO TANQUES

Trata-se de um sistema de quatro tanques linearizado em torno de um ponto de operação, utilizado por Siqueira et al. (2014):

$$G(s, \alpha) := \{\mathbf{A}_g(\alpha), \mathbf{B}_g, \mathbf{C}_g, \mathbf{D}_g\}$$

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{A_3}{A_1 T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & \frac{A_4}{A_2 T_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_g = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} \\ \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} & 0 \\ \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3} & 0 \\ 0 & \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_g = \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

em que as variáveis de estado são os desvios dos níveis dos tanques em relação à referência ( $h_i - h_i^0$ ), as duas entradas são desvios das tensões de duas bombas, as saídas são os desvios de nível de dois tanques que se deseja controlar. Os parâmetros do ponto de operação são as constantes de tempo

$$T_i \triangleq \frac{A_i}{a_i} \sqrt{\frac{2h_i^0}{g}}$$

as áreas de seção transversal dos tanques  $A_1 = A_3 = 28 \text{ cm}^2$ ,  $A_2 = A_4 = 32 \text{ cm}^2$ , as áreas de seção transversal das saídas dos tanques  $a_1 = a_3 = 0,071 \text{ cm}^2$ ,  $a_2 = a_4 = 0,057 \text{ cm}^2$ , ganho de sensor  $k_c = 0,50 \text{ V/cm}$ , aceleração da gravidade  $g = 981 \text{ cm/s}^2$ , os níveis do ponto de operação  $h_1^0 = 12,6 \text{ cm}$ ,  $h_2^0 = 13,0 \text{ cm}$ ,  $h_3^0 = 4,8 \text{ cm}$ ,  $h_4^0 = 4,9 \text{ cm}$ , coeficientes das bombas  $k_1 = 3,14 \text{ cm}^3/\text{sV}$ ,  $k_2 = 3,29 \text{ cm}^3/\text{sV}$  e coeficientes de válvula  $\gamma_1 = 0,43$  e  $\gamma_2 = 0,34$ .

Na modelagem da incerteza é considerado que as constantes de tempo  $T_1$  e  $T_2$  são incertas e estão na faixa de  $\pm 10\%$  do valor nominal de forma independente, resultando num sistema politópico com quatro vértices, sendo cada vértice calculado pela combinação dos valores extremos de  $T_1$  e  $T_2$ .

As Figuras 4.1 e 4.2 são relativas ao sistema  $G(s, \alpha)$ . Considerando a banda  $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R} : |\omega| \leq 2.10^{-2}\}$ , o cálculo do indicador  $\delta_\Omega^*$  a partir do problema de otimização (3.29) (usando  $\mathbf{D}_g = 10^{-5}\mathbf{I}$  para tornar  $G(s, \alpha)$  próprio) resultou em  $0,9413$  ( $-0,52 \text{ dB}$ ), praticamente o mesmo valor máximo de valor singular nessa faixa na Figura 4.2 ( $-0,55 \text{ dB}$ ). De fato, essas Figuras mostram que em  $\Omega$  as magnitudes das diagonais são maiores que a outra magnitude da mesma linha, o que significa que o sistema  $G(s, \alpha)$  é diagonal dominante. Contudo, nessa faixa, o acoplamento não é desprezível, uma vez que o máximo valor singular está pouco abaixo de  $0 \text{ dB}$ .

No trabalho de Siqueira et al. (2014), foi obtido um pré-compensador em tempo discreto

$$K_r(z) = \begin{bmatrix} \frac{44,101(z-0,8185)}{(z^2-1,536z+0,9748)} & \frac{-157,33(z-0,9592)}{(z^2-1,466z+0,8945)} \\ \frac{-88,607(z-0,9681)}{(z-0,381)(z-0,5739)} & \frac{112,54(z-0,8992)}{(z^2-0,7721z+0,2231)} \end{bmatrix}$$

Após  $K_r(z)$  ser transformado em tempo contínuo (período de amostragem de  $2,5 \text{ s}$ ), resultou no desacoplador  $K_r(s)$ , ilustrado pelo diagrama de Bode da Figura 4.3.

O desempenho do desacoplador  $K_r(s)$  pode ser avaliado pelas Figuras 4.4 e 4.5. A Figura 4.4 mostra dominância dos termos diagonais na ordem de mais de  $20 \text{ dB}$  em baixas frequências, o que é facilmente confirmado pela Figura 4.5, que mostra máximo valor singular abaixo de  $-24,88 \text{ dB}$  para  $\omega < 10^{-2}$ . Quando analisado até  $\omega = 2.10^{-2}$  (faixa considerada de interesse neste Exemplo), no entanto, o desempenho cai consideravelmente (valor singular máximo de  $-13,85 \text{ dB}$ ). Ressalte-se, no entanto, que esse pré-compensador não foi projetado especificamente para essa faixa de frequências.

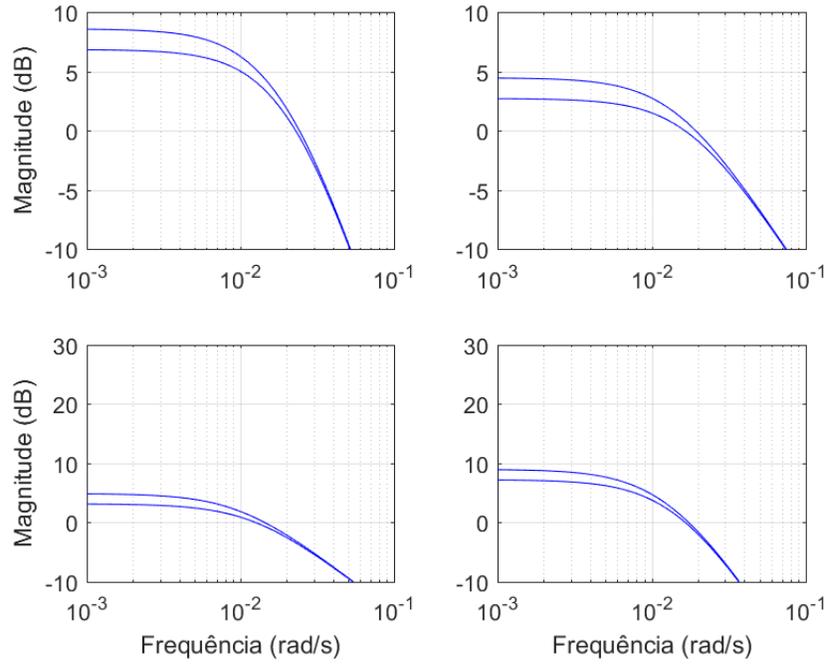


Figura 4.1: Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema  $G(s, \alpha)$  do Exemplo 1.

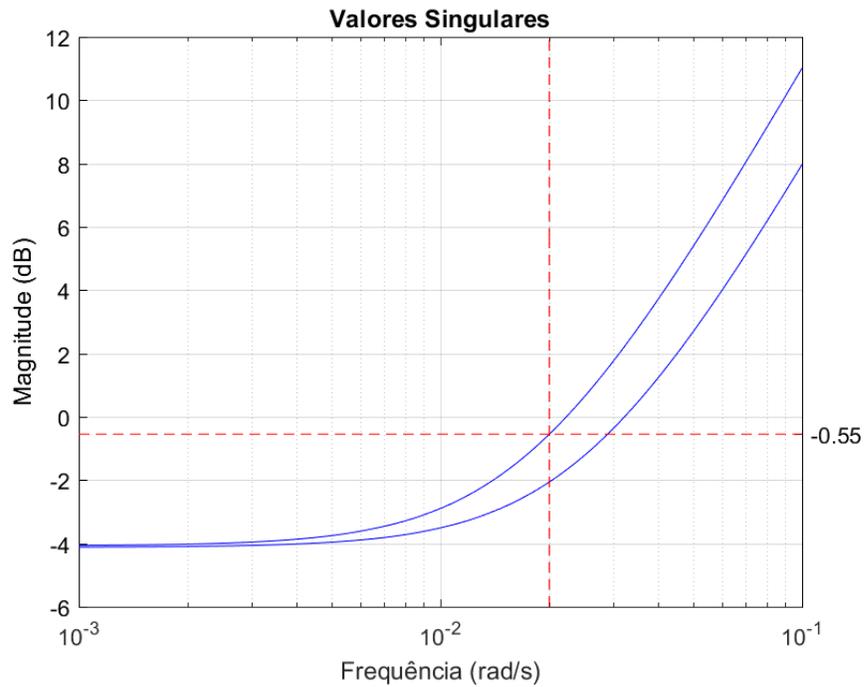


Figura 4.2: Valores singulares em função da frequência para  $G_D(j\omega, \alpha)^{-1} G(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ , no Exemplo 1.

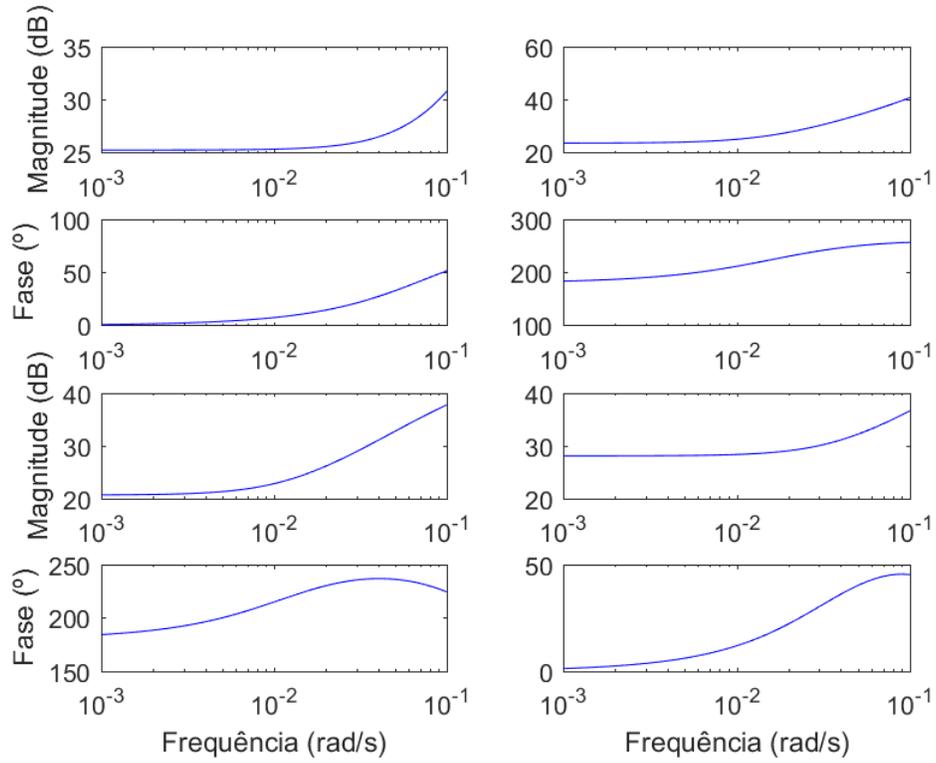


Figura 4.3: Diagrama de Bode do pré-compensador  $K_r(s)$ , obtido por Siqueira et al. (2014), desenhado na mesma faixa de frequência das Figuras 4.1 e 4.2.

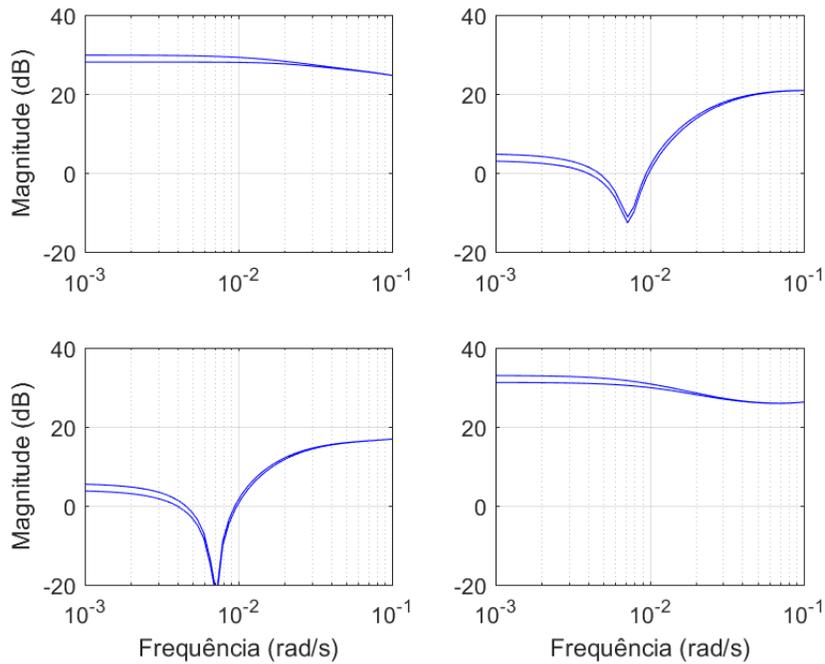


Figura 4.4: Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema  $G(s, \alpha)K_r(s)$ , no Exemplo 1.

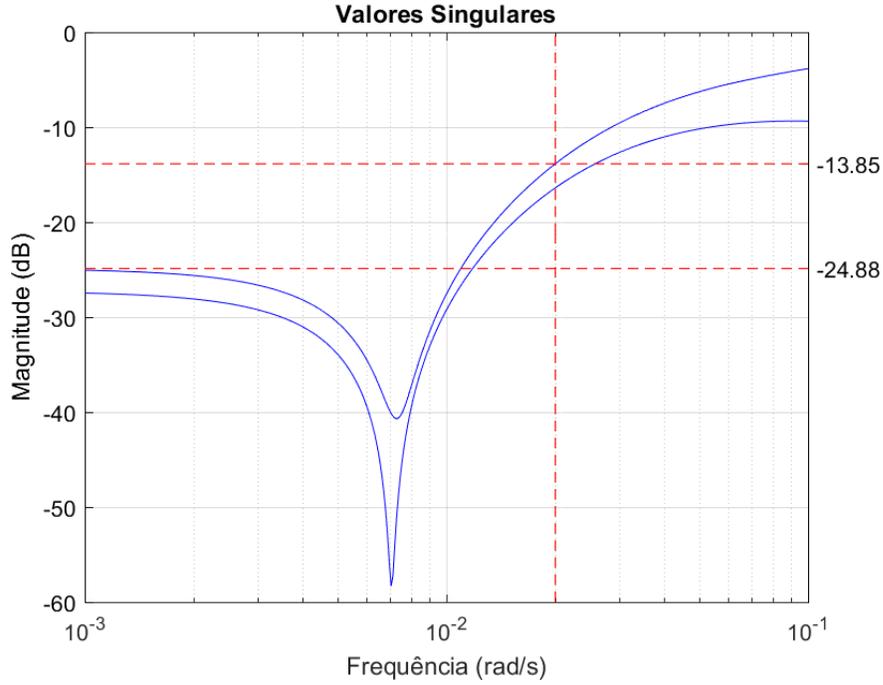


Figura 4.5: Valores singulares em função da frequência para  $H_D(j\omega, \alpha)^{-1} H(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ , em que  $H(s, \alpha) = G(s, \alpha)K_r(s)$ , no Exemplo 1.

## 4.1.1 Método 1

### 4.1.1.1 Aplicado a todas as frequências

Utilizando o Método 1 (Algoritmo 3.2), há as seguintes variáveis:  $\sigma = \gamma^2$ ,  $\mathbf{Y}_A \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ ,  $\mathbf{Y}_C \in \mathbb{R}^{n_k \times m}$ ,  $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{n_k \times m}$ ,  $\mathbf{D}_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\mathbf{P}(\alpha) \in \mathbb{S}^n$ ,  $\mathbf{X}_0(\alpha) \in \mathbb{R}^{2(n+m) \times (n_g+n_r)}$ ,  $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ . Repare que  $n = n_g + n_r + n_k$  e, para este exemplo,  $m = 2$  e  $n_g = 4$ .

Como parâmetros para o projeto do desacoplador utilizando o Método 1, foram utilizados os valores constantes na Tabela 4.1 e  $\Lambda$  com a estrutura abaixo:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} \\ \mathbf{B}_g \mathbf{C}_{k^*}(\alpha) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{k^*}(\alpha) \\ \mathbf{D}_g \mathbf{C}_{k^*}(\alpha) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} \\ \mathbf{B}_g \mathbf{C}_{k^*}(\alpha) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{k^*}(\alpha) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

A escolha dos parâmetros seguiu as sugestões da Subseção 3.2.2.4. Como no caso em tela a diagonal de  $G(s, \alpha)$  já atende ao critério de magnitudes equilibradas, não foi imposta nenhuma matriz de pesos para compensar. O parâmetro  $\mathbf{D}_{g^*}^{-1}$ , ainda que pudesse ser encontrado resolvendo um problema de realimentação

Tabela 4.1: Parâmetros escolhidos para projetar o desacoplador pelo Método 1, no Exemplo 1.

Parâmetro	Valor				
$\mathbf{A}_{r_i}(\alpha), i = 1, \dots, m$	$\mathbf{A}_g(\alpha)$				
$c_{ri}$	$\mathbf{C}_{g_{i,:}}$				
$b_{ri}$	$\mathbf{B}_{g:,i}$				
$d_{ri}$	$\mathbf{D}_{g_{i,i}}$				
$\Omega$	$\mathbb{R}$				
$\mathbf{A}_{k^*}(\alpha)$	$\mathbf{A}_g(\alpha) - \mathbf{B}_g \mathbf{D}_{g^*}^{-1} \mathbf{C}_g$				
$\mathbf{C}_{k^*}$	$\mathbf{D}_{g^*}^{-1} \mathbf{C}_g$				
$\mathbf{D}_{g^*}^{-1}$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>1139,9</td> <td>862,3</td> </tr> <tr> <td>934,5</td> <td>709,7</td> </tr> </table>	1139,9	862,3	934,5	709,7
1139,9	862,3				
934,5	709,7				

estática da saída, foi escolhido, por simplificação, arbitrariamente de forma que resultasse em  $\mathbf{A}_{k^*}(\alpha)$  estável (testado para todo  $\alpha \in \Lambda_N$  com condições LMIs suficientes) e que fosse consideravelmente grande, para que  $\mathbf{A}_{k^*}(\alpha)$  fosse aproximadamente a matriz de estado da inversa de  $G(s, \alpha)$ .

Após resolver o problema de otimização convexo com LMIs, com duração aproximada de 12,8 s, foi obtido o pré-compensador descrito abaixo, o qual graficamente está representado na Figura 4.6.

$$K(s) = \left[ \begin{array}{cccc|cc} -0,3847 & -2,1635 & 0,0396 & 0,1775 & -0,0503 & 0,1926 \\ -0,3637 & -1,8820 & 0,0121 & 0,1745 & -0,0398 & 0,1746 \\ -0,8726 & -4,1405 & -0,0002 & 0,3469 & -0,0591 & 0,4124 \\ -0,4876 & -2,5013 & 0,0150 & 0,1874 & -0,0332 & 0,2451 \\ \hline 10,8646 & 53,5133 & -0,3363 & -4,4763 & 2,0844 & -5,6921 \\ 8,4243 & 44,8362 & -0,2736 & -3,6728 & 0,2286 & -3,1526 \end{array} \right]$$

O desempenho do desacoplador  $K(s)$  pode ser avaliado pelas Figuras 4.7 e 4.8. Considerando a banda de interesse  $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R} : |\omega| \leq 2 \cdot 10^{-2}\}$ , o cálculo do indicador  $\delta_{\Omega}^*$  (usando  $\mathbf{D} = 10^{-5} \mathbf{I}$  para tornar  $G(s, \alpha)K(s)$  próprio) resultou em 0,6960 (-3,15 dB), próximo ao máximo valor singular apresentado nessa faixa na Figura 4.8 (-3,47 dB).

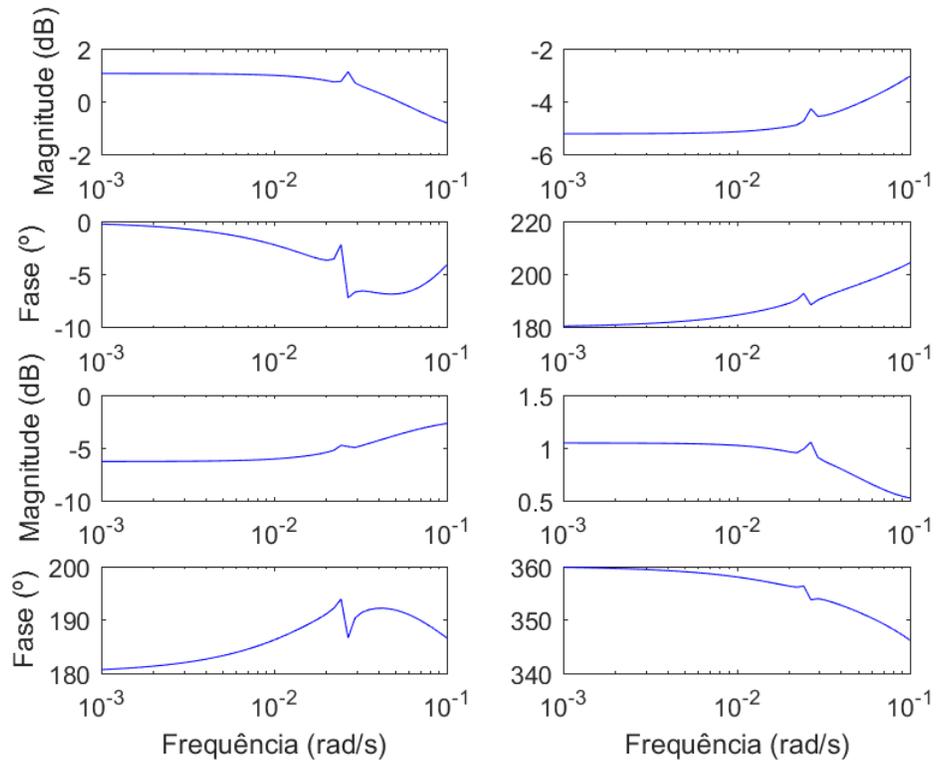


Figura 4.6: Diagrama de Bode do pré-compensador  $K(s)$  obtido pelo Método 1 no Exemplo 1, desenhado na mesma faixa de frequência das Figuras 4.1 e 4.2.

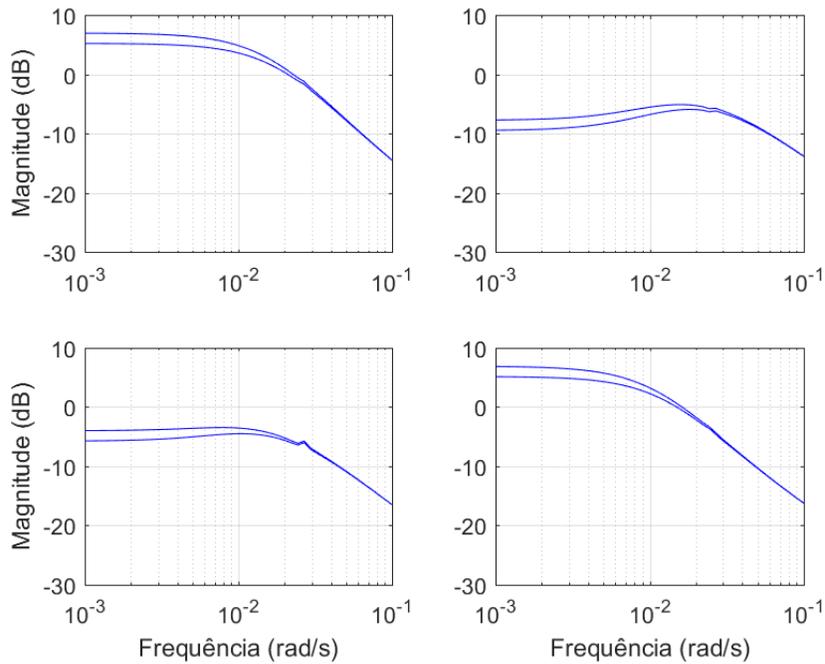


Figura 4.7: Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema  $G(s, \alpha)K(s)$ , com  $K(s)$  projetado pelo Método 1 no Exemplo 1.

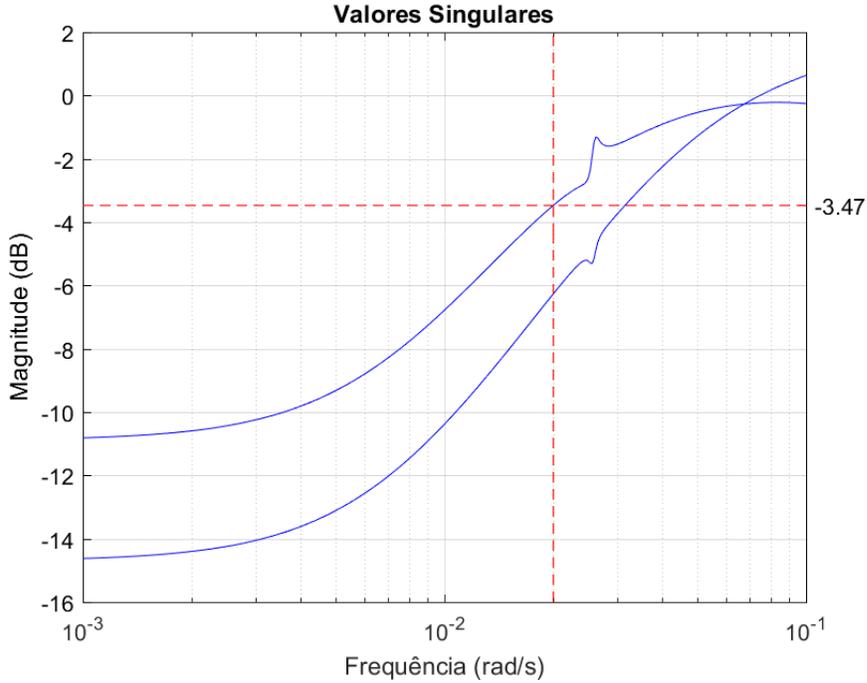


Figura 4.8: Valores singulares em função da frequência para  $H_D(j\omega, \alpha)^{-1} H(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ , em que  $H(s, \alpha) = G(s, \alpha)K(s)$ , com  $K(s)$  projetado pelo Método 1 no Exemplo 1.

Como pode ser visto, o desempenho do pré-compensador projetado é baixo quando comparado ao obtido por Siqueira et al. (2014). Um dos fatores é a escolha *a priori* do sistema de referência  $G_r(s, \alpha)$ , que pode se mostrar pouco adequado. Além disso, considerar todas as frequências no projeto é conservador, se tivermos interesse apenas na banda passante.

#### 4.1.1.2 Aplicado a baixas frequências

Em relação ao caso que considera todas as frequências, novas variáveis surgem:  $\mathbf{Q}(\alpha) \in \mathbb{S}^n$ ,  $\mathbf{P}_s(\alpha) \in \mathbb{S}^n$  e  $\mathbf{X}_{s0}(\alpha) \in \mathbb{R}^{2(n+m) \times (n_g+n_r)}$ .

Se calcularmos novamente o pré-compensador  $K(s)$  por meio do Método 1 (Algoritmo 3.2) alterando apenas o parâmetro de faixa de frequências  $\Omega$ , dado por

$$\Omega = \{\omega \in \mathbb{R} : |\omega| \leq 2 \cdot 10^{-2}\}$$

obtemos o resultado mostrado pelas Figuras 4.9 a 4.11, com tempo de processamento 12,4 s. O cálculo do indicador  $\delta_{\Omega}^*$  (usando  $\mathbf{D} = 10^{-5}\mathbf{I}$  para tornar  $G(s, \alpha)K(s)$  próprio) resultou em 0,3970 (-8,02 dB), próximo do valor singular máximo apresentado em  $\Omega$  na Figura 4.11 (-9,79 dB).

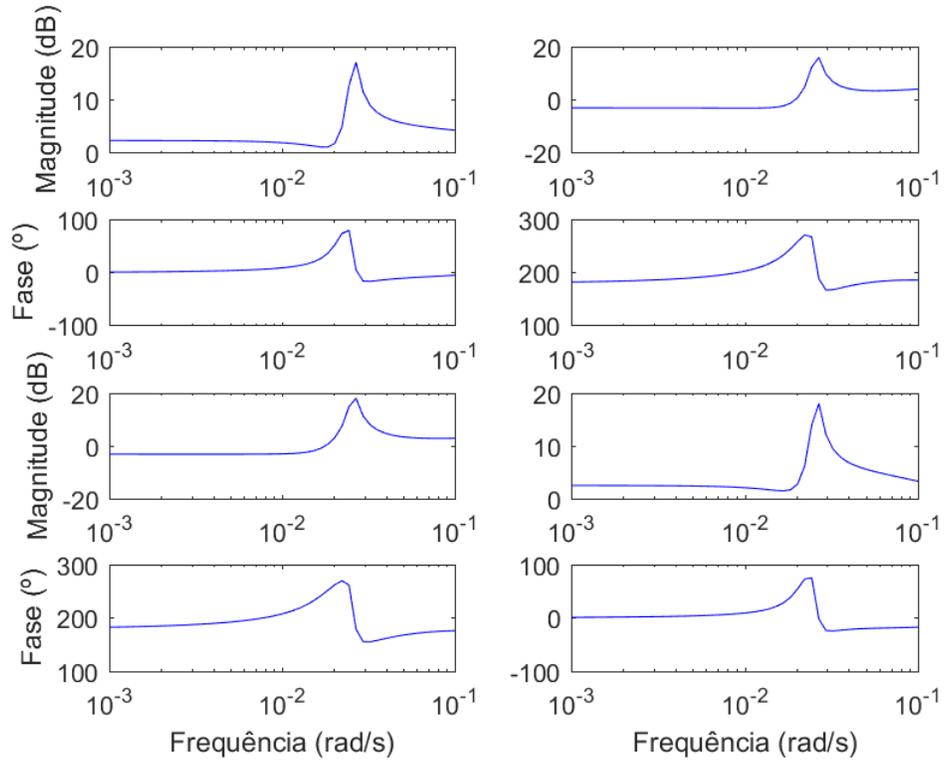


Figura 4.9: Diagrama de Bode do pré-compensador  $K(s)$  obtido pelo Método 1 considerando apenas baixas frequências no Exemplo 1, desenhado na mesma faixa de frequência das Figuras 4.1 e 4.2.

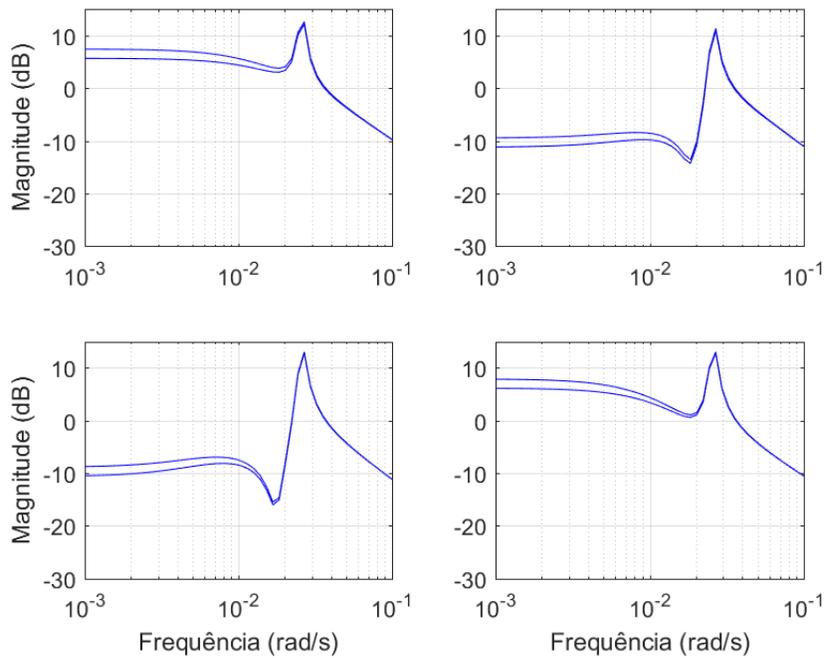


Figura 4.10: Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema  $G(s, \alpha)K(s)$ , com  $K(s)$  projetado pelo Método 1 considerando apenas baixas frequências no Exemplo 1.

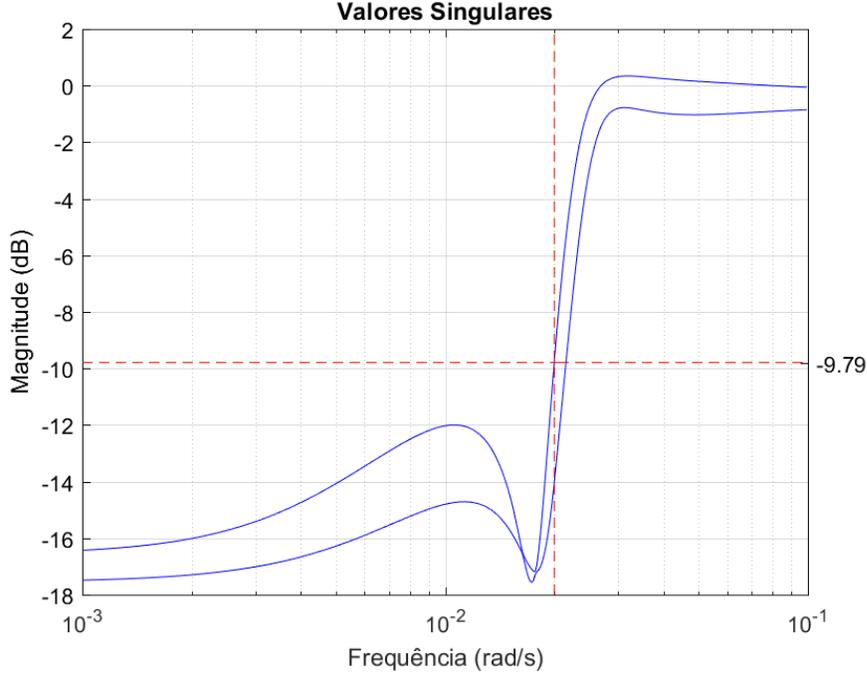


Figura 4.11: Valores singulares em função da frequência para  $H_D(j\omega, \alpha)^{-1} H(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ , em que  $H(s, \alpha) = G(s, \alpha)K(s)$ , com  $K(s)$  projetado pelo Método 1 considerando apenas baixas frequências no Exemplo 1.

Houve uma melhora significativa do desacoplamento na faixa de interesse  $\Omega$ , ao considerá-la no projeto do desacoplador, mas ainda aquém do obtido por Siqueira et al. (2014). Outro fator que compromete o desempenho do projeto é escolha rígida de um modelo de referência *a priori*.

## 4.1.2 Método 2

Utilizando o Método 2, há as seguintes variáveis:  $\sigma = \gamma^2$ ,  $\mathbf{Y}_A \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ ,  $\mathbf{Y}_C \in \mathbb{R}^{n_k \times m}$ ,  $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{n_k \times m}$ ,  $\mathbf{D}_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\mathbf{P}(\alpha) \in \mathbb{S}^n$ ,  $\mathbf{P}_s(\alpha) \in \mathbb{S}^n$ ,  $\mathbf{P}_r(\alpha) \in \mathbb{S}^{n_r}$ ,  $\mathbf{Q}(\alpha) \in \mathbb{S}^n$ ,  $\mathbf{Q}_r(\alpha) \in \mathbb{S}^{n_r}$ ,  $\mathbf{X}_0(\alpha) \in \mathbb{R}^{2(n+m) \times (n_g+n_r)}$ ,  $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ ,  $\mathbf{X}_{s0}(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times (n_g+n_r)}$ ,  $\mathbf{X}_r(\alpha) \in \mathbb{R}^{2(n_r+m) \times n_r}$ ,  $\mathbf{b}_{ri}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_{ri} \times 1}$ ,  $d_{ri}(\alpha) \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Repare que  $\mathbf{B}_r(\alpha) = \text{diag}(\mathbf{b}_{ri}(\alpha))$ ,  $\mathbf{D}_r(\alpha) = \text{diag}(d_{ri}(\alpha))$ ,  $n = n_g + n_r + n_k$ ,  $n_r = \sum_{i=1}^m n_{ri}$  e, para este exemplo,  $m = 2$  e  $n_g = 4$ .

Como parâmetros para o projeto do desacoplador utilizando o Método 2 (Algoritmo 3.3), foram utilizados os valores constantes na Tabela 4.2 e  $\mathbf{A}$  com a estrutura (4.1).

As matrizes definidas *a priori* para  $G_r(s, \alpha)$  ( $\mathbf{A}_r(\alpha)$  e  $\mathbf{C}_r$ ) foram escolhidas iguais às matrizes correspondentes de  $G(s, \alpha)$  para buscar conservar as características dinâmicas do sistema original. A frequência de corte para o critério de limitação de  $G_r(s, \alpha)$  foi escolhida bem abaixo da frequência de corte da banda de interesse para que deixasse mais livre  $G_r(s, \alpha)$  próximo a  $\omega_l$ , onde há variações maiores dos ganhos do sistema.

Após resolver o problema de otimização convexo com LMIs, que durou cerca de 31,4 s, foi obtido o pré-compensador descrito abaixo, o qual graficamente está representado na Figura 4.12:

Tabela 4.2: Parâmetros escolhidos para projetar o desacoplador pelo Método 2, no Exemplo 1.

Parâmetro	Valor				
$\mathbf{A}_{r_i}(\boldsymbol{\alpha}), i = 1, \dots, m$	$\mathbf{A}_g(\boldsymbol{\alpha})$				
$c_{ri}$	$\mathbf{C}_{g_{i,:}}$				
$\Omega$	$ \omega  \leq 2 \cdot 10^{-2}$				
$\Omega_r$	$ \omega  \leq 2 \cdot 10^{-5}$				
$m_r$	0,5				
$\mathbf{A}_{k^*}(\boldsymbol{\alpha})$	$\mathbf{A}_g(\boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{B}_g \mathbf{D}_{g^*}^{-1} \mathbf{C}_g$				
$\mathbf{C}_{k^*}$	$\mathbf{D}_{g^*}^{-1} \mathbf{C}_g$				
$\mathbf{D}_{g^*}^{-1}$	<table border="1"> <tr> <td>1139,9</td> <td>862,3</td> </tr> <tr> <td>934,5</td> <td>709,7</td> </tr> </table>	1139,9	862,3	934,5	709,7
1139,9	862,3				
934,5	709,7				

$$K(s) = \left[ \begin{array}{cccc|cc} -4,7352 & -3,4592 & 0,1400 & -0,0904 & -0,0794 & 0,0205 \\ -4,2023 & -3,0350 & 0,1009 & -0,0621 & -0,0559 & 0,0287 \\ -9,3569 & -6,7373 & 0,1974 & -0,1776 & -0,0348 & 0,1246 \\ -5,5180 & -4,0464 & 0,1322 & -0,1235 & -0,0158 & 0,0762 \\ \hline 120,1119 & 86,4740 & -2,8754 & 2,2689 & 1,7055 & -1,5823 \\ 98,7772 & 72,4017 & -2,3692 & 1,8999 & 0,2463 & -0,4834 \end{array} \right] \quad (4.2)$$

O desempenho do desacoplador  $K(s)$  pode ser avaliado pelas Figuras 4.13 e 4.14. O cálculo do indicador  $\delta_{\Omega}^*$  (usando  $\mathbf{D} = 10^{-5} \mathbf{I}$  para tornar  $G(s, \boldsymbol{\alpha})K(s)$  próprio) resultou em 0,1914 (-14,36 dB), bem acima do máximo valor singular indicado pela Figura 4.14 em  $\Omega$  (-35,47 dB).

Em comparação com o Método 1, é possível ver que houve melhora significativa na diminuição das interações entre malhas, superando o obtido por Siqueira et al. (2014) com  $K_r(s)$  em quase toda faixa  $\Omega$  considerada (máximos valores singulares abaixo de -35 dB, menores que -25 dB obtidos com  $K_r(s)$  em baixas frequências). Apesar desse Método precisar adicionar restrições a mais para limitar a norma de  $G_r(s, \boldsymbol{\alpha})$ , a flexibilização das matrizes  $\mathbf{B}_r(\boldsymbol{\alpha})$  e  $\mathbf{D}_r(\boldsymbol{\alpha})$  mostrou grande ganho.

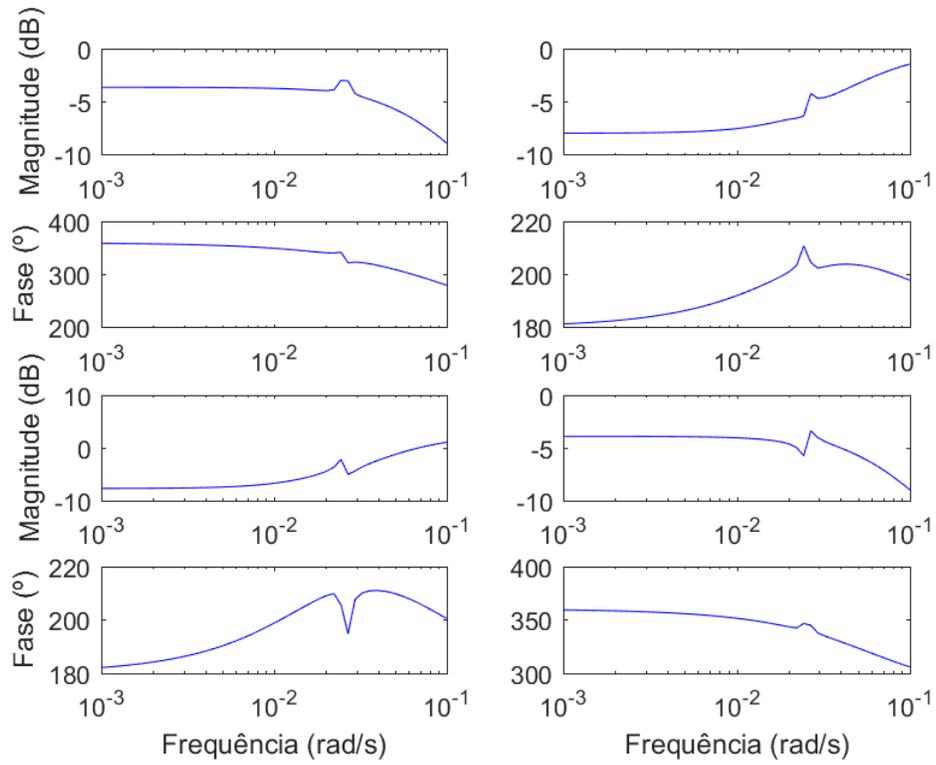


Figura 4.12: Diagrama de Bode do pré-compensador  $K(s)$  obtido pelo Método 2 no Exemplo 1, desenhado na mesma faixa de frequência das Figuras 4.1 e 4.2.

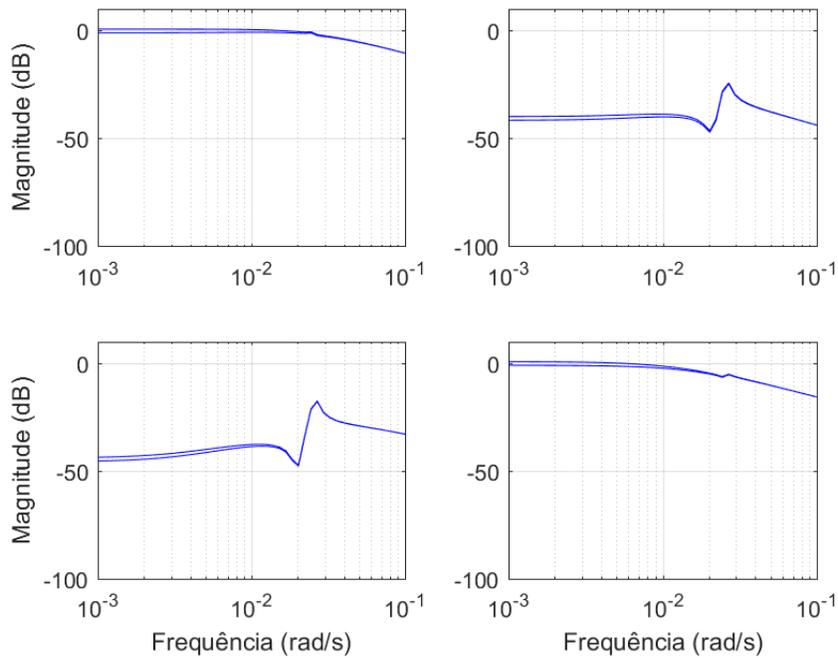


Figura 4.13: Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema  $G(s, \alpha)K(s)$ , com  $K(s)$  projetado pelo Método 2 no Exemplo 1.

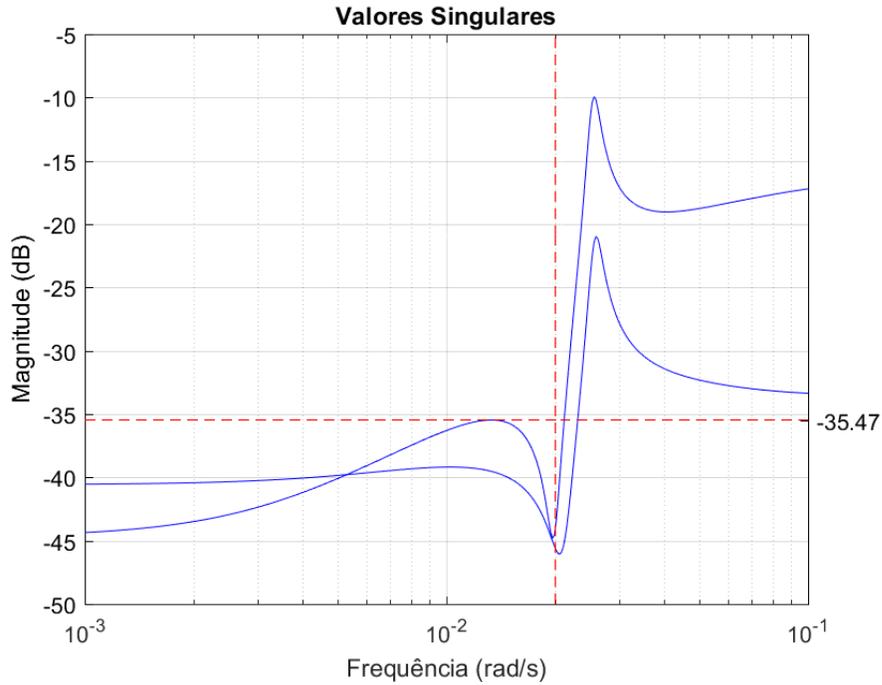


Figura 4.14: Valores singulares em função da frequência para  $H_D(j\omega, \alpha)^{-1} H(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ , em que  $H(s, \alpha) = G(s, \alpha)K(s)$ , com  $K(s)$  projetado pelo Método 2 no Exemplo 1.

#### 4.1.2.1 Avaliação do Procedimento Iterativo

Para avaliar a ideia discutida na Observação 3.6, foi realizado também o projeto de  $K(s)$  com uma iteração, como descrito no Algoritmo 3.1, resultando nas Figuras 4.15 a 4.17. Houve aumento significativo do desacoplamento ao realizar uma iteração, com máximos valores singulares abaixo de  $-50$  dB. O cálculo do indicador  $\delta_{\Omega}^*$  (usando  $\mathbf{D} = 10^{-5}\mathbf{I}$  para tornar  $G(s, \alpha)K(s)$  próprio) resultou em 0,1857 ( $-14,62$  dB), bem acima do máximo valor singular indicado pela Figura 4.14 em  $\Omega$  ( $-53,02$  dB), mas coincidentemente próximo do indicador  $\delta_{\Omega}^*$  calculado para o caso sem iteração. Projetos com mais iterações foram realizados, mas não resultaram em melhora significativa.

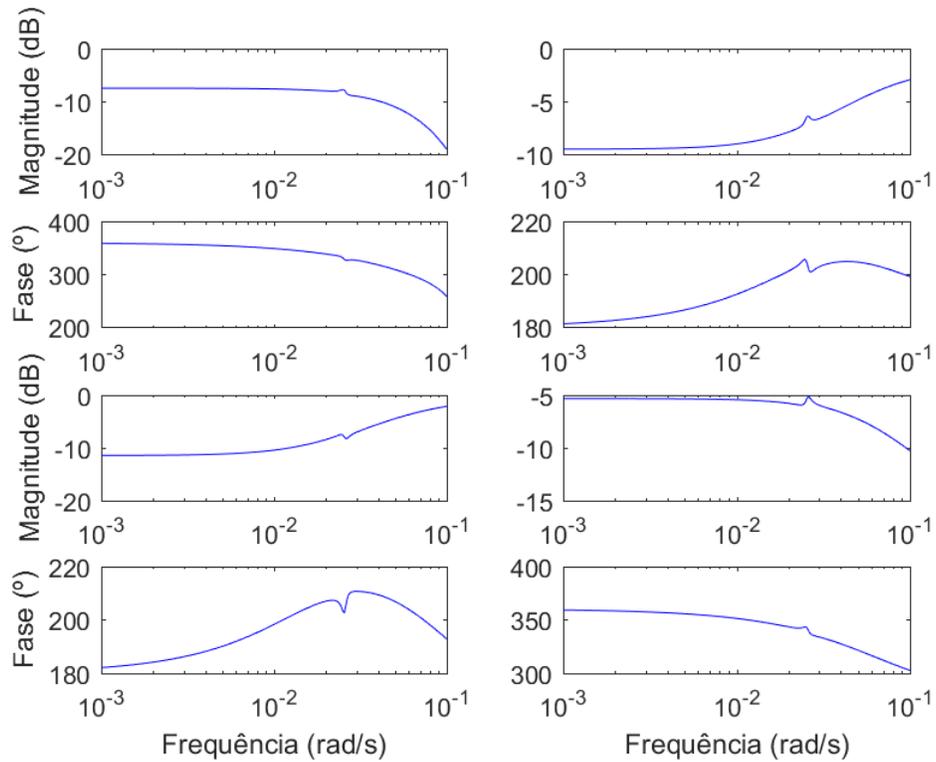


Figura 4.15: Diagrama de Bode do pré-compensador  $K(s)$  obtido pelo Método 2 com uma iteração no Exemplo 1, desenhado na mesma faixa de frequência das Figuras 4.1 e 4.2.

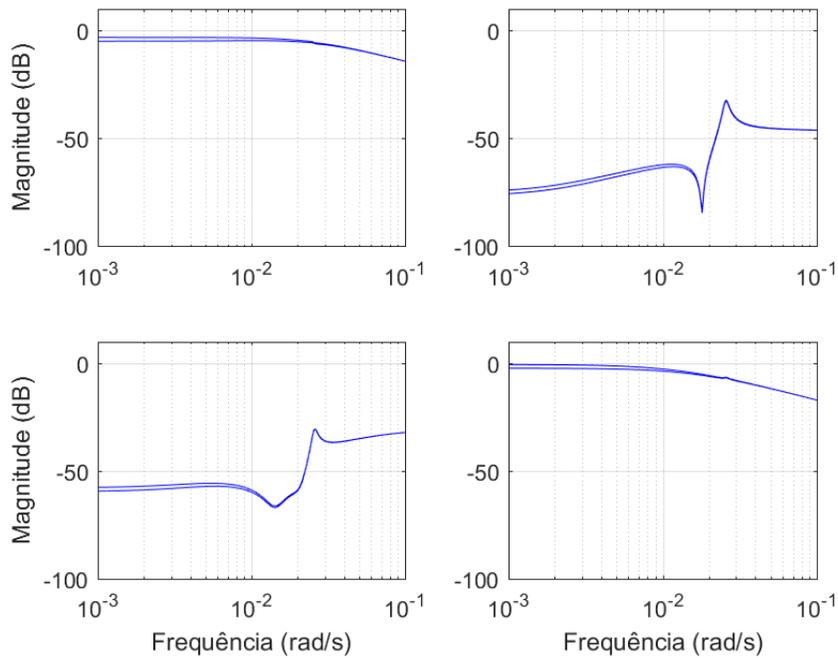


Figura 4.16: Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema  $G(s, \alpha)K(s)$ , com  $K(s)$  projetado pelo Método 2 com uma iteração no Exemplo 1.

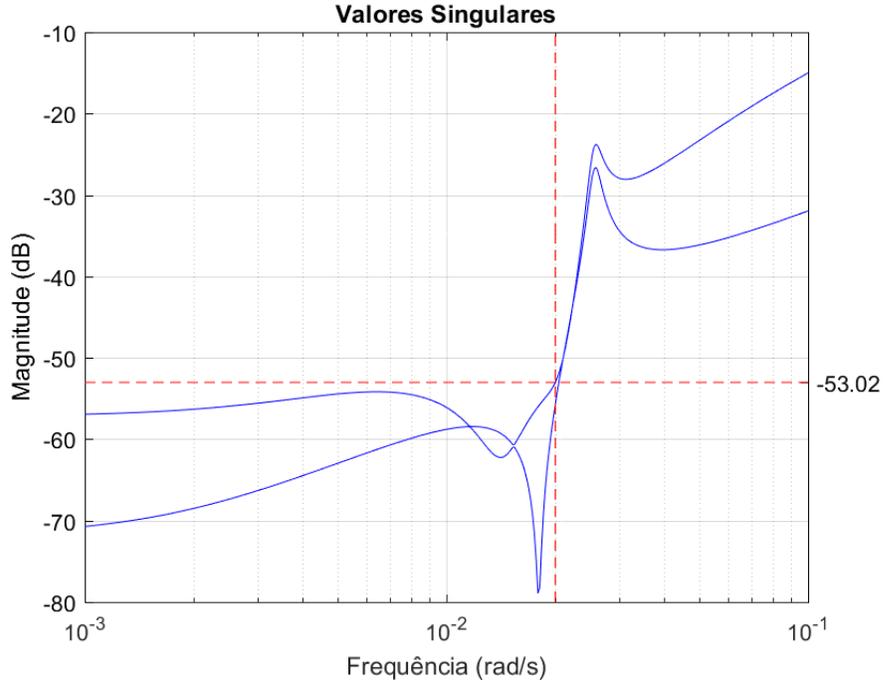


Figura 4.17: Valores singulares em função da frequência para  $H_D(j\omega, \alpha)^{-1} H(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ , em que  $H(s, \alpha) = G(s, \alpha)K(s)$ , com  $K(s)$  projetado pelo Método 2 com uma iteração no Exemplo 1.

#### 4.1.2.2 Avaliação da Escolha de $\Lambda$

Até agora, foi utilizado  $\Lambda$  associado a um controlador dependente de parâmetros “ideal”, uma vez que as restrições LMIs devem atender também ao controlador inserido indiretamente em  $\Lambda$ , conforme apresentado na Subseção 3.2.1. Consideremos agora outros formatos para  $\Lambda$  no Método 2 com iteração, como encontrados na literatura (Du and Yang, 2010; Lacerda et al., 2011; Mazzocante and Oliveira, 2016), compostos por matrizes identidade multiplicadas por escalares:

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_g} \\ \mathbf{I}_{n_{ri}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{n_{ri}} \\ \mathbf{I}_{n_k} \\ \mathbf{0}_{n_g \times n_k} \\ \mathbf{0}_{n_r \times n_k} \\ \mathbf{0}_{n_k \times n_k} \\ \mathbf{0}_{m \times n_k} \\ \mathbf{0}_{m \times n_k} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_g} \\ \mathbf{I}_{n_{ri}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{n_{ri}} \\ \mathbf{I}_{n_k} \\ \mathbf{I}_{n_g} \\ \mathbf{I}_{n_{ri}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{n_{ri}} \\ \mathbf{I}_{n_k} \\ \mathbf{0}_{m \times n_k} \\ \mathbf{0}_{m \times n_k} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_g} \\ \mathbf{I}_{n_{ri}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{n_{ri}} \\ \mathbf{I}_{n_k} \\ \mathbf{I}_{n_g} \\ \mathbf{I}_{n_{ri}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{n_{ri}} \\ \mathbf{I}_{n_k} \\ 10^{-2} \mathbf{I}_{n_k} \\ \mathbf{0}_{m \times n_k} \\ \mathbf{0}_{m \times n_k} \end{bmatrix}$$

Ressalte-se que os trabalhos citados acima exploram outros problemas que não do desacoplamento, não havendo portanto, equivalência entre as dimensões utilizadas pelos autores e as dimensões de  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  e  $\Lambda_3$ .

Os pré-compensadores obtidos com essas escolhas de  $\Lambda$  foram todos aproximadamente estáticos:

$$\mathbf{K}_1 \simeq \begin{bmatrix} 0,2593 & -0,1773 \\ -0,1455 & 0,2726 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 \simeq \mathbf{K}_3 \simeq \begin{bmatrix} 0,2593 & -0,1774 \\ -0,1455 & 0,2727 \end{bmatrix}$$

Na falta de boas referências de  $\mathbf{A}_k$  e  $\mathbf{C}_k$  em  $\Lambda$ , o resolvidor usou  $\mathbf{D}_k$  para minimizar a função custo. Esse pré-compensador estático torna o sistema dominante diagonal para baixas frequências, como pode ser visto nas Figuras 4.18 e 4.19. O cálculo do indicador  $\delta_{\Omega}^*$  (usando  $\mathbf{D} = 10^{-5}\mathbf{I}$  para tornar  $G(s, \alpha)\mathbf{K}_2$  próprio) resultou em 0,9282 (-0,65 dB), próximo ao indicado na Figura 4.19 (-0,98 dB). Apesar da dominância diagonal, trata-se de um resultado bem inferior ao obtido com  $\Lambda$  com a estrutura (4.1) (-53,02 dB, conforme Figura 4.14).

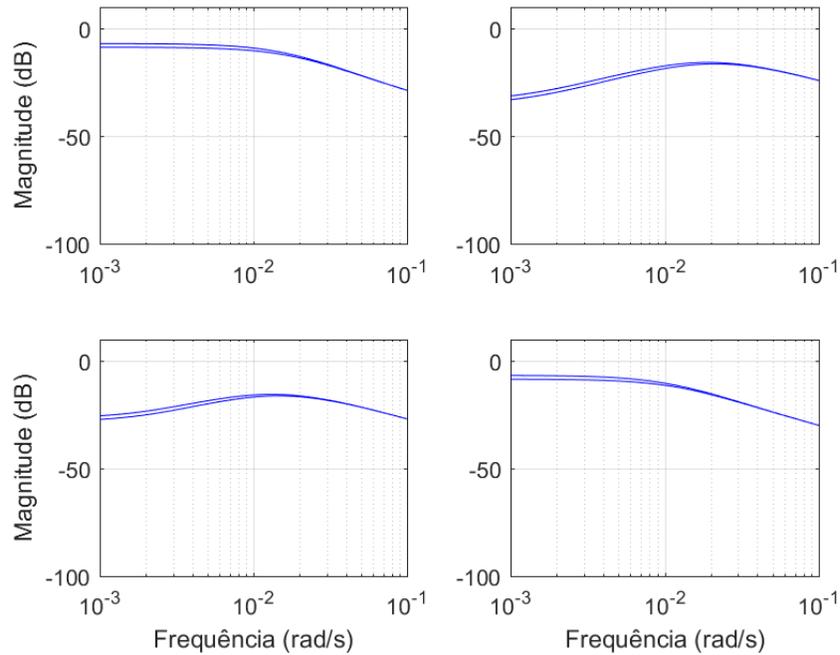


Figura 4.18: Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema  $G(s, \alpha)\mathbf{K}_2$  no Exemplo 1.

É possível imaginar que seja suficiente utilizar um pré-compensador próximo a um ideal dependente de parâmetros, como, por exemplo, a média das inversas dos vértices do sistema:

$$K_*(s) := \{\mathbf{A}_{k_*}, \mathbf{B}_{k_*}, \mathbf{C}_{k_*}, \mathbf{D}_{k_*}\}$$

em que  $\mathbf{C}_{k_*}$  é dado pela Tabela 4.2,  $\mathbf{D}_{k_*} = \mathbf{D}_{g_*}^{-1}$  ( $\mathbf{D}_{g_*}^{-1}$  dado pela mesma Tabela),  $\mathbf{A}_{k_*}$  é a média de  $\mathbf{A}_{k_*}(\alpha)$  aplicado aos vértices do sistema e  $\mathbf{B}_{k_*} = -\mathbf{B}_g \mathbf{D}_{g_*}^{-1}$ .

O resultado do desacoplamento utilizando o pré-compensador  $K_*(s)$  (Figura 4.20), porém, é significativamente pior que utilizando o Método 2, como pode ser avaliado pela Figura 4.21 e pela Figura 4.22, que

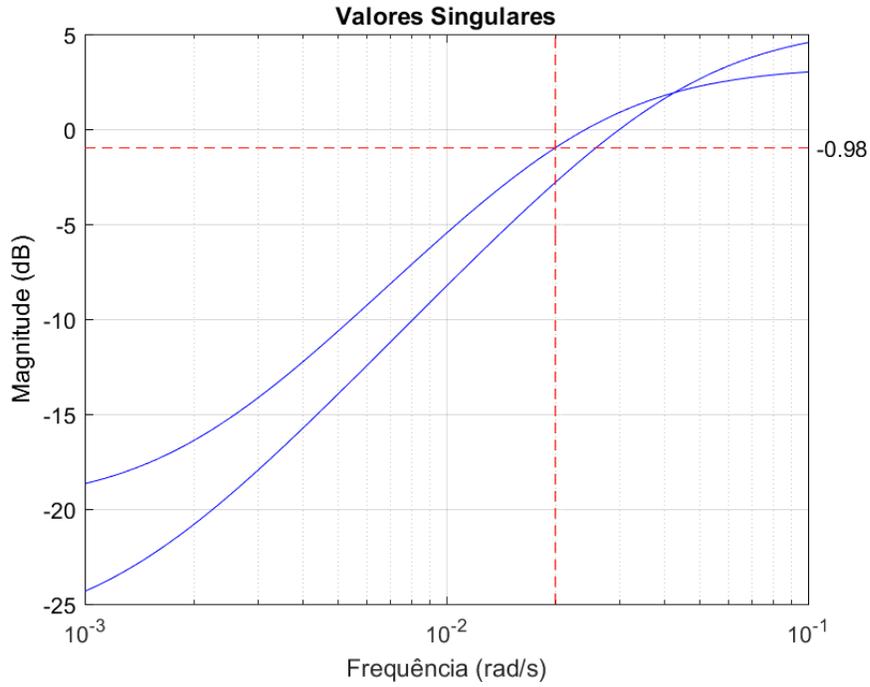


Figura 4.19: Valores singulares em função da frequência para  $H_D(j\omega, \alpha)^{-1} H(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ , em que  $H(s, \alpha) = G(s, \alpha) \mathbf{K}_2$  no Exemplo 1.

retrata valores singulares que chegam a cerca de  $-0,78$  dB em  $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R} : |\omega| \leq 2 \cdot 10^{-2}\}$ , cerca de 400 vezes maior que o valor obtido com Método 2 com iteração ( $-53,02$  dB). O cálculo do indicador  $\delta_{\Omega}^*$  (usando  $\mathbf{D} = 10^{-5} \mathbf{I}$  para tornar  $G(s, \alpha) \mathbf{K}_*(s)$  próprio) resultou em  $1,0191$  ( $-0,1643$  dB), pouco acima do observado na Figura 4.22 ( $-0,78$  dB).

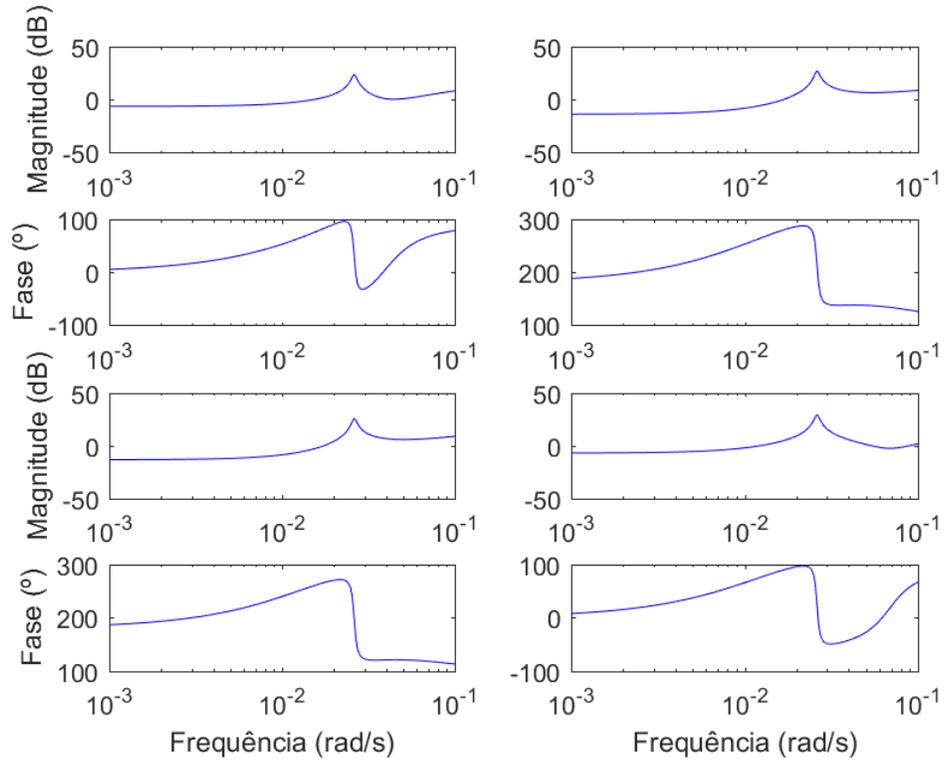


Figura 4.20: Diagrama de Bode do pré-compensador  $K_*(s)$  para o Exemplo 1, desenhado na mesma faixa de frequência das Figuras 4.1 e 4.2.

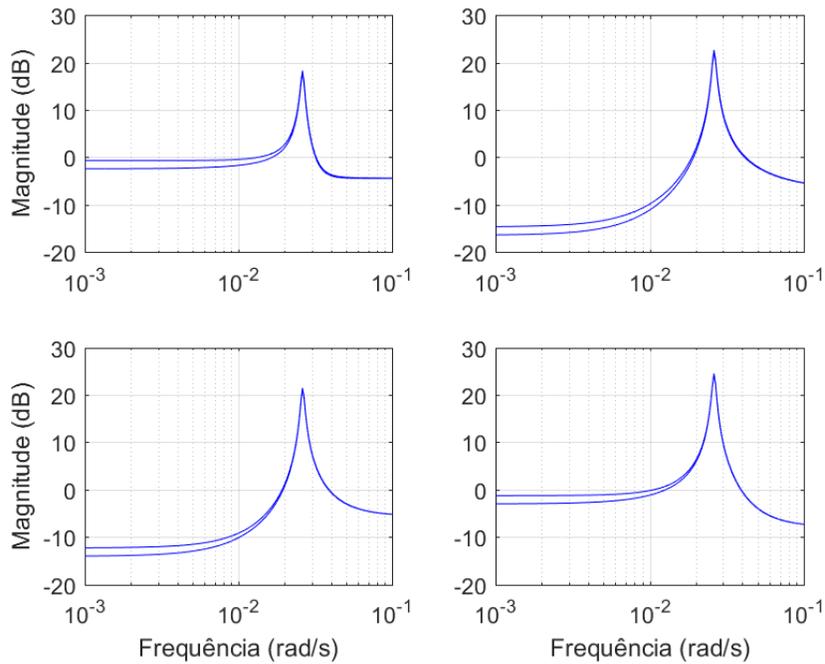


Figura 4.21: Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema  $G(s, \alpha)K_*(s)$  no Exemplo 1.

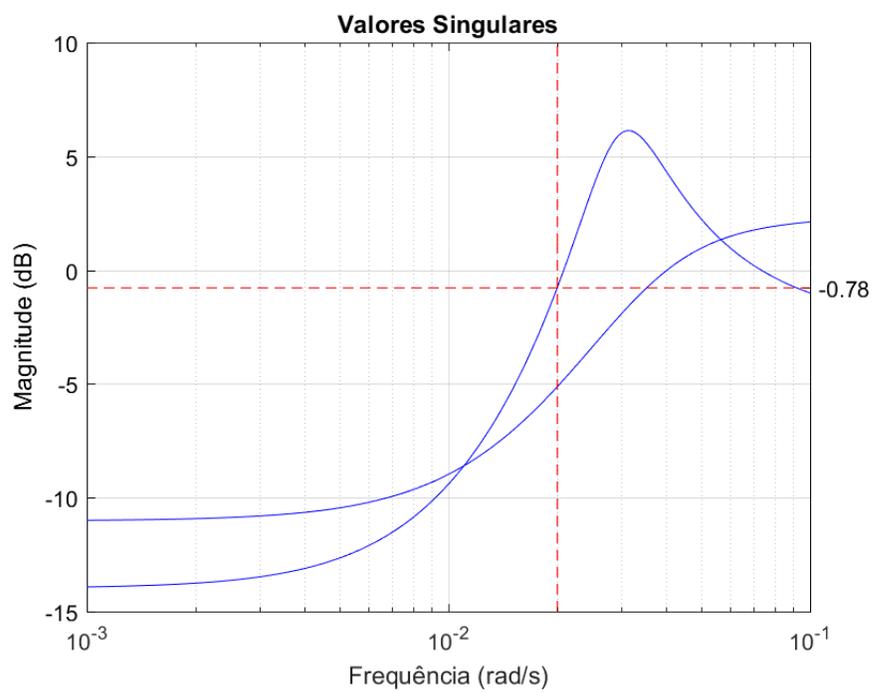


Figura 4.22: Valores singulares em função da frequência para  $H_D(j\omega, \alpha)^{-1} H(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ , em que  $H(s, \alpha) = G(s, \alpha)K_*(s)$ , no Exemplo 1.

### 4.1.3 Método 3

Utilizando o Método 3 (Algoritmo 3.4), há as seguintes variáveis:  $\sigma = \gamma^2$ ,  $\mathbf{Y}_{\mathbf{A}_k} \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ ,  $\mathbf{Y}_{\mathbf{C}_k} \in \mathbb{R}^{n_k \times m}$ ,  $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{n_k \times m}$ ,  $\mathbf{D}_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{S}^n$ ,  $\mathbf{P}_s(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{S}^n$ ,  $\mathbf{P}_r(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{S}^{n_r}$ ,  $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{S}^n$ ,  $\mathbf{Q}_r(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{S}^{n_r}$ ,  $\mathbf{X}_0(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{2(n+m) \times n_g}$ ,  $\mathbf{X}_{m+1} \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ ,  $\mathbf{X}_{s0}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{2n \times n_g}$ ,  $\mathbf{X}_r(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{2(n_r+m) \times n_r}$ ,  $\mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^{n_{r_i} \times n_{r_i}}$ ,  $\mathbf{Y}_{\mathbf{A}_{r_i}}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{n_{r_i} \times n_{r_i}}$ ,  $\mathbf{Y}_{\mathbf{C}_{r_i}}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{n_{r_i} \times 1}$ ,  $\mathbf{b}_{r_i}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{n_{r_i} \times 1}$ ,  $d_{r_i}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Repare que  $\mathbf{B}_r(\boldsymbol{\alpha}) = \text{diag}(\mathbf{b}_{r_i}(\boldsymbol{\alpha}))$ ,  $\mathbf{D}_r(\boldsymbol{\alpha}) = \text{diag}(d_{r_i}(\boldsymbol{\alpha}))$ ,  $n = n_g + n_r + n_k$ ,  $n_r = \sum_{i=1}^m n_{r_i}$  e, para este exemplo,  $m = 2$  e  $n_g = 4$ .

Como parâmetros para o projeto do desacoplador utilizando o Método 3, foram utilizados os valores constantes na Tabela 4.3,  $\boldsymbol{\Lambda}_{m+1}$  com a estrutura (4.1) e  $\boldsymbol{\Lambda}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , com a estrutura (3.28), conforme sugestões da Subseção 3.2.2.4.

Tabela 4.3: Parâmetros escolhidos para projetar o desacoplador pelo Método 3, no Exemplo 1.

Parâmetro	Valor				
$\Omega$	$ \omega  \leq 2.10^{-2}$				
$\Omega_r$	$ \omega  \leq 2.10^{-5}$				
$m_r$	0,5				
$\mathbf{A}_{r_{i*}}(\boldsymbol{\alpha})$ , $i = 1, \dots, m$	$\mathbf{A}_g(\boldsymbol{\alpha})$				
$\mathbf{C}_{r_{i*}}$ , $i = 1, \dots, m$	$\mathbf{C}_{g_{i,:}}$				
$\mathbf{A}_{k*}(\boldsymbol{\alpha})$	$\mathbf{A}_g(\boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{B}_g \mathbf{D}_{g*}^{-1} \mathbf{C}_g$				
$\mathbf{C}_{k*}$	$\mathbf{D}_{g*}^{-1} \mathbf{C}_g$				
$\mathbf{D}_{g*}^{-1}$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>1139,9</td> <td>862,3</td> </tr> <tr> <td>934,5</td> <td>709,7</td> </tr> </table>	1139,9	862,3	934,5	709,7
1139,9	862,3				
934,5	709,7				

Após resolver o problema de otimização convexo com LMIs, que durou cerca de 16,0 s, foi obtido o pré-compensador descrito abaixo, o qual graficamente está representado na Figura 4.23:

$$K(s) = \begin{bmatrix} -3,9013 & -2,8787 & 0,2224 & 0,1265 & -0,1330 & -0,1078 \\ -3,4643 & -2,5212 & 0,1736 & 0,1293 & -0,1044 & -0,0849 \\ -7,7186 & -5,5965 & -0,3584 & 0,2464 & -0,1465 & -0,0741 \\ -4,5407 & -3,3657 & 0,2275 & 0,1273 & -0,0816 & -0,0741 \\ \hline 99,2911 & 71,9813 & -4,9521 & -3,2074 & 3,1050 & 1,6680 \\ 81,1261 & 60,1071 & -4,0765 & -2,5827 & 1,4154 & 2,2011 \end{bmatrix}$$

O desempenho do desacoplador  $K(s)$  pode ser avaliado pelas Figuras 4.24 e 4.25. O cálculo do indicador  $\delta_{\Omega}^*$  (usando  $\mathbf{D} = 10^{-5} \mathbf{I}$  para tornar  $G(s, \boldsymbol{\alpha})K(s)$  próprio) resultou em 0,1934 (-14,27 dB), bem acima do que se vê na Figura 4.25 (-30,12 dB), mas coincidentemente próximo aos valores obtidos pelo Método 2 (-14,36 dB e -14,62 dB).

Em comparação com o Método 2, foi notada uma pequena piora no desempenho do desacoplamento, com base na análise dos gráficos de valores singulares. Este método diminui o conservadorismo ao permitir diferentes valores para  $\mathbf{A}_r(\boldsymbol{\alpha})$  e  $\mathbf{B}_r(\boldsymbol{\alpha})$ , ao mesmo tempo que aumenta o conservadorismo ao precisar impor a estrutura da variável de folga que multiplica essas matrizes. Ainda que neste exemplo do sistema de quatro tanques o Método 2 tenha se mostrado melhor, é possível que o Método 3 possa resultar em um pré-compensador de melhor desempenho em outros casos.

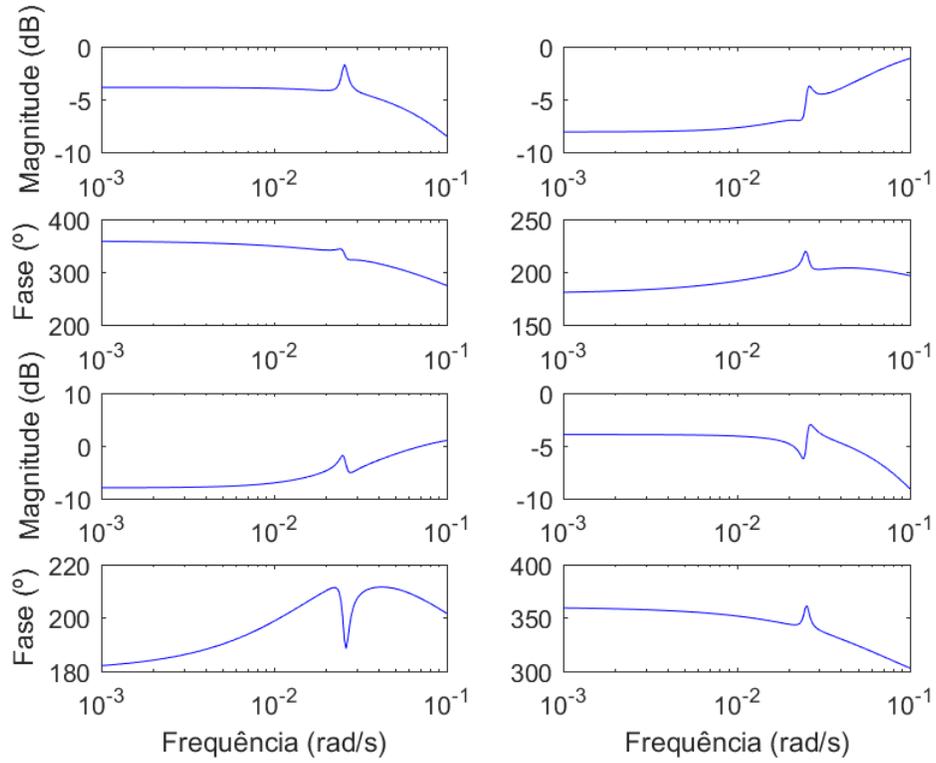


Figura 4.23: Diagrama de Bode do pré-compensador  $K(s)$  obtido pelo Método 3 no Exemplo 1, desenhado na mesma faixa de frequência das Figuras 4.1 e 4.2.

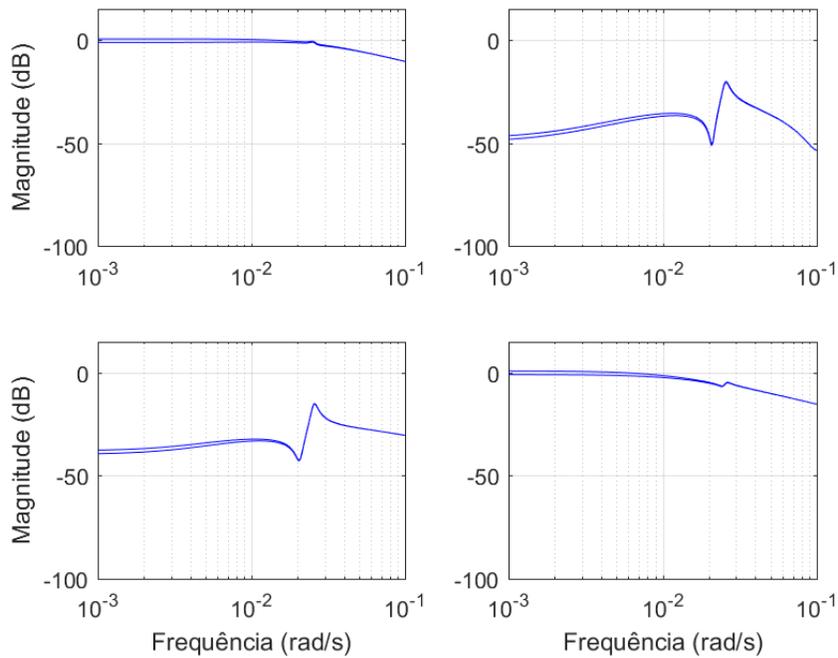


Figura 4.24: Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema  $G(s, \alpha)K(s)$ , com  $K(s)$  projetado pelo Método 3 no Exemplo 1.

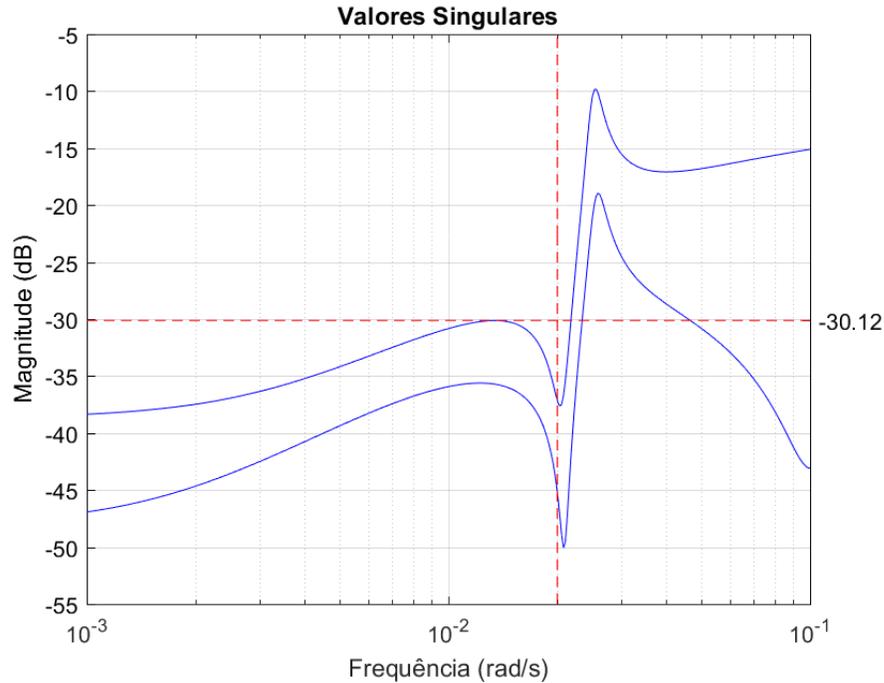


Figura 4.25: Valores singulares em função da frequência para  $H_D(j\omega, \alpha)^{-1} H(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ , em que  $H(s, \alpha) = G(s, \alpha)K(s)$ , com  $K(s)$  projetado pelo Método 3 no Exemplo 1.

#### 4.1.4 Resposta Temporal

Com base nas aplicações dos Métodos 1 a 3 ao sistema de quatro tanques, foi avaliado o desempenho do desacoplamento entre malhas em um caso prático de controle em malha fechada, utilizando o pré-compensador calculado pelo Método 2 sem iteração, ou seja, o pré-compensador da Eq. (4.2).

A simulação foi realizada de forma similar àquela feita por Siqueira et al. (2014), em que é utilizado um controlador proporcional-integral (PI) descentralizado em conjunto com o desacoplador (nomeado aqui de  $K_r(s)$ ) com realimentação unitária (topologia de controle mostrada na Figura 1.1). Os sinais de referência escolhidos foram degraus que se iniciam em momentos diferentes. O controlador PI descentralizado utilizado foi o calculado por Siqueira et al. (2014). Primeiramente, foi simulado com desacoplador  $K_r(s)$ , e o resultado, mostrado na Figura 4.26.

O resultado do desacoplamento pode ser visto nas perturbações observadas nos sinais que não estão associados ao sinal de referência. Quando o sinal de referência do primeiro canal é disparado, a segunda saída chega a subir 0,081 V (cerca de 4,1% do valor do degrau), enquanto que, no disparo do segundo sinal de referência, a primeira saída chega a subir 0,027 V (cerca de 2,7% do valor do degrau).

A mesma simulação foi realizada com o pré-compensador  $K(s)$  calculado pelo Método 2 (Eq. (4.2)). Evidentemente, como os sistemas compensados são diferentes, seria necessário adaptar o controlador PI para adequar ao modelo de referência escolhido por Siqueira et al. (2014). Como o projeto do controlador PI não é escopo deste trabalho, apenas foi aplicado ganho estático a  $K(s)$  para que as magnitudes das funções de transferência do sistema compensado  $G(s, \alpha)K(s)$  ficassem próximas das magnitudes de  $G(s, \alpha)K_r(s)$ . As

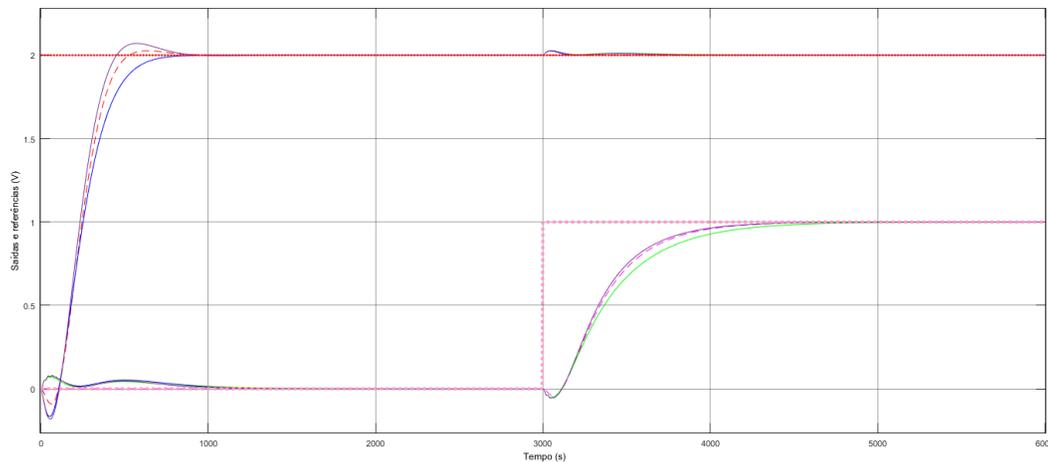


Figura 4.26: Resposta transiente para os quatro vértices do politopo (linhas sólidas), as saídas do modelo de referência (curvas tracejadas) e os sinais de entrada de referência (curvas pontilhadas), utilizando o controlador PI e o desacoplador projetados por Siqueira et al. (2014).

respostas às excitações de degrau são mostradas na Figura 4.27.

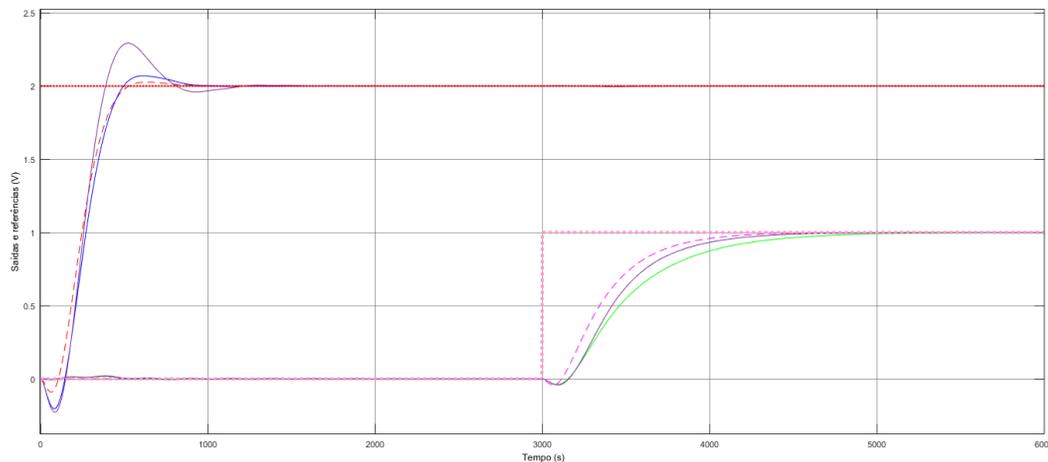


Figura 4.27: Resposta transiente para os quatro vértices do politopo (linhas sólidas), as saídas do modelo de referência (curvas tracejadas) e os sinais de entrada de referência (curvas pontilhadas), utilizando o controlador PI projetado por Siqueira et al. (2014) com adaptação dos ganhos proporcionais e o pré-compensador (4.2).

As perturbações ocorridas nas saídas não associadas às excitações diminuíram consideravelmente (1,0% na segunda saída e perturbação desprezível na primeira saída), confirmando a melhora observada entre os gráficos de valores singulares das Figuras 4.5 e 4.14.

## 4.2 EXEMPLO 2: PROCESSO DE DESTILAÇÃO

Neste exemplo, foi utilizado um modelo de uma coluna de destilação, que foi explorado por diversos trabalhos (Skogestad and Postlethwaite, 2001). Em um deles, o autor estipulou incertezas nas entradas do processo na forma de ganho e atraso incertos e definiu um conjunto de especificações que o controle devia alcançar (Limebeer, 1991). O sistema incerto proposto era dado por

$$G(s) = \frac{1}{75s + 1} \begin{bmatrix} 0,878 & -0,864 \\ 1,082 & -1,096 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 e^{-\tau_1 s} & 0 \\ 0 & k_2 e^{-\tau_2 s} \end{bmatrix}$$

$$0,8 \leq k_1, k_2 \leq 1,2 \quad 0 \leq \tau_1, \tau_2 \leq 1$$

O sistema nominal (parâmetros no meio das faixas de incertezas) obtido por Limebeer (1991) no espaço de estados era dado por

$$G_{nom}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_g & \mathbf{B}_g \\ \hline \mathbf{C}_g & \mathbf{D}_g \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|cc} -0,0052 & -0,0018 & 0,0039 & -0,0024 & 0,0714 & -0,0716 \\ -0,0036 & -0,1221 & 0,1693 & 0,2462 & 0,0044 & -0,0451 \\ 0,0047 & 0,1175 & -0,3941 & -0,0332 & -0,0362 & 0,0285 \\ 0,0067 & 0,2222 & -1,1254 & -3,9872 & -0,0534 & 0,0393 \\ \hline 0,0636 & -0,0217 & -0,0040 & 0,0629 & 0 & 0 \\ 0,0786 & 0,0399 & -0,0459 & -0,0209 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Para simplificar a geração do sistema politópico, neste exemplo foi ignorada a incerteza no atraso de tempo. Assim, o produto entre o sistema nominal e a matriz com as incertezas  $k_1$  e  $k_2$  resultou em

$$G(s, \alpha) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_g & \mathbf{B}_g(\alpha) \\ \hline \mathbf{C}_g & \mathbf{0} \end{array} \right], \quad \mathbf{B}_g(\alpha) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \mathbf{B}_{g_i}, \quad \alpha \in \Lambda_N$$

em que

$$\mathbf{B}_{g_1} = \mathbf{B}_g \begin{bmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & 0,8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{g_2} = \mathbf{B}_g \begin{bmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & 1,2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{g_3} = \mathbf{B}_g \begin{bmatrix} 1,2 & 0 \\ 0 & 0,8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{g_4} = \mathbf{B}_g \begin{bmatrix} 1,2 & 0 \\ 0 & 1,2 \end{bmatrix}$$

As Figuras 4.28 e 4.29 mostram as incertezas e o grau de acoplamento entre os canais no sistema  $G(s, \alpha)$ .

Para desacoplar essa planta, primeiramente foi projetado um pré-compensador  $K_{pré}(s)$  pelo Método 2 (Algoritmo 3.3), com iteração (Algoritmo 3.1), utilizando os valores constantes na Tabela 4.4 e  $\Lambda$  com a estrutura (4.1), conforme sugestões discutidas na Subseção 3.2.2.4.

Após resolver o problema de otimização convexo com LMIs, que durou cerca de 18,9 s, foi obtido um pré-compensador graficamente representado na Figura 4.30.

O desempenho do desacoplador  $K_{pré}(s)$ , visto pelas Figuras 4.31 e 4.32, foi insatisfatório, uma vez que não alcançou a dominância diagonal (valores singulares na Figura 4.32 menores que 1 na faixa de interesse  $\Omega$ , descrita na Tabela 4.4).

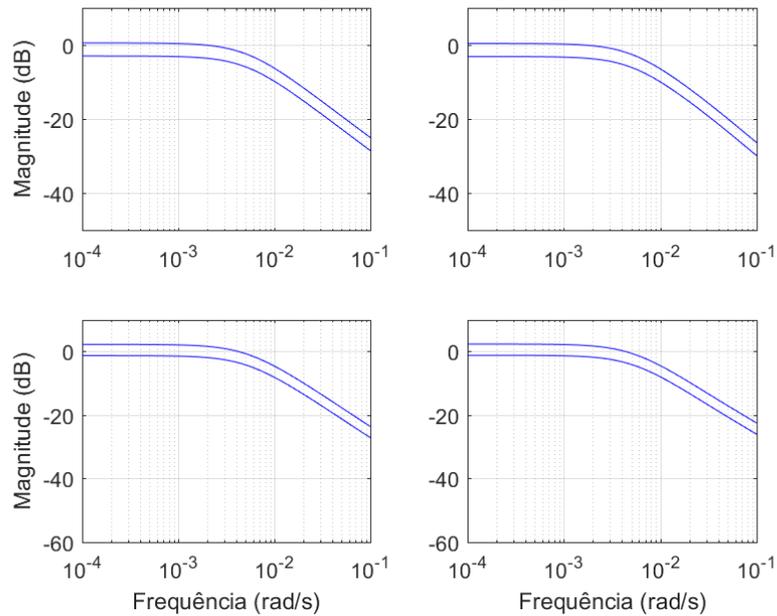


Figura 4.28: Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema  $G(s, \alpha)$  no Exemplo 2.

Em uma segunda tentativa, buscou-se projetar um pós-compensador, ao invés de um pré-compensador. Para tal, foi realizado o mesmo procedimento, porém aplicado ao sistema  $G(s, \alpha)^T$  (vide Observação 1.1). O resultado foi o pós-compensador  $K_{pós}(s)$  representado graficamente na Figura 4.33.

O desacoplador  $K_{pós}(s)$ , cujo desempenho está retratado nas Figuras 4.34 e 4.35, ao contrário do  $K_{pré}(s)$ , alcançou a dominância diagonal do sistema compensado, com boa margem (máximo valor singular na Figura 4.35 abaixo de  $-20$  dB, na faixa de interesse  $\Omega$ ).

Dessa forma, dependendo do sistema e suas incertezas, o potencial de um pré-compensador pode ser mínimo, o que não impede que um pós-compensador obtenha sucesso. Para a classe de sistemas lineares invariantes no tempo e incertos, os métodos de cálculo de pré-compensadores apresentados neste trabalho podem ser

Tabela 4.4: Parâmetros escolhidos para projetar o desacoplador pelo Método 2, no Exemplo 2.

Parâmetro	Valor				
$\mathbf{A}_{r_i}(\alpha), i = 1, \dots, m$	$\mathbf{A}_g(\alpha)$				
$c_{ri}$	$\mathbf{C}_{g_{i,:}}$				
$\Omega$	$ \omega  \leq 10^{-2}$				
$\Omega_r$	$ \omega  \leq 10^{-5}$				
$m_r$	0, 5				
$\mathbf{A}_{k^*}(\alpha)$	$\mathbf{A}_g(\alpha) - \mathbf{B}_g \mathbf{D}_{g^*}^{-1} \mathbf{C}_g$				
$\mathbf{C}_{k^*}$	$\mathbf{D}_{g^*}^{-1} \mathbf{C}_g$				
$\mathbf{D}_{g^*}^{-1}$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>2802, 3</td> <td>4293, 9</td> </tr> <tr> <td>-4188, 7</td> <td>2757, 1</td> </tr> </table>	2802, 3	4293, 9	-4188, 7	2757, 1
2802, 3	4293, 9				
-4188, 7	2757, 1				

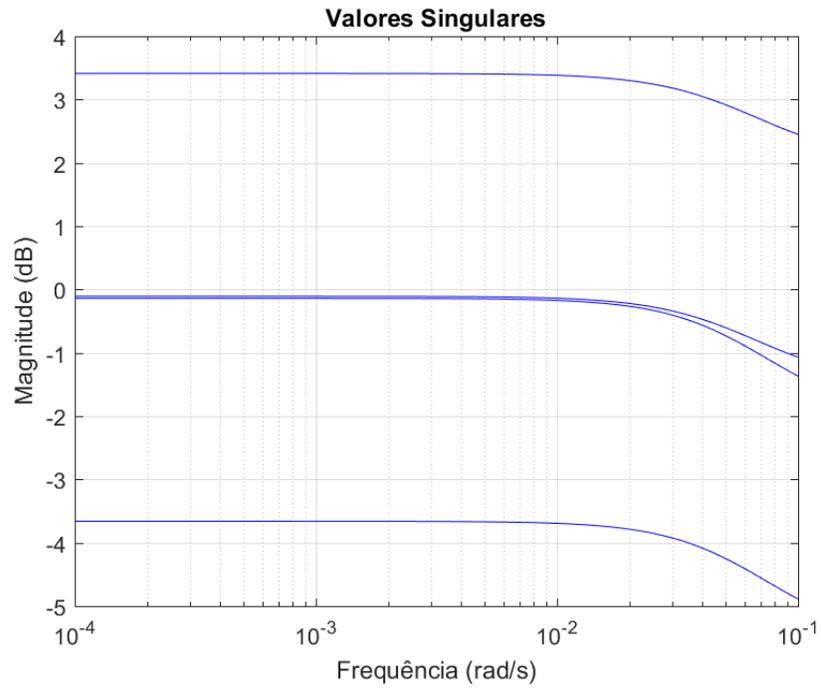


Figura 4.29: Valores singulares em função da frequência para  $G_D(j\omega, \alpha)^{-1} G(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$  no Exemplo 2.

utilizados para obter pós-compensadores.

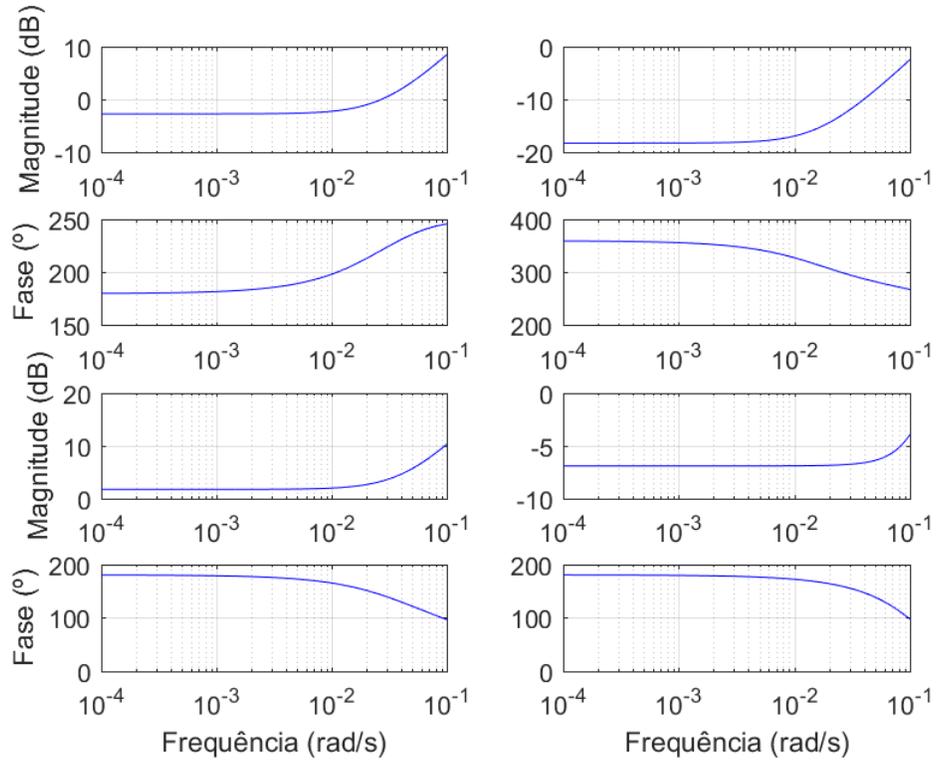


Figura 4.30: Diagrama de Bode do pré-compensador  $K_{pré}(s)$  obtido pelo Método 2, desenhado na mesma faixa de frequência das Figuras 4.28 e 4.29.

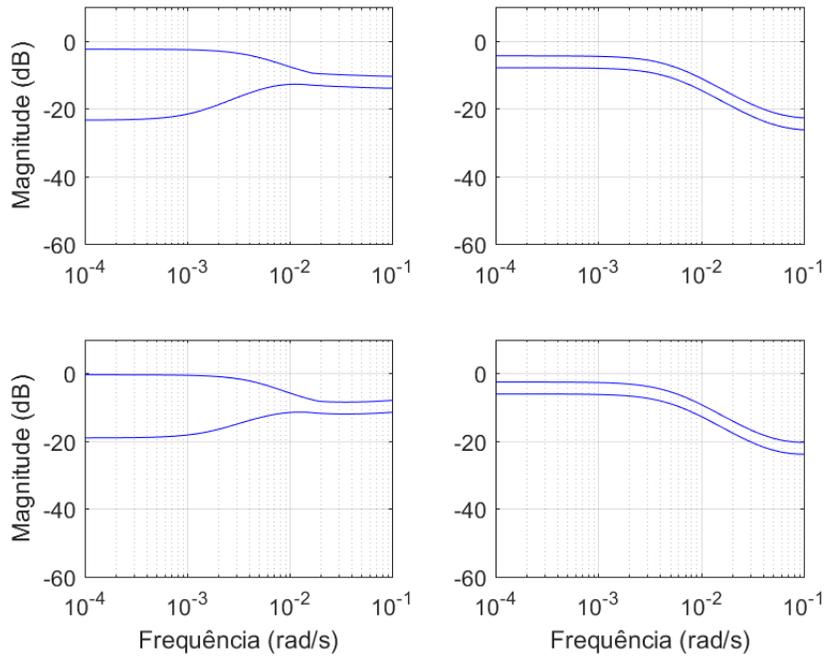


Figura 4.31: Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema  $G(s, \alpha)K_{pré}(s)$ , com  $K_{pré}(s)$  projetado pelo Método 2 no Exemplo 2.

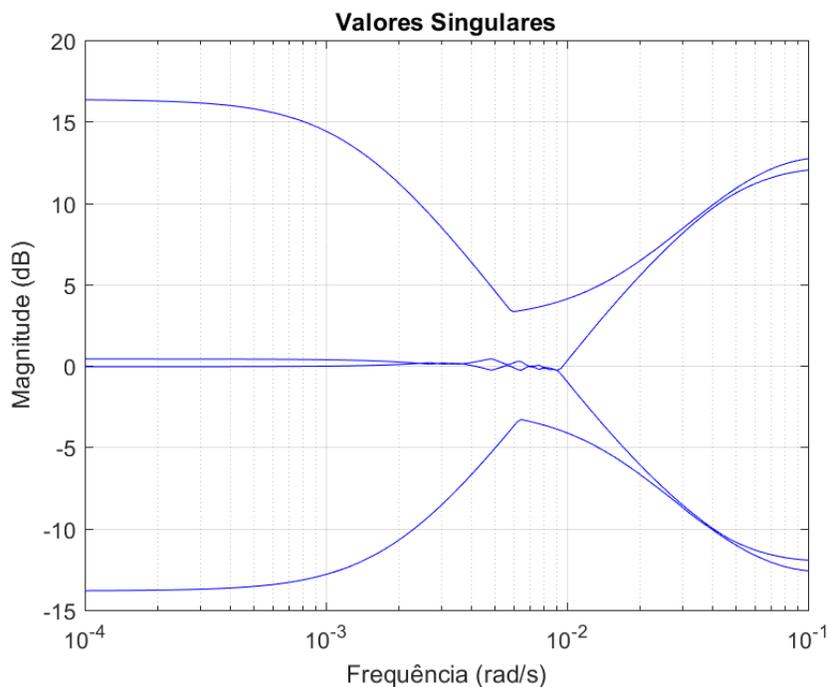


Figura 4.32: Valores singulares em função da frequência para  $H_D(j\omega, \alpha)^{-1} H(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ , em que  $H(j\omega, \alpha) = G(s, \alpha)K_{pré}(s)$ , com  $K_{pré}(s)$  projetado pelo Método 2 no Exemplo 2.

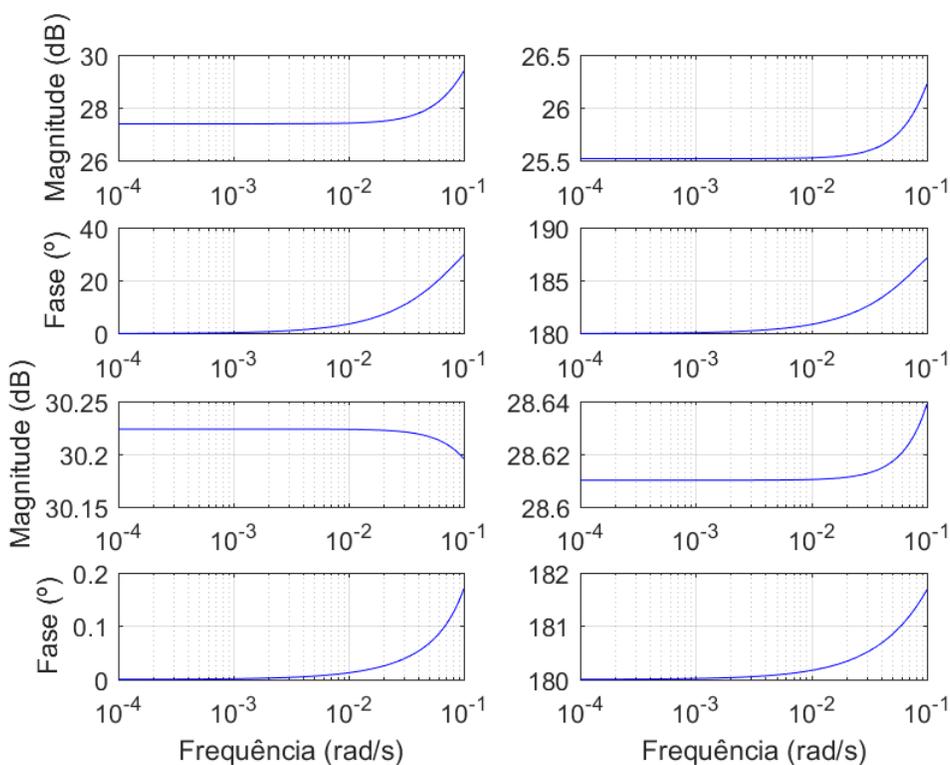


Figura 4.33: Diagrama de Bode do pós-compensador  $K_{pós}(s)$  obtido pelo Método 2 no Exemplo 2, desenhado na mesma faixa de frequência das Figuras 4.28 e 4.29.

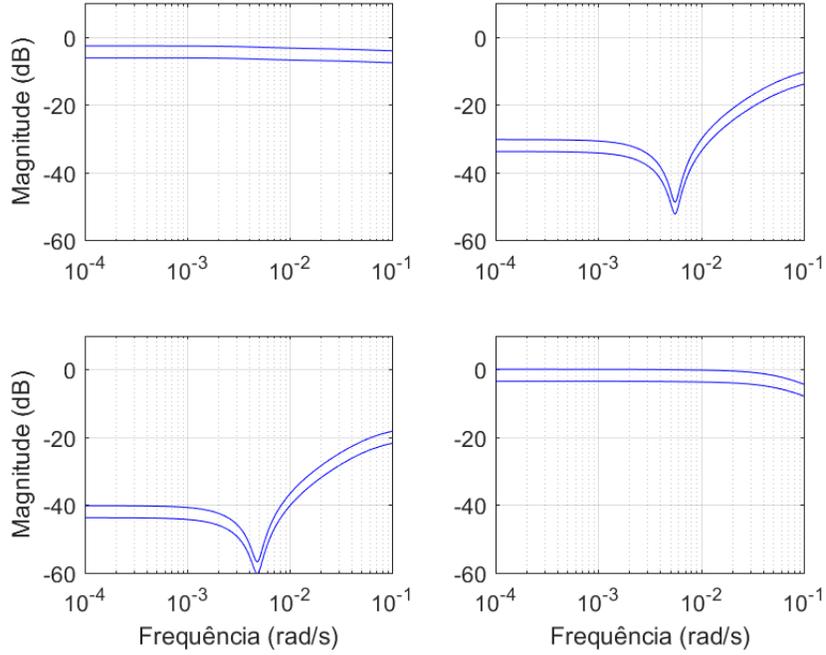


Figura 4.34: Valores mínimo e máximo do ganho em função da frequência, para o sistema  $K_{pós}(s)G(s, \alpha)$ , com  $K_{pós}(s)$  projetado pelo Método 2 no Exemplo 2.

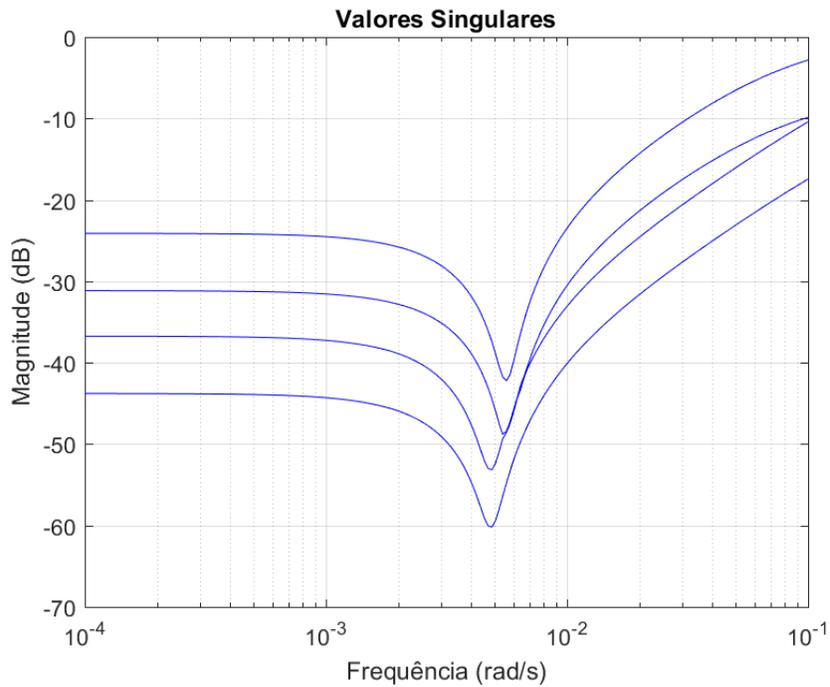


Figura 4.35: Valores singulares em função da frequência para  $H_D(j\omega, \alpha)^{-1}H(j\omega, \alpha) - \mathbf{I}$ , em que  $H(j\omega, \alpha) = K_{pós}(s)G(s, \alpha)$ , com  $K_{pós}(s)$  projetado pelo Método 2 no Exemplo 2.

## 5.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Três métodos similares foram propostos para projeto de desacopladores dinâmicos em malha aberta (pré-compensadores) que considera incertezas politópicas da planta e busca dominância diagonal do sistema compensado. O desenvolvimento dos métodos envolveu o conceito de dominância fundamental, a minimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas via desigualdades matriciais e uma estratégia de linearização de desigualdades matriciais bilineares (BMIs) utilizada em trabalhos recentes da literatura.

Como contribuição relevante, cita-se o estudo da estratégia de linearização, realizado neste trabalho. Os desempenhos dos métodos propostos dependeram fortemente desse estudo, o qual pode ser utilizado em outros problemas recorrentes da literatura, tais como redução de ordem e filtragem robusta. Um procedimento iterativo, idealizado a partir desse estudo, mostrou que tende a minimizar os efeitos conservadores adicionados pela definição da estrutura das variáveis de folga.

Além do ganho obtido com escolhas apropriadas da estrutura das variáveis de folga, outros pontos representam avanço no tema. O uso de um modelo de referência diagonal dinâmico e parcialmente variável no contexto do projeto possibilitou resultados menos conservadores que trabalhos que utilizaram a estratégia de minimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$  e consideraram modelos estáticos. A formulação do problema em forma de LMIs com uso do Lema de Finsler permitiu simples adaptação para projetos que consideram apenas faixas de frequência de interesse, por meio do lema de Kalman-Yakubovich-Popov generalizado (gKYP).

A fim de possibilitar avaliar o desacoplamento de sistemas politópicos, foi proposto um indicador de acoplamento baseado no máximo valor singular de sistemas, inspirado no conceito de dominância fundamental, o qual pode ser calculado via LMIs.

Para avaliar o desempenho dos métodos, foi utilizado um sistema de quatro tanques e um processo de destilação, problemas de interesse na teoria de controle de processos. Os resultados mostraram alto potencial dos métodos propostos, em especial o Método 2. Contudo, vale ressaltar que alguns parâmetros devem ser definidos *a priori*, os quais podem ter muita influência no desempenho alcançado pelo desacoplador, em especial a estrutura da variável de folga, cuja metodologia de escolha foi sugerida e testada nos exemplos. Sugestões de escolha de outros parâmetros, tais como modelo de referência diagonal, foram fornecidas e testadas com exemplos numéricos. Quanto ao indicador de acoplamento proposto, observou-se que o cálculo desse indicador, transformado em um problema de custo grantido via LMIs, mostrou-se conservador, quando comparado com o gráfico de valores singulares (fazendo-se uma varredura no espaço de incerteza dos parâmetros) para o caso de valores singulares muito pequenos (abaixo de  $-20$  dB). Contudo, é importante destacar que nesse caso a dominância diagonal está muito bem caracterizada, ou seja, o sistema é bastante diagonal.

Ainda que o foco deste trabalho tenha sido o projeto de pré-compensadores, os métodos podem ser utilizados para obter pós-compensadores para sistemas lineares invariantes no tempo com incertezas politópicas, que é uma alternativa para desacoplamento, conforme ilustrado no Exemplo 2 do Capítulo 4.

Como produto do desenvolvimento deste trabalho, o seguinte artigo foi publicado:

- Ângelo, C. G. M.; Tognetti, E. S. Diagonalização de sistemas politópicos via minimização de norma  $\mathcal{H}_\infty$ . In: *Anais do XXII Congresso Brasileiro de Automática*, 22, 2018, João Pessoa.

## 5.2 PERSPECTIVAS FUTURAS

Este trabalho teve como escopo o cálculo de pré-compensadores (ou pós-compensadores) aplicados a sistemas lineares invariantes no tempo e sem considerar incertezas no atraso. Contudo, LMIs têm sido utilizadas para tratar sistemas não-lineares, além de serem largamente utilizadas para projeto de controladores em malha fechada. Além disso, os métodos propostos neste trabalho não impedem que desacopladores possuam zeros no semi-plano direito, o que torna o sistema compensado de fase não-mínima, algo indesejado no projeto de controladores em malha fechada posteriores. Assim, vislumbram-se as seguintes extensões para este trabalho:

1. Propor condições em LMIs para projeto de desacopladores em malha fechada que consideram as incertezas do sistema.
2. Propor condições em LMIs para restringir que os zeros dos desacopladores estejam no semi-plano esquerdo.
3. Aplicar a sistemas não-lineares representados por modelos Takagi-Sugeno.
4. Considerar sistemas com atraso incerto.

## Referências Bibliográficas

---

- Agulhari, C. M., R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres (2012). Robust LMI parser: A computational package to construct LMI conditions for uncertain systems. In *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*, Campina Grande, PB, Brasil, pp. 2298–2305.
- Bachelier, O. and D. Mehdi (2015). On some relaxations commonly used in the study of linear systems. *Kybernetika* 51(5), 830–855.
- Boyd, S., L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. Philadelphia: SIAM Stud. Appl. Math.
- Brogliato, B., R. Lozano, B. Maschke, and O. Egeland (2007). *Dissipative Systems Analysis and Control: Theory and Applications*. Communications and Control Engineering. Springer International Publishing.
- Chang, Y.-H. and J.-C. Chang (2001). Quantitative design for multivariable systems with uncertainty. *International Journal of Systems Science* 32(3), 331–344.
- Chughtai, S. S. and N. Munro (2004). Diagonal dominance using lmis. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications* 151(2), 225–233.
- Chughtai, S. S., A. Nobakhti, and H. Wang (2005). A systematic approach to the design of robust diagonal dominance based mimo controllers. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 6875–6880.
- Du, X. and G. Yang (2010).  $H_\infty$  model reduction of linear continuous-time systems over finite-frequency interval. *IET Control Theory Applications* 4(3), 499–508.
- Geromel, J. and M. C. De Oliveira (2001).  $H_2/H_\infty$  robust filtering for convex bounded uncertain systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on* 46, 100 – 107.
- Gonçalves, B. M., E. N. Gonçalves, R. M. Palhares, and R. H. C. Takahashi (2012). Síntese de controladores robustos pi multi-malhas descentralizado. In *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*.
- Grosdidier, P. and M. Morari (1986). Interaction measures for systems under decentralized control. *Automatica* 22(3), 309–320.
- Ishihara, J. Y., H. T. M. Kussaba, and R. A. Borges (2017). Existence of continuous or constante finsler’s variables for parameter-dependent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 62(8), 4187–4193.
- Iwasaki, T. and S. Hara (2005). Generalized kyp lemma: unified frequency domain inequalities with design applications. *IEEE Transactions on Automatic Control* 50(1), 41–59.
- Jetto, L., V. Orsini, and R. Romagnoli (2017). Gain margin based conditions for easy simultaneous achievement of open and closed loop diagonal dominance under unstructured uncertainties. *IFAC-PapersOnLine* 50(1), 3660 – 3667. 20th IFAC World Congress.
- Lacerda, M. J., R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres (2011). Robust  $H_2$  and  $H_\infty$  filter design for uncertain linear systems via lmis and polynomial matrices. *Signal Processing* 91, 1115–1122.

- Lan, X., Y. Wang, and L. Liu (2015). Dynamic decoupling tracking control for the polytopic lpv model of hypersonic vehicle. *Science China Information Sciences* 58(9), 1–14.
- Lee, D. H. (2013). An improved finite frequency approach to robust filter design for LTI systems with polytopic uncertainties. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 27(11), 944–956.
- Limebeer, D. J. N. (1982). The application of generalized diagonal dominance to linear system stability theory. *International Journal of Control* 36(2), 185–212.
- Limebeer, D. J. N. (1991). The specification and purpose of a controller design case study. In *[1991] Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1579–1580 vol.2.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proceedings of the IEEE CCA/ISIC/CACSD Multiconference*, Taipei, Taiwan.
- Mazzocante, G. S. and R. C. L. F. Oliveira (2016). Redução de ordem  $H_\infty$  de sistemas incertos a tempo contínuo usando relaxações lmis. In *XXI Congresso Brasileiro de Automática*.
- Oliveira, R. C. L. F. and P. L. D. Peres (2005). Stability of polytopes of matrices via affine pparameter-dependent lyapunov functions: Asymptotically exact lmi conditions. *Linear Algebra and Its Applications* 405, 209–228.
- Poznyak, A. S. (2008). *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers*, Volume 1. Elsevier.
- Rantzer, A. (1996). On the kalman-yakubovich-popov lemma. *Systems & Control Letters* 28(1), 7 – 10.
- Rosenbrock, H. H. (1974). *Computer Aided Control System Design*. Englewood Cliffs, NJ: Academic Press.
- Siqueira, M. A. S., L. F. G. Silva, E. N. Gonçalves, R. M. Palhares, and R. H. C. Takahashi (2014). Robust decoupling control synthesis. In *2014 American Control Conference*, pp. 4280–4285.
- Skogestad, S. and I. Postlethwaite (2001). *Multivariable feedback control: analysis and design* (2nd ed.). John Wiley & Sons.
- Vhora, H. and J. Patel (2017). Design of static and dynamic decoupler for coupled quadruple tank level system. *Nirma University Journal of Engineering and Technology* 5.
- Wang, Q.-G. (2003). *Decoupling Control*. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Yeung, L. and G. F. Bryant (1992). New dominance concepts for multivariable control system design. *International Journal of Control* 55, 969–988.
- Zheng, X., H. Zhang, and Z. Wang (2017). Dynamic output-feedback control for active vehicle suspension systems subject to actuator faults in finite frequency domain. In *2017 36th Chinese Control Conference (CCC)*, pp. 9413–9418.