



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

**QUADRILÁTEROS ISO-ORTODIAGONAIS
ASSOCIADOS A UM OCTÓGONO QUALQUER**

ÍTALO JOSÉ EVANGELISTA DE LIMA

Brasília, 2019

ÍTALO JOSÉ EVANGELISTA DE LIMA

QUADRILÁTEROS ISO-ORTODIAGONAIS ASSOCIADOS
A UM OCTÓGONO QUALQUER

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rogério César dos Santos

Brasília
2019

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

JL732q José Evangelista de Lima, Ítalo
Quadriláteros Iso-Ortodiagonais Associados a um Octógono
Qualquer. / Ítalo José Evangelista de Lima; orientador
Rogério César dos Santos. -- Brasília, 2019.
59 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em
Matemática) -- Universidade de Brasília, 2019.

1. Octógono. 2. Quadrilátero iso-ortodiagonal. 3.
GeoGebra. 4. Números complexos. 5. Van Aubel. I. César dos
Santos, Rogério, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Quadriláteros ISO-Ortodiagonais Associados a um Octógono Qualquer

por

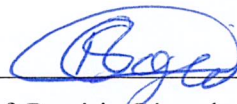
ÍTALO JOSÉ EVANGELISTA DE LIMA

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

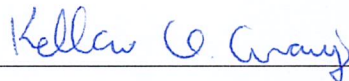
MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 03 de julho de 2019.

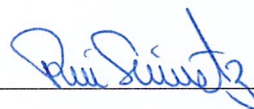
Comissão Examinadora:



Prof. Rogério César dos Santos (Orientador)



Prof. Kellcio Oliveira Araújo – MAT/UnB



Prof. Rui Seimetz - MAT/UnB

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha esposa Daniela, que sempre esteve ao meu lado me dando apoio moral. Aos meus filhos Ícaro Abraão, Caroline e Letícia, para que sirva de motivação e exemplo a eles. E aos meus pais Geraldo Vieira (in memoriam) e Maria Clara, que sempre se orgulharam e incentivaram a superar cada obstáculo na vida.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus, pois nas horas mais difíceis olhou por mim, dando-me a bênção de continuar e concluir mais uma etapa de minha vida acadêmica.

Agradeço à minha esposa Daniela, que nos momentos de ausência foi compreensiva e paciente com o meu estresse durante os anos de pesquisa e estudos.

Aos meus filhos, que sempre se preocuparam com o meu bem estar e que aliviavam o “fardo” com brincadeiras e sorrisos.

Aos colegas, amigos e familiares, que me ajudaram nas disciplinas, nos livros emprestados, nos estudos, na tecnologia, na correção do texto ... Em que não citarei nomes para não ser injusto e correr o risco de esquecer de alguém.

Aos professores, que se dedicaram para passar a sabedoria a mim e que sempre quiseram o meu aprimoramento.

Ao meu orientador professor Dr. Rogério César dos Santos, que em sua imensa paciência me conduziu ao êxito nesta minha jornada.

À Secretaria do Estado de Educação do Distrito Federal por conceder afastamento para estudos, o qual foi de muita serventia o tempo dado.

E por último, mas não menos importante, à CAPES pelo apoio financeiro, fornecendo bolsa de estudos durante o tempo em que fiquei estudando e pesquisando. Apoio este, de fundamental necessidade na fase final deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho objetivamos demonstrar que, em qualquer octógono, existem dois quadriláteros internos a ele associados, que possuem a propriedade de serem iso-ortodiagonais, sendo um deles proposto por [6] e o outro por [10], ambos oriundos de variações do Teorema de Van Aubel. Mostramos também que existe uma relação entre estes dois quadriláteros internos ao octógono, envolvendo as diagonais dos mesmos. Para as provas destas propriedades de natureza geométrica, utilizamos os conteúdos de vetores e de números complexos. Utilizamos, primeiramente, o *software* GeoGebra para a verificação visual das propriedades dos quadriláteros para que em seguida pudéssemos demonstrá-las.

Palavras-chave: Octógono. Quadrilátero iso-ortodiagonal. GeoGebra. Números complexos. Van Aubel.

Abstract

In this research we aim to demonstrate that, in any octagon, there are two internal quadrilaterals associated with them, which has as its property are iso-orthodiagonals, where one of them being proposed by [6] and another by [10], both coming from the Theorem of Van Aubel's variations. We also show that there is a relation between these two quadrilateral internal to the octagon involving the diagonals of the same. For the proofs of the properties of geometric nature, we use the contents of vectors and complex numbers. We use first the software GeoGebra to visual check of quadrilaterals proprieties and then demonstrate them.

Key words: Octagon. Quadrilateral iso-orthodiagonal. GeoGebra. Complex numbers. Van Aubel.

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Introdução | 1 |
| 1 Vetores | 3 |
| 1.1 Vetores no Plano | 3 |
| 1.2 Operações com Vetores | 7 |
| 1.2.1 Adição de Vetores | 7 |
| 1.2.2 Subtração de Vetores | 9 |
| 1.2.3 Multiplicação de um Vetor por um Escalar | 11 |
| 2 Conjunto dos Números Complexos (C) | 13 |
| 2.1 A Necessidade Humana da Criação de Conjuntos Numéricos | 13 |
| 2.2 O Conjunto dos Números Complexos (C) | 14 |
| 2.3 Operações com Números Complexos | 15 |
| 2.3.1 Igualdade de Números Complexos | 15 |
| 2.3.2 Adição de Números Complexos | 15 |
| 2.3.3 Subtração de Números Complexos | 16 |
| 2.3.4 Multiplicação de Números Complexos | 16 |
| 2.3.5 Conjugado de um Número Complexo (\bar{z}) | 16 |
| 2.3.6 Divisão de Números Complexos | 20 |
| 2.3.7 Potências de i | 21 |
| 2.4 Representação Geométrica de um Número Complexo | 21 |
| 2.5 Módulo de um Número Complexo ($ z $ ou ρ) | 22 |
| 2.6 Argumento de um Número Complexo ($Arg(z)$) | 23 |
| 2.7 Representação Trigonométrica ou Polar de um Número Complexo | 24 |
| 2.8 Operações com Números Complexos na Forma Trigonométrica | 25 |
| 2.8.1 Multiplicação | 25 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.8.2 | Divisão | 26 |
| 2.8.3 | Potenciação (Primeira Fórmula de De Moivre) | 28 |
| 2.8.4 | Radiciação (Segunda Fórmula de De Moivre) | 30 |
| 3 | Quadriláteros Iso-ortodiagonais Associados a um Octógono Qualquer | 32 |
| 4 | Considerações Finais | 48 |
| | Referências Bibliográficas | 50 |
| A | Construção por Régua e Compasso | 52 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Segmento de reta orientado e vetor. | 4 |
| 1.2 | Vetores equivalentes. | 4 |
| 1.3 | Vetor $\vec{AB} = B - A$ | 5 |
| 1.4 | Direção de vetores. | 6 |
| 1.5 | Vetor unitário e ciclo trigonométrico. | 7 |
| 1.6 | Soma de vetores. | 8 |
| 1.7 | Soma de vetores pela regra do paralelogramo. | 8 |
| 1.8 | Comparativo da soma de vetores de [4] com a de [1]. | 9 |
| 1.9 | Vetor negativo ao vetor \mathbf{A} | 10 |
| 1.10 | Diferença de vetores. | 10 |
| 1.11 | Soma nula de vetores. | 11 |
| 2.1 | Plano Argand-Gauss. | 22 |
| 2.2 | Módulo de z | 23 |
| 2.3 | Argumento. | 23 |
| 2.4 | Interpretação geométrica de $z_1 \cdot z_2$ | 26 |
| 2.5 | Interpretação geométrica de $\frac{z_2}{z_1}$ | 27 |
| 2.6 | Ortogonalidade de vetores por números complexos. | 28 |
| 3.1 | Teorema de Van Aubel: $M_1M_3 = M_2M_4$ e $M_1M_3 \perp M_2M_4$ | 33 |
| 3.2 | Vértice A na origem do plano complexo. | 33 |
| 3.3 | Primeiro Quadrilátero iso-ortodiagonal. | 36 |
| 3.4 | Segundo Quadrilátero iso-ortodiagonal. | 40 |
| 3.5 | Ilustração do teorema 3.4. | 43 |
| A.1 | Octógono qualquer. | 53 |
| A.2 | Construção da reta t perpendicular à A_1A_2 | 54 |
| A.3 | Vértices do quadrado $A_1A_2B_2B_1$ | 55 |

| | | |
|-----|--|----|
| A.4 | Quadrado externo ao lado A_1A_2 | 55 |
| A.5 | Quadrado externo ao lado do octógono. | 56 |
| A.6 | Ponto médio entre B_2B_3 | 57 |
| A.7 | Ponto médio entre os vértices de quadrados adjacentes. | 57 |
| A.8 | Segmentos M_jM_{j+4} | 58 |
| A.9 | Quadrilátero iso-ortodiagonal. | 59 |

Introdução

No estudo da matemática, os alunos do ensino fundamental II começam a criar preferências por determinados assuntos, como por exemplo, a álgebra ou a geometria. Neste período, o docente inicia o processo de apresentação de demonstrações de fórmulas e teoremas.

E, quando eles gostam e enveredam para a matemática, é a partir desse momento que eles começam a escolher qual ramo a seguir. Sendo que, se optarem pela geometria, existe uma grande tendência de demonstrarem resultados em matemática por meio de subsídios geométricos. Acontecendo o mesmo para quem preferir a álgebra.

Como a matemática é muito rica em conteúdos, existem vários teoremas que não são repassados nas séries dos ensinos fundamental e médio, apesar de serem plausíveis de serem compreendidos a tais séries. Estes são estudados no ensino superior ou são conhecidos pela curiosidade humana. É o caso dos teoremas dos quadriláteros iso-ortodiagonais, de cunho geométrico, e que vamos analisar neste trabalho realizando conexões com outros assuntos, como números complexos e vetores.

No capítulo 1, explanamos um breve resumo de vetores, apenas analisado o suficiente para a demonstração do teorema do quadrilátero iso-ortodiagonal. Princípios da definição de vetores no plano até operações com vetores: adição, subtração e multiplicação de um vetor por um escalar, finalizando este capítulo com algumas propriedades.

No capítulo 2, fazemos uma revisão de números complexos, começando pela neces-

sidade humana da criação dos conjuntos numéricos, definindo a unidade imaginária (i), e depois sua forma algébrica. Depois, mostramos as operações partindo da igualdade, adição até a multiplicação de números complexos. Antes de mostrar a divisão, definimos o conjugado com algumas propriedades. Logo após, finalizamos as operações com as potências de i . Continuamos a revisão com a representação geométrica detalhando o plano Argand-Gauss, o módulo e o argumento de um número complexo, para assim fazermos a representação trigonométrica (ou polar). Feita a forma polar, mostramos as operações (multiplicação e divisão) nesta forma, que servirão de base para a demonstração da primeira fórmula de De Moivre (potenciação). Então, para finalizarmos o capítulo, mostramos a segunda fórmula de De Moivre (radiciação).

Enfim no capítulo 3, enunciamos os teoremas objetos deste trabalho e os demonstramos utilizando como base os conteúdos dos capítulos 1 e 2; utilizando do capítulo 1, essencialmente, a definição de vetores no plano e daí, transformando o vetor em um número complexo. Já do capítulo 2, usamos a adição e a multiplicação de números complexos para provar que as diagonais do quadrilátero são iguais, como também, a rotação de números complexos.

E por fim, no capítulo 4, terminamos expondo nossas considerações finais.

No apêndice A, por meio de régua e compasso, descrevemos um passo a passo para a construção do quadrilátero proposto por [6], com figuras ilustrativas para facilitar a compreensão.

Capítulo 1

Vetores

Neste capítulo, falaremos da definição de vetores e das operações com vetores: adição, subtração e multiplicação de um escalar por um vetor.

1.1 Vetores no Plano

De acordo com [7] e [13], físicos e engenheiros definem vetor como um segmento de reta orientado. Já segundo [1], tal segmento de reta orientado se representa por flechas, na qual a direção e o sentido da flecha são, respectivamente, a direção e o sentido do vetor; e o comprimento da flecha descreve o comprimento do vetor, também chamado de magnitude ou módulo do vetor (figura 1.1 (a)).

O segmento de reta orientado \overrightarrow{AB} tem como ponto inicial (ou origem) A e ponto final B , que são respectivamente, o ponto de origem e o ponto final do vetor (figura 1.1 (b)).

Alguns livros, para representarem vetores, usam letras minúsculas em negrito, por exemplo, \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} . Outros livros usam letras maiúsculas em negrito, como \mathbf{U} , \mathbf{V} , \mathbf{W} . Já em manuscrito, é costume escrever letras minúsculas com flechas acima, por exemplo, \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} .

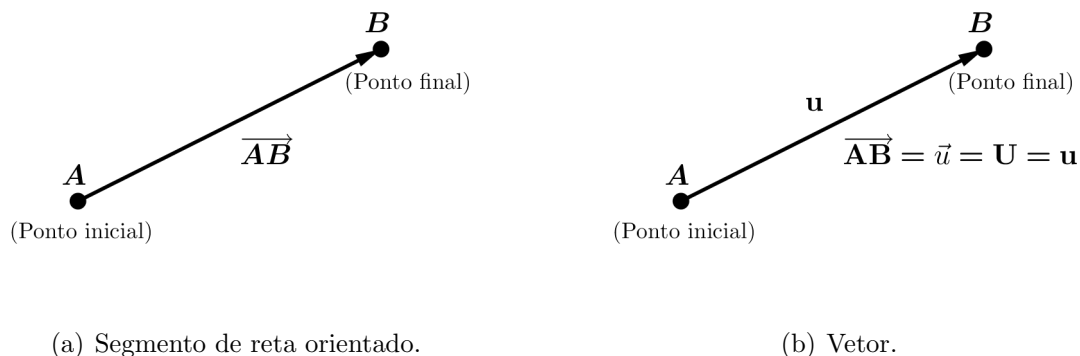


Figura 1.1 – Segmento de reta orientado e vetor.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Caso os vetores tenham o mesmo comprimento, direção e sentido, então tais vetores são denominados de **vetores equivalentes** (figura 1.2). Embora estes vetores estejam em posições diferentes, serão considerados como o mesmo vetor, pois para efeitos de cálculo utilizaremos apenas o comprimento, direção e sentido de cada vetor. Por isso, podemos chamá-los de **vetores iguais**.

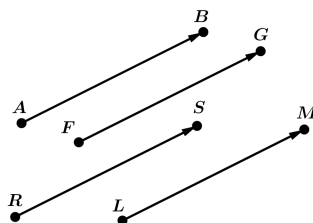
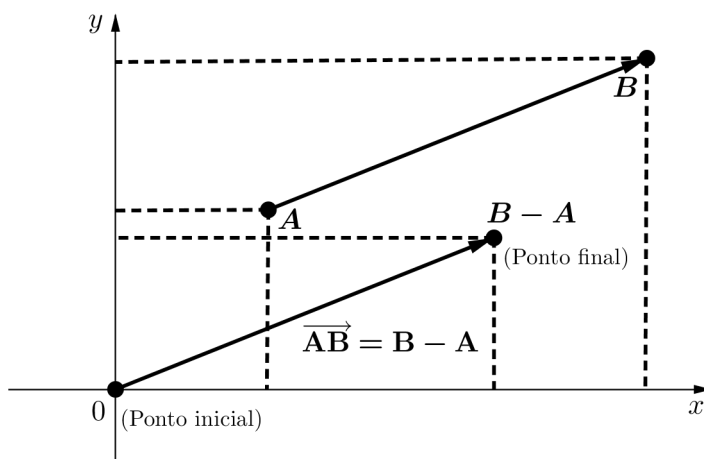


Figura 1.2 – Vetores equivalentes.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Demonstra-se que um vetor \overrightarrow{AB} é equivalente ao vetor cujo início é a origem $(0, 0)$ e cujo ponto final é o ponto $B - A$ (figura 1.3).


 Figura 1.3 – Vetor $\vec{AB} = B - A$.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Pelo fato de que um vetor no plano que possui ponto inicial na origem $(0, 0)$ pode ser denotado por um par ordenado de números reais, sendo representado por $\langle x, y \rangle$, [7] define vetores no plano como:

Definição 1.1. *Um vetor no plano é um par ordenado de números reais $\langle x, y \rangle$. Os números x e y são chamados as componentes do vetor $\langle x, y \rangle$.*

O mesmo autor relata a existência de uma correspondência biunívoca entre os vetores $\langle x, y \rangle$ no plano e os pontos (x, y) no plano. Logo, um vetor \mathbf{V} pode ser expresso por \overrightarrow{OV} , em que o ponto de origem do vetor seja a origem do plano.

Agora, se um vetor tem o ponto de origem coincidente com o ponto final, então este vetor tem comprimento nulo; e o mesmo é denominado de **vetor nulo** ou **vetor zero** e será representado por $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$.

O comprimento de um vetor não nulo $\mathbf{V} = \langle x, y \rangle$, que é simbolizado por $|\mathbf{V}|$ ou $\|\mathbf{V}\|$, pode ser calculado pela fórmula da distância entre um ponto e a origem, daí,

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.1)$$

Já a direção de um vetor não nulo é dada pela angulação α feita do eixo positivo x até o vetor posição, no sentido anti-horário, sendo que $0 \leq \alpha < 2\pi$, com α em radianos.

No entanto, como essa angulação α pode ser calculada pela fórmula da tangente, então:

- ▶ Se $x \neq 0$ tem-se $\tan \alpha = \frac{y}{x}$;
- ▶ Se $x = 0$ e $y > 0$ tem-se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e
- ▶ Se $x = 0$ e $y < 0$ tem-se $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

As figuras 1.4 (a), 1.4 (b) e 1.4 (c) mostram algumas angulações α possíveis de vetores e suas representações posicionais traçadas.

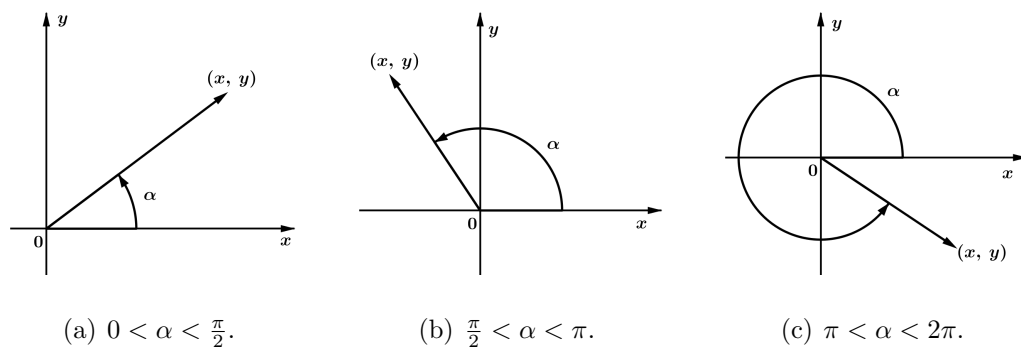


Figura 1.4 – Direção de vetores.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Agora, caso o comprimento de um vetor $\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ seja igual a 1 ($|\vec{v}| = 1$), então ele é denominado de **vetor unitário** ou **versor**. E a angulação α deste vetor $\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ com o eixo positivo é dada por:

$$v_1 = |\vec{v}| \cdot \cos \alpha \tag{1.2}$$

e

$$v_2 = |\vec{v}| \cdot \sen \alpha \tag{1.3}$$

Das equações 1.2 e 1.3 chegamos a:

$$\vec{v} = \langle \cos \alpha, \text{sen } \alpha \rangle \quad (1.4)$$

Então, podemos concluir disto, que à medida em que o ângulo α varia de 0 até 2π , o ponto final do vetor irá traçar, em sentido anti-horário, o ciclo trigonométrico (figura 1.5).

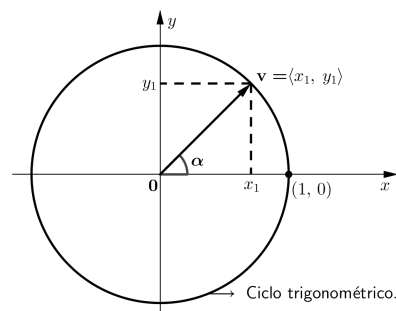


Figura 1.5 – Vetor unitário e ciclo trigonométrico.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

1.2 Operações com Vetores

Entre as várias operações com vetores, iremos destacar neste momento a **adição e subtração de vetores** e a **multiplicação de um número real por um vetor**.

1.2.1 Adição de Vetores

De acordo com [4]:

Definição 1.2. A **adição de vetores** é a operação que a cada par de vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ associa o vetor \overrightarrow{AC} , designado $\vec{u} + \vec{v}$ e chamado **soma de vetores** \vec{u} e \vec{v} .

Para fazer a soma de vetores segundo a definição 1.2, posiciona-se no ponto final (ponta da flecha) do vetor \vec{u} o ponto inicial do vetor \vec{v} , e daí, a soma de vetores é o vetor do ponto inicial do vetor \vec{u} até o ponto final do vetor \vec{v} , conforme podemos perceber na figura 1.6.

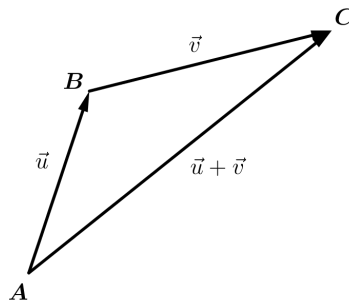


Figura 1.6 – Soma de vetores.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Usando a **regra do paralelogramo** para a adição de vetores, de acordo com [1], temos:

Definição 1.3. *Se \vec{u} e \vec{v} forem vetores no espaço bi ou tridimensional posicionados de tal modo que seus pontos iniciais coincidam, então os dois vetores formam lados adjacentes de um paralelogramo, e a soma $\vec{u} + \vec{v}$ é o vetor representado pela flecha desde o ponto inicial comum de \vec{u} e \vec{v} até o vértice oposto do paralelogramo (figura 1.7).*

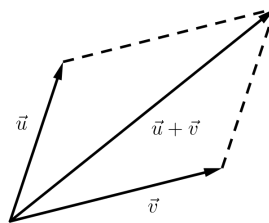
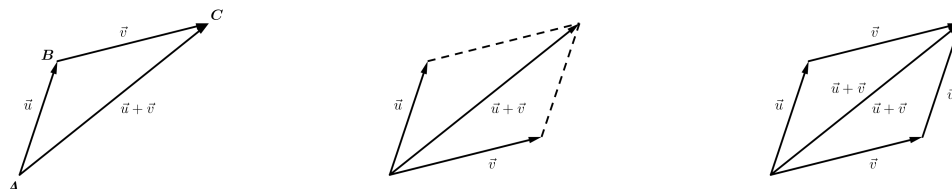


Figura 1.7 – Soma de vetores pela regra do paralelogramo.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Comparando as figuras 1.6 e 1.7 percebemos que a soma de vetores definida por [4] e a definida por [1] decorrem para o mesmo resultado, conforme podemos observar nas figuras 1.8 (a), 1.8 (b) e 1.8 (c).



(a) Soma de vetores de [4]. (b) Soma de vetores de [1] (c) Comparação entre as so-
(regra do paralelogramo). mas.

Figura 1.8 – Comparativo da soma de vetores de [4] com a de [1].

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Demonstra-se que a adição de vetores $\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ e $\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$, por coordenadas, é feita por:

$$\vec{u} + \vec{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle \quad (1.5)$$

1.2.2 Subtração de Vetores

Para definirmos a subtração de vetores, é preciso definir o negativo de um vetor. De acordo com [7] temos:

Definição 1.4. Se $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$, então o vetor $\langle -a_1, -a_2 \rangle$ é definido como o **negativo** de \mathbf{A} , denotado por $-\mathbf{A}$.

Logo, o negativo de um vetor tem o mesmo comprimento e direção, porém com sentido contrário (figura 1.9).

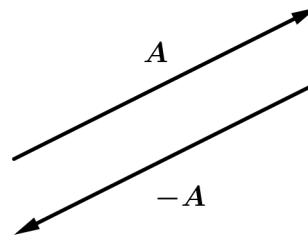


Figura 1.9 – Vetor negativo ao vetor \mathbf{A} .

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Daí, podemos definir a subtração de vetores como:

Definição 1.5. *Sejam \vec{u} e \vec{v} dois vetores não nulos, a diferença entre os vetores \vec{u} e \vec{v} , denotado por $\vec{u} - \vec{v}$, é a soma de \vec{u} pelo o negativo do vetor \vec{v} , ou seja:*

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) \quad (1.6)$$

Tal diferença de vetores é representada geometricamente na figura 1.10, em que os vetores \vec{u} e \vec{v} têm o mesmo ponto inicial e a diferença é o segmento orientado do ponto final do vetor \vec{v} até o ponto final do vetor \vec{u} .

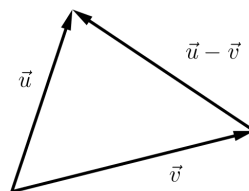


Figura 1.10 – Diferença de vetores.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

É possível demonstrar que, dados n vetores V_1, V_2, \dots, V_n , sendo que cada vetor V_i

possui como ponto inicial o ponto final do vetor V_{i-1} , então a soma dos n vetores é o vetor nulo (figura 1.11).

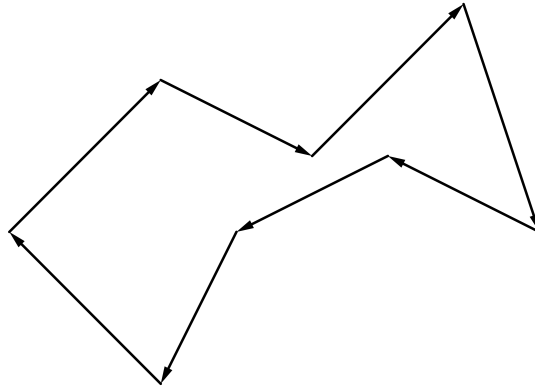


Figura 1.11 – Soma nula de vetores.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

1.2.3 Multiplicação de um Vetor por um Escalar

Uma outra operação importante dos vetores é a multiplicação de um vetor por um escalar. Esta operação é definida por [1] da seguinte forma:

Definição 1.6. *Se \vec{v} for um vetor não nulo do espaço bi ou tridimensional e k , um escalar não nulo, então o múltiplo escalar de \vec{v} por k , denotado por $k\vec{v}$, é o vetor de mesma direção do que \vec{v} , mas cujo comprimento é $|k|$ vezes o comprimento de \vec{v} e cujo sentido é o mesmo que o de \vec{v} se k for positivo e o oposto do de \vec{v} se k for negativo. Se $k = 0$ ou $\vec{v} = \mathbf{0}$, então definimos $k\vec{v}$ como sendo $\mathbf{0}$.*

Após definidas as operações da soma de vetores e da multiplicação de um vetor por um escalar, temos as seguintes propriedades: Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} vetores; e c e k escalares.

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;
3. $\vec{u} + \mathbf{0} = \vec{u}$;
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \mathbf{0}$;

5. $(ck)\vec{v} = c(k\vec{v})$;

6. $c(\vec{v} + \vec{w}) = c\vec{v} + c\vec{w}$;

7. $(c + k)\vec{v} = c\vec{v} + k\vec{v}$;

8. $1(\vec{u}) = \vec{u}$.

As demonstrações acima podem ser encontradas em livros didáticos de ensino superior de Álgebra Linear, por exemplo, em [1].

Com estas propriedades finalizamos a revisão de vetores, que julgamos necessárias para atingir o objetivo deste trabalho. No capítulo seguinte abordaremos números complexos.

Capítulo 2

Conjunto dos Números Complexos

(\mathbb{C})

Neste capítulo iremos fazer uma breve revisão de números complexos, que são vistos nos livros [2], [3], [5], [8], [11] e [12], todos volume 3. Este é um conteúdo de suma importância, pois também será utilizado para demonstrarmos os teoremas principais desta dissertação.

2.1 A Necessidade Humana da Criação de Conjuntos Numéricos

A Matemática foi e está evoluindo na medida em que o conhecimento e a necessidade humana aumentam. Assim foi com o conjunto dos números naturais, simbolizado por \mathbb{N} , em que o ser humano carecia contar, por exemplo, as ovelhas que iam pastar, no qual colocava uma pedra em um monte para cada uma que saía, e ao retornarem o pastor retirava uma pedra para cada ovelha. Se sobrasse alguma pedra no monte, é porque faltava algum animal. Porém, quando precisou fazer contas de subtração, por exemplo, $7 - 9$ criou-se um outro conjunto numérico - o conjunto dos números inteiros, simbolizado por \mathbb{Z} .

Outro problema que surgiu foi o de resolver contas do tipo $\frac{6}{5}$; daí construiu-se o conjunto dos números racionais, simbolizado por \mathbb{Q} . O conjunto \mathbb{Q} se mostrou insuficiente para a efetuação de alguns cálculos do tipo da diagonal de um quadrado de lados iguais a 1. Diante disso, construiu-se o conjunto dos números irracionais, simbolizado por \mathbb{I} .

E para agrupar todos esses números, então se fez o conjunto dos números reais, simbolizado por \mathbb{R} .

Agora, o conjunto dos \mathbb{R} também se mostra insuficiente para realizar, por exemplo, a radiciação de números negativos em que o índice do radical é par. Logo, para que estes resultados fossem possíveis, foi imperativo a criação de mais um conjunto numérico, o conjunto dos números complexos, o qual é simbolizado por \mathbb{C} .

2.2 O Conjunto dos Números Complexos (\mathbb{C})

É primordial, para que a radiciação constitua algo sempre possível, que seja definida a unidade imaginária, representada por i , como sendo $i = \sqrt{-1}$. Tal unidade imaginária é um número não real.

Agora, podemos criar um novo conjunto numérico: o conjunto dos números complexos, que será representado por \mathbb{C} .

No entanto, ao observar $i = \sqrt{-1}$, podemos ver que $i^2 = -1$.

Com isto, podemos resolver equações do 2° grau ou grau superior que não têm solução no conjunto dos \mathbb{R} .

Todo número complexo pode ser escrito na forma $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e i é a unidade imaginária definida acima. Esta forma é denominada **forma algébrica do número complexo z** .

O número real a é chamado de **parte real de z** , e pode ser representado por $Re(z) = a$. Já o número real b é chamado de **parte imaginária de z** , e pode ser representado por $Im(z) = b$.

Quando o número real b é igual a zero ($b = 0$), então o número complexo é dito **real** ($z = a$); e quando o número real a é igual a zero ($a = 0$) e o número real b é diferente de zero ($b \neq 0$), então o número complexo é dito **imaginário puro** ($z = bi$).

Considerando que todo número real pode ser escrito na forma de um número complexo como $z = a + 0i$, então pode-se inferir que: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2.3 Operações com Números Complexos

Antes de falarmos sobre as operações com números complexos, é importante mencionar a igualdade de números complexos.

2.3.1 Igualdade de Números Complexos

Sejam dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$. Tais números complexos serão iguais se, e somente se, as suas partes reais são iguais, bem como se as suas partes imaginárias são iguais, ou seja,

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases} \quad (2.1)$$

Agora que foi definida a igualdade de dois números complexos, podem-se mostrar as operações.

2.3.2 Adição de Números Complexos

Considere dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$. A adição de números complexos é feita somando a parte real de z_1 com a parte real de z_2 ; e a parte imaginária de z_1 com a parte imaginária de z_2 , ou seja,

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i \quad (2.2)$$

Logo, a adição de mais do que dois números complexos se dará pelo mesmo enten-

dimento, somando as partes reais com as partes reais e as partes imaginárias com as partes imaginárias de cada número complexo.

2.3.3 Subtração de Números Complexos

Seja o número complexo $z_2 = c + di$, com $c, d \in \mathbb{R}$; denotamos como oposto de um número complexo o número $-z_2 = -(c + di)$.

Daí, a subtração de dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$, é feita por meio da adição de z_1 com o oposto de z_2 , ou seja,

$$z_1 + (-z_2) = z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \quad (2.3)$$

2.3.4 Multiplicação de Números Complexos

Sejam os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$. A multiplicação entre números complexos é feita através da propriedade distributiva da multiplicação, lembrando que $i^2 = -1$. Logo,

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad (2.4)$$

Portanto, a multiplicação de mais de dois números complexos será usado o mesmo entendimento, ou seja, por meio da propriedade distributiva.

2.3.5 Conjugado de um Número Complexo (\bar{z})

Para se obter o conjugado de um número complexo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, basta fazer apenas o oposto da parte imaginária. Tal conjugado é representado por \bar{z} , ou seja,

$$\bar{z} = a - bi \quad (2.5)$$

Sejam os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Algumas propriedades importantes de \bar{z} são:

✓ O conjugado do conjugado de um número complexo z é igual ao próprio número complexo, ou seja, $\overline{\bar{z}} = z$;

Demonstração. Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$

$$\overline{\bar{z}} = \overline{a + bi}$$

$$\overline{\bar{z}} = \overline{a - bi}$$

$$\overline{\bar{z}} = a + bi$$

$$\overline{\bar{z}} = z$$

□

✓ O produto entre um número complexo z não nulo e seu conjugado é sempre um número real positivo, a saber, $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$.

Demonstração. Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Calculando o produto $z \cdot \bar{z}$ temos:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi)$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 - (bi)^2$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2.$$

Como a e b são números reais, então $z \cdot \bar{z}$ é um número real.

□

✓ O conjugado da soma é a soma dos conjugados, ou seja, $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{(z_1)} + \overline{(z_2)}$.

Demonstração. Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Temos:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + c) + (b + d)i}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i$$

$$\overline{z_1 + z_2} = a - bi + c - di$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}. \quad \square$$

✓ O conjugado da diferença é a diferença dos conjugados, ou seja, $\overline{(z_1 - z_2)} = \overline{(z_1)} - \overline{(z_2)}$.

Demonstração. Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Temos:

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{(a - c) + (b - d)i}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = (a - c) - (b - d)i$$

$$\overline{z_1 - z_2} = a - bi - (c - di)$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}. \quad \square$$

✓ O conjugado do produto é o produto dos conjugados, ou seja, $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{(z_1)} \cdot \overline{(z_2)}$.

Demonstração. Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Temos:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = ac - bci - bd - adi$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (a - bi)c - (b + ai)d$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (a - bi)c - (a - bi)di$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (a - bi) \cdot (c - di)$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}. \quad \square$$

✓ O conjugado do quociente é o quociente dos conjugados, ou seja, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, com $\overline{z_2} \neq 0$.

Demonstração. Sejam z_1 e $z_2 = c + di$, com $c, d \in \mathbb{R}$ e $z_2 \neq 0$.

Temos:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \overline{\left(\frac{1}{c + di}\right)}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \overline{\left(\frac{c - di}{c^2 + d^2}\right)}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \left(\frac{c + di}{c^2 + d^2}\right)$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \left(\frac{1}{\frac{c^2 + d^2}{c + di}}\right)$$

Fazendo a divisão de polinômios em $\frac{c^2 + d^2}{c + di}$, temos:

$$\frac{\begin{array}{r} c^2 + d^2 \\ -c^2 - cdi \\ \hline -cdi + d^2 \\ cdi + d^2 i^2 \\ \hline 0 \end{array}}{c - di} \quad \left| \begin{array}{l} c + di \\ c - di \end{array} \right.$$

pois, $d^2 i^2 = -d^2$

Então:

$$\left(\frac{1}{\frac{c^2+d^2}{c+di}} \right) = \left(\frac{1}{c - di} \right)$$

Daí,

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} &= \overline{z_1} \cdot \left(\frac{1}{c - di} \right) \\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} &= \overline{z_1} \cdot \frac{1}{\overline{z_2}} \\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}. \end{aligned}$$

□

2.3.6 Divisão de Números Complexos

O quociente entre dois números complexos z_1 e z_2 , pode ser obtido multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado de z_2 , como foi feito na demonstração da propriedade do conjugado do quociente na seção anterior. Ou seja,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}. \quad (2.6)$$

Tomando $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

2.3.7 Potências de i

Lembrando que $i^2 = -1$, calculando algumas potências de i , e usando as propriedades da potenciação no conjunto \mathbb{R} , temos que:

$$\begin{array}{l|l} i^0 = 1 & i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \\ i^1 = i & i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \\ i^2 = -1 & i^6 = i^3 \cdot i^3 = (-i) \cdot (-i) = i^2 = -1 \\ i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i & i^7 = i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \end{array}$$

Percebe-se que a cada ciclo de quatro potências os resultados se repetem.

Logo, existem quatro, e somente quatro, valores para potências de i com expoentes inteiros que são:

$$\begin{array}{l} i^0 = 1 \\ i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \end{array}$$

Portanto, para o cálculo da potência de i^n , com $n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 4$, divide-se n por 4, obtendo-se resto inteiro r . Tem-se então $i^n = i^r$. Caso tenha i^{-n} faz-se $(i^n)^{-1} = \frac{1}{i^n}$.

2.4 Representação Geométrica de um Número Complexo

Para a representação geométrica de um número complexo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é primordial detalhar sobre relação biunívoca de z e do plano Argand-Gauss.

Nos estudos independentes de Gauss e Jean Robert Argand, ambos conseguiram perceber uma associação entre a parte real e a parte imaginária de um número complexo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, com as coordenadas de um ponto no plano cartesiano.

Daí, como a cada número real pode-se associar um único ponto da reta real, tem-se que a cada número complexo z associa-se a um único ponto $z = (a, b)$ do plano cartesiano, gerando assim uma relação biunívoca entre z e o plano cartesiano. Este ponto z é denominado de **afixo de z** ou de **imagem geométrica de z** .

E, em homenagem a esses dois matemáticos, decidiu-se chamar esse plano de **plano Argand-Gauss** ou **plano complexo**. A parte real de z é representada no eixo das abscissas, chamado de **eixo real (Re)** e a parte imaginária de z é representada no eixo das ordenadas, chamado de **eixo imaginário (Im)**.

Portanto, a representação geométrica de z está descrita na figura 2.1.

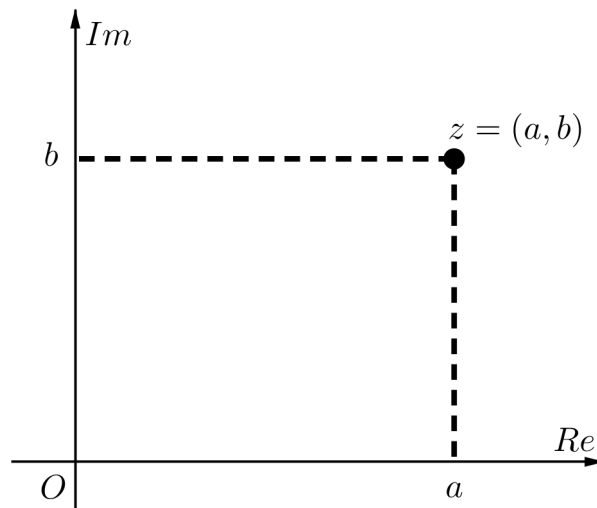


Figura 2.1 – Plano Argand-Gauss.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

2.5 Módulo de um Número Complexo ($|z|$ ou ρ)

O módulo de um número complexo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, representa a distância entre a origem $O = (0, 0)$ do plano Argand-Gauss e o afixo $z = (a, b)$ (figura 2.2).

O módulo é representado por $|z|$ ou ρ (lê-se: rô). E pode ser determinado pelo teorema de Pitágoras, ou seja,

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2.7)$$

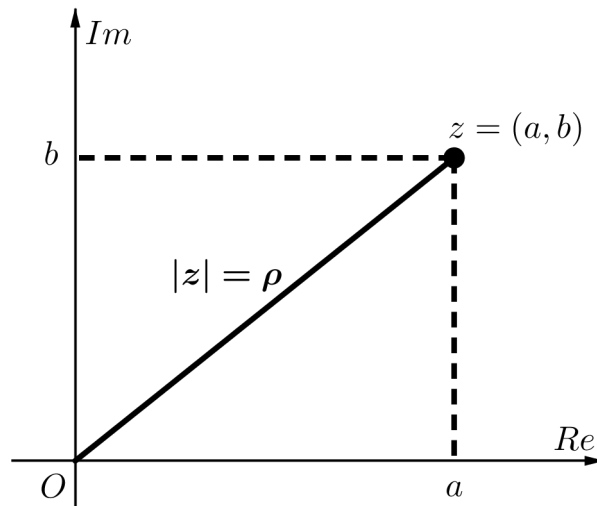


Figura 2.2 – Módulo de z .

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

2.6 Argumento de um Número Complexo ($Arg(z)$)

Sejam o número complexo não nulo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, cujo afixo é $z = (a, b)$, a origem do plano complexo $O = (0, 0)$ e o semieixo real positivo. O ângulo θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) formado por (\vec{Oz}) com (\vec{Ox}) , no sentido anti-horário, é denominado de **argumento de z** , e é indicado por $Arg(z)$, conforme figura 2.3.

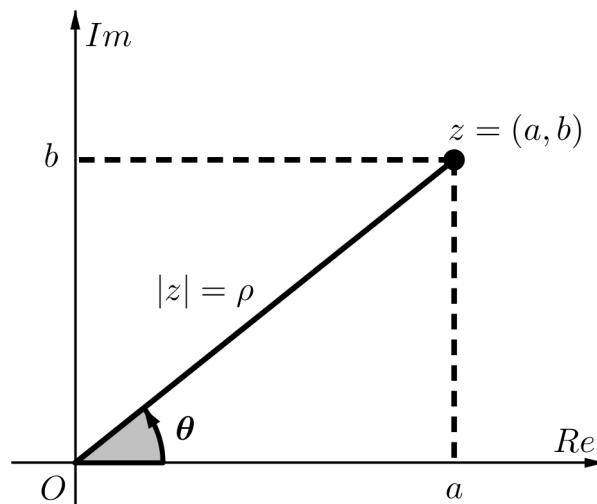


Figura 2.3 – Argumento.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Ao observar a figura 2.3, percebe-se que para determinar o $Arg(z)$ basta utilizar razões trigonométricas básicas, ou seja:

$$\cos \theta = \frac{a}{\rho} \quad (2.8)$$

e

$$\text{sen } \theta = \frac{b}{\rho} \quad (2.9)$$

2.7 Representação Trigonométrica ou Polar de um Número Complexo

Como foi visto anteriormente, sabemos que a representação algébrica de um número complexo é $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, que o módulo é ρ e que o argumento é obtido pelas equações 2.8 e 2.9, em que estas últimas podem ser manipuladas para:

$$a = \rho \cdot \cos \theta \quad (2.10)$$

e

$$b = \rho \cdot \text{sen } \theta \quad (2.11)$$

Agora, substituindo a e b , da representação algébrica de um número complexo, pelas equações 2.10 e 2.11, temos:

$$\begin{aligned} z &= \rho \cdot \cos \theta + (\rho \cdot \text{sen } \theta)i \\ z &= \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Essa última equação 2.12 representa a **forma trigonométrica** de um número complexo, também chamada de **forma polar** de um número complexo.

2.8 Operações com Números Complexos na Forma Trigonométrica

Para as operações com números complexos na forma polar apresentaremos:

✓ Multiplicação;

✓ Divisão;

✓ Potenciação;

✓ Radiciação.

2.8.1 Multiplicação

Considere dois números complexos não nulos representados na sua forma polar $z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen } \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2)$, e daí façamos o produto entre eles.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen } \theta_1) \cdot \rho_2(\cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \rho_2 \left[\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i^2 \cdot \text{sen } \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2 \cdot \cos \theta_1 \right] \\ z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \rho_2 \left[(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \text{sen } \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_2) + i \cdot (\text{sen } \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \text{sen } \theta_2 \cdot \cos \theta_1) \right] \\ z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \rho_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

A equação 2.13, representa a multiplicação entre dois números complexos na forma polar. Tal equação pode ser generalizada para n números complexos na forma polar, gerando a equação:

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n \left[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) \right] \quad (2.14)$$

Pode-se concluir então que a multiplicação de dois números complexos $z_1 = \rho_1 \cdot (\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen } \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2 \cdot (\cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2)$ na forma polar, em que $\rho_1 = 1$, equivale à rotação de z_2 de θ_1 graus, no sentido anti-horário, em relação à origem do

plano (figura 2.4).

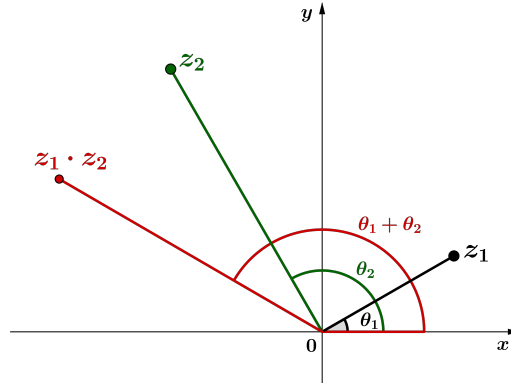


Figura 2.4 – Interpretação geométrica de $z_1 \cdot z_2$.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

2.8.2 Divisão

Sejam dois números complexos não nulos representados na sua forma polar por $z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen } \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2)$, e daí façamos o quociente entre eles.

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1(\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen } \theta_1)}{\rho_2(\cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2)} \\
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen } \theta_1)}{(\cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2)} \cdot \frac{(\cos \theta_2 - i \cdot \text{sen } \theta_2)}{(\cos \theta_2 - i \cdot \text{sen } \theta_2)} \\
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - i^2 \cdot \text{sen } \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - i \cdot \text{sen } \theta_2 \cdot \cos \theta_1)}{(\cos \theta_2)^2 - (i \cdot \text{sen } \theta_2)^2} \\
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{[\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \text{sen } \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_2 + i \cdot (\text{sen } \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \text{sen } \theta_2 \cdot \cos \theta_1)]}{(\cos \theta_2)^2 + (\text{sen } \theta_2)^2} \\
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \text{sen } (\theta_1 - \theta_2)] \tag{2.15}
 \end{aligned}$$

Logo, a equação 2.15 representa a divisão entre dois números complexos na forma polar.

Observa-se por esta fórmula que:

$$\text{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \theta_1 - \theta_2. \tag{2.16}$$

O resultado da divisão de dois números complexos $z_1 = \rho_1 \cdot (\cos \theta_1 + i \cdot \sen \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2 \cdot (\cos \theta_2 + i \cdot \sen \theta_2)$ na forma polar, em que $\rho_1 = 1$ e $\theta_2 > \theta_1$, equivale à rotação de z_2 de θ_1 graus, no sentido horário, em relação à origem do plano (figura 2.5).

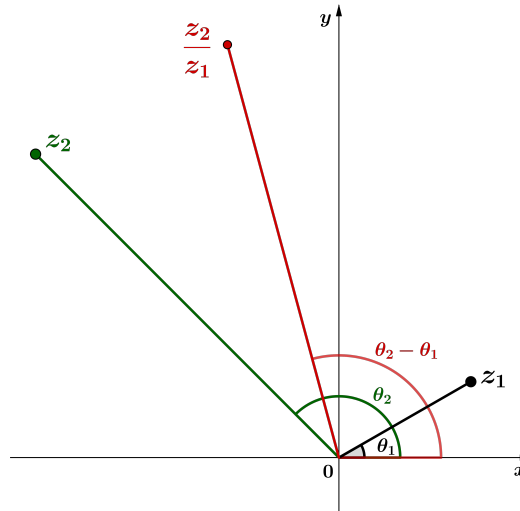


Figura 2.5 – Interpretação geométrica de $\frac{z_2}{z_1}$.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Sendo assim, para verificarmos se dois vetores do mesmo tamanho \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} são ortogonais, primeiramente, transferimos eles para a origem, tomando $B - A$ e $D - C$, respectivamente (figura 2.6). Em seguida, tomamos os números complexos correspondentes aos afixos $B - A$ e $D - C$, denotados por $b - a$ e $d - c$, respectivamente.

Enfim, para que sejam ortogonais, verificamos a igualdade:

$$b - a = i \cdot (d - c)$$

ou

$$b - a = (-i) \cdot (d - c)$$

No 1º caso, \overrightarrow{AB} é igual ao vetor \overrightarrow{CD} rotacionado 90° no sentido anti-horário.

No 2º caso, \overrightarrow{AB} é igual ao vetor \overrightarrow{CD} rotacionado 90° no sentido horário.

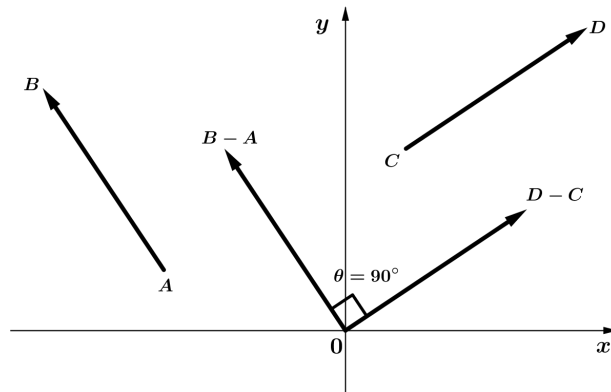


Figura 2.6 – Ortogonalidade de vetores por números complexos.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

2.8.3 Potenciação (Primeira Fórmula de De Moivre)

Considere o número complexo não nulo $z = \rho(\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta)$ em sua forma polar.

Se elevarmos z ao quadrado, temos que, pela multiplicação de números complexos na forma polar, o resultado é:

$$\begin{aligned}
 z^2 &= z \cdot z \\
 z^2 &= \left[\rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta) \right]^2 \\
 z^2 &= \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta) \cdot \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta) \\
 z^2 &= \rho \rho \cdot \left[(\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta) \cdot (\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta) \right] \\
 z^2 &= \rho^2 \left[\underbrace{\cos(\theta + \theta) + i \cdot \text{sen } (\theta + \theta)}_{\text{Equação 2.13}} \right] \\
 z^2 &= \rho^2 \left[\cos(2\theta) + i \cdot \text{sen } (2\theta) \right] \tag{2.17}
 \end{aligned}$$

Como a quantidade de argumentos de z a se somar é igual ao expoente da potência de z , suspeita-se que ao elevarmos z a um número inteiro n o resultado será:

$$z^n = \rho^n \left[\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen } (n\theta) \right] \tag{2.18}$$

Para tal afirmação, iremos dividir a demonstração em dois casos.

Demonstração: 1º Caso: Número n inteiro não negativo ($n \geq 0$).

Faremos a demonstração pelo Princípio de Indução Finita (P.I.F.) em n .

Observe que:

$$\blacktriangleright n = 0 \Rightarrow z^0 = 1 = \rho^0 \cdot (\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)^0 = \rho^0 \cdot [\cos(0 \cdot \theta) + i \cdot \operatorname{sen}(0 \cdot \theta)]$$

$$\blacktriangleright n = 1 \Rightarrow z^1 = \rho^1 \cdot (\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)^1 = \rho^1 \cdot [\cos(1 \cdot \theta) + i \cdot \operatorname{sen}(1 \cdot \theta)]$$

$$\blacktriangleright n = 2 \Rightarrow z^2 = \rho^2 \cdot (\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)^2 = \rho^2 \cdot \underbrace{[\cos(2 \cdot \theta) + i \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \theta)]}_{\text{Equação 2.17}}$$

$$\blacktriangleright n = 3 \Rightarrow z^3 = \rho^3 \cdot (\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)^3$$

$$z^3 = \underbrace{\rho^2 \cdot (\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)^2}_{n=2} \cdot \underbrace{\rho^1 \cdot (\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)^1}_{n=1}$$

$$z^3 = \rho^2 \cdot \rho^1 \cdot [\cos(2 \cdot \theta) + i \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \theta)] \cdot [\cos(1 \cdot \theta) + i \cdot \operatorname{sen}(1 \cdot \theta)]$$

$$z^3 = \rho^3 \cdot [\cos(3 \cdot \theta) + i \cdot \operatorname{sen}(3 \cdot \theta)]$$

Suponha que vale para algum k natural positivo qualquer, tal que:

$$z^k = \rho^k [\cos(k \cdot \theta) + i \cdot \operatorname{sen}(k \cdot \theta)] \quad (\text{Hip.})$$

Agora, devemos demonstrar que vale para $k + 1$.

Pelas propriedades de potenciação no conjunto \mathbb{R} , temos que:

$$z^{k+1} = \underbrace{z^k}_{\text{Hip.}} \cdot z$$

$$z^{k+1} = \rho^k [\cos(k \cdot \theta) + i \cdot \operatorname{sen}(k \cdot \theta)] \cdot \rho [\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta]$$

$$z^{k+1} = \rho^{k+1} \left\{ \cos [(k+1) \cdot \theta] + i \cdot \operatorname{sen} [(k+1) \cdot \theta] \right\}$$

Logo, a propriedade vale para $k + 1$. Portanto, pelo P.I.F., a sentença é válida para todo número n inteiro não negativo ($n \geq 0$).

2º caso: Número n inteiro negativo ($n < 0$).

Pelas propriedades de potenciação no conjunto \mathbb{R} , sabemos que $z^n = \frac{1}{z^{-n}}$.

Daí, $-n > 0$ e pelo 1º caso, temos que:

$$\begin{aligned} z^n &= \frac{1}{\rho^{-n} \cdot [\cos(-n \cdot \theta) + i \cdot \text{sen}(-n \cdot \theta)]} \\ z^n &= \frac{1 \cdot (\cos 0 + i \cdot \text{sen} 0)}{\rho^{-n} \cdot [\cos(-n \cdot \theta) + i \cdot \text{sen}(-n \cdot \theta)]} \\ z^n &= \frac{1}{\rho^{-n}} \cdot \frac{(\cos 0 + i \cdot \text{sen} 0)}{[\cos(-n \cdot \theta) + i \cdot \text{sen}(-n \cdot \theta)]} \cdot \frac{[\cos(-n \cdot \theta) - i \cdot \text{sen}(-n \cdot \theta)]}{[\cos(-n \cdot \theta) - i \cdot \text{sen}(-n \cdot \theta)]} \\ z^n &= \frac{1}{\rho^{-n}} \cdot \left\{ \cos [0 - (-n \cdot \theta)] + i \cdot \text{sen} [0 - (-n \cdot \theta)] \right\} \\ z^n &= \rho^n \cdot [\cos(n \cdot \theta) + i \cdot \text{sen}(n \cdot \theta)] \end{aligned}$$

Logo, também vale para $n < 0$.

Portanto, pelo 1º e 2º caso, a propriedade $z^n = [\rho(\cos \theta + i \cdot \text{sen} \theta)]^n$ é válida para todo número n inteiro. \square

A equação 2.18 é conhecida como a primeira fórmula de De Moivre. A qual também pode ser escrita como:

$$z^n = [\rho(\cos \theta + i \cdot \text{sen} \theta)]^n \quad (2.19)$$

2.8.4 Radiciação (Segunda Fórmula de De Moivre)

Sejam dois números complexos não nulos z e w , e um número n inteiro positivo ($n > 1$). O número complexo w é raiz n -ésima do número complexo z se, e somente se, $w^n = z$.

Considerando o número complexo não nulo $z = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \text{sen} \theta)$ em sua forma trigonométrica e n um número inteiro positivo, demonstra-se que as raízes n -ésimas de

z são dadas por:

$$w_k = \rho^{\frac{1}{n}} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right) \right] \quad (2.20)$$

ou

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right) \right] \quad (2.21)$$

com $k = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$.

Essa equação é conhecida como a **segunda fórmula de De Moivre**.

Capítulo 3

Quadriláteros Iso-ortodiagonais

Associados a um Octógono

Qualquer

Iniciaremos este capítulo abordando um teorema que foi fonte inspiradora para demonstrarmos os resultados deste trabalho, o Teorema de Van Aubel. Procederemos à demonstração do mesmo pela similaridade que possui com as provas dos resultados principais que seguirão depois.

Teorema 3.1 (Van Aubel). *Dado um quadrilátero qualquer em um plano, a partir de cada lado desenhemos um quadrado sobre ele. Então os segmentos que se unem aos centros dos quadrados localizados em lados opostos têm o mesmo comprimento e também são perpendiculares (figura 3.1).*

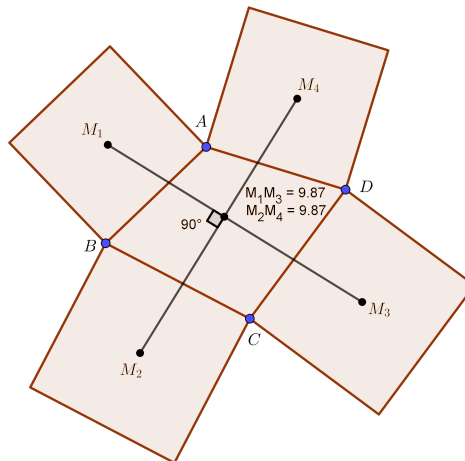


Figura 3.1 – Teorema de Van Aubel: $M_1M_3 = M_2M_4$ e $M_1M_3 \perp M_2M_4$.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Demonstração: Consideremos os vértices do quadrilátero $ABCD$ como sendo números complexos, em que o vértice A coincide com a origem do plano Argand-Gauss (figura 3.2). Sejam a , b , c e d os números complexos correspondentes aos afixos dos pontos $\frac{B-A}{2}$, $\frac{C-B}{2}$, $\frac{D-C}{2}$ e $\frac{A-D}{2}$, respectivamente. Então, $2a$, $2b$, $2c$ e $2d$ são os números complexos associados aos afixos de $B - A$, $C - B$, $D - C$ e $A - D$, respectivamente.

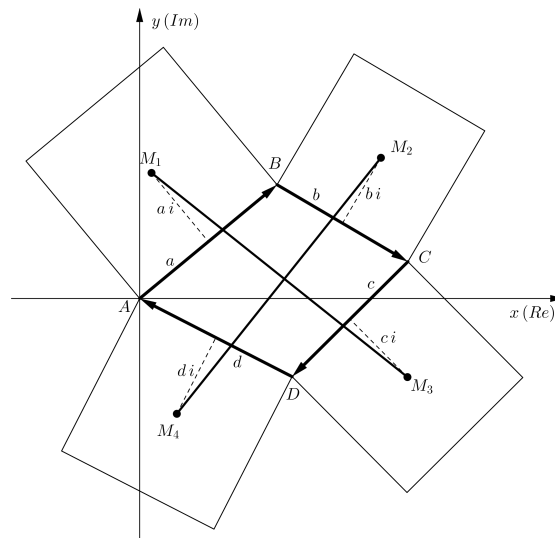


Figura 3.2 – Vértice A na origem do plano complexo.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Daí, temos que:

$$2a + 2b + 2c + 2d = 0 \Rightarrow a + b + c + d = 0.$$

Como o ponto M_1 é o centro do quadrado de lado AB , podemos obtê-lo percorrendo este lado até a metade, girando 90° e daí, percorrer até o ponto M_1 , o qual equivale à metade do lado AB .

Considere m_1 o número complexo associado ao afixo M_1 .

Então,

$$m_1 = a + a \cdot (\cos 90^\circ + i \cdot \sen 90^\circ) \Rightarrow m_1 = a + ai \Rightarrow m_1 = a(1 + i)$$

Seguindo o mesmo procedimento, temos:

$$m_2 = 2a + b(1 + i)$$

$$m_3 = 2a + 2b + c(1 + i)$$

$$m_4 = 2a + 2b + 2c + d(1 + i)$$

Considere os vetores $\overrightarrow{M_1M_3}$ e $\overrightarrow{M_2M_4}$ e considere os números complexos $x = m_3 - m_1$ e $y = m_4 - m_2$ associados aos afixos dos pontos $M_3 - M_1$ e $M_4 - M_2$, respectivamente.

Logo, os vetores de origem em $(0, 0)$ e extremidades nos afixos de x e y são equivalentes aos vetores $\overrightarrow{M_1M_3}$ e $\overrightarrow{M_2M_4}$, respectivamente. Assim:

$$x = m_3 - m_1 = 2a + 2b + c(1 + i) - [a(1 + i)]$$

$$= a + 2b + c + (c - a)i$$

$$y = m_4 - m_2 = 2a + 2b + 2c + d(1 + i) - [2a + b(1 + i)]$$

$$= b + 2c + d + (d - b)i$$

Devemos mostrar que x e y têm o mesmo comprimento e que são ortogonais. Para isto, basta mostrarmos que $x = yi$ ou $x - yi = 0$:

$$\begin{aligned}
 x - yi &= a + 2b + c + (c - a)i - \left[b + 2c + d + (d - b)i \right] i \\
 &= a + b + c + d - ai - bi - ci - di \\
 &= a + b + c + d - (a + b + c + d)i \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

□

Está terminada a prova do Teorema de Van Aubel.

Agora sim, vamos provar um teorema, devido a [6], que consiste num caso similar ao teorema de Van Aubel. Depois iremos provar outro resultado que também representa uma variação destes teoremas, mostrado por [10].

Teorema 3.2 (Primeiro quadrilátero iso-ortodiagonal associado ao octógono). *Dado um octógono (convexo ou não) $A_1A_2 \dots A_8$, e quadrados $B_1A_1A_2B_2$, $B_3A_2A_3B_4$, \dots , $B_{15}A_8A_1B_{16}$ construídos todos internamente ou todos externamente sobre os lados do octógono, sendo M_1, \dots, M_8 os pontos médios de B_2B_3 , B_4B_5 , B_6B_7 , \dots , $B_{16}B_1$, respectivamente, então, se P_1 é ponto médio de M_1M_5 , P_2 é ponto médio de M_2M_6 , P_3 o ponto médio de M_3M_7 e P_4 o ponto médio de M_4M_8 , conclui-se que $P_1P_2P_3P_4$ é um quadrilátero iso-ortodiagonal, isto é, suas diagonais são congruentes e ortogonais (figura 3.3).*

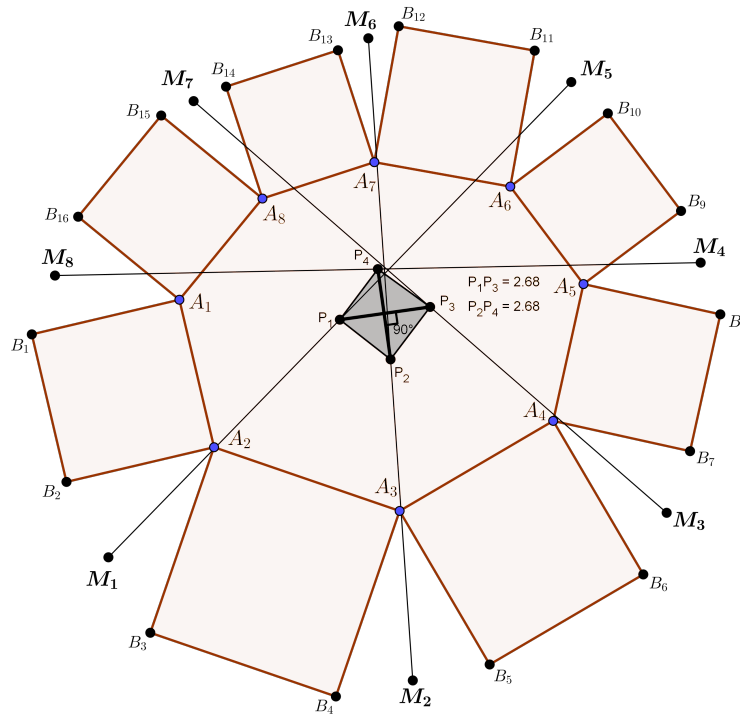


Figura 3.3 – Primeiro Quadrilátero iso-ortodiagonal.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Demonstração: Sejam a_j, m_j, b_k e p_i , com $1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 8$ e $1 \leq k \leq 16$, os números complexos, cujas partes real e imaginária são as coordenadas de A_j, M_j, B_k , e P_i , respectivamente.

Daí, temos que:

$$\overrightarrow{A_2B_2} = b_2 - a_2 \quad \text{e} \quad \overrightarrow{A_2A_1} = a_1 - a_2$$

Como $\overrightarrow{A_2B_2}$ equivale a uma rotação de 90° no vetor $\overrightarrow{A_2A_1}$, no sentido anti-horário, temos:

$$b_2 - a_2 = (a_1 - a_2) \cdot i$$

$$b_2 = i \cdot a_1 - i \cdot a_2 + a_2$$

$$b_2 = i \cdot a_1 + a_2(1 - i) \quad (\text{Ponto } b_2 \text{ em função de } a_1 \text{ e } a_2.)$$

Escrevendo o ponto b_3 em função de a_2 e a_3 , temos:

$$\overrightarrow{A_2B_3} = b_3 - a_2 \quad \text{e} \quad \overrightarrow{A_2A_3} = a_3 - a_2$$

Como $\overrightarrow{A_2B_3}$ equivale a uma rotação de 90° no vetor $\overrightarrow{A_2A_3}$, no sentido horário, então:

$$b_3 - a_2 = (a_3 - a_2) \cdot (-i)$$

$$b_3 = i \cdot a_2 - i \cdot a_3 + a_2$$

$$b_3 = a_2(1 + i) - i \cdot a_3 \quad (\text{Ponto } b_3 \text{ em função de } a_2 \text{ e } a_3.)$$

De maneira análoga, escrevemos os demais vértices dos quadrados externos em função dos vértices do octógono.

Determinando o ponto médio M_1 entre B_2 e B_3 , temos:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{b_2 + b_3}{2} \\ &= \frac{ia_1 + a_2(1 - i) + a_2(1 + i) - ia_3}{2} \\ &= \frac{a_2(\cancel{1 - i} + \cancel{1 + i}) + ia_1 - ia_3}{2} \\ &= \frac{2a_2 + ia_1 - ia_3}{2} \end{aligned}$$

De forma análoga:

$$\begin{aligned}
 m_2 &= \frac{b_4 + b_5}{2} = \frac{2a_3 + i a_2 - i a_4}{2} \\
 m_3 &= \frac{b_6 + b_7}{2} = \frac{2a_4 + i a_3 - i a_5}{2} \\
 m_4 &= \frac{b_8 + b_9}{2} = \frac{2a_5 + i a_4 - i a_6}{2} \\
 m_5 &= \frac{b_{10} + b_{11}}{2} = \frac{2a_6 + i a_5 - i a_7}{2} \\
 m_6 &= \frac{b_{12} + b_{13}}{2} = \frac{2a_7 + i a_6 - i a_8}{2} \\
 m_7 &= \frac{b_{14} + b_{15}}{2} = \frac{2a_8 + i a_7 - i a_1}{2} \\
 m_8 &= \frac{b_{16} + b_1}{2} = \frac{2a_1 + i a_8 - i a_2}{2}
 \end{aligned}$$

Daí, o ponto médio P_1 do segmento M_1M_5 é:

$$p_1 = \frac{m_1 + m_5}{2} = \frac{i a_1 + 2a_2 - i a_3 + i a_5 + 2a_6 - i a_7}{4}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
 p_2 &= \frac{m_2 + m_6}{2} = \frac{i a_2 + 2a_3 - i a_4 + i a_6 + 2a_7 - i a_8}{4} \\
 p_3 &= \frac{m_3 + m_7}{2} = \frac{-i a_1 + i a_3 + 2a_4 - i a_5 + i a_7 + 2a_8}{4} \\
 p_4 &= \frac{m_4 + m_8}{2} = \frac{2a_1 - i a_2 + i a_4 + 2a_5 - i a_6 + i a_8}{4}
 \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
 p_3 - p_1 &= \frac{-2i a_1 - 2a_2 + 2i a_3 + 2a_4 - 2i a_5 - 2a_6 + 2i a_7 + 2a_8}{4} \\
 p_3 - p_1 &= \frac{-i a_1 - a_2 + i a_3 + a_4 - i a_5 - a_6 + i a_7 + a_8}{2}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 p_4 - p_2 &= \frac{2a_1 - 2i a_2 - 2a_3 + 2i a_4 + 2a_5 - 2i a_6 - 2a_7 + 2i a_8}{4} \\
 &= \frac{a_1 - i a_2 - a_3 + i a_4 + a_5 - i a_6 - a_7 + i a_8}{2} \\
 &= (i) \cdot \frac{-i a_1 - a_2 + i a_3 + a_4 - i a_5 - a_6 + i a_7 + a_8}{2} \\
 &= (i) \cdot (p_3 - p_1)
 \end{aligned}$$

Então, temos que o segmento P_1P_3 , além de ser congruente ao segmento P_2P_4 , faz um ângulo de 90° com o mesmo. \square

Teorema 3.3 (Segundo quadrilátero iso-ortodiagonal associado ao octógono). *Dado um octógono (convexo ou não) $A_1A_2 \dots A_8$, e quadrados $B_1A_1A_2B_2$, $B_3A_2A_3B_4$, \dots , $B_{15}A_8A_1B_{16}$ construídos todos internamente ou todos externamente sobre os lados do octógono, sendo C_1, \dots, C_8 os pontos centrais destes quadrados. Então, se P'_1 é ponto médio de C_1C_5 , P'_2 é ponto médio de C_2C_6 , P'_3 o ponto médio de C_3C_7 e P'_4 o ponto médio de C_4C_8 , conclui-se que $P'_1P'_2P'_3P'_4$ é um quadrilátero iso-ortodiagonal, isto é, suas diagonais são congruentes e ortogonais (figura 3.4).*

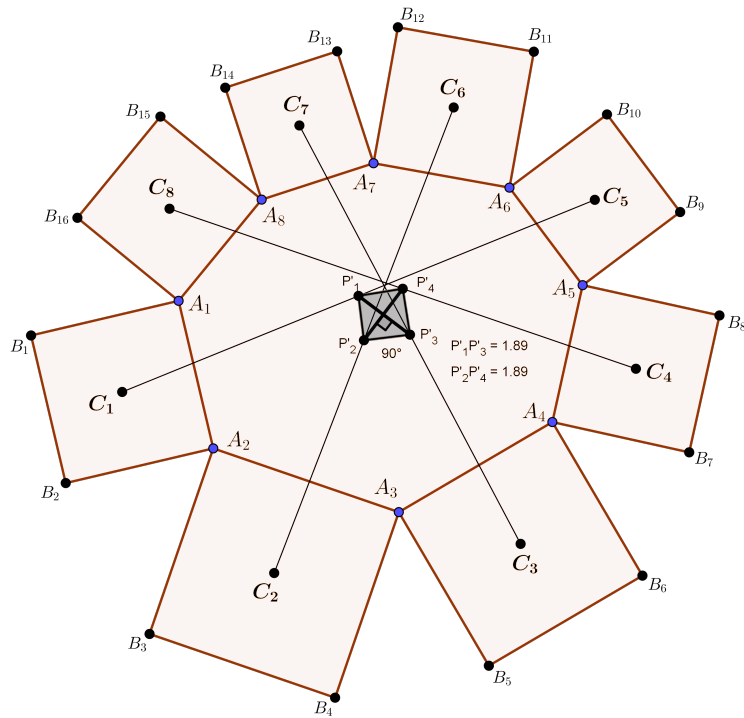


Figura 3.4 – Segundo Quadrilátero iso-ortodiagonal.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Demonstração: Sejam a_j, c_j, d_j, b_k e p_i os números complexos, com $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 8$, $1 \leq k \leq 16$, cujas partes real e imaginária são as coordenadas de A_j, C_j, D_j, B_k e P_i , respectivamente, em que D_j é o ponto médio A_jA_{j+1} , convencionando $A_9 = A_1$.

Então:

$$d_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Daí, temos que:

$$\overrightarrow{D_1A_1} = a_1 - \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{D_1A_1} = \frac{a_1 - a_2}{2}$$

Agora, escrevendo C_1 em função de a_1 e a_2 , percebemos que $\overrightarrow{D_1C_1}$ equivale a uma rotação de 90° do vetor $\overrightarrow{D_1A_1}$, logo:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{D_1C_1} &= i \cdot \overrightarrow{D_1A_1} \\
 c_1 - \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) &= i \cdot \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right) \\
 c_1 &= \frac{a_1 + a_2}{2} + i \cdot \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right) \\
 c_1 &= \frac{a_1 + a_2 + i \cdot (a_1 - a_2)}{2} \quad (\text{Ponto } c_1 \text{ em função de } a_1 \text{ e } a_2.)
 \end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos os pontos $c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$ e c_8 .

$$\begin{aligned}
 c_2 &= \frac{a_2 + a_3 + i \cdot (a_2 - a_3)}{2} && (\text{Ponto } c_2 \text{ em função de } a_2 \text{ e } a_3.) \\
 c_3 &= \frac{a_3 + a_4 + i \cdot (a_3 - a_4)}{2} && (\text{Ponto } c_3 \text{ em função de } a_3 \text{ e } a_4.) \\
 c_4 &= \frac{a_4 + a_5 + i \cdot (a_4 - a_5)}{2} && (\text{Ponto } c_4 \text{ em função de } a_4 \text{ e } a_5.) \\
 c_5 &= \frac{a_5 + a_6 + i \cdot (a_5 - a_6)}{2} && (\text{Ponto } c_5 \text{ em função de } a_5 \text{ e } a_6.) \\
 c_6 &= \frac{a_6 + a_7 + i \cdot (a_6 - a_7)}{2} && (\text{Ponto } c_6 \text{ em função de } a_6 \text{ e } a_7.) \\
 c_7 &= \frac{a_7 + a_8 + i \cdot (a_7 - a_8)}{2} && (\text{Ponto } c_7 \text{ em função de } a_7 \text{ e } a_8.) \\
 c_8 &= \frac{a_8 + a_1 + i \cdot (a_8 - a_1)}{2} && (\text{Ponto } c_8 \text{ em função de } a_8 \text{ e } a_1.)
 \end{aligned}$$

Determinando o ponto médio P'_1 entre C_1 e C_5 , temos:

$$\begin{aligned}
 p'_1 &= \frac{c_1 + c_5}{2} \\
 p'_1 &= \frac{a_1 + a_2 + a_5 + a_6 + i \cdot (a_1 - a_2 + a_5 - a_6)}{4}
 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} p'_2 &= \frac{c_2 + c_6}{2} = \frac{a_2 + a_3 + a_6 + a_7 + i \cdot (a_2 - a_3 + a_6 - a_7)}{4} \\ p'_3 &= \frac{c_3 + c_7}{2} = \frac{a_3 + a_4 + a_7 + a_8 + i \cdot (a_3 - a_4 + a_7 - a_8)}{4} \\ p'_4 &= \frac{c_4 + c_8}{2} = \frac{a_4 + a_5 + a_8 + a_1 + i \cdot (a_4 - a_5 + a_8 - a_1)}{4} \end{aligned}$$

Agora,

$$p'_3 - p'_1 = \frac{\begin{pmatrix} -a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - a_5 - a_6 + a_7 + a_8 + \\ +i(-a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 + a_6 + a_7 - a_8) \end{pmatrix}}{4}$$

e

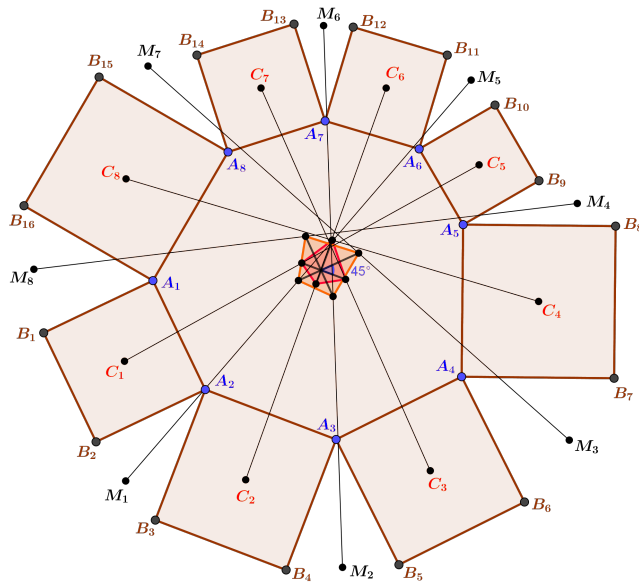
$$\begin{aligned} p'_4 - p'_2 &= \frac{\begin{pmatrix} a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 - a_7 + a_8 + \\ +i(-a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - a_5 - a_6 + a_7 + a_8) \end{pmatrix}}{4} \\ &= (i) \cdot \frac{\begin{pmatrix} -a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - a_5 - a_6 + a_7 + a_8 + \\ +i(-a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 + a_6 + a_7 - a_8) \end{pmatrix}}{4} \\ &= (i) \cdot (p'_3 - p'_1) \end{aligned}$$

Portanto, temos que o segmento $P'_1P'_3$, além de ser congruente ao segmento $P'_2P'_4$, faz um ângulo de 90° com o mesmo. \square

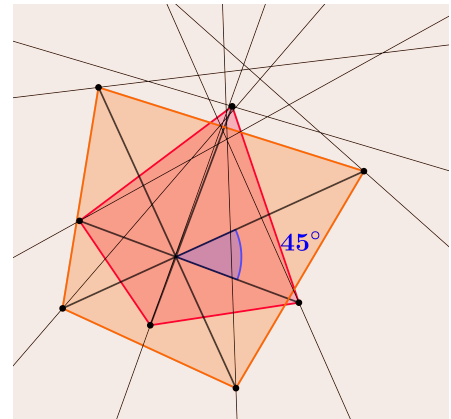
Por fim, estabeleceremos agora um resultado que relaciona os dois quadriláteros construídos nos dois teoremas provados, que julgamos ser um resultado novo.

Teorema 3.4 (Uma relação entre os dois quadriláteros). *Seja um octógono qualquer $A_1A_2 \dots A_8$, e quadrados $B_1A_1A_2B_2$, $B_3A_2A_3B_4$, \dots , $B_{15}A_8A_1B_{16}$ construídos todos externamente sobre os lados do octógono. Os quadriláteros iso-ortodiagonais construídos, um a partir dos pontos médios dos segmentos M_kM_{k+4} , com $k = 1, 2, 3$, ou 4 ,*

dos vértices $B_{2j}B_{2j+1}$ dos quadrados, com $1 \leq j \leq 8$, considerando $B_{17} = B_1$; e o outro dos pontos médios do segmento C_iC_{i+4} dos quadrados, com $i = 1, 2, 3$, ou 4; o ângulo formado entre qualquer diagonal de um quadrilátero com qualquer diagonal do outro quadrilátero é de 45° (figuras 3.5 (a) e (b)).



(a) Octógono.



(b) Destaque dos quadriláteros e do ângulo.

Figura 3.5 – Ilustração do teorema 3.4.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Antes da demonstração, observe que, na figura 3.5 (b), as diagonais de ambos os quadriláteros iso-ortodiagonais se interceptam num mesmo ponto. Nesta dissertação, não iremos provar este fato. Ficaremos com o trabalho de mostrar que o ângulo entre a diagonal de um quadrilátero e a diagonal do outro vale 45° . O ponto comum das diagonais de ambos os quadriláteros será tema de futuras pesquisas que poderão ser continuadas a partir desta dissertação.

Demonstração: Para a prova deste teorema, necessitamos mostrar que a tangente do ângulo entre quaisquer diagonais de um quadrilátero e de outro é igual a 1.

Valendo-se das mesmas notações do teorema 3.2, temos:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{i a_1 + 2a_2 - i a_3 + i a_5 + 2a_6 - i a_7}{4} = \frac{2(a_2 + a_6) + i(a_1 - a_3 + a_5 - a_7)}{4} \\
 p_2 &= \frac{i a_2 + 2a_3 - i a_4 + i a_6 + 2a_7 - i a_8}{4} = \frac{2(a_3 + a_7) + i(a_2 - a_4 + a_6 - a_8)}{4} \\
 p_3 &= \frac{-i a_1 + i a_3 + 2a_4 - i a_5 + i a_7 + 2a_8}{4} = \frac{2(a_4 + a_8) + i(a_3 - a_5 + a_7 - a_1)}{4} \\
 p_4 &= \frac{2a_1 - i a_2 + i a_4 + 2a_5 - i a_6 + i a_8}{4} = \frac{2(a_5 + a_1) + i(a_4 - a_6 + a_8 - a_2)}{4}
 \end{aligned}$$

Chamando de x_i e de y_i , respectivamente, as partes reais e as partes imaginárias de $a_{i+1} + a_{i+5}$, em que convencionamos que $a_9 = a_1$, temos:

$$a_2 + a_6 = x_1 + i y_1 \quad (3.1)$$

$$a_3 + a_7 = x_2 + i y_2 \quad (3.2)$$

$$a_4 + a_8 = x_3 + i y_3 \quad (3.3)$$

$$a_5 + a_1 = x_4 + i y_4 \quad (3.4)$$

Alteramos as equações para:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{2(x_1 + i y_1) + i [x_4 + i y_4 - (x_2 + i y_2)]}{4} = \frac{2x_1 + y_2 - y_4 + i(-x_2 + x_4 + 2y_1)}{4} \\
 p_2 &= \frac{2(x_2 + i y_2) + i [x_1 + i y_1 - (x_3 + i y_3)]}{4} = \frac{2x_2 + y_3 - y_1 + i(x_1 - x_3 + 2y_2)}{4} \\
 p_3 &= \frac{2(x_3 + i y_3) + i [x_2 + i y_2 - (x_4 + i y_4)]}{4} = \frac{2x_3 + y_4 - y_2 + i(x_2 - x_4 + 2y_3)}{4} \\
 p_4 &= \frac{2(x_4 + i y_4) + i [x_3 + i y_3 - (x_1 + i y_1)]}{4} = \frac{2x_4 + y_1 - y_3 + i(-x_1 + x_3 + 2y_4)}{4}
 \end{aligned}$$

Agora, obtendo o coeficiente angular (m_1) da reta suporte da diagonal P_1P_3 , sem perda de generalidade, temos:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \frac{x_2 - x_4 + 2y_3 - (-x_2 + x_4 + 2y_1)}{2x_3 - y_2 + y_4 - (2x_1 + y_2 - y_4)} \\
 m_1 &= \frac{2(x_2 - x_4 - y_1 + y_3)}{2(-x_1 + x_3 - y_2 + y_4)} \\
 m_1 &= \frac{x_2 - x_4 - y_1 + y_3}{-x_1 + x_3 - y_2 + y_4} \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

Fazendo:

$$x_2 - x_4 - y_1 + y_3 = r \tag{3.6}$$

$$-x_1 + x_3 - y_2 + y_4 = s \tag{3.7}$$

Então, a equação 3.5 se torna:

$$m_1 = \frac{r}{s} \tag{3.8}$$

Agora, valendo-se das mesmas notações do teorema 3.3, temos:

$$\begin{aligned}
 p'_1 &= \frac{c_1 + c_5}{2} = \frac{a_1 + a_2 + a_5 + a_6 + i \cdot (a_1 - a_2 + a_5 - a_6)}{4} \\
 p'_2 &= \frac{c_2 + c_6}{2} = \frac{a_2 + a_3 + a_6 + a_7 + i \cdot (a_2 - a_3 + a_6 - a_7)}{4} \\
 p'_3 &= \frac{c_3 + c_7}{2} = \frac{a_3 + a_4 + a_7 + a_8 + i \cdot (a_3 - a_4 + a_7 - a_8)}{4} \\
 p'_4 &= \frac{c_4 + c_8}{2} = \frac{a_4 + a_5 + a_8 + a_1 + i \cdot (a_4 - a_5 + a_8 - a_1)}{4}
 \end{aligned}$$

Nas quais, pelas equações 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4, tornam-se:

$$\begin{aligned}
 p'_1 &= \frac{x_1 + x_4 + y_1 - y_4 + i(-x_1 + x_4 + y_1 + y_4)}{4} \\
 p'_2 &= \frac{x_1 + x_2 + y_2 - y_1 + i(-x_2 + x_1 + y_2 + y_1)}{4} \\
 p'_3 &= \frac{x_2 + x_3 + y_3 - y_2 + i(-x_3 + x_2 + y_3 + y_2)}{4} \\
 p'_4 &= \frac{x_3 + x_4 + y_4 - y_3 + i(-x_4 + x_3 + y_4 + y_3)}{4}
 \end{aligned}$$

Agora, obtendo o coeficiente angular (m_2) da reta que passa por $P'_1P'_3$, sem perda de generalidade, temos:

$$\begin{aligned}
 m_2 &= \frac{x_2 - x_3 + y_2 + y_3 - (-x_1 + x_4 + y_1 + y_4)}{x_2 + x_3 + y_3 - y_2 - (x_1 + x_4 + y_1 - y_4)} \\
 &\quad \text{Equação 3.6} \qquad \qquad \qquad \text{Equação 3.7} \\
 m_2 &= \frac{\underbrace{(x_2 - x_4 - y_1 + y_3)}_{\text{Equação 3.6}} - \underbrace{(-x_1 + x_3 - y_2 + y_4)}_{\text{Equação 3.7}}}{\underbrace{(x_2 - x_4 - y_1 + y_3)}_{\text{Equação 3.6}} + \underbrace{(-x_1 + x_3 - y_2 + y_4)}_{\text{Equação 3.7}}} \qquad (3.9)
 \end{aligned}$$

Mas, pelas equações 3.6 e 3.7, temos:

$$m_2 = \frac{r - s}{r + s} \qquad (3.10)$$

Utilizando as equações 3.8 e 3.10 e a fórmula do ângulo entre duas retas, temos como descobrir o ângulo θ entre as retas de coeficientes angulares m_1 e m_2 , logo:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| \\ \tan \theta &= \left| \frac{\left(\frac{r}{s}\right) - \left(\frac{r-s}{r+s}\right)}{1 + \left(\frac{r}{s}\right) \cdot \left(\frac{r-s}{r+s}\right)} \right| \\ \tan \theta &= \left| \frac{\cancel{r^2 + rs - sr + s^2}}{\cancel{sr + s^2}} \right| \\ \tan \theta &= \left| \frac{\cancel{sr + s^2 + r^2 - sr}}{\cancel{sr + s^2}} \right| \\ \tan \theta &= \left| \frac{r^2 + s^2}{s^2 + r^2} \right| \\ \tan \theta &= |1| \\ \therefore \theta &= 45^\circ \quad \square \end{aligned}$$

Assim terminamos a prova.

Capítulo 4

Considerações Finais

Embora a Matemática esteja dividida em vários ramos, como geometria e álgebra, por exemplo, a beleza dela também pode ser encontrada na “mistura” destes ramos, em que existe a possibilidade de utilizar-se de um para demonstrar certo teorema do outro, entrelaçando-os. Além do mais, com o uso de *softwares*, como por exemplo o GeoGebra, é nos proporcionada a visualização mais rápida de alguns resultados de teoremas, principalmente os que envolvem geometria, que antes eram de difícil percepção por falta de precisão ao se construírem determinadas figuras. Todavia, é necessário provar, por meios matemáticos, que tais resultados produzidos no *software* são verdadeiros.

Logo, o desenvolvimento desta pesquisa dispôs-se a analisar e demonstrar, de forma algébrica, duas propriedades de dois quadriláteros construídos por meio de um octógono qualquer. A primeira, que as diagonais são de mesmo comprimento; e a segunda, que tais diagonais formam um ângulo reto entre si, para ambos os quadriláteros. Daí o nome **quadrilátero iso-ortodiagonal**. Acrescentamos a estes conhecimentos o fato de o ângulo entre as diagonais dos dois quadriláteros ser de 45° .

Tomamos como base a demonstração do teorema de Van Aubel por meios algébricos, que se utiliza de vetores e essencialmente de números complexos.

O *software* GeoGebra nos foi de grande serventia, no que diz respeito a visualização

do que devíamos demonstrar, o qual viabiliza agilidade e precisão na construção do octógono qualquer e dos quadriláteros, bem como a manipulação da construção para analisá-la; facilitando tanto a ampliação de certas partes da figura, como a alteração do formato do octógono para averiguar possíveis propriedades.

Haja vista a abrangência de novas propriedades, percebidas ao manipular um dos vértices do octógono com o uso do *software* GeoGebra, para futuros projetos pode-se pensar na demonstração de que as diagonais dos quadriláteros, um construído seguindo as orientações do teorema 3.2, e o outro construído a partir das orientações do teorema 3.3, se interceptam em um mesmo ponto.

Sendo assim, ao finalizarmos a demonstração das duas propriedades dos quadriláteros iso-ortodiagonais e determinarmos o ângulo entre suas diagonais, esperamos ter instigado e contribuído, para os leitores, o quão podemos associar a geometria e a álgebra na demonstração de teoremas.

Referências Bibliográficas

- [1] ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 10^a. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. ISBN 978-85-407-0170-0.
- [2] BARRETO FILHO, B.; SILVA, C. X. D. **Matemática aula por aula**. São Paulo: FTD, v. Único, 2000.
- [3] BARROSO, J. M. **Matemática: construção e significado**. São Paulo: Moderna, v. 3, 2008. ISBN 978-85-16-06080-0.
- [4] DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria analítica**. 2^a. ed. Rio de Janeiro: SBM, Coleção PROFMAT, v. 11, 2017. 373 p. ISBN 978-85-8337-121-2.
- [5] GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JR., J. R. **Matemática completa: ensino médio**. São Paulo: FTD, v. Único, 2002. ISBN 85-322-4827-6.
- [6] KRISHNA, D. N. V. Two New Equilateral Triangles Associated With A Triangle. Artigo aceito para publicação., 2018.
- [7] LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. 2^a. ed. São Paulo: Harbra Ltda., v. 2, 1977.
- [8] LONGEN, A. Matemática. Curitiba: Positivo, v. 3, 2004. ISBN 85-7472-248-0.

- [9] MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, Coleção PROFMAT, v. 9, 2013. 442 p. ISBN 978-85-85818-93-7.
- [10] OAI, D. T. Equilateral Triangles and Kiepert Perspectors in Complex Numbers. *Forum Geometricorum*, v. 15, p. 105 - 114, 2015. ISSN 1534-1178.
- [11] PAIVA, M. R. **Matemática**. São Paulo: Moderna, v. 3, 1995. ISBN 85-16-01284-0.
- [12] SOUZA, J. R. D.; GARCIA, J. D. S. R. **#Contato matemática**. São Paulo: FTD, v. 3, 2016. ISBN 978-85-96-00313-1.
- [13] THOMAS JR, G. B. et al. **Cálculo de George B. Thomas Jr.** 10^a. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, v. 2, 2003.

Apêndice A

Construção por Régua e Compasso

Neste capítulo, vamos inicialmente expor novamente o teorema 3.2 devido a [6] de um quadrilátero iso-ortodiagonal e a seguir detalharemos a construção deste por meio de régua e compasso.

Teorema A.1 (Teorema 3.2). *Dado um octógono (convexo ou não) $A_1A_2\dots A_8$, e quadrados $B_1A_1A_2B_2$, $B_3A_2A_3B_4$, \dots , $B_{15}A_8A_1B_{16}$ construídos todos internamente ou todos externamente sobre os lados do octógono, sendo C_1, \dots, C_8 os pontos médios de B_2B_3 , B_4B_5 , B_6B_7 , \dots , $B_{16}B_1$, então, se P_1 é ponto médio de C_1C_5 , P_2 é ponto médio de C_2C_6 , P_3 é ponto médio de C_3C_7 e P_4 é ponto médio de C_4C_8 , conclui-se que $P_1P_2P_3P_4$ é um quadrilátero iso-ortodiagonal, isto é, suas diagonais são congruentes e ortogonais.*


No entanto, antes de começar a descrever os passos, faz-se necessária a ciência de algumas definições.

Segundo [9], ao definir pontos colineares, sejam três pontos quaisquer no plano, por exemplo A , B e C . Se o ponto A estiver sobre a reta que contém os outros dois pontos, então, diremos que estes pontos são **colineares**; caso contrário, diremos que A , B e C são **não colineares**.

Para uma forma mais didática, dividiremos em quatro etapas; as quais ajudaram o leitor a acompanhar o raciocínio da construção.

Etapa 1) Construção do octógono:

Marcando-se os pontos distintos A_1, A_2, \dots, A_8 , traça-se um segmento de reta do ponto A_1 até o ponto A_2 . Do ponto A_2 , traça-se um segmento de reta até o ponto A_3 , e assim por diante, até o ponto A_8 ; do ponto A_8 traça-se um segmento de reta até o ponto A_1 , fechando o octógono.

A construção do octógono se fez com o uso do *software* GeoGebra, por meio do ícone polígono  (figura A.1).

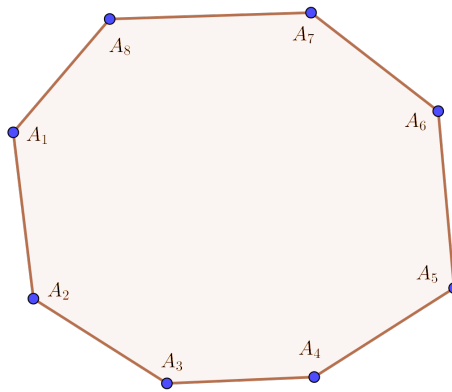


Figura A.1 – Octógono qualquer.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Etapa 2) Quadrado externo a cada lado do octógono:

Nos vértices do octógono da etapa 1, vamos construir retas perpendiculares aos lados do polígono.

Prolongando o lado A_1A_2 , centra-se a ponta seca do compasso no vértice A_1 (ou no vértice A_2) e com uma abertura qualquer, de tal sorte, marcam-se os pontos N e Q que são interseções no prolongamento do lado A_1A_2 . Em seguida, sem perda de generalidade, com a ponta seca do compasso no ponto N e uma abertura maior do que a distância NA_1 , traça-se uma circunferência, depois centra-se a ponta seca do compasso no ponto Q e com a mesma abertura, traça-se uma outra circunferência, de tal sorte, que intercepta a primeira. No cruzamento das

circunferências, marca-se o ponto R . Agora, com uma régua traça-se uma reta t que passa pelos pontos R e A_1 (figura A.2).

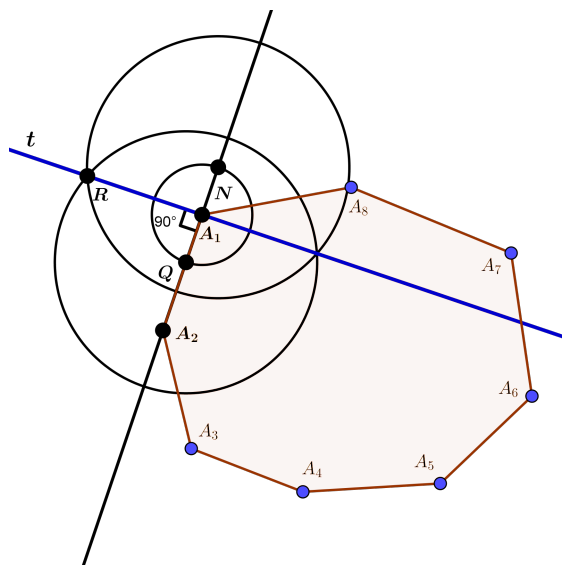


Figura A.2 – Construção da reta t perpendicular à A_1A_2 .

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Feita a reta t perpendicular ao lado A_1A_2 , vamos construir o quadrado externo a este lado. Com a ponta seca do compasso centralizada no vértice A_1 e abertura igual ao segmento A_1A_2 , marca-se o ponto B_1 na reta t , como a distância entre A_1B_1 é igual ao lado A_1A_2 temos dois lados do quadrado que iremos construir. Transferindo a ponta seca do compasso, e permanecendo com a mesma abertura, para o vértice A_2 e em seguida para o ponto B_1 , traçam-se duas circunferências sobre o lado A_1A_2 , de tal sorte, que elas se interceptam, marcando o ponto B_2 (figura A.3).

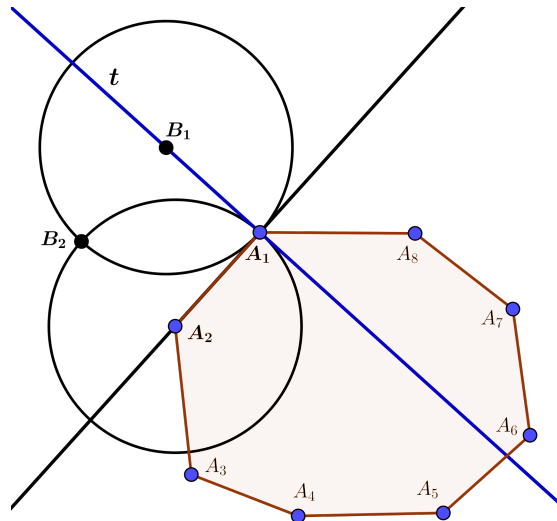


Figura A.3 – Vértices do quadrado $A_1A_2B_2B_1$.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Por fim, com o uso da régua traçam-se os segmentos B_1B_2 e B_2A_2 , formando assim o quadrado $A_1B_1B_2A_2$ externo ao lado A_1A_2 do octógono (figura A.4).

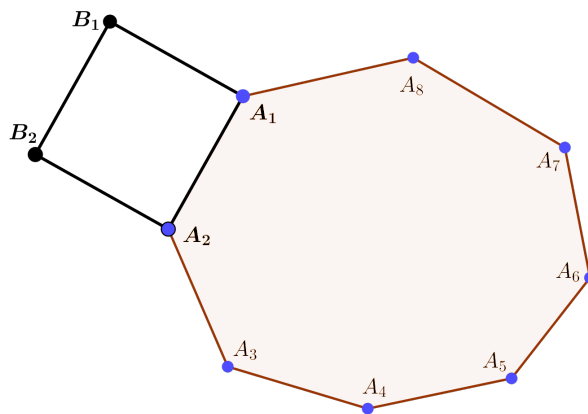


Figura A.4 – Quadrado externo ao lado A_1A_2 .

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

De maneira análoga são construídos os quadrados $A_2B_3B_4A_3$, $A_3B_5B_6A_4$, $A_4B_7B_8A_5$, $A_5B_9B_{10}A_6$, $A_6B_{11}B_{12}A_7$, $A_7B_{13}B_{14}A_8$ e $A_8B_{15}B_{16}A_1$ externos, respectivamente, aos lados A_2A_3 , A_3A_4 , A_4A_5 , A_5A_6 , A_6A_7 , A_7A_8 e A_8A_1 . Con-

cluindo a construção do quadrado externo a cada lado do octógono (figura A.5).

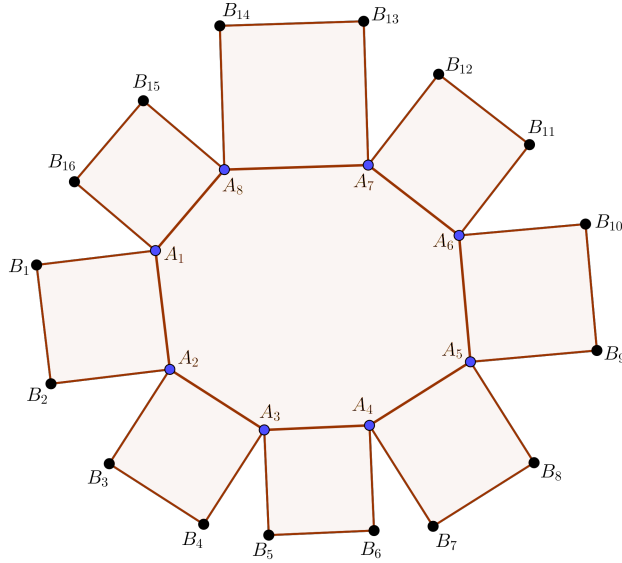


Figura A.5 – Quadrado externo ao lado do octógono.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Etapa 3) Segmento de reta que passa pelos pontos médio entre os vértices B_1B_{16} e B_8B_9 :

Sejam os vértices B_i , com $1 \leq i \leq 16$, vamos construir o ponto médio entre B_i e B_{i+1} , em que tais vértices não pertençam a um mesmo quadrado. Lembrando que B_{16} construirá o ponto médio com B_1 .

Então, sejam os vértices B_2 e B_3 , que pertencem a quadrados adjacentes, formando o segmento B_2B_3 . Com a ponta seca do compasso em B_2 , e depois em B_3 , e abertura do tamanho da distância B_2B_3 , traçam-se duas circunferências, de tal sorte, que se interceptam marcando os pontos F_1 e F_2 . Com o uso da régua traça-se sobre B_2B_3 a reta s que passa pelos pontos F_1 e F_2 . Na intersecção entre B_2B_3 e s , temos o ponto médio M_1 (figura A.6).

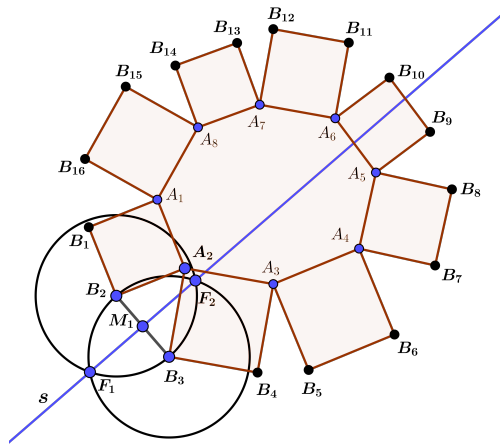


Figura A.6 – Ponto médio entre B_2B_3 .

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Da mesma maneira descrita anteriormente, constroem-se os pontos médios M_2 , M_3 , M_4 , M_5 , M_6 , M_7 e M_8 dos segmentos B_4B_5 , B_6B_7 , B_8B_9 , $B_{10}B_{11}$, $B_{12}B_{13}$, $B_{14}B_{15}$ e $B_{16}B_1$, respectivamente (figura A.7).

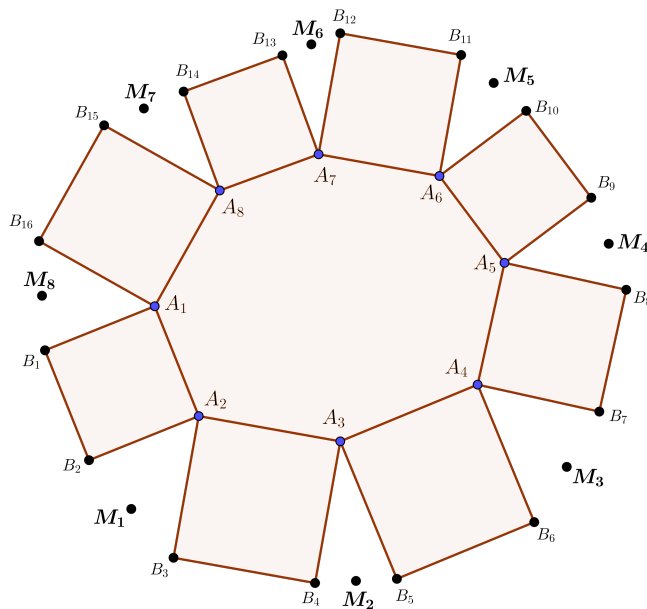


Figura A.7 – Ponto médio entre os vértices de quadrados adjacentes.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Tendo os pontos médios M_j , com $1 \leq j \leq 8$, com o uso da régua, traça-se o

segmento M_jM_{j+4} (figura A.8).

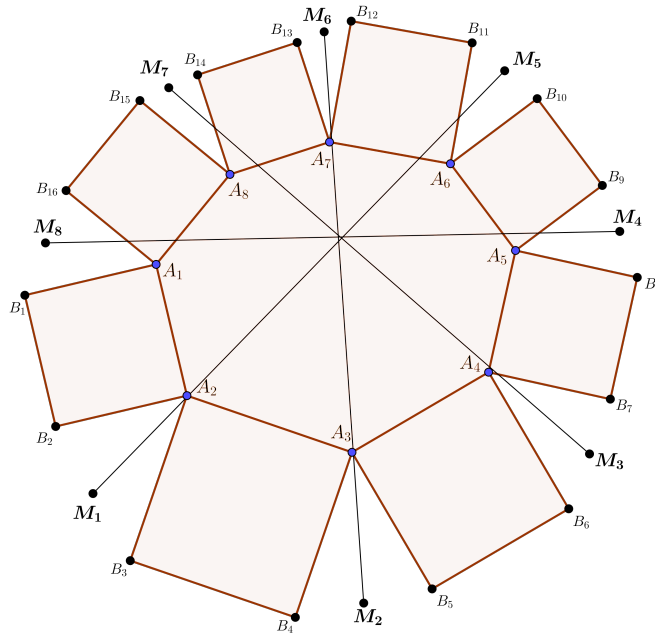


Figura A.8 – Segmentos M_jM_{j+4} .

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Etapa 4) Quadrilátero iso-ortodiagonal:

A partir da construção dos segmentos M_jM_{j+4} , traçamos o ponto médio P_k , com $1 \leq k \leq 4$, de tais segmentos conforme foi descrito na **Etapa 3)**. Com o uso da régua traçam-se os lados do quadrilátero iso-ortodiagonal de vértices P_1 , P_2 , P_3 e P_4 , com diagonais P_1P_3 e P_2P_4 (figura A.9).

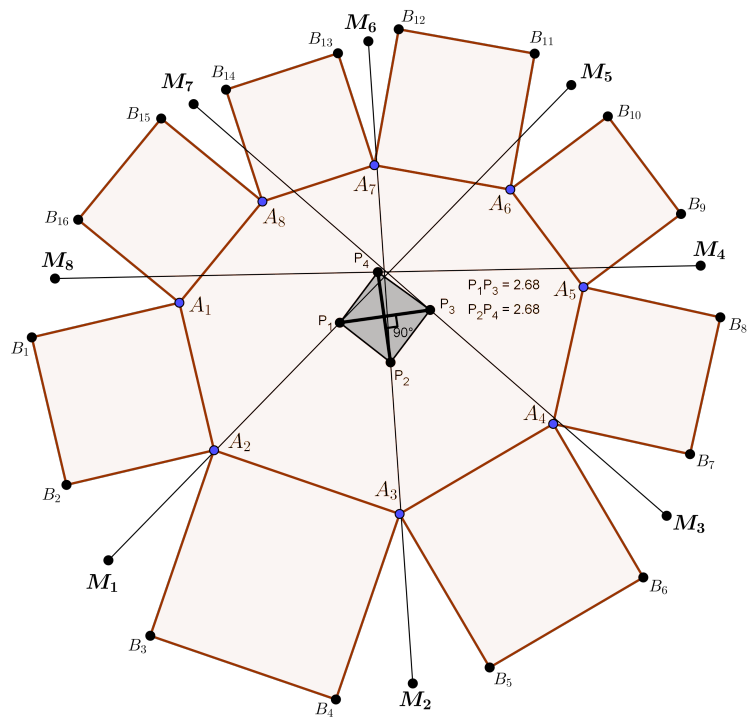


Figura A.9 – Quadrilátero iso-ortodiagonal.

Fonte: O próprio autor com o uso do *software* GeoGebra.

Na figura A.9, o quadrilátero sombreado de cinza, percebe-se que ambas diagonais P_1P_3 e P_2P_4 medem o mesmo valor, e ainda, que o ângulo formado entre elas é reto. Portanto, com essas propriedades descritas tem-se um quadrilátero chamado de **quadrilátero iso-ortodiagonal**.