



**Universidade de Brasília - UnB
Faculdade de Educação - FE
Programa de Pós-Graduação em Educação
Linha de Pesquisa: Educação em Ciências e Matemática**

TESE DE DOUTORADO

**UMA ENGENHARIA DIDÁTICA PARA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA
ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO**

Alessandra Lisboa da Silva

Brasília-DF, 23 de maio de 2019

Alessandra Lisboa da Silva

TESE DE DOUTORADO

**UMA ENGENHARIA DIDÁTICA PARA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA
ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO**

Tese de Doutorado apresentada no Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação, Universidade de Brasília – PPGE/FE/UnB, linha de pesquisa Educação em Ciências e Matemática, como requisito para a obtenção do título de Doutora em Educação, desenvolvida sob orientação do **Professor Doutor Cleyton Hércules Gontijo**.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

LL769e LISBOA , ALESSANDRA
UMA ENGENHARIA DIDÁTICA PARA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA
ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO / ALESSANDRA LISBOA ; orientador
CLEYTON HÉRCULES GONTIJO. -- Brasília, 2019.
245 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Educação) -- Universidade
de Brasília, 2019.

1. Ensino Médio. 2. Aprendizagem Colaborativa. 3.
Situação Didática. 4. Engenharia Didática. 5. Geometria
Analítica. I. HÉRCULES GONTIJO, CLEYTON, orient. II. Título.

TESE DE DOUTORADO

**UMA ENGENHARIA DIDÁTICA PARA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA
ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO**

Alessandra Lisboa da Silva

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Cleyton Hércules Gontijo - PPGE/UnB
Orientador

Prof. Dr. Carlos Alberto Lopes de Sousa - TEF/FE/UnB
Examinador Interno

Profª Dra. Regina da Silva Pina Neves - MAT/UnB
Examinador Externo

Profª Dra. Fabrícia Faleiros Pimenta - UniCEUB
Examinador Externo

Profª Dra. Otília Maria Alves da Nóbrega Alberto Dantas - MTC/FE/UnB
Suplente

Dedico esta conquista especialmente a vocês ...

*À minha mamãe Guiomar e meu papai Chiquinho; às minhas irmãs
Jeane (in memoriam), Izabela e Fernanda, amores da minha vida.*

*Aos jovens ceilandenses, meninos e meninas, participantes dos
projetos que coordenei nos últimos 12 anos, minhas eternas
estrelinhas, fonte de inspiração, emoção e motivação acadêmica.*

E ao meu eterno amor Marcos Paulo!

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a ti, meu Deus, por guiar o meu caminho, por não deixar eu desistir diante das incontáveis adversidades que surgiram ao longo do percurso de doutoramento. Gratidão pela vida, pelos obstáculos e pela força para driblá-los!

Ao meu professor e orientador, Cleyton Gontijo, que me acolheu, apoiou, acreditou em mim e, principalmente, pelos ensinamentos e respeitosa condução nas atividades de orientação. Sou muito grata e imensamente feliz em tê-lo como meu orientador!

Aos professores Carlos Lopes, Otília Dantas, Fabrícia Pimenta, Regina Pina, por aceitarem o convite para compor a banca examinadora dessa tese. Suas avaliações e contribuições importantes aperfeiçoaram meu trabalho. Agradeço também ao professor Cristiano Muniz, pela avaliação e preciosas sugestões na qualificação.

Aos professores dos Programas de Pós-Graduação da Universidade de Brasília, especialmente: Otília Dantas, Cláudia Pato, Denise Fleith, Katia Curado, Maria Abádia, pelas valiosas aprendizagens, apoio, inspirações, orientações, acolhimento e oportunidades ao longo do mestrado e do doutorado.

À minha eterna fada madrinha, Professora Teresa Cristina Siqueira Cerqueira (*in memoriam*), sempre tão carinhosa e profissional. Professora, como sinto a sua falta, a saudade dói! Em todos os momentos do doutoramento e, em especial, durante a escrita desta tese, eu lembrava de seus ensinamentos, por vezes ouvia a sua voz dizendo qual caminho eu deveria seguir e como agir. Queria muito que a senhora estivesse aqui agora, sei o quanto torceu por mim. Muito obrigada, meu anjo da guarda, pela amizade, por me inspirar a seguir adiante e principalmente pela escuta sensível.

Às flores do grupo de estudos GEMPEPEV, Kalina Lígia, Ildenice Costa, Bárbara Ghesti, Maira Franco, Ana Braúna, Stela de Miranda e Thamara Santos, pelas trocas acadêmicas e pelos momentos inesquecíveis de congressos, viagens, cafés, boas risadas e descontrações fundamentais aos laços de amizade e ao coração.

Aos amigos, amigas, familiares que torceram por mim, pela amizade presente ou distante, pelo apoio, carinho, colaborações, solidariedade, torcida e incentivo:

Núbia Jane, Lorena Maria, Marlene Mendonça, Cleia Nogueira, Cleonice Bittencourt, Walter Manguera, Daniel Castro, Wesley Silva, José Gadelha, Grazielle Aparecida, Sandrinha Viana, Fabrícia Pimenta, Regina Pina, Anaí Haeser, Andrea Lucena, Dalvirene Braga, Maria Helena Pires, Bianca Salomão.

A vocês, queridos Ivan Ranulfo e Keillinda Rosa, pelo apoio que me propiciou equilibrar meu corpo e principalmente minha mente, possibilitando escrever esta tese. Vocês foram maravilhosos, sem vocês, eu não teria conseguido.

Ao estimado Igor Magri pela tempestiva e carinhosa ajuda que me prestou sempre que precisei revisar textos e traduções. À estimada Gláucia Paloma pela gentil revisão gramatical da versão final desta tese.

Aos 22 jovens, as estrelinhas participantes deste estudo e à professora Flor. Aprendi muito com vocês, contribuíram muito para a concretização deste estudo, iluminando e dando vida à tese. Vocês foram incríveis!

Aos jovens ceilandenses, eternos olímpicos, lindezas de minha vida, fonte de inspiração. Gratidão eterna!

E claro, não poderia esquecer, muito obrigada, meus filhos de quatro patas, Frederico Augustus (*in memoriam*), Melissa, Tigre e Nino, pela fidelidade e por ficarem no meu pé, 24 horas por dia, durante toda a escrita da tese.

E por fim, e mais do que especial, ao MateMágico e amor, Marcos Paulo, você merece todos os agradecimentos do universo, sem você, literalmente, eu não estaria aqui agradecendo! Durante esta caminhada de doutoramento, você cuidou de mim e exercitou os votos de “cuidar, andar ao seu lado com mãos atadas por onde a vida nos levar, e principalmente, viver, aprender, amar”. Agradeço a ti, pelo incentivo aos meus estudos e minha vida profissional, oferecendo-me sempre apoio, carinho, colo, ajuda e estímulos nos momentos mais difíceis, doloridos, complicados e incertos.

EPÍGRAFE

Todos os dias quando acordo
Não tenho mais
O tempo que passou
Mas tenho muito tempo
Temos todo o tempo do mundo
Todos os dias
Antes de dormir
Lembro e esqueço
Como foi o dia
Sempre em frente
Não temos tempo a perder
Nosso suor sagrado
É bem mais belo
Que esse sangue amargo
E tão sério
E selvagem! Selvagem!
Selvagem!
Veja o sol
Dessa manhã tão cinza
A tempestade que chega
É da cor dos teus olhos
Castanhos
Então me abraça forte
E diz mais uma vez
Que já estamos
Distantes de tudo
Temos nosso próprio tempo
Temos nosso próprio tempo
Temos nosso próprio tempo
Não tenho medo do escuro
Mas deixe as luzes
Acesas agora
O que foi escondido
É o que se escondeu
E o que foi prometido
Ninguém prometeu
Nem foi tempo perdido
Somos tão jovens
Tão jovens! Tão jovens!

"Tempo Perdido" - Legião Urbana

Composição: Renato Russo
© EMI - Universal Music

"Urbana Legio omnia vincit"

RESUMO

A geometria analítica é um ramo importante da Matemática, serve de instrumento para outras áreas do conhecimento, e, quando aprendida, precisa estar conectada à realidade. No entanto, ao ser trabalhada nas diversas etapas de escolarização, a geometria tem apresentado problemas, tanto no seu ensino quanto na sua aprendizagem, um exemplo é a dificuldade de assimilação dos conceitos de geometria analítica por parte dos estudantes do 3º ano do ensino médio. Espera-se que a escola de Ensino Médio oportunize às juventudes, experiências de ensino que lhes garantam as aprendizagens necessárias para a leitura da realidade, permitindo-lhes definir seu projeto de vida. Esta escola precisa ter um ambiente motivacional, inovador, inclusivo, que torne o ensinar e o aprender mais atraente, que promova a aprendizagem colaborativa, desenvolvendo nos estudantes a habilidade de trabalharem em grupo, em consonância com as novas reivindicações da sociedade produtiva e do conhecimento. A partir dessa perspectiva, a presente tese teve como objetivo analisar os resultados de uma sequência didática que envolve um jogo colaborativo de geometria analítica, nos processos de aprendizagem do estudo do ponto e da reta para os estudantes do 3º ano do ensino médio. Trata-se de uma pesquisa que teve como trilha teórica pressupostos da aprendizagem colaborativa, dos pequenos grupos colaborativos, do jogo e da influência francesa da “Didática da Matemática”, à luz da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008). Esta investigação, de natureza qualitativa, constituiu-se em um estudo de caso e pesquisa participante que analisou as potencialidades de uma sequência didática em forma de jogo, desenvolvida em pequenos grupos colaborativos, a partir das interações dialógicas estabelecidas entre os sujeitos da pesquisa, relacionadas à aprendizagem dos conceitos matemáticos propostos de Geometria Analítica. Esta sequência foi aplicada aos estudantes de 7 turmas de 3º ano do Ensino Médio, de uma escola pública do Distrito Federal. Como metodologia de pesquisa e análise dos dados, utilizamos a Engenharia Didática de Artigue (1996), com a realização das fases constituintes do método. Preceitos da análise de conteúdo de Bardin (2010) foram utilizados para complementar as análises dos dados, com processo de categorização emergente-misto. Esta investigação adotou diferentes técnicas e instrumentos de construção dos dados. Os resultados do estudo sinalizam que o desenvolvimento de sequências didáticas contextualizadas, atividades ludo-didáticas e utilização de materiais concretos, estimula a aprendizagem colaborativa, possibilitando a interação dialógica entre os estudantes do ensino médio, favorecendo a autonomia intelectual e a aprendizagem do estudo do ponto e da reta. O estudo também revelou que a Engenharia Didática forneceu subsídios importantes para a organização didática e análises do processo de consolidação, ampliação e aprofundamento de conceitos matemáticos.

Palavras-chave: Ensino Médio. Aprendizagem Colaborativa. Situação Didática. Engenharia Didática. Geometria Analítica.

ABSTRACT

Analytic geometry is an important branch of Mathematics, used as a tool in other knowledge areas, in which during its learning process needs to be connected to reality. However, as geometry is taught in the many levels of education, it has shown problems both in its teaching and learning, an example is the difficulty of the assimilation of concepts of analytic geometry by third-year high school students. One of the objectives of high schools is that it gives opportunities for youth, educational experiences that ensure the proper learning for the assessment of reality, enabling them to define their life plans. This school needs to be a motivational, innovating, and inclusive environment in which learning and teaching are more appealing, thus promoting collaborative learning, with the results of students being able to develop skills for working in groups, accordingly to the new demands of the productive and knowledge society. From this perspective, this thesis holds as objective to analyze the results of a didactic sequence that engages in a collaborative game of analytic geometry, focusing in the learning processes of the study of the point and the line for students of the third year of high school. This research bears theoretical arguments based on the premises of the collaborative learning, small collaborative groups, games and the French influence of the "Didactic of Mathematics", under the Theory of Didactical Situations from Brousseau (2008). The qualitative nature of the study was rooted in a case study and in a participatory research that analyzed the potentialities of a didactic sequence in the form of a game, based in small collaborative groups, under the dialogical interactions established between the research subjects, related with the learning of the suggested mathematical concepts of analytic geometry. In total, 7 classes of the third year of a public high school from the Federal District, Brazil, experienced this sequence. As research methodology and data analysis, we used the Didactic Engineering from Artigue (1996), realizing the constituent phases of the method. Additionally, we used the principles from the content analysis from Bardin (2010) in order to enrich the data analysis, based on the emerging-mixed categorization process. In this research, we adopted different tools and techniques for the data building. The results indicate that the development of contextualized didactic sequences, ludo-didactic activities, and the use of tangible materials stimulate the collaborative learning which allows the dialogical interaction between the high school students, fostering the intellectual autonomy and the learning of the point and the line. Furthermore, the study also points out that the Didactical Engineering supplied with important subsidies for the didactical organization and the analysis of the process of consolidation, broadening and deepening of the mathematical concepts.

Keywords: High School. Collaborative Learning. Didactical Situation. Didactical Engineering. Analytic Geometry.

RIASSUNTO ANALITICO

La geometria analitica è un ramo importante della matematica, funge da strumento per altre aree della conoscenza e, una volta appresa, deve essere collegata alla realtà. Tuttavia, la geometria, quando si lavora nelle varie fasi della scuola, ha presentato problemi sia nel suo insegnamento che nel suo apprendimento, un esempio è la difficoltà dell'assimilazione dei concetti della geometria analitica da parte degli studenti del terzo anno di scuola liceo. È atteso che il liceo fornisca ai giovani esperienze di insegnamento che garantiranno loro l'apprendimento necessario per leggere la realtà, consentendo loro di definire il loro progetto di vita. Questa scuola ha bisogno di avere un ambiente motivazionale, innovativo e inclusivo che renda l'insegnamento e l'apprendimento più attraenti, promuovendo l'apprendimento collaborativo, sviluppando negli studenti la capacità di lavorare in gruppo, in linea con le nuove esigenze della società produttiva e della conoscenza. Da questa prospettiva, questa tesi mira ad analizzare i risultati di una sequenza didattica che prevede un gioco collaborativo di geometria analitica, nei processi di sapere dello studio del punto e della linea dritta per gli studenti del 3° anno dell'insegnamento di mezzo. Si tratta di una ricerca che aveva come percorso teorico presupposto l'apprendimento collaborativo, i piccoli gruppi collaborativi, il gioco e l'influenza francese della "Didattica della matematica", alla luce della Teoria delle Situazioni Didattiche di Brousseau (2008). Questa ricerca qualitativa consisteva in un caso di studio e una ricerca partecipante che analizzava le potenzialità di una sequenza didattica in forma di gioco, sviluppata in piccoli gruppi collaborativi, basata sulle interazioni dialogiche stabilite tra le materie di ricerca, relative all'apprendimento dei concetti matematici proposti di Geometria analitica. Questa sequenza è stata applicata agli studenti di 7 classi del 3° anno dell'Insegnamento di Mezzo, di una scuola pubblica del Distretto Federale, Brasile. Come metodologia di ricerca e l'analisi dei dati, abbiamo utilizzato l'Ingegneria Didattica di Artigue (1996), con la realizzazione delle fasi costitutive del metodo. I precetti dell'analisi del contenuto di Bardin (2010) sono stati utilizzati per integrare le analisi dei dati, con il processo di categorizzazione emergente mescolato. Questa ricerca ha adottato diverse tecniche e strumenti di costruzione dei dati. I risultati di questo studio indicano che lo sviluppo di sequenze didattiche contestualizzate, attività ludodidattica e l'uso di materiali concreti stimola l'apprendimento collaborativo, consentendo l'interazione dialogica tra studenti del mezzo insegnare, favorendo l'autonomia intellettuale e imparando lo studio del punto e della linea dritta. Lo studio ha anche rivelato che l'ingegneria didattica ha fornito importanti sussidi per l'organizzazione didattica e l'analisi del processo di consolidamento, dell'ingrandimento e dell'approfondimento di concetti matematici.

Parole chiave: Insegnamento di mezzo. Apprendimento collaborativo. Situazione didattica. Ingegneria didattica. Geometria Analitica.

LISTA DE SIGLAS E ABREVIações

ARTEDUCA	–	Arte, Educação e Tecnologias Contemporâneas
BCE	–	Biblioteca Central da UnB
BNCC	–	Base Nacional Comum Curricular
CEAD	–	Centro de Educação a Distância
CEP/CHS	–	Comitê de Ética em Pesquisa/Instituto de Ciências Humanas
COREM	–	Centro de Observação e Pesquisa no Ensino de Matemática
EAD	–	Educação a Distância
EJA	–	Educação de Jovens e Adultos
ENEM	–	Exame Nacional de Ensino Médio
ESCS	–	Escola Superior de Ciências da Saúde
FE	–	Faculdade de Educação
ICC	–	Instituto Central de Ciências
IDA	–	Instituto de Artes da Universidade de Brasília
IDEB	–	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
IFB	–	Instituto Federal de Brasília
IME	–	Instituto Militar de Engenharia
IMPA	–	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
INMET	–	Instituto Nacional de Meteorologia
IREM	–	Institutos de Investigação acerca do Ensino das Matemáticas
MTD	–	Matemática Todo Dia
OBMEP	–	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OBR	–	Olimpíada Brasileira de Robótica
OCDE	–	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PAS	–	Programa de Avaliação Seriada
PAT	–	Pavilhão Anísio Teixeira
PCN	–	Parâmetros Curriculares Nacionais
PEL	–	Programa Especial de Formação Pedagógica
PIC	–	Programa de Iniciação Científica
PISA	–	<i>Programme for International Student Assessment</i>
PJC	–	Pavilhão João Calmon
PNLD	–	Programa Nacional do Livro Didático
PRODEQUI	–	Programa de Estudos e Atenção as Dependências Químicas
PROIC	–	Programa de Iniciação Científica – Ensino Médio
REI	–	Reitoria da UnB
RU	–	Restaurante Universitário
SBEM-DF	–	Sociedade Brasileira de Matemática – DF
SBPC	–	Sociedade Brasileira Para o Progresso da Ciência
SINASE	–	Sistema Nacional de Atendimento Social
TCLE	–	Termo e Consentimento Livre e Esclarecido
UFMA	–	Universidade Federal do Maranhão
UnB	–	Universidade de Brasília
UnICEUB	–	Centro Universitário de Brasília

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representação do Pequeno Grupo Colaborativo	74
Figura 2 - Principais Diferenças entre a Cooperação e a Colaboração	79
Figura 3 - Competências específicas de Matemática segundo a BNCC 2018	82
Figura 4 - Enunciado da Atividade “Conhecendo a Universidade de Brasília”	92
Figura 5 - Material Concreto Tapete Cartesiano	93
Figura 6 - Definição dos sujeitos da pesquisa.....	106
Figura 7 - Kit recebido pelo grupo para o jogo UnB 360 graus	114
Figura 8 - Definição dos sujeitos da pesquisa.....	116
Figura 9 - Acontecimentos históricos e ensino de Geometria no Brasil.....	118
Figura 10 - Turmas participando da atividade com quase todos estudantes presentes	143
Figura 11 - Exemplo de cartão número 1	146
Figura 12 - Institucionalização com <i>Plickers</i>	147
Figura 13 - Construção do plano cartesiano	158
Figura 14 - Dimensionamento e graduação do plano cartesiano.....	160
Figura 15 - Posicionamento dos pares ordenados no plano cartesiano	162
Figura 16 - Identificação dos pares ordenados nos quadrantes do plano cartesiano	164
Figura 17 - Identificação das retas e semirretas com notação matemática	166
Figura 18 - Identificação das retas e semirretas	166
Figura 19 - Cálculo dos catetos do triângulo retângulo escolhido.....	168
Figura 20 - Identificação do triângulo OGN e cálculo dos seus catetos.....	169
Figura 21 - Cálculo da hipotenusa do triângulo OGN e estimativa da raiz quadrada	171
Figura 22 - Posicionamento do ICC no tapete cartesiano.....	174
Figura 23 - Localização e posicionamento do RU.....	176
Figura 24 - Distância entre a FE1, FE3 e FE5	178
Figura 25 - Distância entre PAT e RU e paralelismo	181
Figura 26 - Equação da reta que passa pela Reitoria e Biblioteca	183
Figura 27 - Distância percorrida entre a Reitoria, a Biblioteca e o Restaurante Universitário	184
Figura 28 - Alinhamento entre as edificações e a equação da reta – Estrela Alnitak	185
Figura 29 - Alinhamento entre as edificações e a equação da reta – Estrela Betelguese	186
Figura 30 - Distância entre FE1 e Reitoria	187
Figura 31 - Nuvem de palavras com a visão geral dos estudantes	208

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Estratégias usadas para construir o plano cartesiano.....	157
Gráfico 2 - Estratégias usadas para dimensionar o plano cartesiano.....	159
Gráfico 3 - Estratégias usadas para calcular a hipotenusa do triângulo dos pontos OGN	170
Gráfico 4 - Estratégias usadas para calcular a distância entre os prédios da FE...	177
Gráfico 5 - Estratégias usadas para calcular a distância entre as edificações	180
Gráfico 6 - Estratégias usadas para identificar as retas paralelas.....	180

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Categorização dos trabalhos em objeto investigado	43
Quadro 2 - Identificação de dissertações e teses encontradas no banco de dados da BDTD: Engenharia Didática como metodologia.....	44
Quadro 3 - Identificação de dissertações e teses encontradas no banco de dados da BDTD: Engenharia Didática como proposta didática e metodologia	47
Quadro 4 - Principais diferenças e semelhanças entre as aprendizagens cooperativa e colaborativa	77
Quadro 5 - Competências específicas relacionadas à unidade temática Geometria para o Ensino Fundamental segundo a BNCC 2018	85
Quadro 6 - Competências específicas da área de Matemática do Ensino Médio segundo a BNCC 2018	87
Quadro 7 - Turmas e datas da 3ª Fase da Engenharia Didática	136
Quadro 8 - Recorrências de soluções da atividade 1	156
Quadro 9 - Recorrências de soluções da atividade 2	159
Quadro 10 - Recorrências de soluções da atividade 3	161
Quadro 11 - Recorrências de soluções das atividades 4 e 5.....	163
Quadro 12 - Recorrências de soluções das atividades 6 e 7.....	164
Quadro 13 - Recorrências de soluções da atividade 8	166
Quadro 14 - Recorrências de soluções da atividade 9	168
Quadro 15 - Recorrências de soluções da atividade 10	169
Quadro 16 - Recorrências de estratégias para posicionar o ICC.....	172
Quadro 17 - Recorrências de estratégias para posicionar o RU.....	174
Quadro 18 - Recorrências de estratégias para cálculo da distância entre as edificações FE1, FE3 E FE5	176
Quadro 19 - Recorrências de estratégia para o cálculo da distância entre as edificações PAT e RU, e para demonstrar o paralelismo entre retas	179
Quadro 20 - Recorrências de estratégias para encontrar a equação da reta que passa pela REI e a BCE e cálculo da distância percorrida	182
Quadro 21 - Recorrências de estratégias para verificar o alinhamento entre o PAT, a FE1 e o RU.....	184
Quadro 22 - Recorrências de estratégias para calcular a distância entre a FE1 e a Reitoria da UnB	186
Quadro 23 - Categoria Aprendizagem dos conteúdos	192
Quadro 24 - Categoria Colaboração	194
Quadro 25 - Categoria Autonomia intelectual	198
Quadro 26 - Categoria Dimensões de ludicidade	200
Quadro 27 - Categoria Socialização dos estudantes	203
Quadro 28 - Categoria Liberdade estudantil	205

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO.....	18
MEU ENCONTRO COM OBJETO DE PESQUISA.....	21
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA	31
1.1 - O CENÁRIO BRASILEIRO: recorte das avaliações em Matemática	33
1.2 - PROBLEMÁTICA E OBJETIVOS	37
1.3 - O ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO: as produções científicas nos cursos de pós-graduação das universidades brasileiras (2008-2018)	41
CAPÍTULO 2 - REFERENCIAL TEÓRICO.....	53
2.1 - DIALOGANDO COM BROUSSEAU	53
2.2 - A ENGENHARIA DIDÁTICA.....	60
2.3 - LUDICIDADE: O JOGO, O BRINQUEDO E A BRINCADEIRA	64
2.4 - A APRENDIZAGEM COLABORATIVA.....	71
2.5 - A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, O ENSINO DE GEOMETRIA E PRESSUPOSTOS DA BNCC 2018	79
CAPÍTULO 3 - MÉTODO	89
3.1 - DELINEAMENTO	89
3.2 - ESTUDO PILOTO.....	90
3.3 - PARTICIPANTES E <i>LÓCUS</i> DA INVESTIGAÇÃO	104
3.4 - PROCEDIMENTOS DA PESQUISA.....	107
3.5 - DESCRIÇÃO DOS INSTRUMENTOS PARA CONSTRUÇÃO DE DADOS	109
CAPÍTULO 4 - APLICAÇÃO DO PROJETO DE ENGENHARIA DIDÁTICA.....	116
4.1 - DOS ESTUDOS PRELIMINARES	117
4.2 - DA CONCEPÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA E ANÁLISE <i>A PRIORI</i>	121
4.3 - A EXPERIMENTAÇÃO DO PROJETO DE ENGENHARIA.....	134
4.4 - ANÁLISE <i>A POSTERIORI</i>	155
CAPÍTULO 5 - A ANÁLISE DE CONTEÚDO E RESULTADOS	189
5.1 - AS PERCEPÇÕES DOS SUJEITOS DA PESQUISA: análise de conteúdo.	190
5.2 - AS PERCEPÇÕES DOS SUJEITOS DA PESQUISA: outras inferências... ..	209
CAPÍTULO 6. - DISCUSSÃO, CONCLUSÕES E IMPLICAÇÕES.....	214
CONSIDERAÇÕES FINAIS	223
REFERÊNCIAS	227

APÊNDICE 1 – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE.....	237
APÊNDICE 2 – TERMO DE ASSENTIMENTO.....	239
APÊNDICE 3 – DIÁRIO DA PESQUISADORA.....	241
APÊNDICE 4 – ROTEIRO DA ATIVIDADE DO ESTUDO PILOTO	242
APÊNDICE 5 – RESULTADO DA INSTITUCIONALIZAÇÃO COM O <i>PLICKERS</i> .	244
APÊNDICE 6 – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE ESCLARECIDO PARA A PROFESSORA – TCLE PROFESSORA	245

APRESENTAÇÃO

*“Nós continuamos seguindo em frente,
abrindo novas portas e fazendo coisas novas,
porque somos curiosos e a curiosidade
continua nos conduzindo por novos caminhos.
Estamos sempre a explorar e experimentar.
Sigamos em frente!”*
(Walt Disney)

Nesta tese, apresenta-se uma pesquisa de natureza qualitativa na perspectiva de analisar os resultados de uma sequência didática que envolve um jogo colaborativo de Geometria Analítica, nos processos de aprendizagem do estudo do ponto e da reta para os estudantes do 3º ano do ensino médio em uma escola pública do Distrito Federal.

A Geometria Analítica é reconhecida como um dos componentes curriculares da educação básica, fundamental e relevante na vida do estudante enquanto cidadão. Nos estudos de geometria, temos a possibilidade de estabelecer conexões entre os conceitos da geometria básica e os processos algébricos. Ao buscar soluções para as situações-problemas propostas pelo professor em sala de aula, o estudante deve ser encorajado a experimentar estratégias diversificadas de resolução. Desta maneira, ao se deparar com situações corriqueiras, o estudante poderá aplicar os conhecimentos obtidos e propor soluções, o que pode vir a estimular o desenvolvimento da criatividade.

A investigação do ensino e da aprendizagem da Matemática na Educação Básica tem contemplado questões fundamentais da pesquisa em Educação Matemática. Um exemplo disso são as pesquisas que têm sido desenvolvidas com ênfase na Geometria Analítica, que apresentam a Engenharia Didática enquanto metodologia de pesquisa ou proposta didática (GOULART, 2009; SILVA, 2014; LOPES, 2014; HALBERSTADT, 2015 E CAVALCANTE, 2017).

A propósito, sobre a Educação Matemática, cabe ressaltar que é uma área do conhecimento ainda muito jovem, cujo objetivo é discutir os fatores envolvidos no processo de ensino e a aprendizagem da matemática. Fiorentini (2009, p. 4) defende que compete ao educador matemático realizar seus estudos “utilizando métodos interpretativos e analíticos das ciências sociais ou humanas, tendo como perspectiva

o desenvolvimento de conhecimentos e práticas pedagógicas” que colaborem para a formação mais humana, integral e crítica do estudante e do professor.

Este estudo foi submetido ao Comitê de Ética em Pesquisa do Instituto de Ciências Humanas da Universidade de Brasília, conforme orientado pela Resolução CNS 466/2012 e 510/2016. Após aprovação, procedeu-se à construção das informações empíricas para o desenvolvimento desta investigação.

Considero importante justificar o porquê dessa tese estar sendo escrita na primeira pessoa singular e do plural, e do singular simultaneamente. Embora o exercício de escrita tenha sido individual, todo o trabalho foi orientado e, por isso, produzido a mais de duas mãos. Ademais, os dados foram construídos em colaboração que incluiu a professora-pesquisadora, o orientador da investigação, a professora das turmas investigadas, os integrantes do grupo colaborativo de trabalho e os 228 estudantes, que colaboraram direta ou indiretamente com a pesquisa participante e a pesquisa de campo propriamente dita. Desse modo, somente quando for absolutamente necessário, utilizaremos a primeira pessoa do singular.

Iniciamos a tese com a apresentação do meu encontro com o objeto de pesquisa. Esclarecemos que a tese está estruturada em capítulos.

No Capítulo 1 é apresentada a introdução, justificativa, problemática, objetivos da investigação e as produções científicas nos cursos de pós-graduação das universidades brasileiras (2008-2018).

No Capítulo 2 expõe-se o referencial teórico. Este capítulo é subdividido em cinco partes: 1) Dialogando com Brousseau, 2) A Engenharia Didática, 3) Ludicidade: o jogo, o brinquedo e a brincadeira, 4) A Aprendizagem Colaborativa e 5) A Educação Matemática, o Ensino de Geometria e os Pressupostos da BNCC 2018.

No Capítulo 3, apresentamos o método e seu delineamento, o estudo piloto, os participantes e o lócus da investigação, os procedimentos da pesquisa e a descrição dos instrumentos para construção de dados.

O Capítulo 4 é todo destinado à Engenharia Didática, a aplicação do projeto de engenharia, os estudos preliminares, a concepção das sequências didática e análise *a priori*, a experimentação do projeto de engenharia e a análise *a posteriori*. É neste capítulo que descreveremos o material didático em formato de jogo tapete cartesiano.

No Capítulo 5 apresentaremos outras análises e resultados, decorrentes das percepções dos sujeitos da pesquisa. É neste capítulo que demonstraremos a análise de conteúdo e listaremos as categorias de análises deste estudo.

O Capítulo 6 é destinado à discussão, principais conclusões deste estudo, implicações e sugestões para futuras pesquisas.

E, por fim, apresentaremos as considerações finais desta tese.

MEU ENCONTRO COM OBJETO DE PESQUISA

*“Recria tua vida, sempre, sempre.
Remove pedras e planta roseiras e faz doces. Recomeça”.*
(Cora Coralina)

Torna-se importante apresentar a historicidade do meu encontro com o objeto de pesquisa. Por conseguinte, busca-se situar como a educação matemática e preocupações acerca do ensino e da aprendizagem da matemática, estiveram presentes em minha trilha educativa, profissional e investigativa.

No ano de 1996, fui aprovada em um concurso da Secretaria de Educação do Distrito Federal para o cargo de Especialista em Educação. Em 1997, eu me graduei pela primeira vez: Administradora. Àquela época, questões que envolviam a aplicação de conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, ser proativa “para identificar os dados de uma situação e buscar soluções” (BNCC, 2018, p. 14), inquietavam-me. O tema da minha monografia da graduação em Administração? “Em busca da eficácia educacional”.

A primeira escola em que trabalhei era, justamente, a primeira escola que estudei, na cidade satélite de Ceilândia, Brasília, Distrito Federal. Após 4 anos, aceitei o desafio da mudança e resolvi trabalhar em outras escolas da mesma cidade. Durante 10 anos consecutivos, atuei em cargos das equipes gestoras das direções das escolas que trabalhei. Em 2003, voltei a estudar, pois sentia a necessidade e o desejo de cursar licenciatura. Então, participei do Programa Especial de Formação Pedagógica (PEL), do Centro Universitário de Brasília (UniCEUB), e assim conquistei a segunda graduação: Licenciatura em Matemática.

No começo de 2005, navegando pela *Internet*, encontrei informações sobre o curso de pós-graduação *lato sensu* Arte, Educação e Tecnologias Contemporâneas (ARTEDUCA), promovido pelo Instituto de Artes (IDA) da Universidade de Brasília (UnB). Achei muito interessante a proposta de planejamento e implementação de projetos interdisciplinares e a possibilidade de estudar com pessoas de todo o Brasil, bem como a participação em uma rede de aprendizagem colaborativa. Então, foi o ponto de partida de algo que não havia imaginado fazer: um curso de pós-graduação a distância, em um ambiente colaborativo, com tecnologias contemporâneas e interdisciplinaridade.

Assim que conclui o ARTEDUCA, em 2006, tomei uma decisão: quero ser professora da UnB, em cursos a distância da Universidade de Brasília. Nesse mesmo ano foram abertos dois processos seletivos para professores de cursos de Educação a Distância (EAD) da UnB: um curso de extensão para 25 mil professores de todo o Brasil, intitulado “Africanidades Brasil”, e outro para o curso piloto de graduação em Administração a distância da UnB. Fui aprovada nos dois processos e assim, em 2006, começava a minha trajetória que dura até os dias atuais: professora e orientadora de cursos da modalidade EAD da Universidade de Brasília.

Em 2007, na UnB, fui convidada para assumir outro grande desafio: ser professora de turmas do Acre do curso piloto de Administração a distância da UnB. A proposta pedagógica seguia preceitos da aprendizagem colaborativa e foi paixão ao primeiro *click*. Atuei como professora em dezenas de disciplinas do curso de Administração EAD/UnB. Ali tive o privilégio de, ao mesmo tempo, ensinar e aprender com os alunos, assim como promover a inclusão digital.

Para alguns alunos deste curso, ali era o primeiro contato com o computador. Paralelamente atuei como professora em outros cursos de graduação: Pedagogia, Geografia e Artes Visuais. Além disso, fui professora formadora de professores tutores do Centro de Educação a Distância (CEAD/UnB) e professora em outros tantos cursos de extensão, formação inicial, formação continuada e especialização, todos da Universidade de Brasília.

Dando continuidade à minha carreira na Secretaria de Educação do DF, assumi em 2007 o cargo de supervisora administrativa na equipe gestora da escola que cursei o meu ensino médio, e foi aí que comecei a olhar para a escola pública de maneira diferente. Eu não lançava somente o olhar administrativo, o pedagógico realmente me inquietava muito. Observava os estudantes do ensino médio e relembrava de quando eu era aluna e tinha vontade de conquistar o mundo, mas não recebia nenhuma orientação educacional, pouquíssimo incentivo, nenhum direcionamento.

Eu sempre gostei muito da Matemática e, por vezes, tentava entender o porquê de tantos estudantes terem pavor por esta disciplina. Acredito que um dos fatores tem relação com o significado do saber matemático escolar. Sobre isso, concordo com Freitas (2016) ao ressaltar que o estudante é fortemente influenciado pela maneira didática pela qual os conteúdos matemáticos são apresentados. Mas acredito que a paixão pela Educação Matemática, que o meu esposo sentia,

contagiou-me (carinhosamente o chamo de “MateMágico”). Ele cursava licenciatura em Matemática na UnB e lecionava em uma escola militar do Distrito Federal e, à época, sua escola participava da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

Mesmo percebendo que vários estudantes e colegas professores da minha escola nutriam a vontade de participar da OBMEP, não havia mobilizações e incentivos para a participação da escola. Então pensei: vou motivar os alunos e fazer a inscrição da escola na OBMEP. Contudo, refleti que melhor seria se os alunos pudessem ter aulas preparatórias para a olimpíada, mas como? Quem iria ministrar essas aulas? E foi então que levei essas inquietações ao meu lar e ao conversar com o “MateMágico”, surgiu a ideia de criar o ‘Projeto Matemática Todo Dia’, o MTD, que inicialmente objetivava apenas preparar os estudantes das três séries do ensino médio para a OBMEP.

Assim sendo, eu virei a coordenadora olímpica do projeto “MTD” e o “MateMágico”, o professor olímpico. Naquele tempo, eu não imaginava como um projeto educativo que era voluntário iria transformar vidas, inclusive as nossas. Para além das premiações olímpicas, percebi que o projeto preparava os estudantes para outros desafios, como para o ingresso nas universidades públicas, participação em projetos de iniciação científica na UnB, concursos públicos, para a tomada de decisões, para trabalhar em grupos colaborativos e para a vida.

No ano de 2008, participamos do I Simpósio Internacional do Ensino de Matemática, na Universidade Federal da Bahia e foi lá que ocorreu o primeiro contato com “jogos lúdicos”, “brinquedos inteligentes”. E foi assim que no mesmo ano introduzimos jogos lúdicos e atividades lúdicas nas aulas do Projeto Matemática Todo Dia. Em 2009, o encantamento por olimpíadas científicas cresceu na escola e então mobilizei estudantes para outros desafios educativos: Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica e Olimpíada Brasileira de Robótica. Logo no primeiro ano de participações nas duas novas olimpíadas, alguns alunos conquistaram premiações nacionais e vários foram aprovados no vestibular tradicional e no programa de avaliação seriada da UnB. Foi também em 2009 que tivemos o nosso primeiro monitor olímpico, um aluno do projeto Matemática Todo Dia, do 3º ano do Ensino Médio, que compartilhava conhecimentos e lecionava para os demais colegas do projeto.

Em 2009, decidi cursar uma disciplina do Programa de Pós-Graduação em Educação da UnB como aluna especial, e confesso que me encantei com a Faculdade

de Educação, pois lá consegui compreender parte do que faltava à minha prática docente, *EAD* e presencial. Ao longo das aulas de “Aprendizagem Colaborativa Online”, tive contato com uma teoria que respaldava a minha prática e fiquei emocionada ao comprovar que os meus desafios e inquietações docentes tinham fundamentos.

De administradora à professora, atuar em contextos educativos não me distanciou da minha formação inicial, compreendo que as duas ciências dialogam. Ações, conceitos e práticas do campo da Administração, como planejamento, gerenciamento, gestão, articulam-se e são extremamente importantes à formação do educador. E tempos depois, concluí a última graduação, Licenciatura em Pedagogia, completei assim minha tríade formativa em prol da Educação (Administração, Matemática e Pedagogia).

Desse modo, motivada por toda a minha trajetória educativa e profissional, em 2011, ingressei no mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Brasília, linha de pesquisa em Educação, Tecnologias e Comunicação, eixo de interesse aprendizagem colaborativa *online*, e assim iniciava a minha trajetória como investigadora acadêmica.

No mesmo ano em que eu ingressava no mestrado, eu planejei e criei mais um projeto educativo para as demais olimpíadas científicas e do conhecimento: o Projeto Olimpíadas “Escola de Talentos”. A escola foi transformada com as participações e conquistas dos estudantes nas mais de 10 olimpíadas científicas (Astronomia, Foguetes, Robótica, Geografia, Física, Química, História, Filosofia, Matemática, Oceanografia e outras) e logo os próprios alunos começaram a chamá-la de “Escola de Talentos”. E eu, sentia uma felicidade enorme em contribuir com a comunidade ceilandense que me adotou como filha e realmente, assim como elencado no Artigo 205 da Constituição Brasileira, eu reconheço a Educação como direito fundamental compartilhado entre o Estado, a família e a sociedade (BRASIL, 1988).

Simultaneamente à etapa acadêmica do mestrado, continuei a atuar como professora no curso de Pedagogia da Universidade Aberta do Brasil da UnB, em outros cursos de extensão e de especialização da Universidade de Brasília. Considero que a experiência em cursos, como o de formadores atuantes com medidas socioeducativas do Sistema Nacional de Atendimento Socioeducativo (SINASE), de formação de educadores para prevenção ao uso de drogas do Programa de Estudos

e Atenção às Dependências Químicas (PRODEQUI), e Especialização em Desenvolvimento Humano, Educação e Inclusão Escolar, contribuíram bastante para a minha formação enquanto educadora em contextos EAD e presenciais. São 13 anos atuando como professora em cursos a distância da Universidade de Brasília.

Também em 2011, motivei e formei um grupo que intitulei anos depois de “Rede Solidária Educativa”, composta por jovens voluntários que atuavam na preparação dos estudantes do ensino médio para as olimpíadas científicas. Eu organizava os cronogramas, fazia o planejamento das aulas a serem ministradas, estudava os editais e provas das olimpíadas para definir quais conteúdos eram mais relevantes para que os estudantes construíssem aprendizagens afinadas às suas necessidades, às possibilidades e interesses.

No planejamento das aulas, a interdisciplinaridade era o preceito a ser seguido, a Matemática era a protagonista neste movimento interdisciplinar, bem como o planejamento e desenvolvimento de sequências didáticas, no qual a ludicidade e atividades realizadas em grupos colaborativos eram bastante privilegiadas. Além disso, procurei respeitar o protagonismo dos estudantes em suas aprendizagens (BRASIL, 2018), que por vezes, indicavam quais conteúdos de diferentes disciplinas eram importantes ao seu processo de formação e preparação educativa.

Cabe ressaltar que os jovens voluntários do projeto olímpico eram estudantes universitários, quase todos da UnB, egressos do Projeto Matemática Todo Dia, e que retornavam agora à sua escola de ensino médio, com o espírito colaborativo, de voluntariado, de solidariedade, para ajudar na preparação e despertar novos jovens olímpicos, talentos para o Brasil e Mundo.

Com o passar dos anos, os próprios estudantes da escola sentiram vontade de ministrar aulas e me procuraram com uma bela proposta: formar uma equipe de monitores olímpicos. Os monitores eram estudantes do ensino médio que tinham facilidade em determinado conteúdo curricular e ministravam aulas para os demais colegas em diversas áreas do conhecimento. Conseguimos, assim, mostrar a importância de ações solidárias. O projeto despertou nos jovens do ensino médio, um sentimento de querer dividir o conhecimento com outros estudantes, em uma verdadeira rede solidária colaborativa, assim, solidificar uma das finalidades do Ensino Médio em consonância com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC 2018, p. 466): “o aprimoramento do educando como pessoa humana”.

Com isso tornei-me também a coordenadora dos voluntários e monitores olímpicos, um grupo de aproximadamente 20 jovens universitários e 10 estudantes do ensino médio, motivados, despertados para a docência e voluntariado. As aulas dos diversos conteúdos programáticos das olimpíadas, tinham sempre como premissa o diálogo com a Matemática, sua aplicação à realidade, com espaço para a ludicidade e criatividade. E assim criei em 2015 o grupo de estudos colaborativos “MTD estudos e pesquisas educacionais”.

Durante o mestrado, aprendi muito em cada disciplina que cursei, todas foram importantes à minha formação. Não fiquei apenas restrita às disciplinas do meu eixo de pesquisa, busquei outras disciplinas como a Abordagem Metodológica Transdisciplinar, que ampliou a minha visão para novos conhecimentos, metodologias, principalmente relacionada à epistemologia qualitativa e subjetividade. Na primeira disciplina que cursei, Pesquisa em Educação, aprendi que nossas ações profissionais eram campos férteis de pesquisa, e levei muito a sério aquela fala. Nesse período pude participar de vários eventos científicos, congressos, simpósios nacionais e internacionais, no Brasil e em Portugal, sempre apresentando comunicações científicas.

No início de 2013, concluí o mestrado, no entanto, em nenhum momento, eu pensei em me desligar do campo das pesquisas. Continuei investigando e escrevendo trabalhos científicos relacionados à aprendizagem colaborativa, à Educação Matemática, aos projetos olímpicos, à ludicidade em sala de aula, ao uso das redes sociais na educação e recortes da minha dissertação de mestrado.

No início do mesmo ano, vi o edital do Programa de Iniciação Científica – Ensino Médio da UnB (PIC-EM/UnB) e inscrevi a “escola de talentos”. Naquele primeiro momento, foram selecionados 13 estudantes do Ensino Médio, para atuarem como jovens pesquisadores em projetos de pesquisas das 3 grandes áreas: Vida, Humanas e Exatas. Dentre os 13 jovens, 4 foram selecionados para o projeto de pesquisa “O que pensam os jovens sobre a profissão docente: as mediações que ocorrem no ambiente escolar”. Quando eu estive com os alunos à primeira reunião na Faculdade de Educação, recebi o convite da professora orientadora para tornar-me pesquisadora colaboradora deste projeto da UnB. Fiquei muito feliz com o convite e dediquei-me às pesquisas com os jovens do ensino médio da minha escola. De 2013 a 2018, mais de 60 alunos da escola de talentos conquistaram vagas em programas de iniciação científica para alunos do Ensino Médio, promovido pela UnB - PIC-EM.

Ao longo de mais de 12 anos trabalhando e coordenando ações educativas preparatórias, aulas lúdicas, oficinas, atividades pedagógicas em grupos colaborativos para as olimpíadas científicas e do conhecimento; acompanhei a trajetória, o progresso, sucesso e conquistas de muitos estudantes. Foram muitas premiações, medalhas nacionais, medalhas internacionais, participações em finais brasileiras em outros estados e até mesmo em outro país (na Índia).

Vi meninos e meninas que vivem em contextos de vulnerabilidade social, percebendo que havia sentido nas suas aprendizagens, jovens encantando-se com o poder transformador da educação e das olimpíadas científicas. Percebi que jovens inseridos em um contexto educativo que promove a ampliação do tempo do aluno na escola, que privilegia a multiplicidade de interesses dos estudantes, e principalmente que “estimula o exercício do protagonismo juvenil, fortalece o desenvolvimento de seus projetos de vida” (BRASIL, 2018, p. 468).

É difícil e delongado descrever aqui todas as conquistas dos estudantes e da escola participante dos dois projetos, mas cabe destacar algumas, dentre elas, os estudantes conquistaram mais de 400 premiações em olimpíadas de diversas áreas do conhecimento, destaque para as mais de 200 premiações em olimpíadas de Matemática, mais de 100 premiações na Mostra Brasileira de Foguetes, dentre outras dezenas de premiações em olimpíadas nacionais de Física, Geografia, Robótica, Oceanografia e Astronomia.

Além disso, a escola conquistou premiações em virtude dos excelentes resultados dos estudantes: por 7 vezes consecutivas, a escola olímpica conquistou o título de Escola Campeã da OBMEP e 8 vezes consecutivas, a escola conquistou o título de Escola Campeã da Jornada de Foguetes (evento científico que acontece anualmente no estado do Rio de Janeiro). Ao concluírem o ensino médio, dezenas destes estudantes premiados em olimpíadas científicas conquistaram vagas na UnB, no Instituto Federal de Brasília (IFB) e na Escola Superior de Ciências da Saúde (ESCS), em cursos distintos como Relações Internacionais, Matemática, Medicina, Física, Psicologia, Direito, Comunicação Organizacional, Pedagogia, Farmácia, Biologia, Computação, em diversas áreas das Engenharias e em outros tantos cursos.

Dos poucos alunos que já concluíram o ensino superior, 4 conquistaram recentemente vagas em programas de mestrados, na Universidade de Brasília, 1 cursa mestrado no Instituto Militar de Engenharia (IME) em sistemas e computação e

2 cursam mestrado no exterior com bolsa integral, um estudante na Coréia do Sul e outra na Inglaterra.

Mas por que olimpíada científica? Viana (2017) elencou como benefícios olímpicos da OBMEP a melhora da qualidade do ensino e da aprendizagem matemática, o resgate do interesse pelos estudos e a autoestima dos alunos e professores, além disso, a produção científica de materiais didáticos.

A OBMEP estabeleceu-se nos últimos anos como importante política pública na área de Educação Básica (SOARES; LEO, 2014), com o objetivo de estimular e promover o aprendizado da Matemática nas escolas públicas; contribuir para melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática com a disponibilização de material didático vasto, gratuito e acessível a todos no site da olimpíada; promover a integração entre as escolas públicas, as universidades federais, os institutos de pesquisa e as sociedades científicas; colaborar para a inclusão social mediante a difusão de conhecimentos.

Percebi durante a coordenação e desenvolvimento dos projetos voltados às olimpíadas científicas que, para além da participação dos estudantes nas olimpíadas, em escolas situadas em contextos de vulnerabilidade social, as premiações olímpicas dos alunos e aprovações em universidades públicas, provocam satisfação na comunidade escolar (BARBOSA, 2014).

Compreendi, enquanto coordenadora e professora, que é preciso ter muita coragem para executar projetos educativos, sem recursos, com a precariedade do sistema educacional, precariedade da estrutura física da escola (salas quentes, pequenas, com mobiliário inadequado, sem laboratório de Matemática) e ainda com o caráter voluntário, trabalhando em muitos momentos de “folgas”, usando recursos financeiros próprios para comprar itens e confeccionar jogos e demais materiais didáticos. Mas entendo que os projetos provocaram e ainda provocam revoluções em nossa comunidade, em nossa escola. Dentre estas revoluções, o resgate da autoestima de alunos, de seus responsáveis e dos professores envolvidos direta e indiretamente no projeto; possibilitar que os alunos da escola pública tenham mais estímulos para aprender e acreditar em seu potencial, isso é muito gratificante e significativo.

Além dos estudantes, também conquistei premiações nacionais pelo trabalho desenvolvido nos projetos educativos. Destaco aqui algumas das minhas diversas premiações: em 2009 conquistei um certificado distrital pelo brilhante resultado dos

nossos alunos na OBMEP; em 2010, um certificado faixa bronze nacional, que identifica os 15 professores do Brasil cujos alunos tiveram o mais alto desempenho médio na Olimpíada Brasileira de Robótica (OBR); em 2013, um certificado conferido pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), pelo brilhante trabalho voluntário realizado com o Projeto Matemática Todo Dia, desenvolvido com alunos da comunidade escolar, com excelentes resultados na OBMEP; em 2015, a premiação de professora homenageada do Brasil, conferido pelo IMPA, prêmio destinado a 10 professores do Brasil que mais se destacaram ao longos dos 10 anos da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP); também em 2015 fui agraciada com uma Moção de Louvor concedida pela Câmara Legislativa do Distrito Federal, pelo desenvolvimento do Projeto Matemática Todo Dia e em 2017 conquistei a premiação máxima para professores na Olimpíada de Matemática do Distrito Federal (OMDF).

Minha história com o Projeto Matemática Todo Dia foi publicada na revista “OBMEP 12 anos”, uma publicação do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e da OBMEP, com histórias e lições de 5 educadores do Brasil que educam gerações. A revista está disponível *online* no site da OBMEP <<http://www.obmep.org.br/revista.htm>>.

Para além dos muros da escola, partilhei histórias, saberes, proferi palestras e realizei oficinas para professores e alunos de Brasília e do Brasil. Dentre elas, em 2013, realizei a oficina lúdica “Construindo carrinho foguete” para um grupo de 120 professores da educação infantil e séries iniciais, na Coordenação Regional de Ensino do Guará-DF. No ano de 2014, a convite da coordenação regional da OBMEP/DF, ministrei a palestra “Projeto Matemática Todo Dia, uma experiência exitosa no ensino médio”, no Seminário “Perspectivas e potencialidades dos alunos e dos professores na OBMEP”.

Em 2015, participei, conjuntamente com outros pesquisadores da Educação Matemática, da mesa redonda “A pesquisa em Ensino de Matemática” realizada no Departamento de Matemática da UnB. No mesmo ano, participei como membro da mesa redonda “Conquistas e Desafios da OBMEP”, no 2º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática, realizado em Brasília-DF. No ano de 2016, proferi a palestra “A Estratégia pedagógica do Projeto Matemática Todo Dia: interfaces lúdicas e colaborativa”, no 1º Encontro de Interloquções Pedagógicas: A construção do sucesso na aprendizagem de matemática – educação infantil ao ensino médio,

realizado pela Coordenação Regional de Ensino de Taguatinga-DF. Em 2016, realizei a oficina lúdica “Missão *Opportunity*: o foguete da Matemática”, para estudantes de licenciatura em Matemática e Pedagogia no Departamento de Matemática da UnB; e a oficina “construindo carrinho foguete”, para estudantes das séries iniciais do ensino fundamental de uma escola pública de Planaltina; ambas oficinas como parte integrante do Circuito de Vivências em Educação Matemática, coordenado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM-DF).

Concordo com Luckesi (2014, p. 18) ao mencionar que a ludicidade pode “admirar de qualquer atividade que faça os nossos olhos brilharem”, ela, a ludicidade está totalmente imbricada com minhas ações profissionais e científicas, ações que fazem meus olhos brilharem de contentamento.

Com os jovens do grupo de estudos colaborativos “MTD pesquisas educacionais”, planejamos e realizamos diversas aulas lúdicas para alunos do ensino médio, dentre elas: ASTROLúdica (Astronomia), Robótica Lúdica, o Jogo Matemática #obmepGo (inspirado no *game Pokémon*), o Jogo ZikaVírus (Biologia), Caixa Matemática Criativa, A Matemática dos foguetes e outras dezenas de aulas. O olhar pesquisador sempre esteve presente durante o planejamento e desenvolvimento destas aulas, e assim muitos trabalhos foram escritos colaborativamente e apresentados em diversos eventos científicos.

Em 2015 ingressei no doutorado em Educação na UnB, e os meus primeiros passos no doutoramento levaram a lançar ainda mais olhares investigativos acerca da Educação Matemática e da Aprendizagem Colaborativa. Compreender os motivos que me levaram ao meu encontro com o objeto de estudo estão clarificados diante da minha longa trilha profissional e educativa. Prossigo com os estudos iniciados no mestrado relacionados à aprendizagem colaborativa. Entretanto, o foco é na investigação de uma sequência didática em que há utilização de material concreto caracterizado como jogo, em situações colaborativas e interativas entre os estudantes, destinadas à aprendizagem de um ramo da Matemática, como o estudo do ponto e da reta, elucidam a motivação principal para a construção desta tese. Enfim, há muitas inquietações no contexto de sala de aula, que precisam ser investigadas, estudadas, esclarecidas, afinal, a todo instante da vida há aprendido (D’AMBROSIO, 2015).

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

Em uma sociedade como a atual, aos cidadãos são exigidas capacidades e competências que lhes permitam ultrapassar desafios. Esta mesma sociedade, segundo a BNCC (BRASIL, 2018, p. 14), dita a necessidade de se ter um olhar inovador e inclusivo, acerca de assuntos centrais do processo educativo: “o que aprender, para que aprender, como ensinar, como promover redes de aprendizagem colaborativa e como avaliar o aprendizado”.

Em especial, como preconiza a BNCC (BRASIL, 2018), compete às escolas de Ensino Médio proporcionar às juventudes¹, experiências e metodologias de ensino que lhes garantam as aprendizagens necessárias para a leitura da realidade, permitindo-lhes definir seu projeto de vida, tanto no que se refere ao estudo e ao trabalho, como também no que diz respeito às escolhas de estilos de vida éticas, saudáveis e sustentáveis.

Com efeito, espera-se que nas escolas de Ensino Médio sejam pensadas e desenvolvidas propostas pedagógicas inclusivas, inovadoras e motivacionais, que tornem o ensinar e o aprender mais atraentes. Além disso, também com o objetivo de formar jovens mais autônomos, responsáveis, criativos; cidadãos críticos, reflexivos e interventivos, com a capacidade de contribuir para a sociedade e que saibam trabalhar em grupo colaborativamente. A propósito, a BNCC (BRASIL, 2018), traz no capítulo destinado ao Ensino Médio, um destaque em relação a essa etapa de escolarização, dizendo que dentre as suas finalidades, a escola que atende as juventudes deve promover a aprendizagem colaborativa, desenvolvendo nos estudantes a habilidade de trabalharem em grupo e aprenderem com os seus pares.

Nessa direção, metodologias de aprendizagem colaborativa apresentam-se, na contemporaneidade, facilitadoras de uma educação inovadora e em consonância com as novas reivindicações da sociedade produtiva e do conhecimento. Além disso, se os estudantes aprenderem a trabalhar e conviver com seus pares em sala de aula, certamente se tornarão melhores cidadãos, conectados com a sociedade global.

¹ Em consonância com a BNCC 2018 ensino médio, adotaremos o termo “juventudes”. A BNCC trouxe a noção ampliada e plural de **juventudes**, que significa entender as culturas juvenis em sua singularidade, com diversas dinâmicas e reconhecendo os jovens como participantes ativos das sociedades enérgicas e diversas nas quais estão inseridos.

Ademais, conforme ressaltou D'Ambrosio (2015, p. 17), um dos grandes objetivos atuais da educação é a formação para a cidadania, e o reconhecimento de outras maneiras de pensar, inclusive o matemático, pois “encoraja reflexões mais amplas sobre a natureza do pensamento matemático, do ponto de vista cognitivo, histórico, social, pedagógico”.

Por conseguinte, a BNCC (BRASIL, 2018), elenca às competências da educação básica,

exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BRASIL, 2018, p. 9).

No entanto, em situações de ensino, os conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula, “às vezes são desconexos e não refletem a realidade social ou cultural dos estudantes” (BARBOSA; LISBOA, 2016, p. 204). De fato, parte desta culpa deve-se à maneira como o trabalho pedagógico tem sido realizado nas escolas, com escassez de oportunidades para que o estudante se sinta motivado e estimulado a pôr em prática, o seu potencial ao longo das aulas de Matemática (FLEITH; GONTIJO, 2009). Igualmente é importante considerar a questão da reprodução e a memorização de conceitos matemáticos, por vezes sem significado, e como mencionou D'Ambrósio (2015), ainda é fortalecida a técnica tradicional de ensino, embora grandes esforços tenham sido executados por parte de pesquisadores e professores para mudar esse cenário.

Vários estudantes encontram dificuldades em relação à aprendizagem da Matemática e, conseqüentemente, não gostam dessa disciplina. Concordamos com Goulart e Gravina (2012, p. 197) ao acreditar que uma das causas dessas dificuldades é a maneira como a Matemática é apresentada aos estudantes do Ensino Fundamental e Médio – de maneira “desinteressante e sem maior relação com a vida prática, parecendo ser um estudo que servirá apenas para concluir uma etapa estudantil”. Desse modo, a Matemática é apresentada como complexa e parece que nela se estudam apenas números e fórmulas, vistos somente na escola. Essa maneira de pensar acaba provocando uma aversão ao assunto, uma desmotivação e desinteresse pela Matemática (GOULART; GRAVINA, 2012; GOES, 2017).

Um exemplo é o ensino da geometria, um ramo importante da Matemática, que serve de instrumento para outras áreas do conhecimento, e, quando aprendida, precisa estar intimamente conectada à realidade. Não obstante, nos diversos níveis de escolarização, tem apresentado problemas, tanto no seu ensino, quanto na sua aprendizagem (ALMOULOUUD *et al.*, 2004; LEIVAS, 2012).

Segundo Tashima e Silva (2007, p. 2), há lacunas no ensino da geometria, pois nota-se que o estudante “não consegue perceber a relação deste conteúdo com sua realidade”. Lorenzato (1995) menciona que sem conhecer geometria, a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias torna-se restringida e a visão da matemática torna-se distorcida.

Acrescenta-se a este rol de problemas relacionados à aprendizagem da geometria, os meus conhecimentos empíricos em sala de aula, pois, ao longo dos 12 anos de realização do Projeto Matemática Todo Dia², percebi que os estudantes ao chegarem ao 3º ano do Ensino Médio, não possuíam os conhecimentos necessários para construir uma pluralidade conceitual geométrica, a partir de conhecimentos obtidos anteriormente, como recomendam os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000).

Segundo Almouloud *et al.* (2004), tal observação motiva questionamentos a respeito de problemas enfrentados em relação ao ensino e aprendizagem da geometria, dentre eles, os relacionados à formação docente insuficiente e outros relativos ao próprio sistema educacional brasileiro.

1.1 - O CENÁRIO BRASILEIRO: recorte das avaliações em Matemática

O cenário educativo atual nos provoca reflexões acerca do desempenho de nossos estudantes. No Brasil, o desempenho dos estudantes medido em avaliações nacionais e internacionais indica níveis insatisfatórios de desenvolvimento. Mesmo

² Projeto “Matemática Todo Dia”, desenvolvido em uma escola pública de Ensino Médio do DF desde 2007, é um projeto que objetiva apoiar e fortalecer o desenvolvimento de propostas curriculares inovadoras, ampliando o tempo dos estudantes na escola e buscando a formação integral com inserção de atividades que tornem o currículo de Matemática mais dinâmico, lúdico, colaborativo, criativo, atendendo as expectativas dos estudantes, tornando a escola mais atraente, motivadora para as juventudes, atendendo as demandas da sociedade contemporânea. São aproximadamente 18 aulas temáticas no segundo semestre letivo, uma vez por semana à noite, atendendo anualmente em média 40 alunos das três séries do Ensino Médio.

aumentando o investimento em educação e formação de professores, os dados da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) acerca do Programa Internacional de Avaliação de Alunos 2015 (PISA), divulgados no final de novembro de 2016, revelam que o Brasil continua nas últimas posições nas três áreas avaliadas: Leitura (texto/linguagem), Ciências e Matemática.

O PISA é uma iniciativa de avaliação comparada, aplicada a estudantes na faixa dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países (INEP, 2016). Assim, o PISA fornece não apenas medidas para avaliar o desempenho dos estudantes nos letramentos em ciências, leitura e matemática, mas também um conjunto de informações não cognitivas (a motivação do estudante para aprender), condições individuais (a condição socioeconômica do estudante) e características estruturais e de processo do contexto escolar (práticas de ensino e oportunidades de aprendizagem em sala de aula, liderança e políticas escolares). Essa gama diversificada de informações é coletada das respostas aos questionários de vários atores educacionais como estudantes e diretores de escolas, bem como, conforme opção de cada país, respostas dos pais e professores.

A performance dos estudantes brasileiros no PISA 2015 em Matemática é desanimadora: em relação ao PISA 2012, o país despencou 14 pontos e passou a ocupar a última posição dentre os países da América Latina neste ranking. Este indicador a respeito da proficiência matemática dos estudantes brasileiros é preocupante, afinal revela que eles têm apresentado desempenho abaixo do esperado em avaliação de larga escala internacional. Em relação ao PISA 2015, o Brasil atingiu 377 pontos em Matemática, aquém da média dos países da OCDE que é de 490 pontos. Países como Coreia do Sul (524 pontos), Canadá (516 pontos) e Finlândia (511 pontos) ocupam as primeiras posições no PISA; a República Dominicana (328 pontos) ocupa a última posição (INEP, 2016).

Dentre os 6 níveis de proficiência em Matemática do PISA (INEP, 2016, p. 151), no nível 2 os estudantes são capazes de reconhecer e interpretar “situações em contextos que não exigem mais do que uma inferência direta, conseguem extrair informações relevantes de uma única fonte e utilizar um modo simples de representação”. No Brasil, 70,3% dos estudantes estão abaixo do nível 2 em matemática, patamar que a OCDE indica como imprescindível para que os jovens possam exercer plenamente sua cidadania. A OCDE entende que no primeiro nível

os alunos demonstram apenas competências básicas, como efetuar uma simples operação de adição.

Na capital do Brasil, que apresenta uma realidade educacional melhor do que no interior do país, o governo local citou no documento “Avaliação da Educação Básica no Distrito Federal: uma visão do Instituto de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB)”, que “historicamente, o sistema educacional brasileiro apresenta muitas deficiências: pouco eficiente em sua capacidade de produzir concluintes na idade correta, devido à evasão e à reprovação escolar” (BRASÍLIA, 2013, p. 12).

Ainda neste documento, o governo apresenta índices alarmantes no ensino público do DF: segundo o censo demográfico do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, em 2010, 76,9% das crianças de zero a três anos do DF, não possuíam cobertura de creche; 3,3% da população de dez anos ou mais não sabiam ler e escrever; e o Ensino Médio apresentou em 2011 uma distorção idade-série de 28% do total de estudantes matriculados.

Desse modo, no que se refere à educação básica, ainda existe um contingente de crianças e adolescentes não atendido de maneira adequada pelo sistema educacional público do Distrito Federal. Conseqüentemente, há registros de adolescentes não alfabetizados e de crianças e adolescentes que não frequentam a escola.

Acerca da frequência escolar, as falhas na inserção escolar afetam os adolescentes de 15 a 17 anos, faltam estímulos para a permanência na escola para os adolescentes, em especial, os estudantes do Ensino Médio. No caso do Ensino Médio, os estudantes deparam-se com escolas com infraestrutura inadequadas; sem laboratórios de Informática, Física, Matemática, dentre outros. É importante compreender que promover a educação demanda a garantia de um ambiente com condições para que a aprendizagem possa acontecer (NETO *et al.* 2013). Proporcionar aos estudantes uma infraestrutura escolar adequada, estimula e viabiliza o aprendizado, como também favorece as interações humanas.

As questões de infraestrutura são graves e, no Distrito Federal, agravam-se ainda mais em virtude das condições climáticas. No DF, todos os anos são emitidos alertas do Instituto Nacional de Meteorologia (INMET) em virtude da baixa umidade relativa do ar, e assim, como muitas salas de aulas das escolas do DF são quentes e abafadas, os estudantes são liberados das aulas, prejudicando o cumprimento do planejamento curricular. Conforme relatório de auditoria do Tribunal de Contas do

Distrito Federal, acerca da avaliação da qualidade das instalações físicas das escolas da rede pública de ensino do Distrito Federal, mais de 90% das unidades de ensino careciam de reparos moderados ou grandes. Os gastos com manutenção, ampliação e reformas de escolas, “continuam muito aquém da necessidade de reparos e adaptações das unidades de ensino do DF” (TCDF, 2018, p. 285). Segundo o relatório, há um descompasso entre os gastos e a necessidade de conservação das instalações físicas das escolas públicas no Distrito Federal, a destinação de recursos é inferior à necessidade real de reparos e adaptações das unidades de ensino do DF.

Desse modo, concordamos com Garcia (2012, p. 13) ao ressaltar ser “consenso que a educação, no Brasil, está em crise”. A escola pública, em especial, aparenta não estar cumprindo sua função de formar cidadãos, com condições de inserção no mercado de trabalho, socialmente integrados, contrapondo competências gerais da Educação Básica de valorização e estímulos de ações que contribuam para a transformação da sociedade.

Acrescenta-se também a este cenário preocupante os dados relativos ao IDEB das escolas brasileiras, que é calculado de dois em dois anos a partir da avaliação dos alunos do 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e no 3º ano do Ensino Médio, revelando que o Distrito Federal apresentou índices superiores à média brasileira em todas as etapas da Educação Básica.

Contudo, em 2015 o DF alcançou no Ensino Médio (rede estadual) o índice de 3,5 pontos no IDEB, e tinha projeção de meta de 3,9 pontos. Independentemente de ter se aproximado da meta projetada, o índice 3,5 pontos no Ensino Médio é baixo, considerando que a escala é de 0 a 10 pontos.

Para além dos resultados das avaliações de larga escala do ensino brasileiro, na visão dos estudantes de ensino médio, em pesquisa desenvolvida por Fernandes (2013, p. 17.457), uma escola ideal seria aquela “com qualidade de ensino e bem estruturada, que possuísse todos os recursos necessários e condições favoráveis para atender a todos que nela estão”.

De uma escola tecnológica, passando por uma escola criativa, interessante, preocupada com questões políticas e sociais. São jovens que gostam de jogos e interações sociais. No entanto, a escola precisa ter um ambiente favorável ao aprendizado, mais atraente, pois motiva os educandos a frequentar às aulas e a fazer suas atividades de aprendizagem (GRANDO, 2000). Todavia, como preconizado na BNCC (BRASIL, 2018), a realidade educacional brasileira tem mostrado, que a etapa

final da Educação Básica, ainda representa um obstáculo na garantia do direito à educação.

Mas o ensino médio é uma oportunidade para o aprimoramento do educando como pessoa humana, considerando sua formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico. Além do mais, mostra-se decisivo garantir a permanência e as aprendizagens dos estudantes, em atenção às finalidades do ensino médio, demandas qualitativas e formativas na contemporaneidade, bem como necessidades e pretensões presentes e futuras das juventudes (BRASIL, 2018). Também nessa linha, reconhecer que procedimentos de ensino mais significativos, requer eliminar práticas reprodutivas, substituindo-as por atividades que ajudem o aluno a desenvolver sua criatividade (PAIS, 2006).

O desafio posto, em especial à disciplina objeto desta investigação, é que, para mudar as atitudes que o estudante tem em relação à Matemática, estruturas curriculares e práticas pedagógicas utilizadas em sala de aula precisam ser remodeladas. Observa-se na dinâmica escolar a apresentação da Matemática com repetições de um modelo apresentado pelo professor, por vezes conduzidos linearmente pelos livros didáticos, que não promove desafios, não é prazerosa e tampouco favorece o desenvolvimento de estratégias individuais de resoluções de problemas. Assim concordamos com Gontijo (2007) ao considerar que esse modelo tradicional da Matemática, não motiva o estudante, tampouco estimula a sua autonomia, habilidades criativas e o desenvolvimento de suas competências.

1.2 – PROBLEMÁTICA E OBJETIVOS

Face à imprescindibilidade de se constituir cenários de aprendizagens, afinados com as necessidades, as possibilidades e anseios das juventudes; ao professor de Matemática é dado o desafio de buscar formas inovadoras de desenvolver as suas aulas, de torná-las mais atraentes, que motivem a participação do estudante e os instiguem a construir conceitos matemáticos, mediante situações que estimulem a sua curiosidade.

Dentre as teorias e concepções de Didática da Matemática, desenvolvidas na escola francesa, que estudam os aspectos didáticos e cognitivos, analisam as dificuldades que emergem nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, está a teoria das situações didáticas de Brousseau (2008a; 2008b). O

foco central desta teoria são as situações didáticas em contextos que envolvem o aluno, o professor e o saber.

Segundo Brousseau (2008b), para tornar o conhecimento matemático acessível ao estudante, é necessário promover situações de aprendizagem em sala de aula. O autor defende que o professor deve colocar o estudante diante de situações em que aconteça o desequilíbrio, bem como escolher situações didáticas de modo que o aluno aceite o problema como seu e se sinta desafiado a resolvê-lo.

Apresentada por Artigue (1996), a Engenharia Didática, é decorrente do estudo formalizado de algo que era discutido dentro das práticas das situações didáticas e a partir de uma síntese dos estudos de Brousseau. A Engenharia Didática permite desenvolver um trabalho em sala de aula, com sequências didáticas propostas por Brousseau (1996, 2008a), considerando sua estruturação em quatro fases, que possibilita encarar problemas reais de sala de aula, e, ao mesmo tempo, busca valorizar o trabalho docente.

A Engenharia Didática organiza os saberes que serão elencados na atividade, de maneira que, a *priori* sejam levantadas as hipóteses; e a *posteriori* estas sejam analisadas. Ademais, no âmbito das investigações científicas, conseguem-se diferenciar tipologias e usos distintos de engenharias didáticas em função do questionamento inicial da investigação. No estudo de Artigue e Perrin-Glorian (1991) é discutida esta dualidade da Engenharia Didática, que pode ser utilizada como “metodologia de pesquisa”, como “proposta de desenvolvimento didático” ou contemplar as duas possibilidades.

Considerando que as sequências didáticas podem estar presentes em várias atividades pedagógicas, dentre elas, em uma história, em uma resolução de problema ou um jogo (BROUSSEAU, 2008a), suas ações podem servir como estratégia metodológica de ensino e auxiliar na tentativa de minimizar dificuldades relacionadas no ensino de Matemática.

A opção nesta investigação por um projeto de Engenharia Didática, deve-se à possibilidade de em um único momento ter uma metodologia de pesquisa e um instrumento de elaboração de inovações didáticas, que não limita a liberdade docente (DOLZ, 2016) no planejamento e desenvolvimento de metodologias com ênfase nos estudantes (MURARI, 2012). Desse modo, propor diferentes situações de aprendizagens, em cenários que oportunizem a construção de conhecimentos pelos

estudantes, é transpor obstáculos de quaisquer ramos da Matemática (HALBERSTADT, 2015; CAVALCANTE, 2017).

Segundo Tashima; Silva (2007) e Lorenzato (1995), um dos conteúdos matemáticos que os estudantes apresentam mais dificuldades é a Geometria. Extremamente relevante na vida do estudante enquanto cidadão, as noções ligadas à geometria são necessárias para compreender, interpretar e apreciar o mundo que nos rodeia. Estudar geometria analítica, na 3ª série do Ensino Médio, é uma oportunidade para dar significado a muitos assuntos estudados em séries anteriores dos ensinos fundamental e médio, mas por vezes, segundo Silva (2014) não é tratada com a sua real importância.

Neste mesmo sentido, Baccarin, Pina Neves e Silva (2016) citam que relatos de dificuldades relacionadas à formação geométrica dos alunos, “desde a Educação Básica até cursos de formação de professores têm sido recorrentes no cenário educacional brasileiro desde a última década do século passado e persistem até os dias de hoje”.

Nota-se em sala de aula que os estudantes chegam ao 3º ano do Ensino Médio apresentando dificuldades em trabalhar e compreender tópicos fundamentais da geometria analítica, um exemplo evidenciado dessa dificuldade refere-se ao estudo do ponto e da reta (SCORTEGAGNA; MEZA, 2014; SILVA, 2014).

Mas as práticas construídas, resultados indicados por investigações e estudos teóricos relacionados aos obstáculos na aprendizagem da Matemática (MOTTIN, 2004; TASHIMA; SILVA, 2007; SILVA, 2014), têm mobilizado e despertado interesse de vários pesquisadores da Educação Matemática. As investigações levantadas apontam que os problemas relacionados tanto ao seu ensino quanto à aprendizagem de Geometria Analítica, iniciam no ensino fundamental (ALMOULOUD, *et al.*, 2004) e refletem as dificuldades na transição para o Ensino Superior, especialmente nas disciplinas de Cálculo (NASSER; SOUSA; TORRACA, 2012), provocando-nos reflexões acerca dos estudantes de ensino médio que aprenderam pouco de geometria e não conseguem perceber a relação deste conteúdo com sua realidade.

Ademais, o fraco desempenho em geometria por parte dos estudantes é por vezes resultante de conceitos matemáticos ministrados de maneira mecânica, sem possibilitar aos estudantes espaço para discussão, colaboração, interação e construção autônoma de argumentos. Há um abismo entre a maneira como a geometria é ensinada e como ela é aprendida pelos estudantes, além do que,

privilegia-se nas atividades a aplicação de fórmulas em detrimento à análise de situações-problemas, sem a oportunidade de o estudante socializar e discutir suas descobertas.

Considerando que há omissões no ensino e na aprendizagem da Geometria (TASHIMA, SILVA; 2007), reconhecendo a importância de se repensar a prática pedagógica, buscando novas alternativas de ensino e recursos adequados, prazerosos e conectados com o cotidiano do estudante, que favoreçam a aprendizagem colaborativa, com liberdade e criatividade, chegamos à seguinte questão de pesquisa: Qual a contribuição de uma sequência didática que envolve um jogo colaborativo de geometria analítica na aprendizagem sobre o estudo do ponto e da reta para estudantes do 3º ano do Ensino Médio?

Para responder à questão de pesquisa desta tese, planejamos e desenvolvemos uma sequência didática de geometria analítica, com ênfase nos procedimentos de observação, reflexão, validação e situações contextualizadas, à luz da Teoria da Engenharia Didática de Artigue (1996) e da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996, 2008a).

Este trabalho justifica-se, porque acreditamos que uma prática pedagógica, que possibilite momentos ricos com a utilização de materiais diversificados em sala de aula, oportunizando aos estudantes, condições de trabalhar em pequenos grupos colaborativos, favorece a aprendizagem matemática.

Nossas reflexões, suportadas pelos referenciais teóricos, levam-nos a defender a tese de que uma situação didática construída a partir dos preceitos da engenharia didática que articule uma abordagem colaborativa e lúdica, para solucionar situações-problema do estudo do ponto e da reta, potencializa a construção de conceitos e favorece a aprendizagem matemática.

A presente tese foi elaborada considerando duas premissas: a) Construir e desenvolver uma sequência didática com a utilização de um material concreto caracterizado como jogo, envolvendo o estudo do ponto e da reta, a ser desenvolvido nas escolas em larga escala, estimula a aprendizagem matemática no ensino médio; b) A realização de atividades em pequenos grupos colaborativos, transforma as aulas em um espaço que possibilita a autonomia e a interação dialógica entre os estudantes, favorecendo a aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Compreendendo que processos investigativos possibilitam o aperfeiçoamento das práticas pedagógicas (CARNEIRO, 2005), apresentamos os objetivos que nortearam o desenvolvimento da investigação.

Objetivo geral

Analisar uma sequência didática que envolve um jogo colaborativo de geometria analítica, nos processos de aprendizagem do estudo do ponto e da reta para os estudantes do 3º ano do ensino médio.

Objetivos específicos

- a. Investigar as potencialidades da sequência didática em forma de jogo, nos pequenos grupos colaborativos, a partir das interações dialógicas estabelecidas entre os sujeitos da pesquisa, relacionadas a aprendizagem dos conceitos matemáticos propostos;
- b. Interpretar a colaboração entre os alunos, durante o desenvolvimento da atividade pedagógica, identificando como as contribuições ocorrem e se os conceitos são construídos individualmente e/ou colaborativamente.
- c. Analisar como ocorreu o processo de aprendizagem do estudo do ponto e da reta, a partir das percepções dos estudantes que participaram da situação didática.

Apresentamos a seguir as produções científicas referentes à temática desta pesquisa, para relacionar investigações e publicações que nos permitem identificar, as abordagens metodológicas e quais contribuições esses estudos podem trazer acerca da Engenharia Didática no ensino médio e da aprendizagem da Geometria Analítica.

1.3 - O ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO: as produções científicas nos cursos de pós-graduação das universidades brasileiras (2008-2018)

O estado do conhecimento é um inventário científico que objetiva mapear e realçar pesquisas para analisar o desenvolvimento, as principais temáticas, as áreas investigadas e quais caminhos podem ser delineados com base nos estudos. Revelar produções científicas em um determinado campo do conhecimento, permite reconhecer as proximidades e as singularidades sobre um tema em particular, num determinado período (FERREIRA, 2002).

É por meio do levantamento do que se conhece acerca de determinada área do conhecimento (SOARES; MACIEL, 2000; HADDAD, 2002; FERREIRA, 2002), que podemos estabelecer relações entre as investigações que estamos conduzindo, com as produções de outros pesquisadores, identificando temáticas recorrentes e novas perspectivas, a partir de estudos desenvolvidos em inúmeros programas de pós-graduação e em publicações em periódicos nacionais e internacionais, consolidando uma determinada área de conhecimento. Haddad (2002, p. 4) menciona que sistematizar um determinado campo de conhecimento, além de “identificar temáticas e abordagens dominantes e emergentes”, demonstra lacunas e campos inexplorados que possam ser objetos para futuras investigações.

Neste estudo optamos pelo levantamento de produções científicas relacionadas aos principais assuntos abordados nesta tese, realizamos pesquisas na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD, estabelecendo como critério de busca dissertações e teses publicadas no Brasil nos últimos dez anos (a partir de 2008). Nosso interesse foi em pesquisas em Educação Matemática, portanto realizamos o levantamento de trabalhos que se inserem dentro das duas áreas da Capes: educação e ensino.

No primeiro momento, realizamos o levantamento bibliográfico na BDTD, usando os descritores “**Geometria Analítica**” e “**Ensino Médio**”. Estipulamos como data fim da busca em 30 de maio de 2018. Foram localizados 76 trabalhos, sendo 69 dissertações de Mestrado, 40 em programas de Mestrado Acadêmico, 29 em programas de Mestrado Profissional e 7 teses de Doutorado. Desses trabalhos, identificamos a repetição de 1 trabalho relativo à dissertação de mestrado acadêmico.

No segundo momento da obtenção dos dados pesquisados, selecionamos na busca avançada o “resumo em português”. Realizamos a leitura dos 75 resumos, objetivando identificar o objeto investigado/campo de investigação de cada trabalho.

Para Soares e Maciel (2000, p. 4), num estado da arte é preciso considerar “categorias que identifiquem, em cada texto, e no conjunto deles as facetas sobre as quais o fenômeno vem sendo analisado”. A análise das temáticas exploradas nos 75 trabalhos selecionados nesta segunda etapa da investigação possibilitou, categorizá-los em 6 objetos investigados, apresentadas no quadro 1.

Quadro 1 - Categorização dos trabalhos em objeto investigado

Objeto investigado	Dissertações		Teses	Total
	Mestrado Acadêmico	Mestrado Profissional		
Análise de Livro Didático	1	0	1	2
Aprendizagem	12	7	1	20
Demonstração Matemática	3	1	1	5
Formação de Professores	10	16	2	28
Tecnologias Digitais	11	5	0	16
Avaliação de desempenho, Estado da Arte e outro que não se relacionam com os descritores	2	0	2	4
TOTAL	39	29	7	75

Fonte: Dados da investigação

Os dados da Tabela 1 revelam que 90,67% dos trabalhos são dissertações de mestrados, sendo 52% originários de programas de mestrados acadêmicos e 38,67% de mestrados profissionais. As teses de programas de doutorado representam 9,33% dos trabalhos. Em uma análise mais detalhada, encontramos na busca avançada um trabalho que não se relaciona com os descritores “geometria analítica” + “ensino médio”. Na categorização, tiveram grande frequência “aprendizagem de geometria analítica” com 26,67% de recorrência; “formação de professores para ensinar geometria analítica” com 37,33% e “tecnologias digitais no ensino de geometria analítica” com 21,33%, como objetos mais investigados.

Após este momento, realizamos uma análise mais aprimorada para identificar trabalhos que fazem utilização da **Engenharia Didática**, como metodologia de pesquisa e/ou como proposta didática, com ou sem uso de recursos didáticos.

Ao catalogar o material, realizamos a leitura completa das teses e dissertações, pois afinal, mesmo considerando que os resumos amplificam as informações dos trabalhos, com tal entendimento, Megid (1999) e Ferreira (2002) enfatizam que por serem muito concisos e, em alguns casos, mal elaborados ou equivocados, os resumos não são suficientes para a divulgação dos resultados das produções acadêmicas e suas prováveis contribuições.

O desconhecimento da totalidade de estudos e pesquisas em determinada área de conhecimento, motiva os pesquisadores a conhecer o já construído e produzido, bem como investigar o que ainda não foi realizado. Assim sendo, dentre os 12 trabalhos selecionados até esta etapa de investigação, interessou-nos mapear

apenas pesquisas que referem à **Engenharia Didática** como metodologia e/ou como proposta didática aplicada.

Após a leitura dos trabalhos, entendemos que 7 (sete) não se enquadravam nos parâmetros utilizados nesta investigação. Elencamos os motivos para exclusão dos trabalhos:

- a. Cinco dissertações não utilizavam a Engenharia Didática como metodologia e/ou proposta didática;
- b. Uma tese que se tratava de pesquisa bibliográfica, trazia o termo “Engenharia Didática” no resumo. Após finalizada a leitura da versão completa desta tese, verificamos que o termo “Engenharia Didática” fora mencionado apenas no resumo. Assim, esta tese analisada não se enquadrava nos parâmetros utilizados nesta investigação, fazendo parte de outra área temática.
- c. Uma tese tratava-se do “Estado da Arte” sobre o estudo de geometria analítica no ensino médio dos anos de 1991 a 2014. No entanto, ressaltamos que alguns trabalhos elencados na tese citada, foram analisadas e categorizadas nesta investigação.

Com a retirada dos 7 (sete) trabalhos que não são objetos de interesses desta investigação, passamos a analisar as 5 produções selecionadas e assim, finalmente, identificamos os trabalhos que atendem aos parâmetros usados nesta tese. Ao listar os trabalhos, tivemos a preocupação em identificar o objeto investigado, nome do pesquisador, o ano de defesa, a instituição, o nível acadêmico, o título e o objetivo da pesquisa.

Quadro 2 - Identificação de dissertações e teses encontradas no banco de dados da BDTD: Engenharia Didática como metodologia.

	OI	Pesquisador ANO IE/ NÍVEL	Título	Objetivo da Pesquisa
Engenharia Didática como Metodologia Aprendizagem (Com uso de recurso)		SILVA, Raquel Santos 2014 PUC/SP MESTRADO ACADÊMICO	Estudo da reta em geometria analítica: uma proposta de atividades para o ensino médio a partir de conversões de registros de representação semiótica com o uso do <i>software</i> GeoGebra	Este trabalho tem por objetivo investigar se a utilização de um <i>software</i> de geometria dinâmica, o GeoGebra, pode contribuir a partir dos pontos de vista cognitivo e matemático para uma melhor compreensão do objeto matemático reta em relação à geometria analítica, na 3ª série do Ensino Médio. Para essa verificação, foram utilizadas as ideias de Raymond Duval na teoria dos Registros de Representação Semiótica. A metodologia utilizada foi a Engenharia Didática de Michèle Artigue.

Aprendizagem (Com uso de recurso)	LOPES, Sandra Pereira	Uma sequência didática para o ensino de parábola enquanto lugar geométrico	Mediar a apropriação pelo aluno das definições de parábola enquanto lugar geométrico, por alunos do 2º ano do Ensino Médio, a partir de uma sequência didática.
	2014		Aplicou-se uma sequência de ensino a cinco alunos do Ensino Médio e, como fundamentação teórica da pesquisa na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau. A abordagem dessa investigação foi qualitativa e, como metodologia, adotou-se os pressupostos da Engenharia Didática.
	PUC/SP		
	MESTRADO ACADÊMICO		

Fonte: Dados da investigação

No quadro 2 listamos dois trabalhos que apresentam a Engenharia Didática enquanto metodologia de pesquisa. O primeiro trabalho trata-se de uma dissertação que traz a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, a aprendizagem é o objeto investigado e há a utilização de recurso tecnológico na experimentação.

O estudo foi realizado em uma escola pública da cidade de São Paulo – SP, com 6 estudantes de 3 (três) salas distintas do 3º ano do ensino médio. A pesquisa objetivou verificar se a utilização de um *software* como o Geogebra, poderia auxiliar na apreensão do objeto matemático, no caso do estudo da Geometria Analítica. Não identificamos no trabalho os objetivos específicos. A experimentação aconteceu em único dia do mês de setembro de 2013, com os 6 estudantes agrupados em duplas. A pesquisadora relatou a dificuldade de utilizar a sala de informática, para desenvolver a pesquisa, ela levou à escola 3 notebooks.

Conforme Silva (2014), sua pesquisa desenvolve-se considerando aspectos da Engenharia Didática, seguindo as fases de análise preliminares, concepção da sequência de atividades, análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*. Identificamos na dissertação as variáveis didáticas globais e locais

A autora apresentou a análise dos dados considerando aspectos da Engenharia Didática, todavia, por se tratar de uma atividade com conteúdo já estudado em sala de aula, Silva optou pela realização das análises baseados também na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. No *software* Geogebra, a autora verificou a oportunidade de trabalhar em um ambiente diferenciado para a maioria dos estudantes. Além disso, proporcionar o exercício de dois registros

importantes do objeto matemático reta, ao mesmo tempo, utilizando uma única ferramenta.

Para Silva (2014), não foi possível assegurar que todos os estudantes saíram da experiência com total domínio dos diferentes registros e estabelecendo todas as conexões almeçadas, porém a autora acredita que a sequência didática associada ao uso do computador, cumpriu com o seu papel de proporcionar aos estudantes maior reflexão em relação ao assunto Geometria Analítica, com ênfase no estudo da reta.

O segundo trabalho que traz a Engenharia Didática como metodologia, também utilizou o GeoGebra como recurso tecnológico durante o momento de experimentação da sequência didática.

A pesquisa foi desenvolvida em uma escola particular da cidade de São Paulo – SP. Participaram da experimentação 5 (cinco) estudantes do 2º ano do Ensino Médio, durante 4 sessões. Os estudantes estavam divididos em dois grupos, sendo uma dupla e um trio em uma sala com computadores.

Este estudo de natureza qualitativa, teve como objetivo geral mediar a apropriação pelo aluno das definições de parábola enquanto lugar geométrico, a partir de uma sequência de ensino, e permitir que, ao resolver as atividades propostas, os alunos realizassem os tratamentos e Registro de Representação Semiótica pertinente ao objeto a ser estudado. Nos objetivos específicos esperava-se que os estudantes representassem a parábola em diferentes registros de Representação Semiótica e fazer com que efetuassem tratamentos e conversões nos registros de Representação Semiótica.

Lopes (2014) descreve sucintamente a sequência de ensino em sua dissertação, passando a discorrer sobre a análise *a priori* e *a posteriori* das 5 (cinco) atividades. Não ficaram evidenciadas no trabalho as variáveis globais e locais, as análises foram realizadas à luz dos Registros de Representação Semiótica de Duval.

Nas considerações finais, apesar da autora informar que as análises seguiram os preceitos da Engenharia Didática, identificamos apenas análises com base nos Registros de Representação Semiótica. A autora afirma que a pesquisa contribuiu para uma reflexão do ensino e aprendizagem das cônicas, pois, utilizando a sequência didática, articulada com registros de representação, proporcionou aos estudantes a apropriação das definições de parábola enquanto lugar geométrico.

Quadro 3 - Identificação de dissertações e teses encontradas no banco de dados da BDTD: Engenharia Didática como proposta didática e metodologia

	Pesquisador			
	OI	ANO IE NÍVEL	Título	Objetivo da Pesquisa
Engenharia Didática como Proposta didática + Metodologia (mista)	Tecnologias digitais (Com uso de recurso)	Goulart, Juliana Bender 2009 UFRS MESTRADO PROFISSIONAL	O estudo da equação $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ utilizando o <i>software</i> Grafeq: uma proposta para o ensino médio	Apresentar uma proposta para o ensino e aprendizagem da Geometria Analítica através do uso de tecnologia informática (GRAFEQ). Tendo a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa e como organização da sequência de atividades para o estudo de geometria analítica no ensino médio.
	Aprendizagem (Com uso de recurso)	HALBERSTADT, Fabrício Fernando 2015 UFSM MESTRADO ACADÊMICO	A aprendizagem da geometria analítica do ensino médio e suas representações semióticas no Grafeq	Estudar a compreensão de conceitos e propriedades da Geometria Analítica do Ensino Médio com o uso do <i>software</i> GrafEq. Trata-se de uma pesquisa de cunho qualitativo cuja metodologia de ensino e pesquisa adotada é a Engenharia Didática, que possibilita sistematizar a realização da pesquisa nos âmbitos teórico e experimental.
	Aprendizagem (Com uso de recurso)	CAVALCANTE, Luiz Henrique de Vasconcelos 2017 UFAM MESTRADO PROFISSIONAL	Uma sequência didática para o ensino do conceito de parábola: a engenharia didática como apoio metodológico	Abordou-se o conceito de parábola com o uso do GeoGebra, ensinado no terceiro ano do ensino médio, dentro do conteúdo de geometria analítica, tendo como base uma sequência de ensino. Como metodologia de pesquisa usou-se os preceitos indicados pela Engenharia Didática tanto na concepção da sequência de ensino quanto aplicação da atividade em sala de aula.

Fonte: Dados da investigação

No quadro 3 listamos três trabalhos que apresentam o uso misto da Engenharia Didática, como proposta didática e metodologia de pesquisa.

O terceiro estudo de Goulart (2009) apresenta a Engenharia Didática como metodologia e proposta didática e teve como objeto de investigação a tecnologia digital. Este estudo objetivou a elaboração de um material pedagógico que poderia servir de auxílio ao professor de Matemática, na prática educativa de Geometria Analítica. Participaram do estudo 12 (doze) estudantes do 3º ano do Ensino Médio,

de uma escola particular da cidade de Novo Hamburgo – RS, nos meses de agosto e setembro de 2008.

A atividade foi realizada em um laboratório de informática. A autora ressalta que em virtude do número reduzido de computadores do laboratório, os estudantes foram agrupados em duplas ou individualmente. Para motivar e despertar o interesse dos estudantes, foram utilizadas obras de arte diversas.

Goulart (2009) menciona que utilizou a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Identificamos durante a leitura do trabalho as fases de concepção, experimentação e análise *a posteriori*. As variáveis globais e locais não são apresentadas explicitamente, contudo a autora cita que na realização da análise prévia, foram consideradas: as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) Ensino Médio, deficiências no livro didático e a dificuldade dos estudantes no que diz respeito à compreensão da linguagem algébrica. Ressaltamos que o trabalho foi inspirado na Teoria da Engenharia Didática.

Como conclusão, Goulart (2009) menciona que a sequência de atividades utilizada pode conduzir os trabalhos no laboratório de informática. A autora cita que usando um meio informatizado é possível trabalhar com estudantes que estão cursando o ensino médio, a resolução de equações da reta, círculo, hipérbolas e parábolas, contribuindo assim para o processo de construção do conhecimento em Geometria Analítica. E por fim, a autora ressalta que o importante papel do professor como orientador do conhecimento.

O quarto trabalho de Halberstadt (2015) teve como objeto de investigação a aprendizagem de geometria analítica. A Engenharia Didática é apresentada como proposta didática e metodológica, recursos tecnológicos foram utilizados na experimentação.

Esta pesquisa teve como objetivo estudar a compreensão dos conceitos e da aprendizagem de geometria analítica por estudantes do ensino médio, a partir de uma sequência didática planejada com auxílio com Grafeq e do *software* GeoGebra. São objetivos específicos: analisar a compreensão das representações algébricas e gráficas de conceitos de geometria analítica do ensino médio.

Para motivar e despertar o interesse dos estudantes, foram utilizadas no trabalho obras arquitetônicas da cidade de Santa Maria – RS. Trata-se de uma

pesquisa qualitativa com uso do diário de bordo, produção dos estudantes, os arquivos com as construções realizadas no Grafeq e fotografias como instrumentos de coleta de dados. O autor cita que a pesquisa está estruturada de acordo com a Engenharia Didática. A sequência didática foi realizada em uma turma com 18 estudantes do 3º ano do ensino médio, durante os meses de outubro, novembro e início de dezembro de 2014. Os estudantes realizaram a atividade individualmente.

Em seu trabalho, Halberstadt (2015) percorreu as fases da Engenharia Didática, realizando as análises das concepções prévias, concepção e análise *a priori*, o planejamento da sequência didática, passando pela análise *a posteriori* e validação da sequência didática. Identificamos na dissertação explicações objetivas e simples acerca das variáveis globais e locais. A fase da experimentação é bem detalhada e traz registros escritos dos estudantes. A análise dos dados não foi realizada pela teoria da Engenharia Didática, para as análises o autor recorreu a Teoria dos Registros das Representações Semiótica de Raymond Duval.

O autor concluiu sua dissertação compreendendo que o processo colaborou para a compreensão do conteúdo matemático abordado. No entanto, ressalta que não se trata de uma compreensão plena dos estudantes, e sim de indícios que as atividades propostas contribuíram para o processo de reconhecimento dos objetivos e de seus registros de representação semiótica. Ressalta-se na observação do autor que a atividade realizada individualmente pelos estudantes não favorecia a aprendizagem, desse modo, buscou-se motivar a interação em sala de aula não só aluno-computador, mas também aluno-professor e aluno-aluno, o que contribuiu para uma atuação mais ativa em busca do conhecimento.

No último trabalho selecionado, Cavalcante (2017) desenvolveu sua dissertação com o objetivo de elaborar uma sequência de ensino para trabalhar o conceito de parábola com alunos do terceiro ano do ensino médio. Seus objetivos específicos foram: investigar teorias que possam fundamentar o desenvolvimento da sequência de ensino; buscar uma metodologia para nos auxiliar no desenvolvimento da sequência didática e na sua aplicação em sala de aula; aplicar a sequência de ensino em uma turma de terceiro ano do ensino médio; e avaliar o resultado obtido após a implementação da sequência de ensino, usando um questionário e um teste para verificação da aprendizagem.

O autor abordou em seu texto a Teoria das Situações Didáticas e a Metodologia da Engenharia Didática, no entanto não identificamos a metodologia utilizada na dissertação. O texto deixou claro que os estudantes do 3º ano do ensino médio (não há referência de quantidade de alunos), foram levados ao laboratório de informática e com o uso do Grafeq, realizaram sete atividades e responderam cinco perguntas fechadas. O trabalho foi aplicado de maneira que os alunos desenvolvessem a experiência individualmente.

Identificamos que o trabalho foi inspirado nas teorias apresentadas, entretanto, alguns aspectos da Engenharia Didática e da Teoria das Situações Didáticas não se mostraram presentes. As análises dos resultados não foram apresentadas de acordo com a Engenharia Didática e/ou a Teoria das Situações Didáticas. Observamos que as análises das atividades aplicadas aos estudantes consideraram a frequência das respostas às perguntas da atividade.

Cavalcante (2017, p. 33), cita em suas considerações finais que:

percebemos qual é o papel do professor nesse processo, vimos que, ainda que seja de uma forma menos intensa do que acontece no ensino tradicional, o docente não perde a sua importância dentro do processo pois, está incumbido de mediar o relacionamento do aluno com o conteúdo.

O autor conclui sua dissertação afirmando que a sequência didática trouxe benefícios para o ensino usual de geometria analítica, no 3º ano do ensino médio, uma vez que foi bem aceita “pelos alunos e apresentou resultados satisfatórios, no que tange à formação do conceito de parábola” (CAVALCANTE, 2017, p. 35).

O trabalho não abordou como se deu a interação do estudante com o material utilizado (sequência didática com *Grafeq*) e com o professor, também não mostrou como os processos de ensino e aprendizagem ocorreram ou como os contratos didáticos se estabeleceram no ambiente.

Este levantamento possibilitou compreender a pertinência e importância de pesquisas realizadas no cenário nacional, com estudantes do ensino médio, relacionadas à aprendizagem da Geometria Analítica e a utilização da Engenharia Didática como metodologia ou proposta didática.

Igualmente foi possível verificar a quantidade reduzida de pesquisas que trazem os três objetos de interesse desta investigação (ensino médio + geometria analítica + engenharia didática), sendo duas dissertações da região sudeste (PUC/SP), duas dissertações da região sul (UFRS e UFSM) e uma da região norte (UFAM). Ademais, com base nos parâmetros utilizados neste levantamento de produções científicas nacionais, ressaltou não ter sido encontrada nenhuma pesquisa de doutorado realizada nos últimos dez anos (2008-2018), em consonância com as temáticas de interesses deste estudo.

Mas a leitura das investigações apresentadas por Goulart (2009), Silva (2014), Lopes (2014), Halberstadt (2015) e Cavalcante (2017) possibilitou perceber limitações do trabalho didático com geometria analítica, tanto para alunos quanto para professores, o que reforça a importância deste estudo investigativo.

No entanto, nestes trabalhos não foram identificados elementos e possibilidades que compõem esta tese. Em relação aos trabalhos relacionados na Tabela 2 e na Tabela 3, diferentemente desta investigação, observamos que nos cinco estudos, os próprios pesquisadores aplicaram a sequência didática que eles mesmos elaboraram; e definiram, assim, as regras de funcionamento para o momento da sala de aula agindo como professores pesquisadores.

Não há o registro da participação dos professores das escolas como colaboradores do planejamento e aplicação das sequências didáticas. Concordamos com Souza e Lima (2014) ao mencionarem que existem diferenças na negociação do contrato didático em sala de aula quando a sequência é aplicada por aquele que a elabora ou quando é aplicada por um professor que não a idealizou ou participou de seu planejamento.

Mais uma observação que diferencia esta tese com os trabalhos analisados, refere-se ao número de estudantes envolvidos na pesquisa, constituindo-se em número reduzido (entre 5 e 18) e desenvolvidas fora das salas de aulas regulares, em outros espaços educativos como o laboratório de informática. A intencionalidade desta observação era verificar a possibilidade da aplicação das sequências didáticas em larga escala, em todas as turmas de uma escola em um mesmo período letivo.

Verificamos não ser possível aplicar as sequências didáticas descritas nos 5 trabalhos analisados em grupos grandes de estudantes, ao contrário desta

investigação, que possibilitou aplicar uma sequência didática em 7 turmas de 3º ano do Ensino Médio, atendendo 228 estudantes participantes de pequenos grupos colaborativos, em um mesmo bimestre letivo.

Outra distinção e observação pertinente, refere-se ao tipo de recurso didático utilizado nos estudos, os cinco trabalhos utilizaram recursos tecnológicos, nenhum deles fez o uso de recursos didáticos concretos. Acreditamos no diferencial deste estudo e que esta tese possa contribuir para o cenário de pesquisa que delineamos, até porque propõe o planejamento colaborativo com a participação de professores da escola e desenvolvimento de uma sequência didática a ser aplicada em larga escala no ensino médio, com a utilização de material concreto de fácil adequação para o contexto social e pedagógico de quaisquer escolas.

CAPÍTULO 2 - REFERENCIAL TEÓRICO

A teoria protocola os dados da realidade e se caracteriza por tentar descrever a realidade para que possamos compreender determinados fenômenos que pretendemos pesquisar, explicar, mostrar ou delinear.

Neste capítulo discutimos importantes termos no intuito de ampliarmos e aprofundarmos os principais conceitos relacionados ao objetivo desta pesquisa.

Recorremos a Brousseau (1996, 2008a, 2008b); Charnay (2008); Gálvez (2008); Pais (2011), para tratar da “Didática da Matemática”, especialmente, acerca da **Teoria das Situações Didáticas** e do **contrato didático**. Buscamos com Almouloud (2011, 2017); Artigue (1996); Brum e Schuhmacher (2013); Machado (2016); Oliveira (2015); Dolz (2016) conhecimentos acerca da **Teoria da Engenharia Didática**. Conversamos com Brougère (2000, 2003); Huizinga (2014); Kishimoto (1997, 2011); Macedo, Petty e Passos (2005); Negrine (2016); para tratar os conceitos da **ludicidade, do brinquedo e da brincadeira**. Convidamos Borin (2002); Brenelli (2016); Grando (2004, 2007, 2016); Kamii (2016); Muniz (2010), para dialogar sobre **jogo e a aprendizagem matemática**. Recorremos a Damiani (2008); Dillenbourg (1999); Fiorentini (2010) e Vigotski (1998) para dialogar acerca da **aprendizagem colaborativa**. Para compreender os **pequenos grupos colaborativos**, dialogamos com Alves e Seminotti (2006); Bruffee (1999); Costa (2014); Farinha (2005, 2014); Figueiredo (2006); Stahl, Koschmann e Suthers (2006) e Lisboa (2013) por fim, discutimos com Fiorentini (2013); Lorenzato (1995), Micotti (1997) e Murari (2005) acerca da **Educação Matemática, o ensino de geometria e pressupostos da BNCC 2018**.

2.1 - DIALOGANDO COM BROUSSEAU

A consolidação da Educação Matemática, enquanto campo fértil investigativo, recebeu um grande impulso com o desenvolvimento de uma área do conhecimento relativamente autônoma, denominada como didática da matemática (GÁLVEZ, 2008). Esta área teve sua origem no final da década de 60, com as atividades desenvolvidas por matemáticos, nos Institutos de Investigação acerca do Ensino das Matemáticas (Irem), da Universidade de Bordeaux na França.

Originalmente, os *Irem* se dedicavam a complementar a formação matemática dos professores, com formação continuada e na preparação de novos professores,

nas escolas primárias. Galvez (2008) mencionou que outra função inicial dos institutos, consistia em atividade de produção de materiais de apoio para o trabalho dos docentes em sala de aula: textos matemáticos, fichas de trabalho para os estudantes, jogos e brinquedos didáticos, coleções de problemas, sequência de lições.

A confecção de tais materiais pedagógicos, segundo Gálvez (2008, p. 27), constantemente era acompanhada de uma experiência simples, “concebida como prova de sua possibilidade e como antecedente para introduzir ajustes mínimos”. O autor esclarece que nos estudos de Brousseau, devemos criar situações didáticas que façam funcionar o saber, a partir dos saberes definido culturalmente nos programas escolares” (GALVEZ,1996, p. 32).

Diante da reflexão sobre a validade das ações desenvolvidas nos Irem, surgiu outra classe de atividades destinada à produção de conhecimentos para controlar e produzir ações sobre o ensino. A pesquisa científica passou a ter lugar no domínio do ensino escolar da matemática, um espaço propício à investigação e análise dos fenômenos que emergem na relação didática em sala de aula. Um dos pesquisadores que liderou a promoção e desenvolvimento deste projeto foi Guy Brousseau, o qual fundou em 1972 o Centro de Observação e Pesquisa no Ensino de Matemática (COREM), na Escola Jules Michelet, em Talence, França.

Em suas pesquisas no COREM, Brousseau desenvolveu sua principal contribuição teórica, a Teoria das Situações Didáticas, propondo uma construção que permitisse a compressão das interações sociais dos alunos, professores e conhecimentos matemáticos em sala de aula e que condicionam o que aprender e de que forma se daria a aprendizagem.

Nesta investigação, adotaremos o conceito de Brousseau acerca da Teoria das Situações Didáticas, traduzida por Freitas (2002, p. 67), como sendo “um conjunto de relações estabelecidas explícita ou implicitamente entre um estudante ou grupo de estudantes”, em um certo **meio**, compreendendo de maneira eventual instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) objetivando possibilitar a estes estudantes um saber organizado ou em vias de organização [...].

Assim, segundo a proposta de Brousseau, em uma situação didática deve-se recriar os cenários e as condições em que surgirão novas aprendizagens. Neste cenário, segundo Gimenes (2016, p. 19), o aluno assume o papel de pesquisador e “coloca a mão na massa observando e catalogando padrões, criando e testando

conjecturas”, ou seja, o professor insere o aluno na situação didática favorável a uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes e contribui para o protagonismo juvenil.

Almouloud (2019, p. 149) afirma que na Teoria das Situações Didáticas, “a prioridade é dada à organização própria das noções científicas a adquirir”. Segundo este autor, o trabalho de aprendizagem não será analisado somente em nível do sujeito, mas também ao “nível de um grupo de sujeitos e de interações entre sujeitos de um grupo”.

Não obstante, uma situação adidática é uma parte essencial de uma situação didática. É aquela situação caracterizada pela existência de certos fenômenos de aprendizagens, na qual a intencionalidade de ensinar não é demonstrada pelo professor ao aprendiz, contudo foi imaginada, planejada e construída, para possibilitar a este condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar (ALMOULOU, 2014), saberes que não estão sob o controle pedagógico do professor.

Da mesma forma, PAIS (2001, p. 67) mencionou que um dos objetivos da educação matemática é contribuir para que o estudante seja capaz de “desenvolver uma certa autonomia intelectual e que o saber escolar aprendido lhe proporcione condições para compreender e participar do mundo em que ele vive”. Assim, uma situação adidática é aquela que permite compreender a interação entre a aprendizagem escolar e o espaço maior da vida, para além dos muros da escola, incluindo o imaginário do sujeito cognitivo (BROUSSEAU, 1986; PAIS, 2001).

De acordo com Brousseau (2008b), para se promover situações de aprendizagem, é necessário que o professor coloque o aluno diante de situações em que aconteça o desequilíbrio, ou seja, situações que seus esquemas cognitivos inicialmente não são capazes de resolver, mas que se articulam com o meio para que favoreçam a aprendizagem. Os preceitos da Teoria das Situações Didáticas nos autorizam colocar o aluno na condição de protagonista, em situações nas quais possam exercitar o pensamento crítico e criativo (BRASIL, 2018). Para proporcionar a aquisição de conhecimentos, o professor necessita criar e organizar um meio em que serão desenvolvidas as situações.

O meio ou o “*milieu*” (BROUSSEAU, 2008b), é um ambiente criado e organizado pelo professor, que promova a aprendizagem numa interação feita de desequilíbrios, contradições e dificuldades. O objetivo do professor ao organizar o

milieu ou cenário de aprendizagem, é iniciar um jogo em que o conhecimento vencedor seja o conhecimento a ser aprendido, e o conhecimento prévio dos estudantes pode ajudá-los a ganhar o jogo e interpretar as respostas a este “*milieu*”. Desse modo, este espaço de criação deve possibilitar a interação e autonomia do estudante em relação às situações que interage e em relação ao professor.

O objeto central de estudo da Teoria das Situações Didáticas é o processo de ensino e aprendizagem, o foco desta teoria não é o sujeito cognitivo, mas a própria situação didática, formada pelas interações e múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre o professor, alunos e o saber. Esta conexão em sala de aula é voltada ao ensino e aprendizagem de um conteúdo específico, com a utilização ou não de instrumentos didáticos como questionários ou um jogo colaborativo (objeto de estudo desta investigação). Os três componentes, professor-aluno-saber, são essenciais para a existência de uma situação didática, a ausência de algum elemento torna a situação didática apenas como uma situação de estudo.

Pais (2011) alertou que unindo esses três componentes em uma situação didática, não é condição necessária para envolver toda a complexidade do fenômeno cognitivo, assim, torna-se essencial vincular tais situações com outros elementos do sistema didático: objetivos, métodos, recursos didáticos, a epistemologia do professor em relação ao saber e aos recursos didáticos; o resultado de um jogo na interação entre o aluno com seus colegas e com o professor; a relação do aluno com o saber.

Para facilitar a análise das situações didáticas, Brousseau (2008a) destacou que as situações podem ser categorizadas em função da relação que professor e alunos estabelecem com o saber. Sendo assim, o autor ressaltou a classificação das situações didáticas em 4 (quatro) categorias gerais:

situação de ação – nas quais se gera uma interação entre o aluno e o meio físico, caracteriza-se por tentativas espontâneas, em que o aprendiz deve tomar iniciativas para que sua atividade fique organizada. A situação de ação “é aquela em que o aluno realiza procedimentos mais imediatos para a resolução de um problema, resultando na produção de um conhecimento de natureza mais experimental e intuitiva do que teórica” (PAIS, 2011, p. 72);

situação de formulação – aquela cujo objetivo é a comunicação de informações entre os alunos, acontecendo trocas de informações e a busca por novas. Para isso acontecer, os alunos devem transformar a linguagem habitual, adequando-as às informações que devem comunicar;

situação de validação – aquela na qual se tenta convencer a um ou vários interlocutores da validade das afirmações que são feitas. Os alunos elaboram provas que devem ser demonstradas; não basta a comunicação empírica do que afirmam está correto, mas é necessário explicar o porquê de sê-lo assim. Nesse tipo de situação o aluno procura defender sua opinião ou descrever uma demonstração, usa a linguagem para validar suas ideias, desse modo, “os alunos organizam enunciados em demonstrações, constroem teorias” (BROUSSEAU, 2008a, p. 27);

situação de institucionalização – constitui o momento de estabelecimento das convenções sociais, isto é, a síntese do que foi construído pelos sujeitos durante o processo e que tem um significado socialmente estabelecido. Nesse tipo de situação, procura-se que o coletivo dos alunos participantes de uma determinada atividade, adote o significado social estabelecido do saber que foi vivenciado por eles (GÁLVEZ, 2008), nas situações de ação, formulação e validação. É o momento em que o professor orienta sobre o que é importante, auxiliando os alunos na seleção de conceitos válidos. Segundo Pais (2011), é o momento em que sob a orientação do professor, procede-se a passagem do conhecimento individual construído pelos alunos, ao nível de conhecimento científico, estabelecido historicamente e culturalmente.

Essas categorias propostas por Brousseau para o processo de aprendizagem, sinalizam o comportamento do aluno em cada uma delas. Nesse processo de aprendizagem, o saber tem diferentes funções e o aluno não tem a mesma relação com o saber. No entanto, Charnay (2008) enfatizou que um dos objetivos essenciais do ensino de matemática é fazer com que, o que se ensine, seja carregado de significado, que tenha sentido para o estudante.

Cabe ressaltar que a Teoria das Situações Didáticas, para Brousseau (2008a, p. 32), “cada situação pode fazer com que o sujeito progrida, e por isso também pode progredir”. Isso ocorre de tal maneira, que o princípio de um conhecimento pode ser fruto de uma série (espontânea ou não) de novas perguntas e respostas, um processo que Brousseau chamou de “dialética”. Desse modo, as séries de situações de ação, formulação e validação podem unir-se para acelerar as aprendizagens.

As quatro categorias de situações se constituem em um modelo teórico que, ao ser colocado em prática, são regidas por regras e convenções, por vezes não previsíveis no sistema didático (PAIS, 2011), equivalentes a cláusulas de um contrato.

Para Brousseau (2008a), o contrato didático é caracterizado pelo conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos estudantes e conjunto de comportamentos do estudante que são esperados pelo professor. Assim, esse contrato é o conjunto de regras que estabelece, uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática precisará gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro.

Segundo Pais (2011, p. 83), contratos didáticos “são modelos que indicam diferentes maneiras de conduzir a prática educativa escolar”. Pais (2011) apresentou os três modelos de contratos didáticos propostos por Brousseau (2008a) e Charnay (2008), a partir da postura do professor em relação ao aluno e à valorização do saber.

O **primeiro contrato didático**, o modelo normativo (CHARNAY, 2008), destaca a importância do conteúdo e a efetivação dessa valorização acontece mediante a relação entre professor e aluno. Pais (2011) alertou que uma característica marcante desse tipo de contrato é o fato de o professor considerar que possui o monopólio do conhecimento.

No **segundo modelo de contrato didático**, o incitativo (CHARNAY, 2008), enfatiza-se a relação entre aluno e o saber, com o professor participando levemente em cena somente para o acompanhamento da situação didática.

No **terceiro contrato**, o modelo aproximativo (CHARNAY, 2008), há uma forte ênfase no relacionamento do aluno com o saber, mas o professor tenta estabelecer um nível de intervenção bem mais comprometido que no segundo contrato. Nesse caso, a aprendizagem é considerada tanto em sua dimensão individual quanto em situações envolvendo pequenos grupos ou a classe como um todo. Em tal modelo, o professor não é considerado mais a fonte de conhecimento. No entanto, o professor exerce a sua função de orientar o processo de aprendizagem, pois é ele quem planeja as situações didáticas, buscando situações desafiadoras adequadas ao nível intelectual do aluno. Esse tipo de contrato aponta para uma maior valorização da resolução de problemas, fazendo com que o aluno seja levado a atuar ativamente na elaboração dos conceitos matemáticos.

Cabe considerar que nenhum professor utiliza exclusivamente um dos modelos de contrato didático, afinal, a ação pedagógica com toda sua complexidade utiliza elementos de cada um deles. Charnay (2008) mencionou que, apesar de tudo, cada professor faz a escolha de um deles, consciente ou não e de maneira privilegiada, toda situação didática envolve intencionalidade e desejo do professor. Ademais, para

Brousseau (2008b, p. 71) um professor que unicamente “recita, não pode comunicar o essencial, e se quisermos fazê-lo apresentar uma situação, sem margem para recriá-la, o ensino fracassaria”. O professor precisa de liberdade e criatividade em suas ações pedagógicas.

As concepções do ensino nos tempos atuais exigem que o professor provoque no aluno desequilíbrios, mediante seleção acertada dos “problemas” que propõe, pois, de acordo com Brousseau (2008a), essa escolha deve assegurar três características fundamentais no contexto das situações didáticas: possibilitar que o estudante aja, comunique e progrida por conta própria; oportunizar que o estudante construa novos conhecimentos, tentando superar com o seu próprio esforço, determinados pontos que conduzem o raciocínio em direção à sua aprendizagem; e formular condições, via orientação, pra que o estudante seja o principal ator na construção dos conhecimentos, a partir dos problemas propostos.

Além disso, como observou Charnay (2008), a escolha dos problemas elaborados para fazer funcionar o saber, devem observar os saberes estabelecidos culturalmente nos programas escolares.

Uma opção pedagógica para trabalhar determinado conteúdo previsto nos currículos escolares, é a utilização de sequências didáticas. Resumidamente, a sequência didática é um conjunto de atividades, estratégias e intervenções planejadas, passo a passo, pelo professor para que o entendimento de determinado conceito ou conteúdo proposto seja alcançado pelos alunos (KOBASHIGAWA *et al.*, 2008).

Para funcionamento de uma investigação necessária e pertinente a este estudo da aprendizagem, e sobremaneira, do ensino, “parece ser indispensável uma boa Engenharia Didática” (BROUSSEAU, 1996, p.41). Estruturar sequências de ensino é um dos objetivos da Engenharia Didática, que se “caracteriza como uma forma particular de organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa em didática da Matemática” (PAIS, 211, p. 99).

Estruturada nas investigações de Artigue (1996), a Engenharia Didática põe em evidência as relações mútuas entre professor, estudante e o conhecimento. É uma metodologia que torna possível encarar problemas práticos de sala de aula, e, simultaneamente, valorizar o trabalho do professor.

2.2 - A ENGENHARIA DIDÁTICA

A Engenharia Didática é uma metodologia de investigação que se constitui com a finalidade de conceber, realizar, observar e analisar situações didáticas (ARTIGUE, 1996; MACHADO, 2016; BRUM, SCHUHMACHER, 2013; DOLZ, 2016). A noção de Engenharia Didática surgiu no início da década de 1980, ao considerar o papel do professor semelhante ao trabalho do engenheiro, um protagonista importante no processo de investigação e elaboração de produtos e ferramentas técnicas complexas (DOLZ, 2016), desenvolvidas no contexto da sala de aula.

De acordo com Artigue (1996, p.196), a Engenharia Didática é um processo empírico, uma metodologia de pesquisa que se define por um esquema experimental apoiado em “realizações didáticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino”. A constituição da metodologia da Engenharia Didática emergiu em decorrência dos estudos conhecidos como Didática da Matemática, com origem na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986). Artigue (1996) teve o mérito de formalizar algo que era discutido dentro das práticas das situações didáticas e, a partir de uma síntese dos estudos de Brousseau, desenvolveu o que se convencionou chamar de Engenharia Didática de 1ª Geração, que será abordada nesta tese.

Como alertou Brum e Schuhmacher (2013), a Didática da Matemática “não se reduz a pesquisar um bom meio ou modelo de ensinar uma específica ideia ou conceito científico”. Da mesma maneira, para Artigue (1996), é necessária uma metodologia de investigação científica que busque extrair relações entre pesquisa e ação sobre o sistema baseado em conhecimentos didáticos preestabelecidos. Sendo assim, a Engenharia Didática enquanto metodologia, caracteriza-se como objeto didático que envolve plano de ensino, criação de materiais didáticos e esquema experimental, fundamentado nas situações didáticas em sala (ARTIGUE, 1996; BRUM, SCHUHMACHER, 2013).

A Engenharia Didática tem três possibilidades de aplicação: 1) como metodologia de pesquisa; 2) como pressuposto para atuação em sala de aula, para planejar sequências didáticas, analisar e explicar fenômenos e desenvolver questões teóricas; 3) a conjugação da primeira com a segunda possibilidade. A Engenharia Didática evoca a existência de uma descrição, um estudo e justificações que possibilitem possíveis condições de utilização deste dispositivo em diversos contextos.

Nesta investigação, inserida no campo da educação matemática, utilizamos a Engenharia Didática com dupla função: como uma metodologia de pesquisa e uma produção para o ensino de Matemática.

Para Brousseau (1996), a Engenharia Didática acompanha os dispositivos produzidos a partir de um conjunto de estudos e análises que são características do produto, da coleta de dados, de análises *a priori*, da análise *a posteriori*. Estes estudos são indispensáveis para a análise das observações das atividades de ensino efetivamente realizadas, explicações teóricas, fenômenos observados. Este tipo de investigação é indispensável para estudar sistematicamente modelos teóricos de dispositivos de aprendizagem e de ensino. Desse modo, como assevera Oliveira (2015), a metodologia da Engenharia Didática tem o potencial de estabelecer o elo entre a construção do saber matemático com uma prática investigativa e reflexiva perante uma sequência didática experimental.

Segundo Almouloud (2011), o trabalho docente presume evidentemente um conhecimento do objeto de saber e, também, da maneira pelo qual os estudantes constroem seus conhecimentos. Na didática da matemática, considera-se que a aprendizagem ideal consiste em colocar o estudante em situações problemáticas cuja resolução levaria à construção do conhecimento visado. Assim, caracterizamos a Engenharia Didática como uma maneira viável de proposta metodológica por considerar as peculiaridades dessa modalidade de pesquisa, pelo fato de buscar os conhecimentos prévios dos estudantes e a partir deles construir um saber autêntico, consciente e verdadeiro.

Apoiados nos estudos de Artigue (1996), apresentaremos as fases da metodologia da Engenharia Didática. A descrição da metodologia no seu processo experimental compreende quatro fases: a 1ª fase, dos estudos preliminares; a 2ª fase, da concepção e análise *a priori*; a 3ª fase, da experimentação; e a 4ª fase, da análise *a posteriori* e validação.

Nos **estudos preliminares**, fase inicial da engenharia, efetuam-se (ARTIGUE, 1996; MACHADO, 2016; OLIVEIRA, 2015) procedimentos que possam contribuir para a eficácia da sequência didática:

- a. obter um quadro teórico didático geral e revisão da literatura objetivando identificar dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem de uma certa temática;
- b. levar em consideração os objetivos específicos da investigação;

- c. analisar as representações das capacidades, dificuldades e dos obstáculos; dos alunos;
- d. realizar consulta aos professores envolvidos na área de conhecimento objeto da sequência didática;
- e. aplicar instrumentos que evidenciem como se encontra a verdadeira situação da área de conhecimento que se pretende atuar.

Artigue (1996) indica que esse estudo preliminar inclua a diferenciação de três dimensões: 1) dimensão epistemológica; 2) dimensão didática e 3) dimensão cognitiva.

A dimensão epistemológica diz respeito às características do conteúdo em questão e do seu aspecto histórico, bem como de sua abordagem na atualidade. A dimensão didática relaciona-se com a maneira como o ensino de determinado conceito deverá ser desenvolvido. E a dimensão cognitiva está associada às características dos estudantes, para os quais está direcionado o ensino.

Desse modo, é nos estudos preliminares que o investigador, ao desenvolver o seu trabalho, deve juntar informações preliminares pertinentes que vão contribuir para a elaboração da sequência didática.

Na 2ª fase, **de concepção e análise a priori**, que acontece antes da experimentação, o investigador orientado pelos estudos preliminares decide agir sobre as variáveis que deduz serem importantes ao problema de investigação (ARTIGUE, 1996; MACHADO, 2016; OLIVEIRA 2015). Nesta fase, Artigue (1996) ressalta que para se conhecer o que se objetiva experimentar, bem como para facilitar a análise de uma engenharia, torna-se importante delimitar as variáveis de controle:

- a. variáveis globais, que se referem à organização mais geral e ampla da engenharia. São variáveis envolvidas em todas as etapas da engenharia, desde a elaboração de testes diagnósticos, da realização da experimentação em sala de aula, até a institucionalização do ensino;
- b. variáveis locais, aquelas que se referem ao planejamento específico de uma sessão da sequência didática, ou seja, é limitada a uma fase da investigação.

As variáveis de controle, como ressaltaram Brum e Schuhmacher (2013, p. 65), “são pertinentes ao sistema didático (professor/aluno/saber) e consideradas essenciais pelo investigador/professor, sendo abordadas nas várias sessões ou fases da Engenharia Didática”.

A análise *a priori* requer uma parte descritiva e outra preditiva, no qual o comportamento do estudante é o ponto principal da análise (BRUM, SCHUHMACHER, 2013). Portanto, é na fase da análise *a priori* que se realiza a previsão das ações e que se antecipam os comportamentos dos estudantes, que poderão acontecer durante a aplicação da sequência didática.

Para isso, institui-se o que denominamos nesta tese de **estratégias previstas para solução**, isto é, estratégias que o estudante pode seguir para solucionar as situações-problema da sequência didática. São essas estratégias que serão confrontadas com os comportamentos dos estudantes, ou seja, entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*. Segundo Machado (2016, p. 242) a validação da Engenharia Didática é fundamentalmente interna, e esse fato, “constitui uma das originalidades desse método”. Ressalta-se então que o processo de validação se inicia desde a fase de concepção e da análise *a priori*. É na 2ª fase da Engenharia Didática que acontece a elaboração das atividades constituintes da sequência didática.

A 3ª fase, da **experimentação**, é clássica (ARTIGUE, 1996). É a fase de ir a campo, momento de se colocar em funcionamento o produto didático, que corresponde ao desenvolvimento da aplicação da Engenharia Didática, planejada e elaborada na fase anterior.

A experimentação pressupõe: explicitar os objetivos e condições de realização da investigação; estabelecer o contrato didático; pôr em prática a sequência didática, aplicar os instrumentos de construção dos dados para a investigação; observar atentamente as situações de aprendizagem durante a aplicação do produto didático e registrar as observações realizadas durante a experimentação. Durante o desenvolvimento, se houver necessidade, pode-se corrigir alguma variável local retomando as análises *a priori* para realizar adequações.

A 4ª fase é da **análise a posteriori e da validação**. É a fase que se apoia no conjunto de dados construídos durante a atividade experimental, tanto ao longo de toda a experimentação, como ao final dela, ou seja, é o momento do tratamento dos dados que foram obtidos na fase experimental da sequência didática. Para Artigue (1996), os dados são normalmente complementados por informações obtidas mediante a utilização de instrumentos didáticos, tais como: questionários, testes individuais ou em pequenos grupos, realizados em diversos momentos do processo de ensino ou no final.

E por fim, a fase da validação é aquela que, segundo Artigue (1996), baseia-se na confrontação entre os dados obtidos da análise *a priori* com os resultados obtidos na análise *a posteriori*, de modo a validar as estratégias levantadas no início da engenharia.

Considerando a engenharia didática como metodologia desta tese, propomos a reflexão sobre a ludicidade, apresentada na seção seguinte, com o objetivo de subsidiar a construção de sequências didáticas propostas nesta investigação.

2.3 - LUDICIDADE: O JOGO, O BRINQUEDO E A BRINCADEIRA

O jogo, o brinquedo e a brincadeira estão presentes na vida do ser humano, dos tempos mais remotos até a atualidade, em manifestações diversas, como nas religiosas, sociais, esportivas, educativas, culturais (MIRANDA, 2014). Na obra *Homo Ludens* (homem brincante), Huizinga (2014) considerou o **jogo** como elemento da cultura humana, abordando-o por um enfoque histórico-sociológico. Além disso, ele apresentou o jogo como anterior à cultura, posto que esta pressupõe a existência da civilização humana, enquanto os animais praticavam jogos sem mesmo esperar que os humanos os iniciassem na ação lúdica.

Para fundamentar a seção que versará sobre a ludicidade, o jogo, o brinquedo e a brincadeira, incluímos aportes teóricos necessários para tratar de pontos importantes à pesquisa, tais como, representações, classificações e características que os autores fazem sobre jogo, a importância da ludicidade para o processo de ensino e aprendizagem e conceitos para compreender a importância da ludicidade para a educação.

Assim, os pesquisadores dos jogos buscam fundamentar-se em teorias e estudos para elaborar suas concepções acerca da palavra jogo, mas nem toda atividade lúdica é um jogo, entretanto os jogos, as atividades lúdicas e jogo educativo possuem significados muito aproximados. Sobre a polissemia de significados e o uso da expressão “jogo”, Brougère (2003, p. 9) citou:

Não se trata de dizer o que é, o que deve ser o jogo, mas de compreender em que estratégias este vocábulo é utilizado, por que uma reflexão sobre a educação pode apropriar-se, ou não, desse termo para expressar suas escolhas. Com efeito, não se pode considerar equivalentes todos os discursos que preconizam que o professor deve recorrer ao jogo. A própria ideia que se tem de jogo varia de acordo com autores e épocas, a maneira como é utilizado e as razões dessa utilização são igualmente diferentes.

Kishimoto (2011) mencionou que a diversidade de fenômenos conceituados como jogo confirma a complexidade de se definir a palavra. Um mesmo procedimento ou comportamento pode ser considerado jogo ou não-jogo em diferentes contextos socioculturais, derivando do significado conferido a ele. Desse modo, Kishimoto (2011, p. 15) entendeu que “fica difícil elaborar uma definição de jogo que englobe a multiplicidade de suas manifestações concretas”, afinal os jogos têm especificidades que os aproximam ou que os afastam.

Ao ampliar a complexidade da questão, Kishimoto (2011, p. 15) disse que dentre “os materiais lúdicos, alguns são usualmente chamados de jogos, outros, de brinquedos”. Para compreender a diferença entre jogo e brinquedo, a autora recorreu aos estudos de Brougère (2003), que mergulhou em discussões linguísticas e no funcionamento da linguagem, para apresentar indicativos que permitiriam revelar representações ligadas à palavra jogo. Desse modo, Brougère (2003) atribuiu ao termo jogo três níveis de diferenciação:

- a. **Resultante de um sistema linguístico.** Funciona dentro de um contexto social. Segundo Brougère, jogo é o que os estudos científicos denominam “atividade lúdica”, seja por observação externa ou ao sentimento individual que cada um possa ter, em certas situações, de participar de um jogo. Brougère (2003, p. 14) também mencionou que situações bastante diferenciadas também são compreendidas como jogo, “de maneira direta ou mais ou menos metafórica, tais como jogos políticos”. O essencial aqui é respeitar o uso rotineiro e social da linguagem, presumindo interpretações e influência social;
- b. **Um sistema de regras.** O jogo é uma estrutura que existe e funciona de modo abstrato livremente dos jogadores, por exemplo, um jogo de damas. São sistemas que tem regras explícitas, que as diferenciam dos demais jogos;
- c. **Um objeto.** O terceiro nível é associado ao termo “brinquedo”. Por exemplo, o pião que pode ser confeccionado em madeira, plástico ou outros materiais, representa o “objeto” utilizado na brincadeira roda pião.

O **brinquedo** trata-se de um objeto que a criança manipula livremente, sem sistema de regras, *a priori*, que organizam sua utilização (BROUGÈRE, 2000; KISHIMOTO, 2011). O brinquedo inserido em um sistema social e portador de funções sociais e significados, remete a elementos do real, do imaginário da criança e do adulto, criador do objeto lúdico. Cada cultura tem modos de ver a criança, de tratar e educar. Ao associar brinquedo e cultura, Brougère (2000) mencionou que o primeiro

é considerado como fruto de uma sociedade dotada de traços culturais específicos e revelador desta própria cultura. Assim, Kishimoto (2011), corroborando com Brougère (2000), citou que o adulto introduz nos brinquedos imagens que variam de acordo com a sua cultura.

Portanto, o brinquedo referencia o tempo de infância do adulto com suas representações sociais veiculadas pela memória e imaginação. Enquanto objeto, o brinquedo é suporte da **brincadeira** (KISHIMOTO, 2011), é o estimulador material para fazer fluir o imaginário infantil. Kishimoto (1997) mencionou que os termos brinquedo e brincadeira aparecem com significações opostas e contraditórias em contextos educativos.

Para a autora, a brincadeira na escola é “vista ora como ação livre, ora como atividade supervisionada pelo adulto” (KISHIMOTO, 1997, p. 27). O brinquedo representa qualquer objeto que serve de apoio para a brincadeira livre ou fica vinculado ao ensino de conteúdo escolar. Desse modo, há divergência de significação, ao considerar a contraposição entre a liberdade e orientação das brincadeiras na escola, entre a ação lúdica idealizada como fim e si mesmo, ou com finalidade pedagógica específica. No entanto, há de se compreender o ato de brincar como uma ação livre e espontânea, enquanto o objeto brinquedo, como elemento da ação docente destinado a alguma atividade pedagógica.

Desse modo, acerca das possibilidades educativas da brincadeira, Brougère (1997, p. 91) diz que “a brincadeira é boa porque a natureza pura, representada pela criança, é boa; tornar a brincadeira um suporte pedagógico é seguir a natureza”. Assim compreendemos que não há receio algum em trazer o lúdico para o cotidiano do processo de ensino e aprendizagem, na construção de conhecimentos nas diversas etapas de escolarização.

Compreendemos a importância da ludicidade no processo de desenvolvimento humano, uma ludicidade que produz estudos científicos, que busca novas maneiras de intervenção pedagógica como estratégia favorecedora do processo educativo (NEGRINE, 2016).

Entendemos que o lúdico encontra espaços em todos os níveis de ensino para o desenvolvimento humano. Compreendemos que o professor pode pesquisar atividades que despertem o pensar, bem como trabalhar o aspecto lúdico dentro dele mesmo, para conseguir repassar aos estudantes. É importante considerar o lúdico enquanto força motriz para a aprendizagem. Empregar de forma adequada a

ludicidade em contextos educativos, desperta e desenvolve a criatividade dos estudantes, a autonomia e a sua integração social enquanto brinca.

Para D'Ávila (2014), o conceito de ludicidade se articula a duas dimensões:

- a. A de que as atividades lúdicas são criações culturais, são atos sociais, oriundos das relações dos homens entre si na sociedade;
- b. A ludicidade é um estado de ânimo, um estado de espírito que expressa um sentimento de entrega, de inteireza, de vivência plena, e diz respeito à realidade interna do indivíduo.

Dessa maneira, a ludicidade não pode ser vista somente como diversão, ela é uma necessidade do ser humano em qualquer idade. O desenvolvimento do aspecto lúdico promove a aprendizagem, o desenvolvimento pessoal, social e cultural, coopera para uma boa saúde mental, prepara para um estado interior fértil, promove os processos de socialização, comunicação, expressão e construção do conhecimento (SANTOS, 2016). Mas como reconhecer que determinada atividade lúdica é considerada didática?

No momento em que o professor opta por usar o brinquedo, um jogo, materiais concretos em atividades didáticas, com a intencionalidade de promover ou mediar a aprendizagem de algum conceito ou conteúdo proposto, a atividade lúdica assume o caráter didático. Em disciplinas como a Matemática, quando o professor planeja e desenvolve atividades com a utilização de materiais concretos como jogos, os estudantes podem ter a possibilidade de pensar, refletir, analisar, desenvolver o raciocínio e solucionar problemas de maneira prazerosa (MOTA; ANDRADE, 2017). Com isso, a **atividade ludo-didática** deve ser orientada pelo professor no sentido de criar possibilidades de intervenções que oportunizem elevar o conhecimento do estudante.

Contribuindo com esta linha de investigação, Macedo, Petty e Passos (2005) sugeriram indicadores para inferir uma dimensão lúdica, permitindo identificar a presença da ludicidade nos processos de aprendizagem ou desenvolvimento nas atividades educativas. Para ser considerada lúdica, a atividade deverá:

- a. **Possuir prazer funcional.** Na concepção de Macedo, Petty e Passos (2005, p. 18) é tudo aquilo que é feito por motivação intrínseca, porque é desafiador e “vale a pena repetir”. O que vale é o prazer funcional, a alegria, que muitas vezes também é sofrimento, de exercitar um certo domínio, de testar uma certa habilidade, de transpor um obstáculo ou de vencer um desafio. Na perspectiva

das crianças, não se joga ou brinca para ficar mais inteligente, para ser bem-sucedido quando adulto ou para aprender um conteúdo escolar. Joga-se e brinca-se porque isso é divertido, desafiador, promove disputas com os colegas, possibilita o estar juntos em um contexto que faz sentido, mesmo que às vezes frustrante e sofrido, por exemplo, quando se perde uma partida ou não se consegue uma certa realização. Uma tarefa interessante é aquela claramente justificada por um interesse educativo;

- b. **Ser desafiadora e surpreendente.** O desafio está relacionado à capacidade de proporcionar “algo que nos pega de surpresa” e que pode ser prazeroso repetir em outro contexto. Algo que não se controla o resultado e que instiga a curiosidade, permitindo à pessoa dizer o que sente. No entanto, na perspectiva dos sujeitos, as atividades precisam ser necessárias e de possível resolução;
- c. **Dimensão simbólica.** Se insere naquilo que faz sentido para o sujeito, pois deriva de sua experiência e que pode “ser intuído por sua importância e valor”, as atividades devem ser motivadoras e históricas. A maneira como agimos e reagimos ao que acontece em nossa vida estimula a ludicidade, ou não;
- d. **Expressão construtiva e relacional.** É o desafio de considerar algo segundo diversos pontos de vista, dada sua natureza relacional e dialética, e ter uma direção, fazer sentido. O lúdico refere-se a uma ação que possibilite diferenciar e associar esses dois aspectos.

No contexto de sala de aula de Matemática, quando o professor intenciona realizar atividades ludo-didáticas possíveis de serem jogadas com significações, que promovam o prazer funcional, e também possibilitem aos estudantes enfrentar e superar desafios, e além disso os estimulem a desenvolver o pensamento crítico e criativo na resolução de situações-problema, essas atividades podem se transformar em um válido recurso didático para aprendizagens matemáticas e favorecimento da criatividade nesta área (GONTIJO, 2007).

Da mesma forma, ao ponderar elementos que devem ser considerados pelos professores para o desenvolvimento de atividades ludo-didáticas em sala de aula, como jogos, Antunes (2016) mencionou quatro elementos que justificam e de certa maneira subordinam a aplicação dos jogos:

- a. **Capacidade de se constituir em um fator de autoestima do aluno:** Para o autor, jogos extremamente “fáceis” ou cuja solução esteja acima da capacidade de resolução do aluno, causam seu desinteresse e a baixa da autoestima pela

sensação de incapacidade ou fracasso. Desse modo, o nível de facilidade ou dificuldade do jogo, deve partir da observação cuidadosa do professor, especialmente em relação ao interesse dos alunos;

- b. **Condições psicológicas favoráveis:** O jogo jamais pode surgir como trabalho obrigatório ou estar associado a alguma forma de punição ao aluno. Ao contrário, é essencial que o professor utilize o jogo como ferramenta de combate à apatia e como instrumento de inclusão e desafios grupais;
- c. **Condições ambientais:** A conveniência do ambiente é fundamental para o sucesso no uso dos jogos. Um espaço higienizado e necessário à manipulação das peças do jogo, por exemplo, é sempre imprescindível;
- d. **Fundamentos teóricos:** O aluno deve ser estimulado a buscar seus próprios caminhos para solucioná-lo, sua criatividade. Além disso, todo jogo precisa sempre ter começo, meio e fim e não ser programado se existir dúvidas sobre as possibilidades de sua integral execução.

A ludicidade deve ser uma força que impulsiona, penetra e impregna inicialmente o professor, elevando seu estado de espírito para um sentimento de proatividade, de alegria interna e o estimula a ações desencadeadoras de aprendizagens. Desse modo, como mencionou D'Ávila (2014, p. 96), no lugar que entra a ludicidade como princípio organizativo e estruturante “de atividades criativas articuladas aos conteúdos das disciplinas”, conduzem os estudantes a vivenciarem a experiência pedagógica proposta tanto externa quanto internamente.

Educadores matemáticos têm desenvolvido estudos e pesquisas acerca das potencialidades do jogo no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, demonstrando a importância deste recurso metodológico na sala de aula (BORIN, 2002; BRENELLI, 2016; GRANDO, 2004; MUNIZ, 2010).

Sobre a questão, Borin (2002) mencionou que o jogo tem papel importante no desenvolvimento de habilidades de raciocínio como organização, concentração e atenção, indispensáveis à aprendizagem, em especial da Matemática, como também para a resolução de problemas em geral. Aliado à questão da necessidade de tornar o ato de aprender mais atraente, Grandó (2004) asseverou que o jogo pode ser usado como recurso facilitador na aprendizagem de estruturas matemáticas, por vezes de difícil assimilação.

A autora faz referência a Gardner (1961), para quem “os jogos matemáticos, assim como as matemáticas recreativas, são matemáticas carregadas do fator lúdico”

(GRANDO, 2004, p. 9). Para ela, o uso de jogos nas aulas de Matemática é um suporte metodológico adequado a todos os níveis de ensino, desde que os objetivos fiquem claros, apresentem desafios e estejam adequados ao nível de aprendizagem dos estudantes.

Na prática docente, frequentemente, nos deparamos com estudantes que apresentam bloqueios e dificuldades em algum conteúdo matemático. De acordo com Borin (2002), os jogos contribuem nesse sentido, pois, possibilitam a diminuição dos bloqueios de muitos estudantes que temem a Matemática e sentem-se incapacitados de aprendê-la. Além dos bloqueios citados por Borin (2002), o medo de errar faz com que o estudante não participe da aula. Nesse sentido, o jogo faz o papel da socialização, da cooperação e da colaboração, e torna o estudante mais autônomo e confiante em si (KAMII, 2016).

Muniz (2010) faz uma discussão sobre a relação entre o jogo e a aprendizagem matemática, que se sustenta na possibilidade de que os estudantes possam se envolver mais nas atividades matemáticas motivadas pelos jogos. A partir das situações criadas em jogos, podemos produzir problemas matemáticos (MUNIZ, 2010), desta forma, o jogo pode ilustrar situações-problema.

Segundo Muniz (2010, p. 61), a “dualidade entre a fonte interna de produção de elementos altamente abstratos da Matemática (o número, o ponto, a reta, o círculo, o infinito, a medida e as proporcionalidades)” e a motivação do estudante para a realização da atividade, mostra uma importante perspectiva de associação entre o jogo e a Matemática. Para Muniz (2010) os jogos são instrumentos socioculturais de socialização e validação dos saberes matemáticos.

Na compreensão de Grandó e Marco (2007), o jogo é apresentado com o objetivo de introduzir ou desencadear conceitos, ou de aplicar conceitos que já foram construídos. Raupp e Grandó (2016, p. 72), ressaltaram que “ambas as finalidades podem ser trabalhadas num mesmo jogo”, para as autoras, finalidade e objetivos deverão ser definidos pelo professor de acordo com seu planejamento. Refletindo acerca desses dois tipos comuns de jogos no ensino de Matemática, “o jogo que utiliza um conhecimento já internalizado e o jogo como desafio a novas produções intelectuais” (RAUPP e GRANDÓ, 2016, p.72), ambos preveem a participação colaborativa dos estudantes, que se efetivará mediante interações provocadas pela situação de jogo e pelo uso da linguagem.

Diante dessas considerações, trataremos, na seção a seguir, acerca da aprendizagem colaborativa.

2.4 - A APRENDIZAGEM COLABORATIVA

Segundo Dillenbourg (1999), conceituar aprendizagem colaborativa não é fácil, porque há uma infinidade de usos do termo em diferentes campos de estudos, o que se constitui, em sua concepção, em duas grandes preocupações sobre esse conceito: primeiramente a generalização excessiva com o qual o termo “colaboração” vem sendo empregado, sem a preocupação em definir com clareza quais são os critérios mínimos para que uma situação de aprendizagem se caracterize como colaborativa; segundo, as contribuições de diversos autores expressam ideias muito divergentes acerca do tema.

No entanto, mesmo diante de divergências de estudos, Dillenbourg (1999, p. 1) definiu aprendizagem colaborativa como “uma situação em que duas ou mais pessoas aprendem ou tentam aprender algo juntos”, a aprendizagem colaborativa implica na interação entre grupos de sujeitos que objetivam aprender algo juntos, a colaboração é o trabalho conjunto, em prol de um objetivo comum, sem uma divisão de tarefas e responsabilidades.

Assim, em uma visão ampliada sobre aprendizagem colaborativa, espera-se que o conhecimento seja construído socialmente, na interação entre pessoas e não pela transferência do professor para o aluno. Pimenta e Teles (2012, p. 112) aludem que a “estratégia didática proposta na forma colaborativa oportuniza a interação e abre espaço para o protagonismo dos alunos, ao incentivar a prática do diálogo mediando as diferenças”. Cabe ressaltar que, ao professor, não basta apenas distribuir os alunos em grupos de maneira desordenada, ele deve criar situações e cenários de aprendizagens, oportunizando ao aluno desenvolver suas habilidades sociais e cognitivas, de maneira criativa, interagindo com outros sujeitos (TORRES; IRALA, 2012).

Destaca-se, também, que o trabalho em grupo colaborativo possibilita o desenvolvimento de competências interpessoais como a comunicação, liderança, negociação, bem como a integração e socialização dos alunos. Damiani (2008, p. 215) ressalta que na colaboração, ao trabalharem juntos, os integrantes de um grupo se apoiam, desejando “atingir objetivos comuns negociados pelo coletivo, estabelecendo

relações que tendem à não-hierarquização, liderança compartilhada, confiança mútua e corresponsabilidade pela condução das ações”.

Recorremos a Vigotski (1998) ao mencionar que o desenvolvimento de atividades interpessoais possibilita mudanças cognitivas por meio da interação, com a conseqüente reelaboração e reconstrução das ideias. Nesse sentido, no processo interativo e social, as ideias colocadas são elucidadas resultando em novas concepções, em avanços em termos de proposições, sínteses, teorias e hipóteses aplicáveis em contextos diversos.

Os estudos desenvolvidos por Vigotski, aplicados à educação, vêm como uma alternativa adequada nas salas de aula, na medida em que é possível contextualizar o conhecimento, perceber sua função e mobilizar novas construções cognitivas.

A teoria sociocultural de Vigotski (1998) considera que a aprendizagem emerge de interações sociais, supondo a existência de um sujeito “interativo”, na qual a origem de seu conhecimento não está assentada somente em recursos externos, como também não está apenas em recursos individuais. Encontramos nos estudos de Vigotski (1998) uma dimensão social que não é simplesmente a dimensão do outro, mas uma dimensão alicerçada na relação com o outro e com os demais aspectos do meio social em que influências mútuas se potencializam e se atualizam.

Nessa perspectiva, ao colocar a interlocução dentre as outras interações humanas como representativa da relação entre linguagem e pensamento, e entre linguagem e mundo, a abordagem vigotskiana marcou o papel do dialogismo como elemento constitutivo por excelência dos processos cognitivos e da interação. Vigotski deu contribuições importantes à intersubjetividade³ e à criação coletiva de significados, implicando a interação social como fonte que alimenta a aprendizagem. Esta fonte fundamenta a aprendizagem dialógica pressupondo a relação entre o sujeito que aprende e o objeto a aprender, sendo que o diálogo nesta perspectiva se transforma na linha condutora da interação e desta interação entre os sujeitos, resulta um processo de transformação das relações interpessoais. Desse modo, o dialogismo é entendido como substância da linguagem e do conhecimento, que destaca o

³ **Intersubjetivo** (inter- + subjetivo) adj. Relativo a dois ou mais sujeitos humanos ou consciências individuais que se relacionam. Dicionário Priberam da Língua Portuguesa.

aspecto sociocultural dos contextos, nos quais as interações se realizam, e assim, o diálogo será o provocador de aprendizagem (BAKHTIN, 2010).

A colaboração é o processo pelo qual indivíduos negociam e compartilham entendimentos relevantes à resolução de problemas. Colaboração é primordialmente conceituada como o processo de construção de significado compartilhado, como afirmaram Stahl, Koschmann e Suthers (2006).

Os aprendizes, quando inseridos em grupos, não se isolam para realizar atividades individualmente, conservam-se engajados em uma tarefa compartilhada que é construída e mantida pelo e para o grupo (STAHL; KOSCHMANN; SUTHERS 2006). Vários estudos destacam a importância da participação ativa em grupos para a aprendizagem de novas habilidades, para o desenvolvimento de novas atitudes e para obter novo conhecimento (BLOM, VERMA, *et al.* 2013; COSTA, 2014; FARINHA, 2005, 2014). Tais estudos se apoiam na ideia de que os alunos podem encontrar apoio um no outro para resoluções de problemas; que em grupos pode ocorrer uma melhor interação e comunicação entre os alunos, refletindo sobre suas experiências mútuas; que a aprendizagem colaborativa pode aumentar a capacidade de conquistar conhecimentos e, conseqüentemente uma melhor aprendizagem.

Nessa perspectiva, conceitos são eficazmente aprendidos em pequenos grupos, através dos quais os estudantes alcançam objetivos colaborativamente (BRUFFE, 1999). Segundo Costa (2014), a aprendizagem colaborativa tende a levar o estudante a uma motivação intrínseca, apoiada na satisfação e no prazer em ampliar os conhecimentos próprios ou de outrem. Ao mesmo tempo, Bruffee (1999, p. 69) mencionou a importância dessa forma de aprendizagem em pequenos grupos dizendo, que “as pessoas que fazem parte de grupos colaborativos alcançam, com a ajuda de colegas, o que nenhum deles poderia ter aprendido sozinho”.

A caracterização dos pequenos grupos, apresentada nesta tese, segue conceituações de pesquisadores grupalistas (ALVES, SEMINOTTI, 2006; COSTA, 2014; FARINHA, 2005, 2014). Esses pesquisadores pontuam alguns atributos de um pequeno grupo: percepções, os integrantes de um pequeno grupo percebem-se e influenciam-se mutuamente; motivação, os integrantes de um pequeno grupo sentem-se recompensados pela participação no grupo; objetivos, os integrantes de um pequeno grupo trabalham em conjunto para um determinado objetivo; interdependência, a atuação de cada integrante de um pequeno grupo depende dos

outros integrantes; interação, os integrantes de um pequeno grupo interagem diretamente, face a face.

Entretanto, Farinha (2004) e Alves, Seminotti (2006) alertam que para assegurar a eficácia dos pequenos grupos, os pesquisadores ou professores realizadores das atividades, devem ficar atentos a elementos que possam potencializar e/ou inibir as interações, socializações e articulações entre os diferentes sujeitos e entre este, o pequeno grupo e o contexto maior de sala de aula. E diante disso, segundo Alves e Seminotti (2006), para que se realize análises do processo grupal, o pesquisador deve buscar diferentes dimensões do sistema “pequeno grupo” e, dentre várias ações investigativas, criar categorizações para dar conta do fenômeno observado.

Estudiosos grupelistas concordam que grupos excessivamente grandes tendem a ser disfuncionais (FARINHA 2004, 2014; COSTA, 2014). Estes autores indicam que em pequenos grupos com 4 integrantes, há mais oportunidades para interações. O tamanho do pequeno grupo é uma condicionante fundamental, porque à medida que aumenta o tamanho, reduz a quantidade de tempo disponível para cada membro, para o aprofundamento da perspectiva de cada participante. Farinha (2014) ressalta, à medida que o tamanho do pequeno grupo aumenta, diminui a satisfação dos seus integrantes. Em grupos maiores, a comunicação tende a organizar-se à volta de um número cada vez menor de pessoas, a estrutura do grupo enrijece e é mais provável que surja a função de liderança sobre uma única pessoa, o que destoa da caracterização teórica de pequeno grupo assumida nesta tese.

Figura 1 - Representação do Pequeno Grupo Colaborativo



Fonte: Elaborado pela autora (2018)

A figura 1 traz a representação de um pequeno grupo, com 4 alunos, como sugere Farinha (2014) e Costa (2014). O professor que se vê obrigado a trabalhar com grupos muito numerosos, deve considerar as possibilidades de os subdividi-los em grupos menores, para evitar os conflitos intragrupo, que tendem a aumentar a insatisfação dos seus integrantes, bem como a diminuição do nível de participação dos alunos nas atividades escolares.

Contudo, a instabilidade e o caos são compreendidos como pontos positivos do trabalho em grupo. Para Alves e Seminotti (2006, p. 124), a instabilidade permite o desenvolvimento do potencial criativo no pequeno grupo, para estas autoras, “onde há muito controle, não há criatividade”. A instabilidade é capaz de criar oportunidades de ações e interrelações no pequeno grupo, produzindo nos sujeitos novas maneiras de se relacionarem.

A propósito, Alencar (2009) menciona que oportunizar ao aluno levantar questões, elaborar e testar hipóteses, discordar, avaliar criticamente fatos, conceitos, princípios, sugerir modificações e aperfeiçoamentos para suas próprias ideias, são características de um clima em sala de aula, que podem favorecer o desenvolvimento da criatividade e da autonomia intelectual dos estudantes em sala de aula. Ademais, convém esclarecer que a autonomia intelectual entendida aqui, refere-se à capacidade do sujeito em pensar por si mesmo, sendo capaz de expor suas ideias e pensamentos com responsabilidade e sendo instigado pelo desejo de busca.

Mas a eficácia dos pequenos grupos também depende do tipo de atividade proposta aos estudantes. Farinha (2014) menciona que situações-problema elaboradas com maior número de abordagens e possibilidades de resoluções, limita a tendência de cada aluno tentar aplicar na resolução do problema, uma única solução. Ampliar o repertório de conhecimentos e ideias, oportunizar ao estudante ter a disposição e correr riscos de errar, explorar várias alternativas de respostas, pode aumentar a interação e criatividade do grupo.

Com efeito, Costa (2014) e Farinha (2014), apontaram que quanto maior a interação entre os membros de um grupo, maior será a coesão. A coesão nos pequenos grupos refere-se à qualidade de um grupo incluir orgulho individual,

comprometimento, significado, bem como, define uma relação de compromisso com normas, valores e objetivos comuns, que, segundo Alves e Seminotti (2006) produz e mantém a singularidade e a identidade em um pequeno grupo.

Stahl, Koschmann e Suthers (2006) argumentam que pequenos grupos são as melhores unidades de investigação para o estudo de significado intersubjetivo. Para os autores, o estudo da aprendizagem intersubjetiva realizada de forma interativa ou cognitiva do grupo, implica em questões interessantes que são as mais desafiadoras de qualquer ciência social-comportamental. Consequentemente, para Dillenbourg (1999) a dinâmica do trabalho colaborativo é como um processo em que os participantes se envolvem mutuamente num esforço coordenado para a resolução conjunta de um problema. Assim, há a responsabilização de todos no sucesso ou fracasso do grupo. Todos os sujeitos envolvidos em uma atividade colaborativa são automaticamente responsáveis por seu desenvolvimento e pelo desenvolvimento do seu grupo, num relacionamento solidário e sem hierarquias. Essa definição corrobora e contribui para que sejam promovidos modelos pedagógicos de aprendizagem mais dinâmicos e responsáveis.

Assim compreendemos que, a aprendizagem em pequenos grupos desperta a necessidade de encontrar respostas pedagógicas e estratégias adequadas às necessidades de formação dos indivíduos, numa sociedade em constante transformação. Podemos encontrar em modelos pedagógicos com pequenos grupos, um fator favorável para a aprendizagem e o desenvolvimento do raciocínio por propiciar trocas de pontos de vistas, pautadas no diálogo, no pensamento colaborativo, no trabalho em equipe e na interação colaborativa, a proporcionar ganhos a nível social, afetivo e cognitivo (LISBOA, 2013).

Recorremos a Dillenbourg (1999) buscando esclarecer uma dúvida comum acerca das terminologias de colaboração e cooperação. Para o autor, a diferença principal entre colaboração e cooperação pode ser traduzida pela maneira como é organizada a atividade pelo grupo. Enquanto na colaboração todos trabalham em conjunto, em um esforço coordenado, buscando alcançar o objetivo do desafio

proposto; na cooperação a estrutura hierárquica prevalece e cada um dos membros da equipe é responsável por uma parte da atividade.

Mas há quem considere os termos cooperação e colaboração como sinônimos (que significa ação conjunta), mesmo possuindo similaridade de definições e de linguística, apresentam diferenças tanto no que diz respeito às perspectivas teóricas, quanto às perspectivas práticas. Para esclarecer as principais diferenças e semelhanças entre a aprendizagem cooperativa e a aprendizagem colaborativa, recorreremos a Figueiredo (2006).

Quadro 4 - Principais diferenças e semelhanças entre as aprendizagens cooperativa e colaborativa

	Aprendizagem cooperativa	Aprendizagem colaborativa
DIFERENÇAS	<ul style="list-style-type: none"> ✓ O foco principal é no produto. ✓ As atividades dos integrantes do grupo normalmente são estruturadas: os seus papéis são pré-definidos, sendo viabilizada a possibilidade de redistribuição das funções de cada um do grupo. ✓ Em relação ao gerenciamento das atividades, a abordagem é centrada no professor. ✓ O professor repassa todas as instruções aos alunos acerca de como realizar a atividade em grupo. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ O foco principal é no processo. ✓ As atividades dos integrantes do grupo são normalmente não-estruturadas, as funções são definidas entre os próprios alunos, à medida em que a atividade se desenvolve. ✓ Em relação ao gerenciamento das atividades, a abordagem é centrada no aluno. ✓ O professor não repassa todas as instruções aos alunos sobre como realizar a atividade em grupo.
SEMELHANÇAS	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Os alunos tornam-se mais ativos no processo de ensino e aprendizagem, visto que não recebem passivamente todas as informações do professor ✓ O ensino e a aprendizagem tornam-se experiências compartilhadas entre os alunos e o professor. ✓ A participação em pequenos grupos favorece o desenvolvimento das habilidades intelectuais e sociais. 	

Fonte: Adaptado de Figueiredo (2006).

No quadro 4 observa-se que na **aprendizagem cooperativa** os sujeitos são os responsáveis pelo grupo, o professor é o facilitador da ação pedagógica, mas o grupo é essencial. Nesse modelo, mesmo que os alunos trabalhem em grupo para a realização de uma atividade, o professor mantém todo o domínio em cada etapa da atividade, inclusive delegando papéis a cada um dos integrantes do grupo.

No modelo de **aprendizagem colaborativa**, os alunos são os responsáveis pela estruturação do processo para o desenvolvimento da atividade. Eles se engajam na realização da atividade com os outros participantes que têm mais domínio dos conteúdos e mutuamente compartilham os conhecimentos com os alunos que têm mais dificuldade. Nesse modelo o professor avalia a evolução do grupo, fornece sugestões sobre a fase de desenvolvimento das atividades, mas não interfere nas ações interativas do grupo.

Para deixar mais claro as duas terminologias, torna-se importante trazer à presente investigação, outras discussões acerca das definições de aprendizagem colaborativa e aprendizagem cooperativa. As duas práticas ressaltam uma maior responsabilização dos sujeitos aprendizes no seu processo de aprendizagem, colocando-os como partícipes na construção do conhecimento. No entanto, há diferentes visões nos dois termos e, assim, recorreremos a Fiorentini (2010) para tentar esclarecer as diferenças de concepção.

Fiorentini (2010) mencionou que cooperação deriva do verbo latino *operare*, que significa agir, operar, executar, fazer funcionar de acordo com um sistema. Então, na cooperação, uns ajudam os outros, executando tarefas cujas finalidades geralmente não resultam de negociação, podendo haver submissão de uns em relação aos outros e “relações desiguais e hierárquicas” (FIORENTINI, 2010, p. 52).

A colaboração decorre do termo latino *laborare*, no sentido de trabalho, produção, desenvolver atividades tendo em vista um determinado fim, todos trabalhando conjuntamente e se apoiando mutuamente. “Na colaboração as relações, portanto, tendem a ser não hierárquicas, havendo liderança compartilhada e corresponsabilidade pela condução das ações” (FIORENTINI, 2010, p. 52).

Por fim, ainda na tentativa de aprofundar mais os dois conceitos, a reflexão de Panitz (1995) torna-se pertinente. Para este autor a aprendizagem cooperativa é mais diretiva e controlada pelo professor, isto é, este estipula uma tarefa, e os papéis desempenhados pelos alunos na realização de tal atividade são, geralmente, atribuídos por ele. Enquanto na perspectiva colaborativa, os alunos escolhem os seus

papéis e decidem como irão realizar a tarefa proposta, pois buscam contribuições de todos os integrantes do grupo.

A figura 2 descreve os aspectos em que atividades colaborativas e cooperativas podem diferir.

Figura 2 - Principais Diferenças entre a Cooperação e a Colaboração



Fonte: Adaptações de Matthews *et al.* (1995).

Diante do exposto, importou-se apresentar as diferenças entre colaboração e cooperação, objetivando esclarecer o tipo de jogo desenvolvido nesta investigação: o **jogo colaborativo**.

2.5 - A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, O ENSINO DE GEOMETRIA E PRESSUPOSTOS DA BNCC 2018

Com efeito, dialogo com Fiorentini (2013) para esclarecer que enquanto educadora matemática, meu interesse de pesquisa recai na realização de estudos, que usam métodos interpretativos e analíticos das ciências humanas, tendo como perspectiva de conhecimento, práticas pedagógicas que possam contribuir para a formação mais integral, humana, autônoma e crítica do aluno e do professor. Cabe

ressaltar que a Educação Matemática é uma área de conhecimento das ciências sociais ou humanas que estuda o ensino e a aprendizagem da matemática, relacionados a alguma tendência temática.

Dentre as tendências temáticas da pesquisa internacional em Educação Matemática (FIORENTINI; LORENZATO, 2009) está o “processo ensino-aprendizagem da matemática”. Nos últimos anos, o foco desta temática deixou de estar em aspectos muito gerais da aprendizagem e transpôs-se para a aprendizagem de conteúdos matemáticos específicos. Fiorentini e Lorenzato (2009, p.43) mencionam que nesta temática, ainda prevalecem pesquisas sobre a aprendizagem individual, em detrimento àquelas que “ocorrem em grupos de alunos nos processos interativos em sala de aula”.

Ancorada na Educação Matemática, esta tese tem como objeto investigativo a aprendizagem matemática de estudantes do ensino médio, integrantes de pequenos grupos, participantes de processos interativos e colaborativos em sala de aula, o que contrapõe uma prevalência de pesquisa mencionada por Fiorentini e Lorenzato (2009). Nesta investigação, o conteúdo específico é a geometria analítica.

Sobre a geometria, Murari (2005) ressalta que é um ramo da Matemática que tem um campo muito fértil, e o modo como for estudada e aprendida, refletirá no desenvolvimento intelectual, no raciocínio lógico e na capacidade de abstração e generalização do estudante. Além disso, a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), ressalta que a geometria envolve o estudo de um amplo conjunto e procedimentos necessários para resoluções de problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento.

Outro ponto destacado pela BNCC para o ensino fundamental (BRASIL, 2018, p. 272) refere-se à “aproximação da álgebra com a geometria, desde o início do estudo do plano cartesiano” nas séries iniciais, por meio da geometria analítica. Ademais, a BNCC de Matemática do Ensino Médio, reforça a necessidade de ampliar o pensamento algébrico e o pensamento geométrico, principalmente para desenvolver habilidades nos estudantes de interpretações e representações, uma vez que, dentre as competências específicas de Matemática, está “compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representações matemáticas” (BRASIL, 2018, p. 531), dentre os quais, os algébricos e os geométricos, na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

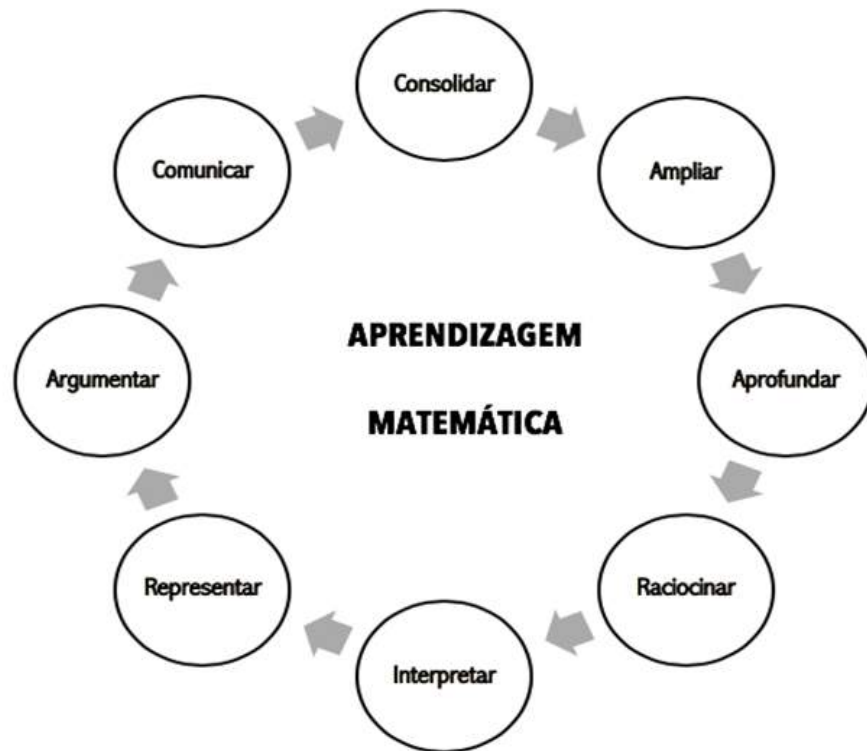
A propósito, a BNCC define que as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, favorecem os estudantes na criação de conjecturas, na elaboração e na resolução de problemas em uma diversidade de contextos, aplicando conceitos, métodos, fatos e integrando diferentes instrumentos matemáticos (régua, folha quadriculada, jogo), às situações que estimulem a reflexão, colaborando para a sistematização e a formalização de conceitos matemáticos, com a utilização de diversos registros e linguagens.

Nesse sentido, nos estudos de matemática do ensino médio, de acordo com a BNCC, é necessário consolidar as aprendizagens da etapa anterior (o ensino fundamental); ampliar e agregar novas aprendizagens; aliar os estudos matemáticos com as outras áreas do conhecimento; aprofundar e contextualizar conceitos matemáticos com a realidade.

Contudo, a Geometria é um conteúdo matemático do ensino médio em que se identifica lacunas na aprendizagem, prejudicando a consolidação da etapa anterior (ALMOULOU *et al.*, 2004; TASHIMA, SILVA, 2007). Murari (2005) também menciona que o ensino da geometria não tem sido privilegiado, o ensino é negligenciado no ensino fundamental e no ensino médio. Mas, segundo Carneiro e Déchen (2006), percebe-se uma melhor distribuição do conteúdo de geometria nos livros didáticos, ainda assim, no caso do ensino fundamental, a má distribuição dos conteúdos é recorrente, com melhora somente nas duas últimas séries do ensino fundamental.

Mas, merece ressaltar que a BNCC (BRASIL, 2018) do ensino médio na área de Matemática, considera que, para assegurar as aprendizagens deve-se garantir aos estudantes o desenvolvimento de competências específicas, sintetizadas no esquema representado na figura 3.

Figura 3 - Competências específicas de Matemática segundo a BNCC 2018



Fonte: Elaborado pela autora (2018)

As competências representadas na figura 3 não têm uma ordem preestabelecida, mas elas formam uma conexão, de tal modo que o desenvolvimento de uma delas, requer em determinadas situações, a mobilização de outras (BRASIL, 2018). Na definição das competências gerais da Educação Básica, a BNCC reconheceu que a “educação deve afirmar valores e estimular ações que contribuam para a transformação da sociedade” (BRASIL, 2018). Desse modo, nessas competências, além de considerar a cognição, os estudantes devem desenvolver, dentre várias atitudes, a autoestima, o respeito às opiniões dos colegas e a predisposição para realizar ações em grupo.

De fato, para assegurar aos estudantes o desenvolvimento das competências gerais para a Educação Básica, é preciso consolidar no contexto pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento. Em decorrência disso, é preciso considerar práticas pedagógicas que favoreçam a interação dos estudantes com “o objeto de estudo, a pesquisa, a construção dos conhecimentos para o acesso ao saber” (MICOTTI, 1997, p. 8), contrapondo à repetição e memorização de respostas prontas oferecidas em sala de aula. Para Micotti (1997), essa visão exige um

redimensionamento da organização do ensino, dos papéis que professores e estudantes desempenham nas aulas.

Assim sendo, é preciso que as aulas sejam organizadas com situações que envolvam atividades que requeiram maior participação dos estudantes, que envolvam atividades de resoluções de problemas para construção de saberes, com diversidade de soluções, bem como encorajar os estudantes a exporem suas ideias no decorrer das atividades propostas, que oportunizem aos estudantes expressar sua criatividade em Matemática (GONTIJO, 2010). Desse modo, o professor é desafiado diante de propostas curriculares, a ensinar conteúdos de maneira alternativa, com postura reflexiva diante da sua própria prática (MURARI, 2005).

Em relação à Geometria Analítica, objeto de estudo desta tese, nas atividades em que os estudantes são estimulados a explorar ideias geométricas, utilizando recurso didático que se possa manipular (MURARI, 2005), é importante proporcionar-lhes condições para a descoberta, estimular a produção de novas ideias, oportunizar estratégias autônomas de resoluções de situações-problema, aproveitar as ideias dos estudantes sempre que possível e o estabelecimento das relações geométricas existentes no universo.

Destacamos as considerações de Gontijo (2010), ao ressaltar que a criatividade em Matemática caracteriza-se pela diversidade e quantidade de ideias produzidas sobre um mesmo termo (fluência); pela habilidade de mudar o pensamento e criar diferentes tipos de respostas (flexibilidade); pela apresentação de respostas incomuns (originalidade) e; por expor grande quantidade de particularidades em uma ideia (elaboração).

Igualmente, torna-se importante considerar a interação entre os estudantes como um elemento favorável à aprendizagem e ao desenvolvimento do raciocínio, por oportunizar a aprendizagem colaborativa (BRASIL, 2018), fortalecendo nos estudantes a capacidade de trabalharem em equipe, propiciando trocas de pontos de vistas e aprendendo com os seus pares.

Da mesma forma, é importante ponderar a necessidade das conexões que os estudantes devem estabelecer entre os objetos matemáticos e seu cotidiano, e entre eles e as diferentes temáticas matemáticas e componentes curriculares. Para tanto, é importante destacar a “importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação” (BRASIL, 2018, p. 297). A utilização de recursos didáticos como folhas quadriculadas, jogos, *software*,

podem despertar interesse e caracterizar um contexto significativo para aprender matemática.

Contudo, o professor deve compreender que esses recursos e instrumentos precisam estar integrados a situações que oportunizem a reflexão, contribuindo para a sistematização e formalização de conceitos matemáticos.

Após a definição de trabalhar nesta tese, uma proposta pedagógica que tem como componente curricular de estudos a Geometria Analítica, tornou-se importante destacar a temática específica para esta pesquisa: o estudo do ponto e da reta.

A partir dessa definição temática, considere importante buscar informações nos documentos oficiais sobre o que se espera com o estudo deste tema para os estudantes do Ensino Médio. Portanto, serão apresentadas orientações específicas referentes ao estudo do ponto e da reta.

Sobre a BNCC, cabe destacar que ela define o que deve ser aprendido na vida escolar, determina os conteúdos essenciais a serem trabalhados em sala de aula, mas não impõe forma e nem método de trabalho, o que é competência das próprias escolas, seguindo as orientações curriculares de seus estados e municípios. Estes currículos é que vão definir como os objetivos de aprendizagem estabelecidos devem alcançar os estudantes nas salas de aulas.

Com a homologação da Base Nacional Comum Curricular em 2018, os estados terão um prazo para construir seus próprios currículos, documentos elaborados a partir da BNCC, materialização das intenções pedagógicas da base, que servirão como referência para que cada escola elabore o seu projeto político-pedagógico.

Atualmente, a Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal adota o Currículo em Movimento da Educação Básica/Ensino Médio, que tem por objetivo:

a reorganização dos tempos e espaços escolares, favorecendo as aprendizagens dos estudantes no ensino médio e consolidando novos conhecimentos, que visam ao desenvolvimento do senso crítico e da autonomia intelectual (BRASÍLIA, 2014, p.7).

A proposta curricular para o Ensino Médio no DF é uma matriz que discorre sobre as áreas do conhecimento organizadas em dimensões que se interconectam e se internalizam (BRASÍLIA, 2014, p.21). O dimensionamento dessas áreas decorre da necessidade de favorecer a interdisciplinaridade e dar novos significados a conteúdos mais requisitados por certos componentes curriculares. O conteúdo de geometria analítica, proposto nesta investigação, é elencado no Currículo em Movimento da

Educação Básica/Ensino Médio, no eixo Multiletramentos Ciência, Tecnologia e Criatividade. O estudo do ponto e o estudo da reta, são conteúdos previstos para o 3º ano do ensino médio.

Consideramos pertinente ressaltar que, para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, cada componente curricular apresenta um conjunto de habilidades. Essas habilidades estão relacionadas a diferentes objetos de conhecimento, entendidos na BNCC 2018 como conteúdos, conceitos e processos, que, por sua vez, são organizados em unidades temáticas.

Como este estudo traz preceitos da BNCC 2018, torna-se importante apresentar as possibilidades de organização do conhecimento escolar do componente curricular Matemática, unidade temática “geometria” e a delimitação do objeto de conhecimento. Além disso, são apresentadas as habilidades, que segundo a BNCC, expressam as aprendizagens necessárias que devem ser asseguradas aos estudantes nos diversos contextos escolares.

O quadro 5 apresenta temas mais específicos da unidade temática geometria, relacionados ao presente estudo.

Quadro 5 - Competências específicas relacionadas à unidade temática Geometria para o Ensino Fundamental segundo a BNCC 2018

SÉRIE/ ETAPA	OBJETO DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
2º ano EF	Localização e movimentação de pessoas e objetos no espaço, segundo pontos de referência, e indicação de mudanças de direção e sentido	- Identificar e registrar, em linguagem verbal ou não verbal, a localização e os deslocamentos de pessoas e de objetos no espaço, considerando mais de um ponto de referência, e indicar as mudanças de direção e de sentido.
3º ano EF	Localização e movimentação: representação de objetos e pontos de referência	-Descrever e representar, por meio de esboços de trajetos ou utilizando croquis e maquetes, a movimentação de pessoas ou de objetos no espaço, incluindo mudanças de direção e sentido, com base em diferentes pontos de referência.
4º ano EF	Localização e movimentação: pontos de referência, direção e sentido; Paralelismo e perpendicularismo	-Descrever deslocamentos e localização de pessoas e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos, mapas, planta baixa e croquis, empregando termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares.
5º ano EF	Plano cartesiano: coordenadas cartesianas (1º quadrante) e representação de deslocamentos no plano cartesiano	- Utilizar e compreender diferentes representações para a localização de objetos no plano, como mapas, células em planilhas eletrônicas e coordenadas geográficas, a fim de desenvolver as primeiras noções de coordenadas cartesianas. - Interpretar, descrever e representar a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros.

6º ano EF	Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados; Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e <i>softwares</i>	- Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou <i>softwares</i> para representações
7º ano EF	Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	- Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de <i>softwares</i> de geometria.
9º ano EF	Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal relações métricas no triângulo retângulo; Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais; Distância entre pontos no plano cartesiano.	-Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. - Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes. - Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

No quadro 5 é apresentada a organização da unidade temática geometria do Ensino Fundamental, seus objetos de conhecimento e habilidades. Ao elencar as habilidades, a BNCC esclarece que as noções matemáticas devem ser retomadas, ampliadas e aprofundadas ano a ano (BRASIL, 2018).

Todavia, no Ensino Médio, as áreas do conhecimento estabelecem competências específicas de cada componente curricular, cujo desenvolvimento precisa ser promovido ao longo dessa última etapa da Educação Básica. A BNCC para o Ensino Médio não traz a organização por unidade temática, considerando que esta etapa preconiza consolidar, ampliar e aprofundar aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental.

Assim, a BNCC (BRASIL, 2018) ressalta que a organização das habilidades do Ensino Médio, objetiva definir claramente quais são as aprendizagens essenciais a serem asseguradas aos estudantes nessa etapa.

Dentre as competências específicas para a área de Matemática do Ensino Médio, importa a este estudo a competência de número 4 e a competência de número 5, apresentadas no quadro 6.

Quadro 6 - Competências específicas da área de Matemática do Ensino Médio segundo a BNCC 2018

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos, de um mesmo objeto, dentre eles representações algébricas e geométricas, na tentativa de solucionar e comunicar resultados de problemas. Espera-se que os estudantes dominem um conjunto de ferramentas que potencialize a capacidade de solucionar, comunicar, argumentar problemas, ampliam assim sua capacidade de pensar matematicamente. Para este estudo destacamos duas habilidades : Uma, referente a converter representações algébricas de funções de 1º grau, em representações geométricas no plano cartesiano. E outra, referente a conversão de representações de funções de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, recorrendo ou não ao uso de recursos didáticos.
COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5
Investigar e demonstrar conjecturas de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, utilizando estratégias e recursos. Essa competência específica presume um conjunto de habilidades relacionadas às capacidades de investigação, formulação de explicações, argumentos e induções resultantes de investigações ou experimentações com materiais concretos ou tecnológicos. Para este estudo destacamos a habilidade de investigar relações entre números expressos em tabelas ou em situações-problema para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas, desenvolver e expressar algebricamente essas demonstrações, reconhecendo quando se tratar de representação de 1º grau ou de 2º grau.

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

No quadro 6, também é preciso enfatizar a organização das habilidades relacionadas às competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 2018), necessárias para assegurar a aprendizagem matemática dos estudantes no Ensino Médio, em especial relacionadas ao “estudo do ponto e da reta”.

Considerando a necessidade de desenvolver pesquisa com tendência temática relacionada a estudos que têm como objeto investigativo, o processo de aprendizagem matemática de estudantes do ensino médio, acreditamos que estes aportes teóricos ampliem e (re)construam conceitos, articulam saberes para o desenvolvimento desta investigação.

A concretização de uma proposta investigativa, planejada a partir de preceitos teóricos das situações didáticas, que traz a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa e proposta didática, que utiliza um jogo colaborativo de geometria analítica, em cenário que privilegia processos colaborativos de aprendizagens, requer o levantamento de estudos e implicações conceituais que possam levar o pesquisador a um melhor entendimento sobre o tema abordado e delinear o processo de concepção do caminho a ser percorrido, objetivando a realização da investigação, desenvolvimento e escrita da tese.

Assim, apropriar-se adequadamente de um referencial teórico e embasar-se nele para a realização de uma pesquisa, é parte do processo de construção do conhecimento científico e juntamente com a metodologia a seguir descrita, proporcionou traçar o caminho adequado para a concretização deste estudo.

CAPÍTULO 3 - MÉTODO

*“Porque tudo aconteceu para que eles compreendessem
que as águas mais turvas contêm às vezes as pérolas mais belas.”
(Vinícius de Moraes)*

Neste capítulo, é descrito o método utilizado na presente investigação, contendo delineamento, estudo piloto, participantes, o *lócus* da investigação, instrumentos, procedimentos e análise dos dados.

3.1 - DELINEAMENTO

Esta investigação de **natureza qualitativa** constituiu-se em um **estudo de caso e pesquisa participante** que analisou os resultados de uma sequência didática em forma de jogo, desenvolvida em pequenos grupos colaborativos, a partir das interações dialógicas estabelecidas entre os estudantes do 3º ano do ensino médio, relacionadas à aprendizagem do estudo do ponto e da reta.

Como metodologia de desenvolvimento da proposta didática, utilizamos a Engenharia Didática de Artigue (1996), com a realização das fases constituintes do método: **estudos preliminares, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori e validação**. Para responder aos objetivos desta investigação, foram adotadas **multitécnicas de análise de dados**. Para alcançar o primeiro objetivo específico, foram utilizados os princípios da **Engenharia Didática**, com o propósito de investigar as potencialidades da sequência didática em forma de jogo, desenvolvida em pequenos grupos colaborativos de estudantes.

A fim de responder o segundo e o terceiro objetivo específico, foram adotados os preceitos da **análise de conteúdo** (BARDIN, 2010) com processo de **categorização emergente-misto** (FIORENTINI; LORENZATO, 2009), visando a interpretar e compreender a colaboração entre os sujeitos durante a realização da atividade pedagógica, e as percepções dos estudantes relacionadas ao processo de aprendizagem matemática.

Um estudo piloto foi realizado no ano letivo de 2015, com a finalidade de verificar quais instrumentos metodológicos seriam apropriados para a futura tese, verificar a adequação do protocolo de investigação, as especificidades do ensino sobre o qual se pretendia atuar. Além disso, com o estudo piloto seria possível fazer

um planejamento prévio da sequência didática, levantar a dimensão cognitiva dos estudos preliminares, bem como definir critérios para as análises dos dados.

Os procedimentos e instrumentos de construção de dados utilizados nesta tese, foram identificados em cada um dos momentos específicos de análise de dados desta investigação.

3.2 - ESTUDO PILOTO

Para Yin (2015), um estudo piloto auxilia o pesquisador a refinar seus planos de construção de dados com relação ao conteúdo e aos procedimentos a serem adotados. Em vista disso, no ano letivo de 2015, desenvolvi um estudo piloto nas aulas do projeto educativo “Matemática Todo Dia”, que atende estudantes do ensino médio de uma escola pública da cidade de Ceilândia, Distrito Federal.

O estudo foi realizado em 2 (duas) aulas com duração total de 180 minutos, no mês de outubro de 2015. Participaram da aplicação a pesquisadora, autora desta tese, o professor do projeto e a professora de Matemática, das turmas do 3º ano do Ensino Médio da escola dos estudantes. Para preservar as identidades dos dois professores, utilizei nomes fictícios: Professor Augustus e Professora Flor.

A professora Flor envolveu-se com a proposta do estudo piloto motivada pela dificuldade em apresentar aos estudantes o conteúdo de Geometria Analítica, de forma contextualizada e interdisciplinar, de maneira que obtivesse atenção e o interesse dos estudantes que se mostravam apáticos e desinteressados, conforme seus próprios relatos. A professora Flor mencionou também que os estudantes se encontravam, naquele período (4º bimestre letivo), ansiosos com a proximidade das provas do Exame Nacional de Ensino Médio (ENEM), do Programa de Avaliação Seriada (PAS/UnB), preocupados com o currículo que estava atrasado em virtude de paralisações (greves de professores) e mudanças no sistema de ensino de anual para semestral.

A atividade proposta elaborada em sequência didática sobre Geometria Analítica, com a utilização de material concreto, desafiou os estudantes a posicionarem corretamente, pequenas peças em madeira que representavam edificações da Universidade de Brasília, em um mapa de situação geográfica confeccionado em tecido para tapeçaria, que recebeu o nome na proposta didática de “Tapete Cartesiano”. Além disso, esperou-se com a utilização do material concreto,

tornar a sequência mais relevante ao aluno, favorecendo novas possibilidades de visualizar conceitos matemáticos a partir de uma atividade prática.

Na sequência didática havia situações-problema contextualizadas, que envolviam conteúdos da disciplina Matemática, bem como de Física, História e Geografia. A atividade, de maneira geral, introduziu conceitos de ponto, reta, plano, distâncias entre pontos, cálculos de áreas de polígonos no plano, objetivando que os estudantes pudessem:

- a. identificar e interpretar geometricamente e algebricamente representações que expressem relações entre grandezas;
- b. utilizar o conhecimento algébrico e geométrico como argumento formal;
- c. compreender e situar-se geometricamente dentro da estrutura física da Universidade de Brasília;
- d. desenvolver a capacidade dos estudantes para raciocinar geometricamente, utilizar os conceitos, procedimentos geométricos, descrever e explicar fenômenos.

Além das habilidades, a atividade apresentou os seguintes objetivos:

- a. estimular os estudantes a conhecerem o conteúdo histórico, político e social em que se insere a Universidade de Brasília;
- b. conhecer a política assistencial da UnB.

A fim de que o estudo trouxesse resultados para embasar esta investigação, procuramos preparar e desenvolver a atividade, concretizando uma pesquisa participante, que segundo Peruzzo (2017), implica numa investigação baseada na interação ativa entre o investigador e o grupo investigado, na presença constante no ambiente investigado e envolvimento nas atividades realizadas por aquele grupo.

As atividades da sequência didática foram realizadas em duas sessões, duas aulas com duração de 90 minutos cada. A turma foi separada em pequenos grupos colaborativos (LISBOA, 2013; FARINHA 2004, 2014; COSTA, 2014), com 4 integrantes cada. Dentre os grupos formados, havia 3 (três) pequenos grupos, com estudantes do 3º ano do ensino médio, que participaram deste estudo piloto.

Na primeira sessão, os estudantes em grupo resolveram situações-problema, com assuntos relacionados à Geometria Analítica (distância entre pontos, alinhamento entre pontos, estudo das retas, dentre outros). A segunda sessão ocorreu uma semana após a primeira sessão, nela foi proposta uma atividade

matemática que buscou integrar a sequência didática de Geometria Analítica, aos aspectos históricos, políticos, sociais e assistenciais da Universidade de Brasília. A figura 4 mostra o enunciado da atividade “Conhecendo a Universidade de Brasília”.


Figura 4 - Enunciado da Atividade “Conhecendo a Universidade de Brasília”

Conhecendo a *Universidade de Brasília*

O Tapete Cartesiano esta dividido em linhas brancas e vermelhas, escolha uma como referência. Considere a distância entre as linhas vermelhas, ou entre as linhas brancas, de 100 metros.

Os objetivos desta atividade serão:

- Posicionar os pares ordenados no Tapete Cartesiano seguindo instruções da atividade 1.
- Trabalhar os conteúdos relacionados com geometria analítica que se referem ao posicionamento de pontos no plano cartesiano, equação da reta dado dois pontos, equação reduzida da reta, inclinação da reta, distância entre pontos, condição de alinhamento, área formada por figuras;
- Conhecer e identificar as principais edificações da Universidade de Brasília.

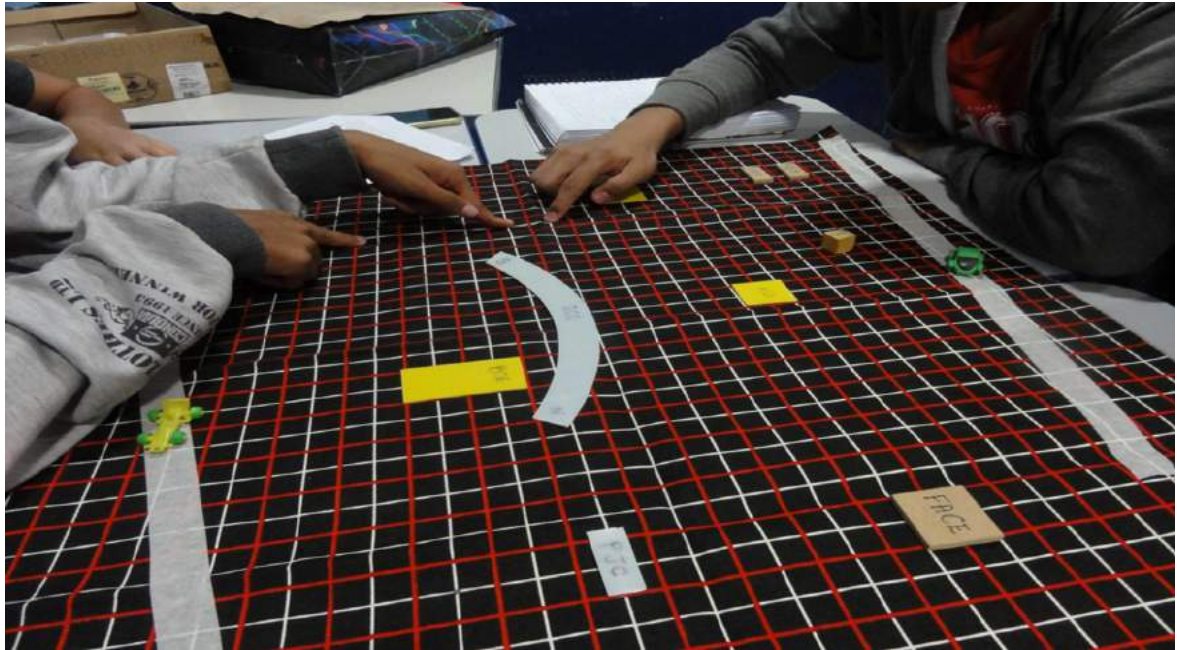


Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora (2015)

Observa-se que no enunciado da atividade de reconhecimento da universidade, figura 4, há uma breve descrição do material concreto “Tapete Cartesiano”, que propõe aos estudantes uma experimentação diferenciada relacionada ao ensino da Geometria Analítica, que consistia em uma alternativa didática, permitindo aos estudantes manipular peças em madeira do material, ao mesmo tempo em que resolviam as situações-problema em grupo. Em cada questão havia um texto informativo sobre aquele respectivo “edifício da UnB”, com dados sobre a sua finalidade no campus universitário.

Tanto o planejamento das aulas, elaboração da sequência didática, quanto a intervenção junto aos estudantes foram realizadas pelo professor do projeto, conjuntamente com a autora da presente tese. Cada grupo colaborativo de estudantes teria como tarefa concluir a missão proposta, que consistia em encontrar o posicionamento correto de algumas edificações da Universidade de Brasília em um Tapete Cartesiano, conforme mostra a figura 5.

Figura 5 - Material Concreto Tapete Cartesiano.



Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora

Na atividade, o Tapete Cartesiano foi utilizado como um mapa cartesiano, conforme demonstrado na figura 5. Inicialmente, os estudantes deveriam diferenciar o eixo das abscissas (eixo X) do eixo das ordenadas (eixo Y). Para mapear a UnB, as questões da atividade desafiavam os estudantes a encontrarem os pares ordenados relativos às edificações propostas, além de descobrir distâncias entre as edificações, equações das retas que passavam pelas edificações e a área das figuras geométricas que tinham os pontos como vértices. Para motivar e despertar o interesse dos estudos para a resolução das situações-problema, utilizamos uma história roteiro no qual os personagens eram egressos da escola, atuais estudantes da Universidade de Brasília.

Ao final do desenvolvimento da sequência didática, os estudantes participantes do estudo piloto foram convidados a avaliar a atividade, discutindo em grupo, acerca das limitações e potencialidades da atividade de Geometria Analítica “Conhecendo a Universidade de Brasília”. Após a avaliação em grupo, os alunos responderam individualmente um questionário com 4 questões abertas, construído no Google Forms, com perguntas abertas sobre: a) as vantagens e limitações da atividade realizada em grupo colaborativo “Tapete Cartesiano”; b) a apropriação dos conteúdos; c) a forma como os conceitos foram discutidos e formulados; d) e se aquela atividade era prazerosa.

No desenvolvimento do estudo piloto, contamos com a participação de 12 (doze) estudantes do 3º ano do Ensino Médio, divididos em 3 pequenos grupos

colaborativos (Grupo 1, Grupo 2 e Grupo 3), sendo que cada grupo era constituído por 2 estudantes do sexo feminino e 2 estudantes do sexo masculino, com idades entre 16 e 18 anos. As identidades foram preservadas e os estudantes foram identificados pelas iniciais de seus nomes.

Durante todo o estudo, acompanhei os estudantes, gravei áudios das discussões nos 3 grupos, realizei observações durante as duas sessões da atividade e anotei as conversas informais com os estudantes participantes da atividade, sobre a sequência didática e o mapeamento da UnB.

Para nortear o desenvolvimento da sequência didática e a análise dos dados construídos, a professora Flor foi entrevistada anteriormente ao estudo e relatou as insuficiências conceituais e dificuldades dos estudantes investigados, bem como relacionou as dificuldades relacionadas à epistemologia e à didática.

A seguir, apresento as análises do estudo piloto, considerando os dados construídos a partir: a) das anotações observacionais e das respostas do questionário Google *Form*; b) da entrevista e anotações dos diálogos com a professora de Matemática das turmas dos alunos envolvidos no estudo; c) das observações do professor do projeto em que foi aplicado o estudo.

As análises foram divididas em duas fases: a) Análise colaborativa; e b) Análise individualizada. Para a realização da primeira fase de análises do estudo piloto, foi criado um grupo colaborativo de trabalho, contando com a participação dos envolvidos no processo investigativo durante a aplicação do estudo: eu, o Professor Augustus e a Professora Flor. Segundo Fiorentini (2010), a colaboração do grupo de trabalho vai desde a concepção, planejamento, realização até a fase de análises.

Nessa perspectiva, Ibiapina (2008) ressalta que o desenvolvimento de um trabalho colaborativo de pesquisa solicita a criação de relações que incluam interesses pessoais, sociais em uma consistente teia conectiva interpessoal. Desse modo, para pesquisar colaborativamente, é preciso envolver investigadores e professores em processos reflexivos que permitam partilhar experiências, opiniões, possibilitando a ampliação do nível de aprendizagem da profissão docente.

Considerando que, em geral, as pesquisas têm o objetivo de solucionar problemas e/ou levantar outras problemáticas, para que possam ser solucionadas posteriormente com novas pesquisas, verificamos a necessidade de analisar este estudo e relacioná-lo com a teoria proposta para a investigação desse doutoramento, buscando solucionar alguns dos problemas que foram identificados e/ou investigar os

fenômenos que não puderam ser pesquisados em virtude da insuficiência de informações produzidas, ou da ausência de teoria anterior para fundamentar algumas impressões verificadas.

Na primeira fase de análises, as observações realizadas durante a realização da sequência didática, as gravações em áudio, as avaliações colaborativas dos 3 grupos de estudantes, bem como as respostas individualizadas do questionário, foram analisadas pelo grupo colaborativo de trabalho. O procedimento de análise iniciou com o processo de sistematização dos dados brutos e resultou na categorização temática aqui apresentada: 1) Ambiente interativo e lúdico; 2) Realização da sequência didática; e 3) Aprendizagem colaborativa.

CATEGORIA TEMÁTICA 1: Ambiente interativo e lúdico

No Grupo 1, observamos que os quatro estudantes se envolveram totalmente com atividade, ficou visível que eles se divertiam durante a resolução das situações-problema. Quando eu perguntei sobre a atividade, o que estavam achando, o aluno EAS respondeu: “professora, a atividade é um jogo, não é? Eu acho que é um jogo sim e está bem divertido, mas nós estamos perdidos na Universidade de Brasília (risos)”. Neste momento o Professor Augustus perguntou: Como? O aluno respondeu que “estamos discutindo sobre o posicionamento do Restaurante Universitário (RU) e já estamos com fome, mas ainda não encontramos o RU (risos)”. Eu perguntei aos outros integrantes do grupo se eles consideravam aquela atividade como um jogo, a aluna LCCA disse que “é um jogo sim, porque tem desafios e cada um colega mostra uma estratégia para resolver”. O aluno VBLD concordou com a aluna LCCA e complementou que: “é sim jogo, nós estamos resolvendo brincando” e os outros 3 estudantes sorriram e balançam a cabeça concordando com o colega VBLD.

No Grupo 2, percebemos que dois estudantes estavam resolvendo as questões e os outros dois apenas olhando. Quando eu perguntei sobre a atividade, os alunos se entreolharam e o aluno IGR, um dos estudantes que estava envolvido com a resolução da atividade, respondeu: “professora, eu acho que a Faculdade de Educação (FE) está errada, falta a gente entender o problema, tá difícil”. A aluna DONR, que estava calada, só observando disse: “nós temos que calcular a distância para todos os lados e ver onde vai cair na reta”. Esta pesquisadora não entendeu o que a estudante quis dizer, mas, os estudantes do grupo entenderam, afinal eles se entreolharam, concordaram com a colega e passaram interagir e responder a atividade juntos. Em outro momento o professor Augustus perguntou se eles consideravam aquela atividade divertida e todos concordaram, a aluna DONR mencionou que parecia o jogo batalha naval, mas não quis dar explicações sobre sua consideração.

No Grupo 3, percebemos que os quatro estudantes estavam de um lado só do Tapete Cartesiano, todos bem comunicativos, mas estavam bem atrasados na atividade, ainda respondendo a primeira questão, enquanto os demais grupos estavam

respondendo a terceira. Perguntados sobre a atividade, o aluno SFAS respondeu: “é muito legal, mas fizemos tudo errado”, em seguida a aluna SMRM complementou: “a gente estava cada um de um lado e ninguém sabia onde era o norte, se era aqui (apontou para um ponto no Tapete Cartesiano) ou se era aqui (apontou para um ponto oposto ao anterior no Tapete Cartesiano) e resolvemos ficar do mesmo lado”. A aluna ECFS completou: “agora estamos começando tudo de novo”. O Professor Augustus perguntou se eles consideravam aquela atividade prazerosa, a aluna SMRM respondeu: “claro que é, olha aqui, estamos nos divertindo, só acho que o tempo para resolver o desafio não será suficiente”. O aluno RLS disse: “é bastante divertido, já estou todo torto de tanto me contorcer pra achar os prédios (risos)”.

Associadas a essa categorização, as avaliações em grupo e as respostas individualizadas dos estudantes reforçam o caráter interativo e lúdico da sequência didática. A seguir, apresentamos as percepções individualizadas dos estudantes sobre a atividade ter sido ou não prazerosa.

CATEGORIA TEMÁTICA 1: Ambiente interativo e lúdico	
Aluno	Fragmentos das respostas
EAS	<i>“É divertido usar as ferramentas matemáticas para mapear a Universidade”</i>
VBLD	<i>“Todos os alunos se divertiram ao realizar a atividade”</i>
IGR	<i>“Achei a atividade prazerosa e interativa, primeiramente por seu aspecto social que permite que os alunos dialoguem de forma extremamente casual, livre e chega a lembrar jogos de tabuleiro. Outro aspecto é a competição amigável para completar corretamente o mapa”</i>
SFAS	<i>“É surpreendente, pois é jogado de modo descontraído e os materiais usados faz lembrar mais um jogo - com regras para ser jogado - do que um conteúdo de prova”</i>
VOQ	<i>“O jogo não é algo monótono para representar o conteúdo, é uma atividade que incentiva e facilita o entendimento e há o envolvimento, diálogo em grupo o que facilita interagir com o jogo também”</i>
LCCA	<i>“O mapa consegue integrar ao mesmo tempo conhecimento e diversão, assim ajuda a mudar aquela velha ideia que matemática é algo chato e maçante”</i>
VRNP	<i>“Esse tapete destaca por ser diferente das atividades que temos acesso na escola e é algo que podemos resolver (e resolvemos) se divertindo”</i>
RLS	<i>“A melhor parte foi que saímos daquela coisa metódica onde aprendemos a teoria e não sabemos onde aplicar”</i>
LMCM	<i>“O jogo do mapa da UnB é uma forma de assimilar conceitos da geometria analítica, deixa bem fácil o entendimento de um plano cartesiano, facilita muito no entendimento da matéria e ainda possibilita debater as questões com os colegas”</i>
BSS	<i>“Por ser um jogo em grupo, desperta uma competitividade saudável, gera um interesse na geometria analítica através de peças que lembram o jogo de quebra cabeça e, traz um conhecimento divertido de como é a UnB”</i>
DOMR	<i>“O jogo do mapa mistura matemática com situações da vida real de forma interativa e divertida, onde há compartilhamento de conhecimento e vivência. E, além disso, todos interagem em grupo, é uma atividade que chamou a atenção e surpreendeu os alunos, pois onde há troca de conhecimento e fortalecimento dos laços de amizade”</i>

Ademais, identificamos ao longo das observações e falas de alguns estudantes, que durante o desenvolvimento da atividade matemática houve divertimento e prazer, que segundo Macedo, Petty e Passos (2005), são indicadores que inferem uma dimensão lúdica. No entanto, não podemos generalizar, afinal também durante as observações, verificamos que dois estudantes não interagiam com os demais colegas de grupo, tampouco demonstraram satisfação ou prazer durante a situação didática. Contudo, nas avaliações feitas em grupo e nas respostas individuais do questionário online, os estudantes foram categóricos em considerar a atividade como prazerosa.

CATEGORIA TEMÁTICA 2: Realização da sequência didática

No Grupo 1, atentamos para o fato de que os 4 estudantes do grupo estavam confusos, mais precisamente porque não entravam em consenso em relação aos pontos cardeais do Tapete Cartesiano. A todo momento, um aluno virava o tapete para o lado que achava ser a direção norte. Contudo, em um determinado momento, um dos estudantes resolveu identificar com uma fita, sob o tapete, a direção norte e a direção leste resolvendo assim o problema de orientação do grupo. Observamos o aluno EAS explicando pacientemente aos demais colegas sobre a distância de dois pontos poder ser calculada colocando a reta dos dois pontos em cima do eixo, projetar o segmento de reta em um dos eixos. Ao perceber que os colegas estavam confusos, novamente o aluno EAS explicou a questão aos colegas, contudo, o aluno VBLD questionou: “esse lado não tá reto com o X nem com o Y, como vamos calcular?”. Prontamente a aluna BSS falou: “nós podemos calcular quanto é cada diagonal dos quadradinhos e somar quantos quadradinhos tem aí”. A estratégia proposta pela aluna seria calcular a diagonal de um quadrado de lado 5 cm que equivalem a 100 metros em escala. Feitos os cálculos com o uso do Teorema de Pitágoras, os alunos encontraram o valor, mas não conseguiram somar imediatamente, pois se tratava de pontos distantes na diagonal. Após alguns minutos, em que todos estudantes ficaram compenetrados tentando fazer a soma, o aluno EAS disse: “nós somos muito burros (risos), é só somar os “5” e repetir a raiz de 2”, e assim todos os outros estudantes concordaram com o colega sem questionar. Após o grupo encontrar o resultado daquela situação-problema, percebeu-se que o resultado estava diferente dos outros grupos, e assim descobriram que seu resultado estava errado. Em conjunto, o grupo analisou toda a resolução da questão para verificar centímetros para encontrar a distância real entre os pontos. Após a descoberta do erro, observamos que os 4 integrantes do grupo fizeram conjuntamente o novo cálculo e assim, encontraram o valor. De repente, o aluno VBLD questionou: “mais qual é essa distância em metros?”. A aluna BSS com o auxílio da calculadora disse: “é 707 metros”.

No Grupo 2, acompanhamos uma tentativa dos estudantes em verificar o alinhamento das edificações da UnB. Inicialmente os estudantes tentaram verificar visualmente, o aluno IGR e a aluna DONR posicionaram os olhos próximos ao Tapete Cartesiano para tentar visualizar melhor. Convencidos de que daquele modo não poderiam demonstrar se as edificações estavam alinhadas, passaram a discutir em grupo como poderiam demonstrar que as edificações estavam alinhadas. O aluno IGR disse que:

“se encontrarmos a equação da reta que passa por esses dois pontos (apontando para o RU e a FE1), logo depois a gente pode ver se esse ponto (se referindo ao Pavilhão Anísio Teixeira - PAT) tá na reta”. A aluna DONR perguntou: “Mas como vamos fazer isso?”. O Aluno IGR disse: “vamos fazer o peixinho (se referindo ao cálculo do determinante) para achar a equação” e imediatamente pegou o caderno escreveu X e Y na folha e disse: “fala aí qual os pares ordenados dos pontos”, os outros 3 colegas falaram e o aluno IGR escreveu abaixo e depois repetiu X e Y novamente, fez os cálculos enquanto os outros estudantes acompanhavam e chegou a uma equação. O aluno VRNP perguntou: “e agora, como vamos provar?”. O aluno IGR disse: “agora vamos ver se esse (apontando para o Pavilhão João Calmon - PJC) está aqui” e perguntou: “qual é o X aí?” os colegas responderam, ele calculou e disse: “deu zero”. Os colegas responderam: “tá certo”. A aluna DONR mencionou: “agora temos que escrever tudo isso pra mostrar como fizemos ao Professor Augustus”. Ficou evidenciado neste grupo duas tipologias de situações didáticas, analisando as principais atividades específicas da aprendizagem matemática (BROUSSEAU, 1986): a situação de formulação, quando os alunos formulam suas estratégias e explicitam-nas verbalmente e a situação de validação, quando os alunos tentam convencer demais colegas e professor da veracidade das suas afirmações, utilizando uma linguagem matemática apropriada (demonstrações). Entendemos que o grupo conseguiu responder as situações-problemas do mapeamento da UnB e se preocupou até mesmo com as demonstrações matemática, no entanto, não sabemos se todos os alunos integrantes do grupo, compreenderam os conceitos e estratégias utilizadas pelo aluno IGR, para aquela determinada questão.

No Grupo 3, acompanhamos a resolução de uma situação problema em que um estudante teria que sair da FE5 (Faculdade de Educação) e se deslocar até o Centro Comunitário Athos Bulcão para a sua formatura. Os estudantes do grupo teriam que calcular qual a menor distância percorrida. Esperava-se que os estudantes construíssem um triângulo retângulo e, a partir da medida de seus lados, encontrassem a medida da hipotenusa. No entanto, o trajeto seguido pelos alunos foi diferente. Os estudantes percorreram os caminhos verticais e horizontais partindo da FE5 até o Centro Comunitário Athos Bulcão, o interessante é que eles fizeram vários percursos e encontraram o mesmo resultado. Desse modo, os alunos concluíram que a menor distância era o valor encontrado. Após alguns minutos, o grupo percebeu que havia errado e refizeram a questão, agora calculando a medida da hipotenusa formada pelo triângulo retângulo com vértices na FE5, o Centro Comunitário Athos Bulcão e um ponto no plano. Contudo, apesar dos estudantes terem seguindo um caminho errado para a solução da questão, assimilaram um conceito importante, que foi compartilhado ao final da atividade, com os demais estudantes dos grupos 1 e 2. Fica evidenciado neste exemplo que os pesquisadores devem ficar atentos às estratégias que possam surgir nas resoluções das atividades, e que não foram consideradas a *priori*.

Em suma, percebemos ao longo da pesquisa participante do estudo piloto, bem como durante as análises dos dados e categorização temática 2 “Realização da

sequência didática”, indícios de situações de ação, formulação e validação (BROUSSEAU, 1986). Constatamos que estudantes que participaram da situação didática aprenderam, contudo, os instrumentos metodológicos utilizados no piloto não nos possibilitaram confirmar se a aprendizagem matemática realmente se efetivou. Nesse sentido, a verificação da aprendizagem no estudo piloto ficou prejudicada, por faltar na organização do ensino e no desenvolvimento da sequência didática, aportes teóricos relacionados à Didática da Matemática.

CATEGORIA TEMÁTICA 3: Aprendizagem Colaborativa

A partir das observações das relações em sala de aula, percebemos que os estudantes interagem de diferentes formas: estabelecem conversas paralelas, discutem, brincam e compartilham ideias durante as atividades, mesmo que estas atitudes não sejam explicitamente permitidas ou estimuladas. Assim, o estudante deixa de ser considerado mero receptor, e passa a ter um papel mais ativo, sendo, neste contexto, um sujeito que construiu o seu próprio conhecimento junto a outras pessoas (professor, outros estudantes, etc.) e outros recursos de mediação (livros, jogos, meios tecnológicos, etc.) e em seu contexto social. Então, por conseguinte, amplia-se a visão de que o estudante é capaz de construir seu próprio conhecimento.

Pifarré e Sanuy (2002) afirmaram que o processo de ensino-aprendizagem se dá mediante dois procedimentos essenciais: a atividade construída pelos próprios estudantes e a ajuda e suporte oferecido pelos colegas e professores. Portanto, acredita-se que a aprendizagem de um conteúdo ou a resolução de um problema, conjuntamente, em que os estudantes têm a oportunidade de comunicar o seu conhecimento e confrontar o seu ponto de vista com o de outros colegas, pode vir a ser uma situação favorável, para que os estudantes se ajudem mutuamente, no sentido de superarem as dificuldades ou erros surgidos em uma atividade.

Durante o desenvolvimento da sequência didática, os estudantes expuseram suas ideias para que os outros colegas tomassem conhecimento e, ao mesmo tempo, tinham a oportunidade de conhecer as ideias dos outros colegas, objetivando construir juntos soluções das questões da atividade “Mapeando a Universidade”.

Essa relação de diálogo, interação e argumentação, levou os estudantes dos 3 pequenos grupos colaborativos, a reconstruírem suas ideias, conectando seus pensamentos aos pensamentos dos demais colegas. As ações colaborativas entre os estudantes, observadas na situação didática, podem contribuir para desenvolver nos

jovens, competências que estimulem o pensamento matemático, bem como aumentar o repertório para resolver um mesmo problema.

Com os dados construídos a partir da avaliação individualizada, acerca do questionamento sobre “vantagens e limitações” da atividade realizada em pequenos grupos colaborativos, sintetizamos as percepções dos estudantes que representam a categoria 3:

CATEGORIA TEMÁTICA 3: Aprendizagem Colaborativa	
Aluno	POTENCIALIDADES (fragmentos das respostas)
ESL	<i>“É possível visualizar os conceitos matemáticos de uma forma diferente, interativa e divertida, que ajuda bastante a fixar o conteúdo aprendido, além de incentivar a socialização e a troca de conhecimento”</i>
IGR	<i>“Creio que a primeira vantagem seja a possibilidade de trabalhar em grupo, onde 4 pessoas acabam compartilhando seus conhecimentos e entendimento da parte teórica e acaba tornando a atividade mais divertida”</i>
CMDS	<i>“A atividade por si promove o trabalho em grupo, ajuda com o foco no conteúdo e torna prazerosa a aprendizagem”</i>
LCCA	<i>“Além do conhecimento matemático, desenvolvemos a habilidade de trabalhar em equipe, que tem grande funcionalidade para a formação do estudante”</i>
TGS	<i>“O jogo estimula a curiosidade dos alunos e principalmente o trabalho em equipe”</i>
EAS	<i>“É um jogo super colaborativo, pois, quando alguém não se lembrava ou não tinha entendido certa parte da questão, outro colega do grupo estava pronto para ajudar, mostrando a eficácia do trabalho em grupo”</i>
ESL	<i>“Por ser um jogo em grupo, há bastante troca de conhecimento e ajuda entre os participantes para concluir a atividade. Vi que uma questão tem muitas respostas e que todas estão corretas”</i>
JBA	<i>“Quando um de nós tinha uma dúvida ou dificuldade até o colega do outro grupo nos auxiliava. Foi como uma confraternização matemática”</i>
LCCA	<i>“O trabalho, para ser executado dentro do tempo determinado, demanda a ação de toda equipe, e essa ação torna exposta as dúvidas particulares que são solucionadas com a comunhão e doses de conhecimentos”</i>
ALUNO	LIMITAÇÕES (fragmentos das respostas)
IGR	<i>“As desvantagens são ligadas principalmente à atividade em grupo, onde acontecem exceções em que o grupo não dialoga”</i>
IGR	<i>“Presenciei casos onde o grupo não dialogou e apenas parte do grupo fez a atividade. Isso, porém são exceções e a grande maioria assimila sim os conteúdos propostos”</i>
SFAS	<i>“Alguns integrantes que sabem “mais” que outros, se sobressaem, e outros ficam na “sombra”. Mesmo com a exploração de métodos para evitar isso, ainda é algo recorrente”</i>

É importante esclarecer que na categorização “aprendizagem colaborativa”, foram considerados aspectos teóricos (DILLENBOURG, 1999; FIGUEREIDO, 2006; FIORENTINI, 2010) que exemplificam suas principais características: interação, foco no processo, atividades não estruturadas, abordagem centrada no aluno, negociação entre pares para resolver o problema, experiências compartilhadas.

Na segunda fase de análises, verifiquei que não houve a especificação de qual modelo de contrato didático seria utilizado ao longo do desenvolvimento da sequência didática. Esses modelos indicam formas diferenciadas de condução da prática pedagógica (BROUSSEAU, 1986), a partir da postura do professor frente ao estudante e da valorização do conhecimento.

No entanto, observei que a sequência didática se desenvolveu sem a minha interferência e a dos dois professores. Mesmo identificando em certos momentos a dificuldade de alguns grupos na resolução das situações-problemas, nós não informamos as respostas aos estudantes.

Mas percebi que em algumas ocasiões, o professor do projeto educativo conduziu os estudantes, mediante perguntas, a um caminho que os levassem as respostas. Cabe ressaltar que o acompanhamento do professor se tornou explícito durante a institucionalização do ensino, assim como durante a organização didática das situações, ao demonstrar e usar o discurso matemático científico.

Era perceptível que em algumas situações didáticas nos grupos observados, o entendimento de um conceito era apresentado ou assimilado por analogia, fato que se mostrou presente na relação aluno/aluno e na relação professor/aluno. Além disso, em todos os momentos da aplicação da atividade, seja durante as perguntas orientadoras do professor, seja na institucionalização do saber, constatei que o professor buscou transformar o saber científico, em saber a ensinar (aquele que está nos livros didáticos, por exemplo) e por fim, em saber a ser ensinado (aquele que realmente acontece em sala de aula). Assim ficou evidenciado na situação didática, a Transposição Didática (CHEVALLARD, 2009).

Apesar das “regras do jogo” terem sido apresentadas pelo Professor Augustus aos alunos, no início da atividade e sem questionamento, um contrato didático teve que ser renegociação. Uma das regras seria que os estudantes, em grupo, responderiam as questões sem orientação do professor, o que não aconteceu em sua totalidade, pois os estudantes dos 3 grupos passaram a perguntar ao professor quando tinham dúvidas. No entanto, nesta negociação do contrato didático, o Professor Augustus esclareceu aos estudantes que não responderia as questões, contudo indicaria caminhos.

Outra observação, foi em relação aos espaços da sala de aula, que foram organizados de maneira que os 4 estudantes de cada grupo, ocupassem os lugares

ao redor de uma mesa e ficassem de frente, dois a dois. Mas houve uma renegociação neste contrato, quando os estudantes do Grupo 2 optaram em permanecer os quatro estudantes de um só lado, configurando uma renegociação implícita, pois não houve, diálogo entre o grupo e o professor sobre este contrato.

Outro fato não acordado explicitamente, se referia ao compartilhamento de ideias entre os grupos. Neste caso eu entendi que este compartilhamento de ideias denota um contrato anterior já existente e vigente no contexto do projeto Matemática Todo Dia, ambiente onde o estudo foi aplicado. Ao observar mais detalhadamente a relação de colaboração entre os grupos, verifiquei que não houve prejuízo ao estudo piloto, pois os estudantes não seguiam as mesmas formas de resoluções das questões de outros grupos.

De fato, os estudantes socializavam as conclusões ou soluções das questões, mas cada grupo procurou refletir sobre a diversidade de soluções para uma mesma questão, proporcionando ao grupo momentos de construção de conhecimento colaborativo como estabelecido pelo professor. Os 3 grupos tentavam provar entre eles, suas formulações, conclusões e soluções com o uso de fórmulas e demonstrações, apresentando o rigor matemático necessário em alguns casos. Nas situações de formulação e validação, existiam algumas incorreções, no entanto, ficou claro que havia a regra, mesmo que implícita, que as situações-problema da atividade do Mapeamento da UnB, deveriam ser apresentadas, por meio da língua materna (BRASIL, 2018), descritas e representadas matematicamente.

Por fim, cabe reforçar durante o planejamento e aplicação deste estudo piloto, que não havia a intencionalidade de relacioná-lo com as teorias da Didática da Matemática, mas precisamente com a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau. Contudo, durante a aplicação e a partir das análises, surgiu a necessidade de ampliar o referencial teórico para a futura tese, bem como repensar em uma metodologia de pesquisa adequada à proposta de investigação, como a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), que oportunizasse identificar e analisar as situações didáticas e permitisse relacionar algumas variáveis *a priori* e *a posteriori*.

Considerações finais do estudo piloto

Uma análise prévia dos dados, com um olhar voltado às situações didáticas de Brousseau, fez emergir algumas questões:

- a. Qual o referencial teórico e metodológico necessário para dar *corpus* à nossa investigação?
- b. Quais instrumentos metodológicos devemos utilizar para identificar e analisar as situações didáticas?
- c. Nos interessa os manuscritos dos estudantes para as análises das situações didáticas?
- d. Como verificar se os alunos aprenderam? Quais conceitos foram aprendidos? Como foram aprendidos?

Como resultado da situação didática analisada no estudo piloto, que potencializou a interação entre o professor, o aluno e o saber, houve a necessidade de aperfeiçoar os estudos acerca dos contratos didáticos de Brousseau e torná-los também aporte teórico desta investigação, resultando no seguinte questionamento: Como os contratos didáticos se apresentam e se estes interferem na relação com o saber?

Acerca da aprendizagem colaborativa, o desenvolvimento da atividade, os dados construídos ao longo do estudo e as análises, resultaram nas seguintes questões:

- a. A aprendizagem acontece paralelamente com a interação entre os sujeitos?
- b. Como acontecem as trocas significativas entre os alunos e entre estes e o professor?
- c. Como a relação com o outro e com os demais aspectos sociais potencializam e atualizam as interações?
- d. Como ocorre a relação entre a linguagem e o pensamento no processo colaborativo?

Cabe ressaltar que é compreensível constatar que as ações do grupo colaborativo de trabalho, que além do processo de construção, análise e interpretação dos dados construídos, terem sido enriquecido pelos múltiplos e subjetivos olhares do grupo, existe também, uma aprendizagem compartilhada (FIORENTINI, 2010), tanto em relação aos conhecimentos gerados ao longo do processo de investigação, quanto ao processo de investigar colaborativamente.

Para finalizar, as questões levantadas neste estudo piloto, também foram consideradas para o desenvolvimento e construção desta tese de doutoramento.

3.3 - PARTICIPANTES E LÓCUS DA INVESTIGAÇÃO

A pesquisa foi constituída por três etapas. Participaram da primeira etapa de investigação, 228 estudantes de 7 turmas do 3º ano do ensino médio de uma escola pública situada na periferia do Distrito Federal, na Região Administrativa de Ceilândia. Trata-se de uma escola inaugurada em 1978 para atender, à época, estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental. Com o crescimento populacional da comunidade local, no início da década de 1980, a escola transformou-se em centro educacional, com atendimento a estudantes do ensino fundamental (séries finais) e ensino médio. Desde o final da década de 1990, a escola passou a atender somente alunos do ensino médio regular e o 3º segmento da Educação de Jovens e Adultos (EJA- Ensino Médio). A escola nunca passou por uma reforma estrutural e até o momento, mantinha a estrutura arquitetônica de uma pequena “escola classe”. Com isso, o estabelecimento não possui auditório, tampouco laboratórios específicos para atender o ensino médio. A escola atende 1500 estudantes nos três turnos, desse total, 1100 são alunos do ensino médio regular.

A escolha desta escola foi por conveniência, resultante da familiaridade que a autora da tese possui com a instituição de ensino, por ter sido estudante egressa (1988 a 1991) e por ter pertencido ao grupo de funcionários públicos desta escola no período de 2006 a 2018. Tal afinidade foi percebida como algo que poderia permitir o encaminhamento da pesquisa com menos dificuldade, no desenvolvimento da Engenharia Didática nas turmas, na aplicação dos instrumentos junto aos participantes e uma maior possibilidade de interagir com os estudantes. É nesta perspectiva que Gonsalves (2007) afirma que os dados são produzidos a partir da interação entre o investigador e sujeito-investigado e então, ele se configura produtor de realidade e de conhecimento.

Na segunda etapa de investigação, foram selecionados aleatoriamente 28 estudantes de 4 turmas diferentes. A seleção de estudantes aconteceu, porque na primeira etapa de investigação, os dados construídos foram referentes à participação de todos os estudantes integrantes de pequenos grupos colaborativos, nos momentos

de desenvolvimento da proposta didática nas 7 turmas do 3º ano do Ensino Médio, ou seja, naquela etapa as observações de campo ocorreram de maneira geral, ampla.

Contudo, para garantir a viabilidade e intervenção proposta pelo estudo, foi necessário reduzir a amostra, possibilitando assim que outro instrumento de investigação fosse utilizado na coleta dos dados: a roda de conversa. Dos 28 estudantes convidados a participar da pesquisa, 24 aceitaram o convite, e assim foram divididos em 2 grupos com 12 estudantes cada, para participarem da roda de conversa. O primeiro grupo participou da roda de conversa no dia 28 de novembro de 2017, com duração de 1 hora, 14 minutos e 17 segundos; e o segundo grupo, no dia 29 de novembro de 2017, com duração de 1 hora, 5 minutos e 45 segundos.

A terceira etapa de investigação, teve como finalidade resgatar a memória educativa e afetiva da atividade por meio do protocolo de investigação “questionário *online*”. Após seis meses da realização da atividade, os 24 estudantes participantes da roda de conversa foram convidados a responder o questionário *online*. O convite a este procedimento ocorreu por meio de mensagens pessoais de duas redes sociais (*facebook* e *whatsapp*). O questionário online ficou ativo durante 10 (dez) dias.

Os principais objetivos da aplicação deste questionário foram: a) verificar a memória educativa e afetiva dos estudantes em relação à atividade; b) sanar algumas lacunas não respondidas na roda de conversa, e que não foram possíveis verificá-las nas observações em sala de aula. Trata-se de questões relacionadas às percepções dos estudantes acerca da colaboração entre os alunos durante o desenvolvimento da atividade pedagógica; c) por fim, conhecer a trajetória educativa destes estudantes após o término do ensino médio.

Foram enviadas aos 24 estudantes, via redes sociais, uma mensagem explicativa sobre a investigação, o endereço online do questionário e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE). Nesta terceira etapa de investigação participaram 22 estudantes, dentre os 24 participantes da roda de conversa. Dos 22 estudantes que aceitaram participar da pesquisa, 16 estudantes (72,7 %) são do gênero feminino e seis (27,3 %) do masculino. As idades dos estudantes variavam entre 17 e 18 à época da realização da investigação em sala de aula, sendo 11 (onze) nascidos no ano 2000 e 11 (onze) nascidos em 1999. Com a intenção de manter em sigilo a identidade dos participantes, ao longo dessa investigação, os estudantes receberam nomes de estrelas do universo, como exemplo, Estrela Antares, Estrela Vega.

Além dos 22 estudantes de turmas do 3º ano do ensino médio, a professora de Matemática também participou da pesquisa, no momento da aplicação do estudo piloto, durante a experimentação da Engenharia Didática nas turmas e ao final da intervenção. A professora que foi chamada de Flor para assegurar o anonimato, foi entrevistada após a experimentação nas turmas, entrevista semiestruturada com um roteiro prévio que possibilitou inserir novas questões. A entrevista foi gravada em áudio com duração de, aproximadamente, 49 minutos. A figura 6 esclarece a trajetória da escolha dos sujeitos desta pesquisa.

Figura 6 - Definição dos sujeitos da pesquisa



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

3.4 - PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

Inicialmente, foi realizado contato com o diretor da escola para explicar os objetivos da pesquisa e os procedimentos que seriam adotados. Obtida a autorização da escola, o projeto foi submetido ao Comitê de Ética em Pesquisa do Instituto de Ciências Humanas (CEP/CHS), da Faculdade de Direito da Universidade de Brasília.

Após o primeiro contato com a escola, realizamos um estudo piloto com o objetivo de refinar o planejamento de construção de dados em relação ao conteúdo, adequação do protocolo de investigação, roteiro das entrevistas e validação do questionário *online*. Posteriormente, os resultados do estudo piloto fizeram parte dos estudos preliminares da Engenharia Didática.

Com o término das análises do estudo piloto e levantamento das referências teóricas, inicialmente, propomos que o desenvolvimento da pesquisa, em relação à experimentação, aconteceria durante o 2º semestre letivo de 2017. Para a realização da pesquisa, observamos o calendário anual de 2017 da rede pública de Ensino do Distrito Federal.

Após a definição do período de aplicação do projeto nas turmas, constituímos um grupo de trabalho colaborativo formado pela pesquisadora, a professora de Matemática, por um pesquisador graduado em Matemática e mestre em Educação, e por 2 (dois) estudantes egressos da escola, que no momento da pesquisa eram graduandos da UnB, um do curso de Matemática e outra do curso de Biologia. O grupo colaborativo teve como objetivo central planejar as ações a serem desenvolvidas durante a aplicação da sequência didática. Segundo Fiorentini (2010, p.52), “um grupo autenticamente colaborativo deve ser constituído de pessoas voluntárias, no sentido de que participam do grupo espontaneamente, por vontade própria, sem serem coagidas ou cooptadas por alguém a participar”.

A opção pela constituição do grupo foi influenciada pela identificação da pesquisadora com os demais integrantes deste e pela possibilidade de compartilhar saberes, experiências e um especial interesse comum: desenvolver e socializar atividades que possam tornar o ensino de Matemática no ensino médio prazeroso.

Sobre a constituição de grupo de estudo e trabalho colaborativo, Fiorentini (2004, p. 56) mencionou que tal identificação não expressa a presença de sujeitos iguais, mas sim de pessoas dispostas a compartilhar naturalmente algo de interesse

comum, apresentando olhares e “entendimentos diferentes sobre os conceitos matemáticos e os saberes didático-pedagógico e experiências relativos ao ensino e à aprendizagem da matemática”.

É importante deixar claro que este estudo, **não é uma pesquisa colaborativa** (FIORENTINI, 2010), visto que, como mencionou Ferreira (2003, p. 111), uma pesquisa colaborativa consiste naquela em que todo o processo de investigação - definição da pergunta de pesquisa, seleção da metodologia, coleta e análise dos dados, assim como a construção da fundamentação teórica – “seria decidida e compartilhada pelos envolvidos. Mesmo que as contribuições fossem distintas – supondo um grupo heterogêneo - as decisões seriam coletivas e as tarefas compartilhadas”.

Para avançarmos no detalhamento dos procedimentos desta investigação, tornou-se importante, inicialmente, apresentar a cronologia das ações da Engenharia Didática que antecederam a 3ª fase, a Experimentação:

2015 – No mês de outubro de 2015, desenvolvemos o Estudo Piloto, em um ambiente controlado, com a participação de 12 estudantes do 3º ano do Ensino Médio. O estudo realizou-se em 2 (duas) aulas com duração total de 180 minutos;

2016 – Logo após a organização dos dados do estudo piloto, efetuamos as análises e os estudos teóricos acerca da aprendizagem colaborativa; da ludicidade e suas dimensões; do jogo e a educação matemática; das situações didáticas e contratos didáticos. Com os resultados do estudo piloto e do processo de construção do conhecimento teórico, vários questionamentos foram levantados, inclusive sobre qual a metodologia de pesquisa mais adequada para a investigação;

2017 – Durante o primeiro semestre, realizamos adequações da situação didática a serem realizadas nas turmas da investigação. Diante dos resultados do estudo piloto, por conseguinte, houve a necessidade de ajustar o jogo colaborativo, bem como definir o novo nome da atividade a ser utilizada na experimentação: “UnB 360 Graus”. Assim foi possível desenhar o modelo do jogo, adquirir os materiais e logo em seguida, confeccionar o jogo em material concreto;

2017 – Nos três primeiros meses do 2º semestre de 2017, finalmente ocorreu a definição da teoria mais adequada para esta investigação: a Engenharia

Didática. A partir desse momento, toda a metodologia desta investigação foi organizada seguindo os preceitos de Artigue (1996). Assim sendo, realizamos a 1ª fase da Engenharia Didática (Estudos Preliminares); logo em seguida, ocorreu a 2ª fase da Engenharia Didática (a Concepção da Sequência Didática e a Análise a *Priori*). Também se tornou possível definir os instrumentos adequados para a construção dos dados da investigação. Por fim, aconteceu o contato com a professora de Matemática dos 3º anos do Ensino Médio, o planejamento e definições das atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, ou seja, o momento da 3ª fase da Engenharia Didática.

3.5 - DESCRIÇÃO DOS INSTRUMENTOS PARA CONSTRUÇÃO DE DADOS

Para a **construção de dados** desta investigação, utilizamos diversas técnicas e instrumentos:

- a. A gravação em áudio das expressões verbais dos sujeitos;
- b. Os manuscritos dos estudantes, registros das resoluções de situações-problema realizados pelos sujeitos;
- c. Registro em protocolos das observações durante as aulas (diário do pesquisador);
- d. Registros em protocolos observacionais do grupo colaborativo de trabalho;
- e. *Quiz Online* criado no aplicativo *Plickers* – *feedback* dos estudantes;
- f. Roda de conversa com os alunos para socialização de experiências;
- g. Questionário *online* criado no *Google Form* – respostas dos estudantes;
- h. Entrevista individual com a professora Flor;
- i. Análise dos resultados das turmas e desempenho dos estudantes durante o bimestre letivo de aplicação da intervenção.

Durante a descrição da aplicação do projeto de Engenharia Didática, apresentaremos em qual momento cada um dos instrumentos listados foram utilizados.

Ao compreender que em uma situação didática, o objeto central é a própria situação didática, compete ao pesquisador engenheiro organizar propostas didáticas que possam representar fator favorável à aprendizagem dos alunos, bem como fazer

uso de recursos didáticos. Assim, nesta investigação optamos por utilizar o jogo a seguir como recurso didático concreto.

O JOGO TAPETE CARTESIANO

Em vários estudos sobre jogos e ludicidade na educação, oportunizar propostas didáticas com a utilização de jogos em sala de aula, é compreendido como possibilidade de estratégias pedagógicas potencializadoras do processo de ensino-aprendizagem (BORIN, 2002; D'ÁVILA, 2014; ANTUNES, 2016; MOTA, ANDRADE, 2017). Assim, uma atividade ludo-didática deve favorecer o desenvolvimento conceitual, o prazer de participar da atividade e se constituir em um elemento de autoestima e de autoconfiança dos estudantes.

Nesta investigação apresentamos um jogo construído em material concreto, para possibilitar que os estudantes do ensino médio tivessem uma experiência lúdica, criativa, interativa e colaborativa, com desafios em forma de uma sequência didática, planejada e organizada com situações-problema que relacionam o estudo do ponto e da reta, com o contexto da Universidade de Brasília.

Desse modo, neste Jogo Colaborativo versão “UnB 360º”, os estudantes do 3º ano do Ensino Médio são convidados a dar uma volta completa pelo *campus* da UnB. Em pequenos grupos colaborativos, eles deveriam localizar o posicionamento geográfico de nove edificações do Campus Darcy Ribeiro da Universidade de Brasília, para consolidar, ampliar e aprofundar conceitos matemáticos relacionados aos estudos do plano cartesiano. Os estudantes enfrentariam sete situações-problema de uma sequência didática para representar localizações, bem como ter a liberdade para expressar suas respostas com a utilização de diferentes registros e sistematizações.

As sete situações-problema foram elaboradas de maneira a garantir que os estudantes somente conseguissem avançar para a questão seguinte, à medida que solucionassem os desafios anteriores. Esta atividade ludo-didático apresenta grau de dificuldade crescente, contudo as situações-problema foram planejadas de modo a possibilitar que todos os estudantes conseguissem solucioná-las.

A seguir apresentamos os objetivos do jogo, o problema a ser resolvido, os conteúdos matemáticos, o público alvo, a descrição dos materiais, assim como outros detalhes pertinentes ao material concreto e estratégias pedagógicas.

Objetivos do jogo:

Neste jogo destacamos duas categorias de competências que orientam a atividade ludo-didática, uma relacionada às competências gerais que a educação básica deve oportunizar aos estudantes, para o progresso de aprendizagens essenciais e de desenvolvimento; e outra relacionada às competências específicas no campo da matemática. Essas categorias estão em consonância com a BNCC.

a. Competências Gerais

- Agir colaborativamente com autonomia e determinação para tomar decisões segundo princípios democráticos e solidários;
- Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem da matemática, incluindo investigar, refletir, analisar criticamente, elaborar, formular, testar hipóteses, solucionar problemas, criar soluções com base em diferentes conhecimentos;
- Utilizar as linguagens verbal, matemática, científica para expressar-se, partilhar informações, ideias e produzir sentidos que levem os estudantes ao entendimento mútuo.

b. Competências Específicas da Matemática

- Exercitar a aprendizagem colaborativa, desenvolvendo a capacidade de trabalhar em equipe e aprender com seus pares;
- Raciocinar, argumentar com bases em discussões conjuntas e aprender conceitos;
- Interpretar e representar a localização de pontos no plano cartesiano;
- Integrar diferentes recursos didáticos e materiais (o tapete cartesiano, a folha quadriculada, a régua e outros) às situações que oportunizem refletir, colaborando para a sistematização e formulação de conceitos matemáticos (Álgebra e Geometria);
- Usar diferentes registros de representação e linguagem para buscar soluções de situações-problema, e comunicar resultados com argumentos consistentes, para justificar o raciocínio utilizado e desenvolver a autoestima.

Problema principal a ser solucionado nesta versão do jogo:

Como localizar geograficamente em um plano cartesiano, 9 edificações do Campus Darcy Ribeiro, que são responsáveis por programas de acesso,

permanência, formação acadêmica, programas de assistência estudantil da Universidade de Brasília?

Conteúdos matemáticos e unidades de conhecimentos presentes no jogo:

- a. Interpretar e localizar pontos no plano cartesiano;
- b. Compreender posicionamentos relativos a pontos e retas;
- c. Relacionar o Teorema de Pitágoras como um instrumento motivador para o cálculo de distâncias entre pontos;
- d. Compreender o conceito de distância entre pontos e entre retas;
- e. Reconhecer e verificar a condição de alinhamento entre pontos;
- f. Resolver situações-problema que envolvem posições referentes a pontos e retas;
- g. Reconhecer e obter a equação geral da reta;
- h. Resolver situações-problema envolvendo equações de retas;
- i. Relacionar uma distância entre pontos no plano cartesiano, com a distância em uma situação-problema e com o tempo necessário para percorrê-la;
- j. Reconhecer e relacionar o par ordenado como uma posição geográfica em um contexto urbano;
- k. Identificar geometricamente a inclinação de retas e reconhecê-las algebricamente;
- l. Associar o coeficiente angular à inclinação da reta;
- m. Relacionar o coeficiente linear da reta, como o ponto em que a reta corta o eixo das ordenadas;
- n. Compreender e situar-se geograficamente na estrutura física da UnB;
- o. Conhecer a política assistencial da UnB, bem como, situar em sua estrutura, departamentos responsáveis e suas localizações no campus Darcy Ribeiro;
- p. Despertar o interesse nos estudantes de conhecer o conteúdo histórico, social e político em que se insere a Universidade de Brasília;
- q. Despertar os estudantes para o trabalho colaborativo;
- r. Estimular a comunicação matemática oral e escrita formal.

Público alvo:

Participaram da investigação 228 (duzentos e vinte e oito) estudantes de sete turmas do 3º ano do ensino médio, de uma escola pública do DF.

Descrição do material concreto utilizado durante o jogo:

Materiais	Finalidade
Folha Quadriculada tamanho A4	Registrar o desenvolvimento das resoluções das situações-problema
Régua	Utilizada como suporte para marcações e medições
Tapete cartesiano confeccionado em tecido de tapeçaria medindo 80X80 cm, tracejado por 20 linhas horizontais e 20 linhas verticais (vermelhas e brancas), que se cruzam perpendicularmente.	Em grupo de 4 estudantes, utilizar o tapete cartesiano para solucionar situações-problema. Localizar pontos e posicionar as peças que representam edificações da UnB
5 peças pequenas em madeira, medindo 1,80 X 1,80 cm	As pecinhas representam 5 edifícios: Rei, BCE, FE1, FE3 e FE5. Elas devem ser posicionadas em seus pontos, localizados a partir dos respectivos pares ordenados
2 peças em madeira, medindo 4 X 4 cm	As pecinhas representam 2 edifícios: PAT e PJC. Elas devem ser posicionadas em seus pontos, localizados a partir dos respectivos pares ordenados
1 tampinha de garrafa pet	A tampinha representa o edifício RU. Ela deve ser posicionada em seu ponto, localizado a partir do respectivo par ordenado
1 peça em acrílico branco, côncava, com extremidade maior de 27 cm e extremidade menor de 23 cm	A peça côncava representa o edifício ICC. Ela deve ser posicionada no ponto de origem do tapete cartesiano
Lápis preto	Realizar marcações (opcional)
Fita crepe	Realizar marcações (opcional)
Lápis de cor	Realizar marcações (opcional)

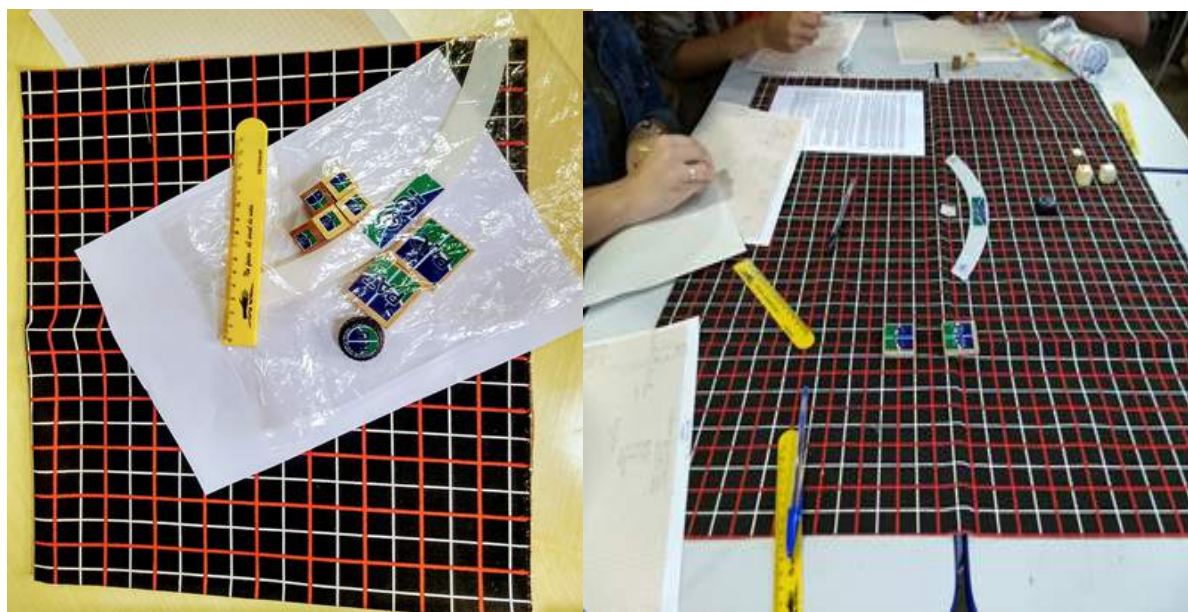
Legenda das peças que representam 9 edifícios da Universidade de

Brasília:

- a. BCE: Biblioteca Central da UnB;
- b. FE1: Faculdade de Educação prédio 1
- c. FE3: Faculdade de Educação prédio 3;
- d. FE5: Faculdade de Educação prédio 5;
- e. ICC: Instituto Central de Ciências;
- f. PAT: Pavilhão Anísio Teixeira;
- g. PJC: Pavilhão João Calmon;
- h. REI: Reitoria da UnB;
- i. RU: Restaurante Universitário.

Após relacionar os materiais utilizados durante o jogo, torna-se importante esclarecer outros detalhes sobre os itens. Cada pequeno grupo recebeu um kit, como mostrado na figura 7, contendo 1 tapete cartesiano, 4 folhas quadriculadas A4, 4 folhas brancas A4 e um saquinho transparente com as 9 peças que representam as edificações da UnB e 4 régua. Opcionalmente, os grupos poderiam receber um pedaço de fita crepe, para marcar as direções no tapete cartesiano, lápis preto e uma caixa de lápis de cor.

Figura 7 – Kit recebido pelo grupo para o jogo UnB 360 graus



Fonte: Acervo da autora (2017)

Atividades prévias para o jogo:

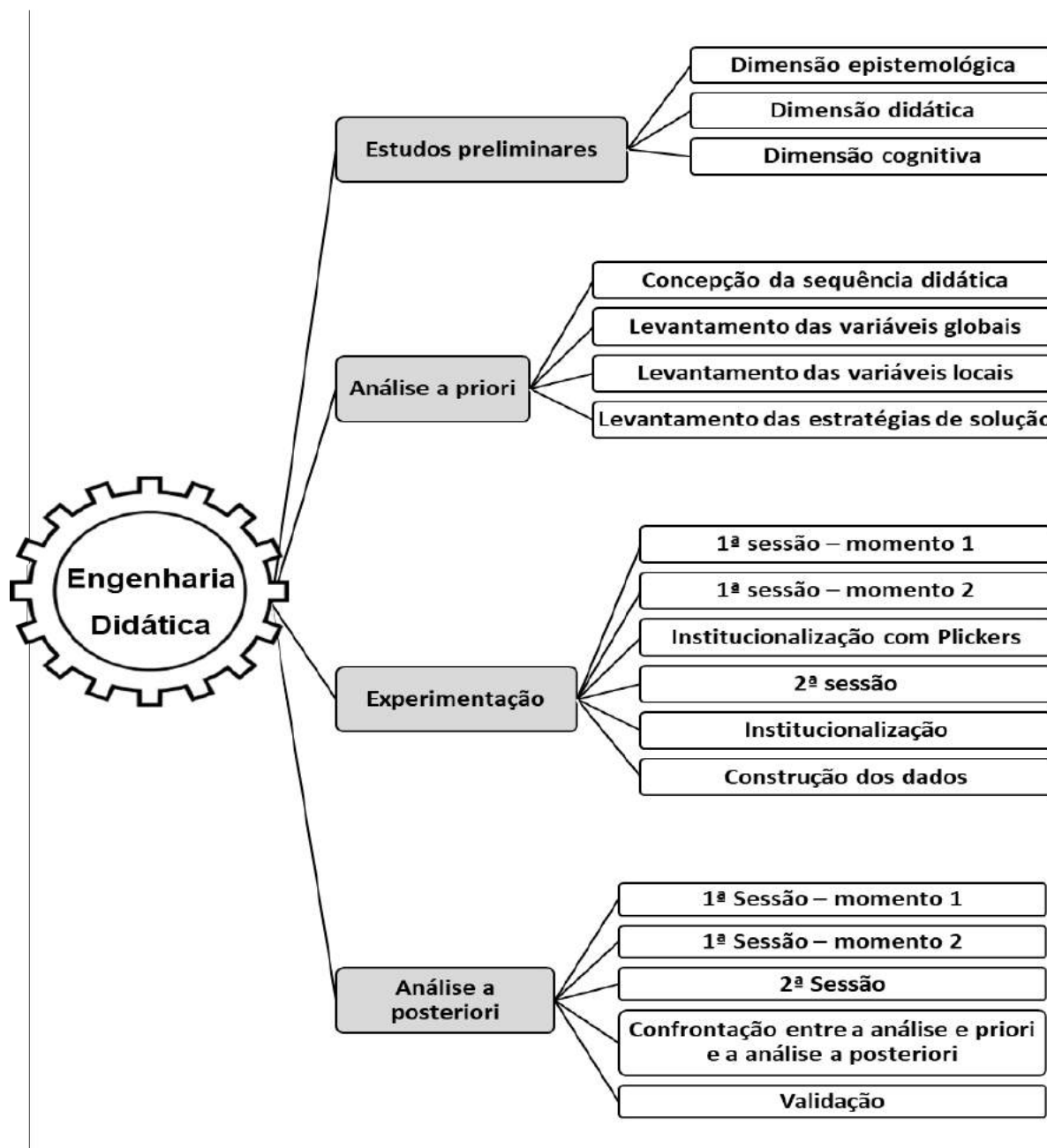
- a. No primeiro dia de aplicação do Projeto de Engenharia Didática, em todas as sete turmas, aconteceu a projeção de um pequeno filme motivacional para os estudantes, sobre o tema proposto no jogo. Desse modo, os estudantes assistiram a um vídeo institucional da UnB, em comemoração aos seus 50 anos, produzido pela UnBTV e disponibilizado no *Youtube* em 24 de março de 2015. O vídeo tem seis minutos de duração e mostra um resumo histórico e social da UnB, apresentando dados sobre a quantidade de cursos, alunos, professores e mostrando um pouco da Universidade de Brasília;
- b. Para a definição das questões que integrariam a sequência didática, houve a necessidade de realizar uma verificação prévia dos conhecimentos que são importantes durante o jogo. Sendo assim, aconteceu a 1ª sessão da experimentação didática, na qual, os estudantes organizados em pequenos grupos, receberam folhas quadriculadas, régua de 15 cm e uma atividade a ser

realizada em grupo. A atividade proposta compreendia a resolução de 10 problemas matemáticos, relacionados ao conteúdo de geometria analítica, especificamente conteúdos sobre posicionamentos no plano cartesiano, estudo do ponto e o estudo da reta. O detalhamento de cada um dos 10 problemas da atividade prévia, está disponível na descrição do momento da aplicação do projeto de Engenharia Didática, no capítulo a seguir, na parte destinada à 2ª fase, ou seja, na *Análise a priori*.

CAPÍTULO 4 - APLICAÇÃO DO PROJETO DE ENGENHARIA DIDÁTICA

Neste tópico descreveremos os momentos da aplicação do projeto de Engenharia Didática ao longo da construção desta tese. A figura 8 traz o organograma das quatro fases da Engenharia Didática.

Figura 8 - Definição dos sujeitos da pesquisa



Fonte: Elaborado pela autora da tese

O organograma da figura 8 objetiva permitir o entendimento geral de cada uma das fases da Engenharia Didática, bem como apresentar seu roteiro de execução nesta investigação.

4.1 - DOS ESTUDOS PRELIMINARES

Segundo Artigue (1996), cada uma das fases da Engenharia Didática pode ser retomada e aprofundada ao longo do trabalho de investigação. Assim sendo, a expressão “estudos preliminares” não implica que após o início da próxima fase, não se possa retomá-la. Ademais, como mencionaram Almouloud e Coutinho (2008), o termo preliminar tem temporalidade relativa, a considerar que se refere somente a um primeiro nível da organização da Engenharia Didática.

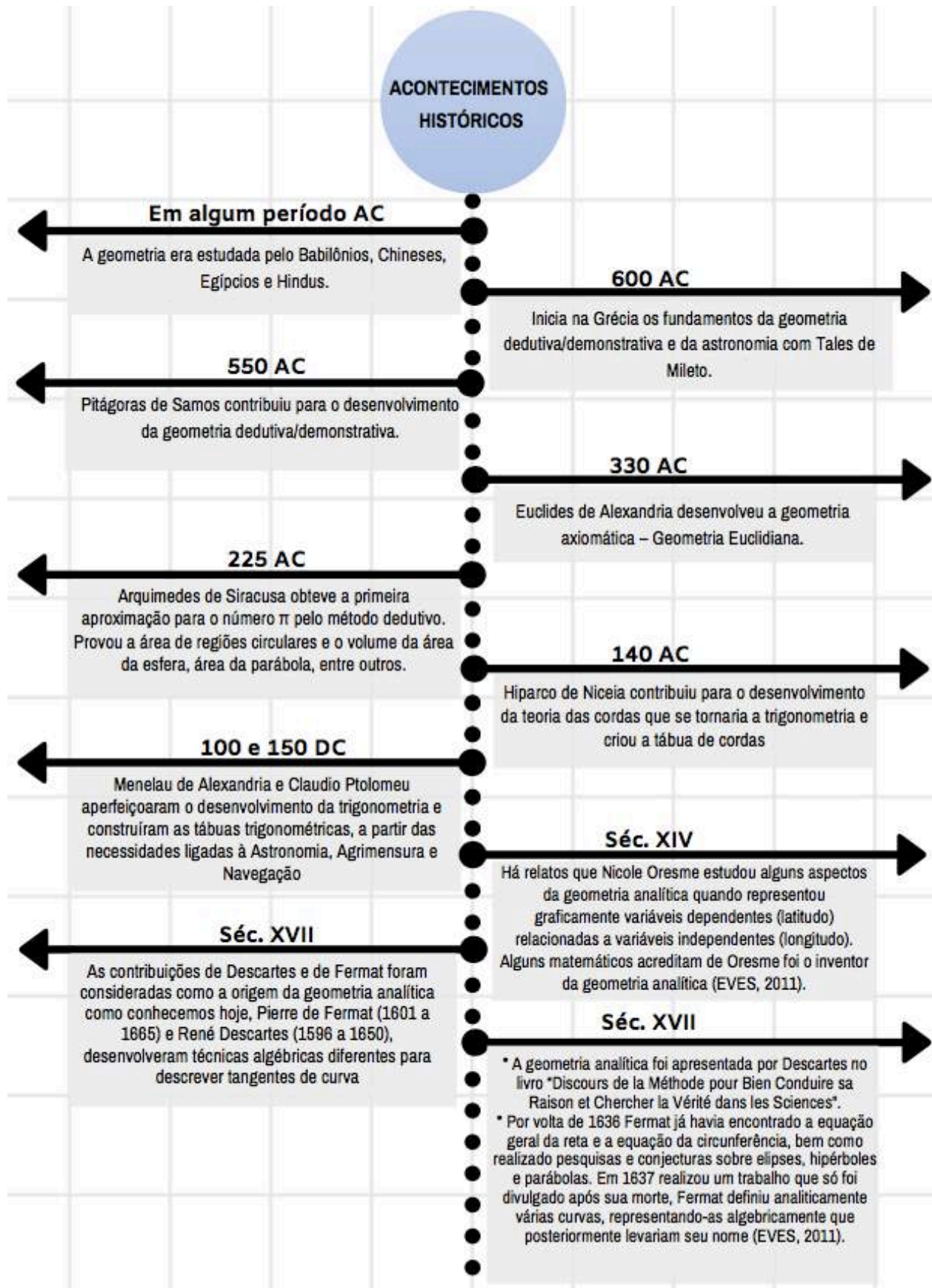
Primeiramente, para atribuir a distinção destes estudos, Artigue (1996) inclui 3 dimensões de desenvolvimento: a) dimensão epistemológica; b) dimensão cognitiva e; c) dimensão didática.

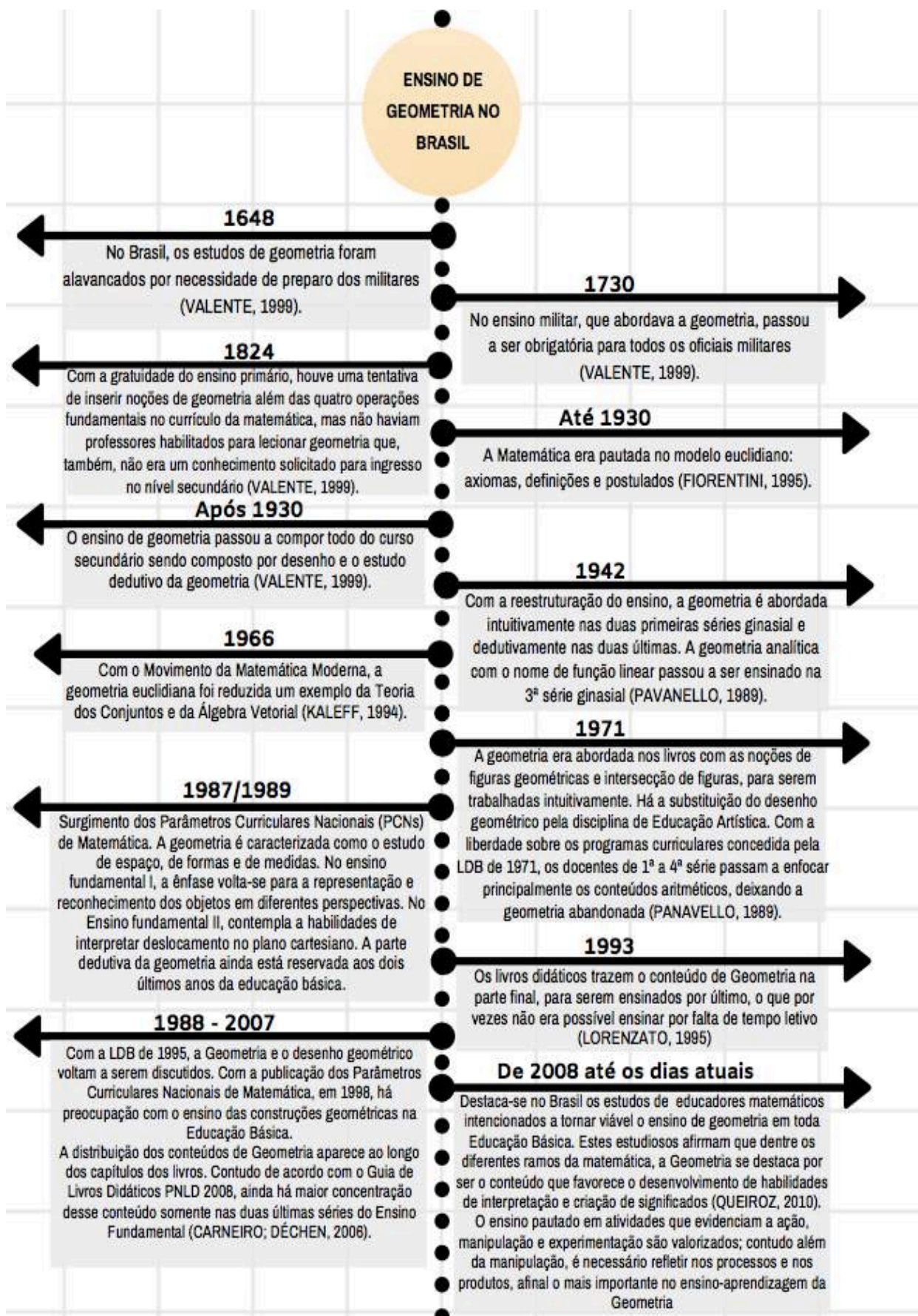
Nesta investigação, na **dimensão epistemológica** consideramos importante levantar as produções científicas nos cursos de pós-graduação das universidades brasileiras dos últimos dez anos, para constituir nossa revisão bibliográfica, nosso quadro teórico, bem como conhecer os estudos de práticas comuns do ensino de Geometria Analítica e seus efeitos (DOLZ, 2016). Os documentos oficiais, tais como o Currículo em Movimento do Ensino Médio do DF e a BNCC foram considerados nos estudos preliminares.

Igualmente importa considerar o quadro evolutivo do ensino de Geometria, com destaque à Geometria Analítica. Sobre a questão, recorreremos à História da Matemática por considerá-la um instrumento que contribui com o processo de ensino-aprendizagem, vez que oportuniza compreender conceitos a partir de sua origem. Da mesma forma, D’Ambrosio (2015, p. 29) afirma que “uma percepção da História Matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e o seu ensino”.

A seguir apresentamos a figura 9, um infográfico em formato de trilha cronológica, que inicia com uma síntese de acontecimentos relacionados à História da Geometria, e finaliza com a síntese do Ensino de Geometria no Brasil.

Figura 9 - Acontecimentos históricos e ensino de Geometria no Brasil





Fonte: Elaborado pela pesquisadora (2019)

Em relação ao ensino de Geometria no Brasil, a figura 9 apresenta fatos que colaboram para as causas do problema desta investigação, bem como elementos que contribuem para o trabalho do engenheiro, importantes para a idealização de um projeto de Engenharia Didática.

A **dimensão didática** traz características associadas à operacionalização do ensino em sala de aula. Nesta investigação, buscamos compreender como o conteúdo de Geometria Analítica do 3º ano do ensino médio, era apresentado pela professora de Matemática das turmas investigadas, considerando a importância de coletar estas informações para a concepção da sequência didática. Durante a **entrevista**, a professora Flor relatou que, por mais que ela queira realizar uma atividade diferenciada em suas 7 turmas, *“é preciso muito tempo para preparar materiais, pensar nas aulas, nas turmas com 40 alunos, então a gente acaba não realizando”*. Desse modo, nas aulas de Geometria Analítica são usados apenas o livro didático, o quadro, calculadora e o caderno, privilegiando o ensino de geometria intuitivo e teórico na escola básica (CARNEIRO, 2005).

Dolz (2016) alerta que nos estudos preliminares deve-se proceder à uma análise das representações, capacidades e dos obstáculos dos estudantes. Assim, as considerações do estudo piloto fizeram parte dos estudos preliminares desta tese, assumindo similaridades de uma avaliação diagnóstica. Desse modo, na **dimensão cognitiva** verificamos que os estudantes apresentam as seguintes dificuldades: a) utilizar a régua; b) posicionar os pontos dos pares ordenados no plano cartesiano; c) compreender a linguagem matemática e identificar reta, segmento de reta e semirreta; d) interpretar as situações-problema; e) aproximar ou encontrar números aproximados para raiz quadrada não exata; f) calcular a distância entre pontos; g) encontrar a equação da reta dados dois pontos; h) exprimir com correção e clareza as soluções das situações-problema na linguagem matemática, usando a terminologia correta, bem como fazer os registros escritos dos resultados.

Em suma, como asseverou Carneiro (2005, p. 101), os estudantes demonstram dificuldades nas “habilidades de observação, análise e registro, que fazem parte do método científico”. Estas análises permitem ao pesquisador engenheiro identificar problemas e buscar alternativas de soluções.

4.2 - DA CONCEPÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA E ANÁLISE A *PRIORI*

Esta 2ª fase da Engenharia Didática consistiu em conceber as atividades da sequência didática aplicada em sala de aula, bem como o estabelecimento das ações e comportamentos dos estudantes durante a fase de experimentação, ponto principal da análise. Para facilitar o processo de análise da engenharia, foi preciso descrever as escolhas efetuadas, definindo as variáveis de controle, no âmbito global, que diz respeito à organização mais geral e ampla; e no âmbito local, descrevendo cada uma das atividades propostas.

Serão aqui expostas inicialmente as variáveis globais, para caracterizar a concepção da sequência didática envolvendo o Estudo do Ponto e o Estudo da Reta:

- a. Utilizar a teoria das situações didáticas de Brousseau (1996; 2008a);
- b. Verificar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação a Geometria Analítica, constituindo uma sequência didática com atividades que possam mensurar os efeitos do ensino;
- c. Aplicar um recurso didático em formato de jogo em material concreto;
- d. Trabalhar o estudo do ponto e da reta, com a utilização de situações-problema e utilização de recursos didáticos, a relacionar a matemática ao contexto da Universidade de Brasília, numa perspectiva interdisciplinar;
- e. Realizar o disposto didático em pequenos grupos colaborativos, com aproximadamente 4 estudantes cada, a viabilizar a socialização, a comunicação e troca de saberes entre os sujeitos.

Desse modo, após a definição das escolhas globais, seguimos com o projeto de engenharia onde levantamos as variáveis locais, ou seja, a sequência didática em que planejamos as duas sessões, desenhadas inicialmente para serem desenvolvidas em 4 aulas, de 90 minutos cada. Contudo, após a aplicação da 1ª sessão houve a necessidade de reorganizar a engenharia, e desse modo, a experimentação aconteceu em 6 aulas, durante o 4º bimestre letivo, aplicada aos 228 estudantes do 3º ano do Ensino Médio.

A investigadora e dois integrantes do grupo de trabalho colaborativo organizaram a 1ª e a 2ª sessão, tendo como ponto de partida as dificuldades inicialmente detectadas junto aos estudantes e as dimensões elencadas na fase anterior da engenharia, bem como o referencial teórico desta investigação.

As escolhas locais estão estruturadas com previsões referentes ao comportamento dos estudantes. A seguir, apresentaremos as variáveis didáticas que

estão relacionadas com as dificuldades dos estudantes, bem como as estratégias previstas para as soluções das situações-problema, que foram formuladas para serem comparadas com os resultados durante a Análise a *Posteriori*, contribuindo para a validação da Engenharia.

A análise a *priori* da Engenharia Didática realizou-se em dois momentos: inicialmente, análise a *priori* da 1ª sessão da Engenharia Didática, e posteriormente, a análise a *priori* da 2ª sessão da Engenharia Didática.

Nos dois momentos (1ª e 2ª sessão), apresentaremos as atividades que constituem a sequência didática, os objetivos de cada uma, suas variáveis didáticas e as estratégias previstas para soluções dos estudantes.

MOMENTO 1: Análise a *priori* da 1ª Sessão da Engenharia Didática

A 1ª sessão da Engenharia Didática constitui-se de uma sequência didática com 10 atividades. Por opção metodológica, a análise a *priori* das atividades foi realizada separadamente, uma atividade por vez.

Atividade 1) Construa na folha quadriculada, um plano cartesiano dimensionado com 16 centímetros nas abscissas e 16 centímetros nas ordenadas.

Objetivo: Consolidar os conteúdos relacionados à construção de um plano cartesiano; explorar a construção e medição com régua; nomear os eixos.

Variáveis didáticas:

- a) O dimensionamento e escala utilizada na construção do plano cartesiano na folha quadriculada; A localização do desenho do plano cartesiano, considerando a otimização da folha quadriculada;
- b) A escolha do instrumento para medição dentre os disponíveis (régua, folha quadriculada, outros instrumentos para medição);
- c) A forma de executar para a medição e construção do plano cartesiano (medição com régua, medição considerando as marcações da folha quadriculada e outras formas de medição).

Estratégias previstas para a solução:

- a) Utilizar a régua para construir o plano cartesiano, na folha quadriculada no sentido horizontal ou vertical, de maneira em que as linhas traçadas com o lápis coincidam

- com uma das linhas da folha quadriculada. O eixo da abscissa e o eixo das ordenadas devem ter 16 centímetros, cruzando-se exatamente ao meio;
- Construir o plano cartesiano com o uso da régua, somente como instrumento de auxílio ao desenho. Usar as linhas da folha quadriculada para medições.
 - Construir o plano cartesiano de maneira aleatória, sem considerar a folha quadriculada e/ou a régua.

Atividade 2) Identifique no plano cartesiano o eixo das abscissas com X e o eixo das ordenadas com Y ou f(X) e gradue os eixos, considerando cada unidade equivalente a 1 centímetro, de um ponto a outro, tendo como referência a reta numérica.

Objetivo: Relacionar a abscissa e a ordenada como grandezas de uma função.

Variáveis didáticas:

- A direção que identifica os eixos das abscissas e das ordenadas (horizontal, vertical, outras direções);
- Subdividir os eixos do plano cartesiano em intervalos, utilizando o conjunto dos números inteiros ou outras formas de graduação.

Estratégias previstas para a solução:

- Identificar o eixo horizontal com X e o eixo vertical com Y ($f(x)$). Graduar as retas do plano cartesiano, considerando o conjunto dos números inteiros em dimensão real;
- Identificação os eixos e graduar as retas, considerando o conjunto dos números inteiros em dimensão ampliada ou reduzida, no desenho do plano cartesiano;
- Identificar os eixos (X e Y) e graduar aleatoriamente, considerando o conjunto dos números inteiros.

Atividade 3) Com o plano cartesiano construído, posicione no plano cartesiano construído os pares ordenados:

$A(0, 0); B(2, 0); C(0, 2); D(-2, 0); E(0, -2); F(4, 5); G(7, 6);$

$H(-4, -5); I(-6, 2); J(5, -7); K(0, 8); L(-7, 0); M(4, 2); N(7, 0); O(5, 0).$

Objetivo: Consolidar ou entender a maneira correta de posicionar um ponto em um plano cartesiano. Localizar e identificar as coordenadas de um par ordenado, identificando e localizando o ponto no plano cartesiano.

Variáveis didáticas:

- a) O posicionamento do ponto no plano cartesiano relacionado aos quadrantes;
- b) O ordenamento correto do ponto (X, Y) no plano cartesiano.

Estratégias previstas para a solução:

- a) Posicionar os pares ordenados e identificar os pontos no plano cartesiano. Conferir a orientação abscissa/ordenada observando as posições horizontal e vertical;
- b) Posicionar o ponto (X; Y), iniciando na origem (0; 0), direcionando para direita/esquerda quando for o parâmetro X e para cima ou para baixo, quando for o parâmetro Y.

Atividade 4) Identificar e reescrever ao lado do plano cartesiano, os pares ordenados separados por quadrantes (1º, 2º, 3º e 4º) e os pares ordenados que estão exatamente sobre os eixos das abscissas e das ordenadas.

Objetivo: Identificar os quadrantes de um plano cartesiano e entender seus limites a partir dos eixos X e Y.

Atividade 5) Identificar em que posição do plano cartesiano se encontra o par ordenado (0, 0).

Objetivo: Compreender o posicionamento geográfico do par ordenado.

Variáveis didáticas – Atividade 4 e 5:

- a) Verificar o tipo de escrita usada na identificação dos quadrantes e a localização dos pontos (formal, informal);
- b) Identificar o posicionamento dos pontos com a abscissa igual a zero ($X=0$) e/ou da ordenada igual a zero ($Y=0$);
- c) Identificar e nomear o ponto de encontro entre os eixos do plano cartesiano (origem, zero, outros).

Estratégias previstas para a solução:

- a) Localizar e identificar cada ponto no plano cartesiano, em seus respectivos quadrantes orientados de 1º a 4º no sentido anti-horário. Identificar os pontos que estão exatamente sobre o eixo das abscissas e/ou sobre o eixo das ordenadas, bem como reconhecer o ponto (0; 0) como integrante dos eixos das abscissas e ordenadas simultaneamente;
- b) Identificar os pontos:

$x > 0$ e $y > 0$ integrantes do 1º quadrante; $x < 0$ e $y > 0$ integrantes do 2º quadrante; $x < 0$ e $y < 0$ integrantes do 3º quadrante; $x > 0$ e $y < 0$ integrantes do 4º quadrante; $x = 0$ e $y \neq 0$ integrantes do eixo das ordenadas;
 $x \neq 0$ e $y = 0$ integrantes do eixo das abscissas;
 $x = 0$ e $y = 0$ ponto da origem.

Atividade 6) Ligar seis pontos no plano cartesiano, dois a dois, dentre os pontos já posicionados. Identificar três semirretas com linguagem matemática adequada.

Objetivo: Compreender o conceito e a notação matemática de semirreta.

Atividade 7) Traçar três retas quaisquer no plano cartesiano, de modo que cada reta contenha dois pontos distintos do plano cartesiano. Nomear as retas com linguagem matemática adequada.

Objetivo: Compreender o conceito e a notação matemática de reta.

Variáveis didáticas – Atividade 6 e 7:

- a) A escolha no plano cartesiano dos pares de pontos (diversos);
- b) O tipo de escrita e notação matemática usada;

Estratégias previstas para a solução:

- a) Escolher pontos quaisquer, dois a dois, no plano cartesiano e traçar três semirretas e/ou três retas distintas. Nomear as semirretas e retas com notação matemática pertinente;
- b) Escolher duas das semirretas identificadas e/ou duas das retas que sejam coincidentes;
- c) Escolher três retas e/ou semirretas que sejam coincidentes;

Atividade 8) Escolher três pontos no plano cartesiano que possam ser vértices de um triângulo retângulo e calcular a medida dos seus catetos. Identificar os seus segmentos de retas com a notação matemática adequada.

Objetivo: Relacionar os pontos de um plano cartesiano com os vértices de um polígono (uma região plana fechada, limitada por segmentos de retas). Entender que as relações métricas existentes para triângulo retângulo, podem ser usadas no plano cartesiano. Desenvolver a linguagem oral e escrita acerca da notação matemática pertinente.

Atividade 9) Identificar e calcular a medida dos catetos do triângulo retângulo formado pelos pontos “O”, “G” e “N”.

Objetivo: Relacionar os segmentos de retas com os eixos e/ou utilizar-se de outros saberes, para descobrir as medidas dos lados do triângulo retângulo, construído em um plano cartesiano.

Variáveis didáticas - Atividade 8 e 9

- a) Escolher três pontos no plano cartesiano (diversos);
- b) Linguagem utilizada para identificar os segmentos do triângulo retângulo escolhido (formal, informal);
- c) Conceitos matemáticos e/ou saberes utilizados para calcular ou medir os catetos (Teorema de Pitágoras, distância entre dois pontos, medição com a régua, medição usando as marcações da folha quadriculada, outros);
- d) Relacionar a escolha dos pontos do triângulo retângulo com diversas técnicas e repertório de resolução do problema proposto (aleatório, direcionado, indiferente, outros);

Estratégias previstas para a solução:

- a) Localizar três pontos que possam ser vértices de um triângulo retângulo, de maneira que seus catetos sejam coincidentes com os eixos cartesianos. Nomear formalmente os catetos do triângulo retângulo e calcular suas medidas;
- b) Identificar triângulos retângulos com catetos não coincidentes com os eixos do plano cartesiano. Usar a notação matemática pertinente para identificar os segmentos de retas e calcular a medida de seus catetos;
- c) Calcular os catetos do triângulo retângulo projetando os seus segmentos de retas sobre os eixos do plano cartesiano.
- d) Calcular os catetos do triângulo retângulo, utilizando o instrumento régua como técnica de medição por aproximação.

Atividade 10) Estimar o valor da raiz quadrada, não exata, referente à medida da hipotenusa do triângulo retângulo formado pelos pontos “O”, “G” e “N”.

Objetivo: Utilizar-se de recursos matemáticos para calcular a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo e relacionar o valor encontrado, em forma de uma raiz quadrada não exata, com um número decimal que a representa. Comparar o valor da medida encontrada nos cálculos com o valor medido com a utilização da régua.

Variáveis didáticas – Atividade 10

- a) Estimar resultados por aproximação;
- b) Criar soluções, usando uma diversidade de técnicas de soluções para o problema proposto (aproximação, uso de quadrados perfeitos, tentativa e erro, cálculo mental, outras técnicas);

Estratégias previstas para a solução:

- a) Calcular a raiz quadrada utilizando a fatoração.
- b) Estimar o resultado com a utilização do instrumento régua.
- c) Estimar o resultado utilizando números quadrados perfeitos (raiz quadrada).

MOMENTO 2: Análise a priori da 2ª Sessão da Engenharia Didática

A 2ª sessão da Engenharia Didática constitui-se de uma sequência didática com 7 situações-problema, sessão em que utilizamos o material concreto em formato do jogo Tapete Cartesiano. Por opção metodológica, a análise a priori das atividades foram realizadas separadamente, uma situação-problema por vez.

Situação-Problema A) Posicionar a peça correspondente ao prédio do Instituto Central de Ciências – ICC, de maneira que a concavidade fique voltada para a direção leste e que suas extremidades toquem os pares ordenados $(3, 0)$ e $(-3, 0)$.

Fique de olho: O Instituto Central de Ciências (ICC), também conhecido como Minhocão, um prédio acadêmico da Universidade de Brasília. Desenhado por Oscar Niemeyer, apresenta-se em forma de uma curva com 720 metros de uma ponta a outra. É no ICC que muitos estudantes aprovados no vestibular devem fazer suas matrículas (Fonte: www.unb.br).

Objetivo: Capacitar o estudante a orientar-se geograficamente, relacionando o tapete cartesiano com o posicionamento geográfico da UnB no Distrito Federal, bem como, reconhecer na peça que representa o ICC, sua concavidade.

Variáveis didáticas – Situação-Problema A

- a) Identificar o ponto no plano cartesiano, observando as direções norte, sul, leste e oeste;
- b) Reconhecimento das características de uma edificação da Universidade de Brasília, representada em uma peça acrílica. Posicionamento geográfico deste

edifício em um plano cartesiano, um material concreto que denominamos de Tapete Cartesiano, com enfrentamento de situação-problema contextualizado;

- c) Interpretação da situação- problema, raciocínio e comunicação;
- d) Relação estabelecida entre a situação-problema proposta e a localização geográfica do Instituto Central de Ciências ICC/UnB no Campus Darcy Ribeiro.

Estratégias previstas para solução:

- a) Optar por uma organização espacial do pequeno grupo, em que os estudantes possam se sentar dois de um lado de frente a outros dois. Nesta forma de organização, os estudantes teriam dois referenciais geográficos;
- b) Optar por uma organização espacial do pequeno grupo, em que os estudantes possam se sentar todos de um único lado das mesas e optar por um único referencial geográfico;
- c) Reconhecer dentre as nove (9) peças disponibilizadas, a peça que se assemelha geometricamente com o ICC/UnB. Posicionar a peça no Tapete Cartesiano, considerando o referencial acordado e o sistema cartesiano estabelecido pelo pequeno grupo de estudantes, a partir das possibilidades do Tapete Cartesiano;
- d) Relacionar a situação-problema proposta com o contexto geográfico de Brasília, especificamente acerca do bairro Asa Norte;
- e) Interpretar e reconhecer a situação-problema proposta como uma maneira de se orientar geograficamente no Campus Darcy Ribeiro/UnB.

Situação-Problema B) Na direção oeste, sobre o eixo das ordenadas distante 400 metros do ponto de origem, fica o Restaurante Universitário – RU. Posicionar a peça que representa o RU no par ordenado encontrado.

Fique de olho: A missão do Restaurante Universitário (RU) do campus Darcy Ribeiro é fornecer refeição balanceada e saudável à comunidade da Universidade de Brasília. Visa apoiar o desenvolvimento de atividades de ensino, pesquisa e extensão, minimizando a evasão e favorecendo a diplomação. Atualmente são servidas, em média, 6.000 refeições em uma área construída de 6.333 m², 4 andares, 1 cozinha central, 6 refeitórios, 1 restaurante executivo, 8 caixas para compra de tíquetes, 1 guarda-volumes e banheiros (Fonte: www.unb.br).

Objetivo: Resolver situações-problema; associar as unidades graduadas nos eixos a uma distância relativa de acordo com a escala utilizada pelo grupo. Identificar

geograficamente o restaurante universitário, local em que os estudantes conseguem se alimentar no campus universitário a um preço acessível.

Variáveis didáticas -Situação-problema B:

- a) Dimensionar a escala no plano cartesiano (tipo de escala estabelecida);
- b) Interpretar a situação-problema (diversas possibilidades);
- c) Estabelecer a relação entre a distância, entre pontos no plano cartesiano e distância real das edificações (reconhecer ou não a relação e como reconhecer esta relação);
- d) Contextualizar a partir da situação-problema proposta com o RU/UnB, enfocando sua capacidade estrutural, logística e funcional, associando sua importância no cenário acadêmico da UnB (social, econômica, acadêmica, mobilidade, outras).

Estratégias previstas para solução:

- a) Escolher uma das escalas disponíveis no Tapete Cartesiano;
- b) Dimensionar a situação-problema com outra escala definida pelo pequeno grupo de estudantes;
- c) Relacionar a escala escolhida pelo pequeno grupo de estudantes, para dar sentido a distância entre os pontos e a distância em escala real;
- d) Interpretar a situação-problema proposta, compreendendo a distância em escala real, entre o ICC/UnB e o RU/UnB e relacionar esta distância a uma outra distância conhecida pelo pequeno grupo de estudantes, bem como compreender a importância social, econômica e cultural destas edificações no contexto universitário.

Situação-Problema C) A Faculdade de Educação tem três prédios: FE1, FE3 e FE5. A FE3 e a FE5 têm a mesma abscissa (-2) e estão distantes do eixo das abscissas $600m$ e $700m$ respectivamente na direção oeste. A FE1 está centralizada no par ordenado $(-3, 6)$. Identifique e calcule a distância entre a FE1 e FE3; entre a FE1 e FE5; e entre a FE3 e FE5.

Fique de olho: A Faculdade de Educação tem a missão de formar educadores. Está localizada no Campus Darcy Ribeiro e é constituída por três prédios. A FE5, além das salas de aula, possui o auditório Dois Candangos, inaugurado em 1962, que recebeu este nome em virtude da morte de dois candangos que trabalhavam em sua construção (Fonte: www.unb.br).

Objetivo: Solucionar as situações-problemas, posicionar o par ordenado no Tapete Cartesiano. Identificação dos pares ordenados com linguagem matemática. Relacionar a distância entre os pontos com sua projeção nos eixos. Identificar e calcular a distância entre dois pontos, projetando as semirretas nos eixos. Relacionar a distância entre dois pontos com o Teorema de Pitágoras e calcular a medida desta distância.

Variáveis didáticas: Situação-Problema C:

- Interpretação da situação-problema (amplo repertório);
- Posicionamento das edificações no plano cartesiano a partir do direcionamento geográfico estabelecido pelo pequeno grupo de estudantes;
- Conceitos matemáticos e/ou instrumentos utilizados para o calcular a distância entre as edificações (régua, distância entre pontos, Teorema de Pitágoras, outras).

Estratégias previstas para solução:

- Posicionar as edificações no Tapete Cartesiano, de acordo com o direcionamento e orientação geográfica estabelecida pelo pequeno grupo. Utilizar-se de conceitos matemáticos, instrumentos disponíveis e conhecidos (medição com régua; distância entre pontos; Teorema de Pitágoras; identificação de padrões; outras). Calcular as distâncias entre as edificações propostas na situação-problema;
- Discutir em grupo a situação-problema com o objetivo de interpretá-la, de modo que possibilite definir como será calculada a distância entre os pontos

(considerando os obstáculos; a menor distância; caminhos curvos; observando as linhas do Tapete Cartesiano; observação e padronização de medidas; dentre outras possibilidades);

- c) Visualizar geograficamente as edificações localizando-se dentro do campus universitário, de modo a construir seus próprios referenciais.

Situação-Problema D) Os Pavilhões Anísio Teixeira (PAT) e João Calmon (PJC) são dois blocos de salas de aula situados a direção norte do ICC. Seus pares ordenados são $PAT (6, 0)$ e $PJC (6, -2)$. Qual a menor distância percorrida por um estudante que está no PAT para chegar ao RU ? A reta que passa pelos Pavilhões Anísio Teixeira e João Calmon é paralela ao eixo das ordenadas? Justifique.

Objetivo: Resolver situações-problema; calcular a distância entre pontos utilizando a projeção das semirretas, nos eixos do plano cartesiano e/ou Teorema de Pitágoras. Identificar retas paralelas relacionadas ao conceito de distância entre pontos e retas, ou outros conhecimentos prévios.

Variáveis didáticas – Situação-problema D:

- Otimização da distância na situação-problema proposta e a relação com a distância da situação real (diversidade de soluções);
- Interpretação da situação-problema;
- Propriedades e relações métricas entre retas paralelas (geométrica, algébrica, conjecturas, outros);
- Linguagem e escrita matemática (formal, informal).

Estratégias previstas para solução:

- Identificar as edificações corretamente;
- Calcular a distância entre as edificações utilizando conceitos conhecidos (distância entre dois pontos, Teorema de Pitágoras, aproximação com régua, outra forma de calcular);
- Definir se a reta que passa pelas edificações (PJC e PAT) é paralela ao eixo das ordenadas, utilizando conceitos matemáticos conhecidos (comparação entre as retas, observar o coeficiente angular, utilização do determinante, visualmente, ou de outras maneiras).

Situação-Problema E A Reitoria (*REI*) e a Biblioteca Central (*BCE*) encontram-se posicionadas geograficamente nos pares ordenados $(-3, -4)$ e $(2, -5)$ respectivamente. Obtenha a equação da reta que passa pela *REI* e a *BCE*. Um estudante se desloca da Reitoria para a Biblioteca Central e em seguida vai almoçar no Restaurante Universitário. Qual foi a distância percorrida pelo estudante?

Fique de olho: A Biblioteca Central (*BCE*) é a responsável pelo provimento de informações às atividades de Ensino, Pesquisa e Extensão da Universidade de Brasília. A *BCE* mantém um rico acervo, atendendo às demandas dos discentes, docentes e comunidade. Sua equipe é composta por bibliotecários, auxiliares administrativos, auxiliares operacionais e estagiários preparados para atender aos usuários, orientando-os em suas necessidades informacionais.

Fique de olho: A Reitoria responde pela administração geral da Universidade de Brasília. Além de estar à frente de todos os interesses educacionais, econômicos e culturais da instituição. A Reitoria é a responsável por firmar convênios e parcerias com objetivo de projetar e ampliar as atividades científicas e tecnológicas da universidade no Brasil e no exterior (Fonte: www.unb.br).

Objetivo: Solucionar situações-problema; calcular a distância entre pontos com a utilização da projeção das semirretas nos eixos do plano cartesiano e o Teorema de Pitágoras. Deduzir a equação da reta dados dois pontos.

Variáveis didáticas – Situação-Problema E

- Reconhecimento, identificação e escrita algébrica de retas que representam a distância entre as edificações (diversidade de soluções);
- Interpretação da situação-problema;
- Calcular a distância entre as edificações.

Estratégias previstas para solução:

- Identificar as edificações e calcular suas distâncias, como caminhos encadeados consecutivos e não paralelos.
- Calcular a situação-problema que tem como modelagem, a sugestão da utilização da distância entre dois pontos. Compreender que é possível calcular as distâncias com o uso do Teorema de Pitágoras, por aproximação com a utilização da régua ou de outras maneiras.

Situação-Problema F) Verifique se o Pavilhão Anísio Teixeira, o Restaurante Universitário e a Faculdade de Educação FE1 estão alinhados, se estiverem, obter a equação da reta que passa pelas edificações.

Objetivo: Resolver situações-problema. Verificar o alinhamento entre os pontos com o uso do determinante; dedução da equação da reta a partir do determinante.

Variáveis didáticas – Situação-Problema F

- a) Reconhecimento do alinhamento entre pontos (geométrico, algébrico, visual, outros);
- b) Relação estabelecida entre equações que representam a mesma reta;
- c) Interpretação da situação-problema (amplo repertório);

Estratégias previstas para solução:

- a) Verificar se as edificações PAT, RU e FE1/UnB estão alinhadas visualmente e posteriormente compará-las utilizando-se de duas equações de retas que passam por duas das edificações distintas, e/ou calcular o determinante dos três pontos, correspondentes às edificações. Interpretar a situação-problema e decidir sobre o alinhamento dos pontos.
- b) Obter a equação da reta utilizando os conhecimentos matemáticos (determinantes; equação da reta dado dois pontos; equação da reta dado um ponto e o coeficiente angular; régua e conjecturas).

Situação-Problema G) Se um estudante se encontra na FE1 e aspira a participar dos editais de moradia e das políticas assistenciais da UnB, a que prédio deve se dirigir? Que distância mínima irá percorrer? Quais benefícios socioeconômicos são disponibilizados aos estudantes da UnB?

Objetivo: Solucionar situações-problema; calcular a distância comparando ou projetando o segmento de reta aos eixos do plano cartesiano. Verificar o paralelismo entre retas para relacionar distância entre pontos. Promover discussões no pequeno grupo de estudantes sobre a política assistencial e de permanência da UnB.

Variáveis didáticas- Situação-problema G

- a) Interpretação da situação-problema relacionada às políticas de assistência estudantil disponíveis na Universidade de Brasília;

- b) Relação estabelecida entre o mapa geográfico montado no plano cartesiano e a situação geográfica da UnB;
- c) Calcular a distância que deverá percorrer;

Estratégias previstas para solução:

- a) Rer ler os textos disponíveis sobre a UnB e discutir no pequeno grupo sobre a universidade. Relembrar o vídeo motivador e/ou consultar a internet, para enumerar os programas de assistência estudantil disponibilizados pela UnB;
- b) Calcular a distância mínima que um estudante deverá percorrer até o prédio da Reitoria, com o uso dos conhecimentos matemáticos e/ou recursos disponíveis.

As atividades da 1ª sessão e as situações-problema da 2ª sessão, foram planejadas e elaboradas em nível crescente de dificuldade, de maneira a garantir que os estudantes somente conseguissem avançar nos desafios, à medida que vencessem os desafios anteriores, constituindo-se em um fator de autoestima do estudante (ANTUNES, 2016). Contudo, as questões foram escolhidas de modo a possibilitar que todos os estudantes conseguissem concluir os desafios, bem como permitissem aos estudantes o desenvolvimento do senso de participação, socialização e de satisfação (RIBEIRO; SOUZA; KUBO, 2018).

4.3 – A EXPERIMENTAÇÃO DO PROJETO DE ENGENHARIA

A experimentação em um projeto de engenharia significa aplicar o dispositivo didático elaborado na fase anterior. É na experimentação que inicia o contato do investigador engenheiro com a população de estudantes participantes da investigação. Corroborando com Machado (2016), foi nesta 3ª fase da engenharia que explicitamos os objetivos e condições de realização da investigação aos estudantes participantes da experimentação; estabelecemos os contratos didáticos, aplicamos os dispositivos de investigação; realizamos as observações em campo feitas durante a experimentação, bem como utilizamos outros instrumentos de construção de dados.

Em reunião com a Professora Flor, ficou confirmado que a experimentação ocorreria durante todo o 4º bimestre letivo de 2017. Assim, estudamos um melhor

período para a experimentação, que não tivesse muitas interrupções em virtude dos feriados que ocorrem nos meses de outubro e de novembro. Como resultado, ficou acertado que as primeiras aulas do 4º bimestre seriam ministradas pela Professora Flor, com conteúdos de revisão geral do ensino médio, especificamente para as provas do ENEM que ocorreriam nos dois primeiros domingos de novembro. Para esta investigação ficou reservado o período que foi do dia 06 de novembro ao dia 27 de novembro de 2017. Cabe ressaltar que o conteúdo programático do 4º bimestre em matemática seria exclusivamente Geometria Analítica, desse modo ficamos responsáveis por todas as aulas e conteúdo daquele bimestre, em todas as 7 turmas de 3º anos da escola. Torna-se importante informar que no dia 28 de novembro os estudantes fariam a prova bimestral de Matemática.

Na escola havia apenas uma sala de aula com carteiras e cadeiras, o que era ideal para desenvolver as atividades em grupo. Durante as atividades em campo, verificamos como acontecia a troca de salas dos estudantes, considerando que as salas de aulas da escola eram fixas por disciplina. A sala de matemática era a única na escola que tinha aquele mobiliário. Cada turma tinha 4 aulas de matemática por semana, pelos nossos planejamentos iniciais consideramos que 6 aulas em cada turma seriam suficientes para todas as nossas atividades, mas logo no primeiro dia em sala verificamos que haveria a necessidade de mais 2 aulas.

Assim, a implementação do projeto de engenharia ocorreu em cinquenta e seis aulas, que contou com a participação de 228 estudantes do terceiro ano do ensino médio, divididos em 7 turmas. Foram utilizadas 8 aulas em cada uma das 7 turmas, perfazendo um total de cinquenta e seis horas-aula de experimentação. O quadro 7 apresenta as datas de experimentação em cada uma das 7 turmas, a atividade realizada e seu respectivo número de horas-aula utilizadas.

Quadro 7 - Turmas e datas da 3ª Fase da Engenharia Didática

ATIVIDADE	DATAS DAS AULAS E TURMAS						
	3º A	3º B	3º C	3º D	3º E	3º F	3º G
1ª SESSÃO – MOMENTO 1 2 horas/aula por turma	08/11	09/11	09/11	10/11	09/11	08/11	10/11
1º SESSÃO – MOMENTO 2 e institucionalização <i>Plickers</i> 2 horas/aula por turma	10/11	14/11	14/11	13/11	13/11	13/11	14/11
2ª SESSÃO 2 horas/aula por turma	17/11	16/11	16/11	17/11	16/11	20/11	17/11
INSTITUCIONALIZAÇÃO 2 horas/aula por turma	22/11	21/11	21/11	20/11	20/11	22/11	21/11
TOTAL DE HORAS/AULA POR TURMA	08 HORAS AULA	08 HORAS AULA	08 HORAS AULA	08 HORAS AULA	08 HORAS AULA	08 HORAS AULA	08 HORAS AULA
TOTAL GERAL DE HORAS	56 HORAS/AULA DESTINADAS A EXPERIMENTAÇÃO						

Fonte: Elaborado pela pesquisadora (2019)

Ao longo da experimentação, construímos e organizamos um *corpus* de investigação variado, composto por gravação em áudio, os manuscritos dos estudantes com registros das resoluções de situações-problema, o diário com registros observacionais da investigadora, registros do grupo colaborativo de trabalho e o feedback dos estudantes criado a partir do aplicativo *Plickers*.

Por opção de organização metodológica, apresentaremos uma descrição de cada etapa da experimentação dividida em 4 atividades, conforme o quadro 7 apresentado anteriormente. Faremos relatos gerais de cada passo da experimentação, sem a identificação das turmas. Para preservar o anonimato dos estudantes que participaram das 3 etapas da investigação, todos serão chamados de “Estrela”, acompanhado por um nome específico de alguma estrela do universo. Não identificamos as turmas nas descrições de relatos, também por questão de anonimato. E finalmente, usamos siglas para identificar estudantes que participaram somente na etapa das observações de campo que ocorreu de maneira ampla.

Atividade 1 da Experimentação: 1ª sessão – Momento 1

No primeiro dia em campo, chegamos à escola 7 horas da manhã e aguardamos a professora em uma salinha. A ansiedade com o início da experimentação era enorme, afinal não sabíamos como seria a reação dos estudantes, se eles iriam fazer as atividades, se eles estranhariam a presença de pessoas diferentes na sala. Estávamos com uma caixa transparente com os materiais

que seriam necessários para o primeiro dia, 100 (cem) folhas quadriculadas, 100 (cem) folhas em branco A4, quarenta e dois lápis, quarenta e duas régua de 15 cm.

Passados 12 minutos, a Professora Flor chegou e percebemos que ela também estava ansiosa com o início da experimentação, principalmente por ser final de ano letivo, época em que os estudantes aprovados quase não apareciam nas aulas, época também de muita preocupação dos estudantes com a proximidade das provas do PAS/UnB e com o término do ensino médio.

Entramos na sala de matemática, a Professora Flor pediu para que aguardássemos um pouco pois era comum ter atrasos no primeiro horário, em especial naquela referida turma. Aguardamos 10 minutos e às 7 horas e 25 minutos a Professora Flor nos apresentou aos estudantes, disse que éramos da UnB e que realizaríamos umas atividades diferenciadas durante todo o bimestre letivo a partir daquele dia.

As reações faciais dos estudantes foram diversas, de espantadas a de indiferença. Após a nossa apresentação, eu disse aos estudantes que iria começar as atividades com um pequeno filme sobre a Universidade de Brasília. Antes da projeção, eu perguntei aos estudantes quem pensava em ingressar na UnB e poucos disseram “sim”, e ao ouvir um estudante dizer “vai sonhando”, aproveitei a oportunidade para contar que eu era egressa da escola deles e atualmente aluna de doutorado da Universidade de Brasília, naquele momento notei expressões de surpresa.

Após a projeção do vídeo institucional da UnB, os estudantes foram informados sobre o sistema de cotas e políticas assistenciais da universidade. Vários estudantes fizeram perguntas sobre alguns cursos, projetos de pesquisas, sobre os *campi* da universidade e a assistência ao estudante. Assim, aproveitamos a oportunidade para solicitar que os estudantes formassem grupos com 4 integrantes, pois faríamos uma atividade que duraria algumas aulas, mas que ao final todos iriam mapear a Universidade de Brasília.

Naquela turma a Professora Flor deixou os alunos formarem os grupos livremente, foram 8 grupos naquela sala. Cada grupo recebeu 4 folhas quadriculadas, 4 folhas em branco, 4 régua, 4 lápis e uma folha com uma sequência didática com 10 atividades de Geometria Analítica. Informamos aos estudantes de que eles deveriam fazer as atividades em grupo, interagindo com os colegas. Os estudantes, em grupo, pegaram a folha quadriculada e ficaram sem saber o que era para fazer.

Nesse momento descobrimos que era a primeira experiência de muitos estudantes com o recurso didático “folha quadriculada”. Realizamos a leitura das questões e informamos aos estudantes que tínhamos um contrato didático a seguir, que não iríamos interferir na resolução dos problemas propostos, entretanto, estaríamos presentes durante toda aula para orientá-los em relação ao que fazer, oferecendo assim condições para a participação ativa dos estudantes nas atividades da sequência didática.

No início das mobilizações em prol da resolução da atividade, notamos que alguns estudantes sentiram-se motivados a participar por curiosidade em relação à UnB, como na fala da Estrela POLAR: *“confesso que eu comecei o trabalho por curiosidade em relação à UnB, como é entrar na UnB, porque você mostrou aquele vídeo e eu vi que eu não sabia nada da UnB. Depois do vídeo eu fiquei assim: “caramba, eu tenho que entrar na UnB”*. Por outro lado, alguns estudantes ficam assustados com o fato de não terem ajuda de professores, esta também foi a percepção da Professora Flor, ao mencionar que *“ah, eu vi muita cara de pânico, de desespero, vi que muitos devem ter pensado “Meu Deus, e a agora? A professora não vai me ajudar, e agora? Como é que vamos fazer?”*. Mas logo em seguida notamos que os estudantes ficaram mais tranquilos em relação a este contrato, *“depois os alunos foram ficando mais à vontade, mais livres, conversando um com outro, alguns inclusive levantavam de seus grupos e iam pedir ajuda ou ajudar outros grupos. Então, logo eles viram que iriam conseguir fazer a atividade toda”* (Professora FLOR).

Em determinado momento, informamos aos estudantes que eles não poderiam usar calculadora nessa 1ª sessão, *“mas a professora deixa a gente usar a calculadora”* disse Estrela RIGEL, mas em suma, naquele momento os estudantes não tinham permissão e respeitaram “a regra do jogo”. Entretanto no segundo momento desta 1ª sessão, permitimos o uso da calculadora por considerar que seria um instrumento útil para comparar respostas dos estudantes que a usariam e dos que não usariam, também para não alterar rotinas e práticas de sala de aula. *“Colaborativamente, os estudantes perceberam que eles sabiam fazer a questão sem usar calculadora, percebo que os estudantes estão tão automatizados a usá-la porque é mais prático, mais rápido, mas na verdade o estudante sabe fazer sem a calculadora”* (Professora FLOR).

No primeiro dia em campo, a experimentação aconteceu em apenas duas turmas. Na outra turma do primeiro dia, os estudantes estavam um pouco mais agitados e o início da atividade atrasou alguns minutos, mas assim como aconteceu

na primeira turma, com a projeção do filme e diálogos sobre a UnB, a turma ficou em silêncio e se interessou pela atividade.

Nos outros dias de experimentação da 1ª sessão – momento 1, as reações dos estudantes das demais cinco turmas foram bem similares aos das duas turmas do primeiro dia. Contudo, em uma determinada turma em que a 1ª sessão ocorreu somente no terceiro dia de atividades em campo, em uma sexta-feira no último horário de aula, é que notamos a ausência de muitos estudantes. Havia na sala somente 22 estudantes, mas a Professora Flor esclareceu que aquela turma, assim como a outra turma do primeiro dia, tinha graves problemas de infrequência, uma por ter aulas somente nos primeiros horários e a outra por ter aulas de matemática no último horário. Esta última turma, mesmo com poucos estudantes era a mais barulhenta dentre as 7 turmas dos 3º anos da escola, entretanto desde o início da atividade os estudantes se mostraram extremamente interessados.

Ao final da 1ª sessão – momento 1, contabilizamos o total de grupos formados nas turmas, foram 52 (cinquenta e dois) pequenos grupos, em sua maioria com 4 estudantes cada e excepcionalmente com 3 ou 5 estudantes. Sobre a questão da formação dos grupos, em 5 turmas os estudantes formaram os grupos livremente, sem critérios; em 1 turma os estudantes utilizaram o critério amizade para a formação e em apenas 1 turma houve a interferência da Professora Flor, pois havia na turma 5 alunas destaques em matemática, multipremiadas em olimpíadas científicas e assim, a professora achou melhor colocá-las cada uma em um grupo diferenciado.

Quando as aulas finalizaram, recolhemos todos os materiais que estavam com os estudantes, inclusive as folhas quadriculadas com os registros de resoluções das questões. Muitos estudantes perguntaram se teriam a oportunidade de terminar a atividade na próxima aula, demonstrando interesse na sequência didática.

Antes de iniciar o segundo dia de experimentação nas turmas, reuni-me com o grupo de trabalho colaborativo e após analisar os registros de todos os estudantes, verificamos que nenhum grupo das 7 turmas conseguiu finalizar a 1ª sessão no primeiro dia. Desse modo, aconteceu a primeira reorganização da engenharia didática, através da qual alteramos de 6 para 8 aulas de experimentação.

Por fim, ficamos satisfeitos com a receptividade nas 7 turmas. Os estudantes em grande parte, mesmo com certas dificuldades, se envolveram bastante com as atividades, inclusive teve estudante que nos agradeceu por ter feito aquela atividade. Em uma verificação parcial, identificamos estratégias diferenciadas para resolver uma

mesma questão, mas havia a necessidade de realizar uma verificação de conhecimentos dos estudantes, antes do momento de aplicação do jogo colaborativo “UnB 360 graus”. Desse modo, definimos que ao final da 1ª sessão – Momento 2, antes da 2ª sessão, faríamos uma institucionalização do ensino, um *Quiz* que oportuniza *feedback* instantâneo, com o uso do aplicativo *Plickers*.

Descobrimos que existem líderes em algumas turmas, estudantes que durante a atividade faziam questão de ajudar colegas de outros grupos que estavam com dificuldades para resolver determinadas questões.

Consideramos que a 1ª sessão contribuiu para verificar como os estudantes se comportariam com o uso da folha quadriculada e o uso da régua, aliás verificamos que alguns estudantes não sabiam como usar a régua corretamente. Assim, este primeiro momento de experimentação nas turmas, também serviu para verificar a questão da manipulação dos materiais e a funcionalidade dos instrumentos de investigação.

Mesmo utilizando 2 equipamentos para gravar áudios, a gravação foi prejudicada, porque todos os estudantes falavam ao mesmo tempo e, ao final, identificar poucas vozes compreensíveis no meio de uma gravação bastante ruidosa, não seria fácil e se revelou uma ação pouco produtiva. Mas fiz questão de gravar áudios de todos os dias de experimentação nas salas de aula, na esperança de conseguir captar alguns diálogos em grupo. Dos poucos que foram degravados, um nos chamou atenção para certos detalhes em relação a apropriação de conceitos, a interação dialógica e uso de recursos didáticos. O grupo era formado por 2 meninas e 2 meninos. Dentre os estudantes deste grupo, dois participaram desta investigação até o final, os outros dois somente até o momento de experimentação. Assim, dois serão identificados por seus nomes estelares e os outros dois por siglas:

Sirius – Eu acho que também deve ser difícil para as professoras não poder ajudar, acho que elas também ficam com vontade de ajudar.

Sol – Mas a gente pode se ajudar...

LA – Falando nisso, gente, é bom a gente olhar o que estamos fazendo;

Sirius – oh meu Jesus, eu escrevi a palavra abscissa errada, com 4 “s”.

VB – Então vamos conferir os pontos juntos...

Todos – VAMOS!

VB – O ponto “A”, “ponto origem”, perfeito!

Todos – repetiram juntos os pontos e os quadrantes;

Sirius – A gente fez até a questão 4, agora vamos para a 5;

LA – Não, a gente não colocou os pares ordenados;

VB – Fizemos sim, olha aqui! Olha aqui “0,0”
 Sirius – Mas agora temos que ligar os outros pontos, 2 a 2. No caso vamos ter 3 semirretas?
 VB – Ixi, exatamente!
 Sirius – Mas vamos fazer de uma forma bonitinha, gente! C e B, aqui ó!
 Sol – Junta o F no K
 VB – Vamos colocar as retas separadas?
 Sirius – SEMIRRETAS!
 VB – Ah é, sempre confundo os nomes. Ai a gente tem que colocar aquele sinal de segmento em cima, né?
 Sirius – sim, a listrinha!
 Sol – Qual o nome? Semirretas F/K? Temos que colocar em qual quadrante está!
 Sirius – Tem que nomeá-la?
 VB – Nomear como?
 Sirius – F/K é o nome dela, isso é nomear!
 Sol – Você queria dar nomes?
 VB – Eu queria! Poderia ser reta Felipe e Karol, (risos)
 Sirius – A gente une C e B – Cecília e Bárbara
 LA – Coloca, vulgo semirreta Felipe e Karol
 VB – Sério? Vocês vão escrever isso?
 Sirius – Vamos ligar M e C. Semirreta Matheus e Cauã, (risos)
 Sol – Eu coloquei C, M, porque me dá uma agonia não colocar em ordem alfabética.
 Sirius – Vamos gente, todos colocar nome!
 Todos – Vamos sim!
 VB – A criatividade está solta por aqui!
 Sirius – Gente, meu ponto sumiu!
 Sol – Tá aqui ó.
 Sirius – Senhores, ordem, vamos seguir!
 LB – Traçar dois pontos distintos no plano?
 Sirius – Conversando com outro grupo _____ “Ow, as semirretas de vocês têm nomes? As nossas tem, tem até Felipe e Carol”.
 Pesquisadora – Olá pessoal, onde estão as retas de vocês? E as semirretas?
 VB – Já fizemos!
 Pesquisadora – Jovens, eu queria saber, o que é uma reta?
 Sirius – ééé – a semirreta é um pedaço de uma reta, tem início e não tem fim;
 Pesquisadora – Mas e a reta?
 VB – Aaaa, a reta temmmm.
 LA – Pode ter os dois, início e fim,
 Sirius – Não gente, a reta não tem início e não tem fim.
 VB – Genteeee, a reta é infinita, não tem fim para os dois lados. Oh gente, a semirreta tem início e não tem fim para um dos lados
 Sirius – então tem que colocar a setinha, né galera? Para mostrar que ela continua!
 Sol – Temos que ligar os pontos. Gente, vamos usar o lado X, tem muitos pontos para usar. H e D, uma reta.
 VB – é, uma reta, vamos fazer assim ó, Tchuuu (riscando a folha).
 LA – A gente pode alongar nossa semirreta.
 Sirius – Gente, olha aqui ó, a gente tem que colocar a setinha só para um lado.
 Sol – Tem que padronizar.
 LA – Vamos todos padronizar.
 VB – Vamos, eu vou falando. Ó, a setinha vai ser pra cima, as outras vão ser pra baixo.
 Sirius – Tem que fechar um lado para virar semirreta, criatura!

VB – Ah não gente, eu queria canetinha!
Sirius – Na próxima aula vou trazer lápis de cor.
VB – Tá, a gente já fez a semirreta, vamos continuar!
Sirius – Fazer todo mundo junto assim fica muito fácil e rápido.
LA – E a questão da raiz quadrada?
Sirius – Vamos fazer manual.
VB – Eu sou péssima manualmente, vou usar a calculadora.
Sirius – Faz aí você, vou fazer manualmente. Deu 6,4.
VB – Também já terminei, deu aproximadamente 6,5, (risos).
LA – Eita, bateu o sinal, quase terminamos tudo.
Sirius – Eu ainda queria colorir...
VB – Ah não gente, a aula já acabou a aula?
Pesquisadora – Turma, tem que entregar as folhas quadriculadas.
Sirius – Professora, nós vamos continuar na próxima aula?
Sol – Essa aula foi ótima.
Sirius – É uma diversão. Foi muito legal!

A partir do diálogo acima, tomamos a decisão de incluir na lista de materiais caixa de lápis de cor. Antes de repassar para a descrição da 1ª sessão – momento 2, esclarecemos que as dez atividades da sequência didática desta sessão da experimentação, estão disponíveis na parte destinada às análises *a priori* e *a posteriori*.

Atividade 1 da Experimentação: 1ª sessão – Momento 2

Logo no início da primeira aula do momento 2, a Professora Flor ficou surpresa porque a sala estava cheia. Aquela era a turma que registrava muitas faltas, pois as aulas de Matemática eram sempre no 1º horário. Naquele dia, os estudantes faltosos e estudantes que já estavam aprovados, que não apareciam mais às aulas, todos estavam presentes.

Quando o sinal batia, os estudantes iam logo à sala e naturalmente os grupos se reuniam para finalizar a atividade. Rapidamente, eu e um dos integrantes do grupo colaborativo de trabalho, distribuíamos as folhas quadriculadas aos respectivos estudantes. Em alguns dias, durante a experimentação, contamos com a presença de um dos 3 integrantes externos do grupo colaborativo de trabalho, em outros dias eu estava nas salas de aulas apenas com a Professora Flor.

No primeiro dia de continuidade deste momento, eu e a Professora Flor passamos por todos os grupos para verificar como os estudantes estavam desenvolvendo as questões. Nos demais dias eu passei sozinha pelos grupos. Seguindo o contrato didático prévio, relembramos aos estudantes que não tiraríamos

dúvidas, estávamos em sala para orientá-los e acompanhá-los na resolução da atividade, que alguns estudantes encararam como um desafio, *“trabalhar em grupo nessa atividade foi bom porque todo mundo conseguiu entender, e as pessoas ficam felizes por conseguir entender e terminar um desafio”* (Estrela ANTARES).

A surpresa em relação à presença dos estudantes foi recorrente em todas as turmas. Em uma determinada turma, o momento 2 aconteceu no primeiro horário de uma segunda-feira após a prova do ENEM 2017. Todos os estudantes estavam presentes, nos primeiros minutos de aula os comentários giravam em torno das questões do ENEM, contudo, sem a necessidade de chamar a atenção para a aula, os grupos voltaram o foco para a continuação da atividade.

Em outra turma, 12 alunos que faltaram no primeiro encontro, compareceram. Esta era a outra turma que registrava grandes infrequências em decorrência das aulas de matemática serem no último horário. Indagados pela Professora Flor, que ficou surpreendida com a presença de praticamente toda turma, um estudante mencionou que havia relatos pelos corredores da escola sobre a aula anterior, assim deu vontade na “galera” de assistir à aula, porque o comentário geral na escola era sobre *“uns malucos da UnB que estavam fazendo umas paradas legais na aula de matemática”* (Estrela ARNEB). A figura 10 mostra as turmas com os estudantes participando da sequência didática.

Figura 10 – Turmas participando da atividade com quase todos estudantes presentes



Fonte: Acervo da autora (2017)

E em mais uma turma, nenhum estudante faltou, até cadeiras faltaram, a sala estava lotada. Assim que tocou o sinal, logo no início da aula, a turma demonstrou bastante interesse em concluir a atividade do encontro passado. Em um grupo, um

estudante faltou a primeira aula. No segundo dia da atividade o estudante estava presente e mesmo que o grupo já tivesse respondido 5 questões, os demais colegas resolveram discutir a atividade para que o colega não ficasse atrasado. Quando todos chegaram à questão 6, o debate no grupo foi intenso, aqueles estudantes eram bem detalhistas em relação às marcações das retas e semirretas, inclusive eles usaram lápis de cor para indicar as retas com cores diferentes. Com isso, outros grupos acharam interessante e também resolveram usar lápis de cor.

Ao longo da atividade, ora era um silêncio total em determinados grupos, ora estes mesmos grupos promoviam debates com argumentações acerca da estratégia de solução, que cada um pensava em utilizar nas questões, até chegar a um comum acordo. Em alguns momentos, os estudantes chamavam-me para tirar dúvidas, eu não respondia a dúvida, mas fazia provocações para fomentar as discussões em grupo, até que conseguissem chegar ao resultado almejado. Um exemplo de instigação aconteceu em um dos grupos com estudantes que diziam não saber nada de matemática:

- *Aluno 1: Professora Alessandra, eu não entendi isso aqui ó, que posição é essa do ponto A?*

- *Pesquisadora: O que você não entendeu? Qual é a posição do A? Eu não sei de nada. Onde ele está?*

- *Aluno 1: Ele está no meio das retas!*

- *Pesquisadora: Tá, mas o que significa esse meio das retas?*

- *Aluno 1: Tá no meio do X e do Y.*

- *Aluno 2: Ô seu burro, tá no meio das abcissas e das ordenadas.*

- *Pesquisadora: Hum, juntem vocês dois e expliquem-me.*

- *Aluno 2: Professora, tá no meio das abcissas com as ordenadas.*

- *Pesquisadora: O que é esse meio das abcissas e das ordenadas?*

- *Aluna 3: Ow, é o cruzamento!*

- *Pesquisadora: Olha, veja como é legal! Vocês descobriram juntos e agora eu sei que cruzamento é esse. Vocês construíram um conceito. Agora eu sei que o 0,0 está no cruzamento das abcissas com as ordenadas.*

- *Todos os 3 Alunos gritaram: Caramba, tá poxa, acertamos! Somos inteligentes!*

Durante a roda de conversa 2, ouvi relatos sobre um fato que talvez explique a dificuldade encontrada por vários estudantes para desenhar todo o plano cartesiano e dividi-lo em quadrantes. O livro didático de matemática apresenta apenas metade do plano cartesiano, durante o ensino médio, nenhum livro utilizado na escola tinha o plano cartesiano completo, com os 4 quadrantes.

A experimentação em sala de aula oportunizou visualizar momentos preconizados na BNCC (BRASIL, 2018), que desenvolveram nos estudantes, atitudes

de respeito e acolhimento das diferenças individuais, inclusive em relação à inclusão de estudantes com necessidades especiais.

Eu acompanhei um grupo que tinha uma aluna com necessidades educacionais especiais. Inicialmente, eu não sabia que a aluna TS tinha necessidade especial. Somente percebi quando ela começou a fazer a atividade, fazendo da maneira dela. Para traçar a abscissa, TS tentou riscar o papel 3 vezes para conseguir desenhar sobre a linha da folha quadriculada. Os 3 colegas de grupo a ajudaram bastante. Compreendi que o grupo que a acolheu, estava interessado em ajudá-la, importante esclarecer que TS havia faltado a primeira aula. TS traçou a abscissa de maneira errada, ela contava os quadradinhos da folha, 1, 2, 3, para chegar ao 4 ela pulava 2 quadradinhos, para chegar ao 5 ela pulava 3, e TS achava que estava certa, depois que fez tudo, um aluno do grupo perguntou: *“Está certo da maneira como você fez?”* *“Olha, conferi aqui, porque tem que ter 8 quadradinhos. Conta”*. Aí TS contou e ia até o 8, contou mais 3 vezes e viu que os espaços entre os números estavam diferentes. TS demorou um pouco para encontrar o erro, mas com ajuda dos 3 colegas de seu grupo, ela contou novamente e percebeu que tinha pulado espaços. A aluna sorriu, apagou o traço, recomeçou, contou quadradinho a quadradinho sem pular e fez corretamente.

Percebi que naquele momento ali houve aprendizagem, à maneira dela. A percepção não foi só minha, *“a TS, uma aluna especial que tem limitações sérias, conseguiu também fazer a atividade dentro da limitação dela, com ajuda do grupo ela conseguiu desenhar o plano cartesiano e marcar os pontos, ela conseguiu ver onde formava um triângulo retângulo, ela sabia onde era o eixo X e o eixo Y, da maneira dela a aprendizagem aconteceu”* (Professora FLOR).

A experimentação do projeto de engenharia proporcionou extrapolar previsões relacionadas às situações de aprendizagem. O cuidado com o outro esteve bem presente. Por vezes em campo, compreendi que habilidades socioemocionais podem proporcionar em sala de aula, oportunidades de aprendizagens relevantes e significativas a formação integral das juventudes (BRASIL, 2018).

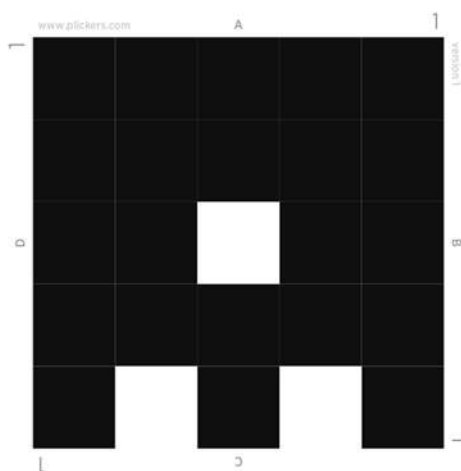
A institucionalização com o uso do aplicativo *PLICKERS*

Durante a aplicação da 1ª sessão, decidimos realizar uma institucionalização do saber, compreendendo que havia a necessidade de verificar se os estudantes

estavam formalizando conceitos matemáticos, bem como para sanar os anseios estudantis, que desejavam verificar se suas respostas estavam corretas. Desse modo, recorreremos à Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 2008a) para justificar a necessidade de situações de institucionalizações, diante da exigência de se consolidar, por convenção, o estatuto cognitivo de um determinado conhecimento (FREITAS, 2016).

Desse modo, optamos pela utilização do uso de tecnologia nesta institucionalização, o aplicativo gratuito *Plickers*, que permite a criação de questionários de questões objetivas com quatro opções de respostas. O *Plickers* possui um conjunto de cartões com 40 ou 63 códigos estilo QR (do inglês *Quick Response*, resposta rápida em português), cada cartão possui uma codificação distinta dos demais. O cartão tem formato quadrado e cada lado permite a leitura de uma dentre as letras “a, b, c ou d”, correspondentes às possíveis opções de respostas das questões, como na figura 11:

Figura 11 - Exemplo de cartão número 1



Fonte: <https://www.plickers.com/>

A interface do aplicativo permite a identificação dos estudantes a partir dos cartões codificados e oferece uma série de relatórios com os dados que são lidos virtualmente com o uso de um celular ou *tablet*, proporcionando um *feedback* instantâneo das respostas dos questionários. Os relatórios podem ser projetados *online* para toda a turma em tempo real, preservando a identidade dos estudantes e ficam disponíveis para o professor realizar avaliações diversas.

Criamos um questionário com 10 perguntas relacionadas ao estudo do ponto e da reta, similares às atividades da sequência didática que os estudantes responderam em grupo. Com as respostas do questionário foi possível identificar conceitos que os estudantes demonstraram mais dificuldade. Definição de “segmento de reta” foi a questão que registrou a menor porcentagem de acertos em 4 turmas, nas demais turmas esta questão ficou em segundo lugar. Já questões relacionadas “aos quadrantes de pares ordenados”, tiveram maiores porcentagens de acertos nas turmas, bem com a questão relacionada à “definição de semirreta”. A figura 12 mostra a aplicação do *Plickers* nas turmas.

Figura 12 – Institucionalização com *Plickers*



Fonte: Acervo da autora (2017)

Em cada turma o tempo de aplicação do *Plickers* variou de 15 a 45 minutos, afinal, seria após o momento em que todos os grupos da sala tivessem finalizado a 1ª sessão. Não informamos aos estudantes que eles fariam aquela atividade “avaliativa”, então foi surpresa nas turmas. Enquanto os grupos estavam finalizando a sequência didática, organizamos os recursos a serem utilizados durante o *Plickers*: *Datashow*, *tablet*, *notebook* e um aparelho de telefone celular para ser usado como roteador de internet. Todo esse aparato tecnológico era de propriedade da pesquisadora. Assim que os grupos finalizaram a 1ª sessão, distribuimos os cartões entre os estudantes e explicamos como funcionaria.

Cada aluno teria um número e cada lado do cartão representava uma letra, então quando uma questão era projetada no quadro, apareciam as 4 opções de respostas. Os estudantes deveriam levantar os cartões com a letra para cima, que eles consideravam ser a resposta correta daquela determinada questão.

Assim que todos levantavam seus cartões, as respostas eram escaneadas com o uso do *tablet*. Em tempo real, os números dos cartões lidos apareciam na tela do *tablet* e projetados no quadro da sala simultaneamente. Quando finalizávamos a leitura dos cartões, mostrávamos o resultado aos estudantes, que ficavam sabendo imediatamente se tinham acertado ou não.

As reações dos estudantes foram extremamente positivas. A primeira turma ficou eufórica com o recurso tecnológico, alguns estudantes, inclusive, disseram que era impossível colar dos colegas. Ouvimos estudantes gritarem o nome da Professora Flor e recomendar que a prova final de Matemática fosse em formato de *Quiz* também, com o uso do *Plickers*. E outras turmas os estudantes também ficaram eufóricos com o uso da tecnologia para a verificação da aprendizagem. Todos os estudantes participaram e por vezes gritavam que “o seu cartão não havia sido lido”, sendo que o resultado já havia sido registrado e aparecia no quadro.

Em uma determinada turma, realizamos a experiência de não recolher as folhas com as respostas das atividades da 1ª sessão, durante a aplicação do *Plickers*. Notamos que os estudantes ficaram presos à folha para responder o *Quiz*, inclusive demoraram mais tempo para responder as questões, em comparação com as outras turmas e a porcentagem de acertos em determinadas questões foi menor do que nas demais turmas. Em certa turma, três professoras da escola pediram para participar do momento *Plickers*, pois os estudantes haviam comentado com elas que o pessoal da UnB estava usando uma tecnologia que não precisava usar celular dos estudantes e laboratório de informática, boa para fazer provas com correção automática e ter a nota em tempo real. As professoras das disciplinas de Português, Espanhol e Matemática, participaram e ficaram satisfeitas com as possibilidades do aplicativo.

Para a turma em que as aulas de matemática eram no último horário, o momento *Quiz* do *Plickers* foi o mais empolgante e animado dentre todas as turmas. Quando iniciamos o *Quiz*, a escola já estava vazia, somente esta turma ainda tinha aula. A Professora Flor disse que nesses casos, normalmente os alunos saem da sala e vão embora, mas neste dia os estudantes não queriam sair. A cada cartão escaneado, os gritos de contentamento tomaram conta da turma. Ouvimos muitos estudantes gritando: “*fera demais*”, “*massa, véi*”, “*ixi, se a professora aprender a usar esse bagulho, cabô cola*”.

Finalizamos o *Quiz* às 12h05, mas os estudantes se recusavam a ir embora. A curiosidade em torno daquela tecnologia motivou-os a ficarem na sala, afinal eles

queriam que eu explicasse como é que a resposta aparece “em tempo real” no quadro, “*mágica doida, quero aprender*” (Estrela ARNEB) um dos estudantes mais empolgados. Quando deu 12h15 a professora disse que todos teriam que ir embora, mas algumas alunas ficaram em torno dela pedido para que a prova final fosse feita com aquela tecnologia. Durante a entrevista, a Professora Flor mencionou que “*para os alunos foi uma experiência fantástica, os olhinhos deles brilhavam durante a utilização do aplicativo, porque o aluno de hoje é tecnológico, ele não é mais aquele aluno que pega o caderno e fica escrevendo, lendo o caderno, hoje ele é o aluno que aprende de outras formas*”.

Durante a roda de conversa, Estrela ELECTRA concordou com os colegas ao mencionarem que o uso da tecnologia foi divertido, e ainda complementou:

“É a questão de ao invés de tirar a tecnologia da mão do estudante, por que não usá-la a favor? Tipo, é uma coisa que está no nosso dia a dia, a gente está com o celular o tempo inteiro, é uma realidade, e aí tirar isso da gente é quase impossível. Então, usar a tecnologia a favor da educação é até uma coisa lógica, porque não adianta proibir usar a tecnologia em sala de aula. A gente teve liberdade para usar tecnologia durante o jogo da UnB e foi legal”.

2ª Sessão: jogo tapete cartesiano – versão UnB 360 graus

Com a finalização da 1ª sessão da sequência didática, tínhamos elementos necessários para verificar se os grupos conseguiram ou não realizar todas as situações-problema da 2ª sessão em um único dia. Entendemos que realmente havia a necessidade de rever as questões e assim, decidimos que as duas últimas situações-problema seriam opcionais, ou seja, os estudantes só fariam se conseguissem finalizar as anteriores.

Por consequência, o momento de discussão sobre os benefícios políticas assistenciais que são disponibilizados aos estudantes da UnB, não poderia acontecer ao final da 2ª sessão, o tempo provavelmente não seria suficiente, e realmente não foi. Transferimos este momento de discussão para os minutos iniciais do último dia em campo, no dia da segunda institucionalização do ensino.

Outra preocupação era a questão dos registros dos estudantes. Ao final da 1ª sessão, conferimos as folhas quadriculadas e as folhas em branco que os estudantes utilizaram. Notamos que muitos deixaram as folhas em branco, porque “faziam os cálculos de cabeça”, “porque não tinham o hábito de registrar os cálculos”, “porque alguns fazem os cálculos na carteira escolar”, “porque alguns fizeram os cálculos na folha branca, mas como consideraram ser apenas rascunho, apagaram antes de

entregar as folhas”. Foram estes e outros motivos que os estudantes nos deram em conversas informais na sala de aula, o que esclareceram o porquê de tantas respostas da primeira sequência didática sem os cálculos, sem o desenvolvimento.

Desse modo, a primeira preocupação antes de iniciar a 2ª sessão, foi esclarecer as turmas de que os registros das resoluções eram importantes para compreendermos o raciocínio e forma de aprendizagem dos conteúdos propostos a eles, também para o estudante exercitar a comunicação de resultados de problemas, tão importante para sua formação escolar e como treino para provas com questões abertas, que exigem resoluções, como as questões tipo D do programa de avaliação seriada da UnB.

A aula do jogo iniciou nas turmas com o seguinte anúncio: “Hoje iremos mapear a UnB”. Então, informamos aos estudantes de que usaríamos um tapete cartesiano feito com pano de tapeçaria, tracejado por linhas horizontais e verticais e 9 pecinhas que representam prédios da Universidade de Brasília. Entregamos a cada pequeno grupo um kit de material concreto com 1 tapete cartesiano, 4 folhas quadriculadas A4, 4 folhas brancas A4, 4 régua, 4 lápis pretos e um saquinho transparente com as 9 peças que representam as edificações da UnB. Informamos os grupos de que se eles quisessem, tínhamos também fita crepe e caixa de lápis de cor. Inicialmente, o lápis preto era um item opcional, contudo para estimular o desenho do plano cartesiano na folha quadriculada, o item passou a compor o kit do jogo.

Em nenhum momento nas salas mencionamos palavras como “jogo”, “jogar”, com a intenção de verificar se os estudantes reconheciam aquela atividade como um jogo. Assim, entregamos aos estudantes o roteiro com as situações-problema daquela sequência didática e dissemos que aquela atividade chamava “UnB 360 graus”.

Em vários grupos das turmas os estudantes ficaram alguns minutos a olhar, pegar, apalpar, analisar o material concreto. Alguns estudantes ficaram sem entender o que deveriam fazer com aquele tapete cartesiano e as pecinhas que tinham a logomarca da UnB. Por alguns minutos deixamos os estudantes livres para tentarem entender o que deveria ser feito, em alguns grupos percebemos que os estudantes entenderam rapidamente, em outros havia expressões assustadas. Então, em todas as turmas eu solicitei que eles lessem o roteiro com as situações-problema, respondessem uma a uma e assim conseguiriam mapear a universidade.

A dificuldade inicial de alguns grupos era entender que aquele tapete deveria ficar todo aberto, então pedi para que todos da turma abrissem o tapete e “forrassem”

as mesas. Depois disso, a dificuldade encontrada foi a questão do direcionamento. “*Professora Alessandra, mas eu só sei a direção leste, aquela que o sol nasce não é, mas eu não sei onde é o leste no tapete*” (Estrela HADAR). Por vários minutos a discussão central em praticamente todos os grupos era identificar no tapete cartesiano as quatro direções. Os grupos deveriam ter um único referencial, mas para alguns estudantes essa tarefa não era fácil, “*o que é norte para mim, para o meu colega é sul, eu aprendi as direções lá no fundamental, nas aulas de Geografia*”, mencionou Estrela ALDEBARAN. Deixamos os grupos encontrarem a solução sozinhos, sem interferência e percebemos, nesse momento, que a interação dialógica entre os sujeitos fez toda a diferença na resolução do impasse das direções cardeais.

“No início ficamos confusos com a direção, ficamos em dúvidas onde ficava o leste ou o oeste. Foi legal discutir isso com os colegas e entrar em um consenso em grupo” (Estrela ADHARA). “No meu grupo optamos por sentar todos do mesmo lado. Como não havia consenso, sentamos todos, lado a lado, e aí não confundimos mais o leste com o oeste” (Estrela ANTARES).

Todos os grupos solicitaram fita crepe para marcar no tapete os pontos cardeais, muitos outros usaram a fita também para fixar a peça côncava que representava o prédio do ICC. A manipulação dos materiais certamente foi um fator marcante na atividade, havia inclusive estudantes que imaginaram outras possibilidades para construir aquele material, “com papel cartão, com as tampinhas de garrafa pet, com caixinhas feitas em papel”, foi o que eu ouvi em vários grupos.

Passado o momento de ambientação com o material concreto, as preocupações nos grupos giravam em torno do desafio a ser vencido: localizar corretamente todos aqueles prédios, mapear a UnB. A matemática nesse momento era somente um detalhe, a preocupação central girava em torno das etapas a serem vencidas por todos. Contudo, foi justamente a matemática que dificultou mapear rapidamente a UnB e, nesse momento, compreendemos outra funcionalidade do jogo: identificar as deficiências conceituais, para que a investigadora e os próprios estudantes percebessem que existem dificuldades em relação a determinado conceito.

De certo havia estudantes que tinham dificuldades em alguns conceitos, possivelmente, porque ao longo da escolarização, não construíram determinados conceitos, ou construíram conceitos errados durante o ensino fundamental. Um exemplo é o conceito de paralelismo, outro era fazer a raiz quadrada não exata, pois estavam acostumados a fazer na calculadora. A equação da reta foi o conceito mais

complexo. Então, por vezes durante a experimentação, tivemos que desconstruir conceitos errados e construir os conceitos corretamente.

Colaborativamente, em grupo, os estudantes foram aprendendo, consolidando e ampliando conceitos. Em certa turma eu resolvi acompanhar boa parte das ações de um grupo que era formado por 2 meninas e 2 meninos. O aluno JP ensinou à aluna SC como fazer multiplicação com muitos zeros. A aluna AS disse que o aluno JP estava ensinando errado e ensinou a maneira correta aos 3 colegas de grupo. O aluno IA mostrou aos colegas como definiu a menor distância entre o PAT e o RU. A aluna AS esclareceu aos colegas o que era uma reta paralela, fazendo o movimento com as mãos sob o tapete cartesiano, subindo e descendo entre os prédios do PAT e PJC. O grupo posicionou a BCE e a Reitoria corretamente, no entanto não sabiam como calcular a equação da reta. Após vários minutos de discussões, o grupo lembrou da fórmula “*yoyomixoxo*⁴” e o aluno JP resolveu compartilhar a informação com todos os demais grupos da turma, o estudante percorreu toda a sala para partilhar aquela descoberta, até mesmo nos grupos que resolveram a situação – problema utilizando conceitos de determinantes. Este momento foi de grande contentamento na sala, afinal, para finalizar o mapeamento da UnB, uns 3 grupos somente precisavam saber a equação da reta ou outra forma de resolução daquela situação-problema.

Um fato nos chamou a atenção, após o término da aula em uma determinada turma, 4 estudantes que perderam esta aula por terem se atrasado na escola, procuraram a Professora FLOR e pediram para assistir a aula nos dois últimos horários em outra turma, afinal, não queriam perder a atividade que os colegas mencionaram ter sido a “*melhor do ano*”, uma “*aula muito legal*”.

*“Um dia 4 estudantes da turma *, me procuraram para repor aula em outra turma. Primeiro eu pensei que era pela nota, mas não era, eles nem precisavam de nota para passar, eles me procuraram para repor aula porque eles queriam fazer, eles queriam participar da atividade, os demais colegas fizeram a atividade, todo mundo quis fazer e eles também queriam fazer. Então eu os deixei eles reporem na outra turma” (Professora FLOR).*

⁴ Macete: YoYô, Mixoxô .

Geometria Analítica: Equação Fundamental

Fórmula: $y - y_0 = m(x - x_0)$

Usada para encontrar a equação fundamental da reta que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$

(Fonte: <https://guiadoestudante.abril.com.br/estudo/oito-dicas-para-memorizar-formulas-de-matematica/>).

Todos os 52 grupos conseguiram montar o mapa da UnB, alguns grupos mapearam com muita rapidez, mas não foram embora da sala, por conta própria foram auxiliar colegas de outros grupos. Diferente da 1ª sessão, durante o momento de utilização do jogo tapete cartesiano, fomos menos solicitados pelos estudantes. Entendemos que eles já estavam mais familiarizados com o modelo pedagógico colaborativo que estavam vivenciando. As dúvidas foram sanadas em grupo ou com auxílio de colegas de outros grupos e os estudantes aceitaram a dinâmica.

“O tema dessa atividade era colaboração, porque a partir do momento que a senhora falou “sem professor”, mas aí nós tínhamos os colegas e aí, nós trocamos, substituímos o professor pelos colegas e pensamos: ó, talvez eles possam me ensinar, talvez eu posso ajudá-los e podemos aprender juntos. Acho que, com o professor não temos muita intimidade e com o colega já temos intimidade.” (Estrela VEGA).

Concordamos com Micotti (1997, p. 3), ao mencionar que mudar práticas de ensino não é fácil, “mas ainda que não seja fácil, é possível organizar aulas em que os alunos possam desempenhar funções ativas e elaborar raciocínios”. Todavia, acreditamos que as atividades têm que ter algum tipo de motivação.

A motivação desta situação didática foi levar a UnB à escola, com suas políticas assistenciais, sistema de cotas, cursos e trazer uma atividade de matemática por trás, além disso, tem que ter um certo grau de dificuldade crescente e até chegar ao final, o aluno não quer parar, não se esquecendo que a atividade tem que ser possível de fazer, o estudante tem que terminar “aquele jogo”.

À medida em que o estudante vai fazendo, vai construindo o conhecimento, o seu autoconceito melhora e assim ele sente prazer.

A fase de experimentação foi o momento de se colocar em ação o dispositivo construído. Em alguns momentos identificamos a necessidade de retornar à análise *a priori* e fazer pequenos ajustes (AMOULOU; COUTINHO, 2008). Realizamos observações em todas as sete turmas, construímos e organizamos os registros escritos dos estudantes e confirmamos que havia a necessidade de utilizar outras técnicas para enriquecer os dados. A participação do grupo colaborativo de trabalho encerrou aqui, considero ter sido enriquecedor a ajuda, olhares e observações. Para o relato desta experimentação, além dos registros dos estudos, utilizamos outros instrumentos, tais como dados das duas rodas de conversas com os

estudantes, entrevista com a professora, dados produzidos pelo Quiz do aplicativo *Plickers* e os poucos áudios em que foi possível fazer a transcrição.

A segunda institucionalização

Assim como aconteceu na primeira institucionalização, ao final da 2ª fase da experimentação houve a necessidade de oficializar o saber, porém este momento foi planejado na concepção da engenharia didática. Mas, do mesmo modo que aconteceu em outros momentos na aplicação da engenharia, houve a necessidade de fazer alterações.

Seguindo o calendário escolar, aquela seria a última aula regular de matemática de 2017, as demais aulas teriam prova bimestral, avaliação multidisciplinar e outras atividades de desfecho do ano letivo de 2017. Desse modo, reuni-me com a Professora Flor e acordamos dividir os momentos da institucionalização. No primeiro momento, eu iria promover nas turmas, discussões sobre as políticas assistenciais da UnB. No segundo momento, a Professora FLOR iria responder no quadro todas as situações-problema do jogo colaborativo. Este último momento também serviu como revisão para a prova bimestral, afinal o conteúdo da prova seria geometria analítica.

As discussões nas 7 turmas foram breves porque a intenção era deixar maior parte da aula para a correção da sequência didática, e assim aconteceu. Após uns minutos de discussões, a Professora FLOR passou a trabalhar as questões no quadro e a ouvir dos estudantes, um vasto repertório de possibilidades para chegar nas soluções. Durante a entrevista pós experimentação, a Professora FLOR relatou que vários estudantes *“comentaram que conseguiram aprender, que agora aquele conteúdo estava mais fácil, que eles sabiam como usar fórmulas e sabiam de onde a fórmula tinha vindo, que foi mostrado nas atividades que eles fizeram”*. Ainda segundo a professora, os estudantes disseram que o jogo tapete cartesiano proporcionou verificar de onde saíam as fórmulas de geometria analítica.

Sobre os resultados da prova de matemática do 4º bimestre, segundo a Professora FLOR, muitos alunos melhoraram o rendimento neste bimestre. Ela verificou que as notas da prova estavam bem melhores do que as dos outros três

bimestres, também verificou que estudantes que não tiveram rendimento nos outros bimestres, não conseguiram gabaritar a prova, mas conseguiram desenvolver muitas questões, conseguiram acertar em torno de 50%, 60% das questões. Ainda de acordo com a Professora FLOR, *“e muitos alunos tiraram notas excelentes. Eu vi avanço, a nota da prova do 4º bimestre foi sim bem melhor, e o que eu achei legal é que, o aluno que tinha dificuldade, conseguiu avançar”*.

Por fim, durante a primeira roda de conversa com os estudantes, que aliás aconteceu no dia em que eles fizeram a prova bimestral, ao perguntar o que acharam da prova, escutei 10 respostas simultâneas, não sendo assim possível identificar todas as estrelas e suas respectivas falas. Para preservar a realidade da linguagem juvenil, transcrevo as reações na forma literal:

“Foi top”, “Foi muito mara”, “Top top, massa demais”, “Foi sensa, foi mega, aquele jogo me ajudou muito na prova”, “É, finalmente vou tirar a primeira nota boa em Matemática”, “Nossa véi, eu aprendi o que é reta, semirreta, acertei na prova”, “Além de ser divertido, ser diferente e ainda aprendi para a fazer a prova”, “E ainda tinha a questão da régua, quem não sabia usar a régua direito, errava na prova”, “A prova foi maior uva”, “Uma moleza, arrasei”. (Estrelas ADHARA, ARNEB, BELLATRIX, BETELGEUSE, ELECTRA, ENIF, MIMOSA, POLAR, RIGEL e SIRIUS).

Passamos agora para a 4ª fase da Engenharia Didática.

4.4 – ANÁLISE A POSTERIORI

A quarta e última fase da Engenharia Didática, consiste em tratar os dados construídos durante a experimentação e confrontá-los com as possibilidades antecipadas na análise *a priori*. Segundo Artigue (1996), a análise *a posteriori* permite interpretar os resultados da experimentação didática.

Desse modo, a 4ª fase caracteriza-se pelo momento de confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, na qual é possível verificar se as expectativas iniciais da Engenharia Didática, em relação à aprendizagem dos estudantes aconteceram e se teve rendimento satisfatório.

Nesta etapa de balanço das vantagens e limitações da sequência didática, dividimos as análises a *posteriori* em duas etapas. Na primeira, realizamos a análise a *posteriori* da 1ª sessão da experimentação didática. Na segunda etapa, a análise a *posteriori* da 2ª sessão da experimentação didática (jogo tapete cartesiano). Os manuscritos dos 22 estudantes participantes de pequenos grupos colaborativos, ou seja, os registros de resoluções de cada um dos problemas de toda sequência didática, foram confrontados com as estratégias previstas para soluções.

Para organizar o texto e possibilitar a confrontação, houve a necessidade de reescrever cada uma das atividades da sequência didática.

ETAPA 1: Análise a *posteriori* da 1ª Sessão da Engenharia Didática

A seguir, apresentaremos a análise a *posteriori* da 1ª sessão da Engenharia Didática, constituída por uma sequência didática com 10 atividades. Por opção metodológica, as análises a *posteriori* das atividades foram realizadas separadamente, uma a uma.

Análise a *posteriori* da primeira sessão

1) Construa na folha quadriculada, um plano cartesiano dimensionado com 16 centímetros nas abscissas e 16 centímetros nas ordenadas.

Quadro 8 - Recorrências de soluções da atividade 1

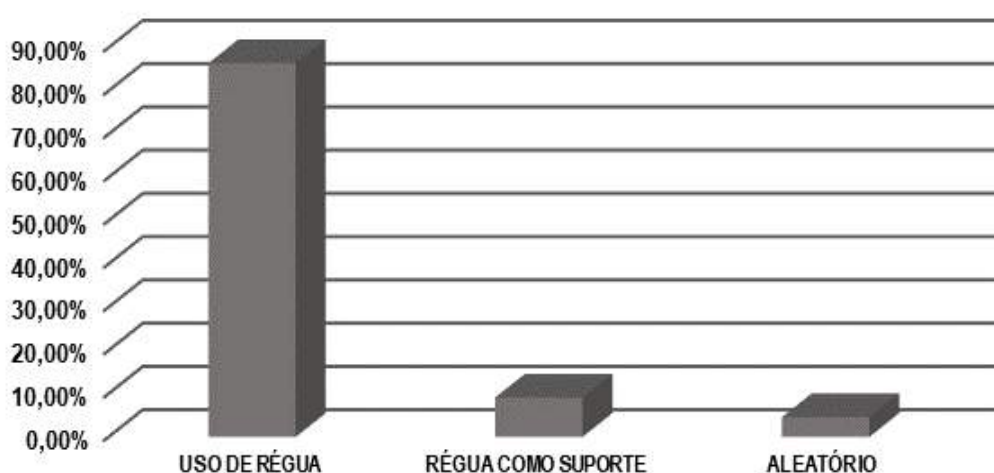
Estratégias de soluções definidas a priori	Nº de alunos
a) Utilizar a régua para construir o plano cartesiano, na folha quadriculada no sentido horizontal ou vertical, de maneira em que as linhas traçadas com o lápis coincidam com uma das linhas da folha quadriculada. O eixo da abscissa e o eixo da ordenada devem ter 16 centímetros, cruzando-se exatamente ao meio;	19
b) Construir o plano cartesiano com o uso da régua, somente como instrumento de auxílio ao desenho. Usar as linhas da folha quadriculada para medições.	2
c) Construir o plano cartesiano de maneira aleatória, sem considerar a folha quadriculada e/ou a régua.	1

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

A atividade possibilitou aos 22 estudantes investigados consolidar os conceitos referentes à construção do plano cartesiano. Ocorreu a comunicação e a interação

entre os estudantes, e entre eles com o material disponibilizado, que em nossa observação, potencializou a aprendizagem dos conceitos de Geometria Analítica. Alguns estudantes apresentaram dificuldades na medição com o uso da régua, visto que iniciavam a contagem no número 1 (um). Esta dificuldade foi vencida com as interferências dos colegas de grupo, que se corrigiam mutuamente, desenvolvendo assim a capacidade de trabalhar em equipe e aprender colaborativamente.

Gráfico 1 - Estratégias usadas para construir o plano cartesiano

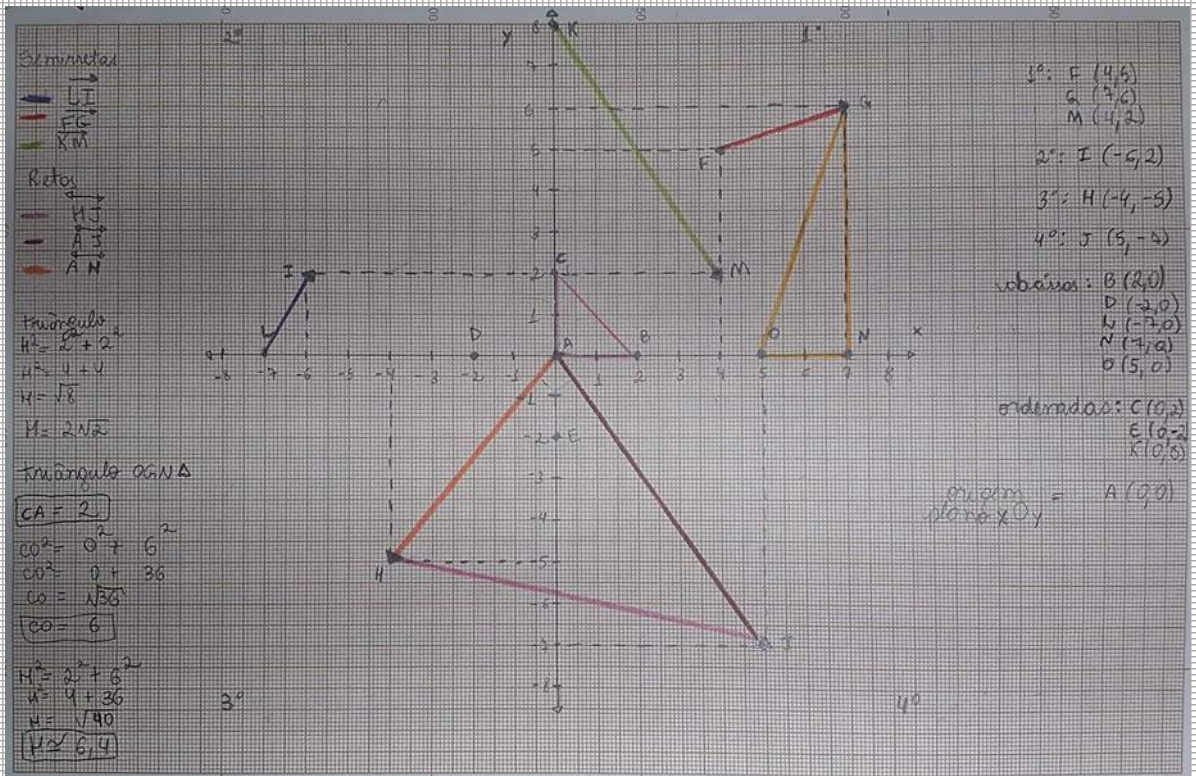
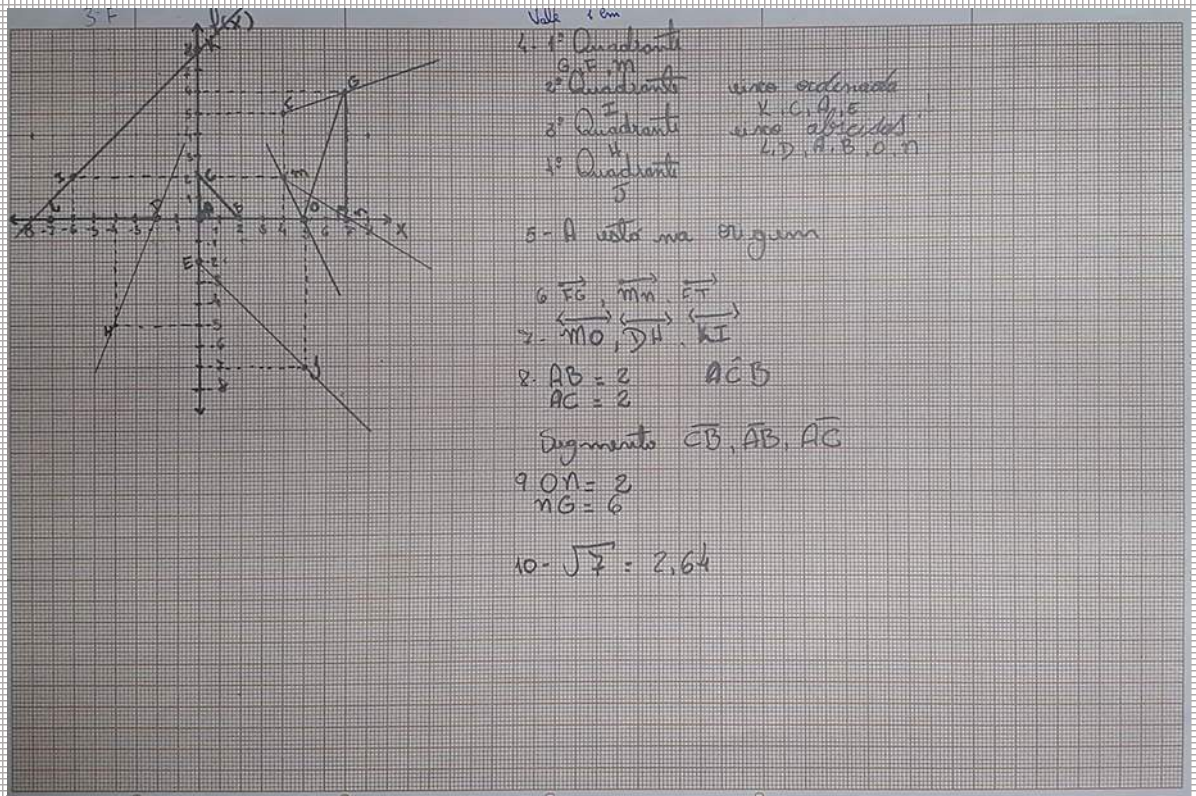


Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Verificamos no gráfico 1 que aproximadamente 86% dos estudantes utilizaram a régua como apoio para a construção do plano cartesiano, no entanto, aproximadamente 9,1% dos estudantes preferiram fazer o plano cartesiano usando a régua como suporte para o desenho.

A liberdade que os estudantes tiveram para realizar a atividade, permitiu-nos observar construções do plano cartesiano (até mesmo entre estudantes de um mesmo grupo) na posição horizontal ou vertical da folha; ao centro, à direita, à esquerda, ou seja, em diversas partes da folha. Esta primeira atividade pode ter encorajado o estudante a criar soluções e ter autonomia intelectual para construir seu conhecimento sem interferência do professor.

Figura 13 - Construção do plano cartesiano



Fonte: Acervo da autora (2017)

A figura 13 apresenta duas construções dos estudantes participantes da pesquisa. Ambas foram feitas com uso da régua apenas como suporte para traçar as

retas. Na construção inferior, o estudante utilizou a dimensão real entre as linhas da folha quadriculada e dois quadrados para ter a medida de 1 cm (centímetro). No registro superior, o estudante optou por uma escala reduzida e considerou que a distância entre as linhas equivale a 1 cm.

Os desenhos foram feitos, por opção dos estudantes, no centro e no canto superior da folha quadriculada, de forma que os cálculos fossem organizados da maneira que melhor lhes conviessem.

2) Identifique no plano cartesiano o eixo das abscissas com X e o eixo das ordenadas com Y $f(X)$ e gradue os eixos, considerando cada unidade equivalente a 1 centímetro, de um ponto a outro, tendo como referência a reta numérica.

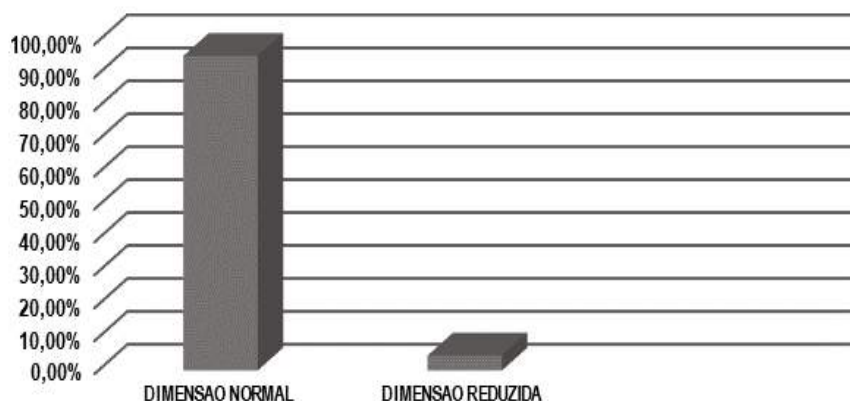
Quadro 9 - Recorrências de soluções da atividade 2

Estratégias de soluções definidas a priori	Nº de alunos
a) Identificar o eixo horizontal com X e o eixo vertical com Y ($f(x)$). Graduar as retas do plano cartesiano, considerando o conjunto dos números inteiros em dimensão real;	21
b) Identificar os eixos e graduar as retas, considerando o conjunto dos números inteiros em dimensão ampliada ou reduzida, no desenho do plano cartesiano;	1
c) Identificar os eixos (X e Y) e graduar aleatoriamente, considerando o conjunto dos números inteiros.	0

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

O gráfico 2 apresenta que menos de 5% dos estudantes optaram por dimensionar seus planos cartesianos de forma reduzida. A maioria dimensionou em escala real, considerando as medidas presentes na folha quadriculada.

Gráfico 2 - Estratégias usadas para dimensionar o plano cartesiano

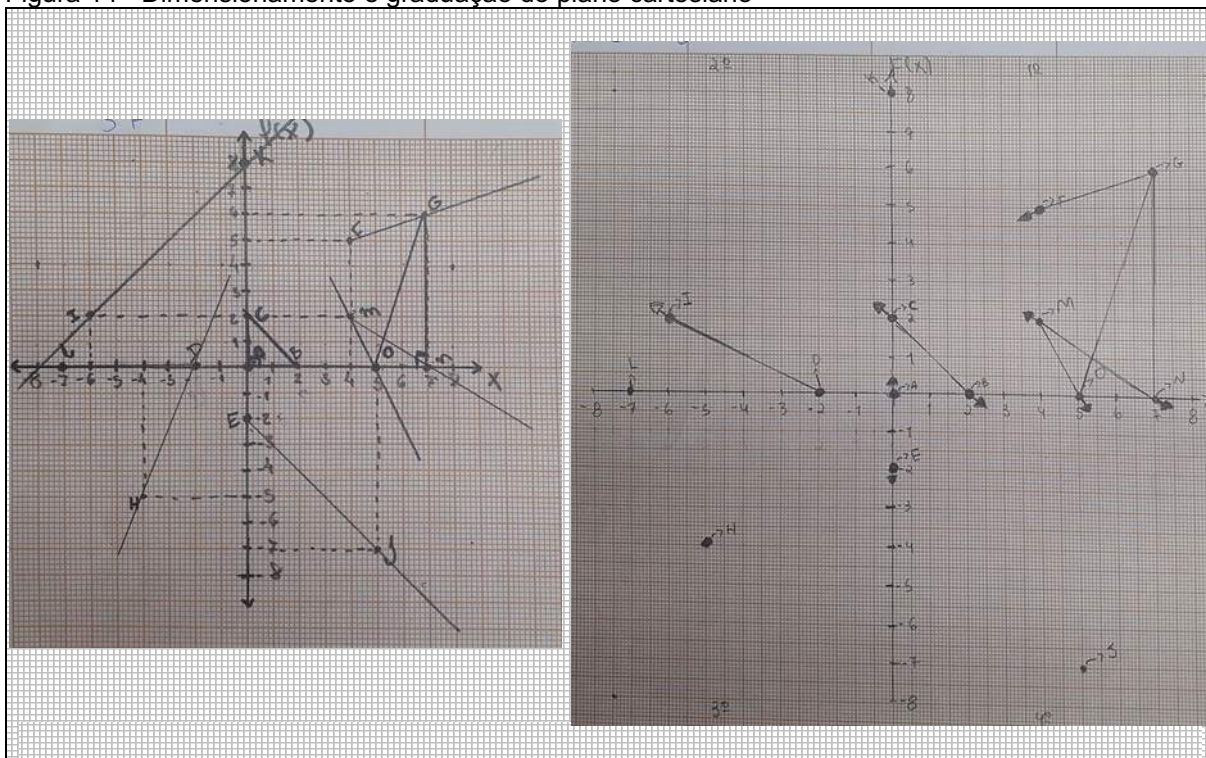


Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Observamos, durante a aplicação da atividade, as discussões em um dos grupos. Uma estudante graduou seu plano cartesiano iniciando no 1 e indo até o 16, sendo que os eixos se cruzavam no par ordenado (8, 8). Inicialmente, os estudantes ficaram confusos e se entreolharam observando as atividades uns dos outros. Os estudantes passaram a discutir sobre qual seria a maneira correta, e a partir de suposições, convenceram a estudante de que ela havia graduado seu plano cartesiano de forma errada.

Os 22 sujeitos desta investigação, mostraram compreender a forma correta de graduar os eixos do plano cartesiano e a relação entre o eixo das abscissas e das ordenadas. Apenas um estudante construiu e graduou seu plano cartesiano em uma escala reduzida. Percebemos, durante a observação, que o estudante pode ter utilizado uma escala reduzida para aproveitar melhor o espaço disponível na folha quadriculada com as anotações e cálculos subsequentes.

Figura 14 - Dimensionamento e graduação do plano cartesiano



Fonte: Acervo da autora (2017)

A figura 14 mostra a construção de dois estudantes de grupos diferentes. Na imagem à direita, uma construção em dimensão real; na imagem à esquerda, uma construção com dimensão reduzida. As duas construções apresentam 16 unidades de medida e identificação correta em cada eixo.

3) Com o plano cartesiano construído, posicione no plano cartesiano construído os pares ordenados:

$A(0, 0)$; $B(2, 0)$; $C(0, 2)$; $D(-2, 0)$; $E(0, -2)$; $F(4, 5)$; $G(7, 6)$;
 $H(-4, -5)$; $I(-6, 2)$; $J(5, -7)$; $K(0, 8)$; $L(-7, 0)$; $M(4, 2)$; $N(7, 0)$; $O(5, 0)$.

Quadro 10 - Recorrências de soluções da atividade 3

Estratégias de soluções definidas a priori	Nº de alunos
a) Posicionar os pares ordenados e identificar os pontos no plano cartesiano. Conferir a orientação abscissa/ordenada observando as posições horizontal e vertical;	Não foi possível observar as resoluções individualmente.
b) Posicionar o ponto $(X; Y)$, iniciando na origem $(0; 0)$, direcionando para direita/esquerda quando for o parâmetro X e para cima ou para baixo, quando for o parâmetro Y.	Seguem as observações gerais das turmas.

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

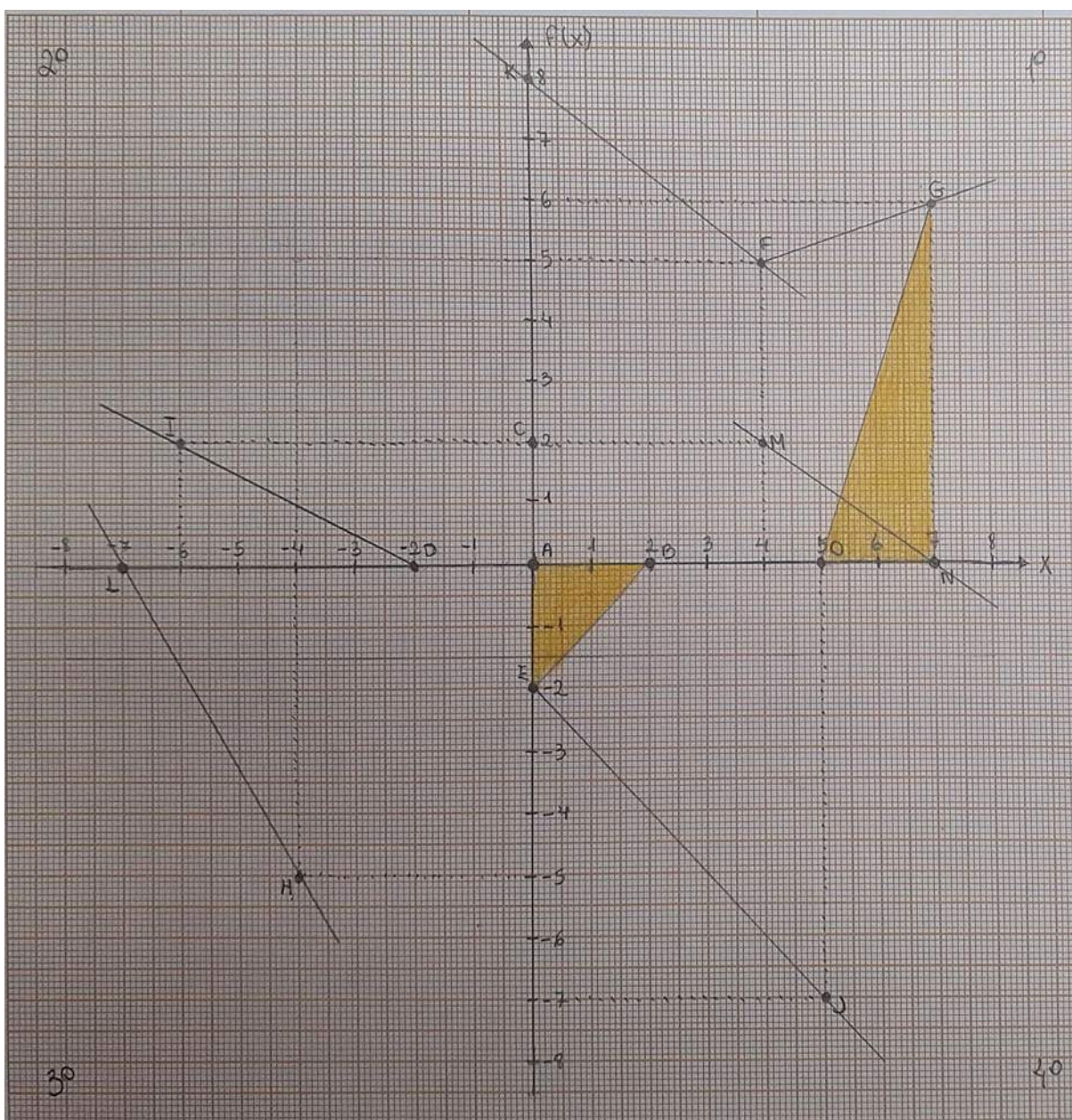
A atividade em grupo mostrou-se eficiente. Os estudantes de alguns grupos localizaram os pontos, representados por seus pares ordenados no plano cartesiano construído. Notamos que alguns estudantes agiam individualmente e apressados para terminarem primeiro. Mesmo afirmando saberem como localizar os pontos no plano cartesiano, eles se confundiam entre as abscissas e as ordenadas, e seus pares ordenados eram colocados nas posições erradas ou invertidas. Observamos que os estudantes olhavam o posicionamento dos seus pontos, e ao ver as folhas dos colegas do grupo, verificaram que erraram. De certa forma, alguns estudantes que afirmavam estar corretos, não estavam, e o posicionamento que se encontravam, às vezes os confundia. Um dos grupos preferiu colocar as 4 folhas quadriculadas juntas e na mesma posição para conferir as localizações dos pontos e perceberam que dois estudantes tinham feito incorretamente.

Um integrante de um determinado grupo afirmou que a linha horizontal era o X e que o X sempre era o primeiro, em seguida os outros integrantes do grupo concordaram e corrigiram o posicionamento. Uma estudante mencionou aos colegas que sempre se confundia com o posicionamento da abscissa e da ordenada, pois não sabia onde deveria ficar o X e o Y no plano cartesiano. Então um colega de seu grupo explicou, movendo as mãos, que na posição horizontal era a abscissa, e na posição vertical, a ordenada e que para saber onde ficava o X e o Y era muito fácil, afinal o "X" fica na "abscissa" e ressaltou que bastava a colega lembrar do som de "x" da palavra abscissa. A estudante sorriu e disse em tom de contentamento "agora eu entendi

completamente, nunca mais vou errar” e os alunos continuavam respondendo as questões de maneira colaborativa.

Os estudantes observados, ao final desta atividade, mostraram conhecimento sobre o posicionamento correto do par ordenado no plano cartesiano. Os obstáculos apresentados foram vencidos colaborativamente, sem necessidade de intervenção da Professora Flor ou da pesquisadora. Considerando o posicionamento dos pontos no plano cartesiano, todos os estudantes, sujeitos desta pesquisa, fizeram com similaridade conforme a figura 15.

Figura 15 - Posicionamento dos pares ordenados no plano cartesiano



Fonte: Acervo da autora (2017)

4) Identificar e reescrever ao lado do plano cartesiano, os pares ordenados separados por quadrantes (1º, 2º, 3º e 4º) e os pares ordenados que estão exatamente sobre os eixos das abscissas e das ordenadas.

5) Identificar em que posição do plano cartesiano se encontra par ordenado (0, 0).

Quadro 11 -Recorrências de soluções das atividades 4 e 5

Estratégias de soluções definidas a priori	Nº de alunos
a) Localizar e identificar cada ponto no plano cartesiano, em seus respectivos quadrantes, orientados de 1º a 4º no sentido anti-horário. Identificar os pontos que estão exatamente sobre o eixo das abscissas e/ou sobre o eixo das ordenadas, bem como reconhecer o ponto (0; 0) como integrante dos eixos das abscissas e ordenadas simultaneamente;	12
b) Identificar os pontos $x > 0$ e $y > 0$ integrantes do 1º quadrante; $x < 0$ e $y > 0$ integrantes do 2º quadrante; $x < 0$ e $y < 0$ integrantes do 3º quadrante; $x > 0$ e $y < 0$ integrantes do 4º quadrante; $x=0$ e $y \neq 0$ integrantes do eixo das ordenadas; $x \neq 0$ e $y=0$ integrantes do eixo das abscissas; $x=0$ e $y=0$ ponto da origem.	7
Estratégia autônoma dos estudantes	Nº de alunos
c) Não identificaram os quadrantes, mas posicionaram os pontos corretamente. Obs: Concluímos (pesquisadora e professora Flor) que estes estudantes assimilaram o conteúdo em virtude de posicionarem os pontos nos respectivos quadrantes do plano cartesiano.	3

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

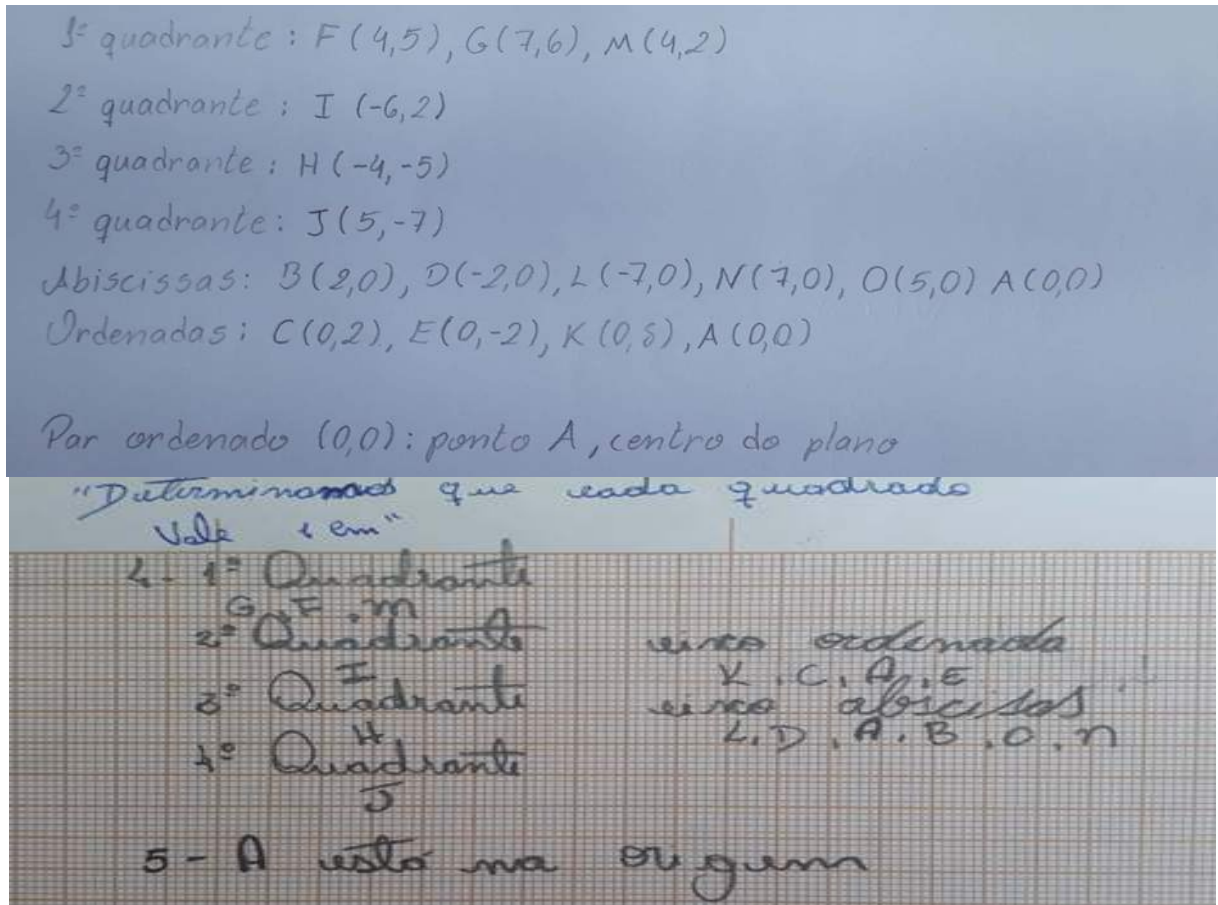
Esta atividade nos mostrou um vasto repertório de soluções, algumas inclusive que não havíamos considerado nas estratégias traçadas na análise a *priori*. Uns estudantes identificaram os pontos com letras em sua posição no plano cartesiano, identificado com o número do quadrante.

Outros estudantes reescreveram os pontos à frente ou acima da folha quadriculada, colocando o quadrante ou o eixo correspondente. Observamos que alguns estudantes, que colocaram os pontos no próprio plano cartesiano, não sabiam distinguir se os pontos que estavam sobre os eixos coordenados pertenciam ao eixo ou ao quadrante, e ao perguntar-lhes, ficavam com dúvidas. Nesta atividade ocorreu a intervenção da pesquisadora e da professora Flor nos grupos para garantir que os estudantes distinguíssem os pontos localizados nos quadrantes e nos eixos coordenados. A orientação ocorreu em dois grupos e se baseou em perguntas,

necessárias e suficientes, para que os estudantes confrontassem suas respostas com as suas construções.

Na figura 16 percebemos a autonomia e liberdade dos estudantes em decorrência da diversidade de soluções apresentadas.

Figura 16 - Identificação dos pares ordenados nos quadrantes do plano cartesiano



Fonte: Acervo da pesquisadora (2017)

6) Ligar seis pontos no plano cartesiano, dois a dois, dentre os pontos já posicionados. Identificar três semirretas com linguagem matemática adequada.

7) Traçar três retas quaisquer no plano cartesiano, de modo que cada reta contenha dois pontos distintos do plano cartesiano. Nomear as retas com linguagem matemática adequada.

Quadro 12 - Recorrências de soluções das atividades 6 e 7

Estratégias de soluções definidas a priori	Nº de alunos
a) Escolher pontos quaisquer, dois a dois, no plano cartesiano e traçar três semirretas e/ou três retas distintas. Nomear as semirretas e retas com notação matemática pertinente;	18
b) Escolher duas das semirretas identificadas e/ou duas das retas que sejam coincidentes;	0
c) Escolher três retas e/ou semirretas que sejam coincidentes.	0

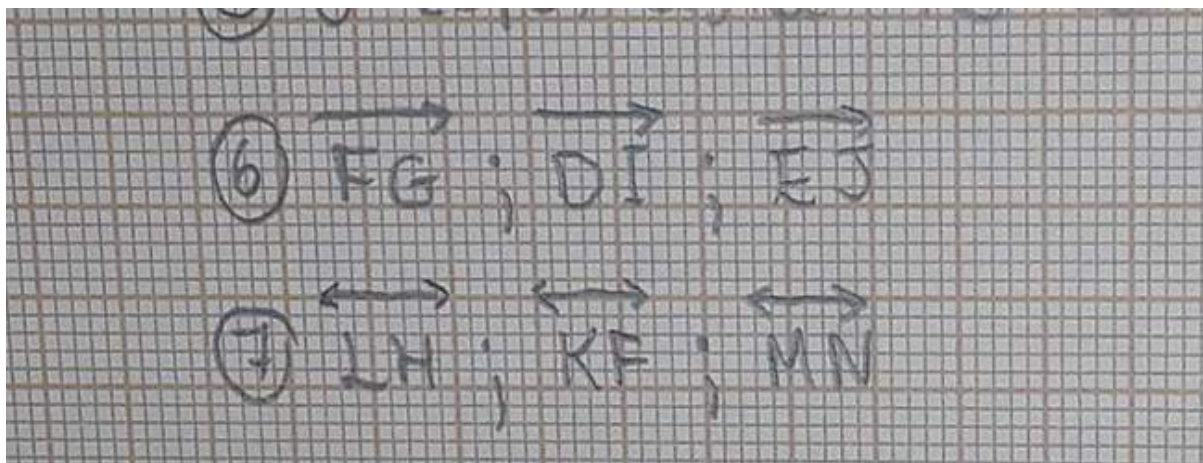
Estratégias autônomas dos estudantes	Nº de alunos
d) Identificou as retas e semirretas geometricamente no plano cartesiano, mas não nomeou algebricamente de maneira formal.	2
e) Identificou as retas, mas não identificou as semirretas.	2

Fonte: Elaborado pela autora (2017).

Constatamos a dificuldade dos alunos em diferenciar retas, semirretas e segmento de retas. Assim, tanto eu quanto a professora Flor, passamos a instigar os estudantes com perguntas para que eles diferenciassem os conceitos e sua representação algébrica. Além disso, as interações interpessoais ampliaram no decorrer da situação didática, ao passo que estudantes de um determinado grupo, interagem com colegas de outros grupos e assim, partilhavam saberes. Nesta atividade, ficou evidenciada a autonomia intelectual dos estudantes em seus registros. A diversidade de soluções, bem como apresentações de conhecimentos, nos mostrou uma certa liberdade no processo de aprendizagem e permitiu que cada estudante demonstrasse a maneira como consolidou aquele conceito.

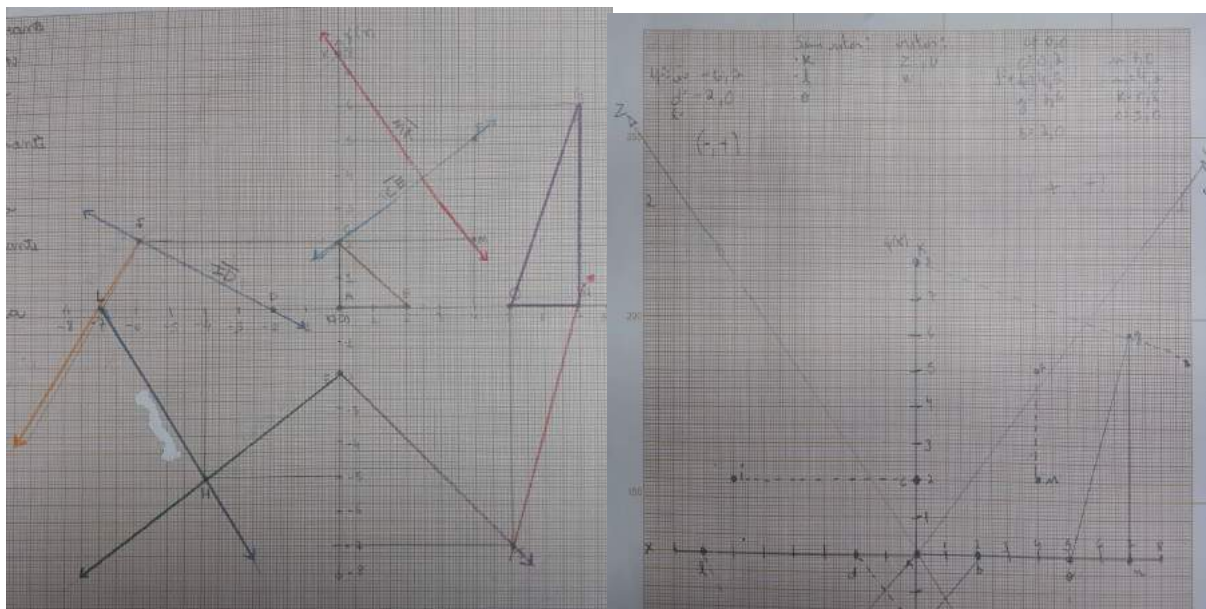
As figuras 17 e 18 exibem três formas diferentes, dentre as várias apresentadas para identificar, nomear e construir as retas e as semirretas, considerando os pontos presentes no plano cartesiano. Em um dos exemplos o estudante optou em mostrar as retas e semirretas, construindo-as no plano cartesiano em cores diferentes. O estudante representou as retas com setas nas duas extremidades, as semirretas com um ponto em uma extremidade e uma seta na outra extremidade. Outro estudante desenhou as retas com a noção de infinito extrapolando as margens da folha quadriculada. Há também o exemplo do estudante que optou em representá-las utilizando linguagem matemática, identificando a reta e/ou a semirreta pelas letras que as representam no plano cartesiano. Sobre esta representação, o estudante colocou uma reta com uma seta em cada extremidade para representar as retas, e uma reta com um ponto em uma extremidade e uma seta na outra extremidade para caracterizar a semirreta.

Figura 17 - Identificação das retas e semirretas com notação matemática



Fonte: Acervo da pesquisadora (2017)

Figura 18 - Identificação das retas e semirretas



Fonte: Acervo da pesquisadora (2017)

De forma geral, os desenhos apresentados nas figuras 17 e 18 expressam as respostas dos estudantes com o uso de diferentes registros, exercitando assim o pensamento criativo.

8) Escolher três pontos no plano cartesiano que possam ser vértices de um triângulo retângulo e calcular a medida dos seus catetos. Identificar os seus segmentos de retas com a notação matemática adequada.

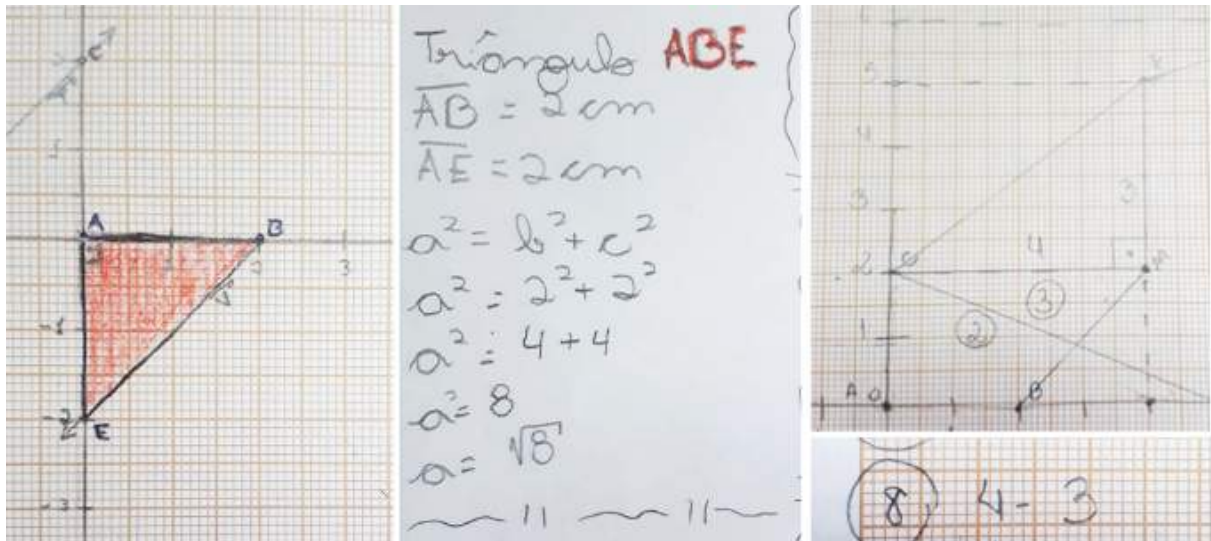
Quadro 13 - Recorrências de soluções da atividade 8

Estratégias de soluções definidas a priori	Nº de alunos
a) Localizar três pontos que possam ser vértices de um triângulo retângulo, de maneira que seus catetos sejam coincidentes com os eixos cartesianos. Nomear formalmente os catetos do triângulo retângulo e calcular suas medidas;	10
b) Identificar triângulos retângulos com catetos não coincidentes com os eixos do plano cartesiano. Usar a notação matemática pertinente para identificar os segmentos de retas e calcular a medida de seus catetos.	4
Estratégia autônoma do estudante	Nº de alunos
c) Identificou o triângulo, mas não calculou os catetos. Obs: Mesmo não calculando os catetos, ficaram claras as suas medidas por serem coincidentes aos eixos coordenados. Pode ser que os estudantes acharam desnecessário fazer o cálculo da medida ou fizeram os cálculos em outros espaços como a mesa escolar.	8

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Dentre os 22 estudantes, 63,6% demonstraram dominar bem o conteúdo ou acharam a atividade muito simples, pois optaram em escolher o triângulo retângulo que estava com os catetos coincidentes com os eixos coordenados, ficando evidente suas medidas. Concluímos que por estarem evidentes as medidas, 36,7% dos estudantes não apresentaram os cálculos necessários, mas em concordância com a professora Flor, compreendemos que mesmo não apresentando de forma escrita a medida dos catetos do triângulo retângulo, estes estudantes conheciam as medidas. Quatro estudantes escolheram triângulos retângulos com catetos não coincidentes, com os eixos coordenados e apresentaram seus cálculos de maneira organizada e correta. Portanto, verificamos que 100% dos estudantes atingiram os objetivos almejados para esta atividade.

Figura 19 - Cálculo dos catetos do triângulo retângulo escolhido



Fonte: Acervo da pesquisadora (2017)

A figura 19 mostra duas estratégias de escolha de triângulos distintos. Observa-se que na construção à esquerda o estudante, escolheu um triângulo com os catetos coincidentes com os eixos do plano cartesiano e apresentou os cálculos para os catetos e para a hipotenusa usando a linguagem matemática. Já na outra construção, o triângulo escolhido não apresenta os catetos coincidentes com os eixos, e sim paralelos. Os valores para os catetos foram apresentados sem cálculos ou estratégia para medi-los, o que nos permite supor que o estudante projetou os catetos sobre os eixos do plano cartesiano e verificou suas medidas, sintetizando conclusões e apresentando o resultado imediato.

9) Identificar e calcular a medida dos catetos do triângulo retângulo (definido pelos pontos “O”, “G” e “N”)

Quadro 14 - Recorrências de soluções da atividade 9

Estratégias de soluções definidas a priori	Nº de alunos
a) Calcular os catetos do triângulo retângulo projetando os seus segmentos de retas sobre os eixos do plano cartesiano.	10
b) Calcular os catetos do triângulo retângulo, utilizando o instrumento régua como técnica de medição por aproximação.	4
Estratégia autônoma do estudante	Nº de alunos

c) Identificou o triângulo, mas não calculou os catetos.

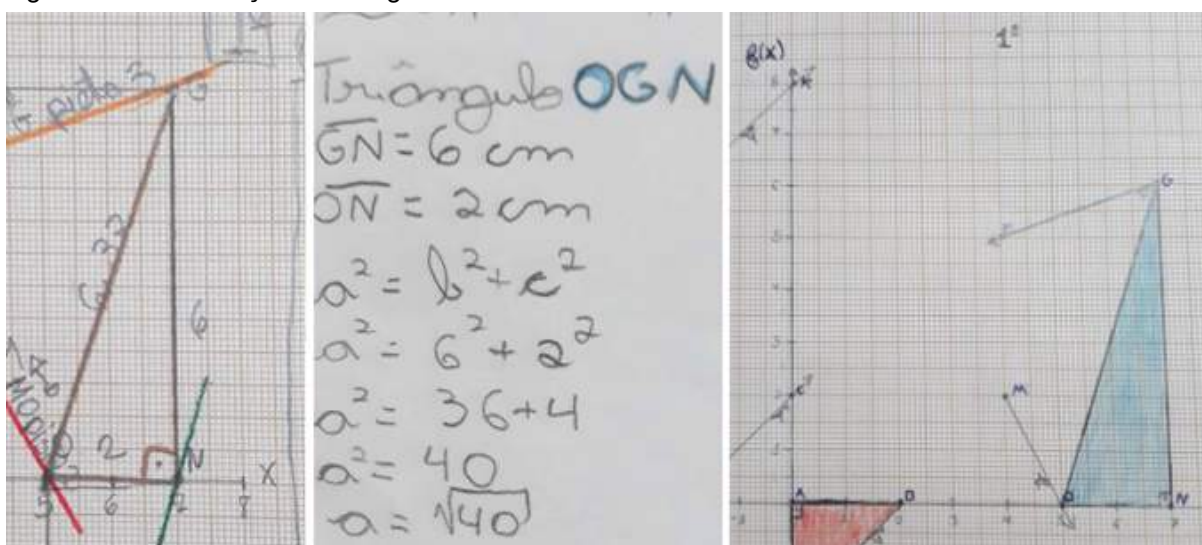
Obs: Mesmo não calculando os catetos, ficavam claras as suas medidas por serem coincidentes aos eixos coordenados. Pode ser que os estudantes acharam desnecessário fazer o cálculo da medida ou fizeram os cálculos em outros espaços, como a mesa escolar.

8

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Nesta atividade todos os 22 estudantes entenderam que bastava projetar o cateto “G, N” sob o eixo Y para visualizar sua medida. Não verificamos dificuldades quando relacionamos esta atividade com a atividade anterior (n. 8).

Figura 20 - Identificação do triângulo OGN e cálculo dos seus catetos



Fonte: Acervo da autora (2017)

Na figura 20 verificamos duas situações desenvolvidas pelos estudantes, que representam a maioria dentre os 22 registros verificados. Um dos estudantes preferiu apresentar os valores transcritos na folha quadriculada utilizando a linguagem matemática. Nota-se neste registro escrito a transição da representação geométrica para a escrita algébrica. O outro estudante representou o triângulo geometricamente, utilizando um lápis de cor e pintando o triângulo de azul, assim, considerou ser suficiente para evidenciar o valor da medida de seus catetos.

10) Estimar o valor da raiz quadrada, não exata, referente à medida da hipotenusa do triângulo retângulo formado pelos pontos “O”, “G” e “N”.

Quadro 15 - Recorrências de soluções da atividade 10

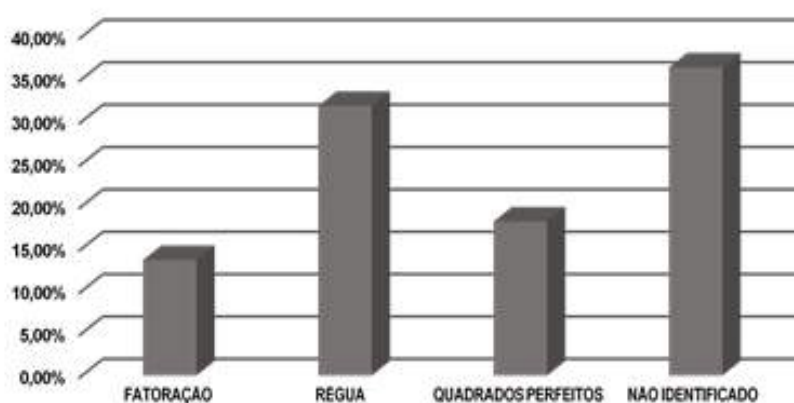
Estratégias de soluções definidas a priori	Nº de alunos
a) Calcular a raiz quadrada utilizando a fatoração.	3
b) Estimar o resultado com a utilização do instrumento régua.	7
c) Estimar o resultado utilizando números quadrados perfeitos (raiz quadrada).	4

Estratégia autônoma do estudante	Nº de alunos
d) Calculou corretamente, mas não foi possível identificar a estratégia utilizada pelo estudante.	8

Obs: Deduzimos que, por ser a última questão e última aula do dia, a resolução da questão ficou prejudicada, ou os estudantes realizaram os cálculos em outros espaços fora da folha quadriculada, como por exemplo na mesa escolar.

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

Gráfico 3 - Estratégias usadas para calcular a hipotenusa do triângulo dos pontos OGN

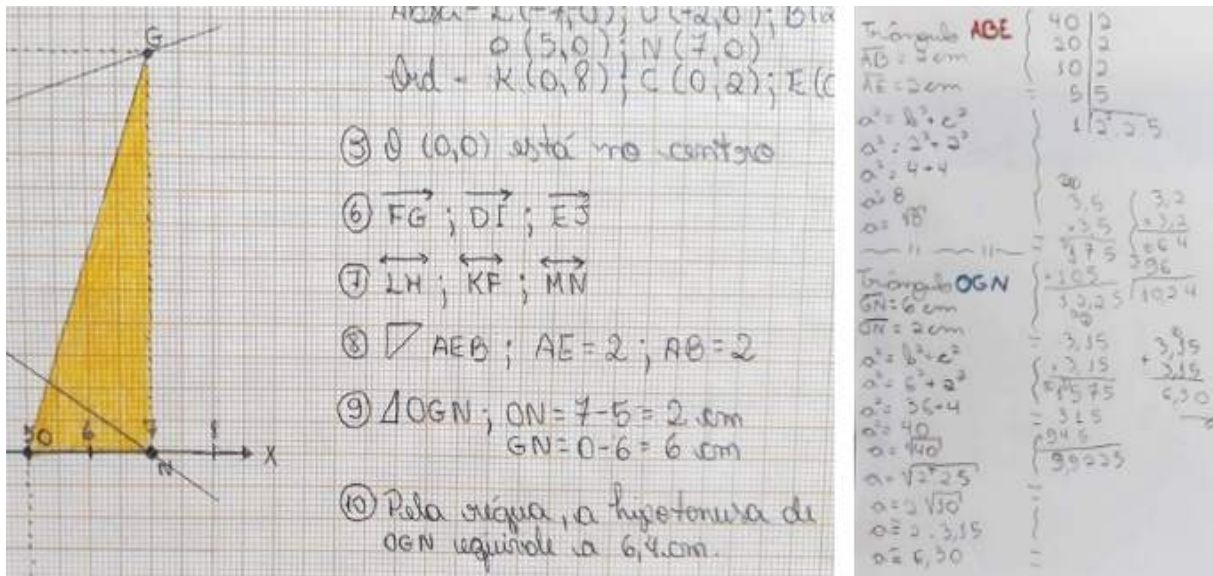


Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Todos os estudantes concluíram a questão conforme apresentado no gráfico 3, no entanto, não foi possível verificar as resoluções de 8 estudantes, por não ter os cálculos na folha quadriculada. Contudo, durante a realização da roda de conversa, todos os 22 estudantes afirmaram que concluíram a sessão didática.

Encontramos uma diversidade de soluções desta questão, os estudantes estimaram a raiz quadrada utilizando livres formas de resoluções, tais como: fatoração, aproximação utilizando o instrumento régua e aproximação por números quadrados perfeitos. Uma importante observação refere-se ao uso da régua para estimar a raiz quadrada, 30% dos estudantes utilizaram o instrumento régua e alguns estudantes que relataram dificuldades iniciais para utilizar o instrumento, superaram a dificuldade e usaram a régua para estimar a raiz quadrada.

Figura 21 - Cálculo da hipotenusa do triângulo OGN e estimativa da raiz quadrada



Fonte: Acervo da autora (2017)

A figura 21 mostra duas soluções apresentadas pelos estudantes. Verificamos na transcrição à esquerda que o estudante fez os cálculos da hipotenusa do triângulo retângulo apresentado, utilizando a régua como instrumento para fazer uma aproximação. A transcrição à direita apresenta os cálculos realizados pelo estudante para realizar a aproximação, que utilizou a fatoração para chegar ao menor valor possível e, a seguir, realizou multiplicações sucessivas para encontrar um valor aproximado, considerando em seus cálculos duas casas decimais.

ETAPA 2: Análise a posteriori da 2ª Sessão da Engenharia Didática

Nesta etapa apresentamos a análise a posteriori das situações-problema elencadas na 2ª sessão da sequência didática. Esta sessão constitui-se de sete situações-problema, aqui designadas pelas letras de A à G. Os estudantes receberam a informação que a atividade terminaria na questão 5, no entanto, havia duas questões extras (situações-problema F e G), como forma de desafio, e eles optariam em fazê-las, caso o tempo fosse suficiente.

A) Posicionar a peça correspondente ao prédio do Instituto Central de Ciências – ICC, de maneira que a concavidade fique voltada para a direção leste e que suas extremidades toquem os pares ordenados $(3, 0)$ e $(-3, 0)$.

Quadro 16 - Recorrências de estratégias para posicionar o ICC

Estratégias de soluções definidas a priori	Nº de alunos
a) Optar por uma organização espacial do pequeno grupo, em que os estudantes possam se sentar dois de um lado de frente a outros dois. Nesta forma de organização, os estudantes teriam dois referenciais geográficos;	18
b) Optar por uma organização espacial do pequeno grupo, em que os estudantes possam se sentar todos de um único das mesas e optar por um único referencial geográfico;	4
c) Reconhecer dentre as nove (9) peças disponibilizadas, a peça que se assemelha geometricamente com o ICC/UnB. Posicionar a peça no Tapete Cartesiano, considerando o referencial acordado e o sistema cartesiano estabelecido pelo pequeno grupo de estudantes, a partir das possibilidades do Tapete Cartesiano;	22
d) Relacionar a situação-problema proposta com o contexto geográfico de Brasília, especificamente acerca do bairro Asa Norte;	22
e) Interpretar e reconhecer a situação-problema proposta como uma maneira de se orientar geograficamente no Campus Darcy Ribeiro/UnB.	22

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Inicialmente, observamos que em alguns grupos, os estudantes apresentavam certa dificuldade para orientar o Tapete Cartesiano com o posicionamento correto, de acordo com os pontos cardeais: norte, sul, leste e oeste. A atividade solicitava que eles posicionassem a peça que representava o ICC/UnB, com a concavidade voltada para o leste, o que causou uma discussão bem produtiva entre os estudantes. Em alguns grupos, os estudantes estavam sentados dois de um lado em frente aos outros dois, e não entravam em consenso quanto à orientação dos pontos cardeais.

Em todas as turmas, os estudantes discutiram bastante acerca da direção que o sol nasce. Após entrarem em acordo que o sol nasce na direção leste, passavam a discutir sobre a direção sul e norte. Os diálogos abordavam dúvidas, como uma observada em um determinado grupo em uma das turmas:

“Se eu apontar com o braço direito para a direção onde o sol nasce, o norte está a minha frente ou às minhas costas?” disse um aluno. *“Ok, você está apontando o braço direito para o leste, então o seu braço esquerdo está para o oeste”*, mencionou uma aluna. *“Ah, então se a gente pensar na Ceilândia, do lado de cá é a Ceilândia Norte e do outro é a Ceilândia Sul”*, mencionou outra aluna. *“Gente, então tá fácil. Se o leste é do lado do braço direito do colega, o oeste no esquerdo, então o lado que está nas costas dele é o sul, já que pra lá é a Ceilândia Sul”*, disse outro aluno sorrindo. *“Isso mesmo, então se nas minhas costas*

é o sul, logo na minha frente é o norte”, mencionou o aluno que apontava os braços. Após esta discussão os quatro estudantes sorriram e identificaram corretamente o posicionamento de cada um dos pontos cardeais no Tapete Cartesiano.

Em todas as turmas, ocorreram impasses em vários grupos, que perduraram por minutos. Todavia, todos os 52 grupos das 7 turmas chegaram em consenso, e assim, posicionaram a peça que representava o ICC/UnB, com sua concavidade voltada corretamente para a direção leste.

Alguns grupos preferiram, a partir desta questão, sentar todos de um mesmo lado do Tapete Cartesiano para assim observar um mesmo referencial geográfico. Em alguns grupos, um ou dois estudantes permaneceram sentados em frente aos demais colegas. Os grupos identificaram os pontos cardeais no Tapete Cartesiano, colando um ou mais pedaços de fita crepe em suas extremidades e escrevendo sobre a fita crepe a inicial da direção correspondente.

Durante a atividade, alguns estudantes recordaram-se do filme motivacional sobre a UnB, assistido no início da 1ª sessão da sequência didática ou já conheciam o ICC/UnB. Os estudantes conversavam sobre a dimensão do prédio e sobre a distância que deveriam percorrer para atravessá-lo da direção norte à direção sul.

Presenciamos estudantes relacionando esta distância com alguma outra distância percorrida, como por exemplo: a distância da escola até sua casa ou até algum ponto na comunidade onde residem. Alguns estudantes, que ao ouvirem que levaria cerca de 20 minutos para atravessar o ICC/UnB, passaram a estimar esta distância comparando-a aos percursos percorridos em tempos semelhantes e chegaram à conclusão de que o prédio é bem extenso e que deveriam estar preparados fisicamente para caminhar bastante ao ingressarem na UnB.

Havia estudantes que não conheciam o bairro Asa Norte, mas, durante a atividade, conseguiram relacionar o problema proposto com o posicionamento da Universidade de Brasília no contexto geográfico do Distrito Federal. Ouvimos estudantes dizerem que esta atividade iria ajudá-los a se localizar dentro do Campus Darcy Ribeiro.

A figura 22 apresenta a situação-problema “A” do jogo, desenvolvida por dois pequenos grupos colaborativos. Podemos verificar que ambos os grupos escolheram as linhas vermelhas como referencial para posicionarem a edificação, e que, os pontos cardeais aparecem ou na peça que representa o ICC/UnB ou fixados no Tapete Cartesiano com fita crepe.

Figura 22 - Posicionamento do ICC no tapete cartesiano



Fonte: Acervo da autora (2017)

B) Na direção oeste, sobre o eixo das ordenadas distante 400 metros do ponto de origem, fica o Restaurante Universitário – RU. Posicionar a peça que representa o RU centralizada no par ordenado encontrado.

Quadro 17 - Recorrências de estratégias para posicionar o RU

Estratégias de soluções definidas a priori	Nº de alunos
a) Escolher uma escala dentre as disponíveis no Tapete Cartesiano;	22
b) Dimensionar a situação-problema com outra escala definida pelo pequeno grupo de estudantes;	0
c) Relacionar a escala escolhida pelo pequeno grupo de estudantes, para dar sentido à distância entre os pontos e à distância em escala real;	22
d) Interpretar a situação-problema proposta, compreendendo a distância em escala real, entre o ICC/UnB e o RU/UnB e relacionar esta distância a uma outra distância conhecida pelo pequeno grupo de estudantes, bem como compreender a importância social, econômica e cultural destas edificações no contexto universitário.	Observação realizada, todavia, não mensurada individualmente.

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Para fazer a marcação dos pontos, os grupos foram informados de que eles tinham a liberdade para escolher, no tapete cartesiano, somente as linhas vermelhas, somente as linhas brancas ou as duas linhas. Caso optassem por escolher as duas linhas, a escala estaria reduzida. Após discussões nos grupos, todos optaram por escolher somente as linhas brancas ou somente linhas vermelhas, desse modo

trabalharam em uma dimensão real, considerando a distância entre duas linhas da mesma cor como 100 metros.

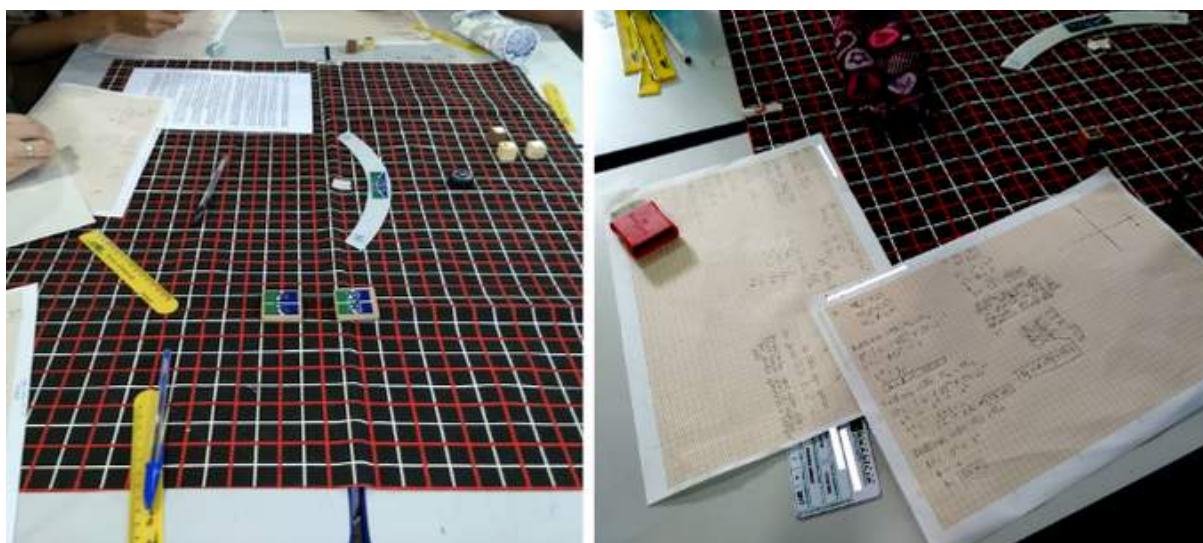
Definir a direção “oeste” mostrou-se fácil para os estudantes, afinal na questão anterior eles haviam posicionado o prédio do ICC, com a concavidade voltada para a direção leste. Após posicionar o prédio do Restaurante Universitário (RU), os estudantes de vários grupos passaram a discutir sobre a importância de saber onde ficava o RU, bem como os valores da alimentação e o quão barato seria para alguns se alimentar lá.

Outra discussão, para além de conceitos matemáticos, referiu-se à questão socioeconômica, afinal, quando esta pesquisadora projetou o filme institucional da UnB, foi mencionado que os estudantes de baixa renda ou avaliados em situação de vulnerabilidade social, não pagariam por suas refeições no RU. Assim sendo, os estudantes consideraram que não encontrariam dificuldades para se alimentar na universidade.

Apesar de pensarmos na estratégia prevista para a solução da situação-problema B, não ouvimos dentre os grupos das turmas, diálogos acerca da importância e do contexto histórico do prédio do ICC, diferentemente de como ocorreu com o prédio do RU. No entanto, em vários grupos ouvimos discussões relacionadas à extensão do ICC. Diversos estudantes comentaram que iriam caminhar muito, caso fossem de uma ponta a outra desse prédio.

Como referencial, os estudantes assimilaram bem o posicionamento tanto do ICC quanto do RU, visto que, em uma visita à UnB em meados de 2018, ouvimos de alguns estudantes da universidade, egressos da escola e participantes desta investigação, que os prédios do RU e do ICC eram os seus referenciais para se localizarem dentro do campus Darcy Ribeiro. A figura 23 apresenta o posicionamento de algumas edificações e ilustra alguns cálculos realizados nesta atividade.

Figura 23 - Localização e posicionamento do RU



Fonte: Acervo da autora (2017)

C) A Faculdade de Educação tem três prédios: FE1, FE3 e FE5. A FE3 e a FE5 têm a mesma abscissa (-2) e estão distantes do eixo das abscissas $600m$ e $700m$, respectivamente, na direção oeste. A FE1 está centralizada no par ordenado $(-3, 6)$. Identifique e calcule a distância entre a FE1 e FE3; entre a FE1 e FE5; e entre a FE3 e FE5.

Quadro 18 - Recorrências de estratégias para cálculo da distância entre as edificações FE1, FE3 E FE5

Estratégias de soluções definidas a priori	Nº de alunos
a) Posicionar as edificações no Tapete Cartesiano, de acordo com o direcionamento e orientação geográfica estabelecida pelo pequeno grupo. Utilizar-se de conceitos matemáticos, instrumentos disponíveis e conhecidos (medição com régua; distância entre pontos - DP; Teorema de Pitágoras - TP; identificação de padrões - IP; outras). Calcular as distâncias entre as edificações propostas na situação-problema;	TP – 18 DP – 3 IP – 1
b) Discutir em grupo a situação-problema com o objetivo de interpretá-la, de modo que possibilite definir como será calculada a distância entre os pontos (considerando os obstáculos; a menor distância; caminhos curvos; observando as linhas do Tapete Cartesiano; observação e padronização de medidas; dentre outras possibilidades);	Observações no texto
c) Visualizar geograficamente as edificações localizando-se dentro do campus universitário, de modo a construir seus próprios referenciais.	Observações no texto

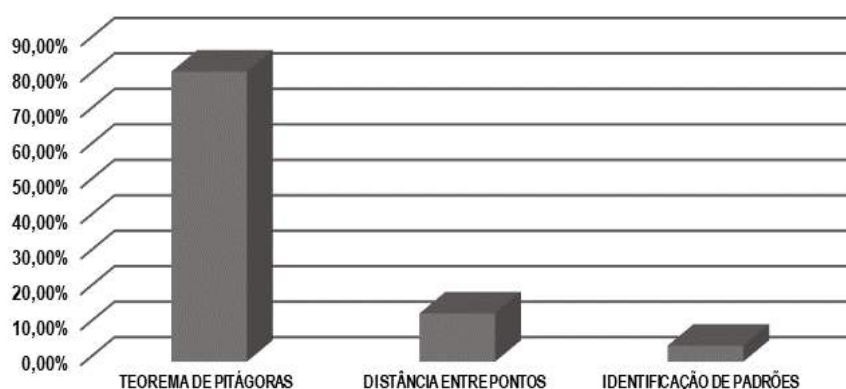
Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Todos os 22 sujeitos desta investigação utilizaram uma dentre as três estratégias para a solução desta questão: Teorema de Pitágoras, Distância entre pontos e identificação de padrões. Em nenhuma das turmas surgiu outra estratégia de solução para calcular a distâncias entre as edificações.

Em alguns grupos, observamos que inicialmente ocorreram erros durante o posicionamento dos prédios. Houve um grupo que colocou os prédios da FE na direção oeste. Notamos que a dificuldade do grupo ocorreu pelo fato dos estudantes não lerem todo enunciado da questão.

O gráfico 4 a seguir apresenta os dados coletados de maneira sistemática, considerando as estratégias de soluções para calcular as distâncias entre os prédios da Faculdade de Educação.

Gráfico 4 - Estratégias usadas para calcular a distância entre os prédios da FE



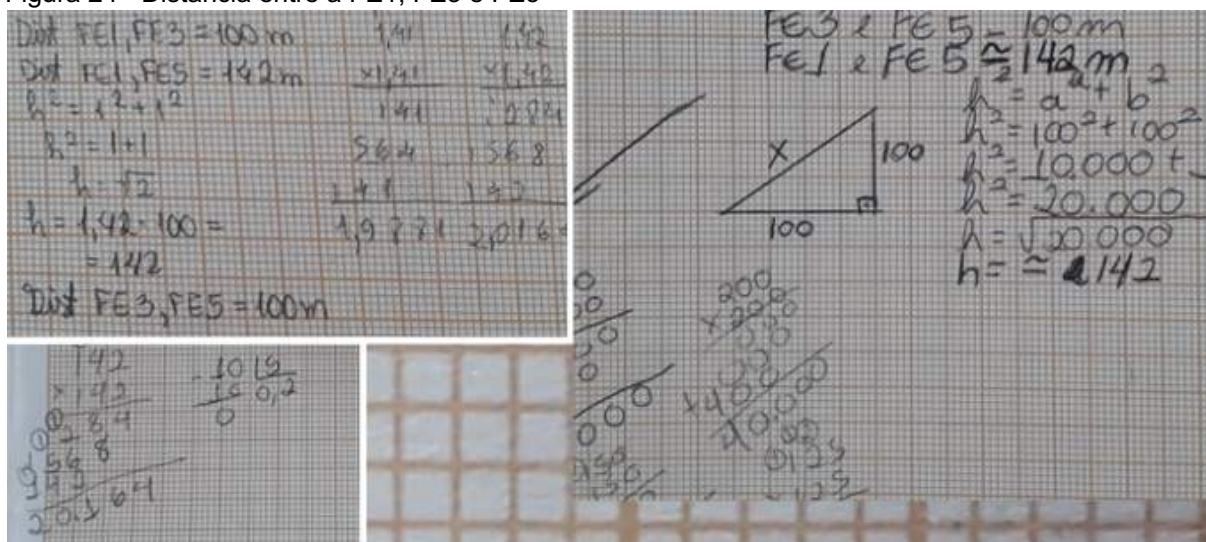
Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Os dados do gráfico 4 revelam que 18 estudantes utilizaram o Teorema de Pitágoras para calcular a distância entre as edificações da Faculdade de Educação, 3 estudantes utilizaram a distância entre dois pontos e apenas 1 identificou padrões. Observa-se que o Teorema de Pitágoras foi a estratégia mais utilizada pelos estudantes. Apenas um estudante, dentre os 22 participantes desta investigação, mostrou que a diagonal do quadrado de lado 100 é $100\sqrt{2}$ e utilizou este padrão para os demais problemas da atividade.

Todos os grupos calcularam as distâncias entre os prédios da Faculdade de Educação (FE) encontrando a menor distância possível, sem considerar obstáculos, caminhos curvos ou seguindo as linhas do tapete cartesiano.

Dentre os investigados, apenas 4 estudantes discutiram sobre a distância entre os prédios da FE e os demais prédios já posicionados no Tapete cartesiano, o ICC e o RU. O interesse despertou-se após receberem a notícia ao longo da atividade, que na Faculdade de Educação são ofertadas disciplinas do curso de Pedagogia e demais cursos de licenciaturas. Estes estudantes informaram que iriam concorrer a vagas na universidade em cursos de licenciaturas pelo Programa de Avaliação Seriada (PAS/UnB), portanto, justifica-se a curiosidade em relação à localização e distância dos prédios da Faculdade de Educação.

Figura 24 - Distância entre a FE1, FE3 e FE5



Fonte: Acervo da autora (2017)

A figura 24 mostra o registro dos cálculos efetuados por dois estudantes. Um deles considerou a distância entre as linhas como uma unidade e, após realizar os cálculos transformou as unidades, adotando uma unidade como 100 metros. Na folha à direita, o segundo estudante realizou os cálculos considerando a medida em metros e fez a aproximação utilizando multiplicações sucessivas. Os dois estudantes optaram em aproximar para mais as medidas encontradas para as raízes procuradas.

D) Os Pavilhões Anísio Teixeira (PAT) e João Calmon (PJC) são dois blocos de salas de aula situados à direção norte do ICC. Seus pares ordenados são $PAT(6,0)$ e

$PJC(6, -2)$. Qual a menor distância percorrida por um estudante que está no PAT para chegar ao RU ? A reta que passa pelos Pavilhões Anísio Teixeira e João Calmon é paralela ao eixo das ordenadas? Justifique.

Quadro 19 - Recorrências de estratégia para o cálculo da distância entre as edificações PAT e RU , e para demonstrar o paralelismo entre retas

Estratégias de soluções definidas a priori	Nº de alunos
a) Identificar as edificações corretamente;	22
b) Calcular a distância entre as edificações utilizando conceitos conhecidos (distância entre dois pontos - DP, teorema de Pitágoras - TP, aproximação com régua - AR, outra forma de calcular - OF);	DP – 3 TP – 19
c) Definir se a reta que passa pelas edificações (PJC e PAT) é paralela ao eixo das ordenadas, utilizando conceitos matemáticos conhecidos (comparando as retas - CR, observando o coeficiente angular - CA, utilizando o determinante - DT, visualmente - VI, ou de outra forma - OF).	CA – 3 VI – 10 OF – 1
d) Não foi possível identificar a estratégia usada pelo estudante para verificar se as retas eram paralelas.	8

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Durante as duas rodas de conversas, todos os 22 estudantes relataram que posicionaram corretamente todas as edificações propostas nesta atividade.

Observamos dentre os diversos pequenos grupos, que um deles, inicialmente, traçou caminhos distintos entre o Pavilhão Anísio Teixeira e o Restaurante Universitário.

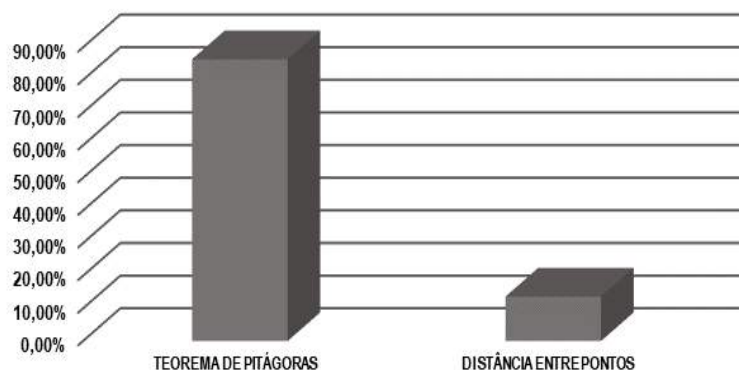
Estes caminhos seguiam as linhas horizontais e verticais do plano cartesiano e por mais que os estudantes traçassem caminhos distintos seguindo estas linhas, a distância encontrada era sempre a mesma. Desta forma, o grupo chegou à conclusão que, independente de como fizessem o trajeto, se este trajeto estivesse dentro do quadrilátero formado pelo posicionamento das duas edificações, a distância seria sempre a mesma.

A descoberta dos estudantes extrapolou os objetivos propostos para a atividade. Após algum tempo e com uma leitura mais minuciosa da atividade, o grupo chegou à conclusão que deveriam calcular a menor distância e que esta distância seria uma linha reta, mais do que isso, esta distância seria a diagonal do quadrilátero que haviam visualizado. Os estudantes perceberam e até comentaram que, da maneira como estavam calculando a distância anteriormente, eles andariam por

caminhos retos como se estivesse em uma malha quadriculada, como o Tapete Cartesiano.

O gráfico 5 a seguir mostra que dos 22 estudantes participantes da pesquisa, mais de 80% optaram por calcular a distância entre as edificações utilizando o Teorema de Pitágoras e os demais utilizaram a distância entre dois pontos.

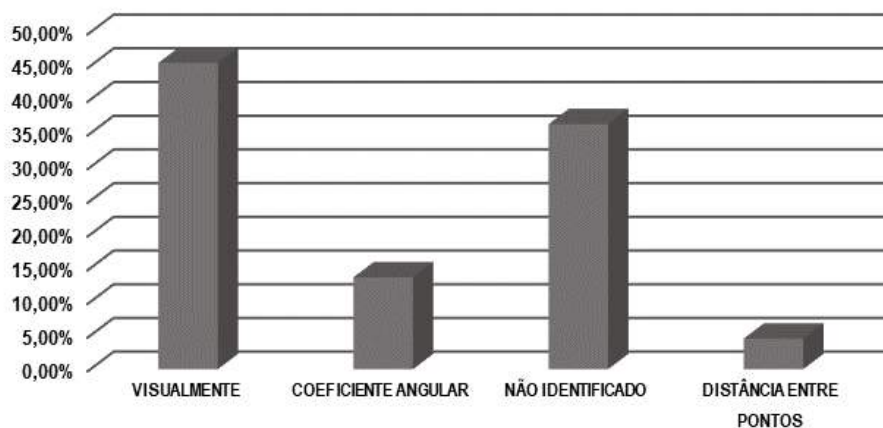
Gráfico 5 - Estratégias usadas para calcular a distância entre as edificações



Fonte: Construído pela autora (2019)

Nesta mesma atividade os estudantes foram desafiados a provarem, se as retas formadas pelas edificações PAT e PJC eram paralelas ao eixo das ordenadas. Dentre os 22, verificamos registros nas folhas quadriculadas de 14 estudantes. Podemos verificar no gráfico 6 que, 10 estudantes constataram o paralelismo visualmente. A estratégia mais usada para visualizar se as retas eram paralelas foi utilizando a medição da distância das edificações até o eixo ordenado. Três destes estudantes visualizaram que as duas edificações tinham a mesma abscissa, concluindo assim que elas eram paralelas.

Gráfico 6 - Estratégias usadas para identificar as retas paralelas

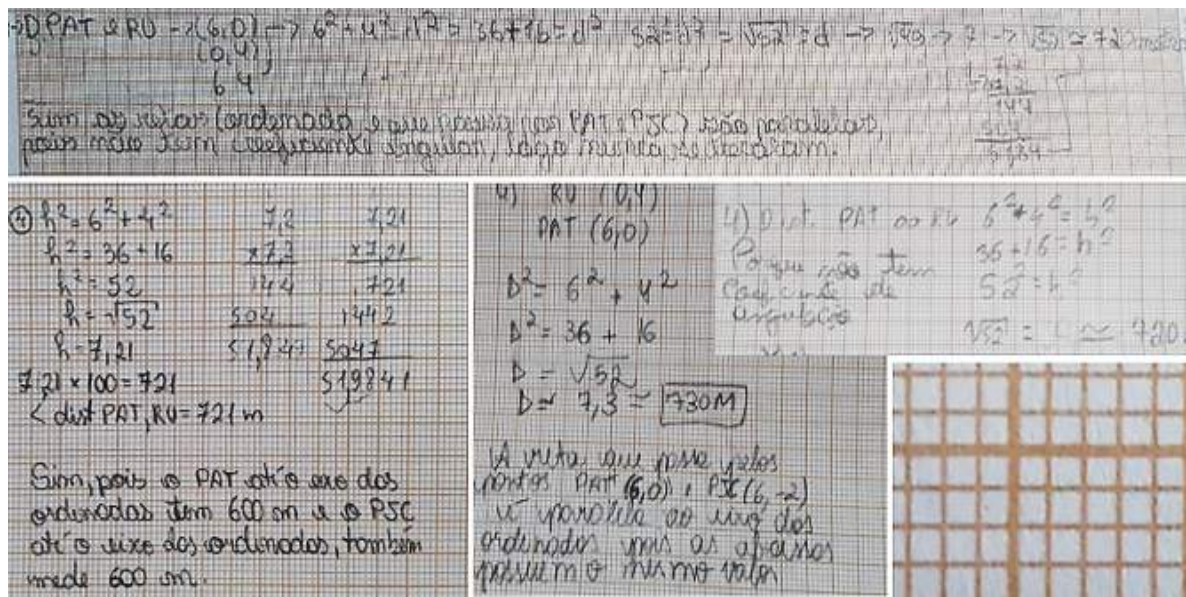


Fonte: Construído pela pesquisadora (2019)

Seguindo a análise, verificamos que 3 estudantes chegaram à conclusão de que as retas não tinham coeficiente angular, portanto eram paralelas. Um dos estudantes verificou, sem provar, que as duas retas formavam ângulos de 90 graus com o eixo das abscissas. Os demais 35% dos estudantes, como visto no gráfico 6, apenas transcreveram as respostas, contudo, não apresentaram os cálculos em suas folhas para mostrar como resolveram o problema proposto. Estes estudantes estavam inseridos em grupos que solucionaram a atividade, portanto, consideramos nesta análise, que estes estudantes aprenderam uma, dentre as estratégias apresentadas, para verificar se as retas eram paralelas.

Na figura 25, visualizamos o registro de 4 estudantes. Dois deles verificaram que as retas não tinham coeficiente angular. Um estudante calculou a distância do eixo ordenado até o PAT e até o PJC, assim compreendeu serem iguais. Outro estudante observou os pares ordenados das duas edificações e concluiu que ambas tinham a mesma abscissa.

Figura 25 - Distância entre PAT e RU e paralelismo



Fonte: Acervo da autora (2017)

E) A Reitoria (REI) e a Biblioteca Central (BCE) encontram-se posicionadas geograficamente nos pares ordenados $(-3, -4)$ e $(2, -5)$, respectivamente. Obtenha a equação da reta que passa pela REI e a BCE. Um estudante se desloca da Reitoria para a Biblioteca Central e em seguida vai almoçar no Restaurante Universitário. Qual foi a distância percorrida pelo estudante?

Quadro 20 - Recorrências de estratégias para encontrar a equação da reta que passa pela REI e a BCE e cálculo da distância percorrida

Estratégias de soluções definidas a priori	Nº de alunos
a) Identificar as edificações e calcular suas distâncias, como caminhos encadeados consecutivos e não paralelos. Encontrar a equação da reta com o uso do determinante – DT ou a fórmula do coeficiente angular – CA;	DT – 6 CA – 3
b) Calcular a situação-problema que tem como modelagem, a sugestão da utilização da distância entre dois pontos - DP. Compreender que é possível calcular as distâncias com o uso do Teorema de Pitágoras - TP, por aproximação com a utilização da régua - RE ou de outras maneiras;	DP – 4 TP – 5
c) Não foi possível identificar a estratégia utilizada na folha de reposta do estudante.	
Obs: Observamos que estes estudantes se encontravam inseridos em grupos colaborativos que realizaram a atividade, mas poucos transcreveram suas estratégias nas folhas respostas.	13

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Esta atividade foi realizada por 9 estudantes de grupos distintos. A quantidade de estudantes que fizeram a questão pode ter sido inferior às questões anteriores, por ter sido a última questão da atividade ou em função do tempo ter sido insuficiente.

Havia duas outras questões na sequência didática para que os estudantes optassem em fazê-las, caso estivessem motivados e o tempo fosse suficiente, no entanto, nossa atividade encerrava-se na questão de letra E.

As transcrições mostram que seis estudantes utilizaram o determinante e três utilizaram a fórmula do coeficiente angular, para encontrar a equação da reta que passa pela Reitoria e a Biblioteca Central da UnB. Na figura 26 vemos a estratégia utilizada por três desses estudantes, dois deles encontraram a equação com o uso do determinante e um com o uso do coeficiente angular, nota-se que as três equações correspondem à mesma reta.

Figura 26 - Equação da reta que passa pela Reitoria e Biblioteca

$$b = m = \frac{(x_1 - x_0)}{(y_1 - y_0)} = \frac{1}{5} = 0,2$$
 Inclinação positiva

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 5 = 0,2(x - 2)$$

$$y - 5 = 0,2x - 0,4$$

$$-y - 0,2x + 4,6 = 0$$

5) $x + y = -3$
 $-3x + 4y = -8$
 $2x - 5y = -15$
 $x + y = -2$
 -15
 $-2y$

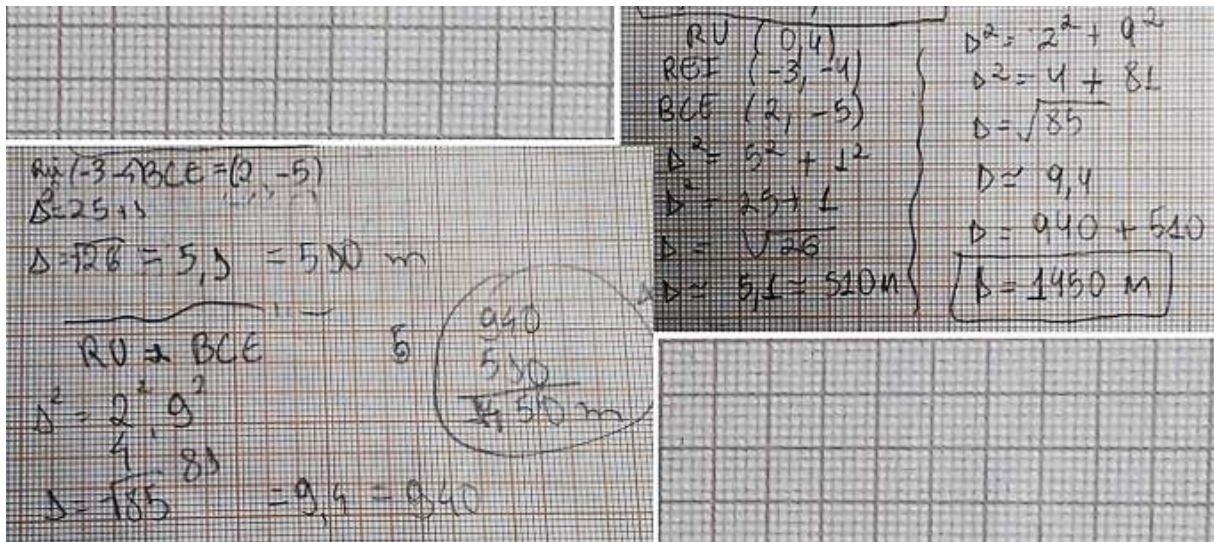
$$10 = -x - 5y - 23 = 0$$

Fonte: Acervo da autora (2017)

Observamos que os pequenos grupos colaborativos fizeram bastante diferença nesta atividade, pois os estudantes debateram bastante e aqueles que não sabiam, ou tinham dúvidas sobre as estratégias para encontrar a equação da reta, ficaram atentos às resoluções dos colegas. Como esta atividade ocorreu no final da 6ª aula em que os estudantes se encontravam inseridos nos mesmos grupos, consideramos que a familiaridade entre os estudantes contribuiu para o aprendizado, pois as perguntas, dúvidas e críticas passaram a fluir com mais naturalidade do que nas primeiras aulas.

Na figura 27, vemos duas resoluções distintas para o cálculo da distância percorrida por um estudante que está na Reitoria, passa na Biblioteca Central e se desloca até o Restaurante Universitário. Quatro estudantes utilizaram a fórmula da distância entre dois pontos e cinco utilizaram o Teorema de Pitágoras para calcular a distância entre as edificações. Esta atividade inseriu o grupo de estudantes em uma situação-problema em que deveriam calcular distâncias em caminhos encadeados e exigia um pouco mais de atenção na interpretação.

Figura 27 - Distância percorrida entre a Reitoria, a Biblioteca e o Restaurante Universitário



Fonte: Acervo da autora (2017)

As transcrições mostram que os estudantes fizeram a atividade de maneiras diferentes e utilizaram aproximações diversas. Observamos resultados entre 1400 metros até 1520 metros de distância, esta diferença está relacionada à estratégia usada, à forma de arredondamento, à quantidade de casas decimais nos cálculos, ao uso de calculadora e ao cálculo à mão livre.

F) Verifique se o Pavilhão Anísio Teixeira, o Restaurante Universitário e a Faculdade de Educação FE1 estão alinhados, se estiverem, obter a equação da reta que passa pelas edificações.

Quadro 21 - Recorrências de estratégias para verificar o alinhamento entre o PAT, a FE1 e o RU

Estratégias de soluções definidas a priori	Nº de alunos
a) Verificar se as edificações PAT, RU e FE1/UnB estão alinhadas visualmente e posteriormente compará-las utilizando-se de duas equações de retas que passam por duas das edificações distintas, e/ou calcular o determinante dos três pontos, correspondentes às edificações. Interpretar a situação-problema e decidir sobre o alinhamento dos pontos;	DT=3
b) Obter a equação da reta utilizando os conhecimentos matemáticos (determinantes; equação da reta dado dois pontos; equação da reta dado um ponto e o coeficiente angular; régua e conjecturas);	DT=2
c) Não fizeram a atividade.	
Obs: Esta atividade era opcional e constava na sequência didática como forma de desafio aos grupos que concluíssem as atividades anteriores e estivessem motivados a fazê-la.	19

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 28 - Alinhamento entre as edificações e a equação da reta – Estrela Alnitak

6) PAT (6,0)
RU (0,4)
FE₁ (-3,6)

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & +12 \\ -3 & 6 & -36 \\ 6 & 0 & 24 \\ & & 0 \\ & & 0 \end{vmatrix}$$

$24 + 12 - 36 = 0$
↳ Os pontos estão alinhados

$$\begin{vmatrix} x & y & -6y \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4x \\ x & y & 24 \\ & & 0 \\ & & 0 \end{vmatrix}$$

$$-4x - 6y + 24 = 0$$

$$-2x - 3y + 12 = 0$$

Fonte: Acervo da autora (2017)

A situação-problema F constava na sequência didática como uma atividade de desafio e foi realizada por 3 estudantes dentre os 22 participantes da pesquisa. A estratégia usada para a resolução desta atividade foi o uso do determinante que permitiu verificar se o PAT, o RU e a FE1 estavam alinhadas como também permitiu encontrarem a equação da reta que contém as edificações. A figura 28, registro da Estrela Alnitak e figura 29, registro da Estrela Betelgeuse, mostram a estratégia utilizada pelas duas meninas que fizeram a atividade, estas estudantes faziam parte de um mesmo pequeno grupo colaborativo.

Os estudantes que não realizaram esta atividade estavam ocupados realizando as questões anteriores. Durante todo o tempo disponível para a realização da sequência didática, os estudantes das turmas permaneceram atentos e envolvidos com a resolução das situações propostas, o que causou surpresa tanto nesta investigadora, quanto na professora Flor.

Figura 29 - Alinhamento entre as edificações e a equação da reta – Estrela Betelguese

6) PAT (6,0)
RU (0,4)
FE1 (-3,0)

$$\frac{y - 0}{x - 6} = \frac{4 - 0}{0 - 6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 6)$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 4$$

$$3y = -2x + 12$$

$$2x + 3y - 12 = 0$$

Useó calculado

Useó = $\frac{x}{1} = \frac{y}{24}$

$1 = \frac{y}{24}$
 $x = \frac{y}{24}$

$1 = \text{com}$
 $x = \text{braco}$

$$-4x - 6y + 24 = 0$$

Fonte: Acervo da autora (2017)

G) Se o estudante se encontra na FE1 e aspira participar dos editais de moradia e as políticas assistenciais da UnB, a que prédio deve se dirigir? Que distância mínima irá percorrer? Quais benefícios socioeconômicos são disponibilizados aos estudantes da UnB?

Quadro 22 - Recorrências de estratégias para calcular a distância entre a FE1 e a Reitoria da UnB

Estratégias de soluções definidas a priori	Nº de alunos
a) Rer ler os textos disponíveis sobre a UnB e discutir no pequeno grupo sobre a universidade. Relembrar o vídeo motivador e/ou consultar a internet, para enumerar os benefícios socioeconômicos disponibilizados pela UnB;	Observações no texto
b) Calcular a distância mínima que um estudante deverá percorrer até o prédio da Reitoria, com o uso dos conhecimentos matemáticos e/ou recursos disponíveis.	Teorema de Pitágoras - 2
c) Não fizeram a atividade.	
Obs: Esta atividade era opcional e constava na sequência didática como forma de desafios aos grupos que concluíssem as atividades anteriores e estivessem motivados.	21

Fonte: Elaborado pela autora

A situação-problema G foi realizada pelas mesmas duas meninas que responderam a questão anterior, componentes do mesmo pequeno grupo colaborativo. A atividade tinha nível de dificuldade fácil em relação aos cálculos, contudo, para chegar até esta questão, era necessário que os estudantes otimizassem o tempo de resoluções das questões anteriores.

A segunda parte da atividade colocaria os estudantes em discussão sobre as políticas assistenciais disponibilizadas pela UnB, que foram tratadas no início da aplicação da sequência didática, mas ficou prejudicada durante esta parte da experimentação. Desse modo, ao observarmos que o tempo destinado para a

resolução das questões da sessão 2 poderia ser insuficiente, tornou-se necessário retomar o planejamento das fases anteriores da Engenharia Didática, e assim, a temática foi trabalhada durante a segunda institucionalização do ensino, ocorrida após a segunda sessão da sequência didática

Figura 30 - Distância entre FE1 e Reitoria

4) FE1 (-3,6) → O estudante deve se dirigir à reitoria
 REI (-3,-4)
 $D^2 = 0^2 + 10^2$
 $D = \sqrt{100}$
 $D = 10 = 1000M$

Fonte: Acervo da autora (2017)

A figura 30 mostra a resolução apresentada por uma estudante, que utilizou a fórmula de distância entre dois pontos para calcular a distância entre a FE1 e a Reitoria. Verificamos também que a estudante deixa claro saber a que prédio deve se deslocar para solicitar os benefícios socioeconômicos disponibilizados pela Universidade de Brasília.

Esta última fase da engenharia apoiou-se nos dados construídos em campo durante a experimentação, nos manuscritos com as produções dos estudantes, nos protocolos observacionais do grupo colaborativo de trabalho e da investigadora; bem como em outros instrumentos externos à sala de aula, rodas de conversas, entrevista com a professora, os dados produzidos pelo aplicativo *plickers* e o questionário *online* com respostas dos estudantes.

Sobre o questionário, importa esclarecer que foi validado em dois momentos. O questionário destinado aos estudantes passou pelo pré-teste durante o estudo piloto, com população semelhante ao desta tese, bem como verificação questão a questão, por dois pesquisadores da área de educação. Em relação às rodas de conversas, a temática central era toda relacionada à situação didática, e a partir do rumo dos diálogos, novas provocações fomentaram o diálogo.

No caso desta engenharia didática, os dados construídos foram tratados, para que fosse possível realizar a confrontação entre a análise a *priori* e a análise a *posteriori*, com o objetivo de **validar** as estratégias levantadas no início da engenharia.

Durante a análise a *posteriori* apresentamos os **confrontos** existentes entre a análise a *priori* com suas variáveis didáticas e estratégicas previstas para as soluções das questões, com os registros escritos de representações e construções dos estudantes, referentes às atividades propostas tanto na 1ª sessão da experimentação, quanto na 2ª sessão, momento da aplicação do jogo – versão UnB 360 graus.

Diante das análises apresentadas, é possível verificar que os resultados deste estudo, desta engenharia didática, ocorreram de maneira satisfatória, potencializando a aprendizagem do estudo do ponto e da reta.

Portanto, com as quatro fases da engenharia didática concluídas, finalizamos a primeira etapa das **multitécnicas de análise de dados** desta tese. Desse modo, passamos agora para a Análise de Conteúdo, técnica inspirada nos preceitos de Bardin (2010).

CAPÍTULO 5 – A ANÁLISE DE CONTEÚDO E RESULTADOS

*“O correr da vida embrulha tudo.
A vida é assim: esquentada e esfria,
aperta e daí afrouxa,
sossega e depois desinquieta.
O que ela quer da gente é CORAGEM”.*

*Trecho da obra “Grande Sertão: Veredas”
(ROSA, Guimarães, 2001, p. 334)*

No capítulo 4 desta tese apresentamos dados construídos durante a investigação, interpretamos, analisamos e discutimos resultados, à luz dos fundamentos metodológicos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996). No entanto, importa esclarecer que para responder objetivos deste estudo referentes à interpretação da colaboração entre os estudantes, durante o desenvolvimento do projeto de engenharia didática, bem como suas percepções acerca do processo de aprendizagem do estudo do ponto e da reta, houve a necessidade de complementar as análises com outra técnica de tratamento de dados em pesquisas qualitativas.

Desse modo, optamos pela **análise de conteúdo**, inspirada na proposta de Bardin (2010), por considerarmos ser uma técnica adequada aos preceitos desta tese. A autora esclarece que a utilização da análise de conteúdo prevê três fases fundamentais: pré-análise; exploração do material e tratamento dos resultados, inferências e interpretação.

Na primeira fase, a pré-análise, escolhemos e organizamos os dados construídos para a constituição do *corpus* deste estudo. Para esta fase, selecionamos dados dos instrumentos “questionário *online* e rodas de conversas com os estudantes”, “entrevista com a professora” e relatórios resumidos do aplicativo *Plickers*.

Ao todo, foram organizadas 75 (setenta e cinco) páginas, depois realizamos a leitura flutuante dos documentos para conhecer e analisar os textos. Para a constituição do *corpus* da pesquisa, obedecemos às regras de exaustividade (esgotar a totalidade de comunicação, não omitir nenhum dado); à regra da representatividade (a amostra deve representar o universo investigado); à regra da homogeneidade (referir a uma única dimensão de análise); à regra de pertinência (adequação ao

quadro teórico definido no estudo) e à regra de exclusividade (cada elemento não deve ser classificado em mais de uma categoria de análise).

Na segunda fase, a exploração do material, definimos as unidades de codificação, que consistiu na seleção de regras para a frequência de aparições de uma unidade de registro no texto. E por fim, definimos as categorias, que são rubricas que reúnem um grupo de unidades de registro, momento em que se reuniu o maior número de informações, agrupamento efetuado em razão das características comuns destas unidades de registros. Nesta tese adotamos a categorização emergente-misto (FIORENTINI; LORENZATO, 2009), isto é, criadas a partir da teoria que compõe a tese.

Os títulos das categorias foram estabelecidos a partir das narrativas dos sujeitos da pesquisa, seguindo sugestão de Hoffman-Câmara (2013). A definição das categorias baseou-se nas verbalizações dos sujeitos, com um certo refinamento gramatical de forma. Ressalta-se que no processo de construção das categorias, procuramos preservar as falas na íntegra.

Na terceira fase do processo de análise de conteúdo, realizamos o tratamento dos dados, inferimos e interpretamos. Durante esta fase houve a necessidade de voltar atentamente aos referências teóricos pertinentes à investigação, afinal, a relação entre os dados obtidos e a fundamentação teórica, dão sentido à interpretação (HOFFMAN-CÂMARA, 2013). O ato de interpretar que leva às inferências, ocorreu no sentido de extrair o verdadeiro significado dos discursos.

5.1 - AS PERCEPÇÕES DOS SUJEITOS DA PESQUISA: análise de conteúdo.

Ao final do desenvolvimento do projeto de engenharia didática, colocamos em ação instrumentos de construção de dados, que oportunizassem verificar as percepções dos sujeitos acerca da experiência vivenciada nas aulas de matemática. Desse modo, durante a roda de conversa, os estudantes foram instigados a falar sobre a realização da atividade nas aulas de matemática em grupo colaborativo, se a atividade em grupo oportunizou aprender conceitos do estudo do ponto e da reta e outros questionamentos que oportunizassem aos estudantes, avaliar a atividade didática, suas limitações, potencialidades, críticas, sugestões, opiniões.

No início, organizamos os resultados manualmente, utilizando marcadores coloridos em palavras que apareciam com maior frequência nas falas dos 22 (vinte e

dois) estudantes e, assim, codificamos as respostas em categorias temáticas. O número que acompanha a categoria refere-se ao quantitativo de estudantes em que as categorias foram encontradas em suas narrativas: a) Aprendizagem dos conteúdos relacionados ao estudo do ponto e da reta (18); b) Colaboração entre os estudantes (18); c) Autonomia intelectual dos estudantes (17); d) Dimensões de ludicidade (16); e) Socialização dos estudantes (15); f) Liberdade de estudantes (12). Em paralelo, utilizamos o *WordART* (<https://wordart.com>), um programa *online* que cria nuvens de palavras, confirmando visualmente que as palavras que tiveram mais destaques, representam as unidades centrais da categorização manual (aprendizagem, colaboração, autonomia, ludicidade, socialização e liberdade). É importante ressaltar que em alguns momentos de interpretação e inferência categorial, os dados construídos a partir da entrevista com a Professora Flor, foram considerados para realizar um comparativo entre as percepções dos sujeitos estudantes e da professora investigada.

Para além dessas possibilidades interpretativas, foram identificadas outras categorias que extrapolam os limites teóricos desta tese, dentre elas, as questões socioemocionais em sala de aula que possam interferir, positiva ou negativamente nas aulas de matemática; críticas em relação ao sistema de ensino público do Distrito Federal e as representações sociais de professores e estudantes em relação às aulas de matemática no ensino médio.

Além disso, no processo de categorização, concluímos que a “interação dialógica” não poderia ser uma categoria específica, porque ela permeia todas as outras categorias. Corroboramos com Bakhtin (2010) ao considerar o diálogo como toda comunicação verbal, de todos os tipos; e o diálogo interacional, como um espaço no qual embates podem ser acolhidos, repensados, de maneira a contribuir com o entendimento acerca da realidade social.

A seguir, passamos a leitura mais detalhada das categorias temáticas. Os quadros apresentam a categoria específica e a ocorrência, que no caso deste estudo, refere-se à quantidade de sujeitos em que as categorias foram encontradas com maior recorrências em suas verbalizações. Os quadros também apresentam as verbalizações das percepções dos sujeitos da pesquisa acerca da situação didática.

Quadro 23 - Categoria Aprendizagem dos conteúdos

Categoria: Aprendizagem dos conteúdos relacionados ao estudo do ponto e da reta
Ocorrências: 18 estudantes
Estrelas: Acrux, Adhara, Aldebaran, Arturo, Bellatrix, Capella, Electra, Hadar, Kraz, Mimosa, Mintaka, Polar, Regulus, Rigel, Sirius, Sol, Spica e Veja
Definição
A categoria aprendizagem se caracteriza pela apropriação dos conceitos de ponto e reta, a partir da aplicação desses conceitos focada na realidade social dos estudantes. É a ação de conseguir resolver situações-problema e questões, de conseguir entender e solucionar os problemas do cotidiano, dentro e fora dos muros da escola, e de superar as dificuldades que possam surgir, para alcançar o objetivo de propor uma solução válida para as situações-problema propostas.
Verbalizações dos sujeitos
<p><i>“Tinham sim, muitas pessoas com dificuldades e que no desenrolar da atividade já não tinham mais dúvidas” (Estrela VEGA);</i></p> <p><i>“O trabalho veio muito para a minha vida, consegui desenvolver a Matemática” (Estrela KRAZ);</i></p> <p><i>“Eu entendi e consegui fazer questões da atividade que eu não estava entendendo, daí hoje eu fiz a prova inteira de Matemática e poxa, foi maior fácil, eu vi que eu aprendi as paradas” (Estrela ALDEBARAN);</i></p> <p><i>“Eu estava aprendendo Matemática de verdade, mas estava aprendendo de uma maneira leve, aprender sem aquela pressão, sem obrigação de nota” (Estrela SIRIUS);</i></p> <p><i>“E eu aprendi o que é reta, semirreta, acertei na prova. Além de ser divertido, ser diferente, eu ainda aprendi para a fazer a prova” (Estrela RIGEL);</i></p> <p><i>“Depois que eu fiz a atividade do mapeamento, eu tive a oportunidade de ir à UnB, e realmente você lembra do mapa na sua cabeça, você olha o ICC e sabe que o RU é pra lá, então realmente na sua mente está o mapa, e é muito interessante mesmo” (Estrela SOL);</i></p> <p><i>“A gente podia usar Pitágoras, isso é real, é a Matemática da vida real, é tipo uma coisa que eu posso fazer, pra mim foi uma coisa muito importante porque eu consegui fazer as conexões” (Estrela POLAR);</i></p> <p><i>“Esse tipo de trabalho colaborativo facilitou a nossa aprendizagem” (Estrela ELECTRA);</i></p> <p><i>“No jogo a gente está se divertindo, descontraindo e revisando os conteúdos, vamos aprendendo muito mais” (Estrela SOL);</i></p> <p><i>“Eu aprendi muito, foi muito legal, eu consegui aprender de verdade, então consegui responder a prova, eu respondi toda a prova, todas as questões, uma prova que eu deixaria em branco se não tivesse uma atividade assim” (Estrela ELECTRA);</i></p> <p><i>“Eu não sabia fazer essas coisas, tipo, eu não sabia fazer determinantes e eu aprendi no meu grupo. Nessa atividade eu realmente consegui aprender e fiquei até orgulhosa comigo mesma por ter aprendido” (Estrela HADAR);</i></p> <p><i>“Que a gente não sabe o que é uma função, [...] a gente não sabe o que é uma reta direito. Assim, desse jeito (na atividade), a gente consegue entender muito melhor porque está aplicado em uma realidade que a gente consegue entender e ver” (Estrela ACRUX).</i></p>

Fonte: Elaborado pela autora da tese (2019).

O quadro 23 apresenta a categoria que indica as percepções dos estudantes acerca da aprendizagem do estudo do ponto e da reta. Mostra que os estudantes, de modo geral, conseguiram superar dificuldades iniciais e solucionaram as situações-problema em sua totalidade. Durante a roda de conversa, os estudantes mencionaram que a atividade em grupo colaborativo, contribuiu para melhorar o resultado na prova bimestral de Matemática. Corroborando com as percepções dos estudantes, a Professora Flor mencionou na entrevista que *“muitos alunos melhoraram bastante no quarto bimestre. Achei a nota da prova do 4º bimestre muito melhor. Assim, alguns alunos que não tiveram rendimento nos outros bimestres, não conseguiram gabaritar a prova, mas conseguiram desenvolver muitas questões, eles conseguiram chegar no 50%, no 60%. E muitos alunos tiraram notas excelentes. Eu vi avanço, a nota da prova do 4º bimestre foi bem melhor, e o que eu achei legal é que, o aluno que tinha dificuldade conseguiu avançar”*.

Ainda convém ressaltar, no desempenho dos estudantes na prova bimestral, 86,37% dos sujeitos da pesquisa tiveram desempenho superior ao resultado do bimestre anterior. Dentre os estudantes que melhoraram a nota bimestral, 10 tiveram rendimento melhor entre 20% e 30% do que no bimestre anterior.

Dentre as melhores notas dos 22 participantes deste estudo, há o registro de 5 notas bimestrais entre 9 e 10 pontos, sendo que todas as 5 notas são de estudantes do gênero feminino. Levando-se em conta o observado, a fala da Professora Flor, bem como as percepções dos estudantes, acreditamos que a realização da atividade em grupo, em que há a estimulação da interação dialógica entre os sujeitos, favoreceu a aprendizagem. Para alguns sujeitos da pesquisa, esta melhora não decorreu em função do conteúdo trabalhado, *“o clima de sala mudou, eu vi em alguns grupos que, tinham várias pessoas que não sabiam muito Matemática, mas eles se ajudaram, conversavam sobre as questões e juntos conseguiram fazer a atividade. Vi muitas mobilizações assim na nossa turma”* (Estrela SOL). Outros mencionaram que houve aprendizagem em função da atividade em grupo, *“ontem saímos da escola comentando sobre as várias provas, e pela primeira vez no ano não comentamos sobre a prova de Matemática, foi tranquilo, foi uma prova que nem nos preocupamos muito, porque aprendemos a matéria com a atividade em grupo”* (Estrela ELECTRA).

Para além dos resultados trazidos por aumento de pontos nas atividades avaliativas, Estrela Mimosa descreveu a experiência do jogo tapete cartesiano como *“muita boa, teria evitado muitas angústias nas aulas de matemática, se fosse uma atividade que acontecesse desde o 1º ano do Ensino Médio ou nas séries finais do ensino fundamental”*.

Outros estudantes destacaram a relevância da aprendizagem conquistada durante a atividade, com a vida fora da escola. “Agora fora da escola, reconheço a matemática em tudo” (Estrela RIGEL); “o conteúdo me auxiliou no vestibular, fui aprovada na UnB” (Estrela ELECTRA); e outros estudantes mencionaram que além do seu próprio aprendizado, eles desenvolveram habilidades de ajuda mútua e de projeto de vida (BRASIL, 2018), “aprendi algumas coisas sobre como ensinar e como abordar pessoas que necessitam de ajuda em matemática” (Estrela ACRUX), “em mim a atividade desenvolveu habilidades educativas de poder vivenciar a experiência de ensinar, como eu estou planejando ser professor, a experiência de ensinar foi muito importante” (Estrela VEGA).

Assim, concordamos que, para tornar o conhecimento matemático acessível ao estudante, torna-se necessário promover situações de aprendizagens em sala de aula (BROUSSEAU, 2008b), criando cenários que oportunizem aos estudantes construir conhecimentos. O estudante precisa se sentir desafiado, e a utilização de sequências didáticas contextualizadas contribui para isso, favorecendo as aprendizagens matemáticas.

Quadro 24 - Categoria Colaboração

Categoria: Colaboração entre os estudantes
Ocorrências: 18 estudantes
Estrelas: Acrux, Adhara, Aldebaran, Alnilam, Alnitak, Antares, Bellatrix, Betelgeuse, Electra, Hadar, Kraz, Mimososa, Polar, Rigel, Regulus, Sirius, Sol e Vega.
Definição
A categoria “Colaboração entre os estudantes” caracteriza-se por um conjunto de ações que refletem: ajuda, colaboração, compartilhamento, trocas, pensar no outro, repassar conhecimento, lembrar, construir colaborativamente, otimizar o tempo, empatia e segurança. A colaboração é definida, portanto, como uma maneira de ajuda e compartilhamento de ideias, proporcionando segurança na solução de problemas; otimização do tempo necessário para alcançar o objetivo; construção do conhecimento, respeitando o tempo e as necessidade de cada componente do pequeno grupo colaborativo. O ato de lembrar juntos, discutir, conjecturar e convencer os colegas sem o medo de errar e de maneira que seja apresentado um vasto repertório de soluções para uma mesma situação-problema.
Verbalizações
<p>“No meu grupo, não lembrávamos de uma determinada fórmula. Aí, um colega de um outro grupo lembrou e compartilhou com os demais grupos. Ajudou bastante” (Estrela MIMOSA);</p> <p>“Quando nós terminamos, fomos ajudar os outros grupos, foi legal, principalmente, porque vimos que os outros grupos fizeram de maneiras diferentes” (Estrela ALNITAK);</p> <p>“Às vezes uma pessoa tem facilidade para fazer... pensar um certo ponto da atividade, já outra pessoa tem facilidade de fazer outro ponto da atividade. Aí os dois se juntam e conseguem fazer tudo. Fica bem mais fácil” (Estrela VEGA);</p>

“ Fizemos um intercâmbio de conhecimentos para realizar a atividade juntos. Não só para isso, mas a gente verificava, observava os erros uns dos outros e se ajudava. Assim, a gente economizava muito mais tempo ” (Estrela ACRUX);

“ O mais bacana assim em grupo é essa troca, essa interação, que na maioria das vezes não acontece com a professora, que fica lutando para ensinar a matéria e nós lutando para entender...e com a ajuda dos colegas fica bem mais fácil ” (Estrela KRAZ);

“ Agi mais pensando no outro, por vezes eu esqueci de mim para pensar no colega ” (Estrela ADHARA);

“ Eu sou muito observador, eu vi as pessoas se ajudando, vi as pessoas querendo fazer toda a atividade e chegar até o final do desafio. Os grupos estavam se ajudando, colaborando, todos conseguindo fazer a atividade ” (Estrela SIRIUS).

“ Eu comecei fazer aquela atividade e conseguia achar os prédios, eu falava “ eu achei ”, achei a resposta certa. E olha, eu quero ser professor de Física e para mim, o trabalho em grupo foi meio que um teste, um teste para perceber se eu consigo aquilo, repassar aquilo que sei para as outras pessoas ” (Estrela VEGA);

“ Eu não sabia uma questão e saí do meu grupo para pedir ajudar no grupo da GB. A GB também não sabia, mas a gente conversando sobre a questão, a gente lembrou, lembramos juntas durante a conversa ” (Estrela MIMOSA);

“ A atividade toda foi de colaboração [...] com o professor não temos muita intimidade e com o colega já temos intimidade, então é mais fácil chegar e falar pois a gente é da mesma idade, a gente tem facilidade de falar, falamos a mesma língua ” (Estrela VEGA);

“ No começo a gente não sabia o que fazer, mas quando a gente viu, estava um ajudando o outro, dentro do grupo e fora do grupo ” (Estrela ELECTRA)

“ A linguagem do colega é mais simples e os demais entendem, assimilam mais rápido ” (Estrela SOL);

“ Acho se tivesse um professor, eu não ia entender igual minha colega me explicou. Então eu achei que iria demorar e que a gente não ia conseguir fazer, [...], mas quase conseguimos fazer tudo em uma aula só ” (Estrela HADAR);

“ Não sei onde você viu isso legal, aí eu disse “oxi, isso é legal sim”, daí eu falei pra minha amiga: é você que não sabe fazer. Mas daí eu fiquei ajudando e ela foi achando legal, então eu entendi que ela não achava legal porque não sabia, então ela viu que aquela atividade não era entediante ” (Estrela POLAR);

“ Às vezes um tem mais facilidade ou faz de uma maneira diferente da sua, mais fácil do que a sua e aí ele te apresenta essa possibilidade e a gente aprende e passa para outros colegas e eles também aprendem de maneira diferente, daí depois desse movimento muitos fizeram a atividade de maneira diferente ” (Estrela BELLATRIX);

“ Tinha uma questão que ninguém do nosso grupo estava conseguindo resolver, daí veio um colega que era do outro grupo e nos ensinou de maneira muito fácil ” (Estrela POLAR);

“Sozinhos? Muitos não teriam feito, muitos fizeram por incentivo dos colegas” (Estrela ELECTRA);

“A gente pode conversar com os colegas, pode ajudar o colega, o objetivo comum da turma era que todos conseguissem fazer” (Estrela HADAR);

“Eu comecei com muito medo de não conseguir fazer nada, mas em grupo eu fui relaxando, interagindo com os colegas, fui aprendendo e até ensinando. Eu gostei muito mesmo e a turma também gostou” (Estrela ELECTRA);

“Essa atividade é totalmente colaborativa, nós fizemos porque sentimos vontade de fazer e ficamos felizes” (Estrela SOL).

Fonte: Elaborado pela autora da tese (2019)

O quadro 24 traz a categoria colaboração, que teve ocorrência similar à categoria aprendizagem. Nas respostas do questionário *online*, a categoria “colaboração entre os estudantes” surgiu como destaque e essencial para a construção do conhecimento, observando a necessidade de respeitar o tempo e as necessidades dos demais colegas do pequeno grupo colaborativo. Alguns estudantes relataram que se a atividade não fosse em grupo, muitos não teriam ao menos iniciado. Outros destacaram que compartilhar ideias com os colegas, teve mais efeitos em sua aprendizagem e nas resoluções das situações-problema, do que as aulas expositivas tradicionais (*“depois desse jogo em grupo, as aulas normais passaram a ser mais chatas do que normalmente são”, Estrela ADHARA*).

No início da experimentação didática, o nosso receio era que os estudantes não aceitassem fazer o trabalho em grupo, contudo, em todas as salas, o comprometimento com a ação educativa aconteceu, todos os grupos aceitaram o desafio e foram até o fim, inclusive aqueles que no início temiam ser uma atividade entediante. Sobre o fato, a Professora Flor disse acreditar que os estudantes aprenderam muito mais em grupo:

“Eles ficaram muito mais concentrados, tanto que quando você entrava na sala, via que eles logo se sentavam nos grupos e já queriam iniciar logo a atividade, os alunos trabalhavam em grupo, não havia conversa paralela, os estudantes estavam envolvidos com a atividade, os estudantes não estavam dispersos com celular como sempre eles ficam. Às vezes eu estou explicando no quadro e eles começam a fazer brincadeiras e isso dispersa a turma, mas durante os dias que você esteve na sala não teve isso, estavam todo mundo trabalhando, até mesmo os que não precisavam de nota para aprovação” (Professora FLOR).

Entretanto, ao professor não basta apenas inserir os estudantes em grupos de maneira desordenada, deve-se criar situações que privilegiem interações dialógicas e cenários de aprendizagens, a oportunizar ao aluno desenvolver suas habilidades sociais e cognitivas, de maneira criativa (TORRES; IRALA, 2012).

Nas narrativas dos estudantes, destacaram-se observações gerais acerca da experimentação didática em toda a turma, *“o jogo desenvolveu uma interação da turma em geral, noção de trabalho em equipe e aprendizagem colaborativa, como também propiciou um conhecimento maior sobre a Universidade de Brasília” (Estrela SOL).*

Em nenhuma sala falamos sobre “liderança” nos grupos. Seguindo os preceitos teóricos da aprendizagem colaborativa, em pequenos grupos colaborativos não deve haver líderes (DAMIANI, 2008; FIORENTINI, 2010). Sendo assim, era relevante a este estudo, saber como os grupos agiram, se tinham ou não líder. Ao responder o questionamento “houve alguma definição de liderança no seu grupo? Surgiu algum líder?”, 72,7% dos estudantes responderam que em seu grupo não havia um líder, todos eram líderes, porque responderam todas situações-problema em grupo, *“todos se tornaram líderes, todos contribuíram para a realização da atividade, todos deram ideia e chegávamos em uma conclusão para fazer a atividade” (Estrela ARTURO);* 18,2% disseram que o grupo definiu quem seria líder e 9,1% relataram que teve líder somente para controlar o tempo de realização da atividade, em todas as demais ações, todos tinham *“o mesmo espaço de fala e trabalhavam juntos” (Estrela ADHARA).*

Desse modo, consideramos que os estudantes compreenderam, sem a necessidade de explicação, que na colaboração as relações tendem a ser não hierárquicas, a liderança deve ser compartilhada e deve haver corresponsabilidade pela condução das ações (FIORENTINI, 2010).

Por fim, consideramos que a categoria “colaboração entre os estudantes”, atende a preceitos da BNCC (BRASIL, 2018), ao trazer que dentre as competências específicas de matemática, o componente curricular deve garantir aos estudantes, a promoção da aprendizagem colaborativa, desenvolvendo neles capacidade de trabalhar em equipe e aprender com seus pares.

Quadro 25 - Categoria Autonomia intelectual

Categoria: Autonomia intelectual dos estudantes
Ocorrências: 17 estudantes
Estrelas: Acrux, Adhara, Aldebaran, Alnilam, Alnitak, Antares, Bellatrix, Beltelguese, Electra, Hadar, Kraz, Mimosa, Mintaka, Polar, Rigel, Sirius e Sol.
Definição
A categoria “ <i>autonomia intelectual dos estudantes</i> ” é definida pelos participantes da investigação, como uma forma de pensar original, diferente, que decorre da decisão de fazer de seu próprio jeito, no seu tempo, da forma que melhor convier para o estudante. Remete à segurança e autoestima, à tomada de decisões, ao executar a ação com as próprias “ferramentas didáticas”, objetivando produzir uma diversidade de soluções ou maneiras diferentes de interpretar, ver, e solucionar problemas.
Verbalizações dos sujeitos
<p><i>“Cada um começou a marcar o plano cartesiano de maneira diferente” (Estrela ADHARA);</i></p> <p><i>“Uma coisa que nós percebemos é que fazemos de maneiras diferentes, pensamos diferentes, não fazemos com a mesma fórmula” (Estrela SIRIUS);</i></p> <p><i>“Fizemos as questões de vários modos diferentes, respondemos as questões de maneiras diferentes, mas todas estavam certas” (Estrela ALNILAM);</i></p> <p><i>“Eu estudo e aprendo mais sozinha, mas nessa atividade em grupo eu aprendi que posso compartilhar o que eu sei e também ver como os colegas fazem e aprender outros modos de responder uma mesma questão” (Estrela BETELGUESE);</i></p> <p><i>“O que a gente viu em comum nos grupos e todo mundo falou, é que existiam várias formas diferentes de chegar a um mesmo resultado, a gente aprendia, fazia de várias formas diferentes e chegava a um resultado certo” (Estrela SIRIUS);</i></p> <p><i>“Aluno cria essa cultura desde a pré-escola, ele coloca toda a confiança no professor, o aluno diz: eu não sei, mas meu professor sabe, é só perguntar para ele, nesta atividade nós tínhamos autonomia” (Estrela MIMOSA);</i></p> <p><i>“Ela conseguiu vê, ela aprendeu e é bem como se diz - ela se sentiu empoderada porque conseguiu fazer - Sabe, a questão é que a gente está tão acostumado a ouvir que está errado, tá errado, a colega até falou em liberdade e nessa atividade a gente teve uma liberdade de falar, de errar, de recomeçar e de não ser julgado” (Estrela SIRIUS);</i></p> <p><i>“Eu aproveitei aquele papel milimetrado, que é uma escala, e marquei na caneta, eu numerei a caneta e fiz uma régua” (Estrela SIRIUS);</i></p> <p><i>“Entendi que vocês deixavam essa decisão para gente, e aí a gente pensa em coisas que a gente talvez antes não pensaria [...] fez com que a gente desenvolvesse mais uma segurança, independência de dizer: - eu vou fazer desse jeito, e eu decidi fazer desse jeito - tipo, eu me senti mais livre” (Estrela POLAR);</i></p> <p><i>“A gente sempre vê o aprendizado como uma linha reta e nós somos muito diferentes, tipo, a gente tem uma maneira de aprender diferente. Então quando a gente teve autonomia de ver e falar assim: ah, eu posso fazer isso aqui da minha forma, foi muito incrível! [...] Quando a gente tem esse espaço,</i></p>

esse momento, de poder fazer, de olhar e fazer, a gente ter a liberdade de aprender da nossa maneira, é muito melhor, é muito legal' (Estrela ELECTRA);

'Você entende a situação, sabe como fazer e vê que cada um tem o seu caminho diferente, seu jeito próprio de chegar na solução [...] Vocês fizeram a gente exercitar, não o jeito de fazer, mas como nós estávamos procurando livremente o nosso jeito de responder, de saber lidar com o problema' (Estrela ACRUX);

"Não dava sono, não teve ninguém dormindo, porque tipo, a gente pode interagir, a gente pode fazer as coisas, a gente tinha autonomia, era nós fazendo, não era o professor lá fazendo" (Estrela ELECTRA);

"A aula também tem que ser pensada para o aluno e não só para o professor [...]no nosso grupo a gente começou a conversar, porque lá nas questões tinha o auditório "Dois Candangos", aí a gente ficou perguntando por que seria Dois Candangos. Depois que a senhora contou, veio à mente a possibilidade de misturar outros conteúdos na atividade, além da Matemática, dá para mistura com a História. Por que esse prédio foi construído? Por que a UnB foi construída? Em que período da história do Brasil a UnB foi construída? Então dá para pensar nisso. Nessa atividade, se usar a criatividade dá para usar muitas coisas. Dá para usar Sociologia, é porque a senhora falou sobre as cotas sociais da UnB, então dá para debater por que as cotas são importantes, por exemplo" (Estrela SOL).

Fonte: Elaborado pela autora da tese (2019)

A categoria autonomia intelectual apresentada no quadro 25, revelou que os estudantes compreenderam que eles tinham domínio da situação didática e assim, aproveitaram o momento para conhecer e expor diversas maneiras de solucionar uma mesma questão. Para o estudante, a atividade oportunizou (re)descobrir que havia várias formas de responder as questões, que não havia a necessidade de ficar preso a fórmulas, que o importante era entender e principalmente mapear a UnB.

"Aqui nós éramos os agentes ativos da ação, conforme a gente ia aprendendo, ia ensinando, dominando um assunto, nos sentimos donos da ação, nos sentimos confortáveis, no controle da situação. Era uma coisa que sabíamos, mas só não sabíamos que sabíamos o assunto" (Estrela ACRUX).

Este projeto de engenharia didática oportunizou ao estudante ver a matemática de outra maneira e perceber que os colegas também passaram a ter outras representações. A matemática deixa de ser chata e passa a ser possível, *"a atividade tornou a aula menos monótona e democratizou a aprendizagem, foi incrível perceber como um mesmo problema tinha várias formas de resoluções" (Estrela ELECTRA).* Ainda tiveram aqueles estudantes que destacaram como vantagens da experiência, serem indagados *"a pensar fora da mente do professor, podendo ter ótimos resultados para além do que já foi proposto" (Estrela ADHARA),* ou *"quebrar o mito estudantil de que na matemática, só existe uma forma de resolver as coisas, no jogo criamos diversas soluções para*

uma mesma questão” (Estrela SIRIUS) e até mesmo alegrar-se ao confirmar que “para mapear a UnB, existiam diversidades de soluções para cada um dos problemas propostos, fiz de várias maneiras e todas estavam corretas” (Estrela BETELGEUSE). Dessa forma, identificamos também características da fluência e da flexibilidade nas ações estudantis, habilidades do pensamento criativo (GONTIJO, 2010).

Decerto, ao remeter à categoria “autonomia intelectual”, elementos como autoestima e segurança andam juntos à interação dialógica entre os estudantes, que pode ser considerada como fator favorável à aprendizagem e ao desenvolvimento do raciocínio, por oportunizar trocas de pontos de vistas e apresentação de suas próprias ideias. Contudo, é preciso estimular os estudantes *“a abrir a caixinha da matemática, os estudantes têm na mente as caixinhas compartimentadas e com estímulo eles conseguem abrir a caixinha da Matemática e tirar lá de dentro o que eles sabem” (Professora FLOR).*

Portanto, objetivos da educação matemática se conectam a esta categoria, compreendendo que em sala de aula, é importante contribuir para que o estudante seja capaz de desenvolver uma certa autonomia intelectual e que o saber escolar aprendido lhe proporciona condições para compreender e atuar no mundo em que se vive (PAIS, 2001).

Quadro 26 - Categoria Dimensões de ludicidade

Categoria: Dimensões de ludicidade
Ocorrências: 16 estudantes
Estrelas: Acrux, Adhara, Alnitak, Antares, Bellatrix, Betelgeuse, Capella, Electra, Hadar, Mimososa, Mintaka, Polar, Rigel, Sirius, Sol e Veja
Definição
A categoria “dimensões de ludicidade” refere-se à caracterização assumida pela atividade descrita como um jogo ou uma brincadeira, empolgante, prazerosa, diferente, desafiante, nostálgica de aprender Matemática, em uma atividade planejada para a comunidade em que a escola se insere, de forma a instigar os sonhos acadêmicos dos estudantes e desenvolver habilidades com um tema motivador, interdisciplinar e social, que não dava sono e tampouco se via o tempo passar. Não era uma competição, a atividade promovia a interação entre os estudantes e proporcionava a intencionalidade voluntária e prazerosa em participar.
Verbalizações dos sujeitos
<i>“Passou muito rápido, eu pensei que seria algo trabalhoso, chato como geralmente os trabalhos são, mas não foi, foi supertranquilo” (Estrela RIGEL);</i>
<i>“No grupo a gente interagiu, a atividade promoveu essa possibilidade de interagir socialmente e realmente foi muito legal” (Estrela ELECTRA);</i>
<i>“A gente se interessou porque essa atividade tinha uma proposta diferente, era dinâmico e a gente queria fazer” (Estrela ELECTRA);</i>

“Foi muito interessante e muito divertido. Na nossa sala o povo ficou empolgado” (Estrela POLAR);

“Quando a gente pode pegar o material, pegar as pecinhas e fazer, a gente teve mais facilidade de elaborar mesmo, de pensar, fazer e elaborar as questões. Foi muito bom” (Estrela BELLATRIX);

“Essa atividade tinha um roteiro, que são as questões que a gente tinha que resolver e eram os desafios, até a gente chegar no fim do jogo e vencer, quando a gente tinha que ter feito a atividade toda” (Estrela BELLATRIX);

“Esta atividade era muito diferente, não dava sono, era algo diferente, porque normalmente a matemática é só passar fórmulas e pronto. Com essa atividade era muito mais gostoso fazer as questões, olha dava para medir com metro, sinceramente não dava sono porque era interessante e era muito bom para fazer, perdemos até o horário pois a professora teve que nos avisar que era 12h15, a hora de ir embora e nós nem percebemos” (Estrela POLAR);

“A gente fazia brincando, mas a atividade parecia uma brincadeira, parecia batalha naval” (Estrela SIRIUS);

“Para mim foi bem legal, porque a atividade me lembrou o ensino fundamental, as séries iniciais que a gente usava aquelas tirinhas, aqueles blocos e montava as dezenas, as centenas, ia montando e contando e eu adorava aquelas aulas, me lembrou daquelas atividades e para mim foi um momento nostalgia e foi bem divertido” (Estrela MIMOSA);

“Eu brinquei o tempo todo e isso fez muita diferença, não aprender por obrigação, aprender por prazer” (Estrela ADHARA);

“Nossa sala não é muito assídua, a galera quase não aparece nas aulas de Matemática, principalmente quando é a última. Sei lá, acho que umas 10 pessoas sumiram das aulas, mas nessa atividade a turma estava lotada, o povo sumido apareceu” (Estrela RIGEL);

“A gente falou para os colegas: “ow, tem uns malucos na sala, tá massa!” aí a galera apareceu e as aulas ficaram lotadas” (Estrela MINTAKA);

“A galera gritava na sala: apareceu o meu número da plaquinha, como ela fez isso? Foi mágica?” (Estrela VEGA).

Fonte: Elaborado pela autora da tese (2019)

O perceptível na categoria “dimensões de ludicidade”, apresentada no quadro 26, é que toda a experimentação chamou a atenção positiva dos estudantes. O vídeo da UnB, a 1ª sessão da engenharia com as sequências didáticas, o uso do *Plickers*, as situações-problema do jogo tapete cartesiano UnB 360 graus, foram citados pelos estudantes como atividades diferenciadas, prazerosas, estimulantes.

Segundo Estrela Rigel, “a atividade trabalha com a nossa capacidade de resolução de exercícios estimulando a criatividade. É como um jogo, as partes que a atividade foi dividida são as fases do jogo, cada passo, nos levou a um nível maior, atribuindo conhecimento até conseguimos concluir a atividade, “zerando” o jogo. Isso foi muito legal”.

O uso do aplicativo *Plickers* causou alvoroço nas sete turmas, a novidade tecnológica foi um elemento que ampliou o interesse dos estudantes pela experimentação didática. *“A experiência foi distinta de todas as outras que já vivenciei em relação à matemática, foi completamente inovadora e estimulante [...] e o uso de materiais diversificados e da tecnologia me proporcionou maior interesse”* (Estrela BETELGEUSE).

Em nenhum momento mencionamos a palavra “jogo” nas salas, falamos apenas o nome “tapete cartesiano”. Contudo, desde o início da atividade, os estudantes consideraram a atividade como um jogo. Para eles, *“chegar no final do jogo dá um prazer, tipo, eu venci, montamos tudo, resolvemos questões que eu não saberia nem como começava se não fosse em grupo [...] essa atividade foi diferente, a gente se divertiu e não teve competição”* (Estrela HADAR).

No entanto, é importante o professor reconhecer, que o uso de jogos nas aulas de Matemática, é um suporte metodológico adequado a todos os níveis de ensino, desde que os seus objetivos fiquem claros, que apresentem desafios e estejam adequados ao nível de aprendizagem dos estudantes (GRANDO, 2004).

Entretanto, identificamos outros fenômenos em sala de aula, que podem sinalizar o prazer dos estudantes em realizar a atividade. A partir do segundo dia em campo, notamos que as salas estavam mais cheias, os sujeitos deste estudo inclusive relataram que colegas que haviam deixado de ir à escola, estavam assistindo às aulas de matemática. A própria professora de matemática notou o retorno de estudantes que não tinham mais interesse em assistir às aulas porque, ou já tinham nota para aprovação, ou não acreditavam que seriam aprovados.

A Professora Flor relatou que considerou as turmas mais cheia sim, inclusive até o estudante LG, que não queria mais assistir suas aulas, porque tiveram um atrito no terceiro bimestre, assistiu a todas as aulas da experimentação, *“e vou te falar, eu sinceramente achava que LG iria reprovar, mas para a minha surpresa, ele foi aprovado em Matemática”* (Professora FLOR). O rendimento do estudante LG em matemática no 2º e no 3º bimestre era abaixo da média. O estudante no 2º bimestre tinha média 2,30 pontos, no 3º bimestre 3,70 pontos e no 4º bimestre realmente houve avanço considerável ao atingir 7,40 pontos e a aprovação em Matemática. A motivação do estudante LG para a realização da atividade, mostra uma importante perspectiva de associação entre a situação didática, o jogo e a Matemática (MUNIZ, 2010).

Outra constatação acerca das dimensões de ludicidade, refere-se à utilização dos materiais concretos, *“com os materiais fica mais palpável, a gente realmente enxergou*

todo o caminho e todos os prédios, e isso foi muito bom porque não precisamos ficar montando na nossa cabeça pra resolver as questões, pegamos da nossa imaginação de como era e transferimos para o papel. Vencemos! (Estrela MIMOSA). Além do tapete cartesiano e das pecinhas em madeira que representavam os prédios da UnB, a folha quadriculada foi mencionada por vários sujeitos desta pesquisa, como *“materiais que nos traz a sensação de estar mais perto da realidade. Você tira da mente para o papel. Isso dá uma visualização mais fácil para nosso entendimento” (Estrela POLAR).*

Desse modo, esta investigação proporcionou aos estudantes utilizar diferentes recursos didáticos e materiais (jogos, folha quadriculada), que de acordo com a BNCC (BRASIL, 2018), tem papel essencial na apreensão de significados de objetos matemáticos, desde que estejam integrados a situações didáticas que oportunizem a reflexão, sistematização e um processo de formalização.

Quadro 27 - Categoria Socialização dos estudantes

Categoria: Socialização dos estudantes
Ocorrências: 15 estudantes
Estrelas: Acrux, Adhara, Antares, Bellatrix, Betelgeuse, Electra, Kraz, Mimosa, Mintaka, Polar, Rigel, Sirius, Sol, Spica e Vega.
Definição
A categoria “ <i>socialização dos estudantes</i> ” é definida pela movimentação que ocorreu no ambiente educativo voltado para a interação entre estudantes que não se conheciam bem. Um fenômeno que pode tirar a timidez dos estudantes, permitir a interação dialógica entre colegas que não se relacionavam anteriormente; a experimentação de uma situação em que todos podem se comunicar para resolver problemas e propor soluções, como um laboratório da vida real, que ajuda os estudantes a enxergar as fronteiras do individualismo e lhes proporciona a liberdade de poder fazer algo com os demais colegas, juntos, colaborativamente.
Verbalizações dos sujeitos
<p><i>“Também meio que tira a timidez da pessoa, ajudou a socializar” (Estrela VEGA);</i></p> <p><i>“Mas eu achei bom porque essa atividade permitiu a gente descobrir umas paradas loucas de uns colegas nossos, umas paradas diferentes. Por exemplo, o colega ALDEBARAN é meio louco e eu não sabia que ele era meio louco para resolver as paradas. Já o DS, ow, o bicho é maior inteligente, mas ninguém da sala nunca tinha percebido isso. Sei lá, a atividade foi boa para entendermos as personalidades diferentes das outras pessoas” (Estrela MINTAKA);</i></p> <p><i>“Fazer essa atividade em grupo ajuda a gente até na vida adulta, no mercado de trabalho, porque é como a colega ali falou, eu também sou muito individualista, só que quando a gente vai trabalhar, ali pode ser um conjunto de pessoas e aquilo tem que ornar, tem que funcionar, tem que estar como um todo” (Estrela ADHARA);</i></p> <p><i>“Eu perdi a vergonha e saí do meu grupo para pedir ajuda no outro grupo” (Estrela ADHARA);</i></p>

“E aí eu perdi a vergonha e fui perguntar para os colegas, eu aprendi” (Estrela ACRUX);

“Eu nunca tinha conversado direito com as duas colegas que estavam no meu grupo, mas no grupo a gente interagiu, a atividade promoveu essa possibilidade de interagir socialmente e realmente foi muito legal” (Estrela ELECTRA);

“Os meninos não gostavam de pedir ajuda e foi a primeira vez no ano que os 4 meninos conversaram conosco e foi legal. No final da aula eu vi um deles agradecendo a senhora por ter nos convidado para ajudar os colegas” (Estrela KRAZ);

‘Promoveu a socialização. Até fica melhor a sala em si, o clima da sala ficou muito melhor, [...], eu não conhecia bem as meninas do meu grupo, porque quando a gente socializa, interage com pessoas que a gente não convive é melhor, a gente começa a olhar para as pessoas com outros olhos’ (Estrela SOL).

Fonte: Elaborado pela autora da tese (2019)

É importante esclarecer que a socialização relatada no quadro 27, refere-se à socialização entre os indivíduos e não à socialização informativa de dados, resultados e análises, por exemplo. Para os participantes deste estudo, a categoria “socialização dos estudantes” compreende a aproximação entre os sujeitos, olhares subjetivos, o cuidado com o outro, *“desenvolvimento do espírito de coletividade e empatia entre os estudantes, uma vez que havia na sala de aula a possibilidade de ajuda mútua” (Estrela BETELGEUSE)*. Alguns estudantes relataram durante a roda de conversa, que a experiência em pequeno grupo colaborativo oportunizou aprender o real significado da palavra empatia. *“A atividade do tapete cartesiano, colocou em ação a palavra empatia. Aprendemos que é importante ouvir o outro, resolver problemas juntos e achar soluções que caibam as argumentações e conclusões de todos do grupo” (Estrela KRAZ)*.

De acordo com Alves e Seminotti (2006), a instabilidade permite o desenvolvimento do potencial criativo no pequeno grupo. Segundo estas autoras, no lugar que há muito controle, não há criatividade. Desse modo, a instabilidade é capaz de criar oportunidades de ações e relação mútua no pequeno grupo, despertando entre os sujeitos novas formas de se relacionarem.

Durante a entrevista, a professora disse que algumas estudantes de uma determinada turma, relataram que essa atividade possibilitou fazer novas amizades, porque as meninas estudaram o ensino médio todo com certos colegas e não conversavam. Assim, para as alunas a experiência oportunizou *“ficar em grupos com pessoas diferentes e gostar bastante de conhecer outras pessoas” (Professora FLOR)*.

Dentre as habilidades desenvolvidas durante a experimentação deste projeto de engenharia didática, para além dos conceitos matemáticos, estudantes

mencionaram que esta experiência educativa, desenvolveu nas turmas, *“a interação com quem está à sua volta, porque muitas vezes pode ter na sala, alunos muito tímidos que não interage com os outros colegas, pessoas que não se socializam muito, portanto atividades como estas do jogo da UnB ajudam nesse ponto”* (Estrela SPICA).

No questionário, o termo “cuidado com o outro” foi identificado em várias respostas dos sujeitos desta investigação. Alguns mencionaram que, para o grupo conseguir concluir o desafio, além de calma, era necessário muita *“atenção quanto as dificuldades do próximo”* (Estrela ADHARA), corroborando com preceitos da BNCC 2018, ao trazer que no ensino médio, é importante promover experiências educativas que desenvolvam nos estudantes o cuidado consigo e com o outro.

Acreditamos que durante a experimentação do projeto de engenharia, vários estudantes colocaram em prática atitudes de autoconhecimento e autocuidado, ao reconhecer suas emoções e as dos outros colegas, com autocrítica e capacidade para lidar com elas. Essas atitudes são competências gerais da educação, que a BNCC 2018 reconhece estimular e contribuir para a transformação da sociedade, tornando-a mais humana e socialmente justa.

Quadro 28 - Categoria Liberdade estudantil

Categoria: Liberdade estudantil
Ocorrências: 12 estudantes
Estrelas: Acrux, Adhara, Alnitak, Capella, Electra, Mimosa, Polar, Regulus, Sirius, Sol, Spica e Vega.
Definição
A “Liberdade estudantil” está relacionada com a ação de poder falar, usar sua própria linguagem, de expor seu ponto de vista, sem medo ou vergonha de ser reprimido, relaciona-se também com o agir, sem a necessidade de permissão; poder fazer o que achar conveniente no ambiente de aprendizagem, poder testar, errar e aprender com seus erros e com o erro dos colegas normalmente, como se nada tivesse ocorrido. Um ponto interessante é que essa liberdade gerou uma disciplina consciente. Os estudantes permaneceram em sala, após o término das aulas em algumas, turmas e as saídas para ir ao banheiro, ou para tomar água, diminuíram bastante.
Verbalizações dos sujeitos
<i>“A formação do grupo foi tendenciosa, só com os colegas mais próximos”</i> (Estrela SIRIUS); <i>“Mas o mais importante foi sentir liberdade, liberdade de agir e principalmente liberdade de falar, mesmo sendo uma coisa nada a ver...os colegas podem até dar uma risadinha, mas vão nos ajudar, às vezes isso com o professor da sala a gente não consegue fazer, vou falar uma bobagem, então não vou falar, por causa da vergonha. Já dentro do grupo fechado, com amigos, você fala, eles podem até rir, mas vão ajudar e solucionar problemas”</i> (Estrela ADHARA);

“Ter em grupo a liberdade de falar, de errar, de testar. Você pode até achar que está tudo errado, mas os outros colegas olham e falam que está tudo certo, que aquele é também a maneira correta” (Estrela POLAR);

“O que favorece a colaboração é porque estamos falando com os iguais, de aluno para aluno, não de aluno para professor, falando a mesma linguagem e esse é um fator que influencia na aprendizagem” (Estrela SIRIUS);

“O clima de sala de aula mudou, foi bem diferente. Depois dessa atividade, uma professora de outra disciplina passou uma atividade para a prova e o clima da turma foi bem diferente, pois agora já estávamos naquele clima de compartilhamento, [...] A turma mudou, teve essa troca, o clima da sala mudou mesmo e isso foi legal, mesmo depois dessa atividade da UnB, a turma continuou compartilhando conhecimento, e eu gostei.” (Estrela MIMOSA);

“Com o professor é muito formal, ele tá acima de você, a gente tem que respeitar e temos medo” (Estrela VEGA);

“Na atividade invertemos o papel, fomos os professores!” (Estrela ADHARA);

“São pequenas dúvidas que os alunos têm e que a vergonha não deixa a gente perguntar para o professor. Mas aí a gente em grupo com colegas, conversando, é rápido, não precisa parar a aula, não atrapalha toda turma, conversando a gente conseguia resolver tudo junto” (ESTRELA SOL);

“A gente teve liberdade para usar tecnologia e foi legal” (Estrela ELECTRA).

Fonte: Elaborado pela autora da tese (2019)

A categoria “liberdade estudantil” apresentada no quadro 28, é para a autora desta tese, carregada de sentimentalidade. Compreendi, ao longo dos meus quase 15 anos atuando exclusivamente em escolas públicas de ensino médio, que um dos maiores anseios dos estudantes é “ter vez e principalmente ter voz” na escola. Para o estudante, ser ouvido é tão importante quanto o ato de aprender.

Durante a roda de conversa, os estudantes usaram a liberdade de linguagem para também fazer críticas ao sistema público do DF, ao passo que, em determinado momento, um estudante mencionou que *“aluno entende aluno”* e prosseguiu o discurso citando que falam em reforma educacional, em BNCC, e questiona que ninguém passou na escola deles e *“nos perguntou sobre reforma educacional, o que achamos importante mudar. Professora Alessandra, quem faz a escola é o aluno. Quem sabe o que é bom para aluno, é aluno” (Estrela VEGA)*. Logo em sequência, ouvi de um lado *“concordo com você”* e do outro, *“a sua fala é libertadora, ela me representa”*.

Em outras palavras, constatei mudança de postura dos estudantes frente à Matemática. Naquele momento investigativo, percebi que para aqueles estudantes,

as aulas de matemática também eram espaços de falas, de reflexões que extrapolam aprendizagens de conteúdos matemáticos.

Mas as falas juvenis realmente foram muito importantes nos momentos da experimentação didática. Sobre a questão, a Professora Flor mencionou que, a linguagem jovem ajudou muito os estudantes durante o jogo tapete cartesiano, era jovem ensinando jovem, e quando eles ensinam, aprendem muito mais.

“Os jovens se dão muito melhor com a linguagem deles, igual aquela história do “triângulo bugado”, (risos), porque eu falava que o triângulo retângulo era assim, que tem um ângulo de 90°, mas eles não entendiam. Daí um outro aluno ia lá e falava “não professora, isso aí é o triângulo bugado”, aí o colega que estava com dúvida falava “ah, agora eu entendi”. A linguagem dos alunos é muito importante, eles têm muito a nos ensinar, nós professores é que não valorizamos e não os ouvimos. Nós professores é que somos orgulhosos e não aceitamos, achamos que temos o saber pleno, mas não temos (Professora FLOR)”.

Neste projeto de engenharia didática, os estudantes teriam que solucionar as sete situações-problema, para conseguir vencer o desafio do “jogo tapete cartesiano versão UnB 360 graus”. Dentre as premissas do jogo, a liberdade para expressar suas respostas, foi compreendida, vivenciada e aperfeiçoada pelos estudantes. Para os sujeitos deste estudo, a liberdade foi traduzida também como emancipação, independência para agir, não se esquecendo de observar o respeito e a ética em sala de aula. *A liberdade de comunicação possibilitou que um aluno ensinasse o outro respeitando a forma de aprendizagem de cada um, além de incentivar a coletividade e trazer valores de extrema importância para o convívio em sociedade (Estrela ELECTRA).*

Além disso, percebemos uma outra liberdade durante os dias em campo. Não falamos nada com os alunos sobre questões referentes a sair da sala, seja para ir ao banheiro, beber água, como era comum acontecer constantemente durante as aulas de matemática daquelas turmas. O sair da sala ficou incomum durante a experimentação, os estudantes ficaram tão concentrados com a atividade que não queriam perder nenhum momento, afinal o tempo para eles era essencial para solucionar toda a sequência didática e vencer o jogo da UnB:

“Eu não observei mesmo alunos pedindo para ir embora, porque eles estavam gostando de fazer a atividade, estava interessante, estava legal, não era chato, não deu sono, ninguém pediu para ir ao banheiro...aliás, normalmente eles ficam o tempo todo pedindo para ir ao banheiro, pedindo para sair da sala e respirar, ficam mexendo no celular, mas por que isso acontece? Porque as aulas convencionais não são interessantes para eles. Não sei se você viu, teve aluno que disse: “Mas já? Já são 12h15? Já bateu o sinal? Eu nem vi a hora passar!” Mas por que isso aconteceu? Porque quando você está fazendo uma coisa prazerosa, o tempo realmente voa!” (Professora FLOR).

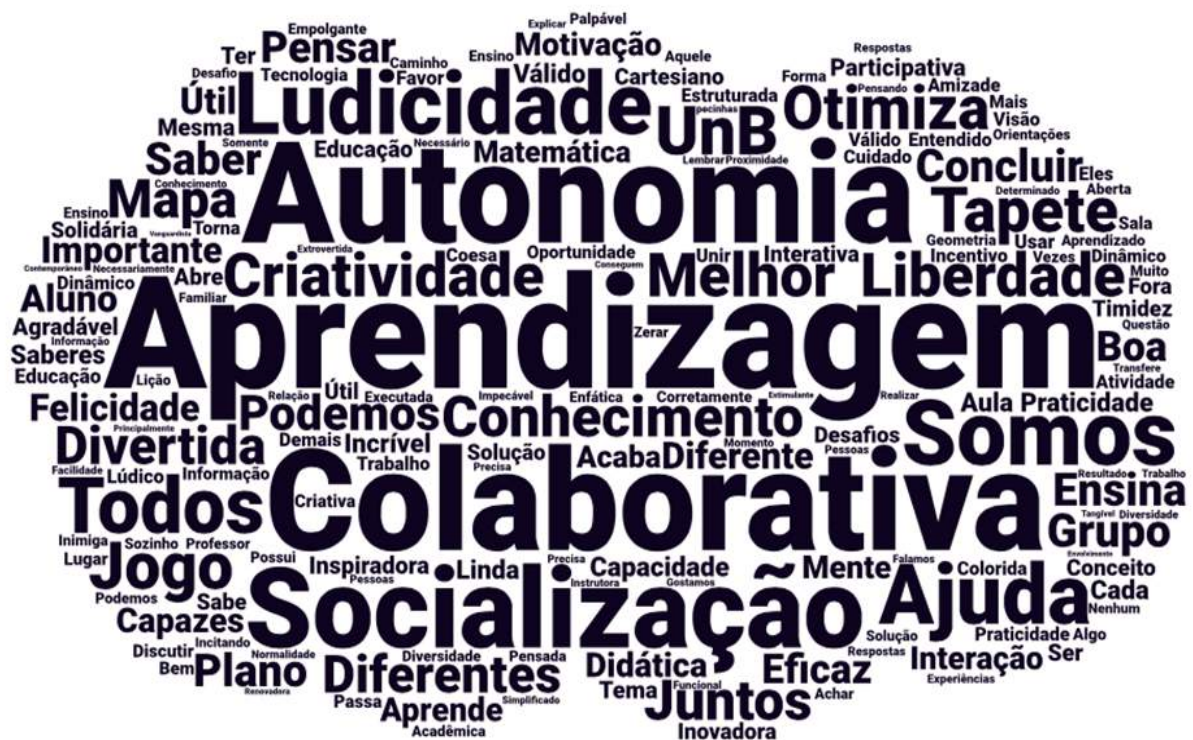
A Professora Flor também nutre o sentimento, o desejo de trabalhar a matemática com mais liberdade. Para ela, um exemplo de “prisão docente” é justamente o conteúdo do estudo do ponto e da reta, tema central do jogo do tapete cartesiano, porque segundo ela, os professores se prendem demais ao livro didático e aos parâmetros curriculares:

“Meu sonho era trabalhar sem ter prova, trabalhar com liberdade, como por exemplo [...] associar os conteúdos do 3º ano com os conteúdos do 1º ano e o estudante fazer aulas práticas em sala de aula, e assim ele veria tudo isso em um conteúdo só, uma aula prática com todos esses conteúdos. Infelizmente não é assim que acontece. O estudante vê um conteúdo fragmentado lá no 1º ano, depois ele vê o outro fragmento lá no 2º ano, aí quando ele chega no 3º ano, o conteúdo já perdeu o sentido” (Professora FLOR).

Por fim, a categoria “liberdade estudantil” evidencia objetivos da “autogestão”, citada na BNCC, como uma competência geral que deve ser desenvolvida no âmbito escolar, de modo a assegurar às juventudes, fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

Diante das categorias expostas, retornamos ao questionário *online* e às duas rodas de conversas para identificar o ponto de vista geral dos estudantes acerca do jogo tapete cartesiano, bem como a mensagem que vinha à mente deles após participar de toda experimentação. A nuvem de palavra da figura 31 é a representação visual desta identificação:

Figura 31 - Nuvem de palavras com a visão geral dos estudantes



Fonte: Elaborado pela autora da tese (2019)

A nuvem de palavras da figura 31 é a representação da visão geral dos estudantes acerca da experiência didática. As palavras que aparecem em destaque, com tamanho de fonte (letra) maior, são os termos mais representativos para os estudantes, e dessa forma, percebe-se o consenso com as categorias geradas a partir da análise de conteúdo.

5.2 - AS PERCEPÇÕES DOS SUJEITOS DA PESQUISA: outras inferências

Este estudo foi uma tentativa de ruptura com as aulas expositivas tradicionais de Matemática, o que resultou na concepção e experimentação de uma ação didática, planejada a partir dos preceitos da engenharia didática (ARTIGUE, 1996), com atividades em que os papéis do professor e dos estudantes foram ressignificados. As atividades foram projetadas de modo que favorecessem a colaboração, a participação, a concentração nas aulas (MICOTTI, 1997), o que contribuiu para prevenir a dispersão dos estudantes. Além disso, os estudantes tiveram a oportunidade de participação ativa, que oportunizou a interação dialógica e a troca de saberes entre seus pares, contribuindo para elaboração de seus raciocínios e o exercício da autonomia intelectual.

As narrativas dos 22 estudantes e da professora de Matemática, originárias dos instrumentos de construção de dados, são carregadas de temáticas que analisam e discutem as relações educativas. Desse modo, além das percepções, resumimos nesta seção as inferências dos sujeitos que se aproximam dos objetivos deste estudo, uma avaliação da situação didática, bem como outras características da Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 2008b) que necessitam ser ressaltadas.

Tanto estudantes quanto professora reconheceram que aliar a teoria à atividade prática contextualizada, com a utilização de recursos didáticos, além de favorecer a aprendizagem, oportunizou ao sujeito cognitivo, reconhecer a matemática para além dos muros da escola (BROUSSEAU, 2008b). *“Enquanto professora, percebi que ter aliado a teoria à prática e pelo fato de os estudantes terem praticado, o mapeamento da UnB fez sentido para eles. [...] É esse tipo de aprendizagem que vai marcar, que vai ficar para o aluno” (Professora FLOR).*

É preciso ressaltar que 10, dentre os 15 sujeitos da pesquisa, que hoje são estudantes da Universidade de Brasília, relataram que fazer o plano cartesiano e mapear a universidade, facilitou a orientação no campus Darcy Ribeiro.

“Na verdade, ficou bem mais claro perceber como a Geometria Analítica é usada tão frequentemente por nós mesmos até de forma inconsciente. E sim, consegui relacionar essa experiência na prática, na própria UnB. Lá, eu já tinha uma ideia da distância entre os prédios por causa da atividade, não só isso, mas conseguia saber a menor distância entre eles também” (Estrela ACRUX).

Diante dessas considerações, caracterizamos **situações adidáticas** (BROUSSEAU, 2008a; ALMOULOU, 2016), aquelas que permitem compreender a interação entre a aprendizagem escolar e o espaço maior da vida. Assim, fica evidenciado que a experimentação didática, proporcionou condições favoráveis para consolidar, ampliar e aprofundar saberes sobre o estudo do ponto e da reta.

Da mesma forma, cabe também ressaltar as situações didáticas (PAIS, 2011) identificadas no estudo. Por exemplo, em relação às **situações de ação**, as diferentes interações ocorridas entre os estudantes e o *milieu* (cenário de aprendizagem), demonstraram potencializar a aprendizagem matemática. Nas diversas figuras apresentadas na seção da análise *a posteriori* deste estudo, verificamos a organização e o capricho dos estudantes ao realizar essa interação.

A forma como coloriram e desenharam as figuras e representações geométricas na folha quadriculada, facilitou a compreensão das resoluções das situações-problema propostas durante a experimentação. A situação de ação ficou explícita, também, na interação dos estudantes com o recurso didático tapete cartesiano e com as peças que representavam as edificações da UnB. Os estudantes tiveram sucesso nas atividades e desenvolveram muitos procedimentos imediatos, que realizaram para solucionar as situações-problema, de maneira experimental e intuitiva, como os descritos na análise *a posteriori*.

Do mesmo modo, foi possível identificar **situações de formulação**, ao verificar que as interações dialógicas entre os estudantes, ocorreram durante toda a experimentação. Nas narrativas apresentadas neste estudo, identificamos vários momentos de comunicação, trocas e busca por novas informações entre os sujeitos, que utilizaram a linguagem juvenil para justificar o raciocínio utilizado, expressar suas respostas, colaborar e aprender com seus pares, para a formalização de conceitos matemáticos.

Todavia, as **situações de validação** ocorreram de maneira menos recorrente, além disso, sua observação ficou prejudicada em virtude de não ser possível acompanhar um único grupo, durante todo o período de experimentação. Contudo, durante a realização da atividade de mapeamento da UnB, com a utilização do tapete cartesiano, foi possível verificar uma situação de validação em um certo grupo, momento em que seus integrantes argumentavam seus raciocínios para responder a situação-problema D.

Os estudantes comunicaram que *“os caminhos seguiam as linhas horizontais e verticais do plano cartesiano”* e por mais que eles traçassem caminhos distintos seguindo estas linhas, o grupo chegou à conclusão que *“a distância encontrada era sempre a mesma”*. A partir dessa argumentação, verificamos que os estudantes, ao justificarem o raciocínio utilizado, descreveram uma demonstração e formularam conceitos de uma geometria ainda desconhecida por eles.

Por fim, vale ressaltar que a validação dos conceitos sobre o estudo do ponto e da reta, ocorreram satisfatoriamente durante a **situação de institucionalização** do ensino, realizada pela Professora Flor.

Tendo em vista os aspectos observados neste estudo, encontramos algumas similaridades nas percepções dos estudantes, que muitas vezes estavam em consonância com as percepções da Professora Flor. Assim, consideramos os pontos de vistas dos estudantes, listados a seguir, como uma analogia avaliativa da experimentação didática, bem como sugestões para aperfeiçoar a atividade.

Potencialidades:

- a. *“Ter situações-problema contextualizadas, que relacionam a matemática com outras áreas do conhecimento”*. Os estudantes consideraram a atividade interdisciplinar, pois agrega e estimula diferentes saberes de Matemática, Geografia, Artes, História, Cartografia e Português;
- b. *“Quebrar o tabu sobre a Matemática”*: Para os sujeitos da pesquisa, o fato de a atividade ser diferenciada, divertida e colaborativa, “combate o tabu de que a matemática é chata e difícil” (Estrela SPICA);
- c. *“Realizar a atividade no final do ano letivo”*: Alguns estudantes consideraram como fator positivo a atividade ser no final do ano, aliás, dois estudantes relataram achar a atividade relaxante (*Estrela Electra e Estrela Sirius*), porque todos já estavam exaustos e tensos com a proximidade do fim do ensino médio;

- d. *“Relacionar com a vida fora da escola”*: Vários estudantes que foram aprovados na UnB posteriormente à atividade, mencionaram que ela contribuiu para que eles não se perdessem no Campus Darcy Ribeiro. *“Não se sentir perdido no campus”* (Estrela ALDEBARAN), foi considerado um dos pontos positivos da atividade do tapete cartesiano;
- e. *“Desenvolver outras habilidades”*: Para além dos conceitos matemáticos, os estudantes consideraram que conseguiram desenvolver outras habilidades, como ler mapas, ser empático com os colegas, relembrar ou aprender as direções cardeais, conhecer histórias sobre a UnB e Brasília;
- f. *“Aprender matemática com outras sentimentalidades”*: Há estudantes que relacionam aprender Matemática com alguma sensação psicológica. Aprender conceitos matemáticos *“provoca angústia”* (Estrela CAPELLA), no entanto, participar da experiência didática tornou a ação de aprender Matemática *“mais leve”* (Estrela ALDEBARAN) e *“sem dor”* (Estrela ARTURO).
- g. *“Oportunizar outros tipos de experiências”*: Alguns estudantes mencionaram que a atividade oportunizou aprender técnicas diferenciadas de ministrar aulas. Dentre os sujeitos da pesquisa, sete relataram que pretendem ser professores, inclusive, eles foram aprovados em cursos de licenciaturas da UnB e do IFB. Para estes estudantes, a experiência mostrou *“que é sim possível aplicar diversas formas de ensino dentro das salas de aula”* (Estrela BETELGEUSE), ter a oportunidade de visualizar *“como é a experiência de ensinar, importante para quem deseja um dia ser professor”* (Estrela VEGA) e para outro, a experiência, *“soma ao meu conceito de como se deve dar uma aula no ensino médio”* (Estrela SPICA).

Feedback dos sujeitos da pesquisa:

- a. *“Incluir questões que desenvolvessem outras áreas do conhecimento”* (Estrela SOL);
- b. *“A minha sugestão é levar esse tipo de atividade para outras séries do ensino médio também”* (Estrela BELLATRIX);
- c. *“Sugiro que a atividade seja feita todo ano com as turmas de 3º ano”* (Estrela KRAZ);
- d. *“Dar um tempo maior para a realização, é boa demais para ser apenas em 4 aulas duplas”* (Estrela MIMOSA);
- e. *“Minha sugestão seria que após a atividade, existisse uma saída de campo à UnB, com os alunos participantes, para mostrar os prédios e o mapa cartesiano que fizeram e levando-os para conhecer o mapeamento na vida real”* (Estrela POLAR);

- f. *“Acho que poderia acontecer mais vezes no ano e em períodos maiores de tempo” (Estrela CAPELLA);*
- g. *“Eu incluiria mais edifícios e complementaria a atividade com mais histórias sobre a Universidade e sobre Brasília, também realizaria em outros momentos mapas de outras regiões do Distrito Federal, como o de Ceilândia” (Estrela SOL);*
- h. *“Gostaria que essa atividade fosse ensinada em todas as escolas do DF” (Estrela ALNITAK);*
- i. *“Aumentaria o período da atividade e estenderia para outros conteúdos da matemática” (Estrela BETELGEUSE);*
- j. *“Ratifico o desejo de ver esta metodologia em outras disciplinas” (Estrela SIRIUS).*

Limitações apontadas pelos sujeitos da pesquisa:

- a. *“Participar de um grupo grande. O meu grupo tinha 5 pessoas. Quando são grupos grandes é mais difícil de lidar, nem sempre quer dizer que vai ter mais gente pensando” (Estrela RIGEL);*
- b. *“Deveria ter mais tempo para realizar a atividade e interagir com o grupo. Achei que o tempo não foi suficiente” (Estrela MIMOSA);*
- c. *“Perder tempo, já que uma pessoa que está "errada", pode não aceitar determinada resposta ou atitude e acabe empacando o grupo todo” (Estrela ANTARES).*

Convém observar que os estudantes relataram quantidade relevante de potencialidades e sugestões de melhorias, porém a quantidade de limitações foi consideravelmente menor. Outra observação refere-se ao fato desta atividade, para dois estudantes, ter sido a única experiência em grupo, nas aulas de Matemática do ensino médio:

“Foi minha primeira experiência em atividade em grupo de matemática durante todo o ensino médio e eu achei diferente de tudo o que me foi passado antes, e que tenta trazer aquela mensagem que a maioria dos professores falam que a matemática não é muito difícil, e que ela está no nosso dia a dia” (Estrela RIGEL).

Em última análise, entendemos com a experimentação didática, que dinamizar as aulas, oportunizando aos estudantes experiências educativas, com o desenvolvimento de atividades que estimulem o pensamento matemático, crítico e criativo, pode estimular e favorecer aprendizagens matemática.

CAPÍTULO 6. - DISCUSSÃO, CONCLUSÕES E IMPLICAÇÕES

Este estudo analisou os resultados do desenvolvimento de uma sequência didática, elaborada na perspectiva da Engenharia Didática, com a utilização de um material concreto em formato de jogo colaborativo, nos processos de aprendizagem do estudo do ponto e da reta para os estudantes do 3º ano do ensino médio.

A escolha dos preceitos que levaram à concepção e realização deste trabalho investigativo decorreram, principalmente, da trilha da pesquisadora, profissional e educativa no campo da educação matemática, bem como o seu interesse por atividades ludo-didáticas, situações colaborativas e interativas de estudantes.

Os objetivos deste estudo compreenderam investigar as potencialidades da sequência didática em forma de jogo, a partir das interações dialógicas constituídas entre os estudantes nos pequenos grupos colaborativos; identificar durante o desenvolvimento da atividade, se e como os conceitos do estudo do ponto e da reta foram construídos e; com base nas percepções dos estudantes, analisar como ocorreu o processo de aprendizagem do estudo do ponto e da reta.

Para cumprir esses objetivos, inicialmente desenvolvemos um estudo piloto e realizamos o levantamento das produções científicas nos cursos de pós-graduação das universidades brasileiras (2008-2018). Essas duas ações de pesquisa foram fundamentais para a definição do referencial teórico, para a concepção das sequências didáticas, bem como para a apropriação do conhecimento do quadro atual de ensino e aprendizagem do estudo do ponto e da reta, permitindo-nos realizar nossas escolhas investigativas, definir o problema de pesquisa, a metodologia, os instrumentos para a construção dos dados, planejar e construir a organização didática.

Dessa maneira, interessados em tornar possível a proposta de investigação, consideramos a Engenharia Didática adequada como metodologia e proposta didática. Assim, recorreremos aos preceitos da Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 2008b) para a concepção e experimentação das sequências didáticas, bem como na análise didática da situação de ensino. As escolhas teóricas e metodológicas contribuíram para a concretização deste estudo e a intencionalidade investigativa de realizar a experimentação em larga escala e em um único período em campo.

Assim, com base nos preceitos da Engenharia Didática e da Teoria da Situações Didáticas, desenvolvemos a experimentação didática que permitiu proporcionar aos 228 estudantes do 3º ano do ensino médio, de uma escola pública do DF, um cenário e uma situação didática que oportunizaram aos estudantes (re)construir conhecimentos sobre o estudo do ponto e da reta, colaborativamente, em pequenos grupos, com espaço e liberdade discente para expor seus argumentos e raciocínios acerca das temáticas matemáticas propostas.

Quanto à metodologia, destaca-se que exigiu da pesquisadora engenheira, planejamento, organização e reflexões em todas as fases constituintes do método.

Durante a realização do projeto de engenharia nas sete turmas do 3º ano do ensino médio, os estudantes foram divididos em pequenos grupos colaborativos, em sua maioria com 4 integrantes. Ao todo, 52 grupos de estudantes constituíram-se para a realização das atividades. A experimentação organizou-se em duas sessões. A 1ª sessão com uma sequência didática e suas 10 atividades e a 2ª sessão, com uma sequência didática com 7 situações-problema contextualizados com a Universidade de Brasília, no qual os estudantes tiveram que solucionar todas as situações para conseguirem mapear a universidade. Nesta atividade ludo-didática, integramos materiais concretos como folhas quadriculada e um jogo em formato de tapete cartesiano, com pecinhas em acrílico e madeira, que representavam os edifícios da UnB.

Para auxiliar no desenvolvimento deste projeto de engenharia, constituímos um grupo colaborativo de trabalho, que foi essencial e necessário durante as ações nas salas de aula.

Durante a experimentação didática e execução das atividades, a pesquisadora procurou intervir o mínimo possível nas resoluções dos estudantes, que em um momento inicial estranharam, mas rapidamente aceitaram a mudança do contrato didático. Os estudantes compreenderam e aprovaram o desafio proposto pela pesquisadora, que passou para eles a responsabilidade da realização da atividade, desenvolvendo a capacidade de trabalharem em grupo colaborativo, ensinarem, aprenderem e construir conceitos com os seus pares. Acreditamos que a autonomia do estudante foi estimulada, no momento em que ele aceitou o desafio de solucionar as atividades propostas do dispositivo didático.

É preciso ressaltar que as realizações didáticas deste estudo, basearam-se na concepção, experimentação, na observação e nas análises (*a priori* e *a posteriori*) do dispositivo didático e de cada uma das atividades das duas sequências didáticas. Ademais, uma engenharia bem concebida, organizada e coordenada, não limita a liberdade docente (DOLZ, 2016).

Ao longo da experimentação, constatamos algumas mudanças de atitudes e valores por parte dos sujeitos da pesquisa. Notamos a evolução dos estudantes em relação à sua liberdade para agir e interagir dialogicamente sem a ação docente, mas sempre com responsabilidade. Percebemos a motivação e iniciativa discente para realizar diversas atividades, sem a necessidade de quaisquer ordens docente. Do mesmo modo, verificamos o desenvolvimento de consciência colaborativa das juventudes, para enfrentar situações, interpretar, argumentar, expor suas ideias, tomar decisões, entrar em acordo colaborativo e registrar as representações de seus resultados.

Além da Engenharia Didática, cabe ressaltar que para a elaboração deste projeto de engenharia, consideramos preceitos teóricos acerca da aprendizagem colaborativa e das dimensões de ludicidade. Decerto, a contextualização das situações-problema permitiu que diversos conhecimentos fossem mobilizados pelos estudantes para solucionar as atividades, além de inter-relacionar saberes de Matemática, Geografia, Português e Artes.

Em função das reorganizações de fases deste projeto de engenharia, utilizamos o aplicativo *Plickers*, um recurso tecnológico que possibilitou institucionalizar a 1ª sessão didática. Evidenciou-se com esta institucionalização tecnológica, que os *feedbacks* instantâneos das atividades, contribuíram para criar sentimentos positivos e estimulação da autoestima dos estudantes, o que sugerimos ter contribuído com a permanência do estudante em sala de aula, bem como o interesse em concluir o desafio ludo-didático.

Com relação à análise *a posteriori*, que se apoiou nos dados construídos durante a experimentação, a partir das observações e dos registros escritos dos estudantes; verificamos que a sua confrontação com análise *a priori* (as variáveis didáticas e as estratégias previstas), possibilitou validar este projeto de engenharia.

Os resultados alcançados com este projeto de engenharia didática, possibilitam-nos inferir que a sequência de ensino proposta, a partir de situações-

problema contextualizadas que utilizou materiais concretos, vivenciados pelos estudantes em pequenos grupos colaborativos, parece-nos sólido e coerente, visto que sua construção, assim como o trabalho de um engenheiro, fundamentou-se em alicerces firmes previamente definidos (ALMOULOUD; COUTINHO, 2008) e edificado mediante a relação teoria e prática, finalizado com sua validação.

A despeito do processo de análises dos dados deste estudo, constatamos que, para responder os dois últimos objetivos específicos desta tese, seria necessário utilizar outros instrumentos de construção dos dados, além dos manuscritos dos estudantes e dos registros em protocolos observacionais.

Desse modo, consideramos que realizar rodas de conversas e aplicar um questionário online aos estudantes, bem como entrevistar a professora das turmas, facilitaram interpretar a colaboração entre os estudantes, identificando se os conceitos acerca do estudo do ponto e da reta foram construídos de maneira individual ou colaborativamente e, principalmente para analisar a partir das percepções dos estudantes, como ocorreu o processo de aprendizagem da temática proposta. Assim, também houve a necessidade de adotar mais uma técnica de análises dos dados.

A partir do duplo processo de análises, acreditamos que os objetivos deste estudo foram cumpridos de maneira significativa. Desse modo, com base nos argumentos que trouxemos até aqui, apresentamos algumas conclusões e implicações do estudo, limitações, sugestões para pesquisas futuras e proposituras para ações docentes.

Com a experimentação didática, acreditamos que propostas de investigação matemática como a apresentada neste estudo, contribuem para identificar deficiências conceituais, oportunizando aos professores e aos próprios estudantes perceberem que existem dificuldades em relação a determinado conceito. Outrossim, decorrentes das **implicações e conclusões** que emergiram neste estudo, podemos apontar:

- a. A utilização de jogos com intencionalidade pedagógica, reflete o que a literatura tem apresentado: facilita aprendizagens de estruturas matemáticas, por vezes consideradas de difícil compreensão e, serve como instrumento sociocultural de socialização (MUNIZ, 2010);
- b. Os sujeitos da pesquisa reconheceram haver vantagens no desenvolvimento de atividades em sala de aula, que tenham sequências didáticas contextualizadas,

com a utilização de material concreto. A ausência de estratégias pedagógicas diferenciadas das aulas expositivas tradicionais tem desmotivado os estudantes do ensino médio;

- c. A interação dialógica entre os estudantes é importante no processo de consolidação, ampliação e aprofundamento de conceitos, pois possibilita a troca de ideias e saberes distintos para enfrentar situações-problema em múltiplos contextos;
- d. Os estudantes mencionaram que o clima de sala de aula mudou com as atividades. Para eles, a criação de cenários que oportunizem construir conhecimentos, favorece aos estudantes expor suas ideias com liberdade e argumentação consistente;
- e. O ambiente de sala de aula precisa ser um espaço que desafia, encoraja, exija e estimule o estudante a buscar, descobrir e expor diversas maneiras de solucionar problemas, importante para estimular e desenvolver o potencial criativo dos estudantes;
- f. É possível trabalhar, ensinar e fazer com que o aluno descubra o conhecimento matemático, sem a atividade de ensinar dando todas as informações. É importante motivar o estudante a construir seu próprio conhecimento, desenvolvendo competências e habilidades para ter autonomia intelectual nos momentos de lidar com situações que exigem raciocínio e tomada de decisões.
- g. Consideramos que oportunizar a promoção de atividades que seguem os preceitos da aprendizagem colaborativa, desenvolvem nos estudantes, habilidades para trabalhar em equipe, bem como aprender, ensinar e compartilhar saberes;
- h. Possibilitar aos estudantes ampliar o repertório para resolver um mesmo problema, e assim, estimular o pensamento matemático;
- i. Importa reconhecer que na sala de aula que há muito controle, não há criatividade. Atividades em pequenos grupos podem despertar nos estudantes novas maneiras de se relacionarem. A instabilidade em grupos colaborativos pode ser capaz de oportunizar aos estudantes, agir de maneiras diferenciadas, criar, testar, discordar, avaliar criticamente fatos e conceitos, aperfeiçoar suas próprias representações que podem privilegiar o desenvolvimento da

- criatividade, o pensamento crítico e da autonomia intelectual dos estudantes em sala de aula;
- j. Tem que haver a compreensão docente acerca da importância em estimular os estudantes a usar registros escritos de representação para expressar resultados, sintetizar e comunicar conclusões das atividades propostas em sala de aula;
 - k. Os professores precisam ter conhecimento prévio dos conteúdos para criar ambientes, atividades, sequências didáticas contextualizadas que estimulem os estudantes;
 - l. É recomendável pensar em recursos didáticos como jogos, que tenham potencial catalizador do prazer em aprender matemática, oportunizar aos estudantes enfrentar desafios e acreditar na sua competência e capacidade de aprender;
 - m. Para realizar atividades ludo-didáticas, faz-se necessário utilizar linguagem adequada ao público alvo. Cabe ressaltar que conhecer o contexto social e a realidade das juventudes de onde se pretende desenvolver essas atividades, pode facilitar a atividade docente no momento da concepção do dispositivo didático;
 - n. Reconhecer que o conhecimento matemático deve ser para a vida.

É válido destacar que a Professora Flor teve grande preocupação com a concretização da experimentação didática desta tese. Além de abrir as portas de suas salas de aulas a este estudo, a professora demonstrou seriedade e comprometimento com seus estudantes e com a investigação. Os receios nossos e da professora, em relação a conseguir ou não desenvolver o projeto de engenharia, se os estudantes iriam ou não participar das atividades, foram sanados logo após ao primeiro dia em campo.

Durante a entrevista, a Professora Flor avaliou positivamente a atividade ludo-didática em pequenos grupos. Para a professora, a experimentação colaborativa, as situações-problema contextualizadas, a utilização de materiais concretos, motivou a participação de estudantes, estimulou o interesse pela atividade e pelo processo de aprendizagem do estudo do ponto e da reta.

Sob o mesmo ponto de vista, a apreciação da professora vai ao encontro das narrativas discentes. Durante as rodas de conversas, os estudantes sinalizaram para a necessidade de se criar em sala de aula, situações que privilegiem interações

dialógicas e cenários que oportunizem a eles, liberdade para expor seus argumentos e raciocínios, assim como ter a oportunidade de realizar atividades colaborativas com mais frequência.

Além desses apontamentos, outras constatações emergiram durante a experimentação deste estudo. Os 22 estudantes mencionaram que não há recorrência de atividades colaborativas em grupos nas aulas de matemática do ensino médio, tampouco a utilização de jogos. Entretanto, eles reconhecem as limitações dos professores para realizar atividades ludo-didática, em virtude do pouco suporte institucional da escola, da grande quantidade de estudantes em sala de aula, como também de não dispor de recursos financeiros para a confecção e o desenvolvimento de atividades diferenciadas com material concreto.

Quanto às outras percepções dos sujeitos da pesquisa, verificamos indícios que impressões socioemocionais podem ter efeito sobre o desempenho acadêmico dos estudantes, a considerar que, de acordo com os estudantes, a felicidade e o bem-estar em participar da atividade contribuiu na ampliação de habilidades e competências para aprender e solucionar as situações-problema.

Realmente, os resultados nos permitem presumir que o envolvimento estudantil com o seu processo de ensino e aprendizagem teve relação com a sua satisfação em fazer parte daquela situação didática e na presença em sala de aula. Assim, afirmamos que o autoconhecimento positivo influenciou os estudantes, no que se refere ao envolvimento com a atividade ludo-didática, favorecendo a aprendizagem do estudo do ponto e da reta. Visões positivas sobre suas capacidades, vivenciar experiências exitosas, parecem ser relevantes para que os estudantes construam visões sobre si mesmos, sobre o seu desempenho acadêmico e desempenho dos colegas.

Acerca das **potencialidades** do recurso didático tapete cartesiano, observamos que a utilização do material concreto, otimizou o tempo das aulas, fez os estudantes pensarem no outro e entender o significado da palavra empatia. Também despertou nos estudantes o engajamento com a atividade, com as aulas e a satisfação ao recorrerem e visualizarem a matemática na vida real. Cabe ressaltar, que estas observações corroboram com as narrativas dos 23 sujeitos da investigação.

Como **limitações** desse estudo, entendemos que o tempo (carga horária) para a experimentação do dispositivo didático poderia ser maior. Verificamos que em certos

momentos os estudantes erravam ou tinham dúvidas, em decorrência da dificuldade de compreensão de algumas questões, deficiências na leitura e interpretação de textos.

Apesar de o jogo tapete cartesiano ter sido construído para se adequar a quaisquer realidades de sala de aula, entendemos que o mobiliário escolar precisa ser adequado para facilitar a realização de atividades em grupo. Para a realização de projetos como o deste estudo, há a necessidade de ter mais pessoas em sala de aula para ajudar o professor nos momentos da experimentação. Contudo, sugerimos que o professor instigue estudantes para serem colaboradores, para auxiliar em sala de aula durante a realização de atividades em grupo.

Constatamos que havia necessidade de inserir nas sequências didáticas, instigações nas situações-problema que provocassem a escrita do estudante e o detalhamento das resoluções. Inserir palavras como “provar, demonstrar, descrever, explicar”, completar as frases com indagações, por exemplo, “como você chegou a este resultado?” podem favorecer no desenvolvimento da escrita discente nas aulas de Matemática.

Considerando as limitações, potencialidades, conclusões e implicações deste estudo, sugerimos **temáticas para futuras pesquisas**:

- a. Reproduzir o estudo em outras séries do ensino médio, incluindo tempo maior para as observações em sala de aula, rodas de conversas e *feedback* dos estudantes;
- b. Realizar estudos semelhantes em outras áreas do conhecimento do ensino médio, como Português e Geografia, seguindo os preceitos teóricos e fases da Engenharia Didática;
- c. Replicar estudo semelhante com atividades de mapeamento cartesiano e utilização de materiais concretos, em grupos colaborativos de séries finais do ensino fundamental;
- d. Investigar as percepções dos estudantes quanto ao uso de materiais concretos nas aulas de matemática do ensino médio;
- e. Avaliar os aspectos do uso de atividades ludo-didáticas pelos professores que facilitam e limitam seu trabalho docente;
- f. Avaliar o efeito da frequência de realização de atividades em pequenos grupos, com a utilização de materiais concretos, nas aulas de matemática do ensino

- médio, a partir da utilização de instrumento que identifique fatores que contribuem para a expressão da criatividade em sala de aula;
- g. Analisar as representações sociais dos estudantes em relação às aulas de matemática do ensino médio em escolas públicas;
 - h. Desenvolver um instrumento para avaliação de competências de pensamento crítico em estudantes do ensino médio, em turmas que desenvolvem atividades em grupos com sequências didáticas e utilização de material concreto em formato de jogos;
 - i. Construir e avaliar um modelo de variáveis socioemocionais na explicação da permanência e desempenho acadêmico de estudantes nas aulas de matemática do ensino médio.

Entendemos as restrições deste estudo, entretanto, acreditamos que ele fornece elementos que podem contribuir com a formação continuada de professores. Assim, indicamos proposituras de ações docentes, reafirmando com os preceitos desta tese, a possibilidade de readequação do dispositivo didático deste estudo, para uma outra realidade escolar, e a necessidade também de repensar práticas docentes que estimulem a participação discentes como colaboradores das aulas.

Realizar projeto de engenharia didática abre espaço maior para diversificação das avaliações e metodologias de ensino, que podem possibilitar o desenvolvimento da criatividade dos estudantes. Ademais, pode contribuir para minimizar a demanda e sobrecarga dos professores (correções de atividades). Levando-se em consideração esses aspectos, percebemos que as ponderações oportunizadas pelo processo de investigação e ação didática da engenharia, podem contribuir para a formação do professor pesquisador.

E por fim, acreditamos que trabalhos que seguem os preceitos teóricos da Engenharia Didática, que provoquem reflexões acerca de questões epistemológicas, cognitivas e didáticas, com registros em protocolos observacionais, análise das produções em sala de aula, confronto dos dados com resultados e teorias já estabelecidas, podem ser referenciais de como desenvolver investigação educativa “articulada com a ação docente e com elaboração de material reprodutível, contribuindo para a melhoria do ensino nos níveis básicos” (CARNEIRO, 2005, p. 115).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

*(...) "Disciplina é liberdade
Compaixão é fortaleza
Ter bondade é ter CORAGEM"*

"Há Tempos" - Legião Urbana

Composição: Renato Russo / Dado Villa-Lobos / Marcelo Bonfá

© Corações Perfeitos Edições Musicais e

© Legião Urbana Produções

E então, esta tese encerra-se nesta seção. Neste espaço, mostra-se adequado para falar em primeira pessoa, para ecoar a voz da pesquisadora e educadora matemática.

Quando ingressei no doutoramento em 2015, tinha a pretensão investigativa de ampliar e aprofundar, cientificamente, experiências pedagógicas de atividades ludo-didáticas. Naquela época, eu caminhava pelo eixo de interesse em "Educação, Tecnologias e Comunicação", todavia o foco já era aprendizagem matemática.

Das trilhas do mestrado, carreguei comigo os preceitos da aprendizagem colaborativa, tema de pesquisa que me instiga demais. Mudar de direção durante esta trilha doutoral era previsível, mas talvez tenha demorado um pouco para reconhecer o meu correto lugar, contudo, quando a mudança se efetivou, tive a certeza concreta e acadêmica de que a Educação Matemática era o meu lugar, afinal, estudar, elaborar, aperfeiçoar pedagogicamente e cientificamente atividades ludo-didáticas, fazem parte das minhas ações pedagógicas desde o ano de 2007. De lá para cá, atuei e trabalhei muito em prol da Educação Matemática e, ao lado de tantos outros educadores matemáticos, participei de espaços e momentos nos quais aprendi, ensinei, compartilhei, discuti, planejei, criei ações voltadas ao ensino e aprendizagem matemática e contribuições à formação docente.

Desse modo, importa realçar a minha satisfação quanto à realização deste estudo, assim como o desenvolvimento pessoal e profissional que esta investigação proporcionou a mim como educadora e eterna aprendiz.

Ao optar metodologicamente pela pesquisa participante e engenharia didática, reconheci que teria um caminho de grande responsabilidade, de planejamento, de desenvolvimento de um dispositivo didático, de reflexão e análises. E ao decidir que a engenharia didática estaria neste estudo como uma metodologia de pesquisa e um instrumento de elaboração de um produto didático, levou-me a um processo rigoroso

de estudos, descobertas, idas e vindas, decisões didáticas e de muitas aprendizagens.

O caminho para concretizar a engenharia didática, suas 4 fases e todo o processo de análise foi árduo e ao mesmo tempo estimulante. Realmente senti a necessidade de reforçar os alicerces teóricos para planejar e executar a obra educativa, todavia, com a concepção e principalmente por colocar em prática o projeto de engenharia, o prazer pedagógico e investigativo foram edificantes. Entendo que, apesar de ter vivenciado episódios complexos para concretizar a construção deste estudo, o caminho que eu segui, possibilitou amadurecimento acadêmico.

Quero destacar alguns momentos marcantes deste estudo. Um deles foram os dias de envolvimento na construção do jogo tapete cartesiano e, decerto foi um dos que mais oportunizaram exercitar o potencial criativo.

Inicialmente, eu pensava em confeccionar o tapete em vinil e as pecinhas que representariam os edifícios, em acrílico, em formato de pequenos prédios. Mas a escassez financeira me fez desistir deste planejamento e então, a minha residência passou a ser um espaço de busca de materiais para a confecção do jogo. Pedacos de MDF (madeira) e recortes de acrílico, ambos sobras de materiais de construção da minha casa, transformaram-se em edifícios da Universidade de Brasília.

Um jovem graduando em Matemática, integrante do grupo colaborativo de trabalho, confeccionou os adesivos com a logomarca da UnB e durante um domingo inteiro, eu e outro integrante do grupo, colamos os adesivos nas pecinhas que seriam os prédios do jogo tapete cartesiano “UnB 360 graus”. Ao todo, “construímos” 90 edifícios, suficientes para compor 10 kits do jogo. Já os pedaços de tecido de tapeçaria, faziam parte de outro jogo que utilizávamos no Projeto Matemática Todo Dia desde 2013, somente alterei a sua funcionalidade.

Outro momento marcante, de apreensão e ansiedade, foi a insegurança em relação às reações dos estudantes quando iniciasse a experimentação. Recordo-me que por alguns dias cogitei o fato de não fazer a experimentação em todas as 7 turmas, mas a Professora Flor e a minha própria consciência colaborativa não me permitiram escolher quais turmas iriam ou não iriam participar deste estudo.

Ainda bem que não selecionei as turmas, afinal todos os estudantes aceitaram participar da situação didática. Para além dos dados construídos para esta pesquisa, ouvi de vários estudantes, relatos sobre a experiência, sobre a oportunidade educativa no momento que eles mais necessitavam de tranquilidade e questionamentos se outros estudantes da escola deles teriam a mesma oportunidade educativa nos anos seguintes.

Da mesma forma, foi significativo ouvir durante a entrevista, a Professora Flor manifestar o interesse em aplicar o dispositivo didático em suas futuras turmas. E igualmente, ser procurada por vários estudantes que queriam compartilhar comigo a felicidade da aprovação em universidades públicas.

Dentre os 22 sujeitos deste estudo, 19 (dezenove) foram aprovados em universidades públicas do Distrito Federal, sendo 15 (quinze) estudantes aprovados na UnB, 3 (três) no Instituto Federal de Brasília e 1 (um) na Escola Superior de Ciências da Saúde. Estes estudantes foram aprovados em 19 cursos distintos das áreas de Exatas, Humanas e Saúde, como Direito, Medicina, Engenharia Mecatrônica, Arquitetura, Pedagogia, Engenharia Mecânica, Artes Visuais, Física e tantos outros.

Durante os dias de experimentação em campo, uma constatação investigativa fortaleceu-se mais ainda, trata-se da importância em oportunizar aos estudantes durante as aulas de matemática do ensino médio, cenários didáticos que além de estimular a consolidar, ampliar e aprofundar conceitos, também possibilitam a liberdade estudantil para criar, descobrir, arriscar-se, errar e não ser julgado, expor seus achados, desenvolver a autonomia intelectual, desenvolver competências para raciocinar e fazer representações, exercer o protagonismo, dialogar com os colegas acerca das suas inquietações estudantis, compreender seus pares e acreditar em suas capacidades e habilidades para aprender e até mesmo ensinar.

Assim, incertezas, inquietudes e descobertas em campo, nos momentos experienciais, ampliaram o meu entendimento de que é necessário e urgente repensar práticas em sala de aula. Ademais, a Matemática não pode continuar sendo vista como assustadora, como algo impossível e inatingível por muitos estudantes. A Matemática precisa ser percebida como viva, possível e presente em tudo que nos rodeia.

Romper com o tradicionalismo no ensino brasileiro não é fácil, e as dificuldades e lutas docentes são muitas em todo o país, mas acredito que aulas que oportunizem aos estudantes aprenderem em colaboração, com espaço para discussões, argumentações e construções, podem permitir às juventudes avançar na compreensão de conceitos matemáticos, bem como, desenvolver as aprendizagens essenciais da educação básica preconizadas na BNCC 2018.

Retornando às proposições desta tese, em decorrência dos resultados apresentados durante a análise *a posteriori* e a análise de conteúdo, bem como na seção de discussão deste estudo, compreende-se que nossos objetivos foram alcançados, e **a tese e suas premissas** de que, uma situação didática construída a partir dos preceitos da engenharia didática, que articule uma abordagem colaborativa

e lúdica, para solucionar situações-problema do estudo do ponto e da reta, potencializa a construção de conceitos e favorece a aprendizagem matemática, **se confirmaram**.

Acerca dos resultados da proposta didática deste estudo, que envolve um jogo colaborativo com a utilização de material concreto, nos processos de aprendizagem do estudo do ponto e da reta para os estudantes do 3º ano do ensino médio, Estrela ACRUX mencionou:

“Foi legal por causa dessa questão de ser mais efetivo em relação ao próprio objetivo da escola, que é ensinar. Então, por essa atividade ter essa flexibilidade de resoluções das questões, aumentaram as possibilidades dos alunos alcançassem e aprendessem o conteúdo de uma maneira que eles entenderiam e sentissem prazer. Sendo flexível assim, já aumenta as possibilidades do aluno aprender e isso é muito bom. Na minha sala foi de boa, as pessoas se ajudaram muito, a ajuda não ficou restrita só dentro do grupo, o conhecimento foi espalhado. Todo mundo ficou se ajudando, umas coisas umas pessoas sabiam melhor do que outros colegas, outras questões tinham mais dificuldade, mas as informações, os conhecimentos, foram circulando na sala para que todo mundo entendessem, então eu entendo que é um jeito mais efetivo de se fazer educação, porque assim pode alcançar muito melhor o objetivo da escola que é fazer com que as pessoas aprendam”.

Contudo, finalizo este estudo inferindo que, enquanto educadora matemática, ainda tenho muito a realizar em prol, principalmente, do ensino básico e superior público. E assim, chego até questionar: De que maneira eu posso contribuir para a construção de uma educação brasileira mais justa e igualitária? Enfim, que possamos aprender e comportar-se como as “estrelas” participantes desta investigação: *“agir pensando mais no outro”* (Estrela ADHARA).

E que possamos também revolucionar espaços de ensino e aprendizagem, tal como reconhecer que é preciso união, escutar sensivelmente os outros (CERQUEIRA, 2007), ser colaborativo e solidário na tentativa de buscar soluções, não apenas para formar “resolvedores de problemas”, mas sim, para possibilitar às juventudes desenvolver competências e habilidades necessárias aos seus projetos de vida e para enfrentar os desafios da sociedade contemporânea. Ademais, espera-se que os resultados aqui obtidos sirvam a outras pesquisas, outras organizações didáticas.

E por fim, decerto, “temos muito ainda por fazer (...) apenas começamos” (RUSSO; VILLA-LOBOS; BONFÁ, 1991).

REFERÊNCIAS

- ALENCAR, Eunice Soriano de. **Como Desenvolver o Potencial Criador: Um guia para a liberação da Criatividade em sala de aula**. 11ª Ed. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2009.
- ALMOULOUD, Saddo Ag. Diálogos da didática da Matemática com outras tendências da Educação Matemática. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**, v. 9, n. 1, 2019.
- ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V 3.6, UFSC, 2008. pp. 62-77,
- ALMOULOUD, Saddo Ag; MANRIQUE, Ana Lucia; SILVA, Maria José Ferreira da; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, 2004. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a06.pdf>. Acesso em: 20 set. 2017.
- ALVES, Míriam Cristiane; SEMINOTTI, Nedio. **O pequeno grupo e o paradigma da complexidade em Edgar Morin**. *Psicol. USP* [online]. 2006, vol.17, n.2, pp.113-133. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/S0103-65642006000200006>. Acesso em: 2 fev. 2018.
- ANTUNES, Celso. O jogo e o brinquedo na escola. In: SANTOS, Santa Marli Pires dos (Org.). **Brinquedoteca: a criança, o adulto e o lúdico**. 7. ed. 2ª Reimpressão. Petrópolis: Vozes, 2016. pp. 37-42.
- ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. In: BRUN, Jean. (Org.). **Didácticas das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. pp. 193 – 217.
- ARTIGUE, M.; PERRIN GLORIAN, M. J. Didactic engineering, research and development tool: some theoretical problems linked to this duality. **For the Learning of Mathematics**, 1991. v. 11, n. 1, pp. 13-18,
- BACCARIN, Sandra Aparecida Oliveira; PINA NEVES, Regina da Silva e SILVA, Jhone Caldeira. A formação geométrica de licenciandos em matemática de instituições de ensino superior de Goiás e do Distrito Federal. In. **VIII Workshop de Verão em Matemática**. UnB, Brasília – DF, 2016.
- BAKHTIN, Mikhail M. **Estética da criação verbal**. Tradução de Paulo Bezerra. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2010.
- BARBOSA, Marcos Paulo. **Projeto matemática todo dia: estudo de caso em uma escola pública do Distrito Federal**. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade de Brasília, Brasília, 2014.
- BARBOSA, Marcos Paulo; LISBOA, Alessandra “matemática todo dia”: uma estratégia de aprendizagem lúdica e colaborativa. In: **Ludicidade: Desafios e Perspectivas em Educação**. Jundiaí, SP: Paco Editorial, 2016.
- BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. Lisboa, Portugal: Edições 70, 2010.

BORIN, Julia. **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para aulas de matemática**. 4.ed. São Paulo: Caem-IME/USP, 2002.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias** (Ensino Médio). Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#medio>. Acessado em 10 jan. 2019.

BRASIL. **Constituição Federal de 1988**. Promulgada em 5 de outubro de 1988. Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm. Acessado em 15 de agosto de 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Programa Nacional do Livro Didático. Guia de livros didático – Ensino Médio: Matemática**, 2017

BRASÍLIA. Companhia de Planejamento do Distrito Federal. **Educação Básica no Distrito Federal: uma visão do IDEB**. Brasília: Codeplan, 2013.

BRASÍLIA. Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal. **Currículo em Movimento da Educação Básica – Ensino Médio**. Brasília: SEDF, 2014.

BRENELLI, Rosely Palermo. **O jogo como espaço para pensar: a construção de noções lógicas e aritmética**. Campinas: Papirus (Edição Digital), 2016.

BROUGÈRE, Gilles. **Brinquedo e cultura**. Tradução Maria Alice A. de Sampaio Dória; revisão técnica e versão brasileira adaptada por Gisela Wajskop. 3. ed. São Paulo: Cortez, 2000. – (Coleção Questões da Nossa Época; v. 43).

BROUGÈRE, Gilles. **Jogo e educação**. Tradução Patrícia Chittoni Ramos; revisão técnica e apresentação à edição brasileira: Gisela Wajskop. 2. Reimpressão. Porto Alegre: Artmed, 2003.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008a.

BROUSSEAU, Guy. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, Cecilia; SAIZ, Irma (Orgs). **Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas**. Tradução Juan Acunã Llorens; consultoria, supervisão e revisão técnica Maria Celeste Machado Koch. Porto Alegre: Artmed, 2008b. P. 48-72.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, Jean (Org). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 35-113.

BRUFFEE, Kenneth A. **Collaborative learning. Higher education, interdependence, and the authority of knowledge**. 2. ed. Baltimore: Johns Hopkins, 1999.

BRUM, Wanderley, Pivato; SCHUHMACHER, Elcio. A Engenharia Didática como campo metodológico para o planejamento de aula de matemática: análise de uma

experiência didática para o estudo de geometria esférica. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, 2013. p. 60-84.

CARNEIRO, Reginaldo Fernando, DÉCHEN, Tatiana. Tendências no ensino de geometria: Um Olhar para os **Anais dos Encontros Paulista de Educação Matemática**, 2006. Disponível em: <http://www.alb.com.br/anais16/sem15dpf/sm15ss03_03.pdf. Acesso em: 11 de out 2018.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetiké**, Cempem, FE – Unicamp, v.13, n. 23, jan./jun. 2005. pp. 87-120.

CAVALCANTE, Luiz Henrique de Vasconcelos. **Uma sequência didática para o ensino do conceito de parábola: a engenharia didática como apoio metodológico**. Dissertação de Mestrado – UFAM, 2017.

CERQUEIRA, T. C. S. **Representações sociais e escuta sensível do professor universitário**. Hildebrando Editor e autores associados. Brasília, 2007.

CHARNAY, Roland. Aprendendo (com) a resolução de problemas. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Orgs.). **Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas**. Tradução Juan Acunã Llorens; consultoria, supervisão e revisão técnica Maria Celeste Machado Koch. Porto Alegre: Artmed, 2008. p. 36-47.

CHEVALLARD, Yves. **La transposición didáctica**. 3. ed. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2009.

COSTA, M. J. **Trabalho em pequenos grupos: dos mitos à realidade**. Medicina Ribeirão Preto. Online, 47(3), 308-313. 2014. Disponível em <https://doi.org/10.11606/issn.2176-7262.v47i3p308-313>. Acesso em: 8 de out. 2018.

D'ÁVILA, Cristina. Didática lúdica: saberes pedagógicos e ludicidade no contexto da educação superior. **Revista Entreideias: Educação, Cultura e Sociedade** (online e impressa), v. 3, 2014.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática: ele entre as tradições e a modernidade**. 5ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

DAMIANI, Magda Floriana. Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. **Educar**, Curitiba: Editora UFPR, n. 31, p. 213-230, 2008. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/er/n31/n31a13.pdf> . Acesso em: 04 jun. 2017.

DILLENBOURG, Pierre. Introduction: What Do You Mean By Collaborative Learning? In: DILLENBOURG, Pierre (Ed.), **Collaborative learning: cognitive and computational approaches**. Amsterdam: Pergamon, 1999. Disponível em: <http://tecfa.unige.ch/tecfa/publicat/dil-papers-2/Dil.7.1.14.pdf>. Acesso em: 04 jun. 2017.

DOLZ, Joaquim. As atividades e os exercícios de língua: uma reflexão sobre a engenharia didática. **D.E.L.T.A.**, nº 32.1, 2016, p. 237-260. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/delta/v32n1/0102-4450-delta-32-01-00237.pdf>. Acesso em: 30 out. 2018.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FARINHA J. Contextos de comunicação: comunicação em pequenos grupos. **Psicologia da comunicação, ciências da comunicação**, 2014. Disponível em: http://w3.ualg.pt/~jfarinha/activ_docente/psi_com/projeccoes/5.2-ContexCom-ComGrupal_PC-3CC.pdf. Acesso em: 18 de nov. 2018.

FARINHA, J. **Psicologia da Educação** - para uma abordagem ecossistêmica da relação educativa, 2005. Disponível em: http://w3.ualg.pt/~jfarinha/activ_docente/psic_educ-eb1/mat_pedag/psic_educ.pdf. Acesso em: 23 de out. 2018.

FERNANDES, Sônia Regina de Souza. O modelo de escola ideal: representações de estudantes e professores do IFC/Campus Camboriú. **XI Congresso Nacional de Educação** – PUC Paraná, Curitiba - EDUCERE 2013.

FERREIRA, Norma S.A. As pesquisas denominadas “Estado da Arte”: possibilidades e limites. **Educação & Sociedade**, Campinas, 2002. v. 1, n. 79, p. 257-274.

FIGUEIREDO, Francisco José Quaresma. A aprendizagem colaborativa de línguas: algumas considerações conceituais e terminológicas. In: Francisco José Quaresma Figueiredo (Org.). **Aprendizagem colaborativa de línguas**. Goiânia: UFG, 2006. p. 11-45.

FIORENTINI, D. Alguns modos de conceber o ensino da Matemática no Brasil. **Zetetiké**, n. 4, v, Ano 3. 1995.

FIORENTINI, D. Diálogo com Dario Fiorentini. **Revista Espaço Pedagógico**, v. 20, n. 1, 4 out. 2013. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.5335/rep.2013.3517>. Acesso em: 21 de out. 2018.

FIORENTINI, Dario. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara Loiola (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. p. 49-78.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. **Coleção Formação de Professores**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

FLEITH, Denise de Souza; GONTIJO, Cleyton Hércules. Motivação e criatividade em matemática: um estudo comparativo entre alunas e alunos de ensino médio. **ETD – Educação Temática Digital, Campinas**, v.10, nº esp. Motivação, out. 2009. p. 147-167.

FREITAS, José Luiz Magalhães. Situações Didáticas. In: MACHADO, Silvia Dias Alcantâra. **Educação matemática: uma nova introdução**. 3. Ed. revisada. São Paulo: Educ, 2016. p. 77 -112.

GÁLVEZ, Grecia. A didática da matemática. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Orgs.) **Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas**. Tradução Juan Acuña

Llorens; consultoria, supervisão e revisão técnica Maria Celeste Machado Koch. Porto Alegre: Artmed, 2008. p. 26-35.

GARCIA, Vera Clotilde Vanzetto. Formação de professores de matemática e mudanças curriculares na escola. BURIGO, Elisabete Zardo (Org.) *et al.* **A Matemática na escola: novos conteúdos, novas abordagens**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012. 304p. Distância). Disponível em: <<http://www.ufrgs.br/sead/publicacoes/publicacoes-novos-conteudos-novas-abordagens-2012>>. Acesso em: 26 set. 2017.

GIMENES, Deivid Geraldo. **Construção de uma sequência didática com situações-problema envolvendo matemática financeira**. UFSCAR 2016. <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/7739>

GOES, Cícero Rufino de. **Desenvolvendo e aplicando a matemática: um projeto voltado para produzir vencedores na OBMEP e elevar os indicadores sociais do município de Branquinha – AL**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2017.

GONSALVES, Elisa Pereira. **Conversas sobre iniciação à pesquisa científica**. 4. ed. Campinas: Alínea, 2007.

GONTIJO, Cleyton Hércules. Criatividade em matemática: conceitos, metodologias e formas de avaliação. **X Encontro Nacional de Educação Matemática Educação Matemática, Cultura e Diversidade**. Salvador – BA, 2010. Disponível em: http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/CC/T1_CC1949.pdf. Acesso em: 5 out. 2018.

GONTIJO, Cleyton Hércules. **Relações entre criatividade, criatividade em matemática e motivação em matemática de alunos do ensino médio**. 2007. 194 f. Tese (Doutorado em Psicologia) Universidade de Brasília, Brasília, 2007.

GOULART, Juliana Bender. **O estudo da equação $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$ utilizando o software Grafeq – Uma proposta para o ensino médio**. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. UFRGS. 2009.

GOULART, Juliana Bender; GRAVINA, Maria Alice. Geometria Analítica com o *Software GrafEq*. In: BURIGO, Elisabete Zardo (Org.) *et al.* **A Matemática na escola: novos conteúdos, novas abordagens**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012. 304p. Distância). Disponível em: <<http://www.ufrgs.br/sead/publicacoes/publicacoes-novos-conteudos-novas-abordagens-2012>>. Acesso em: 26 set. 2017.

GRANDO, Neiva Ignês; RAUPP, Andrea Damasceno; Educação matemática: em foco o jogo no processo ensino- aprendizagem In: BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Mércles Thadeu (Orgs). **Ensinar e aprender matemática: possibilidades para a prática educativa [online]**. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016, p. 63-83. Disponível em: <http://books.scielo.org/id/dj9m9/pdf/brandt-9788577982158-04.pdf> Acesso em: 20 de set. 2017.

GRANDO, Regina Célia, MARCO. Fabiana F. de. O movimento da resolução de problemas em situações com jogo na produção de conhecimento matemático. In:

MENDES, Jackeline M., GRANDO, Regina Célia. (org). **Múltiplos Olhares**. São Paulo: Musa Editora, 2007. p. 95 – 118.

GRANDO, Regina Célia. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 2000. 224 f., Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

GRANDO, Regina Célia. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Paulus, 2004.

HADDAD, Sérgio. Juventude e escolarização: uma análise da produção de conhecimentos. Brasília, DF: INEP, 2002.

HALBERSTADT, Fabrício Fernando. **A aprendizagem da geometria analítica do ensino médio e suas representações semióticas no Grafeq**. Dissertação de Mestrado – UFSM, 2015.

HOFFMAN-CÂMARA, Rosana. Análise de Conteúdo: da teoria à prática em pesquisas sociais aplicadas às Organizações. Gerais: **Revista Interinstitucional de Psicologia**, 6 (2), jul - dez, 2013, 179-191. Disponível em: <http://pepsic.bvsalud.org/pdf/gerais/v6n2/v6n2a03.pdf>. Acesso em: 6 set. 2017.

HUIZINGA, Johan. **Homo Ludens**: o jogo como elemento da cultura. 8. ed. Tradução João Paulo Monteiro. São Paulo: Perspectiva, 2014.

IBIAPINA, I. M. L. **Pesquisa Colaborativa: investigação, formação e produção de conhecimentos**. Brasília: Líber Livro Editora, v. 1, 2008.

INEP. Ministério da Educação. Brasil no PISA 2015: análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros / **OCDE-Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico**. - São Paulo: Fundação Santillana, 2016.

KALEFF, Ana Maria. Tomando o ensino da geometria em nossas mãos. In: Educação Matemática em Revista. São Paulo: 1994, v. 1, n. 2, p. 19-25.

KAMII, Constance. **A criança e o número**: implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos. 39. ed. Campinas: Papyrus, 2016.

KISHIMOTO, Tizuko Morchida. **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. 14. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

KISHIMOTO, Tizuko Morchida. Brinquedo e brincadeira: usos e significados dentro de contexto culturais. In: SANTOS, Santa Marli Pires dos (Org.). **Brinquedoteca: o lúdico em diferentes contextos**. Petrópolis: Vozes, 1997. p. 23-43.

LEIVAS, José Carlos Pinto. Educação geométrica: reflexões sobre ensino e aprendizagem em geometria. **Revista Sbem-RS**, Porto Alegre, n. 13, v.1, 2012. P. 9-16. Disponível em: http://sbemrs.org/revista/index.php/2011_1/article/view/43 Acesso em: 20 set. 2017.

LISBOA, Alessandra. **Análise da estratégia pedagógica de pequenos grupos colaborativos online de uma disciplina do curso de pedagogia a distância da**

Universidade de Brasília. 2013. xv, 127 f., il. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade de Brasília, Brasília, 2013.

LOPES, Sandra Pereira. **Uma sequência didática para o ensino de parábola enquanto lugar geométrico.** Dissertação de Mestrado – PUC/SP, 2014.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.** São Paulo, ano III, nº 4, p. 3–13, 1º semestre, 1995. Disponível em: http://professoresdematematica.com.br/wa_files/0_20POR_20QUE_20NAO_20ENSINAR_20GEOMETRIA.pdf, Acessado em: 20 de setembro de 2018.

LUCKESI, Cipriano. Ludicidade e formação do educador. **Revista Entreideias,** Salvador, v. 3, n. 2, p. 13-23, jul./dez. 2014. Disponível em: <https://portalseer.ufba.br/index.php/entreideias/article/view/9168/8976> Acesso em: 20 de set. 2017.

MACEDO, Lino; PETTY, Ana Lúcia Sícoli; PASSOS, Norimar Christe. **Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar.** Porto Alegre: Artmed, 2005.

MACHADO, Silvia Dias Alcânta. Engenharia didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org). **Educação Matemática: Uma (nova) introdução.** São Paulo: EDUC, 2016. p. 233-248.

MATTHEWS, Roberta S.; COOPER, James L.; DAVIDSON, Neil; HAWKES, Peter. **Building bridges between cooperative and collaborative learning.** Change, v. 27, 1995. Disponível em: < <http://bgillmayberry.webs.com/Building%20Bridges.pdf> >. Acesso em: 7 jul. 2017.

MAXIMIANO, Antonio Cesar Amaru. **Teoria geral da administração.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 2006.

MEGID, J. N. **Tendências da pesquisa acadêmica sobre o Ensino de Ciências no nível fundamental.** Tese (Doutorado). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 1999.

MICOTTI, Maria Cecília de Oliveira. As propostas didáticas e a prática escolar. **Educação: Teoria e Prática,** v. 5, n. 8/9, 1997, p. 08. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/107108>>.

MIRANDA, Simão de. **Oficina de ludicidade na escola.** Campinas: Papyrus, 2014.

MOTA, Assilene Barros.; ANDRADE, Keila Maria de Alencar Bastos. O lúdico como prática pedagógica no ensino da matemática. **Ensino da Matemática em Debate,** São Paulo – SP, v. 4, n. 1, 2017. pp. 37-51.

MOTTIN, Elisandra. **A utilização de material didático-pedagógico em ateliês de Matemática, para o estudo do teorema de Pitágoras.** Dissertação (Mestrado). Faculdade de Química. PUCRS, Porto Alegre, 2004 116f.

MUNIZ, Cristiano Alberto. **Brincar e jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

MURARI, Claudemir. Espelhos, caleidoscópios, simetrias, jogos e *softwares* educacionais no ensino e aprendizagem de Geometria. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, Marcelo de C.(Orgs.). **Educação matemática: pesquisa em movimento**. 4 ed. São Paulo: Cortez, 2012.

NASSER, Lilian; SOUSA, geneci A.; TORRACA, Marcelo. Transição Do Ensino Médio Para O Superior: Como Minimizar As Dificuldades Em Cálculo? In: V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2012, Petrópolis - RJ. **Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Brasília - DF: SBEM, 2012.

NEGRINE, Airton R. O lúdico no contexto da vida humana: da primeira infância à terceira idade. In: SANTOS, Santa Marli Pires dos (Org.). **Brinquedoteca: a criança, o adulto e o lúdico**. 7. ed. 2ª Reimpressão. Petrópolis: Vozes, 2016. p. 15-24.

NETO, Joaquim José Soares; JESUS, Girlene Ribeiro de; KARINO, Camila Akemi; ANDRADE, Dalton Francisco de. **Uma escala para medir a infraestrutura escolar**. Est. Aval. Educ., São Paulo, v. 24, n. 54, p. 78-99, jan./abr. 2013. Disponível em: <http://www.fcc.org.br/pesquisa/publicacoes/eae/arquivos/1786/1786.pdf>. Acessado em: 12 de outubro de 2018.

OLIVEIRA, Antônio Sergio dos Santos de. **Uma engenharia didática para o ensino das operações com números racionais por meio de calculadora para o quinto ano do ensino fundamental**. 2015. 125 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. 3. ed. Belo Horizonte-MG: Autêntica, 2011.

PANITZ, Theodore. **A definition of collaborative vs cooperative learning**, 1995. Disponível em: <<http://www.lgu.ac.uk/deliberations/collab.learning/panitz2.html>>. Acesso em 10 jul. 2017.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono de ensino de geometria: uma visão histórica. 1989. 196f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP. Disponível em: <<http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/252057>>. Acesso em: 29 out. 2018.

PERUZZO, Cicilia M. Krohling. Pressupostos epistemológicos e metodológicos da pesquisa participativa: da observação participante à pesquisa-ação. **Época III**. Vol. XXIII. Número Especial III. Colima, primavera, 2017. pp. 161-190.

PIFARRÉ, Manoli; SANUY, Jaume. La resolución de problemas entre iguales: incidencia de la mediación del ordenador en los procesos de interacción y en el aprendizaje. In: **Infancia y Aprendizaje. Journal for the Study of Education and Development**. Barcelona: 2002, pp. 209-225. Disponível em: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1174/021037002317417831?journalCode=riya20> . Acesso em: 25 set. 2017.

PIMENTA, Fabrícia; TELES, Lúcio França. Gamificação e colaboração como fatores motivadores da aprendizagem. In. **Gamificação: como estratégia educativa**.

Ahmed Zouhrlal, Bruno Santos Ferreira, Carlos Ferreira, et.al. - Brasília: Link Comunicação e Design, 2015.

QUEIROZ, José Carlos Santana. A Geometria e o Desenho Geométrico nas escolas do Brasil do século XX. **X Encontro Nacional de Educação Matemática Educação Matemática, Cultura e Diversidade**, Salvador – BA, 2010.

RIBEIRO, Luiz Antônio; SOUZA, Cláudia Mara de; KUBO, Aurélio Takao Vieira. **Projeto de engenharia didática: a avaliação de práticas de linguagem em foco**. Trab. linguist. apl. [online]. 2018, vol.57, n.1, pp.411-441.

RUSSO, Renato; VILLA-LOBOS, Dado; BONFÁ, Marcelo. Legião Urbana. CD V, **Metal contra as nuvens**. Rio de Janeiro: EMI-Odeon, 1991., 11,20min.

SANTOS, Santa Marli Pires dos (Org.). **Brinquedoteca: a criança, o adulto e o lúdico**. 7. ed. 2ª Reimpressão. Petrópolis: Vozes, 2016.

SCORTEGAGNA. Gláucia Marise; MEZA, Elisângela dos Santos. Uma proposta para tornar significativa a aprendizagem em geometria analítica. **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática- XII ENEM**, São Paulo, 2016. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/4826_2266_ID.pdf

SILVA, Raquel Santos. **Estudo da reta em geometria analítica: uma proposta de atividades para o ensino médio a partir de conversões de registros de representação semiótica com o uso do software GeoGebra**. Dissertação de Mestrado – PUC/SP, 2014.

SOARES, Camila M. Machado; LEO, Elisabete; SOARES, José Francisco. **Impacto da Olimpíada Brasileira de Escolas Públicas (OBMEP) no desempenho em matemática na Prova Brasil, ENEM e PISA. 2014**. Disponível em: <http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/420951>. Acesso em 10 jul. 2017.

SOARES, Magda Becker; MACIEL, Francisca Alfabetização no Brasil - **O Estado do conhecimento**, Brasília, INEP/MEC, 2000. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/documents/186968/484330/Alfabetização/f9ddff4f-1708-41fa-82e5-4f2aa7c6c581?version=1.3> . Acesso em 15 set. 2018.

SOUZA, Carla Maria Pinto.; LIMA, Anna Paula de Avellar Brito. O Contrato Didático a partir da Aplicação de uma Sequência Didática para o Ensino de Progressão Aritmética. **Zetetiké**, v. 22, n. 42, p. 31-61, 2014. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646566>. Acesso em: 10 fev. 2019.

STAHL, Gerry; KOSCHMANN Timothy, SUTHERS, Dan. **Aprendizagem colaborativa com suporte computacional: Uma perspectiva histórica**. Gerry Stahl, Timothy Koschmann, Dan Suthers – Disponível em: <http://gerrystahl.net/cscl/CSCL Portuguese.pdf> . Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2006. Acesso em: 05 jun. 2017.

TASHIMA, Maria Massaco; SILVA, Ana Lúcia da. **As lacunas no ensino-aprendizagem de geometria**. 2007. Disponível em:

<http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_marina_massa_co_tashima.pdf>. Acesso em 6 mar. 2017.

TCDF - Relatório analítico sobre as contas do governo do distrito federal, 2018. Disponível em: https://www.tc.df.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/RAPP_2018.pdf. Acesso em: 1 de outubro de 2018.

TORRES, Patricia; IRALA Adriano Esrom. **Aprendizagem colaborativa: teoria e prática**, 2014. Disponível em https://www.researchgate.net/publication/271136311_Aprendizagem_colaborativa_teorica_e_pratica/download. Acesso em 1 dez. 2018.

VALENTE, V. R. **Uma história da Matemática escolar no Brasil (1730-1930)**. São Paulo: FAPESP, 1999.

VIANA, Marcelo. Um projeto para fazer alunos campeões. **Jornal Folha de São Paulo (online)**, São Paulo, 07 abr. 2017. Colunista Convidado. Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/colunas/marceloviana/2017/04/1873412-um-projeto-para-fazer-alunos-campeoes.shtml> Acesso em: 10 jul. 2017.

VIGOTSKI, Lev Semenovich. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

YIN, Robert K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. Tradução Ana Thorell; consultoria, supervisão e revisão técnica Cláudio Damascena. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2015.

APÊNDICE 1 – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TCLE



Universidade de Brasília
Faculdade de Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Seu filho(a) está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar do estudo **UMA ENGENHARIA DIDÁTICA PARA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO**, que objetiva analisar os processos incluídos na interação dos sujeitos a partir da intervenção com uma atividade pedagógica e lúdica, no ensino médio.

PARTICIPAÇÃO NO ESTUDO

A participação no referido estudo durante 4 (quatro) aulas de Matemática, em sala de aula. As aulas serão divididas em dois momentos: teórico e prático. Durante o momento prático, os alunos utilizarão uma atividade lúdica em formato de “tapete cartesiano”, construída em lona vinil com 80 cm X 80 cm. A pesquisa acontecerá durante 3 (três) semanas do segundo semestre letivo de 2017.

RISCOS E BENEFÍCIOS

Fui alertado de que, da pesquisa a se realizar, posso esperar alguns benefícios, tais como a verificação das habilidades cognitivas que são trabalhadas com a realização da atividade pedagógica lúdica. Recebi, por outro lado, os esclarecimentos necessários sobre os possíveis desconfortos ou riscos decorrentes do estudo, levando-se em conta que é uma pesquisa, e os resultados positivos ou negativos somente serão obtidos após a sua realização, como não se interessar pela realização da atividade pedagógica lúdica ou mesmo não ficar a vontade em participar de uma atividade em grupo. Dos quais medidas serão tomadas para sua redução, tais como a realizações de ações lúdicas para promover a motivação do aluno.

SIGILO E PRIVACIDADE

Estou ciente de que a privacidade de meu representado será respeitada, ou seja, seu nome ou qualquer outro dado ou elemento que possa, de qualquer forma, identificá-lo, será mantido em sigilo. O pesquisador se responsabiliza pela guarda e confidencialidade dos dados, bem como a não exposição dos dados de pesquisa.

AUTONOMIA

É assegurada a assistência durante toda pesquisa, bem como é garantido o livre acesso a todas as informações e esclarecimentos adicionais sobre o estudo e suas consequências, enfim, tudo o que eu queira saber antes, durante e depois da minha participação. Também fui informado de que posso recusar a participar do meu representado no estudo, ou retirar o consentimento a qualquer momento, sem precisar justificar, e de, por desejar sair da pesquisa, este não sofrerá qualquer prejuízo à assistência que vem sendo recebida.

CONTATO

A pesquisadora envolvida com o referido projeto é a professora **ALESSANDRA LISBOA DA SILVA** – Universidade de Brasília (UnB) e com ela poderei manter contato pelo telefone 61996145465 e pelo e-mail: lisboa.ale@gmail.com . Também poderei manter contato com o Comitê de Ética em Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais da Universidade de Brasília através do e-mail: cep_ih@unb.br.

DECLARAÇÃO

Declaro que li e entendi todas as informações presentes neste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e tive a oportunidade de discutir as informações deste termo. Todas as minhas perguntas foram respondidas e eu estou satisfeito com as respostas. Entendo que receberei uma via assinada e datada deste documento e que outra via assinada e datada será arquivada pelo pesquisador responsável do estudo.

Enfim, tendo sido orientado quanto ao teor de todo o aqui mencionado e compreendido a natureza e o objetivo do já referido estudo, manifesto meu livre consentimento em participar, estando totalmente ciente de que não há nenhum valor econômico, a receber ou a pagar, por minha participação.

Dados do participante da pesquisa	
Nome:	
Idade:	

Dados do responsável pelo participante da pesquisa	
Nome:	
Telefone:	

Brasília, ____ de _____ de 2017.

Assinatura do responsável pelo participante da pesquisa.

Assinatura da Pesquisadora

USO DE IMAGEM

Autorizo o uso de minha imagem e áudio, bem como a imagem e áudio do meu filho(a) para fins da pesquisa, sendo seu uso restrito à pesquisa.

Assinatura do responsável pelo participante da pesquisa

Assinatura do Pesquisador

APÊNDICE 2 – TERMO DE ASSENTIMENTO

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa **“UMA ENGENHARIA DIDÁTICA PARA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO”**. Neste estudo pretendemos investigar a aplicação de uma atividade pedagógica nas aulas de matemática do 3º ano do ensino médio o motivo que nos leva a estudar esse assunto é de tentar compreender como o professor e o aluno se relacionam na construção do saber matemático, quando trabalham em pequenos grupos de forma colaborativa, com atividade que sejam prazerosas, tais como jogos.

Para participar deste estudo você precisará: solucionar, em grupo, desafios propostos em um jogo colaborativo que envolve geometria analítica; fazer manuscritos demonstrando suas soluções; responder um questionário online; participar de entrevistas em grupo e individual, podendo ter o áudio dos discursões em grupo gravadas. Você foi escolhido para participar porque você é estudante do 3º ano do ensino médio e sua professora de Matemática propôs uma metodologia diferente para o ensino de geometria analítica, utilizando um jogo colaborativo para contextualizar o conteúdo matemático e o contexto social, econômico e geográfico da Universidade de Brasília. A intenção da professora é que os conteúdos sejam facilmente assimilados.

Você será esclarecido(a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. Para participar deste estudo, o seu responsável deverá autorizar e assinar um termo de consentimento. Você ou o seu responsável poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento, sem prejuízos para o seu acompanhamento pedagógico em sala de aula. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não acarretará qualquer penalidade ou modificação na forma em que é atendido, o pesquisador garante que irá tratar a sua identidade e seus dados com padrões de sigilo.

Este estudo apresenta risco praticamente inexistentes, ou seja, caso o conteúdo não seja assimilado durante a atividade pedagógica, o conteúdo será revisado após a atividade, e tem como benefício motivar o conhecimento por meio de uma atividade que pode ser prazerosa e que possibilitará a você, conhecer um pouco da Universidade de Brasília além de assimilar os conteúdos de geometria analítica de

forma aplicada e lúdica. Esta pesquisa pode, ainda, motivar outros professores a trabalharem com atividades lúdicas em sala de aula.

Os resultados estarão à sua disposição quando finalizada. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a permissão do responsável por você. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de 5 anos, e após esse tempo serão destruídos. Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada pelo pesquisador responsável, e a outra será fornecida a você.

Eu, _____, fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações, e o meu responsável poderá modificar a decisão de participar se assim o desejar. Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar desse estudo. Recebi uma cópia deste termo assentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Ceilândia, ____ de _____ de 2017.

Assinatura do(a) menor

Assinatura do(a) pesquisador(a)

APÊNDICE 3 – DIÁRIO DA PESQUISADORA



Universidade de Brasília

Faculdade de Educação

Programa de Pós-Graduação em Educação

Data da realização
____/____/____

UMA ENGENHARIA DIDÁTICA PARA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

DIÁRIO DA PESQUISADORA

Registros das observações realizadas durante as aulas (Anotações de Campo)

1 – Instrumento de coleta de dados utilizado
2 – Descrição dos dados coletados (manifestações verbais, ações e atitudes)
3 – Descrição do contexto no qual os dados foram levantados (local, quantidade de sujeitos, descrição do ambiente, outros)
4 – O que mais chamou a minha atenção durante a observação?
5 – Reflexões desenvolvidas a partir desses dados coletados
6 – Idéia(s) referencial teórico que podem fundamentar esta reflexão

APÊNDICE 4 – ROTEIRO DA ATIVIDADE DO ESTUDO PILOTO

Conhecendo a Universidade de Brasília

O Tapete Cartesiano está dividido em linhas brancas e vermelhas, escolha uma como referência. Considere a distância entre as linhas vermelhas, ou entre as linhas brancas, de 100 metros.



Os objetivos desta atividade serão:

- Posicionar os pares ordenados no Tapete Cartesiano seguindo instruções da atividade 1.
- Trabalhar os conteúdos relacionados com geometria analítica que se referem ao posicionamento de pontos no plano cartesiano, equação da reta dado dois pontos, equação reduzida da reta, inclinação da reta, distância entre pontos, condição de alinhamento, área formada por figuras;
- Conhecer e identificar as principais edificações da Universidade de Brasília.

Atividade1 – Posicione as edificações de acordo com as orientações seguintes:

- a) Oriente seu Tapete Cartesiano de forma que o eixo das ordenadas separe o Tapete Cartesiano em norte (abscissas positivas) e sul (abscissas negativas).
- b) O Instituto Central de Ciências (ICC) também conhecido como “Minhocão” está centralizado no Tapete Cartesiano. Suas extremidades estão situadas nos pontos $(-350, 0)$ e $(350, 0)$. O eixo das ordenadas corta o ICC exatamente ao meio e seu arco situa-se no ponto $(0, 100)$.
- c) Sobre o eixo Y, distante 350 metros da origem na direção oeste, fica o Restaurante Universitário (RU).
- d) A Faculdade de Educação tem três prédios, FE 1, FE 3 e FE 5. A FE 3 tem abscissa $(-350, 0)$ e ordenada $(0, 100)$ e está alinhada com o RU e a FE 5.
- e) A FE 1 situa-se no 2º quadrante. A reta que passa pela FE 1 e a FE 3 é paralela ao eixo X.
- f) A FE 5 está distante 100 metros da FE 1 e 700 metros do eixo das abscissas. Sua ordenada é $(0, 100)$.
- g) A pista L3 atravessa a área representada no Tapete Cartesiano e pode ser representado pela reta que passa pelos pontos $(-350, 0)$ e $(350, 0)$.
- h) O Pavilhão João Calmon (PJC) é um bloco de salas de aulas centralizado no ponto $(0, 0)$.
- i) O Pavilhão Anísio Teixeira (PAT) está centralizado em um par ordenado sobre o eixo das abscissas, a 100 metros do PJC. Suas coordenadas são números inteiros. O PAT está mais próximo do RU do que o PJC.
- j) A Biblioteca Central (BCE) encontra-se no 4º quadrante e está centralizada nos pontos $(-350, -100)$ e $(350, -100)$.
- k) A Faculdade de Medicina (FM) esta centralizada nos pontos $(-350, -100)$ e $(350, -100)$.
- l) O Memorial Darcy Ribeiro, também conhecido como “Beijódromo” (BEI) é uma edificação circular e está centralizada em um ponto $(0, 900)$ Km da FE 1 e forma com está uma reta perpendicular ao eixo das abscissas.
- m) A pista L4 passa pelos pontos $(-350, 0)$ e $(350, 0)$.
- n) A Faculdade de Administração, Contabilidade e Economia (FACE) está centralizada num ponto do 1º quadrante, que forma um ângulo reto com o RU e o PJC.
- o) O Instituto de Biologia (IB) forma com o PJC uma reta paralela a reta das abscissas e está a 100 metros do BEI. Sua abscissa é $(-350, 0)$.
- p) A Reitoria está centralizada no ponto $(0, 0)$.
- q) O Centro Comunitário Athos Bulcão (CC) tem abscissa $(-350, 0)$ e está localizado sobre a reta que passa pela FACE e o PAT.

Atividade 2 – Solucione os problemas seguintes:

a) Qual o par ou pares ordenados das edificações abaixo:

FE 1 -	FE 3 -
FE 5 -	RU -
FM -	ICC -
IB -	BEI -
REI -	BCE -
CC -	PAT -
PJC -	FACE -
L3 -	L4 -

- b) Bruno encontra-se na FE 5, Ian na FE 3 e Paulo está no RU. Eles estão conversando por *whatsapp* e decidiram verificar se estavam alinhados, para isso enviaram uma mensagem com suas localizações. Se estão alinhados qual a equação desta reta? Caso contrário qual a área do triângulo formado por seus posicionamentos?
- c) Igor Magri, estudante de Relações Internacionais, precisa participar de uma reunião na FACE e encontra-se no IB. Calcule a menor distância (em linha reta) que ele terá que percorrer.
- d) Anny está mapeamento das espécies de lagartos encontrado na UnB e calculou a área delimitada pela FE1, o PJC e o BEI. Qual o valor, em Km^2 , ele encontrou? Quais são as equações das retas suportes dos lados do triângulo desta área?
- e) Yuri soube que sua colação de grau, bem como de todos os formandos da UnB, se dá no Centro Comunitário Athos Bulcão, impaciente re((Estrela SOL)veu calcular a menor distância que terá que percorrer para participar da formatura quando se formar. Qual será a distância que ela terá que percorrer?
- f) Tatiane, Cristina e Anny fazem disciplinas no IB, na FE 3, no PJC e na FACE nesta ordem, no mesmo dia. Qual a menor distância percorrida por elas?
- g) Carolina calculou a equação geral e a equação reduzida da pista L3. Quais equações ele encontrou?
- h) Paulo Victor descobriu que a inclinação da reta representada pela pista L4 é um número bem pequeno. Qual é esse número?

APÊNDICE 5 – RESULTADO DA INSTITUCIONALIZAÇÃO COM O PLICKERS

Your Classes		November 2017											
		Day Week Month 90-Day Custom Student Reports											
		14 Nov 2017	14 Nov 2017	14 Nov 2017	14 Nov 2017	14 Nov 2017	14 Nov 2017	14 Nov 2017	14 Nov 2017	14 Nov 2017	14 Nov 2017	14 Nov 2017	14 Nov 2017
		Em que posição do plano	Qual a definição de semirreta?	São partes de um triângulo retângulo.	Em que posição do plano	Como você construiu o plano	Qual a definição de segmento?	Em que posição do plano	Qual o valor aproximado de	O plano cartesiano ortogonal é	Em que posição do plano	Em que posição do plano	
Name	Total												
Class Average	75%	55%	82%	67%	84%	100%	59%	52%	79%	80%	86%	81%	
Guest 41	100%	-	B	-	C	B	A	D	B	A	C	B	
Guest 31	100%	-	B	D	D	-	-	-	-	-	-	B	
Guest 30	89%	-	-	D	C	D	A	D	B	A	D	B	
Guest 29	100%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	B	
Guest 28	89%	C	B	D	C	A	C	-	B	-	C	B	
Guest 27	100%	C	B	D	C	D	A	D	B	A	C	B	
Guest 26	100%	C	B	D	C	B	A	D	B	A	C	B	
Guest 25	73%	B	A	B	C	B	A	D	B	A	C	B	
Guest 24	90%	B	-	D	C	B	A	D	B	A	C	B	
Guest 23	90%	-	B	D	C	B	A	B	B	A	C	B	
Guest 22	50%	-	-	-	-	-	-	-	B	B	-	-	
Guest 21	45%	B	A	B	C	A	D	B	C	A	C	B	
Guest 20	78%	C	B	-	D	B	A	A	B	-	C	D	
Guest 19	55%	D	B	D	D	B	C	A	B	D	C	D	
Guest 18	55%	D	A	D	C	B	A	C	C	A	C	A	
Guest 17	55%	B	A	A	C	B	A	C	B	A	C	D	
Guest 16	44%	A	B	A	A	B	C	-	-	A	D	B	
Guest 15	60%	D	B	A	D	A	C	D	-	A	B	B	
Guest 14	60%	-	B	A	B	A	C	D	B	B	C	B	
Guest 13	38%	-	-	A	-	B	B	A	A	D	C	B	
Guest 12	80%	C	B	D	-	A	A	D	C	A	C	D	
Guest 11	100%	-	-	-	-	-	A	D	B	-	C	B	
Guest 10	100%	-	-	D	C	A	A	D	B	A	C	B	
Guest 9	100%	C	B	D	-	-	A	D	B	A	C	B	
Guest 8	91%	C	B	C	C	C	A	D	B	A	C	B	
Guest 7	91%	C	B	D	A	A	A	D	B	A	C	B	
Guest 6	73%	B	B	D	C	A	C	C	B	A	C	B	
Guest 5	82%	C	B	D	C	B	A	A	B	A	C	A	
Guest 4	63%	D	-	D	-	A	C	B	C	-	C	B	
Guest 3	64%	C	B	D	C	A	C	C	C	B	C	B	
Guest 2	44%	C	-	C	C	A	C	B	A	-	B	B	
Guest 1	73%	C	B	D	B	A	C	A	B	A	C	B	

APÊNDICE 6 – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE ESCLARECIDO PARA A PROFESSORA – TCLE PROFESSORA



Perfil do sujeito de pesquisa - Professora

Tema da Pesquisa: UMA ENGENHARIA DIDÁTICA PARA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

Doutoranda: Alessandra Lisboa da Silva
Orientador: Dr. Cleyton Hércules Gontijo

***Obrigatório**

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - (TCLE/PROFESSORA)

Resolução No. 466/2012 e 510/2016 do CNS *

O presente termo em atendimento à Resolução 466/2012 e Resolução 510/2016, destina-se a esclarecer ao participante da investigação intitulada "Uma Engenharia Didática para a aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio, sob responsabilidade da Pós-graduanda ALESSANDRA LISBOA DA SILVA, do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação/PPGE/UnB. Participação: ao concordar com a participação na pesquisa, deverei estar à disposição para responder um questionário com questões referentes à minha vida profissional. Riscos: este estudo não trará riscos para a sua integridade física, mental ou moral. Todos os dados que obtivermos serão utilizados somente para fins científicos com garantia de anonimato. Confidencialidade do Estudo: os registros da sua participação nesse estudo serão mantidos em sigilo. Serão guardados esses registros e somente os pesquisadores responsáveis terão acesso a essas informações. Se alguma publicação resultar deste trabalho, a identificação do participante não será revelada e os resultados serão relatados de forma sumariada preservando o anonimato da pessoa. Benefícios: a importância desta pesquisa reside na perspectiva de melhorar a aprendizagem de matemática principalmente oferecer subsídios para os processos de ensino e aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio. Participação voluntária: toda participação é voluntária, não há penalidades para aqueles que decidam não participar desse estudo. Ninguém será penalizado se decidir desistir de participar do estudo em qualquer época. Podendo retirar-se da participação da pesquisa, sem correr riscos e sem prejuízo pessoal. Depois de conhecer e entender os objetivos, bem como estar ciente da necessidade do uso de minha imagem e/ou depoimentos para fins científicos e de estudos (livros, artigos, slides e transparências), AUTORIZO através do presente termo a pesquisadora ALESSANDRA LISBOA DA SILVA a realizar fotos, gravações de áudio, filmagens, que se façam necessárias e/ou colher meu depoimento sem quaisquer ônus financeiros a nenhuma das partes.

Aceito participar da pesquisa