

Renata Lopes Reis

# **Fundamentos da Dualidade AdS/CFT**

Brasília, Distrito Federal, Brasil

Fevereiro de 2019

Renata Lopes Reis

## **Fundamentos da Dualidade AdS/CFT**

Dissertação submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Física Teórica.

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Arsen Melikyan

Brasília, Distrito Federal, Brasil

Fevereiro de 2019

# Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Arsen Melikyan, pela disponibilidade e amizade. Ao professor Dr. Aleksandr Pinzul, pela co-orientação e sugestão de futuros trabalhos na área. À professora Dra. Vanessa Andrade de Carvalho, pelo incentivo e inspiração. À CAPES, pelo financiamento.

*Na verdade, não era o infinito. O infinito é uma coisa chata, nos dois sentidos da palavra. Quem olha para o céu à noite está olhando para o infinito; a distância é incompreensível, portanto sem significado. A câmara na qual o aeromóvel entrou estava longe de ser infinita; era apenas muito, muito, mas muito grande, tão grande que dava a impressão de ser o infinito melhor que do que o próprio infinito.*  
*(Douglas Adams, em O Guia do Mochileiro das Galáxias)*

# Resumo

Uma revisão detalhada do espaço-tempo Anti-de Sitter (AdS) é realizada. A Teoria Conforme de Campos (CFT) é destrinchada. O princípio holográfico enquanto consequência da termodinâmica dos buracos negros é apresentado e utilizado para construir a correspondência AdS/CFT, e alguns de seus aspectos são explorados.

# Abstract

A detailed review of the Anti-de Sitter spacetime is done. The Conformal Field Theory is unveiled. The holographic principle as a consequence of the thermodynamics of black holes is introduced and used to construct the AdS/CFT correspondence and some of its aspects are explored.

# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>ESPAÇO-TEMPO ANTI-DE SITTER</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>1.1</b>	<b>AdS em Diversos Espaços-ambiente e Coordenadas</b> . . . . .	<b>11</b>
1.1.1	AdS Lorentziano . . . . .	11
1.1.2	AdS Euclidiano . . . . .	12
<b>1.2</b>	<b>Partícula Livre no AdS</b> . . . . .	<b>14</b>
1.2.1	Equações Clássicas de Movimento . . . . .	14
1.2.2	Partícula na Mecânica Quântica . . . . .	17
<b>1.3</b>	<b>Campo Livre no AdS</b> . . . . .	<b>24</b>
1.3.1	Campos Clássicos num Espaço-tempo Qualquer . . . . .	24
1.3.2	Quantização . . . . .	28
1.3.3	Quantização Canônica de um Campo Escalar no AdS . . . . .	29
<b>1.4</b>	<b>Aproximando-se da Fronteira do AdS</b> . . . . .	<b>30</b>
1.4.1	Assintoticidade e Diagramas de Penrose . . . . .	30
1.4.2	Aproximando-se da fronteira de forma geral . . . . .	32
1.4.3	A versão Euclidiana . . . . .	32
1.4.4	A Versão Lorentziana em Coordenadas de Poincaré . . . . .	33
1.4.5	Coordenadas do Espaço Ambiente e o Cone Nulo Projetivo . . . . .	34
<b>2</b>	<b>TEORIA CONFORME DE CAMPOS (CFT)</b> . . . . .	<b>36</b>
<b>2.1</b>	<b>O Grupo Conforme</b> . . . . .	<b>36</b>
2.1.1	Grupo e Álgebra Conforme em Três ou mais Dimensões . . . . .	38
2.1.2	Grupo e Álgebra Conforme para Duas Dimensões . . . . .	43
<b>2.2</b>	<b>Campos Primários</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>2.3</b>	<b>Tensor Energia-Momento</b> . . . . .	<b>47</b>
<b>2.4</b>	<b>O Formalismo de Operadores</b> . . . . .	<b>48</b>
2.4.1	Quantização Radial . . . . .	48
2.4.2	Cargas Conservadas . . . . .	50
2.4.3	Transformação Conforme do Tensor Energia-Momento . . . . .	52
2.4.4	Funções de Correlação . . . . .	54
2.4.5	A forma geral da OPE . . . . .	56
2.4.6	Determinação das constantes de estrutura . . . . .	59
<b>2.5</b>	<b>Produto Normalmente Ordenado (NOP)</b> . . . . .	<b>60</b>
2.5.1	Produtos Normalmente Ordenados e OPEs . . . . .	61
<b>2.6</b>	<b>O Auto-espaço de uma CFT</b> . . . . .	<b>62</b>

2.6.1	Os Módulos de Verma . . . . .	62
<b>3</b>	<b>A DUALIDADE . . . . .</b>	<b>65</b>
3.1	Hipótese Holográfica . . . . .	65
3.2	Correspondência Estado/Operador . . . . .	68
3.3	A Expansão de Ondas Parciais Conforme e o <i>Bootstrap</i> . . . . .	72
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>74</b>
	<b>APÊNDICE A – A CARGA CENTRAL . . . . .</b>	<b>76</b>
A.0.1	Mapeando uma CFT em um cilindro . . . . .	76
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>79</b>



# Introdução

No geral, dualidades equiparam teorias aparentemente distintas, isto é, permitem que tracemos um mapa conectando parâmetros, operadores, simetrias e suas representações, etc. Isso é muito interessante conceitualmente falando, já que evidencia a unificação para a qual a física parece tender, e é também muito prático de um ponto de vista operacional. Nesse trabalho, investigo a correspondência entre teorias quânticas de campos e teorias gravitacionais no espaço-tempo Anti-de Sitter (AdS). A vantagem operacional nesse caso é tremenda: deve ser possível encontrar uma teoria de gravitação quântica, a peça final para a unificação da física. Evidentemente que uma desvantagem tão grande quanto deve existir: é extremamente difícil comprovar essa dualidade para  $d > 2$  - por essa razão nos especializaremos no caso  $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ .

Aqui será traçado o caminho inicial para esta busca, introduzindo as propriedades do AdS, comparando sistemas de coordenadas, derivando seu grupo de simetrias, a dinâmica nesse espaço e, o mais importante, analisando o que acontece com a física no AdS à medida que nos aproximamos de sua fronteira - que veremos ser um espaço-tempo em si. Esse último elemento permite que futuramente todo esse trabalho possa ser generalizado para espaços assintoticamente AdS.

Outro tópico necessário para falar da dualidade é, evidentemente, as Teorias de Campos Conformes (CFTs). Aqui será apresentado o grupo conforme, das simetrias presentes nessas teorias; alguns campos de mais importância são tratados, como o tensor energia-momento; a álgebra de operadores de uma CFT é derivada; unicamente a partir de simetrias, as peças fundamentais da CFT são derivadas: as funções de correlação (generalização da matriz S); e exploro a abordagem *bootstrap*.

Por fim, é iniciada a construção do mapa entre essas duas teorias, a partir da implementação da holografia - uma ideia tão central na correspondência AdS/CFT, que em boa parte da literatura dá nome à própria dualidade. Como motivação para o uso da hipótese holográfica são apresentados alguns indicativos de que isso é razoável, a partir da termodinâmica de buracos negros. A correspondência estado/operador é discutida em detalhes, bem como são apresentados, já concluindo, outros pontos do dicionário AdS/CFT. Diferenças entre as abordagens *bottom-up* e *top-down* também são apresentadas.

Em poucas palavras, o que será investigado aqui é a existência de uma teoria na fronteira do Universo, da qual a gravidade no interior emerge como uma aproximação. A pergunta seria: por que, através do programa reducionista (métodos que consistem em observar a natureza em escalas de comprimento cada vez menores) que nos levou à unificação de quase todas as interações fundamentais, não conseguimos encontrar uma

teoria quântica para a gravitação? E a resposta cuja validade queremos testar é a seguinte: porque a gravidade no interior do universo é apenas uma manifestação holográfica, um aproximação, de uma teoria completa na fronteira.

# 1 Espaço-tempo Anti-de Sitter

Uma vez que vamos investigar a existência de uma teoria que vive na fronteira do universo, é interessante olhar modelos de universo cujas fronteiras sejam bem-comportadas (no sentido de serem elas próprias espaços-tempo). Bem, o espaço-tempo Anti-de Sitter é tal espaço e por isso vamos explorar suas propriedades.

$\text{AdS}_{d+1}$  é uma variedade Lorentziana  $(d + 1)$ -dimensional maximalmente simétrica com curvatura constante negativa. É uma solução pra Equação de Campo de Einstein no vácuo

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (1.0.1)$$

com constante cosmológica  $\Lambda$  negativa. Vamos explorar brevemente o que cada um desses termos quer dizer.

Um espaço  $d + 1$ -dimensional maximalmente simétrico é um espaço com o maior número possível de simetrias, ou, o mesmo número de simetrias que o  $\mathbb{R}^{d+1}$ , ou, ainda, com  $\frac{1}{2}(d + 1)(d + 2)$  vetores Killing, que são os geradores das transformações sob as quais as funções coordenadas são invariantes. Esses vetores podem ser representados por

$$L_B^A = X^A \frac{\partial}{\partial X^B} - X^B \frac{\partial}{\partial X^A} \quad (1.0.2)$$

de forma que a expressão para as simetrias vai depender das coordenadas do espaço onde o AdS está inserido.

As informações sobre o AdS ter curvatura constante e ser maximalmente simétrico estão, na verdade, conectadas. A primeira é uma condição para a segunda. De fato, um espaço maximalmente simétrico só precisa do sinal de  $R$  (a curvatura, ou escalar de Ricci), sua métrica e alguma informação sobre sua topologia para ser completamente descrito.

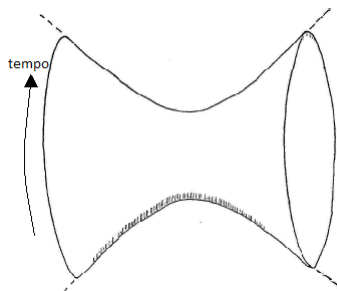


Figura 1 –  $\text{AdS}_2$  lorentziano

Topologicamente, o AdS é homeomorfo a  $\mathbb{R}^d \times S^1$ . É imediato que por conta disso teremos *loops* temporais indesejáveis. Precisaremos corrigir isso e o faremos transformando o AdS num espaço simplesmente conexo, através do recobrimento universal. As ilustrações desses capítulos são todas do recobrimento universal, com exceção da figura 1:

A assinatura do AdS é Lorentziana. Não obstante, falaremos em AdS Euclidiano (EAdS) e AdS Lorentziano (LAdS), e essas classificações se referem à assinatura do espaço-ambiente no qual o AdS está inserido (*embedded*).

## 1.1 AdS em Diversos Espaços-ambiente e Coordenadas

O AdS pode ser escrito nas mais diversas coordenadas [Bengtsson 1998], mas aqui vamos explorar apenas duas delas, que são particularmente úteis quando se trata de AdS/CFT, as coordenadas globais e as coordenadas de Poincaré. O faremos em espaço ambiente euclidiano e lorentziano.

### 1.1.1 AdS Lorentziano

A melhor forma pra enxergar as simetrias do AdS é inseri-lo no espaço ambiente descrito por

$$X_A X^A \equiv X_0^2 + X_{d+1}^2 - \sum_{i=1}^d X_i^2 = R^2 \quad (1.1.1)$$

que são mapeadas às coordenadas globais  $(\tau, \rho, \Omega)$  via

$$\begin{aligned} X_0 &= R \frac{\cos \tau}{\cos \rho} \\ X_{d+1} &= R \frac{\sin \tau}{\cos \rho} \\ X_i &= R \tan(\rho) \hat{\Omega}_i \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

onde a coordenada radial  $\rho \in [0, \frac{\pi}{2})$ , a coordenada temporal  $\tau \in (-\infty, \infty)$ , e a coordenada angular  $\Omega$  cobre a esfera  $(d-1)$ -dimensional.

Substituindo (1.1.2) em (1.1.1) obtemos a métrica para o AdS lorentziano em coordenadas globais

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\rho}{R}\right)} \left( d\tau^2 - d\rho^2 - \sin^2\left(\frac{\rho}{R}\right) d\Omega_{d-1}^2 \right) \quad (1.1.3)$$

É muito importante notar que apesar da coordenada radial  $\rho$  cobrir apenas um intervalo finito, o AdS não é um espaço compacto, pois a distância espacial entre qualquer ponto com coordenada  $\rho < \frac{\pi}{2}$  e um ponto com coordenada  $\rho \rightarrow \frac{\pi}{2}$  diverge por conta do fator de  $\cos^2 \rho$  no denominador da equação (1.1.3).

As coordenadas de Poincaré  $(t, z, x_i)$  são mapeadas a (1.1.1) por

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{z}{2} \left( 1 + \frac{R^2 + \bar{x}^2 - t^2}{z^2} \right) \\ X_d &= \frac{z}{2} \left( 1 - \frac{R^2 - \bar{x}^2 + t^2}{z^2} \right) \\ X_{i < d} &= \frac{R}{z} x_i \\ X_{d+1} &= \frac{R}{z} t \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

onde  $z \in (0, \infty)$ ,  $t, x_i \in (-\infty, \infty)$ . Elas produzem a métrica

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} \left( dt^2 - dz^2 - \sum_{i=1}^{d-1} dx_i^2 \right) \quad (1.1.5)$$

Comparando as coordenadas globais às de Poincaré, obtemos as relações (1.1.6), que estão ilustradas na figura 2. Utilizamos infinitos retalhos (*patches*) para cobrir todo o AdS usando coordenadas de Poincaré (por isso elas são muitas vezes chamadas *Poincaré Patch Coordinates*).

$$\begin{aligned} t &= R \frac{\sin \tau}{\cos \tau - \Omega_d \sin \rho} \\ z &= R \frac{\cos \rho}{\cos \tau - \Omega_d \sin \rho} \\ \vec{x}_i &= R \frac{\hat{\Omega}_i \sin \rho}{\cos \tau - \Omega_d \sin \rho} \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

### 1.1.2 AdS Euclidiano

Agora o espaço ambiente é dado por

$$X_0^2 - \sum_i^{d+1} X_i^2 = R^2 \quad (1.1.7)$$

que são mapeadas às coordenadas globais via

$$\begin{aligned} X_0 &= R \frac{\cosh \tau}{\cos \rho} \\ X_{d+1} &= R \frac{\sinh \tau}{\cos \rho} \\ X_i &= R \tan(\rho) \hat{\Omega}_i \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

que claramente teve como única mudança o uso de funções hiperbólicas em vez de trigonométricas, como consequência da mudança de sinal na assinatura do espaço-ambiente lorentziano para o euclidiano (ao escrever a métrica usamos a relação  $\cosh^2 \tau - \sinh^2 \tau = 1$

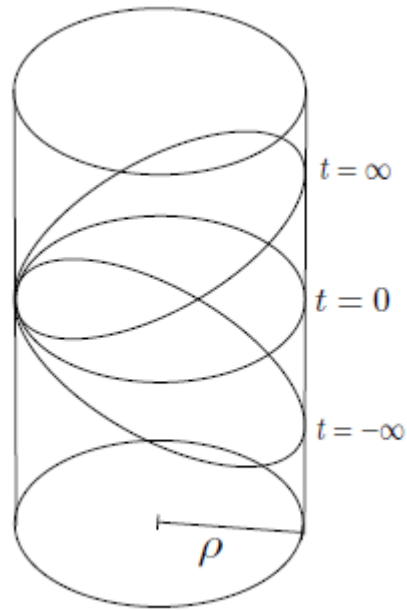


Figura 2 – AdS lorentziano é totalmente coberto por coordenadas globais, mas apenas parcialmente coberto por coordenadas de Poincaré

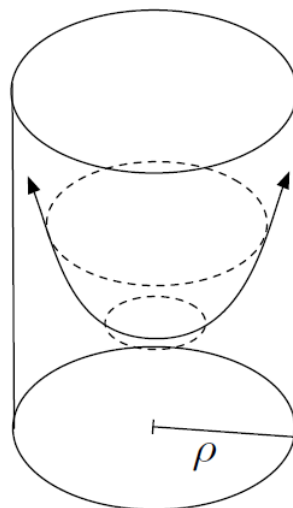


Figura 3 – As superfícies com  $z$  constante começam em  $\vec{r} = 0$  e vão seguindo a curva com setas nas extremidades, à medida que  $\vec{r}$  cresce, formando um *bowl*. Quando  $r \rightarrow \infty$ , temos simultaneamente  $\rho \rightarrow \pi/2$  e  $\tau \rightarrow \infty$ . Superfícies temporais são seções transversais do cilindro. Note que no AdS euclidiano os dois sistemas de coordenadas cobrem todo o espaço.

em vez da relação  $\cos^2 \tau + \sin^2 \tau = 1$  que usamos no tópico anterior, e assim o sinal negativo extra produz o mesmo efeito que o sinal positivo, na métrica). Substituindo (1.1.8) em (1.1.7), obtemos a mesma métrica (1.1.3), como não poderia deixar de ser.

Agora, introduzindo as coordenadas de Poincaré

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{2} \left( \frac{z^2 + \vec{r}^2 + R^2}{z} \right) \\ X_{d+1} &= \frac{1}{2} \left( \frac{z^2 + \vec{r}^2 - R^2}{z} \right) \\ X_i &= \frac{R}{z} r_i \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

onde  $\vec{r} = (t, \vec{x})$ . Essas expressões geram a métrica (1.1.5). Comparando as equações (1.1.8) e (1.1.9), com  $z$  fixado em  $z_0$ , chegamos à equação

$$1 = \cos^2 \rho \left( 1 + \left( \frac{r}{z_0} \right)^2 \right) \quad (1.1.10)$$

Nela podemos ver claramente que quando  $r = 0$ ,  $\rho = 0$  e quando  $r \rightarrow \infty$ ,  $\rho \rightarrow \pi/2$ . Fazendo a mesma comparação, mas com  $z$  variando, temos

$$\left( \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \rho} - 1} \right) z = r \quad (1.1.11)$$

ou seja, temos que  $z$  cresce multiplicado por  $\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \rho} - 1}$  em relação a  $r$ , o que gera precisamente a curva com setas nas extremidades da figura 3.

## 1.2 Partícula Livre no AdS

### 1.2.1 Equações Clássicas de Movimento

A física em AdS mais simples que podemos considerar para uma primeira análise é a de uma partícula escalar livre no AdS<sub>3</sub>. Isto é, excitações em campos invariantes tanto sob transformações de Lorentz quanto sob mudanças de coordenadas. Para uma partícula massiva a ação num espaço-tempo arbitrário é dada por

$$S = m \int d\tau = m \int dt \sqrt{g_{\mu\nu}(X(t)) \frac{dX^\mu(t)}{dt} \frac{dX^\nu(t)}{dt}} \quad (1.2.1)$$

onde  $\tau$  é o tempo próprio e  $X^\mu(t)$  é a posição espaço-temporal no tempo  $t$ , i.e., as coordenadas espaciais como funções do tempo conforme medido por um observador inercial.

Note que essa ação está simplesmente dizendo que partículas livres se movem ao longo de geodésicas. Como o momento da partícula é dado tanto por  $mv$  quanto por

$\hbar/\lambda$ , onde  $\lambda$  é seu comprimento de onda, no referencial da partícula, o comprimento do caminho da partícula ao longo da geodésica será dado em unidades de  $1/m$ .

Para AdS<sub>3</sub> em coordenadas globais  $X^\mu(t) = (t, \rho(t), \theta(t))$ , da ação (1.2.1) para um espaço-tempo arbitrário, obtemos

$$S = m \int dt \frac{\sqrt{1 - \dot{\rho}^2 - \dot{\theta}^2 \sin^2 \rho(t)}}{\cos \rho(t)} \quad (1.2.2)$$

Como vimos em (1.1.1), AdS pode ser visto como uma solução da superfície  $X_A X^A = R^2$ . Então, vamos pensar na partícula livre no AdS como uma partícula num espaço-tempo  $(d+2)$ -dimensional, restrita à essa superfície, e escrever a ação para as coordenadas  $X_A(\beta)$ , onde  $\beta$  é um parâmetro arbitrário da linha de mundo (ele pode ser qualquer um dos  $X^\mu$ ):

$$S[X_A, \lambda] = \int d\beta [\dot{X}_A \dot{X}^A + \lambda(R^2 - X_A X^A)] \quad (1.2.3)$$

onde  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange, que expressa justamente o problema de otimização que é encontrar equações de movimento: minimizar  $\dot{X}_A \dot{X}^A$ , restrito a  $R^2 - X_A X^A = 0$  (espaço-ambiente, ou o próprio AdS, já que introduzimos o parâmetro  $\beta$ , que relaciona as coordenadas do espaço-ambiente às coordenadas do AdS), o que leva a

$$\ddot{X}_A = -\lambda X_A \quad (1.2.4)$$

A solução para esse conjunto de equações depende, é claro, da nossa escolha da variação  $\lambda$ , que é, a princípio, irrestrita. Mas, reescalando  $\beta$  podemos multiplicar  $\lambda$  pelo inverso desse fator de reescalamiento (que pode ser qualquer número positivo), de tal forma que as únicas possibilidades que importam são  $\lambda = -1, 0, 1$ . Elas correspondem, respectivamente, a trajetórias (geodésicas) *spacelike*, *lightlike* (ou nula), e *timelike*. Fazendo  $\beta = t$ , vamos analisar esses três casos:

- $\lambda = 1$

$$X_A = v_A^c \cos t + v_A^s \sin t \quad (1.2.5)$$

que são trajetórias periódicas. Por enquanto temos  $2(d+2)$  soluções. O vínculo (restrição) dá

$$R^2 = v_A^c v^{cA} \cos^2 t + v_A^s v^{sA} \sin^2 t + v_A^c v^{sA} \sin(2t) \quad (1.2.6)$$

$$\implies v_A^c v^{sA} = 0 \text{ e } v_A^c v^{cA} = v_A^s v^{sA} = R^2 \quad (1.2.7)$$

o que diminui em 3 o número de soluções, nos deixando com  $2d+1$  soluções. Uma delas na verdade não tem nenhum significado físico, e podemos eliminá-la usando a



forma explíta das parametrizações e escrevendo um dos  $X_A$  em termos de  $t$ . Agora temos a quantidade certa de soluções. A mais trivial delas é:

$$\begin{aligned} X_0 &= R \cos t \\ X_{d+1} &= R \sin t \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

em termos de coordenadas globais, isso representa uma partícula massiva em repouso em  $\rho = 0$ . Outra solução canônica é:

$$\begin{aligned} X_0 &= R \frac{\cos t}{\cos \rho_*} \\ X_{d+1} &= R \sin t \\ X_1 &= R \tan \rho_* \cos t \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

agora a partícula está oscilando entre  $\rho = \pm \rho_*$ , na direção  $X_1$ . Mais uma solução:

$$\begin{aligned} X_0 &= R \frac{\cos t}{\cos \rho_*} \\ X_{d+1} &= R \frac{\sin t}{\cos \rho_*} \\ X_1 &= R \cos t \tan \rho_* \\ X_2 &= R \sin t \tan \rho_* \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

que representa uma partícula em  $\rho = \rho_*$  fazendo uma órbita circular no plano  $X_1 - X_2$ . Nas (1.2.8), (1.2.9), (1.2.10), coordenadas não mencionadas  $X_i$  são zero.

- $\lambda = -1$

$$X_A = v_A^{ch} \cosh t + v_A^{sh} \sinh t \quad (1.2.11)$$

que representa uma partícula se aproximando do infinito a uma taxa exponencial. E o vínculo dá

$$v_A^{ch} v^{shA} = 0 \text{ e } v_A^{ch} v^{chA} = -v_A^{sh} v^{shA} = R^2 \quad (1.2.12)$$

Para corrigir o número de soluções, fazemos o mesmo que antes, o que nos fornece, dentre outras, as soluções canônicas:

$$\begin{aligned} X_0 &= R \cosh t \\ X_{d+1} &= R \sinh t \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

o que corresponde a uma partícula massiva em repouso em  $\rho = 0$ , assim como as equações (1.2.8) para  $\lambda = 1$ . Temos também

$$\begin{aligned} X_0 &= R \frac{\cosh t}{\cosh \rho_*} \\ X_{d+1} &= R \sinh t \\ X_1 &= R \tanh \rho_* \cosh t \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

que é também uma partícula em repouso, mas com um *shift* de  $\rho_*$  em relação à origem.

- $\lambda = 0$

$$X_A = v_A^t t + v_A \quad (1.2.15)$$

o que significa que a partícula tem movimento linear. Era de se esperar, já que sem o vínculo  $X_A X^A = R^2$ , estamos no espaço-tempo de Minkowski e nele partículas livres se comportam assim.

Podemos ver que, apesar de serem distintas, órbitas elípticas, circulares, exponenciais e lineares podem ser transformadas umas na outras, e todas elas podem ser transformadas na trajetória da partícula em repouso, para cada  $\lambda$ , via alguma simetria. Isso é a isometria do AdS se manifestando. Isto é, o fato de que o AdS é maximalmente simétrico é respeitado por esses cálculos que acabamos de fazer. Todas as trajetórias são as mesmas a menos de uma simetria. O que destrói a obviedade disso é o fato de termos escolhido uma coordenada temporal específica  $t$ , o que significa escolher um centro pro AdS, e relativamente a esse centro partículas livres irão descrever órbitas, das mais gerais (elipses) às mais restritas (repouso na origem). Muito importante de ser notado é o fato de que, para partículas massivas, todas as trajetórias têm a mesma frequência (não há fator aditivo nem multiplicativo do tempo do AdS,  $t$ ), o que indica que a energia da partícula livre no AdS é quantizada assim:

$$E = \Delta + n, \text{ com } n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.16)$$

Confirmemos esse resultado olhando para as soluções da equação de Schrödinger e seus autovalores.

### 1.2.2 Partícula na Mecânica Quântica

Primeiramente, façamos uma análise dimensional da equação de Einstein para a energia, e da relação de incerteza entre energia e tempo, com unidades naturais, isto é,  $\hbar = c = 1$ :

$$[E] = [m] \text{ e } [E][t] = 1 \text{ mas } [t] = [x] \text{ então } [m][x] = 1 \quad (1.2.17)$$

consequentemente,  $mR$ , que envolve as duas escalas físicas do problema (a massa da partícula,  $m$ , e a escala de comprimento do AdS,  $R$ ) é adimensional e é o número do qual a função de onda pode depender.

***Dimensão  $d+1=2$***

Em nome da simplicidade, vamos estudar o caso  $\text{AdS}_2$ . A ação (1.2.1) fica

$$S = \int dt \frac{m}{\cos \rho} \sqrt{1 - \dot{\rho}^2} \quad (1.2.18)$$

O momento canônico conjugado a  $\rho$  é

$$P_\rho \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = -\frac{m\dot{\rho}}{\cos \rho \sqrt{1 - \dot{\rho}^2}} \quad (1.2.19)$$

consequentemente a Hamiltoniana é

$$H = P_\rho \dot{\rho} - L = \sqrt{\frac{m^2}{\cos^2 \rho} + P_\rho^2} \quad (1.2.20)$$

Na base  $\rho$ , temos

$$P_\rho = -i\partial_\rho \quad (1.2.21)$$

Então, a equação de Schrödinger pode ser escrita como

$$i\partial_t = H \quad (1.2.22)$$

Aplicada à função de onda de uma partícula, ela fica

$$i\frac{d}{dt}\Psi(\rho, t) = \left( \sqrt{\frac{m^2}{\cos^2 \rho} - \partial_\rho^2} \right) \Psi(\rho, t) \quad (1.2.23)$$

Considerando a segunda ordem da equação (1.2.22) produzimos uma equação que também deve ser satisfeita quando aplicada a  $\Psi(\rho, t)$  e que é muito mais fácil de ser resolvida:

$$-\partial_t^2 \Psi(\rho, t) = \left( \frac{m^2}{\cos^2 \rho} - \partial_\rho^2 \right) \Psi(\rho, t) \quad (1.2.24)$$

Acabamos de derivar a versão relativística da equação de Schrödinger para uma partícula livre no AdS. Vamos resolvê-la usando as simetrias - o que já facilita muito a compreensão da física nessas contas. O  $\text{AdS}_2$  tem 3 geradores de simetria:  $L_2^0$  (correspondente a  $\partial_t$  no espaço ambiente),  $L_1^0$  e  $L_2^1$ . Vejamos o gerador correspondente, no espaço ambiente, desses dois último geradores. No espaço ambiente, com  $X_0^2 + X_2^2 - X_1^2 = R^2$  temos

$$X_0 = R \frac{\cos t}{\cos \rho} \quad (1.2.25)$$

$$X_2 = R \frac{\sin t}{\cos \rho} \quad (1.2.26)$$

$$X_1 = R \tan \rho \quad (1.2.27)$$

O operador  $L_1^0$  age como

$$X_0 \rightarrow X_0 + \epsilon X_1 \text{ e } X_1 \rightarrow X_1 + \epsilon X_0 \quad (1.2.28)$$

Para escrever essas transformações em termos de  $\rho$  e  $t$ , as traduzimos para

$$t \rightarrow t + \epsilon f \text{ e } \rho \rightarrow \rho + \epsilon g \quad (1.2.29)$$

substituindo (1.2.26) e (1.2.27) em (1.2.28):

$$\frac{\cos t}{\cos \rho} \rightarrow \frac{\cos t}{\cos \rho} + \epsilon \tan \rho \text{ e } \tan \rho \rightarrow \tan \rho + \epsilon \frac{\cos t}{\cos \rho} \quad (1.2.30)$$

e aplicando (1.2.29) no lado esquerdo de ambas (1.2.30), a começar pela segunda, já que ela envolve apenas uma das funções que precisamos encontrar:

$$\tan(\rho + \epsilon g) \approx \tan \rho + \frac{1}{\cos^2 \rho} \epsilon g = \tan \rho + \epsilon \frac{\cos t}{\cos \rho} \implies g = \cos t \cos \rho \quad (1.2.31)$$

Agora, para encontrar  $f$ :

$$\begin{aligned} \frac{\cos(t + \epsilon f)}{\cos(\rho + \epsilon g)} &\approx \frac{\cos t - \epsilon f \sin t}{\cos \rho - \epsilon g \sin \rho} \\ &\approx \frac{\cos t - \epsilon f \sin t}{\cos \rho - \epsilon \cos t \cos \rho \sin \rho} \\ &\approx \frac{\cos t}{\cos \rho} + \epsilon \tan \rho \end{aligned} \quad (1.2.32)$$

$$\implies f = -\sin \rho \sin t \quad (1.2.33)$$

até primeira ordem em  $\epsilon$ .

Então, as transformações (1.2.29) podem ser escritas como

$$t \rightarrow t - \epsilon \sin \rho \sin t \quad \text{e} \quad \rho \rightarrow \rho + \epsilon \cos \rho \cos t \quad (1.2.34)$$

e fazendo uma comparação com (1.2.28) vemos que  $X_0 \equiv t$ ;  $X_1 \equiv \rho$  and  $\epsilon X^1 = -\epsilon f$ ;  $\epsilon X^0 = \epsilon g$ . Consequentemente, o gerador de simetria é:

$$L_1^0 = \cos \rho \cos t \partial_\rho - \sin \rho \sin t \partial_t \quad (1.2.35)$$

De uma maneira similar demais para ser reproduzida aqui, encontramos

$$L_2^1 = \sin t \cos \rho \partial_\rho + \cos t \sin \rho \partial_t \quad (1.2.36)$$

Esses geradores deveriam ter relações de comutação do  $\text{SO}(2,1)$ , afinal de contas, toda a ideia aqui era olhar para o  $\text{AdS}_2$  como um espaço-tempo embutido num espaço-tempo

(2+1)-dimensional, onde suas simetrias (rotações e *boosts*) podem ser todas representadas por (1.0.2). De fato,

$$[L_1^0, L_2^0] = L_2^1, \quad [L_2^0, L_2^1] = L_1^0, \quad [L_1^0, L_2^1] = L_2^0 \quad (1.2.37)$$

Definindo os operadores  $D = L_2^0$ ,  $P = \frac{1}{2}(L_1^0 + iL_2^1)$  e  $K = \frac{1}{2}(L_1^0 - iL_2^1)$ , temos as seguintes relações de comutação:

$$[D, P] = iP \quad [D, K] = -iK \quad [K, P] = iD \quad (1.2.38)$$

Isso estabelece que  $P$  é um operador de criação e que  $K$  é um operador de destruição, e mais: podemos escrever nossos estados (relacionados às funções de onda  $\Psi$  que mencionamos anteriormente) como autoestados de  $D$ :

$$D |\psi\rangle = \Delta |\psi\rangle \quad (1.2.39)$$

e

$$K |\psi_0\rangle = 0 \quad (1.2.40)$$

onde  $\psi_0$  é o estado fundamental, a partir do qual todos os outros estados podem ser construídos, aplicado-se o operador  $P$  a ele. Além disso, de forma bastante explícita, temos

$$K = \frac{1}{2}e^{-it}(\cos(\rho)\partial_\rho - i\sin(\rho)\partial_t) \quad (1.2.41)$$

então o estado fundamental deve satisfazer

$$\cos(\rho)\partial_\rho\psi_0(\rho, t) - i\sin(\rho)\partial_t\psi_0(\rho, t) = 0 \quad (1.2.42)$$

$$\implies \psi_0 = e^{i\Delta t}\chi(\rho) \quad (1.2.43)$$

com  $\Delta\chi = -\cot(\rho)\partial_\rho\chi$ , cuja solução é  $e^{i\Delta t}\cos^\Delta\rho$ .

Então, o estado fundamental é dado por:

$$\psi_0 = e^{2i\Delta t}\cos^\Delta\rho \quad (1.2.44)$$

E essa é a confirmação que procurávamos para o fato de que as funções de onda têm todas a mesma frequência e de que, portanto, os níveis de energia têm espaçamento inteiro. Então, a física por trás desse fato é a forma como os geradores de simetria se relacionam (como operadores de criação,  $P$ , e destruição,  $K$ , de um terceiro,  $D$ ), tornando possível definir  $P$  e  $K$  e escrever todos os estados da partícula livre simplesmente aumentando o

estado fundamental - um processo que jamais poderia alterar a frequência da função de onda. Vejamos se isso continua válido para dimensões mais altas.

### ***Dimensões Mais Altas***

A álgebra conforme  $SO(d, 2)$  pode ser escrita como

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = i(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu) \quad (1.2.45)$$

$$[M_{\mu\nu}, K_\rho] = i(\eta_{\mu\rho}K_\nu - \eta_{\nu\rho}K_\mu) \quad (1.2.46)$$

$$[M_{\mu\nu}, D] = 0 \quad (1.2.47)$$

$$[P_\mu, K_\nu] = -2(\eta_{\mu\nu}D + iM_{\mu\nu}) \quad (1.2.48)$$

$$[D, P_\mu] = P_\mu \quad (1.2.49)$$

$$[D, K_\mu] = -K_\mu \quad (1.2.50)$$

onde os índices vão de 1 a  $d$ . Relacionando-os aos *Killing Vectors* (1.0.2),  $D \equiv -iL_{0,d+1}$  é o operador dilatação,  $P_\mu \equiv iL_{d+1,\mu} + L_{0,\mu}$  é o gerador de momento,  $K_\mu \equiv iL_{d+1,\mu} - L_{0,\mu}$  é o gerador especial conforme, e  $M_{\mu\nu} \equiv -iL_{\mu\nu}$  é simplesmente o gerador de rotações  $SO(d)$ .

Como vimos,  $L_{0,d+1} = L_{d+1}^0 = \partial_t$ , então o operador de dilatação  $D = -i\partial_t$  é, em AdS, o Hamiltoniano, o gerador de translações temporais. A razão para esse nome ficará clara quando olharmos  $D$  sob a perspectiva de CFT.

Fisicamente, (1.2.45) e (1.2.46) estão dizendo que  $P_\mu$  e  $K_\mu$  se transformam como vetores sob rotação. A equação (1.2.47) significa que podemos diagonalizar  $D$  e  $M_{\mu\nu}$  ao mesmo tempo, de forma que podemos etiquetar os estados de acordo com sua energia (autovalores de  $D$ ) e de acordo com seu momento angular (autovalores de  $M_{\mu\nu}$ ).

Equações (1.2.49) e (1.2.50) são muito similares a (1.2.38) e significam o mesmo que antes:  $K$  e  $P$  são, respectivamente, operadores de destruição e criação de  $D$ . Então, novamente, todos os estados podem ser construídos a partir de um estado fundamental  $\psi_0$ , que em  $d \geq 2$  também é chamado *estado primário* (terminologia de CFT), e satisfaz  $K_\mu |\psi_0\rangle = 0$ . Eles têm a forma geral

$$|\psi_{n,\ell}\rangle = (P_\mu^2)^n P_{\mu_1} P_{\mu_2} \cdots P_{\mu_\ell} |\psi_0\rangle \quad (1.2.51)$$

Para  $\ell > 0$  essa equação deve ser escrita numa forma irreduzível, isto é, precisamos separá-la de tal forma que cada parte ainda seja uma função de onda depois da ação do operador de criação. Esses estados têm energias dadas por

$$E_{n,\ell} = \Delta + 2n + \ell \quad (1.2.52)$$

e momento angular  $\ell$ .

Obviamente podemos calcular as funções de onda (1.2.51) escrevendo  $K_\mu$  e  $P_\mu$  na forma explícita de operador diferencial, para a dimensão específica do AdS em estudo. Por exemplo, no AdS<sub>3</sub>

$$K_\pm = ie^{-it \pm i\theta} \left( \sin(\rho) \partial_t + i \cos(\rho) \partial_\rho \mp \frac{1}{\sin(\rho)} \partial_\theta \right) \quad (1.2.53)$$

$$P_\pm = ie^{it \pm i\theta} \left( \sin(\rho) \partial_t - i \cos(\rho) \partial_\rho \pm \frac{1}{\sin(\rho)} \partial_\theta \right) \quad (1.2.54)$$

com  $K_\pm = K_1 \pm iK_2$  e  $P_\pm = P_1 \pm iP_2$ . Usamos a mudança de coordenadas (1.1.2), a equação (1.0.2), e os fatos de que  $P_\mu \equiv iL_{d+1,\mu} + L_{0,\mu}$  e  $K_\mu \equiv iL_{d+1,\mu} - L_{0,\mu}$ . Nesse exemplo, o estado primário será independente de  $\theta$ , então ele precisa satisfazer

$$(\sin(\rho) \partial_t + i \cos(\rho) \partial_\rho) \psi_0(\rho, t) = 0 \quad (1.2.55)$$

$$\implies \psi_0(\rho, t) = e^{i\Delta t} \cos^\Delta \rho \quad (1.2.56)$$

a partir do qual estados de energia mais alta podem ser construídos, aplicando (1.2.54).

Esse método pode ser aplicado pra qualquer  $d$ . Podemos mostrar que a forma mais geral das funções de onda  $\psi_{n,\ell}$  no AdS <sub>$d+1$</sub>  podem ser escritas em termos das funções hipergeométricas  ${}_2F_1$ :

$$\psi_{n\ell J}(\rho, \Omega, t) = \frac{1}{N_{\Delta n \ell}} e^{-iE_n t} Y_{\ell J}(\Omega) \left[ \sin^\ell \rho \cos^\Delta \rho {}_2F_1 \left( -n, \Delta + \ell + n, \ell + \frac{d}{2}, \sin^2 \rho \right) \right] \quad (1.2.57)$$

onde  $N_{\Delta n \ell}$  é um fator de normalização. O número quântico  $J$  inclui todos os valores assumidos pelo momento angular, por exemplo, para AdS<sub>4</sub> temos  $m$  com esféricos harmônicos  $Y_{\ell m}$ . Como vimos, adaptar isso para o AdS Euclidiano é simplesmente uma questão de mudar um sinal da assinatura, o que significa, para essa fórmula, fazer  $t \rightarrow it$ .

Apesar de podermos chegar à expressão (1.2.57) iterando o método descrito para o AdS<sub>3</sub>, a forma mais fácil de fazer isso é resolvendo a equação de Schrödinger correspondente para o AdS <sub>$d+1$</sub> . Como sempre em física, queremos usar as simetrias a nosso favor, se isso for possível. Isto é, queremos usar nossos geradores de simetria (em suas formas diferenciais) para resolver a equação de Schrödinger. Isso significa que  $D$ ,  $K_\mu$ ,  $P_\mu$  e  $M_{\mu\nu}$  deveriam ter um operador diferencial de primeira ordem em comum. Tal objeto não existe. Mas, como antes, podemos elevar ao quadrado dos dois lados, pra simplificar. De fato, o operador de Casimir do grupo conforme é justamente o que precisamos e ele toma a forma [Love 2016]

$$D^2 + \frac{1}{2}(P \cdot K + K \cdot P) + M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \quad (1.2.58)$$

Por outro lado, sabemos que o Laplaciano é o único operador diferencial de segunda ordem que é isométrico, isto é, invariante sob translações e rotações [Rosenberg 1997] e o operador de Cassimir é único, então (1.2.58) é, na verdade, o Laplaciano. Assim, podemos reescrever a equação de Schrödinger no AdS como

$$(\nabla^2 + m^2)\psi = 0 \quad (1.2.59)$$

Podemos começar separando variáveis. A parte angular vai tomar a forma de um esférico harmônico  $d$ -dimensional,  $Y_{\ell J}$ , as autofunções do Laplaciano na esfera  $S^{d-1}$ , com autovalores  $\ell(\ell + d - 2)$ . A parte radial é

$$-\psi''(\rho) + \frac{1-d}{\cos \rho \sin \rho} \psi'(\rho) + \left( \frac{\ell(\ell + d - 2)}{\sin^2 \rho} + \frac{m^2}{\cos^2 \rho} \right) \psi(\rho) = \omega^2 \psi(\rho) \quad (1.2.60)$$

Definindo

$$\psi(\rho) = \chi(\rho) \sin \rho (\cot \rho)^{\frac{d}{2}} \quad (1.2.61)$$

transformamos (1.2.60) numa equação para  $\chi(\rho)$

$$-\chi''(\rho) + \frac{1}{4} \left( \frac{(2\ell - 3 + d)(2\ell - 1 + d)}{\sin^2 \rho} + \frac{4m^2 + d^2 - 1}{\cos^2 \rho} \right) \chi(\rho) = \omega^2 \chi(\rho) \quad (1.2.62)$$

Apesar de não ser simples resolver essa equação de forma exata, para o modo  $\ell = 0$ , tomando  $m^2 = \Delta(\Delta - d)$  e  $\omega = \Delta$ , o estado primário é simplesmente

$$\psi(\rho) = \cos^\Delta \rho \quad (1.2.63)$$

A determinação de  $\Delta$  depende das condições de fronteira do AdS. O AdS tem sua fronteira em  $\rho \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , então lá a função de onda deve zerar. Sendo  $\rho$  uma coordenada radial, em  $\rho = 0$  a derivada da função de onda deve ser nula, do contrário podemos ter picos, e de fato isso é verdade para (1.2.63). Então, o que está acontecendo é que  $\psi_0$  tem maior número de elementos do seu suporte para  $\rho$  pequeno, e ele vai a zero à medida que  $\rho \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . Tome o estado gaussiano

$$\psi(\rho) \approx e^{-\Delta \frac{\rho^2}{2}} \quad (1.2.64)$$

cuja expansão de Taylor, até primeira ordem de todo o argumento é

$$\psi(\rho) \approx 1 - \Delta \frac{\rho^2}{2} \quad (1.2.65)$$

Note que para  $\Delta \sim 1$ , as equações (1.2.63) e (1.2.64) são as mesmas, até primeira ordem. Então, integrando (1.2.64) sobre todo  $\rho$  vemos que a partícula está confinada a uma região de tamanho  $R$ , a escala de comprimento do AdS. Agora, para  $\Delta \gg 1$ , (1.2.63) oscilará muito rapidamente entorno da uma exponencial de  $-\Delta \frac{\rho^2}{2}$  de forma que podemos



aproximá-lo por (1.2.64) e a partícula é vista como confinada a uma região de tamanho  $R/\sqrt{\Delta}$ .

Para obter a relação entre a massa de *bulk*,  $m$ , e  $\Delta$ , voltamos à derivação do estado fundamental usando a condição de destruição  $K_\mu\psi_0 = 0$ , e substituímos isso na equação de Schrödinger (1.2.60), com  $\omega = \Delta$ . Encontramos que ela é satisfeita somente se  $m^2 = \Delta(\Delta - d)$ . É interessante estabelecer essa relação para manter apenas a escala de comprimento do AdS,  $R$ , e a escala de massa da partícula importantes para o problema.

### 1.3 Campo Livre no AdS

Na seção anterior vimos o que acontece com a partícula livre, clássica e quântica, no AdS. Agora gostaríamos de ver como as coisas são no caso de muitas partículas livres (tantas que possamos tratá-las como campos).

A característica mais marcante dos estados de Fock, os estados de muitas partículas livres, é que seus números quânticos são simplesmente a soma dos números quânticos das partículas individuais. Em particular, a energia dos estados de Fock (para nós os autovalores de  $D$ ) é a soma das energias dos estados das partículas individuais. Por isso, para descrever estados de muitas partículas no AdS, vamos usar como base operadores escada como os do espaço de Hilbert de teoria quântica de campos livres. O comutador é

$$[a_{n\ell J}, a_{n\ell J}^\dagger] = 1 \quad (1.3.1)$$

de forma que um estado de  $k$  partículas pode ser escrito a partir do estado do vácuo,  $|0\rangle$ , aplicando-se  $k$  vezes o operador de criação:

$$a_{n_1\ell_1 J_1}^\dagger a_{n_2\ell_2 J_2}^\dagger \cdots a_{n_k\ell_k J_k}^\dagger |0\rangle \quad (1.3.2)$$

Como a energia de cada partícula é  $E = \Delta + 2n + \ell$ , e  $N = a_{n\ell J}^\dagger a_{n\ell J}$  é o *operador número*, cujo autovalor conta o número de partículas com números quânticos  $n, \ell, J$ , então a Hamiltoniana do AdS,  $D$ , é dada por

$$D = \sum_{n,\ell,J} (\Delta + 2n + \ell) a_{n\ell J}^\dagger a_{n\ell J} \quad (1.3.3)$$

#### 1.3.1 Campos Clássicos num Espaço-tempo Qualquer

Um campo escalar livre, num espaço-tempo qualquer tem ação

$$S = -\frac{1}{2} \int d^d x dt \sqrt{g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2) \quad (1.3.4)$$

usando  $\partial_\mu(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\phi\partial_\nu\phi) = \sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \phi\partial_\mu(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi)$ , temos

$$S = -\frac{1}{2} \int d^{d+1}x \partial_\mu(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\phi\partial_\nu\phi) + \frac{1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{g}\phi \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) - \frac{1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{g}\phi m^2\phi \quad (1.3.5)$$

onde  $\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) = \Delta$  é o Laplaciano. Assim, ficamos com

$$S = -\frac{1}{2} \int d^{d+1}x \partial_\mu(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\phi\partial_\nu\phi) + \frac{1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{g}\phi(\Delta - m^2)\phi \quad (1.3.6)$$

Se  $\phi$  obedece a equação de Klein-Gordon

$$(\Delta - m^2)\phi = 0 \quad (1.3.7)$$

o primeiro termo da equação (1.3.5) é zero. O segundo termo pode ser escrito como uma integral de superfície, a fronteira do AdS (que é simplesmente o espaço-tempo de Minkowski).

$$S = \frac{1}{2} \int d^d y \sqrt{\gamma} \phi \hat{n}^\mu \partial_\mu \phi \quad (1.3.8)$$

onde  $y$  são as coordenadas na superfície,  $\gamma$  é a métrica induzida na superfície, e  $\hat{n}^\mu$  é o vetor unitário ortogonal à superfície. Essa integral pode ser separada em duas: uma para uma direção escolhida,  $t$ , por exemplo, e outra para as  $d - 1$  direções espaciais restantes. Como definimos que o campo é zero no infinito espacial, só resta a parte temporal da integral, e a (1.3.8) fica

$$S = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_f - \Sigma_i} dt \sqrt{g} \phi \hat{n}^t \partial_t \phi \quad (1.3.9)$$

onde  $\Sigma_i$  e  $\Sigma_f$  são superfícies de Cauchy no passado e no futuro, respectivamente.

### **Soluções para a equação de Klein-Gordon**

Para encontrar as funções de onda  $\phi$  que satisfazem a equação (1.3.7), primeiro vamos calcular o laplaciano explicitamente. É conveniente usar a métrica em coordenadas de Poincaré, já que elas fazem uma separação de variáveis e é assumindo essa possibilidade que vamos encontrar as soluções. Como vimos na seção 1.1.1,

$$g^{\mu\nu} = ds^2 = \frac{R}{z^2} \left( dt^2 - dz^2 - \sum_{i=1}^{d-1} dx_i^2 \right) \quad (1.3.10)$$

Assim, o Laplaciano fica

$$\Delta = \frac{z^{d+1}}{R^{d+1}} \left[ \partial_z \left( \frac{R^{d+1}}{z^{d+1}} \frac{z^2}{R^2} \partial_z \right) + \frac{R^{d+1}}{z^{d+1}} \frac{z^2}{R^2} \Delta_{(d)}^2 \right] \quad (1.3.11)$$

$$\implies \Delta = \frac{z^2}{R^2} \left[ (d-1)z^{-1}\partial_z - \partial_z^2 + \Delta_{(d)} \right] \quad (1.3.12)$$

onde  $t$  é um dos  $x$ 's com a assinatura lorentziana embutida em  $\Delta_{(d)}$ , que é o laplaciano do espaço-tempo de Minkowski.

Devido à invariância sob translações, podemos separar as variáveis, e as soluções serão do tipo  $\phi(z, x) = f(z)\Phi(x)$ . Substituindo isso e o laplaciano (1.3.12) na equação de movimento, temos:

$$\frac{z^2}{R^2} \left[ (d-1)z^{-1}f'(z)\Phi(x) - f''(z)\Phi(x) + f(z)\Delta_{(d)}\Phi(x) \right] - m^2 f(z)\Phi(x) = 0 \quad (1.3.13)$$

$$\implies \frac{(d-1)f'(z)}{z} - \frac{f''(z)}{f(z)} - \frac{R^2}{z^2}m^2 = -\frac{\Delta_{(d)}\Phi(x)}{\Phi(x)} = k^2 \quad (1.3.14)$$

onde  $k^2 > 0$  porque vamos analisar, a título de exemplo, o caso euclidiano, embora não haja muita diferença em relação ao caso lorentziano. Assim, temos

$$\begin{cases} (\Delta_{(d)} + k^2)\Phi(x) = 0 \\ z^2 f''(z) - (d-1)zf'(z) + (m^2 R^2 + k^2 z^2)f_k = 0 \end{cases} \quad (1.3.15)$$

Podemos facilmente identificar a primeira equação como sendo a equação de Klein-Gordon para o espaço-tempo de Minkowski. A sua versão euclidiana tem solução

$$\Phi(x) = \frac{e^{ikx}}{(2\pi)^d} \quad (1.3.16)$$

A segunda equação pode ser reescrita pra ficar como a equação de Bessel modificada, cuja solução é conhecida. Fazemos a mudança de variáveis  $f_k = z^{\frac{d}{2}}g_k$ . Obteremos

$$(kz)^2 g_k'' + (kz)g_k' - \left( \frac{d^2}{4} + m^2 R^2 + k^2 z^2 \right) g_k = 0 \quad (1.3.17)$$

onde consideramos  $g_k$  como função de  $z$  e  $k$ , já que a equação de Bessel modificada tem a forma

$$x^2 f'' + x f' - (x^2 + \nu^2) f = 0 \quad (1.3.18)$$

As soluções são

$$g_k(kz) = a_k K_\nu(kz) + b_k I_\nu(kz) \quad (1.3.19)$$

onde definimos o parâmetro  $\nu$  como

$$\nu = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{m^2}{R^2}} \quad (1.3.20)$$

Então  $f_k$  é dada por

$$f_k(z) = a_k(kz)^{\frac{d}{2}} K_\nu(kz) + b_k(kz)^{\frac{d}{2}} I_\nu(kz) \quad (1.3.21)$$

Para garantir que a solução é regular em  $z \rightarrow \infty$  e  $z \rightarrow 0$ , vamos olhar para o comportamento assintótico das funções de Bessel modificadas de ordem  $\nu$ :

$$I_\nu(z) \sim e^{kz} \quad K_\nu(z) \sim e^{-kz}, \quad \text{para } z \rightarrow \infty \quad (1.3.22)$$

de modo que precisamos impor a condição  $b_k = 0$ , e

$$K_\nu \approx \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{kz}\right)^\nu + \frac{\Gamma(-\nu)}{2} \left(\frac{kz}{2}\right)^\nu, \quad \text{para } z \rightarrow 0 \quad (1.3.23)$$

e então  $f_k(z)$  fica

$$f_k(z) \approx a_k(kz)^{\frac{d}{2}} \left[ \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{kz}\right)^\nu + \frac{\Gamma(-\nu)}{2} \left(\frac{kz}{2}\right)^\nu \right] \quad (1.3.24)$$

$$\implies f_k(z) \approx \phi_0(k) z^{\Delta_-} + \phi_1(k) z^{\Delta_+} \quad (1.3.25)$$

onde usamos as definições

$$\phi_0(k) = a_k 2^{\nu-1} \Gamma(\nu) k^{\Delta_-}, \quad \phi_1(k) = a_k 2^{-(\nu+1)} \Gamma(-\nu) k^{\Delta_+} \quad (1.3.26)$$

onde  $\Delta_\pm = \frac{d}{2} \pm \nu$  são os *fatores de escala*.

Finalmente, a solução para a equação de Klein-Gordon (1.3.7) é

$$\phi(z, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [\phi_0(k) z^{\Delta_-} + \phi_1(k) z^{\Delta_+}] e^{ikx} \quad (1.3.27)$$

Para o caso minkowskiano ( $k^2 < 0$ ), a equação diferencial para  $f_k(z)$  a ser resolvida vai ser a equação de Bessel e a solução será similar a do caso euclidiano, mas com a função de Bessel  $J_\nu$  no lugar da função de Bessel modificada  $K_\nu$ , para  $\nu$  contínuo e caso  $\nu$  seja discreto (caso da partícula livre), o coeficiente  $b_k$  não precisará ser nulo e teremos as duas funções de Bessel como solução.

### 1.3.2 Quantização

Vamos voltar alguns passos e considerar simplesmente que a solução para a partícula livre é do tipo

$$\phi(t, x) = \sum_n \left( c_n \psi_n(t, x) + c_n^\dagger \psi_n^\dagger(t, x) \right) \quad (1.3.28)$$

em que os coeficientes  $c_n$  podem ser determinados a partir das condições iniciais  $\phi(0, x)$  e  $\dot{\phi}(0, x)$  na superfície  $t = 0$ , considerando-se o que segue.

Para quaisquer duas funções que se anulam suficientemente rápido, podemos definir a integral

$$\int_{\Omega} d^d x dt \sqrt{-g} \left[ \psi_1^\dagger (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu - m^2) \psi_2 - [(g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu - m^2) \psi_1^\dagger] \psi_2 \right] \quad (1.3.29)$$

sobre alguma região  $\Omega$ . Similarmente ao que fizemos para chegar na equação (1.3.8), vamos considerar que  $\Omega$  se estende por toda a região entre as superfícies de Cauchy  $\Sigma_i$  e  $\Sigma_f$ , de modo que possamos reescrever a equação (1.3.29) como uma integral de superfície

$$\int_{\Sigma_f - \Sigma_i} d^d x \sqrt{-g} g^{00} \left[ \psi_1^\dagger \nabla_t \psi_2 - (\nabla_t \psi_1^\dagger) \psi_2 \right] \quad (1.3.30)$$

onde consideramos que a direção temporal é ortogonal a  $\Sigma$  e  $t$  aponta pro futuro nas duas superfícies. Se  $\phi_1$  e  $\phi_2$  obedecem a equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Minkowski, então a integral (1.3.29) deve ser nula, de modo que a integral em cada superfície será a mesma. Note, ainda, que a integral em cada superfície é precisamente a definição do produto interno  $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle$ , a menos do fator multiplicativo  $i$ , isto é,

$$\begin{aligned} \langle \psi_1, \psi_2 \rangle &\equiv i \int_{\Sigma_f} d^d x \sqrt{-g} g^{00} \left[ \psi_1^\dagger \nabla_t \psi_2 - \psi_2 \nabla_t \psi_1^\dagger \right] \\ &= i \int_{\Sigma_i} d^d x \sqrt{-g} g^{00} \left[ \psi_1^\dagger \nabla_t \psi_2 - \psi_2 \nabla_t \psi_1^\dagger \right] \end{aligned} \quad (1.3.31)$$

o que define um produto interno conservado.

Agora os coeficientes  $c_n$  podem ser calculados:

$$c_n = \langle \phi(0, x), \psi_n \rangle = i \int_{\Sigma_f} d^d x \sqrt{-g} g^{00} \left[ \phi^\dagger(0, x) \dot{\psi}_n - \psi_n \dot{\phi}^\dagger(0, x) \right] \quad (1.3.32)$$

Agora, considere o momento canônico

$$\pi(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = \sqrt{-g(x)} g^{00}(x) \dot{\phi}(x) \quad (1.3.33)$$

que deve satisfazer, tanto classicamente quanto quanticamente, a relação de comutação

$$[\pi(x), \phi(y)] = -i \delta^d(x - y) \quad (1.3.34)$$

Para construir a versão quântica da solução (1.3.28), substituímos os coeficientes  $c_n$  e  $c_n^\dagger$  do  $n$ -ésimo oscilador harmônico clássico pelos operadores de destruição e criação do  $n$ -ésimo oscilador harmônico quântico, i.e.,

$$\phi(t, x) = \sum_n \frac{1}{N_n} \left[ \psi_n(t, x) a_n + \psi_n^\dagger(t, x) a_n^\dagger \right] \quad (1.3.35)$$

que satisfaz (1.3.34) se

$$\sqrt{-g(x)} g^{00}(x) \sum_n \frac{1}{N_n^2} \left[ \dot{\psi}_n(0, x) \psi_n^\dagger(0, y) - \psi_n(0, y) \dot{\psi}_n^\dagger(0, x) \right] = -i\delta^d(x - y) \quad (1.3.36)$$

### 1.3.3 Quantização Canônica de um Campo Escalar no AdS

Vamos considerar a quantização para  $d = 2$  em coordenadas globais. A ação do campo livre nesse caso é

$$S = \frac{1}{2} \int dt d\rho d\theta \frac{\sin \rho}{\cos \rho} \left( \dot{\phi}^2 - (\partial_\rho \phi)^2 - \frac{1}{\sin^2 \rho} (\partial_\theta \phi)^2 - \frac{m^2}{\cos^2 \rho} \phi^2 \right) \quad (1.3.37)$$

O momento canônico conjugado a  $\phi$  é

$$P_\phi = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = \frac{\sin \rho}{\cos^2 \rho} \dot{\phi} \quad (1.3.38)$$

Vamos determinar  $\phi$  pra depois impor a relação de comutação. Assim como discutimos de forma geral na seção anterior, vamos resolver a equação de movimento e depois escrever  $\phi$  como uma superposição de osciladores harmônicos. A equação de movimento é

$$\ddot{\phi} - \frac{\cos^2 \rho}{\sin \rho} \partial_\rho (\sin \rho \cos^{-2} \rho \partial_\rho \phi) - \frac{1}{\sin^2 \rho} \partial_\theta^2 \phi + \frac{m^2}{\cos^2 \rho} \phi = 0 \quad (1.3.39)$$

Tomando  $\phi = e^{i\omega t + i\ell\theta} \psi(\rho)$ , temos

$$-\psi''(\rho) - \frac{1}{\cos \rho \sin \rho} \psi'(\rho) + \left( \frac{\ell^2}{\sin^2 \rho} + \frac{m^2}{\cos^2 \rho} \right) \psi(\rho) = \omega^2 \psi(\rho) \quad (1.3.40)$$

que é a equação (1.2.60) para  $d = 2$ , cuja solução é (1.2.57). E então o campo quântico que obedece a relação de comutação é

$$\phi(t, \rho, \Omega) = \sum_{n, \ell} \psi_{n\ell J}(t, \rho, \Omega) a_{n\ell} + \psi_{n\ell J}^*(t, \rho, \Omega) a_{n\ell}^\dagger \quad (1.3.41)$$

Vamos usar o produto interno (1.3.31) para escrever a condição de normalização para  $\psi_{n\ell}$ :

$$\langle \psi_{n\ell}, \psi_{n'\ell'} \rangle = \delta_{nn'} \delta_{\ell\ell'} = \int_{AdS} d^d x \sqrt{-g} g^{00} (\psi_{n\ell} \partial_t \psi_{n'\ell'} - \partial_t \psi_{n\ell} \psi_{n'\ell'}) \quad (1.3.42)$$

que pra  $d = 2$  fica

$$1 = \frac{2}{N_{\Delta n\ell}^2} \int d\rho d\theta \sin \rho (\Delta + 2n + \ell) \psi_{n\ell}^\dagger(\rho, \theta) \psi_{n\ell}(\rho, \theta) \quad (1.3.43)$$

$$\implies N_{\Delta n\ell} = (-1)^n \sqrt{\frac{n! \Gamma^2(\ell + 1) \Gamma(\Delta + n)}{\Gamma(n + \ell + 1) \Gamma(\Delta + n + \ell)}} \quad (1.3.44)$$

Nessa seção obtivemos, então, a forma para o campo livre no AdS e sua quantização normalizada. Com isso podemos comparar campos no AdS com campos de alguma teoria que viva na sua fronteira.

## 1.4 Aproximando-se da Fronteira do AdS

### 1.4.1 Assintoticidade e Diagramas de Penrose

Nossa motivação para usar diagramas de Penrose é que eles reescalam a métrica sem alterar os ângulos entre raios de luz, isto é, sem alterar sua estrutura causal e ainda assim compactam todo o espaço numa região finita. Ele é construído de modo que a separação entre dois pontos se *timelike/spacelike/lightlike* no espaço-tempo, é também *timelike/spacelike/lightlike* no diagrama de Penrose. Esse diagrama também é útil porque transforma a fronteira no infinito em uma região finita de codimensão 1, com estrutura causal herdada do interior. Como a luz se propaga em linhas definidas por  $ds^2 = 0$ , para distorcer a geometria de um espaço-tempo sem afetar a causalidade, multiplicamos toda a métrica por um fator de Weyl (ou fator conforme)  $\Omega(x)$ , mandando  $g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega(x)g_{\mu\nu}(x)$ , o que preserva  $ds^2 = 0$ .

#### O Diagrama de Penrose para Espaço-Tempo Plano

Vejamos como isso é feito para espaço-tempo de Minkowski. Se escrevermos a métrica como

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (1.4.1)$$

então podemos introduzir as coordenadas

$$\tan U = (t + r)/2 \quad \text{e} \quad \tan V = (t - r)/2 \quad (1.4.2)$$

onde  $U, V \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Nessas coordenadas a métrica fica

$$ds^2 = \frac{4dUdV}{\cos^2 U \cos^2 V} + (\tan U - \tan V)^2 d\Omega^2 \quad (1.4.3)$$

Podemos multiplicar pelo fator de Weyl  $\cos^2 U \cos^2 V$ . Agora, usando coordenadas  $T = U + V$  e  $R = U - V$  e as identidades trigonométricas  $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$  e  $\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ , é fácil chegar à métrica

$$ds^2 = dT^2 - dR^2 + \sin^2(R)d\Omega^2 \quad (1.4.4)$$

com  $T$  e  $R$  cobrindo um diamante finito. A fronteira é, portanto, o contorno desse diamante, um diamante nulo, ou *lightlike*: suas arestas são pontos especiais onde as geodésicas *lightlike* e *spacelike* terminam, e seus lados são superfícies nulas, onde todos os raios de luz se aproximam do infinito. Esse subespaço-tempo não é bem comportado: não herda a assinatura Lorentziana, por exemplo. Daí a dificuldade em encontrar uma descrição holográfica de um espaço-tempo plano.

### O Diagrama de Penrose e a Fronteira do AdS Global

Multiplicando (1.1.3) pelo fator de Weyl  $\cos^2(\rho)$  obtemos a métrica, em coordenadas globais, do diagrama de Penrose do AdS:

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \sin^2(\rho)d\Omega^2 \quad (1.4.5)$$

que expressa o cilindro  $R \times S^{d-1}$ , se tomarmos  $\rho \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . Ou seja, temos como fronteira um espaço-tempo bem comportado, parametrizado por  $t$  e  $\Omega$ , que herda a assinatura Lorentziana do AdS. Mais simples construir uma descrição holográfica nesse caso.

### O Diagrama de Penrose e a Fronteira do AdS em coordenadas de Poincaré

Multiplicando a equação (1.1.5), que dá a métrica do AdS em coordenadas de Poincaré *patch*, pelo fator de Weyl  $z^2$ , obteremos

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - \sum_{i=1}^{d-1} dx_i^2 \quad (1.4.6)$$

onde  $z \in (0, \infty)$ . Essa é exatamente a métrica de um meio espaço-tempo plano de  $d + 1$  dimensões, com assinatura Lorentziana. Assim, o Diagrama de Penrose nesse caso deve ser meio diamante. Fazendo  $z \rightarrow \infty$  obtemos a métrica da fronteira.



### 1.4.2 Aproximando-se da fronteira de forma geral

Na seção anterior obtivemos a métrica da fronteira de duas formas diferentes: em coordenadas globais, quando nos aproximamos dela tomando  $\rho \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , a taxas iguais para todo  $(\tau, \hat{\Omega})$ , e em coordenadas de Poincaré, quando nos aproximamos dela tomando  $z \rightarrow 0$ , a taxas iguais para todo  $(t, \vec{x})$ . As fronteiras resultantes eram um cilindro e um espaço de Minkowski, respectivamente. Essas taxas, contudo, não precisam ser iguais pra cada ponto no infinito  $(\tau, \hat{\Omega}_i)$ .

Mais precisamente, escolhendo alguma função  $f(t, \hat{\Omega}_i)$ , definida na vizinhança  $\rho = \rho(\epsilon, f) = \frac{\pi}{2} - \epsilon f(t, \hat{\Omega}_i)$  com  $\epsilon$  pequeno, e tomando  $\epsilon \rightarrow 0$ , obtemos uma métrica efetiva para a fronteira, dada por

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \frac{1}{\cos^2(\rho(\epsilon, f))} (dt^2 - \sin^2 \rho d\Omega_i^2) \\
&= \frac{1}{\cos^2(\rho(\epsilon, f))} (dt^2 (1 - \cos^2 \rho) d\Omega_i^2) \\
&= \frac{1}{(\cos \frac{\pi}{2} \cos \epsilon f + \sin \frac{\pi}{2} \sin \epsilon f)^2} (dt^2 (1 - (\cos(\frac{\pi}{2}) \cos(\epsilon f) + \sin(\frac{\pi}{2}) \sin(\epsilon f))^2) d\Omega_i^2) \\
&\approx \frac{1}{\sin^2 \epsilon f} (dt^2 - (1 - \sin^2 \epsilon f) d\Omega_i^2) \\
&\approx \frac{1}{\epsilon^2 [f(t, \Omega)]^2} (dt^2 - (1 - \epsilon)^2 d\Omega_i^2) \\
&\rightarrow [f(t, \hat{\Omega}_i)]^{-2} (dt^2 - d\hat{\Omega}_i^2)
\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

que é a métrica do cilindro a menos de um fator de Weyl.

### 1.4.3 A versão Euclidiana

A fim de relacionar o AdS Euclidiano em coordenadas globais com AdS Euclidiano em coordenadas de Poincaré, escrevemos

$$\begin{aligned}
X_0 &= R \frac{\cosh \tau}{\cos \rho} = \frac{1}{2} \left( \frac{z^2 + \vec{r}^2 + R^2}{z} \right) \\
X_{d+1} &= R \frac{\sinh \tau}{\cos \rho} = \frac{1}{2} \left( \frac{z^2 + \vec{r}^2 - R^2}{z} \right) \\
X_i &= R \tan \rho \Omega_i = \frac{R}{z} r_i
\end{aligned} \tag{1.4.8}$$

o que implica

$$\vec{r}_i = \hat{\Omega}_i e^\tau \sin \rho \text{ e } z = e^\tau \cos \rho \tag{1.4.9}$$

onde  $\vec{r} = (\vec{x}, t)$ .

À medida que tomamos o limite  $z \rightarrow 0$  temos  $\rho \rightarrow \frac{\pi}{2}$  com as coordenadas mapeadas da seguinte forma

$$e^\tau \cos \rho e^\tau \Omega_i^2 = \Omega_i^2 e^{2\tau} \sin^2 \rho \left( \frac{\pi}{2} - \rho \right) \implies z e^\tau \Omega_i^2 = r_i^2 \left( \frac{\pi}{2} - \rho \right) \quad (1.4.10)$$

$$\implies \frac{e^{\frac{\tau}{2}} \hat{\Omega}_i}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \rho}} = \frac{r_i}{\sqrt{z}} \quad (1.4.11)$$

o que produz uma métrica de espaço plano para a fronteira,  $ds^2 = dr^2$ .

Em coordenadas globais, aproximando-se da fronteira com  $\rho = \rho(\epsilon, f) = \frac{\pi}{2} - \epsilon f(t, \hat{\Omega}_i)$ , com  $f(t, \hat{\Omega}_i) = e^{-\tau}$  obtemos também uma métrica plana (em coordenadas polares) para a fronteira,  $ds^2 = e^{2\tau}(dt^2 + d\Omega^2) = dr^2 + r^2 d\Omega^2$ , com  $r = e^\tau$ .

#### 1.4.4 A Versão Lorentziana em Coordenadas de Poincaré

Tomando

$$\rho(z \rightarrow 0; \tau, \hat{\Omega}_i) = \frac{\pi}{2} - \frac{z}{R^2}(\cos \theta - \cos \tau) \quad (1.4.12)$$

onde  $\theta$  é o complemento do ângulo  $\Omega_d$ , obtemos a métrica

$$ds^2 = \frac{1}{(\cos \theta - \cos \tau)^2} (d\tau^2 - d\theta^2 - \sin^2 \theta d\Omega_{d-1}^2) \quad (1.4.13)$$

Fazendo a usual mudança de variáveis  $U = (\tau - \theta)/2$  e  $V = (\tau + \theta)/2$ , obtemos a métrica

$$ds^2 = \frac{1}{\sin^2 U \sin^2 V} (dU dV - \sin^2(U + V) d\Omega_{d-1}^2) \quad (1.4.14)$$

Fazendo a segunda mudança de variáveis,  $\cot u = U$  e  $\cot v = V$ , a métrica fica

$$ds^2 = dudv - \frac{(u+v)^2}{4} d\Omega_{d-1}^2 \quad (1.4.15)$$

Finalmente, fazendo  $t = (u - v)/2$  e  $r = (u + v)/2$  obtemos a métrica

$$ds^2 = dr^2 - dt^2 - r^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad (1.4.16)$$

que é, obviamente, plana.

A lição importante dessa seção é: não importa a que taxa é feita a aproximação da fronteira, nem em que sistema de coordenadas isso é feito, obtemos sempre uma métrica plana para a fronteira do AdS. Algo interessante a se acrescentar é que também podemos

obter uma métrica de de Sitter para a fronteira do AdS. Isso é feito da seguinte maneira. Tome o hiperboloide  $dS_{d+1}$

$$X_0^2 - \sum_{i=1}^{d+1} X_i^2 = -R^2 \quad (1.4.17)$$

e fixe a constante de Hubble em  $R=1$ . Usando a identidade  $\sinh^2 t - \cosh^2 t = -1$ , a métrica para  $dS_{d+1}$  fica

$$ds^2 = dt^2 - \cosh^2 t d\Omega^2 \quad (1.4.18)$$

Mudando para as coordenadas  $(\eta, \Omega)$  de acordo com  $\tan(\eta/2) = \tanh(t/2)$ , temos

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 \eta} (d\eta^2 - d\Omega^2) \quad (1.4.19)$$

que não é espacialmente limitada, possui limites temporais em  $\eta = \pm\pi/2$  e é conformalmente plana (ou seja, uma candidata à métrica da fronteira do AdS). Escolhendo  $f(t, \Omega) = \cos t$ , isto é, nos aproximando de cada ponto da fronteira de acordo com

$$\rho = \frac{\pi}{2} - \epsilon \cos t \quad (1.4.20)$$

à medida que  $\epsilon \rightarrow 0$ , obtemos, a partir de (1.1.3), a seguinte métrica

$$ds^2 = \frac{1}{\cos \eta} (d\eta^2 - d\Omega^2) \quad (1.4.21)$$

que é justamente a métrica pro espaço-tempo dS, dada por (1.4.19). Isso pode ser usado para usar holografia em espaço-tempo dS, algo não trivial a princípio [Kaplan 2016]!

### 1.4.5 Coordenadas do Espaço Ambiente e o Cone Nulo Projetivo

Podemos ver nas equações (1.4.8) que o limite  $\rho = \frac{\pi}{2} - \epsilon f(\tau, \Omega)$  com  $\epsilon \rightarrow 0$  leva todos  $X_A$  ao infinito. O cone nulo projetivo serve para estabelecer um limite finito para as coordenadas ambientes  $X_A$ . A definição das coordenadas nulas projetivas é

$$P_A \equiv \epsilon X_A \quad (1.4.22)$$

no limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Substituindo isso em (1.1.1) é imediato que

$$P_A P^A = 0 \text{ e } P_A \cong \lambda P_A \quad (1.4.23)$$

a segunda relação significa que o reescalamento positivo global  $\lambda$  não altera em nada as coordenadas nulas projetivas, isto é, é uma simetria de calibre. Dessa forma, pode

ser usada para determinar o reescalamto global de uma função  $f(P_A)$ . Vejamos como isso é feito.

**Definição 1.1.** *Seja  $f(P_A)$  uma função com dimensão de escala  $d$  [Schottenloher 2008] e seja  $f(P_A)$  homogênea, isto é,*

$$f(\lambda P_A) = \lambda^{-d} f(P_A) \quad (1.4.24)$$

*então  $f$  é dita conformalmente invariante. [Blumenhagen e Plauschinn 2009]*

Ou seja, quando  $f$  obedece (1.4.24), então seu fator de reescalamto global é  $\lambda$ .

Usando  $\rho = \frac{\pi}{2} - \epsilon e^{-\tau}$  e as equações (1.4.8) e (1.4.22) temos que o cone nulo projetivo é parametrizado por

$$P_A = (P_+, P_-, P_\mu) = (e^{2\tau}, 1, e^\tau \Omega_i) \quad (1.4.25)$$

onde  $P_\pm = P_0 \pm P_{d+1}$ . Tomando a coordenada no espaço plano euclidiano  $r_i = e^\tau \Omega_i$ , vemos que o espaço plano pode ser obtido como uma sessão do cone nulo projetivo, nomeadamente, a sua intersecção com o hiperplano  $P_- = 1$ .

## 2 Teoria Conforme de Campos (CFT)

Teorias Quânticas de Campos (QFTs) podem ser vistas sob a ótica de duas filosofias diferentes, mas compatíveis: a Wilsoniana e a Weinbergiana. A primeira entende QFTs como teorias que surgem quando "olhamos de longe", onde detalhes de pequena escala se tornam irrelevantes, tornando dois sistemas que teriam descrições bem distintas a pequenas escalas, descritíveis pela mesma QFT. Por exemplo, o Modelo de Ising [Cardy 1996], que "de perto" é tratado como uma grade de spins que interagem com seu vizinho mais próximo, "de longe" é descrito por uma QFT com ação  $S = \int d^d x \frac{1}{2}((\partial\phi)^2 - \lambda\phi^4)$ . Dentre as consequências desse ponto de vista está a possibilidade de haver um *cutoff* físico real para altas energias, isto é, de que uma QFT não seja apropriada para descrever fenômenos na extremidade UV do espectro de energia.

Já a filosofia Weinbergiana encara QFT como a única forma de descrever o espalhamento de partículas que seja simultaneamente unitária, local e Lorentz invariante. Isto é, está focada em descrever a amplitude de probabilidade de um estado incidente de partículas suficientemente não interagentes, no passado, evoluir para um estado emergente de partículas suficientemente não interagentes, no futuro. Que as partículas sejam suficientemente não interagentes é fundamental para que suas energias e momentos totais sejam a soma de suas energias e momentos individuais, o que faz com que possamos usar múltiplos osciladores harmônicos para descrever os campos. A introdução desses objetos satisfaz a localidade (pelo menos uma forma fraca dela), pois garante que processos muito distantes não se influenciem.

Se à invariância de Lorentz adicionarmos invariância sob reescalamentos, teremos QFTs com invariância conforme, que são justamente as Teorias de Campos Conformes - CFTs. Na verdade, no espaço de teorias, toda QFT pode ser vista como um ponto ao longo do Fluxo do Grupo de Renormalização (seguir esse fluxo é o nome técnico do que chamei "ver de longe"/"ver de perto", a depender da direção no eixo de energia que seguimos), cujas curvas terminam em alguma CFT [Kaplan 2016]. Dizemos que estudar CFTs remonta a estudar QFTs bem definidas, isto é, definidas para todo o espectro, ou, ainda, sem interrupção (ou *cutoff*) da descrição, muito menos uma interrupção física real.

### 2.1 O Grupo Conforme

As transformações ditas conformes são as que, localmente, preservam o ângulo entre quaisquer duas linhas. Mais precisamente, considere o mapa diferenciável  $\varphi : U \rightarrow V$ , onde  $U \subset M$  e  $V \subset M'$  são conjuntos abertos de diferentes variedades.  $\varphi$  é conforme se

satisfaz

$$g'_{\rho\sigma}(x') \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x) \quad (2.1.1)$$

onde  $x' = \varphi(x)$ , com  $x \in U$ . Como nosso interesse é em CFTs na fronteira do AdS, e vimos que esta é conformalmente plana para qualquer forma de aproximação, então podemos restringir esse tensor métrico ao  $\eta_{\mu\nu}$ . Além disso, vamos nos manter na mesma variedade  $d$ -dimensional, a  $\partial AdS$ . Assim, a condição para conformidade pode ser rescrita como

$$\eta_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda(x) \eta_{\mu\nu} \quad (2.1.2)$$

Uma transformação infinitesimal de coordenadas, até primeira ordem num parâmetro infinitesimal  $\epsilon(x) \ll 1$ ,

$$x'^{\rho} = x^{\rho} + \epsilon^{\rho}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.1.3)$$

quando substituída em (2.1.2) gera uma gama de condições para a invariância [Blumenhagen e Plauschinn 2009], a saber

$$\partial_{\mu}\epsilon_{\nu} + \partial_{\nu}\epsilon_{\mu} = \frac{2}{d}(\partial \cdot \epsilon) \eta_{\mu\nu} \quad (2.1.4)$$

com fator de escala  $\Lambda(x) = 1 + \frac{2}{d}(\partial \cdot \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ .

Agora vamos derivar algumas relações que serão úteis na determinação das transformações conformes. Tomando a derivada  $\partial^{\nu}$  da equação (2.1.4) e somando sobre  $\nu$  temos a relação:

$$\partial_{\mu}\partial_{\nu}(\partial \cdot \epsilon) + \square\partial_{\nu}\epsilon_{\mu} = \frac{2}{d}\partial_{\mu}\partial_{\nu}(\partial \cdot \epsilon) \quad (2.1.5)$$

Fazendo  $\mu \leftrightarrow \nu$  e somando o resultado à (2.1.5), depois de alguma manipulação algébrica trivial, temos uma segunda relação:

$$(d-1)\square(\partial \cdot \epsilon) = 0 \quad (2.1.6)$$

Agora, tomando a derivada  $\partial_{\rho}$  da (2.1.4):

$$\partial_{\rho}\partial_{\mu}\epsilon_{\nu} + \partial_{\rho}\partial_{\nu}\epsilon_{\mu} = \frac{2}{d}\eta_{\mu\nu}\partial_{\rho}(\partial \cdot \epsilon) \quad (2.1.7)$$

Fazendo permutações cíclicas para produzir mais duas equações:

$$\partial_{\nu}\partial_{\rho}\epsilon_{\mu} + \partial_{\mu}\partial_{\rho}\epsilon_{\nu} = \frac{2}{d}\eta_{\rho\mu}\partial_{\nu}(\partial \cdot \epsilon) \quad (2.1.8)$$

$$\partial_{\mu}\partial_{\nu}\epsilon_{\rho} + \partial_{\nu}\partial_{\mu}\epsilon_{\rho} = \frac{2}{d}\eta_{\nu\rho}\partial_{\mu}(\partial \cdot \epsilon) \quad (2.1.9)$$

subtraindo (2.1.7) da soma das duas últimas obtemos a última relação:

$$\partial_\mu \partial_\nu \epsilon_\rho = \frac{1}{d} (-\eta_{\mu\nu} \partial_\rho + \eta_{\rho\mu} \partial_\nu + \eta_{\nu\rho} \partial_\mu) (\partial \cdot \epsilon) \quad (2.1.10)$$

As identidades derivadas aqui vão ser utilizadas na seção seguinte para encontrar o grupo conforme.

### 2.1.1 Grupo e Álgebra Conforme em Três ou mais Dimensões

Da (2.1.6) vemos que  $(\partial \cdot \epsilon)$  é no máximo linear em  $x^\mu$ , i.e.,  $(\partial \cdot \epsilon) = A + B_\mu x^\mu$ , com  $A$  e  $B_\mu$  constantes. Então  $\epsilon_\mu$  é no máximo quadrática em  $x^\nu$  e o ansatz pra ela é

$$\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho \quad (2.1.11)$$

onde  $a_\mu, b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu\rho} \ll 1$  são constantes e  $c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu}$ . Vamos analisar os termos separadamente porque as funções constante, linear e quadrática são linearmente independentes no espaço de funções:

Substituindo  $\epsilon_\mu = a_\mu$  na condição para invariância (2.1.4) obtemos  $0 = 0$ , o que significa que a condição não restringe a transformação, então podemos substituir  $\epsilon_\mu = a_\mu$  direto na equação pra transformações infinitesimais de coordenadas (2.1.3). Obtemos, em primeira ordem

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu \quad (2.1.12)$$

que descreve translações infinitesimais, cujo gerador, conforme mostraremos adiante, é o operador momento  $P_\mu = -i\partial_\mu$ . A sua forma finita também é dada por (2.1.12)

Substituindo  $\epsilon_\mu = b_{\mu\nu} x^\nu$  em (2.1.4) obtemos  $b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{2}{d} b^\sigma \eta_{\mu\nu}$ . Escrevendo a parte antissimétrica de  $b_{\mu\nu}$  como  $m_{\mu\nu}$ , temos

$$b_{\mu\nu} = \alpha \eta_{\mu\nu} + m_{\mu\nu} \quad (2.1.13)$$

Considerando apenas a parte simétrica,  $b_{\mu\nu} = \alpha \eta_{\mu\nu}$ , a parte linear da (2.1.11) fica  $\epsilon_\mu = b_{\mu\nu} x^\nu = \alpha \eta_{\mu\nu} x^\nu = \alpha \eta^{\mu\nu} x_\nu$  e substituindo em (2.1.3) temos

$$x'^\mu = x^\mu + \alpha x^\mu \quad (2.1.14)$$

que descreve dilatações espaciais e temporais, gerador  $D = -ix^\mu \partial_\mu$ . Sua forma finita é também dada por (2.1.14)

Agora, considerando a parte anti-simétrica,  $b_{\mu\nu} = m_{\mu\nu}$ , a parte linear da (2.1.11) fica  $\epsilon^\mu = b^{\mu\nu} x_\nu = m^{\mu\nu} x_\nu$  e substituindo em (2.1.3) temos

$$x'^\mu = x^\mu + m^{\mu\nu} x_\nu = \delta_\nu^\mu x^\nu + m^\mu{}_\nu x^\nu = (\delta_\nu^\mu + m^\mu{}_\nu) x^\nu \quad (2.1.15)$$

que descreve rotações (espaciais e *boosts*) infinitesimais, cujo gerador é o operador momento angular  $L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$ , como provaremos adiante. Sua forma finita é

$$x'^\mu = M^\mu{}_\nu x^\nu \quad (2.1.16)$$

onde  $M$  é a matriz de rotação.

Agora, finalmente, substituindo a parte quadrática da (2.1.11) na (2.1.10) (que é obtida a partir da condição de invariância (2.1.4) mas é mais útil nesse caso), e lembrando que  $(\partial \cdot \epsilon) = \partial^\sigma \epsilon_\sigma$  temos:

$$\partial_\mu \partial_\nu c_{\rho\gamma\tau} x^\gamma x^\tau = \frac{1}{d} (-\eta_{\mu\nu} \partial_\rho + \eta_{\rho\mu} \partial_\nu + \eta_{\nu\rho} \partial_\mu) (\partial^\sigma c_{\sigma\gamma\tau} x^\gamma x^\tau) \quad (2.1.17)$$

$$\implies c_{\rho\gamma\tau} \delta_\nu^\gamma \delta_\mu^\tau = \frac{1}{d} (-\eta_{\mu\nu} \partial_\rho + \eta_{\rho\mu} \partial_\nu + \eta_{\nu\rho} \partial_\mu) c_{\sigma\gamma\tau} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} (\eta^{\lambda\gamma} x_\gamma) x^\tau \quad (2.1.18)$$

$$\implies c_{\rho\nu\mu} = \frac{1}{d} (-\eta_{\mu\nu} c^\lambda{}_{\lambda\rho} + \eta_{\rho\mu} c^\lambda{}_{\lambda\nu} + \eta_{\nu\rho} c^\lambda{}_{\lambda\mu}) \quad (2.1.19)$$

Fazendo  $b_\mu = \frac{1}{d} c^\lambda{}_{\lambda\mu}$ , temos

$$c_{\mu\nu\rho} = -\eta_{\rho\nu} b_\mu + \eta_{\mu\rho} b_\nu + \eta_{\nu\mu} b_\rho \quad (2.1.20)$$

substituindo em (2.1.3):

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + (-\eta^{\rho\nu} b^\mu + \eta^{\mu\rho} b^\nu + \eta^{\nu\mu} b^\rho) x^\nu x^\rho \\ &= x^\mu - x^\rho x_\rho b^\mu + x^\mu x_\nu b^\nu + x^\mu x_\rho b^\rho \\ &= x^\mu - (x \cdot x) b^\mu + x^\mu x_\nu b^\nu + x^\mu x_\rho b^\rho \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

$$\implies x'^\mu = x^\mu + 2(x \cdot b) x^\mu - (x \cdot x) b^\mu \quad (2.1.22)$$

que são as chamadas transformações especiais conformes (SCTs), na sua forma infinitesimal. Seu gerador é  $K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu)$ . Na sua forma finita essa transformação é

$$x'^\mu = \frac{x^\mu - b^\mu x^2}{1 - 2(b \cdot x) + b^2 x^2} \quad (2.1.23)$$

que pode ser reescrita de uma forma que evidencia o que essa transformação significa, em termos de transformações mais familiares, ilustradas na figura (4).

$$\frac{x'^\mu}{x'^2} = \frac{x^\mu}{x^2} - b^\mu \quad (2.1.24)$$

Note que as SCTs finitas não estão globalmente definidas: dado um vetor  $b^\mu$  não nulo, existe um evento  $x^\mu = \frac{1}{b \cdot b} b^\mu$  tal que o denominador da (2.1.23) é nulo, ou seja,  $x^\mu$  é



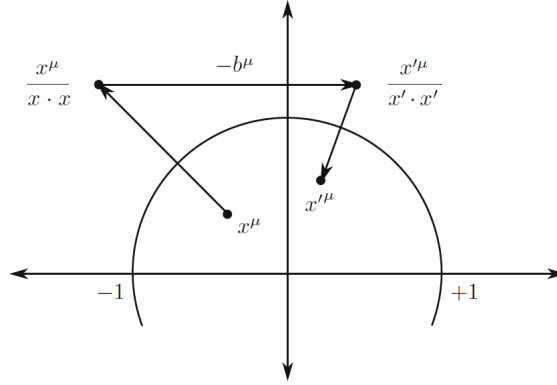


Figura 4 – SCTs correspondem a uma inversão ( $x^\mu \rightarrow (x^\mu)^{-1}$ ), seguida por uma translação ( $-b^\mu$ ), seguida por outra inversão ( $(x'^\mu)^{-1} \rightarrow x'^\mu$ ).

mapeado no infinito, que não pertence aos espaços planos (de qualquer assinatura). Assim, para definir globalmente as SCTs finitas, consideramos a compactação desses espaços, com o infinito adicionado [Munkres 1974] [Schottenloher 2008]

Agora, vamos calcular os geradores das transformações. Até primeira ordem, uma transformação de simetria infinitesimal genérica pode ser escrita como

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon_a \frac{\delta x'^\mu}{\delta \epsilon_a} \quad (2.1.25)$$

para coordenadas, com  $\epsilon \ll 1$ , e como

$$\phi'(x') = \phi(x) + \int \epsilon_a \frac{\delta F}{\delta \epsilon_a} \quad (2.1.26)$$

para campos, com  $F = F(\phi(x)) = \phi'(x')$ .

**Definição 2.1** (Geradores). *O gerador  $G_a$  de uma transformação de simetria é*

$$\phi'(x') - \phi(x) \equiv -i\epsilon_a G_a[\phi(x)] \quad (2.1.27)$$

Da (2.1.26) segue que

$$\phi'(x') = \phi(x) + \int \epsilon_a \frac{\delta F}{\delta \epsilon_a} \quad (2.1.28)$$

$$= \phi\left(x' - \epsilon_a \frac{\delta x'}{\delta \epsilon_a}\right) + \int \epsilon_a \frac{\delta F}{\delta \epsilon_a} \quad (2.1.29)$$

$$= \phi(x') - \epsilon_a \frac{\delta x'^\mu}{\delta \epsilon_a} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(x') + \int \epsilon_a \frac{\delta F}{\delta \epsilon_a}$$

$$\implies \phi'(x') - \phi(x') = -\epsilon_a \frac{\delta x'^\mu}{\delta \epsilon_a} \partial_\mu \phi(x') + \int \epsilon_a \frac{\delta F}{\delta \epsilon_a} \quad (2.1.30)$$

O lado esquerdo das (2.1.30) e (2.1.27) são iguais. Então

$$iG_a[\phi(x)] = \frac{\delta x'^\mu}{\delta \epsilon_a} \partial_\mu \phi(x) - \int \frac{\delta F}{\delta \epsilon_a} \quad (2.1.31)$$

Impondo as restrições:  $\epsilon_a$  não depende de  $x$ , e  $\phi$  é um campo escalar, então (2.1.31) fica

$$iG_a[\phi(x)] = \frac{\delta x'^\mu}{\delta \epsilon_a} \partial_\mu \phi(x) \quad (2.1.32)$$

para campos. Para coordenadas, consideramos  $\phi(x) = 1$  e temos

$$G = -i \frac{\delta x'^\mu}{\delta \epsilon_a} \partial_\mu \quad (2.1.33)$$

note que a equação do gerador para transformações de coordenadas também é essa mesmo no caso em que  $\epsilon_a$  depende de  $x$  (como é o caso das dilatações, rotações e SCTs).

Agora podemos calcular os geradores do grupo conforme em  $d$  dimensões (que também é o grupo de isometrias do  $\text{AdS}_{d+1}$ , o  $\text{SO}(d, 2)$  [Schottenloher 2008]!). Substituindo (2.1.12) em (2.1.33) obtemos o gerador de translações (novamente, simetria de uma  $\text{CFT}_d$  e do  $\text{AdS}_{d+1}$ ):

$$\begin{aligned} G &= -i \frac{\delta(x^\mu + a^\mu)}{\delta a^\nu} \partial_\mu \\ &= -i \delta_\nu^\mu \partial_\mu \\ &= -i \partial_\nu \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

que é o operador momento linear  $P_\nu$ .

Substituindo (2.1.14) em (2.1.33), temos

$$\begin{aligned} G &= -i \frac{\delta(ax^\mu)}{\delta a} \partial_\mu \\ &= -ix^\mu \partial_\mu \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

que é o operador dilatação  $D$ .

Substituindo (2.1.15) em (2.1.33), temos:

$$\begin{aligned}
G &= -i \frac{\delta(x^\mu + m_{\rho\nu} \eta^{\rho\mu} x^\nu)}{\delta m_{\rho\nu}} \partial_\mu & (2.1.36) \\
&= -i \left( \frac{\delta x^\mu}{\delta m_{\rho\mu}} + \frac{\delta(m_{\rho\nu} \eta^{\rho\mu} x^\nu)}{\delta m_{\rho\nu}} \right) \partial_\mu \\
&= -i \left( \frac{\delta(m_{\rho\nu} \eta^{\rho\mu} x^\nu)}{\delta m_{\rho\nu}} \partial_\mu + \frac{\delta(-m_{\nu\rho} \eta^{\nu\mu} x^\rho)}{\delta m_{\rho\nu}} \partial_\mu \right) \\
&= i(\eta^{\nu\mu} x^\rho \partial_\mu - \eta^{\rho\mu} x^\nu \partial_\mu) \\
&= i(x^\rho \partial^\nu - x^\nu \partial^\rho)
\end{aligned}$$

que é o operador momento angular  $L_{\rho\nu}$ .

Finalmente, substituindo (2.1.22) em (2.1.33), temos

$$\begin{aligned}
G &= -i \frac{\delta(x^\mu + 2(x \cdot b)x^\mu - (x \cdot x)b^\mu)}{\delta b^\mu} \partial_\mu & (2.1.37) \\
&= -i \left( 2 \frac{\delta(x \cdot b)x^\mu}{\delta b^\mu} - \frac{\delta x^2 b^\mu}{\delta b^\mu} \right) \partial_\mu \\
&= -i(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu)
\end{aligned}$$

que é o operador  $K_\mu$  das SCTs.

Agora que temos todos os geradores do grupo conforme, podemos apresentar a álgebra conforme.

$$[D, P_\mu] = iP_\mu \quad (2.1.38)$$

$$[D, K_\mu] = -iK_\mu \quad (2.1.39)$$

$$[K_\mu, P_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu}) \quad (2.1.40)$$

$$[K_\rho, L_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu) \quad (2.1.41)$$

$$[P_\rho, L_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu) \quad (2.1.42)$$

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}) \quad (2.1.43)$$

Temos  $d$  geradores de translação, 1 gerador de dilatação,  $d(d-1)/2$  geradores de rotação e  $d$  geradores de SCTs. Assim, a álgebra tem  $(d+1)(d+2)/2$  dimensões [Schottenloher 2008], o que confirma o isomorfismo entre o grupo conforme  $d$ -dimensional e o  $SO(d,2)$ , que é o grupo de simetrias do AdS.

Finalmente, vamos reescrever os geradores da seguinte forma:

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} \quad (2.1.44)$$

$$J_{-10} = D \quad (2.1.45)$$

$$J_{-1\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu) \quad (2.1.46)$$

$$J_{0\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu) \quad (2.1.47)$$

onde  $J_{mn} = -J_{nm}$ ;  $m, n = -1, 0, 1, 2, 3, \dots, d-1$ . E então toda a álgebra pode ser escrita como

$$[J_{mn}, J_{rs}] = i(\eta'_{ms}J_{nr} + \eta'_{nr}J_{ms} - \eta'_{mr}J_{ns} - \eta'_{ns}J_{mr}) \quad (2.1.48)$$

## 2.1.2 Grupo e Álgebra Conforme para Duas Dimensões

A condição para invariância (2.1.4) para duas dimensões euclidianas fica

$$\partial_\mu \epsilon_\nu = 0 \implies \begin{cases} \partial_0 \epsilon_1 = -\partial_1 \epsilon_0 \\ \partial_0 \epsilon_0 = \partial_1 \epsilon_1 \end{cases} \quad (2.1.49)$$

conhecidas como equações de Cauchy-Riemann. Uma função complexa cujas partes real e imaginária satisfazem (2.1.49) é dita holomórfica (em algum conjunto aberto). Então introduzimos coordenadas complexas:

$$z = x^0 + ix^1, \quad \epsilon = \epsilon^0 + i\epsilon^1, \quad \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_0 - i\partial_1) \quad (2.1.50)$$

$$\bar{z} = x^0 - ix^1, \quad \bar{\epsilon} = \epsilon^0 - i\epsilon^1, \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_0 + i\partial_1) \quad (2.1.51)$$

Com  $\epsilon(z)$  holomórfica, uma função  $f(z) = z + \epsilon(z)$  também é holomórfica, e dá origem, através de  $\epsilon(z)$ , a uma transformação conforme infinitesimal bidimensional  $z \mapsto f(z)$ . Assim, o tensor métrico se transforma como

$$ds^2 = dzd\bar{z} \mapsto \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} dzd\bar{z} = \Lambda(z) dzd\bar{z} \quad (2.1.52)$$

Para restringir menos a função  $\epsilon(z)$  vamos admitir que ela seja meromórfica com singularidades isoladas fora do conjunto aberto e escrevê-la como uma série de Laurent em torno de  $z = 0$ . Assim, uma transformação infinitesimal conforme fica

$$\begin{aligned} z' &= z + \epsilon(z) = z + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_n (-z^{n+1}) \\ \bar{z}' &= \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}) = \bar{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\epsilon}_n (-\bar{z}^{n+1}) \end{aligned} \quad (2.1.53)$$

onde os parâmetros infinitesimais  $\epsilon_n$  e  $\bar{\epsilon}_n$  são constantes. Os campos se transformam segundo

$$\begin{aligned}\phi(z, \bar{z}) &\mapsto \phi(z', \bar{z}') = \phi(z + \epsilon, \bar{z} + \bar{\epsilon}) \\ &= \phi(z, \bar{z}) + \epsilon \partial_z \phi(z, \bar{z}) + \bar{\epsilon} \partial_{\bar{z}} \phi(z, \bar{z}) \\ &= \phi(z, \bar{z}) + \sum_n (\epsilon_n (-z^{n+1}) \partial_z + \bar{\epsilon}_n (-\bar{z}^{n+1}) \partial_{\bar{z}}) \phi(z, \bar{z})\end{aligned}\tag{2.1.54}$$

$$\implies \phi(z', \bar{z}') - \phi(z, \bar{z}) = \sum_n (\epsilon_n l_n + \bar{\epsilon}_n \bar{l}_n) \phi(z, \bar{z})\tag{2.1.55}$$

e podemos identificar  $l_n = -z^{n+1} \partial_z$  e  $\bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1} \partial_{\bar{z}}$  como os geradores de simetrias infinitesimais conformes bidimensionais. A álgebra correspondente a esse grupo, conhecida como Álgebra de Witt, é

$$[l_m, l_n] = (m - n) l_{m+n}\tag{2.1.56}$$

$$[\bar{l}_m, \bar{l}_n] = (m - n) \bar{l}_{m+n}\tag{2.1.57}$$

$$[l_m, \bar{l}_n] = 0\tag{2.1.58}$$

e tem dimensão infinita, já que  $n \in \mathbb{Z}$ . As duas primeiras relações de comutação são idênticas a menos da mudança de variável  $z \leftrightarrow \bar{z}$ , o que sugere que  $z$  e  $\bar{z}$  devem ser tratadas como variáveis independentes. Assim, estamos considerando efetivamente  $\mathbb{C}^2$  em vez de  $\mathbb{C}$ , e a complexificação, em vez de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , é  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ . Mais ainda, lembremos que para que as SCTs estejam globalmente definidas, estamos considerando a compactação de  $\mathbb{C}^2$ , isto é,  $\mathbb{C}^2 \cup \infty \equiv \mathbb{C}^2_\infty$ , conhecida como esfera de Riemann.

A Álgebra de Witt admite uma extensão central [Schottenloher 2008], a Álgebra de Virasoro:

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + \frac{c}{12} (m^3 - n) \delta_{m+n,0}\tag{2.1.59}$$

$$[\bar{L}_m, \bar{L}_n] = (m - n) \bar{L}_{m+n} + \frac{c}{12} (m^3 - n) \delta_{m+n,0}\tag{2.1.60}$$

$$[L_m, \bar{L}_n] = 0\tag{2.1.61}$$

onde  $c$  é a carga central (ver apêndice A).

Outra coisa a ser notada é que em  $z = 0$  o gerador  $l_n = -z^{n+1} \partial_z$  não é uma singularidade só se  $n \geq -1$ . E em  $z = \infty$  surge a restrição oposta:  $n$  deve obedecer  $n \leq 1$ , o que é facilmente demonstrado fazendo uma mudança de variável  $z \rightarrow \frac{1}{w}$ . Assim, os

geradores globalmente definidos são  $l_{-1}$ ,  $l_0$  e  $l_1$ . Agora vamos ver quais as transformações geradas por essa subálgebra.

$$l_{-1} = -\partial_z \quad (2.1.62)$$

que é o gerador de translação,  $z \mapsto z + b$ ,  $b \in \mathbb{C}$ .

$$l_0 = -z\partial_z \quad (2.1.63)$$

que é o gerador de "dilatação complexa":  $z \mapsto az$ ,  $a \in \mathbb{C}$ . Fazendo  $z = re^{i\phi}$  na (2.1.63) obtemos:

$$l_0 + \bar{l}_0 = -r\partial_r \quad (2.1.64)$$

$$i(l_0 - \bar{l}_0) = -\partial_\phi \quad (2.1.65)$$

que são, respectivamente, o gerador de dilatação,  $r \mapsto ar$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , e o gerador de rotação. Por fim,

$$l_1 = -z^2\partial_z \quad (2.1.66)$$

que é o gerador de SCTs,  $w \mapsto w - c \implies z \mapsto \frac{z}{cz+1}$ ,  $c \in \mathbb{C}$ .

A transformação mais geral possível é, então:

$$z \mapsto \frac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}}, \text{ onde } a_{ij} \in \mathbb{C} \quad (2.1.67)$$

que só é inversível se  $\det A \neq 0$ . Essa transformação, conhecida como transformação de Möbius, é invariante sob  $a_{ij} \mapsto -a_{ij}$ , então do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  precisamos subtrair o grupo cíclico  $\mathbb{Z}_2$ . Assim, o grupo conforme da esfera de Riemann  $S^2 = \mathbb{C}_\infty$  é o grupo de Möbius  $SL(2, \mathbb{C}) \setminus \mathbb{Z}_2$ .

Para a álgebra de Virasoro, o segundo termo do lado direito das equações (2.1.59) e (2.1.60) é zero para  $m, n = -1, 0, 1$ , então ela se reduz à álgebra de Witt para esses casos e  $L_{-1}, L_0, L_1$  também são geradores do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$ , com  $L_{-1}$  gerando translações,  $L_0$ , dilatações e rotações, e  $L_1$ , SCTs. Isto é um fato geral: álgebras de Lie de dimensão finita não têm extensões centrais não triviais. [Blumenhagen e Plauschinn 2009]

## 2.2 Campos Primários

Campos primários também podem ser entendidos como tensores conformes irreduzíveis, por não poderem ser derivados a partir de outros campos, e porque todos os campos ditos descendentes são obtidos a partir deles. Eles são aniquilados pelos operadores de destruição e a menor dimensão conforme de uma representação da álgebra conforme, como veremos em detalhes nessa seção e também na seção 2.6. Vamos começar com algumas definições

**Definição 2.2.** Campos que dependem apenas em  $z$  são ditos holomórficos, ou quirais. Campos que dependem apenas em  $\bar{z}$  são ditos anti-holomórficos, ou anti-quirais.

**Definição 2.3.** Se um campo  $\phi(z, \bar{z})$  se transforma sob reescalamentos  $z \mapsto \lambda z$  de acordo com

$$\phi(z, \bar{z}) \mapsto \phi'(z, \bar{z}) = \lambda^h \bar{\lambda}^{\bar{h}} \phi(\lambda z, \bar{\lambda} \bar{z}) \quad (2.2.1)$$

então é dito que ele tem dimensões conformes  $(h, \bar{h})$ .

**Definição 2.4.** Se um campo se transforma sob transformações conformes  $z \mapsto f(z)$  de acordo com

$$\phi(z, \bar{z}) \mapsto \phi'(z, \bar{z}) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^h \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}} \phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})) \quad (2.2.2)$$

então ele é chamado campo primário de dimensão conforme  $(h, \bar{h})$ . Se (2.2.2) é verdade apenas para transformações globalmente conformes, então  $\phi$  é um campo quasi-primário. Os demais campos numa CFT são ditos secundários.

Essas definições são apresentadas como tal, mas na verdade podem ser derivadas a partir das funções de correlação [Francesco, Mathieu e Sénéchal 2012]

$$\langle \phi_1(z, \bar{z}) \phi_2(w, \bar{w}) \rangle = \frac{1}{Z} \int [d\Phi] \phi_1(z, \bar{z}) \phi_2(w, \bar{w}) e^{-S[\Phi]} \quad (2.2.3)$$

considerando a ação  $S$ , bem como o funcional de medida da integração  $[d\Phi]$ , conformemente invariantes. Veremos as funções de correlação em detalhes na seção 2.4.4.

Vejamos como fica a equação (2.2.2) para transformações conformes infinitesimais, isto é,  $z \mapsto f(z) = z + \epsilon(z)$ , com  $\epsilon(z) \ll 1$ . Até primeira ordem, temos

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^h = \left(\frac{\partial(z + \epsilon(z))}{\partial z}\right)^h \quad (2.2.4)$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^h + \left(\frac{\partial \epsilon(z)}{\partial z}\right)^h \quad (2.2.5)$$

$$= 1 + h \partial_z \epsilon(z) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

e

$$\phi(z + \epsilon(z), \bar{z}) = \phi(z) + \epsilon(z) \partial_z \phi(z, \bar{z}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.2.6)$$

$$\implies \phi'(z, \bar{z}) = (1 + h \partial_z \epsilon(z))(1 + \bar{h} \partial_{\bar{z}} \bar{\epsilon}(\bar{z})) \phi(z + \epsilon(z), \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z})) \quad (2.2.7)$$

$$= (1 + \bar{h} \partial_{\bar{z}} \bar{\epsilon}(\bar{z}) + h \partial_z \epsilon(z)) \phi(z, \bar{z}) (\epsilon(z) \partial_z \phi(z, \bar{z}) + \bar{\epsilon}(\bar{z}) \partial_{\bar{z}} \phi(\bar{z}, z))$$

$$= \phi(z, \bar{z}) + \phi(z, \bar{z}) (\bar{h} \partial_{\bar{z}} \bar{\epsilon}(\bar{z}) + h \partial_z \epsilon(z)) + \epsilon(z) \partial_z \phi(z, \bar{z}) + \bar{\epsilon}(\bar{z}) \partial_{\bar{z}} \phi(\bar{z}, z)$$

$$= \phi(z, \bar{z}) + (\bar{h} \partial_{\bar{z}} \bar{\epsilon} + \bar{\epsilon} \partial_{\bar{z}} + h \partial_z \epsilon + \epsilon \partial_z) \phi(z, \bar{z})$$

$$\implies \delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \phi(z, \bar{z}) = (\bar{h} \partial_{\bar{z}} \bar{\epsilon} + \bar{\epsilon} \partial_{\bar{z}} + h \partial_z \epsilon + \epsilon \partial_z) \phi(z, \bar{z}) \quad (2.2.8)$$

## 2.3 Tensor Energia-Momento

Talvez o mais bonito e importante teorema da física-matemática, o Teorema de Noether, afirma que para cada simetria de uma teoria (a simetria é diferenciável e é gerada pela ação) existe uma corrente local  $j_\mu(x)$  conservada, isto é,  $\partial^\mu j_\mu = 0$ . Para teorias com simetria conforme,  $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ , temos que

$$j_\mu = T_{\mu\nu}\epsilon^\nu \quad (2.3.1)$$

Para  $\epsilon = \text{constante}$ :

$$0 = \partial^\mu j_\mu = \partial^\mu(T_{\mu\nu}\epsilon^\nu) = \epsilon^\nu(\partial^\mu T_{\mu\nu}) \implies \partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (2.3.2)$$

Para  $\epsilon$  qualquer:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial^\mu j_\mu \\ &= (\partial^\mu T_{\mu\nu})\epsilon^\nu + T_{\mu\nu}(\partial^\mu \epsilon^\nu) \\ &= \frac{1}{2}T_{\mu\nu}(\partial_\mu \epsilon^\nu + \partial^\nu \epsilon^\mu) \\ &= \frac{1}{2}T_{\mu\nu}\left(\frac{\eta^{\mu\nu}}{d}\partial_\nu \epsilon^\nu + \frac{\eta^{\mu\nu}}{d}\partial_\mu \epsilon^\mu\right) \\ &= \frac{1}{d}T_\mu{}^\mu(\partial \cdot \epsilon) \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

isto é, numa CFT o tensor energia-momento tem traço nulo. Agora vejamos o que acontece para o caso bidimensional. Temos que

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu} T_{\alpha\beta} \quad (2.3.4)$$

Fazendo  $\mu = \nu = z$ , e  $\alpha, \beta = 0, 1$  e lembrando que  $x^0 = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  e  $x^1 = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ , temos

$$\begin{aligned} T_{zz} &= \frac{\partial x^0}{\partial z} \frac{\partial x^1}{\partial z} T_{01} + \frac{\partial x^0}{\partial z} \frac{\partial x^0}{\partial z} T_{00} + \frac{\partial x^1}{\partial z} \frac{\partial x^0}{\partial z} T_{10} + \frac{\partial x^1}{\partial z} \frac{\partial x^1}{\partial z} T_{11} \\ &= \frac{1}{2}(T_{00} - iT_{10}) \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Similarmente,

$$T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{2}(T_{00} + iT_{10}) \quad (2.3.6)$$

E ainda

$$T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = \frac{1}{4}T_\mu{}^\mu = 0 \quad (2.3.7)$$

Além disso,  $\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0$ , isto é,



$$\begin{cases} \partial_0 T_{00} + \partial_1 T_{10} = 0 \\ \partial_0 T_{01} + \partial_1 T_{11} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0 \\ \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \end{cases}$$

ou seja, os componentes do tensor momento-energia que não zeram,  $T_{zz}(z, \bar{z}) \equiv T(z)$  e  $T_{\bar{z}\bar{z}}(z, \bar{z}) \equiv \bar{T}(\bar{z})$ , são holomórfico e anti-holomórfico, respectivamente.

## 2.4 O Formalismo de Operadores

Nessa seção nosso objetivo é chegar a uma expressão para a Expansão do Produto de Operadores (OPE). A ideia da OPE é escrever o produto de dois campos  $A(x)$  e  $B(y)$  em pontos  $x$  e  $y$  quaisquer como a soma de campos locais  $C_i$ , o que é importante para determinar a estrutura algébrica do produto de campos. Produtos entre campos aparecem sempre que olhamos para funções de correlação, como veremos adiante. Funções de correlação, por sua vez, são uma generalização da matriz de espalhamento. Vamos reunir alguns elementos necessários à construção da OPE.

### 2.4.1 Quantização Radial

Ao fazer a compactação de  $\mathbb{C}^2$ , poderíamos ter tomado um rumo diferente, e compactado apenas um dos eixos do plano complexo, obtendo um cilindro em vez da esfera de Riemann. A esse processo chamamos quantização radial.

Vamos compactar a direção euclidiana espacial  $x^1$  num círculo de raio  $R$  (que consideraremos unitário) e introduzir a coordenada  $w$  definida como

$$w = x^0 + ix^1 \quad \text{com} \quad w \sim w + 2\pi i \quad (2.4.1)$$

Mapeando o cilindro no plano complexo, temos

$$z = e^w = e^{x^0} e^{ix^1} \quad (2.4.2)$$

ou seja, translações temporais  $x^0 \mapsto x^0 + a$  no cilindro são mapeadas em dilatações  $z \mapsto e^a z$ , enquanto translações espaciais  $x^1 \mapsto x^1 + b$  são mapeadas em rotações  $z \mapsto e^{ib} z$ .

Com essa forma diferente de compactação, vamos ver o que acontece com o campo  $\phi(z, \bar{z})$  de dimensão conforme  $(h, \bar{h})$ , definido em 2.3. Escrevendo-o como uma expansão de Laurent em torno de  $z = \bar{z} = 0$ , obtemos

$$\phi(z, \bar{z}) = \sum_{n, \bar{m} \in \mathbb{Z}} \phi_{n, \bar{m}} z^{-n-h} \bar{z}^{-\bar{m}-\bar{h}} \quad (2.4.3)$$

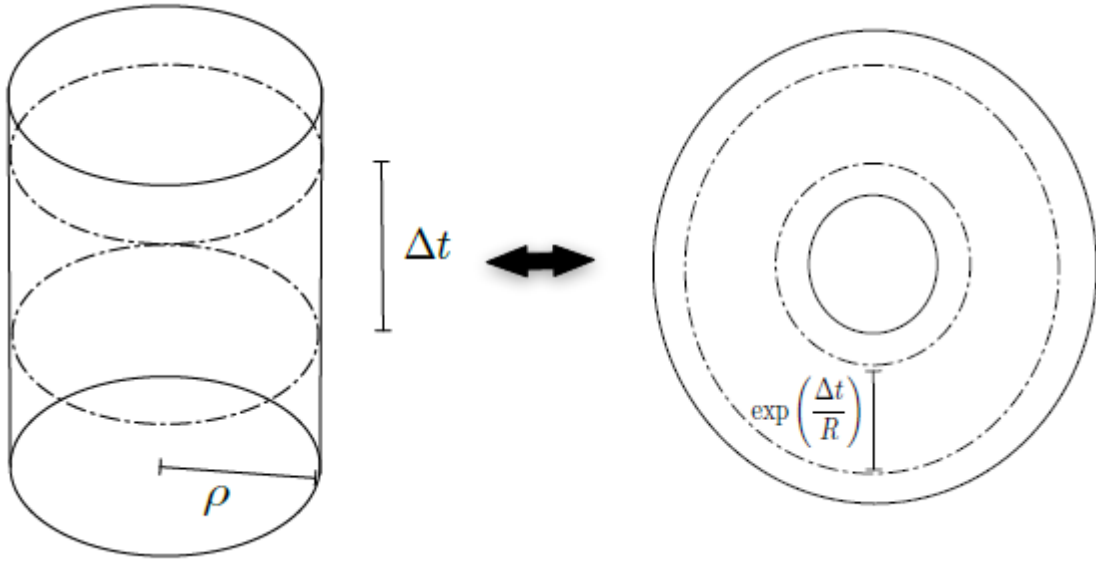


Figura 5 – quantização radial: o operador dilatação  $D$  da CFT corresponde ao operador translação temporal do AdS.

Olhando para (2.4.2), vemos que o passado infinito  $x^0 = -\infty$  é mapeado a  $z = \bar{z} = 0$ . Assim, um estado assintótico vindo do infinito para uma região de interação, pode ser definido como

$$|\phi_{in}\rangle = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \phi(z, \bar{z}) |0\rangle \quad (2.4.4)$$

$$= \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \sum_{n, \bar{m} \in \mathbb{Z}} z^{-n-h} \bar{z}^{-\bar{m}-\bar{h}} \phi_{n, \bar{m}} |0\rangle \quad (2.4.5)$$

que é não-singular contanto que

$$\phi_{n, \bar{m}} |0\rangle = 0 \quad \text{para } n > -h \text{ e } \bar{m} > -\bar{h} \quad (2.4.6)$$

Um forma mais elegante de expressar a quantização radial é

$$e^\tau = r \quad (2.4.7)$$

que vem do fato de  $z$  e  $\bar{z}$  poderem ser expressos, em coordenadas globais  $(r, \tau, \theta)$ , simultaneamente, por

$$z = \tau + i\theta \quad \text{e} \quad \bar{z} = \tau - i\theta \quad (2.4.8)$$

e

$$z = r e^{i\theta} \quad \text{e} \quad \bar{z} = r e^{-i\theta} \quad (2.4.9)$$

substituindo (2.4.2) e sua anti-holomórfica nas equações (2.4.9) vemos que as duas expressões levam à (2.4.7).

## 2.4.2 Cargas Conservadas

O Teorema de Noether implica que, dada a corrente (2.3.1), associada à simetria conforme, existe uma carga  $Q$  conservada

$$Q = \int dx^1 j_0 \quad \text{em } x^0 = \text{const.} \quad (2.4.10)$$

que é o gerador de transformações de simetria para um operador  $A$  que pode ser escrito como

$$\delta A = [Q, A] \quad (2.4.11)$$

onde o comutador é calculado em tempos iguais. Em coordenadas complexas, (2.4.10) fica

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (dz T(z) \epsilon(z) + d\bar{z} \bar{T}(\bar{z}) \bar{\epsilon}(\bar{z})) \quad (2.4.12)$$

onde  $|z| = |\bar{z}| = C$ . Então, fazendo  $A = \phi(z, \bar{z})$  em (2.4.11) temos

$$\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \phi(w, \bar{w}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz [T(z) \epsilon(z), \phi(w, \bar{w})] + \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\bar{z} [\bar{T}(\bar{z}) \bar{\epsilon}(\bar{z}), \phi(w, \bar{w})] \quad (2.4.13)$$

Para determinar se  $w$  e  $\bar{w}$  estão dentro ou fora do contorno  $C$ , lembremos que, em teoria quântica de campos, funções de correlação são definidas apenas como produtos ordenados temporalmente, o que, considerada a mudança de coordenadas que fizemos, significa uma ordenação radial. Assim, os produtos em (2.4.13) só fazem sentido para  $|z| > |w|$  e  $|\bar{z}| > |\bar{w}|$ . Em geral, a ordenação radial de dois operadores  $A$  e  $B$  é definida como

$$R(A(z)B(w)) \equiv \begin{cases} A(z)B(w) & \text{para } |z| > |w| \\ B(w)A(z) & \text{para } |w| > |z| \end{cases} \quad (2.4.14)$$

$$\implies \oint dz [A(z), B(w)] = \oint_{|z| > |w|} dz A(z)B(w) - \oint_{|z| < |w|} dz B(w)A(z) \quad (2.4.15)$$

$$= \oint_{C(w)} dz R(A(z)B(w)) \quad (2.4.16)$$

e a equação (2.4.13) fica

$$\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \phi(w, \bar{w}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(w)} (dz \epsilon(z) R(T(z) \phi(w, \bar{w})) + d\bar{z} \bar{\epsilon}(\bar{z}) R(\bar{T}(\bar{z}) \phi(\bar{w}, w))) \quad (2.4.17)$$

Reescrevendo (2.2.8) para  $\phi(w, \bar{w})$ , temos

$$\begin{aligned} \delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \phi(w, \bar{w}) = h(\partial_w \epsilon(w)) \phi(w, \bar{w}) + \epsilon(w) (\partial_w \phi(w, \bar{w})) + h(\partial_{\bar{w}} \bar{\epsilon}(\bar{w})) \phi(\bar{w}, w) \\ + \bar{\epsilon}(\bar{w}) (\partial_{\bar{w}} \phi(\bar{w}, w)) \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

Agora precisamos introduzir duas identidades, que vêm do resultado fundamental  $\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i$ :

$$\partial_w \epsilon(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(w)} dz \frac{\epsilon(z)}{(z-w)^2} \quad (2.4.19)$$

$$\epsilon(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(w)} dz \frac{\epsilon(z)}{z-w} \quad (2.4.20)$$

e seus respectivos anti-holomórficos. Multiplicando os dois lados da primeira expressão por  $h\phi(w, \bar{w})$ , os dois lados da segunda por  $\partial_w \phi(w, \bar{w})$ , e substituindo em (2.4.18), temos:

$$\begin{aligned} \delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \phi(w, \bar{w}) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(w)} dz h \frac{\epsilon}{(z-w)^2} \phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(w)} dz \frac{\epsilon(z)}{z-w} \partial_w \phi(w, \bar{w}) \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\bar{w})} d\bar{z} h \frac{\bar{\epsilon}}{(\bar{z}-\bar{w})^2} \phi(\bar{w}, w) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\bar{w})} d\bar{z} \frac{\bar{\epsilon}(\bar{z})}{\bar{z}-\bar{w}} \partial_{\bar{w}} \phi(\bar{w}, w) \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

Agora, comparando com (2.4.17), temos

$$\oint_{C(w)} dz \epsilon(z) R(T(z)\phi(w, \bar{w})) = \oint_{C(w)} dz \epsilon(z) \left( \frac{h}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w}{z-w} \right) \phi(w, \bar{w}) \quad (2.4.22)$$

juntamente com a expressão análoga para os termos anti-holomórficos. Então os integrandos de ambos os lados dessa equação são iguais a menos de um diferencial total e podemos escrever:

$$R(T(z)\phi(w, \bar{w})) = \frac{h}{(z-w)^2} \phi(w, \bar{w}) + \frac{\partial_w}{z-w} \phi(w, \bar{w}) + \dots \quad (2.4.23)$$

que é a expansão do produto radialmente ordenado (OPE) do operador energia-momento,  $T(z)$ , e do campo primário (já que usamos a (2.2.8) essa restrição foi imposta),  $\phi(w, \bar{w})$ .

Agora veremos como fica a expansão do produto (radialmente ordenado) de dois tensores energia-momento. Primeiramente, temos que a expansão de Laurent para o campo holomórfico  $T(z)$  é dada por

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n \quad (2.4.24)$$

onde

$$L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T(z) \quad (2.4.25)$$

são os modos de Laurent. Expressões análogas são válidas para o campo anti-holomórfico  $\bar{T}(\bar{z})$ . Substituindo isso tudo em (2.4.12), e lembrando da série de Laurent para  $\epsilon$  obtemos, para a parte holomórfica:

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz T(z) (-\epsilon_n z^{n+1}) \\ &= -\frac{\epsilon_n}{2\pi i} \oint dz \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^{-m-2} L_m z^{n+1} \\ &= -\frac{\epsilon_n}{2\pi i} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \oint dz L_m z^{n-m-1} \\ &= -\epsilon_n L_n \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

ou seja, identificamos os modos de Laurent,  $L_n$  com o os geradores das transformações infinitesimais conforme,  $Q_n$ , de modo que usando as expressões para  $Q_n$  no comutador  $[L_n, L_m]$ , devemos obter a álgebra de Virasoro, o que de fato acontece [Blumenhagen e Plauschinn 2009] para

$$R(T(z)T(w)) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} \quad (2.4.27)$$

onde  $c$  é a carga central e  $|z| > |w|$ . A expressão (2.4.27) é a OPE do tensor energia-momento holomórfico.

### 2.4.3 Transformação Conforme do Tensor Energia-Momento

Com base na expressão (2.4.23), podemos definir campos primários de uma maneira alternativa.

**Definição 2.5.** *Um campo  $\phi(z, \bar{z})$  é dito primário de dimensão conforme  $(h, \bar{h})$  se a expansão do produto entre os operadores  $T(z)$  e  $\phi(z, \bar{z})$  assume a seguinte forma*

$$T(z)\phi(w, \bar{w}) = \frac{h}{(z-w)^2}\phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{z-w}\partial_w\phi(w, \bar{w}) + \text{termos não-singulares} \quad (2.4.28)$$

$$\bar{T}(\bar{z})\phi(\bar{w}, w) = \frac{\bar{h}}{(\bar{z}-\bar{w})^2}\phi(\bar{w}, w) + \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}}\partial_{\bar{w}}\phi(\bar{w}, w) + \text{termos não-singulares} \quad (2.4.29)$$

Comparando essas expressões com a OPE (2.4.27) fica evidente que  $T(z)$  não é um campo primário. Vamos ver, então, como  $T(z)$  se comporta sob transformação conforme infinitesimal da coordenada, isto é, sob  $f(z) = z + \epsilon(z)$ , com  $\epsilon(z) \ll 1$ . Usando a equação (2.4.17) com  $\phi(w, \bar{w}) = T(w)$ , temos

$$\delta_\epsilon T(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z)} dw \epsilon(w) T(w) T(z) \quad (2.4.30)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z)} dw \epsilon(w) \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} \quad (2.4.31)$$

$$= \frac{c}{12} \partial_z^3 \epsilon(z) + 2T(z) \partial_z \epsilon(z) + \epsilon(z) \partial_z T(z) \quad (2.4.32)$$

Agora precisamos introduzir a derivada schwarziana de uma função  $f(z) = w$ . Ela é representada por  $\{w; z\}$  e definida como

$$\{w; z\} = \frac{1}{(\partial_z w)^2} ((\partial_z w)(\partial_z^3 w) - \frac{3}{2}(\partial_z^2 w)^2) \quad (2.4.33)$$

Para  $w = f(z) = z + \epsilon(z)$ :

$$z + \epsilon(z); z = \frac{1}{(1 + \partial_z \epsilon)^2} ((1 + \partial_z \epsilon)(\partial_z^3 \epsilon) - \frac{3}{2}(\partial_z^2 \epsilon)^2) = \partial_z^3 \epsilon(z) \quad (2.4.34)$$

até primeira ordem em  $\epsilon(z)$ . Assim, (2.4.32) fica

$$\delta_\epsilon T(z) = \frac{c}{12} \{z + \epsilon(z); z\} + 2T(z)\partial_z \epsilon(z) + \epsilon(z)\partial_z T(z) \quad (2.4.35)$$

Por outro lado,  $\delta_\epsilon = T'(z) = T(z)$ , então

$$T'(z) = \frac{c}{12} \{z + \epsilon(z); z\} + 2T(z)\partial_z \epsilon(z) + \epsilon(z)\partial_z T(z) + T(z) \quad (2.4.36)$$

Note que, até primeira ordem em  $\epsilon(z)$ :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 T(z + \epsilon(z)) = (1 + 2\partial_z \epsilon(z))(T(z) + \epsilon(z)\partial_z T(z)) \quad (2.4.37)$$

$$= T(z) + \epsilon(z)\partial_z T(z) + 2T(z)\partial_z \epsilon(z) \quad (2.4.38)$$

É possível mostrar que, em geral, sob uma transformação conforme  $f(z)$ , o tensor energia-momento holomórfico,  $T(z)$ , se transforma como  $T(z) \rightarrow T'(z)$ , com  $T'(z)$  dado por

$$T'(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 T(f(z)) + \frac{c}{12} \{f(z); z\} \quad (2.4.39)$$

que verificamos para o caso  $f(z) = z + \epsilon(z)$ .

Na verdade,  $T(z)$  é um campo quasi-primário: note que, como  $\{f(z); z\} \simeq \partial_z^3 \epsilon(z)$ , para  $f(z) \in SL(2, \mathbb{C})$  e  $\epsilon(z)$  é no máximo quadrático em  $z$ , então a derivada Schwarziana é nula para transformações globais conformes e  $T(z)$  se transforma como

$$T(z) \rightarrow T'(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 T(f(z)) \quad (2.4.40)$$

isto é, como um campo quasi-primário de dimensão conforme  $(2, 0)$ , o que faz muito sentido tendo em vista a expansão de Laurent (2.4.24).

Deve ser evidente que são os modos de Laurent  $L_n$  e não modos genéricos  $T_n$  que aparecem na expansão de Laurent pro campo holomórfico energia-momento  $T(z)$  por conta da identidade  $Q_n = -\epsilon_n L_n$ : os modos de Laurent são identificados com o operador carga  $Q$ , que é o gerador de simetria para um operador  $A$  que possa ser escrito como  $\delta A = [Q, A]$ . Bem,  $T(z)$  é tal operador.

### 2.4.4 Funções de Correlação

Todo o nosso interesse em calcular o produto entre operadores primários e quasi-primários reside no fato de que as funções de correlação, que são generalizações das matrizes de espalhamento da Teoria (Conforme) Quântica de Campos, são nada mais nada menos que o valor esperado desse produto, radialmente ordenado. Ou seja, funções de correlação trazem informações sobre como partículas interagem numa região finita, vindas do infinito. Podemos, inclusive, traçar um mapa entre os vértices dos diagramas de Feynman que ilustram o espalhamento de partículas (campos), e os coeficientes dos produtos envolvidos nas funções de correlação, como veremos na seção 3.3. Vamos ver como são as funções de correlação de dois e três pontos para campos quasi-primários.

#### *Funções de Correlação de Dois Pontos*

Vamos determinar a forma da função de correlação

$$\langle \phi_1(z)\phi_2(w) \rangle = g(z, w) \quad (2.4.41)$$

usando apenas as simetrias do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$ .

A invariância sob translações  $f(z) = z + a$ , gerada por  $L_{-1}$  requer que  $g$  seja da forma  $g(z - w)$ . Assim,

$$g(z - w) \rightarrow g'(z - w) = g(z + a - (w + a)) = g(z - w) \quad (2.4.42)$$

Adicionado a isso, a invariância sob reescalamentos  $f(z) = \lambda z$ , gerada por  $L_0$  requer que  $g$  seja da forma  $\frac{d_{12}}{(z-w)^{h_1+h_2}}$ , onde  $d_{12}$  é chamada constante de estrutura. Assim,

$$\begin{aligned} \langle \phi_1(z)\phi_2(w) \rangle &\rightarrow \langle \lambda^{h_1}\phi_1(\lambda z)\lambda^{h_2}\phi_2(w) \rangle \\ &= \frac{\lambda^{h_1+h_2}d_{12}}{(\lambda z - \lambda w)^{h_1+h_2}} \\ &= \frac{d_{12}}{(z - w)^{h_1+h_2}} \\ &= \langle \phi_1(z)\phi_2(w) \rangle \end{aligned} \quad (2.4.43)$$

Finalmente, a invariância sob SCTs requer que  $h_1 = h_2$ . Vejamos por quê. Primeiramente, note que, essencialmente, a transformação especial conforme pode ser escrita como  $f(z) = -\frac{1}{z}$ , já que a translação entre as inversões pode sempre ser reescalada e

transladada e se tornar apenas uma troca de sinal. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \langle \phi_1(z)\phi_2(w) \rangle &\rightarrow \left\langle \frac{1}{z^{2h_1}w^{2h_2}} \phi\left(-\frac{1}{z}\right)\phi\left(-\frac{1}{w}\right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{z^{2h_1}w^{2h_2}} \frac{d_{12}}{\left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{w}\right)^{h_1+h_2}} = \frac{d_{12}}{(z-w)^{h_1+h_2}} \end{aligned} \quad (2.4.44)$$

A última igualdade só é satisfeita se  $h_1 = h_2$ .

Portanto, as simetrias do grupo globalmente conforme  $SL(2, \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_2)$  determinam, a menos da constante de estrutura  $d_{ij}$ , a forma da função de correlação de dois pontos, de campos holomórficos quasi-primários, como sendo

$$\langle \phi_i(z)\phi_j(w) \rangle = \frac{d_{ij}\delta_{h_i, h_j}}{(z-w)^{2h_i}} \quad (2.4.45)$$

Precisamos, é claro, que para determinado ponto no plano complexo, a função de dois pontos assuma apenas um valor, mesmo que uma rotação seja feita, já que essa é uma isometria satisfeita. Para tal, surge uma restrição: note que efetuando uma rotação no plano complexo, isto é,  $z \mapsto e^{2\pi i}z$ , o denominador do lado direito da equação (2.4.45) vai para  $e^{2\pi i}(z-w)^{2h_i}$ , de forma que ela é injetiva apenas para valores inteiros ou meio-inteiros da dimensão conforme.

### ***A Função de Correlação de Três Pontos***

Fazendo  $z_{ij} = z_i - z_j$ , temos que a invariância sob translações, a função de correlação

$$\langle \phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\phi_3(z_3) \rangle = g(z_1, z_2, z_3) \quad (2.4.46)$$

tem a forma

$$\langle \phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\phi_3(z_3) \rangle = g(z_{12}, z_{23}, z_{13}) \quad (2.4.47)$$

pois, uma vez que sempre é possível efetuar translações sem alterar a física, apenas as distâncias relativas entre os pontos onde consideramos os campos importa.

Da invariância sob reescalamentos, temos que

$$\begin{aligned} g(z_1, z_2, z_3) &\rightarrow \lambda^{h_1}\phi_1(\lambda z_1)\lambda^{h_2}\phi_2(\lambda z_2)\lambda^{h_3}\phi_3(\lambda z_3) \langle \\ &= \lambda^{h_1+h_2+h_3}g(\lambda z_{12}, \lambda z_{23}, \lambda z_{13}) \\ &= g(z_{12}, z_{23}, z_{13}) \quad \text{usando eq. (2.4.47)} \end{aligned} \quad (2.4.48)$$

$$\implies g(z_{12}, z_{23}, z_{13}) = \frac{C_{123}}{z_{12}^a z_{23}^b z_{13}^c} \quad (2.4.49)$$



Da invariância sob SCTs,

$$\frac{C_{123}}{z_{12}^a z_{23}^b z_{13}^c} = \frac{1}{z_1^{2h_1} z_2^{2h_2} z_3^{2h_3}} \frac{(z_1 z_2)^a (z_2 z_3)^b (z_1 z_3)^c}{z_{12}^a z_{23}^b z_{13}^c} \quad (2.4.50)$$

o que leva a  $a = h_1 + h_2 - h_3$ ,  $b = -h_1 + h_2 + h_3$  e  $c = h_1 - h_2 + h_3$ .

Portanto, as simetrias do grupo globalmente conforme  $SL(2, \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_2)$  determinam, a menos da constante de estrutura  $C_{123}$ , a forma da função de correlação de três pontos, de campos holomórficos quasi-primários, como sendo

$$\langle \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \phi_3(z_3) \rangle = \frac{C_{123}}{z_{12}^{h_1+h_2-h_3} z_{23}^{-h_1+h_2+h_3} z_{13}^{h_1-h_2+h_3}} \quad (2.4.51)$$

Note que tanto na função de dois quanto na de três pontos, a indeterminação da constante de estrutura não é uma peça faltando, mas sim algo que reflete o fato de haver liberdade na normalização dos campos.

Agora temos os elementos necessários para determinar a OPE para dois campos  $\phi_i$  e  $\phi_j$  quaisquer.

### 2.4.5 A forma geral da OPE

Vamos começar com o ansatz

$$\phi_i(z) \phi_j(w) = \sum_{k,n \geq 0} C_{ij}^k \frac{a_{ijk}^n}{n!} \frac{1}{(z-w)^{h_i+h_j-h_k-n}} \partial^n \phi_k(w) \quad (2.4.52)$$

e usá-lo numa função de correlação de três pontos, com  $w = 1$ :

$$\langle \phi_i(z) \phi_j(1) \phi_k(0) \rangle = \sum_{l,n \geq 0} C_{ij}^l \frac{a_{ijl}^n}{n!} \frac{1}{(z-1)^{h_i+h_j-h_l-n}} \langle \partial^n \phi_l(1) \phi_k(0) \rangle \quad (2.4.53)$$

Usando (2.4.45), o termo  $\langle \partial^n \phi_l(1) \phi_k(0) \rangle$  fica

$$\langle \partial^n \phi_l(1) \phi_k(0) \rangle |_{z=1} = \partial_z^n \left( \frac{d_{lk} \delta_{h_l, h_k}}{z^{2h_k}} \right) \Big|_{z=1} = d_{lk} \delta_{h_l, h_k} \frac{\partial^n}{\partial z^n} (z^{-2h_k}) |_{z=1} \quad (2.4.54)$$

Calculando o termo  $\frac{\partial^n}{\partial z^n}(z^{-2h_k})|_{z=1}$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^n}{\partial z^n}(z^{-2h_k})|_{z=1} &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}(-2h_k z^{-2h_k-1})|_{z=1} \\
 &= \frac{\partial^{n-2}}{\partial z^{n-2}}((-2h_k)(-2h_k-1)z^{-2h_k-2})|_{z=1} \\
 &\vdots \\
 &= \frac{\partial}{\partial z}((-2h_k)(-2h_k-1)\dots(-2h_k-n)z^{-2h_k-n+1})|_{z=1} \\
 &= (-1)^n(2h_k)(2h_k+1)\dots(2h_k+n)(2h_k+n-1) \\
 &= (-1)^n \frac{-(2h_k+n-1)! n!}{(2h_k-1)! n!} \\
 &= (-1)^n n! \frac{-(2h_k+n-1)!}{n!(2h_k-1)!} \\
 &= (-1)^n n! \binom{2h_k+n-1}{n}
 \end{aligned} \tag{2.4.55}$$

e então (2.4.54) fica

$$\langle \partial^n \phi_l(1) \phi_k(0) \rangle |_{z=1} = (-1)^n n! \binom{2h_k+n-1}{n} d_{lk} \delta_{h_l, h_k} \tag{2.4.56}$$

Assim, (2.4.53) fica

$$\langle \phi_i(z) \phi_j(1) \phi_k(0) \rangle = \sum_{l, n \geq 0} C_{ij}^l a_{ijl}^n \frac{(-1)^n}{(z-1)^{h_i+h_j-h_l-n}} \binom{2h_k+n-1}{n} \tag{2.4.57}$$

Por outro lado, fazendo  $z_1 = z$ ,  $z_2 = 1$  e  $z_3 = 0$  na equação (2.4.51), dá

$$\langle \phi_i(z) \phi_j(1) \phi_k(0) \rangle = \frac{C_{ijk}}{(z-1)^{h_i+h_j-h_k} z^{h_i-h_j+h_k}} \tag{2.4.58}$$

Juntando as equações (2.4.53) e (2.4.58), temos

$$\sum_{l, n \geq 0} C_{ij}^l a_{ijl}^n \frac{(-1)^n}{(z-1)^{h_i+h_j-h_l-n}} \binom{2h_k+n-1}{n} = \frac{C_{ijk}}{(z-1)^{h_i+h_j-h_k} z^{h_i-h_j+h_k}} \tag{2.4.59}$$

⇒

$$\begin{aligned}
 \sum_{l, n \geq 0} C_{ij}^l a_{ijl}^n (-1)^n (z-1)^n \binom{2h_k+n-1}{n} &= \frac{C_{ijk}}{(1+(z-1))^{h_i-h_j+h_k}} \\
 &= C_{ijk} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \binom{h_i-h_j+h_k+n-1}{n}
 \end{aligned} \tag{2.4.60}$$

onde usamos a relação

$$\frac{1}{(1+x)^H} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{H+n-1}{n} x^n \quad (2.4.61)$$

com  $x = z - 1$ . Da equação (2.4.60), temos que

$$\begin{cases} C_{ij}^l d_{lk} = C_{ijk} \\ a_{ijk}^n = \binom{2h_k + n - 1}{n}^{-1} \binom{h_i - h_j + h_k + n - 1}{n} \end{cases} \quad (2.4.62)$$

É isso. A OPE de dois campos holomórficos quasi-primários tem a forma geral dada por (2.4.52) com coeficientes dados por (2.4.62).

### ***Expressão Geral para as Relações de Comutação***

Usando as equações (2.4.52) e (2.4.62), e lembrando da expressão para a expansão de Laurent para campos holomórficos  $\phi_i(z)$ :

$$\phi_i(z) = \sum_m \phi_{(i)m} z^{-m-h_i} \quad (2.4.63)$$

onde  $h_i$  é sempre inteiro ou meio-inteiro, chegamos a

$$[\phi_{(i)m}, \phi_{(j)n}] = \sum_k C_{ij}^k p_{ijk}(m, n) \phi_{(k)m+n} + d_{ij} \delta_{m+n,0} \binom{m+h_i-1}{2h_i-1} \quad (2.4.64)$$

com o polinômios

$$p_{ijk}(m, n) = \sum_{\substack{r,s \in \mathbb{Z}_0^+ \\ r+s=h_i+h_j-h_k-1}} C_{r,s}^{ijk} \binom{-m+h_i-1}{r} \binom{-n+h_j-1}{s} = P_{h_i h_j h_k}(m, n) \quad (2.4.65)$$

onde

$$C_{r,s}^{ijk} = (-1)^r \frac{(2h_k - 1)!}{(h_i + h_j + h_k - 2)!} \prod_{t=0}^{s-1} (2h_i - 2 - r - t) \prod_{u=0}^{r-1} (2h_j - 2 - s - u) \quad (2.4.66)$$

### 2.4.6 Determinação das constantes de estrutura

Da (2.4.64) segue que

$$\begin{aligned}
 \|\phi_{(i)-n}|0\rangle\|^2 &= \langle 0|\phi_{(i)-n}^\dagger\phi_{(i)-n}|0\rangle \\
 &= \langle 0|\phi_{(i)+n}\phi_{(i)-n}|0\rangle \\
 &= \langle 0|[\phi_{(i)+n},\phi_{(i)-n}]|0\rangle \quad \text{ordenamento radial com } n \geq h \\
 &= C_{ii}^j P_{h_i h_i h_j}(n, -n) \langle 0|\phi_{(j)0}|0\rangle + d_{ii} \binom{n+h_i-1}{2h_i-1} \\
 &= d_{ii} \binom{n+h_i-1}{2h_i-1}
 \end{aligned} \tag{2.4.67}$$

Para  $h = n$  e usando  $\langle\phi| = \langle 0|\phi_{(i)+n}| \phi\rangle = \phi_{(i)-n}|0\rangle$ , o lado esquerdo da (2.4.67) fica  $\langle\phi|\phi\rangle$ , e

$$\binom{n+h_i-1}{2h_i-1} = \binom{h+h-1}{2h-1} = 1 \tag{2.4.68}$$

Isto é, vemos que a norma de um estado  $|\phi\rangle = \phi_{-h}|0\rangle$  é igual à constante de estrutura da função de dois pontos:

$$\langle\phi|\phi\rangle = d_{\phi\phi} \tag{2.4.69}$$

Vamos determinar também a constante de estrutura da função de três pontos de campos holomórficos quasi-primários. Da (2.4.51) segue que

$$C_{123} = z_{12}^{h_1+h_2-h_3} z_{23}^{-h_1+h_2+h_3} z_{13}^{h_1-h_2+h_3} \langle\phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\phi_3(z_3)\rangle \tag{2.4.70}$$

Tomando o limite  $z_1 \rightarrow \infty$  e  $z_3 \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned}
 C_{123} &= \lim_{z_1 \rightarrow \infty} \lim_{z_3 \rightarrow 0} z_{12}^{h_1+h_2-h_3} z_{23}^{-h_1+h_2+h_3} z_{13}^{h_1-h_2+h_3} \langle\phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\phi_3(z_3)\rangle \\
 &= \lim_{z_1 \rightarrow \infty} \lim_{z_3 \rightarrow 0} z_1^{2h_1} z_2^{-h_1+h_2+h_3} \langle\phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\phi_3(z_3)\rangle \\
 &= z_2^{-h_1+h_2+h_3} \lim_{z_1 \rightarrow \infty} z_1^{2h_1} \langle 0|\phi_1(z_1)\phi_2(z_2) \lim_{z_3 \rightarrow 0} \phi_3(z_3)|0\rangle \\
 &= z_2^{-h_1+h_2+h_3} \langle 0|\phi_{(1)+h_1}\phi_2(z_2)\phi_{(3)-h_3}|0\rangle
 \end{aligned} \tag{2.4.71}$$

$$\implies z_2^{-h_1+h_2+h_3} = \text{const.} \implies -h_1 + h_2 + h_3 = 0 \implies h_2 = h_1 - h_3 \tag{2.4.72}$$

Portanto,

$$C_{123} = \langle 0|\phi_{(1)+h_1}\phi_{(2)+h_1-h_3}\phi_{(3)-h_3}|0\rangle \tag{2.4.73}$$

Agora vamos determinar as constantes  $C_{ij}^k$  e  $d_{ij}$  para  $T(z)$ , isto é, para  $i, j, k = L$ ,  $h_i = h_j = h_k = 2$ . Da (2.4.64) segue que

$$[L_m, L_n] = C_{LL}^L P_{222}(m, n) L_{m+n} + d_{LL} \delta_{m+n,0} \binom{m+1}{3} \quad (2.4.74)$$

Da equação (2.4.65) segue que

$$\begin{aligned} P_{222}(m, n) &= C_{1,0}^{222} \binom{-m+1}{1} + C_{0,1}^{222} \binom{-n+1}{1} \\ &= -\frac{1}{2}(-m+1) + \frac{1}{2}(-n+1) \\ &= \frac{m-n}{2} \end{aligned} \quad (2.4.75)$$

com

$$C_{1,0}^{222} = (-1)^1 \frac{3!}{4!} 2 = -\frac{1}{2}; \quad C_{0,1}^{222} = (-1)^0 \frac{3!}{4!} 2 = \frac{1}{2} \quad (2.4.76)$$

Então

$$[L_m, L_n] = C_{LL}^L \frac{m-n}{2} L_{m+n} + d_{LL} \delta_{m+n,0} \frac{m^3 - m}{6} \quad (2.4.77)$$

Comparando com (2.1.59), temos que

$$C_{LL}^L = 2; \quad d_{LL} = \frac{c}{2} \quad (2.4.78)$$

## 2.5 Produto Normalmente Ordenado (NOP)

Nessa seção vamos ver como a regra geral da teoria quântica de campos "operadores de criação à esquerda" é expressa em CFT.

Então, pra começar, vamos determinar quais são os operadores de criação e destruição numa teoria conforme de campos. Usando a equação

$$\phi_{n,\bar{m}} |0\rangle = 0 \quad \text{para } n > -h \text{ e } \bar{m} > -\bar{h} \quad (2.5.1)$$

e lembrando que  $H = L_0 + \bar{L}_0$ , onde  $L_0$  é chamada energia holomórfica, vamos calcular  $L_0 \phi_n |0\rangle$  para um campo primário holomórfico  $\phi_n$ :

$$L_0 \phi_n |0\rangle = (L_0 \phi_n - \phi_n L_0) |0\rangle = [L_0, \phi_n] |0\rangle = -n \phi_n |0\rangle \quad (2.5.2)$$

onde usamos  $[L_m, \phi_n] = ((h-1)m - n) \phi_{m+n}$  e  $L_0 |0\rangle = |0\rangle$ . Lembrando que  $\phi_{n,\bar{m}} |0\rangle = 0$  vemos que a energia holomórfica é limitada por baixo: somente valores  $h+n$  com  $n \geq 0$  são

permitidos. Assim, precisamos exigir que os operadores de criação criem somente estados com energia positiva. Concluimos que

$$\phi_n \text{ com } n > -h \text{ são operadores de aniquilação} \quad (2.5.3)$$

$$\phi_n \text{ com } n \leq -h \text{ são operadores de criação} \quad (2.5.4)$$

Analogamente para a energia anti-holomórfica  $\bar{L}_0$ :

$$\phi_{\bar{m}} \text{ com } \bar{m} > -\bar{h} \text{ são operadores de aniquilação} \quad (2.5.5)$$

$$\phi_{\bar{m}} \text{ com } \bar{m} \leq -\bar{h} \text{ são operadores de criação} \quad (2.5.6)$$

Então, é claro, como estamos interessadas em escrever o valor esperado do produto de operadores que possam ser escritos em termos de operadores de criação e aniquilação, nos depararemos com os dois seguintes casos: operadores de criação à direita ( $\langle 0 | \phi_{n \leq -h}$ ) e operadores de aniquilação à esquerda ( $\phi_{n > -h} | 0 \rangle$ ), ambos termos nulos. Assim, a prescrição de ordenamento normal é, sem surpresas: *operadores de criação à esquerda*.

## 2.5.1 Produtos Normalmente Ordenados e OPEs

Porque o ordenamento normal é tão natural (quando ele ainda não foi realizado, os termos fora de ordem dão zero até que no total essa ordem esteja estabelecida), ele aparece na própria definição da OPE. Denotando o Produto Normalmente Ordenado (NOP) entre dois campos  $\phi(z)$  e  $\chi(w)$  como  $:\chi\phi:$ , temos que ele aparece nos termos regulares da OPE da seguinte forma:

$$\phi(z)\chi(w) = \text{sing.} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-w)^n}{n!} : \chi \partial^n \phi : (w) \quad (2.5.7)$$

O que, para  $n = 0$  é

$$:\chi\phi: = \sum_{n > -h^\phi} \chi_{k-n} \phi_n + \sum_{n \leq -h^\phi} \phi_n \chi_{k-n} \quad (2.5.8)$$

Para determinar o NOP de campos quasi-primários vamos usar as identidades

$$:\chi\partial\phi: = \sum_{n > -h^\phi - 1} (-h^\phi - n) \chi_{k-n} \phi_n + \sum_{n \leq -h^\phi - 1} (-h^\phi - n) \phi_n \chi_{k-n} \quad (2.5.9)$$

$$:\partial\chi\phi: = \sum_{n > -h^\phi} (-h^\phi - k + n) \chi_{k-n} \phi_n + \sum_{n \leq -h^\phi} (-h^\phi - k + n) \phi_n \chi_{k-n} \quad (2.5.10)$$

onde o índice  $k$  indica o  $k$ -ésimo modo de Laurent.

No geral, NOPs de campos quasi-primários não são eles mesmos campos quasi-primários [Blumenhagen e Plauschinn 2009]. Lembrando da equação (2.4.27), e juntando

a ela a equação (2.5.7), temos

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{2T(w)}{z-w} + :TT:(w) + \dots \quad (2.5.11)$$

Por outro lado, usando a expressão geral para OPEs de dois campos quasi-primários, as (2.4.52) e (2.4.62), podemos ver que o termo correspondente ao NOP, isto é, o termo  $(z-w)^0$ , com  $h_i + h_j - h_k - n = 0 \implies n = 2$  fica  $\partial^2 T$ , com coeficiente  $C_{TT}^T \frac{a_{222}^2}{2!}$ , onde  $a_{222}^2 = \frac{3}{10}$  e  $C_{TT}^T = 2$ . Ou seja,

$$:TT:(w) = \frac{3}{10} \partial^2 T(w) + \mathcal{N}(TT) \quad (2.5.12)$$

onde  $\mathcal{N}(TT)$  denota os termos de ordem  $(z-w)^0$  para cada  $k$  da (2.4.52).

Note que (2.5.12) não é quasi-primário, já que  $\partial^2 T$  não o é.

## 2.6 O Auto-espaço de uma CFT

As derivações que fizemos até agora podem parecer um tanto restritas: estudamos a OPE e as funções de correlação para campos quasi-primários, que são ainda mais restritos que os primários. Essa restrição aos campos quasi-primários se justifica porque estamos interessados principalmente na subálgebra conforme global  $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$ , e nesse caso podemos pensar nos quasi-primários como globalmente primários. Ainda assim, por que nos restringir aos (globalmente) primários? Por que todos os demais campos podem ser derivados a partir deles, conforme veremos em detalhes a seguir.

### 2.6.1 Os Módulos de Verma

Vamos novamente considerar  $T(z)$ . O NOP de dois  $T$ 's pode ser determinado através da substituição da expressão geral (2.5.8) para o modo de Laurent  $:TT:_k$ , na sua expansão de Laurent:

$$\begin{aligned} :TT:_k &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} z^{-k-4} :TT:_k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} z^{-k-4} \left( \sum_{n > -2} L_{k-n} L_n + \sum_{n \leq -2} L_n L_{k-n} \right) \quad z \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n > -2} L_{-4-n} L_n + \sum_{n \leq -2} L_n L_{-4-n} \quad \text{mas } -4-n \leq -2 \implies n \geq -2 \\ &= L_{-2} L_{-2} \end{aligned}$$

$$\implies :TT:_{-4} |0\rangle = L_{-2} L_{-2} |0\rangle \quad (2.6.2)$$

onde usamos  $|\phi\rangle_{in} = \lim_{z \rightarrow 0} \phi(z) |0\rangle = \phi_{-h} |0\rangle$  com  $\phi(z) = T(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} z^{-k-2} L_k$ .

Analogamente,

$$\begin{aligned}
 :T\partial T: &:= \sum_{k \in \mathbb{Z}} z^{-k-5} :T\partial T:{}_k \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} z^{-k-5} \left( \sum_{n > -h-1} (-h-n)L_{k-n}L_n + \sum_{n \leq -h-1} (-h-n)L_nL_{k-n} \right) \quad z \rightarrow 0 \\
 &= \sum_{n > -3} (-2-n)L_{-5-n}L_n + \sum_{n \leq -3} (-2-n)L_nL_{-5-n} \\
 &= L_{-3}L_{-2}
 \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

$$\implies :T\partial T:_{-5} |0\rangle = L_{-3}L_{-2} |0\rangle \tag{2.6.4}$$

É possível mostrar que

**Teorema 2.1.** *Para cada estado  $|\Phi\rangle$  no chamado módulo de Verma*

$$L_{n_1} \dots L_{n_k} |0\rangle : n_i \leq -2 \tag{2.6.5}$$

podemos encontrar um campo  $F \in \{T, \partial T, \dots, :TT:, :T\partial T:, \dots\}$  com a propriedade

$$\lim_{z \rightarrow 0} F(z) |0\rangle = |\Phi\rangle \tag{2.6.6}$$

Para que fique claro, nos nossos exemplos, tais estados  $|\Phi\rangle$  são  $L_{-2}L_{-2} |0\rangle$  e  $L_{-3}L_{-2} |0\rangle$ , e seus respectivos campos  $F$  são  $:TT:$  e  $:T\partial T:$ .

Na verdade, podemos generalizar esse resultado permitindo que o campo  $F$  pertença a

$$[\phi(z)] := \{\phi(z), \partial\phi(z), \dots, :T\phi:, :T\partial\phi:\} \tag{2.6.7}$$

onde o campo  $\phi(z)$  é primário e holomórfico de dimensão conforme  $h$ , e dá origem ao estado  $|\phi\rangle = |h\rangle = \phi_{-h} |0\rangle$ , que, pela própria definição de estado primário, satisfaz

$$L_k |\phi\rangle = [L_k, \phi_{-h}] |0\rangle = (h(k+1) - k)\phi_{-h+k} |0\rangle = 0; \quad k > 0 \tag{2.6.8}$$

Assim, temos, para  $k = 1$

$$\begin{aligned}
 L_{-1}\phi_{-h} |0\rangle &= [L_{-1}, \phi_{-h}] |0\rangle + \phi_{-h}L_{-1} |0\rangle \\
 &= ((h-1)(-1) + h)\phi_{-1-h} |0\rangle + \phi_{-h} |0\rangle \\
 &= \phi_{-1-h} |0\rangle + |h\rangle
 \end{aligned} \tag{2.6.9}$$

Para  $k = 2$ :

$$\begin{aligned}
 L_{-1}L_{-1}\phi_{-h} |0\rangle &= L_{-1}(\phi_{-1-h} |0\rangle + \phi_{-h} |0\rangle) \\
 &= L_{-1}\phi_{-1-h} |0\rangle + L_{-1}\phi_{-h} |0\rangle \\
 &= [L_{-1}, \phi_{-1-h}] |0\rangle + \phi_{-1-h}L_{-1} |0\rangle + \phi_{-1-h} |0\rangle + |h\rangle \\
 &= ((h-1)(-1) + 1 + h)\phi_{-1-1-h} |0\rangle + \phi_{-1-h} |0\rangle + \phi_{-1-h} |0\rangle + |h\rangle \\
 &= 2\phi_{-2-h} |0\rangle + 2\phi_{-1-h} |0\rangle + |h\rangle
 \end{aligned} \tag{2.6.10}$$



E assim por diante até que possamos ver os chamados campos descendentes, encabeçados pelo chamado estado de maior peso conforme,  $|h\rangle$ :

Campo	Estado	Nível (k=)
$\phi(z)$	$\phi_{-h} 0\rangle =  h\rangle$	0
$\partial\phi(z)$	$L_{-1}\phi_{-h} 0\rangle$	1
$\partial^2\phi(z)$	$L_{-1}L_{-1}\phi_{-h} 0\rangle$	2
$:T\phi:$	$L_{-2}\phi_{-h} 0\rangle$	2
$\partial^3\phi(z)$	$L_{-1}L_{-1}L_{-1}\phi_{-h} 0\rangle$	3
$:T\partial\phi:$	$L_{-2}L_{-1}\phi_{-h} 0\rangle$	3
$:\partial T\phi:$	$L_{-3}\phi_{-h} 0\rangle$	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

O conjunto desses campos na primeira coluna e em (2.6.7) é dito ser uma *família conforme* e também pode ser denotado por

$$\{\hat{L}_{n_1} \dots \hat{L}_{n_k} \phi(z) : n_i \leq -1\} \quad (2.6.11)$$

No nível  $k$  há  $P(k)$  estados diferentes, onde  $P(k)$  é a função de partição

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^j} = \sum_{k=0}^{\infty} P(k)q^k \quad (2.6.12)$$

Assim, sabendo a forma da OPE e das funções de correlação para campos quasi-primários, o sabemos também para todos os campos descendentes com simetria conforme global.

Como consequência da unitariedade, isto é, a propriedade que garante conservação da probabilidade no espaço de Minkowski, temos que os estados devem possuir norma não negativa. Lembrando que  $\langle\phi|\phi\rangle = d_{\phi\phi}$ , isso implica que  $d_{\phi\phi} \geq 0$ . Agora vamos calcular a norma do estado  $L_{-1}|\phi\rangle$ :

$$\|L_{-1}|\phi\rangle\|^2 = \langle\phi|L_1L_{-1}|\phi\rangle \quad (2.6.13)$$

$$= \langle\phi|[L_1, L_{-1}]|\phi\rangle \quad (2.6.14)$$

$$= \langle\phi|2L_0|\phi\rangle \quad (2.6.15)$$

$$= 2h\langle\phi|\phi\rangle \quad (2.6.16)$$

$$= 2hd_{\phi\phi} \geq 0 \Leftrightarrow h \geq 0 \quad (2.6.17)$$

Isto é, pra uma teoria ser unitária os pesos conformes de todos os seus campos primários devem ser não-negativos.

## 3 A Dualidade

O que precisamos manter em mente sobre o que vimos nesses dois primeiros capítulos é o seguinte: verificamos que as simetrias do AdS (e portanto de sua fronteira) e as simetrias de uma CFT são as mesmas, verificamos que a fronteira do AdS é sempre conformalmente plana e herda a assinatura do AdS (e que portanto é ela mesma um espaço-tempo), derivamos a álgebra do produto de operadores para CFTs em espaços planos para campos primários, a partir de onde podemos obter a álgebra para todos os campos descendentes. Ou seja, estabelecemos o pano de fundo para o mapa entre teorias quânticas gravitacionais no *bulk* do AdS, e CFTs na fronteira do AdS, mostrando que na  $\partial\text{AdS}$  pode habitar uma CFT. A dualidade, ou correspondência é exatamente esse mapa, que é construído com a implementação da hipótese holográfica, que veremos na seção 3.1.

Existem duas abordagens para se estabelecer a dualidade entre a teoria gravitacional no *bulk* e a teoria de calibre na fronteira. Cada uma delas é mais útil em uma ou outra situação, dependendo do que é conhecido sobre o sistema físico que se busca entender. Discutir AdS/CFT axiomáticamente é o que chamamos de abordagem "bottom-up", em oposição à abordagem "top-down", onde se usa uma teoria de campos conhecida vinda a partir de uma teoria de cordas [DeWolfe 2018]. No caso da abordagem top-down a teoria de gravitação é derivada da teoria de cordas, e um dos pontos fracos dessa abordagem é que essas teorias de gravitação são quase sempre muito complicadas (a teoria de supergravidade do tipo IIB no  $\text{AdS}_5 \times S^5$  tem um conjunto infinito de campos fundamentais, por exemplo [Szabo 2011]). Já no caso da abordagem bottom-up, escrevemos a teoria de gravitação axiomáticamente, com as propriedades que desejarmos. Um problema que pode surgir é que como não temos uma Lagrangiana e nem mesmo uma lista dos campos fundamentais da teoria de campos dual, podem existir patologias ocultas na teoria. A abordagem pode, no entanto, controlar interações e acoplamentos e modelar fenômenos exatos a serem estudados.

Essas abordagens, no entanto, estão ambas embasadas na mesma correspondência, e como nesse trabalho não estamos atacando teorias específicas, mas olhando de forma bastante geral para a dualidade, isso fica apenas como observação e olharemos para os aspectos gerais do mapa entre gravidade e calibre, ou AdS e CFT.

### 3.1 Hipótese Holográfica

A hipótese holográfica, ou redução dimensional, como foi chamada originalmente pelo prêmio Nobel de 1999, o físico holandês 't Hooft em [Hooft 1993], é uma hipótese que nasceu da observação de que a entropia de buracos negros é proporcional à área do

seu horizonte de eventos, e não ao volume encapsulado por ela, como seria de se esperar. Assim, a ideia é que podemos estudar a física do *bulk* olhando para a física no infinito, de codimensão 1. Ou, como o próprio 't Hooft escreveu:

"given any closed surface, we can represent all that happens inside it by degrees of freedom on this surface itself. This, one may argue, suggests that quantum gravity should be described entirely by a topological quantum field theory, in which all physical degrees of freedom can be projected onto the boundary."

numa tradução livre minha:

"dada qualquer superfície fechada, podemos representar tudo o que ocorre dentro dela por graus de liberdade na própria superfície. Isso, pode-se argumentar, sugere que gravidade quântica deveria ser descrita inteiramente por uma teoria quântica de campos topológica, na qual todos os graus de liberdade físicos podem ser projetados na fronteira."

Não foi à toa que analisamos na seção 1.4 como as coisas se dão assintoticamente no AdS. Outra coisa que nos vai ser muito útil agora é o campo quântico  $\phi(x)$ , com  $x$  sendo coordenadas generalizadas do AdS, construído na seção 1.3. Se a hipótese da holografia está correta, quando tomamos o limite  $x \rightarrow \infty$  pelo menos alguns dos observáveis do AdS devem ser reproduzidos no  $\partial\text{AdS}$ . Tomemos como observável de teste as funções de correlação desses campos  $\phi$ , já que são detectáveis no infinito e são bem familiares do ponto de vista da Teoria Quântica de Campos no AdS (AdS QFT) [Srednicki 2007].

A princípio, olhando para a forma mais geral de um campo quântico, dado pela equação (1.2.57), a impressão é de que no infinito teremos simplesmente o campo nulo (o que pode levar a pensar que nenhum estado de energia finita poderia chegar a algum ponto específico da fronteira, ou seja, que a função de correlação sempre daria zero). Sejam cautelosos e olhem para o comportamento de (1.2.57) próximo do infinito, mas não lá de fato. Podemos ver que  $\psi \rightarrow 0$  à mesma taxa que  $\cos^\Delta \rho \rightarrow 0$  quando  $\rho \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . Assim, faz sentido definir um novo operador quântico,  $\mathcal{O}(t, \Omega)$ , que representa o campo quântico  $\psi$  no infinito. Isto é

$$\mathcal{O}(\tau, \Omega) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\tau, \rho(\epsilon), \Omega)}{\epsilon^\Delta} \quad (3.1.1)$$

Colocando o campo (1.2.57) no lugar de  $\psi$  para calcular esse limite, vemos que

$$\sin^\ell \rho \longrightarrow \cos^\ell(\epsilon e^{-\tau}) \longrightarrow 1 \quad (3.1.2)$$

e

$$\cos^\Delta \rho \longrightarrow \sin^\Delta(\epsilon e^{-\tau}) \longrightarrow \epsilon e^{-\Delta\tau} \quad (3.1.3)$$

onde, nas duas expressões, a primeira seta indica o limite  $\rho \rightarrow \frac{\pi}{2} - \epsilon e^{-\tau}$  e a segunda seta indica o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Então o limite (3.1.1), lembrando que  $E_{n\ell} = \Delta + 2n + \ell$ , fica

$$\psi_{n\ell J} \rightarrow \frac{1}{N_{\Delta n\ell}} e^{-(2\Delta+2n+\ell)\tau} Y_{\ell J}(\Omega) {}_2F_1\left(-n, \Delta + \ell + n, \ell + \frac{d}{2}, 1\right) \quad (3.1.4)$$

$$\psi_{n\ell J}^\dagger \rightarrow \frac{1}{N_{\Delta n\ell}} e^{(2n+\ell)\tau} Y_{\ell J}^\dagger(\Omega) {}_2F_1\left(-n, \Delta + \ell + n, \ell + \frac{d}{2}, 1\right) \quad (3.1.5)$$

ou seja, o fator  $\cos^\Delta \rho$  teve efeito de *shift* na dependência em  $\tau$ .

Um resultado sobre funções hipergeométricas que vamos usar sem demonstrar:

$${}_2F_1\left(-n, \Delta + \ell + n, \ell + \frac{d}{2}, 1\right) = \frac{\Gamma(\ell + \frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2} - \Delta)}{\Gamma(n + \ell + \frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2} - n - \Delta)} \quad (3.1.6)$$

juntando a esse resultado a expressão (1.3.44) para o fator de normalização da função de onda (1.2.57), e multiplicando por um fator constante de  $\sqrt{\Gamma(\Delta + \frac{d-2}{2})/\Gamma(\Delta)}$ , temos que a normalização do operador  $\mathcal{O}$  é

$$\frac{1}{N_{\mathcal{O}n\ell}} = \sqrt{\frac{\Gamma(\Delta + n + \ell)\Gamma(\Delta + n - \frac{d-2}{2})\Gamma(\frac{d}{2})}{n!\Gamma(\Delta)\Gamma(\Delta - \frac{d-2}{2})\Gamma(\frac{d}{2} + n + \ell)}} \quad (3.1.7)$$

Finalmente, o operador que representa o campo quântico (1.2.57) na fronteira do AdS é

$$\mathcal{O}(\tau, \Omega) = \sum_{n,\ell} \frac{1}{N_{\mathcal{O}n\ell}} \left( e^{-(2\Delta+2n+\ell)\tau} Y_{\ell J}(\Omega) a_{n\ell} + e^{(2n+\ell)\tau} Y_{\ell J}^\dagger(\Omega) a_{n\ell}^\dagger \right) \quad (3.1.8)$$

Agora vamos usar nossas noções de função de correlação e calculá-la para (3.1.8). Próximo da fronteira do AdS, a função de correlação de dois pontos para um campo  $\phi$  é dada por

$$\langle \phi(X)\phi(Y) \rangle \approx \frac{\Gamma(\Delta)}{\Gamma(\Delta + 1 - \frac{d}{2})} e^{-\Delta\sigma(X,Y)} \quad (3.1.9)$$

onde  $\sigma(X, Y)$  é o comprimento da geodésica entre  $X$  e  $Y$ , que na direção radial  $\rho$  é dada pela integral

$$\int_\rho \sec(\rho) d\rho = \ln\left(\frac{\pi}{2} - \rho(\epsilon)\right) \approx \tau - \ln \epsilon \quad (3.1.10)$$

onde usamos  $\rho = \frac{\pi}{2} - \epsilon e^{-\tau}$  no limite  $\epsilon \rightarrow \infty$ . Sem perda de generalidade consideremos  $X$  e  $Y$  em lados opostos do cilindro do AdS Euclidiano. Assim, temos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(x_1)\mathcal{O}(x_2) \rangle &= \frac{\Gamma(\Delta)}{\Gamma\left(\Delta + 1 - \frac{d}{2}\right)} \frac{e^{[-\Delta(2\tau - 2\ln \epsilon)]}}{\epsilon^{2\Delta}} \\ &= \frac{\Gamma(\Delta)}{\Gamma\left(\Delta + 1 - \frac{d}{2}\right)} \frac{1}{e^{2\Delta\tau}} \\ &\propto \frac{1}{(x_1 - x_2)^{2\Delta}} = \frac{1}{(2P_1 \cdot P_2)^\Delta} \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

na última linha escrevemos em termos dos pontos de fronteira  $x_1 = \hat{\Omega}e^\tau$  e  $x_2 = -\hat{\Omega}e^\tau$ . E  $P_i$  são as coordenadas do cone nulo projetivo.

Podemos obter esse resultado também do ponto de vista do AdS. Pensando em  $\mathcal{O}$  apenas como um campo na fronteira do AdS, podemos usar sua forma dada por superposição de osciladores harmônicos para calcular a função de correlação sem usar nenhum conhecimento prévio sobre CFTs. Como  $\mathcal{O}$  herda as propriedades de transformação conforme de  $\phi$ , herda em particular a invariância sob translação. Assim, calcular (3.1.11) equivale a calcular  $\langle \mathcal{O}(\vec{r})\mathcal{O}(0) \rangle$ , com  $\vec{r} = e^t \hat{\Omega}$ . As coisas se simplificam muito por conta disso. Note que no lado direito da função de correlação temos  $\mathcal{O}(0) |0\rangle$ , que é simplesmente  $a_{0,0}^\dagger |0\rangle$ , já que todos os operadores de aniquilação em (3.1.8) destroem o estado fundamental e somente o operador de criação com  $n, \ell = 0$  faz o  $\vec{r} = e^t = 0$  parar de zerar. Assim,

$$\langle \mathcal{O}(\vec{r})\mathcal{O}(0) \rangle = \frac{1}{r^{2\Delta}} \quad (3.1.12)$$

que é exatamente o resultado da (3.1.11).

O que isso significa é muito importante para nossa investigação: o que obtemos olhando para a fronteira do AdS é o mesmo que obtemos olhando para uma CFT que a princípio está definida em qualquer espaço-tempo conformalmente plano. Ou seja, a fronteira do AdS é um espaço-tempo propriamente dito, onde uma teoria pode existir no mesmo sentido que existe no *bulk*: com lagrangeanas, observáveis e toda sorte de quantidade física do *bulk*, e ser uma generalização de algo particular que ocorre no *bulk*.

## 3.2 Correspondência Estado/Operador

Vamos reescrever o operador  $\mathcal{O}(\vec{r})$ , que definimos em termos do campo do AdS,  $\phi$ . Como no capítulo 2 nos especializamos em CFTs em duas dimensões, vamos agora

tratar da correspondência estado/operador para  $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ . Primeiramente, escrevendo  $\vec{r} = (x, y)$  em termos de  $z$  e  $\bar{z}$ , temos

$$z = x + iy = \tau + i\theta = |\vec{r}|e^{i\theta} \quad \bar{z} = x - iy = \tau - i\theta = |\vec{r}|e^{-i\theta} \quad (3.2.1)$$

onde  $\theta$  é a coordenada angular  $\Omega$  para a fronteira do  $\text{AdS}_3$  (um plano Euclidiano, coberto por um ângulo simples). Segue que

$$r^2 = z\bar{z} \quad e^{2i\theta} = \frac{z}{\bar{z}} \quad (3.2.2)$$

Assim, da equação (3.1.8) para o  $\text{AdS}_3$ :

$$\mathcal{O}(r, \theta) = \sum_{n, \ell} \frac{1}{N_{n, \ell}^\mathcal{O}} \left[ r^{-(2\Delta+2n+|\ell|)} e^{i\ell\theta} a_{n\ell} + r^{(2n+|\ell|)} e^{-i\ell\theta} a_{n\ell}^\dagger \right] \quad (3.2.3)$$

aplicamos a quantização radial, que segue das últimas igualdades em (3.2.1), e obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(z, \bar{z}) &= \sum_{n, \ell} \frac{1}{N_{n, \ell}^\mathcal{O}} \left[ (z\bar{z})^{-(\Delta+n+\frac{|\ell|}{2})} \left( \frac{z}{\bar{z}} \right)^{\frac{\ell}{2}} a_{n\ell} + (z\bar{z})^{n+\frac{|\ell|}{2}} \left( \frac{\bar{z}}{z} \right)^{\frac{\ell}{2}} a_{n\ell}^\dagger \right] \\ &= \sum_{h, \bar{h}=0}^{\infty} \frac{1}{N_{h, \bar{h}}^\mathcal{O}} \left[ (z\bar{z})^{-\Delta} z^h \bar{z}^{\bar{h}} a_{n\ell} + z^h \bar{z}^{\bar{h}} a_{n\ell}^\dagger \right] \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Na seção anterior vimos que quando  $\mathcal{O}(0)$  atua sobre o vácuo obtemos o estado  $a_{0,0}^\dagger |0\rangle$ . Agora vejamos o que obtemos com  $P_z = \partial_z$  atuando sobre  $\mathcal{O}$ .

$$\begin{aligned} P_z \mathcal{O} &= \partial_z \sum_{h, \bar{h}=0}^{\infty} \frac{1}{N_{h, \bar{h}}^\mathcal{O}} \left[ (z\bar{z})^{-\Delta} z^h \bar{z}^{\bar{h}} a_{n\ell} + z^h \bar{z}^{\bar{h}} a_{n\ell}^\dagger \right] \\ &= \sum_{h, \bar{h}=0}^{\infty} \frac{1}{N_{h, \bar{h}}^\mathcal{O}} \left[ z^{-\Delta-1} \bar{z}^{-\Delta} z^{-h} \bar{z}^{-\bar{h}} a_{h, \bar{h}} + z^{h-1} \bar{z}^{\bar{h}} a_{h, \bar{h}}^\dagger \right] \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

então  $(P_z \mathcal{O})(0, 0) = 0$  a não ser que  $-\Delta - h - 1 = 0 \implies h = 1$  e  $-\Delta - \bar{h} = 0 \implies \bar{h} = 0$  (já que  $\Delta = 0$  e  $\Delta = h + \bar{h}$ ). Assim,

$$(P_z \mathcal{O})(0, 0) = \frac{1}{N_{1,0}^\mathcal{O}} a_{1,0}^\dagger \quad (3.2.6)$$

Similarmente,

$$(P_{\bar{z}} \mathcal{O}) = \sum_{h, \bar{h}=0}^{\infty} \frac{1}{N_{h, \bar{h}}^\mathcal{O}} \left[ z^{-\Delta} \bar{z}^{-\Delta-1} z^{-h} \bar{z}^{-\bar{h}} a_{h, \bar{h}} + z^h \bar{z}^{\bar{h}-1} a_{h, \bar{h}}^\dagger \right] \quad (3.2.7)$$

e

$$(P_{\bar{z}} \mathcal{O})(0, 0) = \frac{1}{N_{0,1}^\mathcal{O}} a_{0,1}^\dagger \quad (3.2.8)$$

e ainda,

$$(P_{\bar{z}})^{\bar{h}}\mathcal{O} = \sum_{h,\bar{h}=0}^{\infty} \frac{1}{N_{h,\bar{h}}^{\mathcal{O}}} [z^{-\Delta-h}\bar{z}^{-\Delta-2\bar{h}}a_{h,\bar{h}} + z^h a_{h,\bar{h}}^{\dagger}] \quad (3.2.9)$$

$$(P_z)(P_{\bar{z}})^{\bar{h}}\mathcal{O} = \sum_{h,\bar{h}=0}^{\infty} \frac{1}{N_{h,\bar{h}}^{\mathcal{O}}} [z^{-\Delta-h-1}\bar{z}^{-\Delta-2\bar{h}}a_{h,\bar{h}} + z^{h-1}a_{h,\bar{h}}^{\dagger}] \quad (3.2.10)$$

$$(P_z)^h(P_{\bar{z}})^{\bar{h}}\mathcal{O} = \sum_{h,\bar{h}=0}^{\infty} \frac{1}{N_{h,\bar{h}}^{\mathcal{O}}} [z^{-\Delta-2h}\bar{z}^{-\Delta-2\bar{h}}a_{h,\bar{h}} + a_{h,\bar{h}}^{\dagger}] \quad (3.2.11)$$

Finalmente,

$$(P_z)^h(P_{\bar{z}})^{\bar{h}}\mathcal{O}|_{z,\bar{z}=0} = \sum_{h,\bar{h}=0}^{\infty} \frac{1}{N_{h,\bar{h}}^{\mathcal{O}}} a_{h,\bar{h}}^{\dagger} \quad (3.2.12)$$

onde  $a_{h,\bar{h}}^{\dagger}$  são os estados de uma partícula do  $\text{AdS}_3$  com label  $n$  e  $\ell$ . Assim, todos os estados de uma partícula podem ser criados a partir de alguma sequência com qualquer número de operadores  $P_z$ ,  $P_{\bar{z}}$  e  $\mathcal{O}$  (sequência esta que é em si um operador). Essa é a correspondência estado/operador: para cada estado no  $\text{AdS}_{d+1}$  há um operador na  $\text{CFT}_d$  que o produz.

Para estados de duas partículas, usamos sequências de  $P_z$ ,  $P_{\bar{z}}$  e  $\mathcal{O}$  que envolvam pelo menos dois  $\mathcal{O}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^2(0) &= \mathcal{O}(z, \bar{z})\mathcal{O}(w, \bar{w})|_{\substack{z,\bar{z}=0 \\ w,\bar{w}=0}} \\ &= \left( \sum_{h,\bar{h}=0}^{\infty} \frac{1}{N_{h,\bar{h}}^{\mathcal{O}}} [(z\bar{z})^{-\Delta} z^{-h}\bar{z}^{-\bar{h}}a_{h,\bar{h}} + z^h\bar{z}^{\bar{h}}] \right) \\ &\quad \times \left( \sum_{h,\bar{h}=0}^{\infty} \frac{1}{N_{h,\bar{h}}^{\mathcal{O}}} [(w\bar{w})^{-\Delta} w^{-h}\bar{w}^{-\bar{h}}a_{h,\bar{h}} + w^h\bar{w}^{\bar{h}}] \right) \Big|_{\substack{z,\bar{z}=0 \\ w,\bar{w}=0}} \quad (3.2.13) \\ &= \left( \frac{1}{N_{0,\bar{0}}^{\mathcal{O}}} [a_{0,\bar{0}} + a_{0,\bar{0}}^{\dagger}] \right) \times \left( \frac{1}{N_{0,\bar{0}}^{\mathcal{O}}} [a_{0,\bar{0}} + a_{0,\bar{0}}^{\dagger}] \right) \\ &= \left( \frac{1}{N_{0,\bar{0}}^{\mathcal{O}}} \right)^2 a_{0,\bar{0}}^{\dagger} a_{0,\bar{0}} \end{aligned}$$

ou, por exemplo,

$$(\mathcal{O}P_z\mathcal{O})(0) \equiv \left( \frac{1}{N_{0,\bar{0}}^{\mathcal{O}}N_{1,\bar{0}}^{\mathcal{O}}} \right) a_{0,\bar{0}}^{\dagger} a_{1,\bar{0}}^{\dagger} \quad (3.2.14)$$

Lembre-se da definição dos operadores de aniquilação ( $n > -h$ ) e criação ( $n \leq -h$ ),  $\phi_n$ : não podemos ter  $a_{h,\bar{h}}$  e  $a_{h,\bar{h}}^{\dagger}$  com  $h = \bar{h}$ . Mas somente para todos os  $h = 0$  e  $\bar{h} = \bar{0}$  que os limites  $z, \bar{z} \rightarrow 0$  e  $w, \bar{w} \rightarrow 0$  não fazem termos desaparecerem ou se tornarem

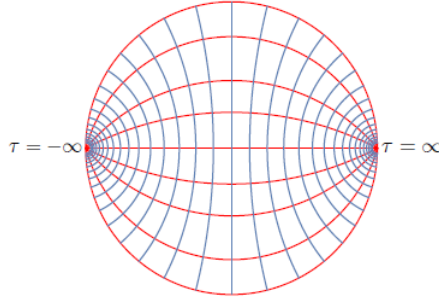


Figura 6 – Em relação aos polos  $\tau = -\infty$  e  $\tau = \infty$ , os paralelos são curvas de  $\tau$  constante e os meridianos são curvas de  $\rho$  constante para um  $\text{AdS}_2$  (para melhor visualização, apesar de estarmos estudando o  $\text{AdS}_3$ ) projetado estereograficamente no disco unitário.

singularidades. Então, todos os termos com qualquer número de operadores de aniquilação serão eliminados. Assim,

$$\mathcal{O}^3(0) \equiv \left( \frac{1}{N_{0,\bar{0}}^{\mathcal{O}}} \right)^3 a_{0,\bar{0}}^\dagger a_{0,\bar{0}}^\dagger a_{0,\bar{0}}^\dagger \quad (3.2.15)$$

De fato, qualquer combinação de  $P_z$ s,  $P_{\bar{z}}$ s e  $\mathcal{O}$ s geram algum tipo de operador que age sobre o vácuo  $|0\rangle$  dando origem a cada estado com qualquer número de partículas no  $\text{AdS}_3$ . Mais precisamente, para cada operador  $\mathcal{O}$  colocado na origem, uma partícula é criada, a partir do vácuo  $|0\rangle$ . A ideia é que o estado prepara uma condição de contorno numa superfície de  $\tau$  constante para a integral de caminho (embora esta não precise existir para que haja a correspondência) e essa superfície converge para uma pequena redoma em torno do ponto de fronteira  $P^A = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$  quando  $\tau \rightarrow \infty$  [Penedones 2016], como mostra a figura 6. Em outras palavras, cada campo vai ter uma condição de contorno correspondente responsável por "ligar" a fonte para o operador dual [DeWolfe 2018]. Essa é a formulação mais geral da correspondência estado/operador para a teoria de campos definida por um campo livre no  $\text{AdS}_3$ . Do ponto de vista da Teoria Conforme, esse sistema é chamado Teoria Livre, CFT gaussiana, uma CFT em  $N$  infinito, ou uma Teoria de Campo Médio [Kaplan 2016].

Note que, sem mencionar, utilizamos a quantização radial (que é o ordenamento temporal para coordenadas complexas): a inserção de um operador na origem, na Teoria Conforme, define um estado específico  $\psi$  no  $\text{AdS}$ , no passado infinito (pois  $e^t \sim |\vec{r}| \implies t \sim \ln |\vec{r}| = -\infty$  para  $\vec{r} = 0$ ), que evolui para  $\psi_{\mathcal{O}}(t)$  num tempo finito, como mostra a figura 7.



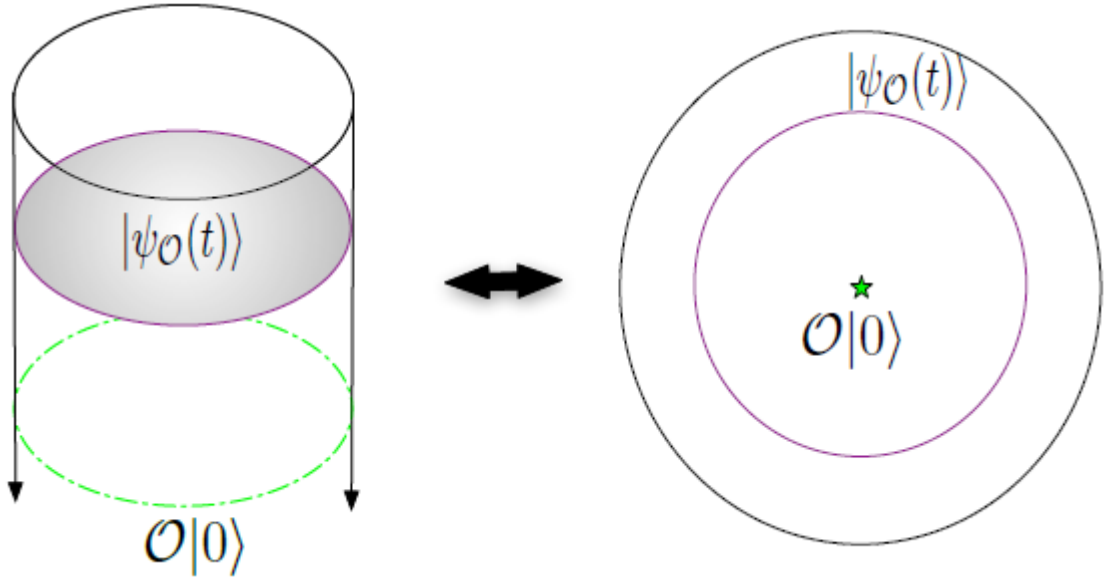


Figura 7 – O cilindro do AdS à esquerda e a CFT à direita. Na CFT, o círculo interno representa o estado num tempo finito para o qual o estado inicial evolui.

### 3.3 A Expansão de Ondas Parciais Conforme e o *Bootstrap*

A ideia agora é chegar à teoria perturbativa de QFT no AdS a partir da função de correlação de CFT. Partindo da função de correlação de 4 pontos:

$$\langle \phi(z_1, \bar{z}_1) \phi(z_2, \bar{z}_2) \phi(z_3, \bar{z}_3) \phi(z_4, \bar{z}_4) \rangle \quad (3.3.1)$$

e fazer uma transformação conforme levando  $z_1, \bar{z}_1 \rightarrow \infty, \infty$ ,  $z_2, \bar{z}_2 \rightarrow 1, 1$ ,  $z_3, \bar{z}_3 \rightarrow z, \bar{z}$  e  $z_4, \bar{z}_4 \rightarrow 0, 0$ :

$$\lim_{z_1, \bar{z}_1 \rightarrow \infty} z_1^{2h_1} \bar{z}_1^{2\bar{h}_1} \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(1, 1) \phi_3(z, \bar{z}) \phi_4(0, 0) \rangle = \langle h_1, \bar{h}_1 | \phi_2(1, 1) \phi(z, \bar{z}) | h_4, \bar{h}_4 \rangle \quad (3.3.2)$$

onde usamos a bilinearidade do produto de campos no espaço de Hilbert. Agora usando a álgebra de operadores (2.4.52) e (2.4.62) na função de correlação de 4 pontos, temos:

$$\phi_3(z, \bar{z}) \phi_4(0, 0) = \sum_k C_{34}^k z^{h_k - h_3 - h_4 + n} \bar{z}^{-\bar{h}_k - \bar{h}_3 - \bar{h}_4 - n} \frac{a_{34k}^n}{n!} \partial_n \phi_k(0, 0) \quad (3.3.3)$$

substituindo no lado direito da (3.3.2), temos:

$$\langle h_1, \bar{h}_1 | \phi_2(1, 1) \sum_k C_{34}^k z^{h_k - h_3 - h_4 + n} \bar{z}^{-\bar{h}_k - \bar{h}_3 - \bar{h}_4 - n} \frac{a_{34k}^n}{n!} \partial_n \phi_k(0, 0) | 0, 0 \rangle \equiv G_{34}^{21}(z, \bar{z}) \quad (3.3.4)$$

Definindo

$$A_{34}^{21}(k|z, \bar{z}) \equiv (C_{12}^k)^{-1} z^{h_k - h_3 - h_4 + n} \bar{z}^{-\bar{h}_k - \bar{h}_3 - \bar{h}_4 - n} \langle h_1, \bar{h}_1 | \phi_2(1, 1) \frac{a_{34k}^n}{n!} \partial_n \phi_k(0, 0) \quad (3.3.5)$$

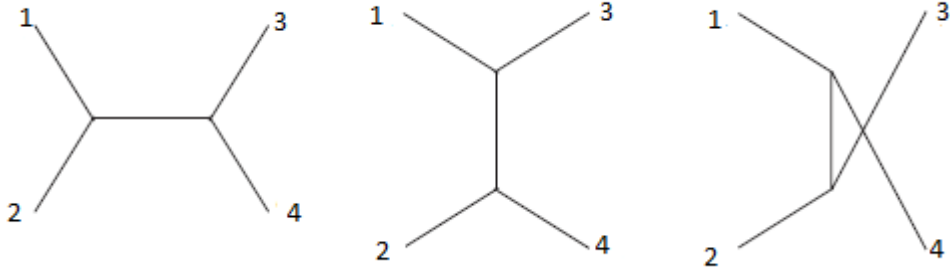


Figura 8 – Diagramas dos canais s, t e u. Cada vértice corresponde a um coeficiente. O primeiro vértice do diagrama s corresponde ao coeficiente  $C_{12}^k$  e o segundo, ao  $C_{34}^k$ , e assim por diante.

podemos reescrever  $G_{34}^{21}(z, \bar{z})$  como

$$G_{34}^{21}(z, \bar{z}) = \sum_k C_{34}^k C_{12}^k A_{34}^{21}(k|z, \bar{z}) \tag{3.3.6}$$

onde os coeficientes  $C_{ij}^k$  são determinados pela (2.4.62) e a função  $A_{34}^{21}(k|z, \bar{z})$  pode ser representada por um diagrama do tipo *tree*, e a ordem com que os índices dos quatro campos aparece determina o canal do diagrama (s, t ou u). De fato, o que fizemos na (3.3.6) foi simplesmente escrever a função de correlação de quatro pontos em termos de famílias conformes intermediárias, etiquetadas por  $k$ . A correspondência com a teoria de perturbação diagramática de Feynman é que, para cada  $k$ , a família conforme corresponde a um estado intermediário formado durante o espalhamento de dois campos, de  $(0, z)$  a  $(1, \infty)$  [Francesco, Mathieu e Sénéchal 2012]. Por isso  $G$  é chamado de bloco conforme ou *onda parcial conforme*.

A equação de *Bootstrap* estabelece relação entre as expansões em ondas parciais conformes de diferentes canais, usando a *crossing symmetry*:

$$\begin{aligned} \sum_k C_{12}^k C_{34}^k G_{34}^{21}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_4, \bar{z}_4) &= \sum_k C_{13}^k C_{24}^k G_{24}^{31}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_4, \bar{z}_4) \\ &= \sum_k C_{14}^k C_{23}^k G_{23}^{41}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_4, \bar{z}_4) \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Ela é construída somente com uso de simetria conforme (ondas parciais conformes são quantidades puramente cinéticas) e equivale à associatividade da OPE, e consequentemente à decomposição de *cluster* (localidade).

Essa seção é especialmente importante porque mostra que apesar da abstração que é estudar  $CFT_2$ , algo muito mais matemático do que físico, ainda assim encontramos significados físicos bastante "palpáveis" (pelo menos dentro do possível no escopo da física quântica) para nossos resultados.

## 4 Conclusão

Apesar de parecer estranho, a princípio, que teorias em espaços-tempos de diferentes dimensões sejam duais, vimos que a natureza holográfica da gravitação faz com que, desde que uma dessas teorias seja gravitacional, e a outra seja não-gravitacional, essa codimensão 1 da teoria gravitacional satisfaz uma característica essencial de uma teoria da gravitação quântica no *bulk*: a redundância, isto é, a capacidade de ser descrita com menos graus de liberdade. [DeWolfe 2018].

O fato da fronteira do AdS ser alcançável por raios nulos num tempo finito se mostrou fundamental para a construção da correspondência: sua fronteira sendo um lugar real (diferentemente da fronteira de um espaço-tempo plano, por exemplo), tornou possível que uma CFT o habitasse, fazendo as teorias gravitacional e não-gravitacional partes de uma mesma grande teoria.

Com esse mapeamento podemos calcular coisas que seriam observáveis da gravitação quântica como sendo estados da CFT, bem formulados matematicamente. Podemos elencar, além disso, os seguintes elementos do dicionário AdS/CFT:

- As transformações conformes consistem do grupo de Poincaré mais transformações de escala e SCTs. A partir do grupo de Poincaré podemos construir as outras simetrias demandando simetria sob inversões ao redor de um ponto  $x^i \rightarrow x^i/x^2$  (vimos no capítulo 2 que SCTs podem ser escritas assim, essencialmente). As transformações conformes são melhores entendidas como transformações de coordenadas que reescalam a métrica por um fator dependente da constante cosmológica  $\Lambda$ ,  $\Omega(\Lambda)$ . Relembrando das propriedades do AdS que vimos no capítulo 1, então, as transformações conformes (ponto de vista da CFT) são os Vetores Killing (ponto de vista do AdS).
- A quantização da CFT pode ser feita de forma padrão, ao longo de superfícies planas que evoluem com o tempo. Mas a quantização radial (iniciamos na origem e evoluímos pra fora em esferas) no EAdS revela aspectos importantes da correspondência. Assim, o operador dilatação  $D$  da CFT é o operador de translação temporal do AdS, e conseqüentemente, dimensões da CFT correspondem a energias do AdS.
- A quantização radial associa todo o espaço de Hilbert da CFT com uma região arbitrariamente pequena do AdS em torno de um ponto de fronteira, o que leva à correspondência estado/operador, minuciosamente discutida na seção 3.2.
- A simetria conforme nos permite classificar cada estado do AdS de acordo com representações irredutíveis do grupo conforme  $SO(1, d + 1)$  e então escrever cada

estado como uma combinação linear de estados primários e descendentes. Pela correspondência estado/operador podemos obter os operadores correspondentes e movê-los no espaço, também por simetria, de forma que de  $\mathcal{O}(0)$  na origem, obtemos  $\mathcal{O}(x)$  em um ponto  $x$  qualquer. As funções de correlação entre esses operadores são totalmente determinadas por simetria, a menos de um conjunto finito de constantes.

- Associatividade da OPE: diferentes formas de usar a OPE pra calcular a função de correlação deve gerar os mesmos resultados, i.e., a equação de *bootstrap*. Do ponto de vista de uma QFT no AdS isso corresponde aos diferentes canais  $s$ ,  $t$  e  $u$ .
- Existência de um tensor energia-momento, um operador quasi-primário conservado cuja função de correlação obedece à identidade de Ward.

Apesar da dualidade AdS/CFT (ou dualidade gravidade/calibre, de forma mais geral) ter surgido em teoria de cordas, no artigo [Maldacena 1997], em muitos trabalhos, como nesse, é tratada sem que sequer sejam mencionadas as supercordas, uma vez que elas são apenas um dos exemplos de teorias do lado gravitacional da dualidade, existindo uma gama de possibilidades para cada um dos lados. Para se ter uma ideia da abrangência da correspondência, o artigo original de Maldacena é citado em todos os artigos no arXiv.org, cobrindo áreas que vão desde a física-matemática até astrofísica [Natsuume 2015].

O processo de pesquisa que gerou esse trabalho, bem como sua leitura, podem ser a porta de entrada a campos diversos, que vão desde física fundamental, teoria geral de campos e partículas, até física da matéria condensada nas suas mais práticas aplicações.

# APÊNDICE A – A Carga Central

É o valor assumido pela função  $C$  das constantes de acoplamento  $K$  no espaço de teorias, comum a teorias da mesma classe de universalidade. A carga central emerge no processo de regularização da transformação do tensor energia-momento.

$$T'(z) = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 T(w) + \frac{c}{12} S(w, z) \quad (\text{A.0.1})$$

onde  $S(w, z)$  denota a derivada Schwarzian, dada por

$$S(w, z) = \frac{\partial_z^3 w}{\partial_z w} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial_z^2 w}{\partial_z w}\right)^2 \quad (\text{A.0.2})$$

E ela aparece na extensão central da Álgebra de Witt de transformações infinitesimais conformes, a Álgebra de Virasoro

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} \quad (\text{A.0.3})$$

satisfazendo

$$[L_n, c] = 0 \text{ e } [c, c] = 0 \quad (\text{A.0.4})$$

## A.0.1 Mapeando uma CFT em um cilindro

O objetivo aqui é ver como um sistema reage à introdução de condições de fronteira. Então, considere uma CFT situada em todo o plano complexo e performe a transformação

$$z \rightarrow w = \frac{L}{2\pi} \ln(z) = \frac{L}{2\pi} \ln(e^{x^0} e^{ix^1}) = \frac{L}{2\pi} (x^0 + ix^1) \quad (\text{A.0.5})$$

Sob transformação conforme tal como essa, é possível mostrar que a transformação do tensor energia-momento é dado pela equação (A.0.1). O termo com o  $c$  aparece devido a flutuações quânticas, pelo processo de regularização. O resto é simplesmente a transformação clássica.

Então, resolvendo para o cilindro, temos que a derivada de Schwarz é  $\frac{1}{2\pi z^2}$  e

$$T_{cy}(w) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left(T_{pl}(z)z^2 - \frac{c}{24}\right) \quad (\text{A.0.6})$$

Note que para transformações globais conformes

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad ; \quad ad - bc = 1 \quad (\text{A.0.7})$$

a derivada Schwarziana desaparece e  $T_{pl}$  é ainda quasi-primária e portanto tem traço nulo. Então, tomando o valor esperado da equação (A.0.6), temos

$$\langle T_{cy}(w) \rangle = -\frac{c\pi^2}{6L^2} \quad (\text{A.0.8})$$

Isto é, densidade de energia de vácuo não nula, proporcional à energia de Casimir (energia de vácuo alterada por alguma condição de contorno), que vai a zero no limite  $L \rightarrow \infty$ . Então a carga central é a associada com uma leve quebra de simetria conforme, no sentido de que  $L$  sendo grande o suficiente, temos um efeito muito pequeno. Para ser mais preciso, podemos relacionar a carga central à energia livre por unidade de comprimento de um sistema estatístico definido nesse cilindro. Sob transformação de escala infinitesimal, a energia livre se transforma como

$$\delta F = -\frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{g} \delta g_{\mu\nu} \langle T^{\mu\nu} \rangle \quad (\text{A.0.9})$$

e a circunferência do cilindro fica

$$L \rightarrow (1 + \varepsilon)L \implies \delta L = \varepsilon L \quad (\text{A.0.10})$$

Em geral, uma transformação de coordenada é  $w^0 \rightarrow (1 + \varepsilon)w^0$ , de forma que uma variação infinitesimal da coordenada é

$$\delta w^0 = \varepsilon w^0 = \varepsilon w^0 \delta_{\mu 0} = \varepsilon^\mu \quad (\text{A.0.11})$$

e, usando o fato de que  $\delta g_{\mu\nu} = -(\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu)$ , obtemos as variações do tensor métrico correspondentes

$$\delta g_{\mu\nu} = -2\varepsilon \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} \quad (\text{A.0.12})$$

Uma última coisa que precisamos para entender melhor a variação da energia livre é lembrar que os componentes não nulos de  $T^{\mu\nu}$  são os campos quiral e anti-quiral, mas (A.0.8) é quiral, e então obtemos

$$\langle T^{00} \rangle = -\frac{1}{\pi} \langle T_{cy} \rangle \quad (\text{A.0.13})$$

Portanto, colocando todas essas observações juntas, temos que a variação da energia livre é

$$\delta F = \int dw^0 dw^1 \frac{\pi c}{6L^2} \frac{\delta L}{L} \quad (\text{A.0.14})$$

Essa equação está basicamente dizendo que à medida que a circunferência do cilindro vai para infinito, a variação na energia livre vai para zero, isto é, ela supõe que

a quebra da simetria conforme por efeitos quânticos some no limite  $L \rightarrow \infty$ . Vamos abandonar essa suposição por um momento, considerando que mesmo quando  $L \rightarrow \infty$ , sobra uma energia livre  $f_0$  por unidade de área.

$$\delta F = \int dw^0 dw^1 \left( f_0 + \frac{\pi c}{6L^2} \right) \frac{\delta L}{L} \quad (\text{A.0.15})$$

Obviamente,  $\int dw^0 = L$ . Então, definindo energia livre por unidade de comprimento nos livramos do  $\int dw^1$

$$\delta F_L = \left( f_0 + \frac{\pi c}{6L^2} \right) \delta L \quad (\text{A.0.16})$$

$$\implies F_L = f_0 L - \frac{\pi c}{6L} \quad (\text{A.0.17})$$

# Referências

- BENGTSSON, I. Anti-de Sitter Space. [Http://www.fysik.su.se/ingemar/Kurs.pdf](http://www.fysik.su.se/ingemar/Kurs.pdf). 1998. 11
- BLUMENHAGEN, R.; PLAUSCHINN, E. *Introduction to Conformal Field Theory*. [S.l.]: Springer, 2009. 35, 37, 45, 52, 61
- CARDY, J. *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996. 36
- DEWOLFE, O. TASI Lectures on Applications of Gauge/Theory Duality. *arXiv preprint hep-th/1802.08267v1*, 2018. 65, 71, 74
- FRANCESCO, P. D.; MATHIEU, P.; SÉNÉCHAL, D. *Conformal Field Theory*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. 46, 73
- HOOFT 't. Dimension Reduction in Quantum Gravity. *Institute for Theoretical Physics of Utrecht University*, 1993. 65
- KAPLAN, J. *Lectures on AdS/CFT from the bottom up*. [S.l.]: Johns Hopkins University, 2016. 34, 36, 71
- LOVE, T. R. An identity crisis for the cassimir operator. [Http://vixra.org/pdf/0703.0002v1.pdf](http://vixra.org/pdf/0703.0002v1.pdf). 2016. 22
- MALDACENA, J. M. *Advanced Theoretical Mathematical Physics.2:231-252,1998*, Harvard University, 1997. 75
- MUNKRES, J. *Topology: a first course*. [S.l.]: Prentice Hall, 1974. 40
- NATSUUME, M. *AdS/CFT Duality User Guide*. 1. ed. Springer Tokyo, 2015. (Lecture Notes in Physics 903). ISBN 978-4-431-55440-0, 978-4-431-55441-7. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=cd3eea995776dbef63546382e20f4e57>>. 75
- PENEDONES, J. TASI Lectures on AdS/CFT. *arXiv preprint hep-th/1608.04948v1*, 2016. 71
- ROSENBERG, S. *The Laplacian on a Riemannian Manifold: An Introduction to Analysis on Manifolds*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997. (London Mathematical Society Student Texts). 23
- SCHOTTENLOHER, M. *A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory*. [S.l.]: Springer, 2008. 35, 40, 41, 42, 44
- SREDNICKI, M. *Quantum Field Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. 66
- SZABO, R. J. *An Introduction to String Theory and D-Brane Dynamics*. [S.l.]: Imperial College Press, 2011. 65