

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE UnB GAMA-FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA

ACOPLAMENTO FLUIDO-ESTRUTURA U-P NÃO SIMÉTRICA
DE PROBLEMAS VIBROACÚSTICOS E HIDROELÁSTICO POR
ELEMENTOS FINITOS 2D ISOPARAMÉTRICOS

AGNALDO ANTÔNIO MOREIRA TEODORO DA SILVA

ORIENTADOR (A): Dr. MARCUS VINÍCIUS GIRÃO DE MORAIS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS
DA ENGENHARIA

PUBLICAÇÃO: FGA.DM – 070A/2018

BRASÍLIA/DF: 09/2018

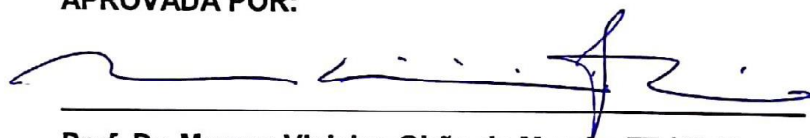
**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DO GAMA / FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA**

**"ACOPLAMENTO FLUIDO-ESTRUTURA U-P NÃO SIMÉTRICA DE
PROBLEMAS VIBROACÚSTICOS E HIDROELÁSTICO POR ELEMENTOS
FINITOS 2D ISOPARAMÉTRICOS"**

AGNADO ANTÔNIO MOREIRA TEODORO DA SILVA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA DA FACULDADE DO GAMA E
FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA.**

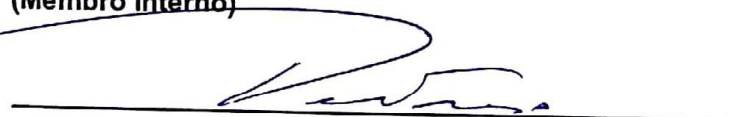
APROVADA POR:



**Prof. Dr. Marcus Vinicius Girão de Moraes; FT / UnB
(Orientador)**



**Profa. Dra. Maria Alzira de Araújo Nunes; FGA / UnB
(Membro Interno)**



**Prof. Dr. Lineu José Pedroso; FT / UnB
(Membro Externo)**

Brasília / DF, 28 de setembro de 2018

FICHA CATALOGRÁFICA

AGNALDO ANTÔNIO MOREIRA TEODORO DA SILVA

Acoplamento Fluido-Estrutura U-P não Simétrica de Problemas Vibroacústicos e Hidroelástico por Elementos Finitos 2D Isoparamétricos, [Distrito Federal] 2018.

128°.p. 210 x 297 mm (FGA/FT/UnB, Mestre, Integridade de Materiais da Engenharia, 2018).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade UnB Gama. Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia.

1. Vibroacústica

2. Sloshing

3. Hidroelasticidade

4. Interação fluido-estrutura

I. FGA/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SILVA, A. A. M. T. da (2018). Acoplamento Fluido-Estrutura U-P não Simétrica de Problemas Vibroacústicos e Hidroelástico por Elementos Finitos 2D Isoparamétricos. Dissertação de Mestrado em Integridade de Materiais da Integridade da Engenharia, Publicação 070A/2018, Faculdade UnB Gama/FT/Universidade de Brasília, DF, 127.p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Agnaldo Antônio Moreira Teodoro Da Silva

TÍTULO: Acoplamento Fluido-Estrutura U-P não Simétrica de Problemas Vibroacústicos e Hidroelástico por Elementos Finitos 2D Isoparamétricos

GRAU: Mestre

ANO: 2018

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Agnaldo Antônio Moreira Teodoro Da Silva

Faculdade UnB/GAMA – Área Especial nº 01, Setor Central.

CEP 72.405-610 Brasília, DF – Brasil.

E-mail: professoragnaldoantonio@gmail.com

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Deus, pois sem sua graça não conseguiria enfrentar essa grande jornada.

Agradeço ao meu orientador Marcus Vinicius Girão de Moraes pelo incentivo, paciência e pela dedicação.

Agradeço aos meus pais: Wilson e Neide, pelo seu imenso amor, pelas palavras de incentivo diante das tribulações e pelo apoio que sempre me deram na busca pelo conhecimento.

Agradeço a minha esposa Giselle pelo incentivo, amor e por ser tão compreensiva durante minhas ausências.

Agradeço a minha filha Maria Cecília pelo amor e pelo carinho que me deu forças para enfrentar essa caminhada.

Agradeço aos meus familiares e amigos pelo apoio e incentivo.

RESUMO

Os efeitos produzidos em uma estrutura devido a presença de fluidos são de grande importância no cotidiano de um engenheiro. Um dos efeitos comuns em problemas de interação fluido-estrutura é o efeito de *sloshing*. Compreender esse efeito em um sistema fluido-estrutura é de grande importância para o controle passivo de vibrações mecânicas, neste caso os absorvedores de líquido sintonizados (TLCD). O presente trabalho implementou um código computacional baseado na formulação fluido-estrutura não simétrica U-P em elementos finitos aplicado à análise de problemas vibroacústicos e hidroelásticos (com a condição de superfície livre). A modelagem da estrutura usa as equações de elasticidade 2D de estado plano de deformações, e a modelagem do fluido a equação da onda. O código computacional implementa a formulação fluido-estrutura utilizando elementos isoparamétricos bidimensionais do tipo retangular 4 nós (QUA4) e linear 2 nós (LIN2) para os elementos de domínio (sólido e fluido) e de interface (fluido-estrutura e superfície livre), respectivamente. Para validação do código computacional implementado, casos simples modelados computacionalmente pela presente implementação são comparados a resultados analíticos, numéricos (plataforma computacional ANSYS) e/ou experimentais. Os resultados numéricos apresentando erros razoáveis para malhas discretizadas com um número razoável de elementos.

Palavras-Chave: Vibração, Interação Fluido-Estrutura, Vibroacústica, Hidroelasticidade, *Sloshing*, Superfície Livre.

ABSTRACT

The effects generated in a structure due to the presence of fluids are of great importance in daily life of an engineer. One of the common effects on fluid structure interaction problems is the effect of *sloshing*. Understanding this effect in a fluid-structure system is of great importance for the passive control of mechanical vibrations in the case of tuned liquid absorbers (TLCD). The present work implemented a computational code based on non-symmetric fluid-structure formulation U-P in finite elements applied to analysis of vibroacoustic and hydroelastic problems (with free surface condition). The structure is formulated as 2D plane strain elastic equation and fluid as wave equation. The computer code implements the fluid-structure formulation using 2D isoparametric finite elements rectangular 4 nodes (QUA4) to field domain (solid and liquid) and linear two nodes (LIN2) to interface (fluid-structure and surface free). To validate the implemented computational code, simple cases are compared to analytical, numerical (ANSYS) and / or experimental results. The numerical results presenting reasonable errors for the finite element meshes used.

Keywords: Vibration, Fluid-structure interaction, Vibroacoustic, Hydroelasticity, Sloshing, Free Surface.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Exemplos de casos práticos envolvendo interação fluido-estrutura. (a) Aerogeradores offshore (Semanticscholar, site) (b) Eclusa do Canal do Panamá (Canal do Panamá, site) (c) Barragem (like3za , site) (d) Prédio com TLD (techeblog, site)	18
Figura 3.1 – Domínio do fluido e condições de contorno.....	32
Figura 3.2 – (a) cavidade com superfície livre (b) coordenadas de análise da onda de superfície (Morais, 2000)	34
Figura 3.3 – Cavidade unidimensional acoplada a uma estrutura rígida móvel (Sousa Jr, 2006)	35
Figura 3.4 – Domínio sólido elástico e condições de contorno.....	36
Figura 3.5 – Domínio do fluido e condições de contorno.....	38
Figura 4.1 – Elemento unidimensional (a) sistema de coordenada global (b) sistema de coordenada natural.....	41
Figura 4.2 – Relação entre sistema cartesiano de coordenadas globais e naturais.....	42
Figura 4.3 – Cavidade acústica e condições de contorno.....	44
Figura 4.4 – Modelo numérico do acoplamento fluido estrutura com discretização por elementos finitos.....	45
Figura 4.5 – Sistema de coordenadas (a) Local (b) Global (Burgos, 2017).....	49
Figura 5.1 – Fluxograma geral do código computacional.....	58
Figura 5.2 – Fluxograma da primeira etapa do código computacional.....	59
Figura 5.3 – Fluxograma da segunda etapa do código computacional	59
Figura 5.4 – Fluxograma da terceira etapa do código computacional	60
Figura 5.5 – Elemento PLANE 42 (ANSYS 19.0, adaptado)	61
Figura 5.6 – Elemento FLUID 29 (ANSYS 19.0, adaptado)	61
Figura 6.1 – Representação esquemática do modelo acoplado estrutura – cavidade longa 2D com superfície livre.....	63
Figura 6.2 – Discretização do problema através de malhas de elementos finitos.	63
Figura 6.3 – Graus de liberdade do elemento.....	66
Figura 6.4 – Estudo de convergência de malha (erro relativo %) entre os resultados de frequência natural da estrutura entre o presente estudo e ANSYS em função do número de nós	69
Figura 6.5– Comparação das formas modais do presente estudo e ANSYS Student 19.0.	70
Figura 6.6 – Graus de liberdade do elemento.....	72

Figura 6.7 – Estudo de convergência de malha (erro relativo %) entre os resultados de frequência natural de superfície livre entre o presente estudo e ANSYS em função do número de nós	75
Figura 6.8 – Estudo de convergência de malha (erro relativo %) entre os resultados de frequência natural da cavidade acústica entre o presente estudo e ANSYS em função do número de nós	76
Figura 6.9– Comparação das formas modais de superfície livre entre o presente estudo e o ANSYS Student 19.0, respectivamente. (a) 1º modo (b) 2º modo (c) 3º modo	77
Figura 6.10– Comparação das formas modais da cavidade acústica entre o presente estudo e o ANSYS Student 19.0, respectivamente. (a) 1º modo (b) 2º modo (c) 3º modo	77
Figura 6.11– Comparativo das Formas modais superfície livre acoplada entre o presente estudo e o ANSYS Student 19.0 respectivamente. (a) 1º modo (b) 2º modo (c) 3º modo.....	81
Figura 6.12– Comparativo das Formas modais da cavidade acústica acoplada entre o presente estudo e o ANSYS Student 19.0 respectivamente. (a) 1º modo (b) 2º modo (c) 3º modo.....	81
Figura 6.13 – Representação esquemática do modelo acoplado estrutura tanque retangular com superfície livre.	82
Figura 6.14 – Modelo de Malhas de Elementos finitos gerada nos softwares: (a) Gmsh (b) Ansys	84
Figura 6.15 – Estudo de convergência da malha (erro relativo - %) entre os resultados de frequência natural da estrutura entre o presente estudo e ANSYS Student 19.0.....	84
Figura 6.16– Comparação das formas modais da estrutura desacoplada entre o presente estudo e o ANSYS Student 19.0. (a) 1º modo (b) 2º modo (c) 3º modo (d) 4º modo (e) 5º modo (f) 6º modo.....	85
Figura 6.17 – Representação esquemática do modelo para fluido desacoplado.	86
Figura 6.18– Modelo de Malhas Elementos finitos gerada nos softwares: (a) ANSYS(b) Gmsh	87
Figura 6.19 – Estudo de convergência de malha (erro relativo %) entre os resultados de frequência natural de superfície livre entre o presente estudo e ANSYS em função do número de nós	88
Figura 6.20 – Estudo de convergência de malha (erro relativo %) entre os resultados de frequência natural da cavidade acústica entre o presente estudo e ANSYS em função do número de nós	88
Figura 6.21– Comparativo das Formas modais superfície livre entre o presente estudo e o ANSYS Student 19.0 respectivamente. (a) 1º modo (b) 2º modo (c) 3º modo (d) 4.....	90

° modo	90
Figura 6.22– Comparativo das Formas modais cavidade acústica com superfície livre entre o presente estudo e ANSYS 19.0.(a) 1° modo (b) 2° modo (c) 3° modo (d) 4° modo (e) 5° modo (f) 6° modo.....	90
Figura 6.23 – Malhas de elementos finitos gerada: (a) Gmsh (b) Ansys 19.0	92
Figura 6.24– Comparativo das Formas modais superfície livre acoplada entre o presente estudo e o ANSYS Student 19.0 respectivamente. (a) 1° modo (b) 2° modo (c) 3° modo (c) 4° modo	93
Figura 6.25– Comparativo das Formas modais cavidade acoplada entre o presente estudo e o ANSYS Student 19.0 (a) 1° modo (b) 2° modo (c) 3° modo (c) 4° modo (d) 5° modo (e) 6° modo	93
Figura 6.26– Pontos notáveis da análise dinâmica do sistema	95
Figura 6.27 – Função de resposta em frequência – ponto A – superfície livre	96
Figura 6.28 – Função de resposta em frequência – ponto B – cavidade acústica	96
Figura 6.29 – Representação esquemática do modelo acoplado estrutura - TLCD com superfície livre.	97
Figura 6.30 – Representação esquemática do absorvedor dinâmico de vibrações (TLCD)	98
Figura 6.31 – Representação esquemático das variáveis adotadas na solução analítica do absorvedor dinâmico de vibrações (TLCD).	99
Figura 6.32 – Modelo de Malhas Elementos finitos gerada no software Gmsh e representação esquemática da coluna (há) de água variável ao longo do estudo.	99
Figura 6.33 – Deformadas modais numérica da superfície livre para altura da coluna de água de 10.5 cm.....	100
Figura 6.34 – Representação esquemática do modelo de aplicação da aceleração unitária no TLCD	101
Figura 6.35 – Variação da pressão no ponto A para o sistema acelerado em função da frequência.	101
Figura 6.36 – Deformadas modais com aceleração unitária – $ha = 105\text{ mm}$	102
Figura 6.37 – Deformadas modais com aceleração unitária – $ha = 65\text{ mm}$	102
Figura 6.38 – Deformadas modais com aceleração unitária – $ha = 35\text{ mm}$	103
Figura 6.39 – Dimensões (mm) do sistema adotado para modelagem do problema acoplado estrutura - TLCD com superfície livre.	104
Figura 6.40 – Modelo de Malhas Elementos finitos gerada no software Gmsh e ponto adotado para análise dinâmica do problema.....	104

Figura 6.41– Comparação das formas modais da estrutura desacoplada entre o presente estudo e o ANSYS Student 19.0. (a) 1º modo (b) 2º modo (c) 3º modo (d) 4º modo.	105
Figura 6.42– Comparação das formas modais da estrutura desacoplada entre o presente estudo e o ANSYS Student 19.0. (a) 1º modo (b) 2º modo.....	106
Figura 6.43– Comparação entre frequências analíticas e numéricas para o 1º e 2º modos variando a altura de coluna de água (h_a).....	107
Figura 6.44– Comparação entre a FRF analítica e numérica para altura de coluna de água 105 mm aplicado no ponto A.	108
Figura 6.45– Comparação entre a FRF obtidas para a estrutura desacoplada e para a estrutura com TLCD contendo uma de coluna de água 105 mm, aplicado no ponto A.....	109
Figura A.1 – Representação esquemática do conduto reto.	117
Figura A.2 – Representação esquemática do problema pistao-aberto.	121
Figura A.3 – Representação esquemática do problema pistao-pistão.....	122

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1 – Características dos materiais	64
Tabela 6.2 – Frequências naturais da estrutura desacoplada.....	65
Tabela 6.3 – Síntese das coordenadas dos nós de um elemento e suas conectividades.....	66
Tabela 6.4 – Frequências naturais da estrutura desacoplada.....	68
Tabela 6.5 – Comparativo frequências numéricas estrutura desacoplada.....	69
Tabela 6.6 – Frequências naturais do fluido desacoplada – modos cavidade	71
Tabela 6.7 – Frequências naturais do fluido desacoplada – modos superfície livre.....	71
Tabela 6.8 – Síntese das coordenadas dos nós de um elemento e suas conectividades.....	72
Tabela 6.9 – Frequências naturais do fluido desacoplado.....	75
Tabela 6.10 – Comparativo frequências numéricas fluido desacoplado - superfície livre	76
Tabela 6.11 – Comparativo frequências numéricas fluido desacoplado – cavidade acústica ..	76
Tabela 6.12 – Frequências naturais acoplamento fluido estrutura – modos cavidade.....	78
Tabela 6.13 – Frequências naturais acopladas	80
Tabela 6.14 – Comparativo frequências numéricas acoplado - superfície livre.....	80
Tabela 6.15 – Comparativo frequências numéricas fluido acoplado – cavidade acústica	80
Tabela 6.16 – Características dos materiais	83
Tabela 6.17 – Frequências naturais da estrutura desacoplada.....	83
Tabela 6.18 – Comparativo frequências numéricas da estrutura desacoplada	85
Tabela 6.19 – Frequências naturais do fluido desacoplada - modos cavidade.....	87
Tabela 6.20 – Frequências naturais do fluido desacoplada - modos superfície livre	87
Tabela 6.21 – Comparativo frequências numéricas do fluido desacoplada superfície livre	89
Tabela 6.22 – Comparativo frequências numéricas do fluido desacoplada cavidade acústica	89
Tabela 6.23 – Frequências naturais acoplamento fluido estrutura – modos superfície livre ...	91
Tabela 6.24 – Frequências naturais acoplamento fluido estrutura – modos cavidade.....	91
Tabela 6.25 – Comparativo frequências numéricas do fluido acoplado superfície livre.....	92
Tabela 6.26 – Comparativo frequências numéricas do fluido acoplada cavidade acústica	92
Tabela 6.27 – Comparativo frequências naturais desacoplada e acoplada	94
Tabela 6.28 – Comparativo entre as frequências naturais obtidas no presente estudo e experimentais.....	99
Tabela 6.29 – Comparativo frequências numéricas da estrutura desacoplada.	105
Tabela 6.30 – Comparativo frequências numéricas da estrutura acoplada com as frequências analíticas e experimentais $h_a=105\text{mm}$	106

Tabela 6.31 – Razão de semelhança entre as formas modais analítica e numérica obtidas no presente estudo.....	107
---	-----

LISTA DE QUADROS

Quadro 4.1 - Sub-rotina para o cálculo da matriz de rigidez do fluido	47
Quadro 4.2 - Sub-rotina para o cálculo da matriz de massa do fluido.....	48
Quadro 4.3 - Sub-rotina para o cálculo matriz de acoplamento fluido estrutura	50
Quadro 4.4 - Sub-rotina para o cálculo da matriz de superfície livre	51
Quadro 4.5 - Sub-rotina para o cálculo da matriz de rigidez da estrutura	54
Quadro 4.6 - Sub-rotina para o cálculo da matriz de massa da estrutura.....	54
Quadro 4.7 - sub-rotina para o cálculo da matriz do sistema acoplado	55

LISTA DE SÍMBOLOS

u, p, ϕ	Deslocamento, pressão e potencial de velocidade
u, η, ϕ	Deslocamento, pressão e potencial de velocidade
ρ	Massa específica
ρ_0	Massa específica média
ρ'	Flutuação da massa específica
p	Pressão
p'	Pressão média
p_0	Flutuação da pressão
u	Velocidade
u'	Velocidade média
u_0	Variação da velocidade
∇	Operador Nabla
c	Velocidade de propagação do som no fluido
κ	Coefficiente de compressibilidade do fluido
μ	Coefficiente de viscosidade do fluido
g	Gravidade
\bar{p}	Amplitude da pressão
f	Frequência de oscilação da pressão
ω	Frequência circular
C^0	Função aproximadora
L	Comprimento de onda na direção x
$\bar{\eta}$	Elevação da superfície livre
Z	Deslocamento do nível de água
\dot{Z}	Velocidade da água na superfície livre
\ddot{Z}	Aceleração da água na superfície livre
\ddot{u}_x	Aceleração da parede móvel
\mathbf{u}	Grandeza vetorial: deslocamento
\mathbf{F}	Grandeza vetorial: força
σ	Tensão
ε	Deformação
$[D]$	Rigidez Flecional
\tilde{u}	Solução aproximada de u
Γ_u	Condição de contorno deslocamento da estrutura
Γ_σ	Condição de contorno tensão na estrutura
ϕ	Função linear de ε em cada elemento, e
a_i	Aproximação ao valor de ϕ no nó i
N_i	Funções de forma lineares com continuidade C^0
x	Função de forma
u	Função de forma

$[N]$	Função de forma
ξ	Coordenada natural
J	Jacobiano da transformação de coordenadas
$[B]_G$	Matriz da derivada da função de forma em função da coordenada global
$[B]_N$	Matriz da derivada da função de forma em função da coordenada natural
$[K_f]$	Matriz de rigidez do elemento
$[M_f]$	Matriz de massa do elemento
$[FS]^T$	Matriz de acoplamento fluido estrutura
$[SL]$	Matriz de superfície livre
A	Área do elemento
T	Matriz de transformação de coordenadas
$[SL]$	Matriz de superfície livre
$[K_E]$	Matriz de rigidez do elemento
$[M_E]$	Matriz de massa do elemento
$[C_E]$	Matriz de amortecimento de um elemento
$[P_b]$	Vetor de forças de corpo
$[P_s]$	Vetor de forças de superfície
M_A, K_A	Matrizes com os elementos do acoplamento fluido estrutura
F_A	Vetor de forças que será adotado de acordo com o método de resolução: vibração livre ou vibração forçada
δ	Vetor de deslocamento e pressão do sistema
ω	Frequência circular
Φr	Autovetores
ω_C	Frequência de vigas com deformação de cisalhamento
ω_F	Frequência de vigas com deformação de flexão
E	Módulo de elasticidade
K	Coefficiente de cisalhamento
G	Módulo de elasticidade transversal
I	Momento de inércia da seção transversal
\bar{m}	Massa por unidade de comprimento da estrutura
λ_{ic} e λ_{if}	Parâmetros adimensionais dependentes do modo
ω_A	Frequência natural normal (axial) de uma viga engastada livre
ω_{sl}	Frequência da superfície livre

LISTA DE ABREVIATURAS

ANSYS	<i>Software</i> comercial de elementos finitos
FRF	Função de resposta em frequência
GMSH	<i>Software</i> – Gerador de malha de elementos finitos 3D
MEF	Método dos Elementos Finitos
MDF	Método das diferenças finitas
NGLE	Número de graus de liberdade da estrutura que possui a dimensão da matriz de rigidez ou de massa
NGLF	Número de graus de liberdade do fluido que possui a dimensão da matriz de rigidez ou de massa
TLD	<i>Tuned Liquid Damper</i>
TLCD	<i>Tuned Liquid Column Damper</i>
U-P	Deslocamento - Pressão

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
1.1 OBJETIVOS	19
1.1.1 Objetivo Geral	19
1.1.2 Objetivos Específicos	19
1.2 METODOLOGIA	20
1.3 ABRANGÊNCIA E LIMITAÇÃO	20
1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	21
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	23
2.1 CONTEXTUALIZAÇÃO	23
2.2 SOBRE A CONDIÇÃO DE SUPERFÍCIE LIVRE	26
3 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	29
3.1 FORMULAÇÃO DO ACOPLAMENTO FLUIDO ESTRUTURA	29
3.2 FORMULAÇÃO DIFERENCIAL ACÚSTICA	29
3.3 EQUAÇÃO DA ONDA	32
3.4 DESCRIÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CONTORNO	33
3.4.1. Condição de contorno de superfície livre	33
3.4.2 Condição de contorno de interface fluido estrutura	35
3.4.3. Condição de parede rígida	35
3.4.4. Síntese das Condições de Contorno	35
3.5 EQUAÇÃO GOVERNANTE DA ESTRUTURA	36
3.5.1 Relação entre deformação e deslocamento	37
3.5.2 Relação entre tensão e deformação	37
3.5.3 Equações de equilíbrio	37
4 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	40
4.1 ELEMENTOS ISOPARAMETRICOS	40
4.1.1 Elemento Isoparamétrico Unidimensional	40
4.1.2 Elemento Isoparamétrico Bidimensional	42
4.2 DISCRETIZAÇÃO ISOPARAMÉTRICA	44
4.2.1 Domínio do Fluido	45
4.2.2 Domínio da Estrutura	51
4.2.3 Montagem do problema acoplado	54
5 ASPECTOS COMPUTACIONAIS	58
5.1 CÓDIGO COMPUTACIONAL	58
5.2 ANSYS 19.0 STUDENT LICENSE	60

6 RESULTADOS NUMÉRICOS	62
6.1 CASO 1: CAVIDADE LONGA COM SUPERFÍCIE LIVRE	63
6.1.1 Solução Desacoplada Sólido	64
6.1.2 Solução do Fluido Desacoplado	70
6.1.3 Solução Acoplada Fluido - Estrutura	78
6.2 SLOSHING EM TANQUE RETANGULAR	82
6.2.1 Solução Desacoplada Sólido	83
6.2.2 Solução do Fluido Desacoplado	86
6.2.3 Solução Acoplada Fluido – Estrutura	91
6.2.4 Vibração Forçada	95
6.3 ABSORVEDOR LÍQUIDO DE COLUNA SINTONIZADO (TLCD)	97
6.3.1 Solução desacoplada fluido (TLCD)	98
6.3.2 Acoplamento TLCD com Estrutura Principal	103
7 CONCLUSÕES	110
7.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	112
7.2 LISTA DE PUBLICAÇÕES	112
REFERÊNCIAS	113
ANEXO A – SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL	117
A.1 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA 1-D	117
A.2 – EXEMPLOS DE CONDIÇÕES DE CONTORNO	119
A.2.1 - Cavidade Fechado-Fechada	119
A.2.2 Cavidade Aberto-Aberta	120
A.2.3 Cavidade Aberto – Fechada	120
A.2.4 Cavidade Pistão – Aberta	121
A.2.5 Cavidade Pistão – Pistão	122
ANEXO B – PROBLEMA DE SUPERFÍCIE LIVRE	125
B.1 – ONDAS DE SUPERFÍCIE LIVRE EM UMA CAIDADE RETANGULAR	125

1 INTRODUÇÃO

Na engenharia é comum encontrar problemas de interação acústica entre fluido e estrutura. Este campo de pesquisa pode ser dividido em duas categorias: vibroacústica e interação fluido-estrutura. Na primeira, há o contato entre o sólido e um fluido acústico, em que se analisam problemas como radiação e transmissão de som e conforto acústico em cabines. No fluido estrutura destacam-se problemas de cavidades preenchidas total ou parcialmente por fluidos densos, como a água. Por exemplo, casos de reservatórios. (Ribeiro, 2010).

Os efeitos produzidos por um fluido são capazes de influenciar a magnitude, as frequências e a estabilidade de um sistema estrutural (Ribeiro e Pedroso, 2016). Dentre as diversas categorias de interação, destaca-se a interação entre uma estrutura e um fluido acústico.

Em problemas vibroacústicos e hidroelásticos, a modelagem é realizada considerando o acoplamento entre o fluido acústico e as estruturas elásticas que possuem o mesmo movimento na direção normal na interface fluido-estrutura. Essa característica de contato com um fluido circundante, fornece o mecanismo para deslocar e comprimir o fluido tornando capaz de irradiar, transmitir e responder as ondas sonoras (Fahy, 2001).

Para o estudo de problemas vibro-acústicos é importante compreender a estrutura e o fluido acústico desacoplados para em seguida realizar o acoplamento fluido estrutura. Em cavidades acústicas onde as frequências máximas de excitação possuem comprimentos de ondas na mesma ordem de grandeza das principais dimensões da cavidade, realiza-se a análise modal para estudo da resposta acústica do sistema.

Já os problemas de hidroelasticidade, dizem respeito às deformações dos corpos elásticos, devido a excitações hidrodinâmicas e/ou mecânicas, imersos a domínios fluidos circundantes. Os problemas de hidroelasticidade são importantes em estruturas offshore, aplicações industriais, a interação de reservatórios suspensos de água em edifício, interação fluido-barragem, *sloshing* em veículos ou embarcações, entre outros (Ten et al, 2011).

Sloshing significa qualquer movimento de uma superfície líquida livre dentro de um recipiente. É causado por qualquer distúrbio em recipientes parcialmente preenchidos com líquido. A superfície livre pode entrar em movimento modulado e ocorre quando este movimento interage com a dinâmica da estrutura contenedora (Carneiro Junior, 2017).

O objetivo primário do *sloshing* (para projetistas em condições simplificadas desacopladas da estrutura) implica na estimativa da distribuição da pressão hidrodinâmica, forças, momentos e frequências naturais da superfície livre do líquido. Estes parâmetros têm

um efeito direto na estabilidade dinâmica e desempenho dos recipientes em movimento (Carneiro Junior, 2017).

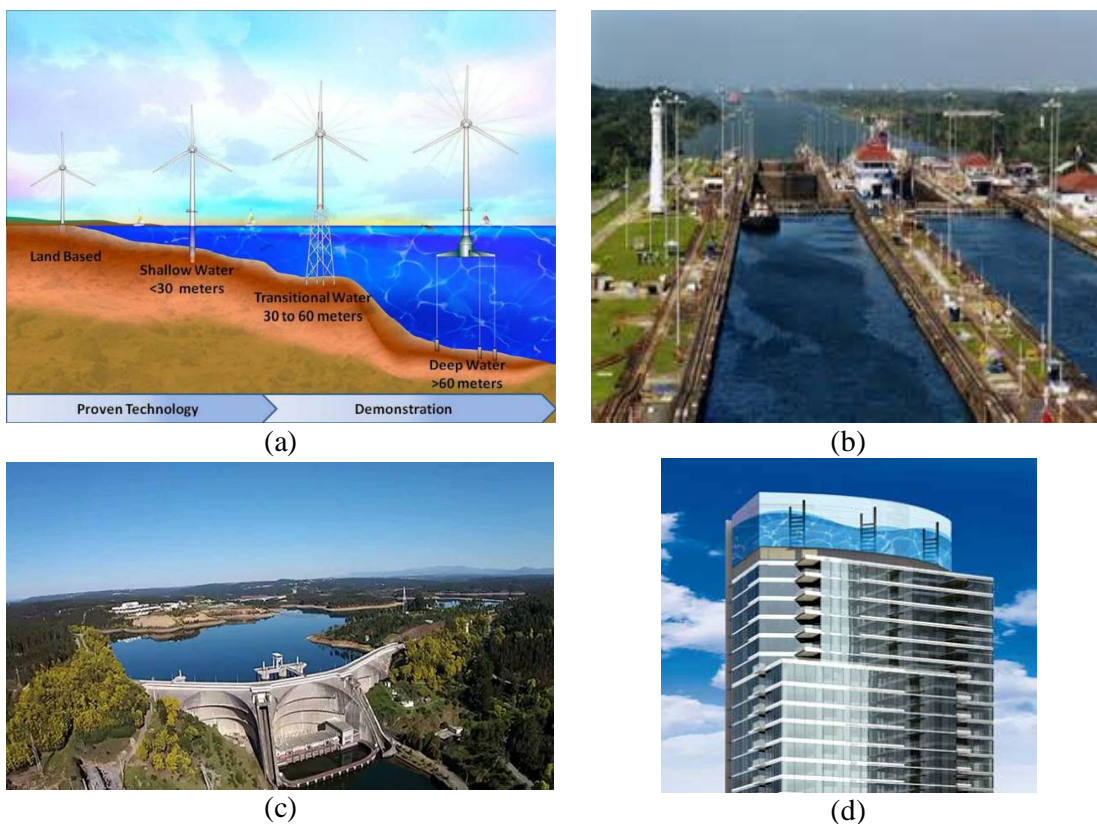


Figura 1.1 – Exemplos de casos práticos envolvendo interação fluido-estrutura. (a) Aerogeradores offshore (Semanticscholar, site) (b) Eclusa do Canal do Panamá (Canal do Panamá, site) (c) Barragem (like3za, site) (d) Prédio com TLD (techeblog, site)

O estudo do efeito *sloshing* é de grande importância para o dimensionamento de reservatórios, tanques e absorvedores de energia. Tais ondas, quando refletidas nas paredes do compartimento, impõem forças hidrodinâmicas que podem gerar um efeito desestabilizante (Ferreira, 2010). É de suma importância conhecer o mecanismo de formação dessas ondas, diagnosticando os principais modos de excitação do sistema que poderiam acarretar em impactos violentos de líquido.

Outro exemplo importante é o efeito *sloshing* em absorvedores de líquido sintonizados (*Tuned Liquid Damper – TLDs*), e os absorvedores de colunas de líquidos sintonizados (*Tuned Liquid Column Damper – TLCDs*). O TLCD é um dispositivo de controle de vibração eficaz com alta eficiência volumétrica, consistente comportamento em uma ampla gama de níveis de excitação e um mecanismo de amortecimento definido e quantificável (Bhattacharyya et al, 2017). O objetivo de tais absorvedores é reduzir a resposta dinâmica da estrutura ajustando sua

frequência de *sloshing* a frequências de oscilação do sistema estrutural principal. Salienta-se que o *sloshing* imprime uma resposta não linear ao sistema sendo linearizada estocasticamente por praticidade (Alkmin et al, 2016, Alkmin, 2017). Os TLD e TLCD possuem aplicação prática em pontes, edifícios, estruturas offshore, para controle de sismos.

O controle passivo das vibrações tem recebido nos últimos anos uma grande atenção por parte dos pesquisadores (Alkmin et al, 2016, Bhattacharyya et al, 2017,). Diversos tipos de dispositivos foram propostos para reduzir as respostas dinâmicas de diferentes tipos de sistemas estruturais. O Amortecedor de Coluna Líquido sintonizado (TLCD) provou ser muito eficaz na redução da vibração de estruturas. Entretanto, desde as equações que governam os sistemas controlados por TLCD possuem uma resposta que não é linear, a calibração dos parâmetros TLCD é demorada e não é conveniente para executar em uma fase de pré-projeto (Matteo et al, 2014). Dessa forma busca-se encontrar soluções simplificadas para análise de TLD's e TLCD's.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver um código computacional (em elementos finitos 2D isoparamétricos) usando a formulação U-P não-simétrica para a simulação de problemas de interação fluido-estrutura vibroacústicos e hidroelásticos.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Validação de modelos de interação estrutura-fluido com as condições de contorno: fixa, aberta, superfície livre e fluido-estrutura;
- Desenvolver modelos numéricos para estudar o efeito da superfície livre na alteração do comportamento dinâmico de estruturas visando aplicações de controle passivo de vibração usando dispositivos do tipo TLD's ou TLCD's;
- Desenvolver soluções analíticas simplificadas para a avaliação os casos de validação apresentados;
- Estudar a convergência numérica da implementação computacional desenvolvida;
- Demonstrar o processo de construção das matrizes do problema de interação fluido estrutura;
- Obter as frequências naturais e formas modais para os casos estudados.

1.2 METODOLOGIA

Para atingir os objetivos descritos na seção anterior, a metodologia adotada neste trabalho seguiu as seguintes etapas:

- Desenvolveu-se uma revisão bibliográfica sobre a modelagem numérica fluido-estrutura de problemas vibroacústicos e hidroelástico. A revisão da literatura mostrou a viabilidade da simulação de problemas fluido-estrutura por uma abordagem U-P não-simétrica (Zienkiewicz & Newton, 1969). A formulação teórica da abordagem U-P não-simétrica é robusta e de simples implementação. A descrição das condições de contorno de fluido-estrutura e superfície livre são detalhadas em seções específicas;
- Descreveu-se a abordagem por elementos finitos isoparamétricos na seção que trata da implementação numérica e dos aspectos computacionais. A abordagem isoparamétrica foi priorizada por possibilitar implementações ágeis de outros tipos de elementos finitos em trabalhos futuros. Para tanto, um código computacional foi desenvolvido no *software* MATLAB usando elementos finitos 2D isoparamétricos retangulares de quatro nós (Q4) para domínios fluido e estrutura. A condições de contorno fluido-estrutura e superfície livre são implementadas utilizando elementos lineares de dois nós (L2). Detalhes sobre a implementação numérica são apresentados com o intuito de servir como material didático de ensino;
- Os casos numéricos apresentados buscam validar o código desenvolvido. Para tal validação os resultados obtidos foram comparados com resultados analíticos, numéricos e experimentais apresentados por Moraes (2000), Sousa Jr (2006), Burgos (2017), Alkmin (2017), Pedroso (2006) apud Souza (2007). Buscou-se detalhar o máximo possível com o intuito de desenvolver material didático no assunto. Exaustivos estudos de convergência da implementação foram realizados para certificar a validade do código desenvolvido. Comparou-se ainda os resultados numéricos obtidos com soluções analíticas, com modelos desenvolvidos no ANSYS 19 Student License e com resultados tirados da bibliografia estudada.

1.3 ABRANGÊNCIA E LIMITAÇÃO

Este trabalho consiste no estudo numérico de estruturas bidimensionais com contornos retos e cavidade acústica objetivando a sua aplicação na análise de vibrações livres e forçadas,

fazendo uma varredura em frequência para determinação da função de resposta em frequência FRF. Devido à grande abrangência do tema estudado algumas limitações foram consideradas:

- O trabalho se limita ao estudo de problemas de pequenos deslocamentos tanto do fluido, quanto da estrutura em torno de uma posição de equilíbrio. As condições de contorno propostas para a cavidade acústica são: aberta ou fechada nas extremidades;
- O fluido é invíscido, irrotacional e não há escoamento nem dispersão de energia no meio fluido;
- As estruturas são constituídas de material linear, elástico, homogêneo e isotrópico;
- O fluido do reservatório foi tratado como incompressível (equação de Laplace) e compressível (equação da onda). Foram feitas combinações entre estas considerações para a estrutura e os efeitos de compressibilidade do fluido no reservatório, originando os modelos descritos nesta dissertação;
- Para o desenvolvimento do sistema acoplado desconsiderou-se o amortecimento;
- A formulação numérica adotada na análise de problemas acoplados em interação fluido-estrutura é a U-P (deslocamento U para a estrutura, pressão P para o fluido);
- Nas análises fluido desacoplado e fluido-estrutura, o reservatório está completamente preenchido com o fluido e os efeitos de onda de superfície são considerados;
- Os elementos finitos usados foram elemento 1D de dois nós para superfície livre e para o acoplamento fluido estrutura e elemento 2D de quatro nós para a cavidade e para estrutura. Suas funções de interpolação são lineares;
- As fronteiras usadas são retas (horizontais ou verticais) onde os vetores normais aos contornos possuem valores 1 e 0;
- Limitações do código computacional desenvolvido (apresentadas em detalhes no capítulo cinco), entre elas, a análise de sistemas de até cinco trechos no máximo e a saída de resultados informando apenas as frequências e deformadas modais.

1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

O presente trabalho foi dividido em sete capítulos. O primeiro capítulo apresenta uma introdução sobre problemas de interação fluido estrutura e suas aplicações no cotidiano. Apresenta-se também os objetivos da presente dissertação.

No segundo capítulo encontra-se a revisão bibliográfica, que aborda as três temáticas da dissertação: vibroacústica, hidroelástica (*sloshing*) e aplicações em reservatórios e absorvedores líquidos sintonizados.

O terceiro capítulo apresenta o desenvolvimento das equações governantes do fluido, da estrutura e do problema acoplado. Apresenta-se também a dedução das formulações numéricas. A implementação usando a formulação de métodos de elementos finitos é apresentada no quarto capítulo deste trabalho.

No capítulo cinco, apresenta-se a estrutura do código computacional desenvolvido e os softwares usados no desenvolvimento do trabalho.

O sexto capítulo apresenta estudos de casos para tanques retangulares. Inicialmente apresenta-se estudos de caso desacoplados e acoplados comparando com resultados analíticos e numéricos existentes na literatura com o intuito de validar o código computacional e em seguida o estudo de alguns casos práticos de vibração forçada em tanques. Também apresenta estudos de casos para tanques do tipo TLCD. Apresenta-se estudos de caso desacoplados e acoplados comparando com resultados experimentais apresentados por Alkmin (2017).

As considerações finais encontram-se no sétimo capítulo desta dissertação, de modo que ainda são apresentados nesta seção produções realizadas durante o desenvolvimento e perspectivas futuras.

Esta dissertação conta ainda com dois importantes anexos (A e B), onde apresenta-se as soluções analíticas adotadas na validação dos resultados obtidos no código computacional desenvolvido. O anexo A apresenta a solução para a cavidade 1D, para as condições aberto-fechada, fechada-fechada, pistão-aberta e pistão-pistão. O anexo B apresenta a solução para análise de superfície livre em tanques retangulares.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O estudo do problema de interação fluido estrutura tem como técnica, para obter a solução, analisar os sistemas puramente estruturais e acústicos desacoplados e, posteriormente analisar a interação entre eles. Inicialmente apresenta-se um histórico dos trabalhos feitos no campo de análise modal puramente acústica e vibroacústica, estudadas analiticamente, experimentalmente e numericamente. Em seguida apresenta-se alguns trabalhos relacionados a problemas de superfície livre no que diz respeito ao fenômeno *sloshing* e absorvedores sintonizados de vibração (TLD e TLCD).

2.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

O estudo analítico da interação fluido estrutura foi abordado inicialmente por Westergaard (1933), Lamb (1945), Abramson (1967), Blevins (1979), Gibert (1998), entre outros.

Westergaard (1933) realizou um estudo da interação bidimensional entre barragem reservatório propondo uma solução analítica para o campo de pressões hidrodinâmicas produzido pelo movimento de corpo rígido em direção ao fluido. Este estudo inspirou o conceito de massa adicional. Blevins (1979) e Gibert (1988) propuseram um método onde a solução é obtida considerando uma massa adicional no sistema, obtidas através da equação de Laplace para geometrias simples através de métodos analíticos.

O problema de interação fluido estrutura pode ser discretizado usando abordagens Eulerianas e Lagrangeanas. A abordagem Euleriana descreve o fluido como variáveis escalares tais como pressão e potencial e a abordagem Lagrangeana descreve o sólido e o fluido como variáveis de deslocamento onde o fluido não possui resistência ao cisalhamento (viscosidade). A formulação Lagrangeana é de fácil implementação, pois as matrizes são simétricas e a interface fluido-estrutura não necessita de considerações especiais, porém a formulação possui um elevado grau de liberdade. A formulação Euleriana gera matrizes assimétricas com um menor número de graus de liberdade (Sousa Jr, 2006). Há um grande número de trabalhos na literatura que abordam a discretização acoplada usando as duas abordagens.

Zienkiewicz e Newton (1969) foram os primeiros a apresentar a formulação fluido-estrutura que emprega o método dos elementos finitos. Este estudo apresentou uma formulação deslocamento-pressão, denominada formulação U-P. Nessa formulação o fluido é discretizado em função da pressão acústica e a estrutura é discretizada em função dos deslocamentos onde

surge uma matriz de acoplamento fluido-estrutura para problemas diversos. Outra importante proposição foi a proposição de um modelo capaz de captar o efeito de superfície livre (*sloshing*). Após os trabalhos de Zienkiewicz e Newton (1969), diversos pesquisadores baseados na formulação U-P apresentaram variações da formulação buscando formas de simetrização do problema tornando sua resolução simplificada com menor esforço computacional.

Everstine (1981) alterou a formulação proposta por Zienkiewicz e Newton (1969) alterando a variável pressão pelo potencial de velocidades criando a formulação U- ϕ . Olson e Bathes (1985) propuseram o acréscimo de uma variável denominada pressão estático obtendo resultados satisfatórios para o sistema discretizado. Uma teoria mais geral com potencial aplicação em problemas de vibro-acústica de geometria irregular foi proposta por Dowell et al. (1977), ele propôs uma teoria usando problemas de potencial. Neste trabalho, a pressão sonora da cavidade e a vibração da estrutura foram escritos na forma de um conjunto de equações diferenciais ordinárias obtidas através da expansão ortogonal dos modos acústicos e estruturais desacoplados. Desta forma, a resposta vibro-acústica total pode ser obtida utilizando apenas os parâmetros modais e as condições de contorno de cada subsistema desacoplado. Fahy (2001) propôs, para uma cavidade de ar interagindo com uma estrutura plana, um modelo de interação modal que descreve o comportamento do problema vibroacústico interior em termos dos modos desacoplados.

Morais (2000) apresentou uma formulação com descrição Lagrangeana para o sólido e Euleriana para o fluido através do método dos elementos finitos para a resolução de problemas acoplados fluido estrutura bidimensionais. Este trabalho se destaca pela discretização do fluido através das variáveis U- ϕ -P- η , que considera os sistemas acoplados com dissipação. Deslocamento U descreve o comportamento do sólido, ϕ e P descrevem o comportamento do fluido acústico e η descreve assim o efeito de superfície livre na formulação.

Sousa Jr (2006) realizou um trabalho teórico, analítico e numérico do acoplamento acústico mecânico com implementação da formulação U-P proposta por Zienkiewicz e Newton (1969). Realizou estudos usando formulações em MEF e MDF comparando o desempenho de cada formulação.

Souza (2007) realizou um estudo teórico, analítico e numérico do acoplamento acústico estrutural adotando a formulação U- ϕ -P0. Teve como intuito desenvolver uma metodologia capaz de identificar os modos de vibração de problemas acoplados fluido-estrutura aplicando em problemas de engenharia caracterizados pelas frequências naturais e formas modais a fim de permitir análise e avaliação do comportamento real do sistema acoplado e desacoplado.

Um código de elementos finitos para análise numérica usando o ANSYS foi desenvolvido por Sigrist (2007), o intuito foi realizar a análise da estrutura acoplada ao fluido com formulação baseada em pressão. Como resultado, ele obteve uma modelagem onde analisou-se, para o fluido, os modos de estrutura: i) modos *sloshing* fluidos, ii) fluido e estrutura de fluidos e os modos com formulação de deslocamento de pressão em geometria axi-simétrica com carga não axi-simétrica, iii) modos de estrutura de fluido com simétricas formulações para problemas elasto-acústicos e hidroelásticos, usando os chamados formulações simétricas (u, p, ϕ) e (u, η, ϕ) . A modelagem foi usada para estudar casos de teste em aplicações industriais. É mostrado em particular que os tempos de computação são significativamente diminuídos usando uma formulação simétrica, em vez de uma não-simétrica, permitindo a análise modal de estruturas complexas com acoplamento fluido para fins industriais.

Ribeiro e Pedroso (2010) apresentaram um procedimento analítico para a solução do problema de interação dinâmica de uma estrutura de estrutura vibratória conectada a uma cavidade bidimensional, contendo um fluido acústico. Os autores desenvolveram a solução de pressão para o domínio fluido, utilizando a técnica de separação de variáveis aplicando a solução a uma cavidade totalmente aberta e a uma cavidade fechada na direção transversal, ambas contendo um limite de vibração com uma deformação arbitrária.

Rojas (2015) apresentou o estudo analítico do problema vibroacústico de uma cavidade acústica rígida acoplada a uma placa flexível, cujo intuito foi estudar o comportamento do sistema acoplado a fim de possibilitar comparações numéricos experimentais, tornando possível o estudo de problemas mais complexos.

Um modelo com acoplamento particionado entre fluido e estrutura foi apresentado por Chang (1998), possibilitando a simulação de casos envolvendo superfície livre e grandes deformações. O modelo adotado foi baseado no método Moving Particle Simulation (MPS), um método onde o domínio é simulado por partículas Lagrangeanas, obtendo resultados satisfatórios na compreensão do efeito.

Mendes (2013) estudou a influência da interação fluido estrutura no comportamento dinâmico de um sistema de barragem em arco-reservatório de água submetido a um sismo, evoluindo numa abordagem progressiva analítico numérica dos sistemas envolvido de forma acoplada e desacoplada, desenvolvendo uma metodologia adequada que forneça suporte para projetos de barragens.

Burgos (2017) desenvolveu um código computacional em elementos finitos para solucionar problemas de interação fluido estrutura 2D através de acoplamento MEF -MDF, realizando análises modais do sistema acoplado e desacoplado.

Pegoraro (2016) realizou um estudo analítico numérico de problemas acoplados fluido estrutura, apresentando teorias, equações e métodos de resolução. Desenvolveu uma metodologia capaz de identificar os modos de vibração de estruturas baseado em problemas acoplados fluidos estrutura flexível gerando modos de vibrações dominantes, os quais foram determinados por análise modal.

O presente trabalho adotou como referência os trabalhos de Morais (2000) e Sousa Jr (2007) no que diz respeito a análise analítica e numérica dos casos em estudo.

2.2 SOBRE A CONDIÇÃO DE SUPERFÍCIE LIVRE

Para problemas de superfície livre os principais trabalhos são Westergard (1931), Lamb (1945), Abramson (1963), entre outros. O estudo da superfície livre, no que diz respeito ao efeito *sloshing*, é de grande importância nos projetos de engenharia, pois pode causar problemas de estabilidade em tanques de combustíveis, foguetes e satélites, por exemplo. Porém o mesmo efeito pode ser usado de forma benéfica em sistemas de controles de vibrações, atuando como absorvedor de energia, conforme apresentado nos trabalhos a seguir.

Em seu trabalho, Sayar e Baumgarten (1982) apresentam uma análise linear e não linear dos amortecedores líquidos. Neste artigo, os autores consideram uma estrutura vibrando acoplada com um recipiente parcialmente preenchido com fluido em um modo de vibração livre. Para simplificar a análise matemática eles usam um modelo de um pêndulo para reproduzir o movimento do fluido e um amortecedor massa-mola amortecido, representando a vibração da estrutura. As equações do movimento são obtidas pelo método de Lagrange e expressas na forma paramétrica. Os autores verificam excelente conformidade entre os prognósticos teóricos e as observações experimentais. Concluem finalmente que para uma apropriada seleção de parâmetros de projeto, recipientes parcialmente preenchidos com fluidos viscosos servem como bons amortecedores de vibração.

Ibrahim (2005) desenvolveu um livro intitulado *Liquid Sloshing Dynamics Theory and applications*, onde apresentou as principais formulações a respeito do tema bem como aplicações diversas em estudos de tanques sujeitos ao efeito *sloshing*.

O efeito *sloshing* foi abordado ainda por Ferreira (2010), que desenvolveu uma bancada de testes para avaliar o fenômeno em tanques de ondas e validar os resultados obtidos através de modelagem numérica. Carneiro Junior (2017) estudou o efeito *sloshing* em ambientes de gravidade e micro gravidade aplicando no movimento de satélites artificiais.

Mitra and Sinhamahapatra (2007) desenvolveu uma técnica de elementos finitos baseada em pressão para analisar a dinâmica de *slosh* de um recipiente rígido parcialmente preenchido com componentes submersos montados na parte inferior. O problema linearizado foi especialmente discretizado usando o método residual ponderado de Galerkin. As excitações do terremoto foram utilizadas como condição de contorno. A amplitude da onda de pico na parede diminui marginalmente com a altura do submerso componente para o sistema de tanques e movimento do solo considerado. Isto implica um aumento na amplitude de *sloshing* perto da estrutura do componente. Quando o bloco se torna mais amplo, a amplitude do *slosh* do pico aumenta tanto na parede como na vizinhança do bloco. Além disso, com o aumento da largura dos componentes, a pressão hidrodinâmica aumenta nas paredes dos componentes e do contêiner, para o recipiente retangular e excitação externa considerada.

Eswaran et al (2017) apresenta um procedimento de simulação numérica para estudar o desempenho do sistema de estrutura de TLD's através de um solucionador acoplado à estrutura de fluido baseado em sigma (σ). Para isso, foi desenvolvido um código computacional em linguagem C. As equações estruturais, que são acopladas com as equações de fluido para obter a transferência de forças de *sloshing* para a estrutura de amortecimento, são resolvidas pelo método Runge-Kutta de quarta ordem, enquanto as equações de fluido são resolvidas usando-se algoritmo baseado na transformação sigma. Diferentes esquemas iterativos e de erro são usados para otimizar o código para maior taxa de convergência e maior precisão. Para validação, alguns experimentos são conduzidos com uma estrutura de três andares usando arranjos de TLD's. Os resultados numéricos atuais de resposta de estruturas instaladas por TLD's combinaram bem com os resultados experimentais.

Kosaka et al (1992) descreveu os efeitos de amortecimento de um sistema de controle de vibração, TLD. Este amortecedor utiliza a força hidrodinâmica da água. As características vibracionais do sistema de acoplamento estrutural e as características das forças hidrodinâmicas do metal foram estudadas experimentalmente. A eficácia do TLD como um sistema de controle de vibração foi demonstrada através da análise da resposta frequência. Com base nos resultados experimentais foram desenvolvidas fórmulas experimentais para o fator de amortecimento da TLD para simulação numérica.

Tsukamoto (2010) propôs um novo dispositivo móvel para supressão de *sloshing*. Além do dispositivo, desenvolveu uma modelagem analítica e um modelo computacional capaz de realizar análises sobre o movimento acoplado do fluido e de um corpo móvel conectado entre si por molas em um tanque preenchido parcialmente validando o modelo de supressão proposto.

Mondal et al (2014) demonstrou a eficácia de um amortecedor de líquido sintonizado (TLD). A montagem experimental modelou um edifício usando vigas e treliças PASCO e usa uma base móvel, alimentada por um motor, para simular um terremoto. O sensor usado no experimento mede a aceleração no topo da estrutura quando submetido a vibrações na presença e ausência de um TLD. O resultado do experimento foi que o TLD efetivamente amorteceu as vibrações (até 80% de redução na vibração) quando excitado e o efeito de amortecimento foi encontrado para ser o máximo em torno da frequência de ressonância. Também foi feita uma tentativa de modelar teoricamente o sistema na ausência e presença de TLD's.

Uma metodologia de projeto de otimização para amortecedores de coluna líquida sintonizados (TLCD's) baseados na teoria de controle H_∞ foi apresentada por Huo et al (2014). Uma estrutura prática, Dalian Xinghai Financial Business Building, é usada para ilustrar a viabilidade do procedimento ideal. O modelo de estrutura foi construído pelo método de elementos finitos e simplificado para o modelo de massa concentrada. Para facilitar o projeto de TLCD's. O problema de otimização paramétrica do TLCD foi transferido para o problema de projeto do controlador de feedback. Após os parâmetros do TLCD serem otimizados, as respostas de deslocamento e aceleração no domínio da frequência e no domínio do tempo são comparadas para a estrutura com e sem TLCD. É validado que o TLCD com os parâmetros otimizados pode fazer a estrutura satisfazer a necessidade de segurança e conforto.

Alkmin (2017) desenvolveu um estudo numérico e experimental para investigar o comportamento de absorvedores de coluna líquidos introduzidos em turbinas eólicas propondo um método de otimização do TLCD.

Fu, Guo e Li (2018) simularam numericamente processos de supressão de vibrações com amortecedores combinados líquido-oscilador, observando alguns parâmetros-chave que afetam o desempenho do amortecedor. Os resultados mostram que a relação de massa do oscilador, a densidade e a viscosidade do líquido e a forma do oscilador afetam a capacidade de supressão do amortecedor combinado através da sua capacidade variável de absorção de energia e capacidade de dissipação de energia. Em seguida, foi apresentado um oscilador do tipo placa flexível para melhorar ainda mais o desempenho do amortecedor combinado, porque a flexão elástica do oscilador tipo placa pode aumentar a dissipação de energia através de ondas mais intensas e fluxos de cisalhamento turbulentos.

O presente trabalho adotou como referência os trabalhos de Alkmin (2017) no que diz respeito a análise analítica e numérica do caso envolvendo absorvedor líquido de coluna sintonizado TLCD.

3 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

3.1 FORMULAÇÃO DO ACOPLAMENTO FLUIDO ESTRUTURA

Nesta seção são apresentadas as equações diferenciais parciais que governam o problema acoplado fluido-estrutura. Conforme descrito no capítulo anterior, adotou-se o modelo de fluido acústico. Assim, para descrever o domínio do fluido é necessário a descrição matemática da acústica do sistema que é dada pela equação de Navier- Stokes e pela equação da continuidade que são simplificadas para formar a equação da onda acústica que é usada para descrever a resposta acústica do fluido. Para o domínio da estrutura adotou-se o modelo elástico linear no estado plano de tensão.

As equações governantes são complementadas pelas condições de contorno para serem aplicáveis em modelos constitutivos. Para discretização do domínio foi usado o método dos elementos finitos. Para desenvolver as equações pelo MEF, as equações diferenciais foram escritas na sua forma fraca usando o método de Galerkin e o método dos resíduos ponderados.

3.2 FORMULAÇÃO DIFERENCIAL ACÚSTICA

A formulação diferencial acústica apresentada neste item foi descrita por Kinsler et al. (1999). Para discretização da equação da onda acústica adota-se os seguintes pressupostos:

- i. O fluido é compressível e homogêneo
- ii. O fluido é invíscido e irrotacional;
- iii. Não há fluxo médio do fluido;
- iv. A pressão acústica é definida como a flutuação de pressão em média;
- v. A mudança na densidade é pequena em comparação com a densidade média;
- vi. A pressão e a densidade podem variar ao longo dos elementos.

Em um fluido compressível, as ondas acústicas são descritas como uma flutuação da pressão, ou seja, possuem amplitude infinitesimal. Atendendo as hipóteses (i), (iv) e (v) a pressão e a massa específica são escritas como a soma entre a média e uma flutuação, conforme apresentado pela Eq. (3.1).

$$\rho = \rho' + \rho_0 \quad (\rho' \ll \rho_0) \quad (3.1)$$

onde: ρ é a massa específica, ρ_0 é a massa específica média e ρ' é a flutuação da massa específica.

$$p = p' + p_0 \quad (p' \ll p_0) \quad (3.2)$$

onde: p é a pressão, p_0 é a pressão média e p' é a flutuação da pressão.

$$u = u' + u_0 \quad (u' \ll u_0) \quad (3.3)$$

onde u é a velocidade, u_0 é a velocidade média, u' é a variação da velocidade.

Como não há fluxo médio no fluido (ii), tem-se que $u_0 = 0$, logo:

$$u = u' \quad (3.4)$$

Para descrição da equação da onda usa-se uma combinação das equações de Navier Stokes, continuidade e de estado. Essas equações são apresentadas a seguir:

- Equação da continuidade:

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (3.5)$$

- Equação da quantidade de movimento:

$$\rho \left(\frac{du}{dt} + u \nabla u \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 u + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot u) + \rho g \quad (3.6)$$

- Equação de estado linearizada:

$$p' = c^2 \rho \quad \text{com} \quad c = \sqrt{\kappa / \rho_0} \quad (3.7)$$

onde: c é a velocidade de propagação do som no fluido, κ é o coeficiente de compressibilidade do fluido e μ é o coeficiente de viscosidade do fluido.

Iniciando pela equação da continuidade e aplicando as propriedades do divergente tem-se, como resultado, a Eq. (3.8).

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot (u) + u \nabla \cdot (\rho) = 0 \quad (3.8)$$

A Eq. (3.8) pode ser reescrita conforme apresentado na Eq. (3.9).

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot (u) + u \nabla \cdot (\rho) = 0 \quad (3.9)$$

Substituindo Eq. (3.1) e Eq. (3.3) na Eq. (3.9) obtêm-se a Eq. (3.10)

$$\frac{d(\rho' + \rho_0)}{dt} + (\rho' + \rho_0) \nabla \cdot (u') + u' \nabla \cdot (\rho' + \rho_0) = 0 \quad (3.10)$$

A massa específica média não depende do tempo, assim, para o primeiro termo da Eq. (3.10) tem-se que:

$$\frac{d(\rho' + \rho_0)}{dt} = \frac{d\rho'}{dt} \quad (3.11)$$

Atendendo a hipótese (v), o segundo termo da Eq. (3.10) pode ser escrito conforme apresentado na Eq. (3.12).

$$(\rho' + \rho_0)\nabla \cdot (u') \approx \rho'\nabla \cdot (u') \quad (3.12)$$

O terceiro termo da Eq. (3.10) é um termo de segunda ordem que possui uma variação de densidade muito pequena, podendo ser negligenciado. Dessa forma a Eq. (3.10) pode ser reescrita conforme a Eq. (3.13).

$$\frac{d\rho'}{dt} + \rho_0\nabla \cdot u' = 0 \quad (3.13)$$

Partindo para a equação de Navier-Stokes, o fluido é considerado invíscido, ou seja, não há dissipação viscosa a Eq. (3.11) pode ser reescrita como:

$$\rho \left(\frac{du}{dt} + u\nabla u \right) = -\nabla p + \rho g \quad (3.14)$$

Como nesse caso não existe excitação acústica tem-se que:

$$g\rho_0 = \nabla p_0 \quad (3.15)$$

Aplicando na Eq. (3.2) e usando as propriedades de gradiente:

$$\nabla p = \nabla p_0 + \nabla p' = g\rho_0 + \nabla p' \quad (3.16)$$

Substituindo Eq. (3.4) e Eq. (3.16) na Eq. (3.14), obtêm-se a Eq. (3.17).

$$\rho \left(\frac{du'}{dt} + u'\nabla u' \right) = -\nabla p \quad (3.17)$$

Como a variação da velocidade assume valores muito pequenos, o termo não linear $u'\nabla u'$ da Eq. (3.17) pode ser negligenciado. Partindo da hipótese (v), pode-se reescrever a Eq. (3.17) na forma apresentada na Eq. (3.18).

$$\rho_0 \frac{du'}{dt} + \nabla p = 0 \quad (3.18)$$

Primeiramente aplica-se o divergente na Eq. (3.18) e em seguida deriva-se a Eq. (3.13), conforme apresentado abaixo:

$$\rho_0 \left(\nabla \cdot \frac{du'}{dt} \right) + \nabla^2 p' = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{d^2 \rho'}{dt^2} + \rho_0 \cdot \left(\nabla \cdot \frac{du'}{dt} \right) = 0 \quad (3.20)$$

Subtraindo a Eq. (3.19) de Eq. (3.20) obtêm-se a primeira equação da onda:

$$\frac{d^2 \rho'}{dt^2} - \nabla^2 p' = 0 \quad (3.21)$$

A partir da equação de estado linearizada, Eq. (3.7), a equação da onda pode ser reescrita, obtendo assim a Eq. (3.22).

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 p'}{dt^2} - \nabla^2 p' = 0 \quad (3.22)$$

Para problemas de interação fluido estrutura considera-se a pressão variando harmonicamente, sendo definida pela Eq. (3.23).

$$p = \bar{p}e^{-i\omega t} \quad (3.23)$$

Com:

$$i = \sqrt{-1} \quad (3.24)$$

$$\omega = 2\pi f \quad (3.25)$$

Onde: \bar{p} é a amplitude da pressão, f é a frequência de oscilação da pressão e ω é a frequência circular. Derivando duas vezes a Eq. (3.23) e substituindo na Eq. (3.22) obtém a equação de Helmholtz, apresentada na Eq. (3.26).

$$\frac{\omega^2}{c^2} \frac{d^2 \bar{p}}{dt^2} + \nabla^2 \cdot p' = 0 \quad (3.26)$$

3.3 EQUAÇÃO DA ONDA

A equação da onda apresentada anteriormente é a equação governante para fluidos acústicos. Para o acoplamento fluido estrutura deve-se determinar a solução da equação da onda com suas respectivas condições de contorno na forma fraca, em conformidade com Pedroso (2004) e Sousa Jr. (2006). Na Figura 3.1 encontra-se as condições de parede rígida, superfície livre e interação fluido estrutura.

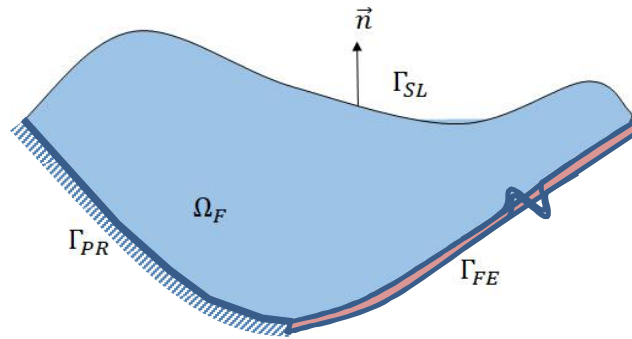


Figura 3.1 – Domínio do fluido e condições de contorno

Seja \hat{p} uma função aproximada que satisfaça as restrições iniciais de contorno. Substituindo \hat{p} na Eq. (3.22) tem-se:

$$\varepsilon = \nabla^2 \hat{p} - \frac{1}{c^2} \ddot{\hat{p}} \neq 0 \quad (3.27)$$

Pelo método dos resíduos ponderados tem-se que a integral do produto do resíduo ε pela função aproximadora é nula, conforme apresentado na Eq. (3.27).

$$\int_{\Omega_f} \varepsilon \hat{p} d\Omega_f = 0 \quad (3.28)$$

Substituindo a Eq. (3.27) na Eq. (3.28) tem-se:

$$\int_{\Omega_f} \left(\nabla^2 \hat{p} - \frac{1}{c^2} \cdot \ddot{\hat{p}} \right) \hat{p} d\Omega_f = 0 \quad (3.29)$$

Realizando o produto e separando cada termo:

$$\int_{\Omega_f} \nabla^2 \hat{p} \hat{p} d\Omega_f - \int_{\Omega_f} \frac{1}{c^2} \ddot{\hat{p}} \hat{p} d\Omega_f = 0 \quad (3.30)$$

Aplicando o teorema de Green no primeiro termo da Eq. (3.30):

$$\int_{\Omega_f} \nabla^2 \hat{p} \hat{p} d\Omega_f = \int_{\Omega_f} \nabla \cdot (\nabla \hat{p}) \hat{p} d\Omega_f = - \int_{\Omega_f} \nabla \hat{p} \cdot \nabla \hat{p} \hat{p} d\Omega_f + \int_{\Omega_f} \nabla \hat{p} \cdot \hat{p} d\Gamma \quad (3.31)$$

Como a função aproximadora é uma função C^0 e integrável, aplica-se o teorema da divergência. Sendo $\{n\}$ um vetor normal ao contorno, a Eq. (3.31) foi reescrita como:

$$\int_{\Omega_f} \nabla^2 \hat{p} \hat{p} d\Omega_f = - \int_{\Omega_f} \nabla \hat{p} \cdot \nabla \hat{p} \hat{p} d\Omega_f + \oint_{\Gamma} \nabla \hat{p} \cdot \{n\} \hat{p} d\Gamma \quad (3.32)$$

O segundo termo avaliado no domínio do contorno do fluido pode ser reescrito em função dos contornos adotados no presente trabalho:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f} \nabla \cdot (\nabla \hat{p}) \hat{p} d\Omega_f &= - \int_{\Omega_f} \nabla \hat{p} \cdot \nabla \hat{p} \hat{p} d\Omega_f + \oint_{\Gamma_{FE}} \nabla \hat{p} \cdot \{n\} \hat{p} d\Gamma_1 + \\ &\oint_{\Gamma_{SL}} \nabla \hat{p} \cdot \{n\} \hat{p} d\Gamma_2 + \oint_{\Gamma_{PR}} \nabla \hat{p} \cdot \{n\} \hat{p} d\Gamma_3 + \oint_{\Gamma_{PR}} \nabla \hat{p} \cdot \{n\} \hat{p} d\Gamma_4 = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

3.4 DESCRIÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CONTORNO

Para o desenvolvimento do presente trabalho adotou-se as condições de contorno de superfície livre, interface fluido estrutura e parede rígida.

3.4.1. Condição de contorno de superfície livre

A condição de contorno mais importante neste trabalho é a de superfície livre, usada para analisar os problemas de *sloshing* nos casos estudados.

Pedroso (2000) apud Morais (2000), apresentou um comportamento do problema de ondas de superfície livre de um fluido sobre influência da gravidade. Para demonstração adotou-se as seguintes hipóteses:

- Líquido incompressível, inviscido, irrotacional e homogêneo;
- Contornos rígidos;
- Efeitos não lineares desprezados ($\frac{\bar{\eta}}{h}$ e $\frac{\bar{\eta}}{L} \ll 1$; onde L é o comprimento de onda na direção x);
- Efeitos de tensão superficial do líquido e da atmosfera desprezíveis.

A Figura 3.2 apresenta um esquema de cavidade retangular com superfície livre.

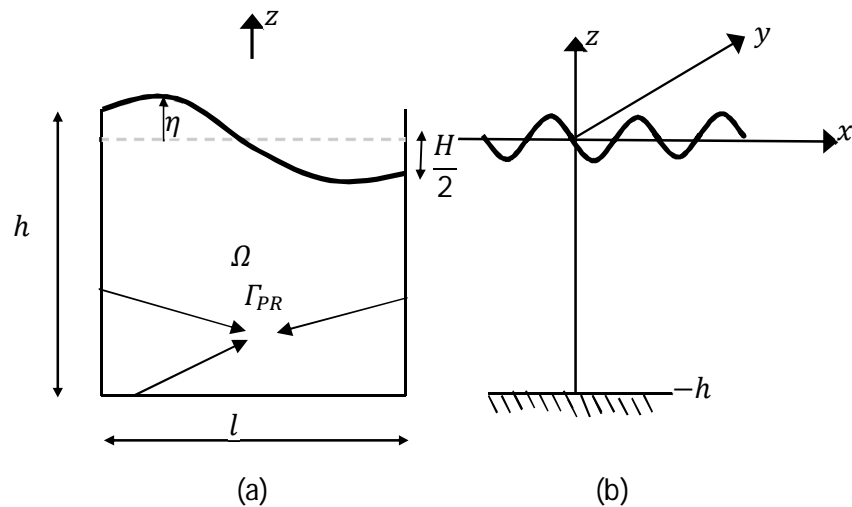


Figura 3.2 – (a) cavidade com superfície livre (b) coordenadas de análise da onda de superfície (Morais, 2000)

Para considerar o fenômeno corretamente desenvolveu-se a equação (3.34) que representa a relação entre as pequenas flutuações de pressão e a altura da superfície livre.

$$p = p_0 g \vec{\eta} = \rho_0 g Z \vec{n} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 \cdot \ddot{Z} \vec{n} \quad (3.35)$$

onde: Z é o deslocamento do nível de água, \dot{Z} é a velocidade da água na superfície livre e \ddot{Z} é a aceleração da água na superfície livre. Desse modo, derivando a Eq. (3.34) duas vezes no tempo tem-se:

$$\ddot{p} = \rho_0 g \ddot{Z} \vec{n} \quad (3.36)$$

Associando Eq. (3.35) e Eq. (3.36) tem-se a equação da condição de contorno de superfície livre:

$$g \frac{\partial p}{\partial z} + \ddot{p} = 0 \quad (3.37)$$

3.4.2 Condição de contorno de interface fluido estrutura

O acoplamento entre fluido e estrutura ocorre discretizando a interface de interação em função das pressões do fluido e do deslocamento do sólido. Pedroso (1994) apud Souza Jr. (2006) descreveu de forma simples a condição de contorno de interface fluido estrutura analisando uma cavidade unidimensional acoplada a uma estrutura rígida móvel conforme mostra a Figura 3.3

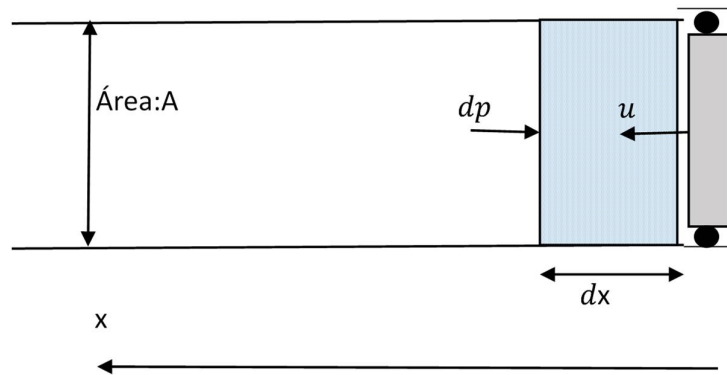


Figura 3.3 – Cavidade unidimensional acoplada a uma estrutura rígida móvel (Souza Jr, 2006)

$$\sum F_x = ma \quad (3.38)$$

$$dpA = -\rho_f A \ddot{u}_x dx \quad (3.39)$$

Onde aceleração da parede móvel é dada por \ddot{u}_x . Isolando a Eq. (3.39), obtêm-se a Eq. (3.40), por meio da qual têm-se a condição de interação fluido estrutura.

$$\frac{dp}{dx} = -\rho_f \ddot{u}_x \quad (3.40)$$

3.4.3. Condição de parede rígida

A Eq. (3.41) apresenta o movimento da estrutura ao longo da cavidade. Para a condição de parede rígida, basta levar em consideração que a aceleração $\ddot{u} = 0$. Dessa forma tem-se:

$$\frac{dp}{d\vec{n}} = \nabla_n p = 0 \quad (3.41)$$

3.4.4. Síntese das Condições de Contorno

Substituindo as condições de contorno apresentadas na Eq. (3.33) tem-se que:

$$\int_{\Omega_f} \nabla \cdot (\nabla \hat{p}) \hat{p} \, d\Omega_f = - \int_{\Omega_f} \nabla \hat{p} \cdot \nabla \hat{p} \, d\Omega_f - \oint_{\Gamma_1} \rho_f \{ \ddot{u} \} \cdot \{ n \} \hat{p} \, d\Gamma_1 - \oint_{\Gamma_2} \frac{1}{g} \ddot{p} \hat{p} \, d\Gamma_2 \quad (3.42)$$

Substituindo a Eq. (3.42) na Eq. (3.30), tem-se a forma fraca da equação, que é o ponto de partida para discretizar o domínio do fluido pelo método dos elementos finitos.

$$- \int_{\Omega_f} \nabla \hat{p} \cdot \nabla \hat{p} \, d\Omega_f - \oint_{\Gamma_1} \rho \{ \ddot{u} \} \cdot \{ n \} \hat{p} \, d\Gamma_1 - \oint_{\Gamma_2} \frac{1}{g} \ddot{p} \hat{p} \, d\Gamma_3 - \oint_{\Omega_f} \frac{1}{c^2} \ddot{p} \hat{p} \, d\Omega_f = 0 \quad (3.43)$$

3.5 EQUAÇÃO GOVERNANTE DA ESTRUTURA

Para discretização da estrutura optou-se pelo modelo elástico linear baseado em Cook et al. (1989). No modelo adotado a relação tensão e deformação é dada pela lei de Hooke generalizada, onde considera-se que o acréscimo de tensões varia linearmente com o acréscimo de deformação. Este modelo é representado por dois parâmetros módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson. A escolha deve-se a sua ampla aplicação na análise de estruturas convencionais.

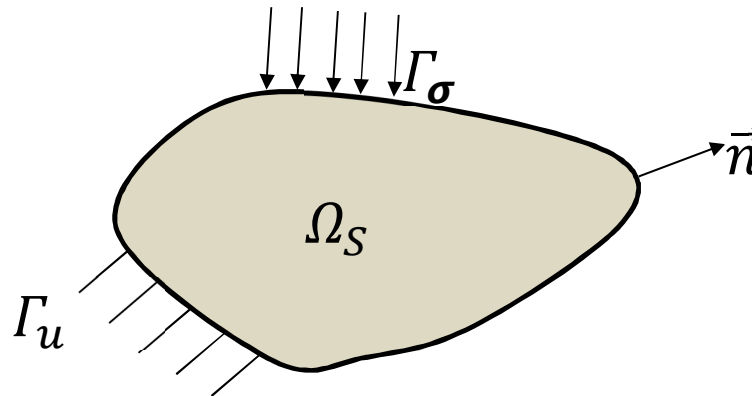


Figura 3.4 – Domínio sólido elástico e condições de contorno

Para discretização do modelo adota-se as seguintes hipóteses:

- I. O corpo deve estar em equilíbrio;
- II. Deve satisfazer a lei de tensão deformação linear;
- III. Material isotrópico e homogêneo;
- IV. As deformações são pequenas.

As grandezas vetoriais deslocamento e força são representadas por:

$$\mathbf{u} = [u \quad v] \quad \mathbf{F} = [F_x \quad F_y]^T \quad (3.44)$$

Os componentes de tensão e deformação são definidos como:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T \quad (3.45)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T \quad (3.46)$$

O principal objetivo dessa análise é encontrar a distribuição de deslocamento e tensões sob as condições de contorno e de carregamento da estrutura. Para solução analítica do problema é necessário satisfazer as seguintes condições:

3.5.1 Relação entre deformação e deslocamento

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_S \mathbf{u} \quad (3.47)$$

$$\nabla_S = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

3.5.2 Relação entre tensão e deformação

$$\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{D}] \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.49)$$

onde:

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Substituindo a Eq. (3.47) na Eq. (3.49) obtêm-se a Eq. (3.51).

$$\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{D}] \nabla_S \mathbf{u} \quad (3.51)$$

3.5.3 Equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio são descritas na configuração não deformada. A Figura 3.5 apresenta os incrementos infinitesimais de primeira ordem dos componentes de tensão em um elemento infinitesimal sobre o estado plano de tensão.

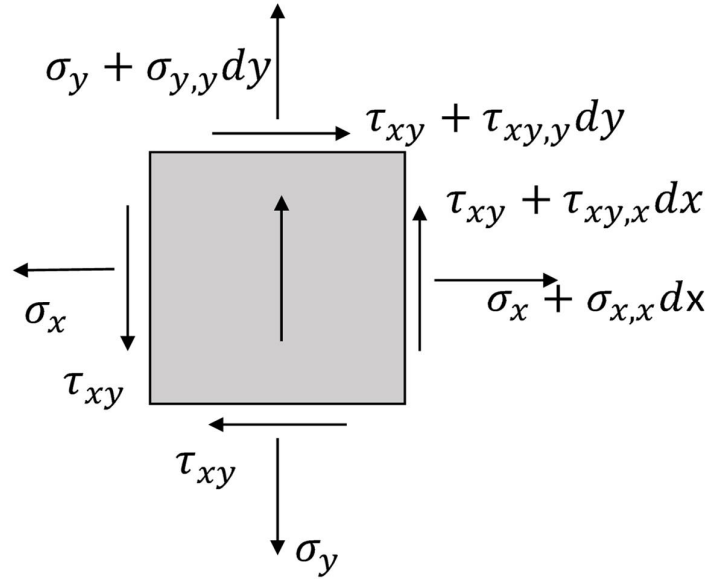


Figura 3.5 – Domínio do fluido e condições de contorno

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & (\sigma_x + \sigma_{x,x}dx - \sigma_x) \cdot tdy + (\tau_{yx} + \tau_{yx,y}dy - \tau_{yx}) \cdot tdx + F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 & (y + \sigma_{y,y}dx - \sigma_x) \cdot tdx + (\tau_{xy} + \tau_{xy,x}dx - \tau_{xy}) \cdot tdy + F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 & \tau_{yx} \cdot tdx dy + \tau_{yx} \cdot tdx dy = 0 \end{cases} \quad (3.52)$$

Substituindo a Eq. (3.45) e Eq. (3.46) na Eq. (3.44) e resolvendo o sistema tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + F_x &= 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + F_y &= 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Que pode ser reescrito como:

$$\nabla_S \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} = 0 \quad (3.54)$$

No caso dinâmico, as ações externas podem ser descritas em função do tempo, a Eq. (3.54) pode ser estendida ao caso dinâmico através da incorporação de forças de inércia e amortecimento, sendo reescrita conforme apresentado na Eq. (3.55).

$$\nabla_S \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} - \rho \ddot{\mathbf{u}} - c \dot{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.55)$$

Para a obtenção da forma fraca, aplica-se o método de Galerkin, onde escreve-se a equação integral como:

$$\int_V N^T (\nabla_S \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} - \rho \ddot{\mathbf{u}} - c \dot{\mathbf{u}}) dV = 0 \quad (3.56)$$

Realiza-se a integração por partes para distribuir igualmente as derivações entre as funções peso e a variável primária. Em seguida, realiza-se a incorporação das condições de contorno finalizando com a substituição da variável primária u pela solução aproximada \tilde{u} . Aplicando o método de Galerkin, escreve-se a equação integral como:

$$\int_V N^T (\nabla_S \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} - \rho \ddot{\mathbf{u}} - c \dot{\mathbf{u}}) dV = 0 \quad (3.57)$$

Com aplicação do teorema de Green ao primeiro termo da Eq. (3.57), obtêm-se a Eq. (3.58).

$$\int_V (-\nabla_S N)^T \boldsymbol{\sigma} + N^T (\mathbf{F} - \rho \ddot{\mathbf{u}} - c \dot{\mathbf{u}}) dV + \int_A N^T \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} dA = 0 \quad (3.58)$$

De modo que, substituindo as Eq. (3.51) e Eq. (3.58) tem-se:

$$\int_V (\nabla_S N)^T [\mathbf{D}] \nabla_S \mathbf{u} + N^T (-\mathbf{F} + \rho \ddot{\mathbf{u}} + c \dot{\mathbf{u}}) dV = \int_A N^T \boldsymbol{\Phi} \quad (3.59)$$

Substituindo os campos de deslocamento, velocidade e aceleração e a matriz derivada das funções de forma, obtêm-se a Eq. (3.60).

$$\begin{aligned} \int_V (([B_u])^T [\mathbf{D}] ([B_u]) \mathbf{u} + N^T \rho N \ddot{\mathbf{u}} + N^T c N \dot{\mathbf{u}}) dV = \int_V N^T \mathbf{F} dV \\ + \int_A N^T \boldsymbol{\Phi} dA \end{aligned} \quad (3.60)$$

A equação apresentada anteriormente é a equação governante para sólidos elásticos. Para discretizar o acoplamento fluido estrutura deve-se determinar a solução da equação com suas respectivas condições de contorno descritas a seguir:

- Condição de contorno essencial:

$$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}(\vec{\mathbf{x}}, t) \quad \text{em } \Gamma_u \text{xl} \quad (3.61)$$

- Condição de contorno de tração:

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{t}}(\vec{\mathbf{x}}, t) \quad \text{em } \Gamma_\sigma \text{xl} \quad (3.62)$$

- Condição de valor inicial:

$$\vec{\mathbf{u}}_0(\vec{\mathbf{x}}_0) = \vec{\mathbf{u}}(\vec{\mathbf{x}}, t_0) \quad \dot{\vec{\mathbf{u}}}_0(\vec{\mathbf{x}}_0) = \dot{\vec{\mathbf{u}}}(\vec{\mathbf{x}}, t_0) \quad (3.63)$$

4 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

O presente capítulo apresenta a discretização isoparamétrica de cada domínio bem como os procedimentos usados no desenvolvimento do programa computacional. Utiliza-se, para tanto, as equações governantes na forma fraca dos domínios fluido e estrutura descritas no capítulo anterior. Apresenta-se a discretização em elementos isoparamétricos utilizados, a discretização dos domínios para estes elementos finitos e os algoritmos básicos em pseudo-linguagem.

4.1 ELEMENTOS ISOPARAMETRICOS

Elementos isoparamétricos são elementos finitos que utilizam a mesma função de forma para aproximar o campo de deslocamento, tensões, entre outros. Adotou-se o elemento paramétrico neste trabalho devido a possibilidade de representar domínios com fronteiras irregulares aumentando o campo de aplicação do programa citado. Os elementos adotados foram:

- Isoparamétrico L2: elemento unidimensional com dois nós usado para discretizar o contorno com superfície livre e para discretizar a interface de interação fluido estrutura.
- Isoparamétrico Q4: elemento bidimensional de quatro nós usado para discretizar o domínio do fluido e o domínio da estrutura.

As funções de forma são lineares com continuidade C^0 (funções de interpolação infinitamente contínuas no interior dos elementos e contínuas na interface dos elementos ou seja primeira derivada descontínua).

A ideia básica da formulação isoparamétrica consiste em usar as mesmas funções de forma de interpolação de deslocamento no interior do elemento, para interpolar as coordenadas do interior do elemento a partir dos seus valores nodais. Para atender a essa ideia, o sistema de coordenadas cartesiano, também denominado coordenadas globais (x, y) , é transformado para um sistema de coordenadas naturais (ξ, η) . A formulação usada neste item foi baseada em Cook et al (1989) e Logan (2012).

4.1.1 Elemento Isoparamétrico Unidimensional

O elemento isoparamétrico unidimensional adotado é um elemento de dois nós cada um associado a uma função de forma linear. A função é definida pela aproximação:

$$\phi(\varepsilon) = a_i N_i \quad (4.1)$$

onde: ϕ é uma função linear de ε em cada elemento, a_i é simplesmente uma aproximação ao valor de ϕ no nó i e N_i funções de forma lineares com continuidade C^0 . A Figura 4.1 apresenta a o modelo usado no mapeamento de coordenadas globais em coordenadas naturais.

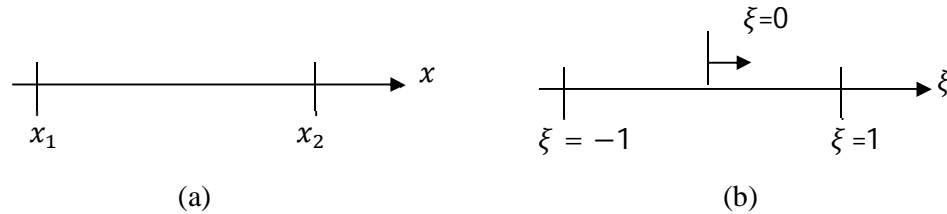


Figura 4.1 – Elemento unidimensional (a) sistema de coordenada global (b) sistema de coordenada natural

As funções de forma são usadas para interpolar coordenadas e deslocamento em cada nó. As equações abaixo exemplificam as funções de interpolação comumente usadas.

$$x = \sum_1^2 N_i x_i = [N][x_1 \quad x_2]^T \quad (4.2)$$

$$u = \sum_1^2 N_i u_i = [N][u_1 \quad u_2]^T \quad (4.3)$$

$$[N] = [N_1 \quad N_2] = \left[\frac{1-\xi}{2} \quad \frac{1+\xi}{2} \right] \quad (4.4)$$

Além das funções de forma, para a discretização das equações apresentadas, é importante definirmos a matriz de derivadas das funções de forma:

$$[B_G] = \frac{d}{dx} [N] \quad (4.5)$$

Como estamos trabalhando com elementos isoparamétricos, deve-se escrever em uma função da coordenada natural ξ . Dessa forma será aplicado a regra da cadeia, obtendo:

$$\frac{d}{d\xi} [N] = \frac{d}{dx} [N] \cdot \frac{dx}{d\xi} \quad (4.6)$$

Para tal transformação define-se o jacobiano da transformação de coordenadas como:

$$J = \frac{dx}{d\xi} \quad (4.7)$$

Substituindo a Eq. (4.6) em Eq. (4.7) tem-se:

$$\frac{d}{d\xi} [N] = J \cdot \frac{d}{dx} [N] \quad (4.8)$$

Isolando $\frac{d}{dx} [N]$ tem-se:

$$\frac{d}{dx}[N] = \frac{1}{J} \cdot \frac{d}{d\xi}[N] \quad (4.9)$$

onde: $[B]_G$ e $[B]_N$ são as matrizes da derivada da função de forma em função das coordenadas globais e naturais, respectivamente.

Para que as derivadas possam ser calculadas no domínio de coordenadas naturais é necessário mudar o domínio e os limites de integração através da matriz Jacobiana de transformação de coordenadas, que relaciona um elemento infinitesimal no domínio real a um elemento infinitesimal no domínio das coordenadas naturais:

$$dx = J \cdot d\xi \quad (4.10)$$

4.1.2 Elemento Isoparamétrico Bidimensional

O elemento bidimensional adotado foi o elemento isoparamétrico Q4. Este elemento destina-se a resolver problemas em elementos bidimensionais com espessura constante. O elemento Q4 é um elemento composto por quatro nós, situados na aresta do elemento, e define um campo retangular de interpolação linear, ou seja, todos os valores intermediários aos atribuídos aos nós, terão sua posição definida dentro do elemento através de funções interpoladores de primeiro grau. Os valores atribuídos podem ser tensões, deformações, deslocamentos (Lázaro, 2015).

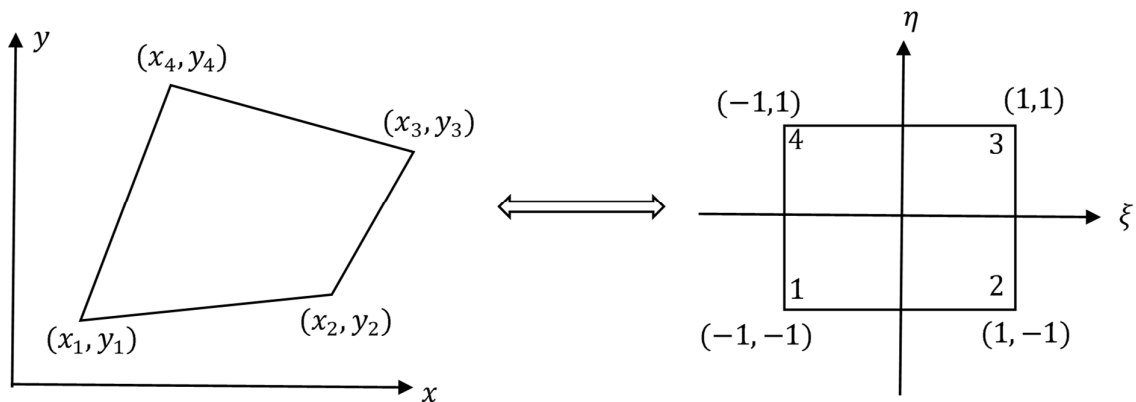


Figura 4.2 – Relação entre sistema cartesiano de coordenadas globais e naturais

As funções de forma são usadas para interpolar coordenadas e deslocamento em cada nó. As equações abaixo exemplificam as funções de interpolação comumente usadas.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum N_i x_i \\ \sum N_i y_i \end{Bmatrix} = [N] \{c\} \quad (4.11)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum N_i u_i \\ \sum N_i v_i \end{Bmatrix} = [N]\{u\} \quad (4.12)$$

onde:

$$\{\mathbf{c}\} = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ x_3 \ y_3 \ x_4 \ y_4]^T \quad (4.13)$$

$$\{\mathbf{d}\} = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]^T \quad (4.14)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

As funções de forma descritas na Eq. são:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (4.16)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (4.17)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (4.18)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (4.19)$$

onde a função assume valor unitário no nó analisado e zero nos demais nós. Conforme apresentado anteriormente é necessário determinar a matriz de derivadas das funções de forma:

$$[B_G] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Como estamos trabalhando com elementos isoparamétricos deve-se escrever em uma função da coordenada natural ξ e η . Dessa forma será aplicado a regra da cadeia tem-se:

$$\frac{\partial N}{\partial \xi} = \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \eta} = \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (4.22)$$

Que pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} N_{,\xi} \\ N_{,\eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} N_{,x} \\ N_{,y} \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

onde:

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum N_{i,\xi} x_i & \sum N_{i,\xi} y_i \\ \sum N_{i,\eta} x_i & \sum N_{i,\eta} y_i \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Para o caso do elemento Q4 tem-se que:

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Logo a relação entre a matriz de derivadas da função de forma na coordenada global e natural pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} N_{,x} \\ N_{,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{Bmatrix} N_{,\xi} \\ N_{,\eta} \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

onde:

$$J = \det[J] = J_{11}J_{22} - J_{21}J_{12} \quad (4.27)$$

Para que as derivadas possam ser calculadas no domínio de coordenadas naturais é necessário mudar o domínio e os limites de integração através da matriz Jacobiana de transformação de coordenadas, que relaciona um elemento infinitesimal no domínio real a um elemento infinitesimal no domínio das coordenadas naturais:

$$d\Omega = \det J \cdot d\xi d\eta \quad (4.28)$$

4.2 DISCRETIZAÇÃO ISOPARAMÉTRICA

Os casos estudados no presente trabalho são compostos por cavidades acústicas cujo fluido é água e a estrutura é um sólido elástico. Para as simulações numéricas adotou-se as condições de contorno de parede rígida, interface fluido estrutura e superfície livre. A figura abaixo representa uma cavidade com as condições de contorno citadas que será usada para modelar o domínio do fluido, o domínio da estrutura e o acoplamento fluido estrutura.

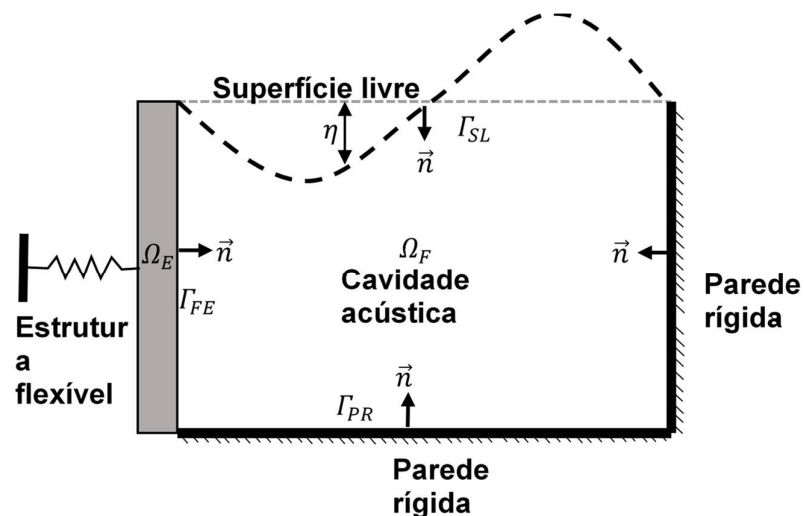


Figura 4.3 – Cavidade acústica e condições de contorno

Para determinação das soluções com o método dos elementos finitos, os domínios foram divididos segundo os elementos citados anteriormente conforme mostra a Figura 4.4.

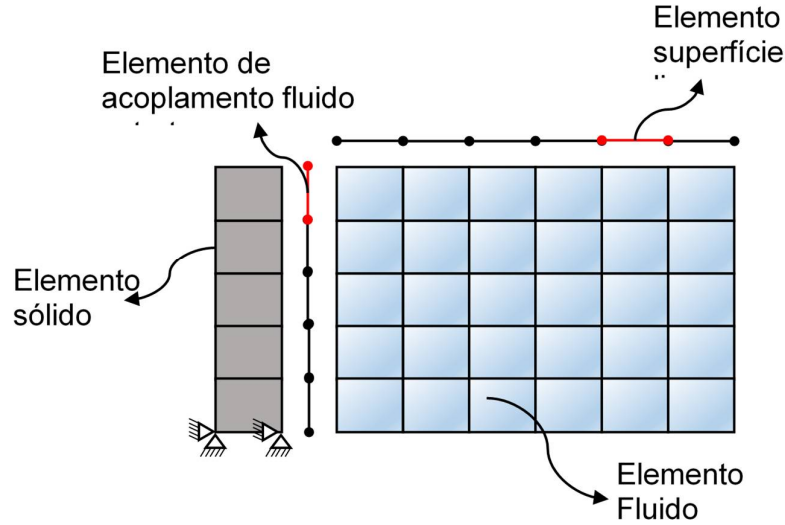


Figura 4.4 – Modelo numérico do acoplamento fluido estrutura com discretização por elementos finitos

4.2.1 Domínio do Fluido

Seja a equação governante do fluido descrita por:

$$-\int_{\Omega_f} \nabla \hat{p} \cdot \nabla \hat{p} \, d\Omega_f - \oint_{\Gamma_1} \rho \{\ddot{u}\} \cdot \{n\} \hat{p} \, d\Gamma_1 - \oint_{\Gamma_2} \frac{1}{g} \ddot{p} \hat{p} \, d\Gamma_2 - \oint_{\Omega_f} \frac{1}{c^2} \ddot{p} \hat{p} \, d\Omega_f = 0 \quad (4.29)$$

Para solução numérica por MEF as pressões no fluido e os deslocamentos da estrutura são aproximados por \hat{u} e \hat{p} respectivamente. As funções de forma e a derivada da pressão são descritas por:

$$u \approx \hat{u} = [Nu]\{\bar{u}\} \quad (4.30)$$

$$p \approx \hat{p} = [Np]\{\bar{p}\} \quad (4.31)$$

$$\nabla p \approx \nabla \hat{p} = \nabla [Np]\{\bar{p}\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right\}^T [Np]\{\bar{p}\} = [Bp]\{\bar{p}\} \quad (4.32)$$

Substituindo Eq. (4.30) a Eq. (4.32) em cada termo de Eq. (4.29) tem-se:

$$\int_{\Omega_f} \nabla \hat{p} \cdot \nabla \hat{p} \, d\Omega_f = \{\bar{p}\}^T \int_{\Omega_f} [Bp]^T [Bp] \, d\Omega_f \{\bar{p}\} = \{\bar{p}\}^T [K_f] \{\bar{p}\} \quad (4.33)$$

$$\int_{\Omega_f} \frac{1}{c^2} \ddot{p} \hat{p} \, d\Omega_f = \{\bar{p}\}^T \int_{\Omega_f} \frac{1}{c^2} [Np]^T [Np] \, d\Omega_f \{\bar{p}\} = \{\bar{p}\}^T [M_f] \{\bar{p}\} \quad (4.34)$$

$$\oint_{\Gamma_1} \rho_f \{\ddot{u}\} \cdot \{n\} \hat{p} \, d\Gamma_1 = \{\bar{p}\}^T \oint_{\Gamma_1} \rho_f [Nu]^T [\Phi] [Np] \, d\Gamma_1 \{\bar{u}\} = \{\bar{p}\}^T [FS]^T \{\bar{u}\} \quad (4.35)$$

$$\oint_{r_2}^1 \frac{1}{g} \ddot{p} \hat{p} d\Gamma_3 = \{\bar{p}\}^T \oint_{r_3}^1 [Np]^T [Np] d\Gamma_3 \{\ddot{p}\} = \{\bar{p}\}^T [SL] \{\ddot{p}\} \quad (4.36)$$

Substituindo as Eq. (4.33) a Eq. (4.36) na Eq. (4.29) tem-se:

$$[K_f] \{\bar{p}\} + [M_f] \{\ddot{p}\} + \rho [FS]^T \{\ddot{u}\} + [SL] \{\ddot{p}\} = 0 \quad (4.37)$$

Como $\{\bar{p}\}^T \neq 0$ tem-se:

$$[K_f] \{\bar{p}\} + [M_f] \{\ddot{p}\} + \rho [FS]^T \{\ddot{u}\} + [SL] \{\ddot{p}\} = 0 \quad (4.38)$$

Aplicando a transformação para elementos isoparamétricos as Eq. (4.33) a Eq. (4.36) são reescritas:

Matriz de rigidez do elemento:

$$[K_f] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[[G] \cdot [B_p] \right]^T [G] \cdot [B_p] \det J \cdot d\xi d\eta \quad (4.39)$$

Matriz de massa do elemento:

$$[M_f] = \frac{I}{c^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_p]^T \cdot [N_p] \det J \cdot d\xi d\eta \quad (4.40)$$

Matriz de acoplamento fluido estrutura:

$$[FS]^T = \int_{-1}^1 \rho_f \cdot [N_u]^T \cdot \{n\} [N_p] \det J \cdot d\xi \quad (4.41)$$

Matriz de superfície livre:

$$[SL] = \int_{-1}^1 \frac{1}{g} \cdot [N_p]^T \cdot [N_p] \det J \cdot d\xi \quad (4.42)$$

Para implementação computacional, cada matriz foi desenvolvida usando seus respectivos elementos. O desenvolvimento de cada matriz será apresentado a seguir. No desenvolvimento das equações acima foram usados o elemento bidimensional Q4, para solução das matrizes de massa e rigidez, e o elemento unidimensional L2, para solução das matrizes de acoplamento fluido estrutura e de superfície livre.

Devido à complexidade das integrais que devem ser resolvidas para se determinar as matrizes utiliza-se a integração numérica de Gauss, com dois pontos, para avaliar essas integrais (Moraes, 2015).

4.2.1.1 Elementos Bidimensionais

As funções de forma são dadas pelas Eq. (4.16) a Eq. (4.19). Dessa forma $[N_p]$ pode ser escrito como:

$$[Np] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \quad (4.43)$$

$$[B_p] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \quad (4.44)$$

Para elementos retangulares $detJ = \frac{A}{4}$ onde A representa a área do elemento.

- **Matriz de rigidez do fluido**

De acordo com a Eq. (4.41) a rigidez do fluido pode ser obtida por:

$$[K_f] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G] \cdot [B_p]^T [G] \cdot [B_p] detJ \cdot d\xi d\eta \quad (4.45)$$

Utilizando a quadratura gaussiana a solução numérica da matriz de rigidez pode ser determinada como:

$$[K_f] \approx \sum_1^4 \sum_1^4 [B(\xi_i, \eta_i)]^T [B(\xi_i, \eta_i)] detJ w_i w_j \quad (4.46)$$

Substituindo o determinante tem-se:

$$[K_f] \approx \frac{A}{4} \sum_1^4 \sum_1^4 [B(\xi_i, \eta_i)]^T [B(\xi_i, \eta_i)] \quad (4.47)$$

O Quadro 4.1 apresenta a sub-rotina criada para o cálculo da matriz de rigidez do elemento.

Quadro 4.1 - Sub-rotina para o cálculo da matriz de rigidez do fluido

1:	Inicialização da matriz de rigidez do elemento $[K_f]$	
2:	$i=1,2,\dots$ até o número de pontos de integração na direção de ξ	
3:	$j=1,2,\dots$ até o número de pontos de integração na direção de η	
4:	Determinação das coordenadas ξ_i, η_i e dos pesos w_i, w_j	
5:	Cálculo de $[M]_{,\xi} [N]_{,\eta}$ no ponto ξ_i, η_i	
6:	Cálculo de J, Γ e $det J$ no ponto ξ_i, η_i	Eqs. (4.25 e 4.28)
7:	Cálculo de $[N]_{,x} [N]_{,y}$ no ponto ξ_i, η_i	Eq. (4.26)
8:	Cálculo da matriz B no ponto ξ_i, η_i	Eq. (4.27)
9:	$K=K+ w_i w_j [B(\xi_i, \eta_i)]^T [B(\xi_i, \eta_i)] det J$	
10:	return	

- **Matriz de massa do fluido**

De acordo com a Eq. (4.42) a massa do fluido pode ser obtida por:

$$[M_f] = \frac{1}{c^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_p]^T \cdot [N_p] \det J \cdot d\xi d\eta \quad (4.48)$$

Utilizando a quadratura gaussiana a solução numérica da matriz de rigidez pode ser determinada como:

$$[M_f] \approx \sum_1^4 \sum_1^4 \frac{1}{c^2} [N(\xi_i, \eta_i)]^T [N(\xi_i, \eta_i)] \det J w_i w_j \quad (4.49)$$

Substituindo determinante tem-se:

$$[M_f] \approx \frac{A}{4c^2} \sum_1^4 \sum_1^4 [N(\xi_i, \eta_i)]^T [N(\xi_i, \eta_i)] \quad (4.50)$$

O Quadro 4.2 apresenta a sub-rotina criada para o cálculo da matriz de massa do elemento.

Quadro 4.2 - Sub-rotina para o cálculo da matriz de massa do fluido

1:	Inicialização da matriz de rigidez do elemento $[M_f]$
2:	$i=1,2,\dots$ até o número de pontos de integração na direção de ξ
3:	$j=1,2,\dots$ até o número de pontos de integração na direção de η
4:	Determinação das coordenadas ξ_i, η_i e dos pesos w_i, w_j
5:	Cálculo de J e $\det J$ no ponto ξ_i, η_i Eqs. (4.25 e 4.28)
6:	Cálculo de $[N]$ no ponto ξ_i, η_i
7:	$M = M + \frac{1}{c^2} w_i w_j [N(\xi_i, \eta_i)]^T [N(\xi_i, \eta_i)] \det J$
8:	return

4.2.1.2 Elementos Unidimensionais

As funções de forma são dadas pelas Eq. (4.16) a Eq. (4.19). Supõe-se que $[N_p]$ e $[N_u]$ possuem as mesmas funções de interpolação que pode ser escrito como:

$$[N_p] = [N_u] = [N_1 \ N_2] \quad (4.51)$$

Para elementos retangulares $J = \frac{L}{2}$ onde L representa o comprimento do elemento.

- **Matriz de acoplamento**

De acordo com a Eq. (4.43) a matriz de interação fluido estrutura pode ser obtida por:

$$[FS]^T = \int_{-1}^1 \rho_f \cdot [N_u]^T \cdot \{n\} [N_p] \det J \cdot d\xi \quad (4.52)$$

Utilizando a quadratura gaussiana a solução numérica da matriz de rigidez pode ser determinada como:

$$[FS]^T \approx \sum_1^2 \rho_f [N(\xi_i)]^T \{n\} [N(\xi_i)] J w_i w_j \quad (4.53)$$

Substituindo o valor de J:

$$[FS]^T \approx \frac{L\rho_f}{2} \sum_1^2 [N(\xi_i)]^T \{n\} [N(\xi_i)] \quad (4.54)$$

Cabe salientar que o deslocamento na interface fluido estrutura ocorre na direção normal a esse contorno, sendo descritos em função das coordenadas locais do elemento. Para a solução da matriz fluido estrutura é necessário descrever os deslocamentos da estrutura em um referencial global sendo necessário a transformação do sistema de coordenadas locais para o sistema de coordenadas global (Burgos, 2017).

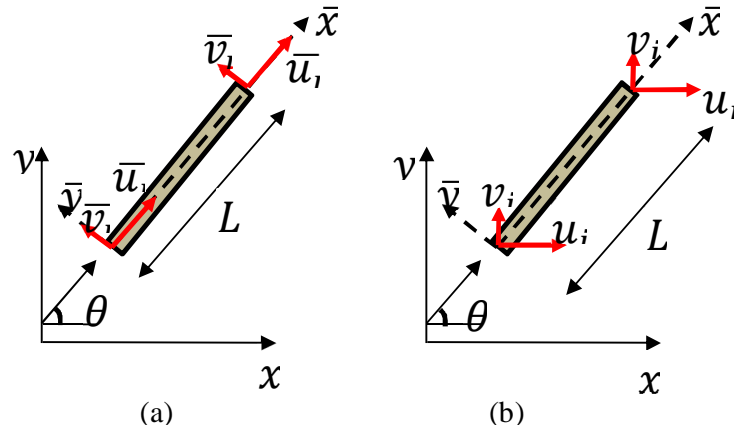


Figura 4.5 – Sistema de coordenadas (a) Local (b) Global (Burgos, 2017)

A matriz de transformação de coordenadas é descrita para o sistema apresentado na figura como:

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

O deslocamento pode ser escrito como:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

$$[\bar{u}] = T[u] \quad (4.57)$$

No presente trabalho os deslocamentos calculados foram apenas os deslocamentos na direção normal a estrutura sendo restringido na outra direção. Dessa forma, na implementação a matriz apresentada é calculada de acordo com as restrições adotadas.

Introduzindo a Eq. (4.59) na Eq. (4.40) o terceiro termo pode ser reescrito como:

$$[FS]^T \ddot{u} = [FS]^T T \ddot{u} \quad (4.58)$$

Assim para implementação computacional da matriz de acoplamento foi escrita como:

$$[FS]^T \approx \frac{L\rho_f}{2} \sum_1^2 [N(\xi_i)]^T \{n\} [N(\xi_i)] T \quad (4.59)$$

Dessa forma a equação pode ser aplicada em todos os elementos da interface fluido estrutura obtendo a matriz global de acoplamento fluido estrutura. A rotina para o cálculo da matriz de interação fluido estrutura é descrita a seguir:

Quadro 4.3 - Sub-rotina para o cálculo matriz de acoplamento fluido estrutura

1:	<i>Inicialização da matriz [FS] do elemento</i>	
2:	<i>i=1,2,... até o número de pontos de integração na direção de ξ</i>	
3:	<i>Determinação das coordenadas ξ_i e dos pesos w_i</i>	
4:	<i>Cálculo de J ponto ξ_i</i>	<i>Eqs. (4.7 e 4.9)</i>
5:	<i>Cálculo de [N] no ponto ξ_i</i>	
6:	<i>Cálculo de T</i>	
7:	<i>$FS = FS + w_i [N(\xi_i)]^T [N(\xi_i)] T$ *</i>	
8:	<i>return</i>	

*A matriz apresentada não foi multiplicada pela massa específica do fluido pois a mesma será usada de forma generalizada na montagem do problema acoplado com suas devidas considerações.

- **Matriz de superfície livre**

De acordo com a Eq. (4.42) a matriz de superfície livre pode ser obtida por:

$$[SL] = \int_{-1}^1 \frac{1}{g} \cdot [N_p]^T \cdot [N_p] \det J \cdot d\xi \quad (4.60)$$

Utilizando a quadratura gaussiana a solução numérica da matriz de rigidez pode ser determinada como:

$$[SL] \approx \sum_1^2 \frac{1}{g} \cdot [N(\xi_i)]^T [N(\xi_i)] J w_i w_j \quad (4.61)$$

Substituindo o valor de J tem-se:

$$[SL] \approx \frac{L}{2g} \sum_1^2 [N(\xi_i)]^T [N(\xi_i)] \quad (4.62)$$

O quadro a seguir apresenta a sub-rotina criada para o cálculo da matriz de superfície livre do elemento:

Quadro 4.4 - Sub-rotina para o cálculo da matriz de superfície livre

1:	Inicialização da matriz $[SL]$ do elemento	
2:	$i=1,2,\dots$ até o número de pontos de integração na direção de ξ	
3:	Determinação das coordenadas ξ_i e dos pesos w_i	
4:	Cálculo de J ponto ξ_i	Eqs. (3.7 e 3.9)
5:	Cálculo de $[N]$ no ponto ξ_i	
6:	Cálculo de T	
7:	$SL = SL + \frac{1}{g} w_i [N(\xi_i)]^T [N(\xi_i)]$	
8:	return	

4.2.2 Domínio da Estrutura

Seja a equação governante da estrutura descrita por:

$$\nabla_S \sigma + F - \rho \ddot{\mathbf{u}} - c \dot{\mathbf{u}} = 0 \quad (4.63)$$

Para solução numérica por MEF os deslocamentos da estrutura são aproximados por $\hat{\mathbf{u}}$ respectivamente. As funções da derivada da pressão são descritas por:

$$\vec{\mathbf{u}} \approx \hat{\mathbf{u}} = [N_u] \{\bar{\mathbf{u}}\} \quad (4.64)$$

$$\dot{\vec{\mathbf{u}}} \approx \dot{\hat{\mathbf{u}}} = [N_u] \{\dot{\bar{\mathbf{u}}}\} \quad (4.65)$$

$$\ddot{\vec{\mathbf{u}}} \approx \ddot{\hat{\mathbf{u}}} = [N_u] \{\ddot{\bar{\mathbf{u}}}\} \quad (4.66)$$

$$\nabla_S u = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \bar{\xi}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \end{bmatrix} \{\bar{\mathbf{u}}\} = [B_u] \{\bar{\mathbf{u}}\} \quad (4.67)$$

Aplicando o método de Galerkin escreve-se a equação integral como:

$$\int_V N^T (\nabla_S \sigma + F - \rho \ddot{\mathbf{u}} - c \dot{\mathbf{u}}) dV = 0 \quad (4.68)$$

Com aplicação do teorema de Green ao primeiro termo da Eq. (4.68):

$$\int_V (-\nabla_S N)^T \sigma + N^T (F - \rho \ddot{\mathbf{u}} - c \dot{\mathbf{u}}) dV + \int_A N^T \mathbf{n} \sigma dA = 0 \quad (4.69)$$

Substituindo as Eq. (4.40) e Eq. (4.45) tem-se:

$$\int_V (\nabla_S N)^T [D] \nabla_S \mathbf{u} + N^T (-F + \rho \ddot{\mathbf{u}} + c \dot{\mathbf{u}}) dV = \int_A N^T \Phi \quad (4.70)$$

Substituindo os campos de deslocamento, velocidade e aceleração e a matriz derivada das funções de forma tem-se:

$$\int_V \left(([B_u])^T [D] ([B_u]) \mathbf{u} + N^T \rho N \dot{\mathbf{u}} + N^T c N \mathbf{u} \right) dV = \int_V N^T \mathbf{F} dV$$

$$+ \int_A N^T \Phi dA$$
(4.71)

A Eq. (4.71) apresentada pode ser escrita como a equação de movimento da estrutura da seguinte forma, apresentada na Eq. (4.72).

$$[M_E] \{\ddot{\mathbf{u}}\} + [C_E] \{\dot{\mathbf{u}}\} + [K_E] \{\mathbf{u}\} = \{P_s\} + \{P_b\}$$
(4.72)

onde:

Matriz de rigidez do elemento:

$$[K_E] = \int_V ([B_u])^T [D] ([B_u]) dV$$
(4.73)

Matriz de massa do elemento:

$$[M_E] = \int_{VF} N^T \rho N \mathbf{u} dV$$
(4.74)

Matriz de amortecimento de um elemento:

$$[C_E] = \int_V N^T c N \mathbf{u} dV$$
(4.75)

Vetor de forças de corpo:

$$[P_b] = \int_V N^T \mathbf{F} dV$$
(4.76)

Vetor de forças de superfície:

$$[P_s] = \int_A N^T \Phi dA$$
(4.77)

Aplicando a transformação para elementos isoparamétricos as Eq. (4.74) a Eq. (4.79) são reescritas:

$$[K_E] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([B_u])^T [D] ([B_u]) \det J d\xi d\eta d\psi$$
(4.78)

$$[M_E] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T \rho N \mathbf{u} \det J d\xi d\eta d\psi$$
(4.79)

$$[C_E] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T c N \mathbf{u} \det J d\xi d\eta d\psi$$
(4.80)

$$[P_s] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T \mathbf{F} \det J d\xi d\eta$$
(4.81)

$$[P_b] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T \Phi \det J d\xi d\eta d\psi \quad (4.82)$$

O vetor de forças de corpo não foi usado no presente trabalho. O vetor de forças de superfície pode ser escrito com uma força generalizada externa na superfície F mais uma a pressão na interface com o fluido descrita por:

$$[P_S] = F + \{P\} = F + \int_A N^T p dA = F + \int_A N^T N \bar{p} dA = [FS] \bar{p} \quad (4.83)$$

Assim a equação do movimento é reescrita como:

$$[M_E] \{\ddot{u}\} + [C_E] \{\dot{u}\} + [K_E] \{u\} - [FS] \bar{p} = F \quad (4.84)$$

Conforme apresentado no item anterior cada matriz foi desenvolvida usando seus respectivos elementos e as integrais resolvidas usando integração numérica. O desenvolvimento de cada matriz será apresentado a seguir. No desenvolvimento das equações acima foram usados o elemento bidimensional Q4 para solução das matrizes de massa e rigidez e o elemento unidimensional. Para o desenvolvimento do trabalho não considerou o amortecimento.

Para o desenvolvimento tem-se:

$$[Nu] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

A equação de rigidez do elemento é dada pela Eq. (4.86) descrita a seguir:

$$[K_E] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([B_u])^T [D] ([B_u]) \det J d\xi d\eta d\psi \quad (4.86)$$

Como a espessura (t) do elemento é constante tem-se:

$$[K_E] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([B_u])^T [D] ([B_u]) \det J d\xi d\eta \quad (4.87)$$

Utilizando a quadratura gaussiana a solução numérica da matriz de rigidez pode ser determinada como:

$$[K_E] = t \sum_1^4 \sum_1^4 ([B_u])^T [D] ([B_u]) \det J \quad (4.88)$$

Com base na equação apresentada, a rotina usada para o cálculo está apresentada no Quadro 4.5.

Quadro 4.5 - Sub-rotina para o cálculo da matriz de rigidez da estrutura

1:	Inicialização da matriz de rigidez do elemento $[K_E]$ e cálculo de $\{D\}$	
2:	$i=1,2,\dots$ até o número de pontos de integração na direção de ξ	
3:	$j=1,2,\dots$ até o número de pontos de integração na direção de η	
4:	Determinação das coordenadas ξ_i, η_i e dos pesos w_i, w_j	
5:	Cálculo de $[N]_{,\xi} [N]_{,\eta}$ no ponto ξ_i, η_i	
6:	Cálculo de J, Γ e $\det J$ no ponto ξ_i, η_i	Eqs. (4.25 e 4.28)
7:	Cálculo de $[N]_{,x} [N]_{,y}$ no ponto ξ_i, η_i	Eq. (4.26)
8:	Cálculo da matriz B no ponto ξ_i, η_i	Eq. (4.27)
9:	$K=K + w_i w_j [B(\xi_i, \eta_i)]^T [D] [B(\xi_i, \eta_i)] \det J$	
10:	return	

- **Matriz de massa da estrutura**

A equação de massa da estrutura é dada pela Eq. (4.81):

$$[M_E] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T \rho N \det J \, d\xi d\eta d\psi = \rho \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T N \det J \, d\xi d\eta \quad (4.89)$$

Utilizando a quadratura gaussiana a solução numérica da matriz de rigidez pode ser determinada como:

$$[M_E] = \rho_E \sum_1^4 \sum_1^4 N^T N \det J \quad (4.90)$$

Quadro 4.6 - Sub-rotina para o cálculo da matriz de massa da estrutura

1:	Inicialização da matriz de rigidez do elemento $[M_E]$	
2:	$i=1,2,\dots$ até o número de pontos de integração na direção de ξ	
3:	$j=1,2,\dots$ até o número de pontos de integração na direção de η	
4:	Determinação das coordenadas ξ_i, η_i e dos pesos w_i, w_j	
5:	Cálculo de J e $\det J$ no ponto ξ_i, η_i	Eqs. (4.25 e 4.28)
6:	Cálculo de $[N]$ no ponto ξ_i, η_i	
7:	$M=M + \rho_E w_i w_j [N(\xi_i, \eta_i)]^T [N(\xi_i, \eta_i)] \det J$	
8:	return	

4.2.3 Montagem do problema acoplado

A montagem do problema acoplado é realizada unindo as equações de movimento da estrutura e do fluido. Essa união tem como objetivo a resolução simultânea das duas equações

como proposto por Zienkiewicz e Newton (1969). As equações para o acoplamento são descritas da seguinte forma:

$$\begin{cases} [K_f]\{\bar{p}\} + [M_f]\{\ddot{\bar{p}}\} + \rho[FS]^T\{\ddot{\bar{u}}\} + [SL]\{\ddot{\bar{p}}\} = 0 \\ [M_E]\{\ddot{\bar{u}}\} + [K_E]\{\bar{u}\} - [FS]\bar{p} = F \end{cases} \quad (4.91)$$

$$\begin{bmatrix} [M_E] & 0 \\ \rho_F \cdot [FS]^T & [M_f] + [SL] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\bar{u}}\} \\ \{\ddot{\bar{p}}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_E] & -[FS] \\ 0 & [K_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\} \\ \{\bar{p}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.92)$$

$$M_A \ddot{\delta} + K_A \delta = F_A \quad (4.93)$$

M_A , K_A são as matrizes com os elementos do acoplamento fluido estrutura e F_A o vetor de forças que será adotado na análise numérica de acordo com o método de resolução: vibração livre ou vibração forçada.

Na equação apresentada, os vetores \bar{u} e \bar{p} são vetores cuja dimensão é igual ao número de graus de liberdade da estrutura e do fluido respectivamente. As matrizes de massa, rigidez e superfície livre são matrizes quadradas de ordem equivalente aos graus de liberdade da estrutura ou do fluido. Por fim a matriz de acoplamento fluido estrutura tem dimensão igual ao grau de liberdade da estrutura nas linhas e grau de liberdade do fluido para coluna. Com base nas informações descritas a rotina para a montagem da equação acoplada é a seguinte:

Quadro 4.7 - sub-rotina para o cálculo da matriz do sistema acoplado

1: Entrada de dados: M_F , M_E , K_F , K_E , SL , FE	
2: Inicialização das matrizes M_A , K_A	
$M_A(NGLF + NGLE) = 0$ $K_A(NGLF + NGLE) = 0$	
3: Para $i=1:NGLE$ Para $j=1:NGLE$	$M_A(i, j) = M_E(i, j)$ $K_A(i, j) = K_E(i, j)$
Fim	
4: Para $i=1:NGLF$ Para $j=1:NGLF$	$M_A(i + NGLE, j + NGLE) = M_F(i, j) + SL(i, j)$ $K_A(i + NGLE, j + NGLE) = K_F(i, j)$
Fim	
5: Para $i=1:NGLE$ Para $j=1:NGLF$	$K_A(i, j + NGLE) = -FE(i, j)$
Fim	
6: Para $i=1:NGLF$ Para $j=1:NGLE$	$M_A(i + NGLE, j) = FE^T(i, j)$
Fim	

onde:

- NGLÉ é o número de graus de liberdade da estrutura que possui a dimensão da matriz de rigidez ou de massa;
- NGLF é o número de graus de liberdade do fluido que possui a dimensão da matriz de rigidez ou de massa.

Após a montagem do sistema acoplado descrita acima dá-se o processo de resolução da equação de acordo com o método de cálculo adotado e a análise numérica dos resultados obtidos. O próximo passo é solucionar o problema de autovalor, gerando autovalores (frequências naturais) e autovetores (modos de vibrar). Para os casos de vibração livre considera-se que os deslocamentos da estrutura e as pressões no fluido variam harmonicamente no tempo apresentado na Eq. (4.94).

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad p(t) = p_0 \cos(\omega t) \quad (4.94)$$

Substituindo a Eq. (4.94) em Eq. (4.93) obtém-se a equação para um problema de autovalores.

$$(-M_A \cdot \omega^2 + K_A)\delta = 0 \quad (4.95)$$

onde $\delta = \begin{Bmatrix} u \\ p \end{Bmatrix}$ representa o vetor de deslocamento e pressão do sistema.

A solução da Eq. (4.95) é composta de “n” autovalores ω^2 e “n” autovetores Φr . A raiz quadrada desses autovalores dividida por 2π são as frequências naturais do sistema enquanto os autovetores representam as formas modais do sistema.

Para os casos de vibração forçada avalia-se a resposta em frequência do sistema determinando a matriz de receptância do sistema. Para a solução considera-se que a força descrita na Eq. (4.93) varia harmonicamente com o tempo com a mesma frequência e fase. Dessa forma a Eq. (4.95) pode ser reescrita como:

$$(-M_A \cdot \omega^2 + K_A)\delta = F_A \quad (4.96)$$

A matriz $(-M_A \cdot \omega^2 + K_A)$ é conhecida como rigidez dinâmica de um sistema de múltiplos graus de liberdade denotado por :

$$[Z(\omega)] = [(-M_A \cdot \omega^2 + K_A)] \quad (4.97)$$

Assim a Eq. (4.96) pode ser reescrita como:

$$[Z(\omega)] \cdot \delta = F_A \quad (4.98)$$

Caso a matriz de rigidez dinâmica seja não singular a amplitude de resposta do sistema pode reescrita como:

$$\delta = [Z(\omega)]^{-1} \cdot F_A \quad (4.99)$$

O inverso da matriz de rigidez dinâmica é chamada de matriz de Receptância FRF do sistema, ou seja, função de resposta em frequência. No presente trabalho será apresentado problemas de vibração livre e vibração forçada.

5 ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Este capítulo trata sobre o código computacional desenvolvido para resolver problemas bidimensionais de interação fluido estrutura. Na solução dos problemas abordados no presente trabalho, três softwares foram utilizados: O MATLAB, que foi usado no desenvolvimento do código computacional e na solução das equações analíticas necessárias para a validação dos casos; o GMSH, criado por Geuzaine (1997), adotado na geração das malhas de elementos finitos utilizadas na solução dos casos apresentados e o ANSYS 19.0 Student License, utilizado na validação dos resultados obtidos no código computacional desenvolvido.

5.1 CÓDIGO COMPUTACIONAL

Matlab é um software interativo voltado para o cálculo numérico integrando análise numérica, cálculo com matrizes, construção de gráficos, entre outros. Permite a utilização de sub-rotinas internas, possibilitando a criação de códigos computacionais, rotinas e funções que podem ser usadas em outras programações. O código desenvolvido no presente trabalho foi criado em linguagem MATLAB devido a sua alta performance na solução de matrizes. A Figura 5.1 apresenta o fluxograma com as etapas de montagem do código que foi utilizado neste trabalho.

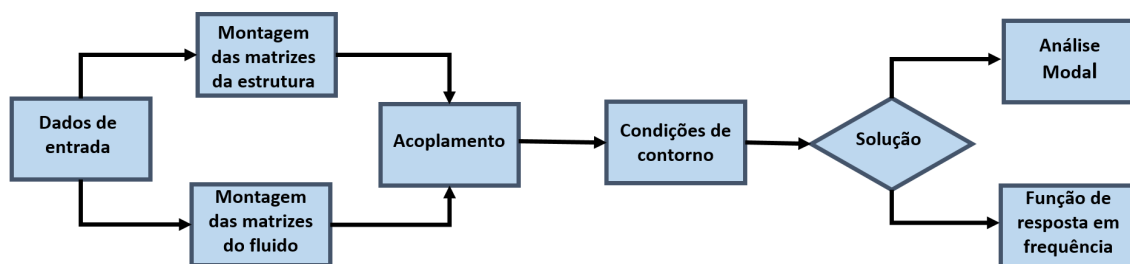


Figura 5.1 – Fluxograma geral do código computacional

O código foi dividido em três etapas: a primeira teve como objetivo a criação das matrizes desacopladas do fluido e da estrutura, a segunda consistiu na criação das matrizes acopladas fluido-estrutura e na terceira ocorreu a inserção das condições de contorno e resolução do problema. A primeira etapa inicia-se com a inserção dos dados de entrada, referentes a características da estrutura e do fluido com todas as unidades no Sistema Internacional. Para o fluido o usuário deve informar a massa específica e a velocidade do som no meio. Para a estrutura deve-se informar o módulo de elasticidade, a massa específica, o

coeficiente de Poisson. As características geométricas e a malha de elementos finitos são inseridas através do *software* GMSH. O GMSH é um gerador de malha de elementos finitos 3D gratuito com o mecanismo CAD e pós-processamento integrado. Os módulos geometria e malha do GMSH foram usados no desenvolvimento do código computacional. Inicialmente cria-se um arquivo (txt) com os dados da geometria e determinação do número de elementos do sistema. O GMSH faz a leitura do arquivo, apresentando o desenho do caso em estudo. Em seguida a malha de elementos finitos é gerada criando um arquivo (txt) com as coordenadas do fluido e da estrutura e com as conectividades de cada elemento. O código computacional desenvolvido faz a leitura do arquivo gerado pelo GMSH que é usado na geração das matrizes elementares em seguida realiza-se a montagem das matrizes de rigidez e massa elementares para estrutura e para o fluido. Realiza-se a leitura da matriz de conectividade seguida da criação das matrizes globais de massa e rigidez da estrutura e do fluido finalizando a primeira etapa, conforme apresentado na Figura 5.2.

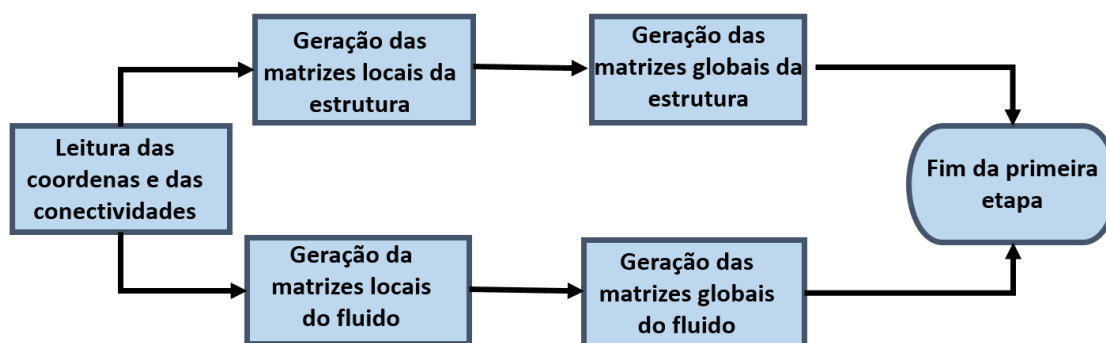


Figura 5.2 – Fluxograma da primeira etapa do código computacional

A segunda etapa é dedicada ao acoplamento fluido-estrutura. As matrizes de massa e rigidez geradas na primeira etapa são incorporadas na matriz do problema acoplado nas suas respectivas posições globais. Em seguida são montadas as sub-matrizes de acoplamento do fluido [FSF] e da estrutura [FSE]. Finalmente as matrizes de acoplamento são incorporadas nas respectivas posições globais, finalizando a criação da matriz global do problema acoplado.

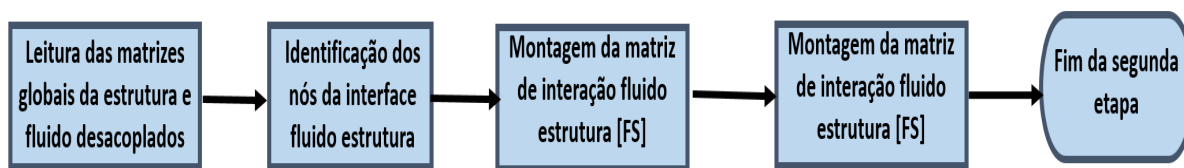


Figura 5.3 – Fluxograma da segunda etapa do código computacional

Após a criação das matrizes globais, o código computacional irá solicitar as condições de contorno da estrutura e do fluido. É criado um vetor com as condições de contorno do sistema. As linhas e colunas referentes aos nós restritos serão eliminadas, equação matricial global. Dessa forma a matriz está pronta para ser solucionada. O usuário pode optar em realizar a análise desacoplada do fluido e da estrutura ou realizar a análise do problema acoplado.

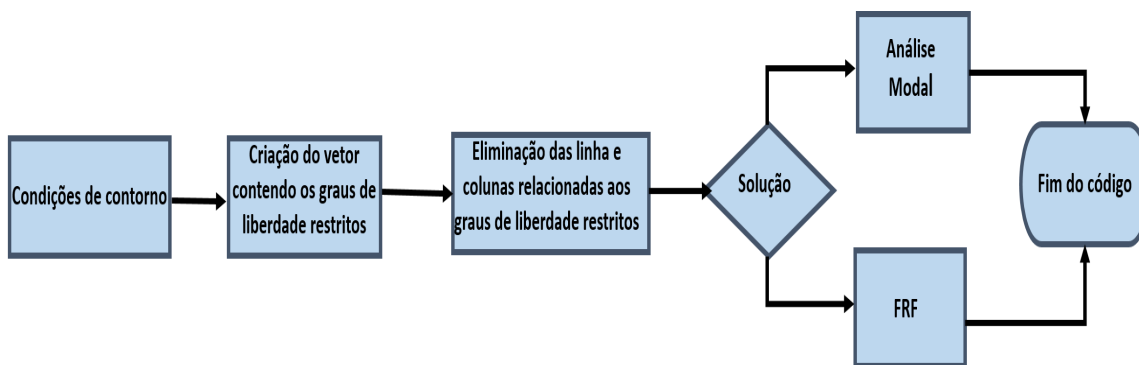


Figura 5.4 – Fluxograma da terceira etapa do código computacional

A análise do problema acoplado é dividida em duas etapas: na primeira etapa resolve-se o problema de autovalores e autovetores. São geradas duas matrizes: a primeira refere-se as frequências naturais do sistema (autovalores) e a segunda refere-se as formas modais do sistema (autovetores). Na segunda etapa o usuário define os limites que se deseja realizar a varredura de frequência e o ponto que se deseja analisar. É gerada a função de resposta em frequência do problema acoplado. Concluída essa etapa o código é finalizado.

5.2 ANSYS 19.0 STUDENT LICENSE

O software Ansys v19.0 é um programa comercial de elementos finitos, que foi adotado devido sua facilidade e agilidade, que possibilitam a avaliação dos problemas acoplados e desacoplados representando a configuração das deformadas modais da cavidade e da estrutura para o problema acoplado. A modelagem foi realizada no ANSYS Mechanical APDL v19.0 Student License. Adotou-se três elementos: O elemento sólido PLANE 42, o elemento fluido acústico FLUID 29 apresentados nas Figuras 5.5 e 5.6.

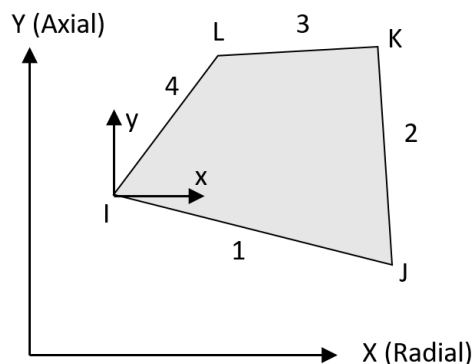


Figura 5.5 – Elemento PLANE 42 (ANSYS 19.0, adaptado)

O elemento PLANE 42 é um elemento sólido usado para simular o estado plano de tensões adotado neste trabalho que possui 4 nós e dois graus de liberdade por nó deslocamento em x e y.

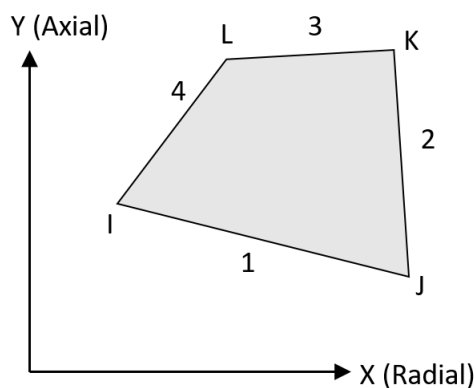


Figura 5.6 – Elemento FLUID 29 (ANSYS 19.0, adaptado)

O elemento FLUID 29 é um elemento usado para modelar o fluido acústico. O elemento possui três ou quatro nós com três graus de liberdade por nó, deslocamento x, y e pressão.

Para validação dos resultados obtidos no código computacional realizou-se análise modal comparando os resultados para as frequências naturais e modos de vibração obtidas com os resultados do código computacional. Os métodos numéricos obtidos para extração dos modos foi o *Subspace* e o *Unsymmetric*.

O *Subspace* é utilizado para determinação de autovalores e autovetores associados a matrizes simétricas, como nos casos das análises modais da estrutura e do fluido desacoplados. O método é altamente preciso porque utiliza as matrizes de rigidez e massa completos. O método *Unsymmetric* também utiliza matrizes completas, porém destina-se a problemas assimétricos, sendo usado na análise do problema acoplado (Mendes, 2013)

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, são modelados problemas de interação fluido estrutura em cavidades fluidas acústicas bidimensionais acopladas a sólidos elásticos lineares. Esses exemplos buscam validar a implementação computacional da formulação U-P não simétrica descrita nos capítulos anteriores. Os resultados obtidos correspondem problemas de vibroacústica e de hidroelasticidade onde os resultados obtidos são comparados com resultados numéricos, analíticos e experimentais. Os resultados analíticos adotados foram apresentados por Morais (2000) e Sousa Jr. (2006). Os resultados numéricos foram obtidos pelo software ANSYS Student 19.0.

O primeiro caso apresenta um sistema acoplado sólido cavidade longa acoplada representando o modelo barragem reservatório em Morais (2000). O caso objetiva apresentar a modelagem manual das matrizes de rigidez e massa acoplada para a formulação U-P não simétrica. Para a solução do modelo é adotado uma discretização com poucos nós e elementos a fim de facilitar a demonstrar o passo a passo das matrizes do sistema acoplado. Em seguida é apresentado a solução numérica convergida do caso usando o código computacional desenvolvido. Apresenta-se as frequências e formas modais para desacoplados e acoplados.

O segundo caso analisa o comportamento dinâmico acoplado de um tanque retangular 2D de paredes flexíveis e fundo rígido preenchido com fluido acústico e condição de superfície livre. Inicialmente analisa-se as frequências e formas modais do sistema acoplado. E finalmente determina-se a função de resposta em frequência (FRF) do modelo acoplado a partir de um estudo de varredura em frequência.

O terceiro caso é a modelagem de um absorvedor passivo de coluna de líquido sintonizado. Inicialmente analisa-se o absorvedor desacoplado observando as frequências naturais e o efeito sloshing. Em seguida determina-se as frequências e formas operacionais para uma aceleração de base unitária através da análise da FRF obtida por varredura em frequência. Nestes resultados são comparados as formas modais e frequências naturais obtidas na primeira análise. Finalmente, o modelo numérico do absorvedor passivo de coluna de líquido sintonizado é acoplada a um sistema de 1 GDL. O presente modelo numérico do sistema acoplado estrutura-absorvedor líquido é comparado ao resultado analítico experimental de Alkmin (2017).

6.1 CASO 1: CAVIDADE LONGA COM SUPERFÍCIE LIVRE

O primeiro caso apresenta análise do modelo de um sistema acoplado fluido estrutura semelhante a um sistema barragem reservatório (Figura 6.1). O sólido é engastado no apoio e livre na parte superior. O domínio fluido é uma cavidade retangular longa ($L/H \geq 10$) com fundo rígido, superfície livre e lateral com pressão nula ($p = 0$) simulando a condição de infinita. Inicialmente é realizado o estudo analítico do problema e em seguida a análise numérica usando o ANSYS Student 19.0 e o programa desenvolvido no presente trabalho comparando os resultados obtidos para fins de validação. Com o intuito didático e de demonstração da modelagem numérica estudada, pretende-se iniciar a análise numérica discretizando a estrutura e a cavidade com uma malha grosseira apresentada na Figura 6.2 demonstrando a montagem das matrizes elementares.

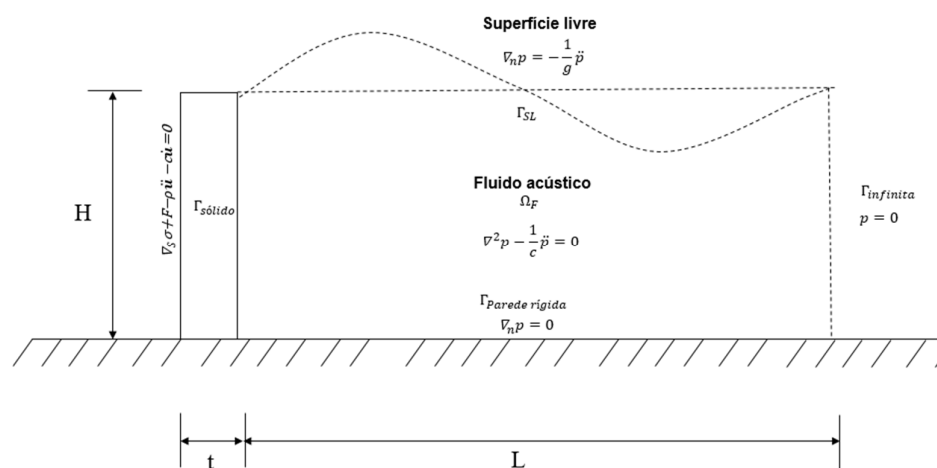


Figura 6.1 – Representação esquemática do modelo acoplado estrutura – cavidade longa 2D com superfície livre.

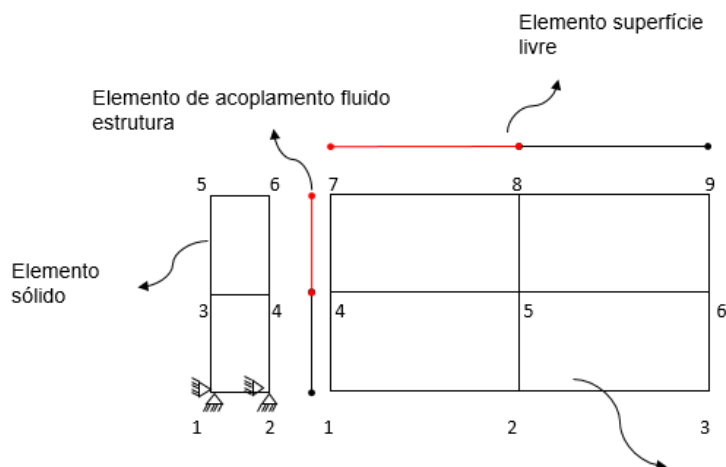


Figura 6.2 – Discretização do problema através de malhas de elementos finitos.

Para a solução do problema adotou-se os seguintes dados:

Tabela 6.1 – Características dos materiais

Domínio Sólido		Domínio Fluido	
H (m)	10	L (m)	10
t (m)	0.1	H (m)	1
Material	Aço	Densidade (kg/m³)	1000
Densidade (kg/m³)	7800	Velocidade do som no fluido (m/s)	1500
Módulo de elasticidade (GPa)	211		
Coefficiente de Poisson	0.3		
Estado plano	Tensão		

6.1.1 Solução Desacoplada Sólido

- **Solução Analítica**

Para análise da estrutura desacoplada do caso 1 são utilizadas as soluções analíticas apresentadas nos anexos A e B. Para a solução da estrutura adotou-se o modelo apresentado por Blevins (1979) e adaptado por Pedroso (2006) apud Souza (2007).

Segundo Blevins (1979) a deformação transversal de uma viga real é a soma das deformações de flexão e cisalhamento. Em vigas esbeltas a deformação por cisalhamento pode ser negligenciada, contudo considera-la é importante em modos mais altos e em vigas especiais.

A determinação da frequência natural da viga engastada livre é determinada através da Eq. (6.1).

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega_C^2} + \frac{1}{\omega_F^2} \quad (6.1)$$

A frequência de vigas com deformação de cisalhamento (ω_C) e flexão (ω_F) podem ser obtidas por intermédio de equações específicas, de modo que ω_C pode ser calculado através da Eq. (6.2).

$$\omega_C = \frac{\lambda_{ic}}{2\pi L} \sqrt{\frac{KG}{\rho}} \quad (6.2)$$

$$\omega_F = \frac{\lambda_{if}^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} \quad (6.3)$$

onde: E representa o módulo de elasticidade; $K = (10(1 + \nu))/(12 + 11\nu)$ é o coeficiente de cisalhamento; G é o módulo de elasticidade transversal $G = E/(2(1 + \nu))$; I é o momento de inércia da seção transversal; A é a área da seção transversal, $\bar{m} = \rho A$ é a massa por unidade de comprimento da estrutura; λ_{ic} e λ_{if} são parâmetros adimensionais dependentes do modo dados pelas Eq. (6.4) e (6.5).

$$\lambda_{ic} = \frac{(2i - 1)\pi}{2} \quad i = 0,1,2,3 \dots \quad (6.4)$$

$$\lambda_{if} = \left[1.8751 \quad 4.6340 \quad 7.8548 \quad 10.9955 \quad 14.1371 \quad \frac{(2i - 1)\pi}{2} \right] \quad i \geq 5 \quad (6.5)$$

A frequência natural normal (axial) de uma viga engastada livre é dada pela Eq. (6.5).

$$\omega_A = \frac{\lambda_{iA}}{2\pi L} \sqrt{\frac{EA}{\bar{m}}} \quad (6.6)$$

onde: E representa o módulo de elasticidade; A é a área da seção transversal, $\bar{m} = \rho A$ é a massa por unidade de comprimento da estrutura; λ_{iA} é o parâmetro adimensional dependente do modo, dado pela Eq. (6.7).

$$\lambda_{iA} = \frac{(2i - 1)\pi}{2} \quad i = 0,1,2,3 \dots \quad (6.7)$$

Com base nas equações apresentadas, os modos flexionais e axiais para o caso em estudo estão apresentados na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 – Frequências naturais da estrutura desacoplada

Frequência da estrutura (rad/s)		
Modo	$\omega_{flexão}$	ω_{Normal}
1	524.6	8169.8
2	3219.8	24509.5
3	8610.6	40849.2
4	15870.2	57188.9
5	24422.5	73528.6

• Solução Numérica

Para a solução da estrutura apresentada na Figura 6.2 adotou-se um elemento isoparamétrico com quatro nós. Cada nó do elemento da estrutura possui dois graus de liberdade conforme apresentado na Figura 6.3, um deslocamento horizontal e um deslocamento vertical. Adotou-se estado plano de tensões para a solução da estrutura.

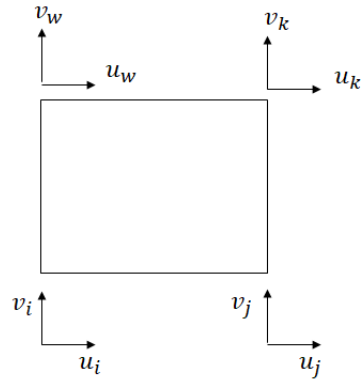


Figura 6.3 – Graus de liberdade do elemento

Para iniciar a solução define-se as coordenadas dos nós de um elemento e suas respectivas conectividades conforme apresentado na Tabela (6.3).

Tabela 6.3 – Síntese das coordenadas dos nós de um elemento e suas conectividades

Elemento	Nó i	Nó j	Nó k	Nó w
1	1	2	4	3
2	3	4	6	5

Seguindo as equações apresentadas na seção 4.2.2 a solução do problema inicia-se pela construção das matrizes de rigidez e massa de um elemento finito. Usando a Eq. (4.88) tem-se a matriz de rigidez do elemento.

$$[Ke]_{el} = 10^{11} \begin{bmatrix} 3.919 & & & & & & & & & \\ 0.377 & 1.507 & & & & & & & & \\ -3.837 & 0.029 & 3.919 & & & & & & & \\ -0.029 & -1.272 & -0.377 & 1.507 & & & & & & \\ -1.959 & -0.377 & 1.878 & 0.029 & 3.919 & & & & & \\ -0.377 & -0.753 & -0.029 & 0.521 & 0.377 & 1.507 & & & & \\ 1.978 & -0.029 & -1.959 & 0.376 & -3.837 & 0.029 & 3.919 & & & \\ 0.029 & 0.521 & 0.377 & -0.753 & -0.029 & -1.275 & -0.377 & 1.507 & & \\ \end{bmatrix}_{[8 \times 8]} \quad (6.8)$$

Através da matriz de conectividade realiza-se a transferência da matriz de rigidez do elemento e somando os elementos coincidentes de forma adequada encontra-se a matriz de rigidez.

$$[Ke] = 10^{11} \begin{bmatrix} 3.918 & \\ 0.377 & 1.507 & \\ -3.837 & 0.030 & 3.918 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ -0.029 & -1.275 & -0.377 & 1.507 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ 1.878 & -0.029 & -1.959 & 0.376 & 7.837 & & & & & & & & & & & & & & & & \\ 0.029 & 0.521 & 0.377 & -0.754 & 0 & 3.014 & & & & & & & & & & & & & & & \\ -1.959 & -0.376 & 1.878 & 0.029 & -7.674 & 0 & 7.837 & & & & & & & & & & & & & & \\ -0.377 & -0.754 & -0.029 & 0.521 & 0 & -2.551 & 0 & 3.014 & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.878 & -0.029 & -1.959 & 0.377 & 3.918 & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.029 & -0.522 & 0.376 & -0.754 & -0.377 & 1.507 & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.959 & -0.376 & 1.878 & 0.029 & -3.837 & -0.029 & 3.919 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.377 & -0.754 & -0.029 & 0.521 & 0.029 & -1.275 & 0.377 & 1.507 & & & & & & & & & \\ \end{bmatrix}_{[12 \times 12]} \quad (6.9)$$

Da mesma forma pode-se proceder com a montagem das matrizes de massa do elemento e matriz de massa global da estrutura seguindo a Eq. (4.90).

$$[Me]_{el} = \begin{bmatrix} 43.33 & & & & & & & \\ 0 & 43.33 & & & & & & \\ 21.66 & 0 & 43.33 & & & & & \\ 0 & 21.66 & 0 & 43.33 & & & & \\ 10.83 & 0 & 21.66 & 0 & 43.33 & & & \\ 0 & 10.83 & 0 & 21.66 & 0 & 43.33 & & \\ 21.66 & 0 & 10.83 & 0 & 21.66 & 0 & 43.33 & \\ 0 & 21.66 & 0 & 10.83 & 0 & 21.66 & 0 & 43.33 \end{bmatrix}_{[8 \times 8]} \quad \text{sim} \quad (6.10)$$

$$[Me] = \begin{bmatrix} 43.33 & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 43.33 & & & & & & & & & & & \\ 21.66 & 0 & 43.33 & & & & & & & & & & \\ 0 & 21.66 & 0 & 43.33 & & & & & & & & & \\ 21.66 & 0 & 10.83 & 0 & 86.66 & & & & & & & & \\ 0 & 21.66 & 0 & 10.83 & 0 & 86.66 & & & & & & & \\ 10.83 & 0 & 21.66 & 0 & 43.33 & 0 & 86.66 & & & & & & \\ 0 & 10.83 & 0 & 21.66 & 0 & 43.33 & 0 & 86.66 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.66 & 0 & 10.83 & 0 & 43.33 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21.66 & 0 & 10.33 & 0 & 43.3 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10.83 & 0 & 21.66 & 0 & 21.66 & 0 & 43.33 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10.83 & 0 & 21.66 & 0 & 21.66 & 0 & 43.33 \end{bmatrix}_{[12 \times 12]} \quad \text{sim} \quad (6.11)$$

Com a determinação as matrizes globais de massa e de rigidez da estrutura realiza-se a montagem da equação de movimento da estrutura substituindo as matrizes na Eq. (4.84) obtendo:

$$\begin{bmatrix} 43.33 & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 43.33 & & & & & & & & & & & \\ 21.66 & 0 & 43.33 & & & & & & & & & & \\ 0 & 21.66 & 0 & 43.33 & & & & & & & & & \\ 21.66 & 0 & 10.83 & 0 & 86.66 & & & & & & & & \\ 0 & 21.66 & 0 & 10.83 & 0 & 86.66 & & & & & & & \\ 10.83 & 0 & 21.66 & 0 & 43.33 & 0 & 86.66 & & & & & & \\ 0 & 10.83 & 0 & 21.66 & 0 & 43.33 & 0 & 86.66 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.66 & 0 & 10.83 & 0 & 43.33 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21.66 & 0 & 10.33 & 0 & 43.3 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10.83 & 0 & 21.66 & 0 & 21.66 & 0 & 43.33 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10.83 & 0 & 21.66 & 0 & 21.66 & 0 & 43.33 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \\ \ddot{u}_5 \\ \ddot{u}_6 \\ \ddot{u}_7 \\ \ddot{u}_8 \\ \ddot{u}_9 \\ \ddot{u}_{10} \\ \ddot{u}_{11} \\ \ddot{u}_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{sim} \quad (6.12)$$

$$+ 10^{11} \begin{bmatrix} 3.918 & & & & & & & & & & & & \\ 0.377 & 1.507 & & & & & & & & & & & \\ -3.837 & 0.030 & 3.918 & & & & & & & & & & \\ -0.029 & -1.275 & -0.377 & 1.507 & & & & & & & & & \\ 1.878 & -0.029 & -1.959 & 0.376 & 7.837 & & & & & & & & \\ 0.029 & 0.521 & 0.377 & -0.754 & 0 & 3.014 & & & & & & & \\ -1.959 & -0.376 & 1.878 & 0.029 & -7.674 & 0 & 7.837 & & & & & & \\ -0.377 & -0.754 & -0.029 & 0.521 & 0 & -2.551 & 0 & 3.014 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.878 & -0.029 & -1.959 & 0.377 & 3.918 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.029 & -0.522 & 0.376 & -0.754 & -0.377 & 1.507 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.959 & -0.376 & 1.878 & 0.029 & -3.837 & -0.029 & 3.919 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.377 & -0.754 & -0.029 & 0.521 & 0.029 & -1.275 & 0.377 & 1.507 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{Bmatrix} = 0$$

Considerando que os deslocamentos da estrutura variam harmonicamente no tempo conforme Eq. (4.94) e substituindo na equação do movimento da estrutura tem-se um problema de autovalores e autovetores conforme apresentado na Eq. (4.95).

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccccccccccc}
 43.33 & & & & & & & & & & & & \\
 0 & 43.33 & & & & & & & & & & & \\
 21.66 & 0 & 43.33 & & & & & & & & & & \\
 0 & 21.66 & 0 & 43.33 & & & & & & & & & \\
 21.66 & 0 & 10.83 & 0 & 86.66 & & & & & & & & \\
 0 & 21.66 & 0 & 10.83 & 0 & 86.66 & & & & & & & \\
 10.83 & 0 & 21.66 & 0 & 43.33 & 0 & 86.66 & & & & & & \\
 0 & 10.83 & 0 & 21.66 & 0 & 43.33 & 0 & 86.66 & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 21.66 & 0 & 10.83 & 0 & 43.33 & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21.66 & 0 & 10.33 & 0 & 43.3 & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 10.83 & 0 & 21.66 & 0 & 21.66 & 0 & 43.33 & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10.83 & 0 & 21.66 & 0 & 21.66 & 0 & 43.33
 \end{array} \right) \\
 & + 10^{11} \left(\begin{array}{cccccccccccc}
 3.918 & & & & & & & & & & & & \\
 0.377 & 1.507 & & & & & & & & & & & \\
 -3.837 & 0.030 & 3.918 & & & & & & & & & & \\
 -0.029 & -1.275 & -0.377 & 1.507 & & & & & & & & & \\
 1.878 & -0.029 & -1.959 & 0.376 & 7.837 & & & & & & & & \\
 0.029 & 0.521 & 0.377 & -0.754 & 0 & 3.014 & & & & & & & \\
 -1.959 & -0.376 & 1.878 & 0.029 & -7.674 & 0 & 7.837 & & & & & & \\
 -0.377 & -0.754 & -0.029 & 0.521 & 0 & -2.551 & 0 & 3.014 & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1.878 & -0.029 & -1.959 & 0.377 & 3.918 & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0.029 & -0.522 & 0.376 & -0.754 & -0.377 & 1.507 & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1.959 & -0.376 & 1.878 & 0.029 & -3.837 & -0.029 & 3.919 & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -0.377 & -0.754 & -0.029 & 0.521 & 0.029 & -1.275 & 0.377 & 1.507
 \end{array} \right) \\
 & = \{0\}
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Resolvendo a equação apresentada tem-se que os autovalores representam as frequências naturais da estrutura e os autovetores representam as deformadas modais da estrutura. As frequências naturais da estrutura estão apresentadas na Tabela 6.4. A estrutura possui 12 graus de liberdade e 4 graus de liberdade restritos, dessa forma obtém-se 8 frequências naturais para o sistema desacoplado.

Tabela 6.4 – Frequências naturais da estrutura desacoplada

Modo	Frequência (rad/s)	Modo	Frequência (rad/s)
1	1673.6	5	112793.0
2	8524.1	6	116160.3
3	11315.4	7	189054.3
4	29771.8	8	189787.7

Como a solução apresentada possui uma malha com poucos elementos deve-se realizar um estudo de convergência das malhas. Para o estudo de convergência variou-se o número de nós da estrutura comparando os resultados do código computacional do presente trabalho com os resultados obtidos no programa ANSYS Student 19.0. Para comparação determinou-se o erro relativo dado pela Eq. (6.13).

$$\varepsilon = \left| \frac{\text{frequência numérica} - \text{frequência Ansys}}{\text{frequência Ansys}} \right| \cdot 100 \tag{6.14}$$

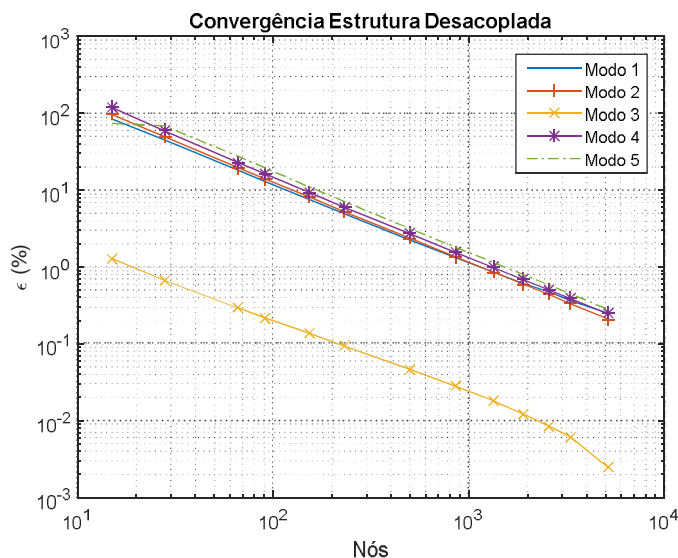


Figura 6.4 – Estudo de convergência de malha (erro relativo %) entre os resultados de frequência natural da estrutura entre o presente estudo e ANSYS em função do número de nós

Observando o gráfico apresentado adotou-se uma malha de 2556 nós cujo erro relativo está na ordem de 1% comparado com o ANSYS Student 19.0. Os modos apresentados na Tabela 6.4 representam os modos de flexão e axial da estrutura. O modo 3 (axial) apresentou comportamento diferente em relação aos modos de flexão apresentando erro relativo menor comparado aos demais modos.

A Tabela 6.5 apresenta um comparativo entre os modos obtidos no presente estudo e os modos obtidos de forma analítica e numérica (ANSYS Student 19.0).

Tabela 6.5 – Comparativo frequências numéricas estrutura desacoplada

Modos de vibração	Frequências Naturais Estrutura Desacoplada (rad/s)				
	Numérico Presente Estudo	Analítico	Erro (%)	Ansys	Erro (%)
1	526.6	524.6	-0.38	524.0	-0.49
2	3159.9	3219.8	1.86	3146.1	-0.44
3*	8180.2	8169.8	-0.12	8179.5	-0.01
4	8323.3	8610.6	3.27	8286.3	-0.51
5	15179.8	15870.2	4.35	15059.5	-0.79
6	23184.6	24422.5	5.07	22969.4	-0.93
7*	24534.1	24509.5	-0.11	24520.13	-0.06

*Modos Axiais

A Figura 6.5 apresenta os sete primeiros modos de vibração da estrutura comparando as formas modais obtidas no presente estudo com as formas modais obtidas no ANSYS 19.0 Student.

Observa-se que as frequências naturais e as formas modais apresentam uma boa concordância em relação aos resultados obtidos pelo ANSYS Student 19.0 apresentando erros inferiores a 1%. Em comparação com os resultados analíticos observa-se um erro máximo de 5%, tal discrepância deve-se ao nível de refinamento da malha de elementos finitos.

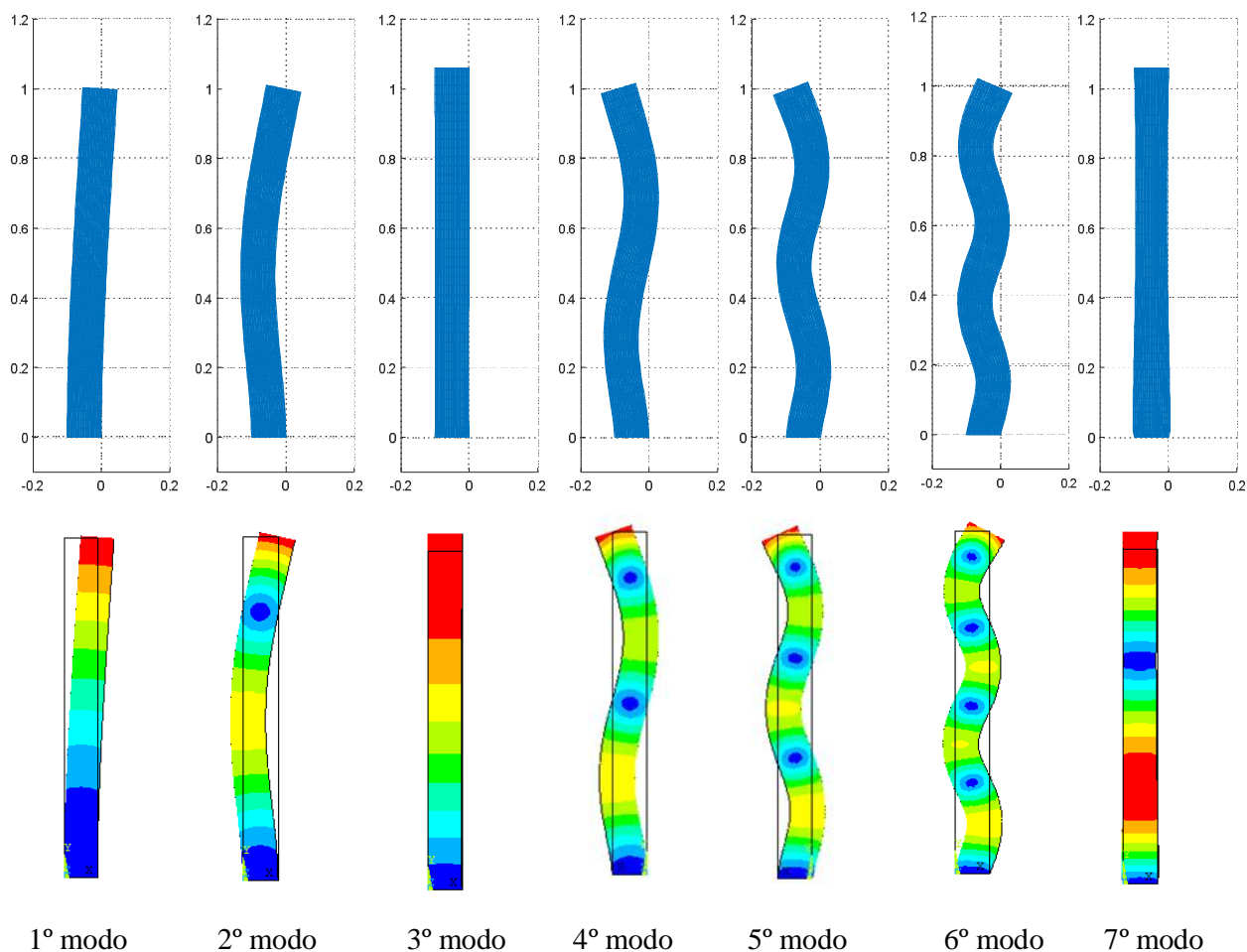


Figura 6.5– Comparação das formas modais do presente estudo e ANSYS Student 19.0.

6.1.2 Solução do Fluido Desacoplado

- **Analítico**

Para análise do fluido desacoplado do caso 1 são utilizadas as soluções analíticas apresentadas nos anexos A e B. A solução adota a teoria da matriz de transferência apresentada por Gibert (1988) e Pedroso (1994) apud Morais (2000). A cavidade apresentada na Figura 6.1 é entendida como a composição de duas cavidades 1D, aberto-fechada na direção x e aberto fechada na direção y. As frequências naturais do sistema seguem as Eq. (6.14) e (6.15), desenvolvidas no anexo A pela Eq. (A.37).

$$\omega_x = \frac{c \cdot \pi \cdot (i + 0.5)}{L} \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.15)$$

$$\omega_y = \frac{c \cdot \pi \cdot (j + 0.5)}{H} \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.16)$$

As frequências naturais para a cavidade 2D é determinada pela expressão:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} \quad (6.17)$$

A frequência da superfície livre é descrita pela Eq. (B.5) apresentada a seguir.

$$\omega_{sl}^2 = \frac{i \cdot \pi}{2L} \cdot g \cdot \tanh\left(\frac{i \cdot \pi \cdot H}{2L}\right) \quad (6.18)$$

Os resultados obtidos para as frequências analíticas da cavidade e da superfície livre estão apresentados nas Tabelas 6.6 e 6.7.

Tabela 6.6 – Frequências naturais do fluido desacoplada – modos cavidade

Modo	Frequência (rad/s)	Modo	Frequência (rad/s)
1	2367.9	6	3502.7
2	2459.9	7	3864.4
3	2634.3	8	4247.6
4	2876.1	9	4647.1
5	3169.9	10	5058.7

Tabela 6.7 – Frequências naturais do fluido desacoplada – modos superfície livre

Modo	Frequência (rad/s)
1	0.49
2	1.42
3	2.25
4	2.94
5	3.53

- **Solução Numérica**

Para solução do fluido adotou-se elemento isoparamétrico de 4 nós, o mesmo utilizado para a estrutura, com um grau de liberdade por nó, representando a pressão no determinado ponto.

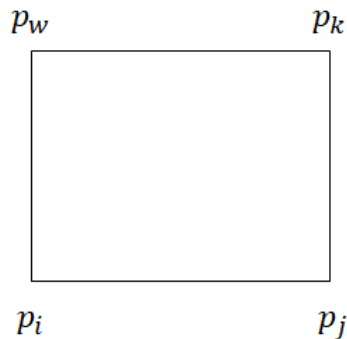


Figura 6.6 – Graus de liberdade do elemento

Para iniciar a solução a Tabela 6.8 define os elementos do domínio fluido e suas respectivas conectividades.

Tabela 6.8 – Síntese das coordenadas dos nós de um elemento e suas conectividades

Elemento	Nó i	Nó j	Nó k	Nó w
1	1	2	5	4
2	2	3	6	5
3	4	5	8	7
4	5	6	9	5

No item 4.1.1 apresenta-se as equações usadas para obtenção das matrizes relativas ao domínio fluido. Semelhante ao que foi realizado para estrutura monta-se as equações elementares para matriz de rigidez, massa. Seguindo as Eq. (4.49) e (4.52) monta-se as equações elementares. Em seguida de posse das conectividades é realizada a montagem das matrizes globais referente ao fluido.

$$[Kf]_{elem} = \begin{bmatrix} 3.37 \\ 1.63 & 3.37 & sim \\ -1.68 & -3.31 & 3.37 \\ -3.32 & -1.68 & 1.63 & 3.37 \end{bmatrix}_{[4 \times 4]} \quad (6.19)$$

$$[Kf] = \begin{bmatrix} 3.36 \\ 1.63 & 6.73 \\ 0 & 1.63 & 3.36 & & & & & & & sim \\ -3.31 & -1.68 & 0 & 6.73 & & & & & & \\ -1.68 & -6.63 & -1.68 & 3.26 & 13.46 & & & & & \\ 0 & -1.68 & -3.31 & 0 & 3.26 & 6.73 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -3.31 & -1.68 & 0 & 3.36 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1.68 & -6.63 & -1.68 & 1.63 & 6.73 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.68 & -3.31 & 0 & 6 & 3.36 & \end{bmatrix}_{[8 \times 8]} \quad (6.20)$$

Da mesma forma procede-se a montagem da matriz de massa do elemento.

$$[Mf]_{elem} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 0.12 & & & \\ 0.06 & 0.12 & sim & \\ 0.03 & 0.06 & 0.12 & \\ 0.06 & 0.03 & 0.06 & 0.12 \end{bmatrix}_{[4x4]} \quad (6.21)$$

$$[Mf] = 10^{-6} \begin{bmatrix} 0.12 & & & & & & & \\ 0.06 & 0.25 & & & & & & sim \\ 0 & 0.06 & 0.12 & & & & & \\ 0.06 & 0.03 & 0 & 0.25 & & & & \\ 0.03 & 0.12 & 0.03 & 0.12 & 0.49 & & & \\ 0 & 0.03 & 0.06 & 0 & 0.12 & 0.25 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0.06 & 0.03 & 0 & 0.12 & \\ 0 & 0 & 0 & 0.03 & 0.12 & 0.03 & 0.06 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.03 & 0.06 & 0 & 0.06 & 0.12 \end{bmatrix}_{[8x8]} \quad (6.22)$$

Para a condição de contorno de superfície livre usou-se elemento unidimensional de um grau de liberdade por nó cuja matriz foi calculada segundo a Eq. (4.62).

$$[Sl]_{elem} = \begin{bmatrix} 0.17 & 0.09 \\ 0.09 & 0.17 \end{bmatrix}_{[2x2]} \quad (6.23)$$

De posse das conectividades relacionadas ao domínio do fluido determina-se a matriz global referente a superfície livre.

$$[Sl] = \begin{bmatrix} 0.17 & 0.09 & 0 \\ 0.09 & 0.34 & 0.09 \\ & 0.09 & 0.17 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

Em seguida acrescenta-se os elementos de superfície livre adicionando-os a matriz global de massa.

$$[Mf + SL] = 10^{-7} \begin{bmatrix} 0.12 & & & & & & & & \\ 0.06 & 0.25 & & & & & & & sim \\ 0 & 0.06 & 0.12 & & & & & & \\ 0.06 & 0.03 & 0 & 0.25 & & & & & \\ 0.03 & 0.12 & 0.03 & 0.12 & 0.49 & & & & \\ 0 & 0.03 & 0.06 & 0 & 0.12 & 0.25 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0.06 & 0.03 & 0 & 169894 & 84947 & \\ 0 & 0 & 0 & 0.03 & 0.12 & 0.039 & 84947 & 339789 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.03 & 0.06 & 0 & 84947 & 169894 \end{bmatrix}_{[8x8]} \quad (6.25)$$

Com a determinação as matrizes globais de massa e de rigidez da estrutura realiza-se a montagem da equação de movimento da estrutura substituindo as matrizes na Eq. (4.84) obtendo:

$$10^{-7} \begin{bmatrix} 0.12 & & & & & & & & \\ 0.06 & 0.25 & & & & & & & \\ 0 & 0.06 & 0.12 & & & & & & \\ 0.06 & 0.03 & 0 & 0.25 & & & & & \\ 0.03 & 0.12 & 0.03 & 0.12 & 0.49 & & & & \\ 0 & 0.03 & 0.06 & 0 & 0.12 & 0.25 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0.06 & 0.03 & 0 & 169894 & 84947 & \\ 0 & 0 & 0 & 0.03 & 0.12 & 0.039 & 84947 & 339789 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.03 & 0.06 & 0 & 84947 & 169894 \end{bmatrix} \text{sim} \begin{Bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \\ \ddot{p}_3 \\ \ddot{p}_4 \\ \ddot{p}_5 \\ \ddot{p}_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \end{Bmatrix} \quad (6.26)$$

$$+ 10^{-7} \begin{bmatrix} 3.36 & & & & & & & & \\ 1.63 & 6.73 & & & & & & & \\ 0 & 1.63 & 3.36 & & & & & & \\ -3.31 & -1.68 & 0 & 6.73 & & & & & \\ -1.68 & -6.63 & -1.68 & 3.26 & 13.46 & & & & \\ 0 & -1.68 & -3.31 & 0 & 3.26 & 6.73 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -3.31 & -1.68 & 0 & 3.36 & & \\ 0 & 0 & 0 & -1.68 & -6.63 & -1.68 & 1.63 & 6.73 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.68 & -3.31 & 0 & 6 & 3.36 \end{bmatrix} \text{sim} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \end{Bmatrix} = 0$$

Considerando que a pressão no fluido varia harmonicamente no tempo conforme Eq. (4.94) e substituindo na equação do movimento da estrutura tem-se um problema de valores próprios conforme apresentado na Eq. (4.95).

$$\left(-10^{-7} \begin{bmatrix} 0.12 & & & & & & & & \\ 0.06 & 0.25 & & & & & & & \\ 0 & 0.06 & 0.12 & & & & & & \\ 0.06 & 0.03 & 0 & 0.25 & & & & & \\ 0.03 & 0.12 & 0.03 & 0.12 & 0.49 & & & & \\ 0 & 0.03 & 0.06 & 0 & 0.12 & 0.25 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0.06 & 0.03 & 0 & 169894 & 84947 & \\ 0 & 0 & 0 & 0.03 & 0.12 & 0.039 & 84947 & 339789 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.03 & 0.06 & 0 & 84947 & 169894 \end{bmatrix} \omega^2 \right) \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (6.27)$$

Resolvendo a equação apresentada tem-se que os autovalores representam as frequências naturais do fluido e os autovetores representam as deformadas modais do fluido. As frequências naturais do fluido estão apresentadas na Tabela 6.9. O fluido possui 9 graus de liberdade, ao aplicar as condições de contorno restringindo 3 graus de liberdade obtém-se 6 frequências naturais para o sistema desacoplado sendo que as duas primeiras representam as frequências de superfícies livre caracterizada por baixas frequências.

Tabela 6.9 – Frequências naturais do fluido desacoplado

Modo	Frequência (rad/s)	Modo	Frequência (rad/s)
1	0.51	4	2560.4
2	1.68	5	8447.4
3	2429.2	6	8486.1

Conforme descrita na estrutura, a solução apresentada possui uma malha com poucos elementos, assim deve-se realizar um estudo de convergência das malhas. Para o estudo de convergência variou-se o número de nós do fluido comparando os resultados do código computacional do presente trabalho com os resultados obtidos no programa ANSYS Student 19.0. Para comparação determinou-se o erro relativo dado pela Eq. (6.13).

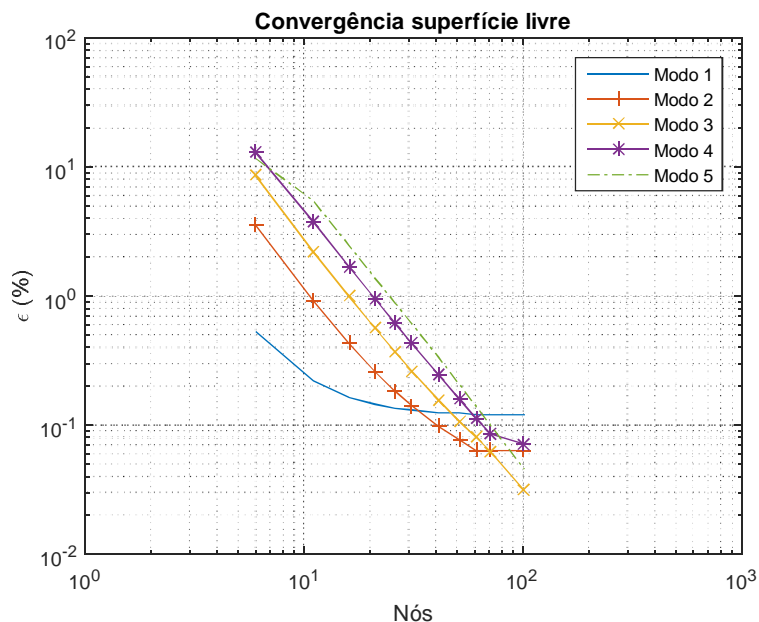


Figura 6.7 – Estudo de convergência de malha (erro relativo %) entre os resultados de frequência natural de superfície livre entre o presente estudo e ANSYS em função do número de nós

Observando o gráfico apresentado na Figura 6.8 adotou-se uma malha de 3276 nós cujo erro relativo está na ordem de 1% comparado com o ANSYS Student 19.0. Os modos apresentados nas Tabelas 6.10 e 6.11 representam os modos de superfície livre e cavidade do fluido.

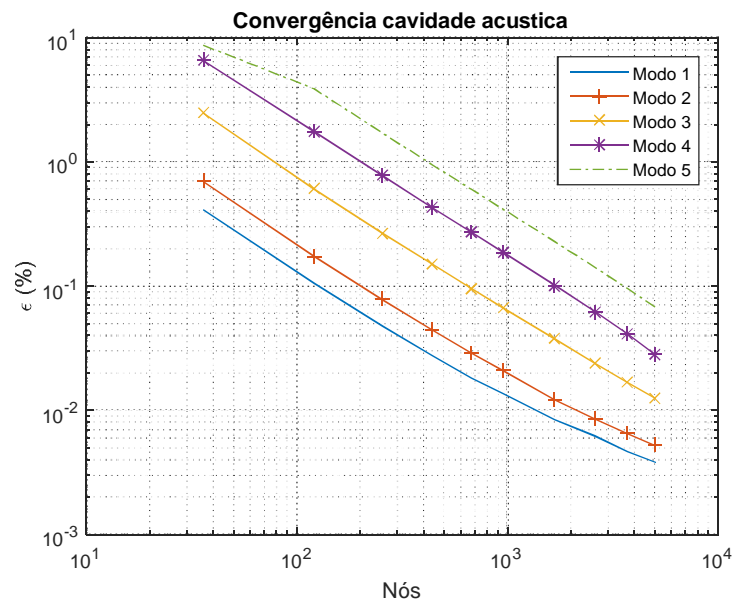


Figura 6.8 – Estudo de convergência de malha (erro relativo %) entre os resultados de frequência natural da cavidade acústica entre o presente estudo e ANSYS em função do número de nós

Tabela 6.10 – Comparativo frequências numéricas fluido desacoplado - superfície livre

Modos de vibração	Frequências Naturais Fluido Desacoplado (rad/s)				
	Numérico Presente Estudo	Analítico	Erro (%)	Ansys	Erro (%)
1	0.48	0.49	2.04	0.49	2.03
2	1.43	1.42	-0.71	1.42	-0.35
3	2.26	2.25	-0.44	2.25	-0.53
4	2.95	2.94	-0.34	2.94	-0.39
5	3.52	3.53	0.28	3.51	-0.28

Tabela 6.11 – Comparativo frequências numéricas fluido desacoplado – cavidade acústica

Modos de vibração	Frequências Naturais Fluido Desacoplado (rad/s)				
	Numérico Presente Estudo	Analítico	Erro (%)	Ansys	Erro (%)
1	2368.7	2367.9	-0.03	2367.9	-0.03
2	2460.3	2459.9	-0.02	2459.9	-0.02
3	2634.7	2634.3	-0.02	2634.3	-0.02
4	2876.7	2876.1	-0.02	2876.2	-0.03
5	3179.9	3169.9	-0.31	3170.1	-0.32

A Figura 6.9-6.10 apresenta os cinco primeiros modos de vibração do fluido para condição de superfície livre e para cavidade acústica comparando as formas modais obtidas no presente estudo com as formas modais obtidas no ANSYS 19.0 Student.

Observa-se que as frequências naturais obtidas e as formas modais apresentam uma boa concordância em relação aos resultados obtidos pelo ANSYS Student 19.0 apresentando erros inferiores a 0.4 % para a cavidade acústica e inferior a 2% para a superfície livre.

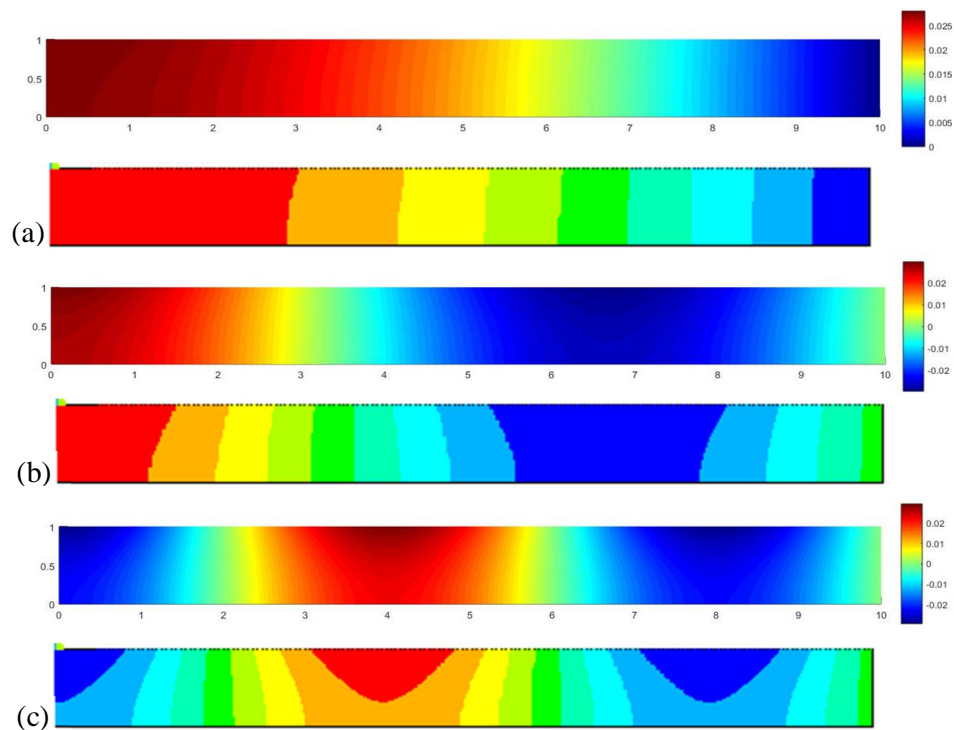


Figura 6.9– Comparação das formas modais de superfície livre entre o presente estudo e o ANSYS Student 19.0, respectivamente. (a) 1^o modo (b) 2^o modo (c) 3^o modo

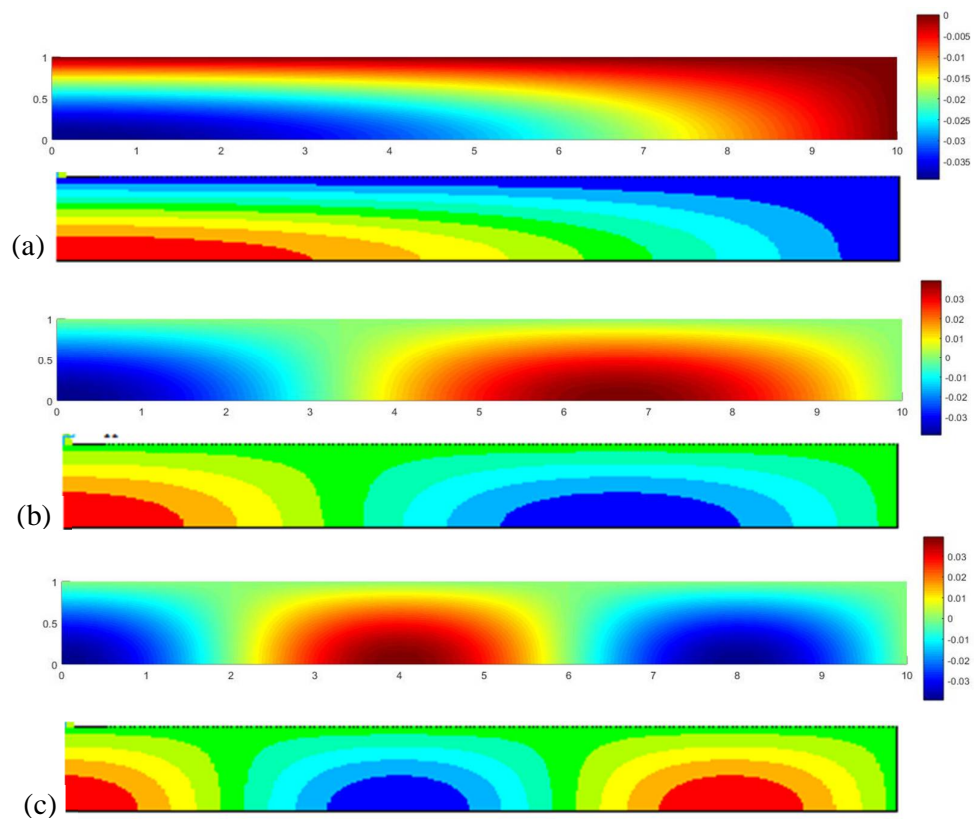


Figura 6.10– Comparação das formas modais da cavidade acústica entre o presente estudo e o ANSYS Student 19.0, respectivamente. (a) 1^o modo (b) 2^o modo (c) 3^o modo

6.1.3 Solução Acoplada Fluido - Estrutura

- **Solução Analítica**

Para análise do acoplamento fluido estrutura do caso 1 são utilizadas as soluções analíticas apresentadas no anexo A. Para a solução, utiliza-se a teoria da matriz de transferência apresentado na análise do fluido desacoplado. A cavidade apresentada na Figura 6.1 é entendida como a composição de duas cavidades 1D, aberto-pistão na direção x e aberto fechada na direção y. As frequências naturais do sistema seguem as Eq. (A.15) e Eq. (A.17). Para determinar a frequência natural da direção x deve-se resolver a equação transcendental apresentada na Eq. (6.27).

$$\left[K \frac{1}{\rho c^2 S} - \omega_x^2 \frac{1}{\rho c^2 S} - \omega_x \rho c \tan \frac{\omega_x L}{c} \frac{1}{\rho c^2 S} \right] X_s = 0 \quad (6.28)$$

$$\omega_y = \frac{c \cdot \pi \cdot (j + 0.5)}{H} \quad (6.29)$$

As frequências naturais para a cavidade 2D é determinada pela expressão:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} \quad (6.30)$$

Os resultados obtidos para as frequências analíticas da cavidade e da superfície livre estão apresentados na Tabela 6.12 para $K = 2.4 \cdot 10^8$.N/m

Tabela 6.12 – Frequências naturais acoplamento fluido estrutura – modos cavidade

Modo	Frequência (rad/s)	Modo	Frequência (rad/s)
1	438.1	4	2514.5
2	2356.2	5	2702.3
3	2396.5	6	2948.9

A solução analítica para a condição de superfície livre é desacoplada do sistema fluido estrutura, sendo determinada pela mesma equação apresentada na análise do fluido desacoplado. Dessa forma os resultados para superfície livre não foram apresentados neste item.

- **Solução Numérica**

Após a montagem das matrizes desacopladas da estrutura, da cavidade procede-se a montagem do problema acoplado apresentado na Eq. 4.95. Para montar o problema acoplado é necessário calcular a matriz de acoplamento fluido estrutura dada pela Eq. (4.61).

$$[FS]_{elem} = \begin{bmatrix} 1.667 & 0.833 \\ 0.833 & 1.667 \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

As pressões nos pontos 1, 4 e 7 do fluido devem se acoplar aos pontos 2, 4 e 6 relacionados aos movimentos dos nós da estrutura. Seguindo a Figura 4.5 o ângulo usado para os elementos na interface é de 90°. Os demais elementos da matriz são nulos.

$$[FS]_{elem} = \begin{bmatrix} 1.667 & 0.833 \\ 0.833 & 1.667 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

$$[FS] = \begin{matrix} & p_1 & p_4 & p_7 \\ \begin{bmatrix} 1.667 & 0.833 & 0 \\ 0 & 3.33 & 0 \\ 0 & 0.8337 & 1.667 \end{bmatrix} & u_2 \\ & & & u_4 \\ & & & u_6 \end{matrix} \quad (6.33)$$

$$[FS] = \begin{matrix} & p_1 & p_4 & p_7 \\ \begin{bmatrix} 1.667 & 0.833 & 0 \\ 0 & 3.33 & 0 \\ 0 & 0.8337 & 1.667 \end{bmatrix} & u_3 \\ & & & u_5 \\ & & & u_7 \end{matrix}$$

$$[FS] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.166 & 0 & 0 & 0.083 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.166 & 0 & 0 & 0.083 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.083 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0.083 & 0 & 0 \\ 0.083 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0.083 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.083 & 0 & 0 & 0.166 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.083 & 0 & 0 & 0.166 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

O problema apresentado possui 12 graus de liberdade para a estrutura e 9 graus de liberdade para o fluido. Como a estrutura é engastada na parte inferior que possui dois nós tem-se 4 graus de liberdade restritos. No fluido a extremidade possui a condição de semi-infinita onde adotou-se pressão nula para representar a condição eliminando 3 graus de liberdade. Assim o problema possui 14 graus de liberdade.

Ao substituir as equações de massa, rigidez e as condições de contorno na Eq. (4.99) tem-se a equação matricial onde as pressões no fluido e os deslocamentos da estrutura variam harmonicamente no tempo com a mesma frequência circular.

Ao resolver a equação para as matrizes apresentadas no problema tem-se as frequências naturais do sistema acoplado. Como o problema possui 14 graus de liberdades obtém-se a mesma quantidade de frequências apresentadas na Tabela 6.13 a seguir.

Tabela 6.13 – Frequências naturais acopladas

Modo	Frequência (rad/s)	Modo	Frequência (rad/s)
1	0.51	8	8889.9
2	1.68	9	11399.4
3	1597.0	10	29784.6
4	2450.3	11	112812.5
5	2627.1	12	116167.4
6	8160.6	13	189066.0
7	8460.2	14	189792.1

Para o estudo apresentado observa-se que os modos 1 e 2 são modos relacionados a condição de superfície livre cuja característica é apresentar baixas frequências normalmente inferiores a 10 rad/s. Ressalta-se também que coincide com o número de nós adotados na superfície. Os modos restantes são modos governados pela cavidade, estrutura ou mistos. Essa classificação deve ser realizada comparando as frequências e as formas modais do sistema.

Para analisar o acoplamento fluido estrutura adotou-se a mesma malha convergida para a estrutura e para o fluido desacoplados cujos resultados encontram-se nas Tabelas 6.14 e 6.15.

Tabela 6.14 – Comparativo frequências numéricas acoplado - superfície livre

Modos de vibração	Frequências Naturais Fluido acoplado (rad/s)				
	Numérico Presente Estudo	Analítico	Erro (%)	Ansys	Erro (%)
1	0.48	0.49	2.04	0.49	2.03
2	1.43	1.42	-0.71	1.42	-0.35
3	2.26	2.25	-0.44	2.25	-0.53
4	2.95	2.94	-0.34	2.94	-0.39
5	3.52	3.53	0.28	3.51	-0.28

Tabela 6.15 – Comparativo frequências numéricas fluido acoplado – cavidade acústica

Modos de vibração	Frequências Naturais Fluido acoplado (rad/s)				
	Numérico Presente Estudo	Analítico	Erro (%)	Ansys	Erro (%)
1	478.2	485.1	1.42	459.3	-4.11
2	2258.6	2356.2	4.14	2270.3	0.52
3	2418.7	2396.5	-0.93	2419.2	0.02
4	2572.2	2514.5	-2.29	2572.3	0.01
5	2782.5	2702.3	-2.97	2780.2	-0.08

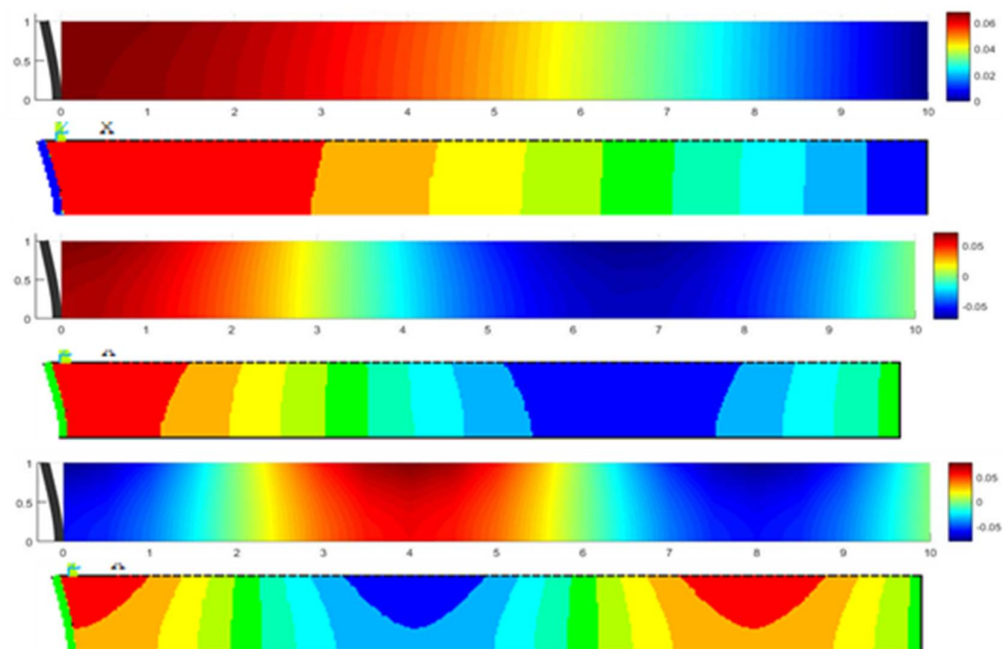


Figura 6.11– Comparativo das Formas modais superfície livre acoplada entre o presente estudo e o ANSYS Student 19.0 respectivamente. (a) 1º modo (b) 2º modo (c) 3º modo

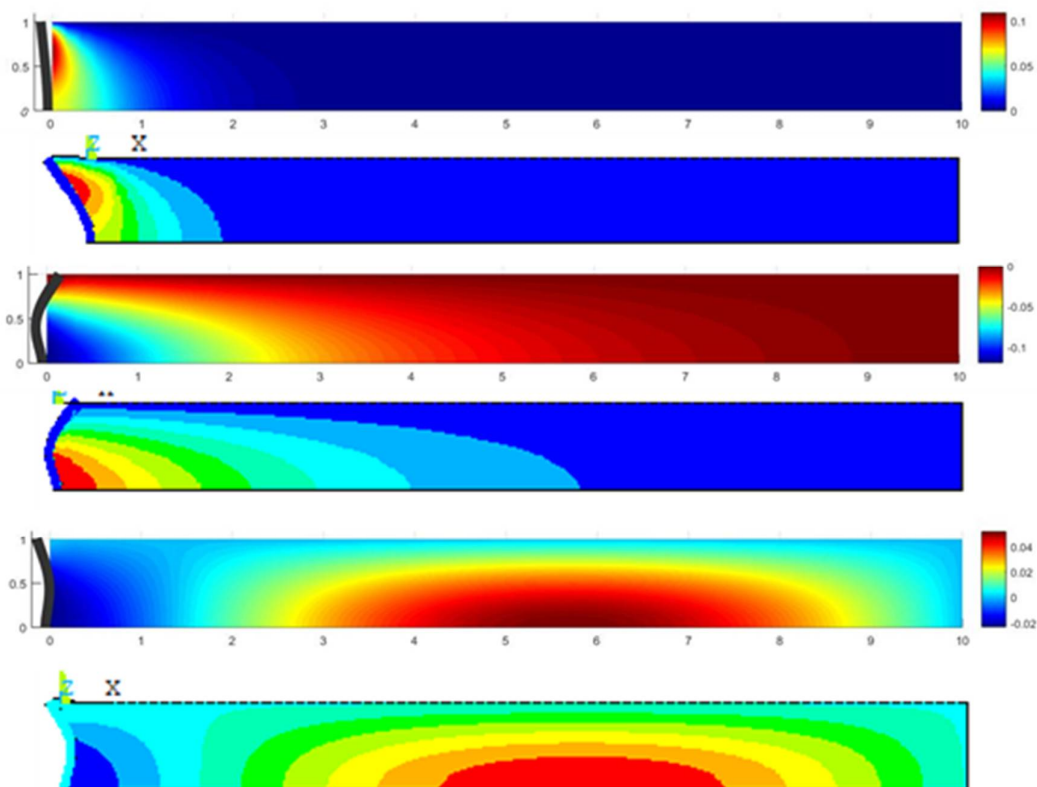


Figura 6.12– Comparativo das Formas modais da cavidade acústica acoplada entre o presente estudo e o ANSYS Student 19.0 respectivamente. (a) 1º modo (b) 2º modo (c) 3º modo

Comparando visualmente os resultados obtidos, nota-se que os primeiros modos acústicos acoplados sofrem pouca alteração apresentando resultados praticamente iguais aos modos desacoplados, com exceção do primeiro modo de massa adicional. Os resultados obtidos para as frequências naturais e formas modais apresentaram concordância com os resultados analíticos e numéricos obtidos no ANSYS Student 19.0, demonstrando que o código computacional criado no presente estudo possibilita uma análise eficiente para o caso estudado.

6.2 SLOSHING EM TANQUE RETANGULAR

Este caso trata-se de um tanque retangular em formato U com paredes laterais flexíveis, fundo rígido e o contorno superior do fluido possui a condição de superfície livre (Figura 6.13). Este caso diferencia do anterior pelas condições de contorno adotadas, fechado-aberto na direção y , fechado-fechado onde acoplamento ocorre com as duas paredes laterais flexíveis apresentando comportamento similar ao de uma cavidade com dois pistões. Inicialmente é realizado o estudo analítico do problema e em seguida o estudo numérico usando o ANSYS Student 19.0 e o programa desenvolvido no presente estudo comparando os resultados obtidos para fins de validação do programa. Além dos resultados apresentados compara-se também com os resultados obtidos por Burgos (2017). Finalmente aplica-se uma força harmônica em pontos da estrutura determina-se a função de resposta em frequência. Através de uma varredura de frequência.

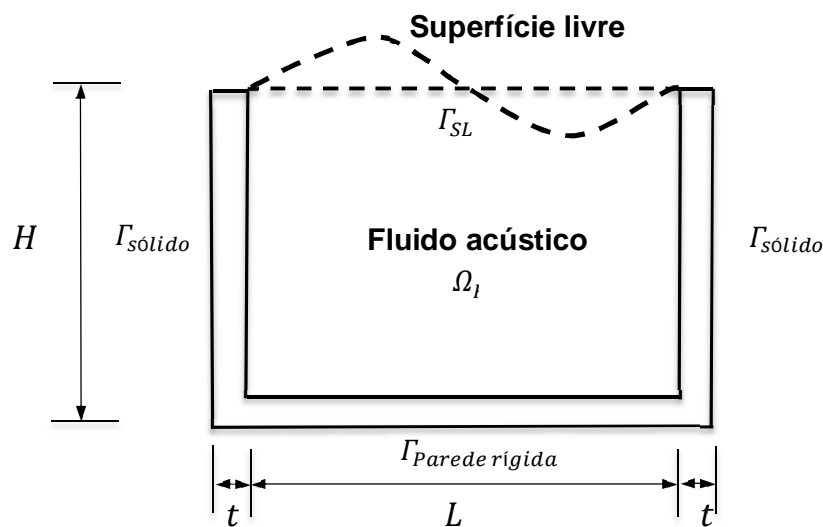


Figura 6.13 – Representação esquemática do modelo acoplado estrutura tanque retangular com superfície livre.

Para a solução do problema adotou-se dados apresentados na Tabela 6.16.

Tabela 6.16 – Características dos materiais

Domínio Sólido		Domínio Fluido	
H (m)	10	L (m)	10
t (m)	1	H (m)	10
Material	Aço	Densidade (kg/m³)	1000
Densidade (kg/m³)	7800	Velocidade do som no fluido (m/s)	1500
Módulo de elasticidade (GPa)	211		
Coefficiente de Poisson	0.3		
Estado plano	Tensão		

6.2.1 Solução Desacoplada Sólido

- **Solução Analítica**

Para análise do caso 2 considerou-se que os comportamentos das paredes flexíveis da cavidade podem ser assimilados a duas vigas engastadas – livre onde a frequência analítica pode ser obtida considerando as deformações de flexão e cisalhamento conforme descrito anteriormente nas Eq. (6.1) a (6.6). Com base nas equações citadas os modos flexionais e axiais para o caso em estudo estão apresentados na Tabela 6.17.

Tabela 6.17 – Frequências naturais da estrutura desacoplada

Frequência da estrutura (rad/s)		
Modo	$\omega_{flexão}$	ω_{Normal}
1	43.3	740.9
2	266.8	2222.8
3	718.5	3704.7
4	1336.1	5186.6
5	2075.3	6668.5

- **Solução Numérica**

Para a modelagem da estrutura adotou-se estado plano de tensões. A malha foi gerada usando o software Gmsh 3.0.5 conforme descrito no capítulo anterior. Para compatibilizar as malhas a estrutura foi dividida em blocos distintos com o mesmo número de elementos. Essa abordagem implicou em blocos com malhas distintas dificultando o controle das dimensões das malhas gerando um grande esforço computacional devido a diferentes refinamentos da malha. Em seguida para validação dos resultados modelou-se o sistema no ANSYS Student 19.0. A Figura 6.14 apresenta um exemplo das malhas da estrutura desacoplada geradas no Gmsh e no ANSYS.

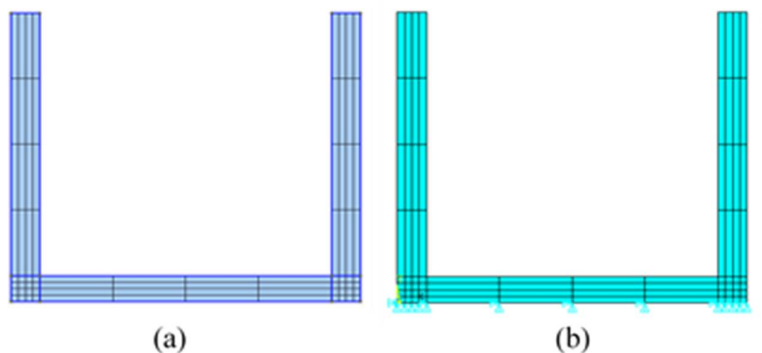


Figura 6.14 – Modelo de Malhas de Elementos finitos gerada nos softwares: (a) Gmsh (b) Ansys

O estudo iniciou-se realizando um estudo da convergência da malha. A Figura 6.15 apresenta a convergência dos valores das frequências numéricas obtidas para os cinco primeiros modos da estrutura. O erro relativo foi calculado tomando como base o valor de referência obtido através da modelagem no ANSYS 19.0 para uma malha convergida.

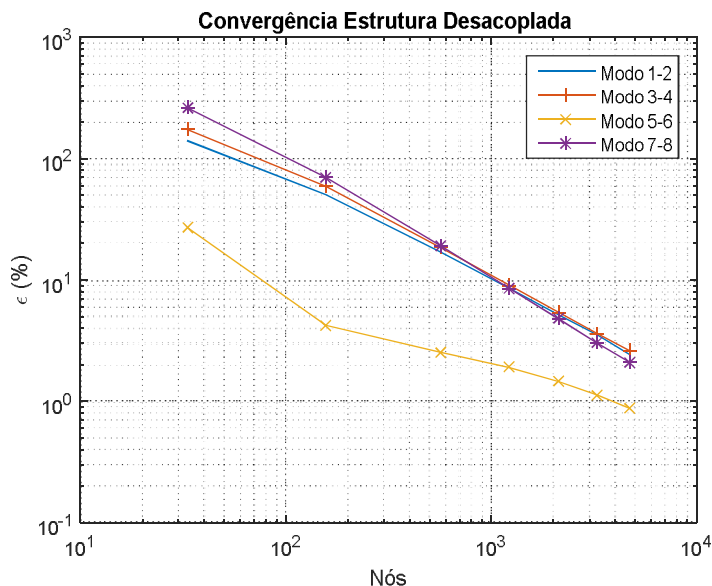


Figura 6.15 – Estudo de convergência da malha (erro relativo - %) entre os resultados de frequência natural da estrutura entre o presente estudo e ANSYS Student 19.0.

Observando o gráfico apresentado adotou-se uma malha de 3276 nós cujo erro relativo está na ordem de 2% comparado com o ANSYS Student 19.0. A Tabela 6.18 apresenta uma comparação entre as frequências obtidas no presente estudo, os resultados analíticos, os resultados numéricos determinados no ANSYS Student 19.0 e no trabalho de Burgos (2017).

Tabela 6.18 – Comparativo frequências numéricas da estrutura desacoplada

Modos de vibração	Frequências Naturais Estrutura desacoplada (rad/s)						
	Numérico Presente Estudo	Analítico	Erro (%)	Ansys	Erro (%)	Burgos (2017)	Erro (%)
1	48.22	52.33	-7.9	47.40	1.7	48.99	-1.6
2	48.22	52.33	-7.9	47.40	1.7	49.05	-1.7
3	291.50	321.21	-9.2	286.50	1.7	295.36	-1.3
4	291.50	321.21	-9.2	286.50	1.7	295.36	-1.4
5*	736.81	815.00	-9.6	737.70	-0.1	741.86	-0.7
6	736.81	815.00	-9.6	737.70	-0.1	742.45	-0.8
7	785.80	859.10	-8.5	773.40	1.6	792.01	-0.8

* Modo axial

Ao comparar os resultados do presente estudo com os resultados obtidos no ANSYS Student 19.0 e Burgos (2017) observa-se que o erro relativo máximo é de 1.7 % apresentando uma boa concordância entre os resultados. O erro relativo máximo ao comparar com os resultados analíticos foi de -9.6%. Tal discrepância deve-se ao nível de refinamento da malha de elementos finitos. As formas modais no presente estudo são semelhantes as formas obtidas no ANSYS Student 19.0 apresentadas na Figura 6.16.

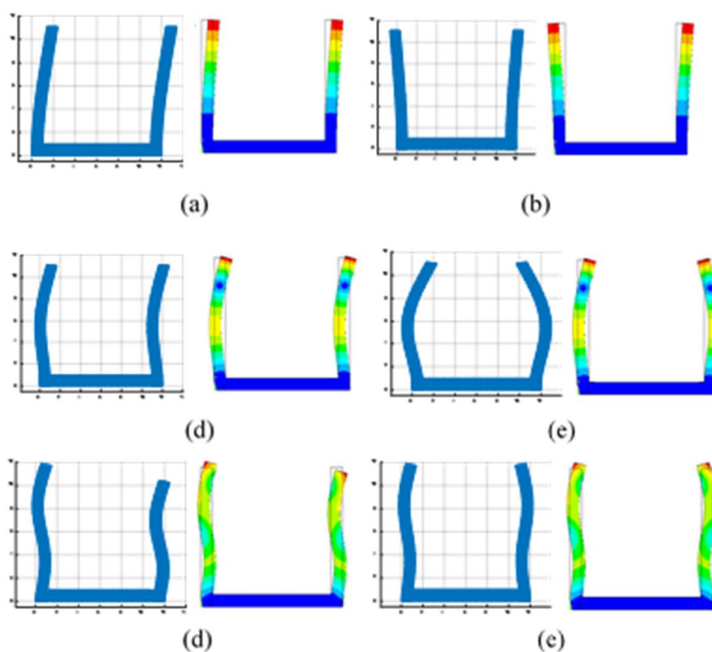


Figura 6.16– Comparação das formas modais da estrutura desacoplada entre o presente estudo e o ANSYS Student 19.0. (a) 1º modo (b) 2º modo (c) 3º modo (d) 4º modo (e) 5º modo (f) 6º modo

Observa-se na Tabela 6.18 que para cada caso há uma repetição no valor numérico da frequência natural, tal fato é compreendido ao observar as formas modais, onde a estrutura se

comporta para cada frequência, em fase e em oposição de fase. Observa-se também que o 5º e 6º modos apresentam uma combinação entre deformação axial e flexional.

6.2.2 Solução do Fluido Desacoplado

Conforme apresentado anteriormente é necessário para o estudo analisar a cavidade desacoplada da estrutura. Para tanto modela-se a cavidade como um reservatório com contorno rígido conforme apresentado na Figura 6.17.

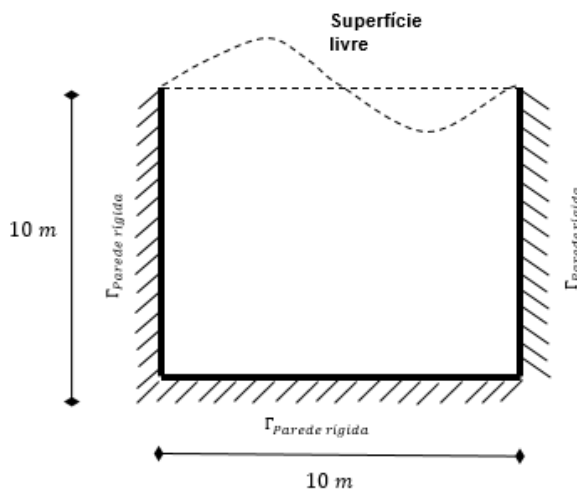


Figura 6.17 – Representação esquemática do modelo para fluido desacoplado.

- **Solução Analítica**

Para análise do fluido desacoplado do caso 2 são utilizadas as soluções analíticas apresentadas nos anexos A e B. A solução adota a teoria da matriz de transferência apresentado. A cavidade apresentada na Figura 6.13 é entendida como a composição de duas cavidades 1D, fechado-fechada e na direção x e aberto fechada na direção y descritas pelas Eq. (6.34) e (6.35). As frequências naturais para a cavidade 2D são determinadas pela Eq. (6.16).

$$\omega_x = \frac{c \cdot \pi \cdot (i + 0.5)}{L} \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.35)$$

$$\omega_y = \frac{c \cdot \pi \cdot j}{H} \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.36)$$

A frequência da superfície livre é descrita pela Eq. (6.36), cuja demonstração está apresentada no anexo B.5.

$$\omega_{sl}^2 = \frac{i \cdot \pi}{L} \cdot g \cdot \tanh\left(\frac{i \cdot \pi \cdot H}{L}\right) \quad (6.37)$$

Os resultados obtidos para as frequências analíticas da cavidade e da superfície livre estão apresentados nas Tabelas 6.19 e 6.20.

Tabela 6.19 – Frequências naturais do fluido desacoplada - modos cavidade

Modo	Frequência (rad/s)	Modo	Frequência (rad/s)
1	233.6	6	1178.1
2	526.8	7	1267.1
3	706.9	8	1419.4
4	971.5	9	1502.9
5	1170.6	10	1568.1

Tabela 6.20 – Frequências naturais do fluido desacoplada - modos superfície livre

Modo	Frequência (rad/s)
1	1.75
2	2.48
3	3.04
4	3.51
5	3.92

• Solução Numérica

Para validação os resultados obtidos pelo código computacional foram comparados com resultados analítico apresentado por Moraes (2000), numérico modelado no software ANSYS. As malhas criadas no Gmsh para o código do presente trabalho e no software ANSYS estão apresentadas na Figura 6.18.

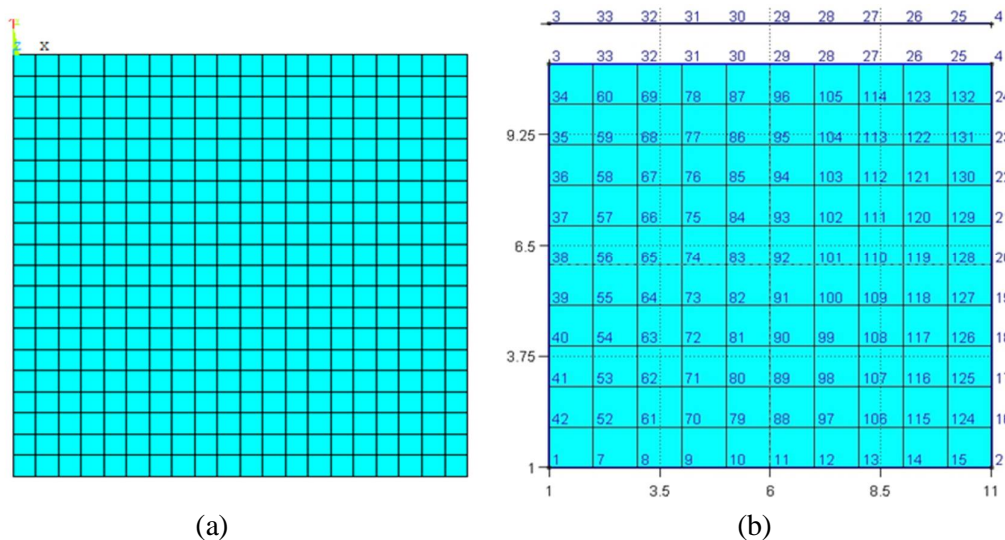


Figura 6.18– Modelo de Malhas Elementos finitos gerada nos softwares: (a) ANSYS(b) Gmsh

Conforme apresentado no item anterior para verificar a acurácia da formulação numérica realizou-se um estudo de convergência da malha de elementos finitos para a cavidade acústica avaliando os cinco primeiros valores numéricos com relação a sua respectiva frequência analítica. As Figuras 6.19 e 6.20 apresentam o estudo de convergência das malhas

1D adotada para o cálculo do efeito da superfície livre e da malha 2D adotada para o cálculo da cavidade acústica.

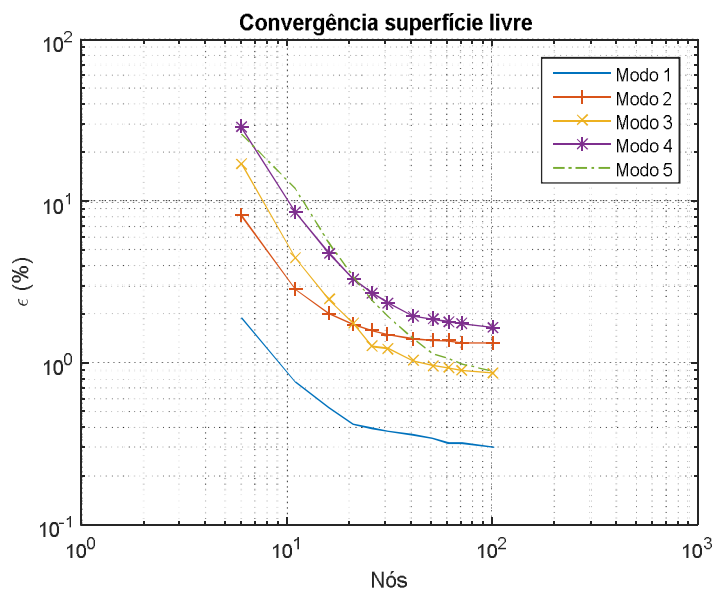


Figura 6.19 – Estudo de convergência de malha (erro relativo %) entre os resultados de frequência natural de superfície livre entre o presente estudo e ANSYS em função do número de nós

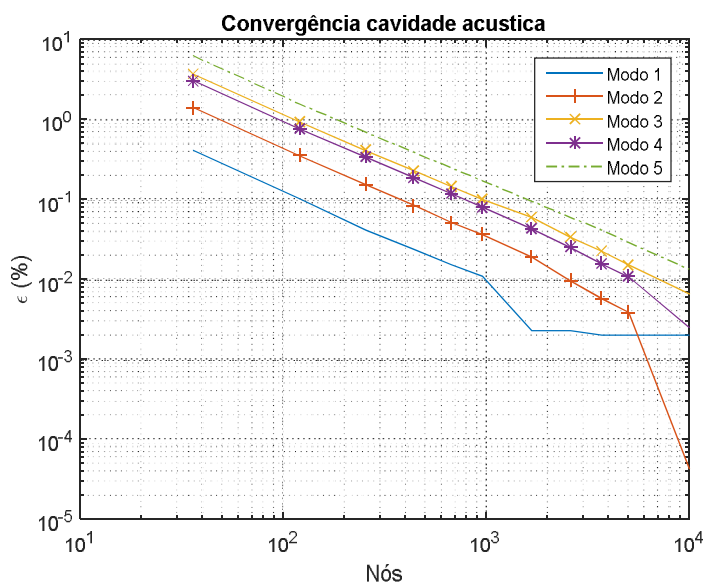


Figura 6.20 – Estudo de convergência de malha (erro relativo %) entre os resultados de frequência natural da cavidade acústica entre o presente estudo e ANSYS em função do número de nós

Para os dois casos observou uma boa concordância entre as frequências numéricas do presente estudo e ANSYS Student 19.0. Observa-se para a superfície livre uma convergência apresentando um erro relativo de aproximadamente 2% para uma malha de 40 nós. Para a cavidade observa-se uma convergência mais rápida em relação aos modos de superfície livre, apresentando erro relativo na ordem de 1% para uma malha de aproximadamente 200 nós.

Assim adotou-se para o presente trabalho uma malha de 40 x 40 nós, que refere-se a 40 nós na superfície livre e 1600 nós para a cavidade.

Após a análise da convergência realizou a comparação para as frequências naturais e os modos de vibração para a superfície livre e para a cavidade. Os resultados obtidos foram comparados com resultado analítico e com resultados numéricos obtidos no ANSYS Student 19.0 e por Burgos (2017).

Tabela 6.21 – Comparativo frequências numéricas do fluido desacoplada superfície livre

Modos de vibração Superfície livre	Frequências Naturais Fluido desacoplado (rad/s)				
	Numérico Presente Estudo	Analítico	Erro (%)	Ansys	Erro (%)
1	1.75	1.75	0	1.75	0
2	2.48	2.48	0	2.45	1.2
3	3.04	3.04	0	3.01	1.0
4	3.52	3.51	0.3	3.45	2.0
5	3.94	3.92	0.5	3.89	1.3

Tabela 6.22 – Comparativo frequências numéricas do fluido desacoplada cavidade acústica

Modos de vibração Cavidade acústica	Frequências Naturais Fluido desacoplado (rad/s)						
	Numérico Presente Estudo	Analítico	Erro (%)	Ansys	Erro (%)	Burgos (2017)	Erro (%)
1	233.29	233.62	-0.1	233.29	0.00	235.62	-1.0
2	525.87	526.80	-0.2	525.84	0.01	527.00	-0.2
3	700.04	706.85	-1.0	699.88	0.02	707.12	-1.0
4	843.91	846.95	-0.4	843.77	0.02	850.18	-0.7
5	971.34	970.95	0.1	970.94	0.04	972.24	-0.1

Ao comparar os resultados do presente estudo com os resultados obtidos no ANSYS Student 19.0 e Burgos (2017) observa-se que o erro relativo máximo é de 10 % apresentando uma boa concordância entre os resultados. O erro relativo máximo ao comparar com os resultados analíticos foi de -1.0%, demonstrando que o método de matriz de transferência possui uma boa representação das frequências naturais do sistema. As formas modais no presente estudo são semelhantes as formas obtidas no ANSYS Student 19.0 apresentadas na Figura 6.21.

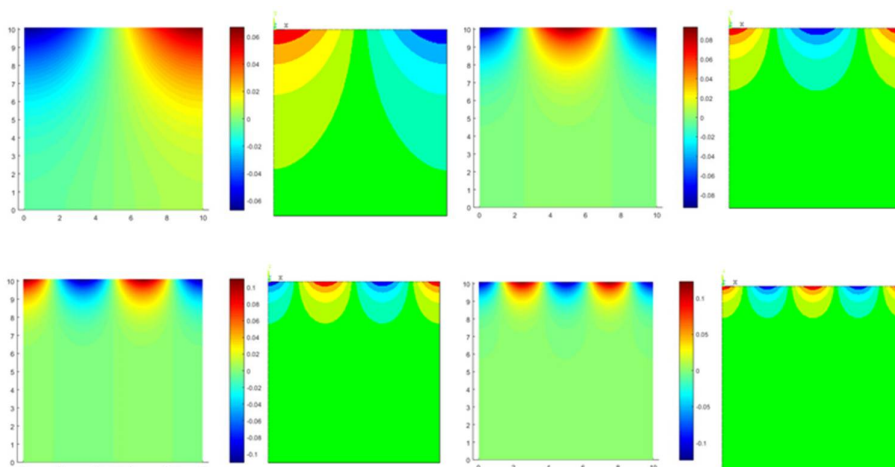


Figura 6.21– Comparativo das Formas modais superfície livre entre o presente estudo e o ANSYS Student 19.0 respectivamente. (a) 1º modo (b) 2º modo (c) 3º modo (d) 4º modo

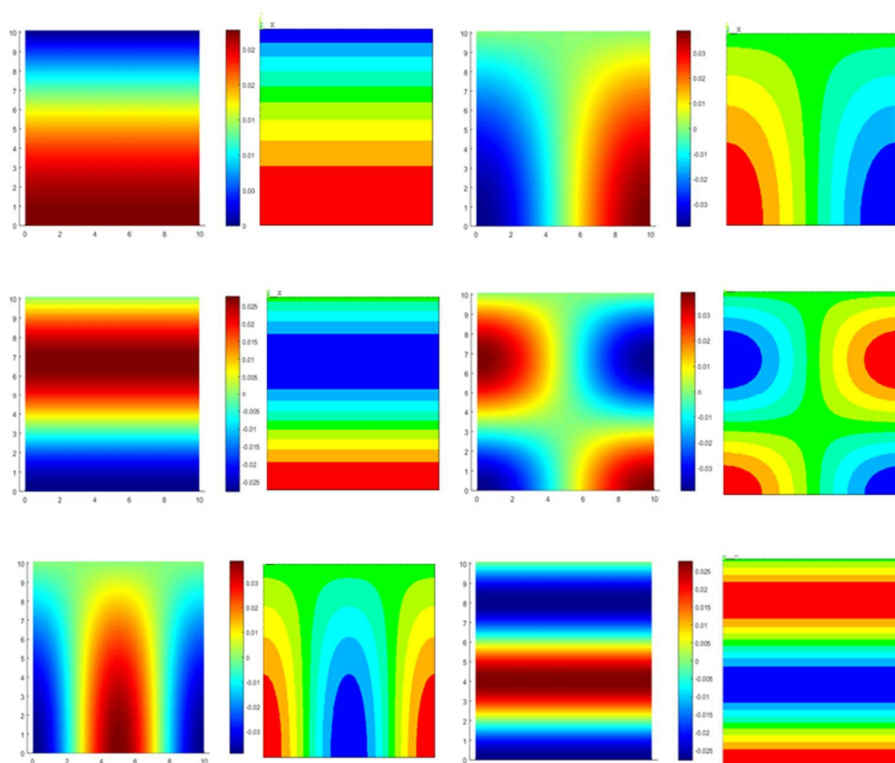


Figura 6.22– Comparativo das Formas modais cavidade acústica com superfície livre entre o presente estudo e ANSYS 19.0.(a) 1º modo (b) 2º modo (c) 3º modo (d) 4º modo (e) 5º modo (f) 6º modo Durante a análise dos resultados, observou-se discrepâncias nos modos de vibração da cavidade quadrada quando comparada com as formas modais obtidas no ANSYS Student 19.0. Este ocorreu devido a simetria da geometria e das condições de contorno em uma das direções causando uma instabilidade na solução. Esse problema foi contornado considerando o comprimento de um dos lados da cavidade quadrada um pouco maior eliminando a simetria e tornando o problema estável.

6.2.3 Solução Acoplada Fluido – Estrutura

- **Solução Analítica**

Para análise do acoplamento fluido estrutura do caso 2, são utilizadas as soluções analíticas apresentadas no anexo A. Para tanto utiliza-se a teoria da matriz de transferência apresentado na análise do fluido desacoplado. A cavidade apresentada na Figura 6.14 é aproximada como a composição de duas cavidades 1D, pistão-pistão na direção x e aberto fechada na direção y. As frequências naturais do sistema seguem as Eq. (A.15) e Eq. (A.17). Para determinar a frequência natural da direção x deve-se resolver a Eq. (6.37).

$$\left[\frac{\omega_x^2 L^2 m_e}{c^2} - \frac{\omega_x L}{c} \left(\cot \frac{\omega_x L}{c} \mp \operatorname{cosec} \frac{\omega_x L}{c} \right) \right] = K \frac{1}{\rho c^2 S} \quad (6.38)$$

$$\omega_y = \frac{c \cdot \pi \cdot (j + 0.5)}{H} \quad (6.39)$$

A Eq. (6.37) refere-se aos modos de domínio da cavidade que geram rigidez adicional ao sistema, permitindo o cálculo das frequências do problema acoplado em fase e em oposição de fase. Porém o primeiro modo de massa adicional deve ser calculado pela Eq. (6.39).

$$\omega_x = \sqrt{\frac{K}{m_e + \frac{m_f}{2}}} \quad (6.40)$$

As frequências naturais para a cavidade 2D é determinada pela expressão:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} \quad (6.41)$$

Os resultados obtidos para as frequências analíticas da cavidade e da superfície livre estão apresentados na Tabela 6.23 e 6.24 para $K = 1.5 \cdot 10^8$.N/m.

Tabela 6.23 – Frequências naturais acoplamento fluido estrutura – modos superfície livre

Modo	Frequência (rad/s)	Modo	Frequência (rad/s)
1	1.75	4	3.53
2	2.48	5	3.97
3	3.05	6	4.37

Tabela 6.24 – Frequências naturais acoplamento fluido estrutura – modos cavidade

Modo	Frequência (rad/s)	Modo	Frequência (rad/s)
1	43.5	5°	323.3
2	43.58	6	616.3
3	237.3	7°	731.6
4	316.0	8	734.8

- **Solução Numérica**

A Figura 6.23 representa um exemplo da malha adotada no presente trabalho e a malha usada no software ANSYS Student 19.0. Para analisar o acoplamento fluido estrutura adotou-se a mesma malha convergida para a estrutura e para o fluido desacoplados cujos resultados encontram-se nas Tabelas 6.25 e 6.26.

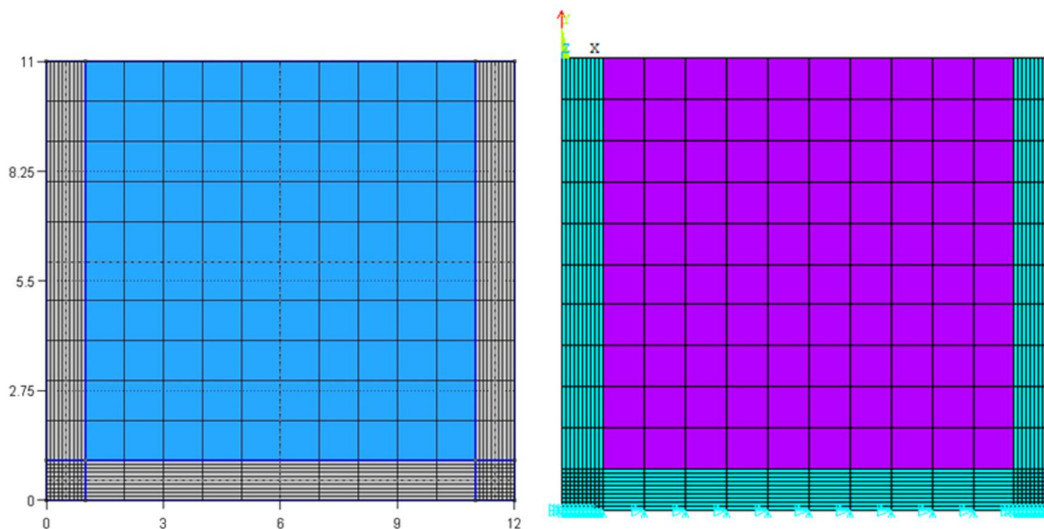


Figura 6.23 – Malhas de elementos finitos gerada: (a) Gmsh (b) Ansys 19.0

Tabela 6.25 – Comparativo frequências numéricas do fluido acoplado superfície livre

Modos de vibração Superfície livre	Frequências Naturais Fluido acoplado (rad/s)				
	Numérico Presente Estudo	Analítico	Erro (%)	Ansys	Erro (%)
1	1.75	1.75	0	1.75	0
2	2.48	2.48	0	2.45	1.2
3	3.04	3.04	0	3.01	1.0
4	3.52	3.51	0.3	3.45	2.0
5	3.94	3.92	0.5	3.89	1.3

Tabela 6.26 – Comparativo frequências numéricas do fluido acoplada cavidade acústica

Modos de vibração Cavidade acústica	Frequências Naturais Fluido acoplado (rad/s)						
	Numérico Presente Estudo	Analítico	Erro (%)	Ansys	Erro (%)	Burgos (2017)	Erro (%)
1	35.31	43.50	-19.1	38.95	-9.6	41.34	-14.8
2	42.01	43.58	-3.6	41.46	1.3	43.93	-4.4
3	217.68	213.20	2.1	194.46	11.9	203.93	6.7
4	255.37	237.3	7.6	243.34	4.9	260.11	-1.8
5	335.47	316.03	6.2	338.22	-0.8	347.13	-3.4
6	583.14	570.14	2.2	561.33	3.9	570.30	2.3

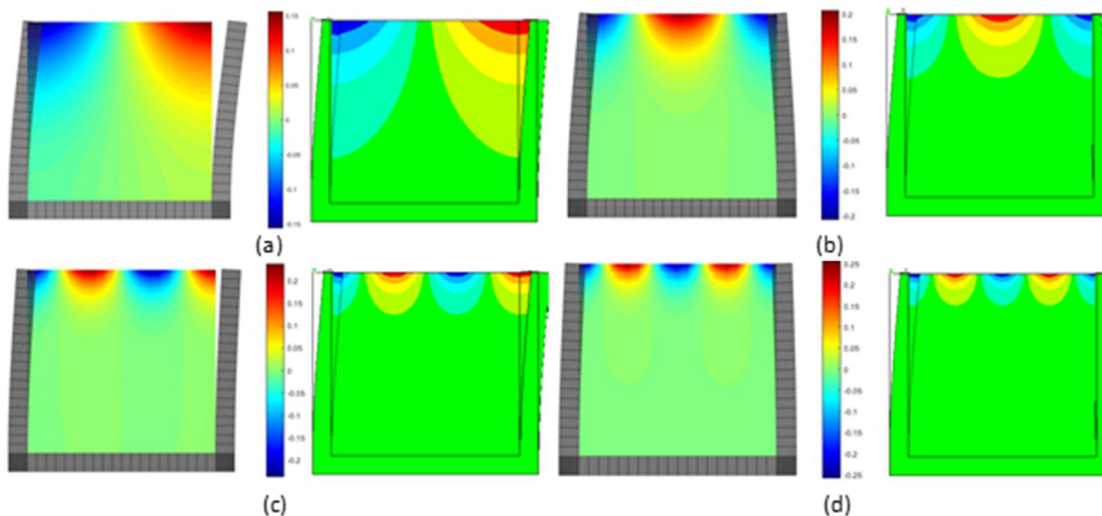


Figura 6.24– Comparativo das Formas modais superfície livre acoplada entre o presente estudo e o ANSYS Student 19.0 respectivamente. (a) 1º modo (b) 2º modo (c) 3º modo (c) 4º modo

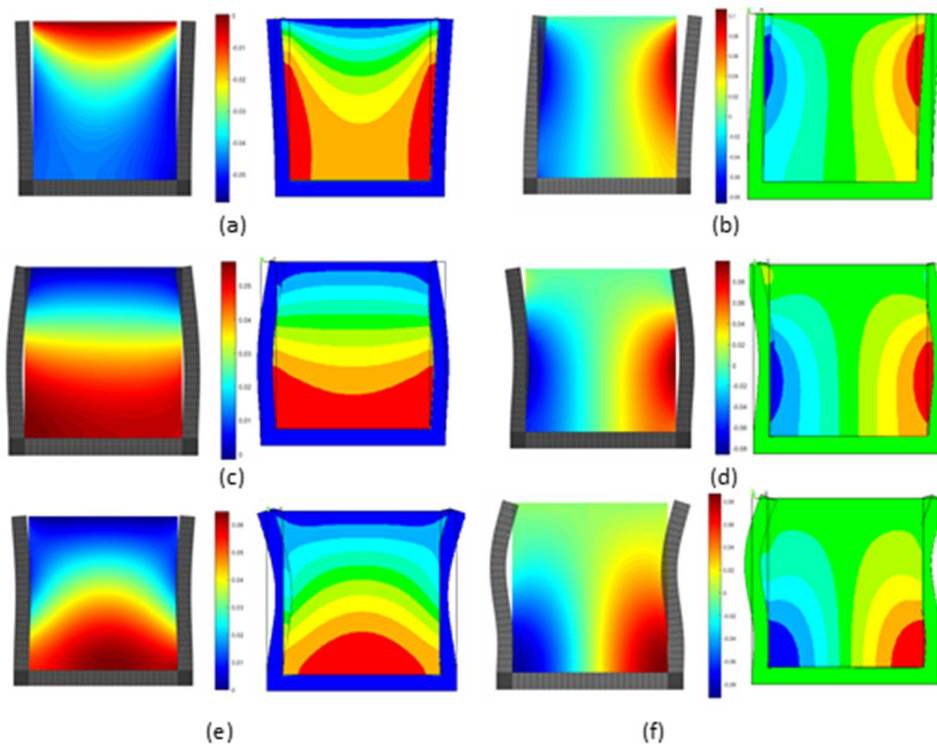


Figura 6.25– Comparativo das Formas modais cavidade acoplada entre o presente estudo e o ANSYS Student 19.0 (a) 1º modo (b) 2º modo (c) 3º modo (c) 4º modo (d) 5º modo (e) 6º modo

Ao analisar os resultados obtidos tem-se que o primeiro modo da frequência é de frequência nula e pressão constante em toda a cavidade sendo suprimido dos resultados. Os próximos 41 modos referem aos modos de superfície livre, equivalente ao número de nós adotados na malha de superfície livre. Os modos restantes referem-se aos modos acústicos acoplados. Comparando visualmente os resultados obtidos, nota-se que os primeiros modos

acústicos acoplados referentes a superfície livre sofrem pouca alteração apresentando resultados praticamente iguais aos modos desacoplados. As formas modais apresentam semelhança com os resultados numéricos obtidos no ANSYS Student 19.0, demonstrando que o código computacional desenvolvido possibilita uma análise eficiente para o caso estudado.

Ao comparar os resultados obtidos neste trabalho com os resultados obtidos no ANSYS Student 19.0, Burgos (2017) e analítico, observa-se uma grande discrepância em alguns modos acoplados com um erro máximo de 9.6%, 14.8% e 19%, respectivamente. As frequências obtidas no presente estudo são inferiores as frequências analíticas devido ao grau de refinamento da malha.

Para os demais modos, observa-se que um erro relativo máximo de 11.6%, tal fato deve-se à diferença no refinamento das malhas da estrutura e do fluido. No caso apresentado a estrutura possui 4681 nós e a cavidade 961 nós. Para reduzir o erro relativo entre os resultados deve-se melhorar o refinamento para a malha da cavidade o que ocasionaria um grande aumento no número de nós da estrutura causando um grande esforço computacional. No presente trabalho a simulação com 1681 nós na cavidade demorou aproximadamente 12 horas para ser concluído.

Os modos acoplados são de difícil análise e interpretação pois podem ser governados pela estrutura, pela cavidade acústica ou apresentam modos mistos. A identificação de cada modo é realizada observando as formas modais do problema acoplado e comparando-a com os modos desacoplados (Pedroso (1994) apud Souza, 2007).

O modo estrutura caracteriza-se pela adaptação da cavidade e deformação da estrutura. No modo fluido a estrutura se adapta a configuração do campo de pressão do fluido. O modo misto reproduz as formas modais da estrutura e da cavidade. A Tabela 6.27 apresenta as sete primeiras frequências acopladas e desacopladas para fins de análise da forma governante.

Tabela 6.27 – Comparativo frequências naturais desacoplada e acoplada

Modos de vibração	Frequências Naturais (rad/s)			
	Superfície Livre			Análise do modo dominante
	Estrutura desacoplada	Cavidade desacoplada	Acoplada	
1	48.22	233.62	35.21	MA
2	48.22	526.80	42.01	MA
3	291.50	706.85	217.68	ME
4	291.50	846.95	255.37	ME
5	736.81	970.95	335.47	MC
6	736.81	1168.31	583.14	MC
7	785.80	1174.93	675.07	ME

O primeiro e o segundo modo acoplados são conhecidos como modos de massa adicional fundamentais em oposição de fase em fase respectivamente, correspondente a uma frequência próxima da frequência fundamental de vibração da estrutura. O parâmetro de compressibilidade $\omega L/c$ para o primeiro e segundo modos valem respectivamente 0.24 e 0.28, sendo considerado fluido incompressível $\omega L/c < 1$, onde a aplicação da massa adicional reproduz a frequência esperada.

O terceiro, quarto e sétimo modos acoplados são aqueles dominados pela estrutura com massa adicional, onde as suas respectivas frequências são inferiores a frequência desacoplada da estrutura (3º, 4º, 5º e 6º modos). Observa-se, na referente forma modal, que o fluido acompanha a deformada da estrutura agindo com um efeito de massa adicional sobre a estrutura.

O quarto e quinto modos acoplados são modos dominados pela cavidade pois reproduzem as formas modais da cavidade desacoplada com frequências superiores as frequências destas, onde a estrutura acompanha o campo de pressão do fluido. A cavidade se comporta como se estivesse adquirido uma rigidez adicional induzida pela rigidez da estrutura.

6.2.4 Vibração Forçada

Após a validação da formulação para casos de vibração livre estudou-se a resposta dinâmica do sistema para uma força harmônica, determinando a função de resposta em frequência (FRF) do modelo acoplado a partir de um estudo de varredura em frequência. Para determinação da FRF através do código computacional do presente estudo, variou-se a frequência substituindo na Eq. (4.99). Avaliou-se dois pontos distintos: o ponto A, no topo da estrutura, cujo objetivo é avaliar a resposta no contorno com efeito de superfície livre e o Ponto B, no centro da cavidade cujo objetivo é avaliar a resposta no acoplamento entre fluido e estrutura. As FRF's estão representadas nas Figuras 6.27 e 6.28.

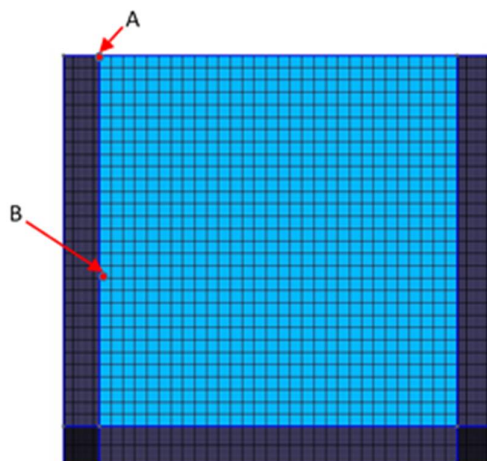


Figura 6.26– Pontos notáveis da análise dinâmica do sistema

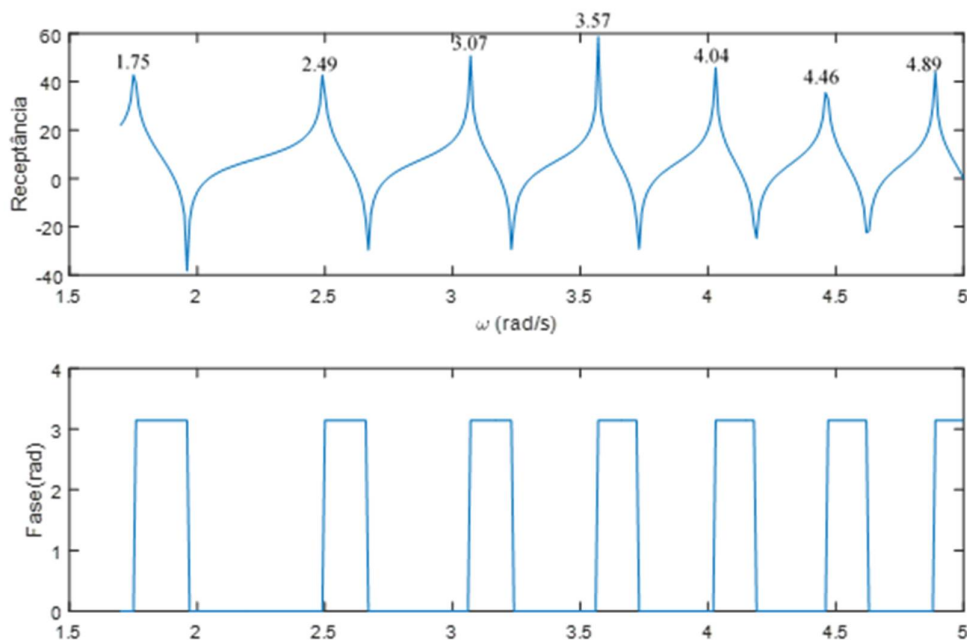


Figura 6.27 – Função de resposta em frequência – ponto A – superfície livre

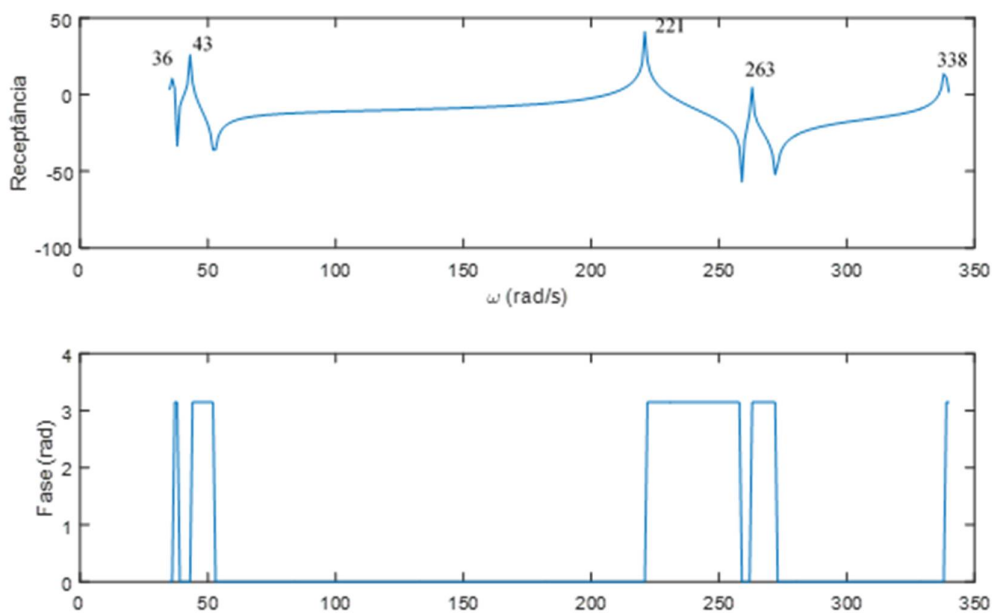


Figura 6.28 – Função de resposta em frequência – ponto B – cavidade acústica

Observa-se que o gráfico da Figura 6.27 possui sete picos e da Figura 6.28 possui cinco picos. Esses picos representam as frequências naturais do sistema. Cada pico apresentado representa um modo de vibração da estrutura analisada em um determinado ponto da estrutura, no caso deste trabalho um ponto no contorno da superfície livre e um ponto no centro da cavidade. Em comparação com as frequências obtidas na análise anterior, conclui-se que o gráfico representa corretamente as frequências naturais do sistema confirmando a validação dos

resultados obtidos. A mesma Figura 6.28 ainda apresenta vales, que são chamados de antirressonâncias. Esses vales estão relacionados às menores magnitudes do sistema, o oposto do que acontece nas ressonâncias. Observa-se também o salto de fase que ocorre ao cruzar uma antirressonância, como acontece com as ressonâncias. Conclui-se com as análises realizadas que o código computacional apresentado reproduz com eficácia a simulação de problemas envolvendo forças externas.

6.3 ABSORVEDOR LÍQUIDO DE COLUNA SINTONIZADO (TLCD)

O presente caso estuda uma cavidade em formato de U preenchida com água, ou seja, TLCD. Alkmin (2017) estudou experimentalmente um modelo de absorvedor tipo TLCD em acrílico que servirá de base para o presente estudo.

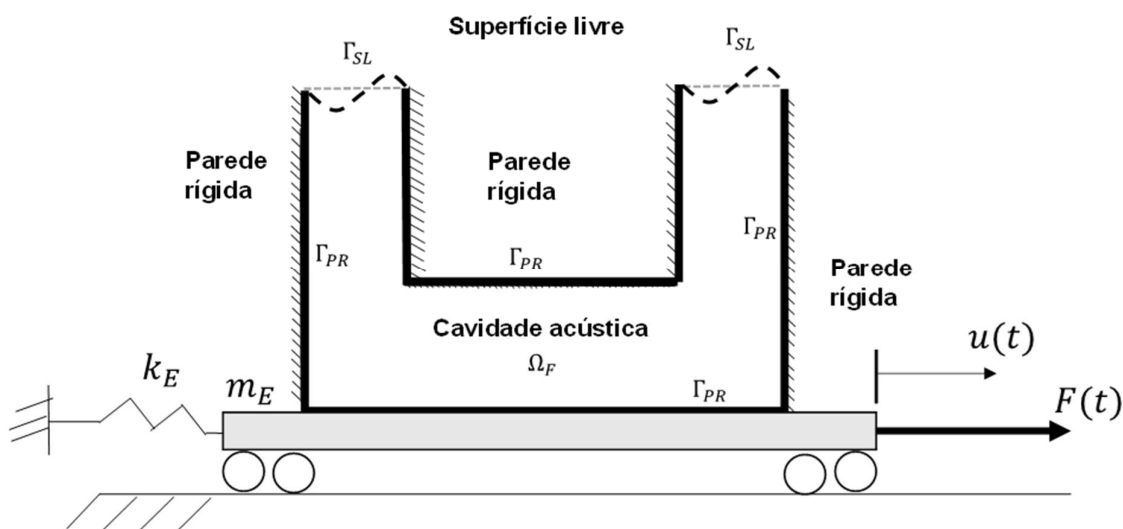


Figura 6.29 – Representação esquemática do modelo acoplado estrutura - TLCD com superfície livre.

Inicialmente, uma análise de vibração livre foi realizada variando a coluna de água dentro do TLCD para validar o código computacional comparando as frequências naturais com os resultados experimentais (Alkmin, 2017) e para avaliar as formas modais para o problema da superfície livre. Em seguida, foi realizada uma análise de vibração forçada simulando um deslocamento aplicado na estrutura, promovendo uma aceleração no líquido dentro do tanque onde a resposta de frequência no líquido e as formas modais obtidas foram observadas. Finalmente, o modelo numérico do absorvedor passivo de coluna de líquido sintonizado é acoplada a um sistema de 1 GDL. O presente modelo numérico do sistema acoplado estrutura-absorvedor líquido é comparado com resultado analítico e resultado numérico obtido no ANSYS V.19 Student License.

6.3.1 Solução desacoplada fluido (TLCD)

Para a modelagem do fluido desacoplado considerou-se o TLCD com contorno rígido preenchido com água com altura de coluna de água variável no decorrer do estudo. A geometria do TLCD é dada pela Figura 6.30.

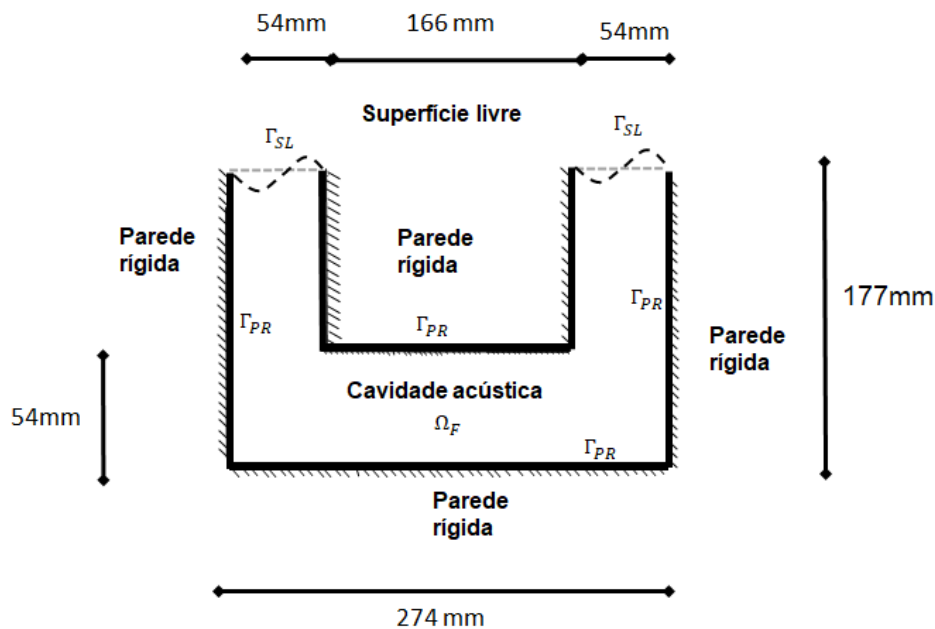


Figura 6.30 – Representação esquemática do absorvedor dinâmico de vibrações (TLCD)

Para a análise do fluido desacoplado do caso 3 utilizou-se a solução analítica apresentada na Equação (6.42). A equação desacoplada do sistema foi descrita em função das do comprimento total da coluna de água (b) e a altura da coluna de água do sistema (ha) (Figura 6.31). Os resultados obtidos estão representados na Tabela 6.28.

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{b + 2ha}} \quad (6.42)$$

Para o estudo numérico a malha foi gerada usando o software Gmsh 3.0.5 (Figura 6.32). A Figura 6.32 mostra a malha para uma altura de coluna de água de 105 mm.

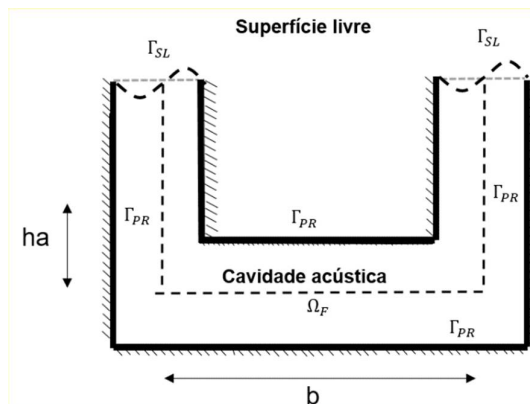


Figura 6.31 – Representação esquemático das variáveis adotadas na solução analítica do absorvedor dinâmico de vibrações (TLCD).

Tabela 6.28 – Comparativo entre as frequências naturais obtidas no presente estudo e experimentais.
Frequências Naturais Fluido desacoplado (hz)

ha (mm)	Frequências Naturais Fluido desacoplado (hz)				
	Numérico Presente Estudo	Analítico	Erro (%)	Experimental	Erro (%)
35	1.39	1.31	-6.11	1.38	0.72
45	1.34	1.27	-5.51	1.33	0.75
55	1.29	1.23	-4.87	1.27	1.57
65	1.25	1.19	-5.04	1.23	1.63
75	1.21	1.16	-4.31	1.20	0.83
85	1.18	1.13	-4.42	1.17	0.85
95	1.14	1.10	-3.63	1.15	0.87
105	1.11	1.08	-2.78	1.12	0.89

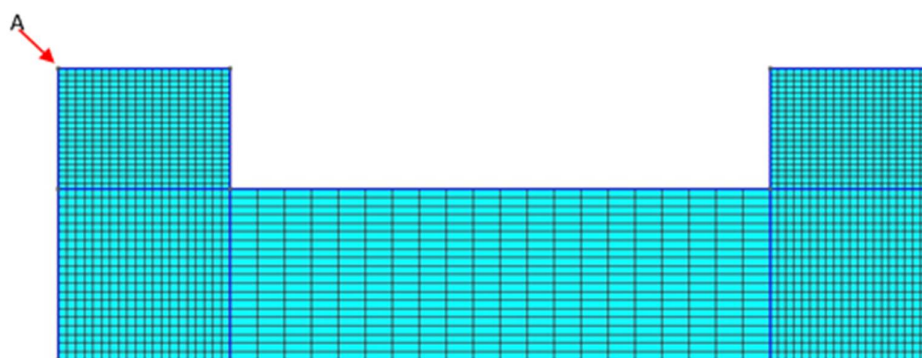


Figura 6.32 – Modelo de Malhas Elementos finitos gerada no software Gmsh e representação esquemática da coluna (há) de água variável ao longo do estudo.

Observa-se que a solução numérica obteve uma boa concordância com o resultado experimental onde nenhuma discrepância foi observada nos resultados com erros inferiores a 1.7 %. Observa-se que os resultados analíticos apresentaram erro máximo de 6.11%, fato este que pode ser atribuído ao grau de refinamento da malha de elementos finitos. A Figura 6.33

apresenta os modos naturais de vibração do fluido contido na cavidade para os quatro primeiros modos de superfície livre para coluna de 105 mm.

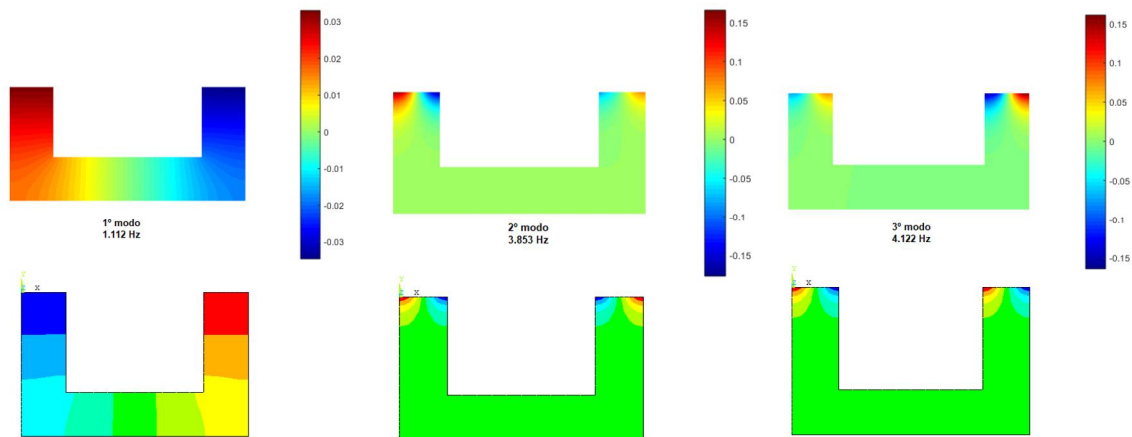


Figura 6.33 – Deformadas modais numérica da superfície livre para altura da coluna de água de 10.5 cm

Ao analisar a Figura 6.33, observa-se que as formas modais do código desenvolvido são semelhantes as formas apresentadas no ANSYS v.19. Após a validação dos resultados, o sistema foi submetido a uma análise de vibração forçada onde aplicou-se um deslocamento unitário conforme apresentado na Figura 6.34. Para aplicação do deslocamento unitário desenvolveu-se a Equação (4.38) considerando que a aceleração da estrutura varia harmonicamente no tempo atribuindo ao vetor deslocamento um valor unitário para todos os nós da estrutura na direção longitudinal. A Figura 6.35 apresenta a FRF para o TLCD com uma altura de coluna de água de 105 mm.

Com base na análise apresentada observa-se que o gráfico possui cinco picos. Esses picos representam as frequências operacionais do sistema. Como o sistema não é amortecido as frequências operacionais são próximas as frequências naturais do sistema. Em comparação com a Figura 6.34, as frequências operacionais obtidas pela variação em frequência correspondem as frequências naturais obtidas pela análise modal. As Figuras 6.36 a 6.38 representam as deformadas modais para os quatro primeiros modos naturais para três alturas de coluna de água distintas.

Ao comparar as deformadas modais observa-se que alguns pontos, onde a pressão era nula, sofreram um acréscimo de pressão devido a aceleração introduzida no sistema. Observa-se também que a aceleração não alterou de forma significativa as regiões com superfície livre.

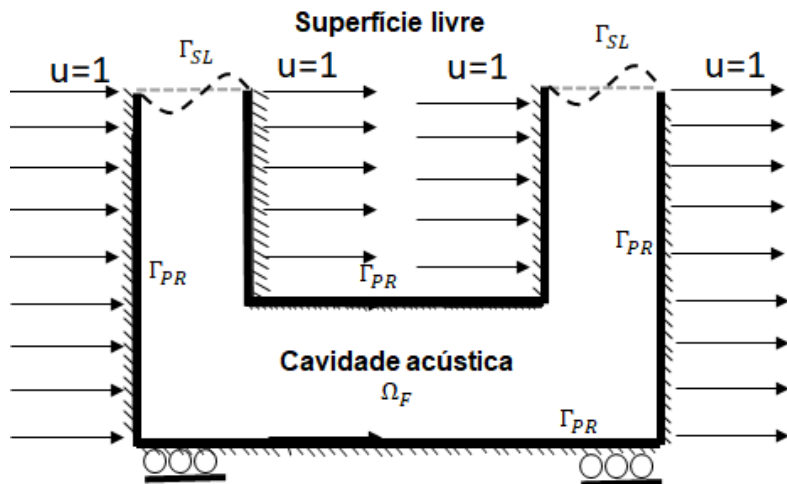


Figura 6.34 – Representação esquemática do modelo de aplicação da aceleração unitária no TLCD

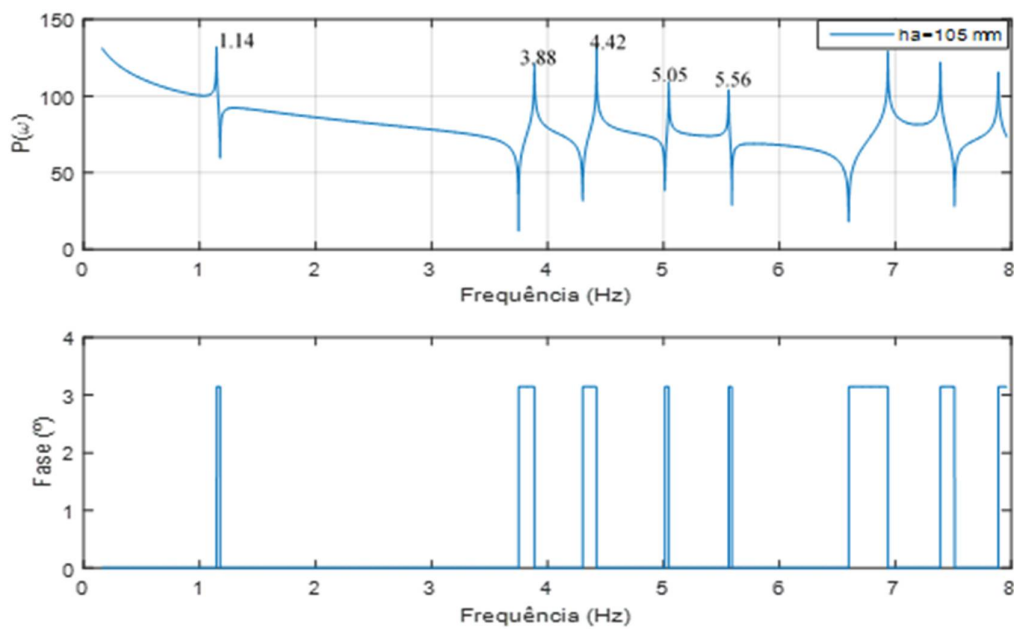
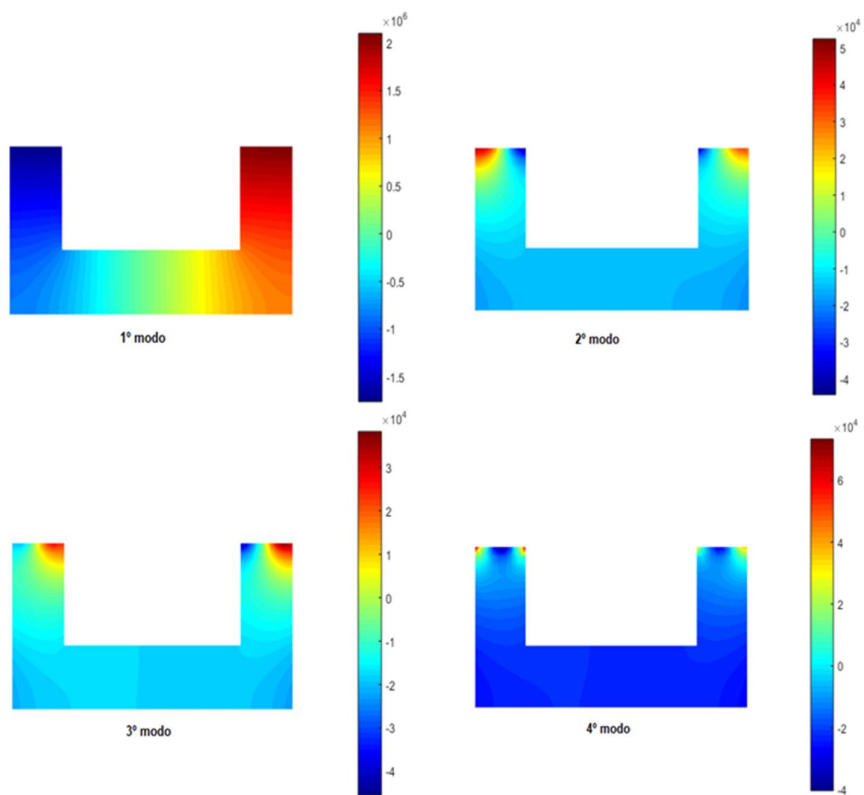
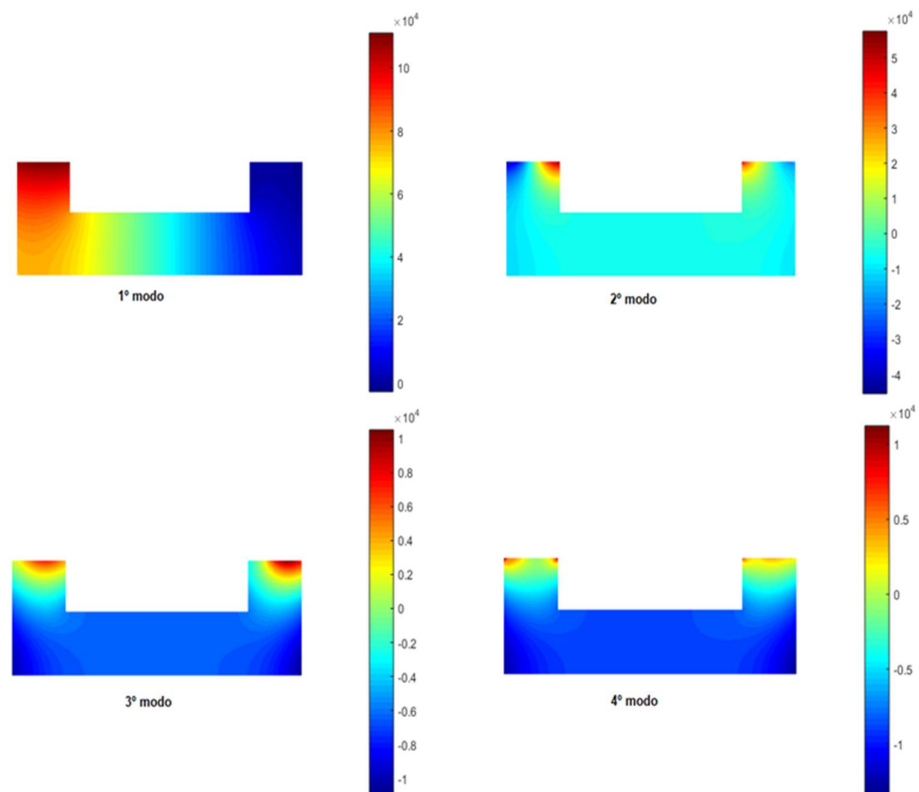


Figura 6.35 – Variação da pressão no ponto A para o sistema acelerado em função da frequência.

Figura 6.36 – Deformadas modais com aceleração unitária – $ha = 105 \text{ mm}$ Figura 6.37 – Deformadas modais com aceleração unitária – $ha = 65 \text{ mm}$

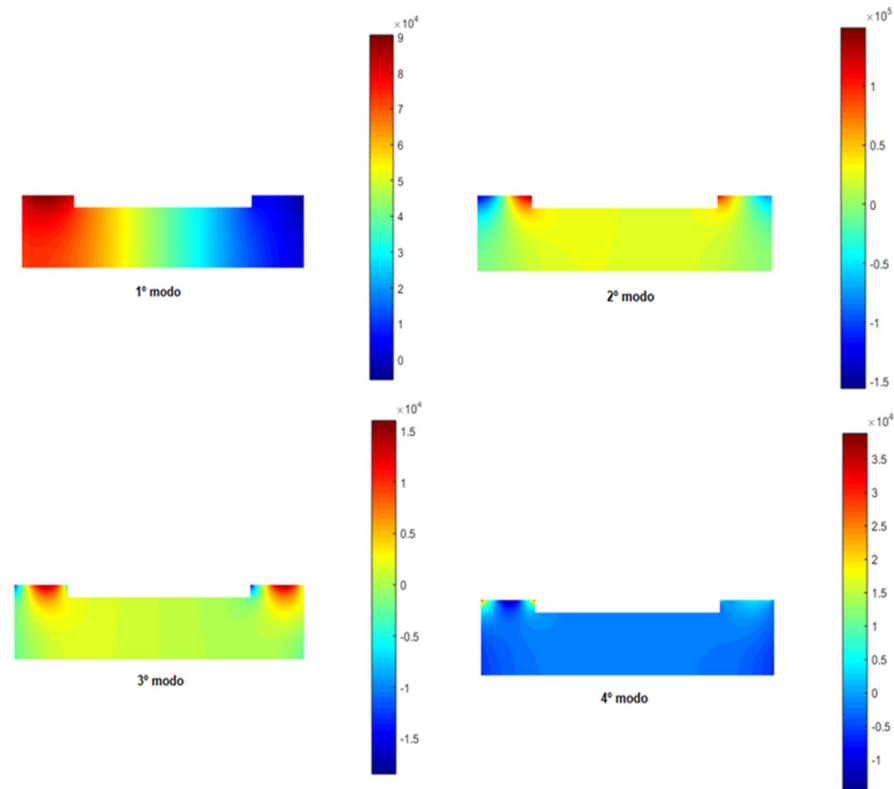


Figura 6.38 – Deformadas modais com aceleração unitária – $ha = 35 \text{ mm}$

6.3.2 Acoplamento TLCD com Estrutura Principal

Ao analisar o TLCD como um problema bidimensional (Figura 6.29), o primeiro desafio foi acoplar a estrutura das colunas de forma que trabalhassem simultaneamente. Optou-se por modelar o sistema como uma caixa contendo o TLCD em seu interior (Figura 6.39). Dessa forma todos os pontos da estrutura estariam acoplados e seria possível realizar o acoplamento fluido estrutura do problema. As dimensões internas da estrutura que contém água possuem as dimensões apresentadas na Figura 6.31. A espessura da parede é de 50 mm e a rigidez da mola foi adotada igual a 80000 N/m². O número de molas inseridas na estrutura é igual ao número de nós adotados na discretização da malha na lateral da estrutura. A rigidez de cada mola é $\bar{k} = K_{mola}/(n^\circ \text{ de nós})$. Iniciou-se pelo estudo do problema desacoplado, realizando em seguida o acoplado entre a estrutura e o TLCD observando o efeito da inserção do TLCD na frequência da estrutura. Os resultados obtidos foram comparados com resultados analíticos e numéricos obtidos no ANSYS v 19.0.

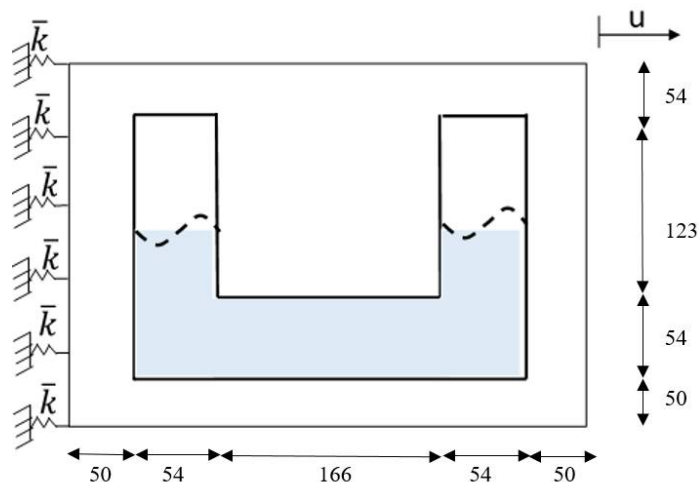


Figura 6.39 – Dimensões (mm) do sistema adotado para modelagem do problema acoplado estrutura - TLCD com superfície livre.

- **Estrutura desacoplada**

Supondo um comportamento de sistema massa-mola para a estrutura desacoplada (6.43), a rigidez e massa da estrutura adotada é de respectivamente 80000 N/m² e 590 Kg..

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (6.43)$$

A Figura 6.40 apresenta um exemplo da malha da estrutura desacoplada. Adotou-se uma malha de 1980 nós cujo erro relativo é inferior a 1% comparado com os resultados numéricos obtidos no ANSYS v. 19.

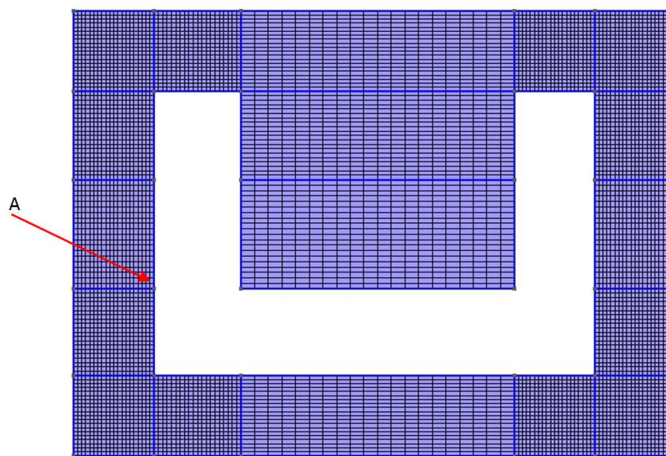


Figura 6.40 – Modelo de Malhas Elementos finitos gerada no software Gmsh e ponto adotado para análise dinâmica do problema.

A Tabela 6.29 apresenta os resultados obtidos para a frequência da estrutura desacoplada analítica e numérica. As formas modais obtidas estão apresentadas na Figura 6.41.

Tabela 6.29 – Comparativo frequências numéricas da estrutura desacoplada.

Modos de vibração	Frequências Naturais desacoplada (hz)				
	Numérico Presente Estudo	Analítico	Erro (%)	Ansys	Erro (%)
1°	1.854	1.855	0.04	1.849	-0.27
2°	2773.2	-	-	2739.1	-1.24
3°	4976.1	-	-	4905.6	-1.44
4°	6630.1	-	-	6630.1	-1.43

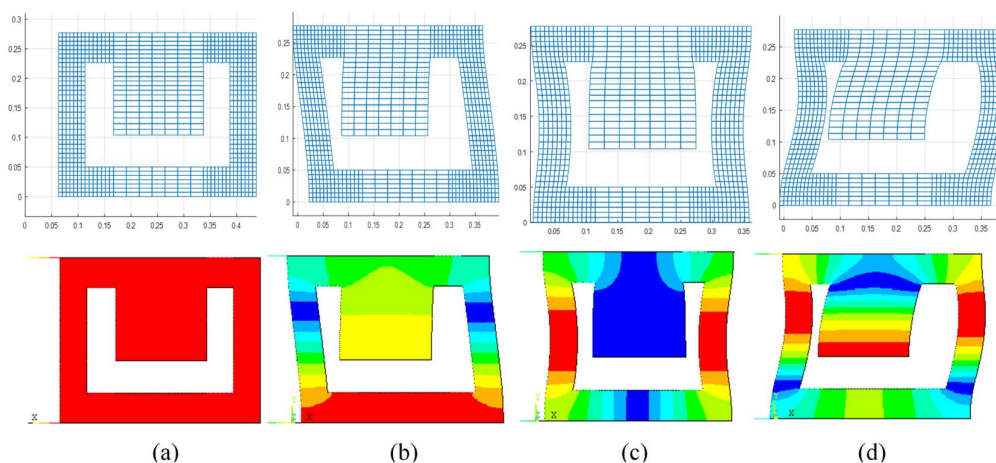


Figura 6.41– Comparação das formas modais da estrutura desacoplada entre o presente estudo e o ANSYS Student 19.0. (a) 1° modo (b) 2° modo (c) 3° modo (d) 4° modo.

Ao comparar os resultados do presente estudo com os resultados obtidos no ANSYS Student 19.0 e Analítico observa-se que o erro relativo máximo é de 1.45 % apresentando uma boa concordância entre os resultados. As formas modais no presente estudo são semelhantes as formas obtidas no ANSYS Student 19.0.

- **Acoplamento TLCD com a Estrutura Principal**

Após o estudo do sistema desacoplado realiza-se o estudo do problema acoplado onde considera-se o TLCD rigidamente conectado à placa superior da estrutura (Figura 6.39). Para o estudo adotou-se a malha convergida apresentada nos casos desacoplados. Para a análise inicial adotou-se uma altura de coluna de água de $ha = 105 \text{ mm}$ comparando os resultados obtidos com a solução numérica obtida no software ANSYS v. 19 e com a solução analítica para o

sistema não amortecido, apresentada na Equação (6.44). O comparativo entre os resultados está apresentado na Tabela 6.30 e as formas modais na Figura 6.42.

$$\begin{bmatrix} m_e + m_a & \alpha m_a \\ \alpha m_a & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{u} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_e & 0 \\ 0 & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.44)$$

onde: $m_e = \rho_s A_s$ representa a massa da estrutura; $m_a = \rho_f A_f (b + 2ha)$ representa a massa de água do TLCD; $k_e = 80000 N/m^2$ representa a rigidez adotada para o sistema massa mola e $k_a = 2\rho_f A_f g$ representa a rigidez do fluido.

Tabela 6.30 – Comparativo frequências numéricas da estrutura acoplada com as frequências analíticas e experimentais $ha=105mm$.

Modos de vibração	Frequências Naturais acoplada (hz)				
	Numérico Presente Estudo	Analítico	Erro (%)	Ansys	Erro (%)
1°	1.111	1.076	-3.63	1.13	2.03
2°	1.819	1.833	0.76	1.835	0.54

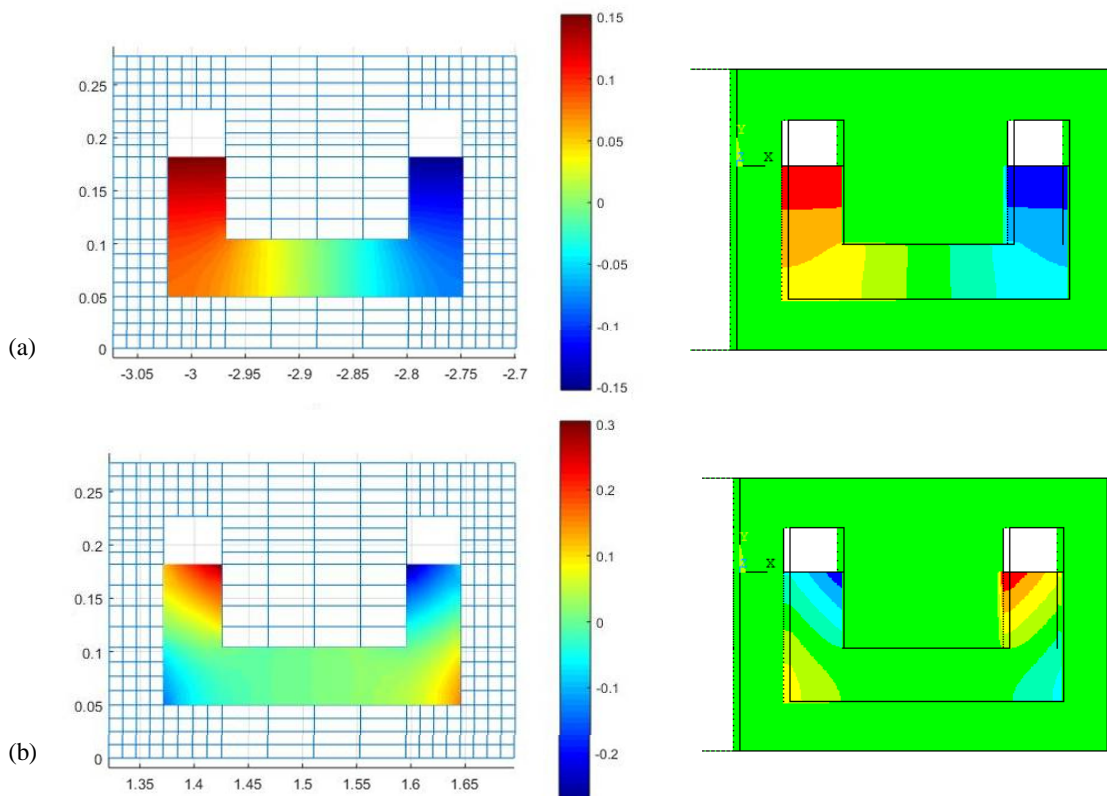


Figura 6.42– Comparação das formas modais da estrutura desacoplada entre o presente estudo e o ANSYS Student 19.0. (a) 1° modo (b) 2° modo

Os resultados obtidos para a frequência natural do sistema apresentam erro máximo de 3.63 % para a solução analítica e de 2.03 % para a solução numérica obtida no ANSYS. Tal

discrepância pode ser atribuída ao nível de refinamento da malha. As formas modais apresentam uma boa semelhança com as formas modais obtidas no ANSYS v. 19. A Tabela 6.31 apresenta o estudo entre a razão de semelhança entre as formas modais numéricas e analíticas para o 1º e 2º modos estudados adotando o fluido como referência. Observou-se que a razão de semelhança entre as formas modais obtidas para os casos analítico e numérico são próximas confirmando a boa concordância entre as formas modais obtidas pelo código computacional criado no presente trabalho.

Tabela 6.31 – Razão de semelhança entre as formas modais analítica e numérica obtidas no presente estudo.

Frequência da estrutura (rad/s)		
Modo	Analítico	Numérico presente estudo
1	-0.02	-0.03
2	-0.66	-0.86

Com o intuito de avaliar a concordância entre os resultados obtidos para o problema acoplado realizou-se a comparação entre as frequências analíticas e numéricas do 1º e 2º modos variando a altura da coluna de água conforme apresentado na Figura 6.43.

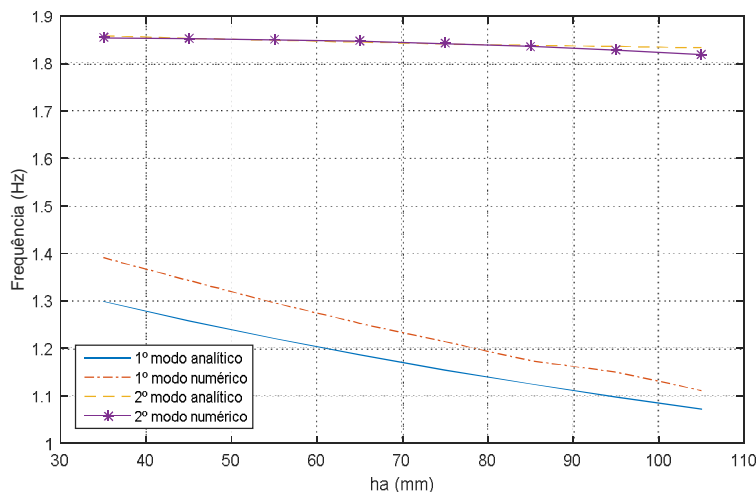


Figura 6.43– Comparação entre frequências analíticas e numéricas para o 1º e 2º modos variando a altura de coluna de água (h_a)

Ao analisar o gráfico constatou-se erro relativo máximo de 6.30% para as frequências do 1º modo. Observou-se que ao gerar a malha para o sistema acoplado o número de elementos da malha da estrutura é muito maior que o número de elementos do fluido causando um problema na convergência das malhas onde para obter uma boa convergência para o fluido seria necessária uma malha muito grande para a estrutura gerando um grande esforço computacional na solução do problema. Assim a discrepância entre os resultados obtidos no presente estudo e

os resultados apresentados na Figura 6.43 pode ser atribuído ao grau de refinamento da malha de elementos finitos adotada. Mesmo com tal problema os resultados obtidos pelo código computacional desenvolvido no presente trabalho apresentam uma boa concordância com os resultados analisados.

Finalmente realizou-se um estudo de vibração forçada para o problema apresentado comparando os resultados obtidos no presente estudo com resultados analíticos descrito pela Equação (6.44). Aplicou-se na uma força unitária na estrutura e estudou-se a FRF no ponto A descrito na Figura 6.40. Apresentou-se inicialmente a FRF comparando os resultados analíticos e numéricos obtidos para uma coluna de água $h_a = 105 \text{ mm}$ (Figura 6.44). Em seguida realizou-se um comparativo entre as frequências do caso desacoplado e do caso acoplado para a mesma coluna de água.

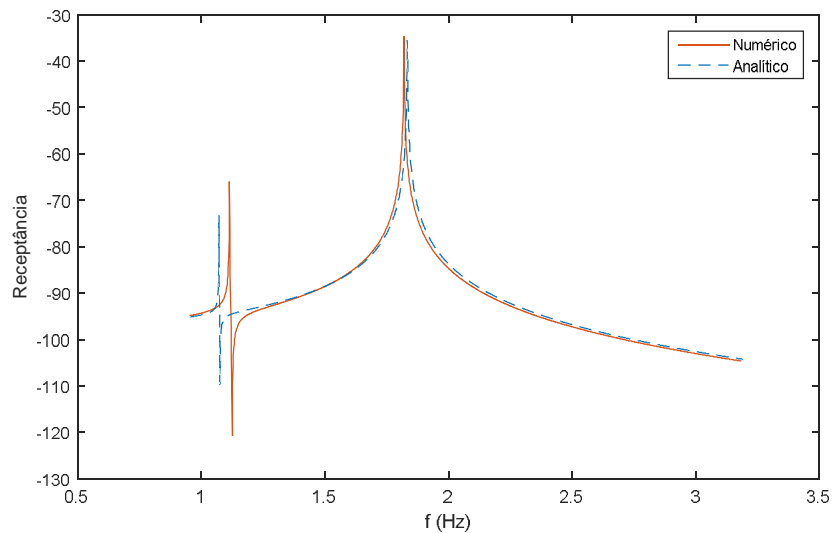


Figura 6.44– Comparação entre a FRF analítica e numérica para altura de coluna de água 105 mm aplicado no ponto A.

Observou-se uma boa concordância entre os resultados obtidos, sendo que a diferença entre os resultados analíticos e numéricos são atribuídos ao problema de refinamento da malha citado anteriormente.

Observou-se na Figura 6.45 que a frequência operacional da estrutura sofreu uma pequena redução com a inserção do TLCD. Essa pequena redução deve-se a escolha da rigidez adotada para o sistema massa-mola em estudo, ocasionando o não acoplamento entre o fluido e a estrutura principal. Para obter uma boa redução na frequência operacional do sistema deve-se realizar um estudo mais aprofundado buscando a otimização do sistema.

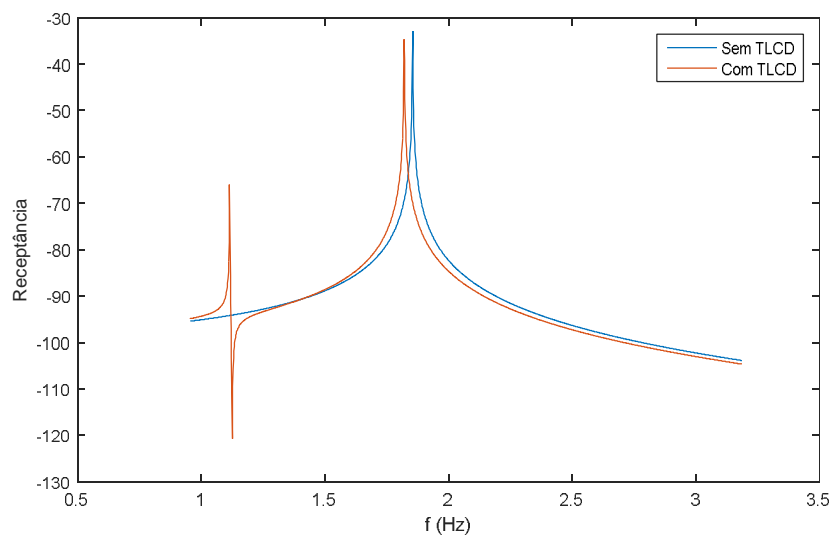


Figura 6.45– Comparação entre a FRF obtidas para a estrutura desacoplada e para a estrutura com TLCD contendo uma de coluna de água 105 mm, aplicado no ponto A.

7 CONCLUSÕES

O estudo de problemas de interação fluido estrutura evoluiu consideravelmente ao longo dos anos. É comum no cotidiano de um engenheiro encontrar problemas relacionados ao assunto. O estudo de interação entre o fluido e a estrutura é de grande importância permitindo analisar cada sistema de forma isolada e em seguida a influência do fluido na estrutura, permitindo a otimização de projetos e aumentando a segurança.

O presente trabalho apresentou problemas de vibroacústica e hidroelasticidade onde, inicialmente, avaliou-se as frequências naturais do sistema e deformadas modais desacopladas e acopladas. Para tal estudo desenvolveu-se um código computacional baseado na formulação de elementos finitos U-P apresentada por Zienkiewicz e Newton (1969) e Sousa Jr (2006). A formulação foi escolhida devido a sua eficiência comprovada por diversos autores na literatura.

Para validação do código computacional iniciou-se com problema de interação placa reservatório com superfície livre. Esse caso teve como objetivo apresentar um exemplo simples de acoplamento fluido estrutura contribuindo para o bom entendimento da formulação proposta e da construção da matriz de acoplamento fluido estrutura. Demonstrou-se em seguida que com o refinamento da malha encontra-se a solução aproximada para o problema obtendo erros desprezíveis, em geral inferiores a 4%.

O segundo caso estudado apresentou um reservatório em forma de U similar a uma eclusa, onde estudou-se as frequências naturais e as deformadas modais comparando-as com resultados numéricos (Burgos, 2017), analíticos (Morais, 2000) e com o programa computacional ANSYS 19.0 *Student License*. Da mesma forma que no caso 1 obteve-se um erro desprezível em comparação com os resultados citados anteriormente comprovando a eficácia do código computacional implementado. As formas modais foram comparadas para seis formas modais para casos desacoplados e acoplados demonstrando a precisão na representação das formas tanto para os modos de superfície livre tanto para os modos de cavidade e de estrutura. Conclui-se que os modos de superfície apresentam baixas frequências comparado com os modos de cavidade. Geralmente as primeiras frequências apresentam valores de frequência inferiores a 1Hz. O caso acoplado apresentou erros superiores comparado com os casos desacoplados devido o nível de refinamento das malhas, onde a estrutura possui uma quantidade grande de nós comparado com a cavidade.

Ainda para o segundo caso realizou a aplicação de uma força harmônica no sistema com o intuito de avaliar a resposta de frequência do sistema forçado. Ao analisar as FRF's observou-se que os picos representam as frequências naturais do sistema e que as antirressonâncias

caracterizam a mudança de fase do sistema comprovando resultados obtidos na literatura. Dessa forma demonstrou-se que o código implementado representa com eficácia as FRF's para um sistema forçado.

Um dos objetivos deste trabalho foi aplicar o código computacional para avaliar os fenômenos que ocorrem em absorvedores líquidos sintonizados. Buscou-se validar os resultados numéricos obtidos comparando-os com os resultados experimentais (Alkmin, 2017). Para estudar os fenômenos que ocorrem em absorvedores líquidos sintonizados é importante avaliar o movimento da superfície livre do fluido a partir de campos de velocidade e pressão. Para tal o código computacional foi implementado com a condição de superfície livre com o intuito de observar tal efeito. Ao avaliar o TLCD para os sistemas com vibração livre observou-se erros relativos inferiores a 6% entre os resultados numéricos e os ensaios experimentais. As formas modais obtidas no presente trabalho foram comparadas com as formas modais obtidas no ANSYS 19.0 Student, demonstrando uma boa representação das formas modais geradas pelo código computacional. Em seguida aplicou-se uma aceleração unitária no sistema com o intuito de avaliar o comportamento da estrutura sobre vibração forçada. Observou-se que a aceleração não influenciou nos modos de superfície livre. Já nos modos de cavidade observou um acréscimo de pressão em vários pontos do sistema. Para o caso acoplado observou uma pequena discrepância ao comparar com resultados analíticos. Tal fato deve-se ao nível de refinamento da malha de elementos finitos, onde a malha de elementos finitos da estrutura é muito maior que a malha de elementos finitos do fluido, gerando um grande esforço computacional prejudicando o estudo de convergência do acoplamento. Mesmo com tal discrepância os resultados obtidos apresentaram uma boa concordância com resultados numéricos, analíticos e experimentais apresentados.

Diante do apresentado, este trabalho contribui para o avanço nas pesquisas e estudos relacionados ao tema através do desenvolvimento de um código computacional próprio capaz de realizar análises modais de um sistema acoplado fluido-estrutura bidimensional com a aplicação do MEF. Observa-se também uma contribuição no que diz respeito a estudos de sistemas com vibração forçada observando uma boa representatividade nos resultados obtidos. O presente estudo também demonstrou avaliar com eficiência situações de superfície livre e estudo do comportamento de absorvedores líquidos sintonizados.

Por fim, todos os resultados apresentados neste trabalho podem ser ditos como adequados dentro das limitações e abrangência consideradas.

7.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Sugestões de estudos que podem contribuir para a pesquisa:

- Inserir a matriz de amortecimento no sistema acoplado e estudar seus efeitos.
- Aplicar técnicas de simetrização das matrizes para reduzir o esforço computacional.
- Modificar estratégia de armazenamento das matrizes para soluções de maior porte.
- Utilizar elemento isoparamétrico para a discretização do problema.
- Aplicar técnicas de otimização do sistema buscando o TLCD ótimo para cada estrutura.
- Realizar um estudo numérico-experimental para diversas estruturas com TLD's e TLCD's.
- Estender o estudo para problemas tridimensionais.

7.2 LISTA DE PUBLICAÇÕES

SILVA, A. A. M. T. da; MORAIS, M. V. G. de. **Approximate Evaluation of an Acoustic Cavity Rigid Coupled to a Flexible Plate in Free Vibrations.** In: XXXVII Ibero-Latin American Congress On Computational Methods in Engineering (CILAMCE), Brasília, Brasil, 2016.

SILVA, A. A. M. T.; MORAIS, M. V. G. de. **FE sloshing modelling in bidimensional cavity using wave equation.** In: 14th International Conference on Vibration Engineering and Technology of Machinery (Vetomac XIV), Lisboa , Portugal, 2018.

REFERÊNCIAS

- ABRAMSON, H. N., **Hydroelasticity Some problems and Some Solutions**, Van Norstrand Reinhold, New York, 1981.
- ALKMIM, M.H.; MORAIS, M. V. G. de; FABRO, A. T. **Vibration reduction of wind turbines using tuned liquid column damper using stochastic analysis**. In: IOP PUBLISHING. Journal of Physics: Conference Series. [S.l.] V. 744, Nº 1, p.012178, 2016.
- ALKMIN, M. H. **Análise de uma amortecedor de liquido sintonizado em uma turbina eolica sujeito a carregamento aleatorio**. 2017. 90 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Mecânicas), Universidade de Brasília, Brasília, 2017.
- ANSYS versão 19.0 license Student. [S.I.]: **SAS IP**, inc, 2018.
- BHATTACHARYYA, S.; GHOSH, A.; BASU, B.. **Nonlinear modeling and validation of air spring effects in a sealed tuned liquid column damper for structural control**. Journal Of Sound And Vibration, [s.l.], v. 410, p.269-286, dez. 2017.
- BLEVINS, R. D. **Formulas for Natural Frequency and Mode Shape**. 1.st, Van Nostrand Reinhold Comp. , New York, 1979.
- BURGOS,R. G. **Código de Elementos Finitos para Solução de Problemas de Interação Fluido Estrutura 2D**. 2017. 188 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Universidade Federal do Pernambuco. Pernambuco 2017.
- CARNEIRO JUNIOR, D. P. **Comportamento do sloshing em ambiente de microgravidade**. 2017. 123 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica e Espacial), Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2017.
- CHANG, C. C.; QU, W. L. **Unified dynamic absorber design formulas for wind-induced vibration control of tall buildings**. The structural design of tall buildings, v. 7, p. 147–166, 1998.
- COOK, R. D., MALKUS D. S., PLESHA, M. E. – **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**, John Wiley & Sons, 3º ed. New York, 1989.
- DOWEEL, E. H. e VOSS, H. M. **The Effect of a Cavity on Panel Vibration**. Journal of American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 1, pp. 476-478, 1963.
- ESWARAN, M., ATHUL, S., NIRAJ, P., REDDY, G.R. and RAMESH, M. R. **Tuned liquid dampers for multi-storey structure: numerical simulation using a partitioned FSI algorithm and experimental validation**. Sadhana Vol 42. Nº 4 Abril 2017, pp.449-465
- EVERSTINE, C.G. **A symmetric potential formulation for fluid-structure interaction**. In: Journal of Sound and Vibration, vol.79, 157-160, 1981.
- FAHY, F. **Foundation of Engineering acoustics**. 1. ed. Academia Press, London, 2001.
- FU, L.; GUO, T.; LI, G. **Investigation on damping performance of new type oscillator liquid combin damper**. International Journal of Mechanical Sciences, v. 135, p.53-62, 2018

FERREIRA, L. R. D. **Desenvolvimento de uma bancada de testes para validação de um tanque de ondas numérico**. 2010. 98 f. Dissertação (Mestrado Engenharia Mecânica). Universidade Federal do Fluminense. Niteroi, 2010.

GEUZAIN, C - GMSH 4.0 – Copyright 1997-2018

GIBERT, RJ – **Vibrations des structures – Interactions avec les fluids – Sources d’excitation aléatoires**. Ed. Eyrolles, Paris, França (1988).

ROJAS, J. J. H. **Solução analítica de uma cavidade acústica rígida acoplada a uma placa flexível em vibrações livres**. 2015. 134 f. Dissertação (Mestrado em Integridade de Materiais da Engenharia), Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

HUO, Linsheng; QU, Chunxu; LI, Hongnan. **TLCD Parametric Optimization for the Vibration Control of Building Structures Based on Linear Matrix Inequality**. Journal Of Applied Mathematics, [s.l.], v. 2014, p.1-10, 2014.

IBRAHIM, R. **Liquid Sloshing dynamics: Theory and Application**, Cambridge University Press, New York, 2005.

KINSLER, L. E.; FREY, A. R.; COPPENS, A.B. and SANDERS, J. V. **Fundamentals of Acoustics**, 4th Edition. Ed. John Wiley and Sons. New York, 1999.

KOSAKA, H.; NOJI H.; YOSHIDA H. **Damping effects vibration control damper using sloshing of water**. Proceedings of the 10° World Conference on Earthquake Engineering, v. 4 p. 2435-2440, Madrid, 1992.

LAMB, H. **Hydrodynamics**, Cambridge University Press, 6 ed. 1993.

LOGAN, D. L. **A first course in the Finite Element Method**, 1a ed., Cengage Learning, Boston, MA, 2012.

MATLAB versão R2017a [S.l.]: The Mathworks, 2017.

MATTEO, A. D, IACONO F. L., NAVARRA G., PIRROTTA A. **Experimental validation of a direct pre-design formula for TLC**. Engineering Structures, [s.l.], v. 75, p.528-538, 2014.

MENDES, N B **Estudo comparativo analítico-numérico de aspectos da interação fluido-estrutura em cascas com aplicações a barragens em arco**. 2013. 343 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil), Universidade de Brasília. Brasília , 2013.

MITRA, S.; SINHAMAHAPATRA. K. P. **Slosh dynamics of liquid-filled containers with submerged componets using pressure based finit elemento method**. Journal of Sund and Vibrations, v. 304, p. 361-381, India, 2007.

MORAES, E. C., **Análise de cavidades acústicas em médias e altas frequências usando métodos de energia**. 2015. 128 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2015.

MORAIS, M.V. **Modelização Numérica pelo Método dos Elementos de Problemas de Interação Fluido-Estrutura**. 2000. 176 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil e Ambiental) Universidade de Brasília, Brasília 2000.

MONDAL, J. ; NIMMALA, H. ; ABDULLA,S. **Tuned Liquid Damper**. International Conference On Mechanical Engineering and Mechatronics, v. 6, p. 14-15, 2014.

OLSON, L.G.; BATHE, K.J. **Analysis of fluid-structure interaction. A direct symmetric coupled formulation based on the fluid velocity potencial**. In: Computers & Structures, vol. 21, n. 1/2, 21-32, 1985.

PEGORARO, M. (2016). **Estudo da análise modal baseada no acoplamento fluido-estrutura**. 2016. 110 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Universidade Tecnológica Federal do Paraná,Paraná, 2016.

PEDROSO, L.J. (1994). **Interação fluido-estrutura**. In: Notas de Curso e Apostila Didática. Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil – PPECC- Universidade de Brasília -FT/ENC Vs. 01 – Brasília, DF.

PEDROSO, L.J. (2000) - **Analytical Solutions for the Study of the Acoustic Behaviour of Cavities With Rigid and Flexible Walls - An Approach for Dams-Reservoir Interaction - Part II**. Relatório de Estudos de Pós-doutorado, University of Montreal, École Polytechnique, Civil Engineering Department, Structural Division.

PEDROSO, L.J. (2004). **Formulações Potencias para Abordagens Fluido-Estrutura** In: Notas do Curso de Interação Fluido-Estrutura e Apostila Didática. Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil – PPECC- Universidade de Brasília -FT/ENC Vs. 01 – Brasília, DF.

PEDROSO, L.J. (2006). **Dinâmica de Vigas Profundas**. In: Notas de Curso e Apostila Didática de Dinâmica das Estruturas II - Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil – PPECC- Universidade de Brasília -FT/ENC Vs. 02 – Brasília, DF.

RIBEIRO, P. M. V. **Soluções analíticas para cavidades acústicas bidimensionais com aplicação ao estado de problemas de interação dinâmica barragem-reservatório**. 2010. 306 p. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2010.

RIBEIRO, P. M. V.; PEDROSO, L. J. **Solution of the dynamic interaction problem between a frame structure and na acoustic cavity using imposed deformation functions at the interface**. Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering, v.2010, p.1-33, 2010.

RIBEIRO, P. M. V.; PEDROSO, L. J. **Uma Abordagem com Superposição modal para Problemas de Interação Fluido Estrutura**. Revista Internacional de Metodos Numericos para Calculos Y Diseno em Ingenieria. V.32 p. 79-90, 2016.

SAYAR, B. A; BAUMGARTEN, J, R. **Linear and nonlinear analysis of fluid sloshing dampers**. AIAA Journal, v. 20, nº 11, p. 1534-1538, 1982.

SIGRIST, J. F. **Fluid-Structure Interaction: An Introduction to Finite Element Coupling**. França: John Wiley & Sons Ltd, 2015.

SOUZA, S. M. DE. **Contribuição para uma Metodologia de Análise Acoplada Fluido-Estrutura em Cavidades Acústicas com Paredes Flexíveis**. 2007, 177 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil). Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2007.

SOUSA Jr, L. C. de. **Uma aplicação dos métodos dos elementos finitos e diferenças finitas à interação fluido-estrutura**. 2006. 197 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil), Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2006.

TEN, I.; MALENICA, S.; KOROBKIN, A. **Semi-analytical models of hydroelastic sloshing impact in tanks of liquefied natural gas vessels**. Philosophical Transactions Of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, [s.l.], v. 369, n. 1947, p.2920-2941, 2011.

TSUKAMOTO, M. M. **Modelagem Analítica e Simulação Numérica de um Sistema Móvel de Supressão de Sloshing**. 2010. 109 f. Tese (Doutora em Engenharia Civil). Universidade de São Paulo. São Paulo 2010.

WESTERGAARD, H. M. **Water Pressures on Dams During Earthquakes**. In: Transactions of the American Society of Civil Engineers, v. 98, p. 418-433, 1933.

ZIENKIEWICZ, O.C. E NEWTON, R.E. **Coupled Vibrations of a Structure Submerged in a Compressible Fluid**. Symposium on Finite Element Techniques, Stuttgart, 1969.

ANEXO A – SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL

Neste anexo será apresentado a solução analítica da equação da onda unidimensional apresentada por Gibert (1988) e Pedroso (1994) apud Morais (2000). A solução apresentada é uma ferramenta para validação dos resultados numéricos obtidos no presente trabalho.

A.1 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA 1-D

A expressão da equação da onda 1D é descrita por:

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{1}{k^2} p = 0 \quad (\text{A.1})$$

onde $k = c/\omega$ é denominado número de onda

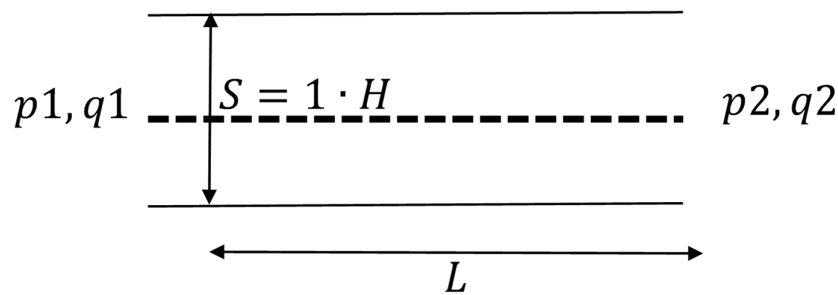


Figura A.1 – Representação esquemática do conduto reto.

A vazão mássica acústica q é expressa por:

$$q = \rho_f S V_f = \rho_f S \dot{X}_f \quad (\text{A.2})$$

onde $V_f = V_f(x,t)$ e $X_f = X_f(x,t)$ representam a velocidade e o deslocamento de uma partícula do fluido no domínio do tempo e S a seção transversal do conduto reto. Calculado o equilíbrio dinâmico de forças de uma partícula do fluido tem-se:

$$\frac{dp}{dx} + \rho_f \ddot{X}_f = 0 \quad (\text{A.3})$$

Substituindo a Equação (A.2) em (A.3) temos:

$$\frac{dp}{dx} + \frac{\dot{q}}{S} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Aplicando a transformada de Fourier na expressão acima tem-se:

$$\frac{dp}{dx} + \frac{i\omega}{S} q = 0 \quad (\text{A.5})$$

onde:

$$q = \frac{iS dp}{\omega dx} \quad (\text{A.6})$$

Substituindo a Equação (A.6) em (A.1) encontra-se a relação entre a pressão p e a vazão acústica q dada por:

$$\frac{dp}{dx} + \frac{i\omega S}{c} q = 0 \quad (\text{A.7})$$

Resolvendo a equação diferencial obtém-se:

$$p(x, \omega) = A \operatorname{sen} \left(\frac{\omega}{c} x \right) + B \operatorname{cos} \left(\frac{\omega}{c} x \right) \quad (\text{A.8})$$

$$q(x, \omega) = \frac{iS}{c} \left(A \operatorname{cos} \left(\frac{\omega}{c} x \right) - B \operatorname{sen} \left(\frac{\omega}{c} x \right) \right) \quad (\text{A.9})$$

Considerando o duto apresentado na Figura (A.1) e aplicando as condições de contorno as equações (A.8) e (A.9) podem ser escritas em função de p_1 , p_2 , q_1 e q_2 .

$$\begin{cases} p_2 = p(L, \omega) = p_1 \operatorname{cos} \lambda + \frac{c}{iS} q_1 \operatorname{sen} \lambda \\ p_2 = q(L, \omega) = -\frac{iS}{c} \operatorname{sen} \lambda + p_1 \operatorname{cos} \lambda \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

onde $\lambda = \omega L/c$. Assim a forma matricial é descrita por:

$$\begin{Bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} \lambda & \frac{c}{iS} \operatorname{sen} \lambda \\ -\frac{iS}{c} \operatorname{sen} \lambda & \operatorname{cos} \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

ou seja,

$$\begin{Bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

onde, A é a matriz de transferência.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\omega L}{iS} \\ -\frac{i\omega V}{c^2} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

A.2 – EXEMPLOS DE CONDIÇÕES DE CONTORNO

A.2.1 - Cavidade Fechado-Fechada

Na condição de contorno fechado – fechada a vazão acústica q é nula correspondendo a uma modo de vazão. Para a cavidade considera-se q_1 e q_2 nulos, assim a matriz de transferência possui a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} p_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \frac{c}{iS} \operatorname{sen} \lambda \\ -\frac{iS}{c} \operatorname{sen} \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

onde resolvendo o sistema matricial tem-se:

$$p_2 = \cos \lambda \cdot p_1 \quad (\text{A.15})$$

Da Equação (A.15) tem-se:

$$0 = -\frac{iS}{c} \underbrace{\operatorname{sen} \lambda}_{=0} \cdot p_1 \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\omega_n L}{c} = n\pi \quad (\text{A.17})$$

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} \quad (\text{A.18})$$

Com o intuito de obter os campos de pressão e a vazão acústica, a matriz de transferência ao longo do duto assume a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\lambda_n x/L) & \frac{c}{iS} \operatorname{sen}(\lambda_n x/L) \\ -\frac{iS}{c} \operatorname{sen}(\lambda_n x/L) & \cos(\lambda_n x/L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

onde:

$$\lambda_n = n\pi \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (\text{A.20})$$

Logo:

$$p(x) = \cos(\lambda_n x/L) p_1 \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{p(x)}{p_1} = \cos(\lambda_n x/L) \quad (\text{A.22})$$

$$q(x) = -\frac{iS}{c} \operatorname{sen}(\lambda_n x/L) \cdot p_1 \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{q(x)}{-iSp_1/c} = \text{sen}(\lambda_n x/L) \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{q(x)}{-iSp_1/c} = \text{sen}(\lambda_n x/L) \quad (\text{A.25})$$

A.2.2 Cavidade Aberto-Aberta

Na condição de contorno aberto – aberta a pressão p é nula. Para a cavidade considera-se p_1 e p_2 nulos, assim a matriz de transferência possui a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \frac{c}{iS} \text{sen} \lambda \\ -\frac{iS}{c} \text{sen} \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ q_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

ou seja:

$$0 = \frac{c}{iS} \text{sen} \lambda \cdot q_1 \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{\omega_n L}{c} = n\pi \quad (\text{A.28})$$

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} \quad \text{onde } n = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{A.29})$$

Logo,

$$\begin{Bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\lambda_n x/L) & \frac{c}{iS} \text{sen}(\lambda_n x/L) \\ -\frac{iS}{c} \text{sen}(\lambda_n x/L) & \cos(\lambda_n x/L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ q_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

$$p(x) = \frac{c}{iS} \text{sen}(\lambda_n x/L) \cdot q_1 \quad (\text{A.31})$$

$$\frac{p(x)}{cq_1/iS} = \text{sen}(\lambda_n x/L) \quad (\text{A.32})$$

$$q(x) = \cos(\lambda_n x/L) q_1 \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{q(x)}{q_1} = \cos(\lambda_n x/L) \quad (\text{A.34})$$

A.2.3 Cavidade Aberto – Fechada

Na condição de contorno aberto – fechada a pressão p_1 é nula e a vazão mássica q_2 é nula. Assim a matriz de transferência possui a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \frac{c}{iS} \operatorname{sen} \lambda \\ -\frac{iS}{c} \operatorname{sen} \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

ou seja,

$$0 = \cos \lambda \cdot p_1 \quad (\text{A.36})$$

$$\omega_n = \frac{c}{L} \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{onde } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.37})$$

Conforme demonstrado anteriormente a pressão e vazão acústica ao longo da cavidade são expressos por:

$$\begin{Bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\lambda_n x/L) & \frac{c}{iS} \operatorname{sen}(\lambda_n x/L) \\ -\frac{iS}{c} \operatorname{sen}(\lambda_n x/L) & \cos(\lambda_n x/L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

$$\lambda_n = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A.39})$$

$$p(x) = \cos(\lambda_n x/L) p_1 \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{p(x)}{p_1} = \cos(\lambda_n x/L) \quad (\text{A.41})$$

$$q(x) = -\frac{iS}{c} \operatorname{sen}(\lambda_n x/L) \cdot p_1 \quad (\text{A.42})$$

$$\frac{q(x)}{iS p_1 / c} = \operatorname{sen}(\lambda_n x/L) \quad (\text{A.43})$$

A.2.4 Cavidade Pistão – Aberta

Na condição de contorno pistão – aberta a vazão mássica q_1 é dada pela Equação (A.44) e a pressão p_2 é nula. A Figura A.2 apresenta o modelo de cavidade pistão – aberta.

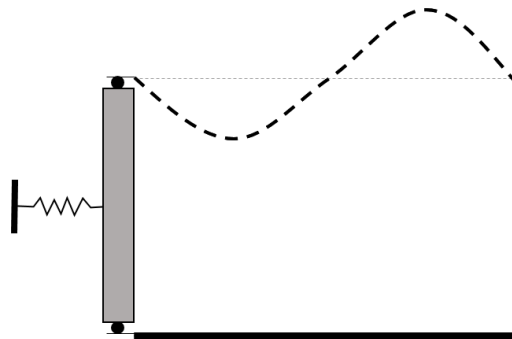


Figura A.2 – Representação esquemática do problema pistao-aberto.

Assim a matriz de transferência possui a seguinte forma:

$$q = i\omega_y \rho_f S_y X_1 \quad (\text{A.44})$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\omega_y L_y}{c}\right) & \frac{c}{iS} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_y L_y}{c}\right) \\ -\frac{iS}{c} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_y L_y}{c}\right) & \cos\left(\frac{\omega_y L_y}{c}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ i\omega_y \rho_f S X_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.45})$$

Logo a primeira linha do sistema matricial resulta:

$$p_1 = -\omega \rho c \tan(\lambda X) \quad (\text{A.46})$$

A equação de equilíbrio do pistão é dada por:

$$(K - \omega_y^2 m) X_1 = -p_{y,e} S \quad (\text{A.47})$$

Substituindo (A.46) em (A.47) tem-se:

$$(K - \omega^2 m - \omega \rho c \tan(\lambda)) X_1 = \quad (\text{A.48})$$

Que pode ser reescrita como:

$$\left[K \frac{1}{\rho c^2 S} - \omega_x^2 \frac{1}{\rho c^2 S} - \omega_x \rho c \tan \frac{\omega_x L}{c} \frac{1}{\rho c^2 S} \right] X_s = 0 \quad (\text{A.49})$$

A.2.5 Cavidade Pistão – Pistão

Na condição de contorno pistão – pistão a vazão mássica q_1 e q_2 são dadas pela Equação (A.50). A Figura A.3 apresenta o modelo de cavidade pistão – pistão.

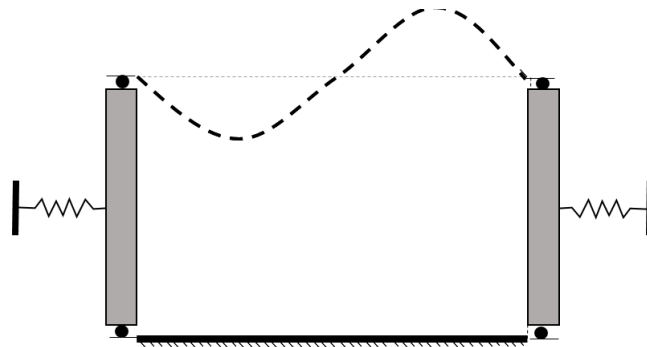


Figura A.3 – Representação esquemática do problema pistão-pistão.

Assim a matriz de transferência possui a seguinte forma:

$$q = i\omega_y \rho_f S_y X_1 \quad (\text{A.50})$$

$$\begin{bmatrix} p_{y,s} \\ i\omega_y \rho_f S_y X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\omega_y L_y}{c}\right) & \frac{c}{iS} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_y L_y}{c}\right) \\ -\frac{iS}{c} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_y L_y}{c}\right) & \cos\left(\frac{\omega_y L_y}{c}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{y,e} \\ i\omega_y \rho_f S_y X_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.51})$$

ou seja:

$$p_{y,e} = \omega_y \rho_f c \left(\frac{X_1}{\tan\left(\frac{\omega_y L_y}{c}\right)} - \frac{X_2}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_y L_y}{c}\right)} \right) \quad (\text{A.52})$$

$$p_{y,s} = \omega_y \rho_f c \left(\frac{X_1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_y L_y}{c}\right)} - \frac{X_2}{\tan\left(\frac{\omega_y L_y}{c}\right)} \right) \quad (\text{A.53})$$

As equações de equilíbrio do pistão são dadas por:

$$(K - \omega_y^2 m)X_1 = -p_{y,e}S \quad (\text{A.54})$$

$$(K - \omega_y^2 m)X_2 = -p_{y,s}S \quad (\text{A.55})$$

Considerando que os pistões estão em fase ou oposição de fase, calculam-se as frequências acopladas do pistão na direção longitudinal:

quando $X_1 = X_2$ tem-se:

$$\lambda^2 \left(\mu - \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \lambda} - \frac{1}{\operatorname{sen} \lambda} \right) \right) = \alpha \quad (\text{A.56})$$

quando $X_1 = -X_2$ tem-se:

$$\lambda^2 \left(\mu - \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \lambda} + \frac{1}{\operatorname{sen} \lambda} \right) \right) = \alpha \quad (\text{A.57})$$

Os modos de vibração são obtidos aplicando as condições de contorno na matriz de transferência. Considerando que os pistões estão em fase e em oposição fase tem-se:

$$\begin{bmatrix} p(y) \\ i\omega_y \rho_f S_y X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\lambda \frac{x}{L}\right) & \frac{c}{iS} \operatorname{sen}\left(\lambda \frac{x}{L}\right) \\ -\frac{iS}{c} \operatorname{sen}\left(\lambda \frac{x}{L}\right) & \cos\left(\lambda \frac{x}{L}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_y \rho_f c \left(\frac{1}{\tan \lambda} - \frac{1}{\operatorname{sen} \lambda} \right) \\ i\omega_y \rho_f S_y \end{bmatrix} X_1 \quad (\text{A.58})$$

quando $X_1 = X_2$:

$$\frac{p(y)}{\omega_y \rho_f c X_1} = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \lambda} - \frac{1}{\operatorname{sen} \lambda} \right) \cos\left(\lambda \frac{y}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\lambda \frac{y}{L}\right) \quad (\text{A.59})$$

$$\frac{q(y)}{\omega_y \rho S X_s} = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \lambda} - \frac{1}{\operatorname{sen} \lambda} \right) \cdot \operatorname{sen}\left(\lambda \frac{y}{L}\right) + \cos\left(\lambda \frac{y}{L}\right) \quad (\text{A.60})$$

$$\begin{bmatrix} p(y) \\ i\omega_y \rho_f S_y X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\lambda \frac{x}{L}\right) & \frac{c}{iS} \operatorname{sen}\left(\lambda \frac{x}{L}\right) \\ -\frac{iS}{c} \operatorname{sen}\left(\lambda \frac{x}{L}\right) & \cos\left(\lambda \frac{x}{L}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_y \rho_f c \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \lambda} + \frac{1}{\operatorname{sen} \lambda}\right) \\ i\omega_y \rho_f S_y \end{bmatrix} X_1 \quad (\text{A.61})$$

quando $X_1 = -X_2$:

$$\frac{p(y)}{\omega \rho_f c X_1} = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \lambda} + \frac{1}{\operatorname{sen} \lambda}\right) \cdot \cos\left(\lambda \frac{y}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\lambda \frac{y}{L}\right) \quad (\text{A.62})$$

$$\frac{q(y)}{\omega \rho S X_s} = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \lambda} + \frac{1}{\operatorname{sen} \lambda}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\lambda \frac{y}{L}\right) + \cos\left(\lambda \frac{y}{L}\right) \quad (\text{A.63})$$

ANEXO B – PROBLEMA DE SUPERFÍCIE LIVRE

B.1 – ONDAS DE SUPERFÍCIE LIVRE EM UMA CAIDADE RETANGULAR

As soluções para ondas de superfície livre apresentadas nesse anexo foram descritas por Pedroso (2000) apud Morais (2000). A equação que governa o movimento tridimensional da onda está representada na Equação:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + m^2 \right) F = 0 \quad (\text{B.1})$$

A equação acima pode ser reescrita como:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + p^2 \right) F = 0 \quad (\text{B.2})$$

e

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + q^2 \right) F = 0 \quad (\text{B.3})$$

onde p e q são constantes, tal que:

$$m^2 = p^2 + q^2 \quad (\text{B.4})$$

Considerando que p e q são uma espécie de vetores de frequência na direção x e y, a Equação (B.2) e (B.3) correspondem a uma espécie de equação da onda transformada por Fourier:

Considerando a cavidade retangular fechada nas quatro direções no plano em que $z=0$, as condições de contorno de parede rígida para a cavidade são:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \vec{n}} = 0, \text{ para } \begin{cases} x = 0, x = a \\ y = 0, y = b \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

As soluções da Equação (B.2) e (B.3) são do tipo:

$$F = A_x \cos px + B_x \sin px \quad (\text{B.6})$$

$$F = A_y \cos py + B_y \sin py \quad (\text{B.7})$$

onde A_x , A_y , B_x e B_y são determinadas pelas condições de contorno. Logo:

Para $x = 0$,

$$-pA_x \operatorname{sen}(p \cdot 0) + pB_x \cos(p \cdot 0) = 0 \Rightarrow \therefore B_x = 0 \quad (\text{B.8})$$

Para $x = a$,

$$-pA_x \operatorname{sen}(p \cdot 0) + pB_x \cos(p \cdot 0) = 0 \quad (\text{B.9})$$

$$-pA_x \operatorname{sen}(p \cdot a) = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$\operatorname{sen}(p \cdot a) = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$p = i\pi/a \quad (\text{B.12})$$

Desta forma,

$$F = A_x \cos(px) = A_x \cos \frac{i\pi}{a} \quad i = 1,2,3 \quad (\text{B.13})$$

Na direção y o processo é análogo, ou seja,

$$F = A_y \cos(py) = A_y \cos \frac{j\pi}{a} \quad i = 1,2,3 \quad (\text{B.14})$$

Desta forma, a solução para a equação de Laplace é:

$$\phi = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} - \frac{Ag \operatorname{cosh} m_n(z+h)}{\omega_n \operatorname{cosh}(m_n h)} \cdot \cos \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b} \quad (\text{B.15})$$

onde:

$$\omega_n^2 = m_n g \tanh(m_n h) \quad (\text{B.16})$$

e

$$m_n^2 = p_i^2 + q_j^2 \quad (\text{B.17})$$

Para a solução do caso 1 estudado no presente trabalho as condições de contorno são fechada- aberta na direção x e fechada – fechada na direção y . Assim as condição de contorno são:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \vec{n}} = 0 \quad , \text{para } x = 0, y = 0 \text{ e } y = b \quad (\text{B.18})$$

$$p = 0 \quad , \text{para } x = a \quad (\text{B.19})$$

Procedendo a solução conforma apresentado anteriormente a solução é:

$$\phi = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{Ag \cosh m_n(z+h)}{\omega_n \cosh(m_n h)} \cdot \cos \frac{i\pi x}{2a} \cos \frac{j\pi y}{b} \quad (\text{B.20})$$

onde:

$$\omega_n^2 = m_n g \tanh(m_n h) \quad (\text{B.21})$$

e,

$$m_n^2 = p_i^2 + q_j^2 \quad (\text{B.22})$$

Para:

$$p = i\pi/2a \quad e \quad q = i\pi/b \quad (\text{B.23})$$