Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

# Um critério de divisibilidade universal sob a ótica da teoria de aprendizagem significativa de Ausubel

por

**Fausto Fernandes da Silva Camelo**

Brasília

2018

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

# Um critério de divisibilidade universal sob a ótica da teoria de aprendizagem significativa de Ausubel

por

**Fausto Fernandes da Silva Camelo** *

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado "Profissional em Matemática" em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção de grau de*

**MESTRE**

Brasília, 23 de abril de 2018.

Comissão Examinadora:

Ricardo Ruviaro
Dr. Ricardo Ruviaro - UnB - Orientador

Jhone Caldeira Silva
Dr. Jhone Caldeira Silva - UFG - Examinador

Regina da Silva Pina Neves
Dra. Regina da Silva Pina Neves - UnB - Examinadora

*O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração deste trabalho.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)


FERNANDES DA SILVA CAMELO, FAUSTO

Fc Um critério de divisibilidade universal sob a ótica da teoria de aprendizagem significativa de Ausubel / FAUSTO FERNANDES DA SILVA CAMELO; orientador RICARDO RUVIARO. -- Brasília, 2018.
72 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2018.

1. Aritmética. 2. Critérios de divisibilidade. 3. Aprendizagem significativa. 4. Teorema de Sebá. 5. Números primos. I. RUVIARO, RICARDO, orient. II. Título.

# Agradecimentos

Eu tenho muito a agradecer. E a muitos. A lista é exaustiva, mas é real.

Muito obrigado, Senhor. Tenho convicção de que este trabalho jamais seria executado sem a Sua providência. Obrigado por ouvir e responder minhas muitas orações. Tive todas as condições favoráveis para implementar esta pesquisa. Fui testemunha e alvo de Seu cuidado. Portanto, toda honra e glória sejam dadas ao Senhor. Sempre!

À minha amada esposa, Marilia. Muito obrigado, querida. Você é o maior instrumento da ação de Deus em minha vida. Espero compensar minha ausência, dedicando doravante mais tempo a você e a nossas filhas.

Aos meus pais, amorosos educadores e apoiadores incondicionais, minha eterna gratidão e admiração. Eu sou fruto do amor dos senhores. E aos meus sogros, por todo incentivo e apoio no cuidado com a família, muito obrigado.

Aos irmãos em Cristo que intercederam por mim e me fortaleceram com sábios conselhos. Em especial, aos amigos Paulo Volpe e Wagih Rassi. Vocês foram determinantes, e sabem disso. Obrigado.

Muito obrigado, colegas e professores do PROFMAT - UnB. Eu aprendi muito com vocês. Ressalto nessa plêiade o caríssimo Márcio Gurgel, pois sem ele eu não teria conseguido os livros do Ausubel e outros relevantes materiais; os professores Édson Alves da Costa Júnior, por encontrar o tema desta dissertação; Antônio Luiz de Melo, pelas excelentes aulas e por ajudar-me a encontrar o mestre Sebá.

Muito obrigado, Ten. Cel. Fernanda Pomperek Camilo e Ten. Janaína Alexandre, professoras do Colégio Militar de Brasília, que tanto me ajudaram incentivando-me e adaptando toda a grade horária da escola para que eu não perdesse as aulas do PROFMAT.

Em relação ao iluminado professor Sebastião Vieira do Nascimento (Sebá), meu profundo respeito e gratidão. Foi a partir de seus ensinamentos que este trabalho tomou forma. Obrigado por autorizar-me a publicar esta pesquisa. Em sua homenagem, fiz questão de denominar o principal resultado deste estudo como Teorema de Sebá.

Às instituições UnB e CAPES pela estrutura apropriada para estudar, pelo apoio financeiro e pelas portas abertas para realizar minha pesquisa.

Ao amigo professor Jhone Caldeira Silva, por indicar-me um orientador de verdade - um mentor - e pelos riquíssimos conselhos e ensinamentos. Você é um exemplo para mim!

Finalmente, meus sinceros agradecimentos ao professor Ricardo Ruviaro. Sua orientação foi impecável, muito além de minhas aspirações. Por sua causa, encerro este trabalho sonhando com o próximo.

# Resumo

A divisibilidade é um tópico fundamental da Aritmética, pois ela permite reduzir a análise de um número inteiro, por maior que ele seja, a seus fatores primos. Para descobrir quais são os fatores primos que compõem um número inteiro a um custo menor do que efetuar a divisão, surgem os critérios de divisibilidade. Este trabalho apresenta um critério de divisibilidade válido para qualquer número primo superior a cinco (teorema de Sebá), numa abordagem fundamentada na teoria de aprendizagem significativa de David Paul Ausubel, a partir da qual as atividades propostas a mais de 150 estudantes do 1º ano do Ensino Médio de uma escola da rede privada possibilitaram comprovar a viabilidade do ensino do teorema de Sebá, bem como o levantamento de relevantes informações relacionadas às deficiências desses alunos em Aritmética.

Palavras-chave: Ensino; Aritmética; Números primos; Critérios de divisibilidade; Teorema de Sebá.

# Abstract

The divisibility is a fundamental topic of Arithmetic, because it allows reducing the analysis of an integer, however large it may be, to its prime factors. To find out which prime factors make up an integer at a lower cost than dividing, the divisibility criteria appear. This work presents a criterion of divisibility valid for any prime number greater than five (Sebá's theorem), in an approach based on David Paul Ausubel's meaningful learning theory, from which the activities proposed to more than 150 1st year students Secondary education from a private school network made it possible to prove the viability of teaching the Sebá theorem, as well as the collection of relevant information related to the deficiencies of these students in Arithmetic.

Key-words: Teaching; Arithmetic; Prime numbers; Divisibility criteria; Sebá's Theorem.

# Sumário

Capítulo 1

# Introdução

Este trabalho versa sobre um interessante resultado para números primos encontrado pelo pesquisador há cerca de uma década, a saber: um critério de divisibilidade válido para qualquer primo maior que cinco.

Depois de vários anos na prática docente, incomodado por utilizar o mesmo material didático e estratégias de ensino, o professor pesquisador decidiu revisitar seus livros de Aritmética, não encontrando elementos novos que julgasse adequados ou viáveis para serem ensinados sem extrapolar o cronograma ou o conteúdo programático. Então, recorrendo a alguns *sites* e *blogs* sobre o assunto, ele encontrou um breve artigo intitulado "*Critérios de divisibilidade por qualquer número primo maior que onze*", do professor Sebastião Vieira do Nascimento (Sebá). Intrigado com o título, decidiu examinar o trabalho e constatou a simplicidade do "teorema", sua abrangência, viabilidade e eficácia, passando imediatamente a ensiná-lo a seus alunos.

Muitos anos se passaram até que em 2017, enquanto assistia a uma aula da disciplina Aritmética (PROFMAT-UnB) sobre critérios de divisibilidade, o pesquisador compartilhou com a turma o resultado que denominou Teorema de Sebá. Naquela ocasião, o professor da disciplina afirmara desconhecer tal resultado, estimulando-o a elaborar sua monografia sobre o tema, com a ressalva de primeiramente conseguir o aval do professor Sebá para publicar o resultado que obtivera. A dificuldade para localizá-lo foi grande, pois muitos anos já haviam passado desde que o pesquisador tivera contato com tal artigo na *Internet*, não possuindo grandes pistas para encontrá-lo, a não ser a informação de que Sebá fora professor titular do Departamento de Administração da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG-PB).

Ao cursar a disciplina Geometria Analítica no PROFMAT, o pesquisador perguntou ao professor em questão se ele, porventura, conhecia o professor Sebá. Para sua grata surpresa (uma providência divina!), ele não somente o conhecia como também conseguira o número do telefone de Sebá. Aquele personagem fictício passou, de fato, a ter existência para o pesquisador.

Finalmente, estabelecido o contato com o nobre professor Sebá, foi obtida a autorização e o incentivo para publicar o trabalho e, também, a inesperada informação de que ele, na realidade, não havia demonstrado o Teorema de Sebá. Isso reforçou a intenção de dar prosseguimento ao projeto. A partir daí, uma respeitosa e fraterna relação foi construída entre o pesquisador e o professor Sebá.

Não há dúvidas sobre a relevância desse tema no passado, quando inexistiam máquinas calculadoras tão disponíveis. Portanto, um critério de divisibilidade válido para qualquer número primo maior que cinco traria relevante contribuição matemática se fosse obtido há algumas décadas. Mas, a despeito disso, ainda hoje os critérios de divisibilidade constituem uma importante ferramenta para desenvolver diversas habilidades consideradas fundamentais acerca da natureza e do significado dos números inteiros. Essencialmente, os principais resultados e teoremas utilizados para resolver os incontáveis problemas no vasto universo da Aritmética estão intimamente relacionados ao conceito de número primo. Portanto, decompor um número natural em seus fatores primos torna-se imprescindível. Mas como otimizar essa prática? Uma boa resposta é utilizar critérios de divisibilidade.

É verdade que o ensino dos critérios de divisibilidade ocorre no 6º ano do Ensino Fundamental, para cuja série existe uma vasta bibliografia sobre o assunto, mas é igualmente verdadeiro que sua aplicação acompanha o dia a dia do aluno nos anos subsequentes. Entretanto, ao analisar alguns livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio, observa-se um grande silêncio a respeito desse importante conteúdo, levando a crer que um estudante nessa fase realmente o domina, não sendo necessária uma revisitação. Será?

Um dos objetivos da presente pesquisa foi investigar essa problemática, e constatou-se no grupo analisado que tal suposição não se confirma. Outro objetivo foi apresentar um critério de divisibilidade válido para qualquer número primo superior a cinco utilizando somente tópicos da Aritmética já estudados, bem como verificar a viabilidade de seu ensino em sala à luz da teoria da aprendizagem significativa.

Aproveitando o fato de a Aritmética fazer parte do conteúdo explorado na primeira etapa do PAS - UnB [1], optou-se por empregar a pesquisa apenas a estudantes do 1º ano do Ensino Médio. Dessa forma, o professor pesquisador conseguiu convencer a direção da escola na qual trabalha a autorizar a aplicação de seu estudo durante o horário das aulas, obtendo assim uma forte adesão por parte dos alunos. Quatro atividades essenciais para o entendimento do Teorema de Sebá foram elaboradas, à luz da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, e propostas aos estudantes. A escolha desse referencial téorico deve-se à sua objetividade e ao fato de o professor pesquisador realmente acreditar em sua validade e aplicabilidade para o ensino de Matemática.

Ainda associada à teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, tomou-se como parte da metodologia uma investigação de como os critérios de divisibilidade costumam ser abordados nos livros didáticos nacionais e em periódicos como a Revista do Professor de Matemática (RPM).

Durante essa investigação, constatou-se que oito das oitenta e três RPMs analisadas apresentam o tópico *critérios de divisibilidade*. Em especial, na RPM 58 foi encontrado um critério de divisibilidade para qualquer número primo superior a cinco, de modo parecido ao que propõe o Teorema de Sebá. Em virtude dessa similaridade, o artigo foi transcrito quase na íntegra, a despeito de o principal objetivo deste trabalho ser estudar a proposta de Sebá sob a ótica da teoria de aprendizagem significativa de Ausubel.

Este trabalho foi dividido em cinco capítulos e um apêndice. No Capítulo 1 foram apresentados importantes tópicos sobre a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, bem como a justificativa para essa adoção. O Capítulo 2 aborda somente os elementos essenciais para o estudo do Teorema de Sebá à luz da Teoria dos Números, constituindo assim a fundamentação matemática do trabalho. O Capítulo 3 mostra como os critérios de divisibilidade costumam ser trabalhados nos livros didáticos e periódicos especializados (RPM), culminando, ao final, no mais importante tópico deste trabalho: a apresentação, aplicação e demonstração do Teorema de Sebá, utilizando linguagem simples e acessível a alunos de Ensino

[1] O Programa de Avaliação Seriada da Universidade de Brasília (PAS/UnB) foi criado em 1995 como uma alternativa ao vestibular tradicional, para selecionar, de maneira sistemática e gradativa, futuros estudantes da UnB. Seu alicerce é a integração da educação básica com a superior, visando à melhoria da qualidade do ensino em todos os níveis. O processo seletivo é realizado em três etapas, avaliando, ao final de cada ano letivo, apenas alunos matriculados no Ensino Médio. A média das três notas obtidas resulta na classificação dos candidatos.

Médio. Já o Capítulo 4 explica a metodologia adotada no estudo de campo realizado com a intenção de aferir a viabilidade do ensino do Teorema de Sebá em sala. O Capítulo 5 ocupa-se inteiramente da análise dos dados obtidos no estudo de campo. Vale ressaltar que a quantidade de informações significativas é imensa, apontando para futuras frentes de pesquisa a partir do farto material levantado. Após a conclusão do trabalho, encontram-se o apêndice, com todas as atividades desenvolvidas no estudo de campo, e as referências bibliográficas.

Capítulo 2

# Tópicos da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel

A fundamentação teórica deste trabalho apoia-se na teoria da aprendizagem significativa[1] proposta por David Paul Ausubel. Neste capítulo, serão expostos os motivos que justificam essa escolha, uma breve biografia de Ausubel e os pilares dessa teoria.

## 2.1 Motivação para adotar a teoria da aprendizagem significativa

Em busca de uma metodologia para estruturar o presente trabalho, o pesquisador deparou-se com uma infinidade de teorias de aprendizagem, geralmente enquadradas em três filosofias subjacentes: a comportamentalista (behaviorismo), a humanista e a cognitivista (construtivismo). Numa leitura superficial e panorâmica dessas correntes, uma frase de Ausubel em [1] chamou a atenção:

> O fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos.

Atuando há mais de vinte anos no magistério como professor de Ensino Fundamental e Médio, principalmente em escolas privadas, o pesquisador enquadra-se na realidade enfrentada por boa parte dos docentes brasileiros que, para receber uma melhor remuneração, assume muitas turmas, por vezes em diferentes instituições de ensino, cada uma com cerca de quarenta e cinco alunos, tendo que cumprir um extenso currículo utilizando a metodologia do "cuspe e giz", a fim de preparar o estudante para algum exame. Dessa forma, ao longo de vários anos, em resposta a apelos de pais que transferem a responsabilidade de educar seus filhos à escola, muitas instituições de ensino costumam promover um importante evento denominado semana pedagógica, no qual a proposta pedagógica da escola e todo o planejamento previsto costumam ser abordados. Nesse encontro, reflexões são suscitadas ao longo de diversas palestras motivacionais que a equipe diretiva organiza. Na opinião do professor pesquisador, essa é uma prática importante e louvável. Todavia, frequentemente se observa uma contradição entre o discurso e a prática,

[1] A teoria da aprendizagem significativa é amplamente estudada no meio acadêmico, e, para tanto, foi organizado um evento próprio intilulado "Encontros de Aprendizagem Sginificativa". Para mais informações, acesse http://www.apsignificativa.com.br/7enas.

causando uma inquietante sensação de incapacidade ou incompetência do professor no exercício de sua função, pois inflamados discursos proferidos por famosos palestrantes "educadores" – muitos deles jamais lecionaram! – lançam sobre o professor teorias mirabolantes e palavras de efeito que embelezam a fala, mas constituem um insustentável fardo. Por exemplo: "Professor, você é um educador[2] e, portanto, deve conhecer seu aluno!" Paradoxalmente, a mesma escola que contrata tal palestrante, e endossa seu discurso ao longo do ano, oferece ao professor inúmeras turmas, cada qual com pelo menos 45 alunos. Como conhecer tais alunos? Impossível! Não é à toa que alguns colegas denominam tais encontros de "semana demagógica". Dessa forma, para o pesquisador, a aplicabilidade de várias teorias de aprendizagem em sala de aula lhe parecia algo cada vez mais distante.

Por isso a frase de Ausubel é libertadora e estimulante, trazendo alívio e esperança ao pesquisador, pois sua aplicabilidade no ensino da Matemática é plausível e coerente, uma vez que, para evoluir no estudo dessa disciplina, faz-se necessário deter os pré-requisitos estudados em fases anteriores. Assim, se o estudante não dominar os conhecimentos prévios, dificilmente terá progressos. Conhecer tais pré-requisitos, identificar o que o aluno sabe deles e, a partir daí, elaborar estratégias para ensinar o novo conteúdo constitui algo perfeitamente aplicável à realidade na qual o pesquisador está inserido. Pela praticidade dessa teoria, ela responde aos anseios do presente trabalho. Por exemplo, um aluno do 2º ano do Ensino Médio que está estudando logaritmos apresentará severas dificuldades nesse conteúdo se não dominar potenciação, tópico do 6º ano do Ensino Fundamental. Portanto, antes de apresentar logaritmos, urge submeter o estudante a uma revisão de potenciação.

O trabalho central da teoria de Ausubel está na identificação dos fatores que efetivam e facilitam a aprendizagem. Pela objetividade dessa teoria, faz-se coro com Aragão em [23]:

> Como facilitar o encontro da estrutura lógica de um determinado conteúdo com a estrutura psicológica de conhecimento do aluno? Surge daí a preocupação com a aprendizagem significativa de matérias escolares, ou seja, com a natureza do processo de aquisição, retenção e transferência de significados e com a natureza do material de aprendizagem, que caracteriza a concepção cognitivista de aprendizagem, manifestada na teoria de David P. Ausubel.

É bem verdade que a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel tem sua essência voltada ao conceito dos aspectos cognitivos da aprendizagem e dos conteúdos acadêmicos, e, por não valorizar outras dimensões da aprendizagem, ela sofreu críticas, sendo posteriormente aperfeiçoada e amplamente divulgada pelo pesquisador Joseph Donald Novak, amigo de Ausubel.

## 2.2 Uma breve biografia de Ausubel

O psiquiatra David Paul Ausubel (1918 - 2008), um dos ícones do Cognitivismo [3], dedicou parte de sua vida acadêmica à Psicologia Educacional, principalmente no tocante à forma como a aprendizagem ocorre.

[2] Em sua experiência pessoal, o pesquisador constata que escolas e famílias estão confundindo escolarização com educação. Muitas escolas no Brasil prometem, em sua proposta pedagógica, fazer aquilo que, de fato, não lhes compete, a saber, educar o aluno em todas as áreas da vida. Isso coloca sobre o professor um fardo muito pesado. Conforme alerta o filósofo Mario Sergio Cortella: "As famílias estão confundindo escolarização com educação. É preciso lembrar que a escolarização é apenas uma parte da educação. Educar é tarefa da família. Muitas vezes, o casal não consegue, com o tempo que dispõe, formar seus filhos e passa a tarefa ao professor, responsável por 35, 40 alunos". Disponível em:< http://educacao.estadao.com.br/noticias/geral,cortella-a-escola-passou-a-ser-vista-como-um-espaco-de-salvacao,1168058>. Acesso em: 20 mar.2018.

[3] O Cognitivismo foi uma corrente da psicologia que se contrapôs ao Behaviorismo. Este contempla o comportamento como uma forma funcional e reacional de organismos vivos, não aceitando qualquer relação com o transcendental, com a introspecção e aspectos filosóficos, restringindo, portanto, seu estudo a comportamentos objetivos que podem ser observados. Já o Cognitivismo é uma abordagem teórica para o entendimento da mente. Embora reconheça a importância da experiência

Sua teoria da aprendizagem significativa foi amplamente divulgada e aperfeiçoada pelo pesquisador Joseph Donald Novak.

Em 1963, Ausubel apresentou sua teoria em contraposição às teorias behavioristas, que predominavam nessa época. Estas enfatizavam a influência do meio sobre o sujeito. Aquilo que os estudantes sabiam não era considerado e entendia-se que eles só aprenderiam se fossem ensinados por alguém.

Filho de pobres imigrantes judeus provenientes da Europa Central, Ausubel nasceu nos Estados Unidos no final da Primeira Guerra Mundial, tendo sofrido durante anos na escola por não ter sua história pessoal considerada pelos educadores.

## 2.3 A teoria da aprendizagem significativa de Ausubel

De acordo com Moreira, em [11], podem-se distinguir três tipos de aprendizagem: cognitiva (resulta do armazenamento organizado de informações na mente do aprendiz), afetiva (resulta de sinais internos ao indivíduo e pode ser identificada com experiências tais como dor e prazer, descontentamento ou satisfação, alegria ou ansiedade) e psicomotora (envolve respostas musculares adquiridas por meio de treino e prática).

Ausubel, um dos ícones do Cognitivismo, propõe uma explicação teórica do processo de aprendizagem à luz dessa corrente. Por cognição, entenda-se "o processo através do qual o mundo de significados tem origem", e por aprendizagem, "um processo de armazenamento de informação, condensação em classes mais genéricas de conhecimentos, que são incorporados a uma estrutura no cérebro do indivíduo, de modo que esta possa ser manipulada e utilizada no futuro. É a habilidade de organização das informações que deve ser desenvolvida." Ver [11].

Ausubel entendia que o armazenamento de informações no cérebro humano ocorre de modo altamente "organizado, formando uma hierarquia conceitual na qual elementos mais específicos de conhecimento são ligados (e assimilados) a conceitos mais gerais, mais inclusivos," conforme [11]. Essa ligação não aleatória na qual conceitos mais relevantes e inclusivos, disponíveis na estrutura cognitiva do aprendiz, interagem com um novo material, isto é, ideias e informações logicamente concatenadas entre si (e, agora, aos conceitos já existentes na estrutura cognitiva), sendo abrangidos e também modificados por essa nova informação, é denominada *ancoragem*.

*Subsunçor*, de acordo com [11], foi o nome dado por Ausubel aos conceitos já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz responsáveis pela ancoragem citada. Vale ressaltar que a palavra "*subsunçor*" não existe em Português; é uma tentativa de aportuguesar a palavra inglesa "*subsumer*" ("*facilitador*" ou "*subordinador*").

Conforme Moreira, em [11], especialista na teoria ausubeliana:

> Para Ausubel, aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto especificamente relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo, ou seja, este processo envolve a interação da nova informação com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausubel define como subsunçor, existente na estrutura cognitiva do indivíduo. A aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em conceitos ou proposições relevantes, preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz.

afetiva, Ausubel considera que aprendizagem significa organização e integração do conteúdo total de ideias de um certo indivíduo em sua estrutura cognitiva.

Nesse sentido, antes de ensinar um novo conteúdo, é fundamental que o professor saiba quais são os pré-requisitos que seus alunos devem possuir, para, então, possibilitar a ancoragem do novo conteúdo. Por isso, o postulado mais emblemático da teoria ausubeliana assevera que o conhecimento prévio do aluno é a chave para a aprendizagem significativa. Nas palavras de Ausubel, em [1]:

> Se eu tivesse que reduzir toda psicologia educacional a um único princípio, diria isto: O fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos.

### 2.3.1 Tipos de aprendizagem

Para Ausubel, há diferentes tipos de aprendizagem escolar e, para sistematizá-las, ele propõe duas distinções estruturais: a primeira entre aprendizagem por recepção e aprendizagem por descoberta; a segunda, entre aprendizagem automática (por decoração) e aprendizagem significativa.

Todas as citações desta seção pertencem a Ausubel, em [1]. Convicto da prevalência dos tipos significativos de aprendizagem no ambiente escolar, Ausubel propositalmente delimita seu estudo, declarando:

> Estão fora de consideração, além da aprendizagem automática, alguns tipos de aprendizagem não cognitiva (não intelectual), como por exemplo aprendizagem por condicionamento clássico ou operante, aprendizagem de habilidades motoras e tipos menos complexos de aprendizagem cognitiva, como a aprendizagem perceptual e discriminatória simples.

#### Aprendizagem por recepção *versus* aprendizagem por descoberta

Na página 20, Ausubel assevera que a aprendizagem receptiva pode ser automática (mecânica) ou significativa, mas em ambos os casos "todo o conteúdo daquilo que vai ser aprendido é apresentado ao aluno sob a forma final. A tarefa de aprendizagem não envolve qualquer descoberta independente por parte do estudante. Do aluno exige-se somente internalizar ou incorporar o material que é apresentado de forma a tornar-se acessível ou reproduzível em alguma ocasião futura. No caso da aprendizagem receptiva significativa, a tarefa ou matéria potencialmente significativa é compreendida ou tornada significativa durante o processo de internalização. No caso da aprendizagem receptiva automática, a tarefa de aprendizagem não é potencialmente significativa nem se torna significativa no processo de internalização.", isto é, há pouca ou nenhuma associação com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva, de modo que a nova informação é armazenada de maneira arbitrária, não se ligando aos conceitos subsunçores específicos. Entretanto, nada impede que elas, automática e significativa, ocorram concomitantemente na mesma tarefa de aprendizagem.

Por outro lado, na aprendizagem por descoberta, o conteúdo principal daquilo que será aprendido não é dado, mas deve ser descoberto pelo aluno antes que possa ser significativamente incorporado à sua estrutura cognitiva. Entretanto, após a descoberta em si, a aprendizagem só é significativa se o conteúdo descoberto ligar-se a conceitos subsunçores relevantes já existentes na estrutura cognitiva.

Ausubel lembra outras distinções entre as aprendizagens receptiva e por descoberta: $i$) com respeito aos seus respectivos papéis principais no funcionamento e desenvolvimento intelectual, grande parte da aprendizagem acadêmica é adquirida por recepção, enquanto os problemas cotidianos costumam ser solucionados por meio da aprendizagem por descoberta; $ii$) quanto ao estado do desenvolvimento em que cada uma delas emerge, o ensino por descoberta é um meio primário eficiente de transmitir o conteúdo de uma disciplina acadêmica, enquanto o ensino por recepção implica um nível mais alto de maturidade cognitiva e abstração. Todavia, algumas superposições de função obviamente existem. Nesse sentido, é importante ponderar que:

> a aprendizagem mecânica é sempre necessária quando um individuo adquire informação numa área do conhecimento completamente nova para ele. Isto é, a aprendizagem mecânica ocorre até que alguns elementos de conhecimento, relevantes a novas informações na mesma área, existam na estrutura cognitiva e possam servir de subsunçores, ainda que pouco elaborados. À medida que a aprendizagem começa a ser significativa, esses subsunçores vão ficando cada vez mais elaborados e mais capazes de ancorar novas informações.

Além disso, Ausubel defende que grande parte da instrução em sala de aula está organizada por meio de linhas de aprendizagem receptiva, pois aprender por descoberta costuma levar muito mais tempo e redescobrir aquilo que já foi, há muito, descoberto pode representar uma grande perda de tempo, e de objetividade.

Finalmente, outra proposição defendida por Ausubel na página 23 é a de que “tanto a aprendizagem receptiva como a por descoberta podem ser automáticas ou significativas dependendo das condições sob as quais a aprendizagem ocorre”.

### Aprendizagem significativa *versus* aprendizagem automática

Conforme Ausubel, página 23:

> A aprendizagem significativa ocorre quando a tarefa de aprendizagem implica relacionar, de forma não arbitrária e substantiva (não literal), uma nova informação a outras com as quais o aluno já esteja familiarizado, e quando o aluno adota uma estratégia correspondente para assim proceder. Aprendizagem automática, por sua vez, ocorre se a tarefa consistir de associações puramente arbitrárias, como na associação de pares, quebra-cabeça, labirinto ou aprendizagem de séries e quando falta ao aluno o conhecimento prévio relevante necessário para tornar a tarefa potencialmente significativa e também se o aluno adota uma estratégia apenas para internalizá-la de uma forma arbitrária, literal.

### Condições que favorecem a aprendizagem significativa

Na página 34, Ausubel afirma que há duas condições fundamentais para que a aprendizagem significativa ocorra:

1º) o estudante precisa estar disposto a relacionar tal material de maneira consistente e não arbitrária;

2º) o conteúdo a ser ensinado deve ser potencialmente revelador.

Em suas palavras:

> A aprendizagem significativa pressupõe que o aluno manifeste uma disposição para a aprendizagem significativa – ou seja, uma disposição para relacionar, de forma não arbitrária e substantiva, o novo material à sua estrutura cognitiva – e que o material aprendido seja potencialmente significativo – principalmente incorporável à sua estrutura de conhecimento através de uma relação não arbitrária e não literal. Portanto, independentemente do quanto uma determinada proposição é potencialmente significativa, se a intenção do aluno é memorizá-la arbitrária e literalmente (como uma série de palavras arbitrariamente relacionadas), tanto o processo de aprendizagem como o produto da aprendizagem serão automáticos. E inversamente, não importa se a disposição do aluno está dirigida para a aprendizagem significativa,

pois nem o processo nem o produto da aprendizagem serão significativos se a tarefa da aprendizagem não for potencialmente significativa – ou seja, se não puder ser incorporada à estrutura cognitiva através de uma relação não arbitrária e substantiva.

Ausubel afirma que, para um conteúdo ser "potencialmente significativo", dois fatores primordiais devem ser considerados:

1º) a natureza do assunto a ser aprendido, ou seja, aquilo que será ensinado deve ter coerência lógica (fazer sentido);

2º) a natureza da estrutura cognitiva de cada aluno, isto é, "é necessário que o conteúdo ideacional relevante esteja disponível na estrutura cognitiva de um determinado aluno".

Infere-se, portanto, que, em sala de aula, um conteúdo pode ser ou não "potencialmente significativo" dependendo das diferentes estruturas cognitivas dos alunos presentes, e isso pode variar de acordo com as particularidades de cada estudante (idade, QI[4], ocupação, condições socioculturais,...).

Quando Ausubel afirma que para ocorrer a aprendizagem significativa o aluno deve querer aprender apresentando "uma disposição para relacionar, de forma não arbitrária e substantiva, o novo material à sua estrutura cognitiva", entende-se por:

- "não arbitrária" que o conteúdo não pode ser ensinado de modo aleatório (sem concatenação e consistência lógica). Um aluno pode facilmente memorizar o critério de divisibilidade por 2. Entretanto, essa proposição não poderá ser aprendida significativamente a menos que ele saiba previamente o conceito (e significado) de número par. Dessa forma, memorizar o critério de divisibilidade por 2 não será potencialmente revelador a esse estudante.

- "substantiva" que o conceito ou proposição que se está aprendendo pode ser expresso através de uma linguagem sinônima, pois irá remeter exatamente ao mesmo significado (o aluno não precisa memorizar *ipsis litteris* o que lhe foi transmitido, pois ele "entendeu" o conteúdo a ponto de formalizá-lo com suas próprias palavras). Para um estudante com conhecimento elementar em Matemática, os símbolos $0,5$ e $1/2$ são equivalentes.

## 2.4 Os pilares da aprendizagem significativa

Aqui serão analisados os papéis dos principais protagonistas responsáveis pela promoção da aprendizagem significativa segundo a perspectiva ausubeliana, a saber: o professor e o aluno; bem como instrumentos indispensáveis para sua boa implementação: a avaliação e o material de ensino. Novamente, todas as citações desta seção são de Ausubel, em [1].

### O professor

Hoje existem inúmeros recursos que viabilizam o aprendizado fora da sala de aula, reduzindo, por vezes, a influência do professor para o êxito do processo de ensino. Entretanto, a abordagem deste trabalho, bem como a análise de Ausubel, limita-se à realidade da sala de aula, na qual o professor exerce um papel de muita relevância no processo de aprendizagem significativa.

Ausubel dedica o Capítulo 14 à análise do papel do professor para que ocorra a aprendizagem significativa.

Na página 417, Ausubel faz uma importante ponderação:

[4]QI significa Quociente de Inteligência, um fator que mede a inteligência das pessoas com base nos resultados de testes específicos. O QI mede o desempenho cognitivo de um indivíduo comparando-o a pessoas do mesmo grupo etário.

> Nos anos mais recentes, o escopo do papel do professor expandiu muito além do seu núcleo instrucional original para incluir funções como substituto do pai ou da mãe, amigo, confidente, orientador, tutor, representante da cultura dos adultos, transmissor de valores culturais aprovados e facilitador do desenvolvimento da personalidade. Sem desejar de modo algum diminuir a realidade ou significância destes outros papéis subsidiários, contudo, **é inegavelmente verdadeiro que o papel mais importante e distintivo do professor na sala de aula moderna ainda é o de diretor de atividades de aprendizagem**.

A partir disso, ele pondera sobre características do professor que podem exercer ou não real influência na aprendizagem significativa, tais como: suas aptidões intelectuais; sua personalidade; sua capacidade de manter a disciplina em sala; sua capacidade de apresentar e organizar o assunto com clareza; seu estilo de ensino; etc. A despeito dessa extensa enumeração, ele sintetiza:

> Parece autoevidente que o professor deveria constituir uma variável importante no processo de aprendizagem. De um ponto de vista cognitivo, certamente deveria fazer diferença, em primeiro lugar, quão abrangente e coerente é a compreensão que o professor tem do assunto que leciona. Em segundo lugar, independente de sua adequação a este respeito, o professor poderá ser mais ou menos capaz de apresentar e organizar o assunto com clareza, explicar ideias de modo incisivo e lúcido, e manipular com eficácia as variáveis importantes que afetam a aprendizagem. Em terceiro lugar, ao se comunicar com os alunos, o professor pode ser mais ou menos capaz de traduzir seu conhecimento numa forma apropriada para o seu grau de maturidade cognitiva e sofisticação na matéria.

Ausubel defende, por exemplo, que as variáveis cognitivas tais como o grau de preparo na matéria e o rendimento ou nível de inteligência do professor não são imprescindíveis para promover bons resultados da aprendizagem dos alunos. É óbvio que o professor deve dominar o conteúdo que ensina, mas, acima de um certo nível mínimo crítico, as aptidões intelectuais do docente parecem não ter influência sobre sua eficiência ao lecionar. Em suas palavras:

> Um certo nível de inteligência é obviamente necessário para ensinar com eficácia. Mas além deste ponto crítico, a inteligência dos professores pode não estar significativamente relacionada com os resultados da aprendizagem nos alunos.

Para ele, mais relevante do que atestar a elevada capacidade cognitiva do docente é "avaliar a coerência e coesão atual do conhecimento do assunto por parte do professor, e medir sua capacidade de apresentar, explicar e organizar o assunto de forma lúcida, de manipular eficazmente as variáveis que afetam a aprendizagem e de comunicar o seu conhecimento aos alunos de forma adequada ao seu nível na matéria e sua prontidão evolutiva", conforme páginas 415 e 416.

Na página 419, Ausubel cita vários estudos reforçando sua tese de que mais importante do que as aptidões cognitivas do professor são sua clareza e expressividade. Professores organizados e sistemáticos, que conseguem transmitir conceitos com limpidez, fluência e precisão, potencializam o aprendizado de seus alunos.

É inegável que os alunos reajam afetivamente às características de personalidade de um professor e que essa resposta afetiva influencie o julgamento de sua eficácia instrucional. Obviamente, os alunos costumam reagir positivamente a professores hábeis em ensinar, com bom controle disciplinar da turma, respeitosos, justos, coerentes, imparciais, pacientes, bem-humorados, afetuosos e compreensivos;

e, de igual modo, tendem a repelir professores desorganizados, orgulhosos, vingativos, sarcásticos, mau-humorados e irritáveis. Todavia, Ausubel é contundente em afirmar que é mais importante que o professor seja instrucionalmente eficiente do que muito querido e popular.

Entende-se por "instrucionalmente eficiente" o professor que consegue:

- manter a disciplina em sala, de modo a tornar o ambiente o mais adequado possível para a aula, eliminando os distratores, coibindo conversas e atividades paralelas (como será visto, se o aluno não se dedicar de verdade, nada feito; menos ainda se ele estiver atrapalhando a aula. Assim, cabe ao professor coibir o mau comportamento);
- identificar quais os pré-requisitos que os alunos devem ter para assimilarem o novo conteúdo;
- diagnosticar seu aluno, isto é, descobrir, antes de iniciar um novo conteúdo, se o estudante detém os subsunçores necessários para ancorar as novas informações, tornando-as potencialmente significativas (em Matemática, recomenda-se a elaboração de listas de exercícios contendo os principais pré-requisitos do novo assunto. Por exemplo: antes de iniciar logaritmos, revisar potenciação; antes de iniciar geometria espacial, revisar os principais tópicos de geometria plana; antes de iniciar divisão de polinômios, revisar divisão euclidiana...). "Ensinar" sem levar em consideração o que o aluno já sabe (ou não), segundo Ausubel, é um esforço vão;
- motivar seus alunos para que eles realmente mobilizem todo esforço necessário à assimilação do novo conteúdo, pois, para que a aprendizagem significativa ocorra, o estudante precisa estar disposto a relacionar tal material de maneira consistente e não arbitrária;
- promover em seus alunos a aquisição dos subsunçores específicos, quando inexistentes, por meio de aulas extras e listas de exercícios direcionadas;
- organizar o material de ensino de modo a torná-lo potencialmente significativo (o professor deve adotar/elaborar um material didático logicamente coerente a fim de apresentar o conteúdo de maneira gradual e evolutiva, sempre observando a premissa de que os subsunçores específicos devem estar presentes na estrutura cognitiva do aprendiz);
- explicar o novo conteúdo de maneira didática "logicamente significativa", isto é, suficientemente não arbitrária e de forma substantiva;
- avaliar seus alunos de modo a inferir se eles, de fato, aprenderam significativamente.

Por fim, o trabalho do professor consiste, então, em auxiliar o aluno a assimilar a estrutura das disciplinas e a reorganizar sua própria estrutura cognitiva, mediante a aquisição de novos significados que podem gerar conceitos e princípios, conforme [12], página 41.

### O aluno

O papel dos alunos para que a aprendizagem significativa seja evidenciada é fundamental, pois eles precisam mobilizar todo esforço necessário à assimilação do novo conteúdo. A postura do aluno durante a aula deve ser a de máxima atenção à explicação do professor, evitando conversas e quaisquer distrações. Além disso, espera-se do aluno que ele realmente estude o conteúdo ensinado, a fim de torná-lo significativo. Se o aluno não quiser, nada feito; se ele quiser, mas não se dedicar o suficiente, nada feito.

Reproduzindo Ausubel na página 31:

> A escola, naturalmente, não pode assumir a responsabilidade completa pelo aprendizado do aluno. O aluno deve também buscar uma participação completa através de um aprendizado ativo e crítico, tentando compreender e reter o que é ensinado, integrando novas informações a informações obtidas em experiências anteriores e experiência idiossincrática, traduzindo novas proposições para uma linguagem própria, dedicando um esforço necessário para dominar dificuldades inerentes a novos aprendizados, formulando questões pertinentes e envolvendo-se conscientemente na solução de problemas que lhe são dados para resolver.

### A avaliação

Para Ausubel, avaliar significa emitir um julgamento de valor ou mérito, examinar os resultados educacionais para saber se preenchem um conjunto particular de objetivos educacionais. Dessa forma, a avaliação exerce um papel central para que a aprendizagem significativa ocorra. Ausubel apresenta três motivos:

- a aplicação de uma avaliação diagnóstica é fundamental para que se descubra o que o aprendiz já conhece (e desconhece) antes de tentar ensinar-lhe algo;
- a aplicação de avaliações durante o processo de aprendizagem possibilita corrigir, esclarecer e consolidar esta aprendizagem (Ausubel é categórico: "o principal objetivo da avaliação é vigiar a aprendizagem dos alunos", conforme [1], página 504);
- a aplicação de avaliações permite verificar a eficácia de diferentes métodos de ensino, de diferentes maneiras de organizar e sequenciar os assuntos (currículo) e medir até que ponto os objetivos do professor estão sendo alcançados.

Em suas palavras (ver [1], página 500):

> Se estivermos realmente preocupados com a educação, precisamos ter modos exatos de tanto medir os resultados da aprendizagem dos estudantes individualmente como verificar se eles são consoantes com os nossos objetivos educacionais. Estas medidas devem fazer mais do que simplesmente nos informar se os estudantes estão sendo realmente educados; devem oferecer dados que nos possibilitem a vigilância e, desta forma, nos assegurem um controle de qualidade sobre o empreendimento educacional. Assim, em qualquer ocasião, eles devem nos permitir conhecer quão eficiente é o nosso programa educacional.

Ausubel propõe uma série de instrumentos de avaliação, tais como: testes para medir a compreensão dos conceitos-chave em cada disciplina; pré-testes, pós-testes imediatos e a longo prazo; testes dissertativos (para medir a organização, coesão e integração do conhecimento do estudante) e de múltipla escolha (para medir a amplitude do conteúdo); simulados contextualizados e amostras de trabalhos.

Para serem úteis na prática educacional, todos os testes devem satisfazer os critérios de validade (a extensão na qual o teste mede aquilo que se propõe medir), fidedignidade (autoconsistência do teste ou a sua generalidade sobre itens componentes, sua estabilidade no tempo), representatividade (a extensão em que os itens componentes do teste são uma amostra imparcial e aleatória do traço ou habilidade que se pretende medir), discriminabilidade (capacidade de distinguir adequadamente entre aprendizes inferiores, médios e superiores com respeito a um dado assunto ou habilidade) e exequibilidade (significância da informação que fornece e a facilidade de aplicação, correção, interpretação e receptividade à retroalimentação), conforme [1], páginas 500 e 501.

### O material de ensino

Para Ausubel, é importantíssimo o papel do material de ensino na aprendizagem significativa. Em [1], página 293, ele afirma:

> Acreditamos que um dos caminhos mais promissores para se melhorar o aprendizado escolar seja através da melhoria dos materiais de ensino. Os fatores mais significativos que influenciam o valor, para o aprendizado, dos materiais de ensino referem-se ao grau em que estes facilitam uma aprendizagem significativa.

Ele estabelece uma distinção entre planejamento de currículo (atenção voltada às estruturas conceituais e metodológicas das disciplinas) e planejamento de ensino (atenção voltada na seleção de atividades de aprendizagem que melhor se liguem à estrutura cognitiva existente do aluno e incorporem os conceitos e habilidades identificados no plano curricular).

Ausubel alerta em [1], página 294:

> Ao planejar um novo currículo ou segmento de um programa de ensino, é importante ter sempre em mente que "a coisa mais importante que influencia a aprendizagem é o que o aluno já sabe". Isto significa que o planejamento de ensino requer uma estimativa cuidadosa dos conceitos e habilidades possuídos pelo aluno que são relevantes para as tarefas de novo aprendizado. O ritmo do aprendizado será bastante influenciado pela adequação da base relevante. As melhores estratégias de ensino permitem, portanto, que se altere o ritmo de aprendizado. Uma vez que a subsunção de novas informações é geralmente muito mais fácil que a aquisição de novos conceitos mais gerais, os currículos devem ser planejados para introduzir os conceitos ou proposições principais no início do curso para servir como uma base cognitiva para uma aprendizagem subsequente.

Ele completa em [1], página 299:

> Devemos estruturar nosso currículo de tal modo que conceitos e proposições mais importantes sejam introduzidos primeiro, servindo assim para facilitar a aprendizagem significativa de uma vasta gama de informações e também para facilitar o aprendizado de conceitos subordinados.

O planejamento de ensino suscita uma reflexão sobre qual atividade de aprendizagem melhor se adéqua à estrutura cognitiva existente do aluno a fim de ele incorporar os conceitos e habilidades identificados no plano curricular. Nesse sentido, Ausubel ressalta a importância da tarefa (estrategicamente escolhida e dosada na medida certa para não desestimular aprendiz), a organização do material didático (organizado de modo que os pré-requisitos para cada novo assunto sejam previamente abordados, tornando-o potencialmente significativo) e a utilização de recursos diversos (slides, TV, computador, tablet, quadro interativo, calculadora, laboratório, saída de campo...).

À luz da teoria da aprendizagem significativa, pretende-se verificar se os estudantes analisados possuem os conceitos subçunsores necessários à devida ancoragem da nova informação (um critério de divisibilidade "universal"). Nesse sentido, cabe ao professor pesquisador identificar tais subçunsores, elaborar pré-testes, revisitar conteúdos para sanar as possíveis lacunas e apresentar o teorema de Sebá, testando a viabilidade de seu ensino.

Capítulo 3

# Elementos da Teoria dos Números

O presente trabalho pressupõe a familiaridade por parte do leitor do conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$. Elocubrar sobre sua existência, descrever sua evolução ou explicar sua natureza não fazem parte do objetivo deste estudo. O que se pretende é, a partir das operações de adição $(a, b) \to a + b$ e de multiplicação $(a, b) \to a \cdot b$, construir o arcabouço téorico necessário para fundamentar o estudo do Teorema de Sebá, acerca de divisibilidade no conjunto dos números inteiros.

Vale ressaltar a importância do conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ (aqui concebido sem o elemento neutro, isto é, o zero), um importante subconjunto de $\mathbb{Z}$. Tal observação é fundamental, pois a definição utilizada para número primo será feita em $\mathbb{N}$, conforme [3].

## 3.1 A adição, a multiplicação e a ordenação em $\mathbb{Z}$

As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Z}$ possuem as seguintes propriedades axiomáticas.

### Propriedades

i) A adição e a multiplicação são bem definidas:

$$\text{para todo } a, b, a', b' \in \mathbb{Z}, \text{ se } a = a' \text{ e } b = b', \text{ então } a + b = a' + b' \text{ e } a \cdot b = a' \cdot b'.$$

ii) A adição e a multiplicação são comutativas:

$$\text{para todo } a, b \in \mathbb{Z},\ a + b = b + a \text{ e } a \cdot b = b \cdot a.$$

iii) A adição e a multiplicação são associativas:

$$\text{para todo } a, b, c \in \mathbb{Z},\ (a + b) + c = a + (b + c) \text{ e } (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

iv) A adição e a multiplicação possuem elemento neutro:

para todo $a \in \mathbb{Z}$, $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$. Assim, 0 e 1 são, respectivamente, o elemento neutro da adição e da multiplicação.

v) A adição possui elemento simétrico:

$$\text{para todo } a \in \mathbb{Z}, \text{ existe } b = -a, \text{ tal que } a + b = 0.$$

vi) A multiplicação é distributiva em relação à adição:

$$\text{para todo } a, b, c \in \mathbb{Z}, \text{ tem-se } a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

As seis primeiras propriedades são denominadas leis básicas da Aritmética ou, numa terminologia moderna, determinam uma estrutura de anel sobre $\mathbb{Z}$.

Desses axiomas decorrem os seguintes resultados para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

- $a \cdot 0 = 0$;
- $a = b$ se, e somente se, $a + c = b + c$ (a adição é compatível e cancelativa em relação à igualdade);
- $b - a = b + (-a)$ (diz-se que $b - a$ é o resultado da subtração de $b$ por $a$).

### 3.1.1 Tricotomia e ordenação

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, ou $a = b$ ou $(b - a) \in \mathbb{N}$ (isto é, $b > a$) ou $-(b - a) = (a - b) \in \mathbb{N}$ (isto é, $b < a$).

A notação $b > a$ indica que $b$ é "*maior que*" $a$, e é equivalente à notação $a < b$.

A notação $b \geq a$ indica que $b$ é "*maior que ou igual a*" $a$, e é equivalente à notação $a \leq b$.

Ou ainda, $b \geq a$ implica $b = a$ ou $b > a$ (a relação $b \geq a$ é uma relação de ordem em $\mathbb{N} \cup \{0\}$, pois é reflexiva, antissimétrica e transitiva, conforme dado em [9]).

O conjunto dos números inteiros pode ser ordenado. Daí, decorrem as seguintes propriedades:

- a relação "*menor que*" é transitiva (para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a < b$ e $b < c$ implica $a < c$);
- a adição é compatível e cancelativa com respeito à relação "menor que" (para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a < b$ se, e somente se, $a + c < b + c$);
- a multiplicação por elementos de $\mathbb{N}$ é compatível e cancelativa com respeito à relação "menor que" (para todo $a, b \in \mathbb{Z}$ e para todo $c \in \mathbb{N}$, $a < b$ se, e somente se, $a \cdot c < b \cdot c$);
- a multiplicação é compatível e cancelativa com respeito à igualdade (para todo $a, b \in \mathbb{Z}$ e para todo $c \in \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $a = b$ se, e somente se, $a \cdot c = b \cdot c$).

Seja $a$ um número inteiro. Então, por definição, o valor absoluto (ou módulo) de $a$, designado por $|a|$, é dado por

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases} .$$

A partir da definição acima, para $a, b \in \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{N}$, tem-se:

- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
- $|a| \leq r$ se, e somente se, $-r \leq a \leq r$;
- $-|a| \leq a \leq |a|$;
- $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular).

## 3.2 O princípio da boa ordenação e indução matemática

Todas as propriedades e operações anteriores não bastam para caracterizar o conjunto dos números inteiros, pois elas podem ser verificadas no conjunto dos números racionais, por exemplo. Entretanto, somente o conjunto dos números inteiros obedece ao princípio da boa ordenação.

Diz-se que um subconjunto não vazio $S$ de $\mathbb{Z}$ ($S \subset \mathbb{Z}$) é limitado inferiormente, se existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $c \leq x$ para todo $x \in S$. Diz-se que $a \in S$ é um menor elemento de $S$ se $a \leq x$ para todo $x \in S$.

**Unicidade do menor elemento de** $S$. Se existir o menor elemento de $S$, então ele é único, pois se $a$ e $a'$ são menores elementos de $S$, tem-se $a \leq a'$ e $a' \leq a$, o que acarreta $a = a'$.

### Princípio da boa ordenação

Se $S$ é um subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$ e limitado inferiormente, então $S$ possui um menor elemento. Desse importante princípio, decorrem alguns notáveis resultados. Por exemplo:

- não existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $0 < n < 1$;
- qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}$, não existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $n < m < n + 1$;
- se $a, b \in \mathbb{Z}$ e $a \cdot b = 1$, então $a = b = \pm 1$;
- se $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, então $|a \cdot b| \geq |a|$;
- se $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \cdot b > a$ (propriedade arquimediana).

### Princípio de indução matemática

O princípio de indução matemática reza que, para $S \subset \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{Z}$ tais que $a \in S$ e para todo $n \in S$ implica que $(n+1) \in S$, então $\{x \in \mathbb{Z};\ x \geq a\} \subset S$. Em outras palavras, sejam $a \in \mathbb{Z}$ e $p(n)$ uma sentença aberta[1] em $n$. Suponha que:

- $p(a)$ é verdadeira;
- para todo $n \geq a, p(n)$ implica que $p(n + 1)$ é verdadeira.

Então, $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

## 3.3 Divisibilidade em $\mathbb{Z}$

Dados dois números inteiros $a$ e $b$, diz-se que $a$ divide $b$ (representado por $a|b$), quando existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = c \cdot a$. Nesse caso, diz-se também que $a$ é um divisor ou fator de $b$, ou ainda que $b$ é um múltiplo de $a$ ou que $b$ é divisível por $a$. Por outro lado, $a$ não divide $b$ (representado por $a \nmid b$) quando não existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = c \cdot a$.

### Propriedades da divisibilidade

Sendo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se:

[1] Sentença aberta em $n$ é uma afirmação de conteúdo matemático na qual figura $n$ e que se torna uma sentença verdadeira ou falsa quando $n$ é substituído por um número inteiro bem determinado.

- $1|a$, $a|a$ e $a|0$;
- $0|a$ se, e somente se, $a = 0$ (zero é o único múltiplo de zero);
- $a|b$ se, e somente se, $a|(-b), (-a)|b$ e $(-a)|(-b)$;
- $a|b$ e $b|c$ se, e somente se, $a|c$.

Conclui-se das propriedades anteriores que todo número inteiro $a$ é divisível por $\pm 1$ e por $\pm a$ e que zero é divisível (ou múltiplo) de qualquer número inteiro.

Dado que $a|b$, com $a \neq 0$, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = c \cdot a$. Portanto, dividindo-se ambos os membros da igualdade anterior por $a$, obtém-se o número inteiro $c$ tal que $c = b/a$, denominado quociente de $b$ por $a$.

Além disso, sendo $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, tem-se:

- $a|b$ e $c|d$ implica que $(a \cdot c)|(b \cdot d)$;
- Se $a|b$ e $a|c$, então, para todo $x, y \in \mathbb{Z}$, $a|(b \cdot x + c \cdot y)$;
- Se $a|(b \pm c)$, então $a|b$ se, e somente se, $a|c$;
- Se $a|b$, então $|a| \leq |b|$.

### O conjunto dos múltiplos de um inteiro fixado $a$

O conjunto de todos os múltiplos inteiros do inteiro (fixado) $a$ é dado por:

$$M(a) = \{b \in \mathbb{Z}\,|b = a \cdot c, \;\; c \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, ...\}.$$

A partir disso, conclui-se que $M(a) = M(-a)$.

### Número par

Um número inteiro $a$ é **par** quando ele é múltiplo de 2, isto é:

$$a \in \mathbb{Z} \text{ é par se, e somente se, } \; a = 2 \cdot k, \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

### Número ímpar

Um número inteiro $a$ é **ímpar** quando ele não é múltiplo de 2, isto é:

$$a \in \mathbb{Z} \text{ é ímpar se, e somente se, } \; a \neq 2 \cdot k, \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

Segundo a divisão euclidiana, é visto que $a$ pode ser escrito na forma $a = 2 \cdot k \pm 1$, com $k \in \mathbb{Z}$.

### O conjunto dos divisores de um inteiro fixado $a$

O conjunto de todos os divisores inteiros do inteiro (fixado) $a$ é dado por:

$$D(a) = \{b \in \mathbb{Z}|\, a = b \cdot c, \; c \in \mathbb{Z}\}.$$

A partir disso, conclui-se que $D(a) = D(-a)$.

### Número primo

Os números primos desempenham um fundamental papel no estudo da Aritmética, pois os principais teoremas, problemas e resultados desse segmento da Matemática estão associados a esses números.

Seja $p$ um número natural. Se $p$ possuir exatamente dois divisores naturais distintos, isto é, 1 e $p$, então $p$ é um número **primo**. Vale ressaltar que o 1 não é primo.

Em $\mathbb{Z}$, um número $p$ não nulo é primo se ele possuir exatamente quatro divisores distintos, a saber: $\pm 1$ e $\pm p$.

Sejam $a, b, p \in \mathbb{Z}$, com $p$ primo. Se $p|(a \cdot b)$, então $p|a$ ou $p|b$.

*Demonstração.* Se $p|a$, então $p|a$ ou $p|b$. Se $p \nmid a$, então $\text{mdc}\,(a, p) = 1$. Logo existem inteiros $x$ e $y$ tais que $x \cdot p + y \cdot a = 1$ (identidade de Bézout). Multiplicando por $b$ ambos os lados dessa igualdade, vem:

$$b \cdot x \cdot p + a \cdot b \cdot y = b.$$

Logo, como $p$ divide $b \cdot x \cdot p$ e $p$ divide $a \cdot b \cdot y$ (pois, por hipótese, $p$ divide $a \cdot b$), então $p$ divide a soma desses dois números, isto é, $p|(b \cdot x \cdot p + a \cdot b \cdot y) = b$. Portanto $p|b$. □

### Número composto

Seja $p$ um número natural maior que 1. Se $p$ não é primo, então ele é **composto**. Em $\mathbb{Z}$, um número $p$ não nulo é composto se ele possuir mais de quatro divisores distintos.

### Divisão euclidiana

Em um dos livros que compõem *Os Elementos*, Euclides enunciou a emblemática divisão euclidiana em um contexto que considerava apenas números **naturais**. Assim, sejam $a$ e $b$ dois números naturais, com $a \neq 0$. Existem dois números **naturais** $q$ e $r$ tais que $b = a \cdot q + r$, com $r < a$.

Para estender a divisão euclidiana a todos os números inteiros, urgem alguns ajustes. Assim, sejam $a$ e $b$ dois números inteiros, com $a \neq 0$. Existem dois números inteiros $q$ e $r$ tais que $b = a \cdot q + r$, com $0 \leq r < |a|$.

Na igualdade acima, $a$, $b$, $q$ e $r$ são denominados, respectivamente, divisor, dividendo, quociente e resto da divisão de $b$ por $a$.

Em particular, quando o divisor for igual a dois ($a = 2$), o resto da divisão de $b$ por $a$ será zero ou um, pois $0 \leq r < |2|$. Assim, $b = 2 \cdot q + 0$ (neste caso, $b$ é um número **par**) ou $b = 2 \cdot q + 1$ (neste caso, $b$ é um número **ímpar**).

### O sistema decimal de numeração

Apesar de existirem diversos sistemas de numeração, neste trabalho será considerado apenas o sistema decimal posicional de numeração. Além disso, a presente abordagem estará restrita à representação dos números naturais, uma vez que o zero tem sua simbologia própria e os números inteiros negativos diferem sua representação dos naturais de mesmo valor absoluto apenas em virtude do sinal "$-$" que os precedem.

Todo número natural no sistema decimal é representado por uma sequência de símbolos denominados algarismos. São eles: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. É decimal por apresentar dez algarismos e posicional porque cada algarismo, apesar de possuir seu valor intrínseco, possui um peso que lhe é atribuído em função da posição que ele ocupa no número. Tal peso sempre será uma potência inteira não negativa de dez. Assim, o número natural $n$, em que $a_0$, $a_1$, ..., $a_k \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$, $a_0 \neq 0$, com $k \in \mathbb{N}$, pode ser representado na forma:

$$n = \overline{a_0 a_1 ... a_k} = a_0 \cdot 10^k + a_1 \cdot 10^{k-1} \cdot ... \cdot a_{k-1} \cdot 10^1 + a_k \cdot 10^0.$$

Com a representação acima, $a_k$ é o algarismo das unidades, $a_{k-1}$ é o algarismo das dezenas, $a_{k-2}$ é o algarismo das centenas e assim por diante.

## 3.4 Teorema Fundamental da Aritmética

Considere um número natural. Ou ele é igual a 1, ou ele é primo ou ele é composto.

No universo dos números naturais, o Teorema Fundamental da Aritmética afirma que:

"Todo número natural maior que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem de seus fatores) como um produto de números primos".

Em notação matemática, sejam $n$ um número natural maior que 1 e $p_1, p_2, p_3, ..., p_k$ seus divisores primos distintos (isto é, $p_i \neq p_j$ se, e somente se, $i \neq j$, para $i, j \in \{1, 2, 3, ..., k\}$) e $m_1, m_2, ..., m_k$ os respectivos expoentes desses divisores primos, com $m_1, m_2, ..., m_k \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$. Então a decomposição de $n$ em fatores primos é única e assume a forma $n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot p_3^{m_3} \cdot ... \cdot p_k^{m_k}$.

### Demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética

A demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética será feita por indução finita e dividida em duas partes: a existência e a unicidade.

*Hipótese de indução.* Sejam $n$ um número natural maior que 1 e $p_1, p_2, p_3, ..., p_k$ seus divisores primos distintos (isto é, $p_i \neq p_j$ se, e somente se, $i \neq j$, para $i, j \in \{1, 2, 3, ..., k\}$) e $m_1, m_2, ..., m_k$ os respectivos expoentes desses divisores primos, com $m_1, m_2, ..., m_k \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$. Então a decomposição de $n$ em fatores primos é única e assume a forma $n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot p_3^{m_3} \cdot ... \cdot p_k^{m_k}$.

### Existência

*i)* Se $n = 2$, faça $p_1 = 2$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 0, m_3 = 0, ..., m_k = 0$. Logo, $n = 2^1 \cdot p_2^0 \cdot p_3^0 \cdot ... \cdot p_k^0 = 2$.

ii) Suponha o resultado válido para todo número natural menor que $n$ a fim de provar-se que vale para $n$.

iii) Se $n$ é primo, não há o que demonstrar. Então, suponha $n$ composto. Logo, existem números naturais $n_1$ e $n_2$ tais que $n = n_1 \cdot n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Pela hipótese de indução, existem números primos $p_1, p_2, ..., p_r$ e $q_1, q_2, ..., q_s$ tais que $n_1 = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r$ e $n_2 = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_s$. Portanto, $n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_s$.

### Unicidade

Suponha duas maneiras distintas de representar $n$ como um produto de números primos (a menos da ordem de seus fatores), ou seja, $n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_s$ , em que $p_i$ e $q_j$ sejam primos para todo $i \in \{1, 2, ..., r\}$ e para todo $j \in \{1, 2, ..., s\}$.

Como $p_1 | (q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_k)$, conclui-se, que $p_1$ divide algum $q_j$. Sem perda de generalidade, suponha que $p_1 | q_1$. Portanto, $p_2 \cdot ... \cdot p_r = q_2 \cdot ... \cdot q_s$.

Como $p_2 \cdot ... \cdot p_r < n$, a hipótese de indução implica que $r = s$ e cada $p_i$ será igual a um $q_j$ correspondente. Assim, está demonstrada a unicidade da escrita de $n$ como um produto de números primos (a menos da ordem de seus fatores).

### A forma $n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot p_3^{m_3} \cdot ... \cdot p_k^{m_k}$

Agrupando todos os fatores primos repetidos em $n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r$, e ordenando-os crescentemente, vem: $n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot p_3^{m_3} \cdot ... \cdot p_k^{m_k}$ , em que, dos $r$ fatores primos acima, $m_1$ são iguais a $p_1$, $m_2$ são iguais a $p_2$ e assim por diante, de modo que $r = m_1 + m_2 + ... + m_k$.

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Para verificar se $a$ divide $b$, pode-se efetuar a divisão euclidiana de $b$ por $a$ a fim de descobrir se o resto é igual a zero (divisão exata), mas isso costuma ser muito trabalhoso e demorado. Como saber se um número divide outro sem efetuar a divisão euclidiana? Uma resposta satisfatória são os critérios de divisibilidade, regras elementares para constatar se $a$ divide $b$ a partir de algumas propriedades de $a$ e de $b$. Vale ressaltar que um critério de divisibilidade só é útil (viável) se for mais simples que a própria divisão.

Capítulo

*4*

# A abordagem dos critérios de divisibilidade e o Teorema de Sebá

Neste capítulo será apresentada uma análise da forma como alguns livros didáticos[1] e o periódico nacional Revista do Professor de Matemática – RPM[2] abordam o tema *critérios de divisibilidade*. Ao final, será estudado um critério de divisibilidade universal para qualquer número primo maior que cinco.

## 4.1 Critérios de divisibilidade nos livros didáticos nacionais

Paloma Brockveld, em seu trabalho de conclusão de curso *Critérios de Divisibilidade nos Livros Didáticos: 1918 a 2015*, em [4], examinou apenas nove livros didáticos diferentes. Mesmo diante dessa ínfima quantidade de obras analisadas, de pouca representatividade frente ao extenso período escolhido, Brockveld constata que os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 e 11 são os mais abordados. Nenhuma fonte analisada por ela apresentou critérios para os números 7, 13 ou primos superiores. Adiante, é apresentado um breve resumo da abordagem dos critérios de divisibilidade em cada obra estudada por Brockveld.

- **Elementos de Arithmetica**

  Autor - João José Luiz Vianna, 1918.

  Resumo: Nas páginas 59-63 o autor apresenta cinco princípios de divisibilidade para fundamentar sua explicação sobre os critérios de divisibilidade. São eles:
  *i*) um número dividindo as parcelas de uma soma, divide também a soma;
  *ii*) sendo uma soma composta de duas parcelas, se um número dividir a soma e a uma das parcelas, dividirá tambem a outra parcela;
  *iii*) sendo uma soma composta de duas parcelas: se um número dividir uma das parcelas e não

[1] Existe uma imensa quantidade de livros didáticos de Matemática voltados para o Ensino Médio, de modo que os poucos exemplares analisados constituem uma inexpressiva parcela desse universo, não permitindo maiores inferências.

[2] Na opinião do professor pesquisador, a RPM é o periódico de Matemática mais tradicional e representativo no Brasil. Sua linguagem é acessível e há uma vasta quantidade de temas abordados. Por isso sua escolha. Vale ressaltar que existem outros importantes periódicos (Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM; Revista Eureka; Brasil Escola; Só Matemática; etc.).

dividir a outra, não dividirá também a soma. Os restos das divisões da soma e da parcela não divisíveis por esse mesmo número são iguais;
*iv*) se um número dividir um dos fatores de um produto, divide também o produto;
*v*) se um número for divisível por outro, é também divisível pelos fatores desse outro.

Apenas os critérios de divisibilidade por 2, 3 e 5 são analisados pelo autor, que os demonstra à luz dos cinco princípios acima, mas não apresenta nem sequer um exemplo numérico. Quanto aos exercícios, aparecem em pequena quantidade, e todos são muito semelhantes.

- **Segunda Arithmetica**

  Autor - José Theodoro de Souza, 1931.

  Resumo: Os critérios são apresentados da seguinte maneira: divisor 10 ou uma potência de 10; divisores 2 e 5; divisores 4 e 25, 8 e 125, em geral qualquer potência de 2 ou de 5; divisores 9 e 3; divisor 11. Ele não demonstra os critérios, mas os explica por meio de exemplos numéricos. Além disso, não há exercícios.

- **Elementos de Aritmética**

  Autor - Irmão Isidoro Dumont, 1937.

  Resumo: Por meio de exemplos, o autor utiliza a regra do último algarismo para explicar os critérios de divisibilidade por $2, 3, 5, 9$ e 10, mas não fornece justificativas. Em compensação, o livro apresenta uma espantosa quantidade de exercícios, mais de quatro mil, sendo esses repetitivos e limitados à aplicação direta das regras expostas.

- **Elementos de Matemática**

  Autor - Jacomo Stávale, 1943.

  Resumo: O autor separa os critérios de divisibilidade em duas partes: múltiplos de $2, 5$ ou 10; e múltiplos de qualquer número que não seja potência de 2, de 5 ou de 10. Além disso, ele aborda o critério por 11. O autor utiliza exemplos particulares para explicar os critérios e, equivocadamente, generaliza os resultados afirmando ser isso uma demonstração. Finalmente, a quantidade de exercícios propostos é pequena, mas suficiente.

- **Matemática**

  Autor - Ary Quintella, 1963.

  Resumo: Os critérios de divisibilidade são divididos em blocos: por $2, 5$ e 10; por $4, 25$ e 100; por 3 e 9; e por 11. Não há demonstrações, mas todos os critérios são apresentados como conclusão de um exemplo numérico. Há uma maior variação nos enunciados dos exercícios propostos.

- **Praticando a Matemática**

  Autor - Álvaro Andrini, 1989.

  Resumo: Os critérios de divisibilidade por $2, 3, 4, 5, 6, 9$ e 10 são apresentados como regra a ser memorizada, e, em seguida, há vários exemplos de sua aplicação. Há uma quantidade significativa de exercícios.

- **Matemática, uma aventura do pensamento**

  Autor - Oscar Guelli, 2002.

  Resumo: O autor introduz o tema com uma pergunta: "Como os matemáticos sabem que um número é divisível por outro sem efetuar a divisão?" Seguindo a apresentação de cada critério, há um quadro intitulado "Para ler e refletir", dentro do qual consta uma explicação que induz à "regra prática", e após isso é dada a regra. Apenas os critérios de divisibilidade por $2, 3, 5$ e $9$ são abordados, e as demonstrações são feitas para números de três algarismos. Nos exercícios propostos há várias questões contextualizadas.

- **Praticando a Matemática**

  Autor - Álvaro Andrini, 2012.

  Resumo: O autor lista inúmeros exemplos que se adéquam ao critério em questão a fim de extrair a regra ou o critério de divisibilidade observado. São apresentados os casos por $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$ e $10$. Há poucos exercícios propostos e limitados à aplicação das regras enunciadas.

- **Matemática: Compreensão e Prática**

  Autor - Ênio Silveira, 2015.

  Resumo: O autor trata os critérios de divisibilidade por $2, 3, 4, 5, 6, 9$ e $10$ por meio de exemplos e algumas afirmações tais como: "se um número divide as parcelas, então ele divide o total" e "se um número divide outro, então divide também os múltiplos deste número". Não há demonstrações e os exercícios propostos são repetitivos e não contextualizados.

Ao examinar alguns livros de Matemática voltados para o Ensino Médio elaborados por consagrados autores nacionais (ver [15, 2, 19, 10]), percebe-se que o tema *critérios de divisibilidade* não é nem sequer abordado, sugerindo que o estudo desse assunto está restrito ao Ensino Fundamental. Todavia, [5] é um excelente material paradidático elaborado para preparar alunos que participam de olimpíadas matemáticas. Ele contém um amplo capítulo sobre critérios de divisibilidade no qual são abordados à luz de congruência (módulo $m$) todos os critérios de 2 a 11 com demonstrações, exercícios e aplicações.

## 4.2 Critérios de divisibilidade na Revista do Professor de Matemática

Examinando as primeiras oitenta e três Revistas do Professor de Matemática (RPM) da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), foram encontradas referências a outros critérios de divisibilidade em oito delas, conforme a descrição a seguir.

- [20], páginas 21-24. São apresentados os critérios de divisibilidade mais difundidos para os números naturais $2, 3, 4, 5, 8, 9$ e $11$. No caso dos números 7 e 13, também abordados, tais critérios de divisibilidade são de difícil memorização, inviabilizando sua aplicação em sala. Os autores do artigo alertam: "um critério de divisibilidade só é útil quando for mais simples que a própria divisão." Concluindo, dizem:

  Como observamos no início, esta é a explicação do porquë de nós nunca lembrarmos os critérios de divisibilidade por 7 e por 13: tais critérios são tão trabalhosos de recordar e de aplicar que é melhor efetuar a divisão por 7 e por 13. Esta também é a razão da inutilidade prática da construção de tabelas de divisibilidade mais completas.

- [6], páginas 33-40. São apresentados critérios de divisibilidade dos números naturais de 2 a 7 por meio de congruência para justificá-los e generalizá-los. Sem dúvida, tal abordagem facilita bastante o estudo, mas, por não fazer parte do conteúdo programático dos ensinos Fundamental e Médio, percebe-se uma grande rejeição dos docentes em adotar essa metodologia. O pesquisador, em sua experiência pessoal, tem constatado que a grande maioria de seus colegas – professores de Matemática – desconhece congruência (a relação de congruência módulo $m$ é componente curricular dos temas de Aritmética em cursos de graduação em Matemática).

- [8], páginas 88-92. São apresentados critérios de divisibilidade de números primos de 7 a 100. São propostos para cada caso dois interessantes métodos denominados pelo autor do artigo: aditivo e subtrativo. A lista é exaustiva e de difícil memorização, inviabilizando sua aplicação em sala. O autor do artigo afirma:

  > O objetivo principal de escrever e enviar este trabalho foi o de oferecer alguns "critérios" de divisibilidade fáceis, porém não mnemônicos. Acompanha o trabalho uma tabela que permitirá a qualquer aluno verificar, com facilidade, se um dado número é, ou não, divisível por um dado número primo (entre 7 e 100). Concordo com a Prof. Carmen e com o Prof. Hermano (RPM 6, página 21) quando afirmam que "um critério de divisibilidade só é útil quando for mais simples que a própria divisão"; portanto, fica a critério de cada um dos colegas aplicar esta sugestão em suas escolas.

- [7]. Apenas o critério de divisibilidade por 9 é apresentado, pois o objetivo do autor do artigo foi aplicar congruência em diversos contextos. O tema congruência não é objeto deste estudo.

- [22], páginas 38-39. Apenas o critério de divisibilidade por 7 é apresentado. O autor do artigo mostra um interessante método e o justifica utilizando congruência. Como já foi dito, o tema congruência não é objeto deste estudo.

- [21], páginas 13-17. O autor do artigo aborda um método para descobrir um critério de divisibilidade por todos os números primos a partir de 7. Ele apresentou um resultado semelhante ao Teorema de Sebá, entretanto com uma sistematização diferente. Na demonstração, o autor utiliza apenas o conceito de divisibilidade.

### 4.2.1 Um critério de divisibilidade universal encontrado na RPM

Abaixo, segue a transcrição de parte do artigo publicado em [21], por Guilhermo Zamalloa Torres, em virtude de sua forte semelhança com o presente trabalho.

Após analisar os critérios de divisibilidade por 7, 13 e 17, Torres enuncia uma lista para os primos de 19 a 31. Em seguida, ele cita:

"Observamos que para estabelecer um critério de divisibilidade de $N = 10k + u$ por um número, $d$, subtraímos de $k$ o algarismo das unidades, $u$, multiplicado por um determinado fator $a$. Vamos mostrar agora como encontrar um valor de $a$ adequado para cada primo $d$ superior a 5.

**Determinação do fator $a$**

Supondo que $N = 10k + u$ seja divisível por $d$, vamos determinar $a$ para que $k - au$ também seja divisível por $d$.

$$\text{Se } d|(10k+u), \text{ então } 10k+u = dq. \text{ Logo } u = dq - 10k$$

e, portanto,

$$k - au = k - a(dq - 10k) = k - adq + 10ak = (10a+1)k - aqd.$$

Para que $k - au$ seja divisível por $d$, basta escolher um inteiro $a$ tal que $10a + 1$ seja divisível por $d$, isto é,

$$10a + 1 = dx, \text{ ou } a = (dx-1)/10.$$

Mas $a$ deve ser um número inteiro positivo, portanto o produto $dx$ tem que ser da forma $10k + 1$, pois só dessa maneira $dx - 1$ será divisível por 10. Assim, por exemplo, para escolher o menor $a$ para um critério de divisibilidade por 43, o número 43 deve ser multiplicado por $x = 7$ para dar um produto terminado em 1:

$$a = (43 \cdot 7 - 1)/10 = (301 - 1)/10 = 30,$$

isto é, obtemos o número 30, que é o fator $a$ procurado.

Sabemos que os divisores primos em estudo só podem terminar em 1, 3, 7 ou 9 e, portanto, os menores fatores $x$ que produzem produtos terminados em 1 são, respectivamente, 1,7, 3 e 9. Isso facilita a obtenção de $a$, como veremos nos exemplos abaixo.

Falta mostrar que, tendo escolhido $a$ tal que $10a + 1$ é divisível por $d$, então, se $d$ dividir $k - au$, $d$ dividirá $N = 10k + u$. De fato,

$$\text{se } d|(10a+1), \text{ então } 10a+1 = xd \qquad (1)$$

e

$$\text{se } d|(k-au), \text{ então } k - au = yd. \qquad (2)$$

Multiplicando a igualdade (1) por $u$, a igualdade (2) por 10 e somando os resultados, obtemos:

$$10au + u + 10k - 10au = xdu + 10yd,$$

o que implica

$$10k + u = d(xu + 10y), \text{ isto é}, \ d|(10k+u).\text{"}$$

- [17]. Apenas o critério de divisibilidade por 7 é apresentado. O autor do artigo mostra um interessante, viável e original critério. Pela originalidade da exposição, segue a transcrição do artigo publicado em [17] por Ramos.

  "As regras de divisibilidade por 7 são, em geral, complicadas a ponto de muitos dizerem que é mais fácil fazer a divisão do que decorar qualquer uma delas. Foi pensando nisso que elaborei um algoritmo para que os alunos pudessem verificar a divisibilidade por 7 com maior facilidade.

  Espero que o processo aqui apresentado também facilite uma maior compreensão da lógica matemática que é cada vez mais utilizada em sala de aula e na vida prática. Vamos expor o método por meio de alguns exemplos.

**Exemplo 1**

O número $n = 3672$ é divisível por 7?

**Passo 1.** Subtraímos do número $n$ o primeiro múltiplo de 7 que termina com o mesmo algarismo que $n$, no caso, 2: $3672 - 42 = 3630$.

**Passo 2.** Esquecemos o zero, pois um número terminado em zero é divisível por 7 se, e somente se, sem o zero ele também for (eliminando zeros estamos dividindo por potências de 10, logo eliminando apenas os fatores primos 2 e 5). Olhamos para o 363. Agora repetimos os dois passos descritos até chegar a um número com um ou dois algarismos: $363 - 63 = 300$, olhamos para o 3. Como 3 não é divisível por 7, então o número 3672 também não é.

**Exemplo 2**

O número 56924 é divisível por 7?

$$56924 - 14 = 56910$$

$$5691 - 21 = 5670$$

$$567 - 7 = 560.$$

Como 56 é divisível por 7, logo 56924 também é.

**Por que funciona?**

O importante aqui é que há múltiplos de 7 terminando em todos os algarismos, $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$ e 9, logo, sempre podemos efetuar a diferença do passo 1 e, ao subtrairmos múltiplos de 7, não interferimos na sua divisibilidade por 7."

- [18]. A autora do artigo em questão, inspirada em [17], extende o resultado ali obtido para o 7 a todos os números naturais que não têm os fatores 2 e 5 na sua decomposição em primos.

  Por sua generalidade, segue a transcrição de parte do artigo publicado em [18] por Cydara Cavedon Ripoll.

"Se $n > 2$ é um natural relativamente primo com 10, então todos os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 aparecerão como algarismo das unidades de algum dos números $n$, $2n$, $3n$, $4n$, $5n$, $6n$, $7n$, $8n$ ou $9n$.

**Demonstração do resultado**

Consideremos, no conjunto $\{n, 2n, 3n, 4n, 5n, 6n, 7n, 8n, 9n\}$, dois números distintos, digamos $i \cdot n$ e $j \cdot n$, com $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, ..., 9\}$.

Se $i \cdot n$ e $j \cdot n$ têm o mesmo algarismo das unidades, então o algarismo das unidades de $i \cdot n - j \cdot n$ é zero, ou seja,

$$i \cdot n - j \cdot n = n(i - j) = 10k,$$

com $k$ inteiro.

Como, por hipótese, $n$ e 10 são primos entre si, então $i - j$ tem que ser divisível por 10. Mas isso ocorre se, e somente se, $i - j = 0$, já que $i, j \in \{1, 2, ..., 9\}$.

Logo, $i = j$, o que mostra que os algarismos das unidades dos números do conjunto $\{n, 2n, 3n, 4n, 5n, 6n, 7n, 8n, 9n\}$ são todos diferentes entre si e todos não nulos ($n$ e 10 são primos entre si). Como só existem 9 possibilidades para esses algarismos, concluímos que todos eles aparecem como algarismo das unidades em $n$, $2n$, $3n$, $4n$, $5n$, $6n$, $7n$, $8n$ e $9n$, o que completa a prova."

## 4.3 O Teorema de Sebá

Após a análise da abordagem do tema *critérios de divisibilidade* nos livros didáticos e na RPM, chega-se ao critério de divisibilidade mais importante desta pesquisa. Antes de apresentar o teorema de Sebá, seguem alguns esclarecimentos sobre números primos superiores a cinco.

Seja $p$ o divisor primo em estudo, $p > 5$. Então o último algarismo de $p$ só poderá ser 1 ou 3 ou 7 ou 9. Portanto, 1, 7, 3 e 9 são, respectivamente, os menores números naturais (fatores) que multiplicados por $p$ fornecem produtos terminados em 1. Subtraindo 1 de tais produtos, tem-se necessariamente um múltiplo de 10. Dividindo-se por 10 esse último resultado, obtém-se o valor $y$, conforme a tabela abaixo.

| **Primo terminado em** | **Fator** | **Expressão para $y$** |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $y = (p-1)/10$ |
| 3 | 7 | $y = (7p-1)/10$ |
| 7 | 3 | $y = (3p-1)/10$ |
| 9 | 9 | $y = (9p-1)/10$ |

Para uma melhor compreensão do Teorema de Sebá, observe um conhecido critério de divisibilidade por 7.

> "Um número é divisível por 7 se, eliminado seu último algarismo, o número resultante subtraído do dobro do algarismo eliminado for divisível por 7."

**Exemplo)** Verifique se 8827 é divisível por 7 a partir do critério acima.

- Eliminar seu último algarismo: $882\cancel{7}$;
- Número resultante: 882;
- Subtrair de 882 o dobro do algarismo eliminado: $882 - 2.7 = 868$.

Não é imediato inferir que o resultado obtido, 868, é divisível por 7. Portanto, repita o procedimento.

- Eliminar seu último algarismo: $86\cancel{8}$;
- Número resultante: 86;
- Subtrair de 86 o dobro do algarismo eliminado: $86 - 2.8 = 70$.

Como o resultado, 70, é divisível por 7, conclui-se que 8827 é divisível por 7.

Ao explicar esse critério de divisibilidade por 7 aos alunos, naturalmente surge a seguinte pergunta: "Por que devemos subtrair o dobro do algarismo eliminado?"

A tabela acima responde! Observe que 7 é um número primo maior que 5 terminado em 7. Logo, consultando a tabela, tem-se: $y = (3p-1)/10 = (3.7-1)/10 = 2$, respondendo à pergunta.

**Teorema 4.1.** ***(Teorema de Sebá)*** *– Seja $n$ um número natural dado. Os passos a seguir constituem um critério para se verificar se $n$ é divisível por um número primo $p$, $p > 5$.*

***Passo 1.*** *Se $p$ terminar em 1, 3, 7 ou 9, multiplique $p$, respectivamente, por 1, 7, 3 e 9, subtraia de 1 e divida a diferença por 10. Tais quocientes serão designados por $y$.*

***Passo 2.*** *Multiplique $y$ pelo último algarismo de $N$ e subtraia de $N$ sem o último algarismo. Se a diferença for grande, de tal maneira que não seja possível reconhecer facilmente se ela é divisível por $p$, repete-se o processo até que seja possível reconhecer facilmente a divisão por $p$.*

A demonstração do Teorema de Sebá será dividida em quatro etapas.

- **$p$ termina em 1**

**Passo 1.** Subtraia $p$ de 1 e divida a diferença por 10. Tal quociente será chamado de $y$.

**Passo 2.** Multiplique $y$ pelo último algarismo de $N$ e subtraia de $N$ sem o último algarismo. Se a diferença for grande, de tal maneira que não seja possível reconhecer facilmente se ela é divisível por $p$, repete-se o processo até que seja possível reconhecer facilmente a divisão por $p$.

**Proposição 4.2.** *Considere o número natural $N = \overline{a_0a_1...a_k}$, em que $a_0, a_1, ..., a_k \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$, $a_0 \neq 0$ e seja $p$ um número natural primo que termina em 1. Se $p|(\overline{a_0a_1...a_{k-1}} - y)$, então $p|N$, em que $y = [(p-1)/10] \cdot a_k$.*

*Demonstração.* Como $p|(\overline{a_0a_1...a_{k-1}} - y)$, isto é,

$$p\Big|\left[\overline{a_0a_1...a_{k-1}} - \left(\frac{p-1}{10}\right) \cdot a_k\right],$$

então:

$$p\Big|\left[\overline{a_0a_1...a_{k-1}0} - p \cdot a_k + a_k\right],$$

isto é,

$$p\Big|\left[\overline{a_0a_1...a_{k-1}a_k} - p \cdot a_k\right].$$

Portanto

$$p|(N - p \cdot a_k),$$

logo

$$p|N.$$

□

- **$p$ termina em 3**

**Passo 1.** Se $p$ terminar em 3, multiplique $p$ por 7, subtraia de 1 e divida a diferença por 10. Tal quociente será chamado de $y$.

**Passo 2.** Multiplique $y$ pelo último algarismo de $N$ e subtraia de $N$ sem o último algarismo. Se a diferença for grande, de tal maneira que não seja possível reconhecer facilmente se ela é divisível por $p$, repete-se o processo até que seja possível reconhecer facilmente a divisão por $p$.

**Proposição 4.3.** *Considere o número natural $N = \overline{a_0a_1...a_k}$, em que $a_0, a_1, ..., a_k \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$, $a_0 \neq 0$ e seja $p$ um número primo que termina em 3. Se $p|(\overline{a_0a_1...a_{k-1}} - y)$, então $p|N$, em que $y = [(7p-1)/10] \cdot a_k$.*

*Demonstração.* Como $p|(\overline{a_0a_1...a_{k-1}} - y)$, isto é,

$$p\Big|\left[\overline{a_0a_1...a_{k-1}} - \left(\frac{7p-1}{10}\right) \cdot a_k\right],$$

então:

$$p \Big| \left[\overline{a_0a_1...a_{k-1}0} - 7p \cdot a_k + a_k\right],$$

isto é,

$$p \Big| \left[\overline{a_0a_1...a_{k-1}a_k} - 7p \cdot a_k\right].$$

Portanto

$$p|(N - 7p \cdot a_k),$$

logo

$$p|N.$$

□

- ## $p$ termina em 7

**Passo 1.** Se $p$ terminar em 7, multiplique $p$ por 3, subtraia de 1 e divida a diferença por 10. Tal quociente será chamado de $y$.

**Passo 2.** Multiplique $y$ pelo último algarismo de $N$ e subtraia de $N$ sem o último algarismo. Se a diferença for grande, de tal maneira que não seja possível reconhecer facilmente se ela é divisível por $p$, repete-se o processo até que seja possível reconhecer facilmente a divisão por $p$.

**Proposição 4.4.** *Considere o número natural $N = \overline{a_0a_1...a_k}$, em que $a_0, a_1, ..., a_k \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$, $a_0 \neq 0$ e seja $p$ um número primo que termina em 7. Se $p|(\overline{a_0a_1...a_{k-1}} - y)$, então $p|N$, em que $y = [(3p - 1)/10] \cdot a_k$.*

*Demonstração.* Como $p|(\overline{a_0a_1...a_{k-1}} - y)$, isto é,

$$p \Bigg| \left[\overline{a_0a_1...a_{k-1}} - \left(\frac{3p-1}{10}\right) \cdot a_k\right],$$

então:

$$p \Big| \left[\overline{a_0a_1...a_{k-1}0} - 3p \cdot a_k + a_k\right],$$

isto é,

$$p \Big| \left[\overline{a_0a_1...a_{k-1}a_k} - 3p \cdot a_k\right].$$

Portanto

$$p|(N - 3p \cdot a_k),$$

logo

$$p|N.$$

□

- ## $p$ termina em 9

**Passo 1.** Se $p$ terminar em 9, multiplique $p$ por 9, subtraia de 1 e divida a diferença por 10. Tal quociente será chamado de $y$.

**Passo 2.** Multiplique $y$ pelo último algarismo de $N$ e subtraia de $N$ sem o último algarismo. Se a diferença for grande, de tal maneira que não seja possível reconhecer facilmente se ela é divisível por $p$, repete-se o processo até que seja possível reconhecer facilmente a divisão por $p$.

**Proposição 4.5.** *Considere o número natural* $N = \overline{a_0 a_1 ... a_k}$, *em que* $a_0, a_1, ..., a_k \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$, $a_0 \neq 0$ *e seja* $p$ *um número primo que termina em 9. Se* $p|(\overline{a_0 a_1 ... a_{k-1}} - y)$, *então* $p|N$, *em que* $y = [(9p-1)/10] \cdot a_k$.

*Demonstração.* Como $p|(\overline{a_0 a_1 ... a_{k-1}} - y)$, isto é,

$$p\left| \left[\overline{a_0 a_1 ... a_{k-1}} - \left(\frac{9p-1}{10}\right) \cdot a_k\right]\right.,$$

então:

$$p\left| \left[\overline{a_0 a_1 ... a_{k-1} 0} - 9p \cdot a_k + a_k\right]\right.,$$

isto é,

$$p\left| \left[\overline{a_0 a_1 ... a_{k-1} a_k} - 9p \cdot a_k\right]\right..$$

Portanto

$$p|(N - 9p \cdot a_k),$$

logo

$$p|N.$$

$\square$

A seguir, serão apresentados quatro exemplos utilizando o Teorema de Sebá.

**Exemplo 1)** Verifique se $N = 923521$ é divisível por $p = 31$.
**Passo 1.**

$$y = \frac{p-1}{10} = \frac{31-1}{10} = 3$$

**Passo 2.**

$$\begin{array}{c} 92352/\mathbf{1} \\ -3 \\ \hline 9234/\mathbf{9} \\ -27 \\ \hline 920/\mathbf{7} \\ -21 \\ \hline 89/\mathbf{9} \\ -27 \\ \hline 6/\mathbf{2} \\ -6 \\ \hline 0 \end{array}$$

Como a diferença (0) é divisível por 31, conclui-se que 923521 é divisível por 31.

**Exemplo 2)** Verifique se $N = 83521$ é divisível por $p = 17$.
**Passo 1.**

$$y = \frac{3p-1}{10} = \frac{3 \cdot 17 - 1}{10} = 5$$

**Passo 2.**

$$\begin{array}{c} 8352/\mathbf{1} \\ -5 \\ \hline 834/\mathbf{7} \\ -35 \\ \hline 79/\mathbf{9} \\ -45 \\ \hline 3/\mathbf{4} \\ -20 \\ \hline -17 \end{array}$$

Como a diferença $(-17)$ é divisível por 17, conclui-se que 83521 é divisível por 17.

**Exemplo 3)** Verifique se $N = 130321$ é divisível por $p = 19$.
**Passo 1.**

$$y = \frac{9p-1}{10} = \frac{9 \cdot 19 - 1}{10} = 17$$

**Passo 2.**

$$\begin{array}{c} 13032/\mathbf{1} \\ -17 \\ \hline 1301/\mathbf{5} \\ -85 \\ \hline 121/\mathbf{6} \\ -102 \\ \hline 19 \end{array}$$

Como a diferença (19) é divisível por 19, conclui-se que 130321 é divisível por 19.

**Exemplo 4)** Verifique se $N = 12167$ é divisível por $p = 23$.
**Passo 1.**

$$y = \frac{7p-1}{10} = \frac{7 \cdot 23 - 1}{10} = 16$$

**Passo 2.**

$$\begin{array}{c} 1216/\mathbf{7} \\ -112 \\ \hline 110/\mathbf{4} \\ -64 \\ \hline 46 \end{array}$$

Como a diferença (46) é divisível por 23, conclui-se que 12167 é divisível por 23.

Apesar de divisibilidade ser um importante tópico da Aritmética, constatou-se que grande parte dos livros didáticos nacionais voltados para o Ensino Médio omite esse assunto, e aqueles que trabalham se calam quanto aos critérios de divisibilidade por sete e por primos superiores a onze. Quanto às RPMs, a maioria dos artigos tratou a divisibilidade utilizando congruência modular, o que é perfeitamente compreensível uma vez que seu público-alvo é o professor e seu objetivo é promover o aperfeiçoamento docente[3]. Mesmo assim, foram encontradas ricas e interessantes abordagens perfeitamente aplicáveis à sala de aula, inclusive um resultado proposto por Torres [21] análogo ao Teorema de Sebá. Confrontando a abordagem de Torres à de Sebá, verifica-se que:

- os dois critérios confirmam exatamente o mesmo resultado e sob as mesmas hipóteses (os números $d$ e $p$ devem ser primos superiores a 5);
- as expressões obtidas para os fatores $a$ e $y$ são equivalentes, sendo $a = (d \cdot x - 1)/10$, em que $x$ deve ser o menor natural que multiplicado por $d$ termina em 1, e $y = (p-1)/10$, se $p$ terminar em 1, $y = (7 \cdot p - 1)/10$, se $p$ terminar em 3, $y = (3 \cdot p - 1)/10$, se $p$ terminar em 7 e $y = (9 \cdot p - 1)/10$, se $p$ terminar em 9;
- ambas as demonstrações só utilizam tópicos elementares de Aritmética, sendo a de TORRES um pouco mais "complexa" que a de Sebá.

Ao final deste capítulo, o Teorema de Sebá foi demonstrado e exemplificado e sua aplicação em sala de aula será vista e analisada nos próximos capítulos.

[3]A RPM, como seu próprio nome diz, é uma publicação destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. A revista publica artigos de matéria de nível elementar ou avançado, que seja acessível ao professor do Ensino Médio e a alunos de cursos de Licenciatura em Matemática. Uma experiência interessante em sala de aula, um problema que suscita uma questão pouco conhecida, uma história que mereça ser contada ou até uma nova abordagem de um assunto conhecido. Ver [24].

Capítulo 5

# Método e atividades desenvolvidas

Neste capítulo serão apresentadas as informações detalhadas das atividades propostas aos alunos que participaram da pesquisa, cujo principal objetivo foi testar a viabilidade do ensino do Teorema de Sebá em salas de aula do ensino regular.

Embasado na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, a pesquisa teve como ponto de partida a coleta de informações a respeito do perfil do respondente, bem como de seu conhecimento prévio em Aritmética. Para descobrir o que o aluno já conhece, foram propostos um questionário sociocultural e um teste de sondagem (pré-teste). Em seguida, duas atividades sobre critérios de divisibilidade a fim de, posteriormente, apresentar o Teorema de Sebá.

## 5.1 O local

A instituição escolhida para a aplicação da pesquisa foi um colégio da rede privada de ensino, situado no centro da cidade de Brasília, Distrito Federal, reconhecido pelo senso comum como uma escola particular de elite, tradicional e de alta *performance* no tocante à aprovação de seus alunos em vestibulares, no Programa de Avaliação Seriada da Universidade de Brasília (PAS/UnB) e no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). O motivo dessa escolha deve-se à credibilidade do pesquisador junto aos gestores escolares pela sua longa e bem-sucedida relação de trabalho nessa instituição, o que também viabilizou a elevada adesão dos alunos ao estudo em questão.

No período vespertino, o professor pesquisador leciona no 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública, série na qual os critérios de divisibilidade constituem parte integrante do conteúdo de Matemática. Por isso, tentou aplicar atividades análogas nessa instituição[1], encontrando muita dificuldade para viabilizar seu estudo de campo, que deveria, após o cumprimento de inúmeras exigências da escola, ser realizado no contraturno das aulas, algo no momento impossível, pois o professor pesquisador trabalha em outro colégio.

[1] O professor pesquisador trabalhou nesse colégio durante os anos de 1996 a 2013, atuando nos cargos de coordenador e professor de Matemática da escola. De janeiro de 2014 a julho de 2017, esteve fora dessa instituição, retornando em agosto de 2017 apenas como professor. Isso justifica o fato de a pesquisa de campo ter sido aplicada apenas no segundo semestre.

## 5.2 Os participantes

Apenas os alunos do 1º ano do Ensino Médio do colégio foram escolhidos como público-alvo da pesquisa porque o tema Aritmética faz parte do conteúdo dessa série no PAS/UnB. Assim, foi possível vincular a pesquisa a algo de real interesse dos estudantes, isto é, o fato de o conteúdo ser importante para o PAS/UnB. Além disso, foram cedidas ao professor pesquisador três aulas de 50 minutos em cada uma das quatro turmas do 1º ano exatamente no horário das aulas que o professor pesquisador teria com esses estudantes. Esta informação é relevante, pois justifica a elevada adesão dos alunos ao estudo em questão, pois, dos 164 alunos do 1º ano, apenas 8 não assinaram o termo de consentimento para participarem da pesquisa. Como ocorreram três encontros em cada sala, alguns alunos que faltaram a pelo menos uma dessas aulas, e não se propuseram a realizar a atividade perdida em outro momento, foram desconsiderados para a análise de dados. Somando-se a alguns estudantes que não seguiram as recomendações do pesquisador, os trabalhos de 21 alunos foram descartados. Assim, cerca de 87%[2] dos alunos do 1º ano do Ensino Médio do colégio participaram efetivamente de toda a pesquisa de campo.

Uma importante ressalva: apesar de ser professor dos alunos que participaram do estudo, o pesquisador não estava lecionando Aritmética para esses estudantes. A pesquisa foi uma atividade extra para o corpo discente realizada com a autorização da direção da escola e do professor que ministrava o conteúdo em questão (a pesquisa teve início assim que esse professor iniciou o estudo de Números Inteiros).

## 5.3 Trabalhos desenvolvidos

Foram propostos os seguintes trabalhos aos alunos que participaram da pesquisa: 1ª aula - questionário e pré-teste; 2ª aula - atividade I; 3ª aula - atividade II, que serão devidamente analisados a seguir e encontram-se no apêndice.

O pesquisador elaborou os trabalhos supracitados com base em sua experiência como professor há mais de 20 anos para alunos de Ensino Médio. Tendo feito uma coletânea de diversos itens que geram dúvidas e apontam erros conceituais em Aritmética, ele distribuiu nessas atividades questões que, ao serem respondidas, possibilitaram a elaboração de inúmeras inferências.

A intenção foi, conforme Onuchic e Allevato em [14], seguir a recomendação Van de Walle, que defende que o professor deve considerar o antes, o durante e o depois, a fim de favorecer o bom desenvolvimento de uma aula. Para a primeira etapa, o professor deve verificar se os alunos estão preparados para as atividades propostas (na nomenclatura ausubeliana, se os alunos detêm os subçunsores necessários à ancoragem do novo conteúdo); na segunda, o professor orienta, observa, acompanha, intervém, auxilia, oportuniza (aqui, para Ausubel, o professor exerce seu papel mais importante e distintivo na sala de aula moderna, a saber: ser "o diretor de atividades de aprendizagem"); na terceira, acolhe os resultados, realiza as discussões e conduz análises de erros e acertos (este é o papel da avaliação na teoria da aprendizagem significativa da Ausubel, ou seja, "vigiar a aprendizagem dos alunos").

### Questionário

O primeiro trabalho proposto foi um questionário cuja finalidade era coletar informações socioculturais do respondente e, ainda, gerar estatísticas relacionadas a seus conhecimentos e desempenho em Aritmética (Números Inteiros), com ênfase nos critérios de divisibilidade. Vale ressaltar que, em função

[2] (164-21)/164=87,19 %

do exíguo tempo disponível para aplicar a pesquisa, tal questionário conteve poucas questões.

### Pré-teste

O segundo trabalho proposto foi um pré-teste cuja finalidade era verificar se o respondente detinha conhecimentos sobre os seguintes pré-requisitos:
i) conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$);
ii) múltiplos e divisores;
iii) números pares, ímpares, primos e compostos.

De acordo com a teoria ausubeliana, antes de ensinar um novo conteúdo é fundamental que o professor descubra quais são os pré-requisitos que seus alunos devem possuir para, então, ancorar o novo conteúdo. Por isso, como já foi visto, o postulado mais emblemático dessa teoria assevera que o conhecimento prévio do aluno é a chave para a aprendizagem significativa. Recordando suas palavras:

> Se eu tivesse que reduzir toda psicologia educacional a um único princípio, diria isto: O fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos. Ver [1].

Em Aritmética, por exemplo, para estudar critérios de divisibilidade, os conceitos de números inteiros, pares, ímpares, primos e compostos, múltiplos e divisores já devem existir na estrutura cognitiva do aluno, pois eles servirão de subsunçores. Assim, o pré-teste foi elaborado com a finalidade de detectar se o aluno já possuía o embasamento teórico compatível à aprendizagem significativa.

### Atividade I

O terceiro trabalho proposto teve como objetivo apresentar a importância dos critérios de divisibilidade no estudo da Aritmética, mesmo diante de um contexto em que as calculadoras estão facilmente disponíveis.

Nessa atividade, iniciada com a leitura de um texto que estabelecia uma analogia entre número primo positivo e o antigo conceito de átomo, ressaltou-se que "**Número primo é o átomo da Aritmética**", pois assim como um átomo é inquebrável, um número primo também é indivisível, pois seus únicos divisores naturais são a unidade e ele mesmo. Além disso, assim como uma molécula é constituída de átomos, um número composto é constituído de números primos. Conclusão: conhecendo-se os átomos, domina-se a matéria[3]; conhecendo-se os números primos, domina-se a Aritmética.

Para reforçar a importância dos números primos foi, apresentado o Teorema Fundamental da Aritmética, a saber:

"**Qualquer número composto pode ser fatorado (ou decomposto) em fatores primos, e tal decomposição é única quando não são considerados os sinais dos fatores e nem a ordem desses fatores**."

A última parte dessa atividade consistiu numa lista de exercícios sobre decomposição de números compostos em seus fatores primos positivos e a necessidade de se conhecer os principais critérios de divisibilidade a fim de agilizar os cálculos.

Após relembrar os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10, os respondentes foram submetidos a uma bateria com 8 exercícios simples e diretos no formato de julgar itens, pois a assimilação

[3] Entenda-se aqui o sentido físico da palavra matéria, isto é, um "agregado de partículas que possuem massa", e não no sentido de um conteúdo a ser estudado.

do conteúdo estudado passa pela exercitação repetitiva, muitas vezes automática (ou mecânica, conforme Ausubel). E na Matemática, por excelência, o treinamento é imprescindível.

A grande maioria dos alunos encerrou essa atividade antes do tempo, conforme era esperado. Para evitar a dispersão e conversa enquanto os alunos remanescentes estavam concluindo o trabalho, foi incluída no final do material fornecido uma seção denominada "Desafios" com três exercícios mais complexos, todos relacionados ao tema "*critérios de divisibilidade*", tratados no viés da resolução de problemas em diferentes situações. Desse modo, "o aprendiz pôde relacionar de forma não arbitrária e substantiva (não literal), uma nova informação a outras com as quais ele já estava familiarizado" (ver [1]), configurando um dos aspectos da aprendizagem significativa de Ausubel. A primeira questão foi extraída do vestibular da UFRJ (Universidade Federal do Rio de Janeiro) de 1998, a segunda do vestibular da UnB (Universidade de Brasília) de 1999 e a terceira da olimpíada da Rússia de 1980. De acordo com o que foi visto no primeiro capítulo, o material didático configura um importante pilar no qual a aprendizagem significativa se apoia, devendo apresentar uma tarefa "estrategicamente escolhida e dosada na medida certa" e ser "organizado de modo que os pré-requisitos para cada novo assunto sejam previamente abordados, tornando-o potencialmente significativo".

### Atividade II

O quarto trabalho proposto teve como objetivo apresentar os critérios de divisibilidade por 7 e por 11 e, finalmente, o Teorema de Sebá, ou seja, uma regra de divisibilidade válida para qualquer número primo superior a 5.

Esse foi, indubitavelmente, o movimento mais difícil de todos. Com 45 alunos em cada uma das quatro turmas e apenas 50 minutos para relembrar o critério de divisibilidade por 11, explicar o critério por 7 (em seguida, propor aos alunos que julgassem quatro itens sobre tais critérios) e apresentar o critério universal (Teorema de Sebá) para, finalmente, propor oito itens (do tipo certo/errado) relacionados à aplicação do Teorema de Sebá, o professor pesquisador precisou imprimir um ritmo muito intenso a fim de possibilitar que os estudantes tivessem tempo hábil para executar a tarefa.

# Capítulo 6

# Análise das atividades desenvolvidas

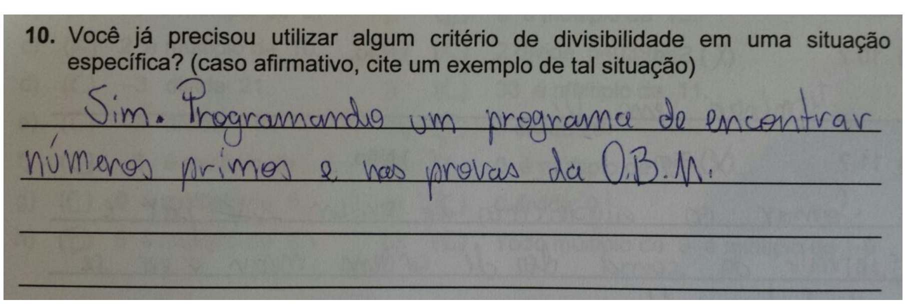
Neste capítulo serão analisados os dados extraídos das respostas dos alunos às tarefas que lhes foram propostas. Após a coleta e a devida organização desses dados em uma planilha, foram excluídos aqueles alunos que deixaram de responder a pelo menos uma das atividades ou que não seguiram as recomendações e advertências do professor pesquisador. Desta forma, o espaço amostral original da pesquisa tinha 164 alunos, sendo reduzido para 143. Toda a pesquisa foi baseada neste último número. Entretanto, ocasionalmente houve alunos que não responderam a algumas questões.

## 6.1 Questionário

Antes de aplicar o questionário, o professor pesquisador levou cerca de 10 minutos para explicar os fundamentos da pesquisa e as atividades propostas, e, principalmente, para motivá-los a participarem do estudo. Eles responderam ao questionário em menos de 15 minutos.

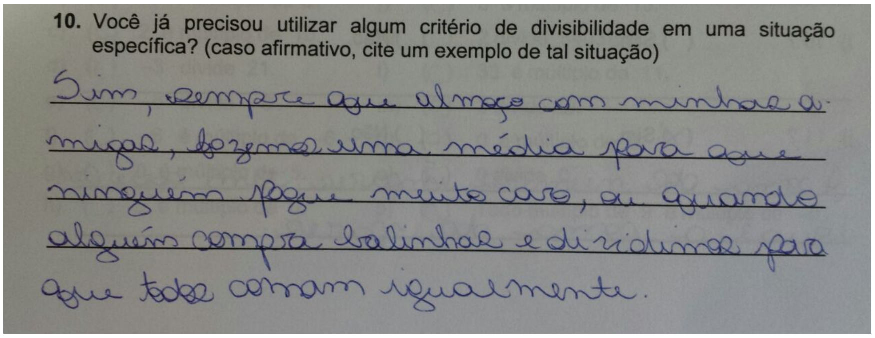
Com relação ao gênero, 38% e 62% dos respondentes são, respectivamente, do sexo masculino e feminino e todos declararam que a maior parte da vida escolar foi cursada na rede privada de ensino. Além disso, cerca de 37% faz uso de aulas particulares.

No tocante à pergunta 9 (Você sabe o que é um critério de divisibilidade?), 94% dos 139 respondentes afirmaram saber o que é um critério de divisibilidade. Já em relação à pergunta 10 (Você já precisou utilizar algum critério de divisibilidade em uma situação específica?), exatamente 75% dos 132 respondentes afirmaram que sim. Destes, 65 citaram a utilização dos critérios de divisibilidade em situações restritas a avaliações (exercícios, provas, testes e simulados). A seguir, algumas respostas formuladas pelos alunos.



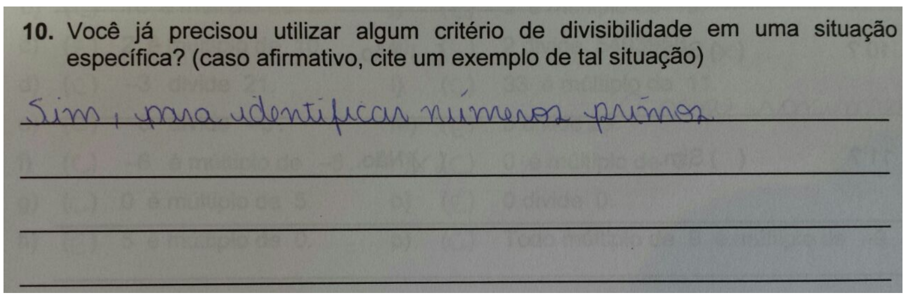
**10.** Você já precisou utilizar algum critério de divisibilidade em uma situação específica? (caso afirmativo, cite um exemplo de tal situação)

Sim. Programando um programa de encontrar números primos e nas provas da O.B.M.



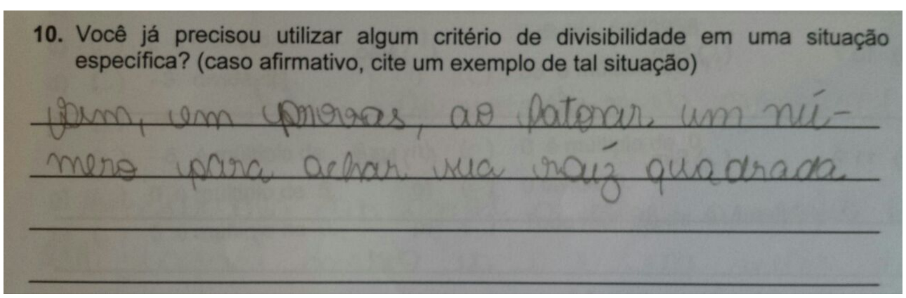
**10.** Você já precisou utilizar algum critério de divisibilidade em uma situação específica? (caso afirmativo, cite um exemplo de tal situação)

Sim, sempre que almoço com minhas amigas, fazemos uma média para que ninguém pague muito caro, ou quando alguém compra balinhas e dividimos para que todos comam igualmente.



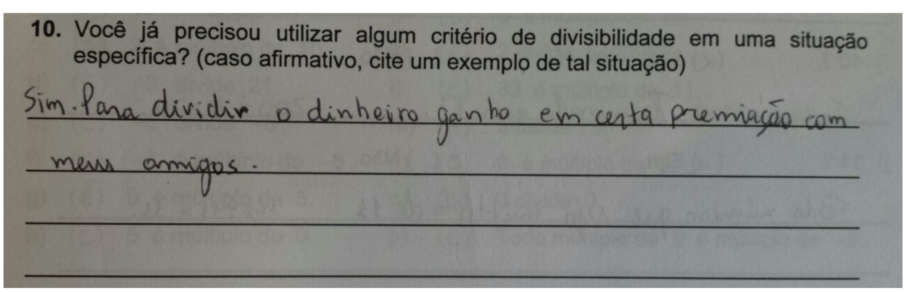
**10.** Você já precisou utilizar algum critério de divisibilidade em uma situação específica? (caso afirmativo, cite um exemplo de tal situação)

Sim, para identificar números primos



**10.** Você já precisou utilizar algum critério de divisibilidade em uma situação específica? (caso afirmativo, cite um exemplo de tal situação)

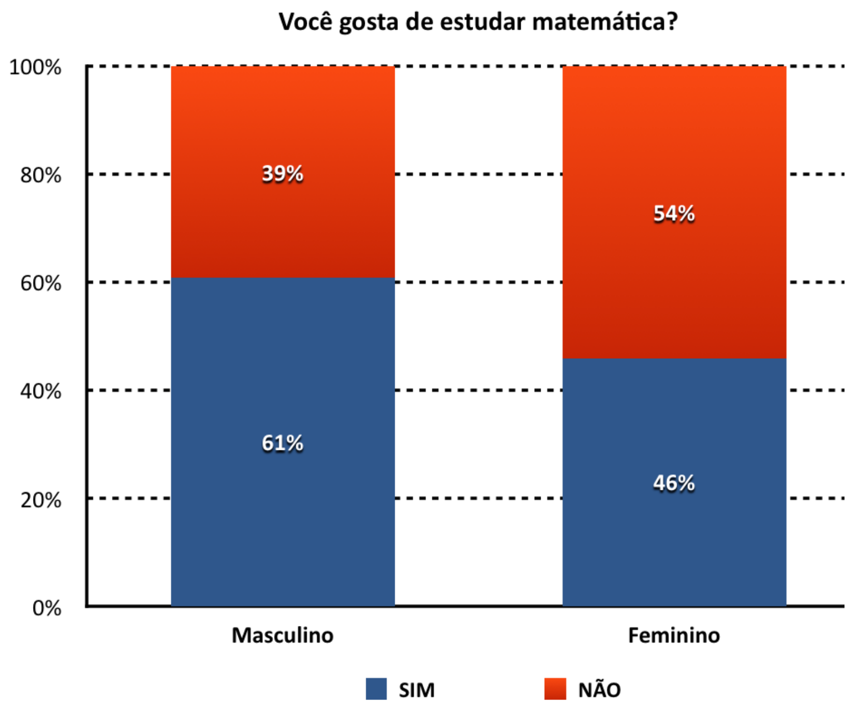
Sim, em provas, ao fatorar um número para achar sua raiz quadrada.



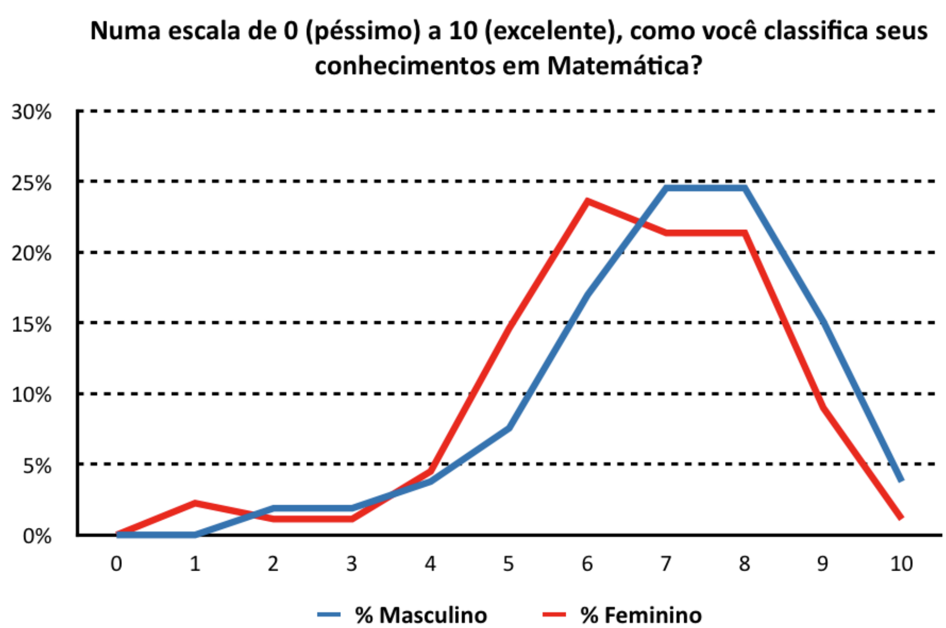
**10.** Você já precisou utilizar algum critério de divisibilidade em uma situação específica? (caso afirmativo, cite um exemplo de tal situação)

Sim. Para dividir o dinheiro ganho em certa premiação com meus amigos.

Em resposta à pergunta 4 (Você gosta de estudar Matemática?), 61% (ou 31/51) dos homens e 46% (ou 40/87) das mulheres que responderam disseram sim, conforme o gráfico a seguir.




Em resposta à pergunta 5 (Numa escala de 0 (péssimo) a 10 (excelente), como você classifica seus conhecimentos em Matemática?), obteve-se o gráfico correspondente:




A partir da tabela que gerou o gráfico, infere-se que:

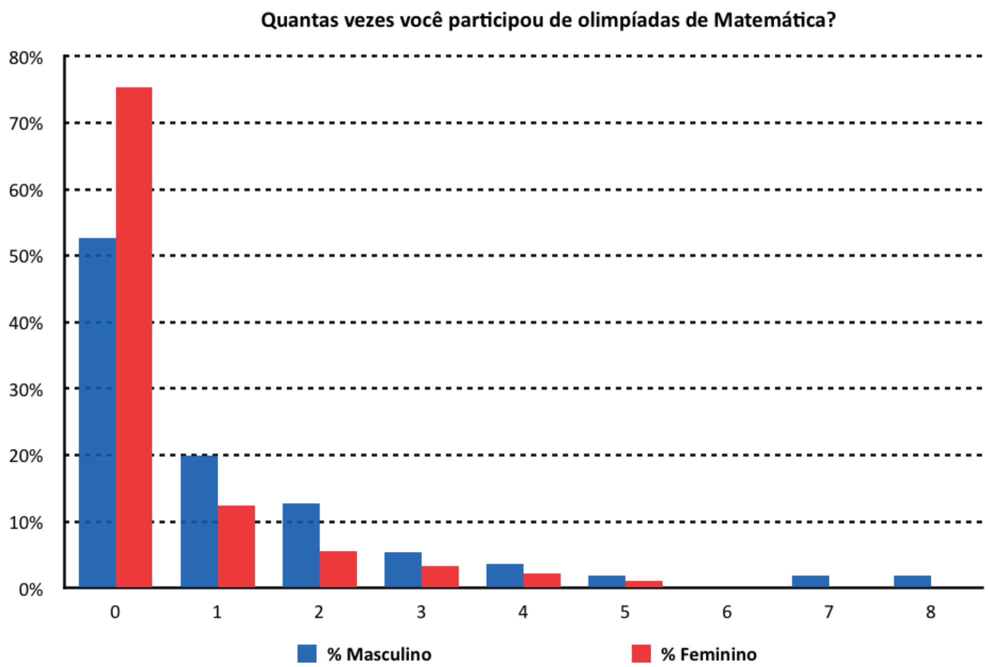
- nenhum respondente classificou como péssimo seus conhecimentos em Matemática (nota 0);
- ao todo, 12 alunos, sendo 4 do sexo masculino e 8 do sexo feminino, atribuíram a si mesmos nota

inferior a 5 (estes foram classificados pelo pesquisador como "**alunos que classificaram como ruins seus conhecimentos em Matemática**", designados por **GR**);

- ao todo, 51 alunos, sendo 23 do sexo masculino e 28 do sexo feminino, atribuíram a si mesmos nota superior a 7 (estes foram classificados pelo pesquisador como "**alunos que classificaram como bons seus conhecimentos em Matemática**", designados por **GB**);
- apenas 3 respondentes declararam como excelentes seus conhecimentos em Matemática (nota 10).

Esses dados serão importantes para confrontar a percepção do aluno a seu respeito em Matemática e seu desempenho. Nesse sentido, surgirão algumas correlações.

Em resposta à pergunta 6 (Quantas vezes você participou de olimpíadas de Matemática?), foi obtido o gráfico correspondente:

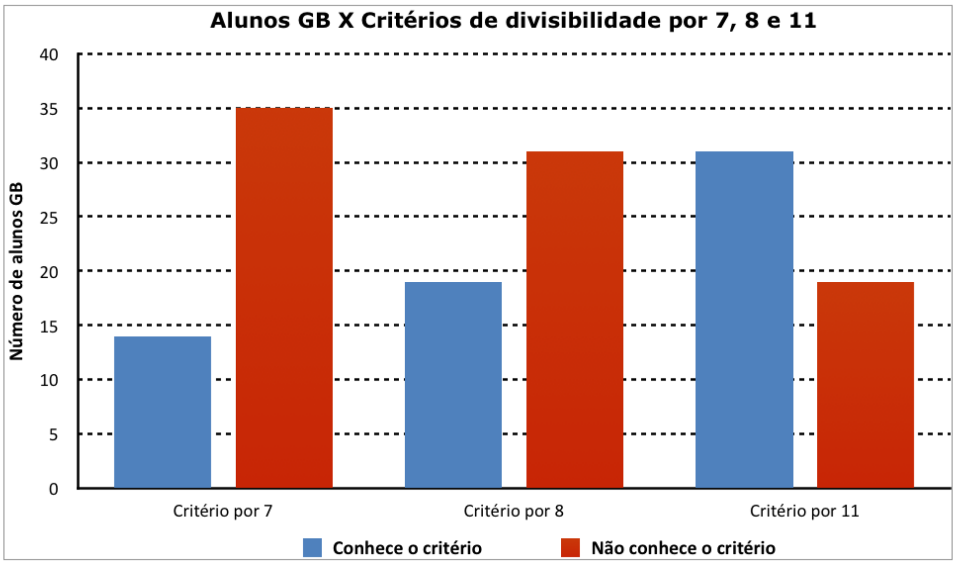



Observa-se que a grande maioria dos respondentes (cerca de 53% dos homens e 72% das mulheres) jamais participou de olimpíadas de Matemática e, naturalmente, os alunos que declararam como excelentes seus conhecimentos em Matemática foram os que mais participaram dessas competições.

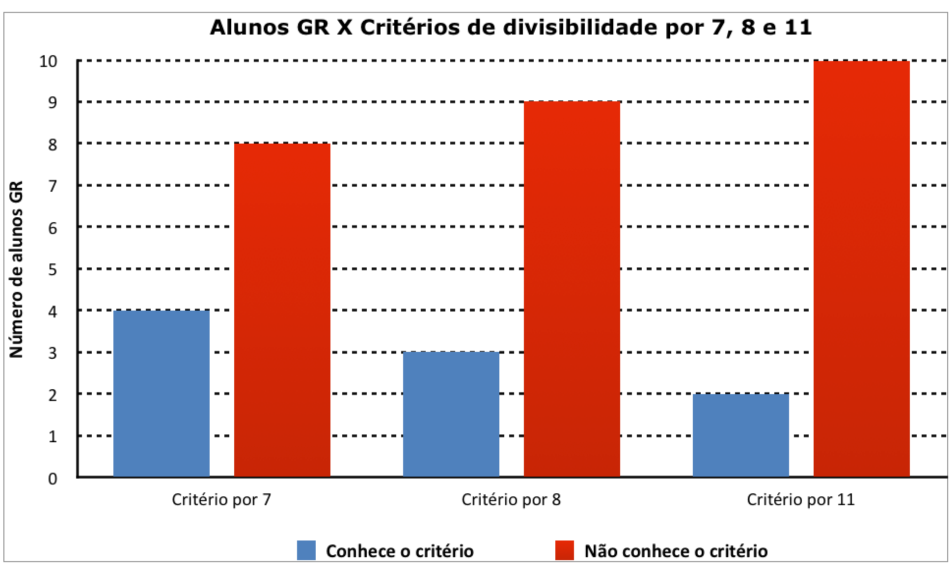
A tabela abaixo contém a declaração de todos os respondentes à pergunta 11, letras de $a$ a $j$ (Você conhece o critério de divisibilidade por $a)$ 2; $b)$ 3; $c)$ 4; $d)$ 5; $e)$ 6; $f)$ 7; $g)$ 8; $h)$ 9; $i)$ 10; $j)$ 11? ).

| Alunos declararam conhecer o critério de divisibilidade por: | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
| **Sim** | 96% | 93% | 70% | 94% | 80% | 33% | 35% | 54% | 85% | 50% |
| **Não** | 4% | 7% | 30% | 6% | 20% | 67% | 65% | 46% | 15% | 50% |

Os resultados acima confirmam uma antiga constatação do pesquisador, a saber: dentre os critérios de divisibilidade dos números naturais de 2 a 11, os alunos apresentam maior dificuldade com o 7, o 8 e o 11. Observe na tabela anterior que o percentual de alunos que declararam conhecer os critérios mencionados só foi inferior a 50% para os critérios por 7, por 8 e por 11. Por isso, à frente, será estabelecido um confronto entre as respostas dos alunos do grupo GB (nota de 8 a 10 na pergunta 5) nos itens relacionados a tais critérios.




Dentre os 49 alunos do grupo GB: apenas 14 declararam conhecer o critério de divisibilidade por 7; apenas 19 declararam conhecer o critério de divisibilidade por 8; 31 declararam conhecer o critério de divisibilidade por 11.




Dentre os 12 respondentes do grupo GR: 4 declararam conhecer o critério de divisibilidade por 7; 3 declararam conhecer o critério de divisibilidade por 8; 2 declararam conhecer o critério de divisibilidade por 11.

## 6.2 Pré-teste

O pré-teste foi aplicado aos respondentes tão logo eles encerraram o questionário. Assim, eles levaram cerca de 25 minutos para concluir esse trabalho.

Um interessante fato percebido durante a aplicação do pré-teste foi o considerável número de alunos resistentes à orientação do professor pesquisador, pois este solicitou aos respondentes que realizassem a atividade proposta individualmente e sem a utilização de calculadoras ou qualquer outro dispositivo eletrônico. Para seu espanto, mesmo esclarecendo que o trabalho não valia nota e que a identidade de cada participante não seria revelada, deparou-se com diversos estudantes tentando maximizar seu desempenho no pré-teste por meio de atos não permitidos ("cola" ou uso indevido do celular). Aqueles alunos que persistiram em "burlar" as regras estabelecidas continuaram a participar das atividades, mas foram descartados da pesquisa ao final do estudo.

**Enunciado da questão 1.**

**1.** Sendo **Z** o conjunto dos números inteiros, complete cada espaço com $\in$ ("pertence") ou $\notin$ ("não pertence").

a) 5 ___ **Z** b) $\sqrt{2}$ ___ **Z** c) $\frac{7}{5}$ ___ **Z** d) 1,53 ___ **Z** e) 0 ___ **Z**

f) –2 ___ **Z** g) –3,6 ___ **Z** h) $\pi$ ___ **Z** i) $\frac{24}{8}$ ___ **Z** j) $\frac{11}{3}$ ___ **Z**

Em resposta à questão 1, cujo objetivo foi analisar se o respondente conhecia o conjunto dos números inteiros, foram geradas três tabelas, a primeira contendo as respostas de todos os 143 alunos, a segunda daqueles do grupo GB e a terceira do grupo GR.

| Desempenho de todos os alunos - questão 1 (pré-teste) | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Letra** | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** | **h** | **i** | **j** |
| **Acertaram** | 140 | 132 | 118 | 115 | 138 | 124 | 119 | 126 | 120 | 119 |
| **Erraram** | 1 | 8 | 22 | 24 | 3 | 18 | 22 | 14 | 20 | 21 |
| **Em branco** | 2 | 3 | 3 | 4 | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| **% de acerto** | 97,9 | 92,3 | 82,5 | 80,4 | 96,5 | 86,7 | 83,2 | 88,1 | 83,9 | 83,2 |
| **% de erro** | 0,7 | 5,6 | 15,4 | 16,8 | 2,1 | 12,6 | 15,4 | 9,8 | 14,0 | 14,7 |
| **% em branco** | 1,4 | 2,1 | 2,1 | 2,8 | 1,4 | 0,7 | 1,4 | 2,1 | 2,1 | 2,1 |

Em todas as alternativas, o desempenho dos alunos foi superior a 80%. O índice de acertos dos que responderam às letras *a* e *e* foi próximo de 100%, mas quase 20% deles não acertaram a letra *d*.

| Desempenho dos alunos GB - questão 1 (pré-teste) | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Letra** | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** | **h** | **i** | **j** |
| **Acertaram** | 48 | 47 | 41 | 41 | 48 | 47 | 43 | 45 | 41 | 43 |
| **Erraram** | 0 | 2 | 8 | 8 | 0 | 2 | 6 | 4 | 8 | 6 |
| **Em branco** | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **% de acerto** | 98,0 | 95,9 | 83,7 | 83,7 | 98,0 | 95,9 | 87,8 | 91,8 | 83,7 | 87,8 |
| **% de erro** | 0,0 | 4,1 | 16,3 | 16,3 | 0,0 | 4,1 | 12,2 | 8,2 | 16,3 | 12,2 |
| **% em branco** | 2,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 2,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |

Em todas as alternativas, o desempenho dos alunos do grupo GB foi superior a 83%. O índice de acertos dos que responderam às letras $a$ e $e$ foi igual a 100%.

| Desempenho dos alunos GR - questão 1 (pré-teste) | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Letra** | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** | **h** | **i** | **j** |
| **Acertaram** | 11 | 1 | 4 | 4 | 10 | 10 | 4 | 1 | 8 | 2 |
| **Erraram** | 0 | 10 | 7 | 7 | 1 | 1 | 7 | 10 | 3 | 9 |
| **Em branco** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **% de acerto** | 100,0 | 9,1 | 36,4 | 36,4 | 90,9 | 90,9 | 36,4 | 9,1 | 72,7 | 18,2 |
| **% de erro** | 0,0 | 90,9 | 63,6 | 63,6 | 9,1 | 9,1 | 63,6 | 90,9 | 27,3 | 81,8 |
| **% em branco** | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |

Mais de 90% dos alunos do grupo GR erraram as letras $b$ e $h$, isto é, afirmaram que $\sqrt{2}$ e $\pi$ são números inteiros. Esta é uma falha muito elementar, sugerindo que tais alunos realmente apresentam dificuldades bastante pontuais. Outro resultado que chama a atenção é o fato de nas letras $c$, $d$ e $g$ $63,6\%$ deles afirmarem que $7/5$, 1,53 e $-3{,}6$ são números inteiros.

Em sua experiência como professor, o pesquisador tem constatado a grande dificuldade que os alunos brasileiros apresentam na assimilação de muitos conceitos importantes como frações, porcentagens, proporções, números racionais e irracionais. Esse triste retrato é confirmado pelos resultados extraídos do pré-teste e por uma vasta quantidade de estudos. Nesse sentido, em [13], a pesquisadora Regina da Silva Pina Neves afirma algo ainda mais preocupante, a saber, que essas lacunas conceituais são encontradas entre os próprios professores. Em suas palavras:

> Pesquisas nacionais e internacionais sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, realizadas desde a década de 1980, comprovam que alunos, futuros professores e professores apresentam dificuldades com os conceitos de divisão e de números racionais. Denunciam, ainda, que estes apresentam baixos níveis de desempenho em atividades que remetem à resolução de problemas, ao raciocínio e à comunicação (Ver, por exemplo, Saiz, 1996; Bryant e Nunes, 1997). Ademais, defendem que o aprendizado dos números racionais requer a superação de

> obstáculos epistemológicos e didáticos (Freudenthal, 1983; Ohlsson, 1987; Kieren, 1989) (ver página 3).

E ainda:

> O melhor desempenho dos alunos na resolução de problemas de frações com o significado parte-todo e o desconhecimento deles sobre os outros significados, aliado ao fato de os professores apresentarem, também, dificuldades de compreensão de todos os significados, em especial, o de razão, sinaliza que alunos e professores apresentam problemas de ordem conceitual, possivelmente, não entendem que um mesmo número fracionário pode estar associado a diferentes situações e apresentado em diferentes representações. Tal fato tem relação direta com o modo de alunos e professores lidarem com o conhecimento matemático vendo-o de modo separado, "em gavetas" e não em interação a outros conceitos, como propõe a teoria dos campos conceituais. Em resumo, os dados dessa revisão evidenciam que as dificuldades de alunos e de professores com os conceitos de divisão e número racional acontecem em função das relações que estes vêm estabelecendo com o conhecimento matemático, pautada apenas na aquisição e transmissão de saberes e não na construção de significados conceituais (ver página 107).

Em [16], o pesquisador Mauro Luiz Rabelo, ao analisar os resultados de itens extraídos de avaliações de larga escala (SAEB), conclui:

> Outros itens que avaliam a compreensão do conceito de fração foram aplicados para os estudantes, e o resultado foi praticamente o mesmo. O resultado da aplicação desses itens permite inferir que esse conceito ainda não foi apreendido pela esmagadora maioria dos alunos brasileiros que concluem o Ensino Médio e sugere para os educadores matemáticos que ainda são ineficazes as metodologias até então utilizadas para propiciar a aprendizagem desse conteúdo pelos estudantes (ver página 29).

A afirmação "esse conceito ainda não foi aprendido pela esmagadora maioria dos alunos brasileiros" não se aplica literalmente aqui, pois o público-alvo do estudo é constituído por respondentes que sempre estudaram na rede privada de ensino e que possuem condições favoráveis para desempenhar esse papel (dedicação exclusiva para estudar, aulas particulares, reforço escolar, material didático de qualidade, bons professores...).

**Enunciado da questão 2.**

**2.** Para cada caso a seguir, assinale:

**P**, se o número for **par**;
**I**, se o número for **ímpar**; e
**N**, se o número **não for par nem ímpar**.

a) ( ) 0 b) ( ) 1 c) ( ) –2 d) ( ) 7,2 e) ( ) 25 f) ( ) 3,6
g) ( ) $\sqrt{2}$ h) ( ) –79 i) ( ) –2,4 j) ( ) 3578 k) ( ) 31 l) ( ) 4,44...

Em resposta à questão 2, cujo objetivo foi analisar se o respondente detinha os conceitos de número par e número ímpar e, além disso, entendia que tais conceitos estão restritos aos números inteiros, foram geradas três tabelas, a primeira contendo as respostas de todos os alunos, a segunda daqueles que consideram bons seus conhecimentos em Matemática (GB) e a terceira dos que consideram ruins seus conhecimentos em Matemática (GR).

| Desempenho de todos os alunos - questão 2 (pré-teste) | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Letra** | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** | **h** | **i** | **j** | **k** | **l** |
| **Acertaram** | 102 | 139 | 127 | 47 | 137 | 43 | 88 | 126 | 48 | 134 | 138 | 52 |
| **Erraram** | 39 | 2 | 11 | 83 | 4 | 87 | 37 | 12 | 82 | 6 | 2 | 77 |
| **Em branco** | 2 | 1 | 5 | 13 | 2 | 13 | 18 | 5 | 13 | 3 | 3 | 14 |
| **% de acerto** | 71,3 | 97,2 | 88,8 | 32,9 | 95,8 | 30,1 | 61,5 | 88,1 | 33,6 | 93,7 | 96,5 | 36,4 |
| **% de erro** | 27,3 | 1,4 | 7,7 | 58,0 | 2,8 | 60,8 | 25,9 | 8,4 | 57,3 | 4,2 | 1,4 | 53,8 |
| **% em branco** | 1,4 | 0,7 | 3,5 | 9,1 | 1,4 | 9,1 | 12,6 | 3,5 | 9,1 | 2,1 | 2,1 | 9,8 |

A partir da tabela acima, infere-se que:

*i*) quase 28% dos alunos não sabem que zero é par;

*ii*) nas letras $d$, $f$ e $l$, que apresentam números não inteiros, infere-se que há certa dificuldade em reconhecer o conceito de paridade para números racionais, enquanto que, para números irracionais, a questão soa "menos confusa". As aspas em menos confusa porque os acertos no caso do irracional foram aproximadamente o dobro dos casos dos racionais. No entanto, quase 26% dos alunos apontaram $\sqrt{2}$ como número par;

- na letra $d$, $44,1\%$ dos alunos assinalaram PAR (muito provavelmente a equivocada máxima: "se um número termina em algarismo par, então ele é par" foi utilizada aqui; o aluno não "percebeu" que isso só se aplica para números inteiros), enquanto 14% assinalaram ÍMPAR (muito provavelmente quem assim pensou ou chutou ou considerou apenas a parte inteira do número $3,6$);

- de modo análogo, na letra $f$, $53,8\%$ dos alunos assinalaram PAR, enquanto 7% assinalaram ÍMPAR;

- já na letra $l$, $51,7\%$ dos alunos assinalaram PAR, enquanto apenas $2,1\%$ assinalaram ÍMPAR (observe que o número $4,44...$ só possui algarismos pares, logo muito provavelmente esses respondentes chutaram).

*iii*) no caso da letra $i$, o percentual de erros foi ainda maior. Nele aparece um racional negativo.

| Desempenho dos alunos GB - questão 2 (pré-teste) | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Letra** | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** | **h** | **i** | **j** | **k** | **l** |
| **Acertaram** | 35 | 49 | 48 | 20 | 48 | 20 | 34 | 48 | 17 | 48 | 48 | 25 |
| **Erraram** | 14 | 0 | 1 | 24 | 1 | 24 | 9 | 1 | 26 | 1 | 1 | 20 |
| **Em branco** | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 4 | 0 | 3 | 0 | 0 | 2 |
| **% de acerto** | 71,4 | 100,0 | 98,0 | 40,8 | 98,0 | 40,8 | 69,4 | 98,0 | 34,7 | 98,0 | 98,0 | 51,0 |
| **% de erro** | 28,6 | 0,0 | 2,0 | 49,0 | 2,0 | 49,0 | 18,4 | 2,0 | 53,1 | 2,0 | 2,0 | 40,8 |
| **% em branco** | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 4,1 | 0,0 | 4,1 | 8,2 | 0,0 | 6,1 | 0,0 | 0,0 | 4,1 |

A tabela acima, em relação aos alunos do grupo GB, possibilita as seguintes inferências:

- apesar de considerarem bons seus conhecimentos em Matemática, 28,6% desses alunos não sabem que zero é par[1];
- todos sabem que 1 é ímpar;
- na letra $c$, esses alunos não foram induzidos ao erro pela presença do sinal negativo;
- até a maioria dos alunos do grupo GB errou as letras $d$, $f$ e $l$;
- cerca de 30% não sabem que $\sqrt{2}$ é irracional.

| Desempenho dos alunos GR - questão 2 (pré-teste) | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Letra** | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** | **h** | **i** | **j** | **k** | **l** |
| **Acertaram** | 7 | 12 | 11 | 3 | 10 | 2 | 4 | 11 | 3 | 11 | 12 | 2 |
| **Erraram** | 5 | 0 | 1 | 9 | 2 | 10 | 6 | 1 | 9 | 1 | 0 | 10 |
| **Em branco** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **% de acerto** | 58,3 | 100,0 | 91,7 | 25,0 | 83,3 | 16,7 | 33,3 | 91,7 | 25,0 | 91,7 | 100,0 | 16,7 |
| **% de erro** | 41,7 | 0,0 | 8,3 | 75,0 | 16,7 | 83,3 | 50,0 | 8,3 | 75,0 | 8,3 | 0,0 | 83,3 |
| **% em branco** | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 16,7 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |

A tabela acima, em relação aos alunos do grupo GR, possibilita as seguintes inferências:

- 41,7% desses alunos não sabem que zero é par;
- todos sabem que 1 é ímpar;
- 75% desses alunos erraram a letra $d$, 83,3% erraram as letras $f$ e $l$;
- cerca de 66,7% não sabem que $\sqrt{2}$ é irracional.

**Enunciado da questão 3.**

**3.** Sendo ***a*** e ***b*** números inteiros, preencha a tabela abaixo com **PAR** ou **ÍMPAR**.

| ***a*** | ***b*** | $a+b$ | $a-b$ | $a \cdot b$ |
|---|---|---|---|---|
| **PAR** | **PAR** | | | |
| **PAR** | **ÍMPAR** | | | |
| **ÍMPAR** | **PAR** | | | |
| **ÍMPAR** | **ÍMPAR** | | | |

[1] Muitos alunos afirmam que o número zero não é par, pois ele é neutro. Para eles, o fato de zero ser neutro impossibilita sua classificação como par ou ímpar. Percebe-se, portanto, uma confusão conceitual.

Em resposta à questão 3, cujo objetivo é analisar se o respondente conhece a paridade resultante de algumas operações elementares envolvendo dois números inteiros, apenas uma tabela foi gerada, dado que o nível de dificuldade de tal exercício é muito baixo.

| % de acertos de todos os alunos na questão 3 (pré-teste) | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ***a*** | ***b*** | ***a + b*** | ***a - b*** | ***a . b*** |
| **PAR** | **PAR** | 98,6% | 97,9% | 98,6% |
| **PAR** | **ÍMPAR** | 96,5% | 95,1% | 87,4% |
| **ÍMPAR** | **PAR** | 95,8% | 94,4% | 89,5% |
| **ÍMPAR** | **ÍMPAR** | 89,5% | 85,3% | 87,4% |

Os dados acima confirmam o fato de que a questão 3 é bem elementar. Mesmo assim, mais de 10% dos respondentes afirmaram que o produto de um número par por um número ímpar (e vice-versa) é ímpar, e cerca de 13% escreveu que o produto de dois números ímpares é par.

Infelizmente, a aula de múltiplos e divisores, números primos e compostos foi ministrada um pouco antes do pré-teste, levando o pesquisador a acreditar que isso comprometeria o seu resultado no tocante às questões 4 e 5, pois, de acordo com a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, o pré-teste deve ser aplicado antes de o conteúdo ser ensinado. De qualquer maneira, os dados gerais delas foram tabulados conforme segue.

**Enunciado da questão 4.**

**4.** Assinale **C** ou **E** conforme o item seja certo ou errado, respectivamente.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | ( ) | 2 divide 10. | i) | ( ) | 5 divide 0. |
| b) | ( ) | 10 é múltiplo de 2. | j) | ( ) | 5 é múltiplo de 15. |
| c) | ( ) | 2 é múltiplo de 10. | k) | ( ) | 2 divide 5403958. |
| d) | ( ) | $-3$ divide 21. | l) | ( ) | 33 é múltiplo de 11. |
| e) | ( ) | $-6$ divide $-6$. | m) | ( ) | 3 divide 29. |
| f) | ( ) | $-6$ é múltiplo de $-6$. | n) | ( ) | 0 é múltiplo de 0. |
| g) | ( ) | 0 é múltiplo de 5. | o) | ( ) | 0 divide 0. |
| h) | ( ) | 5 é múltiplo de 0. | p) | ( ) | Todo múltiplo de 9 é múltiplo de $-9$. |

Em resposta à questão 4, cujo objetivo foi analisar se o respondente detinha os conceitos de múltiplos e divisores, foi gerada a tabela abaixo.

| Desempenho de todos os alunos - questão 4 (pré-teste) | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Letra | a | b | c | d | e | f | g | h |
| Acertaram | 140 | 131 | 109 | 124 | 139 | 120 | 82 | 89 |
| Erraram | 3 | 12 | 33 | 17 | 3 | 21 | 59 | 50 |
| Em branco | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 4 |
| % de acerto | 97,9 | 91,6 | 76,2 | 86,7 | 97,2 | 83,9 | 57,3 | 62,2 |
| % de erro | 2,1 | 8,4 | 23,1 | 11,9 | 2,1 | 14,7 | 41,3 | 35,0 |
| % em branco | 0,0 | 0,0 | 0,7 | 1,4 | 0,7 | 1,4 | 1,4 | 2,8 |

| Desempenho de todos os alunos - questão 4 (pré-teste) | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Letra | i | j | k | l | m | n | o | p |
| Acertaram | 85 | 90 | 139 | 130 | 123 | 127 | 95 | 102 |
| Erraram | 56 | 51 | 2 | 12 | 20 | 14 | 45 | 35 |
| Em branco | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 2 | 3 | 6 |
| % de acerto | 59,4 | 62,9 | 97,2 | 90,9 | 86,0 | 88,8 | 66,4 | 71,3 |
| % de erro | 39,2 | 35,7 | 1,4 | 8,4 | 14,0 | 9,8 | 31,5 | 24,5 |
| % em branco | 1,4 | 1,4 | 1,4 | 0,7 | 0,0 | 1,4 | 2,1 | 4,2 |

**Enunciado da questão 5.**

**5.** Assinale **C** ou **E** conforme o item seja certo ou errado, respectivamente.

a) ( ) 3 é primo.
b) ( ) 2 é primo.
c) ( ) 1 é primo.
d) ( ) 0 é primo.
e) ( ) $-2$ é primo.
f) ( ) 4 é primo.
g) ( ) 12 é composto.
h) ( ) 27 é primo.
i) ( ) 31 é primo.
j) ( ) 143 é composto.
k) ( ) 79 é composto.
l) ( ) 1345984560454 é primo.
m) ( ) Somente $-2$ e 2 são pares e primos.
n) ( ) Se $k$ é primo, então $-k$ é primo.

Em resposta à questão 5, cujo objetivo é analisar se o respondente detém os conceitos de múltiplos e divisores, foi gerada a tabela abaixo.

| Desempenho de todos os alunos - questão 5 (pré-teste) | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Letra** | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** |
| **Acertaram** | 138 | 137 | 99 | 127 | 112 | 131 | 103 |
| **Erraram** | 5 | 6 | 43 | 14 | 29 | 11 | 24 |
| **Em branco** | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 16 |
| **% de acerto** | 96,5 | 95,8 | 69,2 | 88,8 | 78,3 | 91,6 | 72,0 |
| **% de erro** | 3,5 | 4,2 | 30,1 | 9,8 | 20,3 | 7,7 | 16,8 |
| **% em branco** | 0,0 | 0,0 | 0,7 | 1,4 | 1,4 | 0,7 | 11,2 |
| **Desempenho de todos os alunos - questão 5 (pré-teste)** | | | | | | | |
| **Letra** | **h** | **i** | **j** | **k** | **l** | **m** | **n** |
| **Acertaram** | 110 | 122 | 64 | 82 | 104 | 96 | 111 |
| **Erraram** | 30 | 16 | 53 | 36 | 16 | 44 | 29 |
| **Em branco** | 3 | 5 | 26 | 25 | 23 | 3 | 3 |
| **% de acerto** | 76,9 | 85,3 | 44,8 | 57,3 | 72,7 | 67,1 | 77,6 |
| **% de erro** | 21,0 | 11,2 | 37,1 | 25,2 | 11,2 | 30,8 | 20,3 |
| **% em branco** | 2,1 | 3,5 | 18,2 | 17,5 | 16,1 | 2,1 | 2,1 |

Nas questões 4 e 5, esperava-se que os resultados fossem comprometidos levando a um alto índice de acertos porque os tópicos relacionados a elas foram previamente trabalhados pelo professor que ministrava Aritmética, mas a análise dos dados revelou o contrário. Mesmo após a explicação do conteúdo, o índice de acertos dos alunos na questão 4, principalmente nas letras $g$, $h$, $i$, e $o$, todas relacionadas ao número zero, foi baixo[2]. Além disso, na questão 5, mais de 30% dos respondentes afirmaram que o número um é primo, mais de 55% não responderam corretamente que 143 é composto (letra $j$) e cerca de 42% não acertaram a letra $k$ (79 é composto).

## 6.3 Atividade I

Após relembrar os critérios de divisibilidade por $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$ e $10$, foi proposta a seguinte questão aos alunos.

[2]O número zero, sem dúvida, centraliza as maiores dificuldades dos alunos (e professores!). Em diversas situações na Matemática, ele aparece como exceção às regras estabelecidas, de modo que a sua correta abordagem constitui um grande desafio para quem leciona. É comum encontrar afirmações como “Jamais dividirás por zero” ou “Não existe divisão por zero”.

**Enunciado da questão 4.**

**4.** Assinale **C** ou **E** conforme o item seja certo ou errado, respectivamente.

a) ( ) 4 divide 3 464 872 004 236.

b) ( ) 3 divide 235 498.

c) ( ) 5 divide 39 405 941 345.

d) ( ) 9 divide 36 996 345.

e) ( ) 8 divide 324 561 792.

f) ( ) 6 divide 11 126.

g) ( ) 10 divide 123 023 945 190.

h) ( ) 24 divide 659 670 432.

Foram geradas três tabelas, a primeira contendo as respostas de todos os alunos, a segunda do grupo GB e a terceira do grupo GR.

| Desempenho de todos os alunos - questão 4 (atividade I) | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Letra/ critério exigido** | **a/ 4** | **b/ 3** | **c/ 5** | **d/ 9** | **e/ 8** | **f/ 6** | **g/ 10** | **h/ 3 e 8** |
| **Acertaram** | 124 | 130 | 143 | 126 | 86 | 126 | 140 | 81 |
| **Erraram** | 16 | 13 | 0 | 11 | 38 | 15 | 1 | 43 |
| **Em branco** | 3 | 0 | 0 | 6 | 19 | 2 | 2 | 19 |
| **% de acerto** | 86,7 | 90,9 | 100,0 | 88,1 | 60,1 | 88,1 | 97,9 | 56,6 |
| **% de erro** | 11,2 | 9,1 | 0,0 | 7,7 | 26,6 | 10,5 | 0,7 | 30,1 |
| **% em branco** | 2,1 | 0,0 | 0,0 | 4,2 | 13,3 | 1,4 | 1,4 | 13,3 |

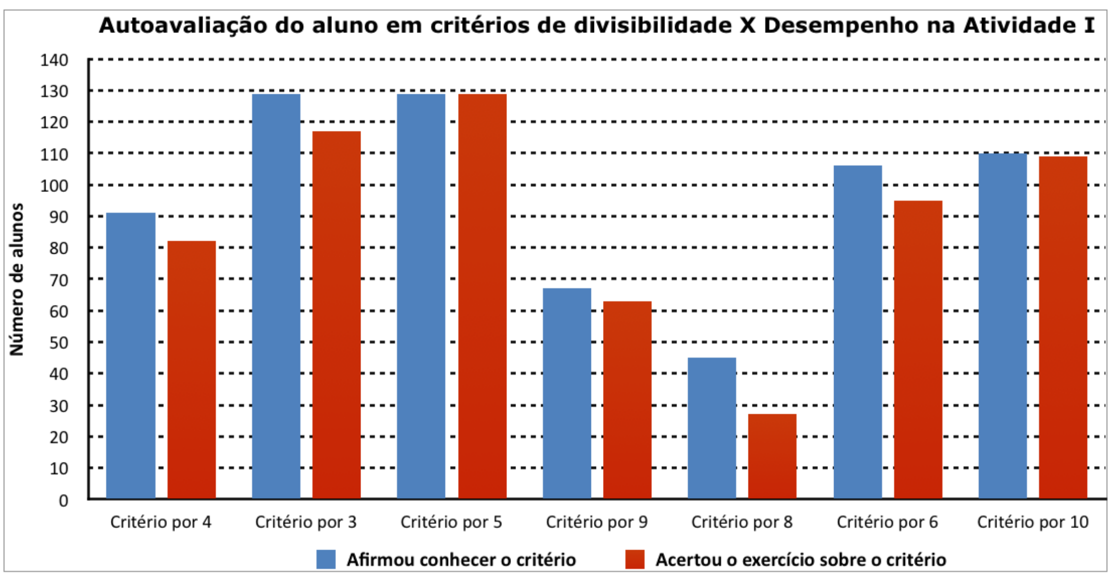
A partir da tabela acima, conclui-se que: os respondentes apresentaram maior dificuldade nas letras *e* e *h*, ambas abordando o critério de divisibilidade por 8; todos os alunos acertaram a letra *c*, sobre o critério de divisibilidade por 5.

| Desempenho dos alunos GB - questão 4 (atividade I) | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Letra/ critério exigido** | **a/ 4** | **b/ 3** | **c/ 5** | **d/ 9** | **e/ 8** | **f/ 6** | **g/ 10** | **h/ 3 e 8** |
| **Acertaram** | 47 | 47 | 49 | 47 | 35 | 48 | 49 | 37 |
| **Erraram** | 1 | 2 | 0 | 2 | 9 | 1 | 0 | 9 |
| **Em branco** | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 3 |
| **% de acerto** | 95,9 | 95,9 | 100,0 | 95,9 | 71,4 | 98,0 | 100,0 | 75,5 |
| **% de erro** | 2,0 | 4,1 | 0,0 | 4,1 | 18,4 | 2,0 | 0,0 | 18,4 |
| **% em branco** | 2,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 10,2 | 0,0 | 0,0 | 6,1 |

| Desempenho dos alunos GR - questão 4 (atividade I) | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Letra/ critério exigido | a/ 4 | b/ 3 | c/ 5 | d/ 9 | e/ 8 | f/ 6 | g/ 10 | h/ 3 e 8 |
| Acertaram | 11 | 10 | 12 | 10 | 6 | 8 | 11 | 2 |
| Erraram | 1 | 2 | 0 | 2 | 6 | 4 | 0 | 8 |
| Em branco | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| % de acerto | 91,7 | 83,3 | 100,0 | 83,3 | 50,0 | 66,7 | 91,7 | 16,7 |
| % de erro | 8,3 | 16,7 | 0,0 | 16,7 | 50,0 | 33,3 | 0,0 | 66,7 |
| % em branco | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 8,3 | 16,7 |

Das duas tabelas acima, infere-se que: o percentual de alunos que acertaram a letra $b$ e a letra $d$ foi exatamente o mesmo em cada uma delas, sugerindo que quem conhece o critério de divisibilidade por 3 também conhece o critério por 9; para os dois grupos, o critério de divisibilidade por 8 parece ser o mais difícil; o que confirma a antiga constatação do pesquisador; o segundo grupo apresentou dificuldade bem maior que o primeiro nas letras $f$ $(6 = 2 \cdot 3)$ e $h$ $(24 = 3 \cdot 8)$, ambas relacionadas a critérios de divisibilidade de números compostos por diferentes fatores primos.

Finalmente, o gráfico abaixo relaciona as respostas dadas pelos alunos ao questionário quando indagados sobre quais critérios de divisibilidade eles conheciam e o respectivo desempenho deles na questão 5 para os critérios por $4, 3, 5, 9, 8, 6$ e $10$, respectivamente.




A partir do gráfico, conclui-se que: cerca de 90% dos que afirmaram conhecer o critério por 4 acertaram a letra $a$; cerca de 90% dos que afirmaram conhecer o critério por 3 acertaram a letra $b$; 100% dos que afirmaram conhecer o critério por 5 acertaram a letra $c$; 94% dos que afirmaram conhecer o critério por 9 acertaram a letra $d$; 60% dos que afirmaram conhecer o critério por 8 acertaram a letra $e$; 89% dos que afirmaram conhecer o critério por 6 acertaram a letra $f$; quase 100% dos que afirmaram conhecer o critério por 10 acertaram a letra $g$. Diante de tudo isso, a respeito dos conhecimentos dos alunos em relação aos critérios de divisibilidade, infere-se que:

- os alunos dominam os critérios de divisibilidade por 5 e por 10;

- quem domina o critério de divisibilidade por 3 também domina o critério por 9;
- à exceção do critério de divisibilidade por 8, a grande maioria dos alunos apropriou-se de tais conhecimentos.

## 6.4 Atividade II

Esta atividade foi aplicada após todos os alunos terem assistido às aulas de critérios de divisibilidade pelo professor de Aritmética e destacou-se como a mais difícil de ser implementada, pois demandou metade do tempo da aula, isto é, 25 minutos, para a revisão dos critérios de divisibilidade por 7 e por 11 e a explicação do Teorema de Sebá. Para facilitar o entendimento do conteúdo apresentado, o professor pesquisador ditou (oralmente) aos alunos os critérios de divisibilidade por 7 e por 11 e forneceu os seguintes exemplos:

1) verificar se $N = 483$ é divisível por $p = 7$;

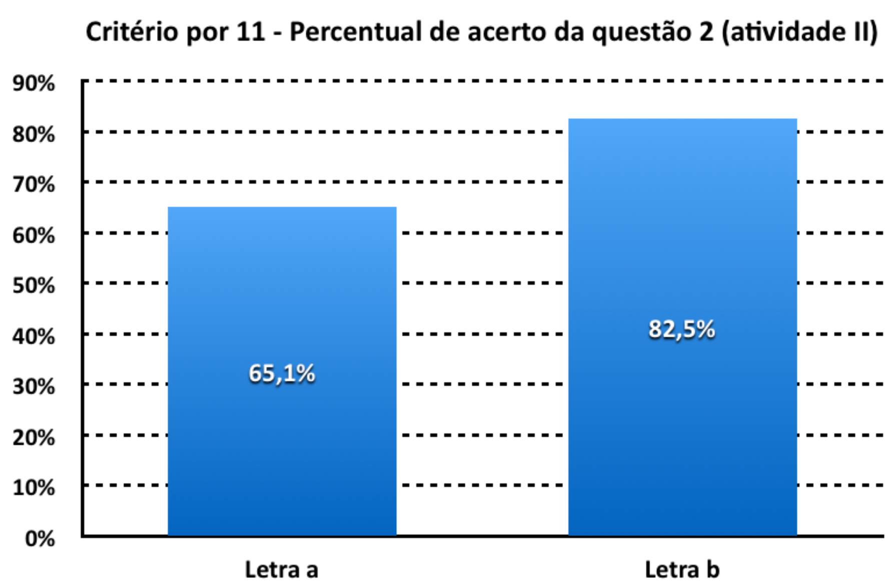
2) verificar se $N = 477204$ é divisível por $p = 7$;

3) verificar se $N = 341$ é divisível por $p = 11$;

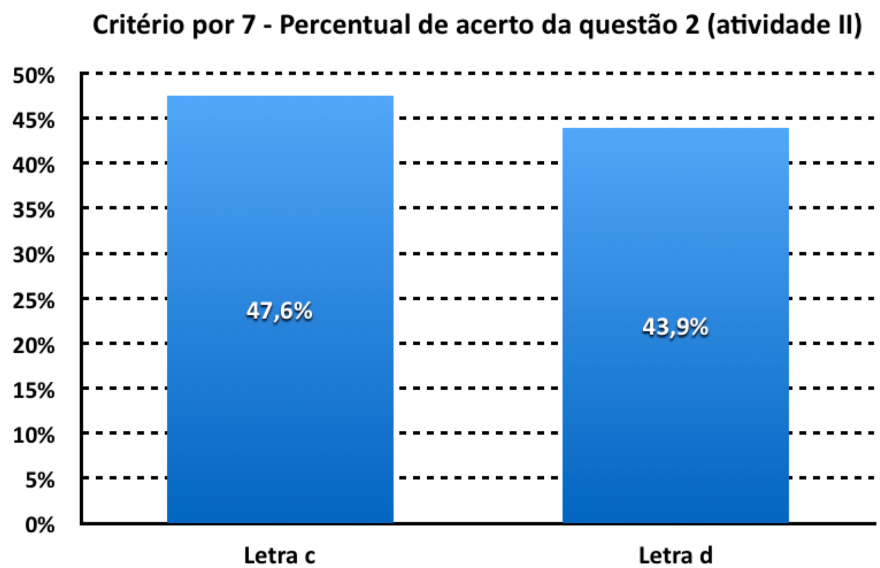
4) verificar se $N = 198968$ é divisível por $p = 11$.

Em seguida, o professor pesquisador solicitou aos alunos que respondessem à questão 2 (Assinale $C$ ou $E$ conforme o item seja certo ou errado, respectivamente.). Os itens $a$ e $b$ abordaram o critério de divisibilidade por 11, enquanto os itens $c$ e $d$, por 7.

No primeiro questionário aplicado na pesquisa, 55,9% dos alunos declararam conhecer o critério de divisibilidade por 11. Após a explicação desse critério, 65,1% dos respondentes acertaram o item $a$, enquanto 82,5% acertaram o item $b$, conforme indica o gráfico abaixo, sugerindo um considerável aumento no percentual daqueles que passaram a conhecer tal critério.




No primeiro questionário aplicado na pesquisa, 42,7% dos alunos declararam conhecer o critério de divisibilidade por 7. Após a explicação do critério de divisibilidade por 7, apenas 47,6% dos respondentes acertaram o item $c$ enquanto $43,9\%$ acertaram o item $d$, conforme indica o gráfico abaixo. Diante disso, percebe-se que a partir das estratégias implementadas, o pesquisador não teve o esperado êxito na explicação do conteúdo. Após refletir sobre o porquê disso, o pesquisador concluiu que o diminuto tempo de uma aula de 50 minutos para aplicar o trabalho (relembrar o critério de divisibilidade por 11, explicar o critério de divisibilidade por 7 e apresentar o Teorema de Sebá) não foi suficiente. Por isso, na explicação do critério de divisibilidade por 7, o pesquisador resolveu apenas um exercício a título de exemplo (três exercícios para exemplificação seriam satisfatórios). Se, por um lado, defende-se que para aprender Matemática o aluno precisa praticar muitos exercícios, por outro, o professor que milita nessa matéria precisa apresentar muitos exemplos estratégicos em suas explicações. Vale recordar que a escola na qual o estudo foi aplicado destinou exatamente três aulas para essa finalidade.




Finalmente, para abordar o Teorema de Sebá, o professor pesquisador forneceu os seguintes exemplos aos alunos:

5) verificar se $N = 28561$ é divisível por $p = 13$;

6) verificar se $N = 923521$ é divisível por $p = 31$;

7) verificar se $N = 130321$ é divisível por $p = 19$;

8) verificar se $N = 83521$ é divisível por $p = 17$.

Em uma das turmas um interessante fato chamou a atenção: após explicar o Teorema de Sebá, vários alunos aplaudiram o professor demonstrando grande espanto e admiração pela simplicidade e amplitude da regra enunciada.

A partir da empolgação dos alunos ao término da apresentação do Teorema de Sebá, infere-se que:

- houve um alto grau de instigação e envolvimento com a pesquisa apresentada;
- eles entenderam a proposta do confronto entre critérios de divisibilidade particulares e um critério universal (Teorema de Sebá);

- o critério universal é aplicável, dada a positiva reação dos estudantes.

Em seguida, o professor pesquisador propôs o desafio.

**Enunciado do desafio.**

**Desafio**

**1.** Sem utilizar uma calculadora, assinale **C** ou **E** conforme o item seja certo ou errado, respectivamente.

a) ( ) 28 561 é divisível de 13.

b) ( ) 12 167 é divisível por 23.

c) ( ) 923 521 é divisível por 31.

d) ( ) 68 921 é divisível por 41.

e) ( ) 83 521 é divisível por 17.

f) ( ) 50 653 é divisível por 37.

g) ( ) 130 321 é divisível por 19.

h) ( ) 707 281 é divisível por 29.

Ao elaborar os itens do desafio, o professor pesquisador não atentou para o fato de todas as letras terem o gabarito C (certo). Ele só percebeu isso ao corrigir o exercício e acredita que por esse motivo o acerto por "chute" foi favorecido.

O objetivo do desafio foi avaliar o desempenho dos respondentes na aplicação do Teorema de Sebá logo após sua explicação. Foram geradas três tabelas, a primeira contendo as respostas de todos os alunos, a segunda daqueles alunos do grupo GB e a terceira dos alunos do grupo GR.

| Desempenho de todos os alunos - desafio (atividade II) | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Letra** | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** | **h** |
| **Acertaram** | 120 | 118 | 110 | 122 | 109 | 105 | 106 | 106 |
| **Erraram** | 23 | 25 | 28 | 17 | 28 | 30 | 29 | 29 |
| **Em branco** | 0 | 0 | 5 | 4 | 6 | 8 | 8 | 8 |
| **% de acerto** | 83,9 | 82,5 | 76,9 | 85,3 | 76,2 | 73,4 | 74,1 | 74,1 |
| **% de erro** | 16,1 | 17,5 | 19,6 | 11,9 | 19,6 | 21,0 | 20,3 | 20,3 |
| **% em branco** | 0,0 | 0,0 | 3,5 | 2,8 | 4,2 | 5,6 | 5,6 | 5,6 |

| Desempenho dos alunos GB - desafio (atividade II) | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Letra** | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** | **h** |
| **Acertaram** | 41 | 42 | 40 | 42 | 40 | 38 | 37 | 39 |
| **Erraram** | 8 | 7 | 8 | 7 | 7 | 10 | 10 | 8 |
| **Em branco** | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| **% de acerto** | 83,7 | 85,7 | 81,6 | 85,7 | 81,6 | 77,6 | 75,5 | 79,6 |
| **% de erro** | 16,3 | 14,3 | 16,3 | 14,3 | 14,3 | 20,4 | 20,4 | 16,3 |
| **% em branco** | 0,0 | 0,0 | 2,0 | 0,0 | 4,1 | 2,0 | 4,1 | 4,1 |

| Desempenho dos alunos GR - desafio (atividade II) | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Letra** | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** | **h** |
| **Acertaram** | 10 | 9 | 10 | 10 | 9 | 8 | 7 | 8 |
| **Erraram** | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 4 |
| **Em branco** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 |
| **% de acerto** | 83,3 | 75,0 | 83,3 | 83,3 | 75,0 | 66,7 | 58,3 | 66,7 |
| **% de erro** | 16,7 | 25,0 | 16,7 | 16,7 | 25,0 | 33,3 | 41,7 | 33,3 |
| **% em branco** | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 100,0 |

Das tabelas acima, conclui-se que: o desempenho médio de acerto de todos os respondentes foi de $78,3\%$; o desempenho médio de acerto dos alunos do grupo GB foi de $81,4\%$; o desempenho médio de acerto dos alunos do grupo GR foi de $74\%$ (a assimilação do Teorema de Sebá por parte dos alunos foi considerada boa para o professor pesquisador, pois até os alunos que apresentam dificuldade tiveram um desempenho médio de $74\%$). Como já foi dito, isso pode ter ocorrido em virtude de todos os itens serem certos.

A tabela a seguir fornece a quantidade de alunos e o respectivo número de itens que eles acertaram do desafio.

| Desempenho por aluno no desafio (atividade II) | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Número de acertos** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
| **Número de alunos** | 0 | 3 | 2 | 6 | 15 | 25 | 14 | 22 | 56 |

Analisando o desempenho por aluno na questão desafio, constatou-se que:

- infelizmente o professor pesquisador não atentou para o fato de todos os oito itens terem gabarito $C$ (correto), potencializando o acerto por "chute";
- 129 alunos assinalaram todos os oitos itens;
- 56 gabaritaram a questão desafio;
- 22 acertaram sete dos oito itens, sendo que três destes não assinalaram o oitavo item (provavelmente em função do curto prazo disponibilizado para a execução do exercício);
- 14 acertaram seis dos oito itens, sendo que um destes não assinalou o oitavo item (provavelmente em função do curto prazo disponibilizado para a execução do exercício);
- 25 acertaram cinco dos oito itens, sendo que um destes não assinalou três dos oito itens (provavelmente em função do curto prazo disponibilizado para a execução do exercício);
- 15 acertaram quatro dos oito itens, sendo que dois destes não assinalaram os últimos quatro itens (provavelmente em função do curto prazo disponibilizado para a execução do exercício);
- 120 alunos acertaram o primeiro item (esta informação é relevante porque todos tiveram tempo para fazer este item).

A tabela a seguir fornece no desafio o desempenho dos alunos do grupo GR em contraste com o número de critérios de divisibilidade de 2 a 11 (de 0 a 10) que afirmaram conhecer. É possível perceber alguns resultados "contraditórios". Por exemplo, os 6º e 8º alunos consideram ruins seus conhecimentos em Matemática, mas afirmaram conhecer todos os dez critérios. Além disso, tiveram um bom desempenho na questão desafio. Por outro lado, os 9º, 10º e 12º alunos afirmaram desconhecer a maior parte dos critérios de divisibilidade, entretanto gabaritaram o desafio (provavelmente "chutaram" o exercício).

| **Número de critérios de 2 a 11 conhecidos pelos alunos GR X Desempenho no desafio** | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Aluno do grupo GR** | **1º** | **2º** | **3º** | **4º** | **5º** | **6º** | **7º** | **8º** | **9º** | **10º** | **11º** | **12º** |
| **Nº de critérios que afirmou conhecer** | 0 | 3 | 4 | 1 | 5 | 10 | 8 | 10 | 4 | 7 | 3 | 5 |
| **% de acerto no desafio** | 12,5% | 50% | 50% | 50% | 62,5% | 75% | 87,5% | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% |

Capítulo 7

# Considerações Finais

Ao término deste trabalho, ciente da inexperiência investigativa do pesquisador, algumas falhas metodológicas foram constatadas. Isso não comprometeu a pesquisa, mas tornou a sua execução mais laboriosa. Por exemplo, todas as atividades propostas aos alunos foram impressas gerando mais de 1600 páginas para serem posteriormente manipuladas uma a uma. Isso poderia ter sido executado em uma plataforma digital (*Google* Sala de Aula, por exemplo), já que todos os alunos que participaram do estudo possuem *smartphone* com acesso à *internet*. Dessa forma, todos os dados seriam automaticamente organizados em planilhas prontas, minimizando o erro e o tempo de trabalho. Independentemente disso, um farto material estatístico foi levantado e devidamente organizado, constituindo-se numa rica fonte de consulta para esta e futuras pesquisas.

Por outro lado, um forte aliado do pesquisador foi sua ampla experiência adquirida pelos mais de 20 anos ininterruptos lecionando para alunos do Ensino Médio. Com base nela, foi possível atuar de modo "instrucionalmente eficiente", "mantendo a disciplina em sala", identificando com precisão cirúrgica os subçunsores necessários para a devida ancoragem do novo conteúdo a ser ensinado, a partir da elaboração de um material didático "potencialmente significativo". Tudo isso foi alcançado em apenas três encontros de 50 minutos cada, e, de fato, cada segundo foi planejado com muito esforço extra-classe, refletindo, conforme Ausubel, que "o papel mais importante e distintivo do professor na sala de aula moderna é o de diretor de atividades de aprendizagem".

O questionário gerou interessantes informações concernentes ao perfil dos respondentes e como eles enxergam seu desempenho em Aritmética. O pré-teste confirmou aquilo que já se sabia e municiou estatisticamente o trabalho. A atividade I foi uma rica oportunidade de revisitar importantes tópicos de Aritmética, corrigindo várias deficiências conceituais detectadas a partir do pré-teste. Finalmente, a atividade II abordou os critérios de divisibilidade para números primos superiores a cinco, permitindo, ao final, avaliar se os alunos compreenderam o teorema. Infelizmente, dado o exíguo prazo de aplicação da pesquisa, não foi possível inferir se os estudantes aprenderam significativamente, pois, conforme Ausubel, seriam necessários, além do que foi realizado, pós-testes imediatos e a longo prazo, testes dissertativos e de múltipla escolha, simulados contextualizados e amostras de trabalhos.

Dentre os vários resultados obtidos a partir dos trabalhos propostos, alguns chamam a atenção, como por exemplo:

- mais de 48% dos estudantes consultados declararam ter aversão a estudar Matemática, sendo que a maior parte deste grupo é do sexo feminino. Essa é uma revelação alarmante para o pesquisador, que é um professor de Matemática. Aqui não cabe o argumento de que os alunos apresentam severas dificuldades socioeconômicas como é o caso da maioria dos discentes brasileiros. São adolescentes de altíssimo poder aquisitivo. Na concepção do pesquisador, especialmente em Matemática, avançar no conteúdo sem construir os subçunsores adequados para a ancoragem de novos conhecimentos é inútil. Há muita gente em sala de aula apenas de "corpo presente", gente que está sendo silenciosamente torturada há anos. Isso põe em xeque a inchada estrutura conteudista presente no Brasil. É melhor "ensinar" menos, mas de fato ensinar;

- houve por parte dos alunos uma grande empatia à aplicação do estudo, principalmente no grupo daqueles que consideram bons seus conhecimentos em Matemática. Ao término da abordagem do critério universal de divisibilidade (Teorema de Sebá), muitos deles manifestaram sua aprovação, o que, na visão do pesquisador, é uma prova da viabilidade do ensino desse tópico em sala de aula;

- menos de 8% dos participantes afirmaram que $\sqrt{2}$ é um número inteiro, enquanto mais de 38% deles disseram que $\sqrt{2}$ é um número par, uma grande contradição;

- mais de 67% dos respondentes declararam que 3,6, 7,2, e 4,44... são números pares.

O ensino do Teorema de Sebá − um critério de divisibilidade válido para qualquer número primo superior a cinco − tal como foi proposto (utilizando-se como pré-requisitos somente tópicos de Aritmética já trabalhados em sala), é adequado a alunos do 1º ano do Ensino Médio. Mesmo no caso daqueles alunos que atestaram apresentar dificuldades em Matemática, a compreensão desse Teorema, bem como sua aplicação em exercícios, foi verificada. E a recepção por parte dos estudantes com melhor *performance* em Aritmética foi muito positiva.

Em relação ao critério de divisibilidade por 7, a pequena evolução dos alunos[1] em sua compreensão deu-se, não pela dificuldade do assunto nem pela inabilidade do pesquisador, mas porque o tempo dedicado a essa explicação foi muito curto.

Muito além de algumas respostas e constatações, este trabalho suscitou diversas inquietações que apontam para futuras investigações. Por exemplo, é intrigante a profunda e crônica dificuldade do aluno brasileiro na compreensão do conceito de fração ou de número racional. De fato, tal compreensão jamais foi elementar. Como disse Leopold Kronecker (1823-1891): "Deus criou os números inteiros; todo o resto é trabalho dos homens". Entretanto, séculos após essa afirmação, ainda persiste a pouca efetividade em tornar o "trabalho dos homens" compreensível. É bem verdade que isso já foi amplamente estudado, mas como solucionar esse problema? Que metodologia deve ser aplicada em sala de aula de modo a resolver essa questão?

Outra constatação que chama a atenção é a dificuldade que os alunos apresentam em relação ao número zero. Aplicar os conceitos estudados para números não nulos é bem mais elementar. Como sanar esse problema?

Imaginar que praticamente metade dos alunos (48%), de antemão, tem aversão por Matemática é um dado que suscita importantes questionamentos. Por que isso ocorre? Que postura deve ter o professor para reduzir essa barreira crônica? Por que esse fenômeno é mais expressivo no público feminino?

[1]Enquanto, no questionário, 42,7% dos respondentes declararam conhecer o critério de divisibilidade por 7, na atividade II, 47,6% deles tiveram êxito ao resolverem o primeiro item e 43,9% tiveram êxito ao resolverem o segundo item, ambos sobre tal critério, ou seja, uma pequena evolução.

Finalizada a pesquisa, o professor pesquisador disponibilizará à escola e aos alunos os principais resultados do trabalho a fim de suscitar reflexões que mobilizem a futuras ações para corrigir os problemas detectados.

# Apêndice

Conforme observado na Seção 4.4, neste apêndice encontram-se as atividades propostas aos alunos que participaram da pesquisa de campo, exatamente na ordem em que foram apresentadas.

O questionário busca extrair informações pessoais do respondente direcionando-o ao autoexame em relação a seu desempenho/aptidão em Aritmética.

O pré-teste, conforme descrito nele mesmo, visa verificar se o respondente sabe o que é (e o que não é) um número inteiro e se domina os conceitos de múltiplos, divisores, números pares, ímpares, primos e compostos.

A atividade I apresenta a importância do conceito de número primo, do Teorema Fundamental da Aritmética e dos critérios de divisibilidade. Ela foi dimensionada para contemplar todos os alunos, pois para aqueles que a encerraram rapidamente foram propostos três exercícios mais elaborados, de modo que, enquanto o professor pesquisador prosseguia na condução da atividade, esses estudantes tentavam solucionar tais questões, e, para não ser interrompido a fim de auxiliá-los na resolução desses itens, o professor pesquisador já havia anexado ao final do documento a resolução de cada um deles.

A atividade II nada mais é do que a continuidade da atividade I. O professor pesquisador sabia que uma aula de 50 minutos seria insuficiente para trabalhar todos os conceitos planejados, propondo, assim, essa segunda parte em outra aula. Nela, primeiramente foram trabalhados os critérios de divisibilidade por 7 e por 11 e, em seguida, foi explicado o Teorema de Sebá e proposto um desafio.

**Questionário**

Prezado estudante, este questionário tem o objetivo de coletar informações sócio-culturais do respondente a fim de gerar estatísticas relacionadas a seus conhecimentos e desempenho em Aritmética (Números Inteiros), com ênfase nos critérios de divisibilidade. Pretende-se, posteriormente, apresentar um critério de divisibilidade geral.

**1.** Qual é o seu nome? ________________________________________________

**2.** Qual é a sua idade?

a) ( ) 10 anos b) ( ) 11 anos c) ( ) 12 anos d) ( ) 13 anos e) ( ) 14 anos
f) ( ) 15 anos g) ( ) 16 anos h) ( ) 17 anos i) ( ) 18 anos j) ( ) 19 anos

**3.** Qual é o seu sexo?

a) ( ) Masculino. b) ( ) Feminino.

**4.** Você gosta de estudar Matemática?

a) ( ) Sim. b) ( ) Não.

**5.** Numa escala de 0 (péssimo) a 10 (excelente), como você classifica seus conhecimentos em Matemática?

a) ( ) 0 b) ( ) 1 c) ( ) 2 d) ( ) 3 e) ( ) 4 f) ( ) 5
g) ( ) 6 h) ( ) 7 i) ( ) 8 j) ( ) 9 k) ( ) 10

**6.** Quantas vezes você participou de olimpíadas de Matemática?

a) ( ) 0 b) ( ) 1 c) ( ) 2 d) ( ) 3 e) ( ) 4 f) ( ) 5
g) ( ) 6 h) ( ) 7 i) ( ) 8 j) ( ) 9 k) ( ) 10 l) ( ) Outro

**7.** A maior parte de sua vida escolar foi em uma escola

a) ( ) pública. b) ( ) particular.

**8.** Você faz uso de aulas particulares de Matemática? (Caso afirmativo, há quanto tempo?)

a) ( ) Não. b) ( ) Sim. Tempo: _________________

**9.** Você sabe o que é um critério de divisibilidade?

a) ( ) Sim. b) ( ) Não.

**10.** Você já precisou utilizar algum critério de divisibilidade em uma situação específica? (caso afirmativo, cite um exemplo de tal situação)

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

**11.** Você conhece o critério de divisibilidade por (caso afirmativo, dê um exemplo)

a) 2 ? ( ) Sim. ( ) Não.

b) 3 ? ( ) Sim. ( ) Não.

c) 4 ? ( ) Sim. ( ) Não.

d) 5 ? ( ) Sim. ( ) Não.

e) 6 ? ( ) Sim. ( ) Não.

f) 7 ? ( ) Sim. ( ) Não.

g) 8 ? ( ) Sim. ( ) Não.

h) 9 ? ( ) Sim. ( ) Não.

i) 10 ? ( ) Sim. ( ) Não.

j) 11 ? ( ) Sim. ( ) Não.

**Pré-teste**

O objetivo deste teste é verificar se o respondente detém conhecimentos sobre os seguintes pré-requisitos ("*subsunçores*"):

→ conjunto dos números inteiros $(\mathbf{Z})$;
→ múltiplos e divisores;
→ números pares, ímpares, primos e compostos.

**1.** Sendo **Z** o conjunto dos números inteiros, complete cada espaço com $\in$ ("pertence") ou $\notin$ ("não pertence").

a) 5 ___ **Z** b) $\sqrt{2}$ ___ **Z** c) $\frac{7}{5}$ ___ **Z** d) 1,53 ___ **Z** e) 0 ___ **Z**

f) $-2$ ___ **Z** g) $-3{,}6$ ___ **Z** h) $\pi$ ___ **Z** i) $\frac{24}{8}$ ___ **Z** j) $\frac{11}{3}$ ___ **Z**

**2.** Para cada caso a seguir, assinale:

**P**, se o número for **par**;
**I**, se o número for **ímpar**; e
**N**, se o número **não for par nem ímpar**.

a) ( ) 0 b) ( ) 1 c) ( ) $-2$ d) ( ) 7,2 e) ( ) 25 f) ( ) 3,6
g) ( ) $\sqrt{2}$ h) ( ) $-79$ i) ( ) $-2{,}4$ j) ( ) 3578 k) ( ) 31 l) ( ) 4,44...

**3.** Sendo ***a*** e ***b*** números inteiros, preencha a tabela abaixo com **PAR** ou **ÍMPAR**.

| ***a*** | ***b*** | $a+b$ | $a-b$ | $a \cdot b$ |
|---|---|---|---|---|
| **PAR** | **PAR** | | | |
| **PAR** | **ÍMPAR** | | | |
| **ÍMPAR** | **PAR** | | | |
| **ÍMPAR** | **ÍMPAR** | | | |

**4.** Assinale **C** ou **E** conforme o item seja certo ou errado, respectivamente.

a) ( ) 2 divide 10.
b) ( ) 10 é múltiplo de 2.
c) ( ) 2 é múltiplo de 10.
d) ( ) $-3$ divide 21.
e) ( ) $-6$ divide $-6$.
f) ( ) $-6$ é múltiplo de $-6$.
g) ( ) 0 é múltiplo de 5.
h) ( ) 5 é múltiplo de 0.
i) ( ) 5 divide 0.
j) ( ) 5 é múltiplo de 15.
k) ( ) 2 divide 5403958.
l) ( ) 33 é múltiplo de 11.
m) ( ) 3 divide 29.
n) ( ) 0 é múltiplo de 0.
o) ( ) 0 divide 0.
p) ( ) Todo múltiplo de 9 é múltiplo de $-9$.

**5.** Assinale **C** ou **E** conforme o item seja certo ou errado, respectivamente.

a) ( ) 3 é primo.
b) ( ) 2 é primo.
c) ( ) 1 é primo.
d) ( ) 0 é primo.
e) ( ) $-2$ é primo.
f) ( ) 4 é primo.
g) ( ) 12 é composto.
h) ( ) 27 é primo.
i) ( ) 31 é primo.
j) ( ) 143 é composto.
k) ( ) 79 é composto.
l) ( ) 1345984560454 é primo.
m) ( ) Somente $-2$ e 2 são pares e primos.
n) ( ) Se $k$ é primo, então $-k$ é primo.

**6.** O que você entende por número

a) inteiro? (se não souber explicar, dê exemplos)

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

b) par? (se não souber explicar, dê exemplos)

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

c) ímpar? (se não souber explicar, dê exemplos)

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

d) primo? (se não souber explicar, dê exemplos)

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

e) composto? (se não souber explicar, dê exemplos)

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

### Atividade I

O objetivo desta atividade é apresentar a importância dos critérios de divisibilidade no estudo da Aritmética, mesmo diante de um contexto em que as calculadoras estão facilmente disponíveis.

Considere a seguinte analogia: ***“Número primo é o átomo da Aritmética.”***

O significado original da palavra átomo está relacionado àquilo que é **indivisível**, inquebrável. Para os antigos filósofos atomistas, a matéria é constituída de unidades individuais que podem ser divididas em quantidades cada vez menores até um certo limite, o átomo. Por exemplo, cada partícula de pó de ferro continua a ser ferro, mesmo sendo subdividida em pedacinhos ainda menores, ao ponto de não mais poder ser fracionada, chegando ao que eles denominavam átomo de ferro.

Assim, esses filósofos acreditavam que, conhecendo-se profundamente a estrutura do átomo, eles compreenderiam toda a matéria, com base na máxima: ***“conheça as partes e compreenderás o todo.”***

Podemos fazer uma analogia entre o antigo conceito de átomo e número primo, ou seja: **“*Número primo é o átomo da Aritmética.*”** Nessa perspectiva, assim como um átomo é inquebrável, um número primo também é indivisível, pois seus únicos divisores naturais são a unidade e ele mesmo. Além disso, assim como uma molécula é constituída de átomos, um número composto é constituído de números primos. Portanto, aplicando a máxima acima enunciada, conhecendo-se os números primos, compreenderemos os Números Inteiros – objeto de estudo da Aritmética –, uma vez que qualquer número composto é uma junção de primos.

Nesse sentido, o Teorema Fundamental da Aritmética fornece uma contundente afirmação que reforça a importância do estudo dos números primos. Ele reza que:

***“Qualquer número composto pode ser fatorado (ou decomposto) em fatores primos e tal decomposição é única quando não são considerados os sinais dos fatores e nem a ordem desses fatores.”***

Portanto, qualquer número natural maior que a unidade pode ser fatorado (ou decomposto) em fatores primos, positivos e distintos, desconsiderando-se a ordem desses fatores.

**Exemplo 1.** Decomponha os seguintes números em seus fatores primos.

a) $12 = 2^2 \cdot 3^1$

$$\begin{array}{r||l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

b) $300 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2$

$$\begin{array}{r||l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

**Exemplo 2.** Decomponha os seguintes números em seus fatores primos.

a) $403 = 13^1 \cdot 31^1$

$$\begin{array}{r||l} 403 & 13 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array}$$

b) $444193 = 17^2 \cdot 29^1 \cdot 53^1$

$$\begin{array}{r||l} 444193 & 17 \\ 26129 & 17 \\ 1537 & 29 \\ 53 & 53 \\ 1 & \end{array}$$

Observe que, no exemplo 2, a tarefa não parece ser elementar. Para resolver esse tipo de exercício, podemos recorrer aos critérios de divisibilidade.

**Exercícios**

**1.** Sem o uso de uma calculadora, decomponha os seguintes números em seus fatores primos.

a) 72 b) 360 c) 1125

**2.** Para resolver a questão anterior, você utilizou algum critério de divisibilidade?

a) (   ) Sim. Quais? b) (   ) Não.

Para 72 – ______________________________________________

Para 360 – ______________________________________________

Para 1125 – ______________________________________________

**3.** Para verificar se um número ***b*** divide um número ***a***, podemos checar se o resto da divisão de ***a*** por ***b*** é igual a zero, mas isso costuma ser muito trabalhoso e demorado. Como saber se um número divide outro sem efetuar a divisão? A resposta são os **critérios de divisibilidade**, regras simples para constatar se ***b*** divide ***a*** a partir de algumas propriedades de ***a*** e de ***b***. Veja alguns critérios:

a) por 2: ______________________________________________

por 4: ______________________________________________

por 8: ______________________________________________

b) por 3: ______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

por 9: ______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

c) por 5: ______________________________________________

______________________________________________

por 10: ______________________________________________

______________________________________________

d) por 6: ______________________________________________

______________________________________________

**1.** Assinale **C** ou **E** conforme o item seja certo ou errado, respectivamente.

a) ( ) 4 divide 3 464 872 004 236.

b) ( ) 3 divide 235 498.

c) ( ) 5 divide 39 405 941 345.

d) ( ) 9 divide 36 996 345.

e) ( ) 8 divide 324 561 792.

f) ( ) 6 divide 11 126.

g) ( ) 10 divide 123 023 945 190.

h) ( ) 24 divide 659 670 432.

**Desafios**

**1.** **(UFRJ-98)** Determine um número inteiro cujo produto por 9 seja um número natural composto apenas pelo algarismo 1.

**2.** **(UnB-99)** Um investigador, em busca de informações precisas, encontrou uma velha nota fiscal, na qual estava registrada a aquisição de 72 itens de uma mesma mercadoria por um valor total de *R$ x*67,9*y*, sendo que o primeiro e o último algarismos – *x* e *y* – estavam ilegíveis. Sabendo que é possível achar o valor exato da nota fiscal, determine o produto *xy*.

**3.** **(Olimpíada da Rússia-80)** Todos os números de dois dígitos de 19 a 80 são escritos em linha reta sem espaços. É obtido o número 192021...7980. Este número é divisível por 1980?

**Resoluções dos desafios**

**1.**
**Resolução**

Como um número divisível por 9 possui a soma de seus algarismos divisível por 9, então o menor número divisível por 9 formado apenas por 1's é 111 111 111. Logo:

$$111111111 = 9 \cdot x \Rightarrow x = 12345679.$$

**2.**
**Resolução**

Escrevendo o número R$ *x*67,9*y* em centavos, temos *x*679*y*, que deve ser divisível por $72 = 8 \cdot 9$. Logo, *x*679*y* é divisível 8 e por 9. Assim:

$$8 \mid x679y \Leftrightarrow 8 \mid (79y) \therefore y = 2$$

$$9 \mid x679y \Leftrightarrow 9 \mid (x+6+7+9+y) \Rightarrow 9 \mid (x+6+7+9+2) \Rightarrow 9 \mid (x+24). \text{ Logo } x = 3.$$

Portanto, $xy = 3 \cdot 2 = 6$.

**3.**
**Resolução**

Seja $p = 192021...7980$. Fatorando 1980 temos: $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$.

**I.** 4 divide *p*.
$4 = 2^2 \mid p$, pois $p = 192021...7980$ termina em 80 e $2^2 = 4 \mid 80$.

**II.** 9 divide *p*.
Somando todos os algarismos de *p*, temos:
$1+9+2+0+...+7+9+8 = 1+10(2+3+...+7)+8+9+6(1+2+...+9) = 1+270+17+270 = 558$, que é divisível por 9 $(558 = 9 \cdot 62)$.

**III.** 5 divide *p*.
Como o último algarismo de $p$ é igual a zero, 5 divide *p*.

**IV.** 11 divide *p*.
Observe que os dígitos de ordem ímpar são os dígitos das unidades de cada par (algarismos com a cor vermelha), isto é: $p = 192021...787980$. Logo: $9 + 6(1+2+...+9) = 279$.

Por outro lado, observe que os dígitos de ordem par são os dígitos das dezenas de cada par (algarismos com a cor preta), isto é: $p = 192021...787980$. Logo: $1+10(2+3+...+7)+8 = 279$.

Como a diferença entre a soma dos dígitos de ordem ímpar e a soma dos dígitos de ordem par é igual a zero (isto é: $279 - 279 = 0$), 11 divide *p*.

Portanto, 1980 divide $p = 192021...7980$.

**Atividade II**

O objetivo desta atividade é apresentar a importância dos critérios de divisibilidade no estudo da Aritmética, mesmo diante de um contexto em que as calculadoras estão facilmente disponíveis.

**Exercícios**

**1.** Na Atividade I, tivemos contato com alguns critérios de divisibilidade. Neste exercício veremos os critérios de divisibilidade por outros números:

a) por 7: ______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

b) por 11: ______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

**2.** Assinale **C** ou **E** conforme o item seja certo ou errado, respectivamente.

a) (  ) 11 divide 918 072 928 564.

b) (  ) 11 divide 888 888 888 888.

c) (  ) 7 divide 1 547.

d) (  ) 7 divide 68 355.

**3.** Você já ouviu falar em um critério de divisibilidade para os seguintes números primos maiores que onze (13, 17, 19, 23, 29, 31,...) ?

a) (  ) Sim. b) (  ) Não.

**4.** Você já ouviu falar em um critério de divisibilidade geral?

a) (  ) Sim. b) (  ) Não.

## Desafio

**1.** Sem utilizar uma calculadora, assinale **C** ou **E** conforme o item seja certo ou errado, respectivamente.

a) ( ) 28 561 é divisível de 13.

b) ( ) 12 167 é divisível por 23.

c) ( ) 923 521 é divisível por 31.

d) ( ) 68 921 é divisível por 41.

e) ( ) 83 521 é divisível por 17.

f) ( ) 50 653 é divisível por 37.

g) ( ) 130 321 é divisível por 19.

h) ( ) 707 281 é divisível por 29.

## Teorema de Sebá*
## Critérios de Divisibilidade por Qualquer Número Primo Maior que Onze

*Sebastião Vieira do Nascimento (Sebá) – professor aposentado da UFCG-PB

Já que existem critérios de divisibilidade por 3, 5, 7, e 11, o presente trabalho tem como objetivo mostrar uma regra de divisibilidade (ou Regra de Sebá) por qualquer número primo maior que 11.

Hoje, a relevância prática deste teorema é pequena em função da fácil acessibilidade às calculadoras. O Teorema de Sebá traria grandes contribuições se tivesse sido enunciado numa época em que não existiam as calculadoras.

Seja *N* o número dado e verificar se *N* é divisível por um número primo $p > 11$.

**Passo 1.** Se *p* terminar em 3, 7 ou 9, multiplique *p*, respectivamente, por 7, 3 e 9, subtraia de 1 e divida a diferença por 10. Se *p* terminar em 1, subtraia *p* de 1 e divida a diferença por 10. Ambos os quocientes vamos designar por *y*.

**Passo 2.** Multiplique *y* pelo último algarismo de *N* e subtraia de *N* sem o último algarismo. Se a diferença for grande, de tal maneira que não seja possível reconhecer facilmente se é divisível por *p*, repete-se o processo até que seja possível reconhecer facilmente a divisão por *p*.

**Observação:** Se o último algarismo da diferença vezes *y* for maior que a diferença, encerra-se o processo, e verifica-se se a diferença é divisível por *p*.

# Referências Bibliográficas


[1] AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. *Psicologia educacional.* Tradução: Eva Nick, Heliana de Barros Conde Rodrigues, Luciana Peotta, Maria Ângela Fontes e Maria da Glória da Rocha Maron. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

[2] BONJORNO, José Ruy *Matemática, uma nova abordagem.* 2. ed. São Paulo: FTD, 2011.

[3] BOYER, C. B. *História da Matemática.* 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

[4] BROCKVELD, P. *Critérios de divisibilidade nos livros didáticos:* de 1918 a 2015. Orientadora: Carmem Suzane Comitre Gimenez. Florianópolis, Santa Catarina, 2016.

[5] COUTINHO, S. *PIC-OBMEP:* Criptografia. Rio de Janeiro, Impa, 2014.

[6] DANTE, L. R. *Restos, congruência e divisibilidade.* Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 10.

[7] FREIRE, B. T. V. *Congruências, Divisibilidade e Adivinhações.* Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 22.

[8] GUEDES, M. G. P. *Outros Critérios de Divisibilidade.* Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 12.

[9] HEFEZ, A. *Aritmética.* 2 ed. Rio de Janeiro. SBM, 2016.

[10] IEZZI, G; MURAKAMI, C. *Fundamentos da Matemática Elementar, 1:* Conjuntos, Funções. 7 ed. São Paulo, 1993.

[11] MOREIRA, M. A. de, *Teorias de Aprendizagem* 2. ed. Ampl. São Paulo: E.P.U., 2015.

[12] MOREIRA, M. A. de; MASINI, E. F. S. *Aprendizagem Significativa:* A Teoria de David Ausubel. 1. ed. São Paulo: Moraes, 1982.

[13] NEVES, Regina S. P. *A divisão e os números racionais:* uma pesquisa de intervenção psicopedagógica sobre o desenvolvimento de competências conceituais de alunos e professores. Brasília - DF, 2008.

[14] ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) *Educação Matemática:* pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 212- 231.

[15] PAIVA, Manoel. *Matemática para o Ensino Médio.* 1 ed. São Paulo: Moderna, 2009.

[16] RABELO, Mauro L. *Avaliação Educacional:* fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[17] RAMOS, J. S. De novo: divisibilidade por 7. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 61.

[18] RIPOLL, C. C. O critério vale para 7 e .... *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 67.

[19] SOUZA, Joamir. *Matemática:* novo olhar. 1 ed. São Paulo: FTD, 2011.

[20] TÁBOAS, Carmen M. G.; RIBEIRO, Hermano de S. Sobre Critérios de Divisibilidade. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 6.

[21] TORRES, G. Z. Divisibilidade por 3, 7, 9, 11, 13, 17,.... *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 58.

[22] UMBELINO JUNIOR, A. Divisibilidade por 7. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 43.

[23] DISTLER, Rafaela Regina. Contribuições de David para a intervenção psicopedagógica. *Psicopedagogia.* Disponível em: < http://www.revistapsicopedagogia.com.br/detalhes/45/contribuicoes-de-david-ausubel-para-a-intervencao-psicopedagogica>. Acesso em: 18 jan. 2018.

[24] Revista do Professor de Matemática. Rio de Janeiro. Disponível em: <http://rpm.org.br/default.aspx?m_id=4>. Acesso em: 27 mar. 2018.