Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Problemas de Soma Zero e o Número Crítico

por

Tertuliano Carneiro de Souza Neto

Brasília
Fevereiro de 2007

Resumo

Neste trabalho, apresentamos alguns resultados da Teoria Aditiva de Números. Introduzimos a idéia de seqüências mínimas com soma zero e a constante forte de Davenport, baseado no trabalho de S. Chapman, M. Freeze e W. Smith [9]. Também estimamos o número crítico do grupo $\mathbb{Z}_p$ (o grupo aditivo dos inteiros módulo p) e da soma direta $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$. Estas estimativas foram obtidas, respectivamente, por Olson [5] e Mann e Olson [7].

Palavras-chaves: sequências mínimas com soma zero, constante forte de Davenport, número crítico.

Abstract

In this work we present some results of the Additive Number Theory. We introduce the idea of minimal zero-sequences and the strong Davenport constant, based in the paper of S. Chapman, M.Freeze and W. Smith [9]. We also estimate the critical number of the group $\mathbb{Z}_p$ (the additive group of integers modulo a prime p) and of the direct sum $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$. These estimations were obtained by, respectively, Olson [5] and Mann and Olson [7].

Keywords: minimal zero-sequences, strong Davenport constant, critical number.

Introdução

O princípio da Teoria Aditiva de Números remonta à Grécia Antiga. Pitágoras e seus discípulos já buscavam a compreensão dos números poligonais. Mas os primeiros estudos realmente significativos só aparecem no século XVIII. O teorema dos quatro quadrados de Lagrange e os teoremas de Gauss e Cauchy são exemplos dos primeiros trabalhos em Teoria Aditiva, embora todos eles ainda abordassem os números poligonais. Em 1770, Edward Waring enuncia, sem provar, que todo número inteiro não-negativo é a soma de, no máximo, quatro quadrados, nove cubos e dezenove quartas potências. Nascia ali o problema de Waring, um dos mais conhecidos problemas de toda a Teoria dos Números.

Em 1813, Cauchy demonstra o teorema de Cauchy-Davenport, o qual viria a ser demonstrado, independentemente, por Davenport em 1935, o que explica a curiosa "parceria". Este teorema dá um limite inferior para a cardinalidade do conjunto-soma de dois conjuntos de resíduos módulo um primo p. Em 1956, A.G. Vosper classifica todos os pares de conjuntos de resíduos módulo p tais que a cardinalidade do conjunto-soma é menor que a soma de suas cardinalidades. Estes dois importantes teoremas de adição são enunciados e provados no Capítulo 1. Eles serão a base de sustentação do nosso trabalho.

Antes de comentarmos resultados mais recentes, façamos duas definições. Se G é um grupo abeliano finito, o número crítico de G, denotado por $c(G)$, é o menor s tal que para todo subconjunto $S \subset G \setminus \{0\}$ de cardinalidade s, é possível obter todo elemento de G como soma de alguma subseqüência de S. O menor inteiro l tal que toda seqüência de elementos de G de comprimento l possui uma subseqüência com soma zero é denominado constante de Davenport.

Desde a sua introdução no universo da Teoria Aditiva, a constante de Davenport tem sido bastante investigada, embora pouco avanço tenha sido obtido no que tange à determinação precisa de seu valor para grupos arbitrários. A busca por estimativas desta constante contribuiu para o surgimento da constante relativa e a constante forte de Davenport. Esta última é tratada no Capítulo 2, após introduzirmos o conceito de seqüências mínimas com soma zero. Nossa abordagem é baseada no trabalho de Chapman, Freeze e Smith [9].

Erdös e Heilbronn [4] foram os primeiros a estudar o número crítico de um grupo. Eles fizeram uma estimativa para o grupo aditivo dos resíduos módulo um primo p, a qual foi significativamente melhorada por Olson [5]. Este importante resultado é o objeto central do Capítulo 3.

Mann e Olson [7], trabalhando com o número crítico da soma direta $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, obtiveram um excelente resultado, ao mostrarem que $c(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p) = 2p - 1$ ou $2p - 2$. Este e outros resultados são provados no Capítulo 4.

Referências Bibliográficas

[1] M. B. Nathanson. Additive Number Theory: Inverse Problems and the Geometry of Sumsets. Springer-Verlag, New York, 1996.

[2] H. B. Mann. Addition Theorems: The Addition Theorems of Groups Theory and Number Theory. Wiley-Interscience, New York, 1965.

[3] S. Chowla, H. B. Mann and E. G. Straus. Some aplications of the Cauchy-Davenport theorem. Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab 32(13), 74-80, 1959.

[4] P. Erdös and H. Heilbronn. On the addition of residues classes mod p. Acta Arith. 9, 149-159, 1964.

[5] J. E. Olson. An addition theorem modulo p. J. Comb. Theory 5, 1968, 45-52.

[6] J. A. Dias da Silva and Y. O. Hamidoune. Cyclic spaces for Grassmann derivatives and additive theory. Bull. London Math. Soc. 26, 1994, 140-146.

[7] H. B. Mann and J. E. Olson. Sums of sets of elements in the elementary abelian group of type (p, p). J. Comb. Theory 2, 1967, 275-284

[8] H. B. Mann and Y. F. Wou. Addition theorem for the elementary abelian group of type (p, p). Monatsh. Math. 102, 1986, 273-308.

[9] S. T. Chapman, M. Freeze and W. W. Smith. Minimal zero-sequences and the strong Davenport constant. Discrete Math. 203, 1999, 271-277