UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria

Um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal

RACHEL SAFFIR ARAÚJO ALVES FEIJÓ

BRASÍLIA
2018

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

RACHEL SAFFIR ARAÚJO ALVES FEIJÓ

Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria: um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Guy Grebot

Brasília
Fevereiro de 2018

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Feijó, Rachel Saffir Araújo Alves
FF297d Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria: um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal / Rachel Saffir Araújo Alves Feijó; orientador Guy Grebot. -- Brasília, 2018.
108 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2018.

1. Trigonometria. 2. Obstáculos. 3. Ensino médio. 4. Funções trigonométricas. I. Grebot, Guy, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria: um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal

por

Rachel Saffir Araújo Alves Feijó †

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 21 de fevereiro de 2018.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Guy Grebot - MAT/UnB - Orientador

Prof. Dr. Mauro Luiz Rabelo - MAT/UnB - Membro

Profa. Dra. Raquel Carneiro Dörr - MAT/UnB - Membro

†A autora foi bolsista do CAPES durante a elaboração deste trabalho.

*Dedico ao meu marido, Guilherme Feijó, e aos nossos pais
por sempre nos incentivarem aos estudos.*

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, criador dos Céus e da Terra, pela oportunidade de desenvolver este trabalho.

Ao meu marido, Guilherme Feijó, por ser tão especial me proporcionando suporte, carinho, amor e atenção ao longo de todo esse tempo juntos. Você torna os meus dias mais felizes.

Aos meus familiares, amigos e irmãos em Cristo por sempre me incentivarem, apoiarem e orarem por mim. Em especial às minhas amigas Carol Donato e Kelly Aguiar pelas revisões feitas na pesquisa.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Guy Grebot, pela dedicação, ética e profissionalismo. Você me inspira a continuar estudando e crescendo profissionalmente.

Aos professores que compuseram o corpo docente do PROFMAT/UnB da turma de 2016. Aos professores de cálculo 1 da Universidade de Brasília que permitiram que a pesquisa se realizasse em suas turmas: Guy Grebot, João Paulo dos Santos, Ricardo Fragelli, Rodrigo Cerda e Tarcísio Castro Silva.

À Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (Capes) e à Sociedade Brasíleira de Matemática (SBM) pela criação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), oportunizando aos professores melhorias na sua formação e prática docente.

À Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEE-DF) pela permissão concedida para realizar a pesquisas nas escolas públicas de ensino médio do DF e pela concessão do afastamento para estudos, viabilizando a minha dedicação em tempo integral para a pesquisa.

Aos colegas do curso pelo companherismo e diversão em cada aula, em especial ao Bruno, Márcio e Thafarel por intermediarem o contato com as escolas públicas onde a pesquisa foi realizada.

Aos professores da Secretaria de Educação que prontamente abriram as portas de suas salas de aula.

À todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para a realização dessa pesquisa.

Resumo

Tendo em vista a importância da trigonometria para o desenvolvimento das ciências exatas, essa pesquisa procura identificar, dentro desse tema, os principais erros e/ou dificuldades apresentados por alunos do 2^o ano do ensino médio matriculados em escolas públicas do Distrito Federal. Trata-se de uma pesquisa exploratória de caráter misto, cuja parte quantitativa é feita a partir de um questionário de múltipla escolha sobre trigonometria e temas correlatos, e a parte qualitativa é feita por meio de entrevistas com alunos que participaram da parte quantitativa da pesquisa. O estudo mostra que as dificuldades permeiam todos os ramos da trigonometria, e destacam-se dificuldades em relação à definição de radiano, a propriedades, características e comportamentos das funções trigonométricas e à conexão entre o círculo trigonométrico e as funções trigonométricas pela função de Euler.

Palavras-chave: trigonometria; obstáculos; ensino médio; funções trigonométricas.

Abstract

In view of the importance of trigonometry for the development of exact sciences, this research aims at identifying the main errors and / or difficulties experienced in this subject contents by sophomores students enrolled in Federal District' schools. It is an exploratory research of mixed character whose quantitative part is made from a multiple choice questionnaire about trigonometry and related topics. The qualitative part of the research is built on interviews with students who answered the questionnaire of the quantitative part. The study shows that the students experienced dificulties in all the branches of trigonometry and particularly in dealing with the definition of radian, the properties, characteristics and behaviors of the trigonometric functions as well as with the connection between the trigonometric circle and the trigonometric functions through Euler's function.

Key-words: trigonometry; obstacles; high school; trigonometric functions.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Apesar de o principal motivador para o seu surgimento e desenvolvimento inicial terem sido necessidades relacionadas à astronomia, hoje a trigonometria é fundamental em diversos ramos das ciências e está dividida em duas grandes áreas: trigonometria plana e trigonometria esférica. O estudo desta é visto apenas em nível superior.

A trigonometria plana aparece como parte do currículo escolar ainda no ensino fundamental. No Distrito Federal, sua estreia ocorre no 9^o ano do ensino fundamental II, última etapa desse nível. A aparição seguinte, como parte do conteúdo programático letivo, se dá no 2^o ano do ensino médio e espera-se que, ao fim do ano letivo, o aluno tenha domínio sobre o círculo trigonométrico, as funções, as leis e as relações trigonométricas, além de trabalhar bem com a trigonometria no triângulo retângulo que foi estudada no ensino fundamental. Toda essa gama de conteúdos é essencial para o aluno que seguirá, no ensino superior, um curso na grande área de ciências exatas.

Esse ramo da matemática mescla a geometria e a álgebra, fazendo ainda uso de gráficos para exemplificar comportamentos e propriedades dos conceitos envolvidos. Dessa forma, torna-se necessário um nível razoável de abstração para compreender, conectar e trabalhar com todas as diversas abordagens que esse tema contempla.

As pesquisas sobre as dificuldades enfrentadas ao se aprender trigonometria são escassas não só no Brasil, mas no mundo como indicam Weber (2005), Moore (2010), Demir (2012) e Demir & Heck (2013). Sendo esse um tema central para compreender "[...] tópicos em física, arquitetura, [...] e muitos ramos da engenharia" (WEBER, 2005, p.91), torna-se fundamental investigar como os alunos o vêem e, caso existam, quais são os obstáculos enfrentados por eles no aprendizado.

A pesquisa apresentada nesta dissertação se propõe a fazer parte dessa investigação. Seu objetivo principal é analisar como os alunos vêem a trigonometria e, caso existam, quais são os obstáculos enfrentados por eles no seu aprendizado. Os objetivos específicos deste trabalho são:

- identificar quais são os principais obstáculos no aprendizado de trigonometria;
- identificar os principais erros apresentados pelos alunos nesse tema;
- trazer mais clareza sobre o aprendizado de trigonometria no Distrito Federal, com dados significativos sobre as dificuldades enfrentadas por professores e alunos no ensino e na aprendizagem desse tema;
- a partir dos resultados obtidos, auxiliar na elaboração de propostas de intervenção que permitam uma melhor apreensão dos conceitos por parte dos alunos.

Pretende-se atingir esses objetivos por meio de uma pesquisa de caráter misto, quantitativo e qualitativo. A parte quantitativa da pesquisa consiste na elaboração e na aplicação de um questionário de múltipla escolha. Os dados obtidos com as respostas ao questionário serão analisados pela teoria clássica dos testes (TCT) e pela teoria de resposta ao item (TRI). A parte qualitativa da pesquisa consiste em entrevistas direcionadas aos participantes da parte quantitativa, que são alunos do 2^o ano do ensino médio matriculados em escolas públicas do Distrito Federal.

No próximo capítulo, referencial teórico, será apresentada uma retrospectiva histórica da trigonometria, bem como uma revisão de pesquisas feitas sobre os principais erros identificados no aprendizado da trigonometria e as suas possíveis razões. No capítulo 3 apresentar-se-á em detalhes a metodologia usada na realização da pesquisa. O capítulo seguinte, análise de dados, apresentará os parâmetros da TCT e TRI para os dados obtidos na aplicação do questionário, assim como uma análise detalhada do desempenho dos alunos nos itens do questionário, individuais e agrupados, e da entrevista. O último capítulo tratará da discussão dos resultados, levantará alguns questionamentos e finalizará com uma conclusão do que foi obtido.

Capítulo 2

Referencial Teórico

A primeira seção deste capítulo tratará do aspecto histórico da trigonometria, sua evolução e contribuições para a matemática ao longo dos séculos. Na segunda seção, será abordado o aspecto psicopedagógico do aprendizado em trigonometria, bem como os principais obstáculos enfrentados para o ensino e aprendizagem desse tema. Por fim, a importância do aprendizado de trigonometria será também discutida.

2.1 Desenvolvimento histórico da trigonometria

As palavras gregas das quais se deriva o termo trigonometria são *trigonon*, que significa triângulo, e *metria*, que significa medida (GULLBERG, 1997, p.458). Dessa forma, pode-se inferir que a trigonometria é a área da matemática que estuda as medidas de um triângulo e suas aplicações.

Apesar da etimologia grega, o primeiro uso registrado do termo se deu por um alemão, o matemático, astrônomo e teólogo Bartholomaeus Pitiscus (1561 - 1613 d.C.), em seu trabalho intitulado *Trigonometria: sive de solutione triangularum tractatus brevis et perspicius...*, que foi publicado em 1595, em Heildelberg. Cinco anos depois, após revisão, esse trabalho foi renomeado, passando a ser intitulado *Trigonometria: sive de dimensione triangulae*(GULLBERG, 1997, p.458).

Como diz Boyer (1996, p.108), a trigonometria não é "[...] obra de um só homem ou nação" e, sendo assim, a sua estruturação como ciência também não está restrita a um período curto de tempo. Há registros no papiro Rhind (1650 a.C.) que descrevem uma medida, chamada *seked* ou *seqt*, que hoje é o que conhecemos como cotangente. Tanto Eves (1965, p.37) quanto Gullberg (1997, p.461) indicam que a tabela de barro babilônica, Plimpton 322, que data de um período entre 1900 a.C. e 1600 a.C., apresenta valores para a secante de quinze ângulos distintos em escrita cuneiforme. Além disso, antigos matemáticos indianos já apresentavam registros indicando que sen $\frac{\pi}{4}$ era igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ROONEY, 2012, p.87). Coube aos gregos, porém, a estruturação formal desses estudos (BOYER, 1996, p.108).

Roque e Carvalho (2012, p.173) indicam que necessidades da astronomia, como "[...] prever efemérides celestes, calcular o tempo e ser utilizada na navegação e na geografia", foram os grandes motivadores para o surgimento dessa área de estudo, alegando também que "como os astros se movem sobre a superfície de uma esfera, a fim de poder calcular suas posições, é necessário usar trigonometria esférica, que lida com triângulos esféricos[1].".

Segundo Gullberg (1997, p.461), o filósofo grego Tales de Mileto (625 - 547 a.C.) fez uso

[1]Triângulo esférico é a imagem de um triângulo projetado sobre a esfera, sob a projeção central de centro no centro da esfera.

da semelhança de triângulos para determinar a altura da pirâmide de Quéops, comparando os comprimentos das sombras formadas pela pirâmide e uma haste de comprimento conhecido, fincada verticalmente no chão. Depois dele, outro filósofo e matemático grego, Aristarco de Samos (310 - 250 a.C.), propôs, cerca de 1800 anos antes de Copérnico (1473 - 1543 d.C.), o sistema heliocêntrico e fez uma tentativa de comparar as distâncias da Terra ao Sol e à Lua. Carvalho (1992, p.101) percebe que, nessa tentativa, é apresentada, pela primeira vez, a aproximação do seno de um ângulo pequeno, pois, na linguagem de hoje, a demonstração de Aristarco indica que a razão da distância da Lua para a distância do Sol era $\operatorname{sen} 3^o$. Eratóstenes de Cirene (276 - 194 a.C.) determinou a medida do raio da Terra, completando o que faltava para uma avaliação dos tamanhos do Sol e da Lua (BOYER, 1996, p.109).

Apesar de todas essas contribuições significativas, Hiparco de Niceia (180 - 125 a.C.) foi considerado o "pai da trigonometria" por ter compilado o que se presume ser a primeira tabela trigonométrica. Alguns sugerem que Apolônio de Perga (262 - 190 a.C.) teria se antecipado na construção da tabela trigonométrica e que, na verdade, a contribuição de Hiparco teria sido calcular "[...]um melhor conjunto de cordas do que seus predecessores." (BOYER, 1996, p.110). Independentemente disso, as contribuições de Hiparco não se limitaram à compilação da tabela, sendo creditados a ele diversos outros avanços na trigonometria e, consequentemente, na astronomia. Segundo Gullberg (1997, p.462), ele introduziu o método babilônico de dividir um círculo em 360^o, determinou o comprimento do mês lunar e fez cálculos precisos das mudanças do equinócio. Infelizmente, apenas um de seus trabalhos foi preservado, sendo utilizado nas obras de Ptolomeu de Alexandria (100 - 168 d.C.).

De acordo com Adamek et al (2005, p.3), o predecessor de Hiparco, em termos de contribuição e influência em trigonometria, foi Menelau de Alexandria (70 - 130 d.C.). Ele escreveu um tratado de seis livros sobre cordas e um trabalho de três livros conhecido como *Sphaerica*. Nesse trabalho, Menelau apresenta a definição de triângulo esférico, descreve aplicações da geometria esférica para fenômenos de astronomia e apresenta teoremas que vieram a ser parte da trigonometria esférica na matemática grega.

Apesar da importância e do papel fundamental do trabalho de Menelau, Boyer (1996, p.112) afirma que a obra de treze livros de Ptolomeu de Alexandria (100 - 168 d.C.), intitulada *Syntaxis*, foi "[...]de longe a mais influente e significativa obra trigonométrica da Antiguidade[...]". Como, na mesma época, outros tratados astronômicos eram publicados, essa obra começou a ser chamada de *Almagesto*, palavra árabe que significa *o maior*, nome pelo qual a obra é conhecida até hoje, demonstrando assim sua força e influência.

Nessa obra, que tem por objetivo descrever, segundo a teoria geocêntrica, o funcionamento do sistema solar, é possível encontrar tabelas trigonométricas, bem como os métodos usados para construí-las e teoremas que correspondem ao que conhecemos hoje como lei dos senos, além de técnicas que possibilitam a resolução de qualquer triângulo por meio de decomposições convenientes em triângulos retângulos (BOYER, 1996, p.112 ; CARVALHO, 1992, p.104). Na obra *Almagesto*, é feita uma real distinção entre a trigonometria esférica e a trigonometria plana. Até que Ptolomeu introduzisse a base da trigonometria plana em seu trabalho, a trigonometria esférica era o principal ramo da trigonometria (ADAMEK ET AL, 2005, p.5).

Depois dos gregos, os matemáticos hindus e árabes trabalharam amplamente com trigonometria, apresentando em seus estudos uma tradição obtida independentemente da herança egípcia e babilônica. Os matemáticos hindus foram os primeiros a trabalhar com senos da forma como são definidos hoje e, entre os séculos IV e V, no tratado astronômico hindu *Surya Siddhanta*, a função seno foi calculada para cerca de vinte e quatro ângulos distintos (ROONEY, 2012, p.91). Adamek et al (2005, p.5) argumentam que a trigonometria ptolomaica baseou-se na relação entre cordas de um círculo e o ângulo central subtendido por elas, mas os escritos *Siddhantas* basearam-se no estudo da relação entre metade de uma corda de um círculo e metade do ângulo subtendido pela corda inteira. Ahmad ibn 'Abdallah Habash al-Hasib al-Marwazy (770 - 874 d.C.), astrônomo persa, criou a primeira tabela de tangentes e cotangentes por volta de 860 d.C.. O matemático e astrônomo persa al-Wafa al-Buzjani (940 - 998 d.C.) introduziu a função tangente, além de apresentar melhores métodos para calcular tabelas trigonométricas. Em razão de seus estudos extensivos sobre os movimentos lunares, uma das crateras da Lua recebeu o seu nome (ROONEY, 2012, p.92).

No século XII, muitos textos gregos, hebraicos e árabes foram traduzidos para o latim, incluindo o *Almagesto*. Leonardo Fibonacci (1170 - 1250 d.C.), em sua obra *Practica geometriae*, apresentou o conhecimento trigonométrico adquirido durante sua viagem a países árabes. O persa Nasir ad-Din (1201 - 1274 d.C.) recebeu o crédito por apresentar a trigonometria como ciência independente da astronomia. Em seu trabalho, pela primeira vez, a trigonometria plana é apresentada como uma disciplina própria, independente da trigonometria esférica (GULLBERG, 1997, p.464).

Por conta das grandes navegações no período do Renascimento, foi necessário o desenvolvimento da cartografia e tipografia, o que forçou o desenvolvimento da trigonometria. Além disso, todos os cálculos da astronomia posicional precisaram ser refeitos, uma vez que Copérnico (1473 - 1543 d.C.) apresentara o sistema heliocêntrico (CARVALHO, 1992, p.105). Regiomontanus (1436 - 1476 d.C.), astrônomo alemão, compilou o *De triangulis omnimodis*, que era um compêndio de trigonometria da época (GULLBERG, 1997, p.465). Esse foi o primeiro livro dedicado inteiramente à trigonometria (ROONEY, 2012, p.94). O matemático alemão Rhaeticus (1514 - 1574 d.C.) conseguiu juntar as ideias de Copérnico e Regiomontanus, criando o mais completo tratado de trigonometria da época, que, entre outras coisas, apresentava a trigonometria no triângulo retângulo (CARVALHO, 1992, p.106).

Galvão et al (2016, p.1130) explicam que Viéte (1540 - 1603 d.C.) introduziu novas notações algébricas, fazendo que a trigonometria assumisse um caráter moderno e analítico. Ele construiu as tabelas das seis funções trigonométricas para ângulos com aproximações em minutos, usou decimais, em oposição às frações sexagesimais usadas até então, e apresentou métodos para resolver triângulos planos e esféricos a partir das seis funções, a saber seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente. Boyer (1996, p. 211) apresenta-o como "o pai de uma abordagem analítica generalizada para a trigonometria".

O matemático Leonhard Euler (1707 - 1783 d.C.) inventou uma função, a função de Euler, que apresentou uma nova forma de enxergar as funções seno e cosseno (GALVÃO et al, 2016, p.1130).

> O surgimento do cálculo infinitesimal e, posteriormente, de seu prolongamento teórico, a Análise matemática, veio dar uma nova dimensão às noções básicas da trigonometria, como seno, cosseno e às noções associadas de tangente, secante, etc. Por isso, é indispensável considerar as funções $\cos t$ e $\operatorname{sen} t$ definidas para todo número real t. Ou seja, é preciso falar em cosseno e seno de *número*, em vez de um *ângulo*. Essa transição é feita por meio de uma função E, que chamaremos de *função de Euler*. (LIMA, 1991, p.33)

Lima (1991, p.35) diz que as funções seno e cosseno têm uma propriedade fundamental - a periodicidade - e que essa característica está presente em quase tudo ao nosso redor: "[...]desde o movimento de um planeta em torno do sol, ou de um elétron ao redor do núcleo, às batidas do nosso coração.". Além disso, ela está "[...]presente nas cordas de um violino que nos enleva e na corrente alternada que usamos em nossas casas. As funções periódicas são o instrumento matemático adequado para descrever todos os fenômenos periódicos.".

A importância dessas funções se ampliou quando Joseph Fourier (1768 - 1830 d.C.) mostrou que toda função pode ser obtida pela soma de uma série em termos de seno ou cosseno, chamada série de Fourier (LIMA, 1991, p.36).

Assim, verifica-se que o estudo da trigonometria era e continua sendo importante nos dias de hoje, na trigonometria esférica, influenciando significativamente a astronomia, na trigonometria plana, como uma ferramenta extremamente poderosa na mensuração de distâncias, ou nas funções trigonométricas, com modelagens de situações cotidianas.

> Compreender as funções trigonométricas é um pré-requisito para a compreensão de tópicos em física, arquitetura, [...] e muitos ramos da engenharia. Além disso, como a trigonometria é um dos primeiros tópicos de matemática que relaciona o raciocínio algébrico, geométrico e gráfico, ela pode servir como um precursor importante para a compreensão do pré-cálculo e do cálculo. (WEBER, 2005, p.91, tradução nossa)

Dessa forma, qualquer pessoa que pretenda se enveredar por um dos muitos ramos da grande área das ciências exatas precisa ter amplo entendimento sobre esse tema.

2.2 Aspectos psico-pedagógicos do ensino da trigonometria

2.2.1 O que já foi observado sobre erros em trigonometria e funções?

As pesquisas sobre as dificuldades no aprendizado de trigonometria ainda são escassas (WEBER, 2005; MOORE, 2010; DEMIR, 2012; DEMIR & HECK, 2013), mas o que já foi produzido consegue trazer um pouco de luz a esse tópico tão essencial na área das ciências exatas.

Weber (2005, p.103) fez um estudo com alunos de um curso de trigonometria em uma universidade no sul dos Estados Unidos e afirma que

> A primeira limitação no entendimento dos alunos [sobre funções trigonométricas] diz respeito ao papel que as figuras geométricas desempenham na compreensão dessas funções. Relacionar claramente as funções trigonométricas com modelos geométricos apropriados é importante para entender essas funções. (WEBER, 2005, p.103, tradução nossa).

Ele argumenta que, para um θ específico, quando solicitada uma aproximação para $\operatorname{sen}\theta$, a maioria dos alunos participantes do seu estudo indicaram que não havia informações suficientes para responder a esse questionamento. Alguns ainda relataram que, para existirem condições de responder, era necessário ter acesso a um triângulo com algumas informações extras. Assim, para esses, parece que a função trigonométrica não pode existir independentemente de seus modelos geométricos. Além disso, "esses alunos parecem não ter tido a habilidade ou a inclinação para construir mentalmente ou fisicamente objetos geométricos para ajudá-los a lidar com situações trigonométricas." (WEBER, 2005, p.103, tradução nossa).

Orhun (2004, p.210) destaca, em um de seus estudos com alunos da educação básica, que muitos estudantes não percebem um número real como um ângulo no argumento de uma função trigonométrica, e que o conceito de ângulo e o uso de radiano como unidade de medida de ângulo são inadequados. Em outro estudo, agora com alunos do primeiro ano da faculdade de ciências de uma universidade turca, Orhun (2010, p.180) indica que muitos estudantes consideram ângulo em radiano apenas quando π está presente e que, embora consigam fazer corretamente a conversão de ângulos em grau para radiano, eles não conseguem trabalhar bem com ângulos quando apresentados como um número real, sem notação de grau. Outro ponto observado por ele é que, quando os alunos foram questionados sobre o domínio de uma função trigonométrica, a maioria respondeu que o domínio estava limitado ao intervalo $[0^o, 360^o]$, e o segundo grupo de respostas mais expressivo indicou que o domínio estava limitado ao intervalo $[-1, 1]$, mostrando que há erros conceituais na definição de domínio de uma função e na transposição do círculo trigonométrico para a reta real. Ele ainda argumenta que a transposição do conceito e manipulação de função para o conceito e manipulação de função trigonométrica não é algo trivial para o aluno, pois, embora os alunos geralmente conheçam o conceito de função, não há clareza quanto à interpretação de função trigonométrica e cita que, quando eles "[...] realizam operações com funções trigonométricas, eles as consideram como funções polinomiais." (ORHUN, 2010, p.182, tradução nossa)

Brown (2006, p.228) nos apresenta, em seu estudo com cento e vinte alunos de alto desempenho, que a compreensão dos estudantes em relação às formas de ver o seno e o cosseno, seja como coordenadas de um ponto no círculo unitário, seja como proporções entre lados de um triângulo retângulo ou como gráficos das funções, é incompleta ou fragmentada. Ela também apresenta como frágil, por parte dos alunos, a concepção de ângulo e que há falha na conexão entre uma rotação no círculo unitário e um ponto no gráfico da função cosseno ou seno.

Demir & Heck (2013, p.2) dizem, em seu estudo com alunos da educação básica, que, independentemente da forma como as funções trigonométricas foram definidas para esses alunos, "[...] no método de razão, método de círculo unitário ou uma combinação de ambas as abordagens [...], os gráficos dessas funções reais permanecem misteriosos ou não passam de diagramas produzidos por uma calculadora gráfica ou software de matemática." (tradução nossa).

Quanto ao tópico de funções, Sierpinska (1992, p.25), citando o trabalho de diversos autores, indica que as dificuldades dos alunos com funções, de um modo geral, são bem conhecidas, listando ainda uma série de tópicos em que essas dificuldades aparecem. "Os alunos têm dificuldade em fazer conexões entre diferentes representações de funções: fórmulas, gráficos, diagramas, relacionar descrições de palavras; na interpretação de gráficos; em símbolos de manipulação relacionados a funções[...]" (SIERPINSKA, 1992, p.25, tradução nossa).

Chigonga (2016, p.174) apresenta, em seu estudo, que, para valores negativos de seno, cosseno e tangente, os alunos não apresentam interpretação adequada e não conseguem identificar o quadrante correto de alguns ângulos. O trabalho de Gur (2009, p.72) mostra que a memorização da relação fundamental da trigonometria, $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, desassociada da sua plena justificativa, é notória em boa parte dos participantes do seu estudo e Hart (1981), citado por Blackett & Tall (1991, p.144), diz que "razões revelam-se extremamente difíceis para as crianças compreenderem" (tradução nossa).

Gur (2009, p.68) classifica os erros em trigonometria em cinco grupos: dados mal usados, interpretação equivocada da linguagem, inferências lógicas inválidas, definições distorcidas e erros técnicos e/ou mecânicos. Esses grupos podem ser distribuídos em três outros grupos que agora relacionam a raiz do erro: conceito, processo e procepto, sendo procepto, segundo Tall (2002, p.262), "quando um simbolismo é usado tanto para representar um processo de manipulação quanto o resultado desse processo" (tradução nossa).

- O grupo *conceito* engloba o erro relacionado ao objeto e/ou símbolo matemático. Contidos nele está a interpretação equivocada da linguagem, como, por exemplo, quando o aluno não consegue identificar qual é a hipotenusa em um triângulo retângulo.

- O grupo *processo* engloba o erro relacionado à capacidade de usar as operações. Contidos nele estão dados mal usados e erros técnicos e/ou mecânicos, como, por exemplo, quando o aluno não consegue indicar uma aproximação para $\operatorname{sen}\theta$, dado o valor de $\cos\theta$, na relação fundamental da trigonometria.

- O grupo *procepto* engloba erro relacionado à capacidade de reconhecer um simbolismo como processo e conceito. Nele estão contidas as inferências lógicas inválidas e as definições distorcidas. Um exemplo de erro relacionado ao procepto é quando o aluno não consegue reconhecer que $\operatorname{sen} x$ é tanto uma função quanto um valor.

A seguir serão abordadas as principais causas registradas desses erros.

2.2.2 Por que surgem os problemas nessas áreas?

Aparentemente, há problemas tanto em ensinar quanto em aprender trigonometria, e talvez um decorra do outro.

Fi (2003, p.213), em um estudo com alunos no fim do curso de licenciatura em matemática em uma universidade nos Estados Unidos, indicou nos resultados da sua pesquisa que eles "têm compreensão mal desenvolvida em áreas como: medida de ângulos em radianos, funções trigonométricas inversas, funções recíprocas[2], periodicidade e co-funções" (tradução nossa). Além disso, ele indica que "muitas das pontuações no teste do conhecimento trigonométrico [realizado na pesquisa] estavam abaixo de 50% de marcações corretas." (tradução nossa). Topçu et al (2006, p.287) indicam, também com alunos no fim do curso de licenciatura em matemática, só que agora em uma universidade na Turquia, que "os participantes não consideraram o radiano como um número real", e que "a imagem conceitual de π no contexto da trigonometria é diferente da imagem conceitual de π como um número real" (tradução nossa). Ainda no contexo turco, o estudo de Abdulkadir (2013, p.5) indicou que mais de 90% dos participantes não definiram corretamente radiano. Chigonga (2016, p.169) apresenta em sua pesquisa a fala de um dos professores do ensino básico em uma escola no sul da África: "Parece que muitos professores têm problemas para ensinar aos alunos como resolver equações trigonométricas ... e, como resultado, os estudantes têm fobia das equações trigonométricas e não é um tópico favorito para eles ..." (tradução nossa). Dessa forma, pode-se inferir que existem evidências da formação incompleta e/ou inadequada de professores de matemática no que diz respeito à trigonometria, fazendo-se necessária a revisão e/ou reformulação do currículo dos cursos de formação desses profissionais, além de acesso amplo a cursos de formação continuada àqueles que já concluíram sua formação mínima requerida.

Mas, nem tudo decorre da insciência do professor. May & Courtney (2016, p.25) indicam que a divisão curricular pode ser um grande empecilho para o aprendizado efetivo da trigonometria.

> Em vez de desenvolver um significado de medida de ângulo que suporte uma única trigonometria, que engloba tanto a semelhança do triângulo como o comportamento periódico, os currículos típicos os desenvolvem separadamente e de forma independente. Especificamente, os livros escolares de ensino fundamental e médio desenvolvem duas abordagens não relacionadas da trigonometria: trigonometria de triângulos e trigonometria de funções periódicas. (MAY & COURTNEY, 2016, p.25, tradução nossa)

O Curriculo em movimento da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (DISTRITO FEDERAL, Vol. 4 e 5) apresenta essas abordagens como conteúdo programático de anos letivos espaçadas em, no mínimo, um ano.

A forma como o conteúdo é apresentado também influencia na aprendizagem do aluno.

[2] O autor apresenta as funções inversas como as funções do tipo $\operatorname{sen}^{-1}(x)$ e as funções recíprocas como as identidades trigonométricas.

> A maior parte das informações adquiridas pelos alunos, tanto dentro como fora da escola, é apresentada verbalmente e, sob o ponto de vista psicológico, a aprendizagem receptiva verbal é mais complexa, visto que exige um amadurecimento intelectual. (GALVÃO ET AL, 2016, p.1131)

> A impressão é que a trigonometria geralmente é ensinada por meio do método professor-ativo e os alunos aprendem a trigonometria memorizando o conhecimento pronto e repetindo-o. Sabe-se que esta aprendizagem geralmente é efetiva em um curto prazo e é difícil transferir o princípio aprendido para novas situações. Os principais motivos dos erros dos alunos são decorrentes do método de ensino. (ORHUN, 2004, p.210, tradução nossa)

Além dos fatores apresentados anteriormente, a trigonometria é um assunto de difícil compreensão por si só, como declaram Demir & Heck (2013, p.2, tradução nossa): "a natureza complexa da trigonometria torna desafiador para o aluno compreender o tema de forma profunda e conceitual.". Weber (2005, p.91) lembra que "a trigonometria é um dos primeiros tópicos de matemática que relaciona o raciocínio algébrico, geométrico e gráfico." (tradução nossa).

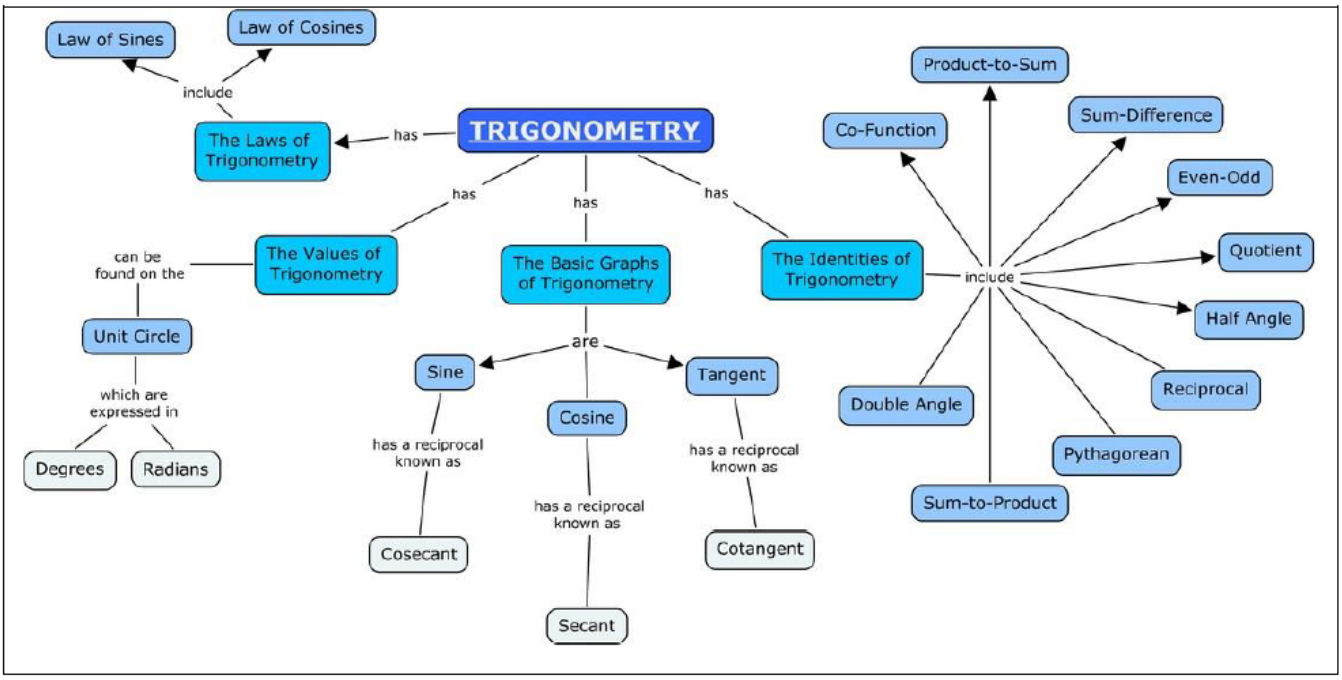
Os Van Hiele (MARCHAND, 2009, p.64) apresentam, em sua teoria, que o desenvolvimento do pensamento geométrico acontece em cinco níveis, não sendo possível passar para o próximo nível sem ter concluído todas as hablidades pertinentes ao nível anterior. De acordo com essa teoria, cada nível posterior indica um aprimoramento das habilidades de raciocínio em comparação com o anterior, estabelecendo assim uma hierarquia entre os níveis. Além disso, a teoria indica que a passagem para o próximo nível não pode ser ensinada, mas é influenciada pelo tipo de ensino que se tem, e apresenta uma maneira de organizar o ensino da geometria no intuito de facilitar a passagem dos níveis (MARCHAND, 2009, p.64). Apesar de existirem estudos mostrando a incompletude dessa teoria no que diz respeito às limitações dos níveis apresentados, como mostra Pegg (1992, p.33), evidencia-se real necessidade de que os alunos estejam em níveis adequados de pensamento geométrico quando começam a estudar trigonometria, para que as relações entre os raciocínios citados por Weber (2005, p.91) se estabeleçam de forma consistente e fluida.

Blackett & Tall (1991, p.144) mostram que, na abordagem da trigonometria como razões entre os lados de um triângulo retângulo, os alunos precisam relacionar diagramas de triângulos com razões numéricas e manipular essas razões, e Weber (2005, p.91) conclui que "muitos alunos do ensino médio e da universidade não estão acostumados a esse tipo de raciocínio." (tradução nossa). Orhun (2010, p.181) indica que, na abordagem inicial do ensino de trigonometria, geralmente é usado o ângulo medido em graus, e o aluno se acostuma com isso, gerando uma espécie de afeição pelo uso de ângulo medido em graus em detrimento do uso do ângulo medido em radianos. Dessa forma, quando o aluno chega ao ensino superior e é compelido a trabalhar com radiano, a sua performance é pior do que quando se usa grau.

Um obstáculo epistemológico (ALMOULOUD, 2007, p.133) não é uma dificuldade, mas um conhecimento que produz resposta adequada em certo contexto e resposta falsa fora desse contexto, além de resistir ao estabelecimento de um conhecimento novo e às contradiçoes com as quais é confrontado. As duas observações citadas no parágrafo anterior são exemplos de obstáculos epistemológicos na trigonometria.

Faz-se necessário esclarecer que, no que segue, utilizaremos a palavra *obstáculo* para identificar tanto uma dificuldade encontrada por alunos e/ou professores em relação à trigonometria, quanto um obstáculo epistemológico. A diferenciação se dará pelo contexto.

Chigonga (2016, p.174) apresenta um mapa conceitual (figura 2.1) expondo a abrangência da trigonometria.



Fonte: CHIGONGA (2016)

Figura 2.1: Mapa conceitual de trigonometria.

Com toda essa gama de ramos, faz-se necessária uma conexão clara e bem estabelecida entre cada um deles para que a trigonometria seja vista como um todo e não como uma série de fragmentos independentes.

Tall & Vinner (1981), citado por Tall (1991, p.7), definem imagem conceitual como

> [...] a completa estrutura cognitiva que é associada com o conceito, que inclui todas as imagens mentais e propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos anos, por meio de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e maturidade. (TALL & VINNER, 1981, tradução nossa)

É necessário que as imagens conceituais desenvolvidas em cada um dos tópicos apresentados na figura 2.1 sejam coerentes, sólidas e confiáveis. Isso provavelmente minimizaria os erros e dificuldades, facilitando a compreensão dessa área que é tão importante para o desenvolvimento das ciências.

Capítulo 3

Metodologia

Entre os objetivos desta pesquisa está a identificação dos problemas mais evidentes no aprendizado do conteúdo de trigonometria. Visto que a trigonometria contempla diversos ramos, que geralmente são apresentados de forma desconexa, faz-se necessária uma investigação para descobrir quais são os pontos críticos do aprendizado nesse tema, ou seja, em que pontos não estão acontecendo as conexões desejáveis e/ou em que pontos estão acontecendo generalizações indevidas. Essa identificação de pontos críticos pode colaborar com os profissionais em educação matemática na sua prática docente, influenciando diretamente a compreensão e o desempenho dos alunos no que diz respeito a essa área tão importante de estudos. Pretende-se fazer essa identificação por meio da análise das respostas de alunos a um questionário de múltipla escolha e em entrevistas direcionadas.

Para que a pesquisa estivesse bem estruturada e o objetivo de identificar os principais problemas no aprendizado de trigonometria fosse alcançado, foi necessário elaborar uma matriz de referência, que seria a base para a construção de um questionário de avaliação diagnóstica. A primeira aplicação do questionário aconteceu em turmas de Cálculo 1, na Universidade de Brasília (UnB), e os resultados obtidos serviram para calibração do questionário para a aplicação em turmas do ensino médio. A análise dos resultados dessa aplicação levantou alguns questionamentos. Na tentativa de respondê-los, foram realizadas entrevistas com alguns dos alunos que responderam ao questionário na segunda aplicação.

Neste capítulo, serão apresentados em detalhes cada um dos passos citados anteriormente.

3.1 Elaboração da matriz de referência

Ao analisar o Currículo em Movimento da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEE-DF) (DISTRITO FEDERAL, Vol. 4 e 5), foram identificados cada um dos conteúdos subsunçores (MOREIRA, 2010, p.2) julgados necessários para o aprendizado da trigonometria. São eles: razões trigonométricas; ângulos e plano cartesiano; semelhança de triângulos e teorema de Tales; definição de radiano.

Esses conteúdos são vistos ao longo do ensino fundamental II, e as funções trigonométricas estão inseridas no conteúdo programático do 2^o ano do ensino médio. Portanto, no sentido de identificar os problemas no aprendizado de trigonometria, os alunos deveriam ser avaliados dentro dos subtemas escolhidos apresentados na tabela 3.1.

Para determinar as habilidades a serem julgadas pertinentes a um aluno que estudou funções trigonométricas, foram analisadas as matrizes de referência do SAEB e Prova Brasil (BRASIL, 2008) assim como a do ENEM (BRASIL, 1999). A lista de descritores e habilidades selecionados nessas duas matrizes está disponível no anexo B.1.

Havia necessidade de uma quantidade reduzida de competências e habilidades que contemplassem o que se queria analisar. Isso porque o questionário seria aplicado a alunos

Subtemas	
T_1	Razões trigonométricas
T_2	Ângulos e plano cartesiano
T_3	Semelhança de triângulos e teorema de Tales
T_4	Definição de radiano
T_5	Funções trigonométricas

Tabela 3.1: Subtemas escolhidos.

adolescentes e não poderia ultrapassar o limite de uma hora, ou seja, ele deveria conter cerca de quinze itens conforme instrui Rabelo (2013, pg 191). Em razão disso, foram escolhidas duas competências do Currículo em Movimento da SEE-DF e quatro habilidades da matriz de referência usada na disciplina de Cálculo 1 do departamento de matemática do campus Darcy Ribeiro da Universidade de Brasília - UnB, que englobam vários dos descritores e habilidades apresentados nas matrizes analisadas.

As habilidades e competências selecionadas estão listadas a seguir:

Habilidades	
H_1	Identificar linguagens e traduzir sua significação; Interpretar a linguagem matemática com a precisão e o rigor que lhe são inerentes
H_2	Interpretar diferentes representações de um mesmo conceito, transitando por representações simbólicas, gráficas, numéricas, entre outras
H_3	Ler e interpretar dados e informações e expressar-se com clareza e precisão
H_4	Fazer inferências indutivas, dedutivas e analógicas

Competências	
C_1	Reconhecer situações que podem ser escritas em linguagem matemática e modelá-las
C_2	Raciocinar, expressar-se matematicamente e aplicar métodos matemáticos

Tabela 3.2: Habilidades e competências selecionadas.

A partir dessas competências e habilidades, foi criada a matriz de referência de trigonometria demonstrada na tabela 3.3.

	H_1	H_2	H_3	H_4
C_1	X	X	X	
C_2	X	X	X	X

Tabela 3.3: Matriz de referência de trigonometria.

No intuito de tornar ainda mais claro o que se pretendia evidenciar com o questionário, foram elencados os obstáculos mais notórios do processo de aprendizagem da trigonometria, ou seja, os conceitos que supostamente não são plenamente adquiridos com relação a esse tema. Essa seleção (ver tabela 3.4) foi feita com base nas vivências de sala de aula dos pesquisadores e na bibliografia apresentada nessa pesquisa.

A relação entre obstáculos, subtemas e habilidades é apresentada na tabela 3.5.

Diferenciar as razões trigonométricas entre si	O_1
Ampliar as razões trigonométricas para qualquer ângulo	O_2
Identificar coordenadas de ponto sobre o círculo trigonométrico	O_3
Relacionar triângulos semelhantes no círculo trigonométrico	O_4
Dominar transformações de graus para radianos e vice-versa	O_5
Reconhecer funções trigonométricas e suas características e comportamentos	O_6

Tabela 3.4: Obstáculos selecionados.

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	H_1	H_2	H_3	H_4
O_1	X					X	X		
O_2	X					X		X	
O_3		X					X		X
O_4			X					X	
O_5				X		X		X	
O_6		X			X	X	X	X	

Tabela 3.5: Obstáculos, temas e habilidades.

A partir da tabela 3.5, criou-se uma nova relação, com os subtemas e as habilidades (ver tabela 3.6) para o direcionamento da elaboração dos itens do questionário.

	H_1	H_2	H_3	H_4
T_1	X	X		
T_2		X	X	X
T_3			X	
T_4	X		X	
T_5	X	X	X	

Tabela 3.6: Temas e habilidades para a construção do teste.

3.2 Elaboração do questionário de avaliação diagnóstica

A partir da matriz de referência da tabela 3.3, elaborou-se um questionário, chamado de avaliação diagnóstica, composto de 15 questões de múltipla escolha. Selecionamos questões da prova Brasil de 2013 disponíveis na Plataforma Devolutivas do INEP (INEP), mas, como a matriz de referência usada era diferente, foi necessário elaborar questões tendo em vista o subtema e a habilidade que se queria avaliar, isso com o intuito de evidenciar as principais lacunas no aprendizado de trigonometria. Para tanto, foram definidas habilidades específicas (ver tabela 3.7) para cada item, a partir das habilidades gerais, descritas na tabela 3.2.

A primeira versão do questionário, aplicada aos alunos da disciplina de Cálculo 1 na Universidade de Brasília, está disponível no apêndice A.1.

Item	Habilidade específica	Tema	Habilidade	Obstáculo
1	Reconhecer cateto oposto e hipotenusa e saber lidar com razões diretamente proporcionais	T_1	H_1	O_1
2	Reconhecer cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa e diferenciar seno de cosseno	T_1	H_1	O_1
3	Entender a definição de radiano	T_4	H_1	O_5
4	Identificar o comprimento da circunferência de raio 1 como 2π e analisar os quadrantes correspondentes a um certo intervalo da reta real	T_2	H_2	O_3
5	Identificar a existência de até dois pontos de ordenada $\operatorname{sen} y_0$ para y_0 fixado	T_2	H_2	O_2
6	Reconhecer o comportamento das funções trigonométricas dentro de um domínio específico	T_5	H_1	O_7
7	Identificar as raízes das funções seno e cosseno em um intervalo determinado	T_5	H_3	O_7
8	Reconhecer semelhança de triângulo do tipo lado, ângulo, lado (LAL) e, a partir da proporção constante entre os lados correspondentes, determinar as suas medidas	T_3	H_3	O_4 e O_5
9	Fazer a transformação de medida de graus para radianos e identificar o comprimento de uma circunferência de raio unitário como 2π	T_4	H_3	O_5
10	Identificar as coordenadas de pontos sobre a circunferêcia em função de seno e cosseno	T_2	H_2	O_3
11	Identificar a lei fundamental da trigonometria a partir do teorema de Pitágoras	T_5	H_3	O_2
12	Reconhecer o gráfico da função seno a partir da sua lei de formação	T_5	H_2	O_6
13	Reconhecer as características da função cosseno a partir da lei de formação e do gráfico	T_5	H_3	O_6
14	Identificar coordenadas de um ponto em função de seno e cosseno no círculo trigonométrico após mudança de posição	T_2	H_4	O_3
15	Reconhecer a periodicidade das funções seno e cosseno	T_5	H_1	O_6

Tabela 3.7: Habilidades específicas.

3.3 Calibração do questionário de avaliação diagnóstica

A aplicação da primeira versão do questionário (apêndice A.1) foi realizada em turmas da disciplina de Cálculo 1 da Universidade de Brasília (UnB). Ao todo, participaram 225 alunos de 5 turmas, sendo 89 alunos do campus Darcy Ribeiro e 136 alunos do campus Gama. Nas turmas do campus Gama e em uma das turmas do campus Darcy Ribeiro, a aplicação dos questionários foi realizada pela autora da pesquisa; nas demais, os professores das turmas conduziram a aplicação sem a sua presença. Todas as aplicações aconteceram ainda no primeiro mês do segundo semestre letivo de 2017, e não foi permitido o uso de calculadoras ou aparelhos eletrônicos.

Pelo fato de os alunos das turmas da disciplina de Cálculo 1 serem na sua maioria calouros, havia necessidade de confirmar se os dados obtidos poderiam ser tratados da mesma forma. Os dados do questionário foram submetidos à análise do teste estatístico ANOVA (MORETTIN, 2015) (ver os resultados na figura 3.1). Então foi possível verificar que o tipo de ingresso (exame nacional do ensino médio - ENEM, programa de avaliação seriada - PAS ou vestibular - VEST) e a preparação dos alunos (participação em cursinho ou não) afetavam significativamente suas médias (para esses dois fatores, $Pr < 0,05$). No entanto, o campus em que os alunos estudam não influenciou os resultados, pois $Pr \geq 0,05$ para esse fator.

```
> summary(dados.anova)
             Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
ingresso      3   31.2  10.398   3.521 0.01589 *
cursinho      1   23.4  23.363   7.911 0.00536 **
campus        1   11.2  11.159   3.778 0.05320 .
Residuals   220  649.7   2.953
```

Figura 3.1: Resultado do teste ANOVA aplicado aos dados coletados na UnB.

A partir do resultado desse teste, os dados dos alunos foram separados em 6 grupos, definidos pelo tipo de ingresso (ENEM, PAS ou VESTIBULAR) e pela participação ou não em cursinho preparatório, conforme ilustra a tabela 3.8.

	Fez cursinho	Não fez cursinho
ENEM	ENEM 1	ENEM 0
PAS	PAS 1	PAS 0
VEST	VEST 1	VEST 0

Tabela 3.8: Grupos definidos pelo teste ANOVA - UnB.

Em seguida, as respostas foram analisadas de acordo com os parâmetros fornecidos pela TRI (teoria de resposta ao item) e pela TCT (teoria clássica dos testes). Essa análise será discutida na seção seguinte.

3.3.1 Análise preliminar a partir dos dados obtidos pela aplicação do questionário na UnB.

A análise das tabelas (tabelas apresentadas no apêndice A.2) contendo os parâmetros da TCT e TRI para cada grupo (ver tabela 3.8) revelou que os itens 5, 7, 10, 13 e 15 apresentavam baixa discriminação, dificuldade muito alta, percentual baixo de marcação na alternativa correta e bisserial positiva em distratores (RABELO, 2013, pg 133-139) para todos os 6 grupos.

É necessário observar que, nesse caso, os dados da TRI não são confiáveis porque os grupos não têm uma quantidade suficiente de alunos para garantir a convergência do método. Inclusive, o grupo ENEM 1 não apresenta dados da TRI (apêndice A.2) por conter apenas 4 alunos em sua composição. Por isso, essa análise baseou-se prioritariamente nos parâmetros fornecidos pela TCT.

Com esses indicativos de problemas nos itens, tornou-se necessária a revisão de seus enunciados e distratores. Especulações a respeito das razões que levaram às marcações equivocadas no gabarito foram feitas, levando em consideração os distratores que apresentaram alto índice de escolha e/ou bisseriais positivas. A partir dessas especulações, foram feitas sugestões de melhorias para os enunciados e/ou distratores, que são apresentadas a seguir, até que se chegasse à redação final do questionário que seria aplicado nas turmas do 2^o ano do ensino médio, disponível no apêndice A.3.

3.3.1.1 Correção do item 5

Este item aborda o subtema ângulos e plano cartesiano (T_2) e tem como habilidade o interpretar diferentes representações de um mesmo conceito, transitando por representações simbólicas, gráficas, numéricas, entre outras (H_2). A priori, quanto ao nível de dificuldade, foi classificado como fácil.

Enunciado original
Seja y_0 um número real fixado. A quantidade n de pontos $P = (x, \text{sen}(y_0))$ da circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1 é tal que

(a) $1 \leq n \leq 2$. (b) $2 \leq n \leq 4$. (c) $n = 1$. (d) $n = 2$. (e) $n = 4$.

Análise Como razões para os erros nesse item foram selecionadas a falta de compreensão ou compreensão equivocada do enunciado e a grande quantidade de pré-requisitos necessários à questão, sendo eles: identificar que um ângulo pode ser representado por qualquer valor real; identificar que o seno de qualquer valor real pertence ao intervalo [-1,1]; identificar que se procura um ponto P cuja ordenada pertence ao intervalo [-1,1]; determinar quantos valores de x satisfazem o fato de P pertencer à circunferência de raio 1 e centro (0,0) e a não fixação do ângulo. Dessa forma, como sugestão de melhorias, foi proposto que o texto do enunciado fosse modificado.

Enunciado definitivo
Seja um número real $\alpha < 0$. Quantos pontos $P = (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha))$ existem?

(a) 0. (b) 1. (c) 2. (d) 4. (e) infinitos.

3.3.1.2 Correção do item 7

Este item aborda o tema funções trigonométricas (T_5) e tem como habilidade ler e interpretar dados e informações e expressar-se com clareza e precisão (H_3). A priori, quanto ao nível de dificuldade, foi classificado como fácil.

Enunciado original
No intervalo $[0, 2\,\pi]$, a quantidade de soluções da equação $\text{sen}(x)\cos(x) = 0$ é igual a

(a) 2. (b) 3. (c) 4. (d) 5. (e) 6.

Análise As razões para os prováveis erros nesse item foram separadas por alternativas. Para a alternativa A, sugere-se que a verificação das raízes só ocorre para a função cosseno no intervalo definido. De modo semelhante, para a alternativa B, sugere-se que a verificação das raízes só ocorre para a função seno no intervalo definido e, para a alternativa C, a sugestao é que a verificação das raízes ocorre para a função $\text{sen}(x)\cos(x)$ no intervalo $[0, 2\pi)$ ou $(0, 2\pi]$. Dessa forma, a sugestão de melhoria está em trocar o intervalo para $[\pi, 3\pi]$ e trocar a alternativa E para 1.

Enunciado definitivo
No intervalo $[\pi, 3\,\pi]$, a quantidade de soluções da equação $\operatorname{sen}(x)\cos(x) = 0$ é igual a

(a) 1. (b) 2. (c) 3. (d) 4. (e) 5.

3.3.1.3 Correção do item 10

Este item aborda o tema ângulos e plano cartesiano (T_2) e tem como habilidade o interpretar diferentes representações de um mesmo conceito, transitando por representações simbólicas, gráficas, numéricas, entre outras (H_2). A priori, quanto ao nível de dificuldade, foi classificado como mediano.

Enunciado original
Seja c a circunferência de centro $O = (0, 0)$ e raio 1. As coordenadas dos pontos A e B pertencentes a c, tais como ilustrados na figura, são respectivamente iguais a

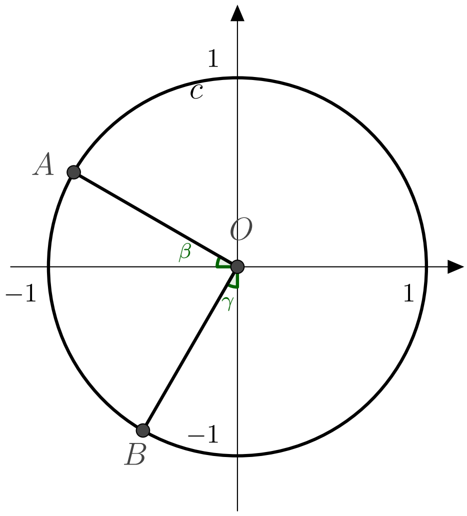
(a) $(\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta))$ e $(\cos(\gamma), \operatorname{sen}(\gamma))$.

(b) $(\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta))$ e $(\operatorname{sen}(\gamma), \cos(\gamma))$.

(c) $(\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta))$ e $(-\operatorname{sen}(\gamma), -\cos(\gamma))$.

(d) $(-\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta))$ e $(-\cos(\gamma), -\operatorname{sen}(\gamma))$.

(e) $(-\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta))$ e $(-\operatorname{sen}(\gamma), -\cos(\gamma))$.

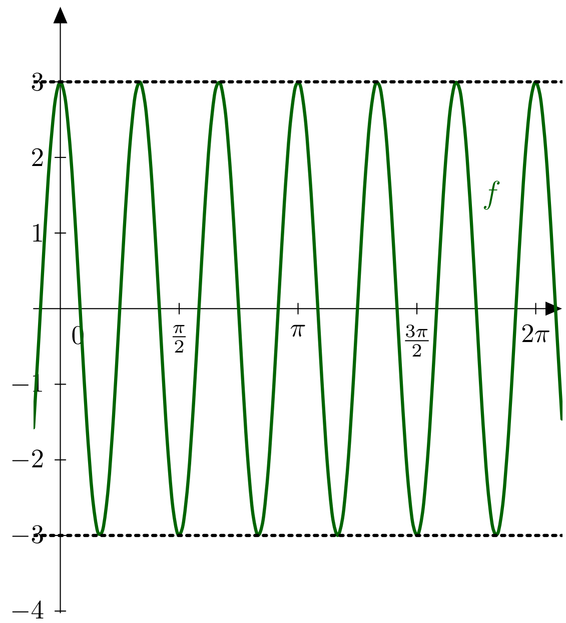


Análise Nesse item, a possibilidade de erro é que o aluno, apesar de fazer a identificação correta das coordenadas do ponto A em função de β, não faça a identificação correta das coordenadas do ponto B em função de γ, uma vez que a correspondência desse ponto no 1^o quadrante não ocorre de forma imediata como acontece com o ponto A. Não foram apresentadas sugestões de melhoria, pois acreditou-se que o item estava cumprindo bem a sua função de evidenciar esse erro citado, permanecendo, então, inalterado.

3.3.1.4 Correção do item 13

Este item aborda o tema funções trigonométricas (T_5) e tem como habilidade o interpetar diferentes representações de um mesmo conceito, transitando por representações simbólicas, gráficas, numéricas, entre outras (H_2). A priori, quanto ao nível de dificuldade, foi classificado como mediano.

Enunciado original
Seja $f : \mathbb{R} \to [-3, 3]$ definida por $f(x) = 3\,\cos(b\,x)$. Para que a figura abaixo represente o gráfico da função f, no sistema cartesiano xOy, o valor de b deve ser igual a



(a) 1.

(b) 2.

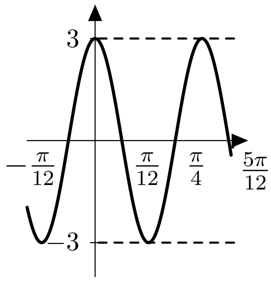
(c) 3.

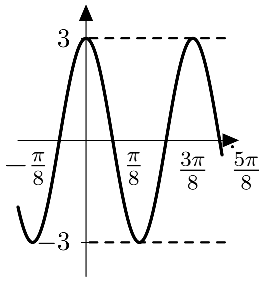
(d) 4.

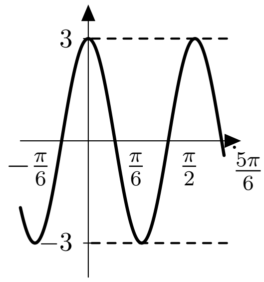
(e) 6.

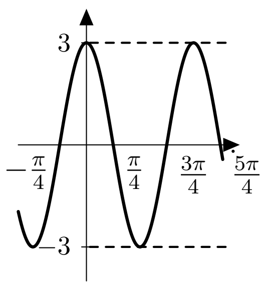
Análise Como possível erro apresentado nesse item foi identificada a verificação de valores apenas nos pontos onde a abscissa está destacada no gráfico. Notou-se também que não há verificação do período pela quantidade de cumes ou vales dentro do intervalo $[0{,}2\pi]$. A sugestão de melhoria apresentada limitou-se a transformar as alternativas em gráficos, cujos períodos equivalessem aos valores das alternativas no enunciado original.

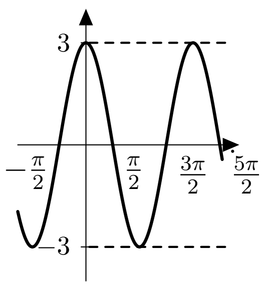
Enunciado definitivo
Seja $f : \mathbb{R} \to [-3, 3]$ definida por $f(x) = 3\cos(6\,x)$. O gráfico que melhor representa a função f, no sistema cartesiano xOy, é

(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


3.3.1.5 Correção do item 15

Este item aborda o tema funções trigonométricas (T_5) e tem como habilidade identificar linguagens e traduzir sua significação, interpretar a linguagem matemática com a precisão e o rigor que lhe são inerentes (H_1). A priori, quanto ao nível de dificuldade, foi classificado como difícil.

Enunciado original
Se os números reais x e y são tais que

$$\cos(x) = \cos(y) \text{ e } \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(y),$$

$y - x$ é igual a

- (a) $\pm k\,\pi$, em que k é um número par.
- (b) $\pm k\,\pi$, em que k é um número ímpar.
- (c) $\pm k$, em que k é um número natural.
- (d) $\pm k\,\dfrac{\pi}{2}$, em que k é um número ímpar.
- (e) 0.

Análise A possibilidade de erro apresentada foi o fato de o aluno não identificar a periodicidade das funções seno e cosseno. Como sugestão de melhoria foi proposto retirar a diferença que aparece no enunciado e colocá-la nas alternativas.

Enunciado definitivo
Se valem as igualdades $\cos(x) = \cos(y)$ e $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(y)$, x e y são tais que

- (a) $x = y$.
- (b) $x = y \pm k\,\pi$, em que k é um número par.
- (c) $x = \pm(\pi - y)k$, em que k é um número par.
- (d) $x = y \pm k\,\pi$, em que k é um número natural.
- (e) $x = \pm(\pi - y)k$, em que k é um número natural.

3.4 Aplicação do questionário de avaliação diagnóstica em turmas do ensino médio

A segunda fase da coleta de dados se deu por meio da aplicação do questionário em 22 turmas de 3 escolas públicas do Distrito Federal, para alunos do 2^o ano do ensino médio, que viram o conteúdo de trigonometria no ano vigente. Participaram da pesquisa 257 alunos do Centro de Ensino Médio 111 no Recanto das Emas (CEM 111), 273 alunos do Centro de Ensino Médio Ave Branca em Taguatinga (CEMAB) e 26 alunos do Instiuto Federal de Brasília - Campus Ceilândia (IFB), totalizando 556 alunos. A autorização para essa coleta de dados, emitida pela SEE-DF, está disponível no anexo B.2.

Com exceção da turma do IFB, onde a aplicação ocorreu sem a presença da pesquisadora, as aplicações do questionário ocorreram com a sua presença parcial ou integral, isso porque algumas aplicações ocorreram simultaneamente em duas turmas ou mais, sendo necessária a supervisão exclusiva do professor da turma em algum momento.

3.5 Tratamento dos dados

Uma vez que os alunos tiveram contato com o conteúdo de trigonometria por diferentes livros didáticos (DANTE, 2013; BARROSO, 2010), contando também com a singularidade de cada escola, foi necessário saber se os dados de todos os alunos poderiam ser tratados da mesma forma. Assim, os dados obtidos a partir da segunda aplicação do questionário foram analisados pelo teste ANOVA (MORETTIN, 2015).

O resultado desse teste indicou que os dados dos alunos deveriam ser separados por escola ($Pr < 0,05$) conforme ilustra a figura 3.2.

```
> summary(dados.anova)
             Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
escola        1   10.3  10.303    3.95 0.0474 *
Residuals   547 1426.6   2.608
---
```

Figura 3.2: Resultado do teste ANOVA aplicado aos dados coletados nas escolas.

Em seguida, as respostas de cada escola foram analisadas de acordo com os parâmetros fornecidos pela TRI (teoria de resposta ao item) e pela TCT (teoria clássica dos testes). Apesar da quantidade de alunos participantes, foi constatada convergência no método utilizado pela TRI. Dessa forma, a análise pôde ser feita com base nos dados de ambas as teorias.

Adotou-se a opção de desconsiderar os dados coletados do IFB, tendo em vista sua participação numericamente inexpressiva e o fato de que, em alguns pontos, os seus dados traziam informações consideravelmente diferentes das outras duas escolas. As razões dessa diferença serão objeto de outro trabalho.

3.6 Armazenamento dos dados

Na aplicação do questionário, tanto na UnB quanto nas escolas de ensino médio, foi entregue ao aluno, além do próprio questionário, uma folha de respostas (apêndice A.6). Nessa folha, algumas informações, como sexo, idade, número da chamada e/ou matrícula, foram solicitadas bem como as alternativas escolhidas para cada item do questionário. Além disso, cada folha era numerada por um código binário, tornando mais fácil a sua identificação em termos de instituição e turma.

Esses dados foram armazenados num banco MYSQL (MYSQL) e gerenciados pelo phpMyAdmin (PHPMYADMIN), uma ferramenta de software livre escrita em PHP.

Alguns fatores corroboraram para essa escolha. Trabalhar com os dados manualmente dificultaria muito o andamento da pesquisa, tendo em vista que foram contabilizados 781 alunos participantes. O armazenamento em banco de dados possibilitou a criação de um histórico das questões. Assim, foi possível determinar a porcentagem de alunos que escolheram determinado item, dado que uma escolha anterior já havia sido feita. Essa funcionalidade foi essencial para a análise dos dados. Além disso, todos os dados poderiam ser acessados e separados por turma, instituição, marcação específica em item, idade, entre outros, o que facilitou a interpretação desses dados.

A alimentação do banco foi feita manualmente via uma interface (anexo B.3). Esse método foi escolhido porque os programas conhecidos pelos pesquisadores, que faziam a transposição das informações contidas na folha de resposta para um banco de dados por meio da digitalização, apresentavam diversos erros de difícil identificação e correção.

Todo o material impresso usado na pesquisa foi digitalizado e arquivado em nuvem.

3.7 Entrevistas

A partir da análise dos dados coletados da aplicação do questionário nas turmas do ensino médio, foram elaboradas perguntas no intuito de evidenciar algumas hipóteses levantadas.

Como o tempo para a realização da pesquisa era limitado, optou-se por tentar evidenciar os seguintes tópicos:

- Como o aluno enxerga as funções trigonométricas (graficamente e propriedades);
- O que é radiano (graficamente e propriedades);
- Análise do triângulo retângulo em diferentes posições;
- Interpretação do enunciado do item 5.

Com isso, criou-se a sequência de perguntas que norteariam a entrevista, disponível na seção 4.4.1.

Como os itens 5 e 10 apresentaram alto índice de marcação nas alternativas E e D (distratores), respectivamente, e contemplavam alguns dos tópicos que se queriam evidenciar, fez-se uma busca de quantos alunos do Centro de Ensino Médio Ave Branca (CEMAB) marcaram simultaneamente esses distratores nas duas questões, obtendo-se um conjunto de 42 alunos. Notou-se que desses apenas um aluno marcou o gabarito no item 3, item que contempla outro dos tópicos que se queria evidenciar. Esse aluno foi adicionado ao grupo de prováveis entrevistados. Posteriormente, optou-se por filtrar ainda mais o resultado e acrescentar à busca aqueles alunos que também marcaram a alternativa B ou E (distratores) no item 3, visto que essas alternativas também apresentaram alto índice de marcação nesse item. Com isso, obteve-se um conjunto de 22 alunos que foram incluídos ao grupo de prováveis entrevistados.

Agendou-se uma data para a realização da entrevista com a professora de matemática responsável pelas turmas em que estavam matriculados esses alunos. No dia da entrevista, a coordenação da escola disponibilizou a sala de coordenação dos professores, visto que essa sala não estaria em uso no período requerido. A professora de matemática responsável pela turma anuiu com a liberação, durante o período de aula, de um aluno por vez para a entrevista .

No momento da entrevista, o aluno recebeu uma folha em branco e lápis e/ou caneta para as anotações que julgasse pertinentes. Além disso, ele assinou um termo de anuência de participação e concordou com a gravação de áudio, que posteriormente seria transcrita. Essa transcrição está disponível no apêndice A.5. Cada entrevista durou aproximadamente 12 minutos.

Foi possível realizar a entrevista com 6 alunos do CEMAB, que responderam a alternativa E no item 5, alternativa D no item 10 e alternativas B, D ou E no item 3. A participação quantitativamente mais expressiva foi um dos fatores que motivou a escolha dessa escola. Registra-se a impossibilidade de entrevistar mais alunos dado o tempo exíguo para a conclusão da pesquisa.

Capítulo 4

Análise de dados

Nessa seção, será apresentado como os dados coletados, a partir da aplicação do questionário aos alunos do 2º ano do ensino médio, foram analisados e que inferências e hipóteses foram feitas a partir desses dados.

A análise preliminar dos parâmetros da TCT e TRI, apresentados adiante (tabelas 4.2 a 4.16), indicou que mais de 70% dos itens apresentavam pelo menos dois dos seguintes fatores: baixa discriminação, alta ou altíssima dificuldade, bisserial abaixo de $0,30$ para a alternativa correta e bisserial positiva para distratores (RABELO, 2013).

Rabelo (2013, p.134 e 138) traz dados sobre a classificação dos itens, segundo a TRI, por discriminação (parâmetro a) e por dificuldade (parâmetro b), que são apresentados a seguir.

Valores de a	Discriminação		Classificação	Valores de b
$a = 0$	nenhuma			
$0,0 < a \leq 0,35$	muito baixa		Muito fáceis	até $-1,28$
$0,35 < a \leq 0,65$	baixa		Fáceis	de $-1,27$ a $-0,52$
$0,65 < a \leq 1,35$	moderada		Medianos	de $-0,51$ a $0,51$
$1,35 < a \leq 1,70$	alta		Difíceis	de $0,52$ a $1,27$
$a > 1,70$	muito alta		Muito difíceis	$1,28$ ou mais

Fonte: RABELO (2013)

Tabela 4.1: Classificação para os índices de discriminação e dificuldade na TRI.

A análise apresentada na seção seguinte foi elaborada com base nos parâmetros da TCT e TRI, do histórico de questões de cada escola (apêndice A.4) e da tabela 4.1.

4.1 Análise individual dos itens após aplicação do questionário nas escolas de ensino médio

Alguns pontos importantes foram destacados a partir da análise individual dos itens.

item 1 - A porcentagem de alunos que respondem corretamente ao item é maior que a porcentagem marcada em cada um dos distratores (alternativa errada). Não apresenta correlação bisserial positiva para nenhum distrator tampouco bisserial negativa para a alternativa correta. Entre as escolas participantes, a discriminação oscila entre baixa e alta, e a dificuldade entre mediana e muito difícil.

Escola		A	B	C	D	E	% brancos	TRI *a*	*b*	*c*
CEM 111	prop.	0.17	0.16	0.15	0.39	0.13	0.00	0.36	3.35	0.20
	biss.	-0.26	-0.02	-0.13	0.38	-0.20				
CEMAB	prop.	0.10	0.14	0.12	0.61	0.03	0.73	1.50	-0.10	0.20
	biss.	-0.28	-0.25	-0.41	0.52	-0.21				

Tabela 4.2: Parâmetros TCT e TRI para o item 1 nas escolas CEM 111 e CEMAB.

item 2 - Nota-se uma porcentagem considerável de marcações nas alternativas A, B e D. Além disso, a alternativa E apresenta bisserial positiva para ambas as escolas. A discriminação varia entre muito baixa e moderada e é considerada uma questão muito difícil. Para a alternativa A, tem-se a possibilidade de o aluno confundir seno com cosseno. Para a alternativa B, a possibilidade destacada é de o aluno identificar seno e cosseno do mesmo ângulo por duas razões distintas:

- ler o enunciado de forma incorreta não se atentando para a diferença entre os ângulos pedidos;
- não enxergar a existência de outro ângulo pelo hábito de só trabalhar com ângulos localizados na base do triângulo.

Para a alternativa D, a análise é semelhante à feita para a alternativa B, com o agravante de o aluno inverter a razão, colocando a hipotenusa como termo antecedente e os catetos como termos consequentes. Para a alternativa E, que apresenta bisserial positiva, uma possibilidade é que o aluno tenha calculado as tangentes do ângulo por confundir o lado do triângulo correspondente à hipotenusa. Existe a possibilidade de a dificuldade com o item ser decorrente da necessidade de relacionar duas razões trigonométricas ou também da necessidade de se trabalhar com o ângulo que não está na base do triângulo, uma vez que o aluno está habituado a trabalhar prioritatiamente com os ângulos da base como indicam os livros didáticos (BARROSO, 2010; DANTE, 2013).

Escola		A	B	C	D	E	% brancos	TRI *a*	*b*	*c*
CEM 111	prop.	0.20	0.35	0.18	0.17	0.09	0.39	0.15	23.27	0.17
	biss.	-0.02	-0.14	0.33	-0.19	0.12				
CEMAB	prop.	0.14	0.32	0.29	0.19	0.06	1.10	0.80	2.45	0.18
	biss.	-0.16	-0.20	0.54	-0.28	0.01				

Tabela 4.3: Parâmetros TCT e TRI para o item 2 nas escolas CEM 111 e CEMAB.

item 3 - A porcentagem de alunos que acertam esse item é muito baixa. As alternativas com maior índice de marcação são: A, B e E. Esse item apresenta bisserial positiva para as alternativas B e E e bisserial nula para a alternativa A (a depender da escola). A discriminação é muito baixa, e a dificuldade muito alta. As alternativas B e E são inversas e apresentam o número π em sua composição. Esse pode ser um dos fatores para o alto índice de marcação, uma vez que, quando se fala de radianos, os exemplos geralmente contêm o número π como componente da resposta como indicam os livros didáticos (BARROSO, 2010; DANTE, 2013). Para a alternativa A, uma possibilidade é o fato de os números 1 e 2 aparecerem no enunciado, gerando então a fração $\frac{1}{2}$ como alternativa viável. Pode-se inferir que a definição de radiano não é compreendida pelos alunos, e talvez essa seja a razão pela qual a maioria dos alunos prefere trabalhar com ângulos utilizando a medida em graus ao invés de radianos.

Escola		A	B	C	D	E	% brancos	TRI a	TRI b	TRI c
CEM 111	prop.	0.21	0.27	0.13	0.11	0.27	0.39	0.19	22.37	0.14
	biss.	0.00	0.02	-0.16	0.35	-0.12				
CEMAB	prop.	0.20	0.37	0.10	0.06	0.27	1.47	0.14	32.86	0.12
	biss.	-0.24	0.07	-0.13	0.22	0.11				

Tabela 4.4: Parâmetros TCT e TRI para o item 3 nas escolas CEM 111 e CEMAB.

item 4 - Apesar de a marcação no gabarito ter porcentagem maior do que as marcações em todas as demais alternativas, nota-se uma porcentagem considerável de marcações nas alternativas B e C. A discriminação do item é alta e é um item muito difícil. Não há bisseriais positivas para as alternativas erradas, nem bisseriais negativas para a alternativa correta. Uma das possíveis razões para o índice expressivo de marcações na alternativa B é o fato de o aluno identificar a posição do ponto final do arco 30π, que está localizado entre o 1^o e 4^o quadrante e, a partir daí, concluir que esse é o intervalo pedido. De forma semelhante, para a marcação na alternativa C, o aluno provavelmente identifica a posição do ponto final do arco 31π, que está localizado entre o 2^o e 3^o quadrante e, a partir daí, conclui que esse é o intervalo pedido. Com isso, pode-se inferir que, para esses alunos que marcaram as alternativas B e C, há equívoco no conceito de intervalos equivalentes no círculo trigonométrico.

Escola		A	B	C	D	E	% brancos	TRI a	TRI b	TRI c
CEM 111	prop.	0.29	0.22	0.28	0.11	0.10	0.00	1.51	1.58	0.19
	biss.	0.50	-0.10	-0.26	-0.24	-0.06				
CEMAB	prop.	0.32	0.21	0.15	0.16	0.17	1.47	1.65	1.48	0.20
	biss.	0.51	-0.19	-0.09	-0.28	-0.16				

Tabela 4.5: Parâmetros TCT e TRI para o item 4 nas escolas CEM 111 e CEMAB.

item 5 - A porcentagem de alunos que marcam corretamente o item 5 é baixa. Em sua grande maioria, os alunos marcam a alternativa E como correta. A discriminação do item varia entre muito baixa e moderada, e a dificuldade é muito alta. Esse item apresenta bisserial positiva para quase todos os distratores, considerando as duas escolas. Para a alternativa A, uma possibilidade é que o aluno tenha visto como impossível a existência de um ângulo negativo. Para a alternativa C, uma possiblidade é que o aluno identifique o ponto definido por α e o seu simétrico em relação à origem ou o ponto correspondente a esse em um dos quadrantes adjacentes. Para a alternativa D, uma possibilidade é que o aluno afirme a existência de quatro pontos correspondentes, um para cada quadrante, se o ângulo não é múltiplo de $\frac{\pi}{2}$ ou, um para cada semieixo coordenado, se o ângulo é múltiplo de $\frac{\pi}{2}$. Nesse caso, os sinais das coordenadas dos pontos não são relevantes para o aluno. Para a alternativa E, é possível que o aluno verifique que o ponto final de infinitos arcos coincide com a mesma posição do ponto fixado sobre o círculo trigonométrico. Dessa forma, ele não fixa o ângulo. Uma possibilidade para isso é a interpreteção da pergunta como sendo: Dado um ponto $P = (\cos(\alpha), \mathrm{sen}(\alpha))$, quantos ângulos α distintos determinam a posição de P? Nesses casos apresentados, é possível inferir que o aluno se remete prioritariamente ao círculo trigonométrico para a sua análise. Os gráficos das funções seno e cosseno parecem não ser representativos o suficiente para que a análise seja feita com base neles.

Escola		A	B	C	D	E	% brancos	TRI		
								a	b	c
CEM 111	prop.	0.19	0.16	0.11	0.10	0.44	0.00	0.13	28.20	0.16
	biss.	-0.33	0.21	-0.12	0.08	0.12				
CEMAB	prop.	0.16	0.11	0.16	0.06	0.50	1.10	1.08	4.19	0.14
	biss.	0.22	0.19	-0.24	-0.07	-0.05				

Tabela 4.6: Parâmetros TCT e TRI para o item 5 nas escolas CEM 111 e CEMAB.

item 6 - As alternativas A e B correspondem às principais marcações dos alunos. O item apresenta discriminação muito baixa e dificuldade muito alta. Além disso, as alternativas B e E apresentam bisserial positiva para uma das escolas. Um fator comum às alternativas A, B e C (que é o gabarito) é a presença da função seno como resposta correta. Uma possibilidade é que o aluno tenha inferido corretamente que a função seno é crescente no intervalo delimitado, mas tenha ficado em dúvida sobre a segunda função, marcando ao acaso uma dessas alternativas. O atrativo da alternativa A é o fato de cosseno ser uma função também conhecida dos alunos, então a marcação seria justificada pela familiaridade. Para a alternativa B, a marcação viria por reconhecer que, em algum momento desse intervalo, a função cosseno decresce, logo o inverso dela cresce. O fato de a alternativa E apresentar bisserial positiva pode indicar que o aluno reconhece a função tangente como crescente no intervalo destacado, mas se confunde quanto à função cosseno.

Escola		A	B	C	D	E	% brancos	TRI		
								a	b	c
CEM 111	prop.	0.39	0.23	0.16	0.11	0.12	0.00	0.22	16.25	0.16
	biss.	-0.01	-0.17	0.36	-0.11	-0.07				
CEMAB	prop.	0.28	0.24	0.18	0.17	0.12	2.20	0.14	24.54	0.17
	biss.	-0.18	0.05	0.21	-0.06	0.02				

Tabela 4.7: Parâmetros TCT e TRI para o item 6 nas escolas CEM 111 e CEMAB.

item 7 - Todos os distratores parecem ser mais plausíveis do que a alternativa correta nesse item, pois a porcentagem de marcação naqueles foi superior à marcação nesta em ambas as escolas, à exceção da alternativa D na escola CEM 111. A discriminação variou entre muito baixa e moderada, e a dificuldade foi muito alta. A alternativa B apresentou bisserial positiva. Para a alternativa A, uma possibilidade é que, ao verificar o intervalo e notar que os pontos, inicial e final, coincidiam, o aluno tenha analisado a equação apenas nesse ponto comum. Para a alternativa B, a possibilidade destacada é que o aluno veja apenas as raízes do $cos(x)$ para o intervalo determinado, que são duas, a saber, $\frac{3\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{2}$, ou que ele tenha testado os dois valores correspondentes aos extremos do intervalo, π e 3π, na equação verificando que eles são raízes da equação. Para a alternativa C, temos a possibilidade de o aluno ter se concentrado apenas no primeiro termo do primeiro membro da equação, o $sen(x)$, que, no intervalo apresentado no item, tem 3 raízes, a saber π, 2π e 3π. Para a alternativa D, a possibilidade é que o aluno veja um dos extremos do intervalo como aberto. Com base nas possibilidades apresentadas, é possível inferir que os alunos têm dificuldade quando é necessário analisar duas ou mais funções trigonométricas apresentadas simultaneamente. Além disso, a falta da conexão com o gráfico das funções trigonométricas dificulta a análise correta do item.

Escola		A	B	C	D	E	% brancos	TRI		
								a	b	c
CEM 111	prop.	0.20	0.18	0.36	0.12	0.14	0.00	0.16	24.13	0.15
	biss.	-0.16	-0.07	-0.01	-0.02	0.33				
CEMAB	prop.	0.13	0.28	0.30	0.20	0.09	2.20	1.18	4.28	0.13
	biss.	-0.02	0.31	-0.25	-0.19	0.23				

Tabela 4.8: Parâmetros TCT e TRI para o item 7 nas escolas CEM 111 e CEMAB.

item 8 - Nesse item, as alternativas mais escolhidas se dividem entre A, B e C (que é o gabarito), o que é plausível, já que essas alternativas apresentam valores menores que 10. O grau de discriminação está entre muito baixo e baixo, e a dificuldade é muito alta. A bisserial da alternativa D é positiva para ambas as escolas e a da alternativa E é positiva para uma delas. Para a alternativa A, a possibilidade é que o aluno tenha raciocinado da seguinte maneira: *'5 está para 10 assim como 3 está para x'*. Daí, pode-se inferir que o aluno não reconhece a proporção pelos triângulos, mas pelos lados dos trapézios vistos como semelhantes. Para a alternativa B, a possibilidade é que o aluno tenha raciocinado da seguinte maneira:*'3 está para 2 assim como 10 está para x'* ou *'3 vezes x é igual a 2 vezes 10'*, executando o produto desses termos. Para a alternativa D, a análise é semelhante. O aluno provavelmente raciocina que: *'10 vezes 10 é igual a 8 vezes x'*, assim ele obtém um valor de x que é maior que 10. Ainda sobre a alternativa D, há a possiblidade de inversão de uma das razões no momento da conta e de erro de cálculo mental, uma vez que não foram registrados cálculos nos questionários. Para a alternativa E, a possiblidade é que o aluno tenha raciocinado da seguinte maneira:*'3 está para x assim como 2 está para 10'*. Mais uma vez, o resultado não é visualmente plausível. Nesses dois últimos casos, se o aluno cogitasse verificar a plausibilidade do resultado, provavelmente não teria marcado essas alternativas.

Escola		A	B	C	D	E	% brancos	TRI		
								a	b	c
CEM 111	prop.	0.21	0.29	0.28	0.11	0.12	0.39	0.42	4.83	0.19
	biss.	-0.10	-0.26	0.40	0.04	-0.13				
CEMAB	prop.	0.17	0.23	0.36	0.13	0.12	1.10	0.11	12.24	0.20
	biss.	-0.16	-0.25	0.26	0.01	0.09				

Tabela 4.9: Parâmetros TCT e TRI para o item 8 nas escolas CEM 111 e CEMAB.

item 9 - A marcação nesse item se divide principalmente entre as alternativas A (que é o gabarito) e B. A discriminação varia entre muito alta e moderada, e a dificuldade é alta. Para a marcação na alternativa B, uma possibilidade é o fato de $\frac{\pi}{4}$ ser familiar aos alunos ou por corresponder a um ângulo cuja medida em graus apresenta o algarismo 5 na casa das unidades, fazendo assim uma correspondência com o ângulo que aparece no enunciado.

Escola		A	B	C	D	E	% brancos	TRI a	TRI b	TRI c
CEM 111	prop.	0.24	0.26	0.19	0.15	0.16	1.17	1.89	1.67	0.17
	biss.	0.40	-0.04	-0.08	-0.16	-0.23				
CEMAB	prop.	0.30	0.26	0.16	0.13	0.15	1.83	0.79	2.54	0.19
	biss.	0.32	-0.01	-0.26	-0.00	-0.20				

Tabela 4.10: Parâmetros TCT e TRI para o item 9 nas escolas CEM 111 e CEMAB.

item 10 - No item 10, as alternativas B, C e D são as mais visadas pelos alunos. O item apresenta discriminação muito baixa e dificuldade muito alta. As alternativas C e D apresentam bisserial positiva (a depender da escola). Além disso, todos os distratores apresentam porcentagem de marcação maior do que a porcentagem registrada no gabarito. Surgem algumas possibilidades para essas marcações. É possível que o aluno que escolhe a alternativa B reconheça que o cateto oposto ao ângulo γ do triângulo de lado OB corresponde à medida da projeção ortogonal do ponto B sobre o eixo x e que o cateto adjacente corresponde à medida da projeção ortogonal de B sobre o eixo y, logo as coordenadas de B seriam $B = (\text{sen}(\gamma), \cos(\gamma))$. Contudo, há falhas no sinal dessas coordenadas e das coordenadas correspondentes ao ponto A. Para a alternativa C, é possível que ocorra a mesma interpretação da alternativa B, com a correção do sinal no ponto B, mantendo ainda o erro no sinal do ponto A. É possível inferir que o aluno que consegue fazer esse tipo de interpretação, mas erra ao atribuir às medidas sinais equivocados, enxerga os pontos no segundo quadrante como equivalentes aos do primeiro quadrante, inclusive em relação ao sinal. O aluno que marca a alternativa D reconhece corretamente as coordenadas do ponto A, contudo, ao analisar as coordenadas do ponto B, ele as registra como se B correspondesse ao ponto $B' = (\cos(\gamma), \text{sen}(\gamma))$, o que nos mostra um erro conceitual ao fazer as correspondências do ponto B com o seu equivalente no 1^o quadrante. Nesse caso, o aluno só enxerga o ângulo agudo e, como ele possivelmente sabe que as coordenadas de um ponto sobre o círculo trigonométrico são dadas por abscissa igual à medida do cosseno do ângulo e ordenada igual à medida do seno do ângulo, para ângulos definidos no sentido anti-horário a partir do semieixo positivo de x, ele repete esse padrão aprendido e analisa o triângulo retângulo de lado OB e ângulo γ como se esse estivesse no 1^o quadrante. Nesse caso, a transposição das razões trigonométricas para a função trigonométrica não está clara.

Escola		A	B	C	D	E	% brancos	TRI a	TRI b	TRI c
CEM 111	prop.	0.17	0.22	0.32	0.20	0.09	0.78	0.17	26.70	0.13
	biss.	-0.12	-0.20	0.27	-0.16	0.21				
CEMAB	prop.	0.16	0.18	0.28	0.28	0.10	1.83	0.15	28.42	0.14
	biss.	-0.19	-0.10	-0.03	0.07	0.31				

Tabela 4.11: Parâmetros TCT e TRI para item o 10 nas escolas CEM 111 e CEMAB.

item 11 - Esse item tem suas marcações prioritariamente nas alternativas A, D (que é o gabarito) e E. Ele apresenta índices de discriminação e de dificuldade de alto a muito alto. Para uma das escolas, a alternativa C apresenta bisserial positiva. Para os alunos que marcam a alternativa A, uma possível explicação é que eles reconheçam a estrutura da relação fundamental da trigonometria, mas não façam distinção entre os fatores a e b elevados ao quadrado e os fatores a e b elevados à potência 1. De modo semelhante, para a alternativa B, a distinção não ocorre entre os fatores a e b elevados ao quadrado e os fatores a e b em módulo. Para a alternativa C, uma possibilidade é que o aluno não reconheça a relação fundamental da trigonometria e interprete os módulos como valores de máximo e mínimo para cada uma das coordenadas. Sabendo que o seno e o cosseno variam de -1 a 1, ele pode inferir que os seus módulos serão sempre menores ou iguais a 1, e daí a confusão. Para a alternativa E, uma possibilidade é que o aluno se lembre vagamente da relação fundamental, reconhecendo os quadrados nos termos a e b, mas se confunda quanto à sua estruturação. Com base nessas possibilidades, pode-se inferir que o aluno decora a fórmula, mas não entende o seu sentido, não busca as suas relações para trazer a ela significado. Logo, em ambos os casos, pode-se inferir que a relação fundamental é apenas mais uma fórmula entre as muitas que o aluno está aprendendo naquele ano letivo, mas a conexão com o teorema de Pitágoras está perdida.

Escola		A	B	C	D	E	% brancos	TRI		
								a	b	c
CEM 111	prop. biss.	0.29 -0.34	0.17 -0.11	0.10 0.02	0.29 0.59	0.15 -0.25	0.39	2.12	1.30	0.18
CEMAB	prop. biss.	0.20 -0.29	0.19 -0.09	0.14 -0.01	0.25 0.53	0.22 -0.21	1.47	1.48	2.09	0.19

Tabela 4.12: Parâmetros TCT e TRI para o item 11 nas escolas CEM 111 e CEMAB.

item 12 - As marcações para esse item estão divididas entre as alternativas B (que é o gabarito), C, D e E. Apesar disso, para a alternativa A, a bisserial é positiva para uma das escolas. O item tem baixa discriminação em uma escola e alta discriminação na outra. É considerado um item muito difícil. Para ambos os casos, o mais provável é que a escolha tenha se dado pela imagem gráfica da função, ou seja, aquela curva que mais se assemelha, na visão do aluno, à função pedida. Para todos os alunos que marcam fora do gabarito, pode-se inferir que a característica da função seno de ser limitada ao intervalo [-1,1] não é usada para analisar o item, pois, caso fosse, os alunos perceberiam rapidamente que $f(x)$ pertence ao intervalo [0,2], logo apenas uma alternativa seria de fato viável. O fato de o período estar deslocado em $\frac{\pi}{2}$ atrapalha a interpretação daqueles que só estão familiarizados com os gráficos de $sen(x)$ e $cos(x)$ sem deslocamento, trazendo então para as alternativas C, D e E um índice de marcação mais expressivo.

Escola		A	B	C	D	E	% brancos	TRI		
								a	b	c
CEM 111	prop. biss.	0.18 -0.09	0.25 0.59	0.20 -0.23	0.16 -0.22	0.21 -0.15	0.39	1.46	1.93	0.18
CEMAB	prop. biss.	0.17 0.05	0.21 0.30	0.21 -0.17	0.28 -0.11	0.13 -0.06	1.83	0.13	23.26	0.18

Tabela 4.13: Parâmetros TCT e TRI para o item 12 nas escolas CEM 111 e CEMAB.

item 13 - Nesse item, o maior índice de marcações está na alternativa C. A discriminação varia de muito baixa a moderada e é considerada uma questão muito difícil. A alternativa D apresenta bisserial positiva para uma escola. Para a alternativa C, a explicação mais plausível é que, pelo fato de aparecer o número 6 dentro do período da função, o aluno visualiza a opção em que o número 6 aparece no gráfico e faz a marcação. Para a alternativa D, uma explicação plausível é que o aluno tenha testado os pontos em que o gráfico intercepta o eixo x e verificado que eles são raízes da função apresentada no enunciado. Contudo, os demais pontos do gráfico não satisfazem à função em questão.

Escola		A	B	C	D	E	% brancos	TRI		
								a	b	c
CEM 111	prop. biss.	0.10 0.29	0.21 -0.10	0.42 -0.00	0.09 -0.10	0.18 -0.03	1.56	0.19	22.39	0.14
CEMAB	prop. biss.	0.17 0.32	0.15 -0.06	0.38 -0.09	0.14 0.01	0.17 -0.14	3.30	1.10	3.49	0.16

Tabela 4.14: Parâmetros TCT e TRI para o item 13 nas escolas CEM 111 e CEMAB.

item 14 - Nesse item, as marcações se concentram nas alternativas B, C e D (que é o gabarito). O item tem baixa ou muito baixa discriminação, e a dificuldade é considerada muito alta. Para uma das escolas, a alternativa E aparece com bisserial positiva. Para a alternativa B, uma possibilidade é o fato dos números -1 e 0 aparecerem no enunciado. Aliando isso à rotação no sentido anti-horário descrita no contexto, o aluno pode ter interpretado o ponto de coordenadas (-1,0) como resposta plausível. Para a alternativa C, o aluno identifica corretamente onde o ponto estará após a rotação, mas não se atenta aos sinais correspondentes às coordenadas do ponto. Pode-se inferir que o aluno analisa as coordenadas com base no triângulo retângulo de hipotenusa OB_{15}, mas não verifica que a correspondência com o 1^o quadrante ocorre na igualdade do valor da medida do seno e no oposto do valor da medida do cosseno, uma vez que esse ponto está no 2^o quadrante. Para a alternativa E, o aluno pode ter confundido os eixos ordenados, invertendo assim seno e cosseno, ou ter calculado de forma equivocada a posição final de B_{15}, encontrando $\frac{5\pi}{6}$ como ângulo que define a posição. Como $\operatorname{sen}(\frac{5\pi}{6}) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{6})$ e $\cos(\frac{5\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6})$, as coordenadas de B_{15} seriam, nesse caso, $B_{15} = (-\cos(\frac{\pi}{6}), \operatorname{sen}(\frac{\pi}{6})) = (-\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}), \cos(\frac{\pi}{3}))$.

Escola		A	B	C	D	E	% brancos	TRI		
								a	b	c
CEM 111	prop. biss.	0.21 -0.02	0.29 -0.32	0.22 -0.07	0.22 0.40	0.05 0.17	0.78	0.60	4.76	0.18
CEMAB	prop. biss.	0.17 -0.08	0.26 -0.20	0.22 -0.13	0.25 0.41	0.11 -0.02	2.93	0.16	15.18	0.19

Tabela 4.15: Parâmetros TCT e TRI para o item 14 nas escolas CEM 111 e CEMAB.

item 15 - O último item da avaliação tem suas marcações concentradas prioritariamente nas alternativas A e D. Ele apresenta discriminação variando de muito baixa a alta, e dificuldade muito alta para ambas as escolas. As alternativas A e D têm bisserial positiva (a depender da escola). Para a alternativa A, pode-se inferir que o aluno reconhece que pontos no círculo trigonométrico que têm as mesmas coordenadas coincidem, mas não reconhece a periodicidade das funções trigonométricas. Ele provavelmente limita o círculo trigonométrico ao intervalo de $[0, 2\pi]$, assim $\cos(x) = \cos(y)$ e $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(y)$ só ocorre quando o ângulo x é igual ao ângulo y. Para a alternativa D, uma possibilidade é que o aluno reconheça as funções trigonométricas como periódicas, mas, ao fazer a escolha por essa alternativa, ele não se atenta ao fato de que, a cada rotação de π, os pontos não coincidem e sim a cada rotação de 2π. É possivel também que o aluno tenha na sua memória visual o fato de que a função é periódica a cada $2k\pi$, para k inteiro, e não tenha se atentado ao fato de que, na alternativa, não aparece $2k\pi$ e sim $k\pi$, logo k precisa ser par.

Escola		A	B	C	D	E	% brancos	TRI		
								a	b	c
CEM 111	prop.	0.38	0.16	0.16	0.19	0.11	0.39	0.16	22.69	0.16
	biss.	0.03	0.31	-0.15	-0.07	-0.17				
CEMAB	prop.	0.45	0.11	0.12	0.21	0.10	2.93	1.37	3.29	0.13
	biss.	-0.17	0.43	-0.01	0.02	-0.09				

Tabela 4.16: Parâmetros TCT e TRI para o item 15 nas escolas CEM 111 e CEMAB.

A análise revela, em suma, que os alunos apresentaram diversas dificuldades no que diz respeito à trigonometria: seja no triângulo retângulo, no círculo trigonométrico ou nas funções trigonométricas. Para cada um desses tópicos, obtemos, com base na análise individual, as dificuldades listadas abaixo.

- No triângulo retângulo: relacionar duas razões trigonométricas, trabalhar com o ângulo fora da base horizontal do triângulo e identificar a relação fundamental da trigonometria como consequência direta do teorema de Pitágoras.
- No círculo trigonométrico: compreender a definição de radiano, reconhecer ângulo em radiano quando π não está presente, escolher o quadrante correspondente a um determinado ângulo e/ou intervalo, reconhecer a existência de ângulos maiores que $\frac{\pi}{2}$ e ângulos negativos, reconhecer como sendo único o ponto $P = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ para α fixado e identificar coordenadas de pontos no círculo trigonométrico que não estão no 1^o quadrante.
- Nas funções trigonométricas: reconhecer os gráficos das funções trigonométricas e usá-los para identificar características e propriedades, como intervalo de crescimento e decrescimento, domínio e imagem, amplitude e periodicidade.

4.2 Análise por grupo de itens após aplicação do questionário nas escolas de ensino médio

No intuito de buscar maior esclarecimento das razões que levaram a determinadas escolhas de distratores pelos alunos, foram feitos agrupamentos de itens levando em consideração o tema e/ou as habilidaes e obstáculos de cada item (ver tabela 3.7), além dos parâmetros expressivos apresentados nas teorias usadas (TCT e TRI) (tabelas 4.2 a 4.16). Esses grupos são apresentados a seguir.

Ao analisar os itens, dado o agrupamento apresentado na tabela 4.17, notou-se, na maioria dos casos, a influência de uma marcação prévia em outro item de mesmo tema, habilidade e/ou obstáculo. Assim, algumas hipóteses foram endossadas, contribuindo significativamente para as conclusões da pesquisa. Segue a análise por grupo.

Grupo 1 55% dos alunos que acertam o item 1 marcam as alternativas A ou B no item 2 e apenas 29% marcam a alternativa C, que é o gabarito. Pode-se inferir que o aluno tem um bom desempenho quando é necessário analisar uma das razões trigonométricas, mas tem desempenho inferior quando é necessário analisar duas razões trigonométricas

Grupo	Itens
1	1 e 2
2	2 e 10
3	4 e 5
4	4, 6, 7 e 12
5	10 e 14

Tabela 4.17: Agrupamento de itens.

simultaneamente, ou quando o ângulo ao qual se refere a análise não está na posição comumente apresentada (na base do triângulo).

Grupo 2 Ao analisar o desempenho no item 10, dado acerto prévio no item 2, identificou-se que 25% dos alunos marcam a alternativa B, 34,5% marcam a alternativa D e apenas 12% acertam o item marcando a alternativa E. Baseado nesse resultado pode-se inferir que o aluno que marca a alternativa B no item 10 faz a análise correta do item mas se esquece, ou não reconhece a necessidade, do sinal negativo na abscissa do ponto A. Para o aluno que marca a alternativa D pode-se inferir que ele apresenta um erro conceitual na identificação dos pontos sobre o círculo trigonométrico quando se trata do 3^o quadrante pois a identificação das coordenadas é feita com base no ângulo γ quando deveria ter sido feita com base no ângulo $\theta = \frac{3\pi}{2} - \gamma$. Dessa forma conclui-se que o aluno consegue identificar corretamente as razões trigonométricas no triângulo retângulo e as coordenadas de um ponto no 2^o quadrante e por conseguinte, no 1^o quadrante, mas não consegue identificar corretamente as coordenadas de um ponto no 3^o quadrante. Da quantidade pequena de marcações no gabarito infere-se que há uma lacuna no aprendizado de trigonometria quando os ângulos analisados são maiores que $\frac{\pi}{2}$.

Grupo 3 48% dos alunos que acertam o item 4 marcam a alternativa E no item 5. Como dito anteriormente, as possibilidades para essa escolha são:

- o aluno não fixa o ângulo, respondendo, então, a quantidade de pontos possíveis sobre o círculo trigonométrico.
- interpreteção equivocada da pergunta como sendo, por exemplo: Dado um ponto P, $P = (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha))$, quantos ângulos α distintos determinam a posição de P?

Baseado nisso é possível inferir que o aluno remete prioritariamente ao círculo trigonométrico para a sua análise. Os gráficos das funções *seno* e *cosseno* parecem não ser representativos o suficiente para que a análise seja feita com base neles. Assim, é levantada a hipótese de que o aluno reconhece a periodicidade da função e reconhece que a reta real se *enrola* sobre o círculo trigonométrico para um caso concreto, mas quando questionado sobre o caso de α não ser um valor previamente definido há um erro de interpretação e análise.

Grupo 4

- (item 4 e item 6) Dos alunos que acertam o item 4, apenas 15% acertam o item 6, ficando a maior parte das marcações no item 6 nas alternativas A (35%) e B (24%). Dos alunos que marcam a alternativa B no item 4, cerca de 20% acertam o item 6 e as marcações em A e B nesse item ficam em 30% e 19%, respectivamente. Para os alunos que marcam a alternativa C no item 4 a porcentagem dos que acertam o item 6 é ainda menor (16%) e as alternativas A e B, nesse item, recebem 43% e 17% das marcações, respectivamente. A partir desses dados infere-se que apesar de o aluno corretamente *enrolar* a reta real no círculo trigonométrico e fazer a correta identificação dos quadrantes nesse, ele não se atenta ao fato de que, no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, que é equivalente a diversos intervalos dentro de $[0, 31\pi]$, a função cosseno é crescente no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, que corresponde ao 4^o quadrante, e descrecente no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, que corresponde ao 1^o quadrante. Logo, cosseno e $\frac{1}{cosseno}$ não são funções crescentes no intervalo de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ como questiona o item 6. Com base nisso, pode-se inferir, que o aluno consegue identificar corretamente o intervalo e *enrolar* a reta real no círculo trigonométrico mas, quando solicitado que analise o comportamento das funções em um intervalo, ele não obtém bom desempenho.

- (item 4 e item 7) Dos alunos que marcam o gabarito no item 4, apenas 10% marcam corretamente o item 7 e as alternativas com marcações mais expressivas ficam entre A (19%), B (22,5%) e C (32%) nesse item. Para o grupo de alunos que marcam a alternativa B no item 4, as principais marcações no item 7 se dividem entre as alternativas B (24%) e C (35%), apresentando o gabarito em apenas 11% das marcações. Do grupo que marca a alternativa C no item 4, a distribuição fica mais equilibrada: alternativa A (20%), alternativa B (22%), alternativa C (26,5%), alternativa D (19%) e alternativa E (13%). Assim, independentemente da marcação no item 4, a escolha para o item 7 se concentra entre as alternativas B e C e a marcação do gabarito é sempre inferior a 15%. Com base nisso, pode-se inferir, que o aluno consegue identificar corretamente o intervalo e *enrolar* a reta real no círculo trigonométrico mas, quando solicitado que analise o comportamento das funções em um intervalo, ele não obtém bom desempenho, assim como expresso na análise anterior.

- (item 4 e item 12) O grupo de alunos que acerta o item 4 marca, no item 12, prioritariamente, as alternativas B (19%), C (19%) e D (28%). No grupo de alunos que marca a alternativa B no item 4, a distribuição de marcações no item 12 também se concentra em B (24%), C (15%) e D (19%), com a inversão da ordem de maior marcação de D para B. Para o grupo de alunos que marca C no item 4, a alternativa B (28%) no item 12 apresenta quantidade de marcações mais expressiva, seguida das alternativas C (24%) e D (19%). Isso é um indício de que as marcações no item 4 não influenciam significativamente as marcações no item 12.

- (item 6 e item 4) Para todas as alternativas marcadas no item 6, a alternativa A no item 4 é a que obtem maior índice de marcação (entre 27% e 40%). As alternativas B e C, no item 4, permanecem com porcentagem de marcação entre 15% e 25% para todos os grupos de alunos que marcaram cada uma das demais alternativas no item 6. Com base nesses dados, pode-se inferir, que o aluno que acerta o item 6 tem probabilidade levemente superior de acertar o item 4, uma vez que esse item aborda habilidades necessárias à plena análise do item 6.

- (item 6 e item 7) Para cada uma das alternativas marcadas no item 6, a alternativa C no item 7 foi a que obteve maior índice de marcação. Contudo, para o aluno que acerta o item 6, a segunda alternativa mais atrativa no item 7 é a alternativa D, em contraposição aos alunos que erram o item 6, para os quais a segunda alternativa mais atrativa no item 7 é a alternativa B. Em ambos os casos o índice de marcações corretas no item 7 (alternativa E) não ultrapassa 15%.

Com base nesses dados pode-se inferir que os alunos apresentam dificuldade na compreensão de comportamentos e propriedades das funções trigonométricas em um dado intervalo.

- (item 6 e item 12) Para todas as alternativas no item 6, as marcações no item 12 se concentram nas alternativas B, C e D. Contudo, os índices de marcação de todas as alternativas estão entre 10% e 27%. Com isso, vemos que as marcações estão bem equilibradas entre as alternativas apesar de a alternativa B obter maior destaque. Pode-se inferir que a marcação no item 6 não influencia significativamente na marcação do item 12.

- (item 12 e item 4) O aluno que responde corretamente ao item 12 marca, no item 4, prioritariamente, as alternativas A (26,2%), B (23%) e C (26%). De forma geral, independentemente da marcação no item 12, as respostas no item 4 se concentram nas alternativas A, B e C, à exceção do grupo de alunos que marcam a alternativa D no item 12: desses, 39% marcam a alternativa A no item 4. Conclui-se que o aluno que acerta o item 4 é atraído para a alternativa D, talvez pelo formato mais expressivo do gráfico. Exceto isso, não há influência significativa da marcação no item 12 para a marcação do item 4.

- (item 12 e item 6) O grupo de alunos que marcam a alternativa A no item 12 se divide entre as alternativas A, B, C e D no item 6. À exceção desses, os alunos marcam prioritariamente a alternativa A no item 6. Apenas 16% dos alunos que acertam o item 12 marcam corretamente o item 6. Dessa forma, pode-se inferir que o item 12 não influencia significativamente na marcação do item 6.

- (item 12 e item 7) Independentemente da marcação no item 12, a porcentagem de marcações no gabarito do item 7 não ultrapassa 15%. Os alunos marcam prioritariamente a alternativa C no item 7 que é a alternativa com maior índice de marcação de uma forma geral.

Grupo 5 74% dos alunos que acertam o item 14 marcam as alternativas B, C e D no item 10. Pode-se inferir que o aluno consegue identificar pontos sobre o círculo trigonométrico quando necessário analisar o ângulo agudo, mas quando se faz necessária a análise para pontos que estão no 3^o quadrante não há sucesso. O aluno provavelmente não enxerga ou não consegue fazer a análise correta para o ângulo obtuso. Outro possível erro está na construção correta do ponto no 1^o quadrante de coordenadas iguais, em módulo, referente ao ponto nos demais quadrantes que se quer identificar.

A análise dos grupos listados na tabela 4.17 indica que os alunos não têm bom desempenho quando é necessário relacionar duas razões trigonométricas nem quando é necessário trabalhar com o ângulo que não está na base horizontal do triângulo. Além disso, boa parte dos alunos não reconhece a distinção entre o semieixo positivo e o semieixo negativo do eixo x, fato evidenciado quando parte significativa dos alunos marcam alternativas que contêm a resposta com sinais trocados. Percebe-se uma lacuna no julgamento correto de itens que apresentam ângulos maiores que $\frac{\pi}{2}$ e problemas na identificação de pontos no 3^o quadrante. Pode-se inferir que a maioria dos alunos não faz conexões com o gráfico das funções trigonométricas para responder as questões, principalmente aquelas que questionam comportamentos e/ou propriedades das funções.

4.3 Novos questionamentos

As análises apresentadas nas seções 4.1 e 4.2 levantaram alguns questionamentos que estão listados a seguir.

Item 2 A dificuldade apresentada no item é decorrente da necessidade de se trabalhar com duas razões trigonométricas simultaneamente ou decorre do fato de um dos ângulos em questão não estar na base horizontal do triângulo?

Item 3 Há clareza na definição de radiano?

Item 5 No item há compreensão do enunciado? Se sim, o aluno pensa no círculo trigonométrico para responder? Como ele vê a resposta? Fixa-se o ângulo? Para o aluno, α é só ângulo ou pode ser número real qualquer? Remete-se ao gráfico das funções trigonométricas para a análise?

Item 6 Qual imagem gráfica o aluno tem das funções seno e cosseno?

Item 7 No item, o aluno remete-se apenas ao círculo trigonométrico? Remete-se ao gráfico das funções trigonométricas? O fato de ter duas funções relacionadas atrapalha? Identificam corretamente o que são raízes? Identificam corretamente que quando um produto é igual a zero ao menos um dos fatores precisa ser igual a zero?

Item 10 As coordenadas dos pontos no 2^o quadrante são interpretadas como equivalentes às coordenadas dos pontos no 1^o quadrante?

Item 11 Há referência ao teorema de Pitágoras?

Item 12 Quais são as características mais marcantes das funções seno e cosseno? Como essas funções são visualizadas? Tem-se ideia clara de que essas funções são periódicas? E limitadas? Como é visto o domínio dessas funções? Para o aluno, como ocorrem os deslocamentos horizontais e verticais do gráfico?

Item 13 Quais são as características mais marcantes das funções seno e cosseno?

Item 14 As coordenadas dos pontos no 2^o quadrante são vistas como equivalentes às coordenadas dos pontos no 1^o quadrante?

Item 15 O aluno limita o círculo trigonométrico ao intervalo $[0, 2\pi]$? O alto índice de marcações na alternativa D ocorreu por memória visual ao $2k\pi$?

Fez-se necessária a realização de entrevistas com alguns alunos no intuito de tentar responder a esses questionamentos.

A análise de cada entrevista é apresentada na seção a seguir.

4.4 Análise das entrevistas

A seguir são apresentadas as perguntas norteadoras das entrevistas e uma análise das respostas por aluno. Cabe ressaltar que a pergunta 2 aparece duas vezes no questionário, identificada como 2 e 2*. Na primeira vez sua aparição está sob o contexto da geometria analítica, no intuito de determinar o quadrado da distância do ponto P do círculo trigonométrico à origem. Já na segunda vez ela aparece como relação entre as funções seno e cosseno e, apesar de ter a mesma origem, seu papel é puramente algébrico neste segundo momento.

A transcrição completa das entrevistas está disponível no apêndice A.5.

4.4.1 Perguntas norteadoras da entrevista

1 A Analisando este triângulo [figura 4.1] você consegue determinar o:

- $\operatorname{sen}\alpha$?
- $\operatorname{sen}\beta$?
- $\cos\alpha$?
- $\cos\beta$?

1 B Analisando este círculo [figura 4.2] de raio 1 e o triângulo AOB, você consegue indicar os triângulos congruentes (de mesma medida) à AOB em cada quadrante? E marcar o ângulo correspondente a α em cada um deles?

2 Por que a relação fundamental $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ [figura 4.3] é válida? Por que é válida para o triângulo retângulo? Por que é válida para o círculo trigonométrico?

3 O que é radiano? Consegue definir literalmente? E graficamente?

4 Você consegue descrever a função sen ou cos? Consegue descrever suas propriedades, comportamentos ou características? Consegue descrever graficamente?

2* Por que a relação fundamental $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ é válida para o triângulo retângulo? Por que é válida para o círculo trigonométrico?

5 O que você entende deste enunciado [figura 4.4]? Você consegue descrever o que se pede? E fazer um desenho de como você entende e responde a pergunta?

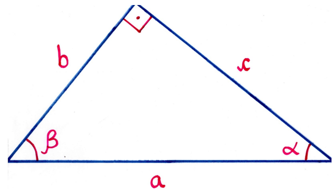


Figura 4.1: Triângulo retângulo.

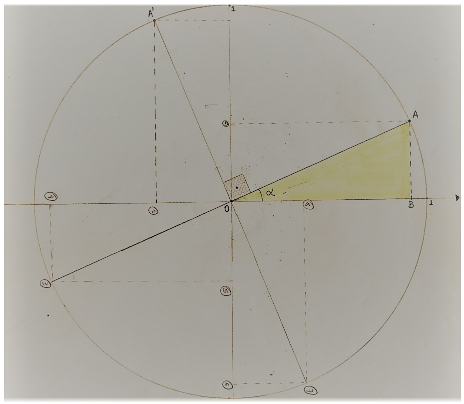


Figura 4.2: Círculo trigonométrico.

$$\mathrm{SEN}^2(x) + \mathrm{COS}^2(x) = 1$$

Figura 4.3: Relação fundamental da trigonometria.

Seja um número real $\alpha < 0$. Quantos pontos $P = (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha))$ existem?

Figura 4.4: Enunciado item 5.

Todas as figuras foram apresentadas em folha A4.

4.4.2 Análise da entrevista 1

Pergunta 1A O aluno indica a hipotenusa como sendo o lado c do triângulo. Mudar a posição não o auxilia. Nas notas há a indicação dos lados b e a como iguais a seno.

Pergunta 1B O aluno identifica que existem 7 triângulos congruentes ao triângulo AOB destacado e indica corretamente onde está o ângulo de medida α em todos eles.

Pergunta 2 O aluno não identifica a associação da relação fundamental ao triângulo retângulo. Quando questionado sobre a associação da relação fundamental ao círculo trigonométrico remete seno e cosseno aos valores da tabela de ângulos notáveis, mas não consegue definir com precisão o que seja o seno e o cosseno. Não indica a relação fundamental como consequência do teorema de Pitágoras.

Pergunta 3 O aluno indica a existência de radiano e *radieno.* Define radiano como a medida do raio e quando questionado sobre a imagem gráfica do radiano desenha uma circunferência e marca o raio, nomeando-o dessa forma.

Pergunta 4 O aluno indica a tabela dos ângulos notáveis quando questionado sobre as funções seno e cosseno. Indica, nas notas, o ângulo de 30^o.

Pergunta 2* O aluno indica que os valores da tabela se encaixam na fórmula.

Pergunta 5 O aluno lê o trecho inicial do item: *"Quantos pontos $P = (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha))$"* e indica que será necessário fazer uma 'continha', mas não consegue definir que conta seria. Segundo ele, o resultado seria um desenho. O aluno não entende o que são os pontos $P = (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha))$.

4.4.3 Análise da entrevista 2

Pergunta 1A O aluno indica erroneamente o cateto oposto como sendo o lado do triângulo oposto ao ângulo reto. Indica o ângulo como cateto e hipotenusa. Mudar a posição não influencia na análise.

Pergunta 1B O aluno indica os triângulos gerados a partir de rotações de $\frac{\pi}{2}$ do triângulo AOB no sentido anti-horário. Indica corretamente onde o ângulo α está nesses triângulos.

Pergunta 2 O aluno indica triângulos quando questionado sobre o que vinha à mente ao olhar para a fórmula, mas não explicita o porquê.

Pergunta 3 O aluno desenha uma circunferência e indica, no primeiro momento, que radiano é a volta que o círculo dá. Depois, indica que é o raio. Por fim, indica que é o arco ou a 'voltinha'.

Pergunta 4 O aluno não consegue descrever a função seno nem suas características e comportamentos. Nas notas, desenha um plano cartesiano e marca dois pontos. Em seguida, descreve um segmento de reta cujos extremos são esses dois pontos.

Pergunta 5 O aluno associa o enunciado aos graficos. Indica que P é um ponto, faz um desenho do 1^o quadrante e marca os pontos $(1;2)$, $(2;3)$ e $(3;2,5)$. Logo em seguida, liga os pontos $(1;2)$ e $(3;2,5)$.

Pergunta 2* O aluno indica que só consegue pensar em triângulos.

4.4.4 Análise da entrevista 3

Pergunta 1A O aluno indica $\text{sen}(\alpha)$ como sendo o lado b do triângulo que é o cateto oposto a α. Identifica corretamente a hipotenusa após a movimentação do triângulo.

Pergunta 1B O aluno indica o triângulo $4O3$ como sendo congruente "com certeza"e os demais triângulos (rotação de $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$) posteriormente. Indica corretamente onde estão os ângulos congruentes a α.

Pergunta 2 O aluno indica que há uma complementariedade entre seno e cosseno, mas não consegue explicar como isso funciona. Revela um momento de *"Eureka!"* mas não dá prosseguimento.

Pergunta 3 O aluno desenha uma circunferência, determina o raio e indica um setor circular. Questiona-se sobre o radiano ser ou não o ângulo.

Pergunta 4 O aluno desenha diversos ângulos retos. Indica existir um valor que multiplicado pelo seno, resulta no valor do ângulo. Quando pedido para fazer um gráfico do seno o aluno faz um triângulo isósceles e marca os seus ângulos internos.

Pergunta 2* O aluno desenha um triângulo e marca nele três cevianas, uma de cada vértice. Dos pontos de encontro das cevianas ele traça segmentos de reta que intersectam o lado do triângulo que está mais próximo.

Pergunta 5 O aluno indica que não existem pontos pelo fato de não existir "abertura", uma vez que α é menor que zero. Segundo ele, por conta disso, o cosseno não existiria.

4.4.5 Análise da entrevista 4

Pergunta 1A O aluno indica seno de α como o cateto oposto b.

Pergunta 1B O aluno indica $3O5$ como ângulo corresponde a α, além de $AO2$ e $7O8$. Apesar de indicar os triângulos correspondentes à rotação de $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, o aluno muda o padrão e indica o triângulo $3O5$ como congruente a AOB. Não está errado, mas apenas nesse caso o aluno faz uma translação do triângulo ao invés de uma rotação como aconteceu com os demais.

Pergunta 2 O aluno não consegue argumentar sobre a validade da relação trigonométrica, tampouco associá-la ao triângulo retângulo ou ao círculo trigonométrico.

Pergunta 3 O aluno não tem nenhuma ideia sobre o que seja radiano.

Pergunta 4 O aluno indica que a função seno é um conjunto de números que chegam a um resultado comum.

Pergunta 2* O aluno não consegue argumentar sobre a validade da relação trigonométrica.

Pergunta 5 O aluno indica como um ponto a resposta da questão 5 pelo fato do α ser menor que zero. Nas notas ele indica que esse ponto estaria sobre um dos eixos. Caso α fosse maior que zero existiriam dois pontos, e esses pontos estariam no quadrante, no que ele definiu como meio do quadrante.

4.4.6 Análise da entrevista 5

Pergunta 1A O aluno indica nas notas corretamente que o $\operatorname{sen}\alpha$ é igual ao cateto oposto sobre a hipotenusa mas confunde os catetos, indicando $\cos\alpha$ como valor de $\operatorname{sen}\alpha$. Apesar de lhe ser dada a opção de colocar o triângulo na posição que preferisse ele mantém o triângulo com os ângulos agudos na base horizontal.

Pergunta 1B O aluno indica que o triângulo $4O3$ é congruente ao triângulo AOB (triângulo gerado após rotação de π radianos) mas que os demais triângulos marcados, apesar de serem semelhantes, são reduzidos em tamanho. Indica que os ângulos estão no centro da circunferência. Indica corretamente a posição de α em $4O3$.

Pergunta 2 O aluno confunde o triângulo retângulo com o triângulo isósceles. Consegue indicar que a relação fundamental é válida no triângulo e na circunferência mas não consegue explicar o porquê. Na circunferência só consegue fazer a aplicação da relação fundamental quando α está fixado e em graus.

Pergunta 3 O aluno confunde radiano com raiz quadrada, usando o termo *radiar*. Quando questionado sobre radiano associado à circunferência o aluno utiliza o mesmo conceito de raiz quadrada.

Pergunta 4 O aluno associa função seno e cosseno ao triângulo retângulo indicando as razões trigonométricas. Quando questionado sobre o gráfico da função, o aluno constrói arco de circunferência, indicando raio como h, e os lados como *co* e *ca* no 1^o quadrante do plano cartesiano xOy.

Pergunta 2* Indica o triângulo AOB assinalando que o seno e o cosseno estão nos lados do triângulo. Quando questionado sobre o motivo de a relação fundamental ter um de seus membros igualado a 1 o aluno responde que só é dado um resultado, indicando falta de compreensão no significado e consequências dessa relação.

Pergunta 5 O aluno indica que serão 4 pontos e faz desenho evidenciando triângulos rotacionados em $\frac{\pi}{2}$ rad, no sentido anti-horário, a partir do semieixo positivo das abscissas. Nota-se que o aluno não entende claramente o enunciado.

4.4.7 Análise da entrevista 6

Pergunta 1A O aluno identifica corretamente o seno e o cosseno de α e nas notas indica que $\operatorname{sen}\alpha$ é igual ao cateto oposto sobre a hipotenusa.

Pergunta 1B O aluno indica corretamente os 3 triângulos rotacionados em $\frac{\pi}{2}$ rad, no sentido anti-horário, a partir do semieixo positivo das abscissas, e a posição do ângulo α em cada um deles.

Pergunta 2 O aluno não consegue associar o triângulo retângulo à relação fundamental da trigonometria, tampouco o círculo trigonométrico. Apesar de ter identificado corretamente no triângulo retângulo o seno e o cosseno, o aluno não consegue associar essas medidas à fórmula. Com a frase: *"é a mesma coisa"* o aluno indica que o círculo trigonométrico e o triângulo retângulo não apresentam diferenças significativas.

Pergunta 3 O aluno não consegue descrever radiano, mas faz associação dele com o círculo. Indica a existência de graus e radianos. Apesar de indicar que 90^o é igual a $\frac{\pi}{2}$ nas notas, o aluno não menciona $\frac{\pi}{2}$ rad em momento algum. Evidencia uma relação mas não explicita como seria essa relação. No final, dá a entender que radiano seria o arco.

Pergunta 4 O aluno escreve nas notas $\dfrac{x}{\operatorname{sen}(\alpha)}$. Menciona Pitágoras, talvez como uma referência ao teorema de Pitágoras, mas não consegue fazer nenhuma associação disso com o seno. Não consegue indicar característica, comportamento, propriedade ou gráfico dessa função.

Pergunta 2* O aluno indica não se lembrar porque a relação fundamental é válida.

Pergunta 5 O aluno indica que não existiriam pontos por conta do α ser negativo, indicando que não existiria cosseno de número negativo e, por conta disso, não haveria ponto. Para α maior que zero, quando α está definido, o aluno indica a existência de um ponto, mas quando α não está definido o aluno não consegue indicar uma resposta.

Em geral os alunos:

- identificam triângulos retângulos semelhantes e seus ângulos internos;
- não fazem referência ao teorema de Pitágoras como causa ou consequência da relação fundamental, não sabendo assim explicar sua validade;
- não compreendem ou definem radiano;
- não enunciam ou apresentam propriedades e/ou características das funções trigonométricas como periodicidade, amplitude, domínio, formato do gráfico, etc;
- não definem bem ângulos negativos; e
- há dúvida quanto ao que seja um ponto P, $P = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.

Além disso, para metade dos alunos entrevistados há certa tranquilidade na identificação da hipotenusa e dos catetos no triângulo retângulo, bem como de seno e cosseno, independentemente da posição do triângulo retângulo (com a hipotenusa na base ou não). A mudança na posição do triângulo para uma posição mais familiar (ângulo reto na base inferior) facilita a identificação dos catetos para apenas um desses alunos.

Capítulo 5

Discussão e Conclusão

A pesquisa apresentada nos capítulos anteriores se propôs a investigar como os alunos vêem a trigonometria e, caso existam, quais são os obstáculos enfrentados por eles no seu aprendizado. Para tal, essa investigação visou alcançar os seguintes objetivos especificos: identificar quais são os principais obstáculos no aprendizado de trigonometria; identificar os principais erros apresentados pelos alunos nesse tema; trazer mais clareza sobre o aprendizado de trigonometria no Distrito Federal, com dados significativos sobre as dificuldades enfrentadas por professores e alunos no ensino e na aprendizagem desse tema.

Os resultados dessa pesquisa, obtidos pelo cumprimento desses objetivos específicos, revelaram que os erros cometidos pelos seus participantes estão em todos os ramos da trigonometria, desde definições e conceitos até manipulações, inferências e generalizações. Os problemas no aprendizado são observados desde a base, desde os fundamentos da trigonometria.

Já nos primeiros itens do questionário os alunos apresentam dificuldade em interpretar corretamente as razões trigonométricas, confundindo as razões seno e cosseno entre si, e em visualizar e/ou trabalhar com ângulos que não estão na base do triângulo. Para essa última dificuldade, o mais provável é que o aluno só tenha trabalhado dessa forma, com ângulos na base horizontal do triângulo, e por isso a dificuldade com algo *novo*, que é o trabalhar com o ângulo não adjacente à base horizontal. Além disso, a definição de radiano parece não existir para esses alunos, fato evidenciado pelo item 3 e pelas entrevistas, nas quais nenhum aluno conseguiu apresentar uma definição verbal ou gráfica do mesmo. Eles não demonstram ter domínio ou conhecimento do conceito de radiano, não estão bem familiarizados com a nomenclatura e uma das poucas associações que conseguem fazer é com o número π, fato também evidenciado por Orhun (2010, p.180). Essas observações parecem indicar que as imagens conceituais, relativas às razões trigonométricas e ao radiano, são superficiais e inadequadas para um aluno inserido neste nível de estudos.

Uma das justificativas para essas imagens conceituais inadequadas pode ser atribuída ao descaso com a geometria por parte do currículo escolar, dos livros didáticos e também dos professores de matemática que, por diversas razões, entre elas a deficiência na sua formação, dão mais importância à álgebra (Kluppel, 2012, p.27). Costa & Santos (2017, p.64) mostram que por quase trinta anos a geometria esteve fora do currículo escolar e, consequentemente, fora dos livros didáticos e da formação dos professores, fato que começou a mudar no início da década de 90 com o surgimento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e com as pesquisas na área de educação matemática.

Essa mudança ainda é lenta e colhe-se hoje a negligência feita no passado. Sem essa base geométrica, que engloba compreensão da trigonometria no triângulo retângulo e a definição de radiano, não há alicerce para que uma trigonometria mais avançada seja construída. Grebot & Moreira (2017, p.6) mostram, em sua pesquisa com alunos do 9^o ano do ensino fundamental II do Distrito Federal, que menos de 10% dos alunos participantes da pesquisa estão no nível 2 do modelo dos Van Hiele (MARCHAND, 2009), sendo esse o nível mais alto registrado entre os alunos da pesquisa. De acordo com o currículo de geometria da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEE-DF), o esperado era que pelo menos 60% dos alunos estivessem no nível 2 e 10% no nível 3. Apoiado na teoria dos Van Hiele (MARCHAND, 2009), que diz que um aluno não pode pular níveis de compreensão e/ou abstração geométrica, e nos dados de Grebot & Moreira (2017, p.6), tem-se uma justificativa razoável para as sérias dificuldades dos alunos do 2^o ano do ensino médio em desenvolver as habilidades pertinentes à trigonometria. Se esses alunos estão, de fato, em níveis de compreensão e/ou abstração geométrica aquém do necessário para o tópico de trigonometria, eles não poderiam adquirir as competências estipuladas para este nível de estudos. Pode-se concluir que, a menos que haja um resgate do ensino, e aqui entende-se por resgate o envolvimento comprometido de alunos e professores no processo de aprendizagem, no qual cada um desses atores cumpre plenamente suas obrigações, o desenvolvimento da trigonometria não será eficaz.

Os resultados dessa pesquisa comprovam que o desempenho dos alunos varia de ruim a inexistente à medida que as habilidades e habilidades específicas dos itens tornam-se mais complexas. Uma descoberta significativa dessa pesquisa foi o fato dos gráficos das funções trigonométricas não serem relevantes para os alunos na análise de itens que questionavam propriedades dessas funções. Além disso, as entrevistas indicam que, para esses alunos, as imagens gráficas das funções trigonométricas parecem não existir, pois nenhum deles conseguiu desenhar sequer um dos gráficos, nem mesmo um esboço com seu formato característico. Evidencia-se, assim, que a imagem conceitual das funções trigonométricas, quando existe, é inadequada. Demir & Heck (2013, p.2) constataram isso em seu estudo, indicando que para seus alunos esses gráficos eram meros diagramas.

Outras descobertas, já apresentadas na literatura disponível, foram endossadas com a pesquisa aqui apresentada, como: a dissociação da relação fundamental da trigonometria ao teorema de Pitágoras (ver tabela 4.12), também notado por Gur (2009, p.72); a identificação incorreta de quadrantes de determinados ângulos (ver tabela 4.5), indicado por Chigonga (2016, p.174); a limitação do domínio das funções trigonométricas ao intervalo $[0^o, 360^o]$ (ver tabela 4.16), também constatado por Orhun (2010, p.182).

Dois aspectos não relatados nas referências consultadas foram observados na pesquisa: um em relação aos ângulos e outro sobre a função de Euler. Há indícios de que os alunos não reconhecem a existência de ângulos negativos (ver tabela 4.6 e entrevistas) e apresentam grande dificuldade na visualização de ângulos maiores que $\frac{\pi}{2}$. Em especial, demonstram extrema dificuldade em trabalhar com ângulos maiores que π, constatação feita quando necessário identificar pontos no círculo trigonométrico e raízes das funções trigonométricas fora do intervalo $[0, 2\pi]$ (ver tabelas 4.8 e 4.11). Outro ponto marcante é o fato da função de Euler, ponto de partida para a compreensão das funções trigonométricas e conexão do círculo trigonométrico com essas funções, não ser mencionada pelos alunos, não fazer parte das suas análises e tampouco dos seus vocabulários. Cabe ressaltar que, apesar da pesquisa ter sido feita com uma quantidade expressiva de alunos, totalizando 781 participantes das diferentes regiões do Distrito Federal, ainda assim esses resultados não podem ser generalizados para todo o país.

Todas as dificuldades e lacunas mencionadas neste trabalho indicam que, mesmo os alunos que apresentam entendimento sobre algum dos muitos ramos da trigonometria (prioritariamente as razões trigonométricas) (ver tabela 2.1), o têm de forma rasa e desconexa com os demais ramos. De fato, essa pesquisa ainda permitiu observar esse entendimento raso, descontínuo e desconexo em vários alunos universitários da disciplina de Cálculo 1.

Os dados da primeira aplicação do questionário dão indícios de que os alunos de Cálculo

1 da Universidade de Brasília (UnB) que participaram da pesquisa também apresentam dificuldades e erros conceituais em trigonometria. De 0 a 15, a média dos acertos desses alunos nos itens do questionário foi abaixo de 4. Além disso, para esses alunos, a porcentagem de marcações corretas nos itens que tratam de definição de radiano, interpretação e reconhecimento de características e propriedades das funções trigonométricas, e identificação de coordenadas de pontos no 3^o quadrante é, prioritariamente, menor que 50%. Fazem-se necessárias mais pesquisas no intuito de identificar as razões dessas marcações equivocadas no questionário, evidenciando, por conseguinte, quais são as principais lacunas apresentadas sobre trigonometria.

Outro fato curioso observado nessa pesquisa é que as médias dos dados obtidos com o questionário dos alunos de Cálculo 1 da Universidade de Brasília que fizeram algum tipo de cursinho preparatório para o exame de acesso à universidade foi estatísticamente diferente da média dos alunos que não fizeram cursinho. Os parâmetros da TCT indicam que a porcentagem de alunos que acertam os itens 6, 7, 12, 13 e 15, que tratam do comportamento e/ou propriedades das funções trigonométricas, é maior para os grupos dos alunos que fizeram cursinho. Será que as imagens conceituais dos alunos desse grupo são diferentes das imagens que os outros alunos têm dos conceitos envolvidos? Esses alunos conseguem descrever verbalmente e/ou graficamente o comportamento das funções trigonométricas?

Baseado nas análises feitas sobre os dados colhidos dos questionários aplicados aos alunos de ensino médio, questiona-se: por qual razão a definição de radiano e as propriedades e caracterísiticas das funções trigonométricas mostram-se tão distantes da compreensão dos alunos? Qual tem sido a base usada pelos professores para introduzir esses conceitos? Como é feita a conexão das funções trigonométricas com o círculo trigonométrico? Faz-se uso da função de Euler para essa conexão? Há, por parte dos professores de matemática conhecimento e formação adequados na área de trigonometria? Cada uma dessas perguntas merece ser investigada a fundo.

Conclui-se que a trigonometria é um tópico que carece de atenção por parte dos professores de matemática, tanto do ensino básico como do ensino superior, dos pesquisadores em educação matemática, dos autores dos livros didáticos, dos idealizadores do currículo escolar e, consequentemente, dos alunos. Essa atenção deve ser dada primeiramente pela importância histórica da trigonometria no desenvolvimento das ciências exatas. Do ponto de vista didático-pedagógico, a sua importância se dá pela sua capacidade de relacionar raciocínio algébrico, geométrico e gráfico proporcionando também o desenvolvimento da capacidade de abstração, necessária para diversos ramos de atuação profissional. Essa mudança no valor dado à trigonometria, e consequentemente à geometria, deveria proporcionar melhorias no ensino básico e, por conseguinte, no ensino superior.

Bibliografia

[1] ABDULKADIR, Tuna. A conceptual analysis of the knowledge of prospective mathematics teachers about degree and radian. *World Journal of Education*, 3(4):1, 2013.

[2] ADAMEK, Tara; PENKALSKI, Kaitlyn; VALENTINE, Gina. The History Of Trigonometry. *History of*, 2005.

[3] ALMOULOUD, Saddo A. Fundamentos da didática da matemática. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

[4] BARROSO, Juliane M. & others. Conexões com a Matemática. Volume 2. São Paulo: Moderna, 2010, 2, 440.

[5] BLACKETT, Norman; TALL, David O. Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software. *Proceedings of the 15th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1991, 1, 144–151.

[6] BOYER, Carl B.. História da matemática,revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide - 2^a Ed. - São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

[7] BRASIL. Ministério da Educação. PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: Prova Brasil: Ensino Fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC/SEB, 2008.

[8] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmteros Curriculares Nacionais: ensino médio. Brasília, MEC/SEB, 1999.

[9] BROWN, Susan A. The Trigonometric connection: students' understanding of sine and cosine. 2006. *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2006, 1, 228.

[10] CARVALHO, João B. P. d. A história da trigonometria.*Apêndice B do livro: Trigonometria/Números Complexos, Carmo, Morgado e Wagner, Coleção do Professor de Matemática, Publicação SBM, Rio de Janeiro*, 2001.

[11] CHIGONGA, Benard. Learners' errors when solving trigonometric equations and suggested interventions from grade 12 mathematics teachers, *Unisa Press*, 2016.

[12] COSTA, André P.; SANTOS, Marilene R. d. Os níveis de pensamento geométrico de estudantes de licenciatura em matemática no estado de Pernambuco. *Educação Online*, 2017, 63-86.

[13] DANTE, Luiz R. . Matemática: Contexto e Aplicações. 2 ed - São Paulo: Ática, 2013, 2.

[14] DEMIR, Özcan. Students' Concept development and understanding of sine and cosine functions: A New Theoretical and Educational Approach. Dissertação de Mestrado, 2012.*Univesiteit van Amsterdam.*

[15] DEMIR, Özcan; HECK, André. A new learning trajectory for trigonometric functions. *Proceedings of the 11th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, 2013, 119-124.

[16] DISTRITO FEDERAL - DF, Secretaria de Estado de Educação do DF. *Currículo em movimento da Educação Básica:* Ensino fundamental anos Finais Em. http://www.cre.se.df.gov.br/ascom/documentos/subeb/cur_mov/4_ensino_fundamental_anos_finais.pdf, acesso em 03 de julho de 2017.

[17] DISTRITO FEDERAL - DF, Secretaria de Estado de Educação do DF. *Currículo em movimento da Educação Básica:* Ensino Médio Em. http://www.cre.se.df.gov.br/ascom/documentos/subeb/cur_mov/5_ensino_medio.pdf, acesso em 03 de julho de 2017.

[18] EVES, Howard W. An introduction to the history of mathematics. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1969.

[19] FI, Cos D. Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy. *University of Iowa*, 2003.

[20] GALVÃO, Maria E. E. L.; SOUZA, Vera H. G; MIASHIRO, Paulo M. A Transição das Razões para as Funções Trigonométricas. *Boletim de Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho*, 2016, 30.

[21] GREBOT, Guy; MOREIRA, Paulo V. Planejamento X realidade no ensino de geometria no DF. *VII Encontro Brasiliense de Educaçao Matemática*, 2017.

[22] GULLBERG, Jan. Mathematics: from the birth of numbers. New York: Norton & Company, 1996.

[23] GUR, Hulya. Trigonometry Learning. *New Horizon in Education, ERIC*, 2009, 57, 67–80.

[24] HART, Kathleen M. Children's Understanding of Mathematics, *John Murray London*, 1971, 11-16.

[25] INEP. Devolutivas Pedagógicas das Avaliações de Larga Escala. Em. http://devolutivas.inep.gov.br/login, acesso em 04 de Agosto de 2017.

[26] KLUPPEL, Gabriela T. Reflexões sobre o ensino da geometria em livros didáticos à luz da teoria das representações semióticas segundo Raymond Duval. Dissertação de Mestrado, 2012. *Universidade Estadual de Ponta Grossa.*

[27] LIMA, Elon Lages. Meu professor de matemática e outras histórias. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[28] MARCHAND, Patricia . Le développement du sens spatial au primaire. *Bulletin AMQ*, 2009, 49, 63-79.

[29] MAY, Valerie; COURTNEY, Scott. Developing Meaning in Trigonometry. *Illinois Mathematics Teacher*, 2015, 63, 25-33.

[30] MOORE, Kevin C. The Role of quantitative and Covariational Reasoning in Developing Precalculus Students' Images of Angle Measure and Central Concepts of Trigonometry. *Proceedings of the 13th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2010.

[31] MOREIRA, Marco A. Mapas conceituais e aprendizagem significativa. *Aprendizagem significativa, organizadores prévios, mapas conceituais, diagramas de unidades de ensino potencialmente significativas*, 1982, 41.

[32] MORETTIN, Pedro A.; BUSSAB, Wilton O. d. Estatística básica. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2015.

[33] MySQL Documentation. Em. https://www.mysql.com/doc, acesso em 29 de Novembro de 2017.

[34] ORHUN, Nevin. Students' mistakes and misconceptions on teaching of trigonometry. *Journal of Curriculum Studies*, 2004, 32, 797-820.

[35] ORHUN, Nevin. The gap between Real numbers and trigonometric relations. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 2010, 20, 175-184.

[36] PEGG, John, Students' understanding of geometry: theoretical perspectives. *Space: The First and Final Frontier, Mathematics Education Research Group of Australasia*, 1992, 18-36.

[37] PHPMYADMIN. Em. https://www.phpmyadmin.net/, acesso em 29 de Novembro de 2017.

[38] RABELO, Mauro. Avaliação Educacional: fundamentos, metodologia e aplicaçoes no contexto brasileiro. *Rio de Janeiro: SBM*, 2013, 29, 30-31.

[39] ROONEY, Anne. A história da matemática: Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. *São Paulo: M.Books do Brasil Editora LTDA*, 2012.

[40] ROQUE, Tatiana M.; CARVALHO, João B. P. d. Tópicos de história da matemática. *Rio de Janeiro: SBM*, 2012.

[41] SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, 1992, 25, 23-58.

[42] TALL, David. The psychology of advanced mathematical thinking. *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer, 1991.

[43] TALL, David O.; VINNER, Shlomo. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 1981, 12, 151-169.

[44] TOPÇU, Tahsin; KERTIL, Mahmut; AKKOÇ, Hatice; YILMAZ, Kamil, LISESI, Deniz; ÖNDER, Osman, OKULU, Deniz H. Pre-service and in-service mathematics teachers' concept images of radian. *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2006, 5, 281-288.

[45] WEBER, Keith. Students' Understanding of Trigonometric Functions. *Mathematics Education Research Journal, Springer*, 2005, 17, 91-112.

Apêndice A

APÊNDICE

A.1 Questionário - Cálculo 1

Teste de sala de Cálculo 1

1. Um cabo de aço de $50\,m$ está fixado do topo de uma torre ao solo, formando um ângulo de 60^o com a base da torre. Dado que $\text{sen}(60^o) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(60^o) = \dfrac{1}{2}$ e $\tan(60^o) = \sqrt{3}$, a altura da torre, em metros, é igual a

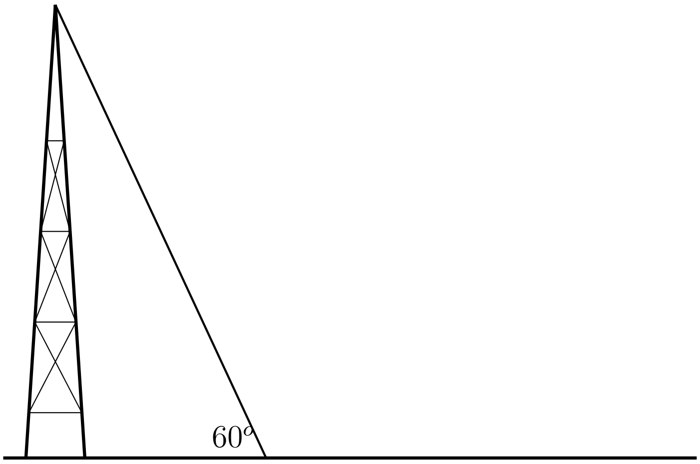
   ⓐ 25.

   ⓑ $25\sqrt{3}$.

   ⓒ 50.

   ⓓ $50\sqrt{3}$.

   ⓔ 100.



2. Para o triângulo $\triangle ABC$, retângulo em A, mostrado na figura abaixo, a expressão $\text{sen}(\alpha) + \cos(\beta)$ é igual a

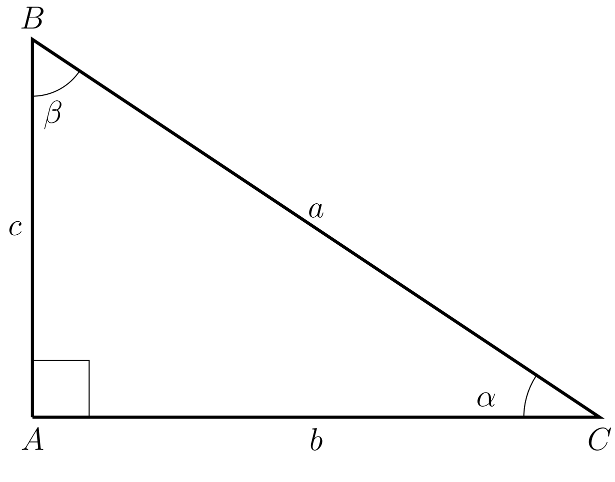
   ⓐ $\dfrac{2\,b}{a}$.

   ⓑ $\dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a}$.

   ⓒ $\dfrac{2\,c}{a}$.

   ⓓ $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c}$.

   ⓔ $\dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b}$.



3. Sobre a circunferência de centro O e raio 1, o comprimento do arco $\widehat{AOB}$, mostrado na figura, é igual a 2. A medida do ângulo $\angle AOB$, em radianos, é igual a

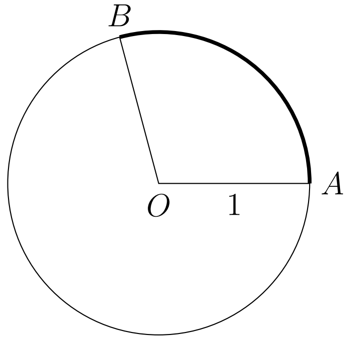
   ⓐ $\dfrac{1}{2}$.

   ⓑ $\dfrac{2}{\pi}$.

   ⓒ 1.

   ⓓ 2.

   ⓔ $\dfrac{\pi}{2}$.



4. Seja $P = (\cos(u), \operatorname{sen}(u))$ um ponto da circunferência de centro $O = (0, 0)$ e raio 1 no plano cartesiano xOy, em que u é um número real entre $30\,\pi$ e $31\,\pi$.
Então o ponto P está localizado no

ⓐ 1^o ou no 2^o quadrantes. ⓑ 2^o ou no 3^o quadrantes.

ⓒ 1^o ou no 3^o quadrantes. ⓓ 2^o ou no 4^o quadrantes.

ⓔ 1^o ou no 4^o quadrantes.

---

5. Seja y_0 um número real fixado. A quantidade n de pontos $P = (x, \operatorname{sen}(y_0))$ da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1, é tal que

ⓐ $1 \leq n \leq 2$. ⓑ $2 \leq n \leq 4$. ⓒ $n = 1$. ⓓ $n = 2$. ⓔ $n = 4$.

---

6. As funções trigonométricas que são crescentes no intervalo aberto de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ são

ⓐ seno e cosseno. ⓑ seno e $\frac{1}{\text{cosseno}}$. ⓒ seno e $\frac{\text{seno}}{\text{cosseno}}$.

ⓓ cosseno e $\frac{1}{\text{seno}}$. ⓔ cosseno e $\frac{\text{seno}}{\text{cosseno}}$.

---

7. No intervalo $[0, 2\,\pi]$, a quantidade de soluções da equação $\operatorname{sen}(x)\cos(x) = 0$ é igual a

ⓐ 2. ⓑ 3. ⓒ 4. ⓓ 5. ⓔ 6.

---

8. Os trapézios $ABEF$ e $ACDF$, ilustrados na figura abaixo, são formados pelas retas r, s e t paralelas entre si cortadas por duas transversais. Com base nas informações da figura, o comprimento x do segmento BE é igual a

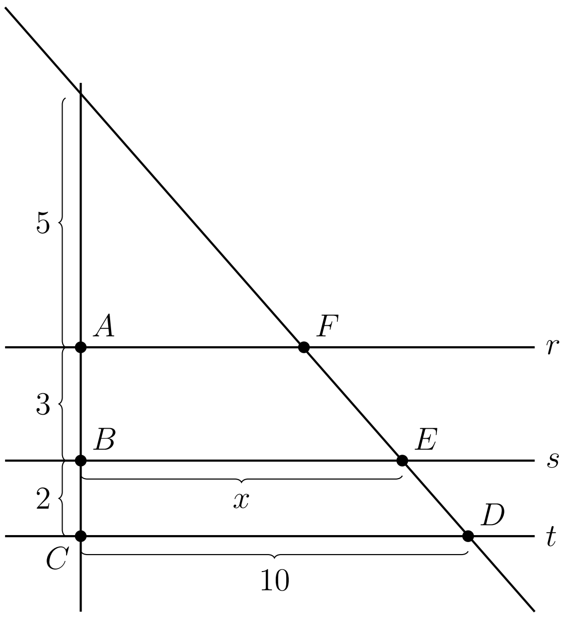
ⓐ $\frac{2}{3}$.

ⓑ 5.

ⓒ $\frac{20}{3}$.

ⓓ 8.

ⓔ 15.



9. Uma circunferência com 1 metro de raio foi dividida na quantidade máxima de arcos de 75^o. O comprimento, em metros, do menor arco resultante dessa divisão é igual a

ⓐ $\frac{\pi}{2}$. ⓑ $\frac{\pi}{3}$. ⓒ $\frac{\pi}{4}$. ⓓ $\frac{\pi}{6}$. ⓔ $\frac{\pi}{12}$.

---

10. Seja c a circunferência de centro $O = (0, 0)$ e raio 1. As coordenadas dos pontos A e B pertencentes a c, tais como ilustrados na figura, são respectivamente iguais a

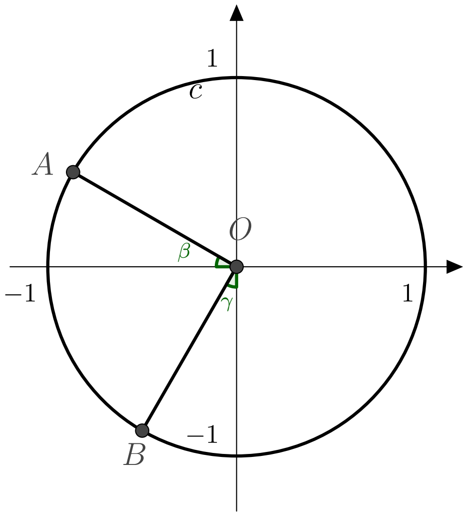
ⓐ $(\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta))$ e $(\cos(\gamma), \operatorname{sen}(\gamma))$.

ⓑ $(\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta))$ e $(\operatorname{sen}(\gamma), \cos(\gamma))$.

ⓒ $(\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta))$ e $(-\operatorname{sen}(\gamma), -\cos(\gamma))$.

ⓓ $(-\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta))$ e $(-\cos(\gamma), -\operatorname{sen}(\gamma))$.

ⓔ $(-\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta))$ e $(-\operatorname{sen}(\gamma), -\cos(\gamma))$.



---

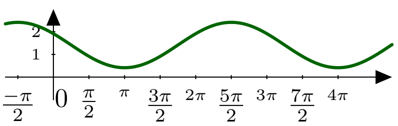
11. Seja $P = (a, b)$ um ponto do plano cartesiano. Então existe um número real x tal que $a = \cos(x)$ e $b = \operatorname{sen}(x)$ se

ⓐ $a + b = 1$. ⓑ $|a| + |b| = 1$. ⓒ $|a| = |b| = 1$.

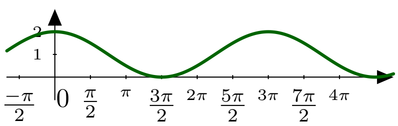
ⓓ $a^2 + b^2 = 1$. ⓔ $a^2 = b^2$.

---

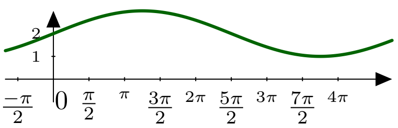
12. O gráfico que melhor representa a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{2\,x}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$ é

ⓐ 

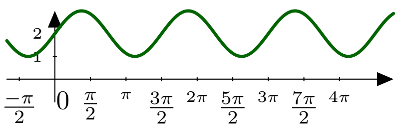
.

ⓑ 

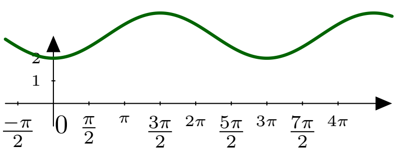
.

ⓒ 

.

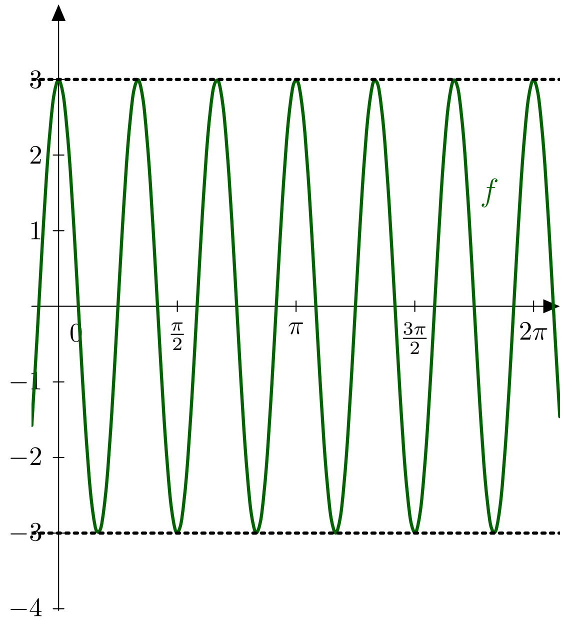
ⓓ 

.

ⓔ 

.

13. Seja $f : \mathbb{R} \to [-3, 3]$ definida por $f(x) = 3\cos(b\,x)$. Para que a figura abaixo repesente o gráfico da função f, no sistema cartesiano xOy, o valor de b deve ser igual a



ⓐ 1.

ⓑ 2.

ⓒ 3.

ⓓ 4.

ⓔ 6.

---

14. Os pontos B_1 e B_{15} ocupam, respectivamente, a 1^a e a 15^a divisões de uma circunferência de raio 1 que foi dividida em 24 partes, como mostra a figura. Se, após um movimento de rotação em torno do centro O da circunferência, o ponto B_1 está na posição $(0, -1)$, as coordenadas do ponto B_{15} são

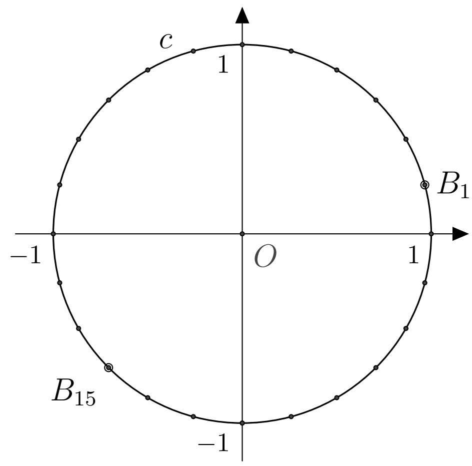
ⓐ $(0, 1)$.

ⓑ $(-1, 0)$.

ⓒ $\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

ⓓ $\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

ⓔ $\left(-\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.



---

15. Se os números reais x e y são tais que

$$\cos(x) = \cos(y) \text{ e } \text{sen}(x) = \text{sen}(y),$$

$y - x$ é igual a

ⓐ $\pm k\,\pi$, em que k é um número par.

ⓑ $\pm k\,\pi$, em que k é um número ímpar.

ⓒ $\pm k$, em que k é um número natural.

ⓓ $\pm k\,\frac{\pi}{2}$, em que k é um número ímpar.

ⓔ 0.

A.2 Parâmetros TCT e TRI para grupos da UnB

item		A	B	C	D	E	% brancos	TRI *a*	TRI *b*	TRI *c*
1	prop.	0.00	0.89	0.00	0.11	0.00	0.00	0.22	-6.63	0.20
	biss.	0.00	0.86	0.00	-0.86	0.00				
2	prop.	0.11	0.11	0.78	0.00	0.00	0.00	0.19	-4.40	0.20
	biss.	0.64	-0.86	0.14	0.00	0.00				
3	prop.	0.25	0.13	0.00	0.25	0.38	11.11	0.19	8.05	0.20
	biss.	-0.78	0.36	0.00	0.47	0.07				
4	prop.	0.63	0.13	0.13	0.00	0.13	11.11	0.16	-0.72	0.20
	biss.	0.20	0.12	0.36	0.00	-0.85				
5	prop.	0.13	0.00	0.63	0.00	0.25	11.11	0.18	11.03	0.19
	biss.	-0.03	0.00	-0.38	0.00	0.47				
6	prop.	0.00	0.29	0.43	0.14	0.14	22.22	0.21	3.16	0.20
	biss.	0.00	-0.22	0.82	-0.29	-0.80				
7	prop.	0.00	0.00	0.89	0.11	0.00	0.00	0.17	12.44	0.19
	biss.	0.00	0.00	-0.39	0.39	0.00				
8	prop.	0.00	0.00	0.22	0.67	0.11	0.00	0.18	-1.72	0.20
	biss.	0.00	0.00	-0.62	0.69	-0.36				
9	prop.	0.00	0.44	0.00	0.22	0.33	0.00	0.20	3.17	0.20
	biss.	0.00	0.15	0.00	-0.30	0.09				
10	prop.	0.00	0.00	0.11	0.78	0.11	0.00	0.17	12.44	0.19
	biss.	0.00	0.00	-0.86	0.30	0.39				
11	prop.	0.13	0.00	0.00	0.75	0.13	11.11	0.16	-4.28	0.20
	biss.	0.33	0.00	0.00	-0.23	0.04				
12	prop.	0.11	0.22	0.11	0.44	0.11	0.00	0.19	8.49	0.20
	biss.	-0.11	0.65	-0.86	-0.21	0.39				
13	prop.	0.38	0.25	0.13	0.00	0.25	11.11	0.18	8.19	0.20
	biss.	-0.10	-0.52	0.04	0.00	0.61				
14	prop.	0.00	0.00	0.13	0.88	0.00	11.11	0.23	-5.94	0.20
	biss.	0.00	0.00	-1.12	1.12	0.00				
15	prop.	0.43	0.00	0.14	0.00	0.43	22.22	0.20	3.31	0.20
	biss.	0.49	0.00	-1.13	0.00	0.16				

Tabela A.1: Parâmetros TCT e TRI para o grupo ENEM 0.

item		A	B	C	D	E	% brancos
1	prop.	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	25.00
	biss.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
2	prop.	0.00	0.00	0.67	0.33	0.00	25.00
	biss.	0.00	0.00	1.30	-1.30	0.00	
3	prop.	0.00	0.33	0.00	0.67	0.00	25.00
	biss.	0.00	-1.30	0.00	1.30	0.00	
4	prop.	0.33	0.00	0.33	0.00	0.33	25.00
	biss.	1.30	0.00	-0.65	0.00	-0.65	
5	prop.	0.00	0.67	0.33	0.00	0.00	25.00
	biss.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
6	prop.	0.00	0.33	0.33	0.33	0.00	25.00
	biss.	0.00	-0.65	1.30	-0.65	0.00	
7	prop.	0.00	0.00	0.67	0.00	0.33	25.00
	biss.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
8	prop.	0.00	0.00	0.25	0.75	0.00	0.00
	biss.	0.00	0.00	-1.36	1.36	0.00	
9	prop.	0.00	0.33	0.00	0.33	0.33	25.00
	biss.	0.00	1.30	0.00	-0.65	-0.65	
10	prop.	0.00	0.00	0.33	0.67	0.00	25.00
	biss.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
11	prop.	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	25.00
	biss.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
12	prop.	0.00	0.33	0.33	0.33	0.00	25.00
	biss.	0.00	1.30	-0.65	-0.65	0.00	
13	prop.	0.00	0.67	0.33	0.00	0.00	25.00
	biss.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
14	prop.	0.00	0.00	0.00	0.67	0.33	25.00
	biss.	0.00	0.00	0.00	1.30	-1.30	
15	prop.	0.33	0.00	0.00	0.33	0.33	25.00
	biss.	1.30	0.00	0.00	-0.65	-0.65	

Tabela A.2: Parâmetros TCT e TRI para o grupo ENEM 1.

item		A	B	C	D	E	% brancos	TRI *a*	TRI *b*	TRI *c*
1	prop. biss.	0.06 -0.60	0.80 0.78	0.03 -0.40	0.09 -0.55	0.02 -0.62	1.98	2.21	-0.91	0.20
2	prop. biss.	0.06 -0.33	0.22 -0.48	0.61 0.64	0.07 -0.23	0.04 -0.37	0.99	2.96	-0.15	0.19
3	prop. biss.	0.08 -0.18	0.24 -0.28	0.03 -0.01	0.26 0.79	0.38 -0.38	5.94	2.73	0.97	0.16
4	prop. biss.	0.51 0.57	0.14 -0.35	0.14 -0.21	0.05 -0.42	0.15 -0.24	3.96	0.73	0.60	0.20
5	prop. biss.	0.17 -0.19	0.24 -0.06	0.26 -0.10	0.30 0.26	0.03 0.11	10.89	0.12	27.75	0.18
6	prop. biss.	0.16 -0.26	0.23 -0.05	0.22 0.44	0.23 -0.23	0.15 0.08	6.93	1.59	1.80	0.17
7	prop. biss.	0.25 -0.29	0.12 -0.27	0.43 0.13	0.15 0.56	0.05 -0.32	7.92	0.40	7.71	0.17
8	prop. biss.	0.05 -0.24	0.07 -0.14	0.09 -0.32	0.72 0.27	0.07 0.02	1.98	0.28	-2.23	0.20
9	prop. biss.	0.12 -0.40	0.47 0.70	0.12 -0.45	0.20 -0.27	0.09 -0.24	5.94	2.36	0.30	0.18
10	prop. biss.	0.07 0.27	0.10 0.01	0.23 -0.48	0.47 0.09	0.13 0.34	4.95	0.20	17.34	0.16
11	prop. biss.	0.12 0.05	0.25 -0.31	0.08 -0.43	0.48 0.49	0.06 -0.33	5.94	0.33	1.69	0.20
12	prop. biss.	0.16 0.22	0.29 0.30	0.08 -0.36	0.33 -0.28	0.14 -0.02	7.92	0.31	5.90	0.19
13	prop. biss.	0.24 -0.13	0.26 0.09	0.29 -0.00	0.05 -0.28	0.15 0.19	8.91	0.15	22.79	0.17
14	prop. biss.	0.04 -0.24	0.06 -0.46	0.34 0.06	0.39 0.35	0.16 -0.33	6.93	0.40	2.68	0.20
15	prop. biss.	0.18 0.29	0.10 -0.12	0.18 -0.20	0.06 -0.07	0.47 0.01	7.92	0.17	17.62	0.18

Tabela A.3: Parâmetros TCT e TRI para o grupo PAS 0.

item		A	B	C	D	E	% brancos	TRI *a*	TRI *b*	TRI *c*
1	prop.	0.04	0.87	0.00	0.06	0.02	0.00	0.36	-4.58	0.20
	biss.	-0.67	0.62	0.00	-0.30	-0.60				
2	prop.	0.09	0.21	0.64	0.02	0.04	0.00	0.42	-0.57	0.20
	biss.	-0.55	-0.28	0.55	-0.42	-0.18				
3	prop.	0.09	0.19	0.06	0.30	0.36	0.00	2.21	0.95	0.18
	biss.	-0.10	0.04	-0.45	0.62	-0.41				
4	prop.	0.55	0.19	0.11	0.02	0.13	0.00	0.80	0.20	0.20
	biss.	0.54	-0.22	-0.35	-0.77	-0.24				
5	prop.	0.11	0.15	0.43	0.26	0.04	2.13	0.15	21.61	0.17
	biss.	-0.07	-0.17	-0.04	0.06	0.50				
6	prop.	0.15	0.30	0.32	0.17	0.06	0.00	0.38	4.04	0.19
	biss.	-0.31	-0.13	0.49	-0.19	-0.09				
7	prop.	0.38	0.11	0.34	0.09	0.09	0.00	0.16	20.80	0.17
	biss.	-0.43	-0.20	0.25	0.42	0.30				
8	prop.	0.02	0.04	0.07	0.78	0.09	4.26	1.77	-0.92	0.20
	biss.	-0.59	-0.77	-0.51	0.81	-0.44				
9	prop.	0.04	0.59	0.13	0.15	0.09	2.13	0.50	0.04	0.20
	biss.	-0.21	0.57	-0.18	-0.62	-0.12				
10	prop.	0.09	0.09	0.15	0.38	0.30	0.00	0.15	11.32	0.20
	biss.	-0.10	-0.04	0.00	-0.09	0.15				
11	prop.	0.07	0.22	0.11	0.57	0.04	2.13	0.25	0.59	0.20
	biss.	-0.02	0.03	-0.34	0.28	-0.57				
12	prop.	0.11	0.50	0.07	0.22	0.11	2.13	1.33	0.43	0.20
	biss.	0.03	0.52	-0.10	-0.49	-0.31				
13	prop.	0.17	0.30	0.26	0.07	0.20	2.13	0.19	13.72	0.19
	biss.	-0.33	-0.15	0.11	0.48	0.14				
14	prop.	0.15	0.06	0.28	0.49	0.02	0.00	2.55	0.19	0.19
	biss.	-0.46	-0.52	-0.33	0.70	0.10				
15	prop.	0.23	0.09	0.27	0.02	0.39	6.38	0.83	2.72	0.18
	biss.	0.65	-0.01	-0.29	0.26	-0.29				

Tabela A.4: Parâmetros TCT e TRI para o grupo PAS 1.

item		A	B	C	D	E	% brancos	TRI a	TRI b	TRI c
1	prop.	0.17	0.73	0.00	0.10	0.00	0.00	0.44	-1.78	0.20
	biss.	-0.05	0.38	0.00	-0.64	0.00				
2	prop.	0.03	0.17	0.70	0.07	0.03	0.00	0.89	-0.89	0.20
	biss.	0.11	-0.39	0.58	-0.61	-0.46				
3	prop.	0.10	0.10	0.03	0.53	0.23	0.00	0.86	0.21	0.20
	biss.	-0.46	-0.28	0.25	0.56	-0.37				
4	prop.	0.61	0.14	0.04	0.07	0.14	6.67	1.03	-0.30	0.20
	biss.	0.46	-0.54	-0.49	-0.40	0.16				
5	prop.	0.19	0.30	0.19	0.26	0.07	10.00	0.25	9.39	0.19
	biss.	0.45	-0.37	-0.54	0.36	0.24				
6	prop.	0.29	0.18	0.36	0.11	0.07	6.67	2.99	0.33	0.19
	biss.	-0.75	0.04	0.90	-0.20	-0.40				
7	prop.	0.18	0.18	0.43	0.18	0.04	6.67	1.65	1.46	0.18
	biss.	-0.44	-0.40	0.14	0.64	-0.06				
8	prop.	0.03	0.03	0.10	0.76	0.07	3.33	0.93	-1.23	0.20
	biss.	-0.49	-0.49	-0.50	0.59	-0.15				
9	prop.	0.00	0.54	0.14	0.29	0.04	6.67	1.42	-0.03	0.20
	biss.	0.00	0.76	-0.34	-0.61	-0.21				
10	prop.	0.17	0.07	0.07	0.41	0.28	3.33	1.76	1.15	0.19
	biss.	-0.39	-0.06	-0.48	0.07	0.43				
11	prop.	0.14	0.11	0.07	0.64	0.04	6.67	1.51	-0.49	0.20
	biss.	-0.44	-0.20	-0.65	0.71	-0.49				
12	prop.	0.23	0.35	0.04	0.23	0.15	13.33	2.77	0.51	0.19
	biss.	-0.47	0.90	-0.71	-0.30	-0.15				
13	prop.	0.14	0.43	0.14	0.11	0.18	6.67	0.15	16.17	0.19
	biss.	0.11	0.20	-0.64	-0.08	0.21				
14	prop.	0.00	0.07	0.46	0.36	0.11	6.67	0.51	2.27	0.20
	biss.	0.00	-0.57	-0.27	0.60	-0.20				
15	prop.	0.14	0.14	0.17	0.07	0.48	3.33	0.20	13.46	0.18
	biss.	0.48	-0.40	0.11	-0.21	-0.05				

Tabela A.5: Parâmetros TCT e TRI para o grupo VEST 0.

item		A	B	C	D	E	% brancos	TRI a	TRI b	TRI c
1	prop.	0.03	0.88	0.00	0.06	0.03	2.94	0.34	-5.31	0.20
	biss.	-0.81	0.60	0.00	-0.00	-0.95				
2	prop.	0.00	0.12	0.85	0.03	0.00	2.94	0.83	-2.10	0.20
	biss.	0.00	-0.30	0.49	-0.81	0.00				
3	prop.	0.03	0.09	0.00	0.56	0.31	5.88	1.64	-0.13	0.20
	biss.	-0.37	0.27	0.00	0.71	-0.84				
4	prop.	0.53	0.15	0.12	0.03	0.18	0.00	0.79	0.23	0.20
	biss.	0.60	-0.72	0.07	-0.35	-0.24				
5	prop.	0.09	0.21	0.30	0.27	0.12	2.94	0.22	14.33	0.17
	biss.	-0.09	-0.47	-0.12	0.49	0.15				
6	prop.	0.06	0.29	0.52	0.06	0.06	8.82	1.18	0.26	0.20
	biss.	-0.64	-0.66	0.64	0.00	0.41				
7	prop.	0.28	0.03	0.41	0.28	0.00	5.88	0.49	3.44	0.19
	biss.	-0.54	0.51	-0.10	0.55	0.00				
8	prop.	0.00	0.06	0.06	0.84	0.03	5.88	0.60	-2.68	0.20
	biss.	0.00	-0.49	-0.49	0.63	-0.43				
9	prop.	0.03	0.76	0.00	0.12	0.09	2.94	1.55	-0.95	0.20
	biss.	-0.07	0.71	0.00	-0.68	-0.50				
10	prop.	0.03	0.03	0.12	0.58	0.24	2.94	1.24	1.80	0.19
	biss.	-0.40	0.37	-0.86	0.04	0.51				
11	prop.	0.12	0.15	0.12	0.62	0.00	0.00	1.61	-0.35	0.20
	biss.	-0.72	-0.34	-0.23	0.69	0.00				
12	prop.	0.12	0.42	0.06	0.33	0.06	2.94	0.88	0.79	0.20
	biss.	-0.10	0.53	-0.50	-0.24	-0.34				
13	prop.	0.16	0.28	0.28	0.03	0.25	5.88	2.02	1.09	0.18
	biss.	-0.40	-0.21	-0.05	-0.27	0.63				
14	prop.	0.03	0.06	0.27	0.58	0.06	2.94	1.04	-0.10	0.20
	biss.	-0.25	-0.81	-0.46	0.55	0.42				
15	prop.	0.27	0.06	0.06	0.06	0.55	2.94	2.05	1.06	0.19
	biss.	0.57	0.09	-0.15	-0.07	-0.44				

Tabela A.6: Parâmetros TCT e TRI para o grupo VEST 1.

A.3 Questionário - Ensino médio

Avaliação diagnóstica

1. Um cabo de aço de $50\,m$ está fixado do topo de uma torre ao solo, formando um ângulo de 60^o com a base da torre. Dado que $\text{sen}(60^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(60^o) = \frac{1}{2}$ e $\tan(60^o) = \sqrt{3}$, a altura da torre, em metros, é igual a

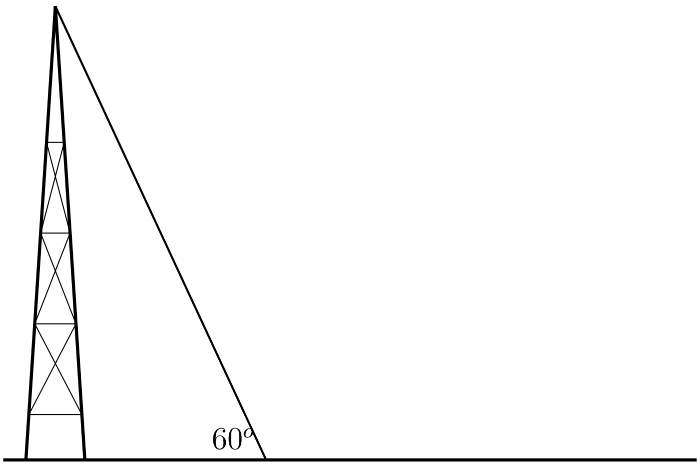
   ⓐ $\frac{25\sqrt{3}}{3}$.

   ⓑ 25.

   ⓒ $\frac{50\sqrt{3}}{3}$.

   ⓓ $25\sqrt{3}$.

   ⓔ $50\sqrt{3}$.



2. Para o triângulo $\triangle ABC$, retângulo em A, mostrado na figura abaixo, a expressão $\text{sen}(\alpha) + \cos(\beta)$ é igual a

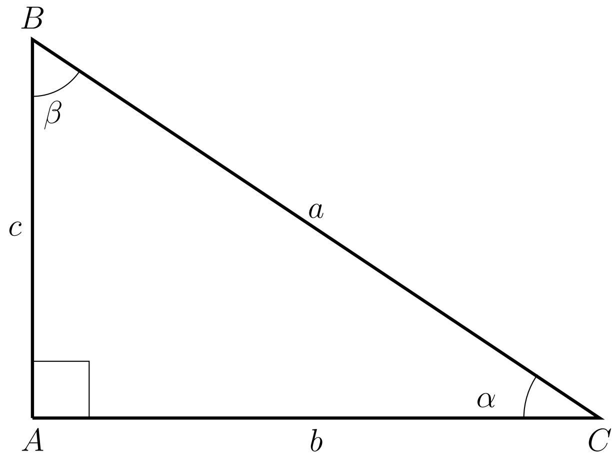
   ⓐ $\frac{2\,b}{a}$.

   ⓑ $\frac{b}{a} + \frac{c}{a}$.

   ⓒ $\frac{2\,c}{a}$.

   ⓓ $\frac{a}{b} + \frac{a}{c}$.

   ⓔ $\frac{b}{c} + \frac{c}{b}$.



3. Sobre a circunferência de centro O e raio 1, o comprimento do arco $\widehat{AOB}$, mostrado na figura, é igual a 2. A medida do ângulo $\angle AOB$, em radianos, é igual a

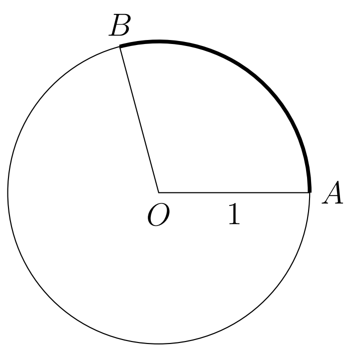
   ⓐ $\frac{1}{2}$.

   ⓑ $\frac{2}{\pi}$.

   ⓒ 1.

   ⓓ 2.

   ⓔ $\frac{\pi}{2}$.



4. Seja $P = (\cos(u), \text{sen}(u))$ um ponto da circunferência de centro $O = (0,0)$ e raio 1 no plano cartesiano xOy, em que u é um número real entre $30\,\pi$ e $31\,\pi$.
Então o ponto P está localizado no

(a) 1^o ou no 2^o quadrantes.
(b) 1^o ou no 4^o quadrantes.
(c) 2^o ou no 3^o quadrantes.
(d) 2^o ou no 4^o quadrantes.
(e) 3^o ou no 4^o quadrantes.

---

5. Seja um número real $\alpha < 0$. Quantos pontos $P = (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha))$ existem?

(a) 0. (b) 1. (c) 2. (d) 4. (e) infinitos.

---

6. As funções trigonométricas que são crescentes no intervalo aberto de $-\dfrac{\pi}{2}$ a $\dfrac{\pi}{2}$ são

(a) seno e cosseno.
(b) seno e $\dfrac{1}{\text{cosseno}}$.
(c) seno e $\dfrac{\text{seno}}{\text{cosseno}}$.
(d) cosseno e $\dfrac{1}{\text{seno}}$.
(e) cosseno e $\dfrac{\text{seno}}{\text{cosseno}}$.

---

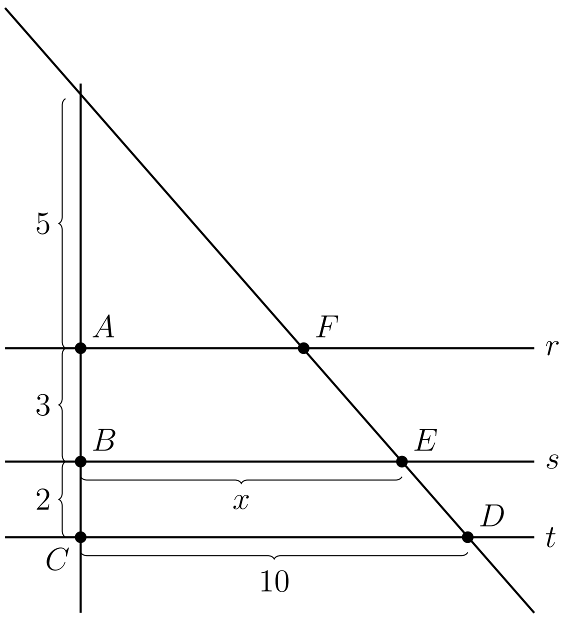
7. No intervalo $[\pi, 3\,\pi]$, a quantidade de soluções da equação $\text{sen}(x)\cos(x) = 0$ é igual a

(a) 1. (b) 2. (c) 3. (d) 4. (e) 5.

---

8. Os trapézios $ABEF$ e $ACDF$, ilustrados na figura abaixo, são formados pelas retas r, s e t paralelas entre si cortadas por duas transversais. Com base nas informações da figura, o comprimento x do segmento BE é igual a

(a) 6.
(b) $\dfrac{20}{3}$.
(c) 8.
(d) $\dfrac{25}{2}$.
(e) 15.



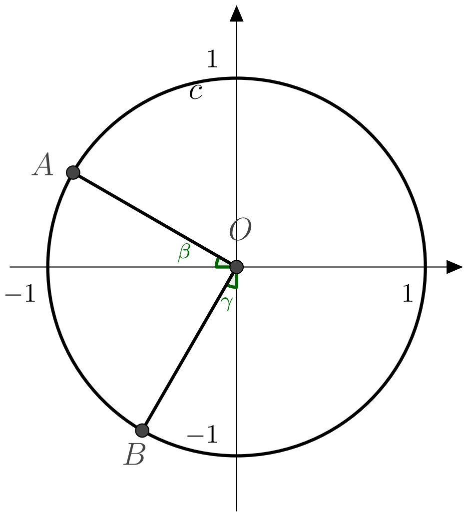
---

9. Uma circunferência com 1 metro de raio foi dividida na quantidade máxima de arcos de 75^o. O comprimento, em metros, do menor arco resultante dessa divisão é igual a

   (a) $\frac{\pi}{3}$.   (b) $\frac{\pi}{4}$.   (c) $\frac{\pi}{6}$.   (d) $\frac{\pi}{8}$.   (e) $\frac{\pi}{12}$.

---

10. Seja c a circunferência de centro $O = (0, 0)$ e raio 1. As coordenadas dos pontos A e B pertencentes a c, tais como ilustrados na figura, são respectivamente iguais a



   (a) $(\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta))$ e $(\cos(\gamma), \operatorname{sen}(\gamma))$.

   (b) $(\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta))$ e $(\operatorname{sen}(\gamma), \cos(\gamma))$.

   (c) $(\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta))$ e $(-\operatorname{sen}(\gamma), -\cos(\gamma))$.

   (d) $(-\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta))$ e $(-\cos(\gamma), -\operatorname{sen}(\gamma))$.

   (e) $(-\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta))$ e $(-\operatorname{sen}(\gamma), -\cos(\gamma))$.

---

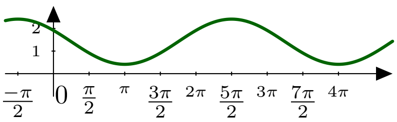
11. Seja $P = (a, b)$ um ponto do plano cartesiano. Então existe um número real x tal que $a = \cos(x)$ e $b = \operatorname{sen}(x)$ se

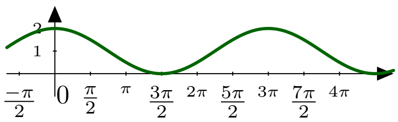
   (a) $a + b = 1$.   (b) $|a| + |b| = 1$.   (c) $|a| = |b| = 1$.

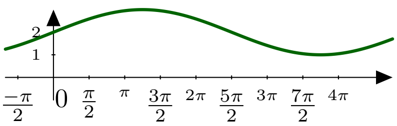
   (d) $a^2 + b^2 = 1$.   (e) $a^2 = b^2$.

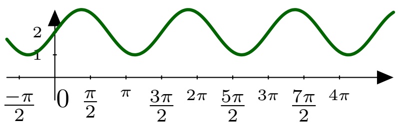
---

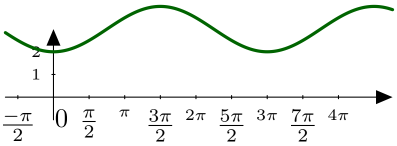
12. O gráfico que melhor representa a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$ é

   (a)  .

   (b)  .

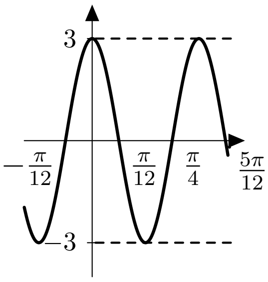
   (c)  .

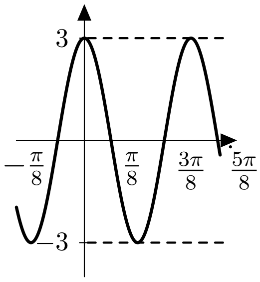
   (d)  .

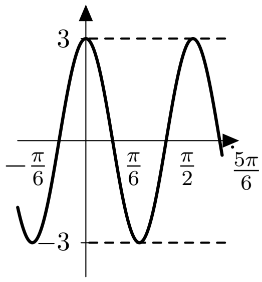
   (e)  .

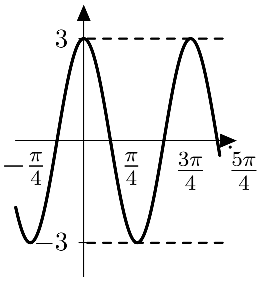
---

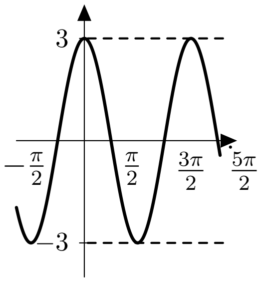
13. Seja $f : \mathbb{R} \to [-3, 3]$ definida por $f(x) = 3\cos(6\,x)$. O gráfico que melhor representa a função f, no sistema cartesiano xOy, é

ⓐ 

ⓑ 

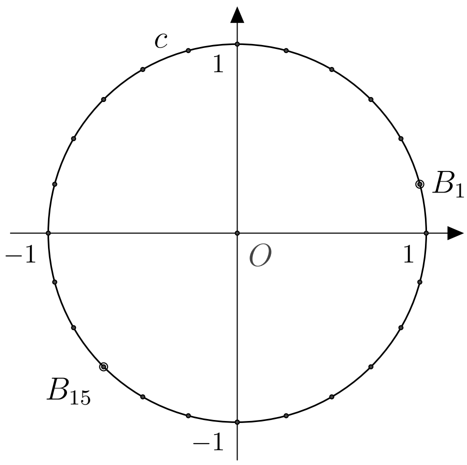
ⓒ 

ⓓ 

ⓔ 

---

14. Os pontos B_1 e B_{15} ocupam, respectivamente, a 1^a e a 15^a divisões de uma circunferência de raio 1 que foi dividida em 24 partes, como mostra a figura. Se, após um movimento de rotação em torno do centro O da circunferência, o ponto B_1 está na posição $(0, -1)$, as coordenadas do ponto B_{15} são



ⓐ $(0, 1)$.

ⓑ $(-1, 0)$.

ⓒ $\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

ⓓ $\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

ⓔ $\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

---

15. Se valem as igualdades $\cos(x) = \cos(y)$ e $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(y)$, x e y são tais que

ⓐ $x = y$.

ⓑ $x = y \pm k\,\pi$, em que k é um número par.

ⓒ $x = \pm(\pi - y)k$, em que k é um número par.

ⓓ $x = y \pm k\,\pi$, em que k é um número natural.

ⓔ $x = \pm(\pi - y)k$, em que k é um número natural.

A.4 Histórico de respostas por escola

itens		1					2					3					4					5					6					7					8				
		A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
1	nulo																																								
	A	100,0					1,9	20,9	28,9	16,7	16,7	13,5	20,0	25,0	14,3	14,9	16,4	18,2	17,4	17,9	16,0	26,1	23,1	13,8	28,0	9,9	21,9	21,1	7,5	7,4	16,7	13,7	17,8	19,1	29,0	5,9	15,4	22,9	10,0	22,2	20,0
	B		100,0				23,1	3,5	17,8	21,4	33,3	15,4	11,4	21,9	25,0	14,9	12,3	16,4	21,7	14,3	12,0	19,6	15,4	10,3	16,0	16,2	14,6	15,8	22,5	18,5	10,0	19,6	6,7	12,4	25,8	23,5	11,5	12,9	18,6	25,9	16,7
	C			100,0			11,5	15,1		31,0	12,5	17,3	12,9	6,3	21,4	14,9	13,7	9,1	14,5	14,3	28,0	10,9	17,9	31,0	20,0	9,0	13,5	12,3	7,5	40,7	6,7	15,7	20,0	10,1	6,5	23,5	15,4	15,7	15,7	11,1	10,0
	D				100,0		61,5	40,7	35,6	16,7	33,3	42,3	42,9	43,8	28,6	34,3	50,7	36,4	33,3	35,7	32,0	23,9	35,9	31,0	28,0	51,4	41,7	33,3	37,5	29,6	53,3	37,3	33,3	46,1	35,5	35,3	48,1	35,7	41,4	29,6	33,3
	E					100,0	1,9	19,8	17,8	14,3	4,2	11,5	12,9	3,1	10,7	20,9	6,8	20,0	13,0	17,9	12,0	19,6	7,7	13,8	8,0	13,5	8,3	17,5	25,0	3,7	13,3	13,7	22,2	12,4	3,2	11,8	9,6	12,9	14,3	11,1	20,0
2	nulo			2,8									1,4				1,4									0,9			2,5			2,0							1,4		
	A	2,3	30,0	16,7	32,7	3,0	100,0					15,4	18,6	31,3	21,4	22,4	15,1	29,1	20,3	17,9	24,0	13,0	30,8	20,7	16,0	21,6	21,9	22,8	20,0	18,5	16,7	23,5	17,8	22,5	19,4	17,6	19,2	21,4	22,9	18,5	20,0
	B	41,9	7,5	36,1	35,7	51,5		100,0				34,6	27,1	37,5	35,7	40,3	35,6	30,9	34,8	32,1	40,0	50,0	23,1	27,6	32,0	34,2	35,4	31,6	32,5	37,0	36,7	31,4	35,6	39,3	32,3	26,5	40,4	28,6	31,4	33,3	43,3
	C	30,2	20,0		16,3	24,2			100,0			25,0	22,9	9,4	7,1	14,9	16,4	16,4	20,3	25,0	12,0	10,9	23,1	17,2	20,0	18,9	16,7	17,5	27,5	11,1	16,7	17,6	17,8	15,7	29,0	14,7	11,5	18,6	20,0	25,9	16,7
	D	16,3	22,5	36,1	7,1	18,2				100,0		13,5	18,6	18,8	17,9	16,4	15,1	18,2	18,8	10,7	20,0	17,4	12,8	20,7	16,0	17,1	14,6	17,5	10,0	29,6	20,0	13,7	22,2	13,5	12,9	26,5	13,5	24,3	12,9	14,8	16,7
	E	9,3	20,0	8,3	8,2	3,0					100,0	11,5	11,4	3,1	17,9	6,0	16,4	5,5	5,8	14,3	4,0	8,7	10,3	13,8	16,0	7,2	11,5	10,5	7,5	3,7	10,0	11,8	6,7	9,0	6,5	14,7	15,4	7,1	11,4	7,4	3,3
3	nulo				1,0				2,2								1,4									0,9	1,0									2,9			1,4		
	A	16,3	20,0	25,0	22,4	18,2	15,4	20,9	28,9	16,7	25,0	100,0					16,4	21,8	21,7	17,9	32,0	13,0	28,2	24,1	20,0	20,7	17,7	14,0	30,0	33,3	20,0	29,4	17,8	19,1	12,9	23,5	15,4	25,7	18,6	29,6	16,7
	B	32,6	20,0	25,0	30,6	27,3	25,0	22,1	35,6	31,0	33,3		100,0				38,4	12,7	33,3	25,0	20,0	21,7	20,5	34,5	24,0	32,4	26,0	28,1	30,0	22,2	36,7	29,4	28,9	30,3	25,8	20,6	30,8	31,4	28,6	25,9	16,7
	C	18,6	17,5	5,6	14,3	3,0	19,2	14,0	6,7	14,3	4,2			100,0			8,2	25,5	8,7	10,7	12,0	19,6	20,5	10,3	8,0	9,0	14,6	15,8	7,5	3,7	16,7	9,8	2,2	13,5	22,6	20,6	15,4	15,7	12,9	3,7	10,0
	D	9,3	17,5	16,7	8,2	9,1	11,5	11,6	4,4	11,9	20,8				100,0		8,2	12,7	17,4	7,1	4,0	13,0	17,9	10,3	8,0	9,0	12,5	14,0	2,5	7,4	16,7		15,6	13,5	9,7	17,6	13,5	8,6	12,9		20,0
	E	23,3	25,0	27,8	23,5	42,4	28,8	31,4	22,2	26,2	16,7					100,0	27,4	27,3	18,8	39,3	32,0	32,6	12,8	20,7	40,0	27,9	28,1	28,1	30,0	33,3	10,0	31,4	35,6	23,6	29,0	14,7	25,0	18,6	25,7	40,7	36,7
4	nulo																																								
	A	27,9	22,5	27,8	37,8	15,2	21,2	30,2	26,7	26,2	50,0	23,1	40,0	18,8	21,4	29,9	100,0					21,7	15,4	34,5	40,0	33,3	27,1	31,6	35,0	22,2	30,0	31,4	15,6	36,0	25,8	29,4	25,0	28,6	35,7	33,3	20,0
	B	23,3	22,5	13,9	20,4	33,3	30,8	19,8	20,0	23,8	12,5	23,1	10,0	43,8	25,0	22,4		100,0				32,6	15,4	17,2	24,0	20,7	16,7	21,1	32,5	14,8	33,3	15,7	28,9	22,5	16,1	26,5	25,0	18,6	22,9	25,9	20,0
	C	27,9	37,5	27,8	23,5	27,3	26,9	27,9	31,1	31,0	16,7	28,8	32,9	18,8	42,9	19,4			100,0			32,6	38,5	27,6	24,0	22,5	34,4	21,1	12,5	40,7	26,7	29,4	35,6	22,5	29,0	26,5	23,1	28,6	27,1	22,2	40,0
	D	11,6	10,0	11,1	10,2	15,2	9,6	10,5	15,6	7,1	16,7	9,6	10,0	9,4	7,1	16,4				100,0		8,7	12,8	17,2	4,0	11,7	8,3	22,8	12,5	3,7	3,3	11,8	11,1	11,2	16,1	5,9	11,5	14,3	5,7	11,1	13,3
	E	9,3	7,5	19,4	8,2	9,1	11,5	11,6	6,7	11,9	4,2	15,4	7,1	9,4	3,6	11,9					100,0	4,3	17,9	3,4	8,0	11,7	13,5	3,5	7,5	18,5	6,7	11,8	8,9	7,9	12,9	11,8	15,4	10,0	8,6	7,4	6,7
5	nulo																																								
	A	27,9	22,5	13,9	11,2	27,3	11,5	26,7	11,1	19,0	16,7	11,5	14,3	28,1	21,4	22,4	13,7	27,3	21,7	14,3	8,0	100,0					11,5	19,3	22,5	29,6	23,3	17,6	22,2	22,5	6,5	14,7	25,0	17,1	12,9	11,1	26,7
	B	20,9	15,0	19,4	14,3	9,1	23,1	10,5	20,0	11,9	16,7	21,2	11,4	25,0	25,0	7,5	8,2	10,9	21,7	17,9	28,0		100,0				14,6	10,5	12,5	18,5	30,0	9,8	20,0	11,2	19,4	26,5	11,5	20,0	11,4	14,8	23,3
	C	9,3	7,5	25,0	9,2	12,1	11,5	9,3	11,1	14,3	16,7	13,5	14,3	9,4	10,7	9,0	13,7	9,1	11,6	17,9	4,0			100,0			10,4	15,8	10,0	14,8	6,7	17,6	13,3	5,6	12,9	14,7	13,5	14,3	10,0	14,8	3,3
	D	16,3	10,0	13,9	7,1	6,1	7,7	9,3	11,1	9,5	16,7	9,6	8,6	6,3	7,1	14,9	13,7	10,9	8,7	3,6	8,0				100,0		8,3	17,5	2,5	7,4	13,3	7,8	6,7	11,2	12,9	11,8	11,5	7,1	10,0	14,8	10,0
	E	25,6	45,0	27,8	58,2	45,5	46,2	44,2	46,7	45,2	33,3	44,2	51,4	31,3	35,7	46,3	50,7	41,8	36,2	46,4	52,0					100,0	55,2	36,8	52,5	29,6	26,7	47,1	37,8	49,4	48,4	32,4	38,5	41,4	55,7	44,4	36,7
6	nulo																																								
	A	48,8	35,0	36,1	40,8	24,2	40,4	39,5	35,6	33,3	45,8	32,7	35,7	43,8	42,9	40,3	35,6	29,1	47,8	28,6	52,0	23,9	35,9	34,5	32,0	47,7	100,0					35,3	44,4	44,9	29,0	26,5	36,5	35,7	47,1	25,9	36,7
	B	27,9	22,5	19,4	19,4	30,3	25,0	20,9	22,2	23,8	25,0	15,4	22,9	28,1	28,6	23,9	24,7	21,8	17,4	46,4	8,0	23,9	15,4	31,0	40,0	18,9		100,0				17,6	13,3	20,2	35,5	38,2	23,1	25,7	14,3	44,4	16,7
	C	7,0	22,5	8,3	15,3	30,3	15,4	15,1	24,4	9,5	12,5	23,1	17,1	9,4	3,6	17,9	19,2	23,6	7,2	17,9	12,0	19,6	12,8	13,8	4,0	18,9			100,0			23,5	20,0	12,4	16,1	8,8	17,3	14,3	12,9	11,1	30,0
	D	4,7	12,5	30,6	8,2	3,0	9,6	11,6	6,7	19,0	4,2	17,3	8,6	3,1	7,1	13,4	8,2	7,3	15,9	3,6	20,0	17,4	12,8	13,8	8,0	7,2				100,0		17,6	11,1	6,7	9,7	11,8	7,7	12,9	15,7	3,7	6,7
	E	11,6	7,5	5,6	16,3	12,1	9,6	12,8	11,1	14,3	12,5	11,5	15,7	15,6	17,9	4,5	12,3	18,2	11,6	3,6	8,0	15,2	23,1	6,9	16,0	7,2					100,0	5,9	11,1	15,7	9,7	14,7	15,4	11,4	10,0	14,8	10,0
7	nulo																																								
	A	16,3	25,0	22,2	19,4	21,2	23,1	18,6	20,0	16,7	25,0	28,8	21,4	15,6		23,9	21,9	14,5	21,7	21,4	24,0	19,6	12,8	31,0	16,0	21,6	18,8	15,8	30,0	33,3	10,0	100,0					26,9	15,7	27,1	11,1	13,3
	B	18,6	7,5	25,0	15,3	30,3	15,4	18,6	17,8	23,8	12,5	15,4	18,6	3,1	25,0	23,9	9,6	23,6	23,2	17,9	16,0	21,7	23,1	20,7	12,0	15,3	20,8	10,5	22,5	18,5	16,7		100,0				7,7	20,0	17,1	11,1	36,7
	C	39,5	27,5	25,0	41,8	33,3	38,5	40,7	31,1	28,6	33,3	32,7	38,6	37,5	42,9	31,3	43,8	36,4	29,0	35,7	28,0	43,5	25,6	17,2	40,0	39,6	41,7	31,6	27,5	22,2	46,7			100,0			50,0	31,4	27,1	44,4	33,3
	D	20,9	20,0	5,6	11,2	3,0	11,5	11,6	20,0	9,5	8,3	7,7	11,4	21,9	10,7	13,4	11,0	9,1	13,0	17,9	16,0	4,3	15,4	13,8	16,0	13,5	9,4	19,3	12,5	11,1	10,0				100,0		3,8	15,7	17,1	14,8	6,7
	E	4,7	20,0	22,2	12,2	12,1	11,5	10,5	11,1	21,4	20,8	15,4	10,0	21,9	21,4	7,5	13,7	16,4	13,0	7,1	16,0	10,9	23,1	17,2	16,0	9,9	9,4	22,8	7,5	14,8	16,7					100,0	11,5	17,1	11,4	18,5	10,0
8	nulo				1,0			1,2								1,5				3,6		2,2					1,0						2,2								
	A	18,6	15,0	22,2	25,5	15,2	19,2	24,4	13,3	16,7	33,3	15,4	22,9	25,0	25,0	19,4	17,8	23,6	17,4	21,4	32,0	28,3	15,4	24,1	24,0	18,0	19,8	21,1	22,5	14,8	26,7	27,5	8,9	29,2	6,5	17,6	100,0				
	B	37,2	22,5	30,6	25,5	27,3	28,8	23,3	28,9	40,5	20,8	34,6	31,4	34,4	21,4	19,4	27,4	23,6	29,0	35,7	28,0	26,1	35,9	34,5	20,0	26,1	26,0	31,6	25,0	33,3	26,7	21,6	31,1	24,7	35,5	35,3		100,0			
	C	16,3	32,5	30,6	29,6	30,3	30,8	25,6	31,1	21,4	33,3	25,0	28,6	28,1	32,1	26,9	34,2	29,1	27,5	14,3	24,0	19,6	20,5	24,1	28,0	35,1	34,4	17,5	22,5	40,7	23,3	37,3	26,7	21,3	38,7	23,5			100,0		
	D	14,0	17,5	8,3	8,2	9,1	9,6	10,5	15,6	9,5	8,3	15,4	10,0	3,1		16,4	12,3	12,7	8,7	10,7	8,0	6,5	10,3	13,8	16,0	10,8	7,3	21,1	7,5	3,7	13,3	5,9	6,7	13,5	12,9	14,7				100,0	
	E	14,0	12,5	8,3	10,2	18,2	11,5	15,1	11,1	11,9	4,2	9,6	7,1	9,4	21,4	16,4	8,2	10,9	17,4	14,3	8,0	17,4	17,9	3,4	12,0	9,9	11,5	8,8	22,5	7,4	10,0	7,8	24,4	11,2	6,5	8,8					100,0
9	nulo			2,8	2,0		1,9	1,2	2,2					3,1		1,5	2,7	1,8				2,2	2,6			0,9	1,0		2,5	3,7		2,0			3,2	2,9		1,4	2,9		
	A	20,9	22,5	22,2	22,4	36,4	19,2	25,6	20,0	26,2	29,2	15,4	34,3	9,4	25,0	26,9	28,8	21,8	18,8	28,6	24,0	15,2	7,7	17,2	36,0	32,4	26,0	28,1	32,5	11,1	10,0	25,5	26,7	27,0	12,9	20,6	30,8	20,0	22,9	22,2	26,7
	B	23,3	17,5	36,1	28,6	12,1	30,8	20,9	24,4	28,6	20,8	19,2	22,9	21,9	25,0	32,8	27,4	27,3	21,7	21,4	24,0	21,7	33,3	17,2	20,0	26,1	30,2	14,0	17,5	40,7	23,3	29,4	31,1	19,1	25,8	23,5	17,3	14,3	38,6	29,6	23,3
	C	18,6	22,5	25,0	17,3	15,2	15,4	18,6	22,2	14,3	33,3	30,8	15,7	25,0	17,9	11,9	11,0	18,2	27,5	17,9	24,0	21,7	23,1	27,6	32,0	11,7	14,6	28,1	12,5	14,8	30,0	21,6	6,7	21,3	22,6	23,5	26,9	24,3	12,9	22,2	6,7
	D	18,6	17,5	8,3	13,3	18,2	13,5	11,6	24,4	16,7	8,3	23,1	10,0	28,1	14,3	7,5	11,0	14,5	15,9	21,4	16,0	13,0	17,9	27,6	8,0	12,6	10,4	21,1	17,5	7,4	20,0	7,8	17,8	14,6	19,4	17,6	9,6	25,7	11,4	3,7	16,7
	E	18,6	20,0	5,6	16,3	18,2	19,2	22,1	6,7	14,3	8,3	11,5	17,1	12,5	17,9	19,4	19,2	16,4	15,9	10,7	12,0	26,1	15,4	10,3	4,0	16,2	17,7	8,8	17,5	22,2	16,7	13,7	17,8	18,0	16,1	11,8	15,4	14,3	11,4	22,2	26,7
10	nulo				2,0				2,2		4,2					3,0		1,8			4,0				4,0	0,9	1,0	1,8				2,0	2,2				1,9		1,4		
	A	14,0	17,5	16,7	21,4	12,1	15,4	20,9	17,8	16,7	12,5	25,0	18,6	21,9	21,4	7,5	20,5	12,7	18,8	14,3	20,0	13,0	12,8	20,7	12,0	21,6	20,8	12,3	12,5	11,1	30,0	27,5	15,6	16,9	12,9	11,8	13,5	22,9	14,3	7,4	30,0
	B	27,9	20,0	25,0	13,3	33,3	21,2	26,7	15,6	21,4	12,5	15,4	18,6	25,0	32,1	22,4	20,5	23,6	23,2	21,4	12,0	34,8	20,5	27,6	28,0	12,6	17,7	29,8	30,0	18,5	6,7	19,6	31,1	18,0	19,4	20,6	25,0	25,7	14,3	18,5	20,0
	C	27,9	30,0	36,1	35,7	27,3	44,2	27,9	31,1	23,8	41,7	32,7	38,6	21,9	28,6	32,8	35,6	27,3	23,2	46,4	44,0	21,7	30,8	17,2	28,0	42,3	34,4	24,6	37,5	33,3	33,3	27,5	31,1	36,0	25,8	38,2	34,6	28,6	34,3	44,4	23,3
	D	20,9	20,0	16,7	18,4	21,2	13,5	15,1	22,2	26,2	25,0	21,2	18,6	15,6	17,9	20,9	17,8	18,2	26,1	10,7	16,0	26,1	25,6	27,6	8,0	14,4	14,6	21,1	15,0	29,6	26,7	17,6	13,3	20,2	25,8	20,6	15,4	14,3	27,1	18,5	20,0
	E	9,3	12,5	5,6	9,2	6,1	5,8	9,3	11,1	11,9	4,2	5,8	5,7	15,6		13,4	5,5	16,4	8,7	7,1	4,0	4,3	10,3	6,9	20,0	8,1	11,5	10,5	5,0	7,4	3,3	5,9	6,7	9,0	16,1	8,8	9,6	8,6	8,6	11,1	6,7
11	nulo				1,0				2,2								1,4									0,9	1,0									2,9			1,4		
	A	34,9	22,5	27,8	25,5	42,4	28,8	26,7	33,3	33,3	20,8	21,2	41,4	37,5	3,6	29,9	27,4	36,4	27,5	39,3	12,0	37,0	28,2	37,9	28,0	24,3	20,8	40,4	37,5	29,6	23,3	35,3	31,1	22,5	32,3	32,4	32,7	30,0	27,1	22,2	33,3
	B	14,0	15,0	13,9	22,4	12,1	26,9	16,3	11,1	14,3	16,7	23,1	18,6	12,5	25,0	10,4	16,4	12,7	15,9	21,4	28,0	17,4	12,8	10,3	4,0	23,4	16,7	15,8	17,5	14,8	23,3	11,8	17,8	20,2	19,4	14,7	15,4	18,6	20,0	11,1	13,3
	C	9,3	15,0	8,3	9,2	6,1	9,6	12,8	13,3	2,4	4,2	11,5	4,3	12,5	10,7	11,9	6,8	16,4	7,2	7,1	12,0	6,5	15,4	13,8	8,0	8,1	6,3	12,3	10,0	14,8	10,0	7,8	11,1	4,5	16,1	17,6	7,7	15,7	5,7	7,4	10,0
	D	32,6	32,5	30,6	27,6	27,3	25,0	30,2	28,9	28,6	41,7	32,7	22,9	21,9	42,9	32,8	39,7	27,3	24,6	14,3	36,0	19,6	30,8	20,7	44,0	32,4	39,6	12,3	27,5	29,6	33,3	31,4	22,2	39,3	16,1	23,5	26,9	22,9	32,9	48,1	26,7
	E	9,3	15,0	19,4	14,3	12,1	9,6	14,0	11,1	21,4	16,7	11,5	12,9	15,6	17,9	14,9	8,2	7,3	24,6	17,9	12,0	19,6	12,8	17,2	16,0	10,8	15,6	19,3	7,5	11,1	10,0	13,7	17,8	13,5	16,1	8,8	17,3	12,9	12,9	11,1	16,7
12	nulo				1,0				2,2							1,5		1,8							4,0			1,8					2,2						1,4		
	A	20,9	12,5	13,9	19,4	18,2	15,4	19,8	22,2	14,3	12,5	21,2	10,0	18,8	28,6	17,9	13,7	29,1	17,4	10,7	12,0	8,7	17,9	17,2	16,0	21,6	20,8	21,1	10,0	7,4	20,0	19,6	8,9	18,0	32,3	11,8	15,4	20,0	17,1	22,2	13,3
	B	18,6	30,0	30,6	26,5	15,2	25,0	22,1	24,4	28,6	29,2	23,1	25,7	28,1	32,1	19,4	26,0	23,6	29,0	14,3	24,0	34,8	28,2	20,7	20,0	21,6	28,1	22,8	22,5	25,9	20,0	13,7	28,9	22,5	25,8	41,2	32,7	15,7	30,0	22,2	20,0
	C	20,9	17,5	25,0	21,4	12,1	21,2	19,8	24,4	21,4	8,3	26,9	12,9	28,1	14,3	20,9	15,1	9,1	26,1	28,6	32,0	8,7	25,6	27,6	24,0	19,8	24,0	19,3	15,0	29,6	6,7	23,5	20,0	15,7	19,4	26,5	15,4	28,6	14,3	14,8	26,7
	D	11,6	25,0	19,4	13,3	15,2	13,5	15,1	8,9	19,0	29,2	13,5	27,1	3,1	10,7	14,9	19,2	10,9	15,9	21,4	12,0	10,9	12,8	20,7	20,0	17,1	10,4	19,3	17,5	18,5	23,3	21,6	13,3	16,9	16,1	8,8	21,2	17,1	15,7	14,8	6,7
	E	27,9	15,0	11,1	18,4	39,4	25,0	23,3	17,8	16,7	20,8	15,4	24,3	21,9	14,3	25,4	26,0	25,5	11,6	25,0	20,0	37,0	15,4	13,8	16,0	19,8	16,7	15,8	35,0	18,5	30,0	21,6	26,7	27,0	6,5	11,8	15,4	18,6	21,4	25,9	33,3
13	nulo				4,1		3,8	1,2	2,2				1,4		3,6	3,0	1,4	3,6		3,6		4,3			4,0	0,9	2,1	1,8			3,3		4,4	2,2			1,9		2,9		
	A	9,3	15,0	13,9	11,2		21,2	8,1	6,7	7,1	8,3	7,7	11,4	9,4	10,7	11,9	8,2	9,1	8,7	3,6	32,0	2,2	5,1	10,3	20,0	13,5	16,7	5,3	10,0	7,4	3,3	9,8	11,1	11,2	9,7	8,8	15,4	10,0	7,1	22,2	
	B	23,3	17,5	16,7	22,4	18,2	30,8	20,9	22,2	7,1	16,7	23,1	17,1	25,0	21,4	19,4	11,0	23,6	20,3	35,7	24,0	15,2	30,8	31,0	16,0	17,1	17,7	24,6	20,0	18,5	23,3	15,7	11,1	19,1	38,7	26,5	25,0	17,1	21,4	11,1	26,7
	C	41,9	35,0	30,6	40,8	60,6	28,8	40,7	37,8	52,4	54,2	40,4	44,3	40,6	28,6	43,3	52,1	40,0	40,6	35,7	20,0	43,5	35,9	31,0	52,0	42,3	44,8	40,4	40,0	37,0	36,7	49,0	42,2	43,8	25,8	35,3	38,5	38,6	42,9	33,3	56,7
	D	2,3	12,5	16,7	9,2	3,0	1,9	10,5	11,1	11,9	8,3	11,5	10,0	6,3		10,4	11,0	1,8	11,6	7,1	12,0	13,0	7,7	6,9	4,0	9,0	5,2	5,3	15,0	11,1	16,7	11,8	13,3	6,7	6,5	5,9	7,7	8,6	7,1	14,8	10,0
	E	23,3	20,0	22,2	12,2	18,2	13,5	18,6	20,0	21,4	12,5	17,3	15,7	18,8	35,7	11,9	16,4	21,8	18,8	14,3	12,0	21,7	20,5	20,7	4,0	17,1	13,5	22,8	15,0	25,9	16,7	13,7	17,8	16,9	19,4	23,5	11,5	25,7	18,6	18,5	6,7
14	nulo				2,0			1,2	2,2							1,5	1,4			3,6		2,2				0,9	2,1						2,2			2,9			1,4		
	A	23,3	27,5	22,2	20,4	9,1	30,8	18,6	15,6	16,7	25,0	17,3	14,3	40,6	28,6	17,9	23,3	21,8	18,8	14,3	24,0	28,3	33,3	6,9	24,0	16,2	25,0	14,0	12,5	25,9	26,7	27,5	17,8	15,7	22,6	26,5	28,8	15,7	24,3	11,1	20,0
	B	30,2	35,0	19,4	25,5	39,4	32,7	23,3	24,4	40,5	25,0	36,5	27,1	25,0	25,0	28,4	27,4	25,5	36,2	32,1	16,0	26,1	20,5	34,5	24,0	32,4	29,2	35,1	22,5	29,6	23,3	31,4	24,4	33,7	19,4	26,5	32,7	31,4	27,1	14,8	33,3
	C	20,9	15,0	13,9	25,5	24,2	13,5	27,9	22,2	9,5	33,3	21,2	28,6	15,6	17,9	17,9	23,3	21,8	21,7	10,7	24,0	15,2	15,4	24,1	24,0	24,3	21,9	17,5	12,5	14,8	43,3	17,6	15,6	28,1	22,6	14,7	15,4	21,4	22,9	33,3	16,7
	D	18,6	17,5	30,6	23,5	24,2	19,2	26,7	24,4	21,4	16,7	21,2	20,0	15,6	25,0	29,9	23,3	21,8	17,4	39,3	20,0	26,1	12,8	31,0	24,0	22,5	15,6	29,8	42,5	22,2	6,7	17,6	31,1	20,2	29,0	20,6	17,3	25,7	18,6	33,3	26,7
	E	7,0	5,0	13,9	3,1	3,0	3,8	2,3	11,1	11,9		3,8	10,0	3,1	3,6	4,5	1,4	9,1	5,8		16,0	2,2	17,9	3,4	4,0	3,6	6,3	3,5	10,0	7,4		5,9	8,9	2,2	6,5	8,8	5,8	5,7	5,7	7,4	3,3
15	nulo				1,0			1,2								1,5				3,6		2,2					1,0						2,2								
	A	44,2	35,0	36,1	38,8	36,4	38,5	32,6	37,8	50,0	37,5	32,7	44,3	31,3	42,9	37,3	41,1	30,9	43,5	28,6	44,0	39,1	38,5	41,4	36,0	37,8	42,7	33,3	45,0	25,9	36,7	47,1	42,2	31,5	32,3	44,1	51,9	31,4	35,7	33,3	43,3
	B	18,6	17,5	25,0	12,2	9,1	9,6	17,4	15,6	16,7	20,8	26,9	14,3	6,3	25,0	9,0	19,2	18,2	11,6	7,1	20,0	8,7	15,4	17,2	20,0	17,1	12,5	15,8	10,0	25,9	23,3	11,8	11,1	21,3	19,4	8,8	13,5	15,7	17,1	22,2	10,0
	C	14,0	15,0	13,9	19,4	15,2	19,2	17,4	15,6	11,9	16,7	11,5	11,4	21,9	21,4	20,9	12,3	20,0	15,9	21,4	16,0	13,0	10,3	20,7	16,0	18,9	15,6	24,6	7,5	11,1	20,0	13,7	15,6	16,9	16,1	20,6	17,3	17,1	14,3	11,1	23,3
	D	9,3	22,5	16,7	17,3	33,3	25,0	18,6	20,0	9,5	20,8	13,5	17,1	31,3	10,7	22,4	20,5	21,8	11,6	32,1	12,0	28,3	17,9	13,8	20,0	16,2	16,7	15,8	32,5	18,5	13,3	23,5	17,8	19,1	12,9	17,6	11,5	22,9	24,3	11,1	16,7
	E	14,0	10,0	8,3	11,2	6,1	7,7	12,8	11,1	11,9	4,2	15,4	12,9	9,4		9,0	6,8	9,1	17,4	7,1	8,0	8,7	17,9	6,9	8,0	9,9	11,5	10,5	5,0	18,5	6,7	3,9	11,1	11,2	19,4	8,8	5,8	12,9	8,6	22,2	6,7

Table A.7: Histórico do CEM 111.

itens		9					10					11					12					13					14					15				
		A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
1	nulo																																			
	A	15,0	16,1	16,7	21,6	20,0	13,6	22,6	14,8	18,8	18,2	20,5	14,0	16,7	18,9	11,4	20,5	12,9	18,0	12,5	22,6	15,4	19,6	17,5	4,5	22,7	19,2	18,1	17,0	14,0	21,4	19,8	20,5	14,6	8,5	23,1
	B	15,0	11,3	18,8	18,9	20,0	15,9	15,1	14,8	16,7	22,7	12,3	14,0	25,0	17,6	17,1	11,4	19,4	14,0	25,0	11,3	23,1	13,7	13,6	22,7	18,2	21,2	19,4	11,3	12,3	14,3	14,6	17,9	14,6	19,1	15,4
	C	13,3	21,0	18,8	8,1	5,0	13,6	17,0	16,0	12,5	9,1	13,7	11,6	12,5	14,9	20,0	11,4	17,7	18,0	17,5	7,5	19,2	11,8	10,7	27,3	18,2	15,4	9,7	9,4	19,3	35,7	13,5	23,1	12,2	12,8	11,5
	D	36,7	45,2	35,4	35,1	40,0	47,7	24,5	43,2	37,5	40,9	34,2	51,2	37,5	36,5	40,0	43,2	41,9	42,0	32,5	34,0	42,3	43,1	38,8	40,9	27,3	38,5	34,7	47,2	40,4	21,4	39,6	30,8	46,3	36,2	42,3
	E	20,0	6,5	10,4	16,2	15,0	9,1	20,8	11,1	14,6	9,1	19,2	9,3	8,3	12,2	11,4	13,6	8,1	8,0	12,5	24,5		11,8	19,4	4,5	13,6	5,8	18,1	15,1	14,0	7,1	12,5	7,7	12,2	23,4	7,7
2	nulo	1,7								2,1		1,4								2,5				1,0				1,4				1,0				
	A	16,7	25,8	16,7	18,9	25,0	18,2	20,8	28,4	14,6	13,6	20,5	32,6	20,8	17,6	14,3	18,2	21,0	22,0	17,5	24,5	42,3	31,4	14,6	4,5	15,9	30,8	23,6	13,2	17,5	14,3	20,8	12,8	24,4	27,7	15,4
	B	36,7	29,0	33,3	27,0	47,5	40,9	43,4	29,6	27,1	36,4	31,5	32,6	45,8	35,1	34,3	38,6	30,6	34,0	32,5	37,7	26,9	35,3	34,0	40,9	36,4	30,8	27,8	45,3	40,4	14,3	29,2	38,5	36,6	34,0	42,3
	C	15,0	17,7	20,8	29,7	7,5	18,2	13,2	17,3	20,8	22,7	20,5	11,6	25,0	17,6	14,3	22,7	17,7	22,0	10,0	15,1	11,5	19,6	16,5	22,7	20,5	13,5	15,3	18,9	19,3	35,7	17,7	17,9	17,1	19,1	19,2
	D	18,3	19,4	12,5	18,9	15,0	15,9	17,0	12,3	22,9	22,7	19,2	14,0	4,2	16,2	25,7	13,6	19,4	18,0	20,0	13,2	11,5	5,9	21,4	22,7	20,5	13,5	23,6	7,5	15,8	35,7	21,9	17,9	12,2	8,5	19,2
	E	11,7	8,1	16,7	5,4	5,0	6,8	5,7	12,3	12,5	4,5	6,8	9,3	4,2	13,5	11,4	6,8	11,3	4,0	17,5	9,4	7,7	7,8	12,6	9,1	6,8	11,5	8,3	15,1	7,0		9,4	12,8	9,8	10,6	3,8
3	nulo										4,5							1,6						1,0								1,0				
	A	13,3	16,1	33,3	32,4	15,0	29,5	15,1	21,0	22,9	13,6	15,1	27,9	25,0	23,0	17,1	25,0	19,4	28,0	17,5	15,1	15,4	23,5	20,4	27,3	20,5	17,3	26,4	20,8	19,3	14,3	17,7	35,9	14,6	14,9	30,8
	B	40,0	25,8	22,9	18,9	30,0	29,5	24,5	33,3	27,1	18,2	39,7	30,2	12,5	21,6	25,7	15,9	29,0	18,0	47,5	32,1	30,8	23,5	30,1	31,8	25,0	19,2	26,4	37,7	24,6	50,0	32,3	25,6	19,5	25,5	34,6
	C	5,0	11,3	16,7	24,3	10,0	15,9	15,1	8,6	10,4	22,7	16,4	9,3	16,7	9,5	14,3	13,6	14,5	18,0	2,5	13,2	11,5	15,7	12,6	9,1	13,6	25,0	11,1	9,4	8,8	7,1	10,4	5,1	17,1	21,3	11,5
	D	11,7	11,3	10,4	10,8	12,5	13,6	17,0	9,9	10,4		1,4	16,3	12,5	16,2	14,3	18,2	14,5	8,0	7,5	7,5	11,5	11,8	7,8		22,7	15,4	9,7	9,4	12,3	7,1	12,5	17,9	14,6	6,4	
	E	30,0	35,5	16,7	13,5	32,5	11,4	28,3	27,2	29,2	40,9	27,4	16,3	33,3	29,7	28,6	27,3	21,0	28,0	25,0	32,1	30,8	25,5	28,2	31,8	18,2	23,1	26,4	22,6	35,1	21,4	26,0	15,4	34,1	31,9	23,1
4	nulo																																			
	A	35,0	32,3	16,7	21,6	35,0	34,1	28,3	32,1	27,1	18,2	27,4	27,9	20,8	39,2	17,1	22,7	30,6	22,0	35,0	35,8	23,1	15,7	36,9	36,4	27,3	32,7	27,8	32,1	29,8	7,1	31,3	35,9	22,0	31,9	19,2
	B	20,0	24,2	20,8	21,6	22,5	15,9	24,5	18,5	20,8	40,9	27,4	16,3	37,5	20,3	11,4	36,4	21,0	10,0	15,0	26,4	19,2	25,5	21,4	4,5	27,3	23,1	19,4	22,6	21,1	35,7	17,7	25,6	26,8	25,5	19,2
	C	21,7	24,2	39,6	29,7	27,5	29,5	30,2	19,8	37,5	27,3	26,0	25,6	20,8	23,0	48,6	27,3	32,3	36,0	27,5	15,1	23,1	27,5	27,2	36,4	29,5	25,0	34,7	28,3	21,1	28,6	31,3	20,5	26,8	17,0	46,2
	D	13,3	9,7	10,4	16,2	7,5	9,1	11,3	16,0	6,3	9,1	15,1	14,0	8,3	5,4	14,3	6,8	6,5	16,0	15,0	13,2	3,8	19,6	9,7	9,1	9,1	7,7	12,5	5,7	19,3		8,3	5,1	14,6	19,1	7,7
	E	10,0	9,7	12,5	10,8	7,5	11,4	5,7	13,6	8,3	4,5	4,1	16,3	12,5	12,2	8,6	6,8	9,7	16,0	7,5	9,4	30,8	11,8	4,9	13,6	6,8	11,5	5,6	11,3	8,8	28,6	11,5	12,8	9,8	6,4	7,7
5	nulo																																			
	A	11,7	16,1	20,8	16,2	30,0	13,6	30,2	12,3	25,0	9,1	23,3	18,6	12,5	12,2	25,7	9,1	25,8	8,0	12,5	32,1	3,8	13,7	19,4	27,3	22,7	25,0	16,7	13,2	21,1	7,1	18,8	10,3	14,6	27,7	15,4
	B	5,0	21,0	18,8	18,9	15,0	11,4	15,1	14,8	20,8	18,2	15,1	11,6	25,0	16,2	14,3	15,9	17,7	20,0	12,5	11,3	7,7	23,5	13,6	13,6	18,2	25,0	11,1	11,3	8,8	50,0	15,6	15,4	9,8	14,9	26,9
	C	8,3	8,1	16,7	21,6	7,5	13,6	15,1	6,2	16,7	9,1	15,1	7,0	16,7	8,1	14,3	11,4	9,7	16,0	15,0	7,5	11,5	17,6	8,7	9,1	13,6	3,8	13,9	13,2	15,8	7,1	12,5	12,8	14,6	8,5	7,7
	D	15,0	8,1	16,7	5,4	2,5	6,8	13,2	8,6	4,2	22,7	9,6	2,3	8,3	14,9	11,4	9,1	8,1	12,0	12,5	7,5	19,2	7,8	12,6	4,5	2,3	11,5	8,3	11,3	10,5	7,1	9,4	12,8	9,8	10,6	7,7
	E	60,0	46,8	27,1	37,8	45,0	54,5	26,4	58,0	33,3	40,9	37,0	60,5	37,5	48,6	34,3	54,5	38,7	44,0	47,5	41,5	57,7	37,3	45,6	45,5	43,2	34,6	50,0	50,9	43,9	28,6	43,8	48,7	51,2	38,3	42,3
6	nulo																																			
	A	41,7	46,8	29,2	27,0	42,5	45,5	32,1	40,7	29,2	50,0	27,4	37,2	25,0	51,4	42,9	45,5	43,5	46,0	25,0	30,2	61,5	33,3	41,7	22,7	29,5	46,2	38,9	39,6	26,3	42,9	42,7	30,8	36,6	34,0	42,3
	B	26,7	12,9	33,3	32,4	12,5	15,9	32,1	17,3	25,0	27,3	31,5	20,9	29,2	9,5	31,4	27,3	21,0	22,0	27,5	17,0	11,5	27,5	22,3	13,6	29,5	15,4	27,8	18,9	29,8	14,3	19,8	23,1	34,1	19,1	23,1
	C	21,7	11,3	10,4	18,9	17,5	11,4	22,6	18,5	12,5	9,1	20,5	16,3	16,7	14,9	8,6	9,1	14,5	12,0	17,5	26,4	15,4	15,7	15,5	27,3	13,6	9,6	12,5	9,4	29,8	28,6	18,8	10,3	7,3	27,7	7,7
	D	5,0	17,7	8,3	5,4	15,0	6,8	9,4	11,1	16,7	9,1	11,0	9,3	16,7	10,8	8,6	4,5	11,3	16,0	12,5	9,4	7,7	9,8	9,7	13,6	15,9	13,5	11,1	7,5	10,5	14,3	7,3	17,9	7,3	10,6	19,2
	E	5,0	11,3	18,8	16,2	12,5	20,5	3,8	12,3	16,7	4,5	9,6	16,3	12,5	13,5	8,6	13,6	9,7	4,0	17,5	17,0	3,8	13,7	10,7	22,7	11,4	15,4	9,7	24,5	3,5		11,5	17,9	14,6	8,5	7,7
7	nulo																																			
	A	21,7	24,2	22,9	10,8	17,5	31,8	18,9	17,3	18,8	13,6	24,7	14,0	16,7	21,6	20,0	22,7	11,3	24,0	27,5	20,8	19,2	15,7	24,3	27,3	15,9	26,9	22,2	17,0	15,8	21,4	25,0	15,4	17,1	25,5	7,7
	B	20,0	22,6	6,3	21,6	20,0	15,9	26,4	17,3	12,5	13,6	19,2	18,6	20,8	13,5	22,9	9,1	21,0	18,0	15,0	22,6	19,2	9,8	18,4	27,3	18,2	15,4	15,3	13,2	24,6	28,6	19,8	12,8	17,1	17,0	19,2
	C	40,0	27,4	39,6	35,1	40,0	34,1	30,2	39,5	37,5	36,4	27,4	41,9	16,7	47,3	34,3	36,4	32,3	28,0	37,5	45,3	38,5	33,3	37,9	27,3	34,1	26,9	41,7	47,2	31,6	14,3	29,2	48,7	36,6	36,2	38,5
	D	6,7	12,9	14,6	16,2	12,5	9,1	11,3	9,9	16,7	22,7	13,7	14,0	20,8	6,8	14,3	22,7	12,9	12,0	12,5	3,8	11,5	23,5	7,8	9,1	13,6	13,5	8,3	13,2	15,8	14,3	10,4	15,4	12,2	8,5	23,1
	E	11,7	12,9	16,7	16,2	10,0	9,1	13,2	16,0	14,6	13,6	15,1	11,6	25,0	10,8	8,6	9,1	22,6	18,0	7,5	7,5	11,5	17,6	11,7	9,1	18,2	17,3	12,5	9,4	12,3	21,4	15,6	7,7	17,1	12,8	11,5
8	nulo		1,6					1,9					2,3					1,6																		
	A	26,7	14,5	29,2	13,5	20,0	15,9	24,5	22,2	16,7	22,7	23,3	18,6	16,7	18,9	25,7	18,2	27,4	16,0	27,5	15,1	30,8	25,5	19,4	18,2	13,6	28,8	23,6	15,1	15,8	21,4	28,1	17,9	22,0	12,8	11,5
	B	23,3	16,1	35,4	48,6	25,0	36,4	34,0	24,7	20,8	27,3	28,8	30,2	45,8	21,6	25,7	31,8	17,7	40,0	30,0	24,5	26,9	23,5	26,2	27,3	40,9	21,2	30,6	28,3	31,6	28,6	22,9	28,2	29,3	34,0	34,6
	C	26,7	43,5	18,8	21,6	20,0	22,7	18,9	29,6	39,6	27,3	26,0	32,6	16,7	31,1	25,7	27,3	33,9	20,0	27,5	28,3	19,2	29,4	29,1	22,7	29,5	32,7	26,4	30,2	22,8	28,6	26,0	30,8	24,4	36,2	23,1
	D	10,0	12,9	12,5	2,7	15,0	4,5	9,4	14,8	10,4	13,6	8,2	7,0	8,3	17,6	8,6	13,6	9,7	8,0	10,0	13,2	23,1	5,9	8,7	18,2	11,4	5,8	5,6	17,0	15,8	14,3	9,4	15,4	7,3	6,4	23,1
	E	13,3	11,3	4,2	13,5	20,0	20,5	11,3	8,6	12,5	9,1	13,7	9,3	12,5	10,8	14,3	9,1	9,7	16,0	5,0	18,9		15,7	16,5	13,6	4,5	11,5	13,9	9,4	14,0	7,1	13,5	7,7	17,1	10,6	7,7
9	nulo							1,9			9,1			4,2	1,4		2,3	1,6			1,9			2,9			3,8					1,0			4,3	
	A	100,0					20,5	13,2	37,0	18,8	18,2	17,8	25,6	25,0	32,4	17,1	18,2	35,5	20,0	22,5	18,9	19,2	17,6	30,1	18,2	22,7	21,2	22,2	24,5	26,3	35,7	32,3	15,4	14,6	23,4	23,1
	B		100,0				20,5	15,1	28,4	35,4	22,7	30,1	30,2	29,2	23,0	8,6	27,3	29,0	24,0	10,0	30,2	23,1	17,6	24,3	31,8	27,3	32,7	29,2	17,0	17,5	28,6	26,0	20,5	34,1	19,1	19,2
	C			100,0			18,2	28,3	12,3	16,7	27,3	19,2	11,6	20,8	20,3	25,7	20,5	19,4	26,0	25,0	7,5	26,9	21,6	13,6	27,3	22,7	13,5	15,3	26,4	24,6	14,3	12,5	33,3	24,4	8,5	34,6
	D				100,0		22,7	18,9	9,9	16,7	4,5	11,0	20,9	12,5	10,8	25,7	20,5	8,1	14,0	17,5	17,0	11,5	27,5	10,7	9,1	15,9	19,2	18,1	11,3	14,0		10,4	20,5	17,1	19,1	11,5
	E					100,0	18,2	22,6	12,3	12,5	18,2	21,9	11,6	8,3	12,2	22,9	11,4	6,5	16,0	25,0	24,5	19,2	15,7	18,4	13,6	11,4	9,6	15,3	20,8	17,5	21,4	17,7	10,3	9,8	25,5	11,5
10	nulo	1,7		2,1											2,7				2,0				2,0						1,9	1,8		1,0	2,6			
	A	15,0	14,5	16,7	27,0	20,0	100,0					11,0	20,9	16,7	12,2	40,0	20,5	9,7	34,0	12,5	13,2	26,9	15,7	16,5	27,3	13,6	19,2	19,4	18,9	15,8	7,1	21,9	17,9	14,6	12,8	15,4
	B	11,7	12,9	31,3	27,0	30,0		100,0				28,8	18,6	16,7	20,3	14,3	13,6	19,4	24,0	25,0	24,5	15,4	17,6	25,2	13,6	22,7	21,2	19,4	22,6	21,1	21,4	16,7	17,9	22,0	34,0	15,4
	C	50,0	37,1	20,8	21,6	25,0			100,0			28,8	34,9	20,8	43,2	22,9	29,5	45,2	18,0	22,5	41,5	42,3	31,4	30,1	27,3	36,4	30,8	29,2	22,6	47,4	35,7	35,4	33,3	34,1	25,5	30,8
	D	15,0	27,4	16,7	21,6	15,0				100,0		27,4	23,3	20,8	10,8	14,3	25,0	17,7	16,0	22,5	17,0	3,8	27,5	17,5	18,2	22,7	15,4	27,8	24,5	8,8	14,3	18,8	20,5	14,6	17,0	30,8
	E	6,7	8,1	12,5	2,7	10,0					100,0	4,1	2,3	25,0	10,8	8,6	11,4	8,1	6,0	17,5	3,8	11,5	5,9	10,7	13,6	4,5	13,5	4,2	9,4	5,3	21,4	6,3	7,7	14,6	10,6	7,7
11	nulo										4,5							1,6						1,0								1,0				
	A	21,7	35,5	29,2	21,6	40,0	18,2	39,6	25,9	41,7	13,6	100,0					15,9	21,0	34,0	37,5	39,6	15,4	35,3	33,0	22,7	27,3	25,0	33,3	26,4	28,1	42,9	24,0	17,9	36,6	38,3	38,5
	B	18,3	21,0	10,4	24,3	12,5	20,5	15,1	18,5	20,8	4,5		100,0				18,2	16,1	16,0	17,5	18,9	11,5	15,7	15,5	27,3	18,2	13,5	18,1	22,6	17,5		19,8	20,5	14,6	12,8	11,5
	C	10,0	11,3	10,4	8,1	5,0	9,1	7,5	6,2	10,4	27,3			100,0			18,2	9,7	4,0	10,0	7,5	7,7	5,9	10,7	9,1	13,6	13,5	9,7	5,7	10,5	7,1	9,4	12,8	9,8	6,4	11,5
	D	40,0	27,4	31,3	21,6	22,5	20,5	28,3	39,5	16,7	36,4				100,0		31,8	37,1	26,0	17,5	30,2	50,0	25,5	27,2	18,2	31,8	32,7	22,2	39,6	26,3	35,7	26,0	41,0	29,3	34,0	19,2
	E	10,0	4,8	18,8	24,3	20,0	31,8	9,4	9,9	10,4	13,6					100,0	15,9	14,5	20,0	17,5	3,8	15,4	17,6	12,6	22,7	9,1	15,4	16,7	5,7	17,5	14,3	19,8	7,7	9,8	8,5	19,2
12	nulo	1,7													1,4															1,8		1,0				
	A	13,3	19,4	18,8	24,3	12,5	20,5	11,3	16,0	22,9	22,7	9,6	18,6	33,3	18,9	20,0	100,0					15,4	17,6	18,4		27,3	17,3	23,6	9,4	19,3	14,3	14,6	28,2	22,0	14,9	11,5
	B	36,7	29,0	25,0	13,5	10,0	13,6	22,6	34,6	22,9	22,7	17,8	23,3	25,0	31,1	25,7		100,0				30,8	19,6	29,1	18,2	18,2	23,1	27,8	17,0	26,3	28,6	31,3	20,5	17,1	14,9	34,6
	C	16,7	19,4	27,1	18,9	20,0	38,6	22,6	11,1	16,7	13,6	23,3	18,6	8,3	17,6	28,6			100,0			19,2	25,5	13,6	31,8	25,0	17,3	19,4	22,6	19,3	28,6	22,9	12,8	19,5	17,0	26,9
	D	15,0	6,5	20,8	18,9	25,0	11,4	18,9	11,1	18,8	31,8	20,5	16,3	16,7	9,5	20,0				100,0		15,4	15,7	16,5	27,3	11,4	17,3	15,3	22,6	14,0		10,4	12,8	24,4	21,3	19,2
	E	16,7	25,8	8,3	24,3	32,5	15,9	24,5	27,2	18,8	9,1	28,8	23,3	16,7	21,6	5,7					100,0	19,2	21,6	22,3	22,7	18,2	25,0	13,9	28,3	19,3	28,6	19,8	25,6	17,1	31,9	7,7
13	nulo	1,7	4,8					1,9	1,2	2,1			4,7		2,7			3,2			1,9						3,8			1,8		2,1		2,4		
	A	8,3	9,7	14,6	8,1	12,5	15,9	7,5	13,6	2,1	13,6	5,5	7,0	8,3	17,6	11,4	9,1	12,9	10,0	10,0	9,4	100,0					11,5	5,6	9,4	10,5	35,7	12,5	5,1	19,5	4,3	7,7
	B	15,0	14,5	22,9	37,8	20,0	18,2	17,0	19,8	29,2	13,6	24,7	18,6	12,5	17,6	25,7	20,5	16,1	26,0	20,0	20,8		100,0				26,9	12,5	34,0	15,8	7,1	16,7	25,6	22,0	23,4	19,2
	C	51,7	40,3	29,2	29,7	47,5	38,6	49,1	38,3	37,5	50,0	46,6	37,2	45,8	37,8	37,1	43,2	48,4	28,0	42,5	43,4			100,0			36,5	58,3	24,5	43,9	21,4	43,8	28,2	24,4	55,3	53,8
	D	6,7	11,3	12,5	5,4	7,5	13,6	5,7	7,4	8,3	13,6	6,8	14,0	8,3	5,4	14,3		6,5	14,0	15,0	9,4				100,0		7,7	4,2	15,1	8,8	14,3	10,4	10,3	9,8	4,3	7,7
	E	16,7	19,4	20,8	18,9	12,5	13,6	18,9	19,8	20,8	9,1	16,4	18,6	25,0	18,9	11,4	27,3	12,9	22,0	12,5	15,1					100,0	13,5	19,4	17,0	19,3	21,4	14,6	30,8	22,0	12,8	11,5
14	nulo		1,6					1,9			4,5		2,3					3,2						1,0								1,0				
	A	18,3	27,4	14,6	27,0	12,5	22,7	20,8	19,8	16,7	31,8	17,8	16,3	29,2	23,0	22,9	20,5	19,4	18,0	22,5	24,5	23,1	27,5	18,4	18,2	15,9	100,0					17,7	20,5	31,7	21,3	15,4
	B	26,7	33,9	22,9	35,1	27,5	31,8	26,4	25,9	41,7	13,6	32,9	30,2	29,2	21,6	34,3	38,6	32,3	28,0	27,5	18,9	15,4	17,6	40,8	13,6	31,8		100,0				33,3	17,9	24,4	31,9	30,8
	C	21,7	14,5	29,2	16,2	27,5	22,7	22,6	14,8	27,1	22,7	19,2	27,9	12,5	28,4	8,6	11,4	14,5	24,0	30,0	28,3	19,2	35,3	12,6	36,4	20,5			100,0			14,6	35,9	19,5	19,1	30,8
	D	25,0	16,1	29,2	21,6	25,0	20,5	22,6	33,3	10,4	13,6	21,9	23,3	25,0	20,3	28,6	25,0	24,2	22,0	20,0	20,8	23,1	17,6	24,3	22,7	25,0				100,0		25,0	25,6	19,5	21,3	19,2
	E	8,3	6,5	4,2		7,5	2,3	5,7	6,2	4,2	13,6	8,2		4,2	6,8	5,7	4,5	6,5	8,0		7,5	19,2	2,0	2,9	9,1	6,8					100,0	8,3		4,9	6,4	3,8
15	nulo		1,6					1,9					2,3					1,6																		
	A	51,7	40,3	25,0	27,0	42,5	47,7	30,2	42,0	37,5	27,3	31,5	44,2	37,5	33,8	54,3	31,8	48,4	44,0	25,0	35,8	46,2	31,4	40,8	45,5	31,8	32,7	44,4	26,4	42,1	57,1	100,0				
	B	10,0	12,9	27,1	21,6	10,0	15,9	13,2	16,0	16,7	13,6	9,6	18,6	20,8	21,6	8,6	25,0	12,9	10,0	12,5	18,9	7,7	19,6	10,7	18,2	27,3	15,4	9,7	26,4	17,5			100,0			
	C	10,0	22,6	20,8	18,9	10,0	13,6	17,0	17,3	12,5	27,3	20,5	14,0	16,7	16,2	11,4	20,5	11,3	16,0	25,0	13,2	30,8	17,6	9,7	18,2	20,5	25,0	13,9	15,1	14,0	14,3			100,0		
	D	18,3	14,5	8,3	24,3	30,0	13,6	30,2	14,8	16,7	22,7	24,7	14,0	12,5	21,6	11,4	15,9	11,3	16,0	25,0	28,3	7,7	21,6	25,2	9,1	13,6	19,2	20,8	17,0	17,5	21,4				100,0	
	E	10,0	8,1	18,8	8,1	7,5	9,1	7,5	9,9	16,7	9,1	13,7	7,0	12,5	6,8	14,3	6,8	14,5	14,0	12,5	3,8	7,7	9,8	13,6	9,1	6,8	7,7	11,1	15,1	8,8	7,1					100,0

Table A.8: Histórico do CEM 111.

itens		1					2					3					4					5					6					7					8				
		A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
1	nulo																																								
	A	100,0					7,7	9,3	7,8	13,7	17,6	11,3	11,1	10,7	5,9	8,3	7,1	17,9	10,0	7,0	8,9	9,1	16,1	20,9		6,7	6,6	10,9	6,3	19,6	9,1	17,1	5,4	7,5	13,0	16,7	4,4	21,0	8,3	8,8	3,0
	B		100,0				17,9	10,5	6,5	27,5	11,8	22,6	3,0	21,4	29,4	15,3	15,3	8,9	15,0	11,6	17,8	9,1	16,1	9,3	23,5	14,8	14,5	10,9	22,9	8,7	9,1	8,6	10,8	13,8	22,2	12,5	15,6	14,5	14,6	8,8	12,1
	C			100,0			23,1	10,5	3,9	13,7	23,5	13,2	9,1	7,1	29,4	12,5	7,1	14,3	15,0	11,6	15,6	15,9	12,9	9,3	23,5	9,6	17,1	17,2	8,3	4,3	6,1	22,9	6,8	7,5	16,7	16,7	11,1	9,7	11,5	11,8	18,2
	D				100,0		48,7	64,0	80,5	41,2	47,1	50,9	70,7	53,6	35,3	63,9	64,7	57,1	57,5	67,4	55,6	65,9	54,8	51,2	52,9	65,2	57,9	54,7	60,4	67,4	72,7	48,6	75,7	63,8	46,3	54,2	62,2	51,6	64,6	64,7	63,6
	E					100,0	2,6	5,8	1,3	3,9		1,9	6,1	7,1			5,9	1,8	2,5	2,3	2,2			9,3		3,7	3,9	6,3	2,1		3,0	2,9	1,4	7,5	1,9		6,7	3,2	1,0	5,9	3,0
2	nulo				0,6											1,4	1,2									0,7	1,3									4,2			1,0		
	A	11,1	18,9	28,1	11,4	11,1	100,0					15,1	10,1	17,9	17,6	18,1	11,8	16,1	17,5	9,3	20,0	11,4	12,9	16,3	23,5	14,1	11,8	9,4	22,9	10,9	24,2	5,7	13,5	12,5	27,8	8,3	8,9	21,0	13,5	14,7	12,1
	B	29,6	24,3	28,1	33,1	55,6		100,0				41,5	28,3	42,9	23,5	27,8	30,6	30,4	35,0	39,5	26,7	29,5	16,1	41,9	17,6	34,8	46,1	18,8	29,2	32,6	24,2	31,4	32,4	32,5	25,9	37,5	28,9	29,0	33,3	29,4	39,4
	C	22,2	13,5	9,4	37,3	11,1			100,0			17,0	38,4	14,3	41,2	26,4	30,6	30,4	20,0	34,9	22,2	45,5	25,8	14,0	17,6	29,6	22,4	45,3	25,0	23,9	24,2	28,6	43,2	27,5	13,0	20,8	31,1	25,8	31,3	26,5	24,2
	D	25,9	37,8	21,9	12,7	22,2				100,0		17,0	20,2	21,4		20,8	16,5	17,9	25,0	9,3	26,7	6,8	29,0	18,6	29,4	18,5	14,5	18,8	16,7	26,1	18,2	22,9	8,1	17,5	27,8	29,2	24,4	24,2	13,5	20,6	12,1
	E	11,1	5,4	12,5	4,8						100,0	9,4	3,0	3,6	17,6	5,6	9,4	5,4	2,5	7,0	4,4	6,8	16,1	9,3	11,8	2,2	3,9	7,8	6,3	6,5	9,1	11,4	2,7	10,0	5,6		6,7		7,3	8,8	12,1
3	nulo				1,2					2,0	5,9						1,2						3,2			0,7	2,6							1,3						2,9	
	A	22,2	32,4	21,9	16,3	11,1	20,5	25,6	11,7	17,6	29,4	100,0					12,9	16,1	30,0	20,9	26,7	18,2	19,4	20,9	17,6	20,0	11,8	23,4	29,2	17,4	15,2	14,3	18,9	20,0	20,4	25,0	28,9	19,4	13,5	29,4	15,2
	B	40,7	8,1	28,1	42,2	66,7	25,6	32,6	49,4	39,2	17,6		100,0				41,2	25,0	27,5	41,9	46,7	43,2	29,0	51,2	17,6	33,3	31,6	45,3	29,2	37,0	39,4	45,7	37,8	38,8	29,6	29,2	37,8	32,3	37,5	29,4	48,5
	C	11,1	16,2	6,3	9,0	22,2	12,8	14,0	5,2	11,8	5,9			100,0			12,9	5,4	7,5	14,0	11,1	4,5	6,5	7,0	23,5	12,6	14,5	6,3	10,4	10,9	9,1	2,9	10,8	13,8	11,1	8,3	8,9	17,7	9,4	5,9	6,1
	D	3,7	13,5	15,6	3,6		7,7	4,7	9,1		17,6				100,0		3,5	12,5	7,5	2,3	6,7	11,4	9,7	4,7	11,8	3,7	6,6	3,1	6,3	6,5	12,1	8,6	8,1		9,3	12,5	4,4	4,8	9,4	2,9	6,1
	E	22,2	29,7	28,1	27,7		33,3	23,3	24,7	29,4	23,5					100,0	28,2	41,1	27,5	20,9	8,9	22,7	32,3	16,3	29,4	29,6	32,9	21,9	25,0	28,3	24,2	28,6	24,3	26,3	29,6	25,0	20,0	25,8	30,2	29,4	24,2
4	nulo				1,2				1,3	2,0						1,4										1,5	2,6										2,2				
	A	22,2	35,1	18,8	33,1	55,6	25,6	30,2	33,8	27,5	47,1	20,8	35,4	39,3	17,6	33,3	100,0					34,1	41,9	34,9	29,4	27,4	31,6	31,3	25,0	30,4	45,5	34,3	35,1	26,3	33,3	25,0	24,4	30,6	29,2	35,3	45,5
	B	37,0	13,5	25,0	19,3	11,1	23,1	19,8	22,1	19,6	17,6	17,0	14,1	10,7	41,2	31,9		100,0				15,9	9,7	23,3	17,6	24,4	21,1	17,2	14,6	26,1	30,3	20,0	18,9	23,8	22,2	16,7	24,4	19,4	24,0	14,7	15,2
	C	14,8	16,2	18,8	13,9	11,1	17,9	16,3	10,4	19,6	5,9	22,6	11,1	10,7	17,6	15,3			100,0			13,6	25,8	11,6	11,8	13,3	17,1	10,9	16,7	17,4	6,1	17,1	12,2	10,0	22,2	20,8	6,7	16,1	15,6	26,5	9,1
	D	11,1	13,5	15,6	17,5	11,1	10,3	19,8	19,5	7,8	17,6	17,0	18,2	21,4	5,9	12,5				100,0		18,2	9,7	9,3	5,9	20,0	13,2	26,6	14,6	15,2	3,0	14,3	20,3	23,8	3,7	8,3	24,4	17,7	16,7	8,8	6,1
	E	14,8	21,6	21,9	15,1	11,1	23,1	14,0	13,0	23,5	11,8	22,6	21,2	17,9	17,6	5,6					100,0	18,2	12,9	20,9	35,3	13,3	14,5	14,1	29,2	10,9	15,2	14,3	13,5	16,3	18,5	29,2	17,8	16,1	14,6	14,7	24,2
5	nulo				0,6					2,0			1,0						2,5																1,9			1,6			
	A	14,8	10,8	21,9	17,5		12,8	15,1	26,0	5,9	17,6	15,1	19,2	7,1	29,4	13,9	17,6	12,5	15,0	18,6	17,8	100,0					5,3	26,6	20,8	15,2	18,2	20,0	20,3	13,8	14,8	12,5	22,2	12,9	18,8	17,6	6,1
	B	18,5	13,5	12,5	10,2		10,3	5,8	10,4	17,6	29,4	11,3	9,1	7,1	17,6	13,9	15,3	5,4	20,0	7,0	8,9		100,0				7,9	3,1	16,7	17,4	21,2	20,0	2,7	8,8	18,5	20,8	6,7	17,7	3,1	17,6	24,2
	C	33,3	10,8	12,5	13,3	44,4	17,9	20,9	7,8	15,7	23,5	17,0	22,2	10,7	11,8	9,7	17,6	17,9	12,5	9,3	20,0			100,0			19,7	17,2	8,3	15,2	18,2	14,3	13,5	11,3	16,7	37,5	13,3	19,4	10,4	11,8	33,3
	D		10,8	12,5	5,4		10,3	3,5	3,9	9,8	11,8	5,7	3,0	14,3	11,8	6,9	5,9	5,4	5,0	2,3	13,3				100,0		9,2		8,3	6,5	6,1	5,7	5,4	8,8	1,9	12,5	6,7	4,8	6,3	8,8	6,1
	E	33,3	54,1	40,6	53,0	55,6	48,7	54,7	51,9	49,0	17,6	50,9	45,5	60,7	29,4	55,6	43,5	58,9	45,0	62,8	40,0					100,0	57,9	53,1	45,8	45,7	36,4	40,0	58,1	57,5	46,3	16,7	51,1	43,5	61,5	44,1	30,3
6	nulo		2,7		1,8			2,3		3,9		3,8	2,0						5,0	2,3	2,2				5,9	1,5								2,5	3,7			3,2	2,1		
	A	18,5	29,7	40,6	26,5	33,3	23,1	40,7	22,1	21,6	17,6	17,0	24,2	39,3	29,4	34,7	28,2	28,6	32,5	23,3	24,4	9,1	19,4	34,9	41,2	32,6	100,0					20,0	23,0	32,5	25,9	41,7	26,7	27,4	32,3	8,8	36,4
	B	25,9	18,9	34,4	21,1	44,4	15,4	14,0	37,7	23,5	29,4	28,3	29,3	14,3	11,8	19,4	23,5	19,6	17,5	39,5	20,0	38,6	6,5	25,6		25,2		100,0				34,3	32,4	17,5	18,5	12,5	15,6	21,0	32,3	23,5	15,2
	C	11,1	29,7	12,5	17,5	11,1	28,2	16,3	15,6	15,7	17,6	26,4	14,1	17,9	17,6	16,7	14,1	12,5	20,0	16,3	31,1	22,7	25,8	9,3	23,5	16,3			100,0			17,1	16,2	15,0	27,8	12,5	26,7	12,9	12,5	26,5	21,2
	D	33,3	10,8	6,3	18,7		12,8	17,4	14,3	23,5	17,6	15,1	17,2	17,9	17,6	18,1	16,5	21,4	20,0	16,3	11,1	15,9	25,8	16,3	17,6	15,6				100,0		8,6	20,3	20,0	9,3	29,2	15,6	22,6	12,5	20,6	18,2
	E	11,1	8,1	6,3	14,5	11,1	20,5	9,3	10,4	11,8	17,6	9,4	13,1	10,7	23,5	11,1	17,6	17,9	5,0	2,3	11,1	13,6	22,6	14,0	11,8	8,9					100,0	20,0	8,1	12,5	14,8	4,2	15,6	12,9	8,3	20,6	9,1
7	nulo				2,4			2,3	1,3	2,0		1,9	1,0			1,4	2,4							2,3		2,2	2,6	1,6			3,0						4,4		1,0		
	A	22,2	8,1	25,0	10,2	11,1	5,1	12,8	13,0	15,7	23,5	9,4	16,2	3,6	17,6	13,9	14,1	12,5	15,0	11,6	11,1	15,9	22,6	11,6	11,8	10,4	9,2	18,8	12,5	6,5	21,2	100,0					8,9	12,9	18,8	2,9	12,1
	B	14,8	21,6	15,6	33,7	11,1	25,6	27,9	41,6	11,8	11,8	26,4	28,3	28,6	35,3	25,0	30,6	25,0	22,5	34,9	22,2	34,1	6,5	23,3	23,5	31,9	22,4	37,5	25,0	32,6	18,2		100,0				24,4	9,7	39,6	26,5	30,3
	C	22,2	29,7	18,8	30,7	66,7	25,6	30,2	28,6	27,5	47,1	30,2	31,3	39,3		29,2	24,7	33,9	20,0	44,2	28,9	25,0	22,6	20,9	41,2	34,1	34,2	21,9	25,0	34,8	30,3			100,0			40,0	27,4	20,8	52,9	21,2
	D	25,9	32,4	28,1	15,1	11,1	38,5	16,3	9,1	29,4	17,6	20,8	16,2	21,4	29,4	22,2	21,2	21,4	30,0	4,7	22,2	18,2	32,3	20,9	5,9	18,5	18,4	15,6	31,3	10,9	24,2				100,0		13,3	40,3	15,6	5,9	18,2
	E	14,8	8,1	12,5	7,8		5,1	10,5	6,5	13,7		11,3	7,1	7,1	17,6	8,3	7,1	7,1	12,5	4,7	15,6	6,8	16,1	20,9	17,6	3,0	13,2	4,7	6,3	15,2	3,0					100,0	8,9	9,7	4,2	11,8	18,2
8	nulo				0,6					2,0																0,7	1,3														
	A	7,4	18,9	15,6	16,9	33,3	10,3	15,1	18,2	21,6	17,6	24,5	17,2	14,3	11,8	12,5	12,9	19,6	7,5	25,6	17,8	22,7	9,7	14,0	17,6	17,0	15,8	10,9	25,0	15,2	21,2	11,4	14,9	22,5	11,1	16,7	100,0				
	B	48,1	24,3	18,8	19,3	22,2	33,3	20,9	20,8	29,4		22,6	20,2	39,3	17,6	22,2	22,4	21,4	25,0	25,6	22,2	18,2	35,5	27,9	17,6	20,0	22,4	20,3	16,7	30,4	24,2	22,9	8,1	21,3	46,3	25,0		100,0			
	C	29,6	37,8	34,4	37,3	11,1	33,3	37,2	39,0	25,5	41,2	24,5	36,4	32,1	52,9	40,3	32,9	41,1	37,5	37,2	31,1	40,9	9,7	23,3	35,3	43,7	40,8	48,4	25,0	26,1	24,2	51,4	51,4	25,0	27,8	16,7			100,0		
	D	11,1	8,1	12,5	13,3	22,2	12,8	11,6	11,7	13,7	17,6	18,9	10,1	7,1	5,9	13,9	14,1	8,9	22,5	7,0	11,1	13,6	19,4	9,3	17,6	11,1	3,9	12,5	18,8	15,2	21,2	2,9	12,2	22,5	3,7	16,7				100,0	
	E	3,7	10,8	18,8	12,7	11,1	10,3	15,1	10,4	7,8	23,5	9,4	16,2	7,1	11,8	11,1	17,6	8,9	7,5	4,7	17,8	4,5	25,8	25,6	11,8	7,4	15,8	7,8	14,6	13,0	9,1	11,4	13,5	8,8	11,1	25,0					100,0
9	nulo			3,1	1,2			1,2		3,9				3,6		1,4			2,5	2,3		2,3			5,9	0,7	3,9								1,9	4,2		1,6		2,9	
	A	33,3	24,3	15,6	31,9	44,4	25,6	34,9	26,0	27,5	35,3	20,8	41,4	17,9	5,9	30,6	40,0	17,9	30,0	16,3	35,6	31,8	29,0	34,9	5,9	30,4	30,3	28,1	20,8	34,8	33,3	31,4	29,7	31,3	24,1	33,3	31,1	25,8	24,0	38,2	42,4
	B	14,8	18,9	34,4	28,9		23,1	19,8	28,6	31,4	29,4	35,8	22,2	21,4	17,6	26,4	23,5	25,0	25,0	27,9	31,1	20,5	12,9	14,0	52,9	30,4	18,4	32,8	29,2	28,3	18,2	28,6	29,7	25,0	22,2	20,8	22,2	12,9	40,6	26,5	12,1
	C	29,6	13,5	15,6	15,1		28,2	15,1	16,9	9,8	5,9	17,0	12,1	21,4	29,4	15,3	4,7	21,4	10,0	32,6	20,0	18,2	19,4	11,6	5,9	17,0	18,4	12,5	12,5	21,7	15,2	11,4	16,2	16,3	16,7	20,8	20,0	22,6	14,6	8,8	9,1
	D	11,1	21,6	12,5	12,0	11,1	12,8	11,6	16,9	11,8	11,8	15,1	14,1	14,3	29,4	6,9	16,5	14,3	15,0	14,0	4,4	11,4	25,8	20,9	11,8	8,9	15,8	9,4	18,8	4,3	21,2	8,6	16,2	10,0	16,7	16,7	13,3	16,1	10,4	5,9	24,2
	E	11,1	21,6	18,8	10,8	44,4	10,3	17,4	11,7	15,7	17,6	11,3	10,1	21,4	17,6	19,4	15,3	21,4	17,5	7,0	8,9	15,9	12,9	18,6	17,6	12,6	13,2	17,2	18,8	10,9	12,1	20,0	8,1	17,5	18,5	4,2	13,3	21,0	10,4	17,6	12,1
10	nulo				1,8			1,2	1,3	2,0			1,0			1,4	1,2							2,3		1,5	3,9								1,9		2,2				3,0
	A	11,1	18,9	9,4	16,9	11,1	15,4	10,5	14,3	23,5	23,5	20,8	14,1	25,0	5,9	11,1	11,8	14,3	15,0	14,0	26,7	9,1	12,9	11,6	29,4	17,8	19,7	9,4	20,8	19,6	6,1	20,0	17,6	15,0	13,0	12,5	20,0	19,4	11,5	11,8	18,2
	B	25,9	18,9	12,5	18,1		10,3	22,1	15,6	21,6	11,8	11,3	16,2	28,6	11,8	22,2	12,9	19,6	15,0	27,9	17,8	9,1	22,6	23,3	17,6	17,8	17,1	12,5	20,8	17,4	24,2	28,6	9,5	27,5	11,1	12,5	13,3	21,0	15,6	23,5	18,2
	C	29,6	29,7	37,5	24,1	55,6	33,3	26,7	23,4	29,4	41,2	26,4	27,3	14,3	41,2	33,3	36,5	32,1	20,0	16,3	26,7	31,8	45,2	30,2	23,5	23,0	27,6	31,3	31,3	26,1	24,2	28,6	13,5	27,5	44,4	37,5	31,1	32,3	22,9	23,5	36,4
	D	18,5	24,3	21,9	30,7	22,2	33,3	26,7	36,4	15,7	11,8	32,1	33,3	25,0	23,5	18,1	25,9	23,2	30,0	41,9	20,0	36,4	12,9	23,3	5,9	31,1	18,4	39,1	20,8	23,9	33,3	14,3	45,9	22,5	20,4	20,8	28,9	22,6	37,5	17,6	15,2
	E	14,8	8,1	18,8	8,4	11,1	7,7	12,8	9,1	7,8	11,8	9,4	8,1	7,1	17,6	13,9	11,8	10,7	20,0		8,9	13,6	6,5	9,3	23,5	8,9	13,2	7,8	6,3	13,0	12,1	8,6	13,5	7,5	9,3	16,7	4,4	4,8	12,5	23,5	9,1
11	nulo			3,1	0,6		2,6	1,2				1,9	1,0				1,2				2,2					1,5		1,6			3,0			1,3					1,0	2,9	
	A	7,4	27,0	21,9	18,1	44,4	15,4	20,9	19,5	23,5	11,8	30,2	19,2	7,1	23,5	16,7	12,9	30,4	22,5	20,9	15,6	11,4	16,1	18,6	11,8	23,7	19,7	18,8	20,8	19,6	12,1	22,9	16,2	23,8	20,4	12,5	26,7	25,8	18,8	14,7	6,1
	B	18,5	16,2	9,4	22,9		23,1	15,1	27,3	11,8	17,6	13,2	18,2	28,6	11,8	20,8	21,2	14,3	17,5	18,6	20,0	27,3	29,0	9,3	11,8	18,5	19,7	23,4	18,8	8,7	27,3	8,6	17,6	23,8	22,2	8,3	24,4	11,3	24,0	17,6	12,1
	C	25,9	16,2	25,0	10,2		10,3	15,1	11,7	17,6	17,6	11,3	14,1	25,0	29,4	8,3	17,6	8,9	12,5	11,6	17,8	13,6	16,1	18,6	23,5	11,1	13,2	10,9	10,4	30,4	6,1	14,3	17,6	10,0	13,0	20,8	2,2	17,7	11,5	29,4	15,2
	D	25,9	16,2	18,8	28,3	22,2	30,8	19,8	29,9	21,6	29,4	28,3	21,2	17,9	11,8	34,7	29,4	26,8	22,5	25,6	17,8	29,5	25,8	20,9	29,4	24,4	22,4	32,8	33,3	10,9	27,3	25,7	29,7	21,3	27,8	20,8	26,7	27,4	22,9	17,6	33,3
	E	22,2	24,3	21,9	19,9	33,3	17,9	27,9	11,7	25,5	23,5	15,1	26,3	21,4	23,5	19,4	17,6	19,6	25,0	23,3	26,7	18,2	12,9	32,6	23,5	20,7	25,0	12,5	16,7	30,4	24,2	28,6	18,9	20,0	16,7	37,5	20,0	17,7	21,9	17,6	33,3
12	nulo				1,8				2,6	2,0			1,0			1,4				2,3						2,2	2,6	1,6					1,4				2,2		1,0		
	A	22,2	21,6	18,8	14,5	11,1	17,9	10,5	23,4	17,6	11,8	13,2	19,2	17,9	17,6	15,3	20,0	23,2	10,0	14,0	11,1	18,2	9,7	16,3	11,8	18,5	7,9	26,6	22,9	15,2	12,1	25,7	12,2	16,3	20,4	8,3	15,6	11,3	25,0	8,8	12,1
	B	14,8	21,6	25,0	20,5	22,2	15,4	19,8	24,7	19,6	23,5	20,8	19,2	21,4	17,6	23,6	15,3	21,4	25,0	23,3	24,4	20,5	9,7	16,3	23,5	24,4	18,4	21,9	18,8	19,6	27,3	20,0	21,6	23,8	18,5	12,5	24,4	19,4	19,8	23,5	18,2
	C	22,2	5,4	28,1	22,9	22,2	28,2	19,8	15,6	23,5	29,4	22,6	17,2	28,6	11,8	25,0	23,5	23,2	22,5	16,3	17,8	20,5	22,6	25,6	29,4	17,8	26,3	17,2	12,5	19,6	27,3	17,1	25,7	21,3	16,7	25,0	22,2	30,6	12,5	26,5	21,2
	D	37,0	32,4	15,6	26,5	44,4	23,1	31,4	23,4	31,4	23,5	26,4	26,3	21,4	41,2	29,2	30,6	23,2	27,5	27,9	28,9	25,0	35,5	23,3	17,6	29,6	27,6	25,0	29,2	32,6	27,3	28,6	25,7	25,0	33,3	33,3	26,7	24,2	31,3	29,4	24,2
	E	3,7	18,9	12,5	13,9		15,4	18,6	10,4	5,9	11,8	17,0	17,2	10,7	11,8	5,6	10,6	8,9	15,0	16,3	17,8	15,9	22,6	18,6	17,6	7,4	17,1	7,8	16,7	13,0	6,1	8,6	13,5	13,8	11,1	20,8	8,9	14,5	10,4	11,8	24,2
13	nulo		2,7		3,0	11,1		1,2	2,6	5,9	5,9	1,9	4,0			1,4	1,2			9,3			3,2	4,7	5,9	2,2	3,9	3,1	2,1				1,4	3,8	1,9		4,4	1,6	2,1		3,0
	A	14,8	13,5	18,8	17,5	11,1	12,8	16,3	16,9	21,6	11,8	17,0	16,2	25,0		18,1	16,5	17,9	20,0	11,6	17,8	22,7	12,9	11,6	17,6	16,3	10,5	21,9	16,7	19,6	12,1	11,4	16,2	17,5	16,7	25,0	20,0	21,0	12,5	20,6	12,1
	B	14,8	13,5	12,5	14,5	22,2	7,7	14,0	18,2	17,6	5,9	18,9	12,1	10,7	29,4	12,5	20,0	3,6	20,0	14,0	13,3	11,4	25,8	18,6	11,8	11,9	5,3	18,8	16,7	26,1	9,1	20,0	13,5	11,3	18,5	8,3	8,9	17,7	10,4	20,6	21,2
	C	37,0	37,8	43,8	34,9	44,4	43,6	39,5	27,3	37,3	47,1	24,5	39,4	28,6	47,1	43,1	36,5	50,0	30,0	34,9	31,1	34,1	38,7	30,2	35,3	40,0	48,7	25,0	39,6	30,4	39,4	45,7	37,8	33,8	37,0	37,5	42,2	24,2	44,8	29,4	39,4
	D	18,5	10,8	15,6	12,7	11,1	15,4	10,5	18,2	11,8	5,9	15,1	13,1	14,3	11,8	12,5	12,9	16,1	12,5	7,0	17,8	18,2	9,7	9,3	11,8	14,1	11,8	14,1	14,6	15,2	12,1	2,9	17,6	17,5	9,3	12,5	13,3	16,1	11,5	20,6	6,1
	E	14,8	21,6	9,4	17,5		20,5	18,6	16,9	5,9	23,5	22,6	15,2	21,4	11,8	12,5	12,9	12,5	17,5	23,3	20,0	13,6	9,7	25,6	17,6	15,6	19,7	17,2	10,4	8,7	27,3	20,0	13,5	16,3	16,7	16,7	11,1	19,4	18,8	8,8	18,2
14	nulo				3,0	11,1		1,2	2,6	5,9			4,0			1,4	1,2			7,0				4,7	5,9	2,2	3,9	3,1					1,4	2,5	1,9		2,2	1,6	2,1		3,0
	A	7,4	18,9	9,4	18,7	11,1	20,5	18,6	15,6	13,7	5,9	15,1	17,2	21,4	11,8	15,3	14,1	17,9	17,5	16,3	17,8	29,5	9,7	14,0	17,6	14,1	19,7	14,1	12,5	13,0	24,2	11,4	14,9	16,3	18,5	25,0	17,8	12,9	19,8	5,9	21,2
	B	29,6	24,3	40,6	22,3	11,1	25,6	26,7	23,4	19,6	41,2	30,2	25,3	28,6	17,6	22,2	23,5	19,6	42,5	16,3	28,9	25,0	38,7	30,2	41,2	18,5	28,9	21,9	29,2	19,6	21,2	31,4	20,3	23,8	33,3	20,8	26,7	25,8	24,0	23,5	27,3
	C	25,9	13,5	25,0	22,3	11,1	17,9	18,6	22,1	23,5	35,3	24,5	19,2	14,3	35,3	20,8	20,0	23,2	15,0	32,6	17,8	18,2	35,5	25,6	11,8	18,5	13,2	18,8	27,1	28,3	27,3	22,9	18,9	21,3	22,2	25,0	22,2	24,2	13,5	29,4	30,3
	D	25,9	29,7	12,5	22,9	55,6	28,2	25,6	22,1	23,5	11,8	15,1	25,3	28,6	29,4	26,4	30,6	25,0	10,0	23,3	24,4	20,5	9,7	18,6	17,6	31,1	26,3	32,8	14,6	23,9	18,2	17,1	35,1	21,3	16,7	25,0	22,2	24,2	28,1	20,6	18,2
	E	11,1	13,5	12,5	10,8		7,7	9,3	14,3	13,7	5,9	15,1	9,1	7,1	5,9	13,9	10,6	14,3	15,0	4,7	11,1	6,8	6,5	7,0	5,9	15,6	7,9	9,4	16,7	15,2	9,1	17,1	9,5	15,0	7,4	4,2	8,9	11,3	12,5	20,6	
15	nulo				3,0	11,1		2,3	2,6	3,9			4,0			1,4	1,2			7,0		2,3		2,3		3,0	2,6	3,1	2,1		3,0		1,4	1,3		4,2	4,4	1,6	2,1		
	A	33,3	56,8	53,1	41,0	44,4	56,4	41,9	42,9	41,2	41,2	43,4	43,4	50,0	41,2	44,4	37,6	41,1	47,5	46,5	55,6	38,6	35,5	44,2	47,1	46,7	47,4	46,9	43,8	34,8	36,4	45,7	41,9	42,5	55,6	33,3	42,2	46,8	47,9	35,3	39,4
	B	11,1	10,8	6,3	12,0	11,1	17,9	4,7	13,0	11,8	17,6	13,2	8,1	14,3	23,5	9,7	16,5	12,5	15,0	4,7	2,2	22,7	9,7	11,6	11,8	7,4	5,3	12,5	12,5	17,4	12,1	11,4	18,9	6,3	9,3	8,3	8,9	12,9	6,3	11,8	24,2
	C	18,5	13,5	12,5	10,8	11,1	10,3	12,8	10,4	13,7	11,8	7,5	12,1	17,9	11,8	13,9	14,1	7,1	12,5	14,0	13,3	11,4	9,7	4,7	17,6	14,8	18,4	4,7	12,5	15,2	9,1	17,1	8,1	15,0	5,6	25,0	6,7	12,9	14,6	17,6	6,1
	D	29,6	8,1	25,0	21,1	22,2	10,3	25,6	22,1	19,6	17,6	24,5	22,2	14,3	11,8	20,8	22,4	21,4	15,0	23,3	20,0	15,9	32,3	23,3	11,8	20,0	17,1	23,4	25,0	13,0	30,3	22,9	20,3	20,0	22,2	20,8	22,2	17,7	22,9	23,5	15,2
	E	7,4	10,8	3,1	12,0		5,1	12,8	9,1	9,8	11,8	11,3	10,1	3,6	11,8	9,7	8,2	17,9	10,0	4,7	8,9	9,1	12,9	14,0	11,8	8,1	9,2	9,4	4,2	19,6	9,1	2,9	9,5	15,0	7,4	8,3	15,6	8,1	6,3	11,8	15,2

Table A.9: Histórico de respostas CEMAB.

itens		9					10				
		A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
1	nulo										
	A	11,3	5,7	18,6	8,3	7,7	7,1	14,6	10,5	6,8	14,3
	B	11,3	10,0	11,6	22,2	20,5	16,7	14,6	14,5	12,2	10,7
	C	6,3	15,7	11,6	11,1	15,4	7,1	8,3	15,8	9,5	21,4
	D	66,3	68,6	58,1	55,6	46,2	66,7	62,5	52,6	68,9	50,0
	E	5,0			2,8	10,3	2,4		6,6	2,7	3,6
2	nulo		1,4								3,6
	A	12,5	12,9	25,6	13,9	10,3	14,3	8,3	17,1	17,6	10,7
	B	37,5	24,3	30,2	27,8	38,5	21,4	39,6	30,3	31,1	39,3
	C	25,0	31,4	30,2	36,1	23,1	26,2	25,0	23,7	37,8	25,0
	D	17,5	22,9	11,6	16,7	20,5	28,6	22,9	19,7	10,8	14,3
	E	7,5	7,1	2,3	5,6	7,7	9,5	4,2	9,2	2,7	7,1
3	nulo		1,4				2,4				
	A	13,8	27,1	20,9	22,2	15,4	26,2	12,5	18,4	23,0	17,9
	B	51,3	31,4	27,9	38,9	25,6	33,3	33,3	35,5	44,6	28,6
	C	6,3	8,6	14,0	11,1	15,4	16,7	16,7	5,3	9,5	7,1
	D	1,3	4,3	11,6	13,9	7,7	2,4	4,2	9,2	5,4	10,7
	E	27,5	27,1	25,6	13,9	35,9	19,0	33,3	31,6	17,6	35,7
4	nulo	1,3									
	A	42,5	28,6	9,3	38,9	33,3	23,8	22,9	40,8	29,7	35,7
	B	12,5	20,0	27,9	22,2	30,8	19,0	22,9	23,7	17,6	21,4
	C	15,0	14,3	9,3	16,7	17,9	14,3	12,5	10,5	16,2	28,6
	D	8,8	17,1	32,6	16,7	7,7	14,3	25,0	9,2	24,3	
	E	20,0	20,0	20,9	5,6	10,3	28,6	16,7	15,8	12,2	14,3
5	nulo		1,4							1,4	
	A	17,5	12,9	18,6	13,9	17,9	9,5	8,3	18,4	21,6	21,4
	B	11,3	5,7	14,0	22,2	10,3	9,5	14,6	18,4	5,4	7,1
	C	18,8	8,6	11,6	25,0	20,5	11,9	20,8	17,1	13,5	14,3
	D	1,3	12,9	2,3	5,6	7,7	11,9	6,3	5,3	1,4	14,3
	E	51,3	58,6	53,5	33,3	43,6	57,1	50,0	40,8	56,8	42,9
6	nulo	2,5	2,9					2,1		4,1	
	A	28,8	20,0	32,6	33,3	25,6	35,7	27,1	27,6	18,9	35,7
	B	22,5	30,0	18,6	16,7	28,2	14,3	16,7	26,3	33,8	17,9
	C	12,5	20,0	14,0	25,0	23,1	23,8	20,8	19,7	13,5	10,7
	D	20,0	18,6	23,3	5,6	12,8	21,4	16,7	15,8	14,9	21,4
	E	13,8	8,6	11,6	19,4	10,3	4,8	16,7	10,5	14,9	14,3
7	nulo	1,3	1,4			2,6			1,3	1,4	
	A	13,8	14,3	9,3	8,3	17,9	16,7	20,8	13,2	6,8	10,7
	B	27,5	31,4	27,9	33,3	15,4	31,0	14,6	13,2	45,9	35,7
	C	31,3	28,6	30,2	22,2	35,9	28,6	45,8	28,9	24,3	21,4
	D	16,3	17,1	20,9	25,0	25,6	16,7	12,5	31,6	14,9	17,9
	E	10,0	7,1	11,6	11,1	2,6	7,1	6,3	11,8	6,8	14,3
8	nulo										
	A	17,5	14,3	20,9	16,7	15,4	21,4	12,5	18,4	17,6	7,1
	B	20,0	11,4	32,6	27,8	33,3	28,6	27,1	26,3	18,9	10,7
	C	28,8	55,7	32,6	27,8	25,6	26,2	31,3	28,9	48,6	42,9
	D	16,3	12,9	7,0	5,6	15,4	9,5	16,7	10,5	8,1	28,6
	E	17,5	5,7	7,0	22,2	10,3	14,3	12,5	15,8	6,8	10,7
9	nulo								1,3		3,6
	A	100,0					11,9	39,6	28,9	33,8	25,0
	B		100,0				38,1	12,5	23,7	31,1	25,0
	C			100,0			16,7	20,8	11,8	20,3	7,1
	D				100,0		16,7	10,4	15,8	6,8	25,0
	E					100,0	16,7	16,7	18,4	8,1	14,3
10	nulo	2,5									
	A	6,3	22,9	16,3	19,4	17,9	100,0				
	B	23,8	8,6	23,3	13,9	20,5		100,0			
	C	27,5	25,7	20,9	33,3	35,9			100,0		
	D	31,3	32,9	34,9	13,9	15,4				100,0	
	E	8,8	10,0	4,7	19,4	10,3					100,0
11	nulo		1,4	2,3				2,1		1,4	
	A	12,5	25,7	11,6	25,0	28,2	19,0	16,7	14,5	27,0	21,4
	B	16,3	21,4	20,9	22,2	15,4	31,0	10,4	17,1	23,0	7,1
	C	20,0	8,6	9,3	19,4	10,3	11,9	12,5	11,8	13,5	28,6
	D	20,0	28,6	25,6	25,0	28,2	21,4	16,7	39,5	16,2	32,1
	E	31,3	14,3	30,2	8,3	17,9	16,7	41,7	17,1	18,9	10,7
12	nulo	1,3	1,4							1,4	
	A	11,3	25,7	9,3	13,9	23,1	9,5	8,3	28,9	10,8	25,0
	B	16,3	22,9	23,3	22,2	23,1	31,0	22,9	9,2	25,7	21,4
	C	16,3	18,6	20,9	30,6	23,1	19,0	18,8	25,0	18,9	25,0
	D	31,3	22,9	37,2	22,2	25,6	28,6	31,3	26,3	27,0	28,6
	E	23,8	8,6	9,3	11,1	5,1	11,9	18,8	10,5	16,2	
13	nulo	5,0	1,4		2,8		2,4	4,2		1,4	
	A	17,5	15,7	11,6	11,1	28,2	14,3	22,9	15,8	20,3	3,6
	B	8,8	15,7	14,0	13,9	25,6	14,3	14,6	14,5	13,5	17,9
	C	38,8	38,6	32,6	44,4	28,2	40,5	27,1	35,5	33,8	64,3
	D	12,5	14,3	20,9	5,6	12,8	14,3	10,4	13,2	16,2	10,7
	E	17,5	14,3	20,9	22,2	5,1	14,3	20,8	21,1	14,9	3,6
14	nulo	3,8	1,4		2,8		2,4	2,1		1,4	
	A	16,3	12,9	18,6	22,2	15,4	19,0	20,8	10,5	20,3	10,7
	B	26,3	25,7	23,3	19,4	28,2	21,4	22,9	28,9	24,3	28,6
	C	16,3	21,4	25,6	25,0	25,6	23,8	20,8	26,3	20,3	10,7
	D	23,8	30,0	20,9	19,4	20,5	21,4	18,8	23,7	25,7	35,7
	E	13,8	8,6	11,6	11,1	10,3	11,9	14,6	10,5	8,1	14,3
15	nulo	1,3	2,9	2,3	2,8		2,4			4,1	
	A	47,5	51,4	44,2	27,8	38,5	38,1	47,9	48,7	40,5	42,9
	B	12,5	10,0	11,6	11,1	10,3	9,5	8,3	11,8	14,9	7,1
	C	11,3	10,0	11,6	22,2	10,3	16,7	14,6	6,6	10,8	21,4
	D	20,0	15,7	20,9	25,0	25,6	9,5	22,9	27,6	20,3	17,9
	E	7,5	10,0	9,3	11,1	15,4	23,8	6,3	5,3	9,5	10,7

itens		11					12				
		A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
1	nulo										
	A	3,8	9,6	18,4	10,3	10,3	13,3	7,1	10,5	13,3	2,9
	B	18,9	11,5	15,8	8,8	15,5	17,8	14,3	3,5	16,0	20,0
	C	13,2	5,8	21,1	8,8	12,1	13,3	14,3	15,8	6,7	11,4
	D	56,6	73,1	44,7	69,1	56,9	53,3	60,7	66,7	58,7	65,7
	E	7,5			2,9	5,2	2,2	3,6	3,5	5,3	
2	nulo					1,7				1,3	
	A	11,3	17,3	10,5	17,6	12,1	15,6	10,7	19,3	12,0	17,1
	B	34,0	25,0	34,2	25,0	41,4	20,0	30,4	29,8	36,0	45,7
	C	28,3	40,4	23,7	33,8	15,5	40,0	33,9	21,1	24,0	22,9
	D	22,6	11,5	23,7	16,2	22,4	20,0	17,9	21,1	21,3	8,6
	E	3,8	5,8	7,9	7,4	6,9	4,4	7,1	8,8	5,3	5,7
3	nulo		3,8							1,3	
	A	30,2	13,5	15,8	22,1	13,8	15,6	19,6	21,1	18,7	25,7
	B	35,8	34,6	36,8	30,9	44,8	42,2	33,9	29,8	34,7	48,6
	C	3,8	15,4	18,4	7,4	10,3	11,1	10,7	14,0	8,0	8,6
	D	7,5	3,8	13,2	2,9	6,9	6,7	5,4	3,5	9,3	5,7
	E	22,6	28,8	15,8	36,8	24,1	24,4	30,4	31,6	28,0	11,4
4	nulo		3,8								
	A	20,8	34,6	39,5	36,8	25,9	37,8	23,2	35,1	34,7	25,7
	B	32,1	15,4	13,2	22,1	19,0	28,9	21,4	22,8	17,3	14,3
	C	17,0	13,5	13,2	13,2	17,2	8,9	17,9	15,8	14,7	17,1
	D	17,0	15,4	13,2	16,2	17,2	13,3	17,9	12,3	16,0	20,0
	E	13,2	17,3	21,1	11,8	20,7	11,1	19,6	14,0	17,3	22,9
5	nulo	1,9							1,8		
	A	9,4	23,1	15,8	19,1	13,8	17,8	16,1	15,8	14,7	20,0
	B	9,4	17,3	13,2	11,8	6,9	6,7	5,4	12,3	14,7	20,0
	C	15,1	7,7	21,1	13,2	24,1	15,6	12,5	19,3	13,3	22,9
	D	3,8	3,8	10,5	7,4	6,9	4,4	7,1	8,8	4,0	8,6
	E	60,4	48,1	39,5	48,5	48,3	55,6	58,9	42,1	53,3	28,6
6	nulo	5,7				1,7		1,8	3,5		2,9
	A	28,3	28,8	26,3	25,0	32,8	13,3	25,0	35,1	28,0	37,1
	B	22,6	28,8	18,4	30,9	13,8	37,8	25,0	19,3	21,3	14,3
	C	18,9	17,3	13,2	23,5	13,8	24,4	16,1	10,5	18,7	22,9
	D	17,0	7,7	36,8	7,4	24,1	15,6	16,1	15,8	20,0	17,1
	E	7,5	17,3	5,3	13,2	13,8	8,9	16,1	15,8	12,0	5,7
7	nulo		5,8				2,2	1,8			
	A	15,1	5,8	13,2	13,2	17,2	20,0	12,5	10,5	13,3	8,6
	B	22,6	25,0	34,2	32,4	24,1	20,0	28,6	33,3	25,3	28,6
	C	35,8	36,5	21,1	25,0	27,6	28,9	33,9	29,8	26,7	31,4
	D	20,8	23,1	18,4	22,1	15,5	24,4	17,9	15,8	24,0	17,1
	E	5,7	3,8	13,2	7,4	15,5	4,4	5,4	10,5	10,7	14,3
8	nulo		1,9								
	A	22,6	21,2	2,6	17,6	15,5	15,6	19,6	17,5	16,0	11,4
	B	30,2	13,5	28,9	25,0	19,0	15,6	21,4	33,3	20,0	25,7
	C	34,0	44,2	28,9	32,4	36,2	53,3	33,9	21,1	40,0	28,6
	D	9,4	11,5	26,3	8,8	10,3	6,7	14,3	15,8	13,3	11,4
	E	3,8	7,7	13,2	16,2	19,0	8,9	10,7	12,3	10,7	22,9
9	nulo		1,9	2,6	1,5				3,5		
	A	18,9	25,0	42,1	23,5	43,1	20,0	23,2	22,8	33,3	54,3
	B	34,0	28,8	15,8	29,4	17,2	40,0	28,6	22,8	21,3	17,1
	C	9,4	17,3	10,5	16,2	22,4	8,9	17,9	15,8	21,3	11,4
	D	17,0	15,4	18,4	13,2	5,2	11,1	14,3	19,3	10,7	11,4
	E	20,8	11,5	10,5	16,2	12,1	20,0	16,1	15,8	13,3	5,7
10	nulo		3,8			1,7					2,9
	A	15,1	25,0	13,2	13,2	12,1	8,9	23,2	14,0	16,0	14,3
	B	15,1	9,6	15,8	11,8	34,5	8,9	19,6	15,8	20,0	25,7
	C	20,8	25,0	23,7	44,1	22,4	48,9	12,5	33,3	26,7	22,9
	D	37,7	32,7	26,3	17,6	24,1	17,8	33,9	24,6	26,7	34,3
	E	11,3	3,8	21,1	13,2	5,2	15,6	10,7	12,3	10,7	
11	nulo							1,8	1,8		
	A	100,0					15,6	19,6	10,5	26,7	25,7
	B		100,0				22,2	16,1	19,3	22,7	8,6
	C			100,0			4,4	16,1	17,5	14,7	17,1
	D				100,0		37,8	23,2	31,6	13,3	25,7
	E					100,0	20,0	23,2	19,3	22,7	22,9
12	nulo		3,8		1,5						
	A	13,2	19,2	5,3	25,0	15,5	100,0				
	B	20,8	17,3	23,7	19,1	22,4		100,0			
	C	11,3	21,2	26,3	26,5	19,0			100,0		
	D	37,7	32,7	28,9	14,7	29,3				100,0	
	E	17,0	5,8	15,8	13,2	13,8					100,0
13	nulo	3,8	3,8		1,5	3,4		3,6			5,7
	A	13,2	13,5	21,1	23,5	12,1	13,3	19,6	21,1	13,3	17,1
	B	13,2	19,2	15,8	8,8	15,5	20,0	14,3	10,5	14,7	14,3
	C	39,6	34,6	31,6	32,4	46,6	35,6	33,9	38,6	40,0	37,1
	D	15,1	9,6	10,5	16,2	13,8	13,3	16,1	14,0	13,3	8,6
	E	15,1	19,2	21,1	17,6	8,6	17,8	12,5	15,8	18,7	17,1
14	nulo	1,9	3,8		1,5	3,4		3,6			2,9
	A	11,3	21,2	13,2	16,2	19,0	20,0	17,9	12,3	13,3	22,9
	B	28,3	28,8	28,9	20,6	22,4	11,1	23,2	24,6	32,0	34,3
	C	32,1	19,2	13,2	20,6	19,0	24,4	16,1	26,3	20,0	22,9
	D	18,9	21,2	31,6	27,9	22,4	31,1	28,6	22,8	25,3	8,6
	E	7,5	5,8	13,2	13,2	13,8	13,3	10,7	14,0	9,3	8,6
15	nulo	1,9	5,8		1,5			3,6	1,8		
	A	45,3	34,6	23,7	48,5	58,6	53,3	39,3	36,8	45,3	51,4
	B	13,2	3,8	7,9	16,2	12,1	6,7	12,5	12,3	12,0	11,4
	C	13,2	13,5	28,9	5,9	6,9	8,9	10,7	14,0	14,7	11,4
	D	18,9	25,0	31,6	19,1	13,8	24,4	19,6	24,6	18,7	17,1
	E	7,5	17,3	7,9	8,8	8,6	6,7	14,3	10,5	9,3	8,6

itens		13					14					15				
		A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
1	nulo															
	A	8,9	10,3	10,0	13,9	9,1	4,5	11,8	12,1	10,8	10,0	7,6	10,0	15,2	14,3	7,4
	B	11,1	12,8	14,0	11,1	18,2	15,9	13,2	8,6	16,9	16,7	17,6	13,3	15,2	5,4	14,8
	C	13,3	10,3	14,0	13,9	6,8	6,8	19,1	13,8	6,2	13,3	14,3	6,7	12,1	14,3	3,7
	D	64,4	61,5	58,0	58,3	65,9	70,5	54,4	63,8	58,5	60,0	57,1	66,7	54,5	62,5	74,1
	E	2,2	5,1	4,0	2,8		2,3	1,5	1,7	7,7		3,4	3,3	3,0	3,6	
2	nulo			1,0						1,5				3,0		
	A	11,1	7,7	17,0	16,7	18,2	18,2	14,7	12,1	16,9	10,0	18,5	23,3	12,1	7,1	7,4
	B	31,1	30,8	34,0	25,0	36,4	36,4	33,8	27,6	33,8	26,7	30,3	13,3	33,3	39,3	40,7
	C	28,9	35,9	21,0	38,9	29,5	27,3	26,5	29,3	26,2	36,7	27,7	33,3	24,2	30,4	25,9
	D	24,4	23,1	19,0	16,7	6,8	15,9	14,7	20,7	18,5	23,3	17,6	20,0	21,2	17,9	18,5
	E	4,4	2,6	8,0	2,8	9,1	2,3	10,3	10,3	3,1	3,3	5,9	10,0	6,1	5,4	7,4
3	nulo			1,0					1,7							3,7
	A	20,0	25,6	13,0	22,2	27,3	18,2	23,5	22,4	12,3	26,7	19,3	23,3	12,1	23,2	22,2
	B	35,6	30,8	39,0	36,1	34,1	38,6	36,8	32,8	38,5	30,0	36,1	26,7	36,4	39,3	37,0
	C	15,6	7,7	8,0	11,1	13,6	13,6	11,8	6,9	12,3	6,7	11,8	13,3	15,2	7,1	3,7
	D		12,8	8,0	5,6	4,5	4,5	4,4	10,3	7,7	3,3	5,9	13,3	6,1	3,6	7,4
	E	28,9	23,1	31,0	25,0	20,5	25,0	23,5	25,9	29,2	33,3	26,9	23,3	30,3	26,8	25,9
4	nulo															
	A	31,1	43,6	31,0	30,6	25,0	27,3	29,4	29,3	40,0	30,0	26,9	46,7	36,4	33,9	25,9
	B	22,2	5,1	28,0	25,0	15,9	22,7	16,2	22,4	21,5	26,7	19,3	23,3	12,1	21,4	37,0
	C	17,8	20,5	12,0	13,9	15,9	15,9	25,0	10,3	6,2	20,0	16,0	20,0	15,2	10,7	14,8
	D	11,1	15,4	15,0	8,3	22,7	15,9	10,3	24,1	15,4	6,7	16,8	6,7	18,2	17,9	7,4
	E	17,8	15,4	14,0	22,2	20,5	18,2	19,1	13,8	16,9	16,7	21,0	3,3	18,2	16,1	14,8
5	nulo	2,2							1,7			0,8				
	A	22,2	12,8	15,0	22,2	13,6	29,5	16,2	13,8	13,8	10,0	14,3	33,3	15,2	12,5	14,8
	B	8,9	20,5	12,0	8,3	6,8	6,8	17,6	19,0	4,6	6,7	9,2	10,0	9,1	17,9	14,8
	C	11,1	20,5	13,0	11,1	25,0	13,6	19,1	19,0	12,3	10,0	16,0	16,7	6,1	17,9	22,2
	D	6,7	5,1	6,0	5,6	6,8	6,8	10,3	3,4	4,6	3,3	6,7	6,7	9,1	3,6	7,4
	E	48,9	41,0	54,0	52,8	47,7	43,2	36,8	43,1	64,6	70,0	52,9	33,3	60,6	48,2	40,7
6	nulo	4,4		1,0				2,9	1,7			3,4				
	A	17,8	10,3	37,0	25,0	34,1	34,1	32,4	17,2	30,8	20,0	30,3	13,3	42,4	23,2	25,9
	B	31,1	30,8	16,0	25,0	25,0	20,5	20,6	20,7	32,3	20,0	25,2	26,7	9,1	26,8	22,2
	C	17,8	20,5	19,0	19,4	11,4	13,6	20,6	22,4	10,8	26,7	17,6	20,0	18,2	21,4	7,4
	D	20,0	30,8	14,0	19,4	9,1	13,6	13,2	22,4	16,9	23,3	13,4	26,7	21,2	10,7	33,3
	E	8,9	7,7	13,0	11,1	20,5	18,2	10,3	15,5	9,2	10,0	10,1	13,3	9,1	17,9	11,1
7	nulo		2,6			2,3			1,7	1,5						3,7
	A	8,9	17,9	16,0	2,8	15,9	9,1	16,2	13,8	9,2	20,0	13,4	13,3	18,2	14,3	3,7
	B	26,7	25,6	28,0	36,1	22,7	25,0	22,1	24,1	40,0	23,3	26,1	46,7	18,2	26,8	25,9
	C	31,1	23,1	27,0	38,9	29,5	29,5	27,9	29,3	26,2	40,0	28,6	16,7	36,4	28,6	44,4
	D	20,0	25,6	20,0	13,9	20,5	22,7	26,5	20,7	13,8	13,3	25,2	16,7	9,1	21,4	14,8
	E	13,3	5,1	9,0	8,3	9,1	13,6	7,4	10,3	9,2	3,3	6,7	6,7	18,2	8,9	7,4
8	nulo															
	A	20,0	10,3	19,0	16,7	11,4	18,2	17,6	17,2	15,4	13,3	16,0	13,3	9,1	17,9	25,9
	B	28,9	28,2	15,0	27,8	27,3	18,2	23,5	25,9	23,1	23,3	24,4	26,7	24,2	19,6	18,5
	C	26,7	25,6	43,0	30,6	40,9	43,2	33,8	22,4	41,5	40,0	38,7	20,0	42,4	39,3	22,2
	D	15,6	17,9	10,0	19,4	6,8	4,5	11,8	17,2	10,8	23,3	10,1	13,3	18,2	14,3	14,8
	E	8,9	17,9	13,0	5,6	13,6	15,9	13,2	17,2	9,2		10,9	26,7	6,1	8,9	18,5
9	nulo			1,0		2,3		1,5		1,5		0,8			1,8	
	A	31,1	17,9	31,0	27,8	31,8	29,5	30,9	22,4	29,2	36,7	31,9	33,3	27,3	28,6	22,2
	B	24,4	28,2	27,0	27,8	22,7	20,5	26,5	25,9	32,3	20,0	30,3	23,3	21,2	19,6	25,9
	C	11,1	15,4	14,0	25,0	20,5	18,2	14,7	19,0	13,8	16,7	16,0	16,7	15,2	16,1	14,8
	D	8,9	12,8	16,0	5,6	18,2	18,2	10,3	15,5	10,8	13,3	8,4	13,3	24,2	16,1	14,8
	E	24,4	25,6	11,0	13,9	4,5	13,6	16,2	17,2	12,3	13,3	12,6	13,3	12,1	17,9	22,2
10	nulo											0,8				
	A	13,3	15,4	17,0	16,7	13,6	18,2	13,2	17,2	13,8	16,7	13,4	13,3	21,2	7,1	37,0
	B	24,4	17,9	13,0	13,9	22,7	22,7	16,2	17,2	13,8	23,3	19,3	13,3	21,2	19,6	11,1
	C	26,7	28,2	27,0	27,8	36,4	18,2	32,4	34,5	27,7	26,7	31,1	30,0	15,2	37,5	14,8
	D	33,3	25,6	25,0	33,3	25,0	34,1	26,5	25,9	29,2	20,0	25,2	36,7	24,2	26,8	25,9
	E	2,2	12,8	18,0	8,3	2,3	6,8	11,8	5,2	15,4	13,3	10,1	6,7	18,2	8,9	11,1
11	nulo		2,6			2,3			1,7		3,3	0,8				
	A	15,6	17,9	21,0	22,2	18,2	13,6	22,1	29,3	15,4	13,3	20,2	23,3	21,2	17,9	14,8
	B	15,6	25,6	18,0	13,9	22,7	25,0	22,1	17,2	16,9	10,0	15,1	6,7	21,2	23,2	33,3
	C	17,8	15,4	12,0	11,1	18,2	11,4	16,2	8,6	18,5	16,7	7,6	10,0	33,3	21,4	11,1
	D	35,6	15,4	22,0	30,6	27,3	25,0	20,6	24,1	29,2	30,0	27,7	36,7	12,1	23,2	22,2
	E	15,6	23,1	27,0	22,2	11,4	25,0	19,1	19,0	20,0	26,7	28,6	23,3	12,1	14,3	18,5
12	nulo															
	A	13,3	23,1	16,0	16,7	18,2	20,5	7,4	19,0	21,5	20,0	20,2	10,0	12,1	19,6	11,1
	B	24,4	20,5	19,0	25,0	15,9	22,7	19,1	15,5	24,6	20,0	18,5	23,3	18,2	19,6	29,6
	C	26,7	15,4	22,0	22,2	20,5	15,9	20,6	25,9	20,0	26,7	17,6	23,3	24,2	25,0	22,2
	D	22,2	28,2	30,0	27,8	31,8	22,7	35,3	25,9	29,2	23,3	28,6	30,0	33,3	25,0	25,9
	E	13,3	12,8	13,0	8,3	13,6	18,2	17,6	13,8	4,6	10,0	15,1	13,3	12,1	10,7	11,1
13	nulo								1,7			1,7			1,8	
	A	100,0					9,1	22,1	20,7	13,8	16,7	10,9	13,3	21,2	30,4	14,8
	B		100,0				11,4	7,4	22,4	13,8	23,3	16,8	13,3	3,0	17,9	14,8
	C			100,0			52,3	47,1	20,7	41,5	20,0	44,5	26,7	36,4	26,8	44,4
	D				100,0		9,1	8,8	8,6	16,9	33,3	12,6	23,3	18,2	7,1	14,8
	E					100,0	18,2	14,7	25,9	13,8	6,7	13,4	23,3	21,2	16,1	11,1
14	nulo											1,7				
	A	8,9	12,8	23,0	11,1	18,2	100,0					8,4	30,0	24,2	19,6	18,5
	B	33,3	12,8	32,0	16,7	22,7		100,0				33,6	3,3	18,2	30,4	14,8
	C	26,7	33,3	12,0	13,9	34,1			100,0			17,6	33,3	18,2	23,2	25,9
	D	20,0	23,1	27,0	30,6	20,5				100,0		26,9	23,3	30,3	14,3	29,6
	E	11,1	17,9	6,0	27,8	4,5					100,0	11,8	10,0	9,1	12,5	11,1
15	nulo					4,5	2,3		1,7							
	A	28,9	51,3	53,0	41,7	36,4	22,7	58,8	36,2	49,2	46,7	100,0				
	B	8,9	10,3	8,0	19,4	15,9	20,5	1,5	17,2	10,8	10,0		100,0			
	C	15,6	2,6	12,0	16,7	15,9	18,2	8,8	10,3	15,4	10,0			100,0		
	D	37,8	25,6	15,0	11,1	20,5	25,0	25,0	22,4	12,3	23,3				100,0	
	E	8,9	10,3	12,0	11,1	6,8	11,4	5,9	12,1	12,3	10,0					100,0

Table A.10: Histórico de respostas CEMAB.

A.5 Transcrição das entrevistas

A.5.1 Entrevista 1

Rachel: Eu vou te fazer algumas perguntas. Olha só, analisando esse triângulo aqui, você consegue dizer para mim qual é o seno de α?

Aluno: O meu Deus!

Rachel: Pode ficar bem tranquila, não tem problema. Não?

Aluno: Moça, pior matéria que eu não sei nada é matemática, sério mesmo.

Rachel: Não tem problema. Se a gente mexer na posição do triângulo ,você acha que facilita para você?

Aluno: Seno do ângulo.. aqui é hipotenusa né? Então o seno são esses não? Acho que sim.

Rachel: Eu não vou te dar nenhuma indicação mas pode... eu vou só pedir para você colocar aqui número 1 porque é a primeira pergunta que eu estou te fazendo e ai você indica o que você acha que seja. Beleza e o cosseno de β ?

Aluno: Não sei.

Rachel: Se eu fizer assim facilita a sua interpretação?

Aluno: Não me lembro dessa matéria mais.

Rachel: Tá ok.

Aluno: Há um ano atrás eu até sabia.

Rachel: Aí esqueceu?

Aluno: Esqueci, porque ano passado foi só aquele negócio do... ai meu Deus como é o nome daquilo… aquele que fazia as rodinhas assim e juntava… que era tipo dois ovinhos assim ó...

Rachel: Era conjuntos?

Aluno: Conjuntos! Aí não estudou muito isso, aí eu me esqueci completamente.

Rachel: Não tem problema, ta bom, a gente vai para o segundo. Círculo trigonométrico tá.

Aluno: Aham.

Rachel: Círculo de raio 1. Analisando essa figura você consegue me dizer onde estão os ângulos correspondentes ao triângulo… Onde estão os triângulos correspondentes ao triângulo AOB nos outros quadrantes?

Aluno: Eu acho que os que estão marcadinhos assim né, eu acho.

Rachel: Não tem problema, pode achar. Se eu indicar por numerozinhos cada um dos pontos: um, dois, três, quatro, cinco, seis e sete. Você consegue me dizer os vértices desses triângulos que são correspondentes?

Aluno: Vértices são esses pontinhos né?

Rachel: Isso, são os pontinhos.

Aluno: Deixa eu contar né. Pode contar né?

Rachel: Pode contar.

Aluno: Deixa eu ver... Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, onze, doze.

Rachel: Tá. Você consegue me dizer onde esse ângulo α está nos outros triângulos?

Aluno: Em cada pontinho menor né, aqui, aqui e aqui.

Rachel: Tá. Ok. Próximo, você sabe me dizer porque que essa relação é válida? (pausa) Você já ouviu... Você já viu essa relação?

Aluno: Provavelmente.

Rachel: Você sabe me dizer porque que ela é válida?

Aluno: Porque está sendo elevada ao mesmo número? Provavelmente não é isso mas...

Rachel: Não tem problema não, eu quero saber o que que... como você está pensando mesmo. No triângulo retângulo, esse triângulo aqui, você consegue me dizer como ela seria válida? Como essa relação se aplica aqui nesse triângulo?

Aluno: Não, não saberia dizer.

Rachel: Beleza. E aqui nesse círculo trigonométrico, você consegue achar alguma relação dessa fórmula com esse círculo?

Aluno: É... seno e cosseno é aquele do... tipo... ai meu Deus, da tabela que tem o seno, cosseno e tangente que aí é o tamanhozinho aqui do... ai, porque que falta as palavras na hora meu Deus? É tipo a medida do ângulo, eu acho que é isso... é.

Rachel: E aí isso se aplica aqui? Você consegue me dizer como?

Aluno: Pelo ângulo de cada triângulo né, eu acho que é isso.

Rachel: Onde o ângulo se encaixa aqui?

Aluno: Em cada pontinho, tipo aqui, aqui.

Rachel: Tá, para cada ângulo... Você disse que para cada ângulo funciona. Onde você substituiria o valor do ângulo aqui na fórmula? Você consegue identificar?

Aluno: No x né.

Rachel: Ok. A próxima pergunta não tem nenhuma figurinha. Você pode colocar aí número três, por favor. Você consegue me dizer o que que é radiano?

Aluno: Aí tem um radiano e o *radieno* eu acho, mas não me lembro.

Rachel: Você consegue, sei lá, definir o que ele seja?

Aluno: É o raio, eu acho que é a medida do raio né?

Rachel: Você pode escrever isso pra mim, por favor? Você consegue fazer um desenho mostrando onde está o radiano?

Aluno: Ah, eu acho que eu só vou lembrar do raio.

Rachel: Não tem problema.

Aluno: Porque eu estou estudando em física eu acho isso, por exemplo a rodinha aqui, aqui e isso daqui mas isso daqui eu acho que é o raio né.

Rachel: Aí ele é o radiano? Essa medida é o radiano?

Aluno: Não sei, acho que sim.

Rachel: Tá. Ok. Número 4, você consegue descrever para mim a função seno? O que ela é? O que ela representa?

Aluno: É a... Ai meu Deus... eu lembro da tabela, mais ou menos.

Rachel: Você lembra de uma tabela?

Aluno: Eu lembro da tabela que é do seno, cosseno e tangente. Mas eu não me lembro dos números.

Rachel: Não, tudo bem, não tem problema. Você consegue me dizer alguma característica dessa função? (pausa) Você consegue desenhar um gráfico dessa função?

Aluno: Não me lembro. Moça, você escolheu a pior aluna daquela turma para fazer isso.

Rachel: Não, não tem problema.

Aluno: Eu tô falando sério.

Rachel: O formato? Quando eu falo seno, função seno, o que te vem à cabeça?

Aluno: Aquele assim, mas eu não me lembro qual era a tabela.

Rachel: Não tem problema, eu quero saber ao que te remete. Qual é a sua memória visual.

Aluno: Só na tabela, só me vem a tabela na cabeça.

Rachel: Tá, pensando na tabela você consegue me dizer por que isso daqui funciona?

Aluno: Porque os números da tabela se encaixam. Por exemplo, o tamanho da... do ângulo daqui.

Rachel: Para terminar o seu sofrimento, você consegue me dizer o que você entende desse enunciado?

Aluno: Seja um número real α menor que 0 quantos pontos... tem que fazer a continha né? De alguma coisa... existem. Um desenho? Eu acho que é isso.

Rachel: Você consegue entender o que que ele tá pedindo ?

Aluno: Mais ou menos.

Rachel: Você pode tentar me explicar?

Aluno: Por exemplo, tenho aquele desenho lá dos triangulozinhos.

Rachel: Você pode usar qualquer um deles.

Aluno: Dependendo do... do cosseno e do seno de um negócio tá pedindo quantos pontos tem mas... eu não entendi quem são os pontos. Eu acho que é isso mas eu não sei.

Rachel: Dado o cosseno de um ângulo... você consegue identificar o cosseno pra mim aqui?

Aluno: Não.

Rachel: E o seno ?

Aluno: Também não.

Rachel: Dado um ângulo, o cosseno e o seno desse ângulo indicam um ponto. Quantos pontos vão existir para esse ângulo?

Aluno: Não sei. Ai...

Rachel: Fica tranquila, não tem problema.

Aluno: É que eu me sinto muito burra, sério!

Rachel: Não se sinta.

Aluno: É que eu não entendo matemática, acho que eu não entendo matemática desde a quinta série porque eu era boa em matemática. Eu era a melhor aluna da turma em matemática.

Rachel: Olha aí, então você sabe os fundamentos.

Aluno: Eu acho que eu me perdi no meio do caminho.

A.5.2 Entrevista 2

Rachel: Analisando esse triângulo aqui, você consegue me dizer qual é o seno de β?

Aluno: Seno de β? Ah, eu acho que eu não vou conseguir lembrar.

Rachel: Não tem problema. Você consegue identificar para mim quem é o cateto oposto? A hipotenusa? Essas coisas no triângulo?

Aluno: Mais ou menos... Cateto oposto é o que é de frente, tipo, de frente de um ângulo de 90 graus, mais ou menos. Cateto... hipotenusa é ...

Rachel: Você consegue, aqui no desenho, me dizer quem é quem em relação a β?

Aluno: Deixa eu ver... Esse aqui é o cateto oposto, não, deixa eu ver. Não, esse aqui é que é o o cateto oposto e esse é a hipotenusa.

Rachel: Não vou indicar certo ou errado, é só para eu entender como você tá pensando, tá? Se eu modificar a posição do ângulo e colocar ele assim é mais fácil para identificar quem é quem?

Aluno: Não, continua a mesma pra mim.

Rachel: Continua a mesma coisa? Ok. Próxima pergunta, nesse círculo aqui, o círculo de raio 1, eu marquei o triângulo OAB de ângulo α. Você consegue me dizer onde estão os triângulos congruentes a esse? De mesma medida desse nos outros quadrantes?

Aluno: Aqui, aqui, aqui, aqui, aqui também.

Rachel: Você consegue me dizer onde esse ângulo α está nos outros quadrantes?

Aluno: Deixa eu ver. Aqui, aqui nessa pontinha também, aqui e nesse.

Rachel: Vou deixar aqui que você pode usar de apoio para as próximas perguntas. Você consegue me dizer porque que essa fórmula é válida? Por que que essa relação é válida?

Aluno: Por quê? Ah, eu não consigo explicar.

Rachel: Você pode... Você consegue ver um lugar onde ela se aplica? Alguma coisa te vem à mente quando você vê essa fórmula? Te remete a algum outro conteúdo?

Aluno: Não, não, só o triângulo mesmo que vem na minha cabeça.

Rachel: Triângulo, ok. Você consegue me dizer o que é radiano?

Aluno: Radiano? Se eu não me engano... Radiano...

Rachel: Você pode desenhar se quiser.

Aluno: Finge que isso daqui é um círculo, eu acho que é tipo a volta que dá. Tipo o raio.

Rachel: Então tudo isso daqui é radiano? Ou eu consigo ter um menor?

Aluno: Acho que quando também fecha assim, mais ou menos, mais ou menos um ângulo de noventa eu acho que... Não sei... Mas eu acho que considero um radiano também.

Rachel: O que que é radiano para você? Esse ponto? Essa medida? O arco?

Aluno: Essa daqui, é a voltinha.

Rachel: A voltinha. Você consegue descrever para mim, me explicar o que é a função seno?

Aluno: Não tô lembrando.

Rachel: Você consegue pensar em alguma característica? Alguma propriedade?

Aluno: Seno?

Rachel: Algum comportamento dessa função?

Aluno: Eu não tô lembrado de nada de seno, de cosseno.

Rachel: Você consegue fazer um desenho? Pensar no gráfico dela?

Aluno: Não, não. Não tô conseguindo lembrar de nada.

Rachel: Você pode esboçar o que você acha que é.

Aluno: Para mim, eu acho que é tipo um ponto aqui, acho que é tipo meio que...

Rachel: Tem um plano cartesiano e você marca pontos?

Aluno: É o que eu penso né, porque, meu Deus, eu sou horrível em matemática.

Rachel: Não tem problema, eu quero saber exatamente o que você pensa. Pensando ainda na função seno e na função cosseno você consegue fazer uma relação dessa fórmula com esse triângulo? Você me falou que pensava em triângulos, certo? Você consegue fazer alguma relação? Pode mexer à vontade.

Aluno: Nossa, não vem nada na minha cabeça, tá tipo tudo branco assim.

Rachel: Você consegue fazer alguma relação dessa fórmula com esse círculo trigonométrico?

Aluno: Não, não também.

Rachel: Lendo esse enunciado: seja o número real α menor que 0 quantos pontos P, $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ existem?

Aluno: Seja um número real, quantos pontos P? Esse tem a ver com gráfico não tem?

Rachel: O que você entende dessa pergunta? Você consegue me explicar?

Aluno: Eu entendo... É tipo um número real que está tipo no plano, no gráfico e quantos pontos existem aqui assim.

Rachel: Esse desenho pode representar o número?

Aluno: Não, esquece isso é só a demonstração que tava na minha cabeça de quantos pontos tem.

Rachel: Então ele tá perguntando... O que ele tá perguntando pra você? Quantos pontos existem no gráfico, é isso?

Aluno: É, é o que eu penso. Tem um gráfico e aí tem as linhas assim meio que traçado uma reta.

Rachel: E quando ele coloca aqui que o ponto P assim, o que representa para você? O que isso quer dizer?

Aluno: É o ponto do cosseno e do seno, está tipo representando aqui.

Rachel: Vamos voltar. Você pensou um pouquinho em cosseno e seno. Você consegue agora achar o seno de β? Depois de pensar um pouquinho sobre seno e cosseno.

Aluno: Seno de β? Não.

Rachel: Facilita?

Aluno: Não, eu não lembro de nada.

Rachel: E se eu perguntar o seno de α?

Aluno: Não... Não está vindo nada na minha mente agora.

Rachel: Sem problema. Quando eu falo seno e cosseno alguma coisa te vem à mente? Você pensa em alguma coisa específica?

Aluno: Não.

Rachel: Você consegue lembrar a primeira vez que você ouviu falar de seno e cosseno?

Aluno: Foi no ano passado. Não lembro bem o tempo. Se eu não me engano foi mais ou menos no meio do ano.

Rachel: E quando você ouviu tinha alguma imagem gráfica, alguma coisa, assim um círculo? Um gráfico? Uma tabela? Um triângulo?

Aluno: Tinha triângulo, ela falava de triângulo que eu me lembro.

Rachel: Qualquer triângulo? Ou tinha um triângulo específico?

Aluno: Sim, se não me engano, o que vem na minha mente é... O que vem é o triângulo equilátero. Deixa eu ver... É só isso que vem na mente.

A.5.3 Entrevista 3

Rachel: Analisando esse triângulo aqui você consegue me indicar qual é o seno de α?

Aluno: Seno de α? Não.

Rachel: Se eu mexer no triângulo e colocar ele assim, facilita? Você pode mexer conforme você quiser.

Aluno: Certo. . . Não sei o número exato.

Rachel: Não tem problema, fala o que você estiver pensando.

Aluno: O seno? É que eu não lembro o valor.

Rachel: E usando as letras que estão dispostas no triângulo, você consegue me indicar?

Aluno: O quê?

Rachel: O valor, pelas letras indicar o valor que corresponde.

Aluno: Ah, indicar a letra do seno. É b.

Rachel: Você consegue identificar para mim aonde está a hipotenusa?

Aluno: Sim, aqui.

Rachel: Pode deixar o desenho de lado agora. Analisando esse círculo aqui eu destaquei o triângulo OAB. Você consegue me dizer onde, nesse círculo, tem um triângulo congruente a esse? De mesma medida. Você pode indicar para mim?

Aluno: Aqui.

Rachel: Tem mais algum? Em algum outro quadrante que você consegue identificar?

Aluno: Aqui, esses aqui também. Não, são esse, esse e esse. Esse daqui é com certeza, agora esse daqui... esses daqui também.

Rachel: Esse ângulo α pequenininho aqui, você consegue me indicar onde ele aparece nos demais quadrantes?

Aluno: Aqui, aqui, aqui, aqui, aqui, aqui.

Rachel: Vou deixar esse de lado e vamos para o próximo. Você consegue me dizer porque que essa relação aqui... Você já viu essa relação aqui?

Aluno: Já.

Rachel: Você consegue me dizer porque que ela é válida?

Aluno: Sim. Tô pensando na resposta.

Rachel: Pode falar do jeito que você tá pensando, mesmo que não seja uma resposta completa.

Aluno: Eu não sei como explicar.

Rachel: Quando você pensa na fórmula, o que te vem à mente?

Aluno: Que um completa o outro. Que nesse caso aqui ele completa esse... o cosseno e o seno... Ah!!! (pausa) Não, eu não sei explicar, não sei explicar.

Rachel: Tudo bem, a gente vai pra frente. Você consegue descrever para mim o que que é radiano?

Aluno: Sim.

Rachel: Você consegue escrever literalmente o que que é? Você pode usar a folhinha. Pode ser de caneta, pode ser de lápis, o que você preferir.

Aluno: É para escrever?

Rachel: Se você preferir pode fazer um desenho tentando representar o que é.

Aluno: Nossa, não vem nada na cabeça.

Rachel: Quando você pensa em radiano... Quando você ouviu essa palavra? O que você entende por radiano?

Aluno: Eu não sei se é o ângulo... deixa eu ver... Não sei, não sei explicar.

Rachel: Mas qual é a sua ideia quando você faz esse desenho? O que que é o quê pra você?

Aluno: O ângulo, o raio.

Rachel: E o radiano, se encaixaria onde? Ele é o ponto central? Ele é esse pedaço reto? Ele é o arco? O que ele é?

Aluno: O radiano?

Rachel: Aham. Se é que ele é uma dessas coisas, o que ele é?

Aluno: Ah sim, radiano... Não.

Rachel: Tudo bem, vamos para próxima. Você consegue descrever para mim a função seno? O que que é a função seno?

Aluno: Função seno... Ah sim, o seno eu acredito que corresponde a uma fração do ângulo.

Rachel: Fração do ângulo?

Aluno: É como se fosse o seno multiplicado por um determinado número vai resultar no ângulo. Aí esse ângulo, esse número que foi multiplicado pelo seno, ele multiplicado pelo seno dos outros ângulos ele vai dar o mesmo resultado. Vai dar o resultado do ângulo.

Rachel: Então existe um número que multiplicado pelo seno...

Aluno: É. Existe um número que multiplicado pelo seno resulta no valor do ângulo. Isso em todos os ângulos do triângulo.

Rachel: Para todos os triângulos?

Aluno: Para todos os triângulos? Deixa eu ver... Sim, acredito que sim.

Rachel: Tem alguma característica da função seno que você percebe? Alguma coisa que aparece sempre na função, alguma característica dela, comportamento?

Aluno: Alguma característica...

Rachel: Se quiser fazer um desenho do que te vem à mente...Você consegue fazer um gráfico dessa função?

Aluno: Não pera aí, o seno, para cada ângulo existe um seno. Para cada número de ângulo existe um seno, certo? E caso ultrapasse você pega metade desse ângulo do gráfico.

Rachel: Caso ultrapasse o que ?

Aluno: Caso ultrapasse o limite, caso ultrapasse os 90 graus.

Rachel: Ah sim. Se ultrapassar os 90 graus a gente pega o que?

Aluno: A metade.

Rachel: A metade do ângulo?

Aluno: A metade do ângulo, a metade do ângulo que deu. Se deu 94 a gente pega a metade que é 47. Ai você pega o seno de 47 graus.

Rachel: Isso pra fazer os cálculos com seno, é isso? Você pega metade para fazer os cálculos.

Aluno: Isso, se ultrapassar...

Rachel: O gráfico tem que formato? Você consegue lembrar?

Aluno: Não.

Rachel: Tá ok. Agora que você pensa um pouco mais sobre a função seno, você consegue voltar aqui e tentar me dizer porque que essa relação é válida?

Aluno: Deixa eu ver... Não.

Rachel: Não? Você consegue fazer alguma relação dela com o triângulo ou com um círculo?

Aluno: O quê?

Rachel: Uma relação dessa fórmula?

Aluno: Não.

Rachel: Se não, não tem problema.

Aluno: Não.

Rachel: Ok então. Por último, só pra gente concluir. Quando eu te apresento esse enunciado, o que você entende?

Aluno: Nenhum, nenhum. Ah não ser que... Eu responderia zero.

Rachel: Zero? Por quê?

Aluno: Porque não há uma abertura para um triângulo. Não há uma abertura. O ângulo α ele não existiria.

Rachel: Por ele ser menor que zero, é isso?

Aluno: Isso, por ele ser menor que zero ele não existiria. Por ele ser menor que zero ele não existiria então não existiria seno e cosseno.

A.5.4 Entrevista 4

Rachel: Analisando esse triângulo aqui, você consegue me dizer onde está o seno de α?

Aluno: Seno de α? É o b. Normal né?

Rachel: Eu não vou te indicar se está certo ou errado.

Aluno: Sim, sim, entendi.

Rachel: Para você é fácil visualizar assim ou você prefere mexer na posição do triângulo?

Aluno: Não, para mim não faz tanta diferença não, a posição.

Rachel: Analisando esse círculo aqui, eu destaquei o triângulo OAB. Você consegue me indicar onde tem triângulos congruentes a esse, de mesma medida que esse, nos outros quadrantes?

Aluno: Não, isso aí eu não estou lembrado não, dessa matéria não.

Rachel: Esse ângulo α aqui, você consegue identificar ele nos outros quadrantes?

Aluno: Sim.

Rachel: Você pode me mostrar onde?

Aluno: Dada a posição seria... Do terceiro quadrante.

Rachel: Onde?

Aluno: Esse daqui, e no segundo quadrante o A e do quarto quadrante seria o 7.

Rachel: Quando eu te mostro essa fórmula aqui, o que te vem à mente?

Aluno: Seria a respeito da... do... seno e cosseno... eu esqueci esse conteúdo.

Rachel: Não tem problema.

Aluno: Isso eu esqueci.

Rachel: Você consegue me dizer porque que isso é válido?

Aluno: Em relação à? Não entendi.

Rachel: Por que que essa fórmula é válida? E nesse triângulo você consegue fazer uma associação dela com esse triângulo, porquê ela é válida? Associação em relação à? Eu não estou entendendo.

Rachel: Você identificou para mim seno aqui. Você consegue identificar o cosseno no triângulo?

Aluno: Cateto adjacente... Não tô conseguindo lembrar.

Rachel: Você sabe que existe seno e cosseno aqui.

Aluno: Sim, sim.

Rachel: E aqui existe seno e cosseno.

Aluno: Eu sei.

Rachel: Você consegue fazer uma relação dessa fórmula com o triângulo?

Aluno: Não.

Rachel: E com o círculo trigonométrico?

Aluno: Não, na circunferência também não.

Rachel: Você consegue me dizer o que que é radiano?

Aluno: Radiano? Não.

Rachel: Um desenho? Um gráfico?

Aluno: Não.

Rachel: Você consegue descrever a função seno? O que que é a função seno?

Aluno: Função seno é dada… esses conteúdos, todos eles eu estudei, mas foi no início do ano que a professora Susley tinha passado. Ultimamente, de fato, seno e cosseno assim eu não ando estudando.

Rachel: Não tem problema. É só pra saber ao que te remete, o que você consegue captar daquele conteúdo. Não tem problema não saber, mas quando eu falo função seno, o que te vem à mente?

Aluno: Um conjunto de números assim, dado que vai chegar num resultado final comum.

Rachel: Você consegue pensar em algum comportamento dessa função? Alguma característica que ela tem? Que as outras não têm, por exemplo?

Aluno: Não, não sei.

Rachel: Você consegue pensar no gráfico dessa função?

Aluno: O gráfico ele é. . .

Rachel: Você pode fazer o desenho se você quiser.

Aluno: Não, não.

Rachel: Nem o formato do gráfico você consegue lembrar?

Aluno: Não, não.

Rachel: Você conseguiu lembrar de alguma coisa quando eu falei de seno e cosseno sobre essa fórmula?

Aluno: Negativo.

Rachel: Quando você lê esse enunciado aqui, o que você entende?

Aluno: O α sendo menor que zero é possível haver apenas um ponto, seu eu não me engano. eu não estou lembrado direito.

Rachel: Por que um ponto?

Aluno: Por causa do zero. No caso se o α fosse maior que zero. . . Pera. . . Seria dados dois pontos comuns. Tipo o exiso das abscissas e o eixo das. . . eu esqueci isso, mas é o eixo Y e o eixo X. Nesse caso não, vai achar somente um ponto na reta.

Rachel: Você consegue fazer um desenho disso para mim?

Aluno: Seria mais ou menos assim, deixa eu ver.... Seria dado apenas um ponto, mais ou menos aqui. Ao invés de ele estar centralizado no quadrante ele estaria nas retas. Eu acho que é isso.

Rachel: Se fosse assim ele estaria aonde aqui? Considerando o eixo Y e o eixo X?

Aluno: Eu acho. . . Na circunferência eu não sei muito não. De fato na circunferência. . . eu acho que seria...

Rachel: Tudo bem, você prefere fazer só no plano cartesiano? Sem a circunferência?

Aluno: Sim.

Rachel: Tá. Aí ele ficaria sobre um dos eixos?

Aluno: Sim, ele estaria sobre um dos eixos, pelo que eu me lembre. Eu acho que é isso.

Rachel: Não tem problema, eu quero saber exatamente o que você acha. Aí ele estaria sobre um dos eixos por conta do ângulo?

Aluno: É.

Rachel: Se o ângulo fosse maior que zero, ele estaria aonde?

Aluno: Estaria, sem ser sobre o eixo, estaria no quadrante, 1º, 2º, 3º. No meio do quadrante.

Rachel: Em qualquer um deles.

Aluno: É.

A.5.5 Entrevista 5

Rachel: Eu vou fazer as perguntas e aí você pode responder escrevendo, se você achar melhor falando ou fazendo um desenho. Aí fica a seu critério. O que ficar melhor pra você, tá!? (pausa) Analisando esse triângulo aqui você consegue determinar pra mim seno de α?

Aluno: Seno de α?

Rachel: Aham.

Aluno: Deixa eu ver aqui. (pausa) Seno do α é igual a c sobre a.

Rachel: E você consegue dizer pra mim quem é o cosseno de β? Se você achar melhor manusear o triângulo, colocar em outra posição, fica à vontade.

Aluno: Aham. (pausa) Seno né ou é cosseno?

Rachel: Cosseno de β.

Aluno: É b sobre a.

Rachel: Você pode escrever pra mim? Enquanto a gente vai fazendo a entrevista eu não vou indicar se está certo ou errado, eu só vou fazendo as perguntas, tá!? Analisando essa figura aqui, eu destaquei o triângulo OAB, você consegue me indicar onde tem triângulos congruentes a esse nos outros quadrantes?

Aluno: Congruentes é tipo igual né?

Rachel: Isso, mesma medida, semelhante, essa é a ideia.

Aluno: Bom um que tem semelhança é esse, o resto eu acho que o tamanho é diminuído.

Rachel: Tá. Esse daqui certo?

Aluno: É esse mesmo.

Rachel: Ok. Você consegue me indicar onde esse ângulo α aparece? Em que outros lugares?

Aluno: No centro da circunferência.

Rachel: Você pode me indicar onde?

Aluno: Essa área.

Rachel: Em todo ele?

Aluno: É.

Rachel: Você consegue achar um intervalo pequenininho que seja exatamente igual a α?

Aluno: Ah! Intervalo dentro desses daqui né!?

Rachel: Uhum.

Aluno: É, esse aqui né?

Rachel: Quando eu te mostro essa fórmula aqui o que que te vem à mente?

Aluno: É uma fórmula, deixa eu ver se eu lembro... Eu esqueci o nome da fórmula.

Rachel: Tudo bem, só o que você lembrar.

Aluno: Você quer o... A gente tem um triângulo isósceles normal e você tem que saber o seno que é o cateto oposto sobre a hipotenusa e o outro é o cateto adjacente...

Rachel: Você associa com esse triângulo?

Aluno: É, podemos utilizar sim. Sim a gente pode utilizar.

Rachel: Para todo o triângulo desse ela é válida?

Aluno: Não, eu acho que tem um triângulo que não pode mas eu não sei qual é o nome do triângulo.

Rachel: E você consegue fazer alguma associação dessa fórmula com esse círculo?

Aluno: Dessa fórmula aqui com esse círculo?

Rachel: Uhum.

Aluno: Sim, se for me dado os números, o total de α e... é. Mas nessa fórmula sempre vai ser utilizado o α mesmo ou pode ser substituído por um outro número tipo um 30%, 30% não, 30 graus vamos dizer assim?

Rachel: Pode.

Aluno: Então esse daqui... Sim pode fazer, pode utilizar essa fórmula sim, porque o triângulo é isósceles então, você pode usar a mesma fórmula nesse daqui. Como esse triângulo é igual ao outro de baixo então você pode utilizar a mesma fórmula.

Rachel: E se esse triângulo estivesse no segundo quadrante? Podería usar também? Se tivesse um ângulo maior aqui.

Aluno: Eu acho que sim, vai depender muito.

Rachel: Você consegue me explicar o que que é radiano?

Aluno: Qualquer número que pode ser *radiado* basicamente. Tipo raiz quadrada de algum número tipo o 9, você pode *radiar* ele e dá 3.

Rachel: Entendi. E em relação à ângulos, você consegue fazer alguma relação entre radiano com ângulos?

Aluno: Sim, porque a gente precisa... é mas a gente precisa saber o total do ângulo né, tipo 30 graus, a gente pode, é, colocar ele na tabelinha que eu esqueci o nome. Você pode colocar ele na tabelinha que a gente usa, pra separar em vários numerozinhos, tipo o a do 30 eu acho que é 1,5, e aí você separar esse daí e colocar desse jeito.

Rachel: Tá ok. Você consegue descrever para mim o que que é a função seno ou cosseno?

Aluno: Descrever ela? É tipo... O lado do triângulo né, então você tem os três lados do triângulo ai você separa ele em cateto oposto, a hipotenusa e cateto adjacente. Só que a gente tem algumas fórmulas que a gente pode utilizar, como o cateto oposto sobre hipotenusa que a gente vai calcular o seno normal do ângulo que foi nos dado e o outro é o cosseno que é aquele lá que a gente coloca o cateto adjacente sobre a hipotenusa e o último, que é o... qual é o último mesmo? Tangente, tangente que a gente calcula os dois números que é o cateto oposto e o cateto adjacente.

Rachel: Beleza. Você consegue pensar num gráfico para a função seno?

Aluno: Função seno?

Rachel: Se eu colocar o eixo X e o eixo Y, você consegue desenhar um gráfico que represente a função seno?

Aluno: Se for na forma triangular né, eu acho que dá.

Rachel: Você pode tentar desenhar pra mim?

Aluno: O gráfico assim né?

Rachel: Aham.

Aluno: O triângulo não precisa ser exatamente triangular, ele pode ser assim também né, como forma de círculo? Assim! Eu acho que sim. Acho que está bom.

Rachel: Tá ok. Depois de pensar um pouquinho aí sobre a função seno e cosseno você tem mais alguma informação a me dar sobre essa fórmula? Você consegue associar ela de mais algum jeito ao triângulo ou ao círculo?

Aluno: Deixa eu ver aqui... Associar ela?

Rachel: Vamos fazer assim: você consegue me dizer aqui onde está o seno?

Aluno: O seno vai estar aqui e aqui. Na fórmula. Aí você utiliza na fórmula e coloca desse jeito aqui.

Rachel: E o cosseno?

Aluno: O cosseno é esse daqui com a hipotenusa.

Rachel: Aham. Então se eu colocar aqui. Você colocou seno e cosseno, porque está dando 1?

Aluno: Deixa eu ver aqui... (pausa) Porque só é dado um resultado.

Rachel: Ok, última. Quando você olha esse enunciado, o que você entende dessa pergunta?

Aluno: Que o ângulo α... Quando for menor que zero... O número real quando α for menor que zero né é... Quantos pontos P... Aqui a gente coloca tipo nesse gráfico, como você me ensinou e separa esse P como um número real normal. Quantos pontos cosseno... Juntando esses dois né. Ah não, aí a gente pode encontrar o seno e o cosseno do ângulo, ai a gente tem que ter o ângulo formado, aqui o negócio quando a gente já tiver descoberto ele. E aí dentro dessa formulazinha a gente vai utilizar ele e colocar qual é o cosseno do α que já tá aparecendo aqui, o α vai *ser aparecido* aqui e qual será o seno desse α também. E pode ser...Eu não sei se pode ter mais de uma

α, eu acho que pode né!? Um gráfico. Não sei(pausa). Ah não, é ele normal mesmo, só que você só utiliza ele duas vezes, você só faz ele duas vezes aí você encontra esses aqui. Aí você encontra esses pontos aqui, aí como pode ser esse daqui também... como se a gente encontrasse um aqui e aqui poderia ser um quase igual a ele porque você associa esse aqui né. Como esse é igual ao outro... Esse ângulo aqui vai ser igual a esse obrigatoriamente. Aí a gente coloca ele, esse e esse aqui e descobre quanto tem, quanto tem esse daqui.

Rachel: Quanto tem o quê? Que medida você tá querendo descobrir?

Aluno: Ixi, deixa eu ver aqui... A gente tem que saber o número real nesse caso? Acho que sim.

Rachel: Se eu definisse α como... se α fosse 30^o, por exemplo.

Aluno: Aham.

Rachel: Então quantos pontos $P = (\cos 30^o, \operatorname{sen} 30^o)$ existiriam?

Aluno: Para mim existiriam 4.

Rachel: Quatro?

Aluno: Porque seriam dois iguais....

Rachel: Você pode mostrar para mim onde eles estão?

Aluno: Tem uma tangente aqui. Um cosseno aqui, um outro aqui.

Rachel: Posso ver?

Aluno: E vai ter um cateto adjacente com esse daqui e a gente vai ter um aqui né e a gente vai ter outro aqui né. Ah não, então não é 4 não, nós vamos ter dois desse e dois desse. Só que...é muito... eu acho que é muito relevante a questão se a gente tiver... quando é dado na fórmula. Se a fórmula, eu acho, que disser que esse... esses triângulos né, todos forem do mesmo tamanho, todos eles vão ser, a gente pode descobrir só pelo... quantidade que tem né. A gente vai ter aqui e a gente tem aqui, então vai ser 1, 2, 3, 4 e aí são 4 cossenos do α. E se a gente tivesse aqui, como a gente já tem nessa mesma fórmula, aí a gente vai descobrir junto com esse cateto oposto e a hipotenusa que são a mesma quantidade, 4, 4 , 4.

Rachel: Entendi, então de um ângulo eu consigo 4 pontos dele?

Aluno: Uhum.

Rachel: Ok.

Aluno: De acordo com a fórmula.

A.5.6 Entrevista 6

Rachel: Quando eu te mostro esse triângulo aqui você consegue determinar pra mim o seno de α?

Aluno: Seno de α?

Rachel: Uhum.

Aluno: Calma aí, deixa eu ir à memória. É que eu estava fazendo um negócio de biologia agora… Seno de α. Aí fala?

Rachel: Sim. Se você quiser escrever, se você quiser me indicar qual que é.

Aluno: Cosseno… Ah, nossa ia falar m&@@...

Rachel: Você pode manusear o triângulo, se você preferir colocar em outra posição, se te ajudar... fica à vontade.

Aluno: Calma aí, seno… Aqui no caso seria cosseno… seria… b dividido por a.

Rachel: E o cosseno de α?

Aluno: C dividido por a, eu acho.

Rachel: Eu não vou te indicar se está certo ou se está errado por se tratar de uma entrevista, mas…

Aluno: Sim, sim.

Rachel: Analisando esse círculo aqui eu destaquei o triângulo OAB.

Aluno: Uhum.

Rachel: Você consegue me indicar onde aparecem triângulos congruentes à esse aqui dentro do círculo? Congruente é mesma medida, tá?

Aluno: Tá. Indica a posição?

Rachel: Uhum.

Aluno: Seria... esse… esse e esse daqui eu acho.

Rachel: Ok. Você consegue me dizer onde esse ângulo α aparece nesses triângulos que você sugeriu?

Aluno: No mesmo lugar que esse aí, não?

Rachel: Você pode me mostrar?

Aluno: Hum... α... aqui... aqui... e aqui.

Rachel: Ok. Você consegue me dizer porque que… Por que que isso daqui é válido? Primeiro: Você consegue lembrar dessa fórmula?

Aluno: É.

Rachel: Você já viu em algum momento?

Aluno: Seno ao quadrado...Sim eu já usei cálculos nela.

Rachel: Ao que que você relaciona ela? Onde você usa ela?

Aluno: Vamos ver… Ah eu acho que eu não lembro, cálculo básico. Eu esqueci o nome.

Rachel: Tudo bem. Você consegue associar ela a esse triângulo? Você identificou pra mim o seno e cosseno aqui, você consegue fazer uma relação dessas duas coisas?

Aluno: Vamos ver...Não, é porque eu não lembro muito bem como se calcula isso aqui.

Rachel: E aqui você consegue fazer alguma relação dessas medidas com essa fórmula?

Aluno: É a mesma coisa.

Rachel: Tudo bem, não tem problema não.

Aluno: Porque é o mesmo triângulo.

Rachel: Você consegue me dizer o que que é radiano?

Aluno: Radiano... A definição do que que é?

Rachel: Uhum.

Aluno: A definição eu acho que eu não sei muito bem o que que é, mas tipo dá para calcular o radiano de um círculo.

Rachel: Você pode fazer um desenho para tentar me explicar ou usar algumas palavras?

Aluno: Tem o graus e radianos. Calma aí, deixa eu ver se eu não estou falando $m\&@@$. Radianos… radianos no caso, eu acho que é tipo: aqui seria 90 e seria π sobre 2 no caso, eu acho que é isso.

Rachel: E o que seria o radiano, entre essas medidas que você falou?

Aluno: É isso daqui ó, seria esse π sobre 2.

Rachel: 90 representa o quê?

Aluno: 90 graus, essa medida aqui ó.

Rachel: Uhum, e aí 90 graus é igual a isso?

Aluno: É igual a π sobre 2. Aí aqui...

Rachel: Representa esse espaço?

Aluno: Aham, nessa parte aqui.

Rachel: Ah, então representa o arco?

Aluno: Sim, é.

Rachel: Ok. Você consegue indicar para mim quanto é π? Seguindo a sua lógica aí.

Aluno: O valor de π?

Rachel: Uhum.

Aluno: 3,1415.

Rachel: Tá.

Aluno: Algo assim.

Rachel: E se 90 é π sobre 2, aqui é π sobre 2, quanto é π nesse círculo?

Aluno: π seria aqui que é o 180.

Rachel: Entendi, tá ok. Você consegue descrever para mim a função seno?

Aluno: Descrever ela? A função seno seria... Acho que seria... eu não sei se eu tô falando certo mas...

Rachel: Não tem problema.

Aluno: Eu não sei, eu não sei se eu tô confundindo mas, é, tem aquele negócio de... para calcular quando tem três ângulos aqui, aí eu acho que... A função seno que você pediu né.

Rachel: Aham. Pode ser a cosseno se você achar melhor, tanto faz.

Aluno: Cosseno é... eu acho que função é pitágoras mais 2 vezes.... Ah, não lembro...

Rachel: Tudo bem.

Aluno: Não tô lembrando.

Rachel: Você consegue pensar em algum gráfico pra essa função?

Aluno: Não.

Rachel: Não? E alguma característica dela? Algum formato ou alguma coisa que ela tenha, alguma propriedade dela?

Aluno: $P@**@$. Essas questões de gráficos... Ah!

Rachel: Não tem problema, não se martirize... é só o que você souber.

Aluno: É que eu tenho que lembrar, eu já estudei isso, ah! Eu já fiz, eu já fiz calculo com esse negócio.

Rachel: Aham.

Aluno: Não, eu não lembro, eu não consigo lembrar.

Rachel: Não tem problema. Quando você vê esse enunciado aqui, o que você entende?

Aluno: Cosseno do α... Eu acho, quantos pontos existem... eu acho que... eu acho que nenhum, eu acho.

Rachel: Por quê?

Aluno: Aqui no caso vai ser... o α vai ser negativo.

Rachel: Aham.

Aluno: É o cosseno de um número negativo... Quantos pontos... Eu não lembro muito bem mas eu acho que quando tem uma relação com os números negativos com cosseno e seno eu acho que... alguma coisa dá zero, não entendo... não lembro muito bem.

Rachel: Tá, aí não... aí por conta disso não existiria o ponto?

Aluno: É, eu acho que não existiria.

Rachel: E se o α for maior que zero?

Aluno: Aí sim, aí é o valor que você quer? Não?

Rachel: Quantos pontos existiriam?

Aluno: α maior que zero...

Rachel: Por exemplo α igual a π sobre 2?

Aluno: Acho que um.

Rachel: Um?

Aluno: Aham.

Rachel: E se α for algum valor aqui, maior aqui, quantos pontos existiriam?

Aluno: Quanto seria... Aí, bom eu acho que seria... Cosseno do α. Ah! Essa eu não sei.

Rachel: Tudo bem, não tem problema não. Depois de falar de seno e cosseno tudo junto, essas coisas todas, você consegue fazer alguma outra relação com essa fórmula e me explicar porque que ela funciona?

Aluno: Ah! véi, como eu me esqueci disso?

Rachel: De onde ela vem ou porque ela é sempre válida?

Aluno: Seno ao quadrado de x... Ah, eu esqueci isso, eu não tenho como lembrar.

Rachel: Não tem problema. É isso.

Aluno: Provavelmente se você me perguntasse um mês atrás eu saberia responder.

Rachel: Eu entendo.

A.6 Folha de resposta

Avaliação diagnóstica: Ficha de respostas

Instituição: CEM 111 **Turma:** A

2017/2

Número chamada:____

Preencha completamente e com nitidez os círculos abaixo, utilizando caneta esferográfica de tinta preta.

Sexo: (M) (F)

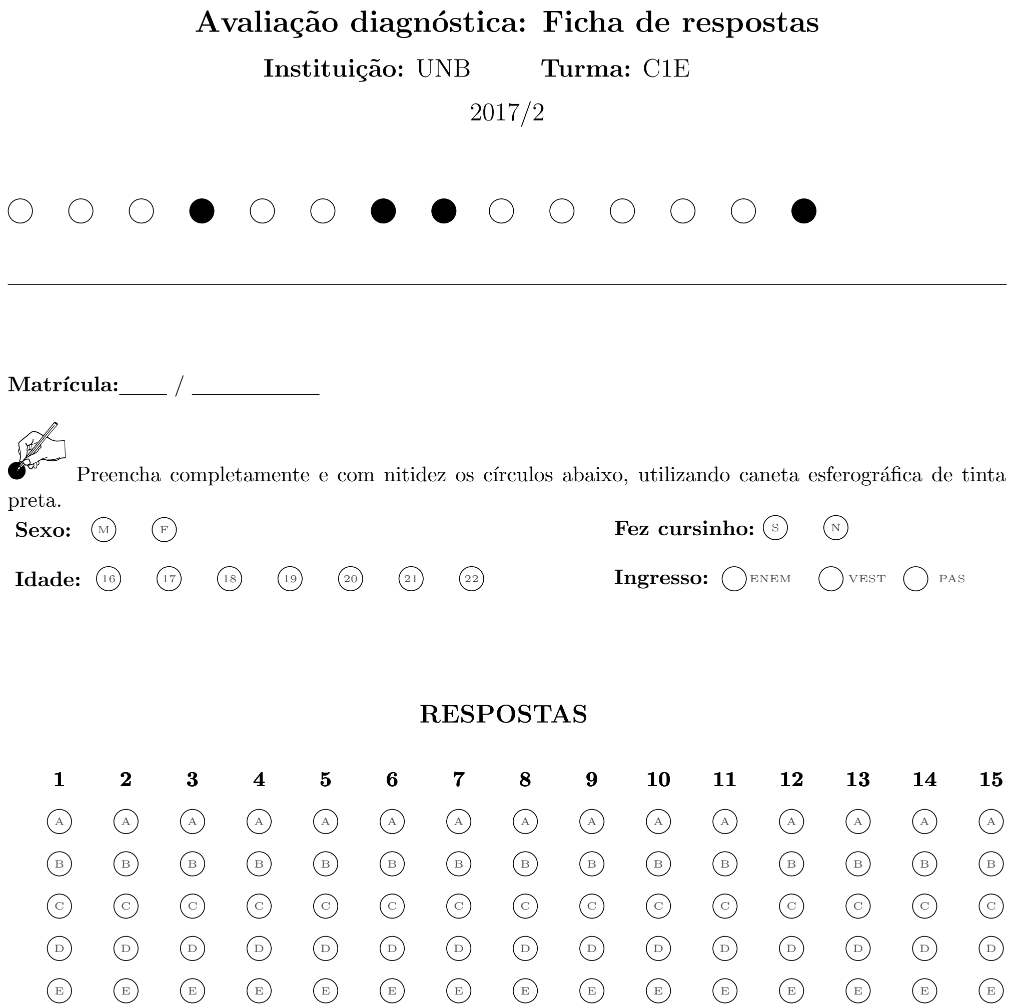
Idade: (14) (15) (16) (17) (18) (19)

Cursou essa série em ano anterior: (S) (N)

RESPOSTAS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Figura A.1: Modelo de folha de resposta para escolas.



Avaliação diagnóstica: Ficha de respostas

Instituição: UNB **Turma:** C1E

2017/2

Matrícula:____ / ___________

Preencha completamente e com nitidez os círculos abaixo, utilizando caneta esferográfica de tinta preta.

Sexo: M F **Fez cursinho:** S N

Idade: 16 17 18 19 20 21 22 **Ingresso:** ENEM VEST PAS

RESPOSTAS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Figura A.2: Modelo de folha de resposta para UnB.

Apêndice B

ANEXO

B.1 Anexo de descritores

B.1.1 Descritores SAEB e Prova Brasil selecionados

B.1.1.1 9^o ano do Ensino Fundamental

Espaço e forma

- D3 - Identificar propriedades de triângulos pela comparação de medidas de lados e ângulos.
- D6 - Reconhecer ângulos como mudanças de direção ou giros, identificando ângulos retos e não retos.
- D9 - Interpretar informações apresentadas por meio de coordenadas cartesianas.
- D10 - Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos.
- D11 - Reconhecer círculo/circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.

Números e operações/ Álgebra e funções

- D18 - Efetuar cálculos com números inteiros envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).
- D25 - Efetuar cálculos que envolvam números racionais (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).

Tratamento da informação

- D36 - Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.
- D37 - Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

B.1.1.2 3^o ano do Ensino Médio

Espaço e forma

- D1 - Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.
- D5 - Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente).
- D6 - Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.

Números e operações/ Álgebra e funções

- D14 - Identificar a localização de números reais na reta numérica.
- D15 - Resolver problemas que envolva variações proporcionais, diretas ou inversas entre grandezas.

- D20 - Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.
- D21 - Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.
- D30 - Identificar gráficos de funções trigonométricas(seno, cosseno e tangente) reconhecendo suas propriedades.

Tratamento da informação

- D34 - Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.
- D35 - Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

B.1.2 ENEM - Competências e Habilidades selecionadas

C1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

- H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

C2 - Utilizar conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agora sobre ela.

- H8 - Resolver situação problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

C3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

- H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
- H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas

C4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas cotidianos

- H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

C5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

- H19 - Identificar representações algébricas que expressem relações entre grandezas.
- H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
- H21 - Resolver situações problemas cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

C6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

- H24 - Utilizar informações em gráficos e tabelas para fazer inferências.
- H25 - Resolver problemas com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
- H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos

B.2 Anuência SEE-DF

Memorando Nº290/2017– EAPE

Brasília, 25 de setembro de 2017.

PARA: CRE Taguatinga

ASSUNTO: Autorização para realização de pesquisa

Senhor (a) Diretor (a),

Autorizamos a pesquisadora RACHEL SAFFIR ARAÚJO ALVES FEIJÓ, acadêmica do Mestrado Profissional em Matemática- PROFMAT, do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília - UNB, a realizar pesquisa de campo nessa regional.

A pesquisa intitulada "AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA EM TRIGONOMETRIA" tem como objetivo identificar os principais obstáculos que geram baixa proficiência em trigonometria dos alunos de Ensino Médio.

Dentre as ações de pesquisa estão incluídos questionários e entrevistas estruturadas como instrumentos de coleta e análise de dados, a serem aplicados entre alunos.

A autorização final da coleta dos dados dependerá do aceite do (a) gestor (a) da unidade ou setor objeto da pesquisa. O acesso à escola e aos alunos se dará por autorização expressa dos Gestores da Unidade de Ensino e ainda mediante assinatura do **Termo de Consentimento Livre e Esclarecido**.

Atenciosamente,

Thaiane Ferreira
Diretora - Dir. de Form. Cont. Pesq.
e Desenv. Profissional - EAPE
Mat.: 212.428-9
DODF Nº 234 - 14/12/16 Pág. 30

Thaiane Ferreira

Centro de Aperfeiçoamento dos Profissionais de Educação – EAPE
Diretoria de Formação Continuada, Pesquisa e Desenvolvimento Profissional
Diretora

Centro de Aperfeiçoamento dos Profissionais de Educação - EAPE
SGAS 907, Conjunto - A, CEP- 70.390-070
Telefone: 3901-2378

GOVERNO DO DISTRITO FEDERAL
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
Centro de Aperfeiçoamento dos Profissionais de Educação - EAPE

Memorando Nº285/2017– EAPE

Brasília, 25 de setembro de 2017.

PARA: CRE Recanto das Emas

ASSUNTO: Autorização para realização de pesquisa

Senhor (a) Diretor (a),

Autorizamos a pesquisadora RACHEL SAFFIR ARAÚJO ALVES FEIJÓ, acadêmica do Mestrado Profissional em Matemática- PROFMAT, do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília - UNB, a realizar pesquisa de campo nessa regional.

A pesquisa intitulada "AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA EM TRIGONOMETRIA" tem como objetivo identificar os principais obstáculos que geram baixa proficiência em trigonometria dos alunos de Ensino Médio.

Dentre as ações de pesquisa estão incluídos questionários e entrevistas estruturadas como instrumentos de coleta e análise de dados, a serem aplicados entre alunos.

A autorização final da coleta dos dados dependerá do aceite do (a) gestor (a) da unidade ou setor objeto da pesquisa. O acesso à escola e aos alunos se dará por autorização expressa dos Gestores da Unidade de Ensino e ainda mediante assinatura do **Termo de Consentimento Livre e Esclarecido**.

Atenciosamente,

Thaiane Ferreira
Diretora - Dir. de Form. Cont. Pesq.
e Desenv. Profissional - EAPE
Mat.: 212.428-9
DODF Nº 234 - 14/12/16 Pág. 30

Thaiane Ferreira

Centro de Aperfeiçoamento dos Profissionais de Educação – EAPE
Diretoria de Formação Continuada, Pesquisa e Desenvolvimento Profissional
Diretora

GOVERNO DO DISTRITO FEDERAL
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
Centro de Aperfeiçoamento dos Profissionais de Educação - EAPE

Memorando Nº278 /2017– EAPE

Brasília, 25 de setembro de 2017.

PARA: CRE Ceilândia

ASSUNTO: Autorização para realização de pesquisa

Senhor (a) Diretor (a),

Autorizamos a pesquisadora RACHEL SAFFIR ARAÚJO ALVES FEIJÓ, acadêmica do Mestrado Profissional em Matemática- PROFMAT, do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília - UNB, a realizar pesquisa de campo nessa regional.

A pesquisa intitulada "AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA EM TRIGONOMETRIA" tem como objetivo identificar os principais obstáculos que geram baixa proficiência em trigonometria dos alunos de Ensino Médio.

Dentre as ações de pesquisa estão incluídos questionários e entrevistas estruturadas como instrumentos de coleta e análise de dados, a serem aplicados entre alunos.

A autorização final da coleta dos dados dependerá do aceite do (a) gestor (a) da unidade ou setor objeto da pesquisa. O acesso à escola e aos alunos se dará por autorização expressa dos Gestores da Unidade de Ensino e ainda mediante assinatura do **Termo de Consentimento Livre e Esclarecido**.

Atenciosamente,

Thaiane Ferreira
Diretora - Dir. de Form. Cont. Pesq.
e Desenv. Profissional - EAPE
Mat.: 212.428-9
DODF Nº 234 - 14/12/16 Pág. 30

Thaiane Ferreira

Centro de Aperfeiçoamento dos Profissionais de Educação – EAPE
Diretoria de Formação Continuada, Pesquisa e Desenvolvimento Profissional
Diretora

Centro de Aperfeiçoamento dos Profissionais de Educação - EAPE
SGAS 907, Conjunto - A, CEP- 70.390-070
Telefone: 3901-2378

B.3 Interface para alimentação do banco de dados com dados dos alunos

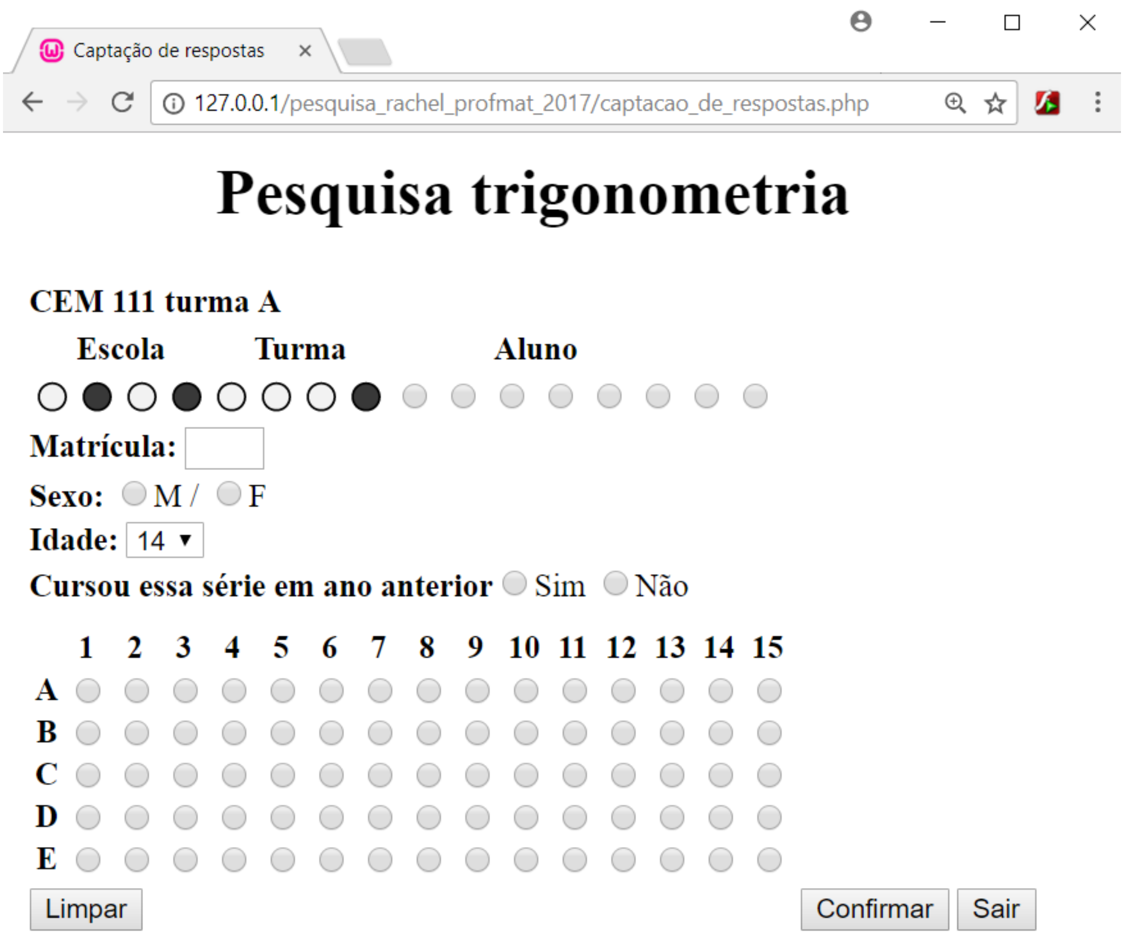


Figura B.1: Interface para alimentação do banco de dados com dados dos alunos.