

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Processos Estocásticos e Interações de Longo
Alcance**

Por

CHRISTINE REBOUÇAS LOURENÇO

Brasília-DF, 05 de março de 2007.

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Processos Estocásticos e Interações de Longo
Alcance**

Por

Christine Rebouças Lourenço

Orientador

Prof. Dr. Tarcísio Marciano da Rocha Filho

Dissertação submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília

como requisito para a obtenção do grau

de Mestre em Física

Processos Estocásticos e Interações de Longo Alcance

Por

Christine Rebouças Lourenço

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada por:

Prof. Tarcísio Marciano da Rocha Filho
(Orientador) IF - UnB

Prof. Fernando Albuquerque de Oliveira
FIS/UnB

Prof. Iram Marcelo Gleria
Departamento de Física - Universidade Federal de Alagoas

Brasília,

Prof. Tarcísio Marciano da Rocha Filho
Coordenador de Pós-Graduação
Instituto de Física
Universidade de Brasília

“...

Alague seu coração de esperanças,
mas não deixe que ele se afogue nelas.
Se achar que precisa voltar, volte!
Se perceber que precisa seguir, siga!
Se estiver tudo errado, comece novamente.
Se estiver tudo certo, continue.
Se sentir saudades, mate-as.
Se perder um amor, não se perca!
Se o achar, segure-o!
Circunda-te de rosas, ama, bebe e cala.
O mais é nada.”

Fernando Pessoa

Ao meu pai e à minha mãe.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos ao meu orientador Prof. Tarcísio Marciano, pela paciência, seriedade, apoio e compreensão.

À minha família, o mais firme alicerce em minha vida.

Aos professores do Instituto de Física, que tanto contribuíram para a minha formação.

Aos amigos da Física, em especial, Álvaro, Bárbara, Gustavo, Maíra, Pedro, Roberto e Stella, que muito me ajudaram durante esse período.

Aos demais amigos, amigos da minha vida, que souberam compreender a ausência, a correria, o mal humor e sempre estiveram ao meu lado preenchendo minha alma de amor e alegria. Sintam-se todos abraçados.

E, sobretudo, a Deus.

Resumo

Os sistemas com interações de longo alcance apresentam características que os tornam muito interessantes, tais como estados quasi-estacionários não-gaussianos e relaxação violenta. A forma como esses sistemas evoluem da condição inicial para o equilíbrio termodinâmico passa por um estado quasi-estacionário em um tempo muito curto (relaxação violenta), após o qual ele evolui muito lentamente para o equilíbrio gaussiano (esse tempo de relaxação diverge com o número de partículas), apresentando difusão anômala. No equilíbrio final ele se torna normal. Por meio de simulações computacionais de um modelo hamiltoniano de campo médio, buscamos tirar conclusões a respeito do seu comportamento ao longo da evolução temporal e atestar a aplicabilidade das equações de Vlasov e Langevin generalizada. Sucessivas simulações foram feitas alterando-se as condições iniciais do sistema e vários resultados interessantes surgiram acerca dessa análise indicando inclusive uma perspectiva para um futuro trabalho. Verificamos que o modelo é uma excelente aproximação a partir de 10^5 rotores com energia inicial de 0,69, porém sua aplicabilidade para energias mais próximas da transição de fase ($U = 0,75$) precisa ser repensada.

Abstract

The long range interacting systems are very interesting because of their evolutive behavior towards thermodynamic equilibrium. They pass through a violent relaxation during a short period of time in a quasi-stationary state with anomalous diffusion. After that, it evolves very slowly to a gaussian state in which it presents a normal diffusion. Using simulations with the Hamiltonian Mean Field model we checked however this kind of systems could be described by the Vlasov or the generalized Langevin equation. Different simulations were made, with many different parameters, and a lot of interesting results arised, showing that these equations are great aproximations to the HMF model (begining from 10^5 particules for an energy of 0,69) and some of these results (for energies close to the phase transition, $U = 0,75$) also indicate a way to proceed our next researches.

Sumário

1	Introdução	9
2	Processos estocásticos e o teorema central do limite	12
2.1	Variáveis aleatórias	12
2.2	Soma de variáveis aleatórias e o teorema central do limite	13
2.2.1	Exemplo: soma de dados completamente aleatórios	22
2.3	Difusão e movimento aleatório	24
2.3.1	Exemplo: coeficiente de difusão para dados passos aleatórios não-correlacionados	26
2.4	Vãos de Lévy e passeio de Lévy	26
2.5	Distância ao regime gaussiano	30
3	Sistema HMF	34
3.1	Interação de longo alcance: força gravitacional e o sistema HMF . .	34
3.2	Descrição de campo médio e a equação de Vlasov	37
3.3	Difusão e evolução para o equilíbrio	40
3.4	Validade da equação de Vlasov para N finito	42

4	Difusão anômala no sistema HMF	52
4.1	Difusão e evolução para o equilíbrio termodinâmico	52
4.2	Função de auto-correlação das velocidades e difusão anômala	55
5	Conclusão e perspectivas	78
A	Equação de Vlasov	80
B	Limite termodinâmico e teoria de campo médio	85

Capítulo 1

Introdução

Os sistemas com interações de longo alcance são um assunto largamente explorado na literatura (vide, por exemplo, a referência [12] e as referências nela). Esses sistemas apresentam características que os tornam profundamente diferentes dos sistemas com interações de curto alcance, tais como calor específico negativo [24, 40], estados quasi-estacionários não-gaussianos [35, 44] e relaxação violenta [25] e a não-equivalência entre os *ensembles* canônico e microcanônico [4].

Uma força que deriva de um potencial $\phi(r)$, onde r é a distância ao centro de força, é dita ser de curto alcance quando a energia potencial das partículas distantes é desprezível. Isso só é verdade se $\alpha \leq D$, onde α é o expoente do decaimento para longas distâncias e D é a dimensão do espaço físico. Vemos assim que em um espaço tridimensional as forças coulombiana e gravitacional são de longo alcance. Como a primeira é usualmente blindada por cargas de sinais opostos, a força gravitacional é o principal exemplo (embora não o único) desse tipo de interação. Dessa forma é natural que a grande maioria dos trabalhos envolvendo os pontos acima mencionados envolvem sistemas auto-gravitantes, como no estudo

da dinâmica de galáxias [6] e aglomerados globulares [19]. Uma das características desses sistemas, que nos será de particular interesse nesta dissertação, é o fato de apresentarem comportamentos superdifusivos no estado quasi-estacionário.

A forma como esses sistemas evoluem em direção ao equilíbrio termodinâmico é certamente a parte mais intrigante desta análise. Sistemas com interações de curto alcance convergem para uma distribuição gaussiana das velocidades após um tempo de relaxação durante o qual apresentam uma difusão normal. Por outro lado, sistemas com interações de longo alcance evoluem da condição inicial para um estado quasi-estacionário em um tempo muito curto (relaxação violenta), após o que ele evolui muito lentamente para o equilíbrio gaussiano (esse tempo de relaxação diverge com o número de partículas). Durante todo esse tempo o sistema apresenta difusão anômala. No equilíbrio final ele se torna normal [43]. Por meio de simulações computacionais de um modelo hamiltoniano de campo médio, buscamos tirar conclusões a respeito do seu comportamento ao longo da evolução temporal e atestar a aplicabilidade das equações de Vlasov e Langevin generalizada [41]. Esta última, em particular, caso aplicável, seria de grande interesse por duas razões: primeiramente é uma equação ordinária, ao contrário das equações de Vlasov e Fokker-Planck. Em segundo lugar, uma série de propriedades relevantes do sistema podem ser estudadas utilizando-a.

Estudamos, nesta dissertação, a validade da equação de Vlasov para vários números de rotores antes não estudados na literatura mostrando como se torna cada vez mais correta a medida que aumentam o número de partículas.

No capítulo 2 deduzimos o teorema central do limite, assim como uma maneira de generalizá-lo, seguindo as referências [15, 18]. Nele também discutimos o fenômeno de difusão e passeios aleatórios, assim como os passeios de Lévy podem levar a uma difusão anômala.

O modelo de Hamiltoniana de Campo Médio (HMF) é definido no capítulo 3. Na seção 3.1, introduzimos a hamiltoniana do sistema bem como o comportamento do potencial de longo alcance. Algumas considerações são feitas a respeito do modelo, que justificam sua escolha para o presente estudo. O sistema HMF é amplamente estudado na literatura [1, 4, 3, 9, 22, 23, 32, 33, 35, 43] e muitas das suas propriedades podem ser determinadas utilizando a equação de Vlasov. A dedução desta última é feita a partir da equação de Liouville no Apêndice A, e a razão pela qual se torna possível aplicar esta equação a sistemas com $N \rightarrow \infty$ é explicitada no Apêndice B. No restante do capítulo 3, discutimos a validade da equação de Vlasov para N finito.

Finalmente no capítulo 4, apresentamos um estudo do comportamento difusivo do sistema HMF, da correlação de velocidades acompanhada de uma discussão da aplicabilidade da equação de Langevin. O capítulo 5 é reservado às conclusões.

Capítulo 2

Processos estocásticos e o teorema central do limite

2.1 Variáveis aleatórias

Uma variável aleatória X é uma função matemática que mapeia eventos não-determinísticos (aleatórios) em números. Por exemplo, ao escolher uma pessoa ao acaso entre os passantes e medir sua altura estaremos gerando como dados uma variável aleatória. Ou então o código RGB da cor de uma bola de bilhar retirada de dentro de uma caixa preta que continha muitas bolas de diferentes cores.

A probabilidade de que cada um desses eventos ocorra pode ser descrita por uma função probabilidade $P(X)$, quando X assume valores discretos, ou por uma densidade de probabilidade, quando assume valores contínuos. A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória é freqüentemente caracterizada por um pequeno número de parâmetros, os quais também têm uma interpretação prática. Por exemplo, é muitas vezes suficiente saber qual o valor médio dessa função, que costuma coincidir com o valor mais provável. Uma vez que a média é conhecida,

pode-se questionar a que distância os valores de x_i se encontram desse valor, usualmente caracterizada pela variância, ou desvio padrão, de uma distribuição.

A variância é calculada a partir do momento de segunda ordem da distribuição. O momento de ordem p é definido por:

$$\mu_{ip} = \langle x_i^p \rangle, \quad (2.1)$$

onde p é inteiro.

2.2 Soma de variáveis aleatórias e o teorema central do limite

A distribuição normal, ou gaussiana:

$$P(x) = \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad (2.2)$$

onde σ^2 é a variância, é encontrada freqüentemente no estudo de fenômenos dos mais variados, e corresponde em particular à distribuição de Maxell-Boltzman. Uma das razões de sua onipresença pode ser expressa pelo Teorema Central do Limite¹, que passamos a discutir.

O teorema garante, sob certas condições, que a distribuição de probabilidades da soma

¹A literatura em língua portuguesa apresenta com freqüência a expressão “Teorema do Limite Central” que é uma tradução, a nosso ver, inapropriada, uma vez que trata-se de um teorema central para o estudo do limite e não de um limite central.

$$S_n = \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.3)$$

de n variáveis aleatórias estatisticamente independentes tende para uma distribuição normal quando $n \rightarrow \infty$. Vamos demonstrar o teorema e ao mesmo tempo como ele deve ser modificado na presença de correlações, seguindo a referência [17].

Segundo Lévy, para variáveis reduzidas $\bar{x}_i = (x_i - \langle x \rangle) / \sqrt{\mu_{i2}}$, a função característica de um processo com segundo momento finito pode ser escrita da seguinte maneira [13]:

$$\bar{\Psi}(z) \equiv \langle e^{i\bar{x}z} \rangle = e^{-z^2(1+w(z))/2}, \quad (2.4)$$

com $w(0) = 0$. A função densidade de probabilidade da distribuição é dada pela soma de uma parte par e uma parte ímpar:

$$\begin{aligned} P(\bar{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int \bar{\Psi}(z) e^{-i\bar{x}z} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_R(z) \cos(\bar{x}z) dz + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_I(z) \sin(\bar{x}z) dz. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Como $w(z)$ é uma função complexa, podemos escrever a distribuição de probabilidades acima da seguinte maneira:

$$P(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2(1+w_R(z))/2} \cos(z^2 w_I(z)/2) \cos(\bar{x}z) dz$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2(1+w_R(z))/2} \sin(z^2 w_I(z)/2) \sin(\bar{x}z) dz, \quad (2.6)$$

onde a parte imaginária é ímpar e a parte real é par.

O termo “distribuições estáveis” foi introduzido por Paul Lévy no estudo da soma de variáveis independentes e identicamente distribuídas. O processo é Ω -estável, como definido por Figueiredo e colaboradores, se a função característica da variável reduzida da soma de n variáveis aleatórias:

$$S_n = \sum_{i=1}^n x_i,$$

for a mesma para n em um intervalo $[n_1, n_2]$. Dizemos que S_n é Ω -estável nesse intervalo. Ela pode ser escrita como

$$\bar{\psi}(z) = e^{-z^2(1+\Omega_n(z))/2}. \quad (2.7)$$

Como Ω_n caracteriza univocamente $\bar{\psi}$, o processo correspondente é denominado Ω -estável no intervalo considerado. A definição desse processo não torna sua distribuição de probabilidades estável, mas leva a uma função característica constante no intervalo tratado. Para essa classe de processos temos [15]:

$$P(0) = \frac{\text{constante}}{\nu_n}$$

onde $P(0)$ é a probabilidade de retorno à origem e ν_n é o desvio padrão de S_n .

Quando ν_n pode ser escrito como uma potência do tipo

$$\nu_n \propto n^{1/\alpha}, \quad n_1 \leq n \leq n_2$$

a probabilidade de retorno à origem se transforma em

$$P(0) = \frac{\text{constante}'}{n^{1/\alpha}}.$$

Definimos os momentos da variável agregada por:

$$\nu_{np} = \langle S_n^p \rangle, \quad \forall n, p \in N.$$

A relação entre as funções características das variáveis reduzidas e não-reduzidas é dada por $\bar{\psi}_i(z) = \psi_i(z/\sqrt{\mu_{i2}})$. Assim, as funções características dos x_i e dos S_n podem ser escritas como:

$$\psi_i(z) = \langle e^{Ixiz} \rangle = e^{-\mu_{i2}z^2(1+w_i(z\sqrt{\mu_{i2}}))/2}, \quad (2.8)$$

e

$$\Psi_n(z) = \langle e^{ISnz} \rangle = e^{-\nu_{n2}z^2(1+\Omega_n(z\sqrt{\nu_{i2}}))/2}. \quad (2.9)$$

A existência de uma função característica para a variável agregada quando $n \rightarrow \infty$ é garantida pelo teorema da continuidade de Lévy [15].

Para variáveis independentes, a função característica é dada pelo produto das funções características para cada n . No caso da presença de correlações, este

produto deve ser multiplicado por uma função $C_n(z)$ (esta metodologia foi introduzida por Figueiredo e colaboradores [15, 16, 17, 18]), que mede justamente a dependência entre as variáveis x_i (quando esta função vale identicamente 1 as variáveis são independentes), ou seja:

$$\Psi_n = C_n(z) \prod_{i=1}^n \psi_i(z). \quad (2.10)$$

As expressões anteriores para o cálculo da função característica para variáveis reduzidas podem ser expandidas em séries da seguinte maneira (considerando-as analíticas):

$$\psi_i(z) = 1 + \frac{I^2}{2!} \mu_{i2} z^2 + \frac{I^3}{3!} \mu_{i3} z^3 + \frac{I^4}{4!} \mu_{i4} z^4 + O(z^4), \quad (2.11)$$

e

$$\Psi_n(z) = 1 + \frac{I^2}{2!} v_{n2} z^2 + \frac{I^3}{3!} v_{n3} z^3 + \frac{I^4}{4!} v_{n4} z^4 + O(z^4). \quad (2.12)$$

Supondo que C_n também possa ser expandido em séries em torno de $z = 0$, da seguinte maneira:

$$C_n(z) = 1 + C_{n2} z^2 + C_{n3} z^3 + C_{n4} z^4 + O(z^4), \quad (2.13)$$

obtemos, substituindo (2.13), (2.12) e (2.11) em (2.10) e após alguns cálculos:

$$\psi_1(z) \dots \psi_n(z) C_n(z) = 1 + \frac{I^2}{2!} \sigma_{n2} z^2 + \frac{I^3}{3!} \sigma_{n3} z^3 + I^4 \left(\frac{\sigma_{n4}}{4!} + \frac{\gamma_n}{2!2!} \right) z^4 + O(z^4), \quad (2.14)$$

onde, para simplificar a notação, definimos:

$$\gamma_n = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \mu_{i2} \mu_{j2} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \langle x_i^2 \rangle \langle x_j^2 \rangle . \quad (2.15)$$

Temos então que

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{I^2}{2!} v_{n2} z^2 + \frac{I^3}{3!} v_{n3} z^3 + \frac{I^4}{4!} v_{n4} z^4 + O(z^4) \\ &= (1 + C_{n2} z^2 + C_{n3} z^3 + C_{n4} z^4 + O(z^4)) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\times (1 + \frac{I^2}{2!} \sigma_{n2} z^2 + \frac{I^3}{3!} \sigma_{n3} z^3 + I^4 \left(\frac{\sigma_{n4}}{4!} + \frac{\gamma_n}{2!2!} \right) z^4 + O(z^4)).$$

Comparando agora os termos de mesma ordem nesta equação, concluímos que:

$$C_{n2} = -\frac{1}{2}(v_{n2} - \sigma_{n2}), \quad (2.17)$$

$$C_{n3} = -\frac{I}{3!}(v_{n3} - \sigma_{n3}), \quad (2.18)$$

$$C_{n4} = -\frac{1}{4!}(v_{n4} - \sigma_{n4}) - \frac{1}{2!2!}(\sigma_{n2}(v_{n2} - \sigma_{n2}) + \gamma_n), \quad (2.19)$$

onde:

$$\sigma_{np} = \mu_{1p} + \mu_{2p} + \dots + \mu_{np} = \langle x_1^p \rangle + \dots + \langle x_n^p \rangle .$$

Podemos escrever, de maneira geral, que:

$$C_n(z) = e^{-z^2(-2C_{n2}+W_n(z))/2}, \quad (2.20)$$

com

$$W_n(z) = IW_{n1}z + W_{n2}z^2 + O(z^2). \quad (2.21)$$

Das relações anteriores obtemos que:

$$W_{n1} = \frac{1}{3}(v_{n3} - \sigma_{n3}),$$

e

$$W_{n2} = \frac{1}{4}(v_{n2} - \sigma_{n2})^2 - 2C_{n4}.$$

Então, considerando a função característica para as variáveis reduzidas, temos:

$$\begin{aligned} \psi_1(z)\dots\psi_n(z) &= \prod_{i=1}^n n e^{-\mu_{i2}z^2(1+w_i(z\sqrt{\mu_{i2}}))/2} \\ &= e^{-z^2(\sigma_{n2}+\sum_{i=1}^n \mu_{i2}w_i(z\sqrt{\mu_{i2}}))/2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

que nos dá, junto com a equação 2.20:

$$\Psi_n(z) = e^{-z^2(\sigma_{n2} + \sum_{i=1}^n \mu_{i2} w_i(z\sqrt{\mu_{i2}}))/2} e^{-z^2(v_{n2} - \mu_{n2} + W_n(z))/2} \quad (2.23)$$

$$= e^{-z^2(v_{n2} + \sum_{i=1}^n \mu_{i2} w_i(z\sqrt{\mu_{i2}}) + W_n(z))/2}.$$

Por outro lado, temos que, para a variável reduzida $S_n/\sqrt{v_{n2}}$:

$$\bar{\Psi}_n(z) = \Psi(z/\sqrt{v_{n2}}) = e^{-z^2(1 + \Omega_n(z))/2}, \quad (2.24)$$

onde podemos escrever $\Omega_n(z) = \Omega_n^{(1)}(z) + \Omega_n^{(2)}(z)$. Aqui $\Omega_n^{(1)}(z)$ corresponde à expressão obtida no caso de séries não-correlacionadas (isto é, na medida em que n se aproxima de infinito, $\Omega_n^{(1)}(0) = 0$) e $\Omega_n^{(2)}(z)$, por sua vez, é a contribuição devida às autocorrelações. Mais explicitamente, temos:

$$\Omega_n^{(1)}(z) = \frac{1}{v_{n2}} \sum_{i=1}^n \mu_{i2} w_i(z\sqrt{\mu_{i2}}/\sqrt{v_{n2}}), \quad (2.25)$$

e

$$\Omega_n^{(2)}(z) = \frac{1}{v_{n2}} W_n(z/\sqrt{v_{n2}}). \quad (2.26)$$

Neste ponto observamos que na ausência de correlação entre as variáveis agregadas x_i , temos $\Omega_n^{(2)} \equiv 0$. Por outro lado, a hipótese de infinitesimalidade de Lévy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{i2}}{\nu_{n2}} = 0, \quad (2.27)$$

implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n^{(1)}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_{n2}} \sum_{i=1}^n \mu_{i2} w_i \left(z \sqrt{\frac{\mu_{i2}}{\nu_{i2}}} \right) = 0, \quad (2.28)$$

ou seja, a função característica $\bar{\Psi}_{n \rightarrow \infty}$ corresponde à de uma gaussiana, o que demonstra o Teorema Central do Limite.

Vamos agora estudar como alterar o enunciado do teorema para levar em conta a existência de correlações entre as variáveis. Para tanto, começa-se definindo a correlação não-linear

$$\langle p_1 p_2 \dots p_k \rangle_n = \sum_{i_1 \dots i_k=1}^n (\langle x_{i_1}^{p_1} \dots x_{i_k}^{p_k} \rangle - \langle x_{i_1}^{p_1} \rangle \dots \langle x_{i_k}^{p_k} \rangle), \quad (2.29)$$

onde $p_1 p_2 \dots p_k$ são inteiros positivos. Assim, em particular quando se calcula $\langle 11 \rangle$ obtemos a correlação linear de pares:

$$\begin{aligned} \langle 11 \rangle_n &= \sum_{i,j=1, i \neq j}^n (\langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle) \\ &= \sum_{i,j=1, i \neq j}^n (\langle x_i x_j \rangle) = \frac{\nu_{n2} - \sigma_{n2}}{2}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ainda fazendo a decomposição $\Omega_n^{(2)}(z) = \Omega_{n1}^{(2)} z I + \Omega_{n2}^{(2)} z^2$ e levando em conta correlações até a quarta ordem, temos que:

$$\Omega_{n1}^{(2)} = \frac{1}{3} \frac{v_{n3} - \sigma_{n3}}{v_{n2}^{3/2}} = \frac{\langle 111 \rangle_n + 3 \langle 12 \rangle_n}{v_{n2}^{3/2}}, \quad (2.31)$$

e

$$\begin{aligned} \Omega_{n2}^{(2)} &= -\frac{1}{12} \frac{v_{n4} - \sigma_{n4} - 6\gamma_n}{v_{n2}^2} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\sigma_{n2}^2}{v_{n2}^2} \right) \\ &= -\frac{1}{12} \frac{(\langle 1111 \rangle_n) + 6 \langle 112 \rangle_n + 4 \langle 13 \rangle_n + 3 \langle 22 \rangle_n}{v_{n2}^2} \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\sigma_{n2}^2}{v_{n2}^2} \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Essas expressões são úteis para compreender as contribuições das correlações não-lineares para a convergência a uma função não-gaussiana. Em particular, podemos ter a correlação linear de pares nula $\langle 11 \rangle = 0$, mas ainda não convergir para uma gaussiana.

2.2.1 Exemplo: soma de dados completamente aleatórios

Ilustramos aqui o tipo de convergência esperada no âmbito do Teorema Central do Limite em uma simulação computacional em que se usam dados de um bom gerador aleatório [34]. O gerador produz de maneira eficaz uma distribuição de variáveis cuja soma ao longo do tempo converge rapidamente para uma distribuição gaussiana. Para efetivar as comparações, primeiramente, gera-se a variável e , por meio de sucessivas somas, várias realizações da variável somada S_n são produzidas.

Tira-se a média sobre todos os termos e calcula-se o desvio padrão da variável somada. Em seguida calculamos a *kurtosis* (que é uma medida da dispersão dos dados em comparação com a gaussiana) em função de n .

Na figura 2.1 temos o gráfico da *kurtosis* da distribuição S_n em função do número de variáveis aleatórias somadas. Note que a *kurtosis* rapidamente se aproxima de zero, conforme esperado para distribuições de variáveis não-correlacionadas, que corresponde justamente à convergência para uma distribuição gaussiana como implicado pelo teorema central do limite.

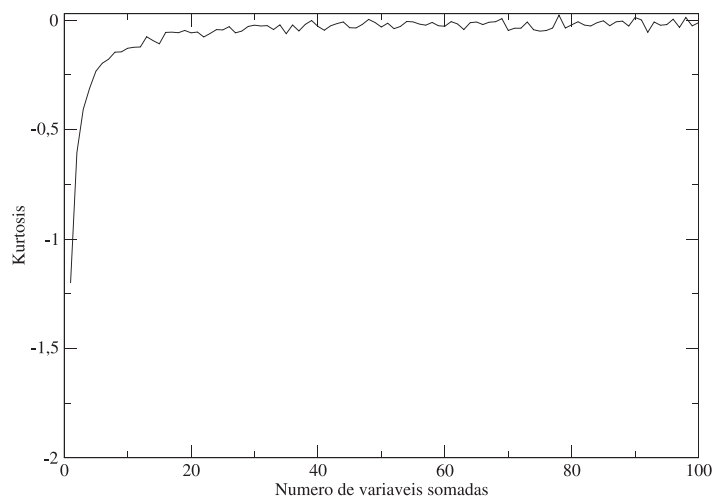


Figura 2.1: Kurtosis de uma distribuição de somas de números aleatórios não-correlacionados.

2.3 Difusão e movimento aleatório

O movimento aleatório de partículas de pólen em suspensão em um líquido foi descoberto pelo botânico inglês Robert Brown (1773-1858) em 1827. Em 1904, quase 100 anos depois da análise feita por Brown, o interesse sobre este tipo de movimento - que levou o nome de Movimento Browniano - ressurgiu com publicações de Sutherland [38] e [39], que desenvolveu uma forma de se calcular a constante de difusão e com ela determinar a massa molecular das partículas em movimento. A expressão para a constante de difusão é:

$$D = \frac{RT}{6\pi N_a a \eta} \frac{1 + 3\eta/(\mu a)}{1 + 2\eta/(\mu a)},$$

onde R é a constante universal dos gases perfeitos, T é a temperatura, N_a é o número de Avogadro, η é a viscosidade e μ é a mobilidade das partículas em suspensão. Esta expressão foi determinada para partículas esféricas de raio a .

No ano seguinte, Einstein publica seu trabalho sobre “Movimento Browniano”, introduzindo conceitos novos, a começar pela idéia de que as partículas são esferas de massa m e raio a imersas num líquido que se apresenta com um coeficiente de fricção γ [14]. A agitação molecular seguiria as mesmas leis gerais desse movimento. Baseando-se nesses parâmetros, Einstein chegou à expressão para o cálculo do desvio quadrático médio de um sistema que apresenta difusão normal.

Assim

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x^2(t) \rangle = 2Dt, \quad (2.33)$$

onde $x(t)$ é a distância à origem e o limite da média é calculada sobre um *ensemble* e D pode ser escrito em termos da constante de fricção da seguinte maneira:

$$D = \frac{RT}{mN_a\gamma} = \frac{RT\mu}{N_a}.$$

Note a semelhança entre os resultados obtidos por Einstein e por Sutherland. O limite presente na equação garante que esta só seja válida para tempos maiores que o tempo de relaxação do sistema, que é o tempo em que atinge o equilíbrio térmico. A relação linear estabelecida pela equação (2.33) define um sistema com difusão dita “normal”. No entanto, já se conhece atualmente vários sistemas em que a difusão não segue uma lei linear como em (2.33) [23]. Quando tal ocorre, temos o que se convencionou chamar de difusão anômala. Nesse caso temos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x^2(t) \rangle \sim t^\mu, \quad (2.34)$$

onde o expoente μ será o determinante do tipo de difusão, que é classificada da seguinte maneira:

- $0 < \mu < 1 \rightarrow$ Subdifusão.

- $\mu = 1 \rightarrow$ Difusão normal.
- $\mu > 1 \rightarrow$ Superdifusão.

A difusão anômala corresponde, assim, aos casos subdifusivo e superdifusivo. Observe que μ só pode assumir valores positivos, pois um valor negativo levaria a uma contração e não a uma difusão que, na evolução temporal, ocasionaria um colapso no sistema. O caso $\mu = 2$ é chamado de balístico pois corresponde ao obtido para partículas livres.

2.3.1 Exemplo: coeficiente de difusão para dados passos aleatórios não-correlacionados

Para ilustrar como passos aleatórios não-correlacionados resultam em uma difusão normal, vamos gerar tais passos utilizando o mesmo gerador de números aleatórios da seção 2.3. Depois disso calcula-se a variável somada, sua média e o desvio quadrático médio ν_2 a ser analisado. Na figura 2.2 mostramos um gráfico de ν_2 em função do tempo e a curva de ajuste.

Note que a curva de ajuste encontra-se exatamente sobre a curva da simulação e apresenta coeficiente igual a 1, como o esperado.

2.4 Vôos de Lévy e passeio de Lévy

Uma condição para a aplicabilidade do teorema central do limite é que o segundo momento seja finito. Um exemplo bastante estudado são os assim chamados Vôos

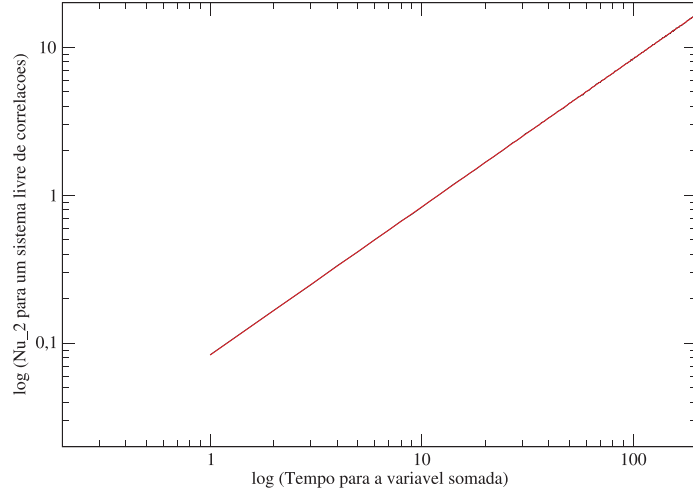


Figura 2.2: Desvio quadrático médio ν_2 em função do número de passos aleatórios não-correlacionados (tempo). A curva de ajuste $\nu_2 = Ct^\mu$ apresenta $C = 0,083$ e $\nu_2 = 1,00$.

de Lévy, cuja forma analítica são generalizações para casos do teorema central do limite com segundo momento infinito. Em outras situações, a velocidade de convergência para a gaussiana pode ser tão baixa que são necessários grandes números de eventos independentes, ou janelas temporais muito grandes para que esta convergência seja observada [26, 37]. Um exemplo disso é o Vão Truncado de Lévy, caracterizado pela distribuição de probabilidades de um salto aleatório de comprimento x [26]:

$$T(x) \equiv \begin{cases} 0, & x > l, \\ c_1 L(x), & -l \leq x \leq l, \\ 0, & x < -l, \end{cases} \quad (2.35)$$

onde

$$L(x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{(-\gamma q^\alpha)} \cos(qx) dq, \quad (2.36)$$

é a distribuição de Lévy de índice α ($0 < \alpha \leq 2$) e fator de escala γ ($\gamma > 0$ que por simplicidade adota-se 1) e c_1 é a constante de normalização e l , por sua vez, é a largura da janela. Estas distribuições são estáveis e satisfazem a um teorema central do limite generalizado.

Podemos ainda considerar o caso em que o sistema parece permanecer por um certo tempo em um estado antes de saltar para outro estado aleatório. Este tempo de pausa pode ser interpretado como um correspondente ao “tamanho” do salto seguinte. Este processo é chamado de Passeio de Lévy de tempo contínuo, por enfatizar o tempo de permanência em cada sítio, ao invés do número de passos que se dá entre dois estados. O passeio de Lévy percorre os mesmos pontos que o Vôo de Lévy, a diferença estando no fato de que no primeiro se leva em conta o tempo necessário para cada trecho, enquanto no segundo, todos os trechos são feitos em tempos iguais [36]. Como resultado, o passeio de Lévy possui variância finita, com uma convergência ultra-lenta para a gaussiana. Já o vôo de Lévy possui variância infinita e converge para uma distribuição de Lévy ao somarmos variáveis aleatórias que possuem uma distribuição da forma (2.36). Neste momento torna-se necessária a introdução de uma função densidade de probabilidade que leve em consideração não apenas o tamanho R do salto, mas também o tempo t que o sistema gasta nessa transição. Dessa forma, a probabilidade de realizar um salto de tamanho R

em um tempo t é:

$$\Psi(R, t) = \psi(t|R)p(R) \quad (2.37)$$

onde $p(R)$ é a probabilidade de um salto de tamanho R ocorra e $\psi(t|R)$ é a probabilidade de que esse salto ocorra em um tempo t . O caso mais simples corresponde a:

$$\psi(t|R) = \delta(t - |R|/|V(R)|), \quad (2.38)$$

onde leva-se em consideração uma velocidade V que depende da distância entre os dois estados R .

A densidade de probabilidade $Q(R, t)$ de que o sistema realize um salto R no tempo t é dada por:

$$Q(R, t) = \sum_{R'} \int_0^t Q(R - R', t - \tau) \Psi(R', \tau) d\tau + \delta(R) \delta(t). \quad (2.39)$$

A probabilidade $P(R, t)$ de que o sistema esteja em qualquer estado R no tempo t é então obtida da equação:

$$\frac{d}{dt} P(R, t) = \sum_{R'} \int_0^t Q(R - R', t - \tau) W(R', \tau) d\tau, \quad (2.40)$$

onde

$$W(R', \tau) \equiv \int_1^\infty \Psi(\lambda R', \lambda \tau) d\lambda. \quad (2.41)$$

A função W é uma função que relaciona o tamanho do salto $\lambda R'$ ao tempo $\lambda\tau$ que ele leva a partir de uma posição inicial R' e tempo τ . O parâmetro λ foi introduzido para diferenciar os saltos entre si e relacionar os tamanhos dos saltos ao tempo que eles levam. Note que $\lambda > 1$, pois se $\lambda = 1$ o sistema não apresenta evolução temporal. Todos estes saltos considerados no termo W tem velocidade média $|R'|/\tau$ e percorrem o segmento R num tempo t .

2.5 Distância ao regime gaussiano

Na análise da convergência de uma soma de variáveis aleatórias, é útil termos uma maneira de medir a distância entre uma distribuição e a gaussiana de referência. Para tal, vamos utilizar a função característica e a função $w(z)$ de Lévy como $w(z) = w_R + Iw_I$, onde cada um desses termos pode ser escrito como [16]:

$$\begin{cases} w_R = -\frac{1}{12}(\mu^4 - 3)z^2 - \left(\frac{\mu^4}{24} + \frac{\mu^3}{36} - \frac{1}{12} - \frac{\mu^6}{360}\right)z^4 + \dots, \\ w_I = -\frac{1}{12}(K)z^2 + O(z^4), \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} w_I = \frac{\mu^3}{3}z + \left(\frac{1}{6}\mu^3 - \frac{\mu^5}{60}\right)z^3 - \frac{1}{12}\left(\mu^3 - \frac{\mu^5}{10} - \frac{\mu^3\mu^4}{6}\right)z^5 + O(z^7), \\ w_I = \frac{1}{3}(Sk)z + \frac{1}{6}(Sk)z^3 + O(z^5), \end{cases}$$

onde K e Sk representam respectivamente a *kurtosis* e a assimetria da distribuição definidas a seguir.

A *kurtosis* é definida por:

$$K = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{x_i - \langle x \rangle}{\sigma} \right]^4 - 3 = \mu^4 - 3. \quad (2.42)$$

No caso de uma distribuição gaussiana temos que $K = 0$. A assimetria é a medida da simetria da distribuição de dados da variável em estudo - para uma distribuição normal, ou qualquer distribuição simétrica, ela se anula. Ela é definida por:

$$Sk = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{x_i - \langle x \rangle}{\sigma} \right]^3. \quad (2.43)$$

Definimos a medida de distância entre duas funções f e g , dado δ real, como:

$$D(f, g) = \int_{-\delta}^{\delta} \sqrt{(w_R^f(z) - w_R^g(z))^2 + (w_I^f(z) - w_I^g(z))^2} dz.$$

No caso em que g é a distribuição normal, a distância de f à Gaussiana é dada por:

$$D(f, \text{Gaussiana}) = \int_{-\delta}^{\delta} \sqrt{(w_R^f(z))^2 + (w_I^f(z))^2} dz.$$

A função $\Omega(z)$ da função característica (2.24) da distribuição de uma soma de variáveis aleatórias pode ser escrita em termos da *kurtosis* e da assimetria da distribuição da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \Omega_{nR}(z) = -\frac{1}{12}(K_n)z^2 + O(z^4), \\ \Omega_{nI}(z) = \frac{1}{3}(Sk_n)z + \frac{1}{6}(Sk_n)z^3 + O(z^5). \end{cases}$$

Retomando as equações anteriores, os fatores acima também podem ser escritos da seguinte maneira [16]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}Sk_n &= \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{i2}^{3/2} \mu_{i3}}{3v_{n2}^{3/2}} + \frac{\langle 111 \rangle_n + 3 \langle 12 \rangle_n}{v_{n2}^{3/2}} \\ &\equiv \frac{1}{3}Sk_n^0 + Sk_n^1, \end{aligned} \quad (2.44)$$

na qual Sk_n^0 é a assimetria para um processo independente e identicamente distribuído² e o fato de Sk^1 não se anular é explicado pela presença de correlações de terceira ordem. Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{12}K_n &= \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{i2}^2 \mu_{i4}}{12v_{n2}^2} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\sigma_{n2}^2}{v_{n2}^2} \right) \\ &\quad - \frac{\langle 1111 \rangle_n + 6 \langle 112 \rangle_n + 4 \langle 13 \rangle_n + 3 \langle 22 \rangle_n}{v_{n2}^2} \\ &\equiv \frac{1}{12}K_n^0 + K_n^1 + K_n^2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

na qual o termo K_n^0 é novamente relativo ao processo independente e identicamente distribuído, o termo $K_n^1 = R_n$ contém as correlações do tipo $\langle 11 \rangle_n$ e correlações de quarta ordem só aparecem no termo K_n^2 . Assim, as análises anteriores corroboram o importante papel desempenhado pelas autocorrelações não-lineares na soma

²Processo identicamente distribuído é aquele no qual as variáveis somadas x_i possuem média e desvio padrão iguais.

de variáveis estocásticas.

Capítulo 3

Sistema HMF

3.1 Interação de longo alcance: força gravitacional e o sistema HMF

A força gravitacional, apesar de ser uma interação fraca em relação às outras três forças, é uma interação de longo alcance assim como a força elétrica. O termo longo alcance, como explicado na introdução, corresponde a um decaimento para longas distâncias da forma $r^{-\alpha}$, com $\alpha \leq D$, sendo D a dimensão espacial. Diferentemente de outras interações, a força gravitacional atua universalmente em toda matéria e energia sem sofrer sequer efeitos de blindagem. Devido a esse caráter, a interação gravitacional é responsável não só pelos fenômenos mais simples e cotidianos, como a queda dos corpos, como por fenômenos de larga-escala como galáxias, buracos negros e a expansão do universo.

A simulação computacional de sistemas autogravitantes é extremamente complexa e onerosa (vide, por exemplo, a discussão acerca de implementações numéricas na ref. [19]). Em primeiro lugar, para calcular a força sobre cada uma das N partículas, precisamos calcular a contribuição de cada uma das demais

$N - 1$ partículas, o que resulta em um esforço computacional proporcional a N^2 . Na prática, isso implica que simulações só são possíveis para N pequeno a moderado, tipicamente na faixa de 10^3 a 10^4 partículas para os sistemas mais potentes. Outro problema é a divergência da força quando duas partículas se aproximam, o que pode ser resolvido introduzindo um “parâmetro de suavização” ϵ na força $F \sim (|\vec{r}_i - \vec{r}_j| + \epsilon)^{-1}$.

Dessa forma, é útil ter um modelo simplificado com interação de longo alcance, mas que retenha a fenomenologia de sistemas autogravitantes. O modelo que consideramos aqui consiste em tomar N partículas de massas iguais restritas a um círculo de raio R , se movendo sob o efeito das forças gravitacionais mútuas, no limite em que o parâmetro de amaciamento se torna grande. O modelo resultante é chamado de Modelo Hamiltoniano de Campo Médio, o modelo HMF de sua sigla em inglês. O nome vem do fato de que ele pode ser descrito por uma teoria de campo médio (vide apêndice B). Se denotarmos as posições das partículas sobre o círculo pelos ângulos θ_i , e após uma redefinição de unidades, a hamiltoniana do sistema pode ser escrita como [12]:

$$H_0 = K + V_0 = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\theta_i - \theta_j)]. \quad (3.1)$$

A hamiltoniana (3.1) descreve um sistema de rotores onde a interação entre todos é de mesma intensidade.

A magnetização (termo usado por analogia, uma vez que a força é puramente gravitacional) total é definida por:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i = M(\cos \phi, \sin \phi), \quad (3.2)$$

com $\mathbf{m}_i = (\cos\theta_i, \sin\theta_i)$ e M e ϕ representam respectivamente o módulo e a fase do parâmetro de ordem, que especifica o grau de *agrupamento* na interpretação de partícula e a *magnetização* na interpretação de *spins* XY. Dessa forma, a energia potencial do sistema pode ser escrita como a soma do potencial de cada uma das partículas v_i :

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N v_i, \quad (3.3)$$

com $v_i = 1 - M \cos(\theta_i - \phi)$. É fácil notar, utilizando simples identidades trigonométricas, que o espaço computacional é proporcional a N , em contraste com N^2 para forças gravitacionais. Isso permite realizar simulações com um grande número de partículas, no caso 10^6 nesta dissertação.

Deve-se ressaltar que o movimento de cada partícula ou de cada *spin* está associado a todos os outros, pois as variáveis de campo médio M e ϕ são determinadas a cada instante de tempo t para as posições instantâneas de todas as partículas ou *spins*. Uma vez que se conhece a magnetização total e os ângulos de todo o sistema, é muito mais simples, computacionalmente, determinar as características do sistema.

3.2 Descrição de campo médio e a equação de Vlasov

A evolução de sistemas com interação de longo alcance para o equilíbrio termodinâmico acontece através de várias etapas. Primeiro o sistema, partindo de uma condição inicial qualquer, atravessa uma etapa de relaxação violenta, muito rápida, rumo a um estado quasi-estacionário - a evolução para um estado oscilatório também é possível [11]. Essa etapa é bem descrita por uma teoria de campo médio (por meio da equação de Vlasov¹) desde que o número de partículas seja suficientemente grande [5]. Numa segunda fase, o valor da magnetização se altera até atingir o valor de Boltzmann-Gibbs, previsto pela mecânica estatística do equilíbrio. Essa fase de evolução para um estado gaussiano, conhecida como relaxação colisional, essencialmente devida a flutuações no campo médio relacionadas ao número finito de partículas - que influencia, por exemplo, o tempo de permanência no estado quasi-estacionário. Essa etapa final da evolução não é descrita pela equação de Vlasov, devendo-se considerar equações cinéticas com termos de colisão [9].

Como mostrado nas referências [5] e [8], a descrição de campo médio através da equação de Vlasov é exata no limite $N \rightarrow \infty$ para sistemas com interação de longo alcance, e uma boa aproximação para N finito. Mais adiante discutiremos como caracterizar tal aproximação. A equação de Vlasov para o sistema HMF é da forma:

¹Ver dedução da equação de Vlasov a partir da equação de Liouville no Apêndice A.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + p \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{d \langle V \rangle}{d\theta} \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \quad (3.4)$$

onde o potencial médio $\langle V \rangle$ é dado por:

$$\langle V \rangle = - \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\theta - \alpha) f_0(t, \alpha, p) dp. \quad (3.5)$$

Se consideremos termos colisionais, que são de ordem $1/N$ ou menores, o lado direito da equação (3.4) não se anula mais (vide [1] e [5]). São esses termos que introduzem um tempo de vida para os estados estacionários estáveis da equação de Vlasov, que caso contrário teriam tempo de vida infinito.

Para distribuições homogêneas, o potencial de campo médio se anula e qualquer distribuição de uma única partícula da forma $f_0(t, p)$ se torna estacionária, pois a equação (3.4) se reescreve como:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}(t, p) = 0. \quad (3.6)$$

Isto explica a estacionaridade de qualquer distribuição homogênea $f_0(p)$, mas não assegura sua *estabilidade*.

Para estudar os estados estacionários gerais da equação de Vlasov, e sua estabilidade, notamos que ela admite um número infinito de invariantes (Casimirs) da forma:

$$C_S[f] = \int f(p, q, t) dpdq. \quad (3.7)$$

Toda distribuição que é o extremo de algum Casimir é um estado estacionário da equação de Vlasov. Para determinar se é estável, basta que seja um máximo (não um ponto de sela) de algum Casimir. No caso do sistema HMF, e para estados homogêneos, Yamaguchi e colaboradores mostraram que a condição de estabilidade equivale à seguinte condição [44]:

$$1 + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'_0(p)}{p} dp > 0. \quad (3.8)$$

Vemos que podem existir inúmeras (na verdade infinitas) distribuições estáveis da equação de Vlasov, entre elas as distribuições gaussianas. Na referência [35] Rocha Filho e colaboradores mostraram que estados estacionários da equação de Vlasov correspondem a extremos da entropia de Gibbs, sujeita aos vínculos de energia, normalização e dos infinitos casimirs, e que a condição de estabilidade (3.8) corresponde a exigir que o extremo seja um máximo.

A existência de um número infinito de distribuições estáveis de Vlasov é o ponto chave para explicar os estados quasi-estacionários fora do equilíbrio observados no modelo HMF. Após (e se) atingirmos um estado estacionário, os efeitos de N finito tiram o sistema dessa condição e o levam a uma evolução lenta que irá terminar no estado de equilíbrio de Boltzmann-Gibbs. O que acontece na realidade é que o sistema sai de sua condição inicial sofrendo uma relaxação violenta, até atingir o equilíbrio de Vlasov, e depois atravessa uma fase de relaxação com colisões até atingir o equilíbrio final.

3.3 Difusão e evolução para o equilíbrio

O modelo HMF é muito útil como modelo simplificado no estudo da relação que existe entre a dinâmica e a termodinâmica dos sistemas com interações de longo alcance [1, 5, 7, 32, 35]. De fato, o modelo pode ser resolvido exatamente no ensemble canônico [1] e sua solução pode ser comparada a simulações dinâmicas microcanônicas. O sistema apresenta, no equilíbrio termodinâmico absoluto, uma transição entre uma fase magnética e uma não-magnética para uma energia média por partícula $U = 0,75$.

A respeito do comportamento difusivo do sistema, na referência [32] conclui-se que a evolução do sistema e a difusão em ângulo dependem fortemente do seu tamanho. O sistema apresenta um comportamento superdifusivo, que se aproxima da difusão normal através dos processos colisionais que o levam ao equilíbrio canônico.

O estudo da relaxação em sistemas Hamiltonianos com interações de longo alcance também foi estudado por Yamaguchi [43], que observou que o processo de relaxação acontece na seguinte seqüência: etapa quasi-estacionária, tempo de relaxação e etapa de equilíbrio. Observa-se também que o intervalo no qual a difusão anômala se manifesta se torna cada vez maior na medida em que N cresce. De forma semelhante, o tempo durante o qual o sistema permanece no estado quasi-estacionário, também depende de uma potência de N (em [43] é mostrado que essa potência é aproximadamente $N^{1.7}$). A concordância entre os resultados

das duas referências citadas acima, reforçam o fato de que o sistema invariavelmente atravessa uma fase de difusão anômala antes de atingir o equilíbrio termodinâmico.

A lenta convergência para o equilíbrio canônico pode ser interpretada como sendo causada por passeios de Lévy nos ângulos, como mostrado na referência [36]. Inspeccionando a figura 3.1, vemos que a variação do ângulo de uma partícula com o tempo se faz por longos saltos entre pontos de estagnação, que caracterizam justamente o passeio de Lévy. Assim a baixa velocidade com que o sistema se aproxima da distribuição normal, de fato, deve-se à presença de fortes auto-correlações nas velocidades. O interessante é que mesmo esses processos apresentam estados quasi-estacionários e que as correlações não-lineares são de suma importância para caracterizar completamente a maneira como a distribuição analisada converge para a distribuição normal.

Na referência [22], apresenta-se um estudo dos estados quasi-estacionários encontrados nos sistemas hamiltonianos de campo médio. Quando as simulações microcanônicas são iniciadas fora do equilíbrio, os resultados mostram a presença clara de um estado quase estacionário em um tempo transitório antes da relaxação. A energia cinética e potencial por partícula desse estado atinge um valor bem definido, no limite contínuo, e o tempo de vida desses estados cresce com N .

O tempo de transição entre a difusão anômala e a difusão normal coincide com o tempo de relaxação e que este tempo diverge com N . Esse comportamento deve-se, provavelmente, ao fato de que as correlações dinâmicas ficam mais fortes para números crescentes de partículas. Próximo ao ponto crítico, quando

os grandes aglomerados iniciais começam a se partir em aglomerados menores, a relaxação é provavelmente maquiada por estes fragmentos que tentam capturar as partículas livres e formar barreiras dinâmicas, efeito que, obviamente, também acompanha o crescimento de N .

Uma observação faz-se necessária aqui. Apesar de a difusão normal só ser estritamente observada quando se chega ao estado gaussiano, o valor do expoente de difusão varia fortemente, mesmo se aproximando bastante de 1 bem antes do sistema se afastar de maneira observável do estado quasi-estacionário, com o mostraremos no próximo capítulo. Esse é um claro exemplo de envelhecimento do sistema, já preparando o caminho para a transição para um estado gaussiano.

Todas as condições iniciais utilizadas nas simulações deste trabalho correspondem a uma distribuição uniforme das velocidades em um intervalo $-v_0$ a v_0 , que recebe a denominação “*water bag*”, oriunda da teoria de plasmas carregados. A distribuição dos ângulos dos rotores considerada é de dois tipos: homogêneo, no intervalo de 0 a 2π (*water bag* homogêneo) e todos com os ângulos iguais $\theta_i = 0$ (que denominaremos aqui de

water bag coerente).

3.4 Validade da equação de Vlasov para N finito

A equação de Vlasov, tal como enunciada na seção 3.2, é matematicamente equivalente à dinâmica hamiltoniana no limite de um número infinito de partículas. A consideração de que o termocolisional é zero, só pode ser feita no limite em que

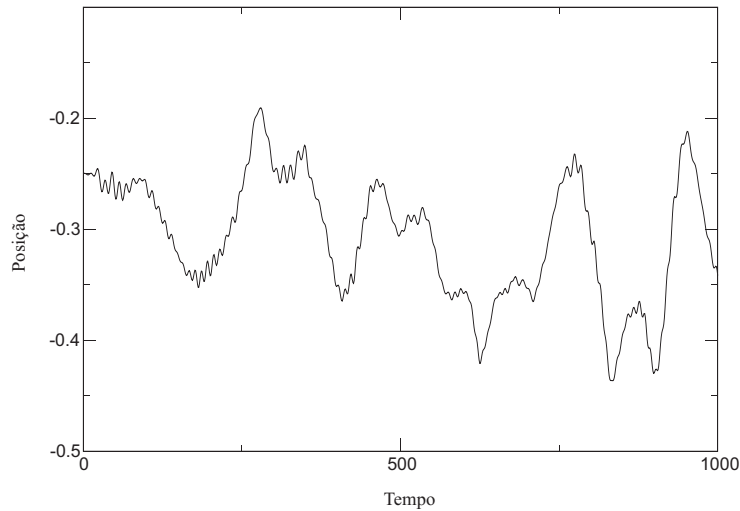


Figura 3.1: A simulação foi feita com 10^7 rotores, com energia inicial de 0,60 e condição inicial *water bag* homogêneo. Observe que as partículas realmente permanecem durante certo tempo em ângulos fixos e depois descrevem longos saltos em direção a outras configurações.

$N \rightarrow \infty^2$. Em sistemas em que os efeitos colisionais não podem ser desprezados, isto é sistemas reais com N finito, tal termo não se anula e outros fatores devem ser considerados para que a equação de Vlasov possa ser considerada uma boa aproximação.

A evolução dinâmica do modelo HMF pode ser bem entendida com o auxílio da equação de Vlasov. Isto porque os estados quasi-estacionários observados na dinâmica de N -partículas da hamiltoniana do sistema HMF, são correspondem aos estados de equilíbrio (estacionários e estáveis) da equação de Vlasov, que perdem sua estabilidade por efeitos de colisões entre as partículas, que são termos de ordem

²Ver discussão da aplicabilidade da equação de Vlasov a sistemas com número infinito de partículas no Apêndice B

$1/N$ conforme comentado em [5].

Existe uma infinidade de estados homogêneos de Vlasov (estados com magnetização nula) que correspondem a diferentes condições de distribuição de velocidades iniciais $f_0(t = 0, p)$. Até mesmo as funções de distribuição dos momentos de Tsallis são estados estacionários de Vlasov em uma certa região de energia onde os estados quasi-estacionários são observados no modelo HMF [2], apesar de serem apenas casos particulares, estando longe de representar a riqueza de estados possíveis observáveis em sistemas com interações de longo alcance [35].

Como a hipótese básica utilizada na dedução da equação de Vlasov é que as partículas são estatisticamente independentes, podemos utilizar o teorema central do limite como teste. Agregando as velocidades ou posições das partículas, a distribuição correspondente deve convergir para uma gaussiana, caso as variáveis sejam realmente independentes.

Uma análise interessante para a velocidade de convergência para a distribuição normal é o cálculo da *kurtosis* da distribuição da agregação de variáveis posição ou velocidade, fazendo uma média sobre várias simulações para reduzir flutuações estatísticas. Tomando-se as posições do nosso sistema HMF, a *kurtosis* pode ser calculada numericamente de acordo com a expressão (2.42) para cada uma das simulações. O programa repete este processo diversas vezes, com sementes diferentes para o gerador de números aleatórios utilizado ao gerar as condições iniciais nas simulações, e calcula a média como função do tempo para este conjunto de processos. A razão de agregar as posições e não as velocidades, é que nos possíveis

erros as flutuações estatísticas são menores. As figuras 3.2 a 3.11 são os gráficos destas simulações computacionais obtidos para alguns parâmetros.

A análise dos gráficos 3.2 a 3.9 mostra que a ausência de correlações entre as partículas é mais clara a partir da ordem de $N = 10^5$ rotores. Para N menor, ainda é possível observar a presença de pequenas correlações. Também fica claro que quanto maior N , melhor a convergência para a gaussiana da agregação das variáveis posição, o que mostra claramente a validade da teoria de campo médio para essa situação.

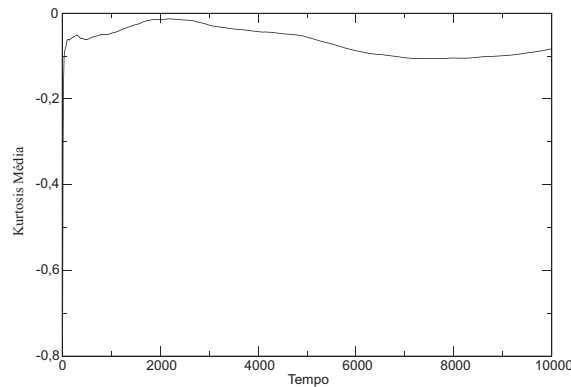


Figura 3.2: *Kurtosis* média para a agregação de $n = 50$ posições em função do tempo de simulação. A média foi feita sobre 100 simulações realizadas num tempo total de simulação de 10^4 com 10^4 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,2$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial por partícula de 0,69. Note que a convergência para a gaussiana aparece claramente logo no início da simulação quando a *kurtosis* da distribuição converge para zero na figura, porém se afastando posteriormente, o que evidencia possivelmente a riação de pequenas correlações entre as partículas.

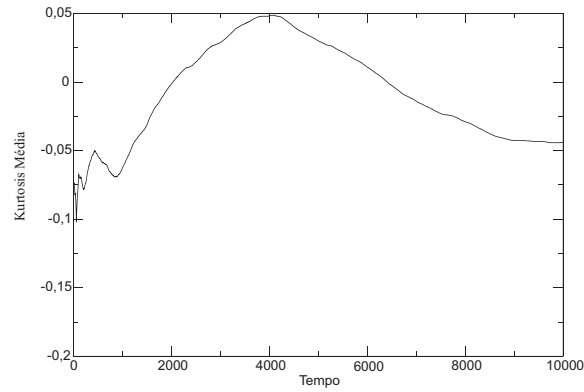


Figura 3.3: *Kurtosis* média para a agregação de $n = 50$ posições em função do tempo de simulação. A média foi feita sobre 100 simulações realizadas num tempo de 10^4 com 10^4 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,2$, e condição inicial *water bag* coerente com energia inicial de 0,69. Neste caso, o gráfico parece levar mais tempo para se aproximar de uma gaussiana, graças a presença das fortes correlações impostas pela coerência do *water bag* inicial. Nele também fica mais evidente o surgimento de correlações entre as partículas.

Na próxima seção estudaremos a relação entre o tipo de difusão do sistema e a função de auto-correlação da velocidade.

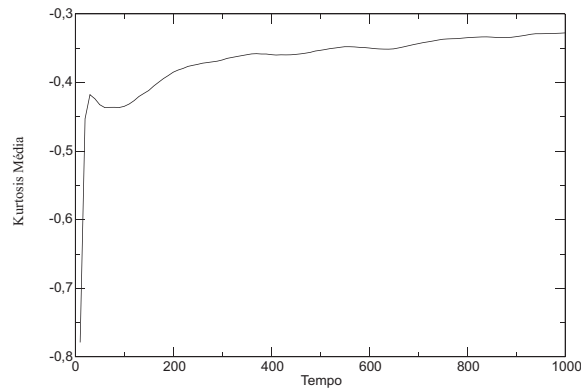


Figura 3.4: *Kurtosis* média para a agregação de $n = 50$ posições em função do tempo de simulação. A média foi feita sobre 1000 simulações realizadas num tempo de 10^3 com 10^3 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,5$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de 0,69.

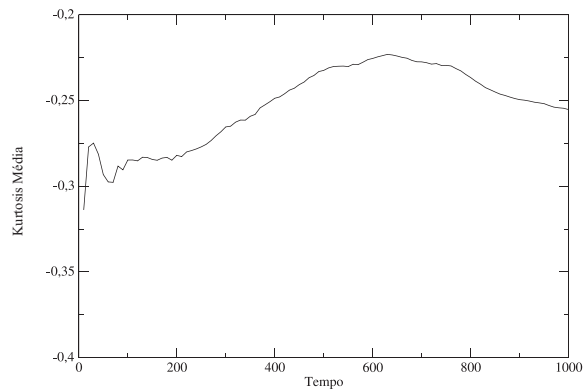


Figura 3.5: *Kurtosis* média para a agregação de $n = 50$ posições em função do tempo de simulação. A média foi feita sobre 1000 simulações realizadas num tempo de 10^3 com 10^3 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,5$ e condição inicial *water bag* coerente com energia inicial de 0,69.

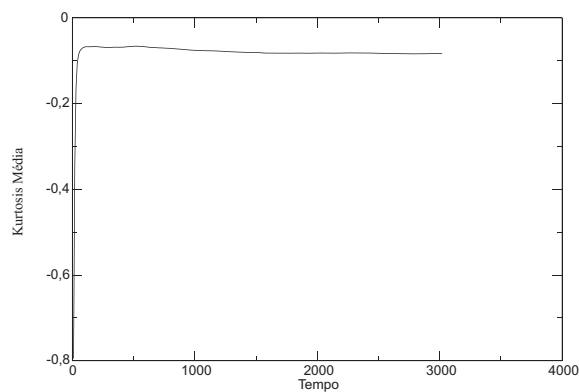


Figura 3.6: *Kurtosis* média para a agregação de $n = 50$ posições em função do tempo de simulação. A média foi feita sobre 10 simulações realizadas num tempo de 10^4 com 10^4 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,5$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de 0,69.

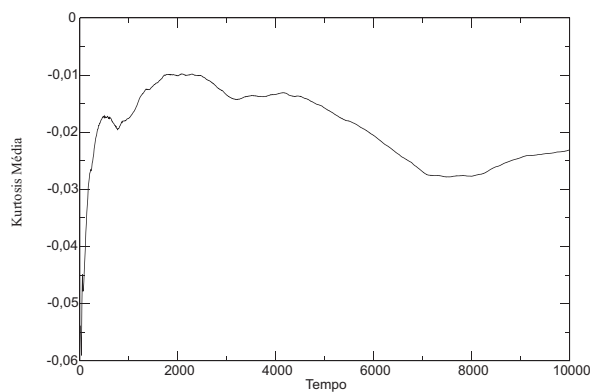


Figura 3.7: *Kurtosis* média para a agregação de $n = 50$ posições em função do tempo de simulação. A média foi feita sobre 10 simulações realizadas num tempo de 10^4 com 10^4 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,5$ e condição inicial *water bag* coerente com energia inicial de 0,69.

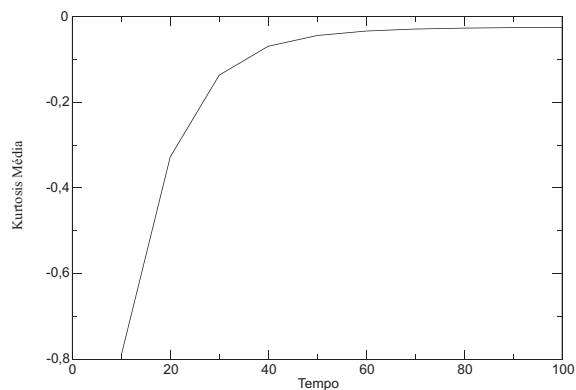


Figura 3.8: *Kurtosis* média para a agregação de $n = 50$ posições em função do tempo de simulação. A média foi feita sobre 1000 simulações realizadas num tempo de 10^2 com 10^5 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,5$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de 0,69. A convergência aparece muito clara e bem comportada.

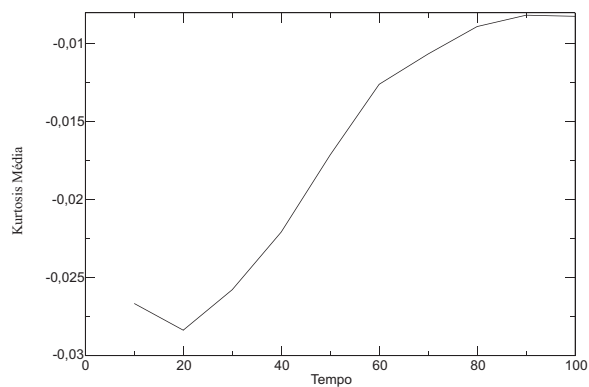


Figura 3.9: *Kurtosis* média para a agregação de $n = 50$ posições em função do tempo de simulação. A média foi feita sobre 1000 simulações realizadas num tempo de 10^2 com 10^5 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,5$ e condição inicial *water bag* coerente com energia inicial de 0,69.

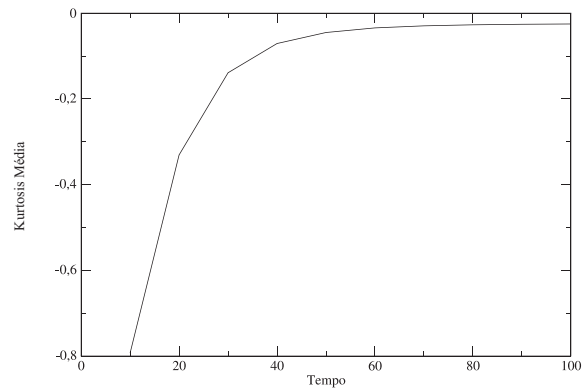


Figura 3.10: *Kurtosis* média para a agregação de $n = 50$ posições em função do tempo de simulação. A média foi feita sobre 1000 simulações realizadas num tempo de 10^2 com 10^6 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,5$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de 0,69.

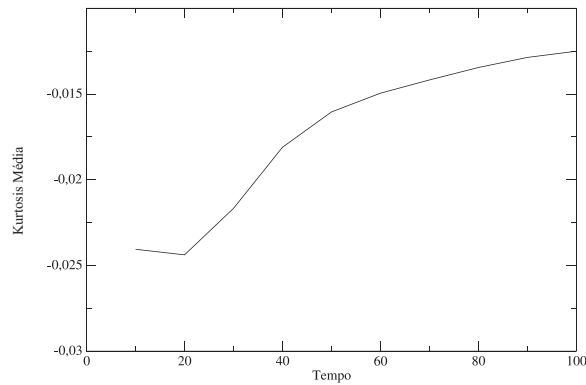


Figura 3.11: *Kurtosis* média para a agregação de $n = 50$ posições em função do tempo de simulação. A média foi feita sobre 1000 simulações realizadas num tempo de 10^2 com 10^6 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,5$ e condição inicial *water bag* coerente com energia inicial de 0,69.

Capítulo 4

Difusão anômala no sistema HMF

4.1 Difusão e evolução para o equilíbrio termodinâmico

Para estudar o comportamento difusivo do sistema HMF, analisaremos o comportamento do desvio quadrático médio ν_2 (em geral esta notação é usada para $\sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$) da variável posição:

$$\nu_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle x^2(t) \rangle = Ct^\mu, \quad (4.1)$$

onde C e μ são o coeficiente e o expoente de difusão, respectivamente. Diferentes análises podem ser feitas levando-se em consideração as condições iniciais do sistema. Neste estudo, as variações foram feitas no número de partículas e na distribuição inicial de posição e de velocidade dos rotores. Nas figuras 4.1 a 4.8 mostramos os gráficos de ν_2 em função do tempo para diferentes valores de N e condições iniciais de dois tipos, como explicado a seguir. Nos gráficos, a curva na cor preta é o resultado da simulação, enquanto que a curva em vermelho corresponde ao ajuste para a difusão após na parte final da simulação.

As simulações foram feitas utilizando um integrador simplético de quarta ordem [42].

Para os primeiros oito casos (figuras 4.1 a 4.8) o tempo total de simulação foi de 10^6 , enquanto que nos demais o tempo total foi reduzido a fim de que a simulação fosse factível com um esforço computacional aceitável. O passo de tempo Δt utilizado na integração foi escolhido para que o erro relativo na energia por partícula fosse, no máximo, da ordem de 10^{-5} .

Em todos os gráficos das figuras 4.1 a 4.10, o sistema apresenta comportamento superdifusivo. Quando o sistema está inicialmente em um estado homogêneo, ou vai para este após uma fase inicial de relaxação violenta, a difusão é sempre próxima da balística. Pequenas flutuações na forma de inomogeneidades estão sempre presentes, fazendo com que o expoente de difusão seja um pouco menor que 2. Também em todos os casos o expoente de difusão diminui com o tempo, estando o sistema sempre no mesmo estado estacionário (envelhecimento). Após o tempo de vida do estado quasi-estacionário (finito para N finito), o sistema relaxa para um estado com distribuição gaussiana das velocidades, com difusão normal.

Vemos assim que para tempos muito menores que o tempo de vida do estado, a difusão começa a se aproximar da norma, preparando a transição para o equilíbrio gaussiano.

O quão diferente da normal é a difusão em cada uma das simulações depende claramente das configurações iniciais de spins dos sistemas. Os sistemas que

inicialmente têm os spins organizados de forma coerente, estão, quase sempre, mais próximos da difusão normal no início da simulação. Isso se deve ao fato de que o sistema, após a relaxação violenta, passa para um estado quasi-estacionário não homogêneo que apresenta difusão anômala mais próxima da difusão normal diferentemente dos casos em que os estados estacionários são homogêneos e, portanto devem ser balísticos.

As oscilações maiores nas simulações para 1000 rotores (apresentadas nas figuras 4.1 e 4.2) são devidas à estatística sobre um pequeno valor de N .

Nas figuras 4.1 a 4.8, mostramos o gráfico log-log da dispersão ν_2 em função do tempo assim como o ajuste da relação 4.1 para a parte final do gráfico para os dois tipos de condições iniciais descritas acima e alguns valores de N . A energia total por partícula $U = 0,69$ é um pouco abaixo da transição de fase, e é um valor de referência bastante estudado na literatura. Em todos os gráficos o sistema aparenta comportamento superdifusivo, com expoente de difusão se aproximando de 1 (difusão normal), na medida em que o tempo passa. A difusão normal não chegou a ser observada neste trabalho, apesar da literatura apresentar esse resultado comprovadamente, pois o tempo de simulação foi sempre menor que o tempo necessário para que esse tipo de difusão se apresentasse. Quanto maior N mais lenta é a convergência para a distribuição normal. No caso das figuras (4.7) e (4.8) percebemos que o valor do expoente varia fortemente, se aproximando de 1 apesar do sistema ainda permanecer no estado quasi-estacionário, como pode ser visto nos gráficos (4.9) e (4.10). Esse fato é uma indicação de envelhecimento do sistema,

que precede a relaxação em direção ao equilíbrio canônico.

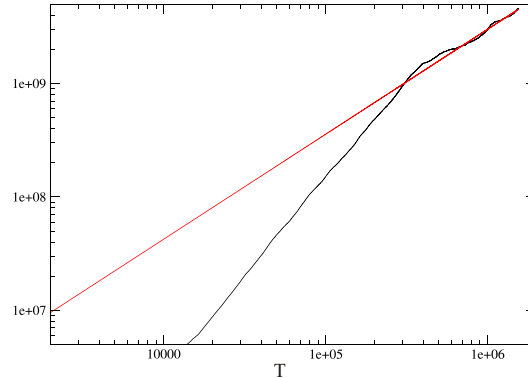


Figura 4.1: A figura mostra o comportamento de ν_2 ao longo do tempo para uma simulação que foi feita com 10^3 rotores num tempo de 10^6 com passo de tempo $\Delta t = 0,5$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de 0,69. A curva de ajuste apresenta $\mu = 0,926$ e $C = 8,3 \times 10^4$, isto é, ao final da simulação, o modelo já apresenta um comportamento muito próximo de uma difusão normal.

4.2 Função de auto-correlação das velocidades e difusão anômala

Processos de difusão podem ser estudados por vários tipos de abordagem (vide referência [27] para uma pequena revisão). Uma que permite uma comparação em termos de processos estocásticos, é baseada na abordagem de Mori [30, 31], formulada em termos da equação de Langevin generalizada, e da generalização da relação de Kubo ligando a constante de difusão e a auto-correlação das velocidades [20]. Alguns resultados interessantes nessa direção foram obtidos nas referências [29] e [41]. Nesta seção, vamos procurar verificar, ao menos de maneira

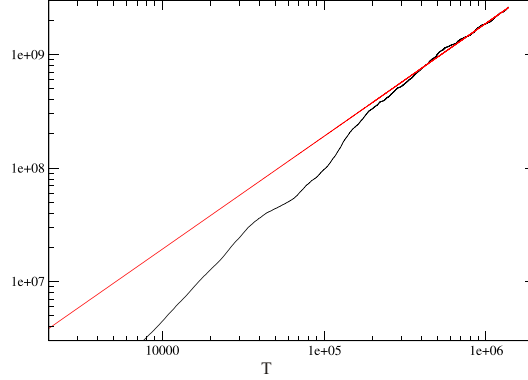


Figura 4.2: A figura mostra o comportamento de ν_2 ao longo do tempo para uma simulação que foi feita com 10^3 rotores num tempo de 10^6 , com passo de tempo $\Delta t = 0,5$ e condição inicial *water bag* coerente com energia inicial de $0,69$. A curva de ajuste apresenta $\mu = 0,997$ e $C = 2,0 \times 10^4$. Novamente, apesar da diferença no tipo de organização inicial e das oscilações ao longo da análise do sistema, o sistema converge para a gaussiana ao final do processo.

preliminar, a aplicabilidade desse tipo de formalismo a sistemas com interações de longo alcance, utilizando o sistema HMF como “laboratório”. Vale ressaltar que, a nosso conhecimento, isso ainda não foi realizado no presente contexto. Dados os muitos resultados para outros tipos de sistemas, e a compreensão que se ganha dos fenômenos físicos envolvidos, esta é certamente uma questão que vale a pena ser abordada. Vamos passar inicialmente em revisão alguns resultados de interesse, baseados nas referências [20, 29, 30, 31] e [41], e posteriormente estudar alguns resultados de simulações para o sistema HMF.

Os processos de difusão normal podem ser descritos pela equação de Langevin:

$$m \frac{d}{dt} v(t) + m\gamma v(t) = F(t), \quad (4.2)$$

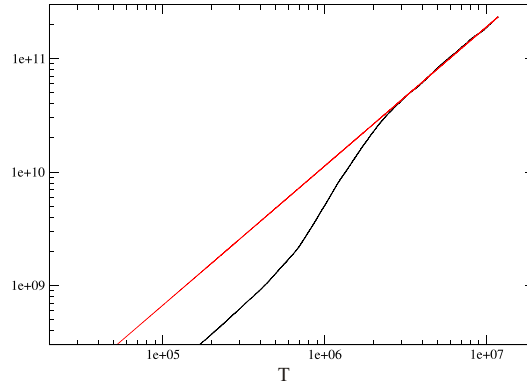


Figura 4.3: A figura mostra o comportamento de ν_2 ao longo do tempo para uma simulação que foi feita com 10^6 rotores, com passo de tempo $\Delta t = 0,5$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de 0,69. A curva de ajuste apresenta $\mu = 1,228$ e $C = 4,8 \times 10^3$. Nesta figura temos a representação do comportamento de um sistema com maior número de partículas. Os ruídos siminuíram, mas a convergência para a difusão normal torna-se mais lenta que nos sistemas anteriores.

onde $v(t)$ é a velocidade da partícula e $F(t)$ é uma força estocástica obedecendo as condições:

$$\langle F(t) \rangle = 0, \quad (4.3)$$

e

$$\langle F(0)F(t) \rangle = 2mk_B T \gamma \delta(t), \quad (4.4)$$

com m sendo a massa da partícula, k_B a constante de Boltzmann, T a temperatura e γ a fricção. As médias $\langle \dots \rangle$ são realizadas sobre um *ensemble* de realizações. Uma generalização natural da equação (4.2) é a equação de Mori-Lee, ou equação

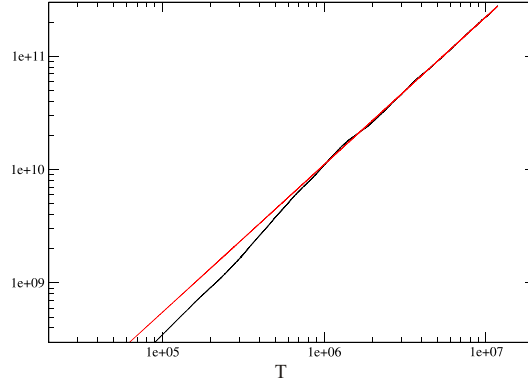


Figura 4.4: A figura mostra o comportamento de ν_2 ao longo do tempo para uma simulação que foi feita com 10^4 rotores num tempo de 10^6 , com passo de tempo $\Delta t = 0,5$ e condição inicial *water bag* coerente com energia inicial de $0,69$. A curva de ajuste apresenta $\mu = 1,305$ e $C = 1,6 \times 10^3$.

de Langevin generalizada:

$$m \frac{d}{dt} v(t) = -m \int_0^t \Gamma(t-t_1) v(t_1) dt_1 + F(t), \quad (4.5)$$

onde $\Gamma(t)$ é a memória do sistema e está relacionada à força estocástica $F(t)$ por meio da relação:

$$C_F(t) \equiv \langle F(t)F(0) \rangle = mk_B T \Gamma(t). \quad (4.6)$$

Quando a memória é de curto alcance, isto é, assume a forma $\Gamma(t) = 2\gamma\delta(t)$, a equação (4.5) retorna à forma (4.2). A função correlação de velocidades, definida por

$$C_v(t) = \langle v(t)v(0) \rangle,$$

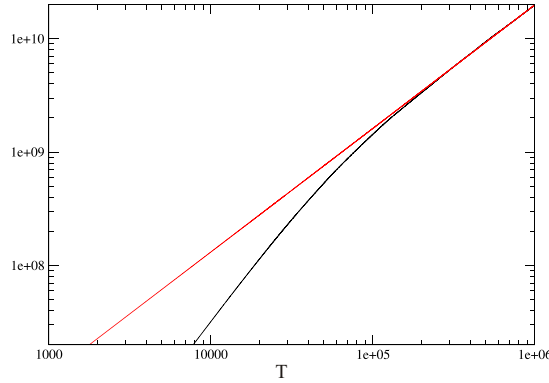


Figura 4.5: A figura mostra o comportamento de ν_2 ao longo do tempo para uma simulação que foi feita com 10^5 rotores num tempo de 10^6 , com passo de tempo $\Delta t = 0,5$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de 0,69. A curva de ajuste apresenta $\mu = 1,089$ e $C = 5,7 \times 10^4$. Neste caso a mudança de comportamento desde o início da simulação acontece de forma nítida e, de certa forma, mais brusca que as anteriores.

está diretamente relacionada às propriedades de difusão do sistema. A constante de difusão do sistema é dada por:

$$D = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \langle x^2(t) \rangle = \int_0^{\infty} C_v(t) dt. \quad (4.7)$$

Lembrando que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x^2(t) \rangle \propto t^\mu \quad (4.8)$$

vemos que se a difusão é do tipo normal, isto é, $\mu = 1$, D assume um valor finito.

Para os casos em que o sistema é subdifusivo ou superdifusivo, D assume valores que são, respectivamente, 0 e ∞ .

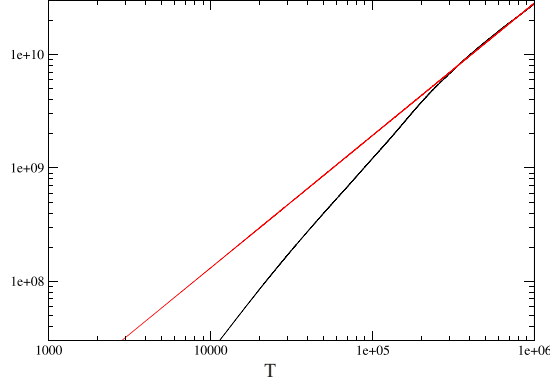


Figura 4.6: A figura mostra o comportamento de ν_2 ao longo do tempo para uma simulação que foi feita com 10^6 rotores, com passo de tempo $\Delta t = 0,5$ e condição inicial *water bag* coerente com energia inicial de 0,69. A curva de ajuste apresenta $\mu = 1,168$ e $C = 2,8 \times 10^4$.

Seguindo a referência [29], multiplicando a equação (4.5) por $v(0)$, tomando a média de *ensemble*, e também supondo que $\langle F(t)v(0) \rangle = 0$, obtemos:

$$\frac{dC_v(t)}{dt} = - \int_0^t \Gamma(t-t_1)C_v(t_1)dt_1. \quad (4.9)$$

Agora tomando a transformada de Laplace dessa expressão, chegamos a:

$$\tilde{C}_v(z) = \frac{C_v(0)}{z + \tilde{\Gamma}(z)}. \quad (4.10)$$

A constante de difusão pode ser escrita da seguinte maneira:

$$D = \tilde{C}_v(0) = \frac{C_v(0)}{\tilde{\Gamma}(0)}. \quad (4.11)$$

Assim, conhecendo a função correlação das velocidades $C_v(t)$ do sistema e

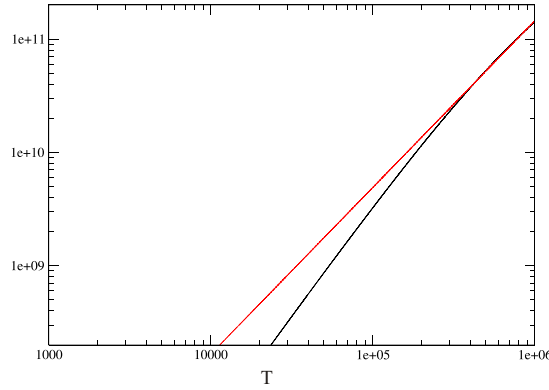


Figura 4.7: A figura mostra o comportamento de ν_2 ao longo do tempo para uma simulação que foi feita com 10^6 rotores num tempo de 10^6 , com passo de tempo $\Delta t = 0,5$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de 0,69. A curva de ajuste apresenta $\mu = 1,470$ e $C = 2,2 \times 10^3$. Para esta quantidade grande de rotores, observamos uma convergência ultra-lenta para a difusão normal, comprovando que o tempo de relaxação cresce com o aumento da correlação que depende diretamente do número de partículas.

tomando sua transformada de Laplace, podemos obter a transformada de Laplace da memória do sistema $\tilde{\Gamma}(z)$. A partir desta última, a memória do sistema é obtida tomando a transformada de Laplace inversa.

No caso em que assintoticamente a função memória é da forma de uma lei de potências do tipo $\Gamma(t) \sim t^{-\beta}$, sua transformada de Laplace assume a forma:

$$\tilde{\Gamma} \sim z^{\beta-1}, \quad (4.12)$$

para z pequeno, o que permite limitar o limite superior na transformada de Laplace:

$$\tilde{\Gamma}(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt'} \Gamma(t') dt' \approx \int_0^{1/z} \Gamma(t') dt', \quad (4.13)$$

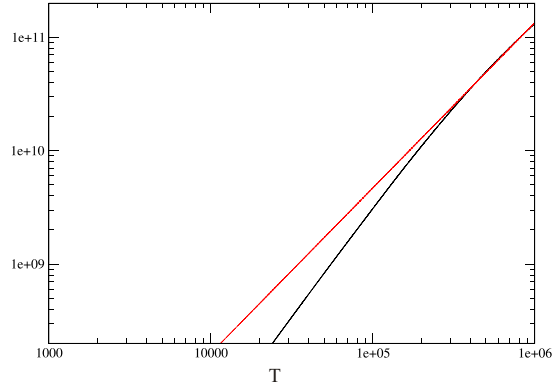


Figura 4.8: A figura mostra o comportamento de ν_2 ao longo do tempo para uma simulação que foi feita com 10^6 rotores num tempo de 10^6 , com passo de tempo $\Delta t = 0,5$ e condição inicial *water bag* coerente com energia inicial de $0,69$. A curva de ajuste apresenta $\mu = 1,458$ e $C = 2,4 \times 10^3$.

e conseqüentemente:

$$\tilde{\Gamma}(1/t) \sim t^{1-\beta}. \quad (4.14)$$

Assim, usando a equação (4.11) e tomando o limite para $t \rightarrow \infty$, temos [29]:

$$\mu = \beta. \quad (4.15)$$

Escrevendo a memória do sistema em termos do espectro de potência $P(w)$ da força estocástica $F(t)$:

$$\Gamma(t) = \int \rho(w) \cos(wt) dw, \quad (4.16)$$

permite avançar mais com relação aos resultados anteriores [41]. Um tipo de

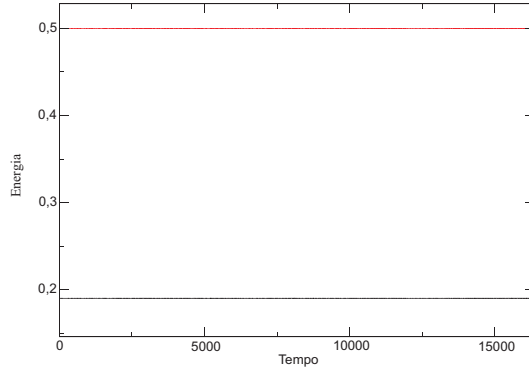


Figura 4.9: Gráfico das energias cinética (em preto) e potencial (em vermelho) por partícula para um sistema com 10^6 rotores ao longo do tempo e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de 0,69. O valor 0,5 para energia potencial indica que o estado é homogêneo. Note que as energias permanecem constantes ao longo de todo o processo.

espectro de potência que permite modelar muitas situações diferentes é dado por uma generalização do espectro de Debye:

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{2\gamma}{\pi} \left(\frac{w}{w_D}\right)^\lambda, & w < w_D, \\ 0, & w \geq w_D \end{cases} \quad (4.17)$$

sendo w_D uma frequência limite. A partir da expressão (4.17) e das equações anteriores, obtemos [24]:

$$\tilde{\Gamma}(z) = \frac{2\gamma}{\pi} \Psi_\lambda(w_s/z), \quad (4.18)$$

onde

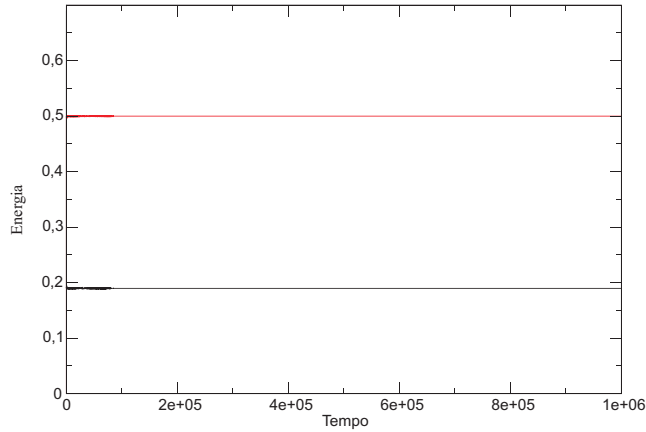


Figura 4.10: Gráfico das energias cinética (em preto) e potencial (em vermelho) para um sistema com 10^6 rotores ao longo do tempo e condição inicial *water bag* coerente com energia inicial de 0,69. Apesar de o estado inicial não ser homogêneo, o sistema rapidamente evolui, por relaxação violenta, para um estado homogêneo, a ponto do transiente inicial não ser visível no gráfico.

$$\Psi_\lambda(x) = x^{-\lambda} \int \frac{y^\lambda}{1+y^2} dy. \quad (4.19)$$

Essa função memória apresenta comportamento assintótico da forma:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{\Gamma}(z) \sim \tau_{\beta-1}^{\beta-2} z^{\beta-1}, \quad (4.20)$$

onde

$$\beta - 1 = \begin{cases} \lambda, & \lambda \leq 1, \\ 1, & \lambda < 1. \end{cases} \quad (4.21)$$

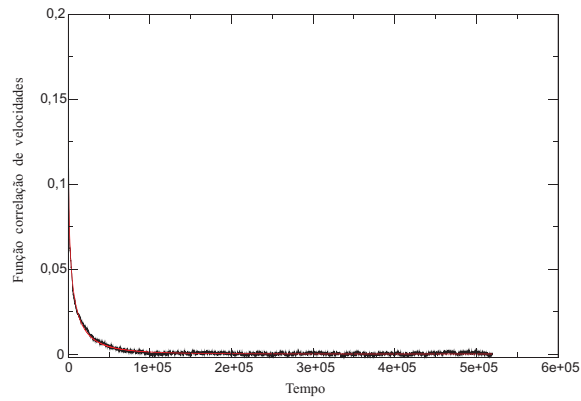


Figura 4.11: Função correlação para a agregação de $n = 10^5$ posições em função do tempo de simulação. A simulação foi feita num tempo de 10^6 com 10^5 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,3$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de 0,60. A curva de ajuste em vermelho é uma exponencial esticada do tipo $C_v = 0,15 \exp(-0,04t^{0,45})$.

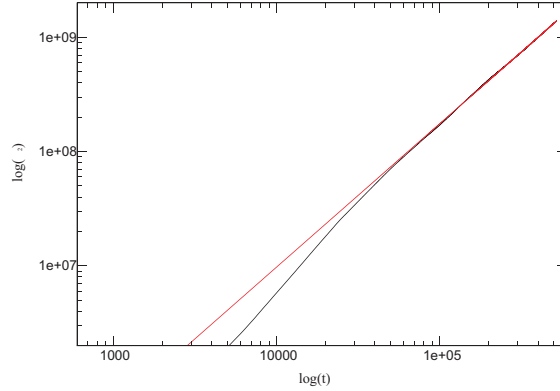


Figura 4.12: A figura mostra o comportamento de ν_2 ao longo do tempo para uma simulação que foi feita com 10^5 rotores num tempo de 10^6 com passo de tempo $\Delta t = 0,3$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de 0,60. A curva de ajuste apresenta $\mu = 1,53$ e $C = 9,3 \times 10$.

Tomando agora a transformada inversa da função memória descrita na equação (4.10) e usando a equação (4.20) temos [41]:

$$C_v(t) \sim E_{2-\beta}(-(t/\tau_{\beta-1})^{2-\beta}), \quad (4.22)$$

que é uma aproximação muito útil para $t > \tau_D$, onde τ é um tempo característico da função em que ocorre a transição entre dois comportamentos bem distintos (o comportamento de *exponencial esticada* e o de *lei de potências*), com $E_\delta(x)$ sendo a função de Mittag-Leffler [28].

Para tempos intermediários, a função (4.22) se comporta como uma *exponencial esticada* - isto é, do tipo

$$C_v(t) = A \exp(Bt^{2-\beta}), \quad (4.23)$$

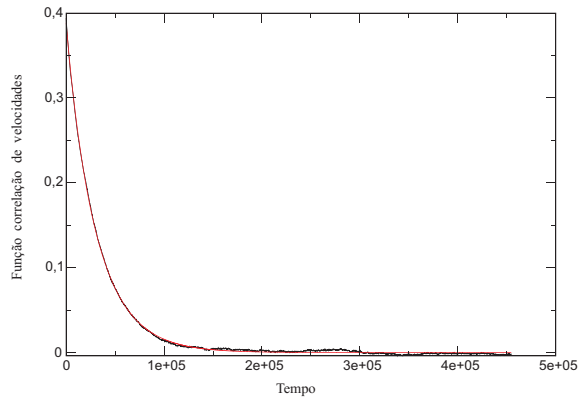


Figura 4.13: Função correlação para a agregação de $n = 10^5$ posições em função do tempo de simulação. A simulação foi feita num tempo de 10^6 com 10^5 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,3$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de $0,70$. A curva de ajuste em vermelho é uma exponencial esticada do tipo $C_v = 0,39 \exp(-4,28t^{0,97})$.

e como uma lei de potências da forma $t^{2-\beta}$, para tempos longos. Assim, o expoente $\kappa = 2 - \beta$ de t no argumento da exponencial é relacionado ao expoente de difusão μ por:

$$\mu = 2 - \kappa, \quad (4.24)$$

relação que será utilizada a seguir.

Na tabela 4.1, mostramos os resultados de ajustes da função correlação de velocidades utilizando as expressões 4.1 e 4.23, para alguns valores de da energia média por partícula U . As simulações foram feitas para $N = 10^6$ rotores que é um número maior que o utilizado na literatura, ao nosso conhecimento. Esse valor de N permite já um boa precisão, garantindo inclusive que a descrição de campo

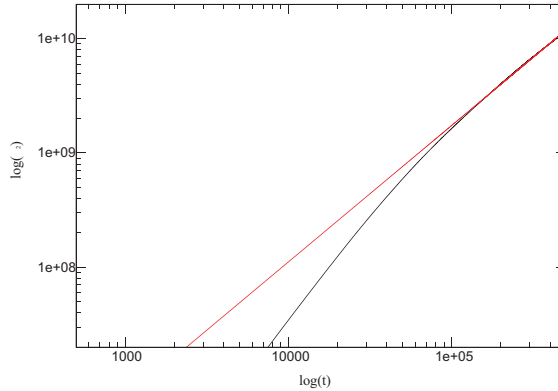


Figura 4.14: A figura mostra o comportamento de ν_2 ao longo do tempo para uma simulação que foi feita com 10^5 rotores num tempo de 10^6 com passo de tempo $\Delta t = 0,3$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de $0,70$. A curva de ajuste apresenta $\mu = 1,19$ e $C = 1,9 \times 10^3$.

médio é uma excelente aproximação, conforme discutido no capítulo 3.

Um primeiro comportamento que se destaca da tabela 4.1 é que a função de correlação se aproxima de uma exponencial pura ($\kappa = 1$) na medida em que a energia aumenta, e isso apesar do coeficiente de difusão estar cada vez mais próximo de 2 (balístico). Este último pode ser explicado pelo fato que uma maior energia resulta em uma maior energia cinética, que dificulta a formação de pequenos aglomerados de *spins* (flutuações).

O fato de que a função correlação de velocidades tende a uma exponencial pura é um fenômeno ainda não relatado, pois as energias estudadas na literatura estão usualmente próximas de $U = 0,69$ [32, 43]. É importante observar que uma correlação exponencial deveria implicar uma difusão normal, e não balística como é o caso. Uma possível explicação seria a presença de uma escala de tempo de

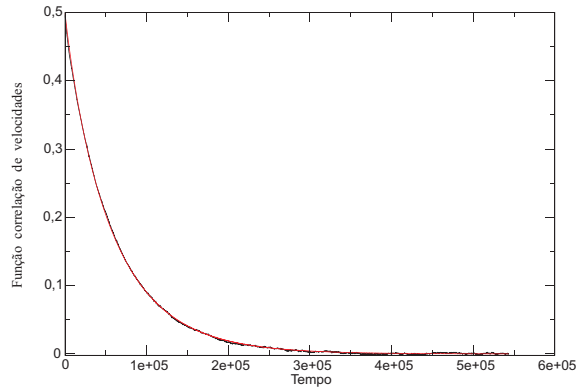


Figura 4.15: Função correlação para a agregação de $n = 10^5$ posições em função do tempo de simulação. A simulação foi feita num tempo de 10^6 com 10^5 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,3$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de 0,75.

relaxação para o equilíbrio gaussiano, no qual a difusão é normal. No entanto, tal relaxação ocorre para tempos muito mais longos que o tempo total de simulação, o que implica que este ponto deve ainda ser mais esclarecido em futuros estudos.

Por outro lado, para baixas energias, a função correlação se torna claramente uma exponencial esticada e a relação entre μ e κ se aproxima da relação (4.24), o que tenderia a sugerir que a função correlação seja uma função de Mittag-Leffler, embora a cauda em lei de potências não seja visível no gráfico, talvez em decorrência das flutuações estatísticas. Futuros estudos deverão refinar os resultados para também esclarecer este ponto.

Para que a equação de Langevin generalizada possa ser aplicada a sistemas hamiltonianos clássicos com interações de longo alcance, os pontos levantados acima devem ser melhor esclarecidos. Para tal, um volume muito maior de da-

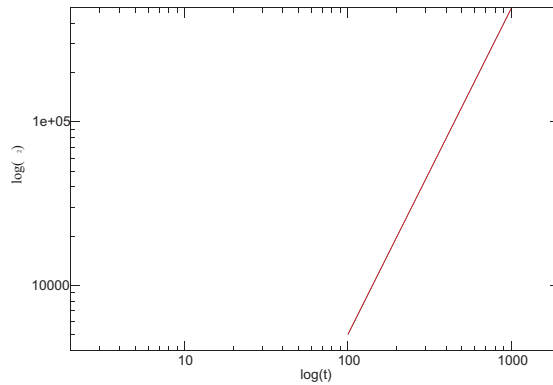


Figura 4.16: Gráfico de ν_2 em função do tempo para a agregação de $n = 10^5$ posições em função do tempo de simulação. A simulação foi feita num tempo de 10^6 com 10^5 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,3$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de $0,75$.

dos de simulação, utilizando recursos computacionais mais possantes como um “cluster” de computadores, deve ser obtido.

O comportamento apresentado na figura (4.27) se deve à rápida perda da informação sobre o estado inicial, em consequência da relaxação violenta para um estado quasi-estacionário. Se começarmos a calcular a função de correlação após um tempo de espera, esta terá o mesmo aspecto que nas demais figuras.

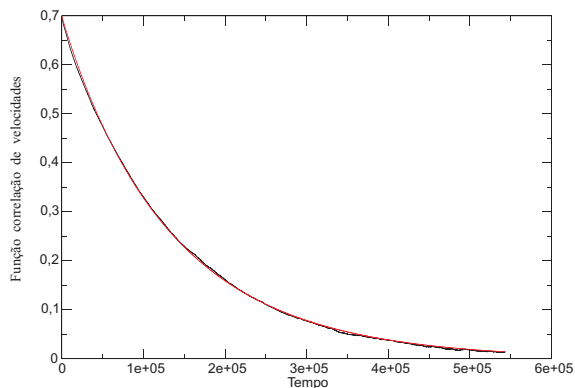


Figura 4.17: Função correlação para a agregação de $n = 10^5$ posições em função do tempo de simulação. A simulação foi feita num tempo de 10^6 com 10^5 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,3$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de 0,85.

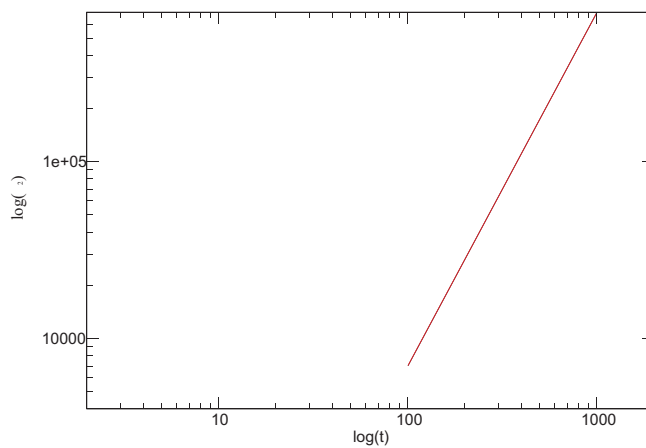


Figura 4.18: Gráfico de ν_2 em função do tempo para a agregação de $n = 10^5$ posições em função do tempo de simulação. A simulação foi feita num tempo de 10^6 com 10^5 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,3$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de 0,85.

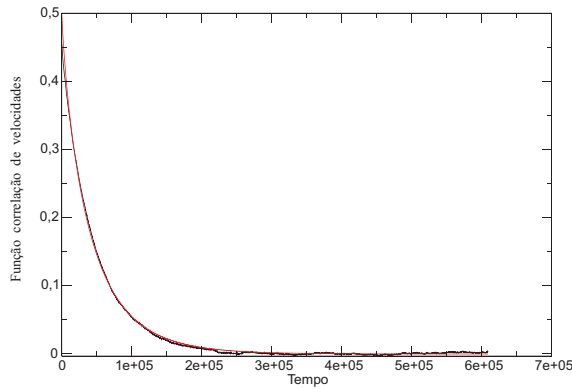


Figura 4.19: Função correlação para a agregação de $n = 10^5$ posições em função do tempo de simulação. A simulação foi feita num tempo de 10^6 com 10^5 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,3$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de 0,73.

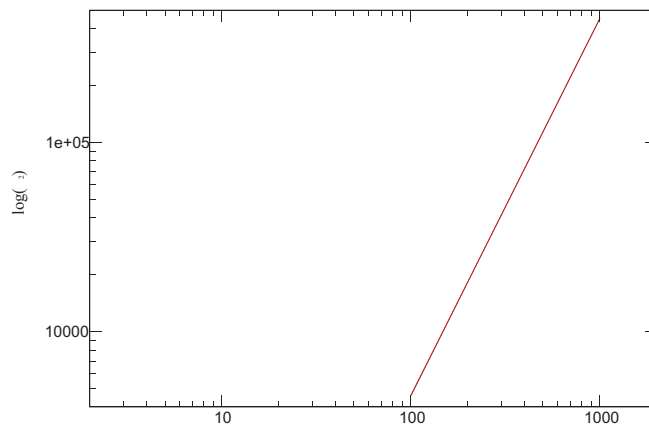


Figura 4.20: Gráfico de ν_2 em função do tempo para a agregação de $n = 10^5$ posições em função do tempo de simulação. A simulação foi feita num tempo de 10^6 com 10^5 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,3$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de 0,73.

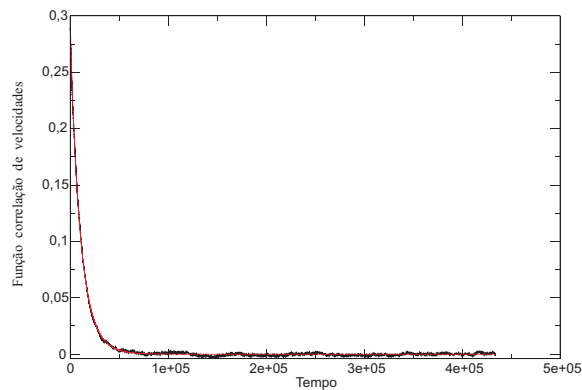


Figura 4.21: Função correlação para a agregação de $n = 10^5$ posições em função do tempo de simulação. A simulação foi feita num tempo de 10^6 com 10^5 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,3$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de 0,65.

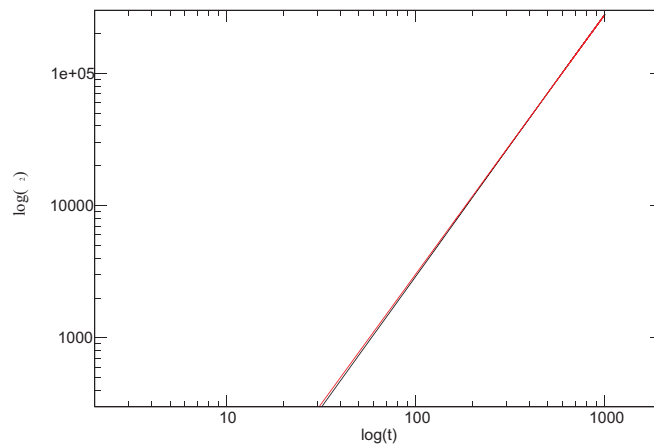


Figura 4.22: Gráfico de ν_2 em função do tempo para a agregação de $n = 10^5$ posições em função do tempo de simulação. A simulação foi feita num tempo de 10^6 com 10^5 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,3$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de 0,65.

U	κ	C	B	μ
0,60	0,3842	0,1939	$5,81 \times 10^{-2}$	1,75
0,65	0,9772	0,2856	$1,17 \times 10^{-4}$	1,96
0,70	0,9794	0,3883	$4,07 \times 10^{-5}$	1,99
0,73	0,9521	0,4517	$3,70 \times 10^{-5}$	1,99
0,75	0,9597	0,4873	$2,68 \times 10^{-5}$	1,99
0,85	1,0001	0,6835	$7,20 \times 10^{-6}$	2,00

Tabela 4.1: Valores dos parâmetros κ , C , B e μ para uma simulação feita com $N = 10^5$ rotores agregados, durante um tempo de 10^6 , com passo no tempo $\Delta t = 0,3$ e energia potencial inicial U dada.

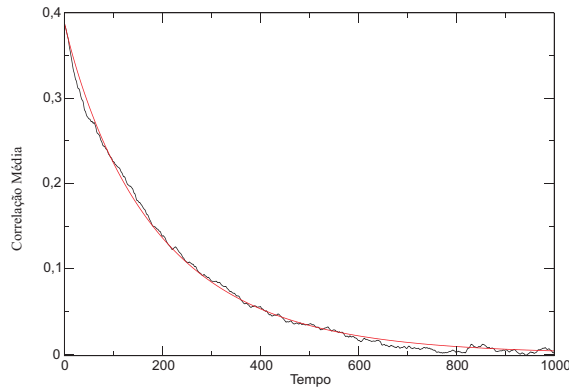


Figura 4.23: Correlação de velocidades para 100 simulações realizadas num tempo de 10^3 com 10^3 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,5$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de 0,69. O ajuste da relação 4.23 resulta em $A = 0,39$, $B = -7,8 \times 10^{-4}$ e $\kappa = 0,925261$.

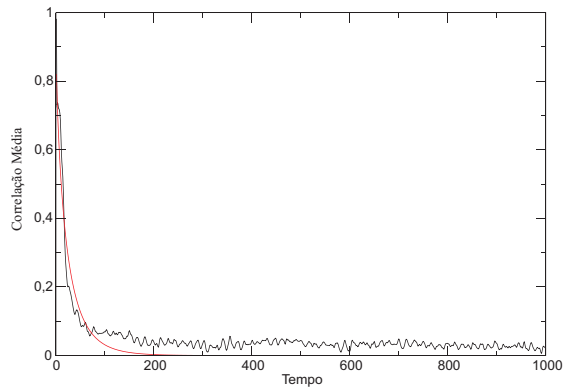


Figura 4.24: Correlação de velocidades para 100 simulações realizadas num tempo de 10^3 com 10^3 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,5$ e condição inicial *water bag* coerente com energia inicial de 0,69. O ajuste da relação 4.23 resulta em $A = 0,89$, $B = -9,2 \times 10^{-3}$ e $\kappa = 0,781293$.

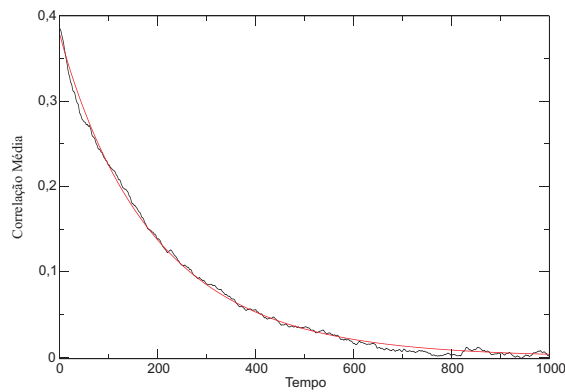


Figura 4.25: Correlação de velocidades para 100 simulações realizadas num tempo de 10^6 com 10^4 rotores, com passo de tempo de $\Delta t = 0,5$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de 0,69. O ajuste da relação 4.23 resulta em $A = 0,38$, $B = -6,4 \times 10^{-4}$ e $\kappa = 0,956729$.

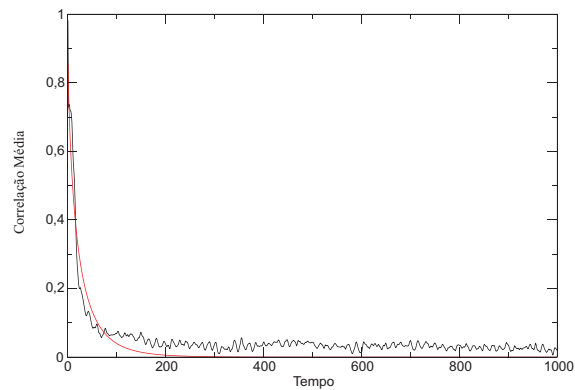


Figura 4.26: Correlação de velocidades para 100 simulações realizadas num tempo de 10^6 com 10^4 rotores, com passo de tempo de $\Delta t = 0,5$ e condição inicial *water bag* coerente com energia inicial de 0,69. O ajuste da relação 4.23 resulta em $A = 0,90$, $B = -9,2 \times 10^{-2}$ e $\kappa = 0,781292$.

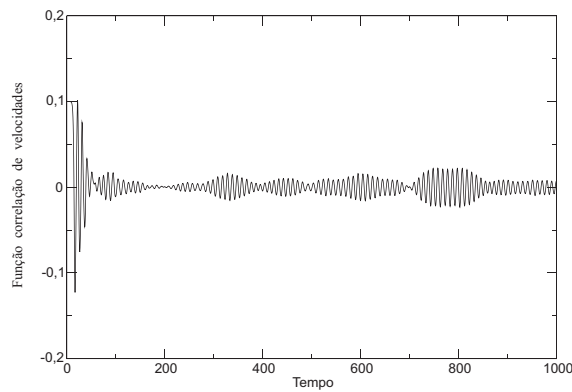


Figura 4.27: Função correlação para a agregação de $n = 10^5$ posições em função do tempo de simulação. A simulação foi feita num tempo de 10^3 com 10^5 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,5$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de 0,55. Note que a correlação do sistema parece oscilar bastante formando inclusive estruturas semelhantes a “batimentos” ao longo da evolução.

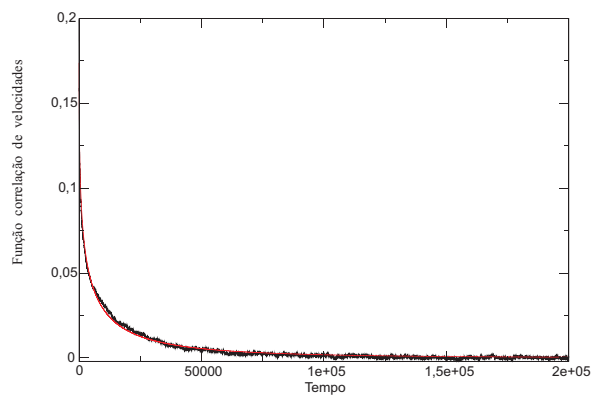


Figura 4.28: Função correlação para a agregação de $n = 10^5$ posições em função do tempo de simulação. A simulação foi feita num tempo de 10^6 com 10^5 rotores e passo de tempo de $\Delta t = 0,5$ e condição inicial *water bag* homogêneo com energia inicial de 0,60.

Capítulo 5

Conclusão e perspectivas

A revisão teórica feita no início deste trabalho foi de suma importância para as conclusões posteriores. As relações existentes entre o comportamento dos sistemas analisados em termos de distribuição de probabilidades ou à luz de seu comportamento difusivo, são extremamente instigantes, e mesmo inesperados.

Avaliamos a validade da equação de Vlasov para o sistema HMF com números finitos de partículas - a partir de 10^3 rotores - por meio de simulações computacionais. Com o objetivo de explicitar a validade da aproximação de campo médio para N (número de rotores) finito, lançamos mão do teorema central do limite para verificar a independência estatística entre as partículas em função de N , e ao longo do tempo nas simulações. Ficou claro que a presença de correlação diminui rapidamente aumentando N de tal forma que já para $N \sim 10^5$ a teoria de campo médio é uma excelente aproximação para o sistema HMF.

Pudemos observar em todas as simulações que o sistema HMF apresenta superdifusão, independentemente do estado inicial e da termodinâmica final, quando a distribuição de velocidades é gaussiana. Em todas as simulações também obser-

vamos uma evolução em direção à difusão normal (associada à distribuição gaussiana). Um ponto interessante de ressaltar é que a difusão se aproxima da normal para tempos muito inferiores (ao menos uma ordem de grandeza) ao tempo de vida do estado estacionário. Isso se deve ao fenômeno de envelhecimento do sistema, ainda no estado estacionário, associado ao tempo de vida finito deste.

A possibilidade de descrever sistemas com interações de longo alcance utilizando a equação de Langevin generalizada foi outro foco do nosso trabalho. Os sistemas foram simulados com números diferentes de rotores e energias iniciais variadas. A função correlação de velocidades é bem ajustada por uma exponencial esticada para baixas energias e por uma exponencial pura para energias altas. Por outro lado, quanto mais próxima da exponencial pura é a função de correlação, mais próximo de 2 é o expoente de difusão. Como o estado é homogêneo, a difusão é próxima de balística, a correlação exponencial deveria implicar uma difusão normal. As possíveis razões dessa contradição devem ainda ser aprofundadas por estudos mais sistemáticos, e é uma direção que seguiremos em futuros trabalhos. As conclusões obtidas da literatura, sempre relativas a energias iniciais de 0,69, não podem ser trivialmente estendidas para energias maiores. Notamos que para energias muito próximas à da transição de fase canônica o comportamento dos sistemas se altera, de forma que a análise com a equação de Langevin deve ser repensada.

Apêndice A

Equação de Vlasov

Este apêndice é baseado na referência [21].

O teorema de Liouville garante que a evolução temporal de um volume no espaço de fase $3N$ -dimensional com coordenadas canônicas não se altera ao longo do tempo. Nesse caso, a probabilidade de se encontrar o estado do sistema em um volume dV do espaço de fase é dada por

$$P = \rho(p, q, t)dV \tag{A.1}$$

onde ρ é a densidade de probabilidade de estados. O teorema de Liouville é então equivalente a:

$$\rho(p(t + \Delta t), q(t + \Delta t), t + \Delta t) = \rho(p(t), q(t), t) \tag{A.2}$$

e, portanto

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \tag{A.3}$$

que implica

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial\rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial\rho}{\partial p_i} \dot{p}_i = 0, \quad (\text{A.4})$$

que pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_i \left\{ \frac{\partial\rho}{\partial Q_i} \frac{\partial H}{\partial P_i} - \frac{\partial\rho}{\partial P_i} \frac{\partial H}{\partial Q_i} \right\} = 0, \quad (\text{A.5})$$

que é a Equação de Liouville. Em termos do parêntesis de Poisson, temos:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \{H, \rho\}. \quad (\text{A.6})$$

Considera-se agora uma hamiltoniana da forma

$$H(p, q) = \sum_i^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \sum_{i < j=1}^N \Phi(\vec{r}_i, \vec{r}_j). \quad (\text{A.7})$$

Definimos:

$$\vec{L}_N = \sum_i^N \left[\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} - \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \right] \quad (\text{A.8})$$

e, tomando $v(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \Phi_{ij}$ com $\Phi_{ij} = \Phi(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$, temos:

$$\vec{L}_N = - \sum_{e=1}^N \frac{\vec{p}_e}{m} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_e} + \sum_{i < j=1}^N \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \vec{r}_e} \frac{\partial}{\partial \vec{p}_e}. \quad (\text{A.9})$$

Definindo também

$$\hat{O}_{ij} \equiv \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} + \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \vec{r}_j} \frac{\partial}{\partial \vec{p}_j}, \quad (\text{A.10})$$

e

$$\vec{G}_{ij} = -\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \vec{r}_i}, \quad (\text{A.11})$$

de modo que

$$\hat{O}_{ij} = -\vec{G}_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} - \frac{\partial}{\partial \vec{p}_j} \right). \quad (\text{A.12})$$

Chegamos então a

$$\vec{L}_N = -\sum_{e=1}^N \frac{\vec{p}_e}{m} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_e} + \sum_{i<j=1}^N \hat{O}_{ij}. \quad (\text{A.13})$$

Particionando \hat{O}_N na forma

$$\hat{L}_N = \hat{L}_s + \hat{L}_{N,s+1}, \quad (\text{A.14})$$

com

$$\hat{L}_s = -\sum_{e=1}^s \hat{k}_e + \sum_{i<j=1}^N \hat{O}_{ij}, \quad (\text{A.15})$$

onde $\hat{k}_e = \frac{\vec{p}_e}{m} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_e}$ e

$$\hat{L}_{N,s+1} = -\sum_{e=s+1}^N \hat{k}_e + \hat{R}_{N,s+1}, \quad (\text{A.16})$$

com

$$\hat{R}_{N,s+1} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=s+1}^N \hat{O}_{ij} + \sum_{i<j=1}^N \hat{O}_{ij}. \quad (\text{A.17})$$

Definimos a função distribuição reduzida a s partículas f_s por:

$$f_s = \int \rho d(s+1) \dots dN, \quad (\text{A.18})$$

onde s representa as condições canônicas \vec{p}_s e \vec{r}_s . A equação de Liouville se reescreve como:

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} = \hat{L}_N f_N, \quad (\text{A.19})$$

que, integrada sobre as partículas de $s+1$ a N nos dá:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} - \hat{L}_s f_s = \int \left(- \sum_{e=s+1}^N \hat{k}_e + \hat{R}_{N,s+1} \right) f_N d(s+1) \dots dN \quad (\text{A.20})$$

$$= \sum_{i=1}^s \sum_{j=s+1}^N \int \hat{O}_{ij} f_N d(s+1) \dots dN. \quad (\text{A.21})$$

Após algumas manipulações, chegamos finalmente a:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \hat{L}_s \right) f_s + (N-s) \sum_{i=1}^s \frac{\partial}{\partial \vec{P}_i} \int \vec{G}_{i,s+1} f_{s+1} d(s+1) = 0, \quad (\text{A.22})$$

que é a hierarquia BBGKY.

Uma equação cinética é a equação de evolução fechada para $s=1$. Supondo que as partículas do sistema são estatisticamente independentes, temos:

$$f_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2, t) = f_1(\vec{r}_1, \vec{p}_1, t) f_1(\vec{r}_2, \vec{p}_2, t), \quad (\text{A.23})$$

que ao ser substituída em (A.22), nos dá:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\dot{p}_1}{m} \frac{f_1}{\dot{r}_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}_1} \int N \vec{G}_{1,2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) f_1(\vec{r}_2, \vec{p}_2) d\vec{r}_2 d\vec{p}_2 = 0, \quad (\text{A.24})$$

que é justamente a Equação de Vlasov.

Apêndice B

Limite termodinâmico e teoria de campo médio

Braun e Hepp [8] edemosntraram que um sistema hamiltoniano, com interações de longo alcance, é matematicamente equivalente à equação de Vlasov (A.24). Tal demonstração é no entanto longa e por demasiado intrincada para ser apresentada aqui. Assim vamos apresentar a dedução de Chavanis [1], menos rigorosa mas de maior apelo físico

Para sistemas com interações de longo alcance, definimos o limite termodinâmico como sendo $N \rightarrow \infty$ de tal forma que $\eta = \beta Nm^2 u_*$ e $\varepsilon = E/(u_* N^2 m^2)$ estão fixos, onde u_* representa o típico valor de potencial de interação. No sistema HMF temos $u = -(k/2\pi)/\cos(\theta - \theta')$, $\eta = \beta kN$, $\varepsilon = E/kN^2$. O potencial gravitacional merece uma discussão especial por divergir para $r \rightarrow \infty$ e $r \rightarrow 0$ [9]. A densidade de estados diverge para $r \rightarrow 0$, no entanto, existem estados meta-estáveis muito fortes (cujo tempo de vida cresce exponencialmente com o número de partículas) que podem ser levados em consideração, para tanto, devemos substituir o potencial gravitacional por um potencial regular para pequenas distâncias.

Usando a hierarquia BBGKY, ficamos com:

$$\frac{\partial P_1(x_1)}{\partial r_1} = -\beta Nm^2 \int P_2(x_1, x_2) \frac{\partial u_{12}}{\partial r_1} d^D x_2 - Nm^2 \int \frac{\partial u_{12}}{\partial r_1} \frac{\partial P_2}{\partial E} d^D x_2, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial P_2(x_1, x_2)}{\partial r_1} = -\beta m^2 P_2(x_1, x_2) \frac{\partial u_{12}}{\partial r_1} - Nm^2 \int \left(\beta P_3 + \frac{\partial P_3}{\partial E} \right) \frac{\partial u_{13}}{\partial r_1} d^D x_3, \quad (\text{B.2})$$

onde utilizamos $N \gg 1$. Vamos agora decompor as distribuições de dois e três corpos nas formas a seguir:

$$P_2(x_1, x_2) = P_1(x_1)P_1(x_2) + P'_2(x_1, x_2), \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} P_3(x_1, x_2, x_3) &= P_1(x_1)P_1(x_2)P_1(x_3) + P'_2(x_1, x_2)P_1(x_3) \\ &+ P'_2(x_1, x_3)P_1(x_2) + P'_2(x_2, x_3)P_1(x_1) + P'_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Essa decomposição corresponde aos primeiros termos da expansão de Mayer na física de plasma [8]. Inserindo essas decomposições na hierarquia anterior (B.1) e (B.2), encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1(x_1)}{\partial r_1} &= -\beta Nm^2 P_1(x_1) \int P_1(x_2) \frac{\partial u_{12}}{\partial r_1} d^D x_2 \\ &- \beta Nm^2 \int P'_2(x_1, x_2) \frac{\partial u_{12}}{\partial r_1} d^D x_2 \\ &- Nm^2 \int \frac{\partial u_{12}}{\partial r_1} \frac{\partial P_2}{\partial E}(x_1, x_2) d^D x_2, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P'_2(x_1, x_2)}{\partial r_1} &= Nm^2 P_1(x_2) \int \frac{\partial u_{13}}{\partial r_1} \frac{\partial P_2}{\partial E}(x_1, x_3) d^D x_3 \\
&= -\beta Nm^2 P_1(x_1) P_1(x_2) \frac{\partial u_{12}}{\partial r_1} - \beta m^2 P'_2(x_1, x_2) \frac{\partial u_{12}}{\partial r_1} \\
&\quad - \beta Nm^2 P'_2(x_1, x_2) \int P_1(x_3) \frac{\partial u_{13}}{\partial r_1} d^D x_3 \\
&\quad - \beta Nm^2 P_1(x_1) \int P'_2(x_2, x_3) \frac{\partial u_{13}}{\partial r_1} d^D x_3 Nm^2 \int \left(\beta P'_3 + \frac{\partial P_3}{\partial E} \right) \frac{\partial u_{13}}{\partial r_1} d^D x_3.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

No limite termodinâmico definido anteriormente, podemos mostrar que os P'_n são de ordem $N^{-(n-1)}$. Assim, considerando os termos da equação (B.6), podemos escrever

$$P_2(x_1, x_2) = P_1(x_1)P_1(x_2) + O(1/N). \tag{B.7}$$

Essa equação mostra que as partículas são estatisticamente independentes, e que o sistema é descrito pela equação de Vlasov, a menos de termos colisionais de ordem $1/N$. Em conclusão, a aproximação de campo médio é exata no limite $N \rightarrow \infty$.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Antoni, S. Ruffo, Phys. Rev. E, **52**, 3 (1995).
- [2] F. Baldovin, L. G. Moyano, A. P. Majtey, A. Robledo & Constantino Tsallis, Physica A **340**, 205 (2004).
- [3] J. Barré & F. Bouchet, Compts. Rend. Phys. **7**, 414 (2006).
- [4] J. Barré, F. Bouchet, T. Dauxois, S. Ruffo, Y. Y. Yamaguchi, Physica A **365**, 177 (2006).
- [5] J. Barré, D. Mukamel & S. Ruffo, Y. Y. Yamaguchi, Phys. Rev. Lett. **87**, 030601 (2001).
- [6] J. Binney & S. Tremaine, “Galactic Dynamics”, Princeton University Press (Princeton, 1994).
- [7] F. Bouchet, T. Dauxois, Phys. Rev. E **72**, 045103R (2005).
- [8] W. Braun & K. Hepp, Commun Math. Phys. **56**, 101 (1977).
- [9] P. H. Chavanis, Physica A **361**, 55 (2006).
- [10] P. H. Chavanis, Eur. Phys. J. B **52**, 47 (2006).

- [11] M. Y. Choi & J. Choi, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 124101 (2003).
- [12] T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo, M. Wilkens, “Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long Range Interactions”, *Lecture Notes in Physics*, Vol. **602**, Springer (2002).
- [13] D. Dugué, “Oeuvres de Paul Lévy”, vol. III: Eléments aléatoires, Gauthier-Villars (Paris, 1976).
- [14] A. Einstein, “Investigations on the Theory of Brownian Movement”, Dover (New York, 1956).
- [15] A. Figueiredo, I. Gleria, R. Matsushita, S. Da Silva, *Physica A* **337**, 369 (2004).
- [16] A. Figueiredo, I. Gleria, R. Matsushita, S. Da Silva, *Phys. Lett. A* **315**, 51 (2003).
- [17] A. Figueiredo, I. Gleria, R. Matsushita, S. Da Silva, *Phys. Lett. A* **326**, 166 (2004).
- [18] A. Figueiredo, I. Gleria, R. Matsushita, S. Da Silva, *Physica A* **363**, 171 (2006).
- [19] D. Heggie & P. Hut, “The Gravitational Million-Body Problem”, Cambridge University Press (Cambridge, 2003).
- [20] R. Kubo, *Rep. Prog. Phys.* **29**, 255 (1966).

- [21] R. L. Liboff, “Kinetic Theory”, Springer (Berlin, 2003).
- [22] V. Latora, A. Rapisarda, Chaos, Solitons and Fractals **13**, 401 (2002).
- [23] V. Latora, S. Ruffo, A. Rapisarda, Phys. Rev. Lett. **83**, 11 (1999).
- [24] D. Lynden-Bell, Physica A **263**, 193 (1999).
- [25] D. Lynden-Bell, MNRAS **136**, 101 (1967).
- [26] R. Mantegna, H. Stanley, Phys. Rev. Lett. **73**, 2946 (1994).
- [27] R. Metzler & J. Klafter, Phys. Rep. **339**, 1 (2000).
- [28] G. Mittag-Leffler., Acta Math. **29**, 101 (1905).
- [29] R. Morgado, F. Oliveira, G. Batrouni, A.Hansen, Phys. Rev. Lett. **89**, 10 (2002).
- [30] H. Mori, Prog. Theor. Phys.**33**, 423 (1965).
- [31] H. Mori, Prog. Theor. Phys.**34**, 399 (1965).
- [32] L. Moyano, C. Anteneodo, Phys. Rev. E **74**, 021118 (2006).
- [33] A. Pluchino, V. Latora, A. Rapisarda, Continuum Mech. Thermodyn. **16**, 245 (2004).
- [34] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling & B. P. Flannery, “Numerical Recipes in Fortran”, 2^a Ed., Cambridge University Press.

- [35] T. Rocha Filho, A. Figueiredo, M. Amato, Phys. Rev. Lett., **95**, 190601 (2005).
- [36] M. F. Shlesinger, B. West, J. Klafter, Phys. Rev. Lett., **58**, 11 (1987).
- [37] M. F. Shlesinger, Phys. Rev. Lett., **74**, 4959 (1995).
- [38] W. Sutherland, Australasian Association for the Advancement of Science, Report of Meeting **10** 117 (1904).
- [39] W. Sutherland, Philosop. Magaz. **6**, 781-785 (1905).
- [40] W. Thining, H. Narnhorfer & H.A. Posch, Phys. Rev. Lett. **91**, 130601 (2003).
- [41] M. Vainstein, I. Costa, R. Morgado, F. Oliveira, Europhys. Lett. **73**, 726 (2006).
- [42] H. Yoshida, Phys. Lett. A **150**, 262 (1990).
- [43] Y. Y. Yamaguchi, Phys. Rev. E **68**, 066210 (2003).
- [44] Y. Y. Yamaguchi, J. Barré, F. Bouchet, T. Dauxois & S. Ruffo, Physica A **337**, 36 (2004).