



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**MODELAGEM DE PAINÉIS SANDWICH
HONEYCOMB UTILIZANDO O MÉTODO DE
ONDAS E ELEMENTOS FINITOS**

Por,
Kleverson Carvalho de Sousa

Brasília, 21 de Agosto de 2017

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECANICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

MODELAGEM DE PAINÉIS SANDWICH HONEYCOMB UTILIZANDO O MÉTODO DE ONDAS E ELEMENTOS FINITOS

Kleverson Carvalho de Sousa

ORIENTADOR: ADRIANO TODOROVIC FABRO

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
EM CIÊNCIAS MECÂNICAS**

PUBLICAÇÃO: ENM-DM 263/2017

BRASÍLIA/DF, AGOSTO DE 2017

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**MODELAGEM DE PAINÉIS SANDWICH
HONEYCOMB UTILIZANDO O MÉTODO DE
ONDAS E ELEMENTOS FINITOS**

POR,

Kleverson Carvalho de Sousa

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Mestre em Ciências Mecânicas.

Banca Examinadora

Prof. Adriano Todorovic Fabro, UnB/ ENM
(Orientador)

Prof. Éder Lima de Albuquerque, UnB/ ENM

Prof. José Roberto de França Arruda,
UNICAMP/FEM

Brasília, 21 de Agosto de 2017

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, que apoiaram minha escolha de me concentrar em meus estudos e neste mestrado.

Agradeço ao meu irmão Kartney, com quem sempre pude contar, e que me incentivou inicialmente a me inscrever no curso de engenharia mecânica.

Agradeço ao meu orientador prof. Adriano Fabro, pela oportunidade de trabalhar num projeto tão recompensador, e pela desmerecida paciência com a qual sempre me mostrou.

Agradeço aos meus colegas do Grupo de Dinâmica de Sistemas da UnB, cujo apoio moral foi indispensável para meu crescimento acadêmico e sanidade.

Agradeço à Fundação de Apoio à Pesquisa do Distrito Federal (FAPDF), processo número 0193001040/2015, pelo apoio financeiro através de bolsa de estudo.

Kleverson Carvalho de Sousa

RESUMO

A hipótese de estruturas periódicas é muito usada em várias aplicações em engenharia, indo de plataformas de petróleo a projetos aeroespaciais. Tais estruturas podem ter seu comportamento vibroacústico interpretado através de suas propriedades de propagação de ondas, como uma alternativa à interpretação modal, fornecendo diferentes informações para análise e projeto. Este trabalho apresenta a modelagem e caracterização do comportamento dinâmico de um painel sandwiche honeycomb, de utilização aeroespacial, através do método de ondas e elementos finitos (Wave and Finite Elements - WFE). Um modelo de elementos finitos é proposto, assumindo-se propriedades homogêneas do núcleo honeycomb, e seus parâmetros são ajustados através de dados experimentais de um ensaio de análise modal, via vibrômetro laser doppler (LDV). A partir desse modelo, assumindo-se periodicidade em direções ortogonais, utiliza-se uma fatia da seção transversal do painel com apenas uma fração da quantidade de elementos necessária no modelo completo de elementos finitos. A partir do pós-processamento das matrizes de massa e rigidez, obtidas a partir de um pacote comercial, as curvas de dispersão são obtidas para frequências entre 1 Hz e 10 kHz, e os parâmetros de número de onda, velocidade de fase e modos de onda são analisados e seu comportamento físico é discutido. Os resultados experimentais obtidos são também discutidos a partir da análise de frequência espacial, via FFT2D, das formas de deflexão operacional, e ótima concordância é obtida.

Palavras chave: Ondas e elementos finitos. Guia de onda. Painel honeycomb.

ABSTRACT

The assumption of periodic structures is widely used in engineering applications, such as oil platforms and aerospace design. Such structures can have their vibroacoustic behaviour interpreted by their wave characteristics, as an alternative to the modal interpretation, providing extra information for analysis and design. This work presents the modelling and characterization of the dynamic behaviour of a honeycomb sandwich panel, for aerospace applications, through the wave and finite element (WFE) method. A full finite element model is proposed, assuming homogenized properties of the honeycomb core, and its parameters are fit by a modal analysis, using a laser doppler vibrometer (LDV). Then, assuming periodicity on orthogonal directions, a slice of the transversal section of the panel is used with only a fraction of the number of elements needed for the full finite element analysis. From the post-processing of the mass and stiffness matrices, obtained from a commercial software, the dispersion curves are obtained for frequencies from 1 Hz to 10 kHz. The wavenumbers, phase and group velocities are then analysed and their physical behaviour is discussed. The spacial frequency of the experimental results are also discussed, via FFT2D approach, from the operational deflection shapes, and good agreement is found.

Keywords: Wave and finite elements. Waveguide. Honeycomb panel.

SUMÁRIO

SUMÁRIO	v
LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE TABELAS	viii
1. Introdução	1
1.1. Motivação	1
1.2. Revisão Bibliográfica	2
1.3. Objetivos e metodologia	3
1.4. Estrutura do trabalho	4
1.5. Contribuições	4
2. Revisão Teórica	5
2.1. Propagação em guias de ondas	5
2.2. Características das ondas	5
2.3. Tipos de ondas	8
2.3.1. Ondas Longitudinais em sólidos	8
2.3.2. Ondas quase-longitudinais em sólidos	9
2.3.3. Ondas Transversais (cisalhantes) em sólidos	10
2.3.4. Ondas Flexurais	12
2.3.5. Ondas Acústicas em Fluidos	14
2.3.6. Frequência Crítica	14
2.4. Método de Elementos Finitos	15
2.4.1. Matriz de Rigidez Dinâmica	15
2.5. Formulação de Ondas e Elementos Finitos	17
2.5.1. Matriz de Transferência	17
2.5.2. Formulação do problema 2D	19
2.5.3. Bases de onda	21
2.6. Energia e potência do sistema	21
2.6.1. Energias cinética e potencial	22
2.6.2. Potência	23
2.7. Condicionamento numérico	25
2.7.1. Método de Zhong	25
2.7.2. Critério de garantia WAC	27
3. Modelagem e Caracterização Experimental dos Painéis	28
3.1. Análise modal	28
3.1.1. Modelagem por elementos finitos	29
3.1.2. Análise modal experimental	29
3.1.3. Resultados	30
3.2. Modelagem de seção do painel para análise por WFE	35
3.3. Resultados e discussão	37
3.3.1. Análise dos modos de onda	39
3.3.1. Análise das frequências espaciais	47
3.4. Considerações finais	57
4. Conclusões	58
4.1. Sugestões para trabalhos futuros	58
Referências	60
Apêndice A	63

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Geometria de painéis sanduíche honeycomb:(a) forma da célula do núcleo e (b) construção em camadas [8]	1
Figura 2.1 – Tipos de onda segundo a forma: (a) propagante, número de onda puramente real; (b) atenuante, número de onda complexo; e (c) evanescente, número de onda puramente imaginário. .	6
Figura 2.2 - Perturbação não dispersiva ao longo do tempo e espaço – a onda mantém a forma em todos os três momentos.	7
Figura 2.3 - Perturbação dispersiva ao longo do tempo e espaço – a amplitude máxima diminui enquanto os picos e vales se afastam.....	8
Figura 2.4. Diagrama de forças e deslocamentos a esquerda, fL e qL , e a direita, fR e qR de célula de comprimento l	16
Figura 2.5 Modelo em FE de segmento retangular de 4 nós [29]	20
Figura 3.1. Configuração de ensaio modal com (1) Aquisição de dados Labview, (2) vibrômetro LDV Polytec 100, e (3) Painel honeycomb pendurado por fios de nylon.	29
Figura 3.2 Representação do grid de medição e dos pontos de excitação (círculo) nos painéis com espessura de:(a) 10mm, (b) 15mm, (c)30mm e (d) 39,5mm	30
Figura 3.3. Média espacial da velocidade RMS sobre o painel 10mm de espessura em função da frequência.	31
Figura 3.4. Média espacial da velocidade RMS sobre o painel 15mm de espessura em função da frequência.	32
Figura 3.5 Média espacial da velocidade RMS sobre o painel 30 mm de espessura em função da frequência.	33
Figura 3.6 Média espacial da velocidade RMS sobre o painel 39,5mm de espessura em função da frequência.	34
Figura 3.7. Formas de deflexão operacional obtidos experimentalmente em (a) 159.4 Hz (b) 201.9 Hz (c) 433.5Hz (d) 727,9 Hz para painel de 10mm	35
Figura 3.8 Formas modais (a) 158.6 Hz (b) 204.7 Hz (c) 433.05Hz (d) 730.3 Hz do painel de 10mm obtidos no modelo de Elementos Finitos.....	35
Figura 3.9 Malha da seção do painel utilizada no WFE.	36
Figura 3.10. Relações de dispersão na direção x. __ para modos de onda puramente reais (vermelho) ou imaginários (preto), __ para modos de onda complexos.	38
Figura 3.11. Relações de dispersão na direção y. __ para modos de onda puramente reais (vermelho) ou imaginários (preto), __ para modos de onda complexos.	38
Figura 3.12. Curvas de dispersão em função da direção de propagação para 1,2kHz (esquerda) e 3,6kHz (direita).	39
Figura 3.13. Modo de propagação Cx em 160Hz.	40
Figura 3.14. Modo de propagação Lx em 160Hz.	40
Figura 3.15. Deslocamentos não normalizados de Lx.	41
Figura 3.16. Modo de propagação Fx em 160Hz.....	41
Figura 3.17. Modo de propagação Fx em 4800Hz.....	42
Figura 3.18. Modo de propagação Fx em 6000Hz.....	42
Figura 3.19. Modo de propagação Fx em 9040Hz.....	42
Figura 3.20 Evolução do modo de onda para o modo Fx.....	43
Figura 3.21. Modo de onda FLx1 em 160Hz.....	44
Figura 3.22. Modo de onda FLx2 em 160Hz.....	44

Figura 3.23. Modo de propagação FLx1 em 4.800Hz.....	45
Figura 3.24. Modo de propagação FLx2 em 4.800Hz.....	45
Figura 3.25. Evolução do modos FLx2, em cima, e Lx, embaixo. Parte real do deslocamento em vermelho e imaginária em preto.....	46
Figura 3.26. Detalhe do band gap na direção x.....	47
Figura 3.27. Detalhe do band gap na direção y.....	47
Figura 3.28. ODS $U(x, y, \omega)$ em 160 Hz (superior) e seu conteúdo espectral no domínio do número de onda $U(kx, ky, \omega)$ (inferior).	54
Figura 3.29. ODS $U(x, y, \omega)$ em 200 Hz (superior) e seu conteúdo espectral no domínio do número de onda $U(kx, ky, \omega)$ (inferior).	55
Figura 3.30. ODS $U(x, y, \omega)$ em 433 Hz (superior) e seu conteúdo espectral no domínio do número de onda $U(kx, ky, \omega)$ (inferior).	56
Figura 3.31. ODS $U(x, y, \omega)$ em 2 kHz (superior) e seu conteúdo espectral no domínio do número de onda $U(kx, ky, \omega)$ (inferior).	56

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 Características dos painéis.....	28
Tabela 3.2. Comparação entre os resultados experimentais do painel de 10mm de espessura	31
Tabela 3.3. Comparação entre os resultados experimentais e o modelo numérico do painel de 10mm	31
Tabela 3.4. Comparação entre os resultados experimentais do painel de 15 mm de espessura	32
Tabela 3.5. Comparação entre os resultados experimentais e o modelo numérico do painel de 15 mm de espessura.....	32
Tabela 3.6. Comparação entre os resultados experimentais do painel de 30 mm de espessura	33
Tabela 3.7. Comparação entre os resultados experimentais e o modelo numérico do painel de 30 mm de espessura.....	33
Tabela 3.8. Comparação entre os resultados experimentais do painel de 39,5mm	34
Tabela 3.9. Comparação entre os resultados experimentais e o modelo numérico do painel de 39,5mm ..	34
Tabela 3.10. Comparação entre os resultados experimentais e o modelo numérico do painel de 10 mm ..	36
Tabela 3.11.. Nomenclatura utilizada para os modos de onda nas direções ortogonais x e y.	37

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos		Unidades
$\tilde{A}; \tilde{B}$	Amplitude complexa	[m]
E	Módulo de elasticidade	[Pa]
E_p	Energia potencial	[J]
E_k	Energia cinética	[J]
G	Módulo de cisalhamento	[Pa]
I	Segundo momento de área	[m ⁴]
I_p	Momento polar de inércia	[m ⁴]
J	Constante de torção	[m ⁴]
P	Potência	[W]
S	Área de seção transversal	[m ²]
c_f	Velocidade de fase	[m/s]
c_g	Velocidade de grupo	[m/s]
c_l	Velocidade de fase longitudinal	[m/s]
c_l'	Velocidade de fase quase-longitudinal em barras	[m/s]
c_l''	Velocidade de fase quase-longitudinal em placas	[m/s]
c_s	Velocidade de fase transversal	[m/s]
c_b	Velocidade de fase flexural	[m/s]
c_a	Velocidade de fase do fluido	[m/s]
i	Unidade imaginária, $\sqrt{-1}$	Adimensional
k	Número de onda	[rad/m]
l	Comprimento do elemento finito	[m]
 Símbolos Gregos		
α	Constante de atenuação	[m ⁻¹]
β	Constante de fase	[m ⁻¹]
ε	Deformação	[m]
η	Deslocamento	[m]
θ	Variação angular	rad
λ	Autovalor	Adimensional
ν	Coefficiente de Poisson	Adimensional
ρ	Massa específica	[Kg/m ³]
σ	Tensão normal	[Pa]
τ	Tensão cisalhante	[Pa]
ω	Frequência angular	[rad/s]
 Matrizes		
C	Matriz de amortecimento	
D	Matriz de rigidez dinâmica	
K	Matriz de rigidez	
M	Matriz de massa	
T	Matriz de transferência	
N, L	Matrizes auxiliares, Zhong	
f	Vetor forçamento	
q	Vetor deslocamento	
Φ	Base de deslocamentos nodais	
$\{ \}^H$	Conjugado transposto	

1. Introdução

1.1. Motivação

Devido à necessidade de materiais de alta resistência, combinada a uma baixa massa específica, aplicações na indústria aeroespacial possuem requisitos materiais extremamente difíceis de serem obtidos[1][2]. Muitas vezes esses requisitos não podem ser alcançados com materiais comuns e, para se chegar ao grau de desempenho esperado, utilizam-se materiais compósitos: uma combinação de dois ou mais materiais distintos para a criação de um novo material com propriedades superiores a dos materiais individuais [3].

Com respeito a aplicações aeroespaciais de materiais compósitos, uma tecnologia que merece atenção especial é a de painéis sanduíche com núcleo do tipo honeycomb [4]. A utilização de núcleos do tipo honeycomb foi idealizada nos anos 40, e painéis deste tipo ganharam notoriedade por seu amplo uso no projeto Apollo, que permitiu o pouso do homem na lua em 1969 [5][6][7].

Painéis sanduíche são compósitos formados por duas camadas externas chamadas *faces*, que possuem a função de resistir a tensões normais de tração, compressão ou cisalhamento coplanar; e uma estrutura interna chamada *núcleo*, que possui a função de aumentar o momento de inércia da placa ao mesmo tempo que mantendo uma massa específica baixa [5]. A estrutura geométrica hexagonal assemelhando-se a colmeias do núcleo permite minimizar o uso de materiais, diminuindo a massa total da estrutura.

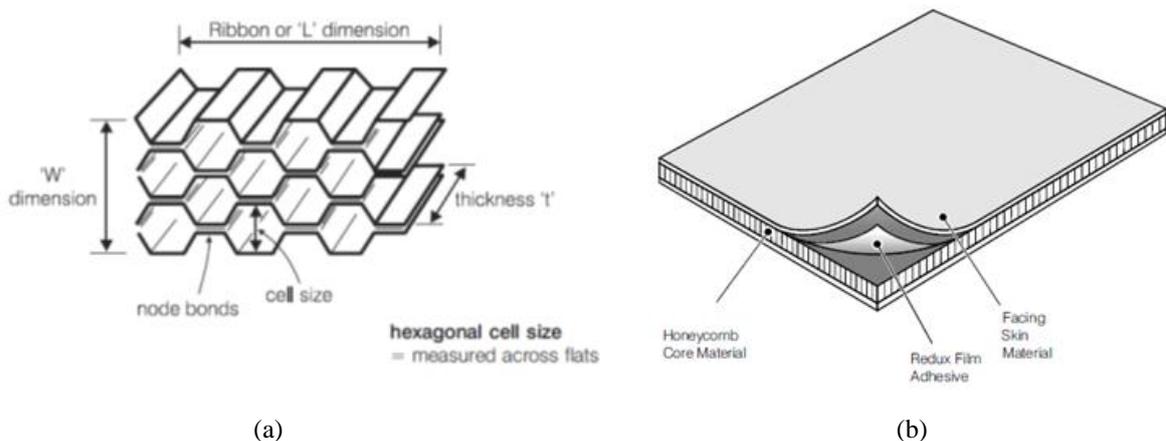


Figura 1.1 – Geometria de painéis sanduíche honeycomb:(a) forma da célula do núcleo e (b) construção em camadas [8]

A caracterização destas estruturas torna-se uma tarefa de suma importância no projeto de aplicações aeroespaciais atuais. Adicionalmente, o projeto mais eficiente de estruturas, minimizando a quantidade de experimentos na fase inicial do projeto, requer a utilização de ferramentas numéricas e computacionais capazes de encontrar resultados robustos, porém de baixo custo computacional.

Enquanto materiais rígidos e leves têm vantagens óbvias do ponto de vista da eficiência energética,

uma preocupação gerada pelo uso deste tipo de painel é sua tendência a transmitir mais ruído ao interior da estrutura do que outros tipos de materiais, especialmente em altas frequências [9][10]. Logo, para que as propriedades vibroacústicas sejam levadas em consideração durante a fase de projeto, é importante que a modelagem do comportamento dinâmico destas estruturas seja capaz de calcular respostas em ampla faixa de frequências.

Deste modo, a análise por elementos finitos (FEA), o método numérico mais comumente utilizado [11], torna-se impraticável pois modelos de estruturas por FEA para altas frequências ficam caros demais do ponto de vista computacional [12][13]. Nestes casos, uma abordagem que tem grande potencial para obter as respostas desejadas é o chamado método de ondas. A modelagem da transmissão de energia mecânica como um conjunto de ondas propagando-se através da estrutura pode simplificar a análise para altas e médias frequências. Infelizmente, o método de ondas, em geral, depende de modelos analíticos, que na prática podem ser inviáveis.

Algumas estruturas possuem propriedades geométricas ou materiais que limitam a propagação de ondas em certas direções preferenciais, como por exemplo, em barras e vigas, onde a propagação ocorre quase que totalmente ao longo seu comprimento, e placas, onde a propagação ocorre ao longo do comprimento e largura. Desta forma, painéis sanduíche podem ser modelados como guias de onda, o que permite a utilização do método de Ondas e Elementos Finitos (Wave and Finite Element - WFE).

O WFE consiste na combinação dos dois métodos citados anteriormente, abordagem por propagação de ondas e FEA. Aplicando-se o método de ondas a um único segmento da estrutura, junto com condições de periodicidade, obtém-se um modelo do comportamento dinâmico da estrutura completa. Adicionalmente, pode-se utilizar uma biblioteca convencional de elementos finitos, disponível em qualquer software especializado, sem a necessidade de desenvolvimento de elementos ad hoc para novas aplicações [13].

1.2. Revisão Bibliográfica

A modelagem de estruturas como uma coleção de objetos arranjados periodicamente é uma simplificação bastante útil em vários campos da física. O primeiro a utilizar essa ideia foi Newton que, em seu livro “Principia Mathematica” escrito no século XVII, assumiu a propagação do som como uma onda elástica através de uma estrutura unidimensional de massas pontuais[14]. Ao longo dos séculos XVIII e XIX várias contribuições para o modelo simples foram feitas por Floquet [15], Bernoulli, Fourier, Euler. Bloch [16], estudando o comportamento de elétrons como funções de onda, expandiu as soluções obtidas por Floquet para o caso 3D.

Atualmente, existe um interesse crescente no estudo de técnicas de análise relevantes a sistemas periódicos como materiais compósitos [17][18], estruturas de aeronaves [19], pernas de plataformas

petrolíferas [20], trilhos de trens [21]–[23], algumas fundações para prédios [24] e várias outras. Apesar de a aplicação de teoria de ondas a estruturas simples como barras, vigas e placas finas homogêneas, ter sido resolvida analiticamente [11] [25] [26], estruturas mais complexas requerem soluções numéricas,

O uso do método de elementos finitos em conjunto com o método de ondas foi proposto por Orris e Petyt [27], com o objetivo de se aproveitar a flexibilidade do FEA: desde que os elementos sejam implementados, qualquer estrutura pode ser analisada. Orris e Petyt demonstraram a aplicação em nervuras de uma aeronave e puderam obter alguns de seus parâmetros de onda.

Mace et al. [12], [13], [28], desenvolveram a metodologia de aplicação do WFE em guias de onda utilizando a biblioteca de elementos finitos do software ANSYS e pós-processamento em MATLAB, produtos comerciais relativamente comuns na indústria. Eles então validaram sua aplicação a estruturas simples cuja solução analítica já era conhecida. Adicionalmente, eles também realizaram estudos em função da energia, potência, velocidade de grupo e respostas forçadas a partir do WFE.

Manconi e Mace [29], [30] aplicaram WFE a estruturas 2D e estenderam a metodologia a estruturas axisimétricas como painéis cilíndricos. Renno e Mace [31]–[33] aprimoraram os métodos para estimação de respostas forçadas com o uso do WFE em estruturas 1D e 2D proposto por Duhammel e Mace [28]. Chronopoulos et al [34]–[36] aplicaram o WFE para estimação de propriedades acústicas a várias estruturas.

1.3. Objetivos e metodologia

Este trabalho tem por objetivo a modelagem do comportamento dinâmico em termos de propagação de ondas de painéis compósitos do tipo honeycomb, utilizados em aplicações aeroespaciais. Para tanto, será utilizado o Método de Ondas e Elementos Finitos (Wave and Finite Element - WFE), que permite calcular quantidades relacionadas à propagação de ondas, tais como número de onda, velocidades de fase e de grupo, e coeficientes de transmissão e reflexão, além da resposta forçada.

Para alcançar o objetivo geral proposto, este trabalho segue a seguinte metodologia:

- Modelagem de painéis sanduiche do tipo honeycomb utilizando elementos finitos. Esta etapa é necessária para se poder comparar os resultados obtidos com um método clássico, e também serve de base para a aplicação do método WFE;
- Estudo da formulação bidimensional do método WFE, uma vez que painéis são tipicamente modelados como guias de ondas com duas direções preferenciais de propagação;
- Estudo de técnicas para condicionamento numérico disponíveis na literatura. Modelos de propagação de ondas tipicamente levam a problemas de condicionamento numérico,

porém já existem técnicas disponíveis na literatura para mitigar tais efeitos.

- Aplicação do WFE e caracterização do comportamento dinâmico dos painéis compósitos.
- Comparação dos resultados numéricos obtidos com resultados de ensaios experimentais dinâmicos de um painel sanduíche honeycomb.

1.4. Estrutura do trabalho

O presente trabalho desenvolve-se em quatro capítulos. O Capítulo 1 apresenta uma introdução, descrevendo as motivações que levaram à realização do presente estudo, uma breve revisão histórica e aplicação de WFE, e os objetivos do trabalho e suas contribuições são apresentados. No capítulo 2, uma revisão teórica dos métodos de análise de propagação de onda para estruturas simples é apresentada, assim como conceitos básicos de acústica. A metodologia utilizada em análises WFE é apresentada, assim como descrições do problema de condicionamento numérico. No capítulo 3 os painéis estruturais de honeycomb são analisados experimentalmente através de análise modal e o método WFE é aplicado aos painéis. Os resultados obtidos são discutidos e, finalmente, no capítulo 4 algumas conclusões são apresentadas, assim como perspectivas futuras do trabalho.

1.5. Contribuições

Os estudos realizados neste trabalho permitiram a realização das seguintes contribuições[37], [38]:

- K. C. de Sousa and A. T. Fabro, “WAVE MODELLING OF A LIGHTWEIGHT AEROSPACE PANEL USING A FINITE ELEMENT APPROACH,” CILAMCE 2016 – XXXVII Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Brasília, Brazil, 2016.
- K. C. de Sousa, A. C. Domingues, P. P. de S. Pereira, S. H. Carneiro, M. V. G. de Moraes, and A. T. Fabro, “Modal parameter determination of a lightweight aerospace panel using laser Doppler vibrometer measurements,” AIVELA Conference on Vibration Measurements By Laser And Noncontact Techniques: Advances And Applications, 2016, p. 070006.

2. Revisão Teórica

2.1. Propagação em guias de ondas

A vibração de sistemas mecânicos pode ser um fenômeno extremamente complexo de ser descrito, de modo que a análise de tais sistemas requer a realização de uma modelagem simplificadora. Tal modelagem pode tomar várias formas e fazem aproximações que permitem a análise do comportamento de corpos e previsão de como o corpo se comportará em diferentes condições.

Outrossim, as condições a que um sistema é submetido, juntamente com o tipo de informação que se deseja extrair, nos permitem aplicar diferentes métodos para diferentes casos que podem simplificar ou dificultar o entendimento e manipulação deste sistema. A presente dissertação lidará com o método de ondas e suas aplicações em guias de ondas.

Ondas são mecanismos de transferência de energia através de matéria ou espaço por meio de oscilações, sem que haja transferência de massa. Estruturas que facilitam este fenômeno são chamadas de guias de onda, e possuem estruturas homogêneas ou periódicas, tanto internas quanto externas, de maneira a apontar as ondas em direções preferenciais.

A periodicidade destes materiais faz com que a modelagem matemática destes problemas seja bastante simplificada, ao mesmo tempo que sua especificidade também facilite a escolha pelo engenheiro de quando aplicar os métodos descritos neste trabalho.

2.2. Características das ondas

Uma onda pode ser caracterizada matematicamente por um campo de deslocamento do tipo

$$\eta(x, t) = \tilde{A}e^{j(\omega t - kx)}, \quad (1)$$

onde \tilde{A} é a amplitude complexa da onda que define a amplitude máxima do deslocamento, assim como a defasagem da oscilação, ω é a frequência temporal e k é o número de onda, que descreve o comportamento da onda no espaço [11].

Enquanto a frequência sempre possui um valor real, o número de onda k pode tomar qualquer valor complexo, da forma $k = -\alpha j + \beta$, fazendo com que a onda se torne uma *onda atenuante*, i.e., sua amplitude decresce ao longo de sua propagação.

Substituindo na equação de onda propagante, encontra-se a expressão equivalente

$$\eta(x, t) = \tilde{A}e^{j(\omega t - kx)} = \tilde{A}e^{j(\omega t + j\alpha x - \beta x)} = (\tilde{A}e^{j(\omega t - \beta x)})e^{-\alpha x}. \quad (2)$$

Neste caso tem-se que α é chamado de constante de atenuação e define o quanto a onda decresce

ao longo do espaço, enquanto β é a constante de fase e descreve a mudança de fase da onda por unidade de espaço.

Quando os números de onda são puramente imaginários, estes indicam campos não propagantes também chamados de *ondas evanescentes*. Fisicamente elas se manifestam como um aumento de amplitude local que decai exponencialmente com a distância, e não podem, individualmente, transportar energia [11]. Podemos visualizar o comportamento das diferentes ondas na Fig. Figura 2.1.

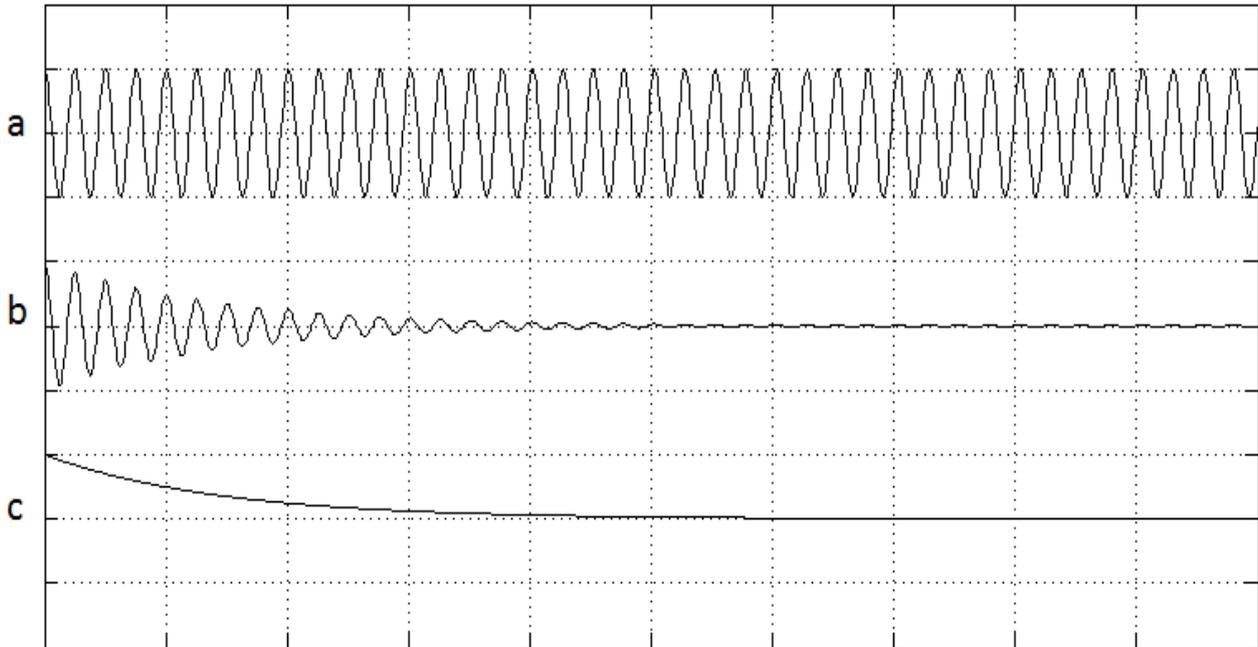


Figura 2.1 – Tipos de onda segundo a forma: (a) propagante, número de onda puramente real; (b) atenuante, número de onda complexo; e (c) evanescente, número de onda puramente imaginário.

A Equação (1) assume movimento harmônico e é a forma mais simples de uma onda que age na forma conhecida de um deslocamento senoidal se propagando na direção positiva de x , de forma que uma onda se propagando na direção negativa seria descrita por $\varphi(t) = \tilde{B}e^{i(\omega t+kx)}$. Adicionalmente, estas ondas descrevem um sistema linear onde vale a superposição, de forma que uma onda que se propaga em ambas as direções seria a soma de ambas estas equações.

$$\varphi(x, t) = \tilde{A}e^{i(\omega t-kx)} + \tilde{B}e^{i(\omega t+kx)}. \quad (3)$$

De fato, qualquer campo de deslocamentos pode ser visto como a soma de um número infinito de ondas. Assim como qualquer movimento periódico, a equação de movimento de uma onda pode ser vista como a soma de infinitos termos de senos e cossenos ou de exponenciais numa série de Fourier

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n \sin(nx) + \tilde{B}_n \cos(nx). \quad (4)$$

A partir das propriedades básicas, definimos duas propriedades secundárias: a velocidade de fase e

a velocidade de grupo.

A *velocidade de fase* é uma relação entre frequência e número de onda que descreve a velocidade com que uma onda se move em relação a um referencial qualquer. É dada por

$$c_f = \frac{\omega}{k}. \quad (5)$$

Verifica-se que no caso de números de onda puramente imaginários, a velocidade de fase também será imaginária, o que serve como demonstração adicional da imobilidade das ondas evanescentes.

Nota-se ainda que pode existir dependência entre a frequência e o número de onda. A forma desta relação, denominada *relação de dispersão*, confere informações tanto a respeito da onda sendo estudada, quanto do meio por onde a onda se propaga. Quando esta relação é linear, obtém-se ondas não dispersivas, ou seja, a forma de onda se conserva ao longo de sua propagação. Caso contrário, dizemos que a onda é dispersiva, fazendo com que ondas de frequências diferentes tenham velocidades diferentes.

As Figuras (Figura 2.2) e (Figura 2.3) demonstram o comportamento de duas perturbações, com amplitude e frequência inicialmente idênticas, porém a primeira é não dispersiva e a segunda é dispersiva.

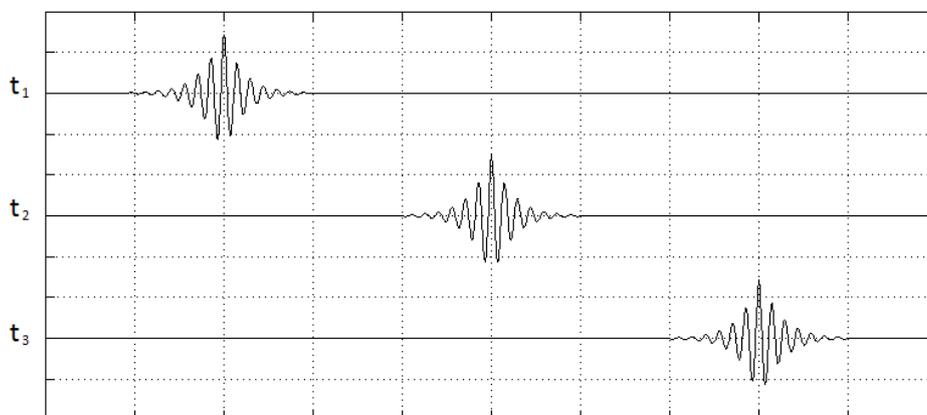


Figura 2.2 - Perturbação não dispersiva ao longo do tempo e espaço – a onda mantém a forma em todos os três momentos.

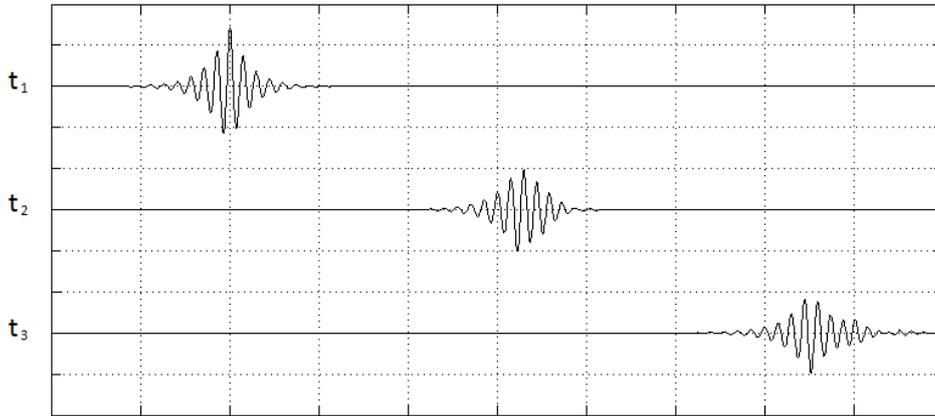


Figura 2.3 - Perturbação dispersiva ao longo do tempo e espaço – a amplitude máxima diminui enquanto os picos e vales se afastam.

O fenômeno da onda dispersiva é melhor entendido ao se verificar que a velocidade com que a energia está sendo transportada, chamada *velocidade de grupo*, é diferente da velocidade de fase de ondas dispersivas, fazendo com que a forma da onda mude [11], [39]. A velocidade de grupo é definida como:

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} . \quad (6)$$

Para ondas não dispersivas, a velocidade de fase é igual à velocidade de grupo.

2.3. Tipos de ondas

Nesta seção, uma revisão de alguns tipos de ondas em estruturas sólidas mais relevantes é apresentada: longitudinais, quase-longitudinais, transversais e flexurais.

2.3.1. Ondas Longitudinais em sólidos

Ondas longitudinais são aquelas onde o deslocamento da partícula é na mesma direção em que a propagação da onda. Num sólido, quando um deslocamento relativo entre partículas vizinhas ocorre, o elemento sofre uma deformação ε_{xx} da forma

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} , \quad (7)$$

onde ξ é o deslocamento entre as partículas na direção x .

De acordo com a Lei de Hooke, a tensão σ_{xx} se relaciona à deformação através de uma constante B [40] tal que

$$\sigma_{xx} = B \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (8)$$

B relaciona o módulo de elasticidade (E) e o coeficiente de Poisson (ν) do material. Para um elemento cujo comprimento é muito maior que a largura e altura, utilizamos a aproximação de estado plano de deformação, de modo que B é definido de acordo com a seguinte equação:

$$B = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \quad (9)$$

O balanço de forças devido à deformação é dado por

$$(\rho \delta x) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta x - \sigma_{xx} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta x, \quad (10)$$

que pode ser rearranjado numa equação da onda

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{B} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (11)$$

com velocidade de fase

$$c_l = \sqrt{\frac{B}{\rho}}, \quad (12)$$

que não é dependente da frequência e, portanto, não dispersiva.

2.3.2. Ondas quase-longitudinais em sólidos

As ondas longitudinais são um caso ideal que pode ser usado como aproximação apenas para sólidos que se estendem em todas as direções e em grandes distâncias, uma vez que, nas outras aplicações, a contração de Poisson fará com que a tensão longitudinal cause tensões laterais que não podem ser desprezadas.

Em uma barra fina, por definição, a razão entre a tensão longitudinal e a deformação é E , de forma que pode ser demonstrado que a relação entre tensão lateral e longitudinal é da forma

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (13)$$

Assumindo uma resposta harmônica $\eta(x, t) = \tilde{\eta} e^{-i(\omega t - k_l' x)}$ tem-se que

$$k^2 \tilde{\eta} e^{-i(\omega t - k_l' x)} = \frac{\rho}{E} \omega^2 \tilde{\eta} e^{-i(\omega t - k_l' x)}. \quad (14)$$

Portanto, teremos número de onda

$$k_{1,2} = \pm\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}} = \pm k'_i \quad (15)$$

com velocidade de fase

$$c'_i = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (16)$$

que também não depende da frequência e portanto é não dispersiva.

Para uma placa fina a razão entre a tensão longitudinal e a deformação é $E/(1 - \nu^2)$ que resulta em número de onda

$$k_{1,2} = \pm\omega\sqrt{\frac{\rho(1 - \nu^2)}{E}} = \pm k'_i \quad (17)$$

e velocidade de fase

$$c''_i = \sqrt{\frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}}. \quad (18)$$

2.3.3. Ondas Transversais (cisalhantes) em sólidos

Ondas transversais, em contrapartida às ondas longitudinais, são aquelas onde o deslocamento das partículas é perpendicular à propagação da onda. Em sólidos, existe resistência a esta deformação gerando uma tensão cisalhante (τ), e a razão entre esta tensão e a deformação (γ) é caracterizada pelo *Módulo de Cisalhamento* (G):

$$G = \frac{\tau}{\gamma}. \quad (19)$$

O módulo de cisalhamento se relaciona ao módulo de elasticidade como se segue:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (20)$$

Durante a deformação, a tensão cisalhante cria uma aceleração vertical dada por $\partial^2\eta/\partial t^2$, com η sendo o deslocamento na direção y , de modo que a equação de movimento é

$$\rho\delta x\delta y\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\delta x\delta y, \quad (21)$$

e a tensão pode ser descrita como

$$\tau_{xy} = G\gamma = G \frac{\partial \eta}{\partial x} , \quad (22)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = G \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} . \quad (23)$$

Portanto, a equação da onda é dada por

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} . \quad (24)$$

De maneira semelhante ao que foi feito anteriormente, assume-se uma resposta do tipo $\eta(x, t) = \tilde{\eta} e^{-i(\omega t - k_s x)}$

$$k^2 \tilde{\eta} e^{-i(\omega t - k_s x)} = \frac{\rho}{G} \omega^2 \tilde{\eta} e^{-i(\omega t - k_s x)} . \quad (25)$$

Portanto tem-se números de onda dados por

$$k_{1,2} = \pm \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} = \pm k_s , \quad (26)$$

com velocidade de onda dada por

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} . \quad (27)$$

Vale notar que a velocidade de ondas transversais é menor que as quase-longitudinais, uma vez que

$$\frac{c_s}{c_l''} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)} \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}} = \sqrt{\frac{1(1-\nu^2)}{2(1+\nu)}} . \quad (28)$$

Como o mecanismo de funcionamento de torção é análogo ao de cisalhamento, porém para rotação, ondas torcionais também são ondas cisalhantes, com equação de onda

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{I_p}{GJ} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} , \quad (29)$$

onde I_p é o momento polar de inércia por unidade de comprimento e J é o momento polar de inércia do elemento. Os números de onda e velocidade da onda torcional são, respectivamente, dados por

$$k_{1,2} = \pm \omega \sqrt{\frac{I_p}{GJ}} = \pm k_t , \quad (30)$$

$$c_t = \sqrt{\frac{GJ}{I_p}} . \quad (31)$$

2.3.4. Ondas Flexurais

Finalmente, existem as ondas flexurais, que não podem ser representadas por deformações apenas longitudinais ou transversais. Estas ondas são de suma importância para a vibroacústica, já que são as principais responsáveis pela troca de energia entre dois meios e pela geração de ruído. Isso ocorre pois ondas flexurais envolvem grandes deslocamentos nas direções normais à propagação causando perturbação em materiais adjacentes.

Utilizando a descrição para vigas de Euler-Bernoulli [11], [41], tem-se a equação da onda

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} = -\rho S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} , \quad (32)$$

onde S é a área da seção transversal e I o segundo momento de área. Assumindo uma resposta do tipo $\eta(x, t) = \tilde{\eta} e^{-i(\omega t - k_b x)}$, obtém-se

$$k^4 \tilde{\eta} e^{-i(\omega t - k_b x)} = \frac{\rho S}{EI} \omega^2 \tilde{\eta} e^{-i(\omega t - k_b x)} , \quad (33)$$

o que significa que os números de onda deverão ser do tipo

$$k = \sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI} \omega^2} , \quad (34)$$

que permite que sejam encontrados quatro números de onda: dois puramente reais e dois puramente imaginários, ou seja,

$$k_{1,2} = \pm \sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI} \omega^2} = \pm k_b ,$$

$$k_{3,4} = \pm i \sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI} \omega^2} = \pm i k_b . \quad (35)$$

A equação geral é uma combinação destes modos

$$\eta(x, t) = (\tilde{A}e^{-ik_b x} + \tilde{B}e^{ik_b x} + \tilde{C}e^{-k_b x} + \tilde{D}e^{k_b x})e^{i\omega t} \quad (36)$$

com, respectivamente, as seguintes velocidade de fase e de grupo

$$c_{bf} = \frac{\omega}{k_i} = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 EI}{\rho S}}, \quad (37)$$

$$c_{bg} = \frac{\partial \omega}{\partial k_i} = 2k \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = 2 \sqrt[4]{\frac{\omega^2 EI}{\rho S}} = 2c_{bf}. \quad (38)$$

Nota-se duas propriedades muito importantes que diferenciam as ondas flexurais das outras estudadas. A primeira é o aparecimento de números de onda puramente imaginários e, portanto, o aparecimento de ondas evanescentes. A outra propriedade é que a velocidade de fase depende da frequência e, portanto, as ondas de flexão são ondas dispersivas.

Para o caso de uma placa fina, de altura h , tem-se que a equação governante para movimento fora do plano é da forma

$$D \left(\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial y^4} \right) = -\rho h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad (39)$$

onde

$$D = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (40)$$

Aplicando resultados de tipo harmônico $\eta(x, y, t) = \tilde{\eta}e^{-i(\omega t - k_x x - k_y y)}$ encontra-se

$$D(k_x^2 + k_y^2)^2 = -\rho h \eta^2, \quad (41)$$

de tal maneira que k_x e k_y são as componentes do vetor k , que se propaga na direção θ . Verifica-se que a propagação ocorre em todas as direções do plano e os valores de k_x e k_y podem ser diferentes, porém, estarão limitados pela equação

$$k = k_x^2 + k_y^2 = (k \cos \theta)^2 + (k \sin \theta)^2. \quad (42)$$

A partir destas propriedades encontra-se números de onda

$$k = \sqrt[4]{\frac{\rho h}{D}} \omega^2, \quad (43)$$

e velocidades de fase e grupo

$$c_{bf} = \frac{\omega}{k_i} = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 D}{\rho h}}, \quad (44)$$

$$c_{bg} = \frac{\partial \omega}{\partial k_i} = 2k \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = 2 \sqrt[4]{\frac{\omega^2 D}{\rho h}} = 2c_{bf}. \quad (45)$$

2.3.5. Ondas Acústicas em Fluidos

A equação geral da onda para pequenas variações em um fluido homogêneo, isotrópico e compressível pode ser escrito em termos da variação de pressão em torno da pressão de equilíbrio, a pressão acústica p , como a equação

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (46)$$

onde c é a velocidade do som no meio tal que $c^2 = \gamma P_0 / \rho_0$, onde γ é o Módulo Volumétrico Adiabático do fluido, P_0 é a pressão média do fluido, e ρ_0 é a massa específica. No estudo de interações entre estruturas planas e fluidos, é comum utilizar a forma da equação com apenas variações em duas direções ortogonais para resultados harmônicos, a chamada equação de Helmholtz bidimensional:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\omega^2}{c^2} p = k^2 p, \quad (47)$$

2.3.6. Frequência Crítica

Quando meios em contato propagam ondas com mesmo número de onda na mesma direção, observa-se um alto ganho na transmissão de energia entre elas. O mesmo fenômeno acontece para estruturas e fluidos, de modo que a frequência na qual isso ocorre é extremamente importante para a acústica, onde é chamada *frequência de coincidência*. A partir das Eqs. (43) e (47) é possível estimar esta frequência como:

$$k = \sqrt[4]{\frac{\rho h}{D}} \omega^2 = k_a = \frac{\omega}{c}, \quad (48)$$

$$\omega_c = c^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} . \quad (49)$$

Tipicamente, problemas de transmissibilidade acústica em painéis devem levar em conta essa quantidade. Nesse caso, é possível determinar a frequência crítica como sendo a frequência em que o número de onda flexural, ou fora do plano do painel, intersecciona o valor encontrado para a constante de propagação do fluido.

2.4. Método de Elementos Finitos

Estruturas reais são formadas por um número extremamente grande de moléculas de maneira que estudar este sistema seria impossível devido ao número de graus de liberdade e forças intermoleculares agindo, que seriam, essencialmente, infinitos. Por isso em geral é utilizada a hipótese de mecânica do contínuo, em que não se trata o meio como um conjunto de moléculas, mas como um continuum matemático.

O método de elementos finitos [41] é um método numérico que consiste em dividir o volume do sistema sendo estudado em fatias contínuas grandes o suficiente para que o número de cálculos possa ser feito por um computador, mas pequenos o bastante para que o sistema numérico fique próximo o suficiente do sistema real. Se a definição das dimensões e propriedades dos elementos for feita de maneira apropriada, é possível que a aproximação seja boa o suficiente para que os erros numéricos sejam menores que os devido a instrumentos de medição.

2.4.1. Matriz de Rigidez Dinâmica

Uma ferramenta extremamente importante para o método de elementos finitos em dinâmica de estruturas é a matriz de rigidez dinâmica. Ela relaciona os deslocamentos dos nós de uma estrutura aos forçamentos aplicados a estes através das propriedades de rigidez, amortecimento e inércia desta estrutura.

Considerando uma estrutura que pode ou não possuir infinitas células tais que cada uma das células, numeradas n , possui os deslocamentos e forças dadas pela Fig. (2.4).

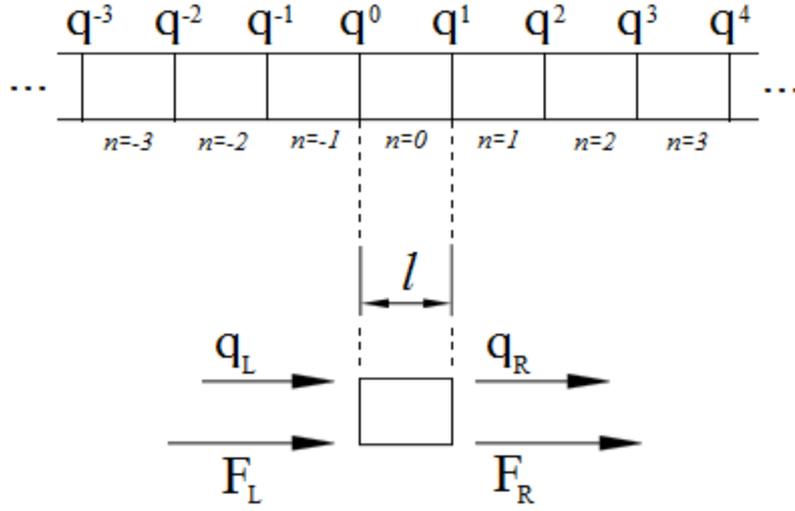


Figura 2.4. Diagrama de forças e deslocamentos a esquerda, f_L e q_L , e a direita, f_R e q_R de célula de comprimento l .

Uma aproximação por elementos finitos de cada uma das células, de maneira geral, e assumindo movimento harmônico, leva à seguinte equação do movimento

$$(\mathbf{K} - i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (50)$$

onde \mathbf{K} , \mathbf{M} e \mathbf{C} são respectivamente as matrizes de rigidez, massa e amortecimento, \mathbf{F} o vetor de carregamento e \mathbf{q} o vetor de deslocamento. Definindo $(\mathbf{K} - i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})$ como a matriz de rigidez dinâmica $\tilde{\mathbf{D}}$, e decompondo a equação em termos dos graus de liberdade da fronteira esquerda (L), direita (R) e interior (I) tem-se que

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{II} & \tilde{\mathbf{D}}_{IL} & \tilde{\mathbf{D}}_{IR} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{LI} & \tilde{\mathbf{D}}_{LL} & \tilde{\mathbf{D}}_{LR} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{RI} & \tilde{\mathbf{D}}_{RL} & \tilde{\mathbf{D}}_{RR} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_R \end{pmatrix}. \quad (51)$$

A solução da primeira linha leva a

$$\mathbf{q}_I = \tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}(\tilde{\mathbf{D}}_{IL}\mathbf{q}_L + \tilde{\mathbf{D}}_{IR}\mathbf{q}_R). \quad (52)$$

Pode-se então eliminar os graus de liberdade interior escrevendo

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{LL} - \tilde{\mathbf{D}}_{LI}\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{IL} & \tilde{\mathbf{D}}_{LR} - \tilde{\mathbf{D}}_{LI}\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{IR} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{RL} - \tilde{\mathbf{D}}_{RI}\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{IL} & \tilde{\mathbf{D}}_{RR} - \tilde{\mathbf{D}}_{RI}\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{IR} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_R \end{pmatrix}, \quad (53)$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_R \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Como as matrizes \mathbf{K} , \mathbf{M} e \mathbf{C} são simétricas, segue que a matriz de rigidez dinâmica também o será,

ou seja

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{LL}^T &= \mathbf{D}_{LL}, & \mathbf{D}_{LR}^T &= \mathbf{D}_{RL}, \\ \mathbf{D}_{RL}^T &= \mathbf{D}_{LR}, & \mathbf{D}_{RR}^T &= \mathbf{D}_{RR}. \end{aligned} \quad (55)$$

A definição das relações entre os deslocamentos e forças atuantes nos nós de cada elemento permite a criação de uma Matriz Global de Rigidez Dinâmica, que descreve o comportamento do corpo como um todo.

A Matriz Global de Rigidez Dinâmica será dada pela montagem de todas as células individuais, considerando condições de equilíbrio e continuidade, de forma que para uma estrutura periódica formada por N células, teremos a seguinte relação entre deslocamentos e forças [13]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} & \mathbf{D}_{LR} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} & \mathbf{D}_{LR} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_{RL} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} & \mathbf{D}_{LR} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_N \\ \mathbf{q}_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_N \\ \mathbf{f}_{N+1} \end{pmatrix}. \quad (56)$$

No entanto, percebe-se que para uma estrutura periódica a Matriz Global de Rigidez Dinâmica dependerá de um número muito pequeno de variáveis. Por exemplo, para o caso acima descrito, ela só possuirá três variáveis, \mathbf{D}_{LL} , \mathbf{D}_{RR} e \mathbf{D}_{RL} (uma vez que \mathbf{D}_{LR} é a transposta de \mathbf{D}_{RL}), que já estão descritas para apenas um elemento e, mesmo para sistemas que possuem vários graus de liberdade, a matriz será do tipo banda e formada por termos encontrados em apenas uma célula.

Portanto, a abordagem de propagação de ondas combinada à hipótese de condição periódica permite a modelagem de toda a estrutura a partir de apenas uma célula periódica, reduzindo consideravelmente o custo computacional.

2.5. Formulação de Ondas e Elementos Finitos

Nesta seção, serão apresentados a modelagem da matriz de transferência que deve ser realizada, a partir da matriz de rigidez dinâmica, para a aplicação do método WFE, assim como critérios de garantia necessários devido ao uso de processamento automático.

2.5.1. Matriz de Transferência

Assumindo-se que existe uma matriz \mathbf{T} que relaciona as forças e deslocamentos entre duas células adjacentes ao longo da propagação, n e $n + 1$, tem-se que [28]

$$\mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_L^n \\ \mathbf{f}_L^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_R^n \\ -\mathbf{f}_R^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_L^{n+1} \\ \mathbf{f}_L^{n+1} \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Usando estes valores na primeira linha da matriz de rigidez dinâmica, Eq. (54), tem-se que

$$\mathbf{q}_l^{n+1} = \mathbf{D}_{LR}^{-1}(\mathbf{f}_l^n - \mathbf{D}_{LL}\mathbf{q}_L^n). \quad (58)$$

Aplicando esta relação na segunda linha da matriz de rigidez dinâmica

$$\mathbf{f}_l^{n+1} = -\mathbf{D}_{RR}\mathbf{D}_{LR}^{-1}\mathbf{f}_l^n - (\mathbf{D}_{RL} - \mathbf{D}_{RR}\mathbf{D}_{LR}^{-1}\mathbf{D}_{LL})\mathbf{q}_L^n. \quad (59)$$

A matriz de transferência \mathbf{T} será, portanto,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_{LR}^{-1}\mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR}^{-1} \\ -\mathbf{D}_{RL} + \mathbf{D}_{RR}\mathbf{D}_{LR}^{-1}\mathbf{D}_{LL} & -\mathbf{D}_{RR}\mathbf{D}_{LR}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (60)$$

Nota-se que \mathbf{T} depende apenas das propriedades da célula. Alternativamente, pode-se verificar que a posição de um nó em uma célula depende do tamanho das células e da posição do outro nó de forma que

$$x_L^{n+1} = x_R^n = x_L^n + l. \quad (61)$$

Lembrando que a onda se propaga de acordo com a eq. (1) e aplicando a eq. (61), encontra-se

$$\mathbf{q}_L^n = \tilde{\mathbf{A}}e^{i(\omega t - kx_L^n)}, \quad (62)$$

$$\mathbf{q}_L^{n+1} = \tilde{\mathbf{A}}e^{i(\omega t - k(x_L^n + l))} = \tilde{\mathbf{A}}e^{i(\omega t - kx_L^n)}e^{-ikl}, \quad (63)$$

ou seja

$$\mathbf{q}_L^{n+1} = \mathbf{q}_L^n e^{-ikl}. \quad (64)$$

Definindo o fator $\lambda = e^{-ikl}$, e sabendo que o mesmo vale para a força sendo aplicada, tem-se

$$\lambda \begin{pmatrix} \mathbf{q}_L^n \\ \mathbf{f}_L^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_L^{n+1} \\ \mathbf{f}_L^{n+1} \end{pmatrix}. \quad (65)$$

e portanto

$$\mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{f}_L \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{f}_L \end{pmatrix}, \quad (66)$$

que é um problema de autovalores e autovetores do tipo

$$[\mathbf{T} - \mathbf{I}\lambda] \begin{pmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{f}_L \end{pmatrix} = 0. \quad (67)$$

Expandindo-se a solução, demonstra-se uma importante propriedade. A partir da primeira linha de \mathbf{T} tem-se que

$$\mathbf{f}_L = (\mathbf{D}_{LL} + \lambda\mathbf{D}_{LR})\mathbf{q}_L. \quad (68)$$

Substituindo na segunda linha, leva a

$$(-\mathbf{D}_{RL} + \mathbf{D}_{RR}\mathbf{D}_{LR}^{-1}\mathbf{D}_{LL})\mathbf{q}_L - \mathbf{D}_{RR}\mathbf{D}_{LR}^{-1}(\mathbf{D}_{LL} + \lambda\mathbf{D}_{LR})\mathbf{q}_L = \lambda(\mathbf{D}_{LL} + \lambda\mathbf{D}_{LR})\mathbf{q}_L. \quad (69)$$

que após simplificações, se torna

$$\left(\mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} + \lambda\mathbf{D}_{LR} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{D}_{RL} \right) \mathbf{q}_L = \mathbf{0}. \quad (70)$$

Portanto os autovalores serão a raiz da determinante

$$\left| \mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} + \lambda\mathbf{D}_{LR} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{D}_{RL} \right| = 0. \quad (71)$$

Tomando a transposta, encontra-se

$$\left| \mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} + \lambda\mathbf{D}_{RL} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{D}_{LR} \right| = 0, \quad (72)$$

ou seja, se λ for um autovalor, $1/\lambda$ também será [28]. Fisicamente, isso é devido à simetria da estrutura e significa que a propagação de ondas também é simétrica, mas em sentidos opostos.

Adicionalmente, pode-se reescrever a equação na forma geral que é

$$|\mathbf{A}_0 + \lambda\mathbf{A}_1 + \lambda^2\mathbf{A}_2| = 0, \quad (73)$$

Onde

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A}_0 = \mathbf{D}_{LR} & \mathbf{A}_0 = \mathbf{D}_{RL} \\ \mathbf{A}_1 = \mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} & \text{ou} \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} \\ \mathbf{A}_2 = \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{A}_2 = \mathbf{D}_{LR} \end{array} \quad (74)$$

2.5.2. Formulação do problema 2D

Para o problema bidimensional imagina-se uma estrutura com N_x e N_y células nas dimensões x e

y, respectivamente. Adicionalmente, estas células possuem comprimento e largura l_x e l_y , respectivamente, e ao todo são necessárias, no mínimo 4 nós para se descrever a estrutura retangular, conforme Fig. (2.5). Outras formas para células são possíveis, e podem ser vistas em [30].

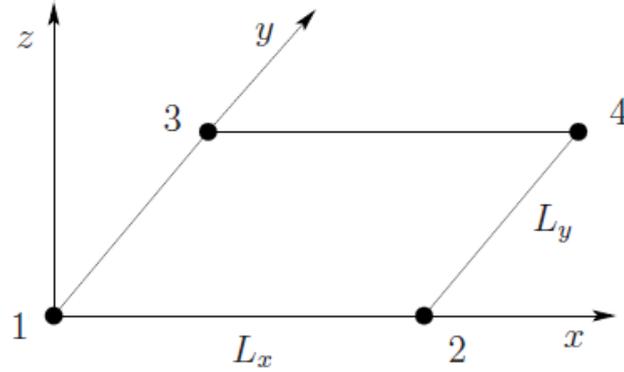


Figura 2.5 Modelo em FE de segmento retangular de 4 nós [29]

De maneira análoga ao problema unidimensional, também pode-se descrever a matriz de rigidez dinâmica como Eq. (54), porém, a matriz completa possuirá um total de 16 componentes

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} & \mathbf{D}_{14} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} & \mathbf{D}_{24} \\ \mathbf{D}_{31} & \mathbf{D}_{32} & \mathbf{D}_{33} & \mathbf{D}_{34} \\ \mathbf{D}_{41} & \mathbf{D}_{42} & \mathbf{D}_{43} & \mathbf{D}_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \end{pmatrix}. \quad (75)$$

A equação polinomial equivalente é escrita como [29]:

$$\begin{aligned} & [(\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{33})\lambda_y\lambda_x + (\mathbf{D}_{22} + \mathbf{D}_{44})\lambda_y\lambda_x + (\mathbf{D}_{12} + \mathbf{D}_{34})\lambda_y\lambda_x^2 + (\mathbf{D}_{13} + \\ & \mathbf{D}_{24})\lambda_y^2\lambda_x + \mathbf{D}_{32}\lambda_x^2 + \mathbf{D}_{23}\lambda_y^2 + (\mathbf{D}_{21} + \mathbf{D}_{43})\lambda_y + (\mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{42})\lambda_x + \\ & \mathbf{D}_{14}\lambda_y^2\lambda_x^2 + \mathbf{D}_{41}] \mathbf{q} = 0, \end{aligned} \quad (76)$$

para o qual existem constantes de propagação λ_x e λ_y nas direções x e y . Cada constante de propagação está relacionada a seu número de onda k_x e k_y , respectivamente, que estão restritos à relação

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2. \quad (77)$$

Segue que

$$k_y = f(k_x) = k_x \tan \theta, \quad (78)$$

onde θ é a direção de propagação.

De fato, em cada frequência é obtida uma equação com três variáveis, k_x , k_y e θ , de modo que definindo duas dessas variáveis encontra-se a terceira. Logo, a Eq. (50) pode ser reescrita como uma

função de k_x , análoga a Eq. (73), i.e., o problema bidimensional pode ser escrito como um problema unidimensional. No caso onde $\theta = 0$, k_y também será sempre zero, e portanto

$$\begin{aligned} A_0 &= D_{21} + D_{23} + D_{41} + D_{43} \\ A_1 &= (D_{11} + D_{13} + D_{31} + D_{33}) + (D_{22} + D_{24} + D_{42} + D_{44}) \\ A_2 &= D_{12} + D_{14} + D_{32} + D_{34} \end{aligned} \quad (79)$$

enquanto que para o caso de propagação na direção y tem-se

$$\begin{aligned} A_0 &= D_{31} + D_{32} + D_{41} + D_{42} \\ A_1 &= (D_{11} + D_{12} + D_{21} + D_{22}) + (D_{33} + D_{34} + D_{43} + D_{44}) \\ A_2 &= D_{13} + D_{14} + D_{23} + D_{24} \end{aligned} \quad (80)$$

2.5.3. Bases de onda

Os autovetores encontrados são linearmente independentes e formam uma base de deslocamentos característicos associados aos nós do elemento, em uma das direções, x ou y . O j -ésimo autovetor está associado ao movimento do j -ésimo elemento por:

$$\Phi_j = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{jL} \\ \mathbf{q}_{jR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{jL} \\ \lambda \mathbf{q}_{jL} \end{pmatrix}, \quad (81)$$

para o caso unidimensional, e

$$\Phi_j = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{j1} \\ \mathbf{q}_{j2} \\ \mathbf{q}_{j3} \\ \mathbf{q}_{j4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{j1} \\ \lambda_x \mathbf{q}_{j1} \\ \lambda_y \mathbf{q}_{j1} \\ \lambda_x \lambda_y \mathbf{q}_{j1} \end{pmatrix}, \quad (82)$$

para o caso bidimensional.

Também se pode encontrar a *base de onda* que contém as informações de deslocamento e forçamento em cada nó aplicando a definição:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_n \\ \mathbf{f}_n \end{pmatrix}. \quad (83)$$

2.6. Energia e potência do sistema

A onda, conforme já dito, é um mecanismo de transferência de energia através de matéria ou

espaço por meio de oscilações. Portanto, é de suma importância que as energias presentes no sistema e o fluxo de dessa energia através desse sistema sejam bem entendidos.

2.6.1. Energias cinética e potencial

A energia cinética de uma massa m é dada por

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right)^2. \quad (84)$$

Assumindo movimento harmônico, a energia cinética média é dada por

$$\bar{E}_c = \frac{1}{2} m \frac{1}{2} (i\omega \mathbf{q})^H (i\omega \mathbf{q}) = -\frac{m\omega^2 |\mathbf{q}|^2}{4}. \quad (85)$$

A energia potencial devido a uma rigidez k é dada por

$$E_p = \frac{k\mathbf{q}^2}{2}. \quad (86)$$

Assumindo movimento harmônico, a energia média é dada por

$$\bar{E}_p = \frac{1}{2} k \frac{1}{2} \mathbf{q}^H \mathbf{q} = \frac{k|\mathbf{q}|^2}{4}. \quad (87)$$

Calculando essas grandezas para um elemento qualquer n que está sendo excitado por uma onda com modo de onda $\boldsymbol{\phi}$, tem-se que[12]

$$\bar{E}_c^n = \frac{1}{4} (i\omega \boldsymbol{\phi})^H \mathbf{M} (i\omega \boldsymbol{\phi}), \quad (88)$$

$$\bar{E}_p^n = \frac{1}{4} \boldsymbol{\phi}^H \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}, \quad (89)$$

e energia total

$$\bar{E}_t^n = \bar{E}_c^n + \bar{E}_p^n. \quad (90)$$

Para um corpo que foi dividido em N elementos de igual comprimento l na direção da propagação, pode-se definir a energia total por unidade de comprimento

$$\bar{E}_t = \frac{\bar{E}_t^n}{l}. \quad (91)$$

2.6.2. Potência

A potência devido a uma força f é dada por

$$P = fv = f \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (92)$$

De maneira similar ao que foi feito para a energia, definimos a potência média como

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{f}^H i\omega \mathbf{q}\}. \quad (93)$$

Adicionalmente, podemos calcular a potência que está sendo transmitida através de um elemento n analisando suas bordas direita e esquerda

$$\bar{P}^n = \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{f}_L^H i\omega \mathbf{q}_L\} = -\frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{f}_R^H i\omega \mathbf{q}_R\}. \quad (94)$$

Como a potência é o produto escalar de duas grandezas com direcionalidade, também possuirá sentido, a partir do qual pode-se inferir a direção da propagação da onda. A potência é positiva na direção da propagação da onda para ondas propagantes. Esta propriedade é importante quando se analisa uma estrutura que permite propagação simétrica em ambas as direções, como serão os casos em estudo neste trabalho.

Através da potência, também podemos encontrar a velocidade em que a energia está se propagando.

$$\bar{P} = \underline{\bar{E}}_t c_g \quad (95)$$

$$c_g = \frac{\bar{P}}{\underline{\bar{E}}_t} \quad (96)$$

Como foi visto em 2.2, a velocidade de propagação da energia através do guia de onda é chamada de velocidade de grupo e é definida para cada modo de onda ϕ .

2.6.3. Densidade modal

Para médias e altas frequências, o número de modos aumenta significativamente em relação a baixas frequências, e eles começam a afetar uns aos outros, ao ponto que torna-se irrelevante falar de modos específicos. Nestes casos é mais prático falar da *densidade modal* em dada frequência.

A densidade modal é um parâmetro estatístico definido como o número de modos esperado em dada frequência ou banda de frequências [42]. Esta propriedade só tem significado quando o número de modos em uma banda de frequência é alto o suficiente.

Dada uma banda de frequência $\Delta\omega = \omega_{m\acute{a}x} - \omega_{m\acute{i}n}$, contendo ΔN modos, pode-se definir a densidade modal $n(\omega)$ como a razão da quantidade de modos por banda de frequência, ou seja

$$n(\omega) = \frac{\Delta N}{\Delta\omega}. \quad (97)$$

Supondo-se um sistema unidimensional de comprimento L , a partir do princípio de fechamento de fase, pode-se aproximar a existência de um modo quando o comprimento de uma meia-onda, $2\pi/k$, for igual a um número inteiro, ou seja,

$$N = \frac{k}{\pi}L. \quad (98)$$

Essa aproximação desconsidera os efeitos das condições de contorno e aproxima-se assintoticamente do valor verdadeiro para frequências cada mais longe dos primeiros modos. Derivando em relação a ω , tem-se a densidade modal assintótica para sistemas unidimensionais

$$n(\omega) = \frac{L}{\pi} \frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{L}{\pi c_g}. \quad (99)$$

Supondo agora uma placa com dimensões L_x e L_y , as ressonâncias dependerão de $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, e é necessário que ocorram 2π fechamentos de fase em ambas as direções x e y , tal que

$$2k_x = 2\pi m \quad (100)$$

$$2k_y = 2\pi p \quad (101)$$

onde m e p são números inteiros. Aplicando as Equações (100) e (101) a (44), a frequência pode ser reescrita como

$$\omega = c_{bf} \sqrt{\left(\frac{\pi m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi p}{L_y}\right)^2}. \quad (102)$$

Plotando a curva $\omega(m, p)$ no plano m, p , conforme Fig. 2.6, o número de modos pode então ser aproximado pelo número de pontos (m, p) dentro do quarto de elipse, cuja área é dada por

$$\frac{A}{L_x L_y} = \left(\frac{\pi c_{bf} m}{L_x \omega}\right)^2 + \left(\frac{\pi c_{bf} p}{L_y \omega}\right)^2 = 1. \quad (103)$$

Logo

$$N = \frac{1}{4} \pi \frac{\omega L_x}{\pi c_{bf}} \frac{\omega L_y}{\pi c_{bf}} = \frac{L_x L_y}{4\pi} \left(\frac{\omega}{c_{bf}} \right)^2 = \frac{S k^2}{4\pi}, \quad (104)$$

onde S é a superfície da placa. Derivando em relação a ω , obtém-se a densidade modal assintótica bi-dimensional:

$$n(\omega) = \frac{\Delta N}{\Delta \omega} = \frac{S}{2\pi} k \frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{S k}{2\pi c_{bg}}. \quad (105)$$

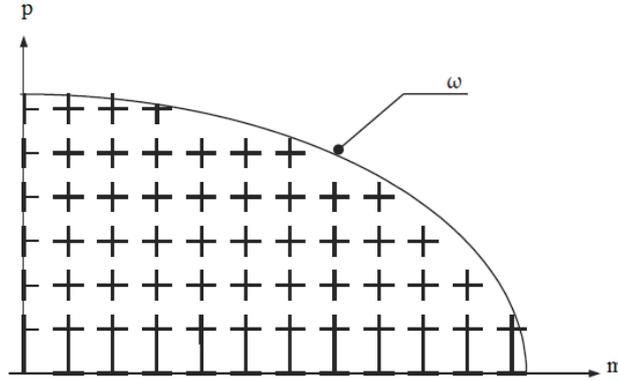


Figura 2.6 – Número de modos abaixo da frequência ω [42]

2.7. Condicionamento numérico

2.7.1. Método de Zhong

Problemas numéricos podem aparecer pois a matriz de transferência \mathbf{T} é intrinsecamente mal condicionada em problemas de propagação de ondas, o que se agrava quando um grande número de modos de onda são levados em conta. Zhong [42] aplica as propriedades simpléticas da matriz de transferência para encontrar a solução das auto equações e encontrar os números de onda de uma maneira melhor condicionada. Ao invés de usar a matriz de transferência que relaciona os deslocamentos e as forças através da equação (66), usam-se duas matrizes auxiliares, \mathbf{L} e \mathbf{N} , tais que $\mathbf{T} = \mathbf{N}\mathbf{L}^{-1}$, obtendo-se

$$\mathbf{N} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{pmatrix} = \lambda \mathbf{L} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{pmatrix}. \quad (106)$$

Como a Eq. (106) usa apenas deslocamentos, a formulação numérica é mais robusta. Através das propriedades simpléticas da matriz, demonstra-se que

$$[\mathbf{L}^T \mathbf{N} + \mathbf{N}^T \mathbf{L}] \mathbf{L} \mathbf{q} = \mu \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{q}, \quad (107)$$

onde $\mu = (\lambda + \frac{1}{\lambda})$. Encontrar os resultados da Eq. (107) significa encontrar os autovalores e seus inversos, portanto, resolver μ é um passo adicional para um problema melhor condicionado, uma vez que as magnitudes dos valores absolutos dos resultados estarão mais próximas entre si.

A linearização da Eq. (73) pode ser feita seguindo as seguintes possibilidades

$$\left(\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \\ -\mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) (\lambda \mathbf{q}) = \mathbf{0}, \quad (108)$$

$$\left(\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \\ -\mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_1 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}_0 \end{bmatrix} \right) (\lambda \mathbf{q}) = \mathbf{0}. \quad (109)$$

De todas as possíveis linearizações, estas são escolhidas pois permitem a definição de

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_{12} \end{bmatrix} \text{ e} \quad (110)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad (111)$$

onde

$$\mathbf{A}_{11} = (\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{13} + \mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{33}) \quad (112)$$

$$\mathbf{A}_{12} = (\mathbf{D}_{22} + \mathbf{D}_{24} + \mathbf{D}_{42} + \mathbf{D}_{44})$$

Somando as Eqs. (108) e (109), uma forma equivalente à Eq. (107) pode ser encontrada, tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_0 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mu \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \\ -\mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{q}. \quad (113)$$

Portanto, o método de Zhong pode ser aplicado ao problema 2D. No entanto, o método de Zhong possui direcionalidade inerente, por isso a resposta dada é sempre da forma unidimensional. Quando se calcula as bases de onda, o que obtém-se na prática é:

$$\Phi_{xz} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \lambda_x \mathbf{q}_1 \end{pmatrix}, \Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \lambda_x \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ \lambda_x \mathbf{q}_1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \Phi_{yz} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \lambda_y \mathbf{q}_1 \end{pmatrix}, \Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ \lambda_y \mathbf{q}_1 \\ \lambda_y \mathbf{q}_1 \end{pmatrix} \quad (114)$$

Para encontrar a base de onda a partir deste método, basta utilizar a identidade implícita em (106):

$$\Psi = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_n \\ \mathbf{f}_n \end{pmatrix} = \mathbf{L}\Phi. \quad (115)$$

2.7.2. Critério de garantia WAC

Como pode ser visto na Eq. (50), o valor da matriz de rigidez dinâmica \mathbf{D} dependerá da frequência, de forma que para encontrar os números e modos de onda e definir o comportamento de um corpo em um intervalo de frequências, é necessário que o cálculo seja feito em passos discretos de frequência.

A utilização de computadores para o cálculo desses valores em grandes volumes traz consigo o revés de que a ordenação dos autovalores e autovetores em suas respectivas matrizes também é feita automaticamente, podendo fazer com que seus valores se embaralhem para diferentes frequências. Para se evitar a verificação e correção manual de cada valor, foram desenvolvidos *critérios de garantia*, que verificam automaticamente a existência de correlação entre valores encontrados em frequências sucessivas. Neste trabalho foi utilizado o *critério de garantia de onda* (wave assurance criterion – WAC) [42].

O WAC tem como princípio a ideia de que as características de onda, e da mesma maneira seus autovetores, serão similares entre frequências próximas de tal forma que, definindo WAC como

$$WAC(\omega_n, \omega_{n-1}) = \frac{(\boldsymbol{\Phi}_{\omega_n}^H \boldsymbol{\Phi}_{\omega_{n-1}})^2}{(\boldsymbol{\Phi}_{\omega_n}^H \boldsymbol{\Phi}_{\omega_n})(\boldsymbol{\Phi}_{\omega_{n-1}}^H \boldsymbol{\Phi}_{\omega_{n-1}})} \quad (116)$$

onde ω_n e ω_{n-1} são as frequências no n -ésimo e $(n - 1)$ -ésimo passos discretos de frequência e $\boldsymbol{\Phi}_{\omega_n}$ é o autovetor associado à n -ésima frequência. Tem-se que quanto mais próximo WAC for da unidade, maior a correlação entre os vetores dos diferentes passos.

3. Modelagem e Caracterização Experimental dos Painéis

Neste capítulo, são apresentados os resultados dos ensaios experimentais em quatro painéis com diferentes dimensões, com o intuito de se validar um modelo inicial em elementos finitos. Em seguida, os parâmetros ajustados neste modelo são utilizados no método WFE, e resultados em termos de curvas de dispersão e modos de onda são discutidos para duas direções ortogonais de propagação.

De acordo com o manual do fabricante, o material que compõe as faces do painel é uma liga de alumínio isotrópico com Módulo de Young de 70 GPa, coeficiente de Poisson de 0,33 e massa específica de 2780Kg/m³. O núcleo honeycomb dos painéis de 10 mm, 15 mm e 30 mm de espessura possui características ortotrópicas com o módulo de cisalhamento na direção L de 220 MPa, na direção W de 103 MPa e massa específica de 37 Kg/m³. O painel de 39,5mm de espessura apresenta um honeycomb diferente dos demais, o módulo de cisalhamento na direção L é de 345MPa, na direção W é de 152MPa.

3.1. Análise modal

Nesta primeira etapa, um ajuste modal é utilizado para estimar as propriedades mecânicas dos painéis. Este modelo tem por objetivo representar adequadamente o comportamento dinâmico do painel em baixas frequências, de modo que ele possa ser usado como base para médias frequências. Dados experimentais de função resposta em frequência, obtidos via vibrômetro laser doppler (LDV), foram comparados com análise modal de modelo de elementos finitos proposto em software ANSYS. Foram investigados os painéis representados pelas amostras descritas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 Características dos painéis.

Espessura T (mm)	Direção L (mm)	Direção W (mm)	Honeycomb	Faces
10	670	300	HexWeb CRIII – Al 5056 – 1/4” – 0,001P (10P) – 9,4 mm - (MIL-C-7438G or AMS -C-7438)	Al 2024 T3 NON CLAD (AMS QQA 250/4 and AMS 4037) – 0,3 mm
15	280	300	HexWeb CRIII – Al 5056 – 1/4” – 0,001P (10P) – 14,4 mm - (MIL-C-7438G or AMS -C-7438)	Al 2024 T3 NON CLAD (AMS QQA 250/4 and AMS 4037) – 0,3 mm
30	240	340	HexWeb CRIII – Al 5056 – 1/4” – 0,001P (10P) – 29,4 mm - (MIL-C-7438G or AMS -C-7438)	Al 2024 T3 NON CLAD (AMS QQA 250/4 and AMS 4037) – 0,3mm
39,5	620	260	HexWeb CRIII – Al 5056 – 1/4” – 0,0015P (15P) – 38,7 mm - (MIL-C-7438G or AMS -C-7438)	Al 2024 T3 non clad (AMS QQA 250/4 and AMS 4037) – 0,4 mm

3.1.1. Modelagem por elementos finitos

Um modelo de Elementos Finitos foi construído utilizando a biblioteca de elementos do software ANSYS. Esse modelo foi utilizado para obter o comportamento dinâmico dos painéis em baixas frequências e escolher os melhores pontos para excitação. Para a região de baixa frequência, espera-se que a estrutura interna do núcleo não afete significativamente as formas modais e frequências naturais dos painéis.

As propriedades do material que compõem a estrutura honeycomb foram definidas com base nos valores nominais, obtidos do manual do fabricante [8]. Os modelos de 10 mm e 15 mm de espessura utilizam três elementos SHELL181 em camadas ao longo da seção transversal. Para os modelos de 30 mm e 39,5 mm de espessura as camadas foram feitas com elemento sólido SOLID185. A implementação dos elementos pelo software ANSYS requereu ajustes, uma vez que o módulo de cisalhamento no plano xy deve ser zero [8] e o coeficiente de Poisson ν_{xy} do núcleo honeycomb deve ser próximo a 1, para pequenos deslocamentos [43]. Tais valores não são programáveis no software e por isso impõe-se o cisalhamento no plano xy como 10^{-6} e coeficiente de Poisson de 0,77.

3.1.2. Análise modal experimental

Para a análise modal experimental, foi utilizada uma bancada onde os painéis foram fixados com fios de nylon, com o objetivo de simular as condições de contorno livre. Utilizou-se o vibrômetro LDV Portable Digital Vibrometer - PDV100 – Polytec para medir a resposta dos painéis, martelo de impacto PCB 086C03 com ponta de nylon para excitar as estruturas, a placa de aquisição National Instrument eDAQ 9172 e o software LabView para aquisição de dados (Fig.3.1). Posteriormente, foi utilizado o software MATLAB e o toolbox EasyMod [44] para análise espectral, gerando-se as funções de resposta em frequência (FRFs) e obtendo-se as frequências e modos naturais dos painéis.



Figura 3.1. Configuração de ensaio modal com (1) Aquisição de dados Labview, (2) vibrômetro LDV Polytec 100, e (3) Painel honeycomb pendurado por fios de nylon.

A fim de gerar os dados experimentais necessários para a extração de parâmetros modal, cada

painel foi discretizado em pontos de medida em uma malha regular. Em cada um dos pontos dessa malha foi posta uma fita adesiva reflexiva para refletir melhor o feixe de luz laser e gerar dados com o mínimo de ruído possível. Para identificar os pontos, foi padronizado que cada coluna seria nomeada com letras do alfabeto seguindo a ordem da esquerda para a direita, e a cada linha foi atribuído um número na ordem crescente de cima para baixo, como mostrados na Fig. 3.2.

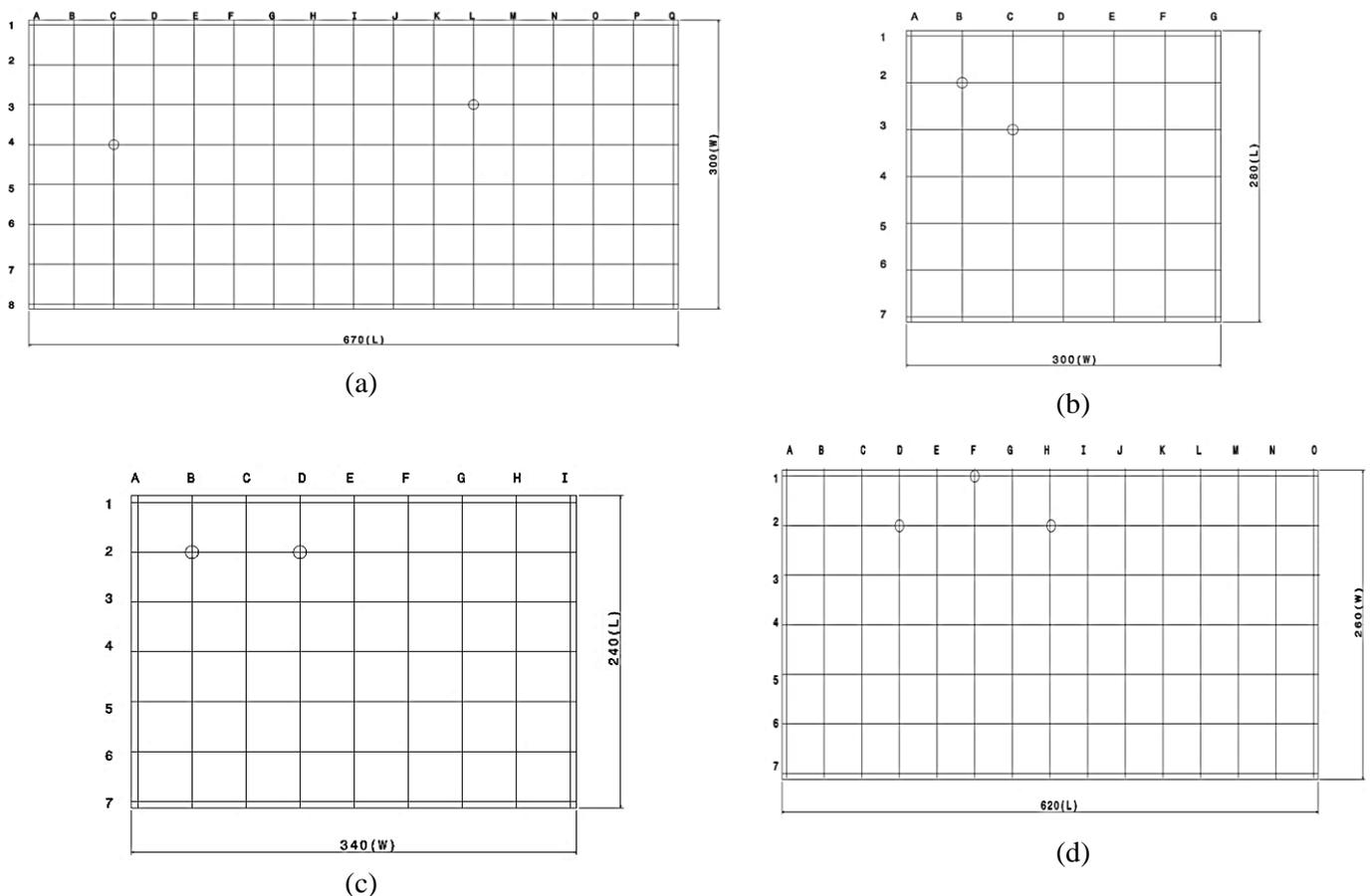


Figura 3.2 Representação do grid de medição e dos pontos de excitação (círculo) nos painéis com espessura de:(a) 10mm, (b) 15mm, (c)30mm e (d) 39,5mm

Foram realizadas três medições em cada um dos pontos, o método de Welch foi utilizado para se estimar as densidades espectrais de potência e o estimador H1 foi utilizado para as FRFs [45], com uma rotina em software MATLAB. Em seguida, com o auxílio do toolbox EasyMod, foi possível analisar os dados e obter as características modais dos painéis, com o método de ajuste por exponenciais complexas (LSCE) [46].

3.1.3. Resultados

Os resultados obtidos nos ensaios e nos modelos numéricos são apresentados nas Tabelas 3.2 a 3.9, para cada painel. É possível observar que os valores de frequências naturais apresentam uma boa correlação com o modelo de elementos finitos, com diferenças sempre inferiores a 5%. As maiores discrepâncias ocorrem no painel de 39,5mm de espessura, como pode ser observado na Tabela 9. Uma possível razão para estas diferenças é a configuração do seu honeycomb que difere dos demais. As

Figuras 3.3 a 3.6 mostram a média espacial da velocidade RMS em função da frequência obtida experimentalmente em cada painel.

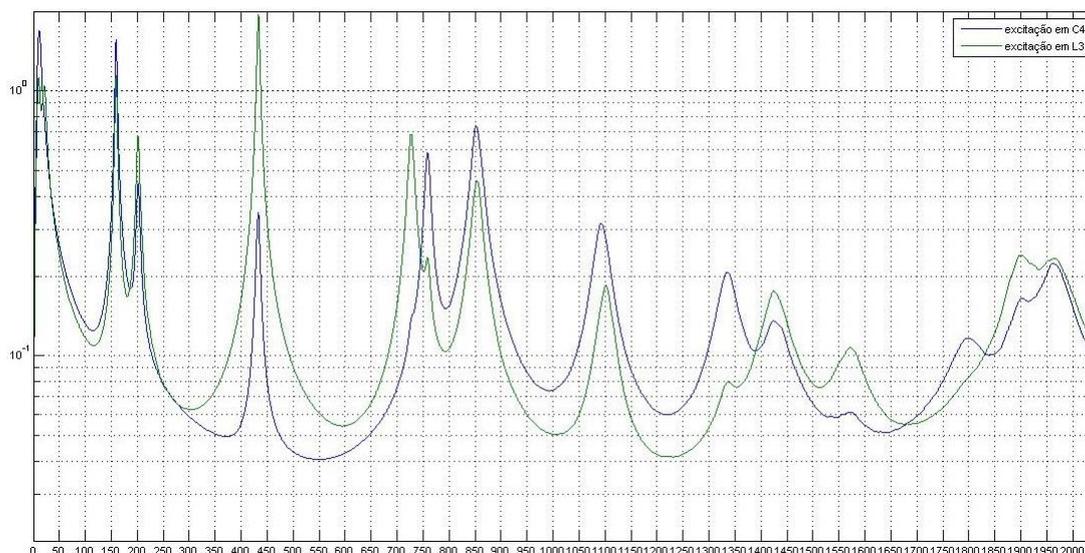


Figura 3.3. Média espacial da velocidade RMS sobre o painel 10mm de espessura em função da frequência.

Tabela 3.2. Comparação entre os resultados experimentais do painel de 10mm de espessura

Modo	Excitação 'C4'		Excitação 'L3'	
	Frequências Naturais Experimentais (Hz)	Fator de perda	Frequências Naturais Experimentais (Hz)	Fator de perda
1	159,3	0.0280	159,0	0,0239
2	201,7	0.0367	201,3	0,0333
3	429,6	0.0465	433,4	0,0083
4	727,8	0.0156	727,1	0,0167
5	758,7	0.0142	758,9	0,0106
6	854,2	0.0341	855,2	0,0224
7	1105,2	0.0223	1101,8	0,0228
8	1329,7	0.0231	1330,8	0,0217
9	1418,8	0.0294	1431,9	0,0367
10	1807,9	0.0334	1768,8	0,0161

Tabela 3.3. Comparação entre os resultados experimentais e o modelo numérico do painel de 10mm

Modo	Frequências Naturais Numéricas (Hz)	Excitação 'C4'		Excitação 'L3'	
		Frequências Naturais Experimentais (Hz)	Diferença NUM vs EXP	Frequências Naturais Experimentais (Hz)	Diferença NUM vs EXP
1	160.8	159,3	-0.94%	159,0	-1.13%
2	209.0	201,7	-3.62%	201,3	-3.83%
3	438.9	429,6	-2.16%	433,4	-1.26%
4	742.7	727,8	-2.04%	727,1	-2.14%
5	765.4	758,7	-0.88%	758,9	-0.85%
6	865.8	854,2	-1.35%	855,2	-1.23%
7	1107.9	1105,2	-0.24%	1101,8	-0.55%
8	1358.4	1329,7	-2.16%	1330,8	-2.07%
9	1443.0	1418,8	-1.71%	1431,9	-0.78%
10	1818.5	1807,9	-0.59%	1768,8	-2.81%

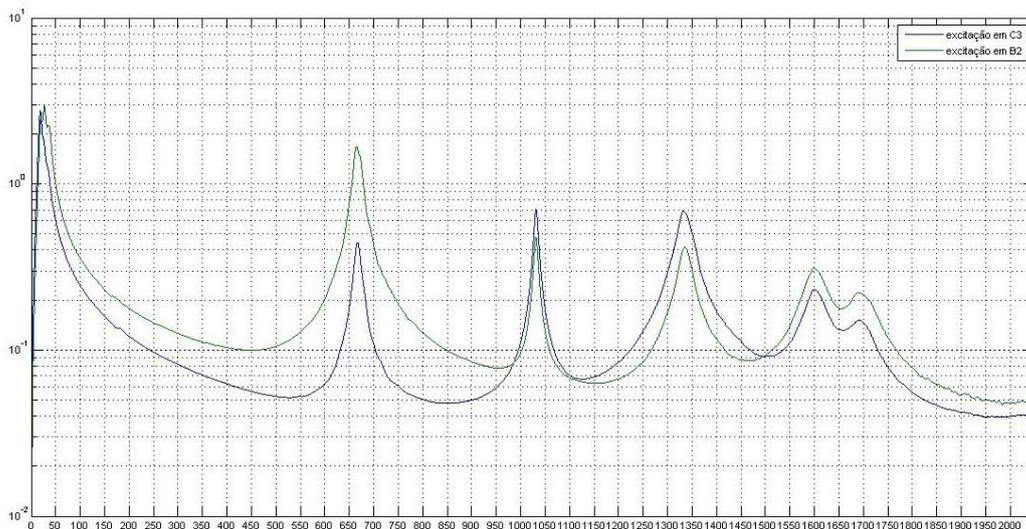


Figura 3.4. Média espacial da velocidade RMS sobre o painel 15mm de espessura em função da frequência.

Tabela 3.4. Comparação entre os resultados experimentais do painel de 15 mm de espessura

Modo	Excitação 'C3'		Excitação 'B2'	
	Frequências Naturais Experimentais (Hz)	Fator de Perda	Frequências Naturais Experimentais (Hz)	Fator de Perda
1	667.3	0.0228	665.1	0.0239
2	1031.6	0.0073	1030.9	0.0091
3	1423.5	0.0472	1326.1	0.0348
4	1596.3	0.0273	1634.6	0.018
5	1693.8	0.0105	1718.6	0.0294

Tabela 3.5. Comparação entre os resultados experimentais e o modelo numérico do painel de 15 mm de espessura

Modo	Frequências Naturais Numéricas (Hz)	Excitação 'C3'		Excitação 'B2'	
		Frequências Naturais Experimentais (Hz)	Diferença NUM vs EXP	Frequências Naturais Experimentais (Hz)	Diferença NUM vs EXP
1	665,19	667.3	0,31%	665.1	-0,01%
2	995,03	1031.6	3,54%	1030.9	3,48%
3	1305,7	1423.5	8,27%	1326.1	1,54%
4	1559	1596.3	2,33%	1634.6	4,62%
5	1667,6	1693.8	1,55%	1718.6	2,97%

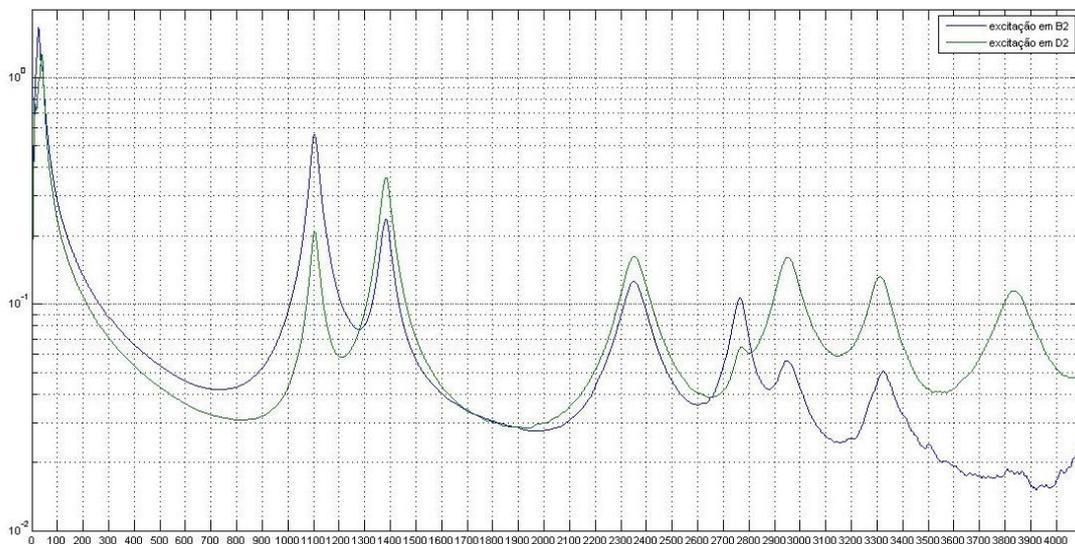


Figura 3.5 Média espacial da velocidade RMS sobre o painel 30 mm de espessura em função da frequência.

Tabela 3.6. Comparação entre os resultados experimentais do painel de 30 mm de espessura

Modo	Excitação 'B2'		Excitação 'D2'	
	Frequências Naturais Experimentais (Hz)	Fator de Perda	Frequências Naturais Experimentais (Hz)	Fator de Perda
1	1104,6	0,0269	1105,6	0,0272
2	1385,3	0,0295	1367,7	0,0336
3	2355,1	0,0164	2360,5	0,0344
4	2760,2	0,0354	2777,3	0,0156
5	2962,0	0,0088	2955,6	0,0143
6	3347,3	0,0256	3309,7	0,0233
7	3793,4	0,2572	-	-
8	-	-	3892,1	0,0305

Tabela 3.7. Comparação entre os resultados experimentais e o modelo numérico do painel de 30 mm de espessura

Modo	Frequências Naturais Numéricas (Hz)	Excitação 'B2'		Excitação 'D2'	
		Frequências Naturais Experimentais (Hz)	Diferença NUM vs EXP	Frequências Naturais Experimentais (Hz)	Diferença NUM vs EXP
1	1138,1	1104,6	-3,03%	1105,6	-2,94%
2	1395,8	1385,3	-0,76%	1367,7	-2,05%
3	2364,8	2355,1	-0,41%	2360,5	-0,20%
4	2830,1	2760,2	-2,53%	2777,3	-1,90%
5	2913,0	2962,0	1,65%	2955,6	1,44%
6	3283,7	3347,3	1,90%	3309,7	0,79%
7	3720,9	3793,4	1,91%	-	-
8	3863,1	-	-	3892,1	0,75%

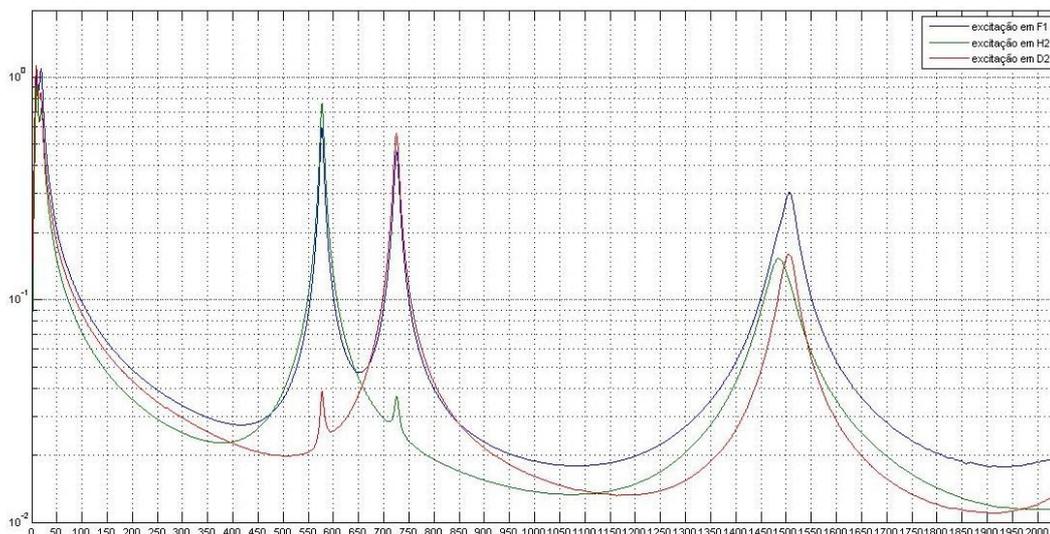


Figura 3.6 Média espacial da velocidade RMS sobre o painel 39,5mm de espessura em função da frequência.

Tabela 3.8. Comparação entre os resultados experimentais do painel de 39,5mm

Modo	Excitação 'F1'		Excitação 'H2'		Excitação 'D2'	
	Frequências Naturais Experimentais (Hz)	Fator de Perda	Frequências Naturais Experimentais (Hz)	Fator de Perda	Frequências Naturais Experimentais (Hz)	Fator de Perda
1	577.12	0.0131	576.8	0.719	576.9	0.0144
2	725.93	0.0268	726.1	0.0135	724.8	0.0146
3	1486.7	0.004	1477.7	0.0849	1471.4	0.0364
4	1515.1	0.0165	1506.5	0.0031	1503.4	0.0099

Tabela 3.9. Comparação entre os resultados experimentais e o modelo numérico do painel de 39,5mm

Modo	Frequências Naturais Numéricas (Hz)	Excitação 'F1'		Excitação 'H2'		Excitação 'D2'	
		Frequências Naturais Experimentais (Hz)	Diferença NUM vs EXP	Frequências Naturais Experimentais (Hz)	Diferença NUM vs EXP	Frequências Naturais Experimentais (Hz)	Diferença NUM vs EXP
1	582,5	577.12	-0,94%	576.8	-0,99%	576.9	-0,97%
2	707,42	725.93	2,54%	726.1	2,57%	724.8	2,4%
3	1398,3	1486.7	6,20%	1477.7	5,37%	1471.4	4,97%
4	1447,9	1515.1	4,05%	1506.5	3,89%	1503.4	3,69%

A Figura 3.7 mostram as formas de deflexão operacionais do painel de 10mm nas primeiras quatro frequências naturais 159.4154 Hz, 201.8754 Hz, 433.4961Hz e 727,9206 Hz. Estas frequências estão dentro de uma banda de baixa densidade modal, tal que os modos individuais ainda podem ser distinguidos, portanto os modos ressonantes dominam a vibração do painel. Deste modo, as formas de deflexão operacionais se assemelham muito ao modo de vibração relacionado à frequência natural mais próxima. Estes modos estão em acordo com os obtidos pelo modelo FE, como pode ser visto na Fig. 3.8.

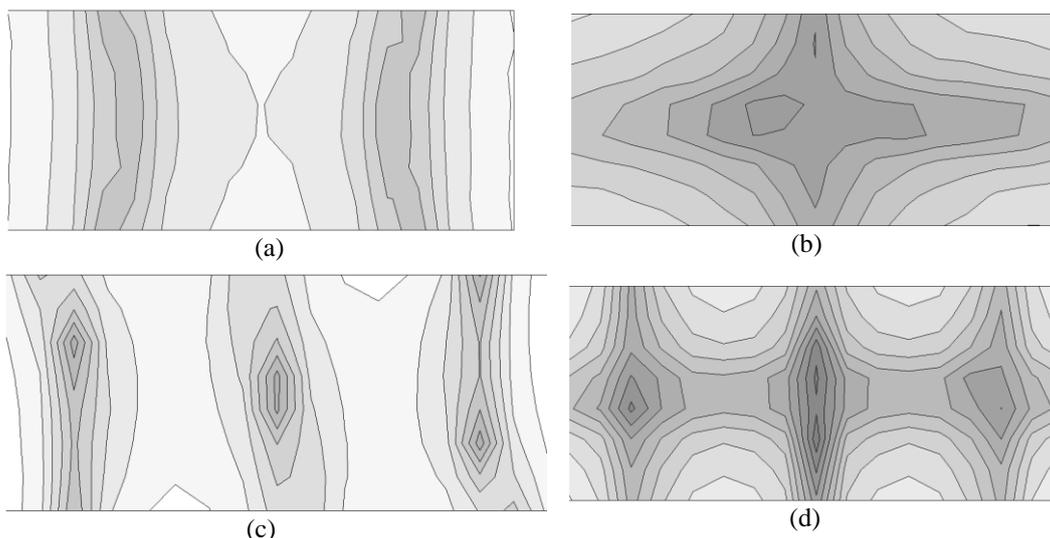


Figura 3.7. Formas de deflexão operacional obtidos experimentalmente em (a) 159.4 Hz (b) 201.9 Hz (c) 433.5Hz (d) 727,9 Hz para painel de 10mm

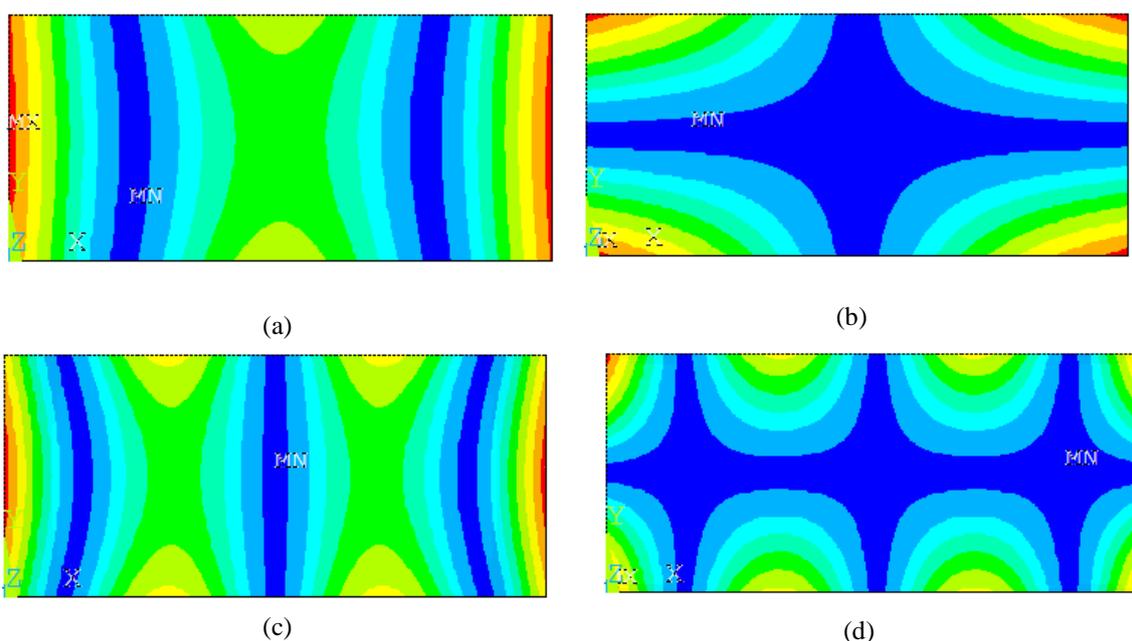


Figura 3.8 Formas modais (a) 158.6 Hz (b) 204.7 Hz (c) 433.05Hz (d) 730.3 Hz do painel de 10mm obtidos no modelo de Elementos Finitos.

3.2. Modelagem de seção do painel para análise por WFE

Em conformidade com as *práticas de confiabilidade preferíveis* da NASA [47], equipamentos aeroespaciais requerem um estudo vibro-acústico de componentes a excitações aleatórias na banda de 20Hz a 10kHz, pelo menos. Para isso, os parâmetros utilizados no ajuste das primeiras frequências naturais do modelo de elementos finitos foram utilizados no método WFE para uma banda maior de frequências.

Para os painéis de 10 mm de espessura, as propriedades dinâmicas do painel são mais sensíveis às propriedades dinâmicas da face que do núcleo, e um ajuste mais fino foi feito nesse caso. O melhor

resultado foi encontrado modificando-se as propriedades da face para Módulo de Young de 68 GPa, coeficiente de Poisson de 0,35. Após o ajuste, encontrou-se frequências naturais conforme Tabela 3.1:

Tabela 3.10. Comparação entre os resultados experimentais e o modelo numérico do painel de 10 mm

Modo	Frequências Naturais Numéricas (Hz)	Excitação 'C4'		Excitação 'L3'	
		Frequências Naturais Experimentais (Hz)	Diferença NUM vs EXP	Frequências Naturais Experimentais (Hz)	Diferença NUM vs EXP
1	158,56	159,3	-0,47%	159,0	-0,28%
2	204,66	201,7	1,45%	201,3	1,64%
3	433,05	429,6	0,80%	433,4	-0,08%
4	730,32	727,8	0,35%	727,1	0,44%
5	756,06	758,7	-0,35%	758,9	-0,38%
6	857,43	854,2	0,38%	855,2	0,26%
7	1094,6	1105,2	-0,97%	1101,8	-0,66%
8	1341,3	1329,7	0,86%	1330,8	0,78%
9	1426,5	1418,8	0,54%	1431,9	-0,38%
10	1795,3	1807,9	-0,70%	1768,8	1,48%

Para a utilização do WFE, foi necessária a utilização de elementos sólidos do tipo SOLID185, pois o software ANSYS realiza uma mescla de camadas quando se utiliza elementos do tipo SHELL. Vinte e seis elementos foram usados para criar a malha da seção, três para cada face e vinte para o núcleo, conforme Fig. 3.9. Apenas uma pequena fração do painel precisa ser levada em consideração, em contraste com a FEA que requer um modelo completo da geometria da placa, sendo milhões de vezes maior que este. Foi realizado um estudo de convergência preliminar e constatou-se que não há diferenças significativas entre elementos de 0,1 x 0,1 mm e 0,05 x 0,05 mm, portanto, para os estudos completos foram utilizados elementos de 0,1 x 0,1 mm. Para as frequências em análise, espera-se que a estrutura interna do core não afete os modos de onda, portanto o núcleo foi homogeneizado em um sólido ortotrópico equivalente de 94 mm de espessura. Essa hipótese pode ser verificada pelo tamanho do comprimento de onda dos modos de onda encontrados na banda de frequência.

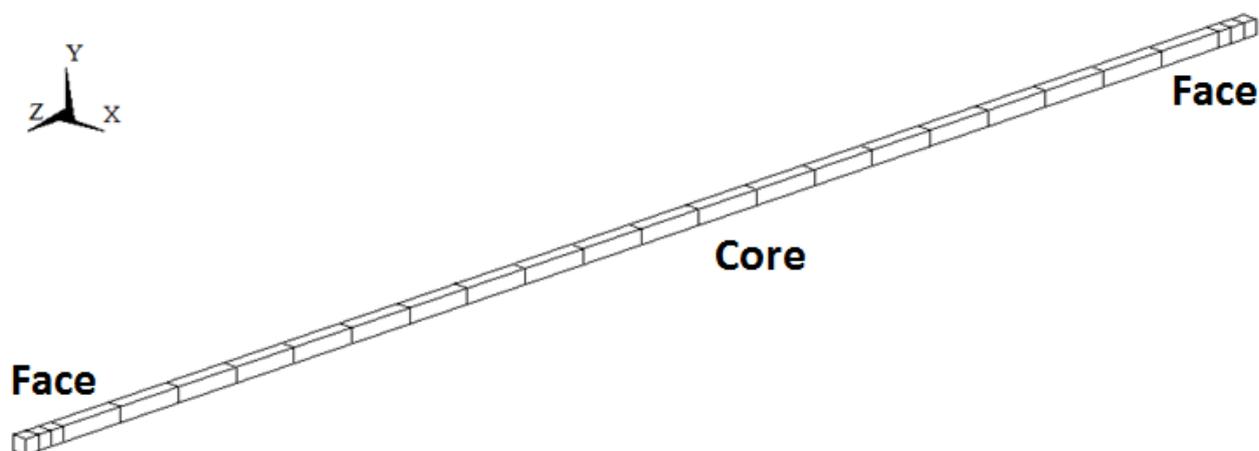


Figura 3.9 Malha da seção do painel utilizada no WFE.

3.3. Resultados e discussão

Nesta seção, os números e modos de onda são calculados usando matrizes de massa e rigidez obtidas do modelo de FE de um pequeno segmento do painel, como mostrado na seção anterior, e os resultados são obtidos de uma rotina MATLAB, Apêndice A. Figuras 3.10 e 3.11 mostram as relações de dispersão até uma frequência de 10 kHz nas direções x e y , respectivamente. Destes resultados, observa-se que para baixas frequências, até 3,5 kHz, o painel se comporta como uma placa fina ortotrópica, com modo flexural, curva dispersiva e proporcional a $\sqrt{\omega}$, e modos longitudinal e cisalhante perpendiculares entre si, curvas não dispersivas. Esses resultados estão de acordo com as formas modais obtidas na análise modal anterior.

As Figuras 3.10 e 3.11 também demonstram que os modos de propagação de ondas em ambas as direções são muito similares, o que é esperado devido à simetria do painel. Os modos longitudinal e cisalhante são influenciados primariamente pelas propriedades da face e são quase idênticas em ambos os casos. Os modos flexurais dependem primariamente das propriedades do núcleo de honeycomb, que por ser ortotrópico resulta em algumas diferenças entre as direções x e y após 1 kHz, apesar de reter formas similares.

Uma vez encontrados os números e modos de onda em uma dada frequência, é possível utilizar esta informação para se obter os números de onda em todas as direções θ nesta dada frequência, conforme Eq. (78). Verifica-se na Figura 3.12 que os números de onda para modos longitudinais e cisalhantes permanecem constantes ao longo de θ , enquanto os modos flexurais apresentam forma mais elipsoidal, com o aumento da frequência estudada.

Convencionou-se a nomenclatura para os modos de onda de acordo com a Tabela 3.11

Tabela 3.11. Nomenclatura utilizada para os modos de onda nas direções ortogonais x e y .

Direção x		Direção y	
Modo de onda	Característica	Modo de onda	Característica
Cx	Cisalhante à direção x	Cy	Cisalhante à direção y
Lx	Longitudinal na direção x	Ly	Longitudinal na direção y
Fx	Flexural	Fy	Flexural
FLx1	Complexo – Flexural/Long	FLy1	Complexo - Flexural/Long
FLx2	Complexo – Flexural/Long	FLy2	Complexo - Flexural/Long

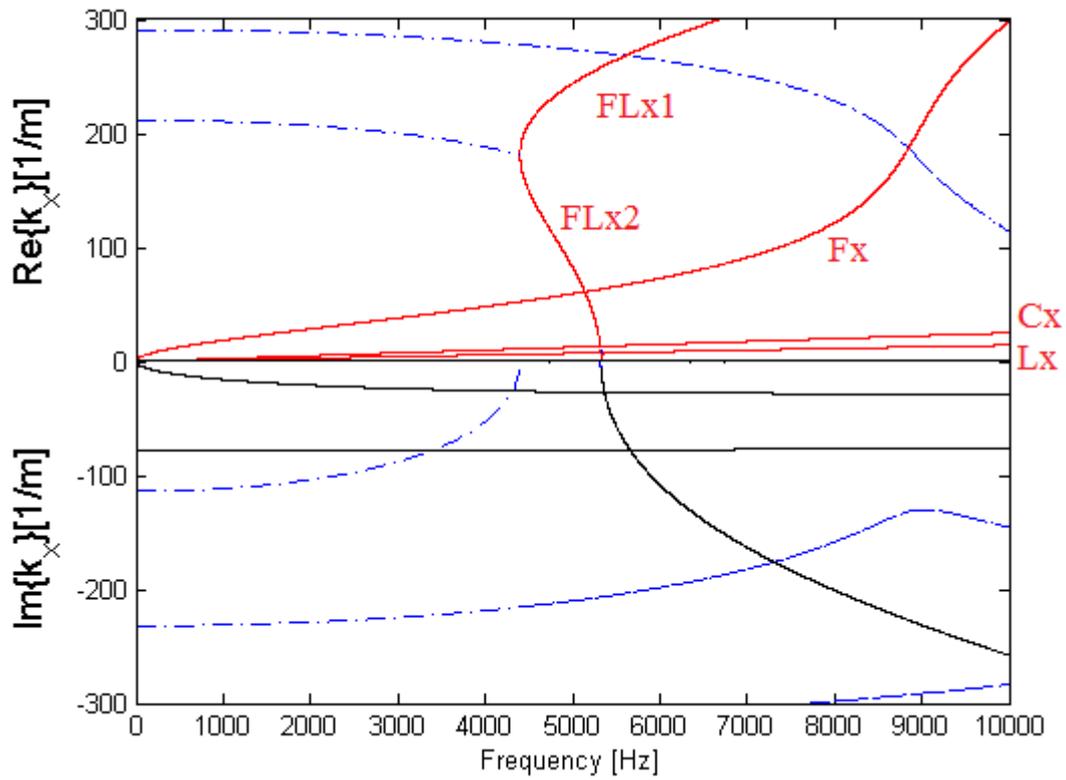


Figura 3.10. Relações de dispersão na direção x. — para modos de onda puramente reais (vermelho) ou imaginários (preto), -.- para modos de onda com partes reais e imaginárias.

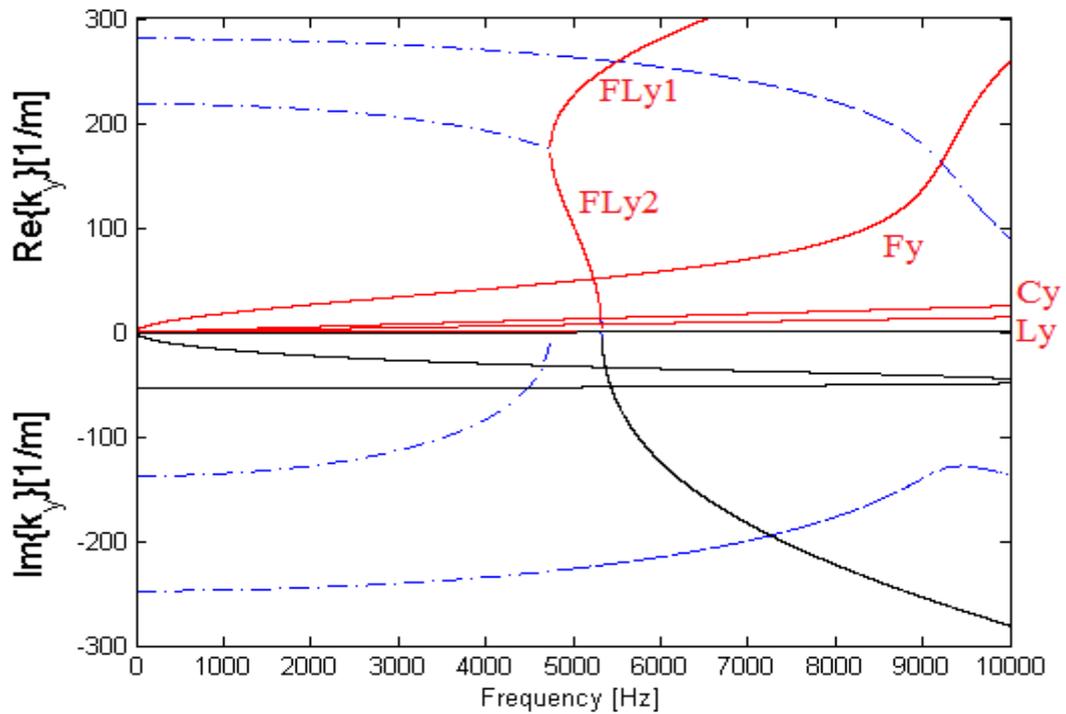


Figura 3.11. Relações de dispersão na direção y. — para modos de onda puramente reais (vermelho) ou imaginários (preto), -.- para modos de onda com partes reais e imaginárias.

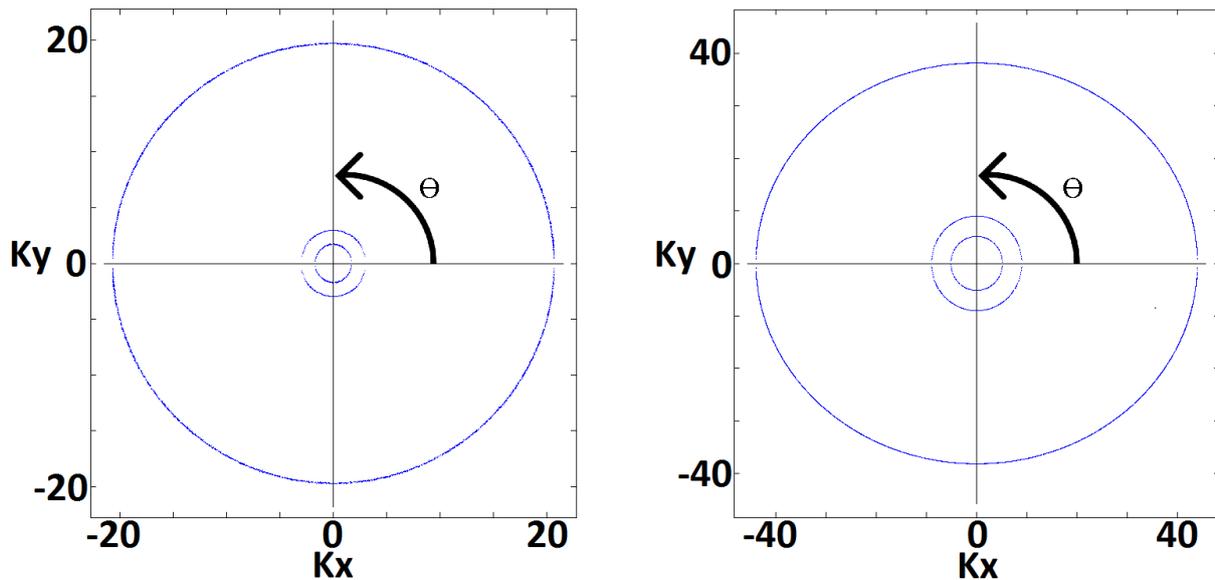


Figura 3.12. Curvas de dispersão em função da direção de propagação para 1,2kHz (esquerda) e 3,6kHz (direita).

3.3.1. Análise dos modos de onda

Esta seção discute os principais resultados dos modos propagantes na direção x , com apenas alguns comentários específicos com relação à direção y . O comportamento na direção y é análogo ao da direção x , e as maiores diferenças entre eles são a frequência em que ocorrem. As figuras da forma da placa demonstram o plano xz , com a exceção da Fig. 3.13, que está no plano xy . As figuras da forma demonstram o comportamento do painel para um comprimento de onda completo, distância onde o movimento começa a se repetir. As amplitudes das formas dos modos de onda apresentadas nesta seção são amplificadas para facilitar a análise. Alguns nós são numerados, entre eles os nós 4 e 24 são notáveis pois indicam a separação entre face e núcleo.

O modo C_x é cisalhante, com amplitude não nula somente na direção y , e apresenta apenas deslocamento, sem expansão ou contração, conforme se verifica na Fig. 3.13.

O modo L_x apresenta expansão/contração na direção z , em oposição de fase ao que ocorre em x , devido ao efeito de Poisson, como se verifica na Fig. 3.14. A amplitude de mudança de fase em z aumenta com o aumento da frequência, conforme Fig 3.15. Nota-se ainda que houve uma inversão de fase, provavelmente devido a interação com o modo FL_x1 .

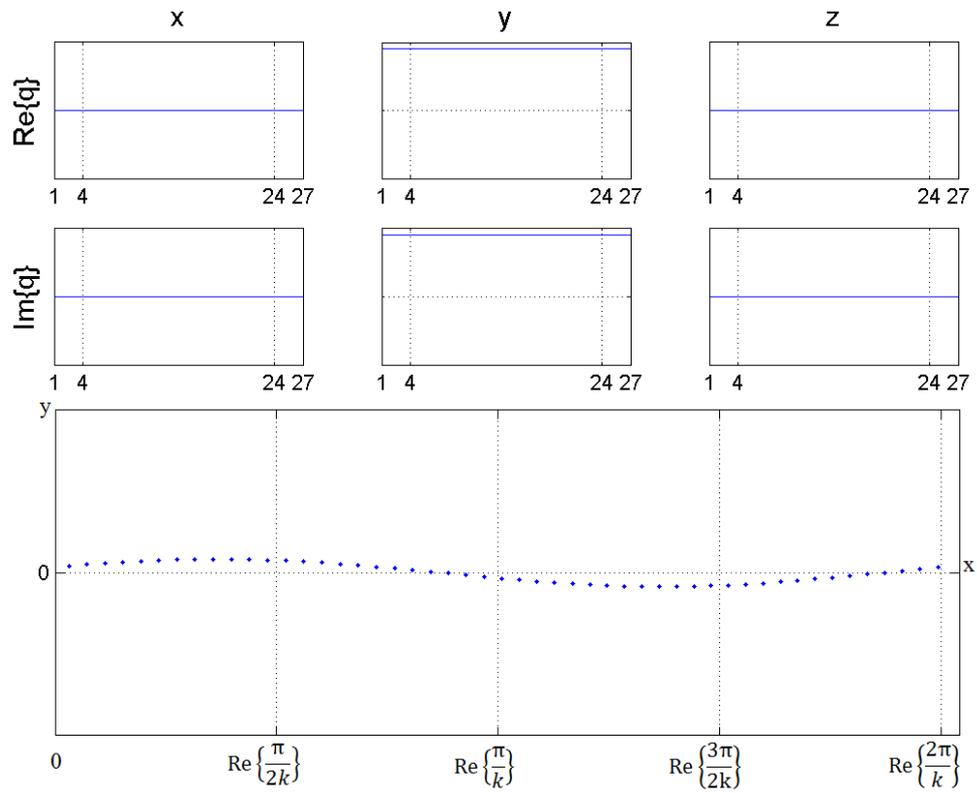


Figura 3.13. Modo de propagação C_x em 160Hz.

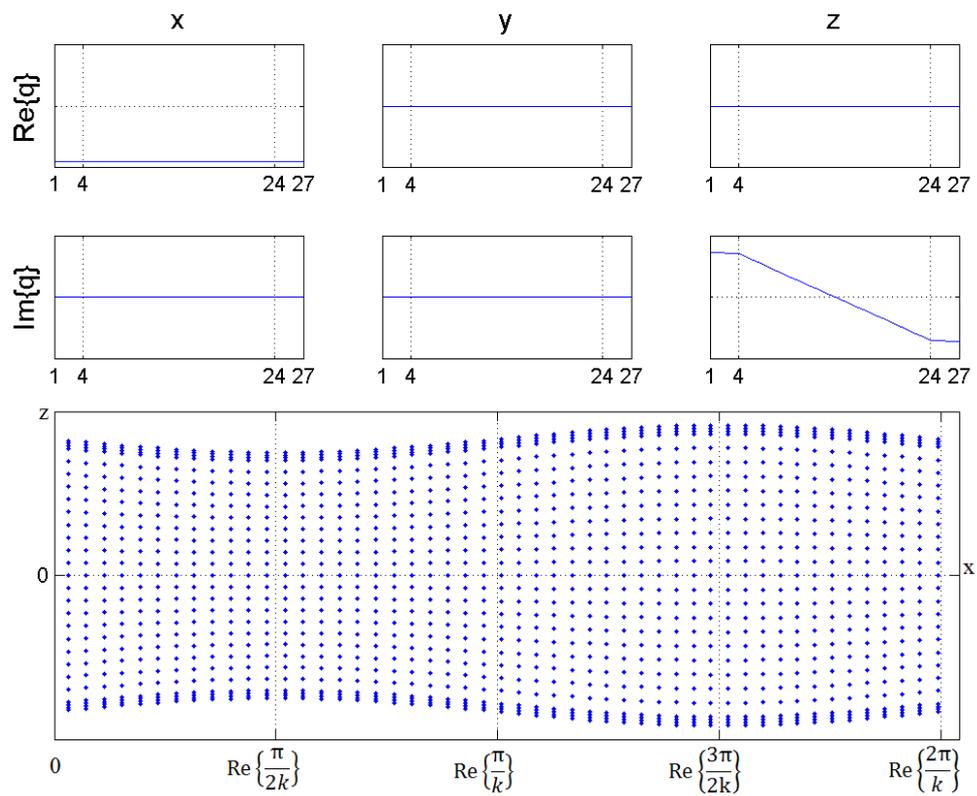


Figura 3.14. Modo de propagação L_x em 160Hz.

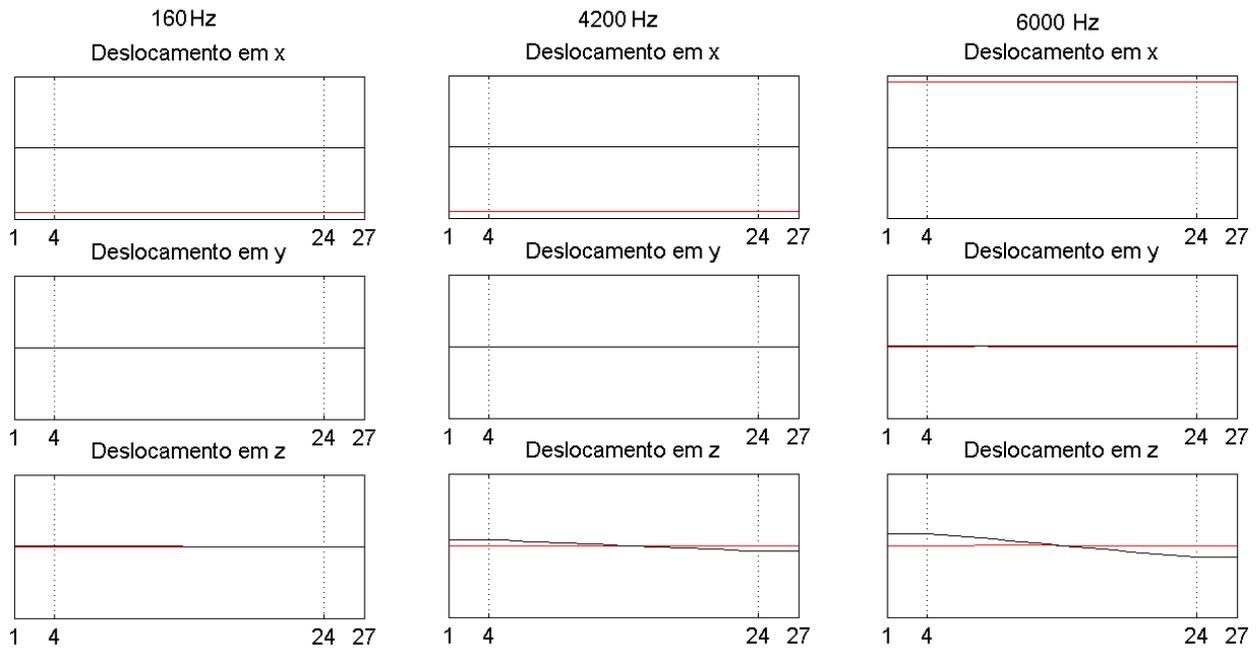


Figura 3.15. Deslocamentos não normalizados de Lx.

O modo Fx é do tipo flexural em baixas frequências, conforme Fig. 3.16. Verifica-se que com o aumento da frequência, o modo aumenta sua ordem e o núcleo começa a se comportar de maneira mais complexa e independente das faces. Os resultados mostrados nas Figuras 3.19 e 3.20, no entanto, devem ser analisadas com cuidado, pois as deformações na frequência de 9,04 kHz podem ser grandes o suficiente para influenciar na camada adesiva que une faces e núcleo. Esse resultado indica que nessa banda de frequência talvez seja necessário incluir o modelo da camada adesiva na análise.

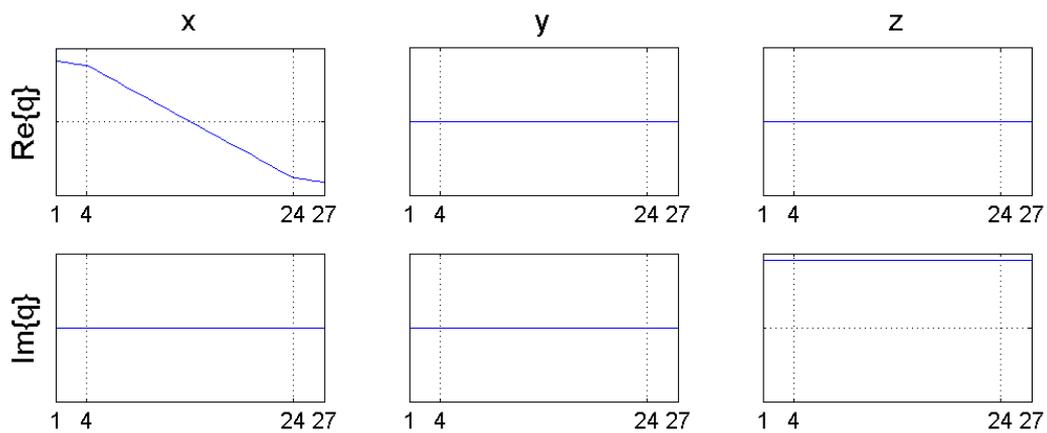


Figura 3.16. Modo de propagação Fx em 160Hz.

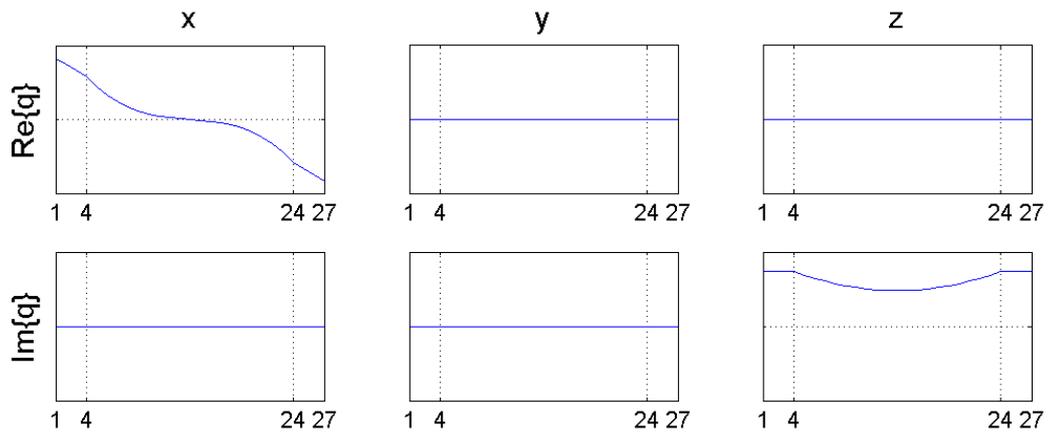


Figura 3.17. Modo de propagação Fx em 4800Hz.

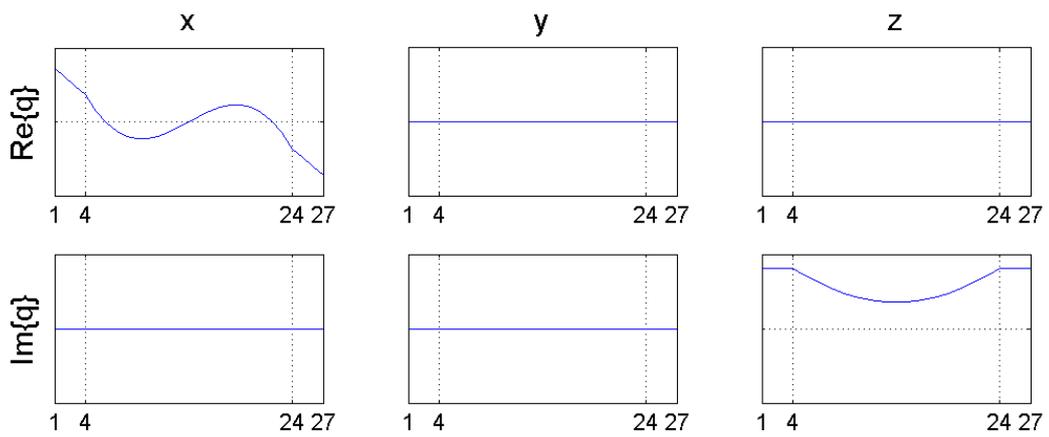


Figura 3.18. Modo de propagação Fx em 6000Hz.

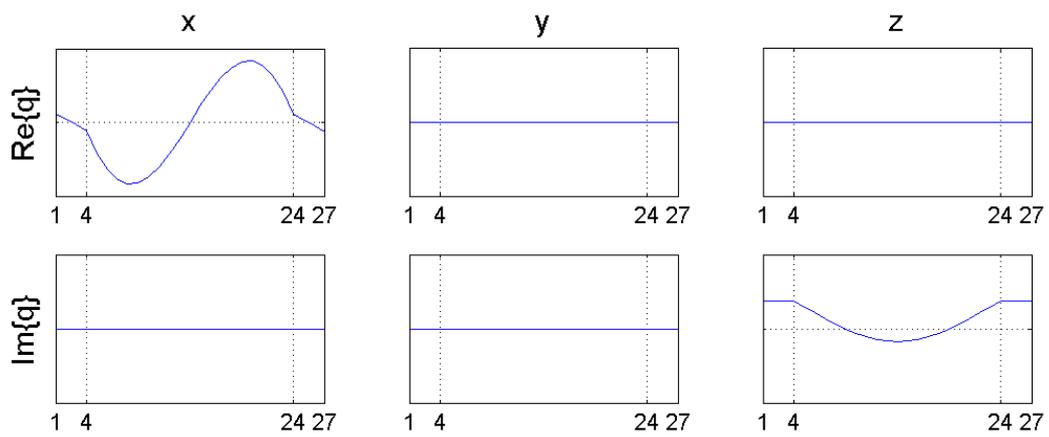


Figura 3.19. Modo de propagação Fx em 9040Hz.

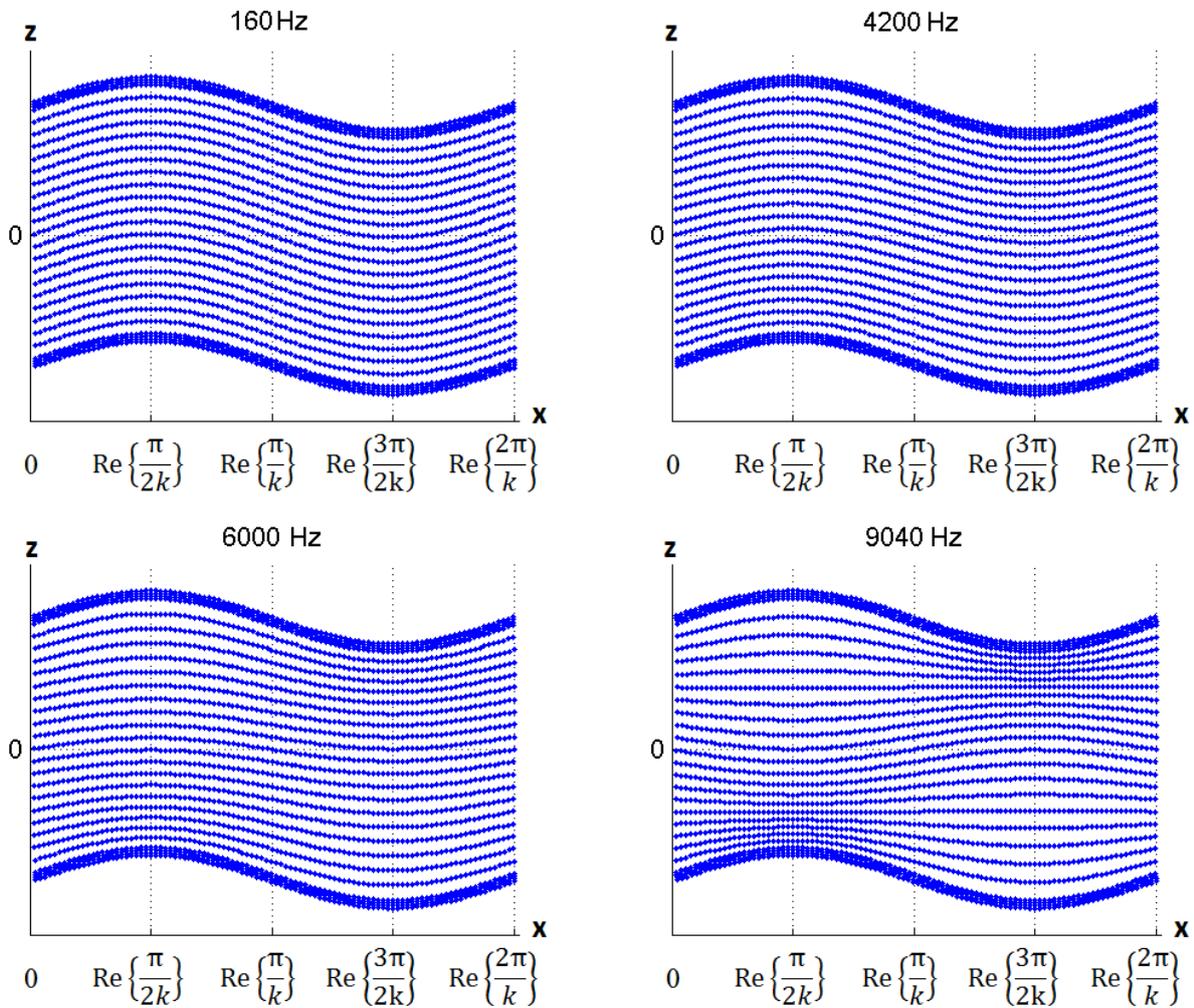


Figura 3.20 Evolução do modo de onda para o modo Fx.

Em baixas frequências, os modos FLx1 e FLx2 são atenuantes e, portanto, não propagam energia de modo significativo, somente com efeitos locais. Adicionalmente, estes modos possuem mesma forma e valores absolutos de amplitude, porém, fases opostas, de modo que nas baixas frequências estes modos causam deslocamentos e forçamentos opostos, conforme Figs. 3.20 e 3.21 .

Entretanto, pode-se notar que na frequência de 4,4 kHz os modos FLx1 e FLx2 se tornam completamente reais. Esta é a chamada frequência de *cut on* e significa que um modo que era não-propagante começa a propagar, i. e. transportar energia. Neste ponto, verifica-se que eles divergem, inclusive na forma modal. Surpreendentemente, a inclinação do modo FLx2 é negativa, e, portanto, transporta energia na direção oposta à velocidade de fase. Este fenômeno ocorre até a frequência de *cut off* em 5.317 Hz, quando torna-se atenuante novamente e para de transportar energia. Em 5,33 kHz, o modo passa a ser totalmente evanescente. Para o modo FLy2, a frequência de *cut on* acontece em 4,74 kHz, enquanto a frequência de *cut off* é extremamente próxima em 5,322 kHz. O modo se torna totalmente evanescente em 5,33 kHz, exatamente como o modo FLx2.

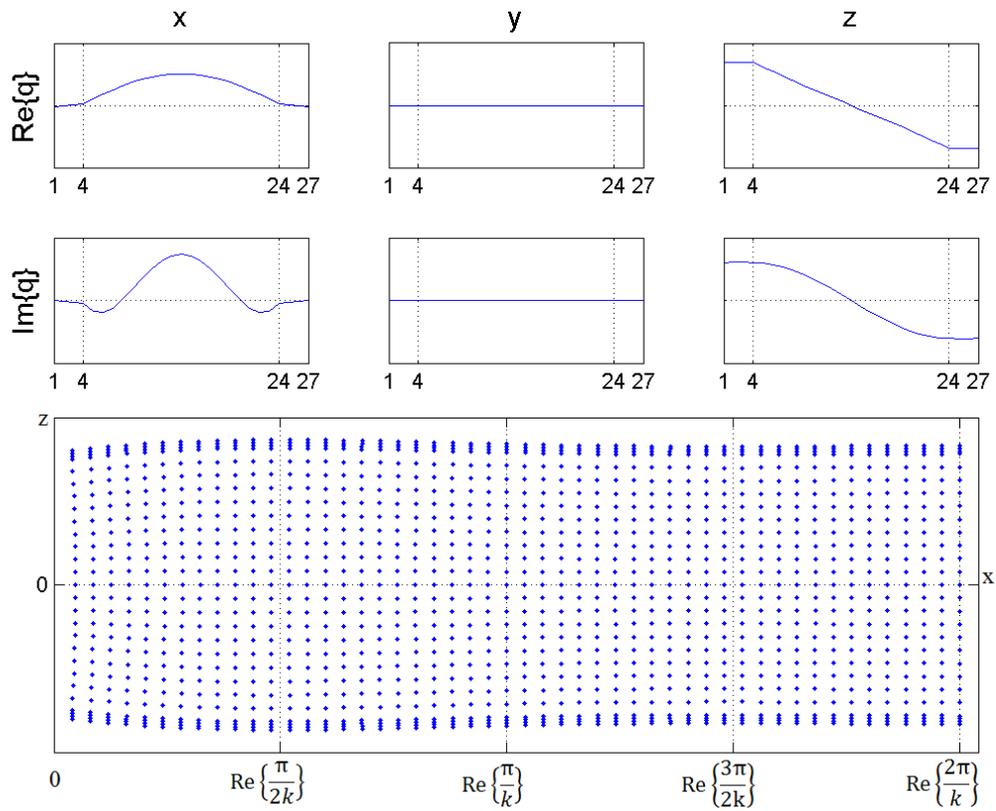


Figura 3.21. Modo de onda FLx1 em 160Hz.

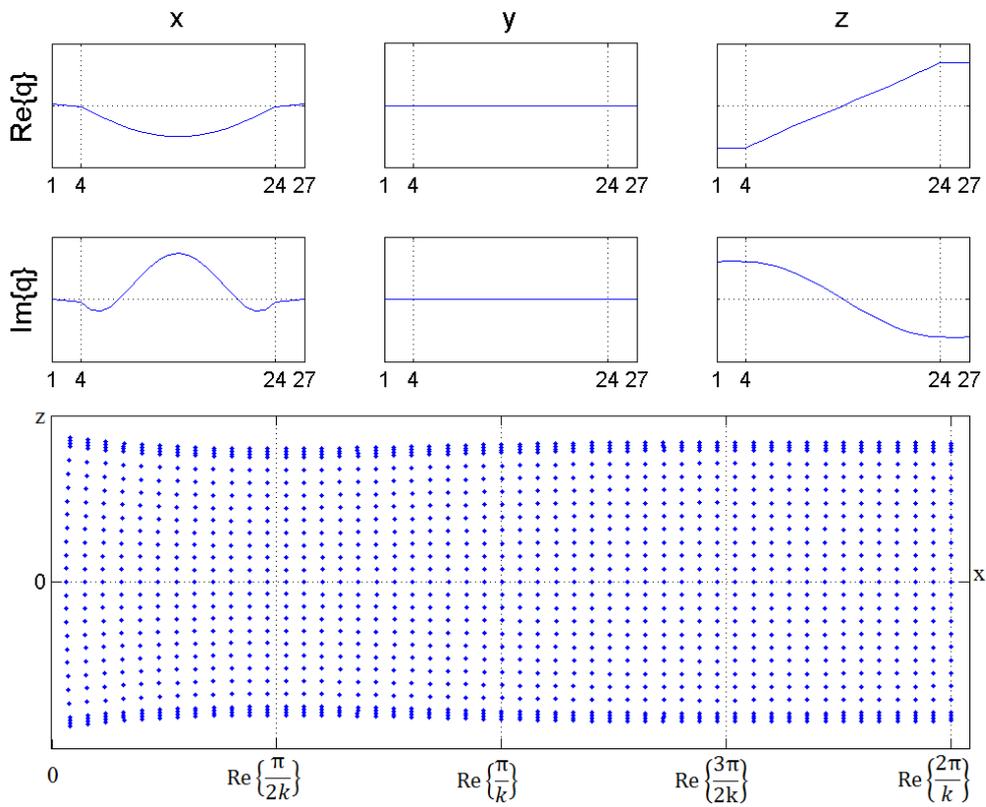


Figura 3.22. Modo de onda FLx2 em 160Hz.

Nas frequências em que há a propagação destes modos, nota-se que estes são de alta ordem e as faces se comportam de maneira distinta ao núcleo, como se demonstra nas Figs. 3.23 e 3.24, com flexão nas faces e expansão longitudinal no núcleo. Além disso, apesar de parecidas, as formas dos modos são ligeiramente diferentes, e não estão mais em oposição de fase

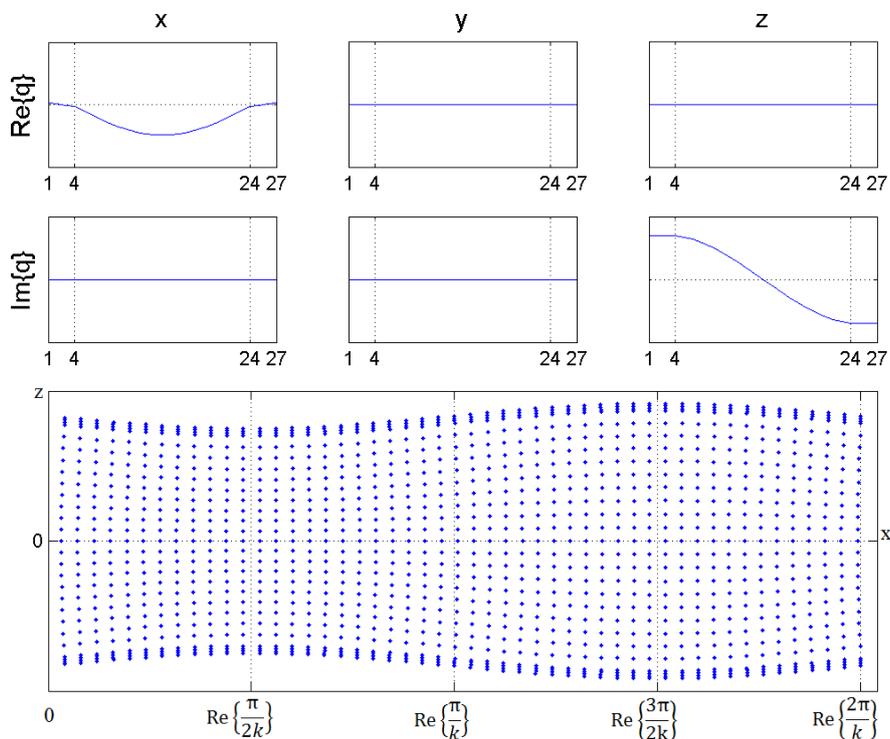


Figura 3.23. Modo de propagação FLx1 em 4.800Hz.

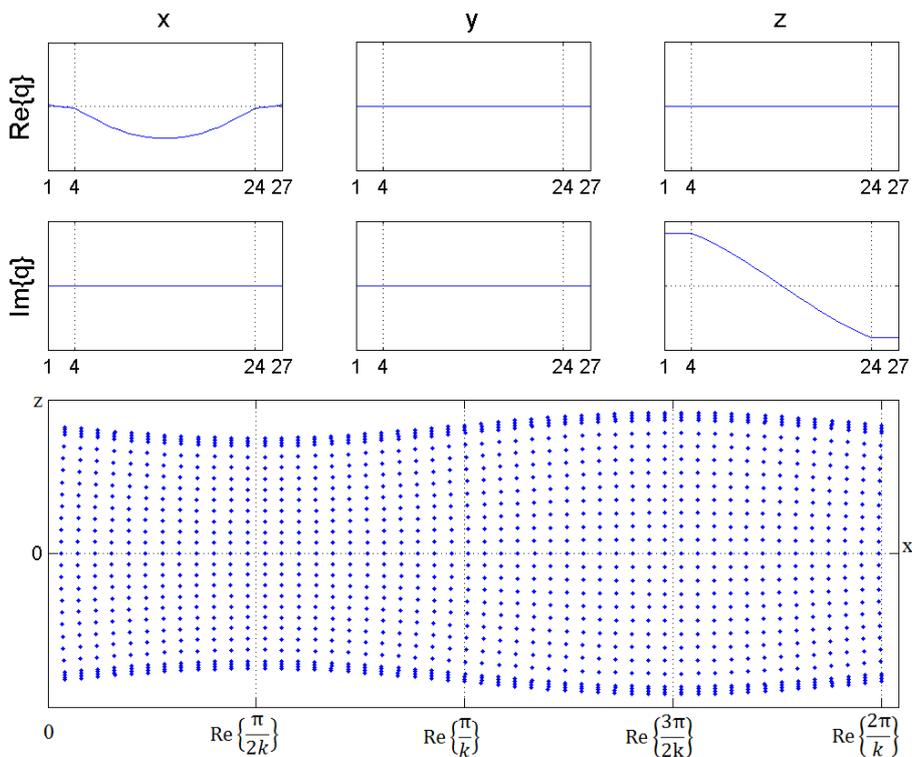


Figura 3.24. Modo de propagação FLx2 em 4.800Hz.

Verifica-se ainda que próximo à frequência de *cut off* os modos FLx2 e Lx parecem se mesclar, conforme Fig. 3.10. De fato, o modo FLx2 muda sua forma com o aumento da frequência, tornando-se cada vez mais próximo do modo longitudinal Lx, até o momento em que os modos se mesclam, conforme Fig 3.27. Com uma inspeção mais detalhada, observa-se um *band gap* onde não há propagação de nenhum dos dois modos.

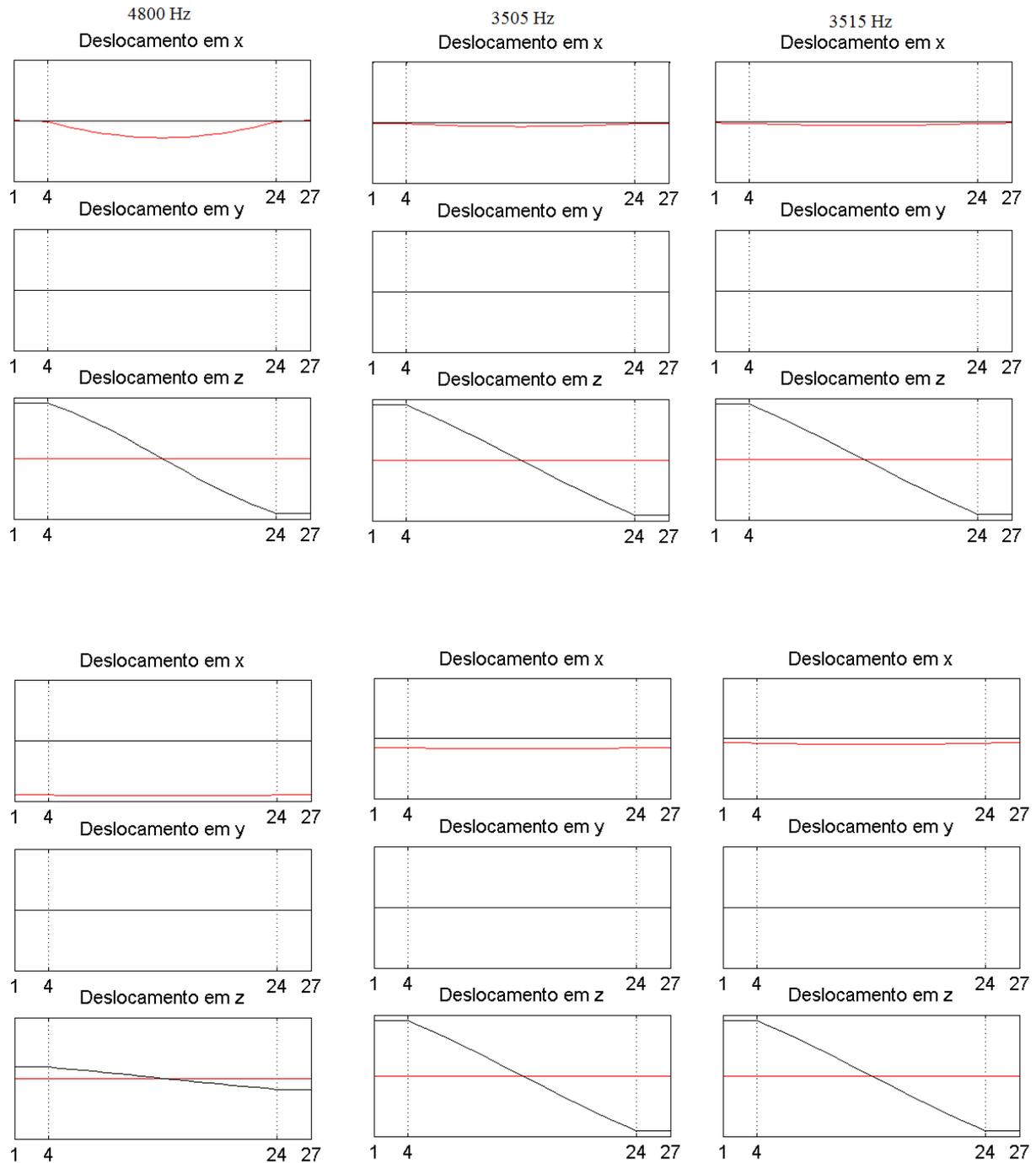


Figura 3.25. Evolução do modos FLx2, em cima, e Lx, embaixo. Parte real do deslocamento em vermelho e imaginária em preto

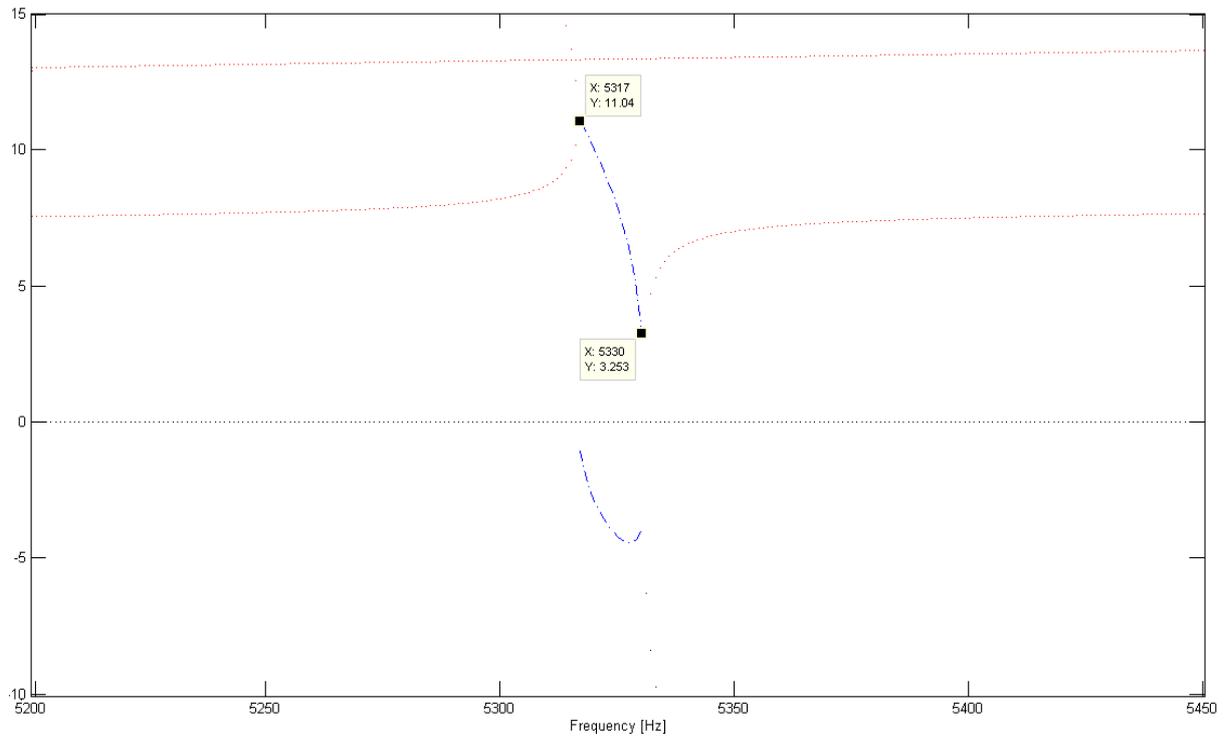


Figura 3.26. Detalhe do band gap na direção x.

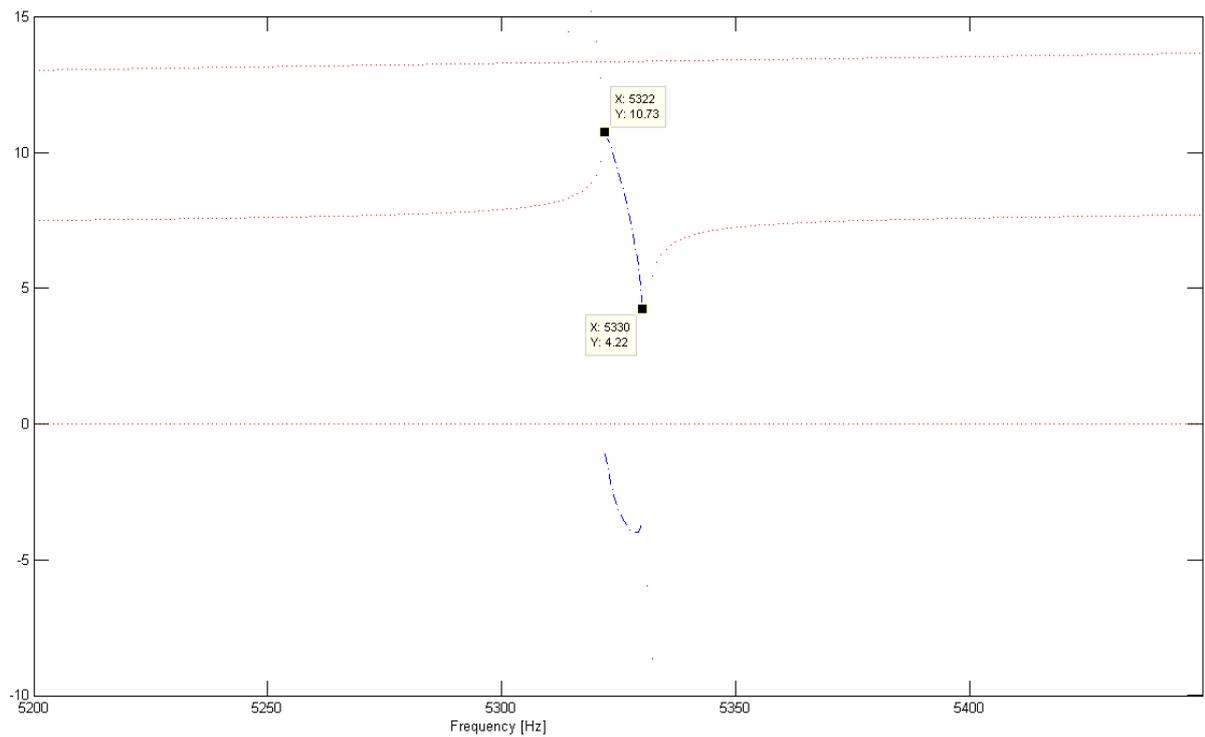


Figura 3.27. Detalhe do band gap na direção y.

3.3.2. Parâmetros de energia e densidade modal

Obtém-se os parâmetros de energia, potência e velocidade de grupo dos modos de onda propagantes a partir de suas bases de deslocamentos e bases de onda. Os valores de energia e potência

estão normalizados e, portanto, suas análises podem ser feitas apenas em relação de uns aos outros. A velocidade de grupo encontrada é a razão dos dois parâmetros e corresponde ao valor físico estimado.

O modo Cx possui parâmetros quase constantes no intervalo estudado, o esperado para modos cisalhantes, conforme Fig 3.28. A potência do modo é alta, relativamente aos outros modos, porém, terá pouca influência na transmissão acústica do painel, tendo maior importância na transmissão de energia entre componentes da estrutura. Nota-se uma leve diferenciação após cerca de 6,5 kHz, indicativo de que em frequências mais altas o modo talvez sofra mudanças e se torne dispersivo. No entanto, isto não pode ser confirmado sem uma análise mais detalhada de frequências além do escopo deste trabalho.

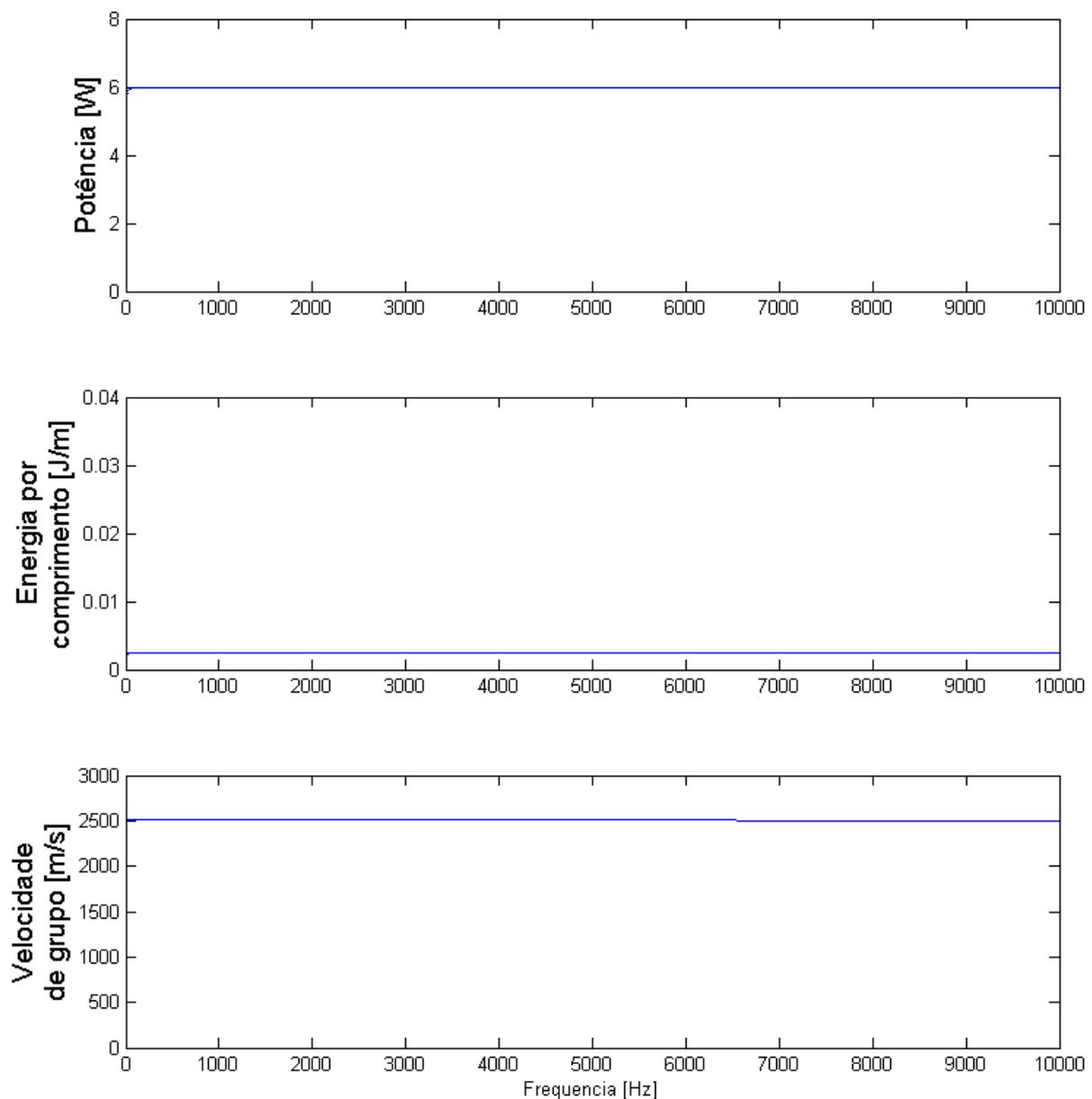


Figura 3.28. Potência, energia por comprimento e velocidade de grupo do modo Cx.

O modo Lx também possui valores quase constantes, porém, nota-se uma grande descontinuidade no intervalo de frequências onde este interage com o modo FLx1. Durante o *band gap*, a potência e a

velocidade de grupo vão a zero, demonstrando novamente que a propagação cessa no intervalo onde o *gap* ocorre. Este modo tem alguma influência na transmissão acústica, uma vez que o efeito de Poisson faz com que haja deslocamento na direção z , porém, espera-se que seja relativamente pequena em comparação com o modo flexural.

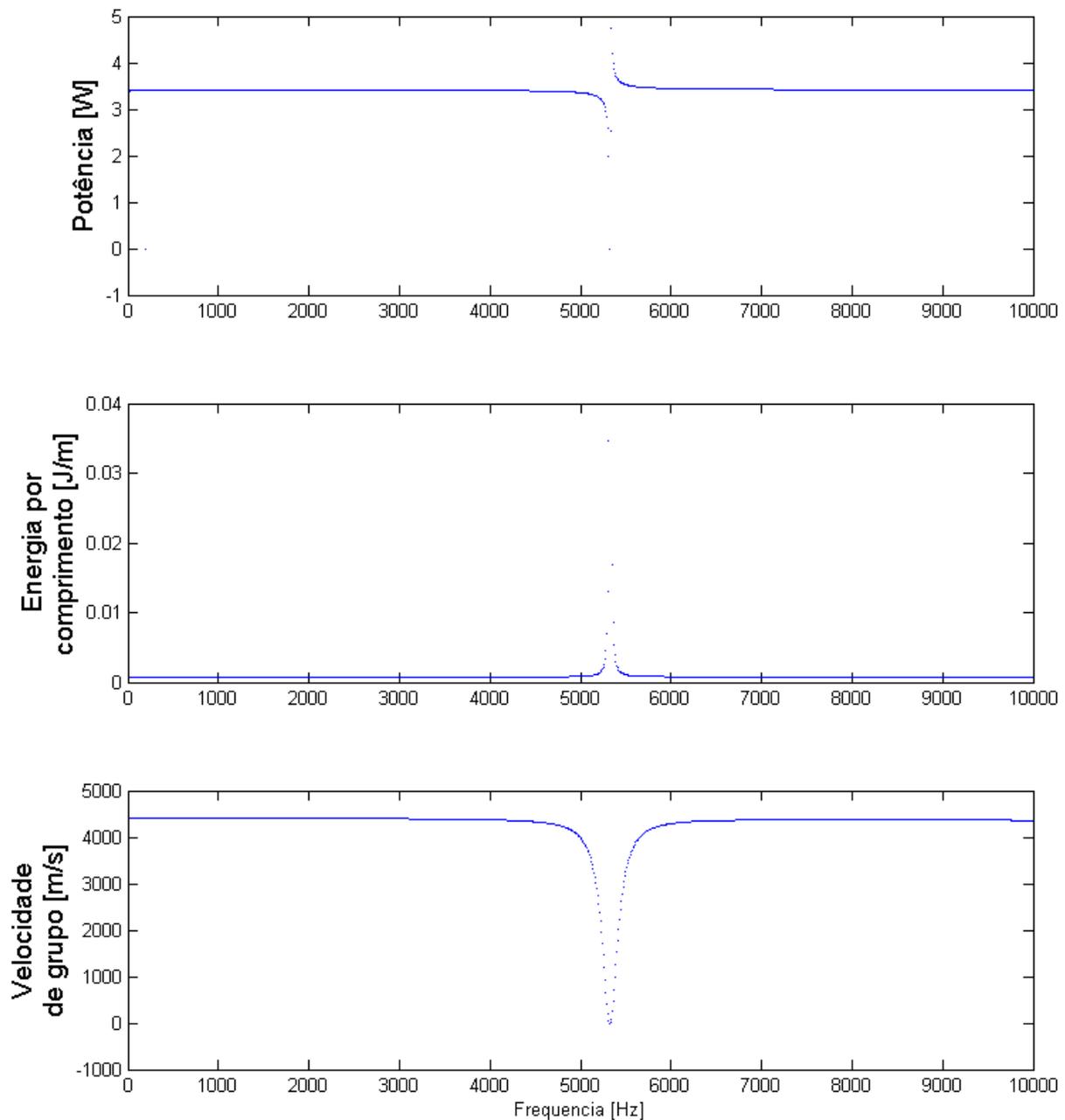


Figura 3.29. Potência, energia por comprimento e velocidade de grupo do modo Lx.

A potência do modo Fx cresce com a frequência até próximo da frequência de 8 kHz, onde se observa uma queda brusca. Nesta vizinhança observa-se também um pico na energia por comprimento do modo. Observando-se a Figura 3.10, nota-se a possibilidade de que isto ocorra devido à interação deste modo com um modo atenuante, porém, conclusões não são tomadas até um estudo mais compreensivo. O modo Fx é dispersivo e portanto sua velocidade de grupo varia substancialmente no

intervalo estudado, verificando-se ainda que na vizinhança de 9 kHz a velocidade de grupo aproxima-se de zero, antes de voltar a crescer.

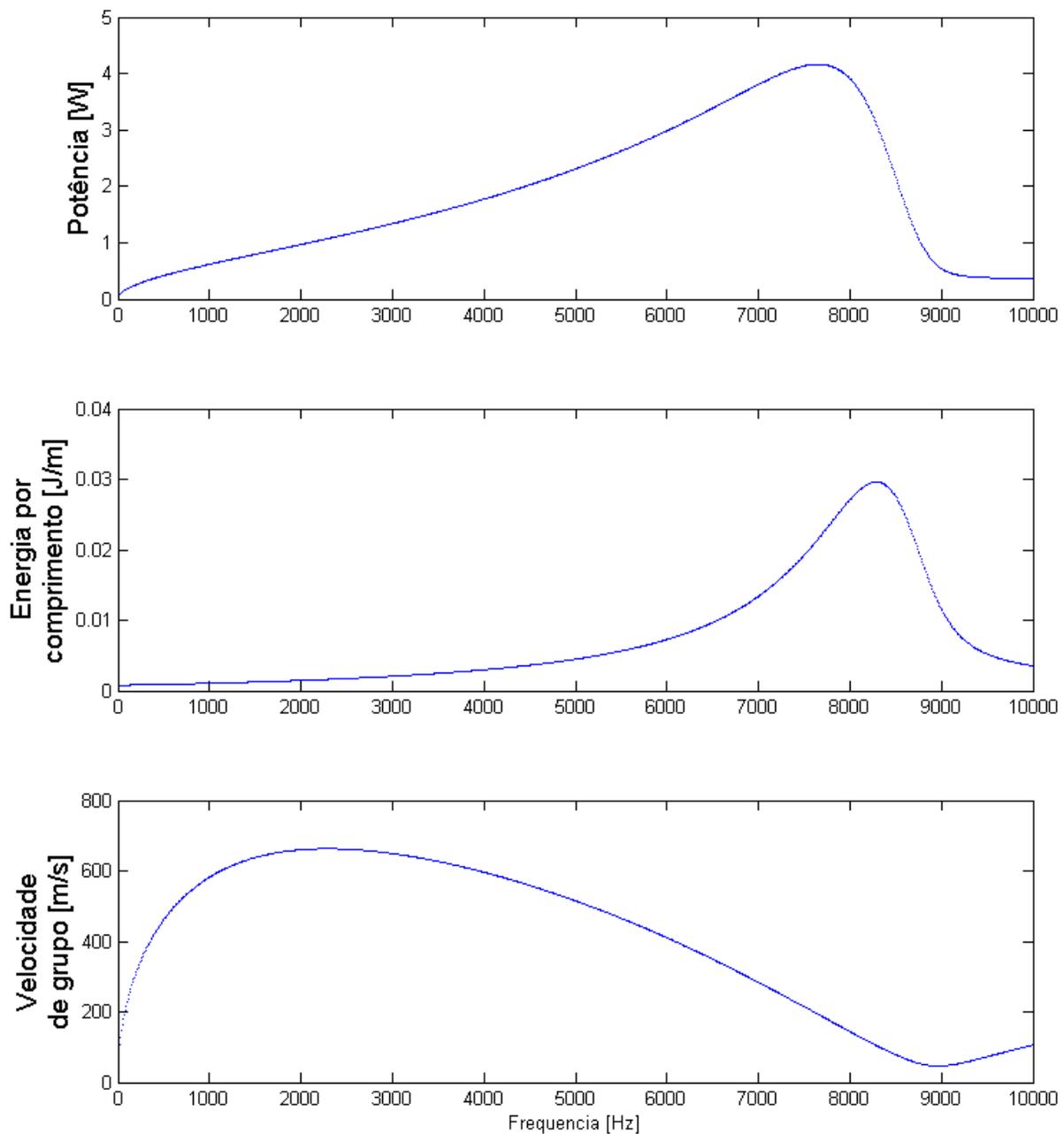


Figura 3.30. Potência, energia por comprimento e velocidade de grupo do modo Fx.

O modo FLx1 propaga apenas por um breve intervalo de frequência, porém, aqui pode-se verificar diretamente que a velocidade de grupo é negativa em relação à direção de propagação. O modo possui valores absolutos de potência e energia mais altos que os outros modos, no entanto, a velocidade de grupo do modo é baixa em relação aos outros modos, mesmo no seu pico.

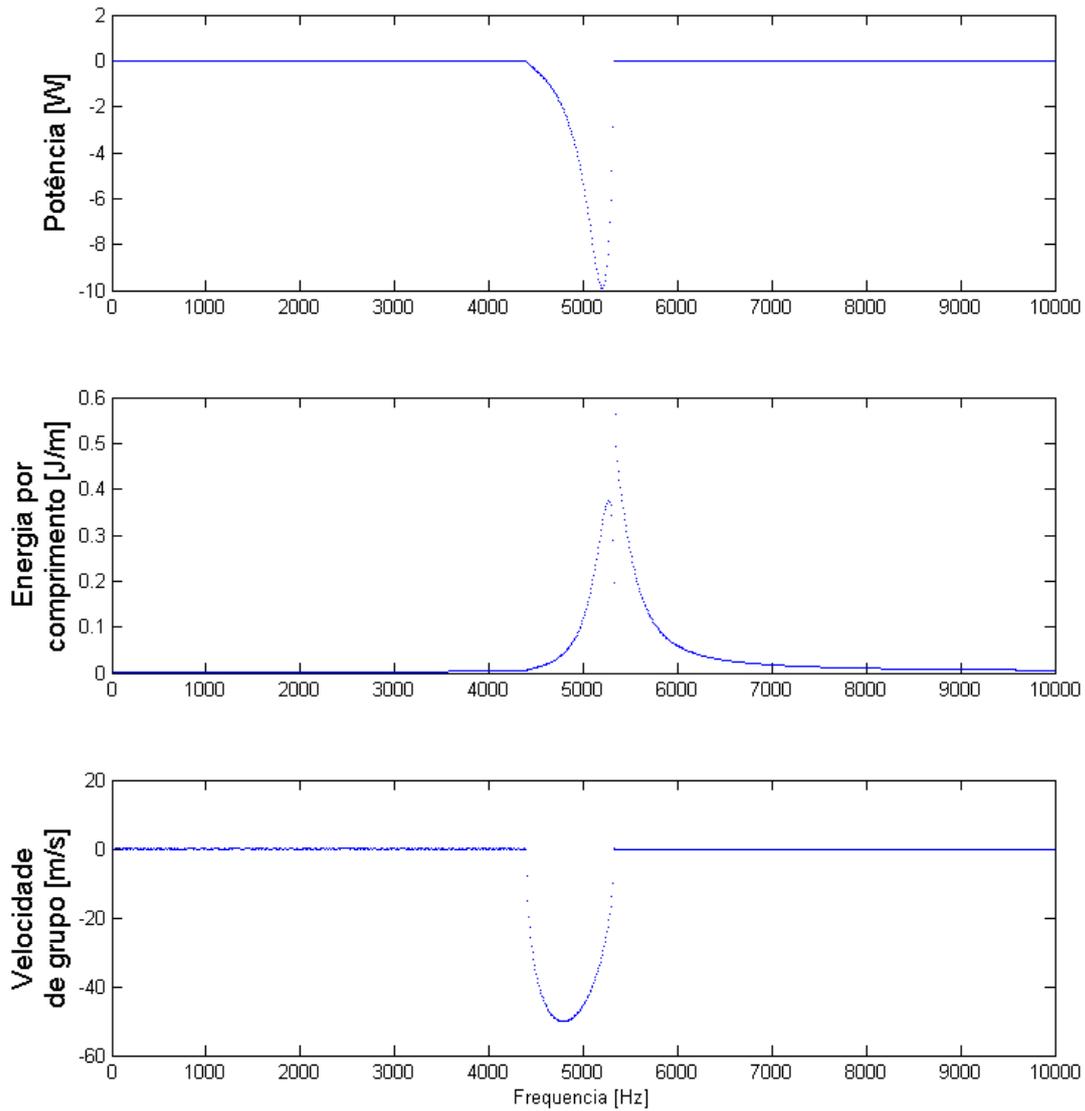


Figura 3.31. Potência, energia por comprimento e velocidade de grupo do modo FLx1.

Ao contrário do modo anterior, o modo FLx2 propaga para todas as frequências após o *cut-on*. A potência do modo é relativamente baixa em relação aos outros modos, porém, é crescente ao longo de todo o intervalo estudado. A energia por comprimento do modo é quase constante no intervalo, exceto próximo à frequência de *cut-on*, e por isso a velocidade de grupo cresce de forma proporcional à potência.

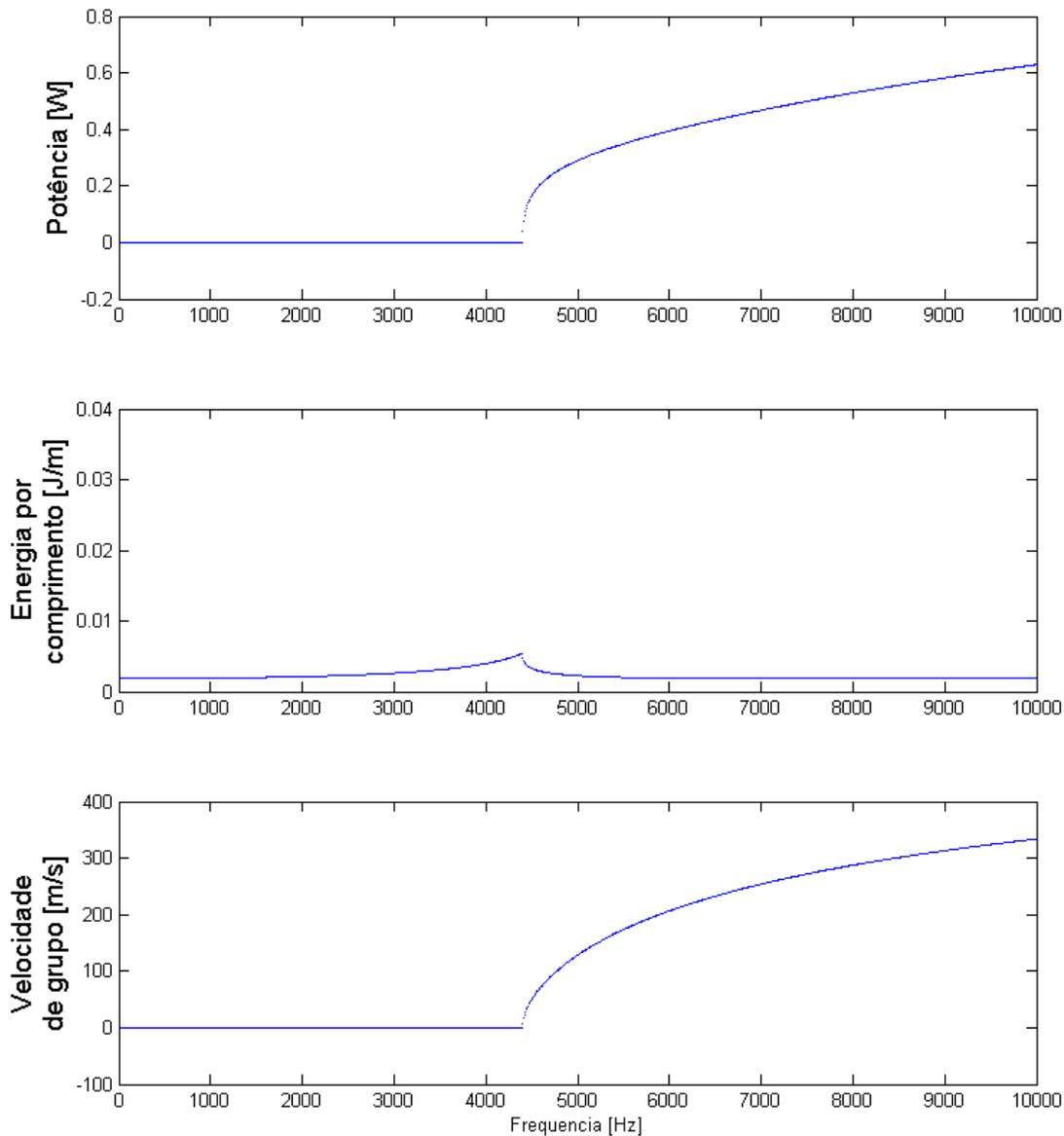


Figura 3.32. Potência, energia por comprimento e velocidade de grupo do modo FLx2.

Com a obtenção das velocidades de grupo direcionais, utiliza-se as definições encontradas na seção 2.6.3 para se encontrar os valores aproximados de densidade modal. Utiliza-se gráficos com escala log-log para facilitar a visualização. Nota-se que até a frequência de *cut-on* dos modos FLx1 e FLx2 a densidade modal é relativamente baixa e neste intervalo análises por elementos finitos ainda têm custo computacional aceitável. Após a frequência de *cut-on*, a densidade modal tem valores consistentemente acima de 0,1, ou seja, espera-se ao menos um modo natural a cada 10 Hz, o que inviabiliza a utilização de FEA.

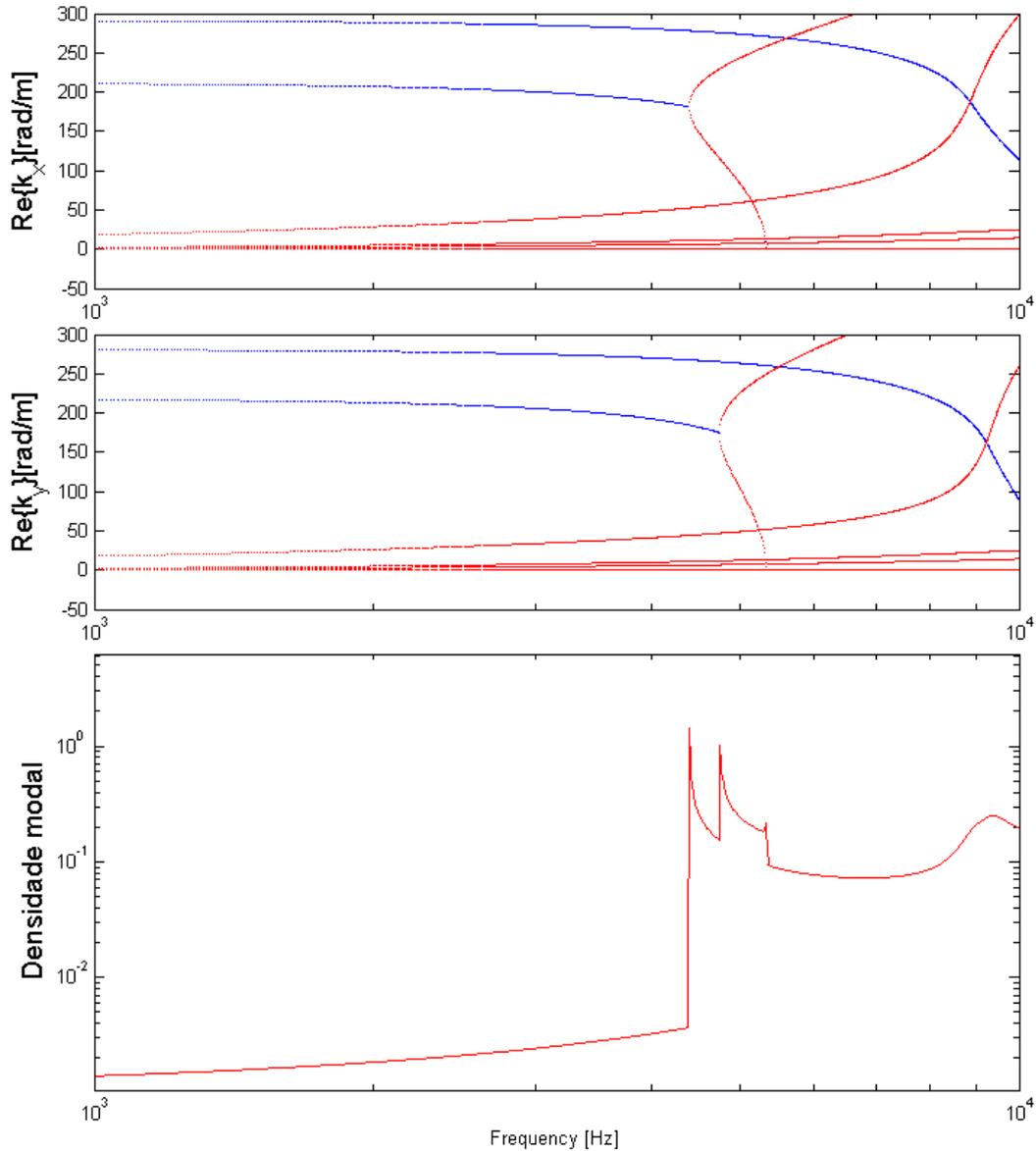


Figura 3.33. Densidade modal assintótica do painel.

3.3.3. Análise experimental das frequências espaciais

No processo de estimação das FRF, temos as amplitudes de vibração ao longo do painel, $u(x, y, t)$ transformadas em $U(x, y, \omega)$, ou seja, as ODS. Com essa informação, é possível analisar as frequências espaciais no domínio dos números de onda k , de modo que k_x e k_y são as frequências espaciais nas direções x e y . Para isso, foram escolhidas algumas frequências ω , tal que $\hat{U}(k_x, k_y, \omega)$ pode ser utilizado para estimar experimentalmente quais são os números de ondas presentes no painel, relacionados a modos de onda com movimento fora do plano. Entretanto, deve-se notar que os

resultados obtidos via WFE assumem um painel de comprimento infinito, em que os dados experimentais são de um painel finito, com efeitos de borda e reflexão. Para essa análise, foi utilizado a mesma malha de mediação que a utilizada para análise modal, o que limita a máxima frequência espacial que pode ser estimada.

A transformada discreta de Fourier bidimensional, utilizando um algoritmo de FFT2D, foi utilizada para estimar os números de onda, de modo que $\Delta k_x = 2\pi/L$ e $\Delta k_y = 2\pi/W$ são a discretização em frequência. O maior número de onda obtido em cada direção é determinado pelo número de pontos em cada N e M nas direções x e y , respectivamente.

Para a ODS na frequência próxima ao primeiro modo, verifica-se que máxima amplitude de $\hat{U}(k_x, k_y, \omega)$ encontra-se em $k_x = 9,4$ rad/m e $k_y = 0$ rad/m, Fig 3.34. O valor numericamente obtido para o número de onda flexural foi de $k_x = 6.95$ rad/m.

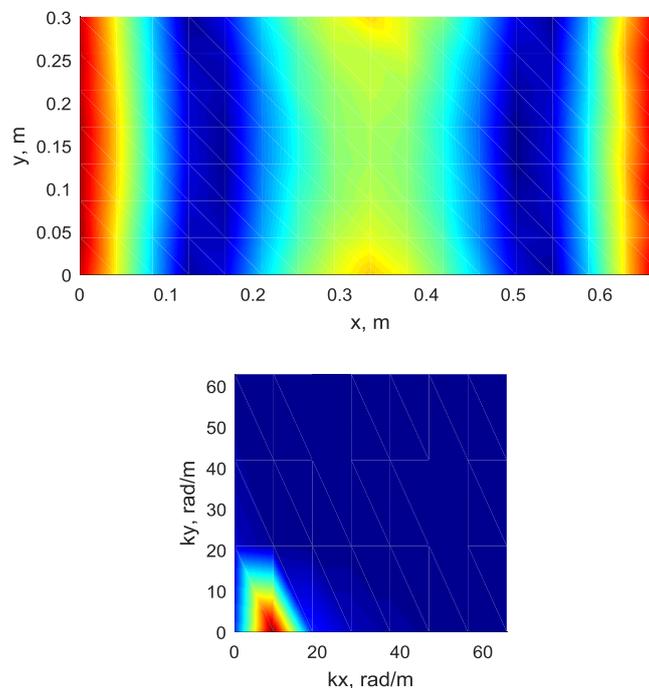


Figura 3.34. ODS $U(x, y, \omega)$ em 160 Hz (superior) e seu conteúdo espectral no domínio do número de onda $\hat{U}(k_x, k_y, \omega)$ (inferior).

Para o modo de deflexão em 200 Hz, Fig. 3.35, tem-se que este ocorre devido a interação entre ondas propagantes tanto em x quanto em y , com máxima amplitude em $k_x = 9.4$ rad/m e $k_y = 21$ rad/m., sendo que a estimativa WFE foi de $k_x = 7,79$ rad/m e $k_y = 7,73$ rad/m

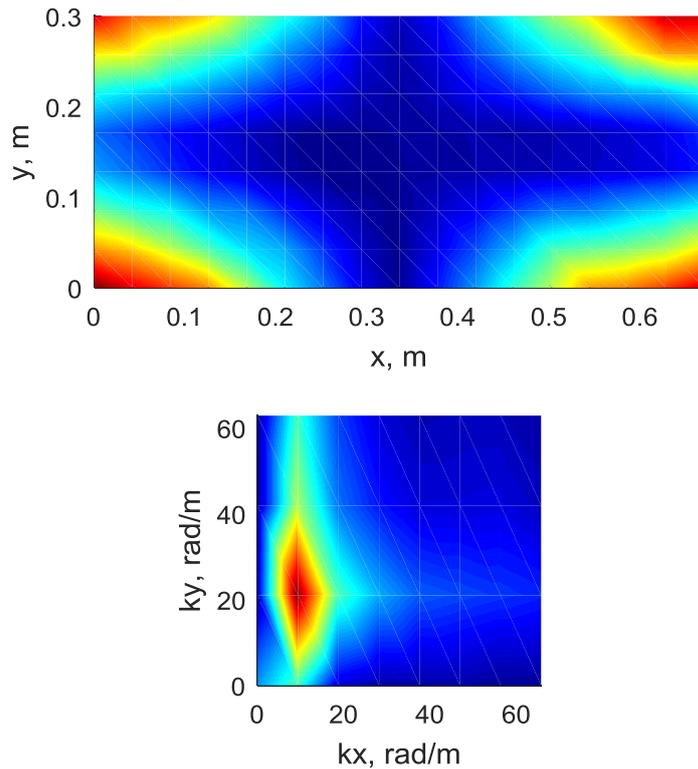


Figura 3.35. ODS $U(x, y, \omega)$ em 200 Hz (superior) e seu conteúdo espectral no domínio do número de onda $\tilde{U}(k_x, k_y, \omega)$ (inferior).

De maneira semelhante, a ODS em 433Hz, Fig. 3.36, a máxima amplitude de $\tilde{U}(k_x, k_y, \omega)$ encontra distribuída em uma região $k_x = 9.4$ e $k_y = 18.8$ rad/m, o que está condizente com o valor estimado por WFE, que foi de $k_x = 11,68$ rad/m e $k_y = 11,47$ rad/m.

Para a frequência de 2000 Hz, Fig 3.37, mostra que há uma combinação de mais de um tipo de onda, uma com pico em $k_x = 28,1$ rad/m e $k_y = 0$ rad/m, e outro pico em $k_x = 9,4$ rad/m e $k_y = 41,4$ rad/m, o valor estimado por WFE, que foi de $k_x = 28,52$ rad/m e $k_y = 26,31$ rad/m. O valor de k_x para o primeiro pico é extremamente próximo, e o de k_y para o segundo também é aceitável, dando mais confiança aos dados numéricos obtidos para frequências mais altas.

Nota-se em todos os resultados obtidos, que a análise experimental do número de onda pela aplicação direta da FFT2D nos dados experimentais apresenta grandes limitações, principalmente relacionadas à discretização em número de onda, mas também pela presença de leakage. Embora outras técnicas mais sofisticadas devem ser aplicadas para a obter de uma melhor validação com os resultados numéricos, os resultados obtidos apresentam-se próximos o suficientes para uma análise preliminar.

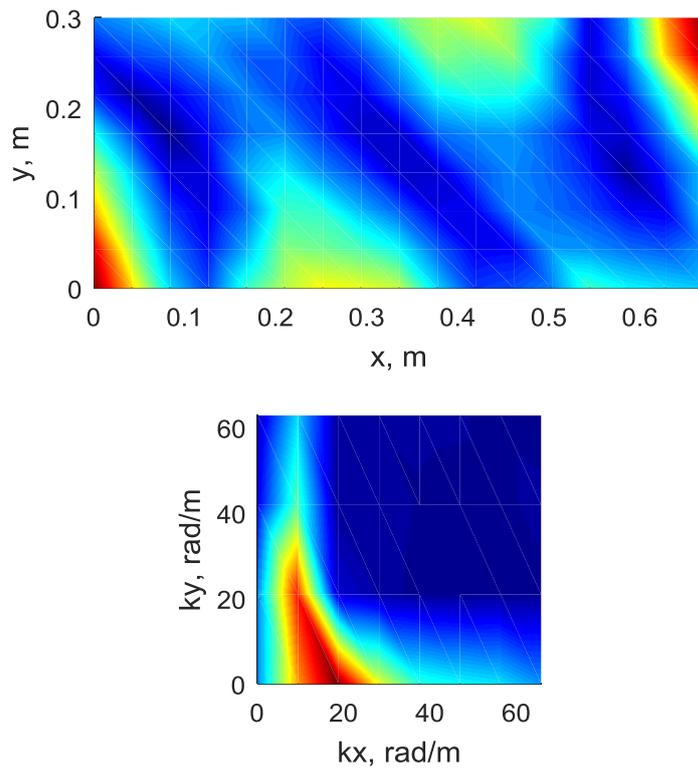


Figura 3.36. ODS $U(x, y, \omega)$ em 433 Hz (superior) e seu conteúdo espectral no domínio do número de onda $\hat{U}(k_x, k_y, \omega)$ (inferior).

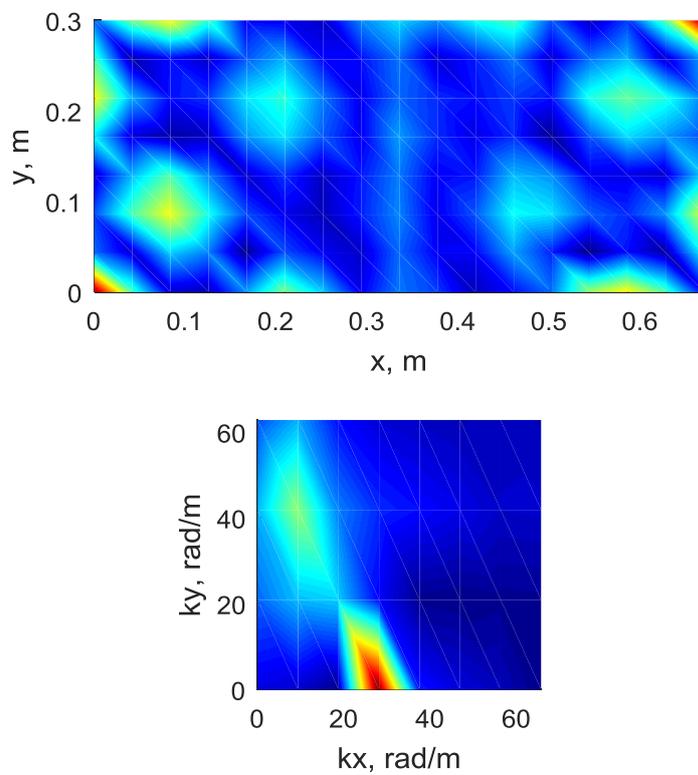


Figura 3.37. ODS $U(x, y, \omega)$ em 2 kHz (superior) e seu conteúdo espectral no domínio do número de onda $\hat{U}(k_x, k_y, \omega)$ (inferior).

3.1. Considerações finais

As FRFs de quatro painéis estruturais honeycomb foram obtidas experimentalmente via vibrômetro laser doppler (LDV) e modelos completos de FE com núcleo homogeneizado foram feitos com o software ANSYS. Verificou-se que a idealização do núcleo como uma estrutura homogênea não afetou significativamente os modos de vibração e, portanto, aceitou-se esta modelagem como válida.

Como as frequências a serem estudadas por WFE são mais altas e o modelo estaria extrapolando os dados obtidos no passo anterior, realizaram-se ajustes para redução dos erros obtidos usando apenas os dados do fabricante. A partir do pós-processamento das matrizes de massa e rigidez obtidas, modelou-se uma fatia da seção transversal do painel com lados de 0, 1mm, e vinte e seis elementos, uma fração da quantidade de elementos necessária no modelo completo de elementos finitos.

Utilizou-se então as técnicas de aplicação de WFE descritas no capítulo 2, e as curvas de dispersão foram obtidas para frequências entre 1 Hz e 10 kHz, e os parâmetros de número de onda, velocidades de fase e grupo e modos de onda. Verificou-se que o painel se comportou como uma placa ortotrópica simples para frequências baixas, como esperado. Com o aumento da frequência, verifica-se o aparecimento de modos de ondas com parte complexa, onde as faces se comportam de maneira diferente do núcleo. Também se verifica que é possível o início de propagação a partir números de onda diferentes de zero, e que um desses modos possui velocidade de grupo negativa, transportando energia na direção oposta à sua velocidade de fase.

Finalmente, os números de onda obtidos por WFE são comparados aos obtidos via FFT2D das formas de deflexão operacional. Este método possui limitações devido às discretizações do número de onda e leakage, no entanto, os resultados obtidos dentro destas limitações validam os resultados numéricos satisfatoriamente para as frequências até 2 kHz.

4. Conclusões

Neste trabalho realizou-se a modelagem de quatro painéis compósitos do tipo honeycomb em termos de propagação de onda, através do método de ondas e elementos finitos WFE. Os painéis são estruturas bidimensionais compósitas, com núcleo ortotrópico e faces isotrópicas, e cujas características geométricas permitiram sua modelagem como guias de onda com um plano de direções preferenciais de propagação.

Foi realizado estudo da formulação de parâmetros de onda, assim como estudo de técnicas de condicionamento numérico que permitiram drástica redução em problemas numéricos intrínsecos à solução dos autoproblemas de estruturas complexas. As rotinas Matlab desenvolvidas poderão ser utilizadas diretamente em trabalhos futuros que envolvam painéis isotrópicos ou ortotrópicos, assim como servir de base para estruturas arbitrárias.

Os painéis foram investigados experimentalmente e por FEA dentro de um intervalo de 1 a 2048 Hz e seus parâmetros ajustados foram utilizados para a criação de matrizes de massa e rigidez para aplicação do WFE, dentro de uma banda de frequência de 1 Hz a 10 kHz. Verificou-se comportamentos peculiares do painel devido tanto às características ortotrópicas do núcleo, assim como sua seção heterogênea em relação à espessura. De fato, foram detectados modos de propagação de alta ordem e *band gaps* que não poderiam ser detectados utilizando-se softwares comerciais de FEA, como ANSYS ou Abaqus.

Foram obtidos os números de onda, modos de onda, densidades modais e velocidades de fase e grupo. A obtenção experimental das FRF's e ODS's permitiu a validação dos números de onda obtidos até a frequência de 2048 Hz.

4.1. Sugestões para trabalhos futuros

Alguns resultados obtidos para modos de propagação de alta ordem possuem deformações que indicam a possibilidade de que modelos mais detalhados sejam necessários para as frequências mais altas, incluindo a modelagem da camada adesiva que une o núcleo às faces do painel.

Espera-se realizar em algum momento futuro experimentos em médias e altas frequências com o *shaker* existente no laboratório para validação ou correção dos resultados obtidos, em conjunto de técnicas experimentais de identificação de números de onda.

Utilização dos parâmetros obtidos para estudo de propriedades acústicas tais como eficiência de radiação sonora e *transmission loss*.

Alguns problemas numéricos emergiram no rastreamento de modos de onda, devido às discontinuidades no início repentino de propagação de modos antes atenuantes. Esse problema é

devido à utilização do WAC, como critério de rastreamento. A utilização de outros critérios, explorando as propriedades simpléticas dos modos de onda deve ser investigada. Portanto, tanto a rotina Matlab pode ser melhorada, como ainda existem informações úteis a serem extraídas dos dados experimentais obtidos dos painéis.

Projetos aeroespaciais requerem grau de desempenho ótimo e faz-se imprescindível melhorar a capacidade de predição, incluindo os efeitos devido às incertezas. A aplicação de teoria de campos aleatórios ao WFE permitiria obtenção de dados ainda mais próximos dos reais, ao mesmo tempo que mantendo um baixo custo computacional.

Referências

- [1] A. P. Mouritz, *Introduction to aerospace materials*. Oxford: Woodhead Publ, 2012.
- [2] H. M. Flower, *High Performance Materials in Aerospace*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1995.
- [3] E. J. Barbero, *Introduction to composite materials design*, 2nd ed. Boca Raton: Taylor & Francis, 2011.
- [4] J. Pora, "Composite Materials in the Airbus A380 - From History to Future -", apresentado em ICCM 13, Bijing, China, 2001.
- [5] J. M. Davies, Org., *Lightweight sandwich construction*. London ; Malden, MA: Blackwell Science, 2001.
- [6] "CSM25_Apollo_Manufacturing_pp245-252.pdf". [Online]. Available at: https://www.hq.nasa.gov/alsj/CSM25_Apollo_Manufacturing_pp245-252.pdf. [Acessado: 09-nov-2015].
- [7] O. T. Thomsen, E. Bozhevolnaya, e A. Lyckegaard, *Sandwich Structures 7 Proceedings of the 7th International Conference on Sandwich Structures, Aalborg University, Aalborg, Denmark, 29-31 August 2005*. Dordrecht: Springer, 2006.
- [8] "HexWeb Honeycomb Attributes and Properties", *HexWeb Honeycomb Attributes and Properties*. [Online]. Available at: http://www.hexcel.com/Resources/DataSheets/Brochure-Data-Sheets/Honeycomb_Attributes_and_Properties.pdf. [Acessado: 18-fev-2016].
- [9] T. Y. Y., R. J. H., e S. R. J., "Sound Transmission Through a Cylindrical Sandwich Shell With Honeycomb Core", NASA Langley Technical Report Server, 1996.
- [10] J. Klos, J. H. Robinson, e R. D. Buehrle, "Sound Transmission Through a Curved Honeycomb Composite Panel", apresentado em 9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibition, Hilton Head, SC, United States, 2003.
- [11] F. J. Fahy e P. Gardonio, *Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response*. Academic Press, 2007.
- [12] L. Hinke, B. R. Mace, e M. J. Brennan, *Finite Element Analysis of Waveguides*. University of Southampton, Institute of Sound and Vibration Research, 2004.
- [13] B. R. Mace, D. Duhamel, M. J. Brennan, e L. Hinke, "Finite element prediction of wave motion in structural waveguides", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 117, nº 5, p. 2835, 2005.
- [14] L. Brillouin, *Wave Propagation in Periodic Structures*. Dover Publications Inc., 1946.
- [15] G. Floquet, "Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques", *Ann. Sci. L'École Norm. Supér.*, vol. 12, p. 47–88, 1883.
- [16] F. Bloch, "Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern", *Z. Für Phys.*, vol. 52, nº 7–8, p. 555–600, jul. 1929.
- [17] S. Nemat-Nasser, "General variational methods for waves in elastic composites", *J. Elast.*, vol. 2, nº 2, p. 73–90, jun. 1972.
- [18] C.-T. Sun, J. D. Achenbach, e G. Herrmann, "Time-Harmonic Waves in a Stratified Medium Propagating in the Direction of the Layering", *J. Appl. Mech.*, vol. 35, nº 2, p. 408–411, jun. 1968.
- [19] A. L. Abrahamson, *The Response of Periodic Structures to Aero-acoustic Pressures, with Particular Reference to Aircraft Skin-rib Spar Structures*. University of Southampton, 1973.
- [20] S. A. Asiri e Y. Z. AL-Zahrani, "Theoretical Analysis of Mechanical Vibration for Offshore Platform Structures", *World J. Mech.*, vol. 4, nº 1, p. 11, jan. 2014.
- [21] S. Gupta, G. Degrande, H. Chebli, D. Clouteau, M. F. M. Hussein, e H. Hunt, "A coupled periodic FE-BE model for ground-borne vibrations from underground railways", in *III European Conference on Computational Mechanics*, C. A. Motasoaes, J. A. C. Martins, H. C. Rodrigues, J. A. C. Ambrósio, C. A. B. Pina, C. M. Motasoaes, E. B. R. Pereira, e J. Folgado, Orgs. Springer Netherlands, 2006, p. 212–212.

- [22] J. Ryue, D. J. Thompson, P. R. White, e D. R. Thompson, “Wave Propagation in Railway Tracks at High Frequencies”, in *Noise and Vibration Mitigation for Rail Transportation Systems*, B. Schulte-Werning, D. Thompson, P.-E. Gautier, C. Hanson, B. Hemsworth, J. Nelson, T. Maeda, e P. de Vos, Orgs. Springer Berlin Heidelberg, 2008, p. 440–446.
- [23] J. Ryue, D. J. Thompson, P. R. White, e D. R. Thompson, “Decay rates of propagating waves in railway tracks at high frequencies”, *J. Sound Vib.*, vol. 320, n° 4–5, p. 955–976, mar. 2009.
- [24] J. Bao, Z. Shi, e H. Xiang, “Dynamic Responses of a Structure with Periodic Foundations”, *J. Eng. Mech.*, vol. 138, n° 7, p. 761–769, 2012.
- [25] K. F. Graff, *Wave motion in elastic solids*. New York: Dover Publications, 1991.
- [26] L. Cremer, M. Heckl, e B. A. T. Petersson, *Structure-borne sound: structural vibrations and sound radiation at audio frequencies*, 3rd ed. Berlin ; New York: Springer, 2005.
- [27] R. M. Orris e M. Petyt, “A finite element study of harmonic wave propagation in periodic structures”, *J. Sound Vib.*, vol. 33, n° 2, p. 223–236, mar. 1974.
- [28] D. Duhamel, B. R. Mace, e M. J. Brennan, “Finite element analysis of the vibrations of waveguides and periodic structures”, *J. Sound Vib.*, vol. 294, n° 1–2, p. 205–220, jun. 2006.
- [29] E. Manconi, “The Wave Finite Element Method for 2-dimensional Structures”, Ph. D Thesis, University of Parma, 2008.
- [30] B. R. Mace e E. Manconi, “Modelling wave propagation in two-dimensional structures using finite element analysis”, *J. Sound Vib.*, vol. 318, n° 4–5, p. 884–902, dez. 2008.
- [31] J. M. Renno e B. R. Mace, “On the forced response of waveguides using the wave and finite element method”, *J. Sound Vib.*, vol. 329, n° 26, p. 5474–5488, dez. 2010.
- [32] J. M. Renno e B. R. Mace, “Calculating the forced response of two-dimensional homogeneous media using the wave and finite element method”, *J. Sound Vib.*, vol. 330, n° 24, p. 5913–5927, nov. 2011.
- [33] J. M. Renno e B. R. Mace, “Calculation of reflection and transmission coefficients of joints using a hybrid finite element/wave and finite element approach”, *J. Sound Vib.*, vol. 332, n° 9, p. 2149–2164, abr. 2013.
- [34] D. Chronopoulos, B. Troclet, O. Bareille, e M. Ichchou, “Modeling the response of composite panels by a dynamic stiffness approach”, *Compos. Struct.*, vol. 96, p. 111–120, fev. 2013.
- [35] D. Chronopoulos, M. Ichchou, B. Troclet, e O. Bareille, “Efficient prediction of the response of layered shells by a dynamic stiffness approach”, *Compos. Struct.*, vol. 97, p. 401–404, mar. 2013.
- [36] D. Chronopoulos, M. Ichchou, B. Troclet, e O. Bareille, “Computing the broadband vibroacoustic response of arbitrarily thick layered panels by a wave finite element approach”, *Appl. Acoust.*, vol. 77, p. 89–98, mar. 2014.
- [37] K. C. de Sousa e A. T. Fabro, “WAVE MODELLING OF A LIGHTWEIGHT AEROSPACE PANEL USING A FINITE ELEMENT APPROACH”, apresentado em CILAMCE 2016 – XXXVII Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Brasília, Brazil, 2016.
- [38] K. C. de Sousa, A. C. Domingues, P. P. de S. Pereira, S. H. Carneiro, M. V. G. de Morais, e A. T. Fabro, “Modal parameter determination of a lightweight aerospace panel using laser Doppler vibrometer measurements”, 2016, p. 70006.
- [39] J. Achenbach, *Wave Propagation in Elastic Solids*. Elsevier, 1984.
- [40] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*. Elsevier, 1986.
- [41] Petyt, *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*, 2 edition. Cambridge University Press, 2011.
- [42] W. X. Zhong e F. W. Williams, “On the direct solution of wave propagation for repetitive structures”, *J. Sound Vib.*, vol. 181, n° 3, p. 485–501, mar. 1995.
- [43] L. J. Gibson e M. F. Ashby, *Cellular solids: structure and properties*, 2. ed., 1. paperback (With Corr.), Corr.transferred to digital printing. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.
- [44] G. Kouroussis, L. B. Fekih, C. Conti, e O. Verlinden, “EasyMod: A MatLab/SciLab toolbox for teaching modal analysis”, apresentado em 19th International Congress on Sound and Vibration, Vilnius, Lithuania, 2012.

- [45] K. Shin e J. K. Hammond, *Fundamentals of signal processing for sound and vibration engineers*. Chichester, England ; Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2008.
- [46] D. L. Brown, R. J. Allemang, R. Zimmerman, e M. Mergeay, "Parameter Estimation Techniques for Modal Analysis", 1979.
- [47] "ACOUSTIC NOISE REQUIREMENT", National Aeronautics and Space Administration, PD-ED-1259, maio 1996.

Apêndice A

Obtenção de números de onda, modos de onda e parâmetros de energia

```
%% Saneamento
clc
clear all
close all
digits(24);

tic

load Placa10mm_0001.mat
% load Placa15mm_0001.mat
% load Placa30mm_0001.mat
% load Placa40mm_0001.mat

    % Utiliza-se matrizes de massa, Me, e rigidez, Ke, guardadas em
    % arquivos .mat

tam=length(Ke);
tam2=tam/2;
tam4=tam/4;

%% Parâmetros do problema

nDOF=3;                % Número de graus de liberdade
ElemL=0.0001;         % Comprimento do elemento
PlateL=.62;           % Comprimento do painel
PlateW=.26;           % Largura do painel
PanAr=PlateL*PlateW;  % Área do painel
maxfreq=10000;        % Frequência máxima a ser estudada
DFreq=10;              % Passo de frequência
w=2*pi*(1:DFreq:maxfreq); % Vetor de frequências
maxk=300;              % Número de onda máximo. Recomenda-se ter em mente
                        % o limite definido por Manconi para a redondeza
                        % deste número
nSaidas=60;           % Número de saídas

    % Os números de onda propagantes possuem valor absoluto próximo a 1,
    % porém, as propriedades simétricas do resultado do autoproblema
    % significam que estes estarão ordenados por
    % [números pequenos-> números próximos a 1-> números grandes]
    % ou vice versa e, portanto, é impossível colocar apenas o número de
    % resultados desejados.

%% Preparo das matrizes de massa e rigidez

Ke_aux=zeros(tam);
Me_aux=zeros(tam);

    % Os nós estão organizados primeiro em círculo no plano xy seguindo a
    % ordem 0,0 Lx,0 Lx,Ly 0,Ly e em seguida crescentemente na direção z
    % Os próximos quatro loops mudam a ordem dos nós para organizarem-se
    % primeiro crescentemente em z, sem mudar a posição em x,y; e depois no
    % círculo acima

cDOF=4*nDOF;
for k=1:tam/cDOF;
```

```

Ke_aux(nDOF*(k-1)+1:nDOF*k, :)=...
    Ke(cDOF*(k-1)+1:cDOF*(k-1)+nDOF, :);
Ke_aux(nDOF*(k-1)+tam4+1:nDOF*k+tam4, :)=...
    Ke(cDOF*(k-1)+nDOF+1:cDOF*(k-1)+2*nDOF, :);
Ke_aux(nDOF*(k-1)+tam2+1:nDOF*k+tam2, :)=...
    Ke(cDOF*(k-1)+2*nDOF+1:cDOF*(k-1)+3*nDOF, :);
Ke_aux(nDOF*(k-1)+3*tam4+1:nDOF*k+3*tam4, :)=...
    Ke(cDOF*(k-1)+3*nDOF+1:cDOF*(k-1)+4*nDOF, :);
end

for k=1:tam/cDOF;
Ke(:, nDOF*(k-1)+1:nDOF*k)=...
    Ke_aux(:, cDOF*(k-1)+1:cDOF*(k-1)+nDOF);
Ke(:, nDOF*(k-1)+tam4+1:nDOF*k+tam4)=...
    Ke_aux(:, cDOF*(k-1)+nDOF+1:cDOF*(k-1)+2*nDOF);
Ke(:, nDOF*(k-1)+tam2+1:nDOF*k+tam2)=...
    Ke_aux(:, cDOF*(k-1)+2*nDOF+1:cDOF*(k-1)+3*nDOF);
Ke(:, nDOF*(k-1)+3*tam4+1:nDOF*k+3*tam4)=...
    Ke_aux(:, cDOF*(k-1)+3*nDOF+1:cDOF*(k-1)+4*nDOF);
end

for k=1:tam/cDOF;
Me_aux(nDOF*(k-1)+1:nDOF*k, :)=...
    Me(cDOF*(k-1)+1:cDOF*(k-1)+nDOF, :);
Me_aux(nDOF*(k-1)+tam4+1:nDOF*k+tam4, :)=...
    Me(cDOF*(k-1)+nDOF+1:cDOF*(k-1)+2*nDOF, :);
Me_aux(nDOF*(k-1)+tam2+1:nDOF*k+tam2, :)=...
    Me(cDOF*(k-1)+2*nDOF+1:cDOF*(k-1)+3*nDOF, :);
Me_aux(nDOF*(k-1)+3*tam4+1:nDOF*k+3*tam4, :)=...
    Me(cDOF*(k-1)+3*nDOF+1:cDOF*(k-1)+4*nDOF, :);
end

for k=1:tam/cDOF;
Me(:, nDOF*(k-1)+1:nDOF*k)=...
    Me_aux(:, cDOF*(k-1)+1:cDOF*(k-1)+nDOF);
Me(:, nDOF*(k-1)+tam4+1:nDOF*k+tam4)=...
    Me_aux(:, cDOF*(k-1)+nDOF+1:cDOF*(k-1)+2*nDOF);
Me(:, nDOF*(k-1)+tam2+1:nDOF*k+tam2)=...
    Me_aux(:, cDOF*(k-1)+2*nDOF+1:cDOF*(k-1)+3*nDOF);
Me(:, nDOF*(k-1)+3*tam4+1:nDOF*k+3*tam4)=...
    Me_aux(:, cDOF*(k-1)+3*nDOF+1:cDOF*(k-1)+4*nDOF);
end

% Os próximos comandos mudam a ordem dos nós nas posições 0, Ly e Lx, Ly
% para que as equações descritas por Manconi possam ser usadas

Ke=[Ke(1:tam2, 1:tam2) Ke(1:tam2, 3*tam4+1:end) Ke(1:tam2, tam2+1:3*tam4);
    Ke(3*tam4+1:end, 1:tam2) Ke(3*tam4+1:end, 3*tam4+1:end) ...
    Ke(3*tam4+1:end, tam2+1:3*tam4);
    Ke(tam2+1:3*tam4, 1:tam2) Ke(tam2+1:3*tam4, 3*tam4+1:end) ...
    Ke(tam2+1:3*tam4, tam2+1:3*tam4)];
Me=[Me(1:tam2, 1:tam2) Me(1:tam2, 3*tam4+1:end) Me(1:tam2, tam2+1:3*tam4);
    Me(3*tam4+1:end, 1:tam2) Me(3*tam4+1:end, 3*tam4+1:end) ...
    Me(3*tam4+1:end, tam2+1:3*tam4);
    Me(tam2+1:3*tam4, 1:tam2) Me(tam2+1:3*tam4, 3*tam4+1:end) ...
    Me(tam2+1:3*tam4, tam2+1:3*tam4)];

clear Ke_aux Me_aux

%% Matrizes auxiliares para o WAC

```

```

WAC=eye(nSaidas);
TAuxDiv=(1:nSaidas) '*(1:nSaidas);
WMsoft=zeros(tam2*length(w),nSaidas);
PHI_norm=zeros(tam2*length(w),nSaidas);
WMx=zeros(tam2*length(w),nSaidas);
WMy=zeros(tam2*length(w),nSaidas);

%% Matriz de parâmetros de onda

WMx_data=zeros(nSaidas*length(w),nSaidas,2);
WNx_data=zeros(nSaidas,length(w),3);
WMy_data=zeros(nSaidas*length(w),nSaidas,2);
WNY_data=zeros(nSaidas,length(w),3);

%% Matrizes auxiliares para Zhong

Ic=eye(tam4);
Zc=zeros(tam4);

%% Loop
for j=1:maxfreq/DFreq
%     TEMPO=toc;
    De=Ke-(w(j)^2)*Me;

    % Separa-se a matriz em células, conforme descrito na tese de doutorado
    % de Manconi (2008)

    D11=De(1:tam4,1:tam4);
    D12=De(1:tam4,(tam4+1):2*tam4);
    D13=De(1:tam4,(2*tam4+1):3*tam4);
    D14=De(1:tam4,(3*tam4+1):4*tam4);
    D22=De((tam4+1):2*tam4,(tam4+1):2*tam4);
    D23=De((tam4+1):2*tam4,(2*tam4+1):3*tam4);
    D24=De((tam4+1):2*tam4,(3*tam4+1):4*tam4);
    D33=De((2*tam4+1):3*tam4,(2*tam4+1):3*tam4);
    D34=De((2*tam4+1):3*tam4,(3*tam4+1):4*tam4);
    D44=De((3*tam4+1):4*tam4,(3*tam4+1):4*tam4);

    %% Para se encontrar Lambda_x
    D11=D11+D13+D13'+D33;
    D1r=D12+D14+D23'+D34;
    Drr=D22+D24+D24'+D44;

    %% Método de Zhong
    % As equações abaixo estão numeradas conforme Zhong(1995)

    L=[Ic Zc;D11 D1r];
    N=[Zc Ic;-D1r' -Drr];

    Z1=[Zc D1r;-D1r' Zc];
    Z2=[D1r-D1r' -D11-Drr;D11+Drr D1r-D1r'];

    if cond(Z1)<cond(Z2)
        Z=Z1\Z2;
        EV=eigs(Z,2*nSaidas,'sm');
    else
        Z=Z2\Z1;
        EV=eigs(Z,2*nSaidas);
        EV=1./EV;
    end
end

```

```

% Para minimizar problemas numéricos, utiliza-se a seguinte rotina que
% reduz números muito pequenos a zero;

EV=sort(EV);
EV=EV(1:2:end,:);

EVr=real(EV);
EVi=imag(EV);
EVr(abs(EVr)<1e-9)=0;
EVi(abs(EVi)<1e-9)=0;

% Aqui se organizam melhor os números complexos conjugados

EVi(abs(EVi-[0;EVi(1:end-1)])<1e-9)=0;
EV_aux=[0;-(EVi(1:end-1))];
EVi=EVi+EV_aux;

EV=complex(EVr,EVi);

% EV são os autovalores da equação 5.2 (ou 5.4). Em seguida deve-se
% encontrar os autovalores de 2.13 a partir dos autovalores
% da equação 5.4

% Utiliza-se Bhaskara para separar 'mi' de '1/mi'. Como o problema é
% simétrico, 'mi' e '1/mi' representam propagações idênticas em forma e
% magnitude, porém com direções opostas. Aqui escolhe-se utilizar
% sempre o valor com magnitude menor que 1.

EVf=zeros(nSaidas,1);
%%
for k=1:nSaidas
    EVf(k)=(EV(k)-sqrt(EV(k)^2-4))/2;
    if abs(EVf(k))>1
        EVf(k)=(EV(k)+sqrt(EV(k)^2-4))/2;
    end
% Próximo passo é encontrar os autovetores de 2.13:

% Como a análise é limitada em valor máximo dos números de onda, é
% possível economizar tempo analisando apenas os autovalores que
% resultarão nestes valores. O número de erros numéricos que ocorrem
% durante a realização da rotina também são bastante reduzidos.
%%
    if abs(1i*log(EVf(k))/ElemL)<abs(sqrt(2*(maxk^2)))

% pela definição 'L*EVf(k)-N' produz uma matriz de determinante 0,
% utilizando a função 'null' encontra-se o autovetor WM0 tal que
%
% (L*EVf(k)-N)*WM0=M0*WM0=0
    WM0=vpa(null(L*EVf(k)-N));

% a função 'null' encontra 'size(M0)-rank(M0)' vetores que satisfazem
% a equação acima, porém, até onde foi testado, o vetor que melhor
% aproxima M0*WM0 a 0 é o que se encontra na última coluna e, portanto,
% este é o usado.
    WM1=WM0(:,end);

% os vetores encontrados por 'null' sempre têm magnitude igual a 1,
% porém, pode ser que o mesmo vetor esteja na direção negativa em
% relação ao autovetor encontrado na iteração anterior, portanto se
% utiliza os seguintes comandos para que o valor máximo do deslocamento

```

```

% real do nó 1, DOFs 1-3, sempre seja positivo
WMr=imag(WM1(1:3));
[~,Ind]=max(abs(WMr));
WM1=WM1*(sign((WMr(Ind)+1e-15)*sign(imag(EVf(k))+1e-15)));
WMsoft((j-1)*tam2+1:j*tam2,k)=double(WM1);

else
    EVf(k)=0;
end
%%
end
%% WAC

[~,OrdInd1]=sortrows([real(EVf) imag(EVf)],-1);
OrdEV=[EVf WMsoft((j-1)*tam2+1:j*tam2,:)]';
OrdEV=OrdEV(OrdInd1,:);
EVf=OrdEV(:,1);
WMsoft((j-1)*tam2+1:j*tam2,:)=OrdEV(:,2:end)';

% Os autovetores e autovalores são ordenados para organizar as
% primeiras frequências e para que quando os números de onda realizem
% cut-on e cut-off eles continuem organizados. As primeiras frequências
% são caóticas demais e tentar organizar elas por WAC não é eficiente
% ou significativo.

if j>5
    WMa=WMx;
    WMb=L*WMsoft((j-1)*tam2+1:j*tam2,:);
    WAC=vpa((WMB'*WMA).^2)./(diag(WMB'*WMB)*diag(WMA'*WMA)');
    WAC=double(WAC);
end

%% Autovalores
% Primeiramente, a matrix TAux recebe o valor de 1 nas posições onde o
% valor é máximo da matriz WAC na vertical e horizontal.
TAux=(double(bsxfun(@eq,WAC,max(WAC,[],1)))*...
    double(bsxfun(@eq,WAC,max(WAC,[],2))));

% No passo abaixo, preenche-se interseções de colunas e linhas vazias
% que estão na diagonal
STAux1=(sum(TAux));
STAux2=(sum(TAux,2));
TAux=TAux+diag(diag((STAux2*STAux2'-ones(nSaidas))*...
    (STAux1'*STAux1-ones(nSaidas))));

% Este passo é para quando interseções de colunas e linhas vazias
% ocorrem fora da diagonal. Os números são divididos pela matriz
% TAuxDiv para os casos onde mais de um local possuir valor máximo
% em ambas as direções.
STAux1=(sum(TAux));
STAux2=(sum(TAux,2));
TAux=TAux+(STAux2*STAux2'-ones(nSaidas))*...
    (STAux1'*STAux1-ones(nSaidas))./TAuxDiv;

TAux=(double(bsxfun(@eq,TAux,max(TAux,[],1)))*...
    double(bsxfun(@eq,TAux,max(TAux,[],2))));

STAux1=(sum(TAux));
STAux2=(sum(TAux,2));
TAux=TAux+(STAux2*STAux2'-ones(nSaidas))*...

```

```

(STAux1'*STAux1-ones(nSaidas))./TAuxDiv;

TAux=(double(bsxfun(@eq, TAux, max(TAux, [],1))).*...
double(bsxfun(@eq, TAux, max(TAux, [],2))));

PHI_norm((j-1)*tam2+1:j*tam2,:)=WMsoft((j-1)*tam2+1:j*tam2,:)*TAux';
WMx=L*WMsoft((j-1)*tam2+1:j*tam2,:)*TAux';

% Os modos são normalizados em relação à base de onda [q f]', apesar de
% o método de Zhong já disponibilizar a base de deslocamentos nodais
% [q (Lambda)q]' normalizada. A base de onda é melhor indicada para
% normalização pois pode ser utilizada posteriormente para FRFs e
% outros estudos. Independente da normalização escolhida, para se
% encontrar a velocidade de grupo, dada por Pot./EnT, é necessário que
% ambos os vetores 'q's das duas bases sejam iguais.

normWM=diag(1./sqrt(sum(abs(WMx.^2))));

WMx=WMx*normWM;
WMx(isnan(WMx))=0;
WMx_data((j-1)*tam4+1:j*tam4,:,1)=WMx(1:tam4,:);
WMx_data((j-1)*tam4+1:j*tam4,:,2)=WMx(tam4+1:tam2,:);

PHI=PHI_norm((j-1)*tam2+1:j*tam2,:)*normWM;
PHI(isnan(PHI))=0;

% Lambda
WNx_data(:,j,1)=TAux*EVf;

% Potência
WNx_data(:,j,2)=diag(real(WMx(tam4+1:tam2,:)'*1i*w(j)*WMx(1:tam4,:)/2));

% Para energia em x
PHIx=[PHI;PHI];
EnP=real(diag(PHIx'*Ke*PHIx))/4;
EnK=-real(diag((w(j)*PHIx')*Me*(w(j)*PHIx)))/4;

% Energia por comprimento
WNx_data(:,j,3)=(abs(EnP)+abs(EnK))/ElemL;

%% Para se encontrar Lambda_y
D11=D11+D12+D12'+D22;
D1r=D13+D14+D23+D24;
Drr=D33+D34+D34'+D44;

%% Método de Zhong

L=[Ic Zc;D11 D1r];
N=[Zc Ic;-D1r' -Drr];

Z1=[Zc D1r;-D1r' Zc];
Z2=[D1r-D1r' -D11-Drr;D11+Drr D1r-D1r'];

if cond(Z1)<cond(Z2)
    Z=Z1\Z2;
    EV=eigs(Z,2*nSaidas,'sm');
else
    Z=Z2\Z1;

```

```

        EV=eigs(Z,2*nSaidas);
        EV=1./EV;
end

EV=sort(EV);
EV=EV(1:2:end,:);

EVr=real(EV);
EVi=imag(EV);
EVr(abs(EVr)<1e-9)=0;
EVi(abs(EVi)<1e-9)=0;

EVi(abs(EVi-[0;EVi(1:end-1)])<1e-9)=0;
EV_aux=[0;-(EVi(1:end-1))];
EVi=EVi+EV_aux;

EV=complex(EVr,EVi);

EVf=zeros(nSaidas,1);
%%
for k=1:nSaidas
    EVf(k)=(EV(k)-sqrt(EV(k)^2-4))/2;
    if abs(EVf(k))>1
        EVf(k)=(EV(k)+sqrt(EV(k)^2-4))/2;
    end

    %%
    if abs(1i*log(EVf(k))/ElemL)<sqrt(2*(maxk^2))

        WM0=vpa(null(L*EVf(k)-N));
        WM1=WM0(:,end);
        WMr=imag(WM1(1:3));
        [~,Ind]=max(abs(WMr));
        WM1=WM1*(sign(WMr(Ind)+1e-15)*sign(imag(EVf(k))+1e-15));
        WMsoft((j-1)*tam2+1:j*tam2,k)=double(WM1);

    else
        EVf(k)=0;
    end
    %%
end
%% WAC

[~,OrdInd1]=sortrows([real(EVf) imag(EVf)],-1);
OrdEV=[EVf WMsoft((j-1)*tam2+1:j*tam2,:)'];
OrdEV=OrdEV(OrdInd1,:);
EVf=OrdEV(:,1);
WMsoft((j-1)*tam2+1:j*tam2,:)=OrdEV(:,2:end)';

if j>5
    WMa=WMy;
    WMb=L*WMsoft((j-1)*tam2+1:j*tam2,:);
    WAC=vpa((WMb'*WMa).^2)./(diag(WMb'*WMb)*diag(WMa'*WMa)');
    WAC=double(WAC);
end

%% Autovalores

TAux=(double(bsxfun(@eq,WAC,max(WAC,[],1))).*...
        double(bsxfun(@eq,WAC,max(WAC,[],2))));

```

```

STAux1=(sum(TAux));
STAux2=(sum(TAux,2));
TAux=TAux+diag(diag((STAux2*STAux2'-ones(nSaidas)).*...
(STAux1'*STAux1-ones(nSaidas))));

STAux1=(sum(TAux));
STAux2=(sum(TAux,2));
TAux=TAux+(STAux2*STAux2'-ones(nSaidas)).*...
(STAux1'*STAux1-ones(nSaidas))./TAuxDiv;

TAux=(double(bsxfun(@eq,TAux,max(TAux,[],1))).*...
double(bsxfun(@eq,TAux,max(TAux,[],2))));

STAux1=(sum(TAux));
STAux2=(sum(TAux,2));
TAux=TAux+(STAux2*STAux2'-ones(nSaidas)).*...
(STAux1'*STAux1-ones(nSaidas))./TAuxDiv;

TAux=(double(bsxfun(@eq,TAux,max(TAux,[],1))).*...
double(bsxfun(@eq,TAux,max(TAux,[],2))));

PHI_norm((j-1)*tam2+1:j*tam2,:)=WMsoft((j-1)*tam2+1:j*tam2,:)*TAux';
WMy=L*WMsoft((j-1)*tam2+1:j*tam2,:)*TAux';

normWM=diag(1./sqrt(sum(abs(WMy.^2))));

WMy=WMy*normWM;
WMy(isnan(WMy))=0;
WMy_data((j-1)*tam4+1:j*tam4,:,1)=WMy(1:tam4,:);
WMy_data((j-1)*tam4+1:j*tam4,:,2)=WMy(tam4+1:tam2,:);

PHI=PHI_norm((j-1)*tam2+1:j*tam2,:)*normWM;
PHI(isnan(PHI))=0;

% Lambda
WMy_data(:,j,1)=TAux*EVf;

% Potência
WMy_data(:,j,2)=diag(real(WMy(tam4+1:tam2,:)'*li*w(j)*WMy(1:tam4,:)/2));

% Para energia em y
PHIy1=PHI(1:tam4,:);
PHIy2=PHI(tam4+1:end,:);
PHIy=[PHIy1;PHIy1;PHIy2;PHIy2];
EnP=real(diag(PHIy'*Ke*PHIy))/4;
EnK=real(diag((li*w(j)*PHIy')*Me*(li*w(j)*PHIy)))/4;

% Energia por comprimento
WMy_data(:,j,3)=(abs(EnP)+abs(EnK))/ElemL;

end
%% Fim do Loop

WNx_data(isnan(WNx_data))=0;
WNx_data(isinf(WNx_data))=0;
WMy_data(isnan(WMy_data))=0;
WMy_data(isinf(WMy_data))=0;

```

```

WMx_data(isnan(WMx_data))==0;
WMx_data(isinf(WMx_data))==0;
WMy_data(isnan(WMy_data))==0;
WMy_data(isinf(WMy_data))==0;

nSpostx=0;
for jj=1:nSaidas
    if sum(abs(WNx_data(jj, :, 1)), 2)~=0
        nSpostx=nSpostx+1;
        WNx_data_post(nSpostx, :, :)=WNx_data(jj, :, :);
        WMx_data_post(:, nSpostx, :)=WMx_data(:, jj, :);
    end
end

nSposty=0;
for kk=1:nSaidas
    if sum(abs(WNy_data(kk, :, 1)), 2)~=0
        nSposty=nSposty+1;
        WNy_data_post(nSposty, :, :)=WNy_data(kk, :, :);
        WMy_data_post(:, nSposty, :)=WMy_data(:, kk, :);
    end
end

clear WMx WMy WMsoft D11 D12 D13 D14 D22 D23 D24 D33 D34 D44 De D1l D1r Drr
clear EnK EnP EV EV_aux EV2 EV_aux EVf EVi EVr Ic L N normWM Ord OrdEV
clear OrdInd1 OrdInd2 PHI PHI_norm PHIx PHiy1 PHiy2 WN_data Z Z1 Z2 Zc
clear WM0 WM1 WMr WMa WMb STAux1 STAux2 TAuxDiv WM_data MAX PHiy
clear WMx_data WMy_data WNx_data WNy_data

WNx_mi=1i*log(WNx_data_post(:, :, 1));
WNy_mi=1i*log(WNy_data_post(:, :, 1));

%% Plot dos números de onda 'k'

% Separação dos autovalores puramente reais ou imaginários dos complexos

rWN=abs(real(WNx_mi));
rWN(rWN<1e-9)=0;
rWN=rWN/0;

iWN=abs(imag(WNx_mi));
iWN(abs(iWN)<1e-9)=0;
iWN=iWN/0;

cWN=rWN+iWN;
pWM=cWN;

cWN(isinf(cWN))=0;

pWM(~isinf(pWM))=0;
pWM(isinf(pWM))=nan;

compWNx=WNx_mi+cWN;
pureWNx=WNx_mi+pWM;

compWNx(isnan(compWNx))=0;
pureWNx(isnan(pureWNx))=0;
pureWNx(isinf(pureWNx))=0;

```

```

compWNx_k=compWNx/ElemL;
compWN_kr=real(compWNx_k);
compWN_ki=imag(compWNx_k);
compWN_kr(abs(compWN_kr)<1)=nan;
compWN_ki(abs(compWN_ki)<1)=nan;
compWNx_k=complex(compWN_kr,compWN_ki);
pureWNx_k=pureWNx/ElemL;

clear rWN iWN cWN pWM compWN_ki compWN_kr

rWN=abs(real(WNy_mi));
rWN(rWN<1e-9)=0;
rWN=rWN/0;

iWN=abs(imag(WNy_mi));
iWN(abs(iWN)<1e-9)=0;
iWN=iWN/0;

cWN=rWN+iWN;
pWM=cWN;

cWN(isinf(cWN))=0;

pWM(~isinf(pWM))=0;
pWM(isinf(pWM))=nan;

compWNy=WNy_mi+cWN;
pureWNy=WNy_mi+pWM;

compWNy(isnan(compWNy))=0;
pureWNy(isnan(pureWNy))=0;
pureWNy(isinf(pureWNy))=0;

compWNy_k=compWNy/ElemL;
compWN_kr=real(compWNy_k);
compWN_ki=imag(compWNy_k);
compWN_kr(abs(compWN_kr)<1)=nan;
compWN_ki(abs(compWN_ki)<1)=nan;
compWNy_k=complex(compWN_kr,compWN_ki);
pureWNy_k=pureWNy/ElemL;

clear rWN iWN cWN pWM compWN_ki compWN_kr

%%
% Plot dos valores complexos
figure(1)
plot(w/2/pi,abs(real(compWNx_k(:,:))), '-.b',...
      w/2/pi,-abs(imag(compWNx_k(:,:))), '-.b', 'MarkerSize',2)
axis([0 maxfreq -maxk maxk])
ylabel('Im\{k_x\}[rad/m]')
xlabel('Frequency [Hz]')
Re\{k_x\}[rad/m]', 'FontSize',14)

% Plot dos valores puramente reais ou puramente imaginários
figure(1)
hold on
plot(w/2/pi,abs(real(pureWNx_k(:,:,1))), '.r',...
      w/2/pi,-abs(imag(pureWNx_k(:,:,1))), '.k', 'MarkerSize',4)
axis([0 maxfreq -maxk maxk])
ylabel('Im\{k_x\}[rad/m]')
xlabel('Frequency [Hz]')
Re\{k_x\}[rad/m]', 'FontSize',14)

```

```

figure(1)
hold on
plot(w/2/pi, zeros (length (w)), '.k', 'MarkerSize', 4)

%%
figure(2)
plot(w/2/pi, abs (real (compWNY_k (:, :))), '-.b', ...
      w/2/pi, -abs (imag (compWNY_k (:, :))), '-.b', 'MarkerSize', 2)
axis([0 maxfreq -maxk maxk])
ylabel('Im\{k_y\}[rad/m]                               Re\{k_y\}[rad/m]', 'FontSize', 14)
xlabel('Frequency [Hz]')

figure(2)
hold on
plot(w/2/pi, abs (real (pureWNY_k (:, :))), '.r', ...
      w/2/pi, -abs (imag (pureWNY_k (:, :))), '.k', 'MarkerSize', 4)
axis([0 maxfreq -maxk maxk])
ylabel('Im\{k_y\}[rad/m]                               Re\{k_y\}[rad/m]', 'FontSize', 14)
xlabel('Frequency [Hz]')

figure(2)
hold on
plot(w/2/pi, zeros (length (w)), '.k', 'MarkerSize', 4)

%% Plot de parâmetros de energia

CGx=WNx_data_post (:, :, 2) ./WNx_data_post (:, :, 3);
DensModx=PanAr*real (pureWNx_k (:, :))/2/pi/pi./abs (CGx);
DensModx (isnan (DensModx))=0;
DensModSumx=sum (DensModx);

CGy=WNY_data_post (:, :, 2) ./WNY_data_post (:, :, 3);
DensMody=PanAr*real (pureWNY_k (:, :))/2/pi/pi./abs (CGy);
DensMody (isnan (DensMody))=0;
DensModSumy=(sum (DensMody));

% em x

for k=1:nSpstx
figure(k)

subplot(4,1,1)
plot(w/2/pi, zeros (length (w)), '.k', 'MarkerSize', 4)
hold on
plot(w/2/pi, abs (real (li*log (WNx_data_post (k, :, 1))/ElemL)), '.b', ...
      w/2/pi, pureWNx_k (k, :, 1), '.r', 'MarkerSize', 4)
axis([0 maxfreq -maxk/10 maxk])
ylabel('Re\{k_x\}[rad/m]', 'FontSize', 14)

subplot(4,1,2)
plot(w/2/pi, WNx_data_post (k, :, 2), '.', 'MarkerSize', 4)
ylabel('Potência [W]', 'FontSize', 14)

subplot(4,1,3)
plot(w/2/pi, WNx_data_post (k, :, 3), '.', 'MarkerSize', 4)
ylabel({'Energia por', 'comprimento [J/m]'}, 'FontSize', 14)
axis([0 maxfreq 0 0.04])

subplot(4,1,4)

```

```

plot(w/2/pi,CGx(k,:),'.','MarkerSize',4)
ylabel({'Velocidade','de grupo [m/s]'],'FontSize',14)
xlabel('Frequencia [Hz]')

end

% Em y

for k=1:nSpstx
figure(k)

subplot(4,1,1)
plot(w/2/pi,zeros(length(w)),'.k','MarkerSize',4)
hold on
plot(w/2/pi,abs(real(1i*log(WNy_data_post(k,:,1))/ElemL)),'.b',...
w/2/pi,pureWNy_k(k,:,1),'.r','MarkerSize',4)
axis([0 maxfreq -maxk/10 maxk])
ylabel('Re\{k_x\}[rad/m]','FontSize',14)

subplot(4,1,2)
plot(w/2/pi,WNy_data_post(k,:,2),'.','MarkerSize',4)
ylabel('Potência [W]','FontSize',14)

subplot(4,1,3)
plot(w/2/pi,WNy_data_post(k,:,3),'.','MarkerSize',4)
ylabel({'Energia por','comprimento [J/m]'],'FontSize',14)
axis([0 maxfreq 0 0.04])

subplot(4,1,4)
plot(w/2/pi,CGy(k,:),'.','MarkerSize',4)
ylabel({'Velocidade','de grupo [m/s]'],'FontSize',14)
xlabel('Frequencia [Hz]')

end

%% Plot de densidades modais integral de contorno de elipse

figure

subplot(7,1,[1 2])
semilogx(w/2/pi,abs(real(1i*log(WNx_data_post(:, :, 1))/ElemL)),'.b',...
w/2/pi,pureWNx_k(:, :),'.r','MarkerSize',4)
axis([1000 maxfreq -50 maxk])
ylabel('Re\{k_x\}[rad/m]','FontSize',14)

subplot(7,1,[3 4])
semilogx(w/2/pi,abs(real(1i*log(WNy_data_post(:, :, 1))/ElemL)),'.b',...
w/2/pi,pureWNy_k(:, :),'.r','MarkerSize',4)
axis([1000 maxfreq -50 maxk])
ylabel('Re\{k_y\}[rad/m]','FontSize',14)

subplot(7,1,[5 6 7])
DensTot=pi*sqrt(DensModSumx.^2+DensModSumy.^2);
loglog(w/2/pi,DensTot,'r','MarkerSize',4)
ylabel('Densidade modal','FontSize',14)
xlabel('Frequency [Hz]')
axis([1000 maxfreq 0 2*pi])

```

Obtenção dos números de onda para frequência constante

```
%% Saneamento
clc
clear all
close all

load Placa10mm_0001.mat

%% Parâmetros do problema

Freq=XXXX;
Freqw=2*pi*Freq;
NdPontos=3600;
nDOF=3;
nSaidas=20;

%% Preparo das matrizes de massa e rigidez

tam=length(Ke);
tam2=tam/2;
tam4=tam/4;
tam8=floor(tam/8);

Ke_aux=zeros(tam);
Me_aux=zeros(tam);

% Os nós estão organizados primeiro em círculo no plano xy seguindo a
% ordem 0,0 Lx,0 Lx,Ly 0,Ly e em seguida crescentemente na direção z
% Os próximos quatro loops mudam a ordem dos nós para organizarem-se
% primeiro crescentemente em z, sem mudar a posição em x,y; e depois no
% círculo acima

cDOF=4*nDOF;
for k=1:tam/cDOF;
    Ke_aux(nDOF*(k-1)+1:nDOF*k,:)=Ke(cDOF*(k-1)+1:cDOF*(k-1)+nDOF,:);
    Ke_aux(nDOF*(k-1)+tam4+1:nDOF*k+tam4,:)=Ke(cDOF*(k-1)+nDOF+1:cDOF*(k-1)+2*nDOF,:);
    Ke_aux(nDOF*(k-1)+tam2+1:nDOF*k+tam2,:)=Ke(cDOF*(k-1)+2*nDOF+1:cDOF*(k-1)+3*nDOF,:);
    Ke_aux(nDOF*(k-1)+3*tam4+1:nDOF*k+3*tam4,:)=Ke(cDOF*(k-1)+3*nDOF+1:cDOF*(k-1)+4*nDOF,:);
end

for k=1:tam/cDOF;
    Ke(:,nDOF*(k-1)+1:nDOF*k)=Ke_aux(:,cDOF*(k-1)+1:cDOF*(k-1)+nDOF);
    Ke(:,nDOF*(k-1)+tam4+1:nDOF*k+tam4)=Ke_aux(:,cDOF*(k-1)+nDOF+1:cDOF*(k-1)+2*nDOF);
    Ke(:,nDOF*(k-1)+tam2+1:nDOF*k+tam2)=Ke_aux(:,cDOF*(k-1)+2*nDOF+1:cDOF*(k-1)+3*nDOF);
    Ke(:,nDOF*(k-1)+3*tam4+1:nDOF*k+3*tam4)=Ke_aux(:,cDOF*(k-1)+3*nDOF+1:cDOF*(k-1)+4*nDOF);
end

for k=1:tam/cDOF;
    Me_aux(nDOF*(k-1)+1:nDOF*k,:)=Me(cDOF*(k-1)+1:cDOF*(k-1)+nDOF,:);
    Me_aux(nDOF*(k-1)+tam4+1:nDOF*k+tam4,:)=Me(cDOF*(k-1)+nDOF+1:cDOF*(k-1)+2*nDOF,:);
```

```

    Me_aux(nDOF*(k-1)+tam2+1:nDOF*k+tam2,:) = Me(cDOF*(k-
1)+2*nDOF+1:cDOF*(k-1)+3*nDOF,:);
    Me_aux(nDOF*(k-1)+3*tam4+1:nDOF*k+3*tam4,:) = Me(cDOF*(k-
1)+3*nDOF+1:cDOF*(k-1)+4*nDOF,:);
end

for k=1:tam/cDOF;
    Me(:,nDOF*(k-1)+1:nDOF*k) = Me_aux(:,cDOF*(k-1)+1:cDOF*(k-1)+nDOF);
    Me(:,nDOF*(k-1)+tam4+1:nDOF*k+tam4) = Me_aux(:,cDOF*(k-
1)+nDOF+1:cDOF*(k-1)+2*nDOF);
    Me(:,nDOF*(k-1)+tam2+1:nDOF*k+tam2) = Me_aux(:,cDOF*(k-
1)+2*nDOF+1:cDOF*(k-1)+3*nDOF);
    Me(:,nDOF*(k-1)+3*tam4+1:nDOF*k+3*tam4) = Me_aux(:,cDOF*(k-
1)+3*nDOF+1:cDOF*(k-1)+4*nDOF);
end

% Os próximos comandos mudam a ordem dos nós nas posições 0,Ly e Lx,Ly
% para que as equações descreitas por Manconi possam ser usadas

Ke=[Ke(1:tam2,1:tam2) Ke(1:tam2,3*tam4+1:end) Ke(1:tam2,tam2+1:3*tam4);
    Ke(3*tam4+1:end,1:tam2) Ke(3*tam4+1:end,3*tam4+1:end)
Ke(3*tam4+1:end,tam2+1:3*tam4);
    Ke(tam2+1:3*tam4,1:tam2) Ke(tam2+1:3*tam4,3*tam4+1:end)
Ke(tam2+1:3*tam4,tam2+1:3*tam4)];
Me=[Me(1:tam2,1:tam2) Me(1:tam2,3*tam4+1:end) Me(1:tam2,tam2+1:3*tam4);
    Me(3*tam4+1:end,1:tam2) Me(3*tam4+1:end,3*tam4+1:end)
Me(3*tam4+1:end,tam2+1:3*tam4);
    Me(tam2+1:3*tam4,1:tam2) Me(tam2+1:3*tam4,3*tam4+1:end)
Me(tam2+1:3*tam4,tam2+1:3*tam4)];

tam=length(Ke)/2;
tam2=tam/2;
tam4=tam/4;

%% Matrizes auxiliares para Zhong

Ic=eye(tam2); % Identidade com tamanho de uma célula
Zc=zeros(tam2);
J=[Zc Ic;-Ic Zc];
Jn1=[0 1;-1 0];
digits(24);

%% Encontrar Lambda_x exato
De=Ke-(Freqw^2)*Me;

% Separa-se a matriz em células, conforme descrito na tese de doutorado
% de Manconi (2008)

D11=De(1:tam2,1:tam2);
D12=De(1:tam2,(tam2+1):2*tam2);
D13=De(1:tam2,(2*tam2+1):3*tam2);
D14=De(1:tam2,(3*tam2+1):4*tam2);
D22=De((tam2+1):2*tam2,(tam2+1):2*tam2);
D23=De((tam2+1):2*tam2,(2*tam2+1):3*tam2);
D24=De((tam2+1):2*tam2,(3*tam2+1):4*tam2);
D33=De((2*tam2+1):3*tam2,(2*tam2+1):3*tam2);
D34=De((2*tam2+1):3*tam2,(3*tam2+1):4*tam2);
D44=De((3*tam2+1):4*tam2,(3*tam2+1):4*tam2);

% Para se encontrar Lambda_x

```

```

D11x=D11+D13+D13'+D33;
D1rx=D12+D14+D23'+D34;
Drrx=D22+D24+D24'+D44;

%% Método de Zhong

L=[Ic Zc;D11x D1rx];
N=[Zc Ic;-D1rx' -Drrx];
A=N-N'-J;
B=transpose(N)*J+L-(transpose(N)*J+L)';

Z1=[Zc D1rx;-D1rx' Zc];
Z2=[D1rx-D1rx' -D11x-Drrx;D11x+Drrx D1rx-D1rx'];

if cond(Z1)<cond(Z2)
    Z=Z1\Z2;
    EVx=eigs(Z,2*nSaidas,'sm');
else
    Z=Z2\Z1;
    EVx=eigs(Z,2*nSaidas);
    EVx=1./EVx;
end

EVx=sort(EVx);
EVx=EVx(1:2:end,:);

EVxr=real(EVx);
EVxi=imag(EVx);
EVxr(abs(EVxr)<1e-7)=0;
EVxi(abs(EVxi)<1e-7)=0;

EVxi(abs(EVxi-[0;EVxi(1:end-1)])<1e-7)=0;
EV_aux=[0;-(EVxi(1:end-1))];
EVxi=EVxi+EV_aux;

EVx=complex(EVxr,EVxi);

% EV são os autovalores da equação 5.2 (ou 5.4). EM seguida deve-se
% encontrar os autovalores de 2.13 a partir dos autovalores
% da equação 5.4

% Utiliza-se Bhaskara para se separar 'mi' de '1/mi'. Como o problema é
% simétrico, 'mi' e '1/mi' representam propagações idênticas em forma e
% magnitude, porém com direções opostas. Aqui escolhe-se utilizar
% sempre o valor com magnitude menor que 1.

EVxf=zeros(nSaidas,1);

for k=1:nSaidas
    EVxf(k)=(EVx(k)-sqrt(EVx(k)^2-4))/2;
    if abs(EVxf(k))>1
        EVxf(k)=(EVx(k)+sqrt(EVx(k)^2-4))/2;
    end
end
% Próximo passo é encontrar os autovetores de 2.13:

% pela definição 'L*EVf(k)-N' produz uma matriz de determinante 0,
% utilizando a função 'null' encontra-se o autovetor WM0 tal que
% (L*EVf(k)-N)*WM0=M0*WM0=0

```

```

        WMx0=vpa (null (L*EVxf (k) -N) );
%      % ocorreram problemas numéricos, provavelmente de arredondamento,
onde
%      % para dois autovalores, um conjugado do outro, encontra-se o
autovetor
%      % de um mas não de outro, neste caso verifica-se que 0 valor entre
'mi'
%      % e '1/mi' com magnitude maior que 1 não apresenta o mesmo problema e
é
%      % utilizado
% %
% %     if isempty(WM0)==1
% %         EVf(k)=(EV(k)-sqrt(EV(k)^2-4))/2;
% %         if abs(EVf(k))<1
% %             EVf(k)=(teste(k)+sqrt(teste(k)^2-4))/2;
% %         end
% %         WM0=vpa (null (L*EVf(k) -N) );
% %     end
% a função 'null' encontra 'size(M0)-rank(M0)' vetores que satisfazem
% à equação acima, porém, até onde pode testar, o vetor que melhor
% aproxima M0*WM0 de 0 é o que se encontra na última coluna, e portanto
% este é o usado.
        WM1=WMx0 (:,end) ;
% os vetores encontrados por 'null' sempre têm magnitude igual a 1,
% porém, pode ser que o mesmo vetor esteja na direção negativa em
% relação ao autovetor encontrado na iteração anterior, portanto se
% utiliza os seguintes comandos para que o valor máximo do deslocamento
% real do nó 1, DOFs 1-3, sempre seja positivo
        WMr=imag (WM1 (1:3) );
        [MAX,Ind]=max (abs (WMr) );
        WM1=WM1*sign (WMr (Ind) +1e-15) ;
        WMx (:,k)=L*WM1;
end

WN_kx=1i*log (EVxf) /0.0001;

rWNx=abs (real (WN_kx) );
rWNx (rWNx<1e-9)=0;
rWNx=rWNx/0;

iWNx=abs (imag (WN_kx) );
iWNx (abs (iWNx)<1e-9)=0;
iWNx=iWNx/0;

cWNx=rWNx+iWNx;
pWMx=cWNx;

cWNx (isinf (cWNx) )=0;

pWMx (~isinf (pWMx) )=0;
pWMx (isinf (pWMx) )=nan;

compWN_kx=WN_kx+cWNx;
pureWN_kx=WN_kx+pWMx;

compWN_kx (isnan (compWN_kx) )=0;
pureWN_kx (isnan (pureWN_kx) )=0;

rpureWN_kx=real (pureWN_kx) ;

[MAX,Ind]=max (abs (rpureWN_kx) );

```

```

pWN_kxMax=WN_kx(Ind);
EVxfMax=EVxf(Ind);
pMIx=pWN_kxMax*Plate.1;

Lambda=zeros(tam,NdPontos);
WN_mi=zeros(tam,NdPontos);
WMy=zeros(tam,NdPontos*tam);

%% Loop
for j=1:NdPontos

Lambda_x=exp(-1i*pMIx*cosd(180*(j-1)/NdPontos));
LLX=Lambda_x;

% Para se encontrar Lambda_y
Dlly=(LLX^2)*D12+LLX*(D11+D22)+D12';
Dlry=(LLX^2)*D14+LLX*(D13+D24)+D23;
Drly=(LLX^2)*D23'+LLX*(D13'+D24')+D14';
Drry=(LLX^2)*D34+LLX*(D33+D44)+D34';

L=[Ic Zc;Dlly Dlry];
N=[Zc Ic;-Drly -Drry];

Z1=[Zc Dlry;-Drly Zc];
Z2=[Dlry-Drly -Dlly-Drry;Dlly+Drry Dlry-Drly];

if cond(Z1)<cond(Z2)
Z=Z1\Z2;
EV=eig(Z);
else
Z=Z2\Z1;
EV=eig(Z);
EV=1./EV;
end

EV=sort(EV);
EV=EV(1:2:end,:);

EVr=real(EV);
EVi=imag(EV);
EVr(abs(EVr)<1e-9)=0;
EVi(abs(EVi)<1e-9)=0;

EVi(abs(EVi-[0;EVi(1:end-1)])<1e-9)=0;
EV_aux=[0;-(EVi(1:end-1))];
EVi=EVi+EV_aux;

EV=complex(EVr,EVi);

EVf=zeros(tam,1);

for k=1:tam2
EVf(k)=(EV(k)-sqrt(EV(k)^2-4))/2;
EVf(k+tam2)=(EV(k)+sqrt(EV(k)^2-4))/2;
end

Lambda(:,j)=EVf;
WN_mi(:,j)=1i*log(EVf);

```

```

%% Fim do Loop
end

WN_ky=1i*log(Lambda)/0.0001;

rWNy=abs(real(WN_ky));
rWNy(rWNy<1e-2)=0;
rWNy=rWNy/0;

iWNy=abs(imag(WN_ky));
iWNy(abs(iWNy)<1e-2)=0;
iWNy=iWNy/0;

cWNy=rWNy+iWNy;
pWMy=cWNy;

cWNy(isinf(cWNy))=0;

pWMy(~isinf(pWMy))=0;
pWMy(isinf(pWMy))=nan;

compWN_ky=WN_ky+cWNy;
pureWN_ky=WN_ky+pWMy;

compWN_ky(isnan(compWN_ky))=0;
pureWN_ky(isnan(pureWN_ky))=0;

plot_pWN=real(pureWN_ky);
plot_pWN(abs(plot_pWN)<0.01)=NaN;

hFig = figure(1);
set(hFig, 'Position', [100 100 800 800])

for kk=1:2*nSaidas
    plot(pWN_kxMax*cosd(0:180/NdPontos:180-
180/NdPontos),plot_pWN(kk,:),'.','MarkerSize',2)
    plot(pWN_kxMax*cosd(0:180/NdPontos:180-180/NdPontos),-
plot_pWN(kk,:),'.','MarkerSize',2)
    axis([-300 300 -300 300])
    hold on
end

```

Plotagem das formas dos modos de onda

Direção x, porém, para encontrar-se os valores na direção y basta a substituição de "WMx_data_post" e "WNx_data_post" por "WMy_data_post" e "WNY_data_post", respectivamente

```

%% Saneamento
clc
clear all
close all

%% INPUT

load Placa10_0001_DF10_10kHz_En_DensMod.mat

```

```

Freq=XXXX; % Frequência que se deseja estudar
MODO=XXXX; % Modo que se deseja estudar
NdEF=3; % Número de elementos por face
NdET=tam4/3-1; % Número total de elementos
HF=0.3; % Espessura da face
HT=10; % Espessura do painel

%%
[~,Freq_ind]=min(abs(w-Freq*2*pi)); % Posição da frequência nas matrizes
Freq_data=w(Freq_ind); % Frequência calculada
NdEC=NdET-2*NdEF; % Número de elementos no Core
HC=HT-2*HF; % Espessura do core
NpD=tam4/nDOF; % Nós por DOF

%% Plot de autovetores
% Remoção de valores muito pequenos

WMxqr=real(WMx_data_post((Freq_ind-1)*tam4+1:Freq_ind*tam4,MODO,1));
WMxfr=real(WMx_data_post((Freq_ind-1)*tam4+1:Freq_ind*tam4,MODO,2));
WMxqi=imag(WMx_data_post((Freq_ind-1)*tam4+1:Freq_ind*tam4,MODO,1));
WMxfi=imag(WMx_data_post((Freq_ind-1)*tam4+1:Freq_ind*tam4,MODO,2));
WMxqr(abs(WMxqr)<max(abs([WMxqr;WMxqi]))/1e5)=0;
WMxqi(abs(WMxqi)<max(abs([WMxqr;WMxqi]))/1e5)=0;
WMxfr(abs(WMxfr)<max(abs([WMxfr;WMxfi]))/1e5)=0;
WMxfi(abs(WMxfi)<max(abs([WMxfr;WMxfi]))/1e5)=0;

WM_data_plot=complex([WMxqr;WMxfr],[WMxqi;WMxfi]);

WMx_plot(:, :, 1)=[WM_data_plot(1:3:tam4, :) ...
    WM_data_plot(2:3:tam4, :) ...
    WM_data_plot(3:3:tam4, :)];

WMx_plot(:, :, 2)=[WM_data_plot(tam4+1:3:end, :) ...
    WM_data_plot(tam4+2:3:end, :) ...
    WM_data_plot(tam4+3:3:end, :)];

clear WMxqr WMxfr WMxqi WMxfi WM_data_plot

figure(1)

subplot(4,3,1)
plot(1:NpD, real(WMx_plot(:,1,1)))
axis([1 NpD -max(abs(ylim))*1.1 max(abs(ylim))*1.1])
set(gca, 'xtick', 1+[0 NdEF NdET-NdEF NdET])
set(gca, 'ytick', 0)
set(gca, 'YTickLabel', [])
grid on
ylabel('Re\{q\}', 'FontSize', 14)
title('x', 'FontSize', 14)

subplot(4,3,4)
plot(1:NpD, imag(WMx_plot(:,1,1)))
axis([1 NpD -max(abs(ylim))*1.1 max(abs(ylim))*1.1])
set(gca, 'xtick', 1+[0 NdEF NdET-NdEF NdET])
set(gca, 'ytick', 0)
set(gca, 'YTickLabel', [])
grid on
ylabel('Im\{q\}', 'FontSize', 14)

```

```

subplot(4,3,2)
plot(1:NpD,real(WMx_plot(:,2,1)))
axis([1 NpD -max(abs(ylim))*1.1 max(abs(ylim))*1.1])
set(gca,'xtick',1+[0 Ndef Ndef-Ndef Ndef])
set(gca,'ytick',0)
set(gca,'YTickLabel',[])
grid on
title('y','FontSize',14)

subplot(4,3,5)
plot(1:NpD,imag(WMx_plot(:,2,1)))
axis([1 NpD -max(abs(ylim))*1.1 max(abs(ylim))*1.1])
set(gca,'xtick',1+[0 Ndef Ndef-Ndef Ndef])
set(gca,'ytick',0)
set(gca,'YTickLabel',[])
grid on

subplot(4,3,3)
plot(1:NpD,real(WMx_plot(:,3,1)))
axis([1 NpD -max(abs(ylim))*1.1 max(abs(ylim))*1.1])
set(gca,'xtick',1+[0 Ndef Ndef-Ndef Ndef])
set(gca,'ytick',0)
set(gca,'YTickLabel',[])
grid on
title('z','FontSize',14)

subplot(4,3,6)
plot(1:NpD,imag(WMx_plot(:,3,1)))
axis([1 NpD -max(abs(ylim))*1.1 max(abs(ylim))*1.1])
set(gca,'xtick',1+[0 Ndef Ndef-Ndef Ndef])
set(gca,'ytick',0)
set(gca,'YTickLabel',[])
grid on

NELEM=50;

POW=abs(floor(2*pi/imag(WNx_data_post(MODO,Freq_ind,1))))/NELEM;

PX=WMx_plot(:,1,1)*...
    ((ones(1,NELEM)*(WNx_data_post(MODO,Freq_ind,1))).^(POW*(1:NELEM)));
PZ=WMx_plot(:,3,1)*...
    ((ones(1,NELEM)*(WNx_data_post(MODO,Freq_ind,1))).^(POW*(1:NELEM)));

HZ=[0:HF/Ndef:HF HF+HC/Ndec:HC/Ndec:HC+HF-HC/Ndec HC+HF:HF/Ndef:HT]';

PX=PX/max(max(abs(PX)));
PZ=PZ/max(max(abs(PZ)));

subplot(2,2,3:4)
plot(ones(NpD,1)*((0:NELEM-1))+PX/2,HZ*ones(1,NELEM)+PZ*HZ(2),...
    '.b','MarkerSize',ceil(30/sqrt(NELEM)))
axis([-1 (NELEM+1)...
    -2*HZ(2) HZ(end)+2*HZ(2)])
set(gca,'YTick',[0 HZ(ceil(length(HZ)/2)) HZ(end)])
set(gca,'YTickLabel',{'','0',''})
set(gca,'XTick',real(NELEM*[0 1 2 3 4]/4))
set(gca,'XTickLabel',[])
set(gca,'XTickLabel',{'0','{\pi}/2','{\pi}','3{\pi}/2','2{\pi}''})
grid on

```

```

figure(2)
plot(w/2/pi,abs(real(compWNx_k(:,:))), '-.b',...
     w/2/pi,-abs(imag(compWNx_k(:,:))), '-.b', 'MarkerSize',2)
hold on
plot(w/2/pi,abs(real(pureWNx_k(:,:))), '.r',...
     w/2/pi,-abs(imag(pureWNx_k(:,:))), '.k', 'MarkerSize',4)
axis([0 maxfreq -maxk maxk])
ylabel('Im\{k_x\}[rad/m]
Re\{k_x\}[rad/m]', 'FontSize',14)
xlabel('Frequency [Hz]')
hold on
plot(w/2/pi,zeros(length(w)), '.k', 'MarkerSize',4)
hold on
plot(w(Freq_ind)/2/pi,...
     abs(real(1i*log(WNx_data_post(MODO,Freq_ind,1))/ElemL))...
     , '.g',w(Freq_ind)/2/pi,...
     -abs(imag(1i*log(WNx_data_post(MODO,Freq_ind,1))/ElemL))...
     , '.g', 'MarkerSize',16)
title(['Modo ', num2str(MODO), ' a ', num2str(w(Freq_ind)/2/pi), 'Hz'])

```