PLANEJAMENTO ECONÔMICO DE GRÁFICOS $\overline{X}$ E R PARA PROCESSOS REGENERATIVOS E NÃO REGENERATIVOS

Osiris Turnes
Departamento de Estatística, Instituto de Ciências Exatas,
Universidade de Brasília, Campus Universitário
"Darcy Ribeiro", Asa Norte, Brasília, DF, CEP 70910-900,
e-mail: osiris@unb.br

Linda Lee Ho
Departamento de Engenharia de Produção da Escola Politécnica da USP,
Av. Prof. Almeida Prado, travessa 2, n. 128, CEP 05508-900, São Paulo, SP,
e-mail: lindalee@usp.br

Christian Rainier Imaña
Mathematische Fakultät Universität Göttingen, Göttingen, Alemanha

Recebido em 27/2/2003
Aceito em 27/8/2003

Resumo

Neste estudo é realizada uma comparação entre dois modelos de planejamento econômico de gráficos de controle $\overline{X}$-R. O primeiro modelo propõe que a distribuição do tempo em que o processo se mantém sob controle tem por propriedade a falta de memória; este modelo é apropriado para modelar processos não regenerativos. No segundo modelo, esta propriedade não é mais válida, sendo adequada para processos regenerativos.

Palavras-chave: planejamento econômico de gráficos de controle, gráficos de controle $\overline{X}$-R.

1. Introdução

O planejamento constitui um quesito importante para a implantação dos gráficos de controle, como instrumento de monitoramento do processo produtivo. Nesse sentido, muitos modelos foram desenvolvidos para todos os tipos de planejamento conhecidos: empírico, probabilístico, econômico e econômico-estatístico. De modo geral, modelos de planejamento estritamente econômicos utilizam escalas de tempo contínuas e supõem que o tempo em que o processo permanece sob controle segue uma distribuição exponencial. Já para as escalas discretas, a suposição é de tempos geometricamente distribuídos. Há muitos trabalhos publicados sobre este assunto (uma revisão pode ser encontrada nos trabalhos de Ho & Case (1994) e Montgomery (1980)). O enfoque deste trabalho é utilizar os modelos de planejamento econômico de cartas de controle desenvolvidos por Baker (1971), intitulados Baker A e Baker B. O primeiro (modelo A) afirma que o tempo em que o processo se mantém sob controle não é afetado pela ocorrência de alarmes falsos (caso em que o processo é chamado não regenerativo); o segundo nega essa afirmação (processo regenerativo). O trabalho de Baker (1971) aborda exclusivamente o planejamento econômico de gráficos de controle $\overline{X}$. Utilizando uma alternativa à suposição Markoviana, mostra que o uso não apropriado da distribuição geométrica pode levar a resultados errôneos em certos casos. Conclui que a caracterização do tempo em que o processo fica sob controle é fundamental para a construção de modelos. O presente artigo estende os modelos de Baker (1971) para o planejamento de gráficos de controle $\overline{X}$ e R simultaneamente. Na seção 2, estão descritos os modelos de Baker (modelo A e modelo B) para o planejamento econômico de gráficos de controle $\overline{X}$. Na seção 3 é desenvolvida uma extensão dos planejamentos econômicos de Baker (1971) para os gráficos $\overline{X}$-R e na seção 4, o planejamento de cartas de controle foi obtido para um conjunto de parâmetros. Conclusões e sugestões para pesquisas futuras estão na última seção.

2. Modelos econômicos desenvolvidos por Baker

Considera-se um processo em tempo discreto aquele cuja característica de qualidade de interesse é uma variável contínua. O processo se inicia no estado sob controle em um nível μ_0 e desvio-padrão σ_0. A ocorrência de uma causa especial desvia a média do processo para $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$. O procedimento de controle detecta esse desvio algum tempo depois. Uma ação corretiva é então implementada e o processo é restaurado. O ciclo, assim, se repete. O sistema permanece sob controle durante T períodos, em que T é uma variável aleatória discreta com função de probabilidade $p_t = Pr\{T = t\},\ t = 0, 1, 2, ...$, e t é a soma dos subperíodos decorridos entre as retiradas de amostras até que a coleta resulte em alarme no processo. Os intervalos de tempo entre as amostras são estabelecidos pelo administrador, técnico ou engenheiro responsável pelo processo de monitoramento. Supõe-se que o desvio ocorre no início de um período com probabilidade p_t e a amostragem é realizada ao final de cada período. O par (n, k) de parâmetros (n, tamanho da amostra e k, coeficiente do limite de controle) descreve um plano amostral, cuja determinação está associada a uma função de custo que deve ser minimizada. Os custos considerados pelos modelos são: a_1 é o custo de inspeção de um item de determinada amostra; a_2 é o custo de interrupção do processo e procura da causa assinalável; e a_3 é o custo por operar fora de controle por um período composto de subperíodos e correspondente ao intervalo entre duas inspeções.

2.1 Modelo A

O modelo A assume que a duração do tempo T, em que o processo permanece sob controle, segue uma distribuição geométrica:

$$p_t = \pi(1-\pi)^t \qquad t = 0,1,2,...$$

em que π é a probabilidade de a média do processo sofrer um desvio. Dessa forma, o sistema pode ser caracterizado por uma seqüência de intervalos $\{T_1, S_1, T_2, S_2, ...\}$, em que cada período sob controle T_i, $i = 1,2,...$, é seguido de um período fora de controle a partir do desvio do processo S_i, $i = 1,2,...$, independentemente do número de falsos alarmes que ocorre. T_i é o número de períodos em que o processo se mantém sob controle, a partir do (i–1)-ésimo reparo até o i-ésimo desvio e S_i é o número de inspeções feitas desde o i-ésimo desvio até a deflagração da ação corretiva. Haverá a probabilidade de ocorrer um sinal de alarme (α) durante um intervalo sob controle quando um ponto amostral for registrado fora dos limites de controle do gráfico, ou seja:

$$\alpha = Pr\left\{ \left|\bar{X} - \mu\right| > k\sigma_{\bar{x}} \mid \mu = \mu_0 \right\} =$$
$$= \Phi(-k) + 1 - \Phi(k) = 2\Phi(-k)$$

em que $\Phi(\cdot)$ representa a função de distribuição da normal padronizada. Analogamente, um sinal de alarme ocorrerá com probabilidade:

$$1 - \beta = Pr\left\{ \left|\bar{X} - \mu\right| > k\sigma_{\bar{x}} \mid \mu = \mu_0 + \delta\sigma_0 \right\} =$$
$$= \Phi(-k - \delta\sqrt{n}) + 1 - \Phi(k - \delta\sqrt{n})$$

Nessas condições, o custo médio por unidade de tempo (ATC_A) desenvolvido por Baker (1971) é dado por:

$$ATC_A = a_1 n + \frac{a_2[(1-\beta)\pi + (1-\beta)\alpha(1-\pi)] + a_3\pi}{(1-\beta)(1-\pi) + \pi} \quad (1)$$

2.2 Modelo B

Em muitos casos não faz sentido supor que o tempo sob controle seja independente do número de falsos alarmes que ocorre. Por exemplo, na produção de parafusos de metal, um desvio usualmente é conseqüência do aumento de temperatura resultante da fricção na produção contínua dos parafusos. Quando ocorre um alarme falso e se procura a causa específica, o processo é interrompido, a temperatura da máquina diminui e o processo se regenera. Assim, a ocorrência de um desvio é retardada e a duração do tempo sob controle corresponde somente ao intervalo anterior à procura da suposta causa. Em tal sistema, o período sob controle pode ser prolongado pela ocorrência de alarmes falsos e é seguido de um período fora de controle assim que o processo se desvia. Neste modelo, Baker (1971) utilizou uma distribuição Poisson de parâmetro θ para descrever o tempo em que o processo permanece sob controle, ou seja, $p_t = exp(-\theta)\theta^t/t!$. Em situações práticas, o parâmetro θ pode ser interpretado como sendo o volume médio produzido quando o processo está sob controle. Nestas condições, o custo esperado por unidade de tempo (ATC_B) desenvolvido por Baker (1971) é dado por:

$$ATC_B = a_1 n + \frac{a_2\alpha\,(1-\beta) + a_3\alpha\, e^{-\alpha\theta}}{(1-\beta)\left(1 - e^{-\alpha\theta}\right) + \alpha\, e^{-\alpha\theta}} \quad (2)$$

3. Modelo econômico para gráficos $\bar{X}$ e R

Uma ênfase maior no planejamento econômico de gráficos de controle por variáveis tem sido dada aos gráficos $\bar{X}$. Todavia, na prática, o controle do processo de variáveis é feito, geralmente, utilizando os gráficos $\bar{X}$ e R. Segundo Duncan, *apud* Saniga (1977), o uso simultâneo de um gráfico $\bar{X}$ (para controlar a média do processo) e de um gráfico R (para controlar a variabilidade do processo) "irá dar um bom controle do processo como um todo". Fazendo referência ao planejamento estatístico, Duncan afirma que os gráficos $\bar{X}$ e R devem ser planejados simultaneamente. Assim, planejar simultaneamente os gráficos $\bar{X}$ e R significa selecionar o tamanho da amostra n, o intervalo interamostral h e os coeficientes dos limites de controle dos gráficos $\bar{X}$ e R, respectivamente, k_1 e k_2. Os limites de controle para o gráfico $\bar{X}$ são definidos como:

$$LIC_{\bar{X}} = \mu_0 - k_1 \sigma_0 / \sqrt{n} \quad \text{e} \quad LSC_{\bar{X}} = \mu_0 + k_1 \sigma_0 / \sqrt{n}$$

e o limite $LSC_R = k_2 s_0$, para o gráfico R, considerando apenas desvios unilaterais. Neste caso, o limite inferior do gráfico R será fixado em 0 (zero). O intervalo interamostral h foi fixado em uma unidade de tempo. Se a característica de qualidade é normalmente distribuída com parâmetros μ_0 e σ_0 quando o processo está operando sob controle e também é normalmente distribuída com parâmetros μ_1 e σ_1 quando uma causa especial está presente, então a probabilidade de ocorrer um falso alarme nos gráficos $\bar{X}$ e R (erro do tipo I) é dada por:

$$\alpha = \alpha_{\bar{X}} + \alpha_R - \alpha_{\bar{X}}\alpha_R \tag{3}$$

visto que $\bar{X}$ e R são estatisticamente independentes, α_i denota a probabilidade de um falso alarme dado pelo gráfico $i = \bar{X}$, R. Similarmente, a probabilidade de ocorrer um alarme quando o processo não está sob controle é dada por:

$$1 - b = (1 - b_{\bar{X}}) + (1 - b_R) - (1 - b_{\bar{X}})(1 - b_R) = 1 - b_{\bar{X}} b_R \tag{4}$$

com $(1 - \beta_i)$ denotando a probabilidade de um alarme dado pelo gráfico $i = \bar{X}$, R. Sob a suposição de normalidade, os termos das expressões (3) e (4) são respectivamente dados por:

$$a = 2\bar{\Phi}(k_1) + \bar{F}_W(k_2) - 2\bar{\Phi}(k_1)\bar{F}_W(k_2) = $$
$$= 1 + F_W(k_2) - 2\Phi(k_1)F_W(k_2) \tag{5}$$

$$1 - \beta = 1 - \left[\Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_1}\sqrt{n} + \frac{k_1\sigma_0}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_1}\sqrt{n} - \frac{k_1\sigma_0}{\sigma_1}\right)\right] F_W\left(\frac{k_2\sigma_0}{\sigma_1}\right) \tag{6}$$

em que $\Phi(.)$ denota a função de distribuição da normal-padrão e $F_W(.)$ é a função distribuição de $W = R/s$. Pearson (1942) e Hartley (1942) tabularam os valores de F_W para $2 \le n \le 20$.

Inserindo as expressões (5) e (6) em (1) e (2) obtêm-se os custos médios dos modelos A e B.

4. Resultados numéricos

Foram obtidos planejamentos econômicos a partir dos dois modelos de Baker (1971), utilizando o seguinte conjunto de parâmetros:

- θ = 25; 100 e 250; δ = 0; 0,5 e 1,5; σ_1/σ_0 = 1; 2 e 3;
- a_1 = 0,2; 0,5 e 1,0; a_2 = 100; a_3 = 100 e 1.000;
- C_{12} = 0,002; 0,005 e 0,01; C_3 = 1 e 10

com: $C_{12} = a_1/a_2$ e $C_{32} = a_3/a_2$. As Tabelas 1 a 9 exibem o tamanho das amostras e os coeficientes dos limites de controle para os planos econômicos considerados, apresentando também para comparação os valores de α, $1 - \beta$ e o custo mínimo. Algumas observações devem ser destacadas:

- Os resultados rotulados como modelo A nas tabelas são os valores ótimos de tamanho da amostra e limites de controle dos gráficos, que minimizam (1), encontrados por procura direta. Esses valores são substituídos em (2) para calcular os custos esperados em razão do uso inadequado do modelo A em processos regenerativos.
- Os resultados rotulados como modelo B correspondem aos valores ótimos encontrados por (2) e se referem ao modelo B usado corretamente.
- Encontrar o mínimo das expressões (1) e (2) não é tarefa fácil. Por isso, buscou-se solucionar o problema por meio da técnica de procura direta em grade, utilizando o programa computacional *SMODELS* (Turnes & Sleegers, 1999; Turnes & Imaña, 2000), desenvolvido na Universidade de Brasília (UnB) para esse propósito;
- O tamanho ótimo de amostra para gráficos $\bar{X}$ e R, no programa SMODELS, está restrito aos valores das tabelas de Pearson (1942) e Hartley (1942). Ou seja, o tamanho de amostra limita-se ao intervalo $2 \le n \le 20$. Caso o tamanho ótimo seja superior a 20, o programa finaliza a busca em n = 20 e calcula o custo médio (ATC) e os demais resultados (k_1, k_2, e $1 - \beta$). Procedimento similar ocorre quando o tamanho ótimo for igual a n = 1. Neste caso, o programa finaliza a busca em n = 2.
- Quando s_1/s_0 = 1, os resultados obtidos equivalem a planejar apenas a carta $\bar{X}$, que coincidem com os obtidos por Baker (1971) a menos de aproximações realizadas em função do uso de tabelas.

Assim, de maneira geral, os valores tabelados mostram que o planejamento dos gráficos depende muito da adequação dos modelos utilizados, tornando relevante a observação de alguns aspectos:

1. Nota-se que, quando é adotado o modelo correto para processos regenerativos, os planos ótimos são semelhantes (tamanho da amostra, coeficientes dos limites de controle). Isso é mais evidente quando for maior o tempo em que o processo estiver sob controle, ainda que o custo de amostragem seja alto. Exemplos visíveis nas colunas modelo B, quando θ =100 e θ = 250.

2. O uso inadequado do modelo A para processos regenerativos sempre exige tamanhos de amostra maiores. (Basta comparar os resultados dos modelos A e B. Por exemplo, **na Tabela 2, quando** σ_1/σ_0 = 2,0, C_{12} = 0,002 e C_{32} = 1, uma amostra de n = 10 é requerida no modelo A enquanto este valor decresce para n = 6 no modelo B.)

3. A razão entre os tamanhos das amostras nos modelos A e B aumenta quando o custo de manter o processo fora de controle é muito maior do que o de interrompê-lo em razão de alarme (compare as colunas dos modelos A e B quando C_{32} = 1 e C_{32} = 10).

4. Quando o custo de operar fora de controle é alto, o desvio é mais rapidamente detectado (nos dois modelos, os valores de $1 - \beta$ quando C_{32} = 10 são sempre maiores que os valores de $1 - \beta$ quando C_{32} = 1).

5. No modelo A, quando o custo de operar fora de controle for muito maior que o custo da interrupção por alarme falso, o tamanho da amostra requerido é pelo menos o dobro do tamanho requerido quando o custo de operar fora de controle for igual ao custo de interrupção por alarme falso (por exemplo, na Tabela 2, quando σ_1/σ_0 = 2,0 e C_{12} = 0,002, o tamanho de amostra ótimo é de n = 10 quando C_{32} = 1 e aumenta para n = 20 quando C_{32} = 10). Por outro lado, quando o modelo B é usado corretamente para processos regenerativos na mesma condição, os tamanhos das amostras ótimos são semelhantes (na mesma tabela, amostra com n = 5 quando C_{32} = 10 e n = 6 quando C_{32} = 1).

6. À medida que o custo de amostragem aumenta, os dois modelos exigem tamanhos de amostras menores (por exemplo, na Tabela 2 quando C_{32} = 1 e σ_1/σ_0 = 2,0, os tamanhos de amostras são 10, 6 e 4, respectivamente, para C_{12} = 0,002; 0,005 e 0,01).

7. Conforme as Tabelas 4 a 9, o Modelo B tende a exigir amostras de tamanho 2 (o tamanho mínimo das Tabelas de Pearson (1942) e Hartley (1942)) em processos com maior período sob controle (vide Tabelas 4 a 9 quando θ = 100 e θ = 250).

8. Os custos esperados do modelo B, aplicados corretamente a processos regenerativos, são sempre menores do que os do modelo A (essa constatação pode ser observada em todas as tabelas).

9. Os custos ótimos dos dois modelos são semelhantes quando o custo de operar fora de controle é igual ao custo de interrupção do processo (isto é, quando C_{32} = 1). Veja, por exemplo, na Tabela 3, que, quando σ_1/σ_0 = 3,0 e C_{12} = 0,002, os custos são 9,30 e 9,03, respectivamente, para os modelos A e B. No entanto, o custo do modelo A chega a ser o dobro do modelo B quando o custo de operar fora de controle for bem maior que o de interrupção do processo (quando C_{32} = 10). Na Tabela 2, por exemplo, quando σ_1/σ_0 = 2,0 e C_{12} = 0,005, os custos são, respectivamente, 44,84 e 21,67 para os modelos A e B.

Tabela 1 – Resultados das simulações para q **= 25 e** d **= 0,0.**

		s_1/s_2 = 2,0				**s_1/s_1 = 3,0**			
		C_{32}				***C_{32}***			
		1		**10**		**1**		**10**	
		Modelo		**Modelo**		**Modelo**		**Modelo**	
C_{12}		**A**	**B**	**A**	**B**	**A**	**B**	**A**	**B**
0,002	n	11	7	20	5	6	5	13	4
	k_1	3,52	3,02	3,34	2,02	3,48	2,97	3,78	2,13
	k_2	5,45	4,45	5,45	3,45	5,45	4,55	5,75	3,20
	ATC	11,10	10,35	41,45	20,58	9,51	9,21	44,02	19,78
	α	0,00593	0,03006	0,01772	0,14373	0,00210	0,01424	0,00346	0,13652
	$1 - \beta$	0,73461	0,74935	0,94157	0,82946	0,85003	0,88338	0,98564	0,93802
0,005	n	6	3	16	3	4	3	9	2
	k_1	3,14	2,32	3,16	1,94	3,39	2,62	3,39	1,71
	k_2	4,85	3,65	5,25	2,85	4,85	3,95	5,30	2,60
	ATC	12,91	11,67	45,38	21,78	10,79	10,26	45,64	20,72
	α	0,00968	0,04640	0,02045	0,15520	0,00410	0,02307	0,00630	0,14751
	$1 - \beta$	0,58908	0,55803	0,91394	0,72368	0,75677	0,77102	0,96188	0,80803
0,01	n	4	2	10	2	3	2	7	2
	k_1	2,88	2,26	2,86	1,74	3,12	2,46	3,12	1,71
	k_2	4,45	3,05	4,65	2,45	4,55	3,35	4,85	2,60
	ATC	14,78	12,83	43,08	22,92	12,27	11,33	46,32	21,72
	α	0,01294	0,05408	0,03809	0,15825	0,00550	0,03145	0,01259	0,14751
	$1 - \beta$	0,49527	0,47564	0,86110	0,63149	0,67841	0,67212	0,94326	0,80803

Tabela 2 – Resultados das simulações para q = 25 e d = 0,5.

		s_1/s_0 = 1,0				s_1/s_0 = 2,0				s_1/s_0 = 3,0			
		C_{32}				C_{32}				C_{32}			
		1		10		1		10		1		10	
		Modelo		Modelo		Modelo		Modelo		Modelo		Modelo	
C_{12}		A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
0,002	*n*	20	12	20	11	10	6	20	5	6	5	12	4
	k_1	2,27	1,87	1,59	1,39	3,29	2,65	3,16	2,02	3,57	2,93	3,54	2,12
	k_2	7,25	7,00	7,25	6,95	5,45	4,45	5,45	3,45	5,45	4,55	5,75	3,20
	ATC	14,67	13,60	25,50	23,33	10,92	10,22	40,70	20,49	9,49	9,20	44,07	19,77
	α	0,02321	0,06148	0,11183	0,16453	0,00560	0,02838	0,01845	0,14373	0,00196	0,01465	0,00320	0,13727
	$1-\beta$	0,48803	0,44449	0,74222	0,60756	0,73193	0,72660	0,95641	0,84626	0,85450	0,88957	0,98174	0,94081
0,005	*n*	15	4	20	4	6	3	15	3	4	3	9	2
	k_1	2,15	1,66	1,59	1,31	3,09	2,39	2,94	1,97	3,31	2,62	3,36	1,82
	k_2	7,15	6,35	7,25	6,35	4,85	3,65	5,25	2,85	5,00	3,95	5,30	2,45
	ATC	18,87	15,74	31,50	25,33	12,63	11,53	44,84	21,67	10,81	10,23	45,49	20,71
	α	0,03155	0,09692	0,11183	0,19020	0,00999	0,04300	0,02030	0,15204	0,00323	0,02307	0,00638	0,14624
	$1-\beta$	0,41686	0,26187	0,74222	0,38900	0,62303	0,57279	0,91968	0,73698	0,75302	0,77834	0,96508	0,80985
0,01	*n*	9	2	20	2	4	2	10	2	3	2	7	2
	k_1	2,01	1,61	1,59	1,28	2,82	2,17	2,79	1,73	3,13	2,45	3,16	1,82
	k_2	6,85	5,75	7,25	5,10	4,45	3,25	4,65	2,45	4,55	3,35	4,85	2,45
	ATC	21,21	16,97	41,50	26,44	14,38	12,71	42,12	22,81	12,22	11,30	46,31	21,71
	α	0,04443	0,10740	0,11183	0,20078	0,01376	0,05096	0,03909	0,15987	0,00544	0,03183	0,01236	0,14624
	$1-\beta$	0,30877	0,19423	0,74222	0,30784	0,53105	0,48619	0,88296	0,64748	0,68550	0,67769	0,94620	0,80985

Tabela 3 – Resultados das simulações para q = 25 e d = 1,5.

		s_1/s_0 = 1,0				s_1/s_0 = 2,0				s_1/s_0 = 3,0			
		C_{32}				C_{32}				C_{32}			
		1		10		1		10		1		10	
		Modelo		Modelo		Modelo		Modelo		Modelo		Modelo	
C_{12}		A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
0,002	*n*	8	6	13	4	8	5	16	4	6	4	11	4
	k_1	3,00	2,38	3,00	1,50	3,17	2,52	3,07	1,78	3,56	2,83	3,48	2,14
	k_2	6,75	6,60	7,10	4,90	5,85	4,65	6,05	3,45	5,60	4,40	5,75	3,20
	ATC	9,71	9,38	44,10	19,80	9,97	9,51	44,43	19,98	9,30	9,03	43,76	19,67
	α	0,00270	0,01731	0,00270	0,13621	0,00242	0,02053	0,00414	0,13964	0,00147	0,01471	0,00290	0,13580
	$1-\beta$	0,89251	0,90147	0,99202	0,93339	0,83729	0,82562	0,98242	0,90169	0,89560	0,88060	0,98812	0,95889
0,005	*n*	6	4	10	3	5	3	11	3	4	3	8	2
	k_1	2,80	2,20	2,70	1,47	2,98	2,36	2,84	1,82	3,39	2,61	3,23	1,74
	k_2	6,60	6,35	6,95	6,15	5,25	4,05	5,45	3,05	5,15	4,10	5,30	2,60
	ATC	11,51	10,76	45,26	20,85	11,47	10,65	45,22	20,99	10,55	10,02	45,06	20,51
	α	0,00511	0,02781	0,00693	0,14156	0,00478	0,02976	0,00999	0,14215	0,00220	0,01946	0,00563	0,14246
	$1-\beta$	0,80785	0,78814	0,97932	0,87078	0,72502	0,70296	0,95896	0,84556	0,80108	0,81899	0,97145	0,84184
0,01	*n*	4	2	8	2	3	2	8	2	3	2	6	2
	k_1	2,56	1,97	2,48	1,43	2,78	2,25	2,65	1,67	3,15	2,46	3,02	1,74
	k_2	6,35	5,75	6,75	5,75	4,65	3,45	5,05	2,65	4,85	3,50	4,85	2,60
	ATC	13,28	12,20	46,51	22,07	12,90	11,77	46,42	22,05	11,98	11,04	45,99	21,51
	α	0,01047	0,04884	0,01314	0,15272	0,00832	0,03879	0,01648	0,15013	0,00333	0,02701	0,01051	0,14246
	$1-\beta$	0,67003	0,55964	0,96080	0,75510	0,59254	0,60720	0,92428	0,75583	0,72512	0,71927	0,94735	0,84184

Tabela 4 – Resultados das simulações para q = 100 e d = 0,0.

		s_1/s_0 = 2,0				s_1/s_0 = 3,0			
		C_{32}				C_{32}			
		1		10		1		10	
		Modelo		Modelo		Modelo		Modelo	
C_{12}		A	B	A	B	A	B	A	B
0,002	n	6	3	15	3	4	2	9	2
	k_1	3,38	2,88	3,52	2,39	3,64	2,82	3,64	2,31
	k_2	5,25	4,05	5,45	3,65	5,30	3,95	5,60	3,35
	ATC	4,03	3,50	11,14	6,03	3,19	2,95	12,07	5,54
	α	0,00352	0,01563	0,01043	0,04300	0,00127	0,00998	0,00267	0,03832
	$1-\beta$	0,49278	0,43528	0,86119	0,54855	0,69276	0,58422	0,94530	0,68864
0,005	n	3	2	10	2	2	2	6	2
	k_1	3,08	2,64	3,24	2,26	3,22	2,82	3,39	2,31
	k_2	4,45	3,65	5,05	3,25	4,55	3,95	5,15	3,35
	ATC	4,77	4,13	12,59	6,66	3,86	3,55	13,20	6,14
	α	0,00676	0,01811	0,01428	0,04491	0,00258	0,00998	0,00440	0,03832
	$1-\beta$	0,35771	0,35467	0,78194	0,45286	0,49122	0,58422	0,87916	0,68864
0,01	n	2	2	6	2	2	2	4	2
	k_1	2,84	2,64	2,88	2,26	3,22	2,82	3,06	2,31
	k_2	4,05	4,05	4,45	3,25	4,55	3,95	4,55	3,35
	ATC	5,58	5,13	12,06	7,66	4,87	4,55	13,02	7,14
	α	0,00869	0,01811	0,02440	0,04491	0,00258	0,00998	0,00930	0,03832
	$1-\beta$	0,29090	0,35467	0,68481	0,45286	0,49122	0,58422	0,80303	0,68864

10. É coerente o plano ótimo apresentar custo maior quanto maior for o tamanho de amostra; assim como custo menor quanto maior for o tempo em que o processo se mantém sob controle.

11. A probabilidade de ocorrência de falsos alarmes no modelo B é sempre maior que o do modelo A (esta constatação pode ser observada em todas as tabelas).

12. A probabilidade de ocorrência de falsos alarmes aumenta conforme aumenta o tamanho da amostra ou quando o custo por operar fora de controle é muito maior do que o de interromper o processo (isso pode ser observado em todas as tabelas, por exemplo, na Tabela 2, no modelo A, C_{12} = 0,002 e σ_1/σ_0 = 2,0, os valores de α são, respectivamente, 0,00560 e 0,01845, quando o custo C_{32} aumenta de 1 para 10); mas decresce para grandes desvios na média (por exemplo, nas Tabelas 2 e 3, quando σ_1/σ_0 = 3,0, C_{12} = 0,002 e C_{32} = 1, o valor de α decresce de 0,00196 para 0,00147 quando δ aumenta de 0,5 para 1,5). Comportamento semelhante também foi observado quando ocorre grandes variações no desvio-padrão do processo.

13. A probabilidade do alarme $(1-\beta)$ é semelhante nos dois modelos, para períodos curtos sob controle. Ela cresce quando o custo de operar fora de controle é maior do que o de interrupção do processo, ou para grandes desvios na média e no desvio-padrão do processo (por exemplo, na Tabela 5, Modelo B, quando δ = 0,5, σ_1/σ_0 = 3,0 e C_{12} = 0,002, a probabilidade cresce de 0,59102, quando C_{32} = 1, para 0,69397, quando C_{32} = 10); mas decresce quando o tamanho da amostra diminui (este comportamento foi observado em todas as tabelas, por exemplo, na Tabela 2, no modelo A, os valores de $(1-\beta)$ são 0,73193, 0,62303 e 0,53105, respectivamente, para amostras de tamanho n = 10, 6 e 4)) ou quando for maior a duração do tempo que o processo se mantém sob controle (nas Tabelas 2 e 5, quando σ_1/σ_0 = 2, C_{12}= 0,002 e C_{32} = 1, os valores de $(1-\beta)$ são respectivamente iguais a 0,73193 e 0,52497 quando o valor de θ altera de 25 para 100).

14. Os planos ótimos são muito semelhantes quando não há desvio na média (δ = 0), se comparados com os de pequeno desvio na média (δ = 0,5), independentemente da duração do tempo em que o processo permanece sob controle (para qualquer valor de θ). (Comparar os resultados das Tabelas 1 e 2, Tabelas 4 e 5 e Tabelas 7 e 8 quando σ_1/σ_0 = 2 e 3.)

Tabela 5 – Resultados das simulações para q = 100 e d = 0,5.

		s1/s0 = 1,0				s1/s0 = 2,0				s1/s0 = 3,0			
		C_{32}				C_{32}				C_{32}			
		1		10		1		10		1		10	
		Modelo		Modelo		Modelo		Modelo		Modelo		Modelo	
C_{12}		A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
0,002	n	16	4	20	4	6	3	16	3	4	2	9	2
	k_1	2,51	2,14	2,00	1,91	3,39	2,71	3,28	2,43	3,65	2,81	3,64	2,30
	k_2	7,15	6,35	7,25	6,35	5,25	4,25	5,65	3,65	5,30	3,95	5,60	3,35
	ATC	6,54	5,16	9,41	7,53	3,93	3,45	12,17	5,98	3,17	2,94	12,04	5,54
	α	0,01207	0,03235	0,04550	0,05613	0,00350	0,01418	0,00753	0,04130	0,00126	0,01013	0,00267	0,03887
	$1-\beta$	0,30854	0,12802	0,59485	0,18592	0,52497	0,44937	0,88064	0,56807	0,70266	0,59102	0,94927	0,69397
0,005	n	9	2	20	2	3	2	9	2	2	2	6	2
	k_1	2,29	2,08	2,00	1,87	3,09	2,67	3,02	2,27	3,23	2,81	3,33	2,30
	k_2	6,85	5,75	7,25	5,75	4,45	3,65	5,05	3,25	4,55	3,95	5,15	3,35
	ATC	8,19	5,82	15,41	8,18	4,66	4,08	12,46	6,61	3,84	3,54	13,06	6,14
	α	0,02202	0,03752	0,04550	0,06148	0,00669	0,01741	0,01320	0,04431	0,00254	0,01013	0,00457	0,03887
	$1-\beta$	0,21777	0,08798	0,51606	0,12796	0,38074	0,36970	0,77440	0,47000	0,49900	0,59102	0,88629	0,69397
0,01	n	4	2	14	2	2	2	6	2	2	2	4	2
	k_1	2,04	2,08	1,83	1,87	2,87	2,67	2,81	2,27	3,23	2,81	3,14	2,30
	k_2	6,35	5,75	7,10	5,75	4,05	3,65	4,65	3,25	4,55	3,95	4,55	3,35
	ATC	8,62	6,82	20,89	9,18	5,49	5,08	13,41	7,61	4,84	4,54	13,18	7,14
	α	0,04135	0,03752	0,06725	0,06148	0,00829	0,01741	0,01779	0,04431	0,00254	0,01013	0,00878	0,03887
	$1-\beta$	0,15273	0,08798	0,51606	0,12796	0,30629	0,36970	0,68007	0,47000	0,49900	0,59102	0,80638	0,69397

Tabela 6 – Resultados das simulações para q = 100 e d = 1,5.

		s1/s0 = 1,0				s1/s0 = 2,0				s1/s0 = 3,0			
		C_{32}				C_{32}				C_{32}			
		1		10		1		10		1		10	
		Modelo		Modelo		Modelo		Modelo		Modelo		Modelo	
C_{12}		A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
0,002	n	6	4	10	3	5	3	11	3	3	2	8	2
	k_1	3,10	2,58	2,99	2,07	3,30	2,78	3,14	2,32	3,48	2,79	3,50	2,33
	k_2	6,60	6,35	6,95	6,15	5,65	4,45	5,85	3,85	5,30	4,10	5,75	3,35
	ATC	3,54	3,24	12,09	5,72	3,47	3,12	12,27	5,68	3,05	2,85	12,22	5,45
	α	0,00194	0,00988	0,00279	0,03845	0,00157	0,01011	0,00349	0,03778	0,00100	0,00895	0,00166	0,03725
	$1-\beta$	0,71566	0,66276	0,95994	0,70194	0,64688	0,60882	0,93082	0,72489	0,66263	0,64576	0,95331	0,74174
0,005	n	4	2	8	2	3	2	7	2	2	2	5	2
	k_1	2,87	2,38	2,79	2,03	3,12	2,63	2,91	2,23	3,30	2,79	3,21	2,33
	k_2	6,35	5,75	6,75	5,75	5,05	4,05	5,25	3,45	4,70	4,10	5,15	3,35
	ATC	4,65	4,01	13,40	6,45	4,30	3,73	12,68	6,29	3,70	3,45	12,90	6,05
	α	0,00410	0,01731	0,00527	0,04236	0,00281	0,01270	0,00750	0,04007	0,00187	0,00895	0,00382	0,03725
	$1-\beta$	0,55172	0,39743	0,92647	0,53587	0,50793	0,50276	0,85761	0,61056	0,55181	0,64576	0,88364	0,74174
0,01	n	3	2	6	2	2	2	5	2	2	2	4	2
	k_1	2,73	2,38	2,57	2,03	2,97	2,63	2,76	2,23	3,30	2,79	3,10	2,33
	k_2	6,15	5,75	6,60	5,75	4,65	4,05	4,85	3,45	4,70	4,10	4,70	3,35
	ATC	5,90	5,01	14,20	7,45	5,13	4,73	13,50	7,29	4,70	4,45	13,52	7,05
	α	0,00633	0,01731	0,01017	0,04236	0,00398	0,01270	0,01125	0,04007	0,00187	0,00895	0,00683	0,03725
	$1-\beta$	0,44828	0,39743	0,86433	0,53587	0,41093	0,50276	0,78501	0,61056	0,55181	0,64576	0,84884	0,74174

Tabela 7 – Resultados das simulações para q = 250 e d = 0,0.

		s_1/s_0 = 2,0				s_1/s_0 = 3,0			
		C_{32}				C_{32}			
		1		10		1		10	
		Modelo		Modelo		Modelo		Modelo	
C_{12}		A	B	A	B	A	B	A	B
0,002	n	4	2	11	2	3	2	7	2
	k_1	3,38	2,86	3,52	2,60	3,78	3,06	3,67	2,62
	k_2	5,05	4,05	5,45	3,65	5,30	4,25	5,60	3,80
	ATC	2,13	1,76	5,33	2,78	1,69	1,47	5,50	2,51
	α	0,00272	0,00842	0,00593	0,01913	0,00066	0,00481	0,00174	0,01593
	$1-\beta$	0,35509	0,28843	0,73461	0,36013	0,55123	0,53401	0,88212	0,61630
0,005	n	2	2	6	2	2	2	4	2
	k_1	3,08	2,86	3,10	2,60	3,45	3,06	3,39	2,62
	k_2	4,25	4,05	4,85	3,65	4,85	4,25	4,85	3,80
	ATC	2,52	2,36	5,61	3,38	2,22	2,07	5,66	3,11
	α	0,00466	0,00842	0,00992	0,01913	0,00116	0,00481	0,00410	0,01593
	$1-\beta$	0,24628	0,28843	0,59132	0,36013	0,44661	0,53401	0,75677	0,61630
0,01	n	2	2	4	2	2	2	3	2
	k_1	3,08	2,86	2,88	2,60	3,45	3,06	3,12	2,62
	k_2	4,25	4,05	4,25	3,65	4,85	4,25	4,55	3,80
	ATC	3,52	3,36	6,20	4,38	3,22	3,07	6,47	4,111
	α	0,00466	0,00842	0,01802	0,01913	0,00116	0,00481	0,00550	0,01593
	$1-\beta$	0,24628	0,28843	0,53111	0,36013	0,44661	0,53401	0,67841	0,61630

Tabela 8 – Resultados das simulações para q = 250 e d = 0,5.

		s_1/s_0 = 1,0				s_1/s_0 = 2,0				s_1/s_0 = 3,0			
		C_{32}				C_{32}				C_{32}			
		1		10		1		10		1		10	
		Modelo		Modelo		Modelo		Modelo		Modelo		Modelo	
C_{12}		A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
0,002	n	11	2	20	2	4	2	11	2	3	2	7	2
	k_1	2,56	2,37	2,25	2,20	3,52	2,89	3,36	2,61	3,67	3,08	3,64	2,61
	k_2	6,95	5,75	7,25	5,75	5,05	4,05	5,45	3,65	5,45	4,25	5,70	3,80
	ATC	3,77	2,62	6,56	3,56	2,10	1,73	5,13	2,75	1,70	1,47	5,67	2,51
	α	0,01047	0,01779	0,02445	0,02781	0,00243	0,00840	0,00628	0,01886	0,00054	0,00466	0,00177	0,01619
	$1-\beta$	0,18407	0,04949	0,49601	0,06992	0,37281	0,30375	0,77027	0,37803	0,55306	0,53815	0,88935	0,62474
0,005	n	5	2	15	2	2	2	6	2	2	2	4	2
	k_1	2,31	2,37	2,12	2,20	3,07	2,89	3,07	2,61	3,47	3,08	3,28	2,61
	k_2	6,45	5,75	7,15	5,75	4,45	4,05	4,85	3,65	4,85	4,25	5,00	3,80
	ATC	4,69	3,22	10,92	4,16	2,57	1,73	5,50	3,35	2,22	2,07	5,97	3,11
	α	0,02089	0,01779	0,03400	0,02781	0,00374	0,00840	0,01012	0,01886	0,00112	0,00466	0,00334	0,01619
	$1-\beta$	0,11732	0,04949	0,42860	0,06992	0,25040	0,30375	0,62443	0,37803	0,45163	0,53815	0,75458	0,62474
0,01	n	3	2	9	2	2	2	4	2	2	2	3	2
	k_1	2,19	2,37	1,89	2,20	3,07	2,89	2,82	2,61	3,47	3,08	3,13	2,61
	k_2	6,15	5,75	6,85	5,75	4,45	4,05	4,45	3,65	4,85	4,25	4,55	3,80
	ATC	5,88	4,22	14,87	5,16	3,57	1,73	6,28	4,35	3,22	3,07	6,46	4,11
	α	0,02852	0,01779	0,05876	0,02781	0,00374	0,00840	0,01376	0,01886	0,00112	0,00466	0,00544	0,01619
	$1-\beta$	0,09452	0,04949	0,35234	0,06992	0,25040	0,30375	0,53105	0,37803	0,45163	0,53815	0,68550	0,62474

Tabela 9 – Resultados das simulações para q **= 250 e** d **= 1,5.**

		s$_1$/s$_0$ = 1,0				s$_1$/s$_0$ = 2,0				s$_1$/s$_0$ = 3,0			
		C_{32}				C_{32}				C_{32}			
		1		10		1		10		1		10	
		Modelo		Modelo		Modelo		Modelo		Modelo		Modelo	
C_{12}		A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
0,002	n	5	2	9	2	3	2	8	2	2	2	6	2
	k_1	3,19	2,63	3,08	2,35	3,32	2,85	3,17	2,55	3,51	3,06	3,53	2,64
	k_2	6,45	5,75	6,85	5,75	5,45	4,45	5,85	3,85	5,00	4,40	5,60	3,80
	ATC	2,06	1,74	5,61	2,72	1,82	1,56	5,59	2,59	1,54	1,42	5,34	2,46
	α	0,00142	0,00854	0,00207	0,01877	0,00120	0,00597	0,00242	0,01720	0,00085	0,00411	0,00152	0,01543
	$1-\beta$	0,56356	0,30503	0,92220	0,40905	0,44787	0,44179	0,83729	0,52919	0,51027	0,59708	0,89652	0,68118
0,005	n	3	2	6	2	2	2	5	2	2	2	4	2
	k_1	2,93	2,63	2,79	2,35	3,19	2,85	2,98	2,55	3,51	3,06	3,39	2,64
	k_2	6,15	5,75	6,60	5,75	4,85	4,45	5,25	3,85	5,00	4,40	5,15	3,80
	ATC	2,77	2,34	6,09	3,32	2,34	2,16	6,04	3,19	2,14	2,02	6,26	3,06
	α	0,00339	0,00854	0,00527	0,01877	0,00202	0,00597	0,00478	0,01720	0,00085	0,00411	0,00220	0,01543
	$1-\beta$	0,37070	0,30503	0,81057	0,40905	0,36458	0,44179	0,72502	0,52919	0,51027	0,59708	0,80108	0,68118
0,01	n	2	2	4	2	2	2	3	2	2	2	3	2
	k_1	2,75	2,63	2,54	2,35	3,19	2,85	2,76	2,55	3,51	3,06	3,15	2,64
	k_2	5,75	5,75	6,35	5,75	4,85	4,45	4,65	3,85	5,00	4,40	4,85	3,80
	ATC	3,42	3,34	6,28	4,32	3,34	3,166	5,86	4,19	3,14	3,02	7,11	4,06
	α	0,00596	0,00854	0,00111	0,01877	0,00202	0,00597	0,00866	0,01720	0,00085	0,00411	0,00333	0,01543
	$1-\beta$	0,26435	0,30503	0,67724	0,40905	0,36458	0,44179	0,59566	0,52919	0,51027	0,59708	0,72512	0,68118

5. Conclusões

O conhecimento do tipo do processo é muito importante para o planejamento dos gráficos de controle e, se negligenciado, afeta notoriamente os parâmetros dos gráficos. Embora os estudos realizados na seção anterior sejam limitados, algumas conclusões podem ser tiradas:

1. Quando os desvios-padrão do processo sob controle e fora de controle diferem, o uso adequado do modelo B para processos regenerativos é sempre economicamente melhor, exigindo amostras menores e limites de controle mais estreitos.

2. A diferença entre as probabilidades de ocorrer um alarme $(1-\beta)$ nos dois modelos não é afetada por tempos menores sob controle e baixos custos amostrais (C_{12} = 0,02 e 0,05). No entanto, o número de falsos alarmes entre os dois modelos difere acentuadamente na maioria dos casos. Este resultado, porém, pode não ser inconveniente em processos regenerativos, uma vez que os alarmes falsos postergam a ocorrência de desvios.

3. Finalmente, os planos amostrais são muito mais sensíveis a mudanças no custo de operar fora de controle do que no custo de amostragem.

Além disso, para qualquer modelo selecionado, a implantação do planejamento econômico ótimo de gráficos de controle precisa ser realizada com cautela, como uma conseqüência natural das fragilidades dos modelos de planejamento econômico, uma vez que dependem de custos específicos e do tempo médio em que o processo opera sob controle. O conjunto de parâmetros utilizado no presente trabalho foi escolhido de acordo com o estudo de Baker (1971), mas outros conjuntos podem ser investigados em futuras pesquisas. Além disso, os planos de amostragem podem ser ajustados para outros tipos de gráficos por variáveis, como, por exemplo, as cartas EWMA e CUSUM.

Agradecimentos

Os autores agradecem aos revisores anônimos por seus relevantes comentários e sugestões, que contribuíram muito para a melhoria da qualidade do artigo.

Referências Bibliográficas

BAKER, K. R. Two processes in the economic design of an X-chart. AIIE. *Transactions*, v. 3, n. 4, p. 257-263, 1971.

HARTLEY, H. O. The probability integral of the range in samples of N observations from a normal population: numerical evaluation of the probability integral. *Biometrika*, v. 32, p. 309-310, 1942.

HO, C.; CASE, K. E. Economic design of control charts: a literature review for 1981-1991. *Journal of Quality Technology*, v. 26, n. 1, p. 39-53, 1994.

MONTGOMERY, D. The economic design of control charts: a review and literature survey. *Journal of Quality Technology*, v. 12, n. 2, p. 75-87, 1980.

PEARSON, E. S. The Probability integral of the range in samples of N observations from a normal population: foreword and tables. *Biometrika*, v. 32, p. 301-308, 1942.

SANIGA, E. M. Joint economically optimal design of $\overline{X}$ and R control charts. *Management Science*, v. 24, n. 4, p. 420-431, 1977.

SANIGA, E. M. Economic statistical control-chart designs with an application to $\overline{X}$ and R charts. *Technometrics*, v. 31, n. 3, p. 313-320, 1989.

TURNES, O.; IMAÑA, C. R. Seleção de modelos de planejamento econômico de gráficos de controle por variáveis com restrições estatísticas, In: XXII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL. *Resumos*... Santos, SP, 2000.

TURNES, O.; SLEEGERS, L. *SMODELS* – Sistema de seleção de planejamento econômico de gráficos de controle. 32. SBPO, Juiz de Fora, MG, 1999.

ECONOMIC DESIGNS OF $\overline{X}$-R CHARTS FOR REGENERATIVE AND NON-REGENERATIVE PROCESSES

Abstract

A comparison of two economic designs of $\overline{X}$-R charts is made in this study. The first model assumes that the distribution of the time that the process remains under statistical control has the lack of memory property. This model is appropriate to model non-regenerative process. In the second model, the property of lack of memory does not hold being more appropriate to describe regenerative process.

Key words: economic designs, $\overline{X}$-R control charts.