

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística

Novas Distribuições Inversíveis Simétricas e Assimétricas

Cláudia Raquel da Rocha Eirado

Dissertação de Mestrado em Estatística

Orientador: Prof. Dr. Pushpa Narayan Rathie

Julho de 2011

Cláudia Raquel da Rocha Eirado

Novas Distribuições Inversíveis Simétricas e Assimétricas

Dissertação apresentada ao Departamento
de Estatística do Instituto de Ciências
Exatas da Universidade de Brasília como
requisito parcial à obtenção do título de
Mestre em Estatística.

Universidade de Brasília

Brasília, Julho de 2011

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

DISTRIBUIÇÕES INVERSÍVEIS SIMÉTRICAS E
ASSIMÉTRICAS

CLÁUDIA RAQUEL DA ROCHA EIRADO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO
DE ESTATÍSTICA DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNI-
VERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO REQUISITO PARCIAL À OBTEN-
ÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ESTATÍSTICA.

APROVADA POR:

Profa. Pushpa Narayan Rathie, PhD. (DEST-UnB)
(Orientador)

Prof. Gustavo Leonal Gilardoni Avalor, PhD. (DEST-UnB)
(Examinador Interno)

Prof. José Ailton Alencar de Andrade, DSc. (DEMA-UFC)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 18 DE JULHO DE 2011.

FICHA CATALOGRÁFICA

EIRADO, CLÁUDIA RAQUEL DA ROCHA

Novas Distribuições Inversíveis Simétricas e Assimétricas [Distrito Federal] 2011.

xvi, 103p., 210 x 297 mm (DEST/IE/UnB, Mestre, Estatística, 2011).

Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília. Instituto de Ciências Exatas.

Departamento de Estatística.

1.Função H

2.Função Hipergeométrica

3.Densidades Simétricas e Assimétricas 4.Estimadores de Máxima Verossimilhança

I. DEST/IE/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

EIRADO, C. R. R (2011). Novas Distribuições Inversíveis Simétricas e Assimétricas. Dissertação de Mestrado em Estatística, Departamento de Estatística, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 103p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Cláudia Raquel da Rocha Eirado.

TÍTULO: Novas Distribuições Inversíveis Simétricas e Assimétricas.

GRAU: Mestre ANO: 2011

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Cláudia Raquel da Rocha Eirado

SHIN CA 10 lotes 1/4 bloco F apto 117.

71.503-510 Brasília DF Brasil.

*Ao meu amado esposo Leonardo,
ao meu filho Mateus e
aos meus pais.*

Agradecimentos

- Agradeço ao Soberano autor da vida, meu Deus, por ser meu refúgio e fortaleza. Todo o louvor seja dado a Ele.
- Ao meu esposo Leonardo e ao meu filho Mateus, pela compreensão e incentivo em todos os momentos.
- Aos meus pais Nonato e Fátima, por me orientarem ao longo da vida e me ensinarem a vencer desafios.
- E, finalmente, ao meu orientador Pushpa Narayan Rathie e ao Departamento de Estatística.

Sumário

Sumário	3
Lista de Figuras	6
Lista de Tabelas	7
Resumo	8
Abstract	10
1 Introdução	12
2 Funções Matemáticas Especiais	15
2.1 Introdução	15
2.2 A Função $H(z)$	15
2.2.1 Conceitos e fundamentos - [SPRINGER,1979] (19)	15
2.3 A Função Generalizada de Gauss ${}_pF_q$	17
2.3.1 Conceitos e fundamentos - [SLATER,1966] (18)	17
2.3.2 A convergência da Função Generalizada de Gauss ${}_pF_q$	18
2.3.3 A Função Hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1$	18
2.3.4 Convergência da Função de Gauss ${}_2F_1$	19
2.3.5 Relações Funcionais de ${}_2F_1[a; b; c; z]$	20
2.4 A Função G de Meijer	20
2.5 A Função Bivariada $H[x, y]$	22
2.5.1 Conceitos e fundamentos - [MATHAI et al.,2010] (9)	22
2.6 Caso Especial da Função Bivariada $H[x, y]$	24
2.6.1 Conceitos e fundamentos - [HAI & YAKUBOVICH, 1992] (8)	24

3	Uma Nova Distribuição	25
3.1	Introdução	25
3.2	Distribuição Acumulada Assimétrica	25
3.2.1	Propriedades da Distribuição Acumulada	26
3.2.2	Gráficos para a Distribuição Acumulada	27
3.2.3	Função Densidade de Probabilidade	29
3.2.4	Gráficos para a Função Densidade de Probabilidade	30
3.2.5	Distribuições de Mínimo e Máximo	36
3.2.6	Momentos para X	37
3.2.7	Função Característica para X	40
3.2.8	Estimadores para os parâmetros B, C, ρ de $f(x)$	46
4	Versão Simétrica para a Distribuição	48
4.1	Introdução	48
4.2	Distribuição Acumulada Simétrica	48
4.2.1	Propriedades da Distribuição Acumulada Simétrica	48
4.2.2	Gráficos para a Distribuição Acumulada Simétrica	49
4.2.3	Função Densidade de Probabilidade Simétrica	52
4.2.4	Gráficos para a Função Densidade de Probabilidade Simétrica	53
4.2.5	Distribuições de Mínimo e Máximo	57
4.2.6	Momentos para X	58
4.2.7	Função Característica para X	60
4.2.8	Estimadores para os parâmetros B, C, ρ de $g(x)$	61
5	Distribuições Assimétricas	63
5.1	Introdução	63
5.2	Distribuição Assimétrica $h_1(x)$	64
5.2.1	Construção de $h_1(x)$	64
5.2.2	Gráfico para a Densidade Assimétrica $Sas(x)$	64
5.3	Distribuição Assimétrica $h_2(x)$	65
5.3.1	Construção de $h_2(x)$	65
5.3.2	Gráfico para a Densidade Assimétrica $Sbs(x)$	66

6	Aplicações	67
6.1	Introdução	67
6.2	Precipitação	67
6.2.1	Análise Descritiva	67
6.2.2	Estimação dos Parâmetros	69
6.2.3	Ajuste da Curva	70
6.3	Retornos Diários de Taxa Câmbio	72
6.3.1	Análise Descritiva	72
6.3.2	Estimação dos Parâmetros	75
6.3.3	Ajuste da Curva	78
6.4	Consumo de Energia - kg de petróleo <i>per capita</i>	79
6.4.1	Análise Descritiva	79
6.4.2	Estimação dos Parâmetros	81
6.4.3	Ajuste da Curva	82
7	Conclusões	84
	Referências Bibliográficas	86

Lista de Figuras

3.1	Formas para a Distribuição Acumulada Assimétrica $F(x)$	27
3.2	Formas para a Distribuição Acumulada $F(x)$ - variação de ρ , com $B > 0$, C fixos	27
3.3	Formas para a Distribuição Acumulada $F(x)$ - variação de ρ , com $B < 0$, C fixos	28
3.4	Formas para a Distribuição Acumulada $F(x)$ - variação de B , com C, ρ fixos	28
3.5	Formas para a Distribuição Acumulada $F(x)$ - variação de C , com $B > 0$, ρ fixos	28
3.6	Formas para a Distribuição Acumulada $F(x)$ - variação de C , com $B < 0$, ρ fixos	29
3.7	Formas para a Densidade de Probabilidade Assimétrica $f(x)$	30
3.8	Formas para a Densidade Gama Generalizada	31
3.9	Formas para a Densidade de Probabilidade $f(x)$ - variação de ρ , com $B > 0$, C fixos	32
3.10	Formas para a Densidade de Probabilidade $f(x)$ - variação de ρ , com $B < 0$, C fixos	32
3.11	Formas para a Densidade de Probabilidade $f(x)$ - variação de B , com C, ρ fixos	33
3.12	Formas para a Densidade de Probabilidade $f(x)$ - variação de C , com $B > 0$, ρ fixos	33
3.13	Formas para a Densidade de Probabilidade $f(x)$ - variação de C , com $B < 0$, ρ fixos	34
3.14	Comportamento da Densidade de Probabilidade $f(x)$ quando $x \rightarrow \infty$	35

3.15	Formas para a Densidade de Cauchy	36
4.1	Formas para a Distribuição Acumulada Simétrica $G(x)$	49
4.2	Formas para a Distribuição Simétrica Acumulada $G(x)$ - variação de ρ , com $B > 0, C$ fixos	50
4.3	Formas para a Distribuição Simétrica Acumulada $G(x)$ - variação de ρ , com $B < 0, C$ fixos	50
4.4	Formas para a Distribuição Simétrica Acumulada $G(x)$ - variação de B , com C, ρ fixos	51
4.5	Formas para a Distribuição Simétrica Acumulada $G(x)$ - variação de C , com $B > 0, \rho$ fixos	51
4.6	Formas para a Distribuição Simétrica Acumulada $G(x)$ - variação de C , com $B < 0, \rho$ fixos	52
4.7	Formas para a Densidade Simétrica $g(x)$	53
4.8	Formas para a Densidade $g(x)$ - variação de ρ , com $B > 0, \rho$ fixos	54
4.9	Formas para a Densidade $g(x)$ - variação de ρ , com $B < 0, \rho$ fixos	55
4.10	Formas para a Densidade $g(x)$ - variação de B , com C, ρ fixos	55
4.11	Formas para a Densidade $g(x)$ - variação de C , com $B > 0, C$ fixos	56
4.12	Formas para a Densidade $g(x)$ - variação de C , com $B < 0, C$ fixos	56
5.1	Formas para a Densidade Assimétrica $Sas(x)$	65
5.2	Formas para a Densidade Assimétrica $Sbs(x)$	66
6.1	Boxplot para os Dados de Precipitação	68
6.2	Distribuição Empírica e Densidade Estimada por Kernel para os Dados de Precipitação	69
6.3	Análise de Bondade do Ajuste para os Dados de Precipitação	72
6.4	Boxplot para Retornos da Taxa de Câmbio - Real - Brasil	74
6.5	Boxplot para Retornos da Taxa de Câmbio - Dólar Canadense - Canadá	74
6.6	Distribuição Empírica e Densidade Estimada para Retornos da Taxa de Câmbio - Real - Brasil	75
6.7	Distribuição Empírica e Densidade Estimada para Retornos da Taxa de Câmbio - Dólar Canadense - Canadá	76

6.8	Análise de Bondade de Ajuste para Retornos Diários da Taxa de Câmbio - Real - Brasil	79
6.9	Análise de Bondade de Ajuste para Retornos Diários da Taxa de Câmbio - Dólar Canadense - Canadá	79
6.10	Boxplot para os Dados de Log-Consumo de Energia	81
6.11	Distribuição Empírica e Densidade Estimada por Kernel para os Dados de Log-Consumo de Energia	81
6.12	Análise de Bondade do Ajuste para os Dados de Log-Consumo de Energia	83

Lista de Tabelas

6.1	Estatísticas Descritivas para os Dados de Precipitação	68
6.2	E.M.V. e I.C. 95% Bootstrap para os Parâmetros B, C, ρ	70
6.3	Medidas de Acurácia de Ajuste para as Distribuição dos Dados de Precipitação	71
6.4	Estatísticas Descritivas para os Dados de Retornos Diários das Taxas de Câmbio do Brasil e Canadá	73
6.5	E.M.V. e I.C. Wald 95% para os Parâmetros B, C	77
6.6	Medidas de Acurácia de Ajuste para as Distribuições dos Retornos das Taxas Cambiais de Brasil e Canadá	78
6.7	Estatísticas Descritivas para os Dados de Log-Consumo de Energia	80
6.8	E.M.V. para os Parâmetros $B, C, \gamma, \mu, \sigma$	82
6.9	Medidas de Acurácia de Ajuste para as Distribuição dos Dados de Log-Consumo de Energia	82

Resumo

O estudo de novas distribuições se faz necessário à medida em que nos deparamos com dados que muitas vezes possuem peculiaridades que não se encaixam em distribuições já conhecidas.

O objetivo deste trabalho é apresentar novas distribuições assimétricas e simétricas, suas propriedades e aplicações com dados reais, nas áreas climática e econômico-financeira.

O nosso trabalho possui três tipos de distribuições: uma distribuição assimétrica, que engloba dados não negativos, uma versão simétrica para dados em toda a reta real e, versões “*skew*” geradas a partir da versão simétrica.

As distribuições desse trabalho são em geral, formas racionais de polinômios. Por possuírem uma grande quantidade de parâmetros, tem a vantagem de serem bastante maleáveis e versáteis. As distribuições tem como maior característica a cauda pesada, pois possuem caudas com variação regular de ordem 2, significa que ao $|x| \rightarrow \infty$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ou $x \rightarrow \infty$, $x > 0$, temos funções de densidade de probabilidade do tipo $\frac{c}{x^2}$.

Para definir momentos e funções características para as distribuições, utilizaremos funções matemáticas especiais da família Hipergeométrica, revisadas teoricamente em [Mathai et al., 2010] (9), [Springer, 1979] (19), [Hai & Yakubovich, 1992] (8), [Slater, 1966] (18) e [Temme, 1996] (20).

Construiremos distribuições assimétricas (“*skew*”) geradas a partir de resultados de [Azzalini, 1985] (1) e [Fernandez et al., 1998] (7).

Os dados climáticos e econômico-financeiros serão ajustados às distribuições por meio de estimadores de máxima verossimilhança, com auxílio de métodos computacionais.

Os dados climáticos se referem a um conjunto que contém a precipitação anual da cidade de Los Angeles, entre 1878 e 1998 obtidos no sítio do National Weather Service (NWS) dos Estados Unidos da América (12).

As aplicações na área econômico-financeira possuem dois conjuntos de dados. O primeiro se refere aos retornos percentuais calculados a partir das taxas cambiais diárias para o Real (Brasil) e Dólar (Canadá) frente ao dólar americano entre 03 de janeiro de 2000 e 20 de maio de 2011 divulgadas pelo Federal Reserve (5). O segundo trata do consumo de energia em kg de petróleo *per capita* para 136 países em 1997 divulgadas pelo Banco Mundial (23).

Palavras-Chave: *Função H, função Hipergeométrica, funções de distribuição e densidades simétricas e assimétricas, estimadores de máxima verossimilhança.*

Abstract

The study of new distributions is necessary when we are faced with data that often do not fit to already known distributions.

The aim of this work is to present new skew symmetric and asymmetric distributions, its properties and applications with real data, in economic and financial, and climate areas.

Our work has three types of distributions: an asymmetric distribution, which includes non-negative data, a symmetric version of data across the real line, and “skew” version generated from the symmetric version.

The distributions presented in this work are generally rational forms of polynomials. As it has many parameters, we have the advantage of being very flexible and versatile. The distribution has the greatest feature a heavy tail, because it has tails with regular variation of order 2, it means that $|x| \rightarrow \infty, \forall x \in \mathbb{R}$ or $x \rightarrow \infty, x > 0$, we have probability density functions of type $\frac{c}{x^2}$.

To define moments and characteristic functions for distributions, we use mathematical special functions of Hypergeometric family, with shown theory in [Mathai et al., 2010] (9), [Springer, 1979] (19), [Hai Yakubovich, 1992] (8), [Slater, 1966] (18) and [Temme, 1996] (20).

In particular, we will generate skew distributions from results of [Azzalini, 1985] (1) and [Fernandez et al., 1998] (7).

The climate data and economic-financial data will be adjusted to distributions through maximum likelihood estimation, with computational methods support.

The climate data refer to a set containing the annual rainfall in the city of Los Angeles, between 1878 and 1998 provided on-line at the National Weather Service (NWS) of the United States of America (12).

The applications in the economic-financial area have two data sets. The first refers to the percentage returns calculated from daily exchange rates for the Real (Brazil) and Dollar (Canada) against the U.S. dollar between January 3, 2000 and May 20, 2011 released by the Federal Reserve (5). The second deals with the energy consumption in kg of oil *per capita* to 136 countries in 1997 released by the World Bank (23).

Keywords: *H-function, Hypergeometric function, skew and symmetric distributions and densities functions, maximum likelihood estimation.*

Capítulo 1

Introdução

A Estatística associada à Probabilidade permite a previsão do comportamento de dados. Ajustar distribuições de probabilidade a dados reais será sempre um desafio, pois encontrar uma função matemática que traduza os dados de maneira satisfatória é sempre complexo.

Com certa frequência nos deparamos com dados que possuem peculiaridades que nem sempre conseguem ser captadas pelas distribuições mais conhecidas. As distribuições apresentadas nesse trabalho são em geral, formas racionais de polinômios. Por possuírem uma grande quantidade de parâmetros, tem a vantagem de serem bastante maleáveis e versáteis.

As distribuições tem como maior característica a cauda pesada, pois possuem caudas com variação regular de ordem 2, significa que ao $|x| \rightarrow \infty$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ou $x \rightarrow \infty$, $x > 0$, temos funções de densidade de probabilidade do tipo $\frac{c}{x^2}$ como será mostrado no Capítulo 3. Logo, temos distribuições que podem modelar com eficiência dados ecológicos e ambientais, além de dados financeiros.

O termo “cauda pesada” se refere à propriedade estatística de que uma parcela maior da população repousa dentro da cauda de uma distribuição de probabilidades abaixo daquela cauda observada, por exemplo, em uma distribuição Normal e que, se prolonga no eixo da assíntota. Também pode ser referida “cauda longa” e surgirá a partir da inclusão de valores muito altos ou muito baixos que provocarão aumento ou redução da média, enviesando a distribuição para a direita ou esquerda, respectivamente. São exemplos de distribuições com caudas pesadas as de Levy e de Pareto.

O trabalho trata de novas distribuições simétricas e assimétricas e suas propriedades. Por serem distribuições que podem assumir formas com caudas pesadas, podem ser utilizada para séries de dados financeiros e fenômenos naturais como índices pluviométricos e temperaturas em determinadas localidades ao longo do tempo. Será apresentada versão da distribuição apenas com valores positivos e outra versão para toda a reta real. Além de uma distribuição fortemente assimétrica gerada a partir da distribuição simétrica.

Dados ecológicos e ambientais, geralmente de índices pluviométricos, temperaturas, incidência de raios solares possuem caudas pesadas e dependendo da localidade podem ocorrer distribuições bimodais. Isso porque em certas localidades, as temperaturas, por exemplo, podem ter duas modas, por exemplo em países de clima temperado, onde ocorrem invernos e verões rigorosos, com valores extremos. Também para índices pluviométricos observamos esse tipo de comportamento, onde temos uma quantidade de precipitação média ao longo do ano, e em uma outra época do ano, se tem grande quantidade de chuva como, por exemplo, no fenômeno das monções.

Em dados financeiros, temos comportamento de caudas pesadas frequentemente ao tratarmos de retornos financeiros, pois em geral, possuímos um rendimento médio (se forem diários, geralmente estão em torno de 0). Mas também teremos valores muito abaixo (perdas) ou acima (ganhos) da média do rendimento, que formarão a cauda pesada da distribuição, com valores extremos.

O objetivo é determinar propriedades da distribuição, encontrar a densidade, momentos, função característica e determinar estimadores para os parâmetros a fim de fazer inferência estatística a partir destas distribuições e modelar com dados reais. As distribuições são denominadas inversíveis, pois conseguimos simular X a partir das distribuições apresentadas.

O Capítulo 2 apresenta as funções matemáticas especiais da família Hipergeométrica que serão utilizadas para cálculo de momentos e funções características. As definições e resultados apresentados para a Função H, Função G de Meijer e Função H Biavariada podem ser encontrados em [Mathai et al., 2010] (9), [Springer, 1979] (19) e [Hai & Yakubovich, 1992] (8). Os resultados para a Função Generalizada de Gauss podem ser encontrados em [Slater, 1966] (18) e [Temme, 1996] (20).

O Capítulo 3 trata da distribuição assimétrica e suas propriedades. Para

a versão assimétrica, pode-se imaginar, por exemplo, que a distribuição de Pareto também possui caudas pesadas, então porque utilizar a nova distribuição? A vantagem da nova distribuição é que esta passa pela origem, enquanto que a de Pareto não.

O Capítulo 4 trata da distribuição simétrica em torno de 0 e suas propriedades. Para a versão simétrica, o que se observa é que essa distribuição possui semelhança com a distribuição de Cauchy, já que ambas possuem caudas com variação regular de ordem 2. Mas no caso da nova distribuição temos formas bimodais, o que não ocorre com a distribuição de Cauchy.

O Capítulo 5 apresenta versão fortemente assimétrica gerada a partir da versão simétrica por meio de resultados encontrados em [Azzalini, 1985] (1) e [Fernandez et al., 1998](7). Essas distribuições possuem formas bimodais e possuem a vantagem de ter uma modelagem mais simples do que a abordagem de mistura de distribuições, frequentemente utilizada para ajuste de dados bimodais.

O Capítulo 6 trata de aplicações com dados reais onde serão ajustadas as distribuições com estimação de máxima verossimilhança dos parâmetros por meio do pacote DEoptim, segundo as definições de [Mullen et al., 2011] (11).

O primeiro conjunto de dados estudado é o de precipitação anual (quantidade de chuva) na cidade de Los Angeles, para anos de 1878 a 1998. O histograma mostra uma densidade assimétrica à direita, em que será aplicada a versão assimétrica do Capítulo 3, que engloba dados não negativos.

A segunda aplicação se refere aos retornos diários percentuais das taxas de câmbio do Brasil e Canadá, entre 03 de janeiro de 2000 e 20 de maio de 2011. As densidades estimadas por *Kernel* apontam para dados com caudas pesadas, onde será aplicada a versão simétrica do Capítulo 4.

Por fim, o terceiro problema apresenta dados de consumo de energia em quilos de petróleo *per capita* em 136 países no ano de 1997. Será justada a versão “*skew*” desenvolvida no Capítulo 5.

Capítulo 2

Funções Matemáticas Especiais

2.1 Introdução

Serão apresentadas a função $H(z)$ e a função Hipergeométrica Generalizada $({}_pF_q)$, pois alguns resultados para momentos e funções características das distribuições que serão estudadas adiante utilizam estes tipos de funções. A vantagem de utilizar estas funções é que muitos cálculos podem ser realizados por meio de implementações presentes em *softwares* matemáticos como o *Maple* e o *Mathematica*.

2.2 A Função $H(z)$

2.2.1 Conceitos e fundamentos - [SPRINGER,1979] (19)

Definição 2.2.1. A Função $H(z)$ é definida por um tipo de integral de Mellin-Barnes

$$H(z) = \mathbb{H}_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{array}{c} (a_1, \alpha_1), \dots, (a_p, \alpha_p) \\ (b_1, \beta_1), \dots, (b_q, \beta_q) \end{array} \right. \right] =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - \beta_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + \alpha_j s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + \beta_j s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - \alpha_j s)} z^s ds, \quad (2.1)$$

onde

$$0 \leq m \leq q,$$

$$0 \leq n \leq p,$$

$$m \neq 0 \text{ ou } n \neq 0,$$

$$\alpha_j > 0, j = 1, 2, \dots, p,$$

$$\beta_j > 0, j = 1, 2, \dots, q,$$

a_j , com $j = 1, 2, \dots, p$, e b_j , com $j = 1, 2, \dots, q$, são números complexos tais que nenhum dos pólos de $\Gamma(b_j - \beta_j s)$, $j = 1, \dots, m$, coincidam com algum dos pólos de $\Gamma(1 - a_j + \alpha_j s)$, $j = 1, \dots, n$. Também, C é um contorno no plano complexo percorrendo $\omega - i\infty$ a $\omega + i\infty$, $i = \sqrt{-1}$, para algum ω real tal que

$$s = \frac{b_j + k}{\beta_j},$$

para $j = 1, \dots, m$ e $k = 0, 1, \dots$ para o lado direito do contorno C e os pontos

$$s = \frac{a_j - 1 - k}{\alpha_j},$$

para $j = 1, \dots, n$ e $k = 0, 1, \dots$ para o lado esquerdo do contorno C com indentações, se for necessário para tal separação.

O contorno C possui as seguintes definições:

i) Para $C = C_{-\infty}$ que engloba estritamente os pólos de $\Gamma(b_j - \beta_j s)$, $j = 1, \dots, m$, a integral converge $\forall z$ se $\mu > 0$ e $z \neq 0$ ou $\mu = 0$ e $0 < z < \eta$. A integral também converge se $\mu = 0$, $|z| = \eta$ e $Re(\delta) < -1$, onde

$$\eta = \left\{ \prod_{j=1}^p (\alpha_j)^{-\alpha_j} \right\} \left\{ \prod_{j=1}^q (\beta_j)^{\beta_j} \right\},$$

$$\mu = \sum_{j=1}^q \beta_j - \sum_{j=1}^p \alpha_j, \text{ e}$$

$$\delta = \sum_{j=1}^q b_j - \sum_{j=1}^p a_j + \frac{p-q}{2}$$

ii) Para $C = C_{\infty}$ que engloba estritamente os pólos de $\Gamma(1 - a_j - \alpha_j s)$, $j = 1, \dots, n$, a integral converge $\forall z$ se $\mu < 0$ e $z \neq 0$ ou $\mu = 0$ e $|z| > \eta$.

iii) Para $C = C_{i\omega\infty}$ é um contorno iniciando no ponto $\omega - i\infty$ passando por $\omega + i\infty$, onde $\omega \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ tal que todos os pólos de $\Gamma(b_j - \beta_j s), j = 1, \dots, m$ são separados dos pólos de $\Gamma(1 - a_j - \alpha_j s), j = 1, \dots, n$, a integral converge se $v < 0, |\arg(z)| < \frac{1}{2}\pi v, v \neq 0$. A integral também converge se $v = 0, \omega + \operatorname{Re}(\delta) < -1, \arg(z) = 0$, e $z \neq 0$, onde

$$v = \sum_{j=1}^n \alpha_j - \sum_{j=n+1}^p \alpha_j + \sum_{j=1}^m \beta_j - \sum_{j=m+1}^q \beta_j$$

2.3 A Função Generalizada de Gauss ${}_pF_q$

2.3.1 Conceitos e fundamentos - [SLATER,1966] (18)

Definição 2.3.1. A Função Generalizada de Gauss, denotada por ${}_pF_q$, é uma série de potências da forma

$$1 + \frac{a_1 a_2 \dots a_p z}{b_1 b_2 \dots b_q 1!} + \frac{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)\dots a_p(a_p+1) z^2}{b_1(b_1+1)b_2(b_2+1)\dots b_q(b_q+1) 2!} + \dots$$

$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_p)_n z^n}{(b_1)_n (b_2)_n \dots (b_q)_n n!}, \quad (2.2)$$

onde $(a_i)_n$ e $(b_i)_n$ são o símbolo de Pochhammer dado por:

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\dots(a+k-1)$$

Então a_1, a_2, \dots, a_p são parâmetros do numerador e b_1, b_2, \dots, b_q são parâmetros do denominador que não podem ser inteiros negativos, pois a série não é definida para estes valores, z é a variável e a e z podem assumir valores reais ou complexos.

Em particular, a função generalizada de Gauss é um caso especial da função H:

$${}_pF_q \left[\begin{matrix} a_1, & \dots, & a_p \\ b_1, & \dots, & b_q \end{matrix} \middle| x \right] =$$

$$\mathbb{H}_{p,q+1}^{1,p} \left[-x \left| \begin{array}{cccc} (1-a_1, 1), & \dots, & (1-a_p, 1), & \\ (0, 1), & (1-b_1, 1), & \dots, & (1-b_q, 1) \end{array} \right. \right] \quad (2.3)$$

2.3.2 A convergência da Função Generalizada de Gauss ${}_pF_q$

A série ${}_pF_q$ converge para todos os valores de z real ou complexo quando $p \leq q$, se $u_n z^n$ é o n -ésimo termo de série

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &\leq \frac{|a_1+n||a_2+n|\dots|a_p+n||z|}{|b_1+n||b_2+n|\dots|b_q+n|(1+n)} \\ &\leq \frac{|z|n^{p-q-1}(1+|a_1|/n)(1+|a_2|/n)\dots(1+|a_p|/n)}{(1+1/n)(1+|b_1|/n)(1+|b_2|/n)\dots(1+|b_q|/n)}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

e (2.4) tende a zero, quando $n \rightarrow \infty$, para $p \leq q$. Também, se $p = q + 1$, a série converge desde que $|z| < 1$. Também converge quando $z = 1$, se $Re(\sum_{j=1}^q b_j - \sum_{j=1}^p a_j) > 0$, e $z = -1$, se $Re(\sum_{j=1}^q b_j - \sum_{j=1}^p a_j) > -1$. Se $p > q + 1$, a série nunca converge, exceto para $z = 0$, e a função é definida apenas quando a série termina, isto é, quando um ou mais dos a parâmetros é zero ou um inteiro negativo.

2.3.3 A Função Hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1$

Um caso em especial da função hipergeométrica, será do interesse de nossos estudos, ${}_2F_1$, também conhecida como série de Gauss.

Definição 2.3.2. *A série*

$$1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (2.5)$$

é simbolizada por ${}_2F_1[a; b; c; z]$, onde a, b e c são parâmetros e z a variável. Se a ou b for um inteiro negativo, a série tem um número finito de termos, e torna-se, de fato, um polinômio.

2.3.4 Convergência da Função de Gauss ${}_2F_1$

A série de Gauss, ${}_2F_1$, pode ser denotada por

$${}_2F_1[a; b; c; z] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!}, \text{ onde} \quad (2.6)$$

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)(a+3)\dots(a+n-1). \quad (2.7)$$

Por exemplo, $(2)_5 = 2.3.4.5.6 = 720$. Em particular, $(a)_0 \equiv 1$ e $(1)_n = n!$.

Logo,

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} e \quad (2.8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a)_n = \frac{1}{\Gamma(a)}. \quad (2.9)$$

Se a é um inteiro negativo $-m$, então

$$(a)_n = (-m)_n, \text{ if } m \geq n$$

e

$$(a)_n = 0, \text{ if } m < n$$

Por exemplo, $(-2)_2 = (-2).(-1) = 2$, entretanto, $(-2)_5 = 0$.

Então em ${}_2F_1[a; b; c; z]$, se a ou b for um inteiro negativo, a série tem um número finito de termos, e torna-se, de fato, um polinômio, mas se c é um inteiro negativo, a função não é definida, uma vez que apenas um número finito de termos da série torna-se infinito. Temos que

$$\frac{d}{dz}({}_2F_1[a; b; c; z]) = \frac{ab}{c} {}_2F_1[a+1; b+1; c+1; z]. \quad (2.10)$$

2.3.5 Relações Funcionais de ${}_2F_1[a; b; c; z]$

Segundo [Temme, 1996] (20), a função hipergeométrica satisfaz às seguintes relações:

$${}_2F_1[a; b; c; z] = {}_2F_1[b; a; c; z] \quad (2.11)$$

$${}_2F_1[a; b; c; z] = (1-z)^{-a} {}_2F_1\left[a; c-b; c; \frac{z}{z-1}\right] \quad (2.12)$$

$${}_2F_1[a; b; c; z] = (1-z)^{-b} {}_2F_1\left[c-a; b; c; \frac{z}{z-1}\right] \quad (2.13)$$

$${}_2F_1[a; b; c; z] = (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1[c-a; c-b; c; z] \quad (2.14)$$

Seja a forma abaixo a Integral de Contorno de ${}_2F_1[a; b; c; z]$. Temos que

$${}_2F_1[a; b; c; z] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)} (-z)^s ds \quad (2.15)$$

ou

$${}_2F_1[a; b; c; z] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)} (-z)^{-s} ds \quad (2.16)$$

2.4 A Função G de Meijer

Definição 2.4.1. A Função G de Meijer é definida pela integral

$$G(z) = \mathbb{G}_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right] =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} z^s ds, \quad (2.17)$$

onde

$$0 \leq m \leq q,$$

$$0 \leq n \leq p,$$

$$m \neq 0 \text{ ou } n \neq 0,$$

a_j , com $j = 1, 2, \dots, p$, e b_j , com $j = 1, 2, \dots, q$, são números complexos tais que nenhum dos pólos de $\Gamma(b_j - s)$, $j = 1, \dots, m$, coincidam com algum dos pólos de $\Gamma(1 - a_j + s)$, $j = 1, \dots, n$. Também, C é um contorno no plano complexo percorrendo $\omega - i\infty$ a $\omega + i\infty$ pra algum ω real tal que

$$s = b_j + k,$$

para $j = 1, \dots, m$ e $k = 0, 1, \dots$ para o lado direito do contorno C e os pontos

$$s = a_j - 1 - k,$$

para $j = 1, \dots, n$ e $k = 0, 1, \dots$ para o lado esquerdo do contorno C com indentações, se for necessário para tal separação. A integral (2.17) é chamada Mellin-Barnes e pode ser vista como uma Transformação Inversa de Mellin.

A função G de Meijer é computável e está implementada em *softwares* matemáticos como o *Maple* e o *Mathematica*.

Em particular, a função G de Meijer é um caso especial da função H:

$$\mathbb{G}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} a_1, & \dots, & a_p \\ b_1, & \dots, & b_q \end{matrix} \middle| z \right] =$$

$$\mathbb{H}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_1, 1), & \dots, & (a_p, 1) \\ (b_1, 1), & \dots, & (b_q, 1) \end{matrix} \middle| z \right] \quad (2.18)$$

Se os parâmetros $\alpha_j, j = 1, \dots, p$ e $\beta_j, j = 1, \dots, q$ da função Hipergeométrica Generalizada são racionais, a função H pode ser escrita como função G.

2.5 A Função Bivariada $H[x, y]$

2.5.1 Conceitos e fundamentos - [MATHAI et al.,2010] (9)

Definição 2.5.1. *A Função Hipergeométrica Generalizada Bivariada $H[x, y]$ é definida pela integral complexa*

$$H \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbb{H}_{p_1, q_1; p_2, q_2; p_3, q_3}^{0, n_1; m_2, n_2; m_3, n_3} \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \middle| \begin{array}{l} (a_i, \alpha_i, A_i)_{1, p_1} : (c_i, \gamma_i)_{1, p_2}; (e_i, E_i)_{1, p_3} \\ (b_j, \beta_j, B_j)_{1, q_1} : (d_j, \delta_j)_{1, q_2}; (f_j, F_j)_{1, q_3} \end{array} \right] = \quad (2.19)$$

$$-\frac{1}{4\pi^2} \int_{C_1} \int_{C_2} \phi(s, t) \phi_1(s) \phi_2(t) x^s y^t ds dt, \quad (2.20)$$

onde x e y são variáveis não-nulas. A notação $(a_i, \alpha_i, A_i)_{1, p_1}$ é a abreviação da sequência de parâmetros $(a_1, \alpha_1, A_1), \dots, (a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})$. De forma similar, deve ser feito com as outras sequências de parâmetros. Onde

$$\phi(s, t) = \frac{\prod_{i=1}^{n_1} \Gamma(1 - a_i + \alpha_i s + A_i t)}{\prod_{i=n_1+1}^{p_1} \Gamma(a_i - \alpha_i s - A_i t) \prod_{j=1}^{q_1} \Gamma(1 - b_j + \beta_j s + B_j t)}, \quad (2.21)$$

$$\phi_1(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(d_j - \delta_j s) \prod_{i=1}^{n_2} \Gamma(1 - c_i + \gamma_i s)}{\prod_{j=m_2+1}^{q_2} \Gamma(1 - d_j + \delta_j s) \prod_{i=n_2+1}^{p_2} \Gamma(c_i - \gamma_i s)}, \quad (2.22)$$

$$\phi_2(t) = \frac{\prod_{j=1}^{m_3} \Gamma(f_j - F_j t) \prod_{i=1}^{n_3} \Gamma(1 - e_i + E_i t)}{\prod_{j=m_3+1}^{q_3} \Gamma(1 - f_j + F_j t) \prod_{i=n_3+1}^{p_3} \Gamma(e_i - E_i t)}. \quad (2.23)$$

Assume-se que $a_i, b_j, c_i, d_j, e_i, f_j$ são números complexos e seus respectivos coeficientes $\alpha_i, A_i, \beta_j, B_j, \gamma_i, \delta_j, E_i, F_j$ são números reais e positivos, tais que os contornos C_1, C_2 existem se

$$\rho_1 = \sum_{i=1}^{p_1} \alpha_i + \sum_{i=1}^{p_2} \gamma_i - \sum_{j=1}^{q_1} \beta_j - \sum_{j=1}^{q_2} \delta_j \leq 0,$$

$$\rho_2 = \sum_{i=1}^{p_1} A_i + \sum_{i=1}^{p_2} E_i - \sum_{j=1}^{q_1} B_j - \sum_{j=1}^{q_2} F_j \leq 0,$$

$$\Omega_1 = - \sum_{i=n_1+1}^{p_1} \alpha_i - \sum_{j=1}^{q_1} \beta_j + \sum_{j=1}^{m_2} \delta_j - \sum_{j=m_2+1}^{p_2} \delta_j + \sum_{i=1}^{n_2} \gamma_i - \sum_{i=n_2+1}^{p_2} \gamma_i > 0,$$

$$\Omega_2 = - \sum_{i=n_1+1}^{p_1} A_i - \sum_{j=1}^{q_1} B_j + \sum_{j=1}^{m_3} F_j - \sum_{j=m_3+1}^{p_3} F_j + \sum_{i=1}^{n_3} E_i - \sum_{i=n_3+1}^{p_3} E_i > 0.$$

Sob as condições supracitadas, a integral dupla de Mellin-Barnes (2.20) converge e define uma função analítica de duas variáveis x e y dentro do setor dado por:

$$|\arg(x)| < \frac{1}{2}\pi\Omega_1$$

$$|\arg(y)| < \frac{1}{2}\pi\Omega_2$$

Mais informações podem ser encontradas em [Mathai et al.,2010] (9).

2.6 Caso Especial da Função Bivariada $H[x, y]$

2.6.1 Conceitos e fundamentos - [HAI & YAKUBOVICH, 1992] (8)

Definição 2.6.1. *Um caso especial da Função Hipergeométrica Generalizada Bivariada $H[x, y]$ é definida pela integral complexa a seguir*

$$H \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbb{H}_{p_1, q_1; p_2, q_2; p_3, q_3}^{0, n_1; m_2, n_2; m_3, n_3} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} (\alpha_{p_1}^{(1)}, a_{p_1}^{(1)}) : (\alpha_{p_2}^{(2)}, a_{p_2}^{(2)}); (\alpha_{p_3}^{(3)}, a_{p_3}^{(3)}) \\ (\beta_{q_1}^{(1)}, b_{q_1}^{(1)}) : (\beta_{q_2}^{(2)}, b_{q_2}^{(2)}); (\beta_{q_3}^{(3)}, b_{q_3}^{(3)}) \end{array} \right. = \quad (2.24)$$

$$-\frac{1}{4\pi^2} \int_{C_1} \int_{C_2} \phi_1(s+t) \phi_2(s) \phi_3(t) x^{-s} y^{-t} ds dt, \quad (2.25)$$

onde x e y são variáveis não-nulas. Onde

$$\phi_1(s+t) = \frac{\prod_{j=1}^{n_1} \Gamma(1 - \alpha_j^{(1)} - a_j^{(1)}(s+t))}{\prod_{j=n_1+1}^{p_1} \Gamma(\alpha_j^{(1)} + a_j^{(1)}(s+t)) \prod_{j=1}^{q_1} \Gamma(1 - \beta_j^{(1)} - b_j^{(1)}(s+t))}, \quad (2.26)$$

$$\phi_2(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(\beta_j^{(2)} - b_j^{(2)}s) \prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(1 - \alpha_j^{(2)} - a_j^{(2)}s)}{\prod_{j=m_2+1}^{p_2} \Gamma(\alpha_j^{(2)} + a_j^{(2)}s) \prod_{j=n_2+1}^{q_2} \Gamma(1 - \beta_j^{(2)} - b_j^{(2)}s)}, \quad (2.27)$$

$$\phi_3(t) = \frac{\prod_{j=1}^{m_3} \Gamma(\beta_j^{(3)} - b_j^{(3)}t) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(1 - \alpha_j^{(3)} - a_j^{(3)}t)}{\prod_{j=m_3+1}^{p_3} \Gamma(\alpha_j^{(3)} + a_j^{(3)}t) \prod_{j=n_3+1}^{q_3} \Gamma(1 - \beta_j^{(3)} - b_j^{(3)}t)}, \quad (2.28)$$

Assume-se que a_i, b_j são números reais e positivos. Mais informações sobre convergência podem ser encontradas em [HAI & YAKUBOVICH, 1992] (8).

Capítulo 3

Uma Nova Distribuição

3.1 Introdução

A distribuição que será apresentada a seguir tem como característica assimetria à direita acentuada. Como possui diversos parâmetros, a distribuição pode assumir várias formas, o que facilita o uso em diversos dados onde se queira modelar v.a's positivas.

3.2 Distribuição Acumulada Assimétrica

Definição 3.2.1. *Seja a forma*

$$F(x) = \frac{a^\rho x^{2\rho}}{(ax^2 + 2bx + c)^\rho} \quad (3.1)$$

a função de distribuição acumulada de uma v.a. X onde $x > 0$, $a > 0$, $c > 0$, e $\rho > 0$.

A distribuição acumulada acima possui quatro parâmetros e pode ser reescrita como uma função de três parâmetros se o fator a^ρ no denominador (3.1) for colocado em evidência, então assumiremos que a função de distribuição acumulada assimétrica de interesse de nossos estudos é da forma abaixo.

Definição 3.2.2. *Seja a forma*

$$F(x) = \frac{x^{2\rho}}{(x^2 + 2Bx + C)^\rho} \quad (3.2)$$

a função de distribuição acumulada assimétrica de uma v.a. X onde $B = \frac{b}{a}$ e $C = \frac{c}{a}$, $x > 0$, $C > 0$, e $\rho > 0$.

3.2.1 Propriedades da Distribuição Acumulada

Dado que $F(x)$ é distribuição, então ela satisfaz às seguintes propriedades:

- i)* $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0$
- ii)* $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
- iii)* $F(x) \leq F(y), \forall x < y; x, y \in \mathbb{R}$
- iv)* $0 \leq F_X(x) \leq 1, \forall x \in (0, \infty)$;

Demonstração:

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2\rho}}{(x^2 + 2Bx + C)^\rho} = 0$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2\rho}}{(x^2 + 2Bx + C)^\rho} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{2B}{x} + \frac{C}{x^2}} \right)^\rho = 1$$

iii) Como $f(x) > 0, \forall x \in (0, \infty)$, então $F(x)$ é função não-decrescente, $\forall x \in (0, \infty)$.

iv) De fato, pelas propriedades *i)* – *iii)* conclui-se que *iv)* também vale.

Para os valores fornecidos de $F(x)$, x pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$x = \frac{BF^{1/\rho} + [B^2F^{2/\rho} + CF^{1/\rho}(1 - F^{1/\rho})]^{1/2}}{(1 - F^{1/\rho})}$$

Isto significa que F é inversível e os quantis podem ser obtidos facilmente. O resultado acima indica que se pode simular valores de uma v.a. X com a distribuição 3.2.

3.2.2 Gráficos para a Distribuição Acumulada

Como provamos que $F(x)$ é distribuição, então apresentaremos algumas formas da distribuição, para diversos valores dos parâmetros B, C, ρ .

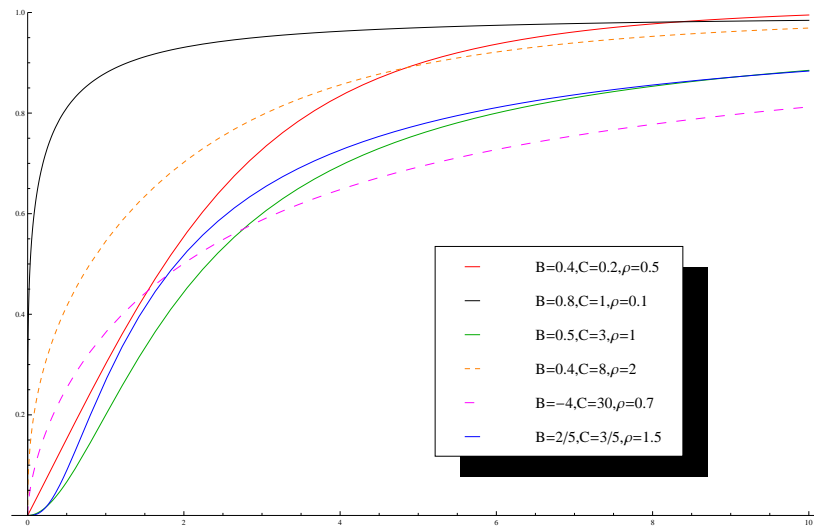


Figura 3.1: Formas para a Distribuição Acumulada Assimétrica $F(x)$

Para verificar o efeito de cada um dos parâmetros na curva, produzimos gráficos onde se fixa dois parâmetros enquanto um terceiro varia.

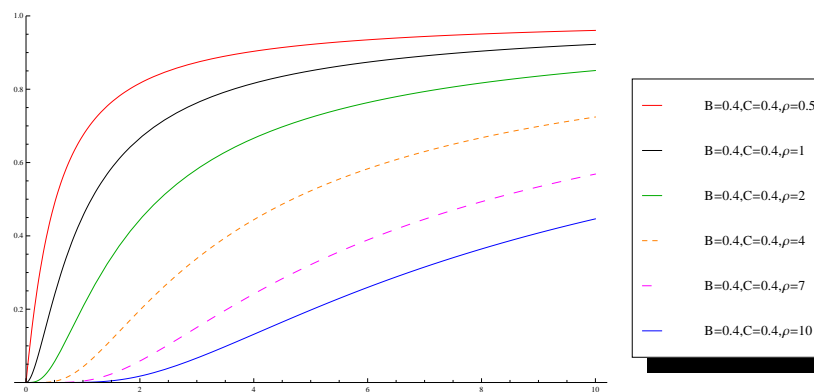


Figura 3.2: Formas para a Distribuição Acumulada $F(x)$ - variação de ρ , com $B > 0$, C fixos

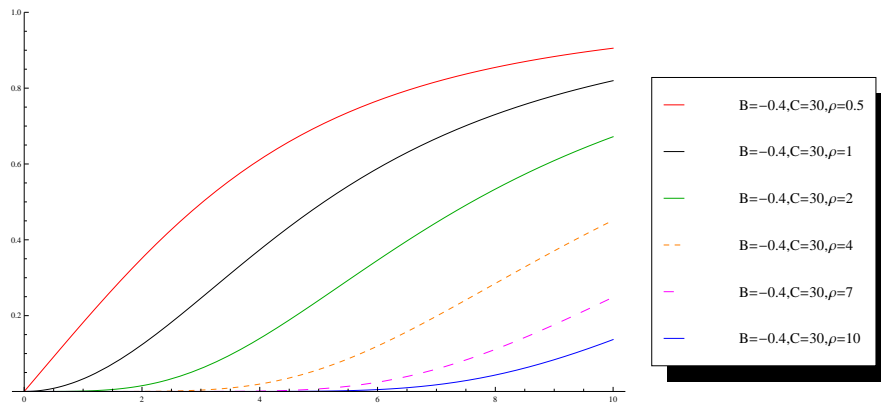


Figura 3.3: Formas para a Distribuição Acumulada $F(x)$ - variação de ρ , com $B < 0$, C fixos

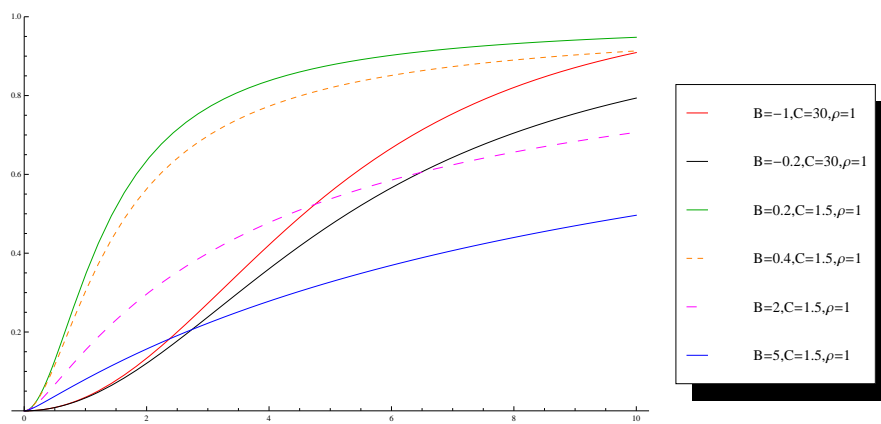


Figura 3.4: Formas para a Distribuição Acumulada $F(x)$ - variação de B , com C, ρ fixos

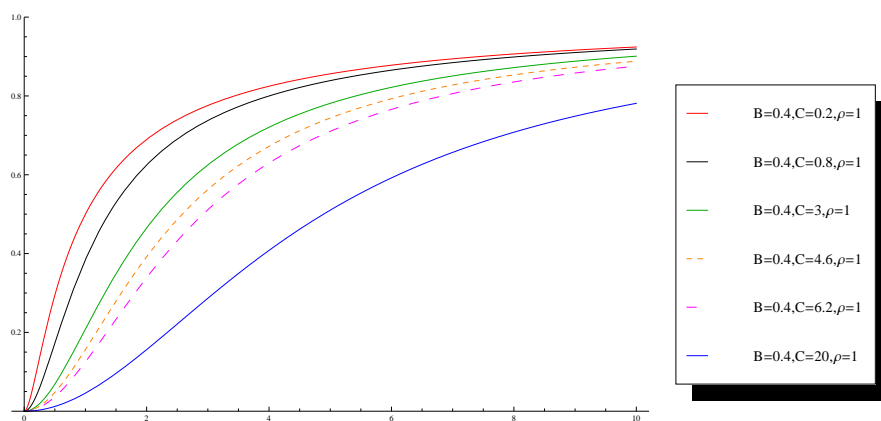


Figura 3.5: Formas para a Distribuição Acumulada $F(x)$ - variação de C , com $B > 0$, ρ fixos

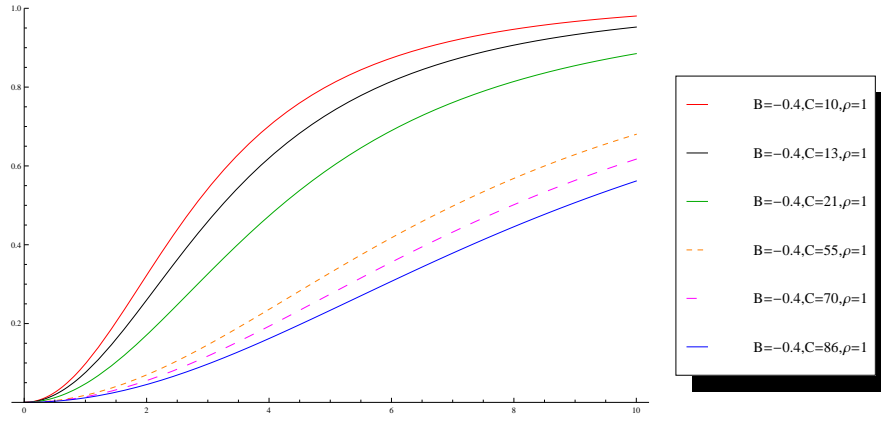


Figura 3.6: Formas para a Distribuição Acumulada $F(x)$ - variação de C , com $B < 0$, ρ fixos

3.2.3 Função Densidade de Probabilidade

Uma vez que $F(x)$ existe, então encontraremos $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ a seguir:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{x^{2\rho}}{(x^2 + 2Bx + C)^\rho} \right) \\
 &= \frac{(2\rho x^{2\rho-1})(x^2 + 2Bx + C)^\rho - ((x^{2\rho}\rho)(x^2 + 2Bx + C)^{\rho-1}(2x + 2B))}{(x^2 + 2Bx + C)^{2\rho}} \\
 &= \frac{2\rho x^{2\rho+1} + 4B^2\rho + 2C\rho x^{2\rho-1} - 2\rho x^{2\rho+1} - 2B\rho x^{2\rho}}{(x^2 + 2Bx + c)^{\rho+1}} \\
 &= \frac{2B\rho x^{2\rho} + 2C\rho x^{2\rho-1}}{(x^2 + 2Bx + C)^{\rho+1}} \\
 &= \frac{2\rho x^{2\rho-1}(Bx + C)}{(x^2 + 2Bx + C)^{\rho+1}}
 \end{aligned}$$

Definição 3.2.3. *Seja a forma*

$$f(x) = \frac{2\rho x^{2\rho-1}(Bx + C)}{(x^2 + 2Bx + C)^{\rho+1}} \quad (3.3)$$

a função densidade de probabilidade de uma v.a. X onde $x > 0$, $C > 0$, e $\rho > 0$.

3.2.4 Gráficos para a Função Densidade de Probabilidade

A seguir apresentaremos algumas formas da f.d.p., para diversos valores dos parâmetros B, C, ρ :

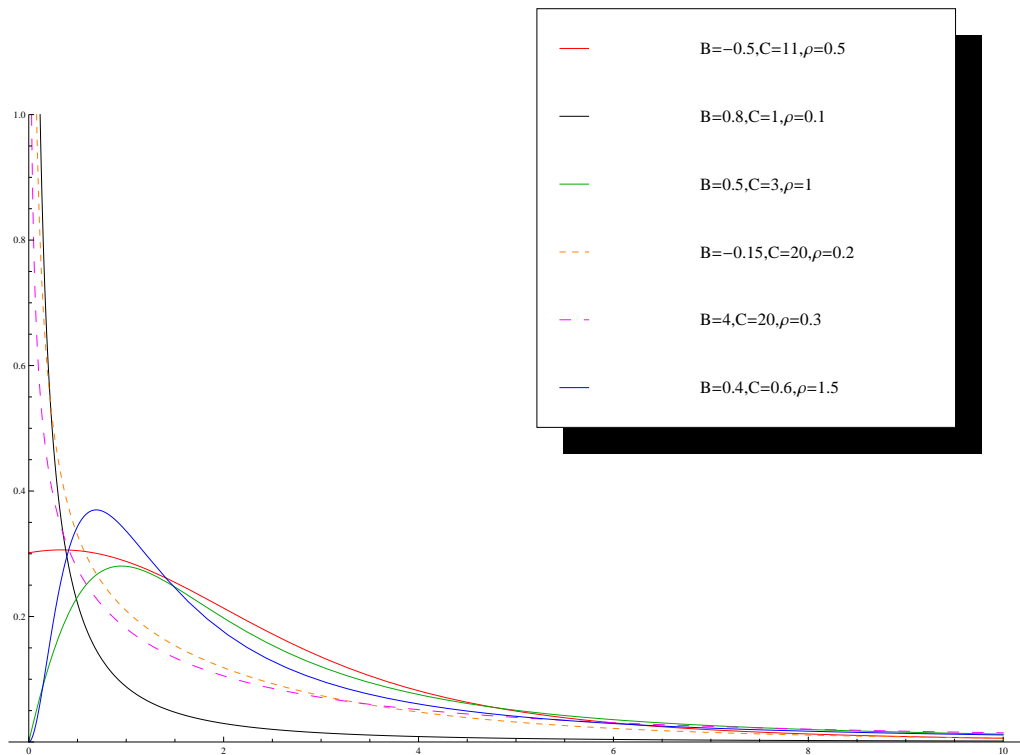


Figura 3.7: Formas para a Densidade de Probabilidade Assimétrica $f(x)$

Observando a figura (3.7), podemos ver certa semelhança com a distribuição Gama Generalizada. A função densidade de probabilidade da uma v.a. X com distribuição Gama Generalizada é da forma

$$h(x) = \frac{\alpha\beta^{\frac{\alpha}{\gamma}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{\gamma})} x^{\alpha-1} e^{-\beta x^{\gamma}}, \quad (3.4)$$

onde $x > 0$, $\beta > 0$ é parâmetro de escala, $\alpha, \gamma > 0$ são parâmetros de forma. O gráfico da f.d.p com a v.a. $X \sim \Gamma(\alpha, \beta, \gamma)$ pode ser observado abaixo:

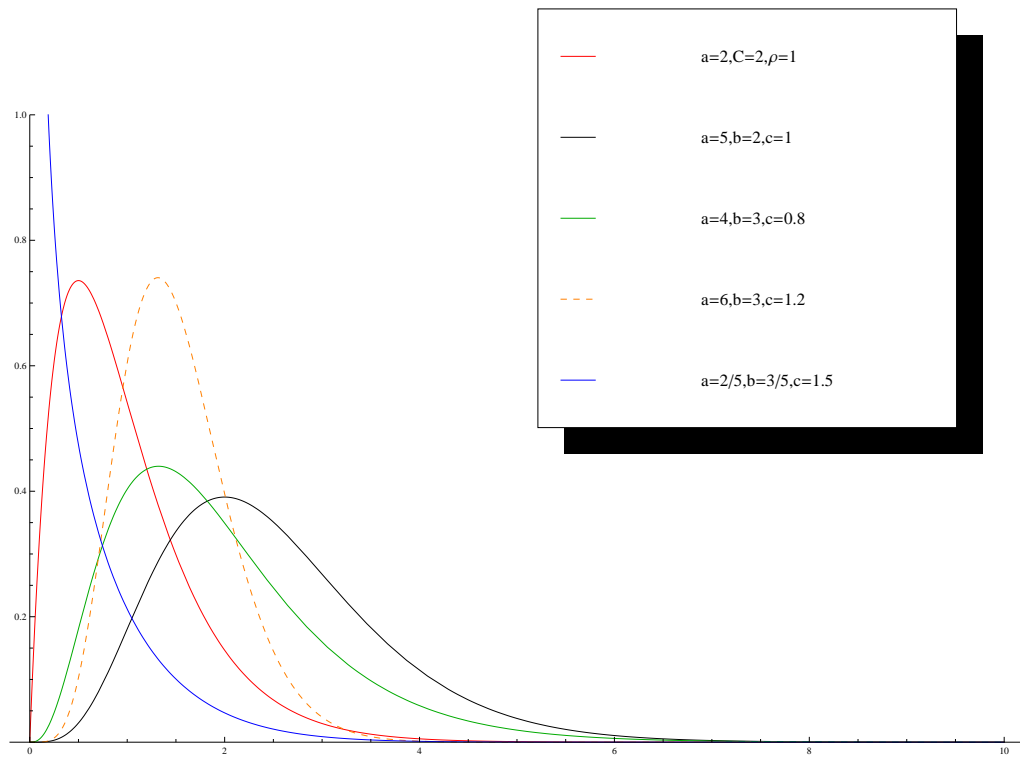


Figura 3.8: Formas para a Densidade Gama Generalizada

Os gráficos das densidades presentes nas figuras (3.7) e (3.8) possuem diferenças nas caudas. No caso da nova densidade, ela pode assumir formas com caudas mais pesadas.

Para verificar o efeito de cada um dos parâmetros na curva, produzimos gráficos onde se fixa dois parâmetros enquanto o terceiro varia.

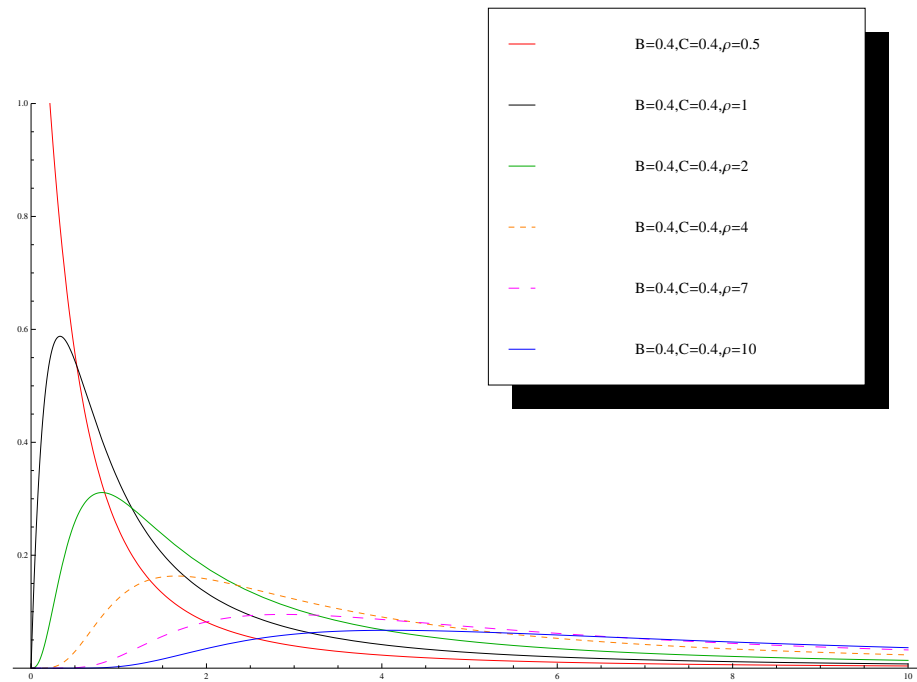


Figura 3.9: Formas para a Densidade de Probabilidade $f(x)$ - variação de ρ , com $B > 0$, C fixos

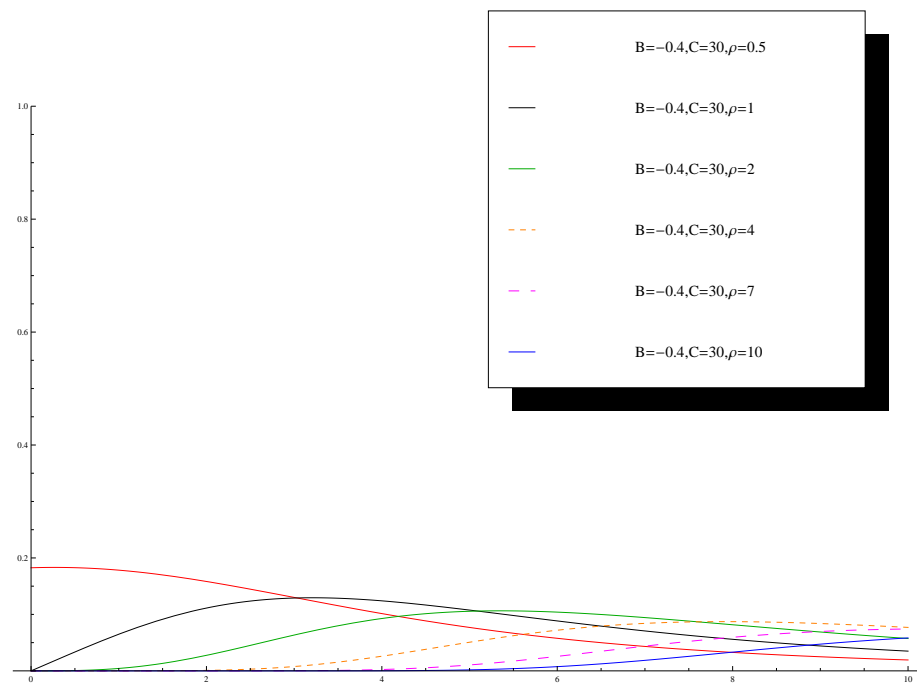


Figura 3.10: Formas para a Densidade de Probabilidade $f(x)$ - variação de ρ , com $B < 0$, C fixos

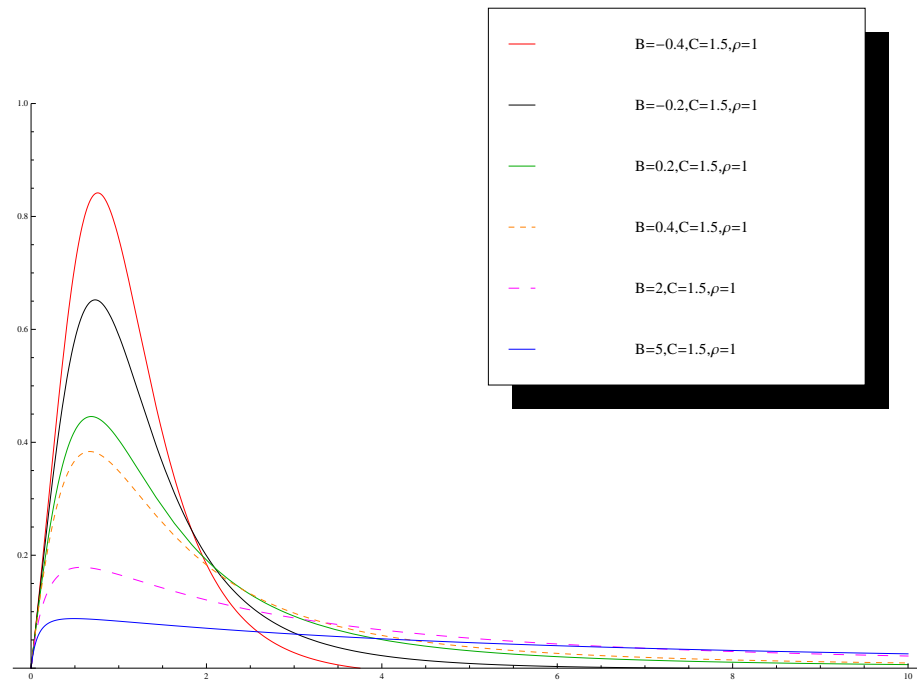


Figura 3.11: Formas para a Densidade de Probabilidade $f(x)$ - variação de B, com C, ρ fixos

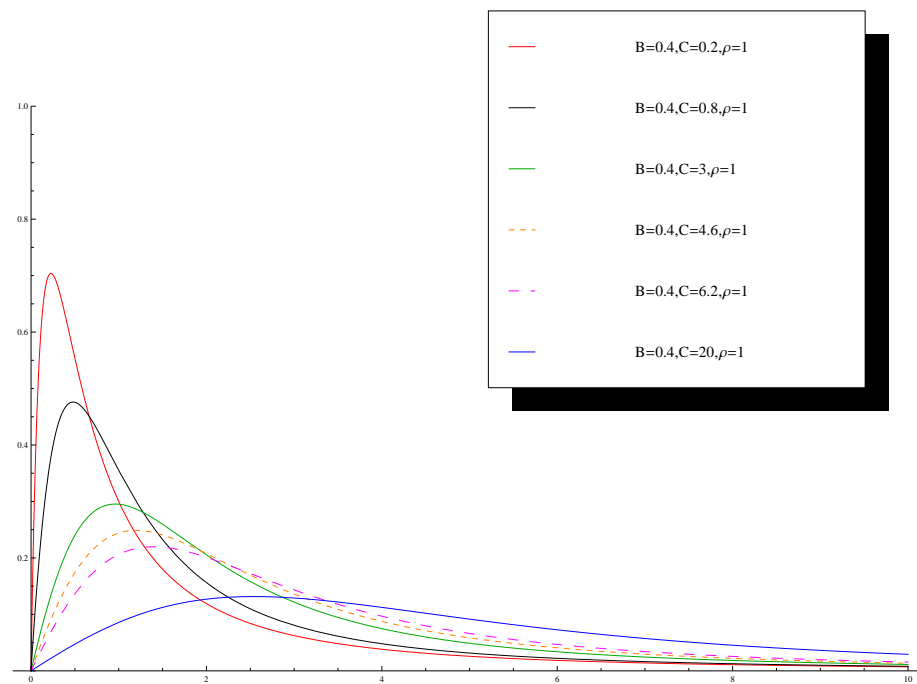


Figura 3.12: Formas para a Densidade de Probabilidade $f(x)$ - variação de C, com $B > 0, \rho$ fixos

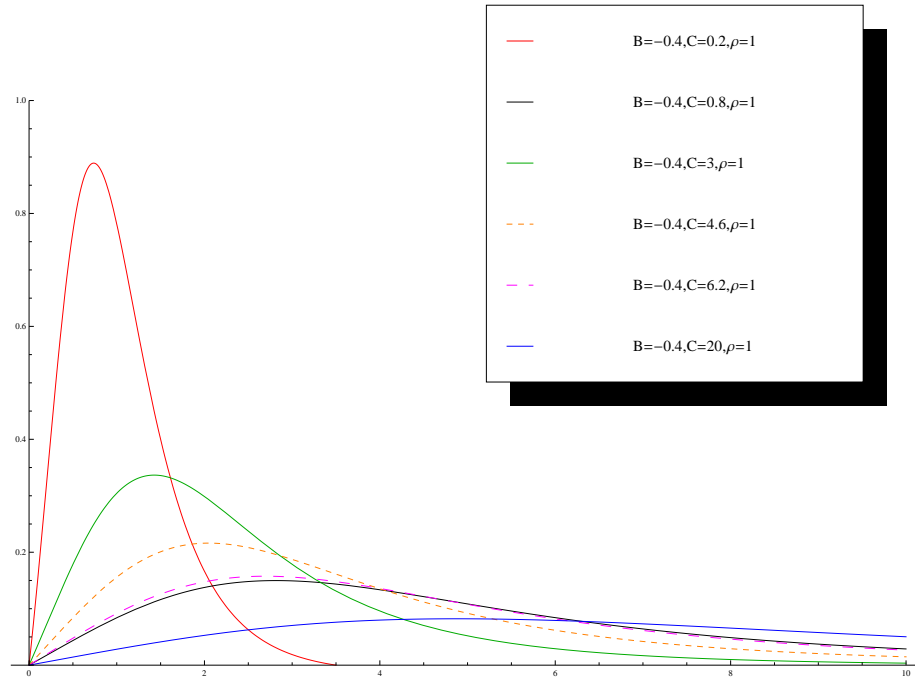


Figura 3.13: Formas para a Densidade de Probabilidade $f(x)$ - variação de C , com $B < 0$, ρ fixos

Pela figura (3.9) observamos que o parâmetro ρ controla a queda inicial da cauda da densidade, isto é, o meio da função. Quando nos referimos ao meio da curva, estamos nos atendo ao segmento da curva entre o pico e o final da cauda, onde normalmente se encontra a curvatura da f.d.p., para $B > 0$.

Pela figura (3.10) concluímos que o parâmetro ρ controla a queda inicial da cauda da densidade. Mas com $B < 0$ associado a ρ , a curva fica mais achatada do que no caso em que $B > 0$.

Pela figura (3.11) verificamos que o parâmetro B determina o comportamento relacionado à assimetria. Quanto maior B , mais larga é a curva.

Pela figura (3.12) observamos que o parâmetro C determina o comportamento relacionado ao pico da função. Quanto maior C , menor o pico da curva, para $B > 0$.

Pela figura (3.13) concluímos que o parâmetro C determina o comportamento

relacionado ao pico da função. Mas não existe a relação inversamente proporcional que encontramos quando $B > 0$.

Ao observarmos o comportamento da f.d.p. (3.3), quando $x \rightarrow \infty$, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \approx c \frac{x^{2\rho}}{x^{2\rho+2}} \approx \frac{c}{x^2},$$

onde c é uma constante, e possui gráfico com cauda assintótica:

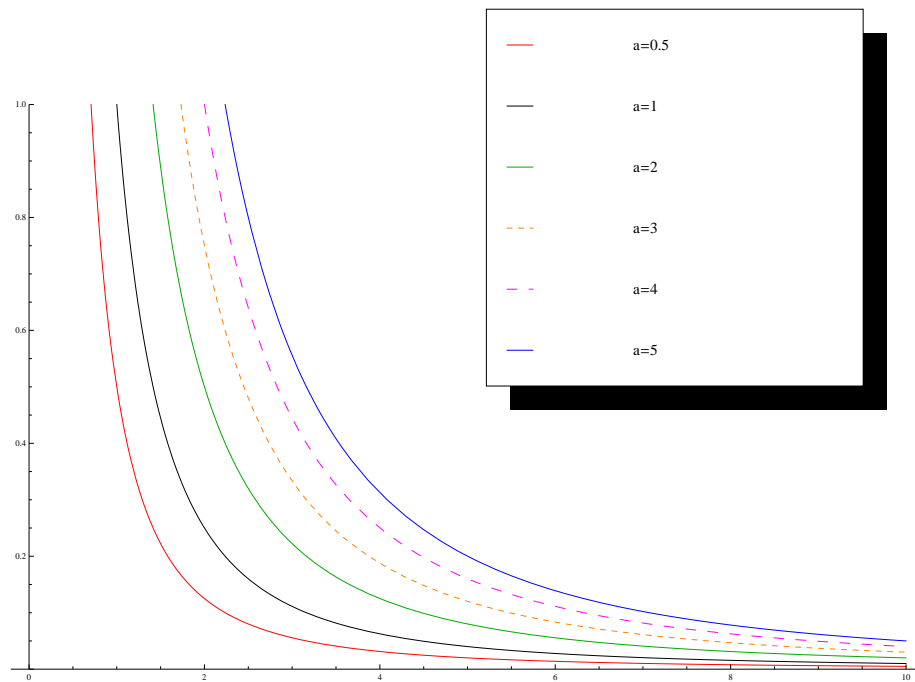


Figura 3.14: Comportamento da Densidade de Probabilidade $f(x)$ quando $x \rightarrow \infty$

Logo, o que se observa é que o comportamento da cauda tem variação regular de ordem 2. Observe que o comportamento da cauda de $f(x)$ quando $x \rightarrow \infty$ pode ser comparada com a cauda da distribuição Cauchy. A distribuição de Cauchy pode ser definida como:

$$k(x) = \frac{\theta}{\pi} \left[\frac{1}{\theta^2 + (x - \mu)^2} \right], \quad (3.5)$$

onde $-\infty < x < \infty$, μ é parâmetro de localização, $\theta > 0$ é parâmetro de escala. O gráfico da f.d.p com a v.a. $X \sim C(\mu, \theta)$ pode ser observado abaixo:

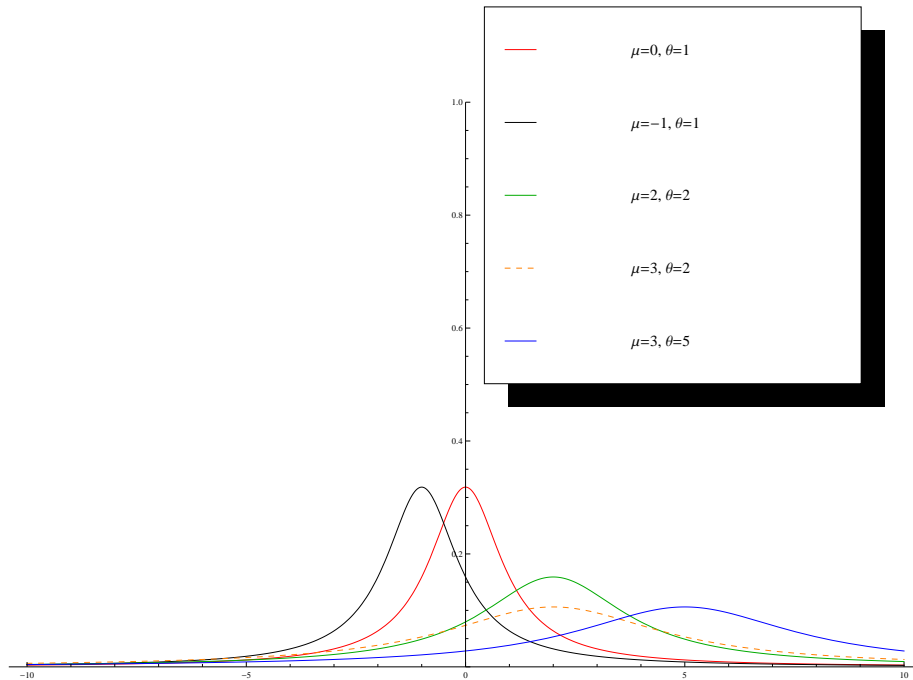


Figura 3.15: Formas para a Densidade de Cauchy

A nova distribuição tem cauda pesada como as distribuições de Levy e Pareto, por exemplo. No caso da Levy, a nossa distribuição tem a vantagem de deter forma explícita sempre. E ao compararmos com a de Pareto, observamos que a nova densidade (3.3) passa pela origem, o que não ocorre com Pareto.

3.2.5 Distribuições de Mínimo e Máximo

A distribuição e a densidade do Mínimo $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$ são dadas por:

$$P(X_{(1)} \leq z) = 1 - P(X_{(1)} > z) = 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) > z) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_{X_{(1)}}(z)]$$

$$F(z) = 1 - \left[1 - \frac{z^{2\rho}}{(z^2 + 2Bz + C)^\rho} \right]^n$$

$$f(z) = 2n\rho \frac{z^{2\rho-1}(Bz + C)}{(z^2 + 2Bz + C)^{\rho+1}} \left[1 - \frac{z^{2\rho}}{(z^2 + 2Bz + C)^\rho} \right]^{n-1}$$

A distribuição e a densidade do Máximo $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$ são dadas por:

$$P(X_{(n)} \leq w) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \geq w) = \prod_{i=1}^n F_{X_{(1)}}(w)$$

$$F(w) = 1 - \left[\frac{w^{2\rho}}{(w^2 + 2Bw + C)^\rho} \right]^n$$

$$f(w) = 2n\rho \frac{w^{2\rho-1}(Bw + C)}{(w^2 + 2Bw + C)^{\rho+1}} \left[\frac{w^{2\rho}}{(w^2 + 2Bw + C)^\rho} \right]^{n-1}$$

3.2.6 Momentos para X

Calcularemos o k-ésimo momento μ'_k para a densidade definida em (3.3):

$$\mu'_k = EX^k = \int_0^\infty x^k dF(x) = \int_0^\infty x^k \frac{2\rho x^{2\rho-1}(Bx + C)}{(x^2 + 2Bx + C)^{\rho+1}} dx =$$

$$\int_0^\infty \frac{2\rho x^{k+2\rho-1}(Bx+C)}{(x^2+2Bx+C)^{\rho+1}} dx = \int_0^\infty \frac{2\rho Bx^{k+2\rho}}{(x^2+2Bx+C)^{\rho+1}} dx + \int_0^\infty \frac{2\rho Cx^{k+2\rho-1}}{(x^2+2Bx+C)^{\rho+1}} dx$$

Temos o seguinte resultado, encontrado em [PRUDNIKOV et al, 1986] (14):

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(ax^2+2bx+c)^q} dx = a^{-p/2} c^{p/2-q} B(p, 2q-p) {}_2F_1 \left[\frac{p}{2}; q - \frac{p}{2}; q + \frac{1}{2}; 1 - \frac{b^2}{ac} \right], \quad (3.6)$$

onde $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ para $a > 0$, $c > 0$, $b^2 < ac$, $0 < p < 2q$. Utilizando (2.13), obtivemos a seguinte expressão alternativa:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(ax^2+2bx+c)^q} dx = a^{q-p} b^{p-2q} B(p, 2q-p) {}_2F_1 \left[q - \frac{p}{2} + \frac{1}{2}; q - \frac{p}{2}; q + \frac{1}{2}; 1 - \frac{ac}{b^2} \right], \quad (3.7)$$

onde $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ para $a > 0$, $b > 0$, $b^2 > ac$, $0 < p < 2q$.

Isto significa que, para as duas situações, tanto $b^2 < ac$ quanto $b^2 > ac$ temos soluções em termos de ${}_2F_1$ diferentes. Usando o resultado (3.6) para resolver EX^k , temos:

$$EX^k = \underbrace{\int_0^\infty \frac{2\rho Bx^{k+2\rho}}{(x^2+2Bx+C)^{\rho+1}} dx}_I + \underbrace{\int_0^\infty \frac{2\rho Cx^{k+2\rho-1}}{(x^2+2Bx+C)^{\rho+1}} dx}_II =$$

i) Comparando (I) e a expressão (3.6), temos:

$$\begin{cases} p = k + 2\rho + 1 \\ q = \rho + 1 \end{cases}$$

Logo,

$$I = 2\rho B \left[C^{\frac{k-1}{2}} \frac{\Gamma(k+2\rho+1)\Gamma(1-k)}{\Gamma(2\rho+2)} \right] {}_2F_1 \left[\frac{k+2\rho+1}{2}; \frac{1-k}{2}; \rho + \frac{3}{2}; 1 - \frac{B^2}{C} \right]$$

ii) Comparando (II) e a expressão (3.6), temos:

$$\begin{cases} p = k + 2\rho \\ q = \rho + 1 \end{cases}$$

Logo,

$$II = 2\rho C \left[C^{\frac{k}{2}-1} \frac{\Gamma(k+2\rho)\Gamma(2-k)}{\Gamma(2\rho+2)} \right] {}_2F_1 \left[\rho + \frac{k}{2}; 1 - \frac{k}{2}; \rho + \frac{3}{2}; 1 - \frac{B^2}{C} \right]$$

Então,

$$\mu'_k = EX^k = (I) + (II)$$

$$= B \left[C^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(k+2\rho+1)\Gamma(1-k) \right] {}_2F_1 \left[\frac{k+2\rho+1}{2}; \frac{1-k}{2}; \rho + \frac{3}{2}; 1 - \frac{B^2}{C} \right] +$$

$$C \left[C^{\frac{k}{2}-1} \Gamma(k+2\rho)\Gamma(2-k) \right] {}_2F_1 \left[\rho + \frac{k}{2}; 1 - \frac{k}{2}; \rho + \frac{3}{2}; 1 - \frac{B^2}{C} \right] \left[\frac{2\rho}{\Gamma(2\rho+2)} \right], \quad (3.8)$$

onde $B^2 < C$, $0 < k < 1$. Pode ser obtido resultado similar para $B^2 > C$, pois existe a forma (3.7), que gera ${}_2F_1$ diferente para este caso. Observamos então que o k -ésimo momento de X só existe para $f(x)$, quando $k < 1$ (possui apenas momentos fracionários), isto é, a f.d.p. não possui Esperança, e conseqüentemente, não possui Variância, ou quaisquer momentos inteiros posteriores, utilizados frequentemente para estimação e intervalos de confiança. Como os momentos inteiros positivos não existem, então não será calculada a Função Geratriz de Momentos.

3.2.7 Função Característica para X

Calcularemos a função característica $\varphi_X(t)$ para a densidade definida em (3.3):

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= Ee^{itX} = \int_0^\infty e^{itx} dF(x) = \int_0^\infty e^{itx} \frac{2\rho x^{2\rho-1}(Bx+C)}{(x^2+2Bx+C)^{\rho+1}} dx = \\ &= \int_0^\infty e^{itx} \frac{2\rho Bx^{2\rho}}{(x^2+2Bx+C)^{\rho+1}} dx + \int_0^\infty e^{itx} \frac{2\rho Cx^{2\rho-1}}{(x^2+2Bx+C)^{\rho+1}} dx = \\ &= \int_0^\infty (\cos(tx) + i\operatorname{sen}(tx)) \frac{2\rho Bx^{2\rho}}{(x^2+2Bx+C)^{\rho+1}} dx + \int_0^\infty (\cos(tx) + i\operatorname{sen}(tx)) \frac{2\rho Cx^{2\rho-1}}{(x^2+2Bx+C)^{\rho+1}} dx = \\ &= \underbrace{\int_0^\infty \cos(tx) \left[\frac{2\rho Bx^{2\rho}}{(x^2+2Bx+C)^{\rho+1}} + \frac{2\rho Cx^{2\rho-1}}{(x^2+2Bx+C)^{\rho+1}} \right] dx}_I + \\ &+ \underbrace{i \int_0^\infty \operatorname{sen}(tx) \left[\frac{2\rho Bx^{2\rho}}{(x^2+2Bx+C)^{\rho+1}} + \frac{2\rho Cx^{2\rho-1}}{(x^2+2Bx+C)^{\rho+1}} \right] dx}_{II}\end{aligned}$$

Transformando $\cos(x)$ e $\operatorname{sen}(x)$ em integrais de contorno, temos:

$$\cos(tx) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)} \left[\frac{tx}{2} \right]^{2s} ds; \quad 0 < \gamma < \frac{1}{2}, x > 0 \quad (3.9)$$

e

$$\operatorname{sen}(tx) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\frac{3}{2}+s)} \left[\frac{tx}{2} \right]^{2s-1} ds; \quad 0 < \gamma < 1, x > 0 \quad (3.10)$$

Usando o resultado (3.9) para resolver a expressão (I), temos:

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)} \left[\frac{t^2}{4} \right]^s \int_0^\infty \frac{2\rho B x^{2\rho+2s}}{(x^2 + 2Bx + C)^{\rho+1}} dx ds +$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)} \left[\frac{t^2}{4} \right]^s \int_0^\infty \frac{2\rho C x^{2\rho+2s-1}}{(x^2 + 2Bx + C)^{\rho+1}} dx ds$$

i) Comparando (I) e a expressão (3.6), temos:

$$I = \frac{2\rho B \sqrt{\pi}}{\Gamma(2\rho+2)\sqrt{C}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)} \left[\frac{t^2 C}{4} \right]^s \times$$

$$\Gamma(2\rho+1+2s)\Gamma(1-2s) {}_2F_1 \left[\rho + \frac{1}{2} + s; \frac{1}{2} - s; \rho + \frac{3}{2}; 1 - \frac{B^2}{C} \right] ds +$$

$$\frac{2\rho \sqrt{\pi}}{\Gamma(2\rho+2)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)} \left[\frac{t^2 C}{4} \right]^s \times$$

$$\Gamma(2\rho+2s)\Gamma(2-2s) {}_2F_1 \left[\rho + s; 1 - s; \rho + \frac{3}{2}; 1 - \frac{B^2}{C} \right] ds$$

ii) Usando as relações (2.13) e (2.11), temos que:

$$I = \frac{2\rho \sqrt{\pi}}{\Gamma(2\rho+2)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)} \left[\frac{4}{t^2 B^2} \right]^{-s} \times$$

$$\Gamma(2\rho + 1 + 2s)\Gamma(1 - 2s)_2F_1 \left[\frac{1}{2} - s; 1 - s; \rho + \frac{3}{2}; 1 - \frac{C}{B^2} \right] ds +$$

$$\frac{2\rho\sqrt{\pi}C}{\Gamma(2\rho + 2)B^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\frac{1}{2} + s)} \left[\frac{4}{t^2 B^2} \right]^{-s} \times$$

$$\Gamma(2\rho + 2s)\Gamma(2 - 2s)_2F_1 \left[1 - s; \frac{3}{2} - s; \rho + \frac{3}{2}; 1 - \frac{C}{B^2} \right] ds$$

iii) Usando a definição (2.16) da Integral de Contorno de ${}_2F_1[a; b; c : z]$ e a expressão (I), temos:

$$I = \frac{2\rho\sqrt{\pi}\Gamma(\rho + 3/2)}{\Gamma(2\rho + 2)} \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(1 - 2s)\Gamma(2\rho + 1 + 2s)}{\Gamma(\frac{1}{2} + s)\Gamma(1 - s)\Gamma(\frac{1}{2} - s)} \times$$

$$\frac{\Gamma(s_1)\Gamma(\frac{1}{2} - s - s_1)\Gamma(1 - s - s_1)}{\Gamma(\rho + \frac{3}{2} - s_1)} \left[\frac{C}{B^2} - 1 \right]^{-s_1} \left[\frac{4}{t^2 B^2} \right]^{-s} ds_1 ds +$$

$$\frac{2\rho\sqrt{\pi}\Gamma(\rho + 3/2)C}{\Gamma(2\rho + 2)B^2} \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(2 - 2s)\Gamma(2\rho + 2s)}{\Gamma(\frac{1}{2} + s)\Gamma(\frac{3}{2} - s)\Gamma(1 - s)} \times$$

$$\frac{\Gamma(s_1)\Gamma(\frac{3}{2} - s - s_1)\Gamma(1 - s - s_1)}{\Gamma(\rho + \frac{3}{2} - s_1)} \left[\frac{C}{B^2} - 1 \right]^{-s_1} \left[\frac{4}{t^2 B^2} \right]^{-s} ds_1 ds$$

iv) Usando a definição (2.24) de $H \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, temos que:

$$I = c_1 \mathbb{H}_{0,0:1,3;0,2}^{0,2:1,2;1,0} \left[\begin{array}{c} \frac{4}{t^2 B^2} \\ \frac{C}{B^2} - 1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} (0, 1) \left(\frac{1}{2}, 1\right) : (1, 1) (0, 2) \left(\frac{1}{2}, 1\right); -- \\ -- : (0, 1) (2\rho + 1, 2) \left(\frac{1}{2}, 1\right) : (0, 1) \left(-\frac{1}{2} - \rho, 1\right) \end{array} \right] +$$

$$c_2 \mathbb{H}_{0,0:2,4;0,2}^{0,2:2,1;1,0} \left[\begin{array}{c} \frac{4}{t^2 B^2} \\ \frac{C}{B^2} - 1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} (0, 1) \left(-\frac{1}{2}, 1\right) : (1, 1) (-1, 2) \left(\frac{1}{2}, 1\right); -- \\ -- : (0, 1) (2\rho, 2) \left(-\frac{1}{2}, 1\right) : (0, 1) \left(-\frac{1}{2} - \rho, 1\right) \end{array} \right]$$

em que $c_1 = \frac{2\rho\sqrt{\pi}\Gamma(\rho+\frac{3}{2})}{\Gamma(2\rho+2)}$ e $c_2 = \frac{2\rho C\sqrt{\pi}\Gamma(\rho+\frac{3}{2})}{B^2\Gamma(2\rho+2)}$.

Usando o resultado (3.10) para resolver a expressão (II), temos:

$$II = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\frac{3}{2}+s)} \left[\frac{t}{2}\right]^{2s-1} \int_0^\infty \frac{2\rho B x^{2\rho+2s-1}}{(x^2+2Bx+C)^{\rho+1}} dx ds +$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\frac{3}{2}+s)} \left[\frac{t}{2}\right]^{2s-1} \int_0^\infty \frac{2\rho C x^{2\rho+2s-2}}{(x^2+2Bx+C)^{\rho+1}} dx ds$$

i) Comparando (II) e a expressão (3.6), temos:

$$II = \frac{4\rho B\sqrt{\pi}i}{\Gamma(2\rho+2)Ct} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\frac{3}{2}+s)} \left[\frac{t^2 C}{4}\right]^s \times$$

$$\Gamma(2\rho+2s)\Gamma(2-2s) {}_2F_1 \left[\rho+s; 1-s; \rho+\frac{3}{2}; 1-\frac{B^2}{C} \right] ds +$$

$$\frac{4\rho\sqrt{\pi}i}{\Gamma(2\rho+2)\sqrt{C}t} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\frac{3}{2}+s)} \left[\frac{t^2 C}{4}\right]^s \times$$

$$\Gamma(2\rho - 1 + 2s)\Gamma(3 - 2s)_2F_1 \left[\rho - \frac{1}{2} + s; \frac{3}{2} - s; \rho + \frac{3}{2}; 1 - \frac{B^2}{C} \right] ds$$

ii) Usando as relações (2.13) e (2.11), temos que:

$$II = \frac{4\rho\sqrt{\pi}i}{tB\Gamma(2\rho + 2)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\frac{3}{2} + s)} \left[\frac{4}{t^2B^2} \right]^{-s} \times$$

$$\Gamma(2\rho + 2s)\Gamma(2 - 2s)_2F_1 \left[1 - s; \frac{3}{2} - s; \rho + \frac{3}{2}; 1 - \frac{C}{B^2} \right] ds +$$

$$\frac{4\rho\sqrt{\pi}C}{\Gamma(2\rho + 2)tB^3} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\frac{3}{2} + s)} \left[\frac{4}{t^2B^2} \right]^{-s} \times$$

$$\Gamma(2\rho + 1 + 2s)\Gamma(3 - 2s)_2F_1 \left[\frac{3}{2} - s; 2 - s; \rho + \frac{3}{2}; 1 - \frac{C}{B^2} \right] ds$$

iii) Usando a definição (2.16) da Integral de Contorno de ${}_2F_1[a; b; c : z]$ e a expressão (II), temos:

$$II = \frac{4\rho\sqrt{\pi}\Gamma(\rho + 3/2)i}{\Gamma(2\rho + 2)tB} \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(2 - 2s)\Gamma(2\rho + 2s)}{\Gamma(\frac{3}{2} + s)\Gamma(\frac{3}{2} - s)\Gamma(1 - s)} \times$$

$$\frac{\Gamma(s_1)\Gamma(\frac{3}{2} - s - s_1)\Gamma(1 - s - s_1)}{\Gamma(\rho + \frac{3}{2} - s_1)} \left[\frac{C}{B^2} - 1 \right]^{-s_1} \left[\frac{4}{t^2B^2} \right]^{-s} ds_1 ds +$$

$$\frac{4\rho C\sqrt{\pi}\Gamma(\rho+3/2)i}{\Gamma(2\rho+2)tB^3} \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(3-2s)\Gamma(2\rho+1+2s)}{\Gamma(\frac{3}{2}+s)\Gamma(2-s)\Gamma(\frac{3}{2}-s)} \times$$

$$\frac{\Gamma(s_1)\Gamma(2-s-s_1)\Gamma(\frac{3}{2}-s-s_1)}{\Gamma(\rho+\frac{3}{2}-s_1)} \left[\frac{C}{B^2} - 1 \right]^{-s_1} \left[\frac{4}{t^2 B^2} \right]^{-s} ds_1 ds$$

iv) Usando a definição (2.24) de $H \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (2.19), temos que:

$$II = c_3 \mathbb{H}_{0,0:1,3;0,2}^{0,2:1,2;1,0} \left[\begin{array}{c} \frac{4}{t^2 B^2} \\ \frac{C}{B^2} - 1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} (0,1) \left(-\frac{1}{2}, 1\right) : (1,1) (-1,2) \left(\frac{3}{2}, 1\right); -- \\ -- : (0,1) (2\rho, 2) \left(-\frac{1}{2}, 1\right) : (0,1) \left(-\frac{1}{2} - \rho, 1\right) \end{array} \right] +$$

$$c_4 \mathbb{H}_{0,0:2,4;0,2}^{0,2:2,1;1,0} \left[\begin{array}{c} \frac{4}{t^2 B^2} \\ \frac{C}{B^2} - 1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} (-1,1) \left(-\frac{1}{2}, 1\right) : (1,1) (-2,2) \left(\frac{3}{2}, 1\right); -- \\ -- : (0,1) (2,2) \left(\frac{1}{2}, 1\right) (1-\rho, 1); (0,1) \left(-\frac{1}{2} - \rho, 1\right) \end{array} \right]$$

em que $c_3 = \frac{4\rho\sqrt{\pi}\Gamma(\rho+\frac{3}{2})i}{tB^3\Gamma(2\rho+2)}$ e $c_4 = \frac{4\rho C\sqrt{\pi}\Gamma(\rho+\frac{3}{2})i}{tB^3\Gamma(2\rho+2)}$.

Mas, $\varphi_X(t) = (I) + (II)$, então

$$\varphi_X(t) = c_1 \mathbb{H}_{0,0:1,3;0,2}^{0,2:1,2;1,0} \left[\begin{array}{c} \frac{4}{t^2 B^2} \\ \frac{C}{B^2} - 1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} (0,1) \left(\frac{1}{2}, 1\right) : (1,1) (0,2) \left(\frac{1}{2}, 1\right); -- \\ -- : (0,1) (2\rho+1, 2) \left(\frac{1}{2}, 1\right) : (0,1) \left(-\frac{1}{2} - \rho, 1\right) \end{array} \right] +$$

$$c_2 \mathbb{H}_{0,0:2,4;0,2}^{0,2:2,1;1,0} \left[\begin{array}{c} \frac{4}{t^2 B^2} \\ \frac{C}{B^2} - 1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} (0,1) \left(-\frac{1}{2}, 1\right) : (1,1) (-1,2) \left(\frac{1}{2}, 1\right); -- \\ -- : (0,1) (2\rho, 2) \left(-\frac{1}{2}, 1\right) : (0,1) \left(-\frac{1}{2} - \rho, 1\right) \end{array} \right] +$$

$$c_3 \mathbb{H}_{0,0:1,3;0,2}^{0,2:1,2;1,0} \left[\begin{array}{c} \frac{4}{t^2 B^2} \\ \frac{C}{B^2} - 1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} (0,1) \left(-\frac{1}{2}, 1\right) : (1,1) (-1,2) \left(\frac{3}{2}, 1\right); -- \\ -- : (0,1) (2\rho, 2) \left(-\frac{1}{2}, 1\right) : (0,1) \left(-\frac{1}{2} - \rho, 1\right) \end{array} \right] +$$

$$c_4 \mathbb{H}_{0,0;2,4;0,2}^{0,2;2,1;1,0} \left[\begin{array}{c} \frac{4}{t^2 B^2} \\ \frac{C}{B^2} - 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} (-1, 1) \left(-\frac{1}{2}, 1\right) : (1, 1) (-2, 2) \left(\frac{3}{2}, 1\right); -- \\ -- : (0, 1) (2, 2) \left(\frac{1}{2}, 1\right) (1 - \rho, 1); (0, 1) \left(-\frac{1}{2} - \rho, 1\right) \end{array} \right. \right],$$

$$\text{onde } c_1 = \frac{2\rho\sqrt{\pi}\Gamma\left(\rho+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2\rho+2)}, c_2 = \frac{2\rho\sqrt{\pi}\Gamma\left(\rho+\frac{3}{2}\right)C}{\Gamma(2\rho+2)B^2}, c_3 = \frac{4\rho\pi\Gamma\left(\rho+\frac{3}{2}\right)i}{tB\Gamma(2\rho+2)} \text{ e } c_4 = \frac{4\rho\sqrt{\pi}\Gamma\left(\rho+\frac{3}{2}\right)C^i}{tB^3\Gamma(2\rho+2)}.$$

3.2.8 Estimadores para os parâmetros B, C, ρ de $f(x)$

O método utilizado é o de Máxima Verossimilhança. Os estimadores do Método dos Momentos não serão calculados, pois existem apenas os momentos fracionários entre 0 e 1, que podem não fornecer boas estimativas. Desta forma, calcularemos o E.M.V., onde $\underline{\theta} = (B, C, \rho), \underline{\theta} \in \Theta = C > 0, B \in \mathbb{R}, \rho > 0$ como a seguir:

$$L(\underline{\theta}; x) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{2\rho x_i^{2\rho-1}(Bx_i + C)}{(x_i^2 + 2Bx_i + C)^{\rho+1}} =$$

$$L(\underline{\theta}; x) = (2\rho)^n \prod_{i=1}^n \frac{Bx_i^{2\rho} + Cx_i^{2\rho-1}}{(x_i^2 + 2Bx_i + C)^{\rho+1}} \quad (3.11)$$

e

$$\begin{aligned} l(\underline{\theta}; x) &= \log L(\underline{\theta}; x) = n \log 2 + n \log \rho + \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{Bx_i^{2\rho} + Cx_i^{2\rho-1}}{(x_i^2 + 2Bx_i + C)^{\rho+1}} \right) = \\ &= n \log 2 + n \log \rho + \sum_{i=1}^n \log((Bx_i + C)x_i^{2\rho-1}) - \sum_{i=1}^n \log(x_i^2 + 2Bx_i + C)^{\rho+1} = \end{aligned}$$

$$n \log 2 + n \log \rho + \sum_{i=1}^n \log(Bx_i + C) + (2\rho - 1) \sum_{i=1}^n \log x_i - (\rho + 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i^2 + 2Bx_i + C) \quad (3.12)$$

Para estimar valores $\underline{\theta} = (B, C, \rho)$, resolveremos a $l'(\underline{\theta}; x) = \frac{\partial l(\underline{\theta}; x)}{\partial \underline{\theta}} = 0$:

I)

$$\frac{\partial l(\underline{\theta}; x)}{\partial \rho} = 0 \Rightarrow \frac{n}{\rho} + 2 \sum_{i=1}^n \log x_i - \sum_{i=1}^n \log(x_i^2 + 2Bx_i + C) = 0$$

II)

$$\frac{\partial l(\underline{\theta}; x)}{\partial B} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{Bx_i + C} - (\rho + 1) \sum_{i=1}^n \frac{2x_i}{(x_i^2 + 2Bx_i + C)} = 0$$

III)

$$\frac{\partial l(\underline{\theta}; x)}{\partial C} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{Bx_i + C} - (\rho + 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x_i^2 + 2Bx_i + C)} = 0$$

Não existe uma forma explícita para os estimadores de $\underline{\theta} = (B, C, \rho)$. Logo, teremos que utilizar métodos computacionais para resolver as equações I)-III) acima, e obter o E.M.V.. Utilizaremos o Intervalo de Confiança descrito no Apêndice I.

Capítulo 4

Versão Simétrica para a Distribuição

4.1 Introdução

Apresentaremos a seguir distribuição simétrica correspondente àquela apresentada no Capítulo 3. Como possui diversos parâmetros, a distribuição pode assumir várias formas, o que facilita o uso em diversos dados onde se queira modelar v.a's em toda a reta real.

4.2 Distribuição Acumulada Simétrica

Definição 4.2.1. *Seja a forma*

$$G(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{x|x|^{2\rho-1}}{(x^2 + 2B|x| + C)^\rho} \quad (4.1)$$

a função de distribuição simétrica em torno de 0 de uma v.a. X onde $-\infty < x < \infty$, $C > 0$, e $\rho > 0$.

4.2.1 Propriedades da Distribuição Acumulada Simétrica

Dado que $G(x)$ é distribuição, então ela satisfaz às seguintes propriedades:

- i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0$
- ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = 1$
- iii) $G(x) \leq G(y), \forall x < y; x, y \in \mathbb{R}$
- iv) $0 \leq G_X(x) \leq 1, \forall x;$

Demonstração:

$$i) \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{x|x|^{2\rho-1}}{(x^2+2B|x|+C)^\rho} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} + \text{sinal}[x] \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{2B}{|x|} + \frac{C}{|x|^2}} \right)^\rho = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 ,$$

onde $\text{sinal}[x] = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}$.

$$ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{x|x|^{2\rho-1}}{(x^2+2B|x|+C)^\rho} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} + \text{sinal}[x] \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{2B}{|x|} + \frac{C}{|x|^2}} \right)^\rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

iii) Como $G(x)$ é função não-decrescente, $\forall x \in \mathbb{R}$, logo atende à propriedade iv).

iv) De fato, pelas propriedades i) – iii) conclui-se que iv) também vale.

4.2.2 Gráficos para a Distribuição Acumulada Simétrica

Como provamos que $G(x)$ é distribuição, então apresentaremos algumas formas da distribuição, para diversos valores dos parâmetros B, C, ρ :

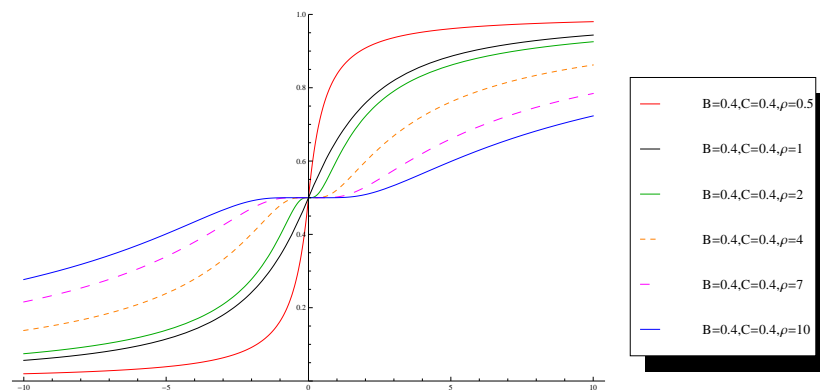


Figura 4.1: Formas para a Distribuição Acumulada Simétrica $G(x)$

Para verificar o efeito de cada um dos parâmetros na curva, produzimos gráficos onde se fixa dois parâmetros enquanto um terceiro varia.

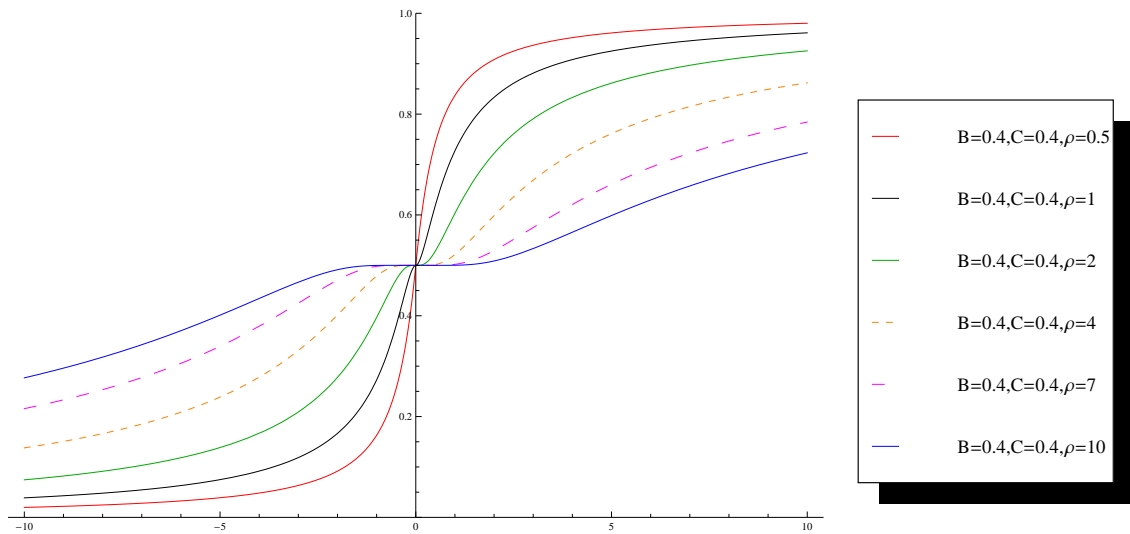


Figura 4.2: Formas para a Distribuição Simétrica Acumulada $G(x)$ - variação de ρ , com $B > 0$, C fixos

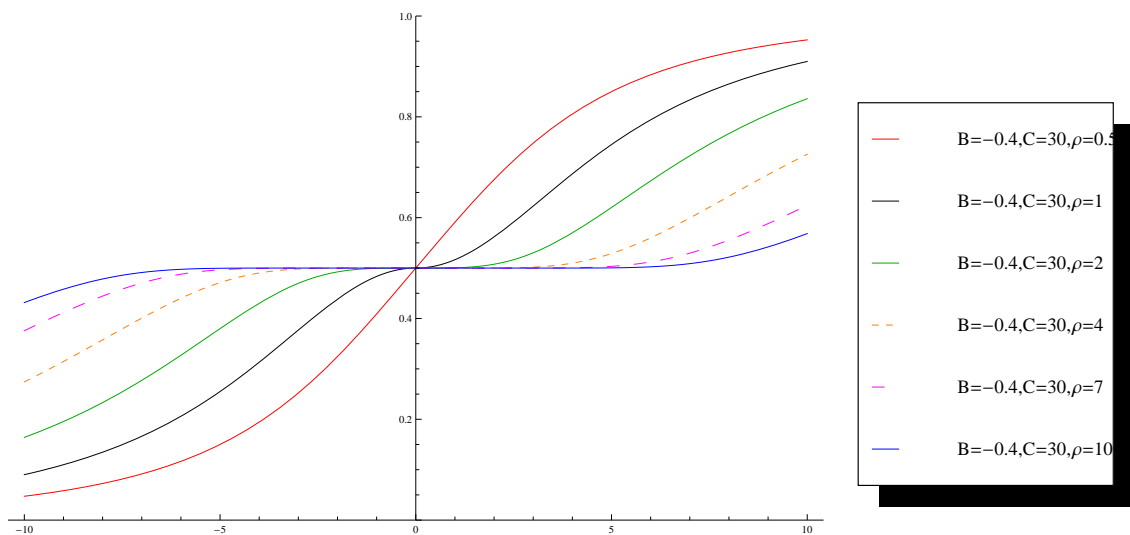


Figura 4.3: Formas para a Distribuição Simétrica Acumulada $G(x)$ - variação de ρ , com $B < 0$, C fixos

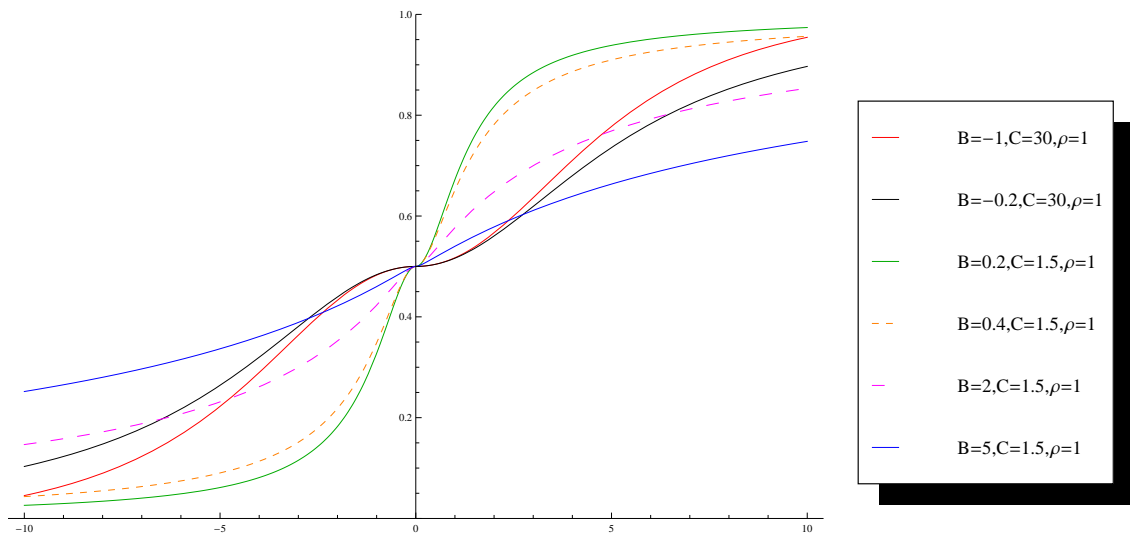


Figura 4.4: Formas para a Distribuição Simétrica Acumulada $G(x)$ - variação de B , com C, ρ fixos

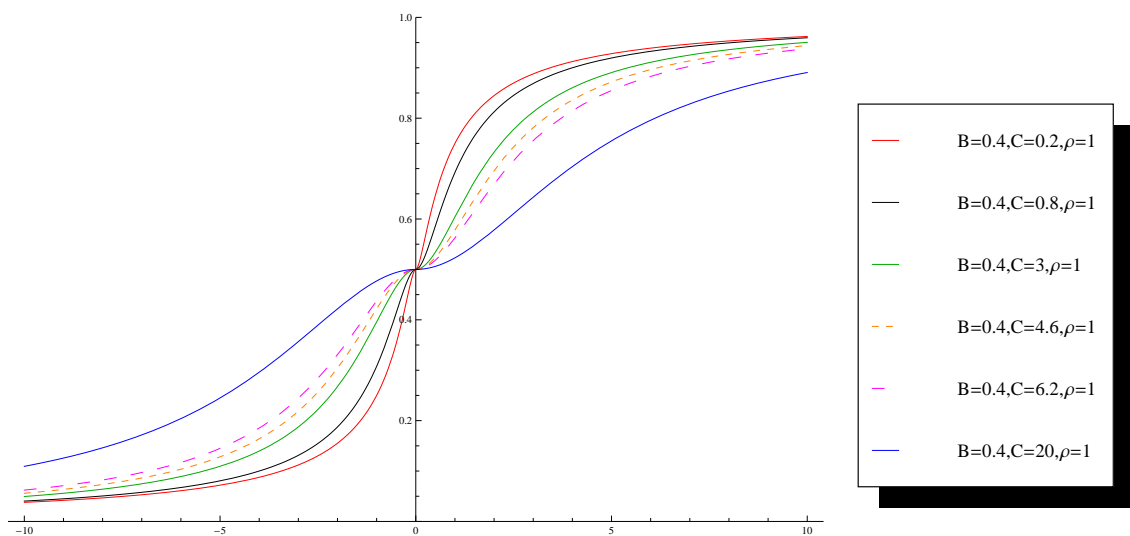


Figura 4.5: Formas para a Distribuição Simétrica Acumulada $G(x)$ - variação de C , com $B > 0, \rho$ fixos

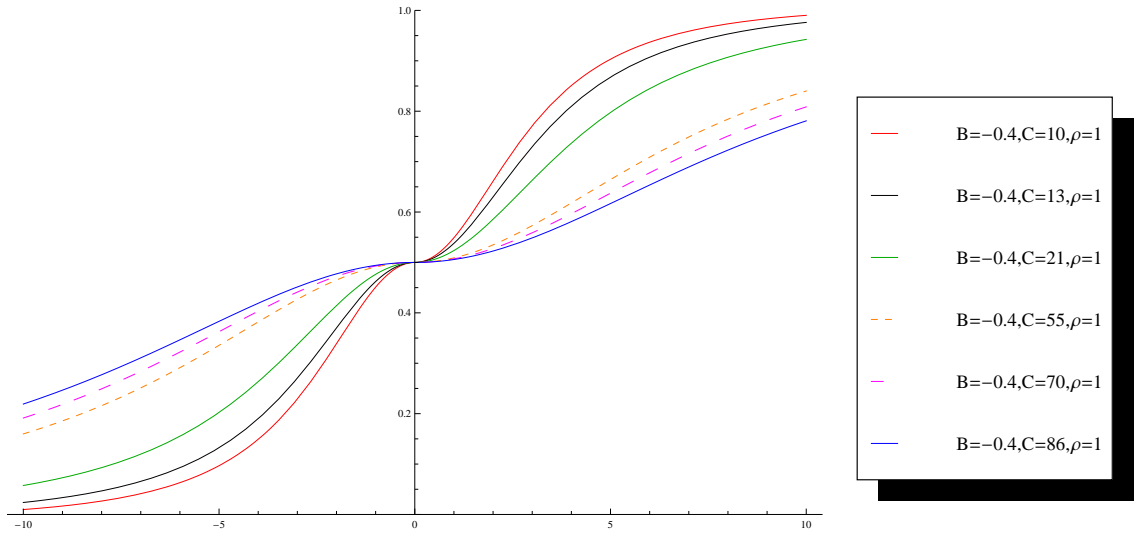


Figura 4.6: Formas para a Distribuição Simétrica Acumulada $G(x)$ - variação de C , com $B < 0$, ρ fixos

4.2.3 Função Densidade de Probabilidade Simétrica

Uma vez que $G(x)$ existe, então encontraremos $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$ a seguir:

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{x|x|^{2\rho-1}}{(x^2 + 2B|x| + C)^\rho} \right) \\
 &= \frac{(2\rho|x|^{2\rho-1})(x^2 + 2B|x| + C)^\rho - ((x|x|^{2\rho-1}\rho)(x^2 + 2B|x| + C)^{\rho-1}(2x + \frac{|x|}{x}2B))}{2(x^2 + 2B|x| + C)^{2\rho}} \\
 &= \frac{(2\rho|x|^{2\rho-1})(x^2 + 2B|x| + C)^\rho - 2(x^2 + 2B|x| + C)^{\rho-1}[(x^2|x|^{2\rho-1}\rho) + (|x|^{2\rho}\rho)]}{(x^2 + 2B|x| + C)^{2\rho}} \\
 &= \frac{\rho|x|^{2\rho+1} + 2B\rho|x|^{2\rho} + C\rho|x|^{2\rho-1} - \rho|x|^{2\rho+1} - B\rho|x|^{2\rho}}{(x^2 + 2B|x| + C)^{\rho+1}} \\
 &= \frac{B\rho|x|^{2\rho} + C\rho|x|^{2\rho-1}}{(x^2 + 2B|x| + C)^{\rho+1}}
 \end{aligned}$$

Definição 4.2.2. *Seja a forma*

$$g(x) = \frac{\rho|x|^{2\rho-1}(B|x| + C)}{(x^2 + 2B|x| + C)^{\rho+1}} \quad (4.2)$$

a função densidade de probabilidade de uma v.a. X onde $-\infty < x < \infty$, $C > 0$, e $\rho > 0$.

4.2.4 Gráficos para a Função Densidade de Probabilidade Simétrica

A seguir apresentaremos algumas formas da f.d.p., para diversos valores dos parâmetros B, C, ρ :

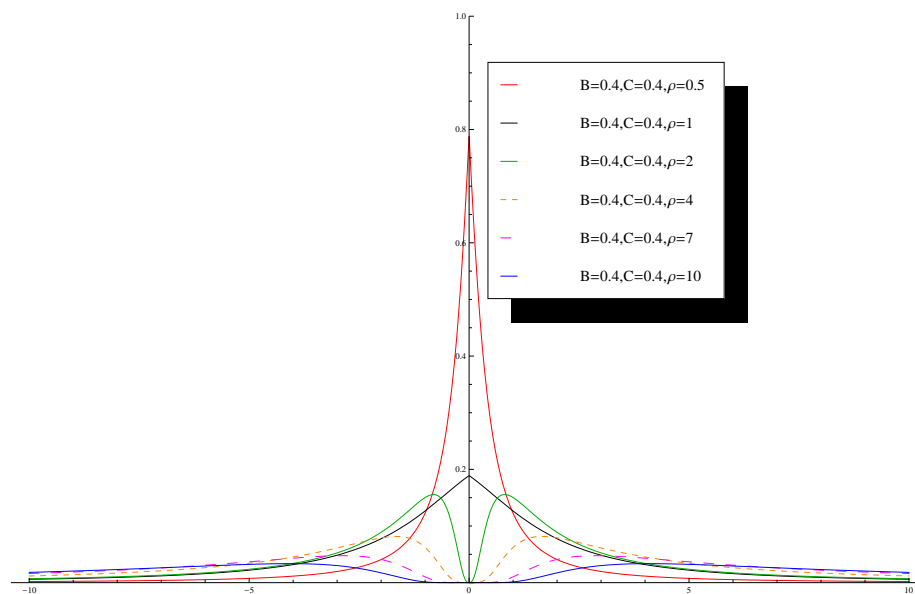


Figura 4.7: Formas para a Densidade Simétrica $g(x)$

Observamos que ao fixar $\rho = \frac{1}{2}$, obtemos densidade simétrica unimodal e para todos os outros valores de ρ , criamos densidades bimodais.

Observe que o comportamento da cauda de $g(x)$ quando $|x| \rightarrow \infty$ pode ser comparada com a cauda da distribuição Cauchy, pois:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) \approx c \frac{|x|^{2\rho-1}}{x^{2\rho+2}} \approx \frac{c}{x^2},$$

onde c é uma constante. Logo, o que se observa é que o comportamento da cauda tem variação regular de ordem 2, assim como o caso assimétrico (3.3).

Para verificar o efeito de cada um dos parâmetros na curva, produzimos gráficos onde se fixa dois parâmetros enquanto um terceiro varia.

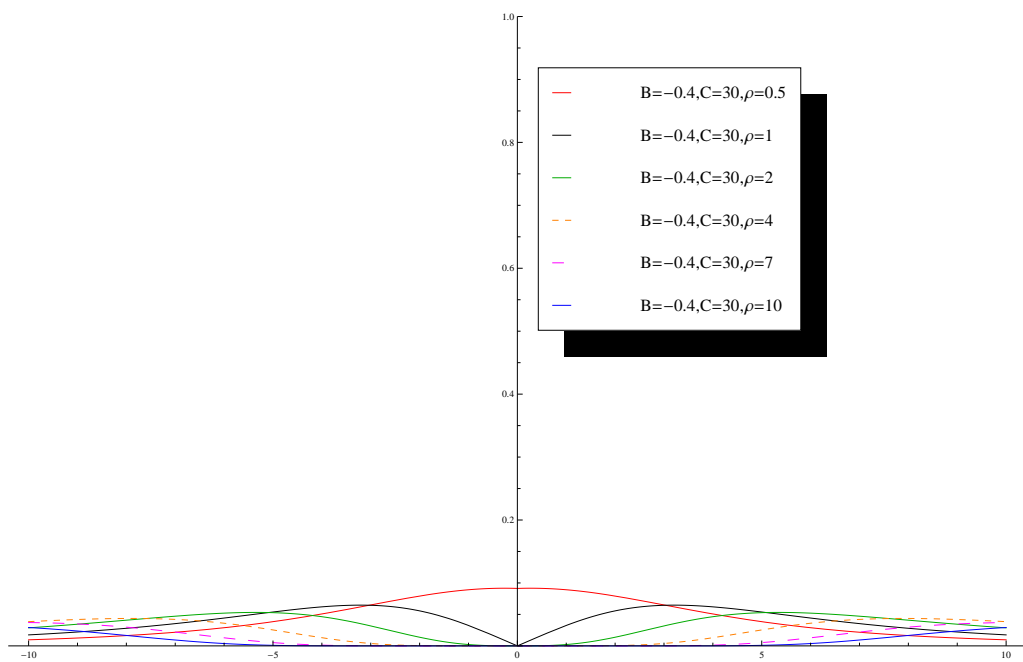


Figura 4.8: Formas para a Densidade $g(x)$ - variação de ρ , com $B > 0, \rho$ fixos

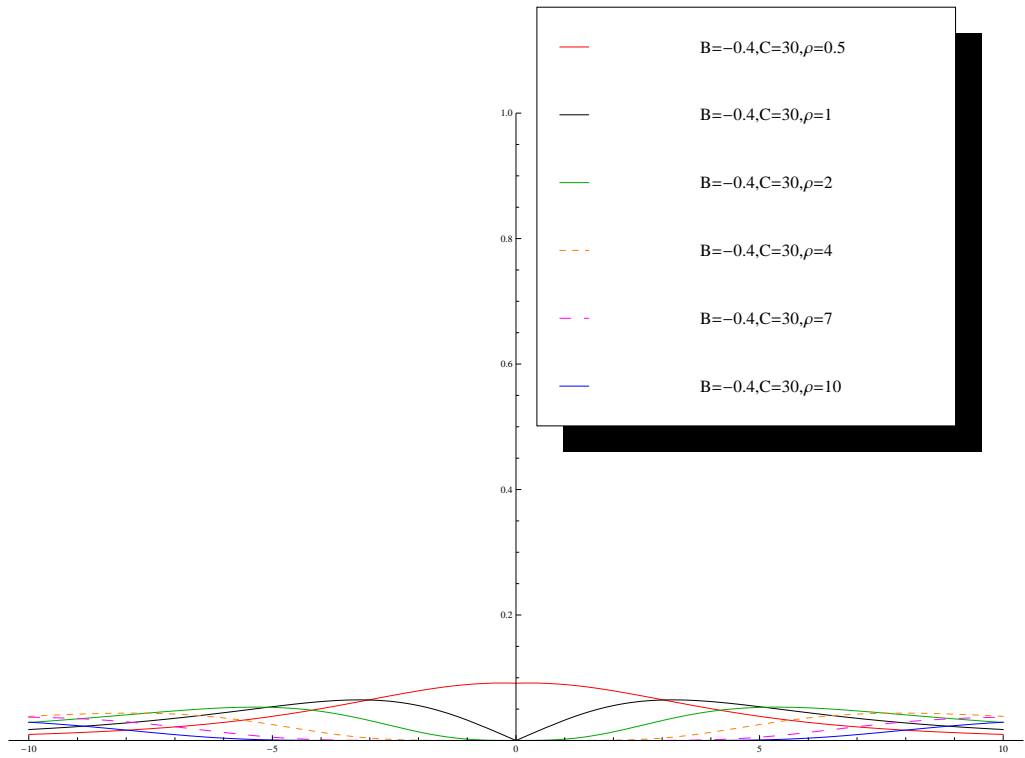


Figura 4.9: Formas para a Densidade $g(x)$ - variação de ρ , com $B < 0$, ρ fixos

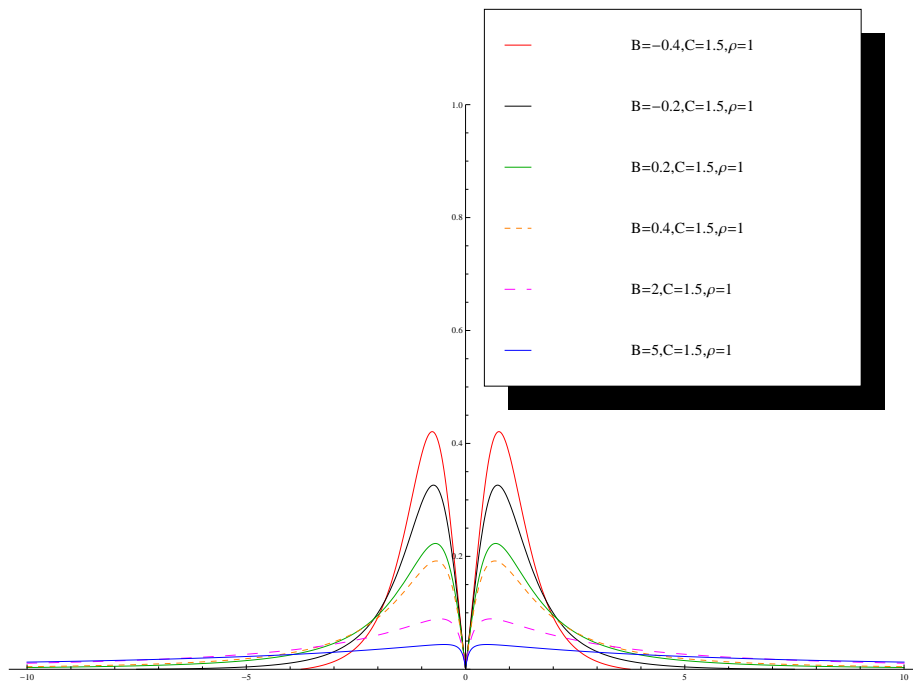


Figura 4.10: Formas para a Densidade $g(x)$ - variação de B , com C, ρ fixos

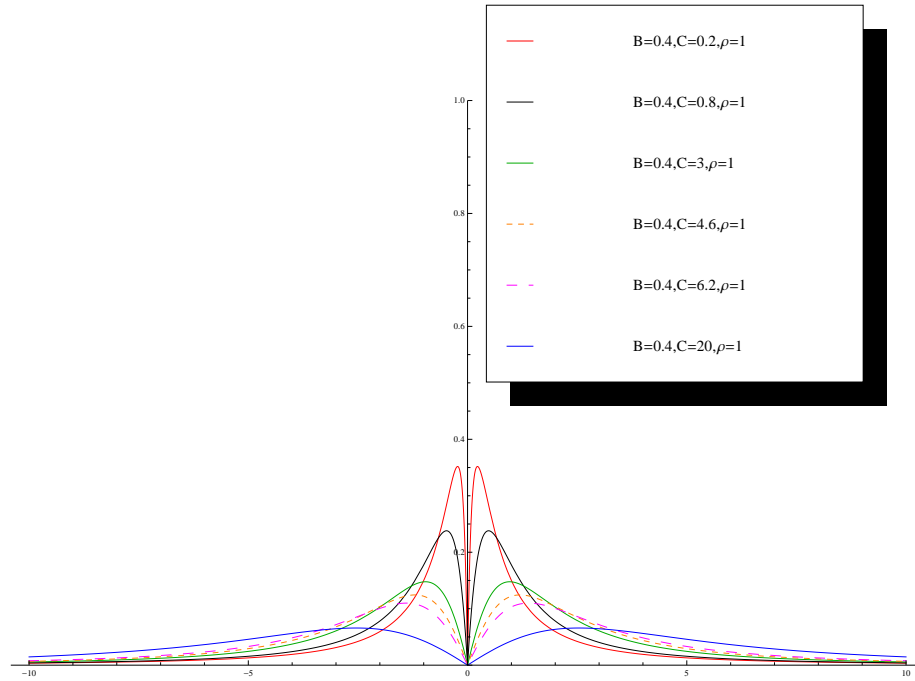


Figura 4.11: Formas para a Densidade $g(x)$ - variação de C , com $B > 0$, C fixos

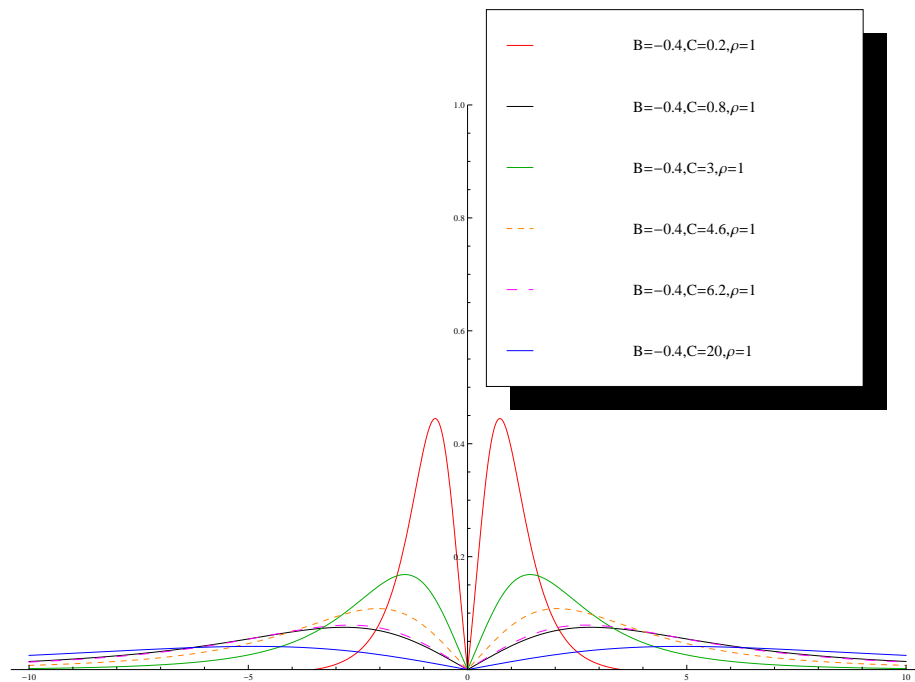


Figura 4.12: Formas para a Densidade $g(x)$ - variação de C , com $B < 0$, C fixos

As figuras (4.8) e (4.9) apontam que o parâmetro ρ determina o comportamento de queda inicial da cauda da densidade, referente ao segmento da curva

localizado entre o pico e a cauda, isto é, o meio da f.d.p .

Pela figura (4.10) verificamos que o parâmetro B determina o comportamento relacionado à distância entre as curvas do lado negativo e positivo. Quanto maior B , mais próximas ficam as curvas.

Pelas figuras (4.11) e (4.12) observamos que o parâmetro C determina o comportamento relacionado ao pico da função. Quanto maior C , menor o pico da curva.

4.2.5 Distribuições de Mínimo e Máximo

A distribuição e a densidade do Mínimo $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$ são dadas por:

$$P(X_{(1)} \leq z) = 1 - P(X_{(1)} > z) = 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) > z) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - G_{X_{(1)}}(z)]$$

$$G(z) = 1 - \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{z|z|^{2\rho-1}}{(z^2 + 2B|z| + C)^\rho} \right]^n$$

$$g(z) = n\rho \frac{|z|^{2\rho-1}(B|z| + C)}{(z^2 + 2B|z| + C)^\rho + 1} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{z|z|^{2\rho-1}}{(z^2 + 2B|z| + C)^\rho} \right]^{n-1}$$

A distribuição e a densidade do Máximo $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$ são dadas por:

$$P(X_{(n)} \leq w) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq w) = \prod_{i=1}^n F_{X_{(1)}}(w)$$

$$G(w) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{w|w|^{2\rho-1}}{(w^2 + 2B|w| + C)^\rho} \right]^n$$

$$g(w) = n\rho \frac{|w|^{2\rho-1}(B|w| + C)}{(z^2 + 2B|z| + C)^{\rho+1}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{w|w|^{2\rho-1}}{(z^2 + 2B|z| + C)^\rho} \right]^{n-1}$$

4.2.6 Momentos para X

Calcularemos o k-ésimo momento μ'_k para a densidade definida em (4.2), utilizando (3.6):

$$\begin{aligned} \mu'_k = EX^k &= \int_{-\infty}^{\infty} x^k dG(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{\rho|x|^{2\rho-1}(B|x| + C)}{(x^2 + 2B|x| + C)^{\rho+1}} dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{\rho x^k |x|^{2\rho-1}(B|x| + C)}{(x^2 + 2B|x| + C)^{\rho+1}} dx + \int_0^{\infty} \frac{\rho x^k |x|^{2\rho-1}(B|x| + C)}{(x^2 + 2B|x| + C)^{\rho+1}} dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 \rho B \frac{x^k (-x)^{2\rho}}{(x^2 + 2B(-x) + C)^{\rho+1}} dx + \int_{-\infty}^0 \rho C \frac{x^k (-x)^{2\rho-1}}{(x^2 - 2Bx + C)^{\rho+1}} dx + \\ &= \int_0^{\infty} \rho B \frac{(x)^{k+2\rho}}{(x^2 + 2Bx + C)^{\rho+1}} dx + \int_0^{\infty} \rho C \frac{(x)^{k+2\rho-1}}{(x^2 + 2Bx + C)^{\rho+1}} dx = \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $x = -y$, temos:

$$\begin{aligned} &= - \int_{\infty}^0 \rho B \frac{(-y)^k (y)^{2\rho}}{(x^2 + 2By + C)^{\rho+1}} dy - \int_{\infty}^0 \rho C \frac{(-y)^k (y)^{2\rho-1}}{(y^2 + 2By + C)^{\rho+1}} dy + \\ &= \int_0^{\infty} \rho B \frac{(x)^{k+2\rho}}{(x^2 + 2Bx + C)^{\rho+1}} dx + \int_0^{\infty} \rho C \frac{(x)^{k+2\rho-1}}{(x^2 + 2Bx + C)^{\rho+1}} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \rho B \frac{(-y)^k (y)^{2\rho}}{(x^2 + 2By + C)^{\rho+1}} dy + \int_0^\infty \rho C \frac{(-y)^k (y)^{2\rho-1}}{(y^2 + 2By + C)^{\rho+1}} dy + \\
& \int_0^\infty \rho B \frac{(x)^{k+2\rho}}{(x^2 + 2Bx + C)^{\rho+1}} dx + \int_0^\infty \rho C \frac{(x)^{k+2\rho-1}}{(x^2 + 2Bx + C)^{\rho+1}} dx = \\
& (-1)^k \int_0^\infty \rho B \frac{(y)^{k+2\rho}}{(y^2 - 2By + C)^{\rho+1}} dy + (-1)^k \int_0^\infty \rho C \frac{(y)^{k+2\rho-1}}{(x^2 + 2By + C)^{\rho+1}} dy + \\
& \int_0^\infty \rho B \frac{(x)^{k+2\rho}}{(x^2 + 2Bx + C)^{\rho+1}} dx + \int_0^\infty \rho C \frac{(x)^{k+2\rho-1}}{(x^2 + 2Bx + C)^{\rho+1}} dx
\end{aligned}$$

Se k é ímpar, $\mu'_k = 0$. Se k é par, temos o resultado idêntico ao caso assimétrico do Capítulo 3, então:

$$\begin{aligned}
\mu'_k &= B \left[C^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(k + 2\rho + 1) \Gamma(1 - k) \right] {}_2F_1 \left[\frac{k + 2\rho + 1}{2}; \frac{1 - k}{2}; \rho + \frac{3}{2}; 1 - \frac{B^2}{C} \right] + \\
& C \left[C^{\frac{k}{2}-1} \Gamma(k + 2\rho) \Gamma(2 - k) \right] {}_2F_1 \left[\rho + \frac{k}{2}; 1 - \frac{k}{2}; \rho + \frac{3}{2}; 1 - \frac{B^2}{C} \right] \left[\frac{2\rho}{\Gamma(2\rho+2)} \right], \quad (4.3)
\end{aligned}$$

onde $B^2 < C$, $0 < k < 1$. Para o caso $B^2 > C$, também pode ser encontrado resultado para mu'_k em termos de ${}_2F_1$. Observamos então que o k -ésimo momento de X só existe para $f(x)$, quando $k < 1$ e é par (possui apenas momentos fracionários), isto é, a f.d.p. não possui Esperança, e conseqüentemente, não possui Variância, ou quaisquer momentos inteiros posteriores, utilizados frequentemente para estimação e intervalos de confiança. Como os momentos inteiros positivos não existem, então não será calculada a Função Geratriz de Momentos.

4.2.7 Função Característica para X

Calcularemos o $\varphi_X(t)$ para a densidade definida em (4.2):

$$\varphi_X(t) = Ee^{itX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dG(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(tx) + i\sin(tx)) dG(x) =$$

Usando a fórmula $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dG(x) = 2 \int_0^{\infty} \cos(tx) dG(x)$, temos:

$$\int_0^{\infty} 2\cos(tx) dG(x) = \int_0^{\infty} 2\cos(tx) \frac{\rho|x|^{2\rho-1}(B|x| + C)}{(x^2 + 2B|x| + C)^{\rho+1}} dx =$$

$$\int_0^{\infty} \cos(tx) \frac{2\rho x^{2\rho-1}(Bx + C)}{(x^2 + 2Bx + C)^{\rho+1}} dx$$

Mas, o resultado acima é idêntico à expressão (I) da função característica da distribuição assimétrica apresentada no Capítulo 3, então

$$\varphi_X(t) = c_1 \mathbb{H}_{0,0:1,3;0,2}^{0,2:1,2;1,0} \left[\begin{array}{c} \frac{4}{t^2 B^2} \\ \frac{C}{B^2} - 1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} (0, 1) \left(\frac{1}{2}, 1\right) : (1, 1) (0, 2) \left(\frac{1}{2}, 1\right); -- \\ -- : (0, 1) (2\rho + 1, 2) \left(\frac{1}{2}, 1\right) : (0, 1) \left(-\frac{1}{2} - \rho, 1\right) \end{array} \right] +$$

$$c_2 \mathbb{H}_{0,0:2,4;0,2}^{0,2:2,1;1,0} \left[\begin{array}{c} \frac{4}{t^2 B^2} \\ \frac{C}{B^2} - 1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} (0, 1) \left(-\frac{1}{2}, 1\right) : (1, 1) (-1, 2) \left(\frac{1}{2}, 1\right); -- \\ -- : (0, 1) (2\rho, 2) \left(-\frac{1}{2}, 1\right) : (0, 1) \left(-\frac{1}{2} - \rho, 1\right) \end{array} \right]$$

em que $c_1 = \frac{2\rho\sqrt{\pi}\Gamma(\rho+\frac{3}{2})}{\Gamma(2\rho+2)}$ e $c_2 = \frac{2\rho C\sqrt{\pi}\Gamma(\rho+\frac{3}{2})}{B^2\Gamma(2\rho+2)}$.

4.2.8 Estimadores para os parâmetros B, C, ρ de $g(x)$

O método utilizado é o Máxima Verossimilhança. Os estimadores do Método dos Momentos não serão calculados, pois existem apenas os momentos fracionários entre 0 e 1, que podem não fornecer boas estimativas. Desta forma, calcularemos o E.M.V., onde $\underline{\theta} = (B, C, \rho)$, $\underline{\theta} \in \Theta = C > 0, B \in \mathbb{R}, \rho > 0$ como a seguir:

$$L(\underline{\theta}; x) = \prod_{i=1}^n g(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\rho|x_i|^{2\rho-1}(B|x_i| + C)}{(x_i^2 + 2B|x_i| + C)^{\rho+1}} =$$

$$L(\underline{\theta}; x) = (\rho)^n \prod_{i=1}^n \frac{B|x_i|^{2\rho} + C|x_i|^{2\rho-1}}{(x_i^2 + 2B|x_i| + C)^{\rho+1}} \quad (4.4)$$

e

$$l(\underline{\theta}; x) = \log L(\underline{\theta}; x) = n \log \rho + \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{B|x_i|^{2\rho} + C|x_i|^{2\rho-1}}{(x_i^2 + 2B|x_i| + C)^{\rho+1}} \right) =$$

$$n \log \rho + \sum_{i=1}^n \log((B|x_i| + C)|x_i|^{2\rho-1}) - \sum_{i=1}^n \log(x_i^2 + 2B|x_i| + C)^{\rho+1} =$$

$$n \log \rho + \sum_{i=1}^n \log(B|x_i| + C) + (2\rho - 1) \sum_{i=1}^n \log|x_i| - (\rho + 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i^2 + 2B|x_i| + C) \quad (4.5)$$

Para estimar valores $\underline{\theta} = (B, C, \rho)$, resolveremos a $l'(\underline{\theta}; x) = \frac{\partial l(\underline{\theta}; x)}{\partial \underline{\theta}} = 0$:

I)

$$\frac{\partial l(\underline{\theta}; x)}{\partial \rho} = 0 \Rightarrow \frac{n}{\rho} + 2 \sum_{i=1}^n \log |x_i| - \sum_{i=1}^n \log(x_i^2 + 2B|x_i| + C) = 0$$

II)

$$\frac{\partial l(\underline{\theta}; x)}{\partial B} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{B|x_i| + C} - (\rho + 1) \sum_{i=1}^n \frac{2|x_i|}{(x_i^2 + 2B|x_i| + C)} = 0$$

III)

$$\frac{\partial l(\underline{\theta}; x)}{\partial C} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{B|x_i| + C} - (\rho + 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x_i^2 + 2B|x_i| + C)} = 0$$

Assim como no caso assimétrico do Capítulo 3, não existe uma forma explícita para os estimadores de $\underline{\theta} = (B, C, \rho)$. Logo, teremos que utilizar métodos computacionais para resolver as equações I)-III) acima, e obter o E.M.V.. Utilizaremos o Intervalo de Confiança descrito no Apêndice I.

Capítulo 5

Distribuições Assimétricas

5.1 Introdução

Serão geradas distribuições assimétricas (conhecidas como *skew*) a partir daquelas apresentadas no Capítulo 4. Os resultados que geram distribuições não simétricas a partir de distribuições simétricas podem ser encontrados em [Azzalini, 1985] (1) e [Fernandez et al, 1998](7).

A metodologia de misturas de distribuições é utilizada para ajustar curvas bimodais. Mas normalmente as misturas estão associadas à combinação linear de distribuições de Levy α – *estáveis*. Como a distribuição de Levy não possui densidade explícita, e os momentos não são finitos, então a estimação de parâmetros é realizada, geralmente, pela função característica. Esta abordagem é mais complexa que a apresentada neste Capítulo.

Por outro lado, as distribuições aqui desenvolvidas possuem a vantagem de gerar curvas ‘skew’, com formas bimodais e que, possuem modelagem mais simples do que a abordagem de misturas de distribuições. A estimação pode ser realizada por meio de Máxima Verossimilhança, pois possuem densidades explícitas.

5.2 Distribuição Assimétrica $h_1(x)$

5.2.1 Construção de $h_1(x)$

Utilizaremos o seguinte resultado de [Azzalini, 1985] para gerar uma distribuição assimétrica a partir de uma distribuição simétrica:

$h_1(x) = 2g(x)G(w(x))$, $-\infty < x < \infty$, onde $g(x)$ é a função de densidade simétrica em torno da origem dada por (4.2), $G(x)$ é dada por (4.1), e $w(x)$ é função ímpar de x .

Fazendo a escolha da função ímpar $w(x) = \gamma x$, em que $-\infty < \gamma < \infty$, temos:

$$h_1(x) = 2 \left[\frac{\rho|x|^{2\rho-1}(B|x| + C)}{(x^2 + 2B|x| + C)^{\rho+1}} \right] \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\gamma x |\gamma x|^{2\rho-1}}{((\gamma x)^2 + 2B|\gamma x| + C)^\rho} \right]$$

$$h_1(x) = \left[\frac{\rho|x|^{2\rho-1}(B|x| + C)}{(x^2 + 2B|x| + C)^{\rho+1}} \right] + \left[\frac{\rho\gamma|\gamma|^{2\rho-1}x|^{4\rho-2}(B|x| + C)}{[(x^2 + 2B|x| + C)^{\rho+1}][((\gamma x)^2 + 2B|\gamma x| + C)^\rho]} \right] \quad (5.1)$$

Utilizando um parâmetro de posição μ e parâmetro de escala $\sigma > 0$, temos:

$$Sas(x) = \left[\frac{\rho \left| \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right|^{2\rho-1} \left(B \left| \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right| + C \right)}{\left(\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 + 2B \left| \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right| + C \right)^{\rho+1}} \right] + \left[\frac{\rho\gamma|\gamma|^{2\rho-1} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \left| \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right|^{4\rho-2} \left(B \left| \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right| + C \right)}{\left[\left(\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 + 2B \left| \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right| + C \right)^{\rho+1} \right] \left[\left(\gamma \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right)^2 + 2B|\gamma| \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) + C \right)^\rho]} \right] \quad (5.2)$$

5.2.2 Gráfico para a Densidade Assimétrica $Sas(x)$

Notamos que a densidade pode assumir a forma bimodal, além de possuir curvas com caudas pesadas. Segue o gráfico para a densidade $h_1(x)$ para alguns valores de $\Theta = (B, C, \rho, \gamma, \mu, \sigma)$:

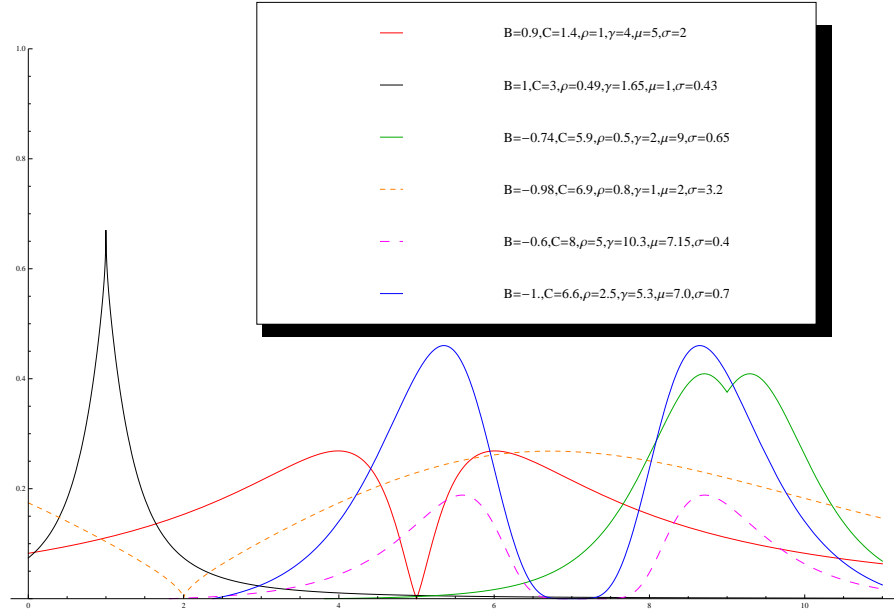


Figura 5.1: Formas para a Densidade Assimétrica $Sas(x)$

A interpretação para o parâmetro μ é de que ele se encontra onde ocorre o ponto de inflexão da curva, no caso da curva bimodal.

5.3 Distribuição Assimétrica $h_2(x)$

5.3.1 Construção de $h_2(x)$

Utilizaremos o seguinte resultado para gerar uma distribuição assimétrica a partir de uma distribuição simétrica:

$h_2(x) = \frac{2}{\alpha + \frac{1}{\alpha}} g(x\alpha^{sinal[x]})$, onde $sinal[x] = \frac{|x|}{x}$, $\alpha > 0$, $-\infty < x < \infty$, $g(x)$ é dada por (4.2). Logo,

$$h_2(x) = \left[\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \right] \left[\frac{\rho |x\alpha^{sinal[x]}|^{2\rho-1} (B|x\alpha^{sinal[x]}| + C)}{((x\alpha^{sinal[x]})^2 + 2B|x\alpha^{sinal[x]}| + C)^{\rho+1}} \right] \quad (5.3)$$

Utilizando um parâmetro de posição μ e parâmetro de escala $\sigma > 0$ em (5.3), temos:

$$Sbs(x) = \left[\frac{2}{\alpha + \frac{1}{\alpha}} \right] \left[\frac{\rho \left| \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \alpha^{\sin\left[\left| \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right| \right]} \right|^{2\rho-1} (B \left| \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \alpha^{\sin\left[\left| \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right| \right]} \right| + C)}{\left(\left(\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \alpha^{\sin\left[\left| \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right| \right]} \right) \right)^2 + 2B \left| \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \alpha^{\sin\left[\left| \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right| \right]} \right| + C)^{\rho+1}} \right] \quad (5.4)$$

5.3.2 Gráfico para a Densidade Assimétrica $Sbs(x)$

Notamos que a densidade pode assumir a forma bimodal, além de possuir curvas com caudas pesadas também. Segue o gráfico para a densidade $h_2(x)$ para alguns valores de $\Theta = (B, C, \rho, \alpha, \mu, \sigma)$:

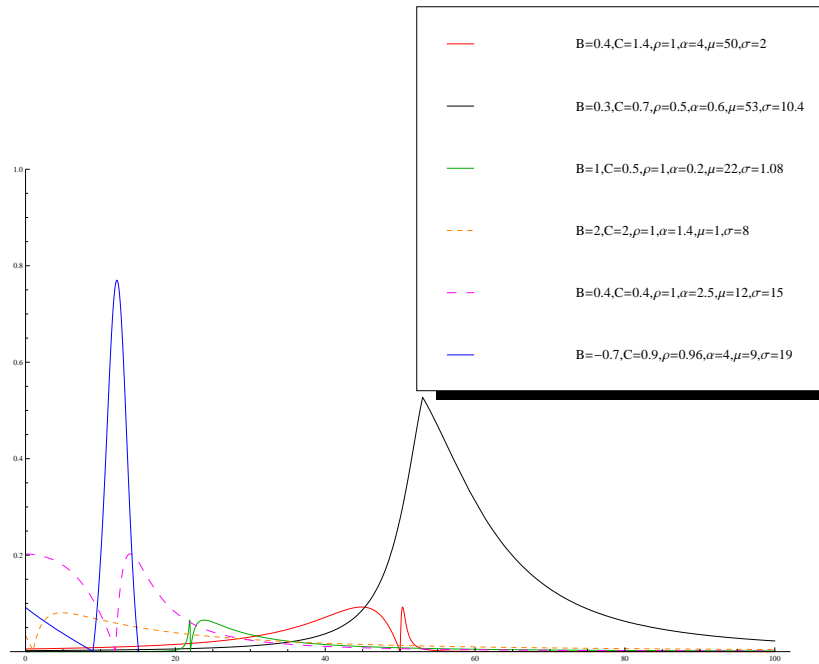


Figura 5.2: Formas para a Densidade Assimétrica $Sbs(x)$

A interpretação para o parâmetro μ é de que ele se encontra onde ocorre o ponto de inflexão da curva, no caso de curva bimodal.

Capítulo 6

Aplicações

6.1 Introdução

Serão apresentados conjuntos de dados onde foram aplicadas as distribuições. Serão realizados os ajustes das distribuições e densidades, logo serão calculados os valores dos parâmetros. A primeira aplicação trata de dados de precipitação, onde utilizaremos a forma assimétrica da densidade introduzida em (3.3). O segundo exemplo trará dados de retornos de taxas de câmbio do Brasil e Canadá, onde realizaremos o ajuste para a versão simétrica apresentada em (4.2). O terceiro exemplo trará dados de log-consumo de energia, onde aplicaremos a densidade assimétrica derivada a partir da forma de [Azzalini,1985] presente em (5.2). A análise estatística foi realizada no *software R*.

6.2 Precipitação

6.2.1 Análise Descritiva

Os dados foram obtidos no sítio <http://www.weather.gov/> (12). São dados anuais de precipitação(chuva) entre 1878 e 1998, para o centro da cidade de Los Angeles, com 121 observações. Segundo o sítio (12), o ano hidrológico termina em 30 de junho de cada ano. A precipitação observada é um subproduto do National Weather Service (NWS) dos Estados Unidos da América. Este conjunto de dados foi utilizado por [Rathie & Coutinho,2011] (16) e os resultados serão comparados.

Foram calculadas as estatísticas descritivas, bem como o *boxplot*. A distribuição empírica dos dados, assim como a densidade foram construídas com *software R* por meio dos comandos *ecdf* e *density*.

Tabela 6.1: Estatísticas Descritivas para os Dados de Precipitação

<i>Estatística</i>	<i>Valor</i>
Mínimo	4,85
1o. Quartil	10,40
Mediana	13,07
Média	15,11
Variância	46,98
Desvio-Padrão	6,85
3o. Quartil	19,28
Máximo	38,18

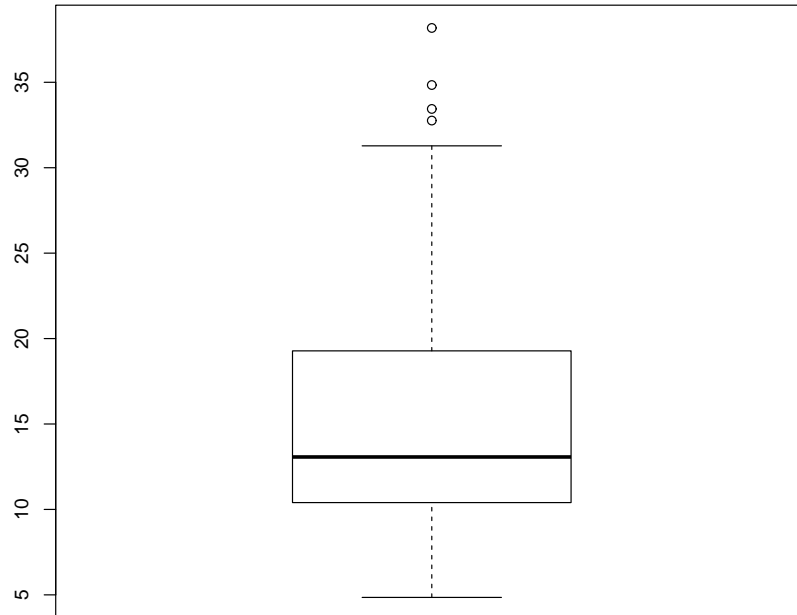


Figura 6.1: Boxplot para os Dados de Precipitação

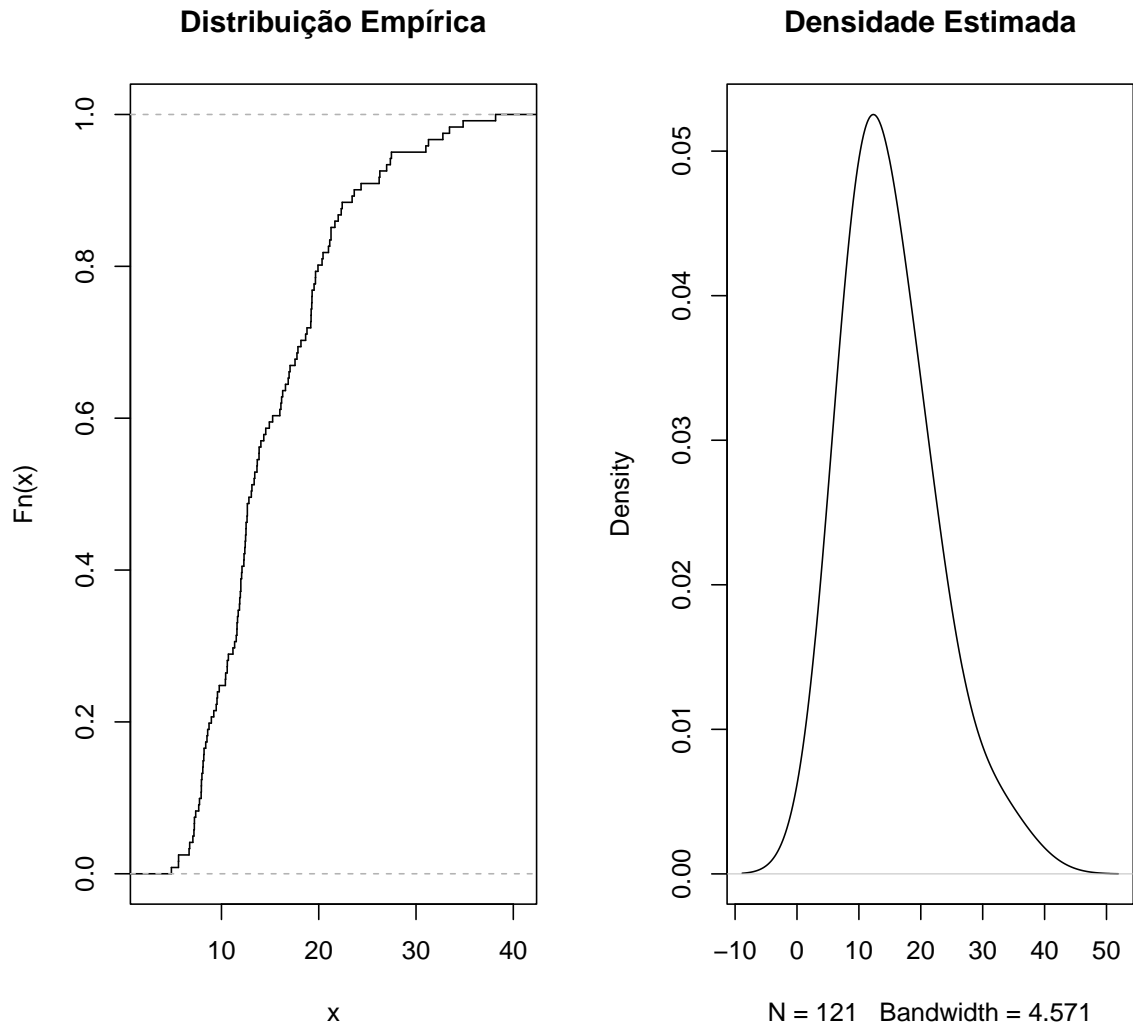


Figura 6.2: Distribuição Empírica e Densidade Estimada por Kernel para os Dados de Precipitação

Observamos pelo *boxplot* (6.1), que a distribuição é muito assimétrica à direita. Foi verificada a hipótese de normalidade dos dados por meio do teste Shapiro-Wilks, que apontou $W = 0,9211$ e $p - valor = 0,00000256$. Logo, existem fortes evidências de que os dados não possuem distribuição Normal.

6.2.2 Estimação dos Parâmetros

O Método da Máxima Verossimilhança foi empregado para estimação dos parâmetros B, C, ρ . A otimização da função de log-verossimilhança foi realizada com o auxílio do pacote *DEoptim* (11) no *software R*. Outros métodos como o *nlm, nlmminb, optim* e o

pacote *rgenoud* foram utilizados, mas não encontraram soluções satisfatórias.

Para a estimação do intervalo de confiança a 95%, utilizamos o método *Bootstrap* não-paramétrico baseado em 1.000 amostras com reposição, por meio do pacote *boot*. A seguir apresentamos os resultados:

Tabela 6.2: E.M.V. e I.C. 95% Bootstrap para os Parâmetros B, C, ρ

<i>Parâmetro</i>	<i>Estimativa</i>	I.C.Bootstrap Normal 95%	I.C.Bootstrap Básico 95%
B	-0,35	[-0,3844; -0,3427]	[-0,3816; -0,3447]
C	28,00	[27,34; 29,41]	[27,44; 29,28]
ρ	7,27	[6,759; 7,798]	[6,816; 7,752]

Para garantir que $\hat{B}, \hat{C}, \hat{\rho}$ é E.M.V., calculamos a matriz Hessiana, denotada por $H(\underline{\theta})$ e verificamos no *software Mathematica* que é definida negativa:

$$\begin{bmatrix} -65,00 & -3,16 & -16,13 \\ -3,16 & -0,19 & -0,72 \\ -16,13 & -0,72 & -2,28 \end{bmatrix}$$

6.2.3 Ajuste da Curva

Calculamos o teste de bondade de ajuste Kolmogorov-Smirnov, onde a máxima distância ou máximo desvio encontrado foi de $D = 0,0496$ e $p\text{-valor} = 0,9984$, indicando que houve um bom ajuste, não se rejeita a hipótese de que os dados seguem a distribuição assimétrica apresentada em 3.2. A distribuição e densidade são, respectivamente, da forma:

$$F(x) = \frac{x^{14,54}}{(x^2 - 0.7x + 28)^{7,27}} \quad (6.1)$$

$$f(x) = \frac{14,54x^{13,54}(-0,35x + 28)}{(x^2 - 0,7x + 28)^{8,27}} \quad (6.2)$$

Foram calculadas medidas de acurácia do ajuste: Erro Quadrático Médio (MSE), Desvio Médio Absoluto (AAD) e Desvio Máximo Absoluto (MD). A medida MSE (*Mean Square Error*) consiste na média do quadrado da diferença entre os valores da distribuição empírica e valores da distribuição ajustada. A medida AAD (*Average Absolute Deviation*) consiste na mediana do módulo da diferença entre os valores da distribuição empírica e valores da distribuição ajustada. E, finalmente, a medida MD (*Maximum Deviation*) consiste no valor máximo entre as diferenças absolutas para a distribuição empírica e a distribuição ajustada. Apresentamos as medidas:

Tabela 6.3: Medidas de Acurácia de Ajuste para as Distribuição dos Dados de Precipitação

Medidas de Acurácia	Desvios
MSE	0,0006507454
AAD	0,02188007
MD	0,04724667

Observamos um bom ajuste dos dados à distribuição apresentada no Capítulo 3. Ao compararmos os resultados encontrados neste trabalho e aqueles apresentados em Rathie e Coutinho(2011) (16), vemos que a acurácia do ajuste foi semelhante, já que os valores encontrados lá foram MSE=0,000589018, AAD=0,0192187 e MD=0,0547488.

A seguir apresentamos os gráficos com a distribuição e densidade ajustadas aos dados de precipitação do centro de Los Angeles:

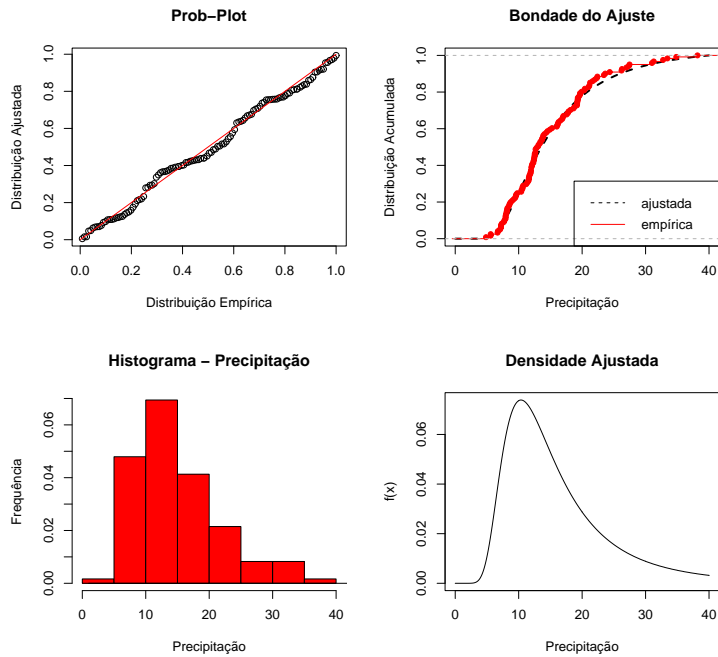


Figura 6.3: Análise de Bondade do Ajuste para os Dados de Precipitação

6.3 Retornos Diários de Taxa Câmbio

6.3.1 Análise Descritiva

Os dados de taxas de câmbio foram obtidos no sítio <http://www.federalreserve.gov/> (5). A informação é baseada em dados coletados e certificados pelo Federal Reserve Bank of New York a partir de uma amostra de participantes no mercado. O período das taxas de cambio diárias em relação ao dólar americano encontram-se entre 03 de janeiro de 2000 e 20 de maio de 2011. As moedas pesquisadas foram o Real e Dólar Canadense que pertencem aos países Brasil e Canadá, respectivamente. Segundo o FDR (5), os dados são mensurados ao meio-dia pelas taxas de compra em Nova York para transferências a pagar em moeda estrangeira. Os retornos diários r_i foram calculados pela relação:

$$r_i = \frac{P_i}{P_{i-1}} - 1 \quad (6.3)$$

onde

P_i é o preço ou taxa de câmbio do dia i

P_{i-1} é o preço ou taxa de câmbio do dia anterior $i-1$

Foram calculadas as estatísticas descritivas, bem como o *boxplot*. A distribuição empírica dos dados, assim como a densidade foram construídas com *software R* por meio dos comandos *ecdf* e *density*, para Brasil e Canadá:

Tabela 6.4: Estatísticas Descritivas para os Dados de Retornos Diários das Taxas de Câmbio do Brasil e Canadá

<i>Estatística</i>	País	
	Brasil	Canadá
Mínimo	-9,2156	-4,9451
1o. Quartil	-0,5143	-0,3363
Mediana	-0,0232	-0,0129
Média	0,0019	0,0119
Variância	1,1570	0,3765
Desvio-Padrão	1,0756	0,6136
3o. Quartil	0,4623	0,3006
Máximo	7,8440	3,8803

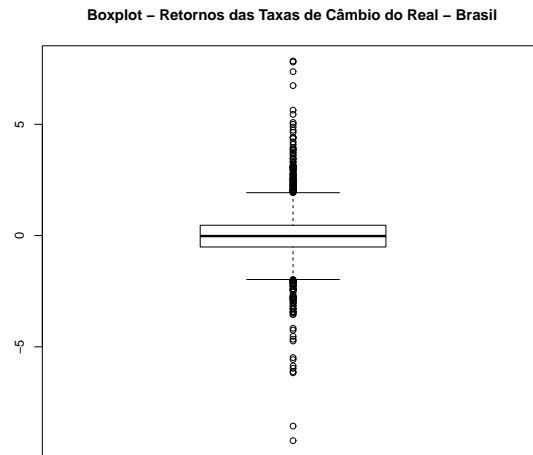


Figura 6.4: Boxplot para Retornos da Taxa de Câmbio - Real - Brasil

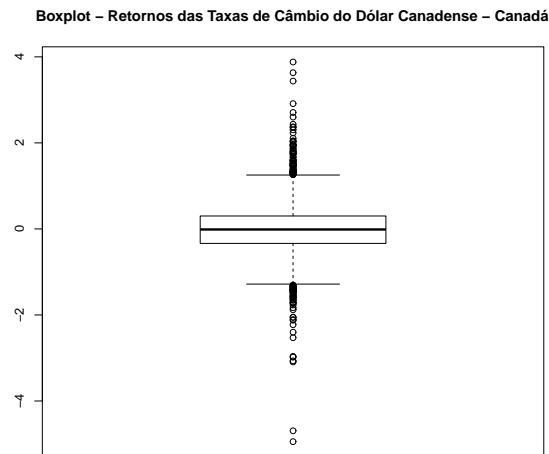


Figura 6.5: Boxplot para Retornos da Taxa de Câmbio - Dólar Canadense - Canadá

Foi verificada a hipótese de normalidade dos retornos de taxas cambiais por meio do teste Shapiro-Wilks, que apontou $W = 0,8898$ e $p\text{-valor} < 2,2 \cdot 10^{-16}$ para o Brasil (real) e $W = 0,9492$ e $p\text{-valor} < 2,2 \cdot 10^{-16}$ para o Canadá (dólar). Logo, existem evidências de que os dados não possuem distribuição Normal para ambos os casos.

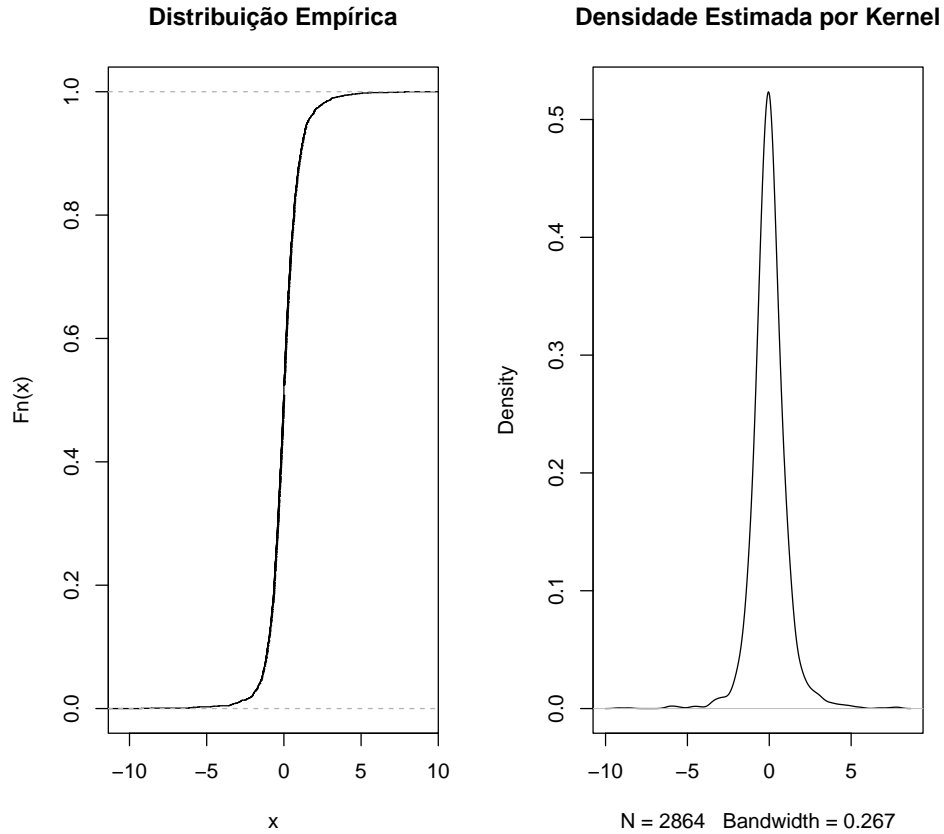


Figura 6.6: Distribuição Empírica e Densidade Estimada para Retornos da Taxa de Câmbio - Real - Brasil

6.3.2 Estimação dos Parâmetros

O Método da Máxima Verossimilhança foi empregado para estimação dos parâmetros B, C . Fixaremos o parâmetro $\hat{\rho} = \frac{1}{2}$, pois pela análise gráfica da densidade estimada por kernel dos dados de retornos de taxas de câmbio, observamos que os dados possuem curva unimodal, tanto para o Brasil quanto para o Canadá. Para a análise gráfica da densidade simétrica apresentada em (4.2), a única hipótese em que a densidade apresenta forma unimodal é quando $\rho = \frac{1}{2}$.

A otimização da função de log-verossimilhança foi realizada com o auxílio do pacote *DEoptim* no *R*. Para garantir que \hat{B}, \hat{C} é E.M.V., calculamos a matriz Hessiana e verificamos no *software Mathematica* que é definida negativa, para Brasil

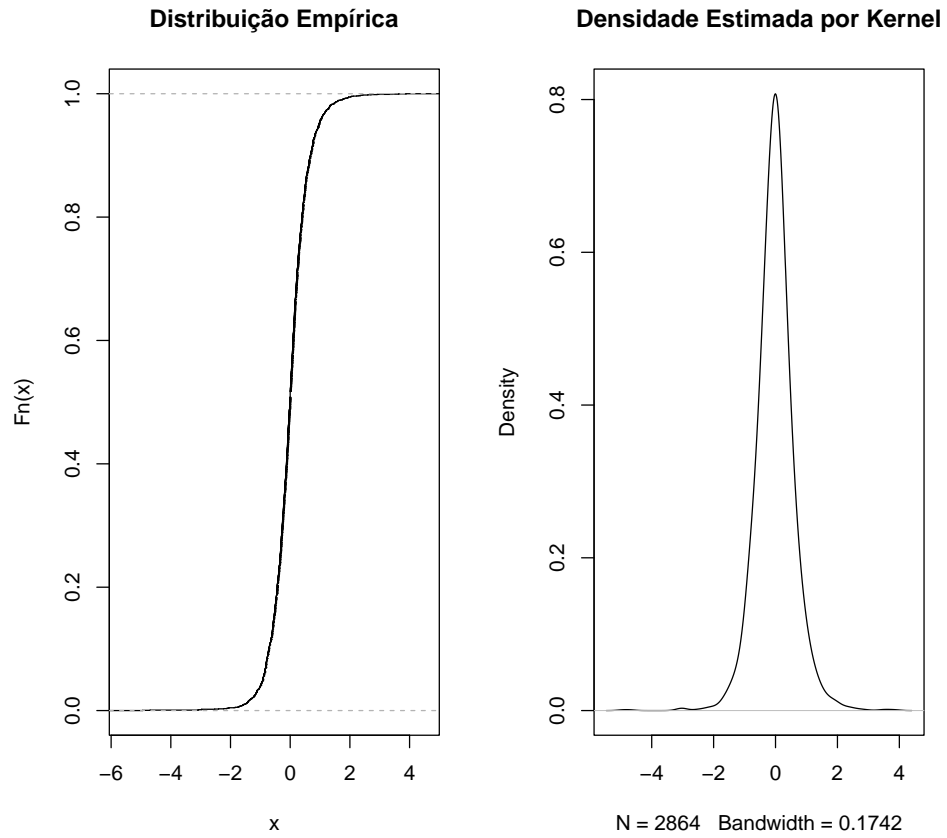


Figura 6.7: Distribuição Empírica e Densidade Estimada para Retornos da Taxa de Câmbio - Dólar Canadense - Canadá

e Canadá, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 8478,36 & 6757,35 \\ 6757,35 & 3283,16 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 50537,63 & 34867,27 \\ 34867,27 & 21929,15 \end{bmatrix}$$

Utilizamos intervalos de confiança de Wald, baseados na Matrizes Inversas de

Informação de Fisher, apresentadas para o real e o dólar canadense, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 0.00018 & -0.0003 \\ -0.0003 & 0.0004 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 0.0002 & -0.0003 \\ -0.0003 & 0.0004 \end{bmatrix}$$

A seguir apresentamos os resultados do E.M.V., com quatros casas de precisão:

Tabela 6.5: E.M.V. e I.C. Wald 95% para os Parâmetros B, C

<i>Parâmetro</i>	<i>Câmbio</i>	<i>Estimativa</i>	I.C.Wald 95%
B	Real	0,05	[0,0234;0,0765]
	Dólar Canadense	-0,01	[-0.0379;0.0179]
C	Real	0.6193	[0,5792;0,6647]
	Dólar Canadense	0.2810	[0.2385; 0,3235]

6.3.3 Ajuste da Curva

Calculamos o teste de bondade de ajuste Kolmogorov-Smirnov, onde a máxima distância encontrada entre a distribuição empírica e a distribuição ajustada foi de $D = 0,0258$ com $p - valor = 0,2946$ para o Brasil e $D = 0,0269$ com $p - valor = 0,2518$ para o Canadá. Isto é, não existem evidências de que a distribuição estimada e a distribuição empírica sejam diferentes. Apresentamos adiante medidas de acurácia do ajuste, a saber: Erro Quadrático Médio (MSE), Desvio Médio Absoluto (AAD) e Desvio Máximo Absoluto (MD).

Tabela 6.6: Medidas de Acurácia de Ajuste para as Distribuições dos Retornos das Taxas Cambiais de Brasil e Canadá

<i>Câmbio</i>	<i>Medidas de Acurácia</i>	<i>Desvios</i>
<i>Real</i>	MSE	0,0001986364
	AAD	0,01209738
	MD	0,02546275
<i>Dólar Canadense</i>	MSE	0,0001775864
	AAD	0,01138909
	MD	0,02671749

A seguir apresentamos os gráficos com a distribuição e densidade ajustadas aos dados dos retornos das taxas cambiais de Brasil e Canadá, respectivamente:

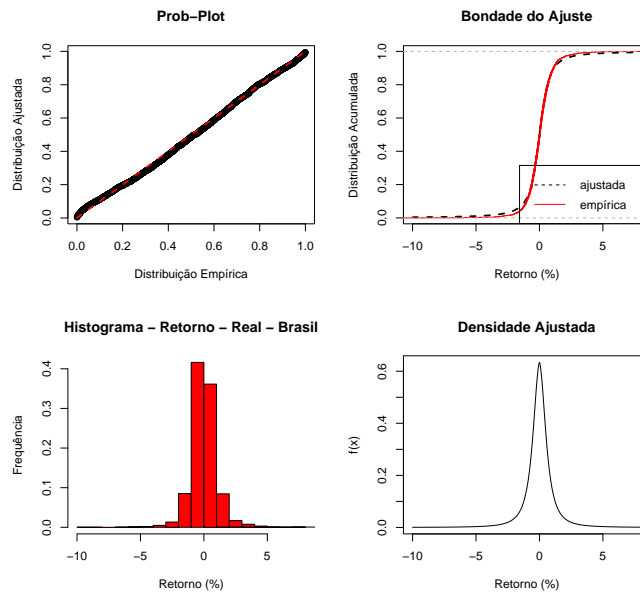


Figura 6.8: Análise de Bondade de Ajuste para Retornos Diários da Taxa de Câmbio - Real - Brasil

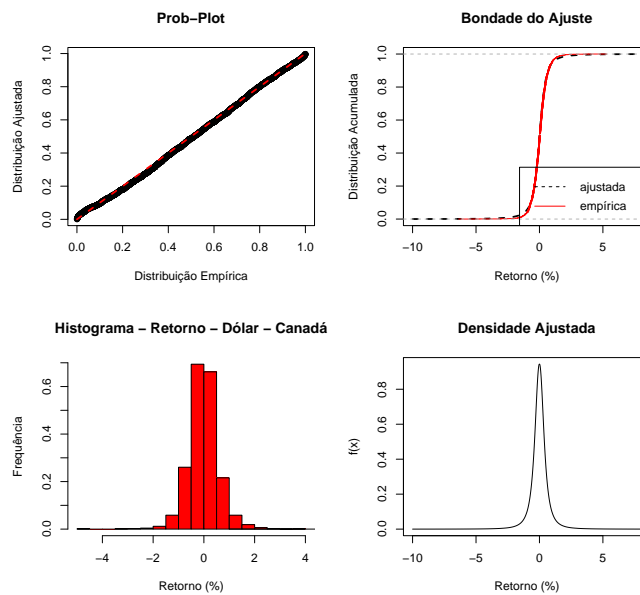


Figura 6.9: Análise de Bondade de Ajuste para Retornos Diários da Taxa de Câmbio - Dólar Canadense - Canadá

6.4 Consumo de Energia - kg de petróleo *per capita*

6.4.1 Análise Descritiva

O sítio <http://data.worldbank.org/indicator/EG.USE.PCAP.KG.OE> (23) contém os dados de consumo de energia. O consumo de energia refere-se a utilização da

energia primária antes da transformação para outros combustíveis de uso final, que é igual à produção indígena, mais as importações e as mudanças de estoque, menos as exportações e combustíveis fornecidos a navios e aeronaves em tráfego internacional para 136 países no ano de 1997. Os dados estão na escala de quilos de petróleo *per capita*. Para nossa análise, transformamos a escala para log-consumo de energia.

A abordagem utilizada para os dados bimodais é mais simples do que aquela realizada por meio de mistura de distribuições presente em [Valdes, 2011] (21), pois lá tem-se a combinação linear de Levy, que é uma solução mais complexa do que a apresentada neste trabalho. Aqui a distribuição tem forma fechada e uma única curva, onde temos um único vetor de parâmetros estimados a partir dos dados.

Foram calculadas as estatísticas descritivas, bem como o *boxplot*. A distribuição empírica dos dados, assim como a densidade foram construídas com *software R* por meio dos comandos *ecdf* e *density*.

Tabela 6.7: Estatísticas Descritivas para os Dados de Log-Consumo de Energia

<i>Estatística</i>	<i>Valor</i>
Mínimo	4,832
1o. Quartil	6,347
Mediana	7,185
Média	7.225
Variância	1,153
Desvio-Padrão	1,073
3o. Quartil	8,091
Máximo	9,847

Observamos pela figura 6.11 pela densidade que a distribuição é bimodal.

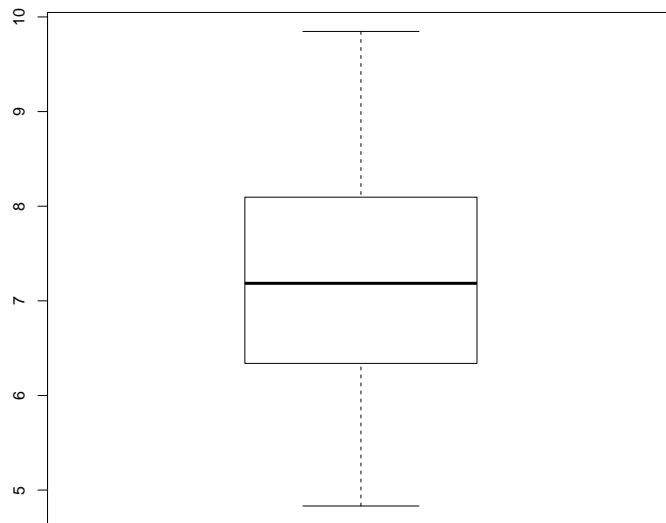


Figura 6.10: Boxplot para os Dados de Log-Consumo de Energia

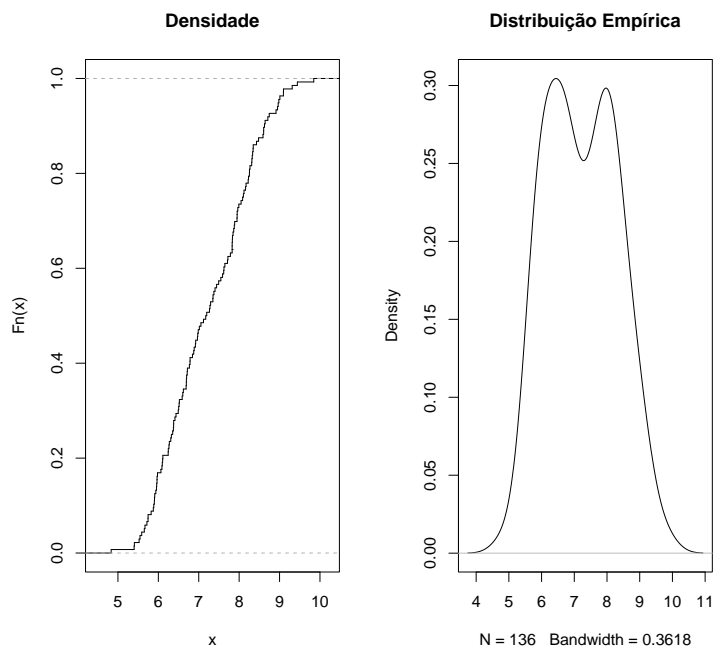


Figura 6.11: Distribuição Empírica e Densidade Estimada por Kernel para os Dados de Log-Consumo de Energia

6.4.2 Estimação dos Parâmetros

O Método da Máxima Verossimilhança foi empregado para estimação dos parâmetros $B, C, \gamma, \mu, \sigma$. Fixamos o parâmetro $\rho = \frac{1}{2}$. A otimização da função de log-verossimilhança

foi realizada com o auxílio do pacote *DEoptim* (11) no *software R*. Outros métodos como o *nlm*, *nlminb*, *optim* e o pacote *rgeoud* foram utilizados, mas não encontraram soluções satisfatórias. A estimação realizada para os parâmetros foi pontual. A seguir apresentamos os resultados:

Tabela 6.8: E.M.V. para os Parâmetros $B, C, \gamma, \mu, \sigma$

<i>Parâmetro</i>	<i>Estimativa</i>
B	-1,00
C	5.90
γ	0,81
μ	7,00
σ	0,64

6.4.3 Ajuste da Curva

Calculamos o teste de bondade de ajuste Kolmogorov-Smirnov, onde a máxima distância encontrada entre a distribuição empírica e a distribuição ajustada foi de $D = 0,0809$ com $p\text{-valor} = 0,7653$, o que indica que a hipótese de semelhança entre as distribuições empírica e ajustada não foi rejeitada. Foram calculadas medidas de acurácia do ajuste: Erro Quadrático Médio (MSE), Desvio Médio Absoluto (AAD) e Desvio Máximo Absoluto (MD). Apresentamos as medidas:

Tabela 6.9: Medidas de Acurácia de Ajuste para as Distribuição dos Dados de Log-Consumo de Energia

Medidas de Acurácia	Desvios
MSE	0,001026046
AAD	0,0251874
MD	0,07521916

A seguir apresentamos os gráficos com a distribuição e densidade ajustadas aos dados de consumo de energia:

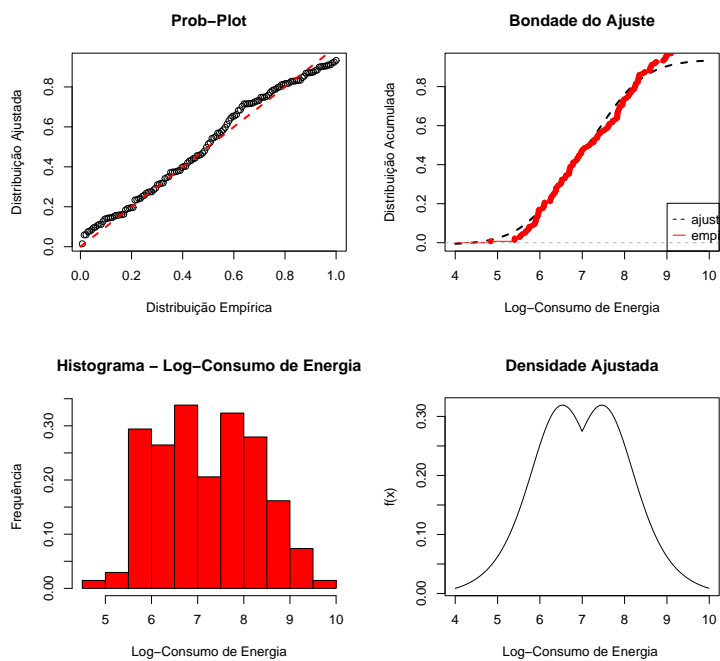


Figura 6.12: Análise de Bondade do Ajuste para os Dados de Log-Consumo de Energia

Capítulo 7

Conclusões

Os capítulos anteriores caracterizam as distribuições assimétricas e simétricas. Pela quantidade de parâmetros, pode-se observar pelos gráficos que as distribuições são maleáveis e podem assumir diversos formatos, e assumem formas com caudas grossas e pesadas.

Um fato interessante é que ambas não possuem momentos inteiros positivos, geralmente utilizados na Inferência Estatística Clássica. Os momentos e funções características possuem resultados em funções especiais que podem ser computados em *softwares* matemáticos como *Maple* e *Mathematica*.

Observamos que tanto para o caso simétrico, quanto para o caso assimétrico, foram encontrados dados reais em que as distribuições tiveram aplicações. A distribuição ajustada obteve resultado excelente para os dados de precipitação, fortemente assimétricos, apesar das poucas observações. Para os dados de retornos percentuais de taxa de câmbio do real e dólar canadense em relação ao dólar americano, o resultado do ajuste foi ótimo.

A distribuição assimétrica do Capítulo 5 obtida a partir da distribuição simétrica do Capítulo 4 também gerou bons resultados e tem a vantagem de modelar dados bimodais e fortemente assimétricos, com caudas pesadas. A diferença entre a distribuição empírica e distribuição ajustada poderia ser menor se houvessem mais observações. A abordagem utilizada para os dados bimodais é vantajosa, pois é mais simples do que aquela realizada por meio de mistura de distribuições presente em [Valdes, 2011] (21), e possui boa resposta aos dados.

As distribuições apresentadas mostraram grande aplicabilidade aos dados reais, principalmente em áreas com um comportamento típico de caudas pesadas como dados financeiros e dados assimétricos e bimodais como dados ecológicos e ambientais.

Referências Bibliográficas

- [1] Azzalini, A., 1985. “A class of distributions which includes the normal ones.” *Scandinavian J. Statistics*, **12**, 171-178.
- [2] Bolfarine, H. e Sandoval, M. C., 2002. “Introdução à Inferência Estatística.” *Sociedade Brasileira de Matemática*.
- [3] Canty, A. and Ripley, B. D., 2011. “boot: Bootstrap R (S-Plus) Functions” R package version 1.3-1.
- [4] Davison, A. C. and Hinkley, D. V., 1997 “Bootstrap Methods and Their Applications” *Cambridge University Press*.
- [5] Federal Reserve web site. Disponível em <http://www.federalreserve.gov/>.
- [6] Feller, W., 1976. “An Introduction to Probability Theory and Its Applications, vol I, II.” *John Wiley & Sons, New York*.
- [7] Fernandez, C. and Steel, M. F. J., 1998. “On Bayesian modeling of fat tails and skewness.” *JASA* **93**, 359-371.
- [8] Hai, N. T. and Yakubovich, S. B., 1992. “The Double Mellin-Barnes Type Integrals and their Applications to Convolution Theory.” *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapore*.
- [9] Mathai, A. M., Saxena, R. K. and Haubold, H. J., 2010. “H-Function - Theory and Applications”. *Springer Science and Business, New York*.
- [10] Mood, A. M., Graybill, F. A. and Boes, D. C., 1974. “Introduction to the Theory of Statistics”. *McGraw-Hill Inc., New York*.

- [11] Mullen, K., Ardia, D., Gil, D., Windover, D., and Cline, J., 2011. “DEoptim: An R Package for Global Optimization by Differential Evolution”, *Journal of Statistical Software*, v. 40, p. 1-26. Disponível em <http://www.jstatsoft.org/v40/i06/>.
- [12] National Oceanic and Atmospheric Administration’s Weather Service web site Disponível em <http://www.weather.gov/>.
- [13] Nolan, J. P., 2011. “Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data” *Boston: Birkhhauser. Chapter 1*. Disponível em <http://academic2.american.edu/~jpnolan>.
- [14] Prudnikov, A.P., Brychkov, Y.A. and Marichev, O.I., 1986. “Integrals and Series (3 vol.)”. *Gorgon & Breach Science Publishers, Amsterdam*.
- [15] Rathie, P. N., Swamee, P. K., Matos, G.G. , Coutinho, M. and Carrijo, T.B., 2008. “H-Functions and Statistical Distributions”. *Ganita*, v. 59, p. 23-37.
- [16] Rathie, P. N., and Coutinho, M., 2011. “A new Skew Generalized Logistic distribution and Approximations to Skew Normal Distribution. *The Aligarh Journal of Statistics*. No Prelo.
- [17] Rathie, P. N., Dorea, C. C. Y., Otiniano, C. E. G. and Matsushita, R. L, 2007. “Lévy flight approximations for scaled transformations of random walks”. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 51, p. 6343-6354.
- [18] Slater, L. J., 1966. “Generalized Hypergeometric Function”. *Cambridge University Press, London*.
- [19] Springer, M. D., 1979. “The Algebra of Random Variables”. *John Wiley & Sons, New York*.
- [20] Temme, N. M., 1996. “Special Functions: An introduction to the classical functions of mathematical physics”. *John Wiley & Sons, New York*.
- [21] Valdes, R. C., 2011. “Métodos de Estimacão dos Parâmetros de Misturas Finitas de Distribuices Estáveis”. *Brasília*.
- [22] The Wolfram Functions web site <http://functions.wolfram.com>.

[23] World Bank Group web site. Disponível em <http://data.worldbank.org/indicator/EG.USE.PCAP.KG.OE>.

Apêndice I

Conceitos Básicos em Probabilidade e Inferência Estatística

Para analisar o problema proposto serão necessários alguns conceitos de Probabilidade e Inferência Estatística. No estudo de Probabilidade serão introduzidas definições de Distribuição de Probabilidade, Momentos, Função Geratriz de Momentos e Função Característica. Estes conceitos serão necessários para montar várias propriedades das distribuições que serão apresentadas.

Por outro lado, após apresentação das propriedades das novas distribuições é indispensável a estimação dos parâmetros destas, onde serão necessários conceitos a Máxima Verossimilhança, Método do Momentos e Intervalos de Confiança. Breves definições e conceitos serão apresentados a seguir.

Probabilidade

A palavra probabilidade deriva do Latim *probare* (provar ou testar). O estudo da probabilidade está interessado em observar fenômenos cotidianos aleatórios. Note que ao realizar experimentos aleatórios, não se sabe qual será o resultado exato antes de realizá-lo, mas sim quais são os resultados prováveis.

Distribuição de Probabilidade Acumulada

Definição 7.0.1. *Seja X uma variável aleatória (v.a.) em um espaço de probabilidade. A função de distribuição de probabilidade acumulada de X , denotada por F_X ou simplesmente F , é definida por*

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (7.1)$$

Proposição 7.1. Propriedades da Função de Distribuição Acumulada

- i) $0 \leq F_X(x) \leq 1, \forall x$;
- ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$;
- iii) F_X é contínua à direita;
- iv) F_X não é decrescente, isto é, $F_X(x) \leq F_X(y), \forall x < y; x, y \in \mathbb{R}$.

Função Densidade de Probabilidade

Definição 7.0.2. *Seja X uma variável aleatória em um espaço de probabilidade. X é denominada **discreta** se assume um número finito ou enumerável de valores. Neste caso, a função densidade de probabilidade de uma v.a. discreta, denotada por $p(x_i)$, é definida por*

$$p(x_i) = P(X = x_i) \text{ e}$$

$$F_X(x) = \sum_{i: x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{i: x_i \leq x} p(x_i) \quad (7.2)$$

Proposição 7.2. Propriedades da Função Densidade de Probabilidade de uma V.A. Discreta

- i) $p(x_i) \geq 0, x \in \mathbb{R}$;
- ii) $\{x_i : p(x_i) \neq 0\}$ é subconjunto finito ou infinito enumerável de \mathbb{R} ;
- iii) $\sum_i p(x_i) = 1$.

Definição 7.0.3. *Seja X uma variável aleatória em um espaço de probabilidade. X é denominada **contínua** se sua função densidade de probabilidade (**f.d.p.**), denotada por $f(x)$, é tal que*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt; \forall x \in \mathbb{R} \quad (7.3)$$

Proposição 7.3. Propriedades da Função Densidade de Probabilidade de uma V.A. Contínua

- i) $f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$;
- ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;
- iii) $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$.

Esperança Matemática

Definição 7.0.4. *Seja X uma variável aleatória qualquer e F sua distribuição em um espaço de probabilidade. A **esperança** de X , denotada por EX , é definida por*

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x), \quad (7.4)$$

sempre que a integral de Riemann-Stieltjes é bem definida e $E|X|$ existe. Como $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \int_{-\infty}^0 x dF(x) + \int_0^{\infty} x dF(x)$, então a esperança estará bem definida se $\int_{-\infty}^0 x dF(x)$ e $\int_0^{\infty} x dF(x)$ forem finitas.

Momentos

Definição 7.0.5. *Seja X uma variável aleatória em um espaço de probabilidade. O **k -ésimo momento de X** , denotado por μ'_k , é definido por*

$$\mu'_k = EX^k, \quad (7.5)$$

*desde que $E|X|^k$ exista. O **k -ésimo momento central de X** (em torno da média), denotado por μ_k , é definido por*

$$\mu_k = E(X - EX)^k, \quad (7.6)$$

desde que $E|X - EX|^k$ exista.

Função Geratriz de Momentos

Definição 7.0.6. *Seja X uma variável aleatória em um espaço de probabilidade. A função geratriz de momentos de X , denotada por $M_X(t)$, é definida por*

$$M_X(t) = Ee^{tX}, \quad (7.7)$$

desde que a esperança exista.

$M_X(t)$ é chamada de função geratriz de momentos pois $EX^k = \frac{d^k}{dt^k}(M_X(t))|_{t=0}$.

Função Característica

Definição 7.0.7. *Seja X uma variável aleatória em um espaço de probabilidade. A função característica, denotada por $\varphi_X(t)$, é a função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por*

$$\varphi_X(t) = Ee^{itX}; \quad (7.8)$$

onde i é o número imaginário $\sqrt{-1}$.

Proposição 7.4. Propriedades da Função Característica

- i) $\varphi_X(t)$ é limitada, isto é, $|\varphi_X(t)| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$;
- ii) $\varphi_X(0) = 1$;
- iii) $\varphi_X(t)$ é uniformemente contínua na reta;
- iv) A função característica de uma v.a. X determina a distribuição de X unicamente;
- v) Se $E|X| < \infty$, então φ_X possui k derivadas contínuas e $\frac{d^k}{dt^k}(\varphi_X(t))|_{t=0} = i^k EX^k$.

Note que, pelas propriedades acima apresentadas, a função característica sempre existe.

Inferência Estatística

A inferência estatística tem por objetivo fazer afirmações sobre uma população ou universo a partir de uma amostra. Tal tipo de afirmação deve sempre vir acompanhada de uma medida de precisão. Os estimadores estão ligados à idéia de fazer

afirmações de sobre a população e intervalos de confiança estão associados à idéia de precisão. A seguir serão apresentados conceitos relacionados à estimação de parâmetros e intervalos de confiança. O leitor deverá estar familiarizado com as ferramentas da Inferência como espaço paramétrico, estimadores, estatísticas suficientes e completas. Tais fundamentos podem ser encontrados em Bolfarine[2002] etc.

Métodos de Estimação

Serão apresentados métodos que possibilitam a estimação dos parâmetros nas distribuições que serão estudadas: o Método dos Momentos e o Método da Máxima Verossimilhança.

Método dos Momentos

O **Método dos Momentos** consiste em igualar momentos amostrais aos momentos populacionais.

Definição 7.0.8. *Seja o k -ésimo momento amostral, denotado por m_k , definido por*

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, \quad (7.9)$$

onde n é o número de elementos de uma amostra X_1, X_2, \dots, X_n .

Logo, o Método dos Momentos assume que

$$m_k = \mu_k$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k = EX^k \quad (7.10)$$

Método da Máxima Verossimilhança

Definição 7.0.9. *Sejam $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória da v.a. X com f.d.p. $f(x|\theta)$ em que $\theta \in \Theta$ é um vetor $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$, onde Θ é o espaço paramétrico e k é a quantidade de parâmetros que a f.d.p. possui. A **função de verossimilhança**, denotada por $L(\theta; X)$, é definida por*

$$L(\theta; X) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \quad (7.11)$$

Definição 7.0.10. *O estimador de máxima verossimilhança (E.M.V.), denotado pelo vetor $\hat{\theta}$, é alcançado por meio da maximização de $L(\theta; X)$.*

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\hat{\theta} \in \Theta} L(\theta; X) \quad (7.12)$$

A seguir é apresentado o procedimento para obtenção do E.M.V.

i) *Obtém-se o logaritmo natural de $L(\theta; X)$*

$$l(\theta; X) = \log L(\theta; X) \quad (7.13)$$

ii) *Deriva-se a expressão $l(\theta; X)$ em relação a cada θ_i e iguala-se a 0*

$$U_i(\theta) = \frac{\partial l(\theta; X)}{\partial \theta_i} = 0, \quad (7.14)$$

onde $i = 1, \dots, k$ e $U_i(\theta)$ é conhecida como função escore. Logo teremos

$$\frac{\partial l(\theta; X)}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial l(\theta; X)}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\frac{\partial l(\theta; X)}{\partial \theta_k} = 0$$

iii) Resolve-se as k equações (7.14), isolando cada $\hat{\theta}_i$.

iv) Verifica-se se a matriz quadrada $K \times K$ das derivadas segundas de $l(\theta) - \frac{\partial^2 l(\theta; X)}{\partial \theta \partial \theta^T}$, denominada matriz Hessiana, definida por

$$H(l(\theta)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\theta; X)}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 l(\theta; X)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\theta; X)}{\partial \theta_1 \partial \theta_k} \\ \frac{\partial^2 l(\theta; X)}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 l(\theta; X)}{\partial \theta_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\theta; X)}{\partial \theta_2 \partial \theta_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 l(\theta; X)}{\partial \theta_k \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 l(\theta; X)}{\partial \theta_k \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\theta; X)}{\partial \theta_k^2} \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

é negativa definida.

Note que o E.M.V pode não existir ou pode não ser único. Também observe que em situações em que o espaço paramétrico Θ é discreto ou que o máximo de $l(\theta; X)$ ocorre na fronteira de Θ , o E.M.V deve ser obtido examinando a função de verossimilhança, ao invés de utilizar o procedimento acima descrito.

A propriedade da **Invariância** presente nos E.M.V. é muito vantajosa e será enunciada a seguir.

Teorema 7.0.1. (O princípio da Invariância) *Seja $g(\cdot)$ função real e inversível definida no espaço paramétrico Θ . Então, se $\hat{\theta}$ é E.M.V. de θ , então $g(\hat{\theta})$ é o E.M.V. para $g(\theta)$.*

Proposição 7.5. Propriedades Assintóticas do E.M.V.

$$\hat{\theta} \xrightarrow{d} N(\theta, \mathbb{I}^{-1}(\theta))$$

Em que $\mathbb{I}(\theta) = -E \left[\frac{\partial^2 l(\theta; X)}{\partial \theta \partial \theta^T} \right]$ é denominada a Matriz de Informação de Fisher. Observe que $\mathbb{I}(\theta)$ é a matriz hessiana com sinais trocados.

Intervalos de Confiança (I.C.)

O Intervalo de Confiança de Wald é definido por:

$$\hat{\theta} - z_{\alpha/2} \sqrt{\text{diag}(\mathbb{I}^{-1}(\hat{\theta}))}$$

$$\hat{\theta} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\text{diag}(\mathbb{I}^{-1}(\hat{\theta}))},$$

em que diag é a diagonal da Matriz Inversa de Informação de Fisher e $z_{\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}$ são os quantis da distribuição $N(0, 1)$ com nível de confiança α .

Outro tipo de I.C. está baseado no método não-paramétrico de *Bootstrap*, descrito a seguir:

- i) Estimar $\hat{\theta}$ utilizando os dados reais.
- ii) Retirar B amostras *bootstrap* de tamanho m, com reposição dos dados reais (x_1, x_2, \dots, x_n) .
- iii) Estimar $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_B$ das B amostras.
- iv) Para estimar o I.C. *Bootstrap* Percentil, ordenar $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_B$ e selecionar o percentis $(K_1(\frac{\alpha}{2}), K_2(1 - \frac{\alpha}{2}))$, onde K_1 é o percentil de ordem $\frac{\alpha}{2}$ e K_2 é o percentil de ordem $(1 - \frac{\alpha}{2})$.
- v) Para estimar o I.C. *Bootstrap* Normal, calcular a média $\bar{\hat{\theta}}$ e desvio-padrão $dp(\hat{\theta})$ de $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_B$ e calcular

$$\bar{\hat{\theta}} - z_{\alpha/2} dp(\hat{\theta})$$

$$\bar{\hat{\theta}} + z_{1-\alpha/2} dp(\hat{\theta})$$

Para mais detalhes sobre o método *Bootstrap*, veja (4).