



Universidade de Brasília
IE - Instituto de Exatas
Departamento de Estatística

Detecção de Quebras Estruturais em Séries Temporais:

Implementação dos Testes de Shimotsu com uma
Aplicação em Séries do Mercado de Câmbio

Nicollas Stefan Soares da Costa

Brasília
2016

Nicollas Stefan Soares da Costa

Detecção de Quebras Estruturais em Séries Temporais:

Implementação dos Testes de Shimotsu com uma
Aplicação em Séries do Mercado de Câmbio

Dissertação apresentada ao Departamento de Estatística da Universidade de Brasília, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientador(a): Dr. Raul Yukihiro Matsushita

Brasília
2016

Costa, N. S. S.

Detecção de Quebras Estruturais em Séries Temporais: Implementação dos Testes de Shimotsu com uma Aplicação em Séries do Mercado de Câmbio.

116 páginas

Dissertação - Instituto de Exatas da Universidade de Brasília. Departamento de Estatística.

1. memória longa
2. quebra estrutural
3. processos espúrios
4. modelo de integração fracionária
5. variabilidade das taxas de câmbio

I. Universidade de Brasília. Instituto de Exatas. Departamento de Estatística.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Bernardo Borba de Andrade
Membro Interno

Prof. Dr. Eraldo Sérgio Barbosa da Silva
Membro Externo

Prof. Dr. Raul Yukihiro Matsushita
Orientador

Dedicatória

Aos meus pais, **Efigênia Maria Soares da Costa e Murilo Vieira da Costa (in memoriam)**, que tiveram paciência, dedicação e carinho na minha criação.

[All that we see or seem is but a dream within a dream.]

Edgar Allan Poe.

Agradecimentos

Primeiramente ao meu orientador Dr. Raul Yukihiro Matsushita, que sempre muito paciente e amigo me aconselhou e foi a peça principal desta dissertação.

Ao corpo administrativo do departamento de Estatística que, sempre muito solícito, desempenhou papel fundamental à minha formação. Principalmente aos servidores, Tathyanna Martins Cordeiro, Edenilson Lopes Carvalho, Lucas Fernandes de Albuquerque Lira e André do Vale Oliveira .

Aos meus professores, que contribuíram muito para minha formação, em especial aos professores, Cibele Queiroz da Silva, Cira Etheowalda Guevara Otiniano, André Cançado e Antônio Eduardo, não somente pelo ensino, mas também pelas lições de vida.

Ao meu amigo, pela ajuda nos momentos de dificuldade e debates, Gabriel Brunelo, que muito solícito me ajudou sempre que possível no andamento da dissertação.

A Lara Gabriela, pelo amor, carinho, brigas, e estar sempre ao meu lado me incentivando nos momentos cruciais da nossa vida.

Sumário

1	Apresentação	13
1.1	Introdução	13
1.2	Objetivo	16
1.3	Estrutura da Dissertação	17
2	Revisão da Literatura	19
2.1	Quebras Estruturais	19
2.2	Múltiplos Pontos de Mudança	22
2.3	Quebras Estruturais <i>versus</i> Memória Longa	23
2.4	Quebras Estruturais <i>versus</i> Memória Longa em Séries Sazonais	25
2.5	Detecção de Quebras Estruturais em Processos de Memória Longa	26
2.6	Aplicações sobre Quebra Estrutural	27
2.7	Aplicações sobre Quebra Estrutural <i>versus</i> Memória Longa	28
2.8	Múltiplas Quebras Estruturais	29
3	Memória Longa	31
3.1	Introdução	31
3.2	Processos d Fracionários Integrados	33

3.2.1	Função Densidade Espectral	34
3.2.2	Função de Autocorrelação e Autocovariância	35
3.3	Modelo ARFIMA(p, d, q)	38
3.3.1	Função Densidade Espectral	40
3.3.2	Função Autocorrelação e Autocovariância	41
3.4	Estimação do parâmetro de diferenciação d	42
3.4.1	Métodos Paramétricos	43
3.4.2	Métodos Semiparamétricos	44
3.5	Definição e Estimação do parâmetro de Hurst	47
3.5.1	Introdução	47
3.5.2	Expoente de Hurst	47
3.5.3	Estatística R/S	48
3.5.4	Estatística R/S Modificada	49
3.5.5	Estimador de Whittle	50
4	Quebras Estruturais na Média e Variância	53
4.1	Introdução	53
4.2	Modelos de Quebras Estruturais	54
4.2.1	Modelo com Quebra Estrutural na Média	54
4.2.2	Modelo com Quebra Estrutural na Variância	57
4.2.3	Modelo com Quebra Estrutural na Média e Variância	60
4.2.4	Modelo com Múltiplas Quebras Estruturais	62
5	Testes KPSS, Phillips-Perron e Shimotsu	65
5.1	Introdução	65
5.2	Teste KPSS	66

5.3	Teste PP	69
5.4	Testes de Shimotsu	70
5.4.1	Diagnóstico Baseado na Divisão por Amostras	71
5.4.2	Investigação Visual com Base na Divisão por Amostras	72
5.4.3	Teste Estatístico para a Constância do Parâmetro	72
5.4.4	Teste Utilizando d Diferenciações	74
5.4.5	Estudos de Monte Carlo	76
6	Aplicação em Séries de Taxas de Câmbio	79
6.1	Introdução	79
6.2	Descrição da Série Temporal	80
6.3	Implementação Computacional	83
6.4	Aplicação dos Testes	86
6.5	Modelagem de Séries com Quebra Estrutural	90
7	Considerações e Perspectivas	93
7.1	Considerações Finais	93
7.2	Perspectivas	94
	Referências Bibliográficas	95
A	Testes Complementares	107
B	Testes Shimotsu	110
C	Tabela 5.1	112
D	Aplicação	115

Lista de Figuras

1.1	FAC de um processo de ruído com memória longa $I(d)$, dado por $(1 - B)^d X_t = \epsilon_t$, em que ϵ_t é um ruído aleatório com média zero e variância 1 e $d = 0.4$	14
1.2	FAC teórica de uma série temporal i.i.d. simulada com quebra estrutural na média.	15
1.3	FAC teórica de uma série temporal binomial.	15
3.1	Comparativo da função de autocorrelação.	37
3.2	Comparativo da função autocorrelação.	40
3.3	Comparativo da função de densidade espectral - ARFIMA(0, 0.4, 0) e ARIMA(0.1, 0, 0.3).	41
4.1	Série quebra estrutural na média.	55
4.2	FAC da série quebra estrutural na média.	55
4.3	Série quebra estrutural na média 2.	56
4.4	FAC da série quebra estrutural na média 2.	56
4.5	Série quebra estrutural na variância.	58
4.6	FAC da série quebra estrutural na variância.	58
4.7	Série quebra estrutural na variância 2.	59

4.8	FAC da série quebra estrutural na variância 2.	59
4.9	Série quebra estrutural na média e variância.	61
4.10	FAC da série quebra estrutural na média e variância.	61
4.11	Série múltiplas quebras estruturais.	63
4.12	FAC da série múltiplas quebras estruturais.	63
6.1	Evolução da série <i>intraday</i> da taxa diário de câmbio.	81
6.2	Painel Superior: evolução da série diária da variação dos preços de oferta (v_t). Painel Inferior: função de autocorrelação amostral da série v_t	82
6.3	Evolução temporal de $\nu_t = \log v_t$	83
6.4	Aspecto da quebra estrutural da série ν_t	89

Lista de Tabelas

3.1	Comparativo entre os <i>lags</i> dos modelos ARFIMA E ARIMA . . .	38
5.1	Estimativas e resultados da replicação da tabela de Shimotsu (2006).	78
5.2	Tabela de valores críticos (Shimotsu(2006)).	78
6.1	Trecho da série <i>intraday</i> R\$/US\$.	80
6.2	Recorte da Tabela 6.5 para $m = 200$	87
6.3	Recorte da Tabela 6.6 para $m = 200$	87
6.4	Estimativas do parâmetro H	88
6.5	Estimativas e resultados do 1 ^o teste de Shimotsu na série ν_t	92
6.6	Estimativas e resultados do 2 ^o teste de Shimotsu na série ν_t	92

Resumo

Memória longa é uma característica de uma série temporal estacionária associada ao lento decaimento da sua função de autocorrelação (FAC) para zero. Porém, esse mesmo padrão pode ser produzido de forma espúria como consequência de quebras estruturais no processo gerador da série. Portanto, é um problema de interesse distinguir a memória relativa a uma estrutura de dependência de longo alcance da outra produzida espuriamente em séries não estacionárias. Este trabalho apresenta uma revisão bibliográfica desse assunto. Em particular, concentramos nossa atenção aos testes propostos por Shimotsu (2006), por causa da sua relativa simplicidade. Esses testes foram implementados no *software* R, e, como ilustração, foram aplicados na série do logaritmo das variações diárias das taxas de câmbio da moeda brasileira frente ao dólar norte americano.

Palavras Chave: memória longa, quebra estrutural, processos espúrios, modelo de integração fracionária, variabilidade das taxas de câmbio.

Abstract

In a stationary time series, long memory is characterized by a slow decay rate to zero of its autocorrelation function (acf). However, a similar pattern can be produced spuriously by structural breaks. Hence, it is of interest to distinguish the true long memory from the spurious forms generated by structural breaks. Particularly, we study the Shimotsu's tests (2006) due to its simplicity. They were implemented in R and to illustrate it we performed an application to the real-dollar exchange rate time series data (considering the log-variability of daily prices).

Keywords: *long memory, structural break, spurious process, fractional integration, exchange variability.*

Capítulo 1

Apresentação

1.1 Introdução

Em uma série temporal estacionária, memória longa é uma propriedade em que sua função de autocorrelação (FAC) exibe decaimento lento para zero. Por exemplo, os modelos ARFIMA (autoregressivos fracionariamente integrados e de médias móveis) possuem memória longa, apresentando decaimento da função de autocorrelação (FAC) na forma hiperbólica, isto é, $|\rho_h| \approx |h|^{2d-1}$, para $d < 0.5$ quando $h \rightarrow +\infty$. Nessa situação, segundo Robinson (1994) e Baillie (1996), as autocorrelações não são absolutamente somáveis, pois $\sum_{h=0}^{\infty} |\rho_h| = \infty$. Consequentemente, sua função de densidade espectral $f(\omega)$ não é finita na frequência $\omega = 0$, pois $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} f(\omega) = +\infty$. A Figura 1.1 ilustra a FAC de um processo com memória longa, mostrando o aspecto característico desse tipo de processo: decaimento lento de $\rho(h)$ para zero.

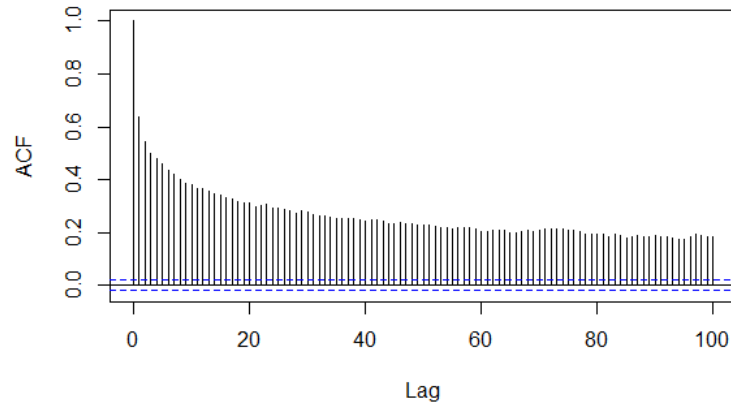


Figura 1.1: FAC de um processo de ruído com memória longa $I(d)$, dado por $(1 - B)^d X_t = \epsilon_t$, em que ϵ_t é um ruído aleatório com média zero e variância 1 e $d = 0.4$.

O problema é que o aspecto de memória longa sugerida pela FAC da série temporal pode ser confundido com uma forma de não estacionariedade conhecida como quebra estrutural ou ponto de mudança, que são mudanças, por exemplo, na média e/ou variância do processo no decorrer do tempo. Tal fato pode gerar conclusões e inferências errôneas na identificação do modelo e análise da série temporal, como ilustram os próximos exemplos.

Exemplo 1 Considere um processo com quebra estrutural na média dado por $X_t = \mu_1 + \delta(t) \cdot \mu_2 + \epsilon_t$, em que $\delta(t) = 1$, se $t > \tau_0$ e $\delta(t) = 0$ se $t < \tau_0$, e $\epsilon_t \sim i.i.d.^1 (0, \sigma^2)$. Note que o processo não é estacionário nem possui memória longa. Porém, ao simular uma série de 1000 observações com $\mu_1 = 6$, $\mu_2 = 9$, $\tau_0 = 500$ e $\sigma^2 = 1$, sua FAC mostra um aspecto semelhante ao que se observa na Figura 1.1.

¹independente e identicamente distribuído.

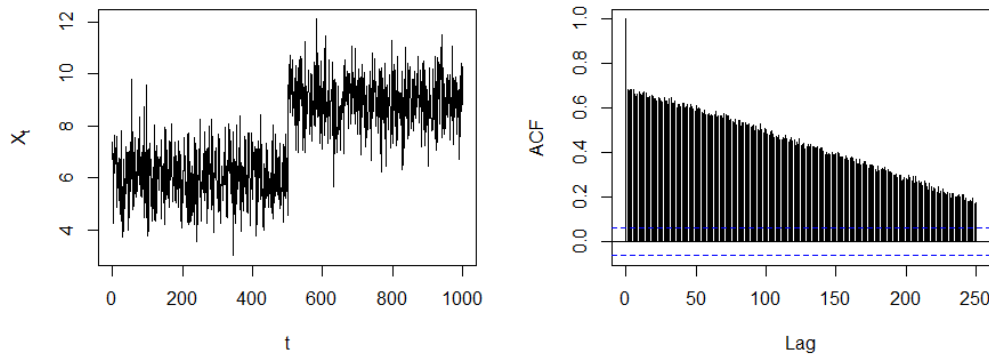


Figura 1.2: FAC teórica de uma série temporal i.i.d. simulada com quebra estrutural na média.

Exemplo 2 Seja $X_t \sim \text{Bin}(n_t, p_t)$ uma série temporal binomial, em que n_t é um parâmetro determinístico e p_t varia aleatoriamente no tempo. Considere o modelo $P(X_t = x_t | n_t, p_t) = \binom{n_t}{x_t} p_t^{x_t} (1 - p_t)^{n_t - x_t}$ com $f(p_t) = \frac{p_t^{a_t - 1} (1 - p_t)^{b_t - 1}}{B(a_t, b_t)}$, em que $a_t > 0$, $b_t > 0$, $0 < p_t < 1$ e $n_t \geq 1$. A Figura 1.3 mostra a FAC de uma série simulada de 1000 observações independentes com $n_t = 10$, se $t < 500$ e $n_t = 5$, se $t > 500$, $a_t = 3$ e $b_t = 5$.

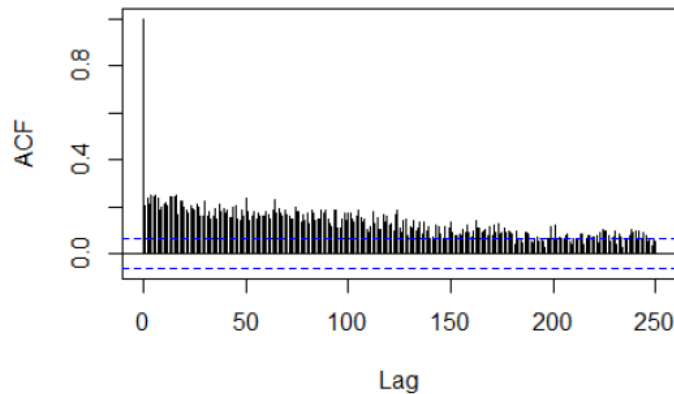


Figura 1.3: FAC teórica de uma série temporal binomial.

Os modelos de memória longa se aplicam a diversas áreas como economia, finanças (na análise da volatilidade no mercado de ações), geologia (no estudo da série de eventos sísmicos), na física (para estudos de campos gravitacionais) e em hidrologia (para estudos como inundações e vazões de rios). Por isso, é relevante o estudo de métodos que permitam a detecção de quebras estruturais, de modo a propiciar a distinção entre um modelo de memória longa e um modelo exposto a quebra estrutural, em que se confunde a quebra estrutural com a longa persistência serial.

Dessa forma, o foco deste trabalho é estudar técnicas para a detecção de quebras estruturais, tratando do seu problema de confundimento com a dependência de longo alcance.

1.2 Objetivo

Isto posto, o primeiro objetivo deste trabalho é revisar os testes para detecção de quebras estruturais, enfatizando a relação desse fenômeno com a memória longa espúria da série. Para isso, colecionaremos artigos, tanto teóricos quanto aplicados, em variadas áreas em nossa revisão bibliográfica relacionadas com técnicas de detecção de quebras estruturais.

O segundo objetivo é estudar os testes propostos por Shimotsu (2006), bem como propor algumas modificações. São dois testes simples que fundamentam-se em algumas propriedades no domínio do tempo do processo $I(d)$ (Figura 1.1). Apesar desses testes serem simples, eles são ferramentas úteis para a distinção entre processos de memória longa e os processos expostos a quebras estruturais.

1.3 Estrutura da Dissertação

O trabalho foi dividido em sete capítulos a serem descritos a seguir.

O Capítulo 2 descreve um histórico do estudo dos conceitos de memória longa, quebras estruturais simples e quebras múltiplas, destacando as principais referências bibliográficas que explanam sobre o confundimento entre memória longa e quebra estrutural.

No Capítulo 3 é feita uma revisão do processo $ARFIMA(p, d, q)$, suas propriedades e os métodos de estimação do parâmetro de memória longa (d). Como ilustração, são apresentadas simulações para mostrar as características de sua função de autocorrelação e função densidade espectral.

O Capítulo 4 discute sobre os principais modelos de quebras estruturais tanto na média e/ou variância, bem como os seus tipos; quebras simples ou múltiplas.

No Capítulo 5 são detalhados os testes de Kwiatkowski, Phillips, Schmidt & Shin (1992) (KPSS) e Phillips-Perron (1988) (PP). Esses testes são utilizados no procedimento proposto por Shimotsu (2006) para analisar se a série temporal é gerada por um processo de memória longa, ou se é gerada por um processo espúrio, ou seja, induzido por alguma quebra ou ponto de mudança.

O Capítulo 6 apresenta uma aplicação da metodologia descrita na dissertação para a série da taxa de câmbio entre o dólar americano (US\$) e o real (R\$) obtida no *Tick Data Inc.* do mercado FOREX (*foreign exchange*) com a utilização dos testes propostos por Shimotsu (2006).

Por fim, no Capítulo 7 apresentam-se as considerações finais dos resultados obtidos com a aplicação da metodologia descrita, destacando possíveis perspectivas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

2.1 Quebras Estruturais

Na literatura dos modelos econométricos encontram-se numerosos testes para a estimação de quebra estrutural, sendo o do economista Gregory C. Chow (1960) um dos mais antigos. Esse teste permite determinar se as variáveis independentes têm diferentes impactos em diferentes subgrupos da população. Ele é uma aplicação do teste F , e que utiliza uma soma dos quadrados dos erros de três regressões - uma para cada período de amostragem (antes e depois da quebra e outra para a totalidade dos dados), sob a hipótese de inexistência de quebra estrutural. Porém, esse teste requer que as datas das quebras sejam conhecidas.

No mesmo ano, o teste da razão de verossimilhança (LR) com data de quebra estrutural desconhecida foi proposto por Quandt (1960). Ele é uma referência para muitos autores que estudam o fenômeno de *change points* até hoje. Dessa maneira, Quandt aprimorou o teste de Chow introduzindo a estatística $\text{Sup } F$

(assumindo-se erros normalmente distribuídos), isto é, o teste da razão de verossimilhança para uma mudança nos parâmetros avaliados na data de quebra que maximiza a função de verossimilhança.

Brown, Durbin & Evans (1975) propuseram a aplicação dos testes de CUSUM (*cumulative sum*) e CUSUMSQ (*cumulative squared sum*) para a detecção de quebras estruturais. O primeiro teste é baseado na soma cumulativa dos resíduos recursivos, podendo ser aplicado para séries temporais em que há incertezas sobre quando ocorreu a quebra estrutural. Já o segundo, proporciona um complemento útil ao teste CUSUM particularmente quando os pontos de partida dos coeficientes β_t 's são aleatórios, em vez de sistemáticos. Esses testes foram extensamente usados nas décadas de 70 e no começo dos 80, e para mais detalhes sobre o poder e análise dos testes ver Hansen (1991a).

Nyblom (1989) propôs o teste de estabilidade do parâmetro, a partir de trabalhos independentes de Gardner (1969), Pagan & Tanaka (1981), Nyblom & Makalainen (1983) e King (1987). Esse teste é simples, mas se mostra bastante poderoso para detectar quebras estruturais. O teste deriva do teste do melhor local invariante como os multiplicadores de Lagrange. Desta maneira, a hipótese nula testa se os parâmetros do modelo assumem valores constantes no processo, contra a hipótese alternativa em que o processo apresenta quebras.

Em sequência aos trabalhos de Nyblom, Hansen (1992) propôs uma extensão do teste LM de Nyblom para testar a instabilidade dos parâmetros especificando corretamente os problemas da verossimilhança. Tal teste incorpora uma possível instabilidade no parâmetro, permitindo que este seja dependente do tempo.

No começo da década de 90, a qualidade dos testes de detecção de mudança de pontos sofreu significativa melhora pelo extenso uso computacional. Destacamos

o trabalho de Andrews (1993), que resulta na aplicação em abrangentes classes de modelos paramétricos que são estimados pelo método do momento generalizado (GMM). Em seu artigo, Andrews aplica o teste tanto para pontos de quebra conhecidos, como para o caso em que eles são totalmente desconhecidos.

Perron (2005) elucida que, historicamente, os testes para mudanças estruturais foram primeiramente idealizados com base em procedimentos que não possuíam um ponto de quebra explícito, pois a distribuição para as estimativas das datas de quebra não eram disponíveis (Hawking, 1977). Assim, a maioria dos testes propostos utilizam a soma parcial dos resíduos, o teste Q baseado na média da soma parcial dos resíduos e o teste CUSUM que desempenha um papel importante tanto na teoria quanto na prática.

Seguindo na linha de pesquisa, um importante artigo de Bai (1994), que posteriormente se estendeu a múltiplos pontos de quebra estrutural por Bai & Perron (1998), introduziu estimadores por mínimos quadrados (LS) da localização de um único ponto de mudança na média de um processo linear sob algumas hipóteses de regularidade. As principais vantagens do teste proposto em comparação com outros que utilizam a verossimilhança são: (a) não se necessita conhecer a distribuição dos erros; (b) fácil implementação e (c) computacionalmente eficiente.

Bai propôs diversos estimadores para modelos com múltiplos pontos de mudança de regime. Em 1997, ele tratou de um estimador que permite detectar um ponto de mudança de cada vez. Nesse mesmo ano, ele propôs um estimador para modelos lineares. Em 1998 e 2003, Bai & Perron aprimoraram os estimadores, fazendo uso de uma análise computacional mais intensiva.

Contudo, todos os testes acima citados (exceto o teste CUSUM) são sujeitos a um grave problema: dado um tamanho de amostra, a função potência pode ser

não monótona, podendo decrescer, e até mesmo atingir o valor zero, à medida que a hipótese alternativa considerada torna-se mais distante da hipótese nula. Esse problema foi demonstrado por Perron (1991) e estendido por Vogelsang (1999) para outros testes. Altissimo & Corradi (2003) e Juhl & Xiao (2005) sugerem a utilização de métodos não-paramétricos ou amostragem local em que a média é estimada utilizando dados em uma vizinhança.

Já no início deste século, o assunto obteve novos tratamentos com várias implementações e aplicações de testes e algoritmos, tornando-se o foco em áreas como economia e hidrologia.

Durbin & Koopman (2001) e Koopman, Shephard & Doornik (2001) implementaram um software para tratar os modelos com parâmetros que variam no tempo na formulação em espaços de estados.

2.2 Múltiplos Pontos de Mudança

Em contraste com a gama de trabalhos na literatura relacionados aos problemas na quebra estrutural com um único ponto de mudança, recentemente os estudos confluíram para artigos na estatística e econometria que tratam a respeito de vários pontos de mudança.

Com isso, Bai & Perron (1998, 2003) desenvolveram um extenso arcabouço para o contexto de múltiplas mudanças estruturais, tais como: consistência dos estimadores nas datas de mudança; testes para quebra estrutural; intervalos de confiança para os pontos de mudança; métodos para seleção do número de pontos de mudança e algoritmos eficientes para as estimações.

Desta maneira, ao longo dos anos, vários trabalhos utilizaram-se de diversos

estimadores para identificar múltiplos níveis de mudança aplicados em várias áreas do conhecimento. Igualmente, em numerosos trabalhos práticos, aplicaram-se as técnicas em dados simulados e principalmente em dados reais, em diversas áreas como finanças, hidrologia, sismologia e física.

Destacam-se também os trabalhos de Yao (1988), Garcia & Perron (1996), Liu, Wu & Zidek (1997), Pesaran & Timmermann (1999) e Lumsdaine & Papell (1997). A maioria desses estudos concentra-se em problemas no teste de hipótese em relação a modelos de múltiplos pontos de mudança.

2.3 Quebras Estruturais *versus* Memória Longa

Como observado, de acordo com Perron (1990), pode haver confundimento entre mudanças de regime e a dependência de longo prazo. Se a magnitude da mudança for significativa, pode-se facilmente rejeitar a hipótese de raiz unitária (não estacionariedade) mesmo se a série não consiste em dados i.i.d.. Isso conduz a uma conclusão equivocada de que os choques possuem efeitos permanentes, quando na verdade trata-se de uma má especificação do modelo. Para isso ele analisou o índice de preços ao consumidor entre 1961 e 1986 e chegou à conclusão de que certas quebras na série fomentam a utilização errônea de modelos de memória longa.

Existe certa dificuldade em se fazer a distinção entre memória longa e quebras estruturais, o que pode deixar a falsa impressão de que memória longa e quebra estrutural são quase observacionalmente equivalentes. Por isso, a presença de certas quebras pode enviesar os parâmetros estimados para modelos de memória longa verdadeiros, e, conseqüentemente, guiar para especificações erradas de mo-

delos. Com isso, apesar de toda dificuldade, fica clara a importância do estudo desse fenômeno, não somente para a teoria de séries temporais, mas também para uma gama de aplicações em diversos contextos.

Por isso, uma crescente vertente na literatura tem desenvolvido novos testes para distinguir entre um modelo verdadeiro de longo alcance de um caso espúrio. Destacam-se os trabalhos de Perron & Qu (2004), Berkes et al. (2006), Shimotsu (2006), Ohanissian et al. (2008) e Perron & Qu (2010) que examinam a hipótese de memória longa à alternativa de quebra estrutural.

Ohanissian et al. (2008) estimaram o parâmetro de memória longa através de diversos níveis de agregação e propuseram o teste de Wald para distinguir os dois fenômenos. Eles mostraram que o teste é capaz de detectar os processos espúrios com poder considerável.

Já Perron & Qu (2004, 2010) apresentaram a possibilidade de um processo de memória longa verdadeiro ser confundido com um processo de memória longa espúrio induzido por quebras estruturais. Desta forma, mostraram teoricamente e através de simulações que, se ocorre uma quebra estrutural na série temporal, a série mostrará características similares de um processo de memória longa. Por exemplo, função de autocorrelação com decaimento lento para zero.

Shimotsu (2006) discute a dificuldade em distinguir entre processos verdadeiros e espúrios de memória longa e propõe dois testes simples baseados no processo fracionalmente integrado ($I(d)$) para averiguar tal confundimento.

No primeiro teste, divide-se a amostra em b subamostras, estima-se o parâmetro d para cada subamostra, e comparam-se as estimativas com a estimativa do parâmetro d da amostra total. Devido ao fato de esse teste somente envolver apenas a divisão da amostra e estimar os parâmetros, pesquisadores podem usá-lo

como uma verificação preliminar antes de procederem à análise mais aprofundada dos dados.

No segundo teste, estima-se d da amostra total, utiliza-se a estimativa para tomar as d 's diferenças da amostra, e aplica-se o teste KPSS e o teste de Phillips-Perron aos dados diferenciados e a sua soma parcial. O autor revela que, apesar de ser bastante simples, o teste fornece um ferramenta poderosa para distinguir entre um processo $I(d)$ verdadeiro do espúrio.

Além disso, Choi, Yu & Zivot (2010) focaram na possibilidade de quebras estruturais e sazonalidade para a volatilidade realizada do marco alemão e dólar americano, iene japonês e dólar americano, e marco alemão e iene japônes. Primeiramente, testaram para memória longa e estimaram os parâmetros. Em segundo lugar, testaram e estimaram o modelo para múltiplas quebras na média e para encontrar evidências de sazonalidade. E, por último, examinaram a evidência para memória longa para os dados com quebra estrutural. Assim, mesmo após a remoção das quebras, ainda encontraram um aspecto persistente na série, sugerindo que parte da série observada de memória longa pode ter sido representada pela presença de quebras estruturais nos dados.

2.4 Quebras Estruturais *versus* Memória Longa em Séries Sazonais

Apesar de nos últimos anos ter se tornado um assunto bastante atraente para pesquisa e estudo, a discussão sobre memória longa e quebra estrutural carece de artigos que englobam séries com sazonalidade. Desta forma, através de uma

pesquisa bibliográfica, o trabalho de Caporale, Cunado & Gil-Alana (2012) apresenta uma discussão sobre o assunto. O artigo analisa séries sazonais na presença de quebras estruturais. A partir da flexibilização do parâmetro d , permitindo que ele seja qualquer número real, o processo é dito ser sazonal fracionalmente integrável.

2.5 Detecção de Quebras Estruturais em Processos de Memória Longa

Gil-Alana (2008) discute em seu artigo que os modelos de integração fracionária (ARFIMA) se tornam uma alternativa viável para modelagem de séries temporais macroeconômicas. E lembra que a existência de quebras estruturais pode conduzir a um modelo de memória espúrio. Desta maneira, ele propôs um procedimento simples para determinar a parte de integração fracionária e a quebra estrutural de forma unificada.

Além disso, Gil-Alana (2004) propôs um procedimento para testar simultaneamente o grau de integração do componente cíclico em uma determinada série de tempo e a necessidade de uma tendência linear em outro artigo bastante importante para a área.

Em complemento a isso, Mayoral (2012) desenvolve um dispositivo de teste simples que é capaz de determinar se a parte não estacionária dos dados se deve à forte persistência dos choques, modelado como um processo fracionalmente integrado, ou à existência de tendências determinísticas, possivelmente contendo quebras.

2.6 Aplicações sobre Quebra Estrutural

Nos últimos anos, o volume de trabalhos e artigos que engloba a temática de detecção e aplicação de quebra estrutural aumentou bastante. Há trabalhos advindos da área financeira, volatilidade realizada; taxa de câmbio; mercado acionário e retornos de ativos, em hidrologia e climatologia, vazões de rios, precipitações e temperaturas diárias, bem como aplicados em sismologia, sistemas complexos, física e outros setores.

No que tange aos trabalhos sobre mercados, retorno e volatilidade, Granger & Hyung (2004) tratam de ocasionais mudanças estruturais e memória longa dos retornos absolutos das ações do S&P 500. Lobato & Savin (1998) investigaram a dualidade entre séries geradas por um processo verdadeiro ou espúrio no mercado de ações.

Similarmente, Jung & Maderistch (2014) pesquisaram se a quebra estrutural na volatilidade dos mercados internacionais era produzida por interdependência ou contágio entre os mercados, e o trabalho de Cajueiro & Tabak (2004) encontram evidência de memória longa no mercado asiático.

Outra aplicação bastante focada nessa teoria envolve o preço e volatilidade do mercado de petróleo, não somente por ser um bem de grande destaque, mas também por impactar o mercado mundial. Posto isso, Mensi, Hammoudeh & Yoon (2014) evidenciam o impacto no retorno e volatilidade a partir de notícias da OPEC e mudanças de regime na série para evidenciar que o processo possui memória longa. Nesse assunto, Tabak & Cajueiro (2006) questionam se o mercado de petróleo torna-se fracamente eficiente com o tempo através de testes de longa dependência.

Na aplicação nos setores bancário e energético, Hassler, Rodrigues & Rubia (2014) analisam pontos de mudança na indústria bancária, e Gil-Alana, Yaya & Adepoju (2014) estudam o preço das ações dos bancos na Nigéria. E, por último, Charfeddine (2014) averigua se o mercado futuro de energia apresenta uma série de memória longa real ou espúria.

Essa temática sobre mudanças de regime encontra coro em muitas outras áreas. Em hidrologia, recentemente Yusof, Kane & Yusop (2013) investigaram dados diários de chuvas na Malásia para detecção de memória longa, e outros assuntos que tratam de séries de rios, enchentes e lagos foram abordados por Mudelsee (2007), Wang et al. (2007) e Yang & Bowling (2014), respectivamente.

Nesse contexto, vale citar o artigo de Rivera-Castro, Miranda, Cajueiro & Andrade (2012) que, ao contextualizar o mercado financeiro como um sistema complexo, usa a análise assimétrica de flutuação, eliminando a tendência para detectar pontos de mudança na série.

2.7 Aplicações sobre Quebra Estrutural *versus* Memória Longa

É evidente a escalada de artigos abordando o tema quebras estruturais e memória longa, desde aplicações em taxas de desemprego, dinâmica de mercados, inflação e até mesmo em áreas climatológicas e hidrológicas. A respeito disso, é natural citar alguns artigos cuja aplicação com dados reais aborda a temática dicotômica da quebra estrutural e memória longa.

Gil-Alana & Moreno (2009) apresentam o problema desse confundimento en-

tre os dois casos na dinâmica macroeconômica nos EUA. Através das taxas de inflação, os autores relataram que as mudanças na memória longa estão relacionadas com as quebras estruturais. O artigo ainda busca ampliar a perspectiva no ponto econômico, além do ponto na estrutura dos modelos utilizados.

Já Caporale & Gil-Alana (2008) testam a existência de quebras nas taxas de desemprego dos EUA, Reino Unido e Japão, aplicando procedimentos que são uma extensão dos trabalhos de Bai & Perron (1998). Desta forma, os testes permitem diferentes ordens para o parâmetro d , bem como diferentes tendências determinísticas em cada subamostra, além de inovar com a incorporação para estruturas não-lineares.

Como o problema nunca tinha sido abordado na África do Sul, Das et al. (2012) propuseram um estudo da taxa de juros real, uma importante variável para políticas monetárias, *ex post*. Eles utilizaram testes de raiz unitária, intervalos de confiança e memória longa e quebra estrutural. A partir disso, observaram persistência na série condizente com modelos de memória longa. Assim utilizaram testes para quebras estruturais baseados em Bai & Perron (1998) e a análise bayesiana proposta por Barry & Hartigan (1993).

2.8 Múltiplas Quebras Estruturais

Neste caso, o problema de múltiplos pontos de mudança é mais intrigante e possui poucos trabalhos dedicados à temática. Contudo, trabalhos como o de Inclán & Tiao (1994) na área de finanças, abordam o estudo na mudança de variância utilizando um algoritmo iterativo (ICSS). Yao (1988), Miao & Zhao (1993) e mais recentemente Lavielle & Moulines (2000) usaram o estimador de máxima

verossimilhança para detectar todos os pontos de mudança. Gerard Marchant et al. (2008), com base em dados hídricos, propuseram quatro diferentes algoritmos iterativos para detectar múltiplos pontos de mudança. Vale ressaltar os trabalhos de Lavielle & Teyssière (2006) na detecção de múltiplas quebras em séries de tempo multivariada.

Capítulo 3

Memória Longa

3.1 Introdução

A modelagem de séries temporais com memória longa foi introduzida por Hurst (1951) na área de hidrologia, em um trabalho feito sobre o Rio Nilo. Nesse trabalho, ele analisou a série do nível mínimo do Nilo de 622 a 1281, e notou a presença de correlação entre observações, mesmo que muito distantes no tempo. Na área de climatologia, Hipel & Mcleod (1978) verificaram a presença de memória longa nas séries temporais da velocidade do vento e temperatura.

Segundo Baillie (1996), apenas em meados da década de 80 os modelos foram difundidos na área de econometria, para a previsão de taxas de juros e inflação. Contudo, a maior aplicabilidade dos modelos de memória longa nessa área foi na modelagem de ativos financeiros como taxas de câmbio, séries de retornos e volatilidade.

Assim, o primeiro modelo de memória longa introduzido na literatura foi

denominado ARFIMA², tendo sido desenvolvido por Granger & Joyeux (1980), Granger (1980, 1981) e Hosking (1981, 1984). Diversos autores como: Diebold e Rudebusch (1989), Ballie (1996), Palma (2007) entre outros apresentaram uma boa revisão bibliográfica do modelo em diversos campos de estudos.

Desse modo, as séries de memória longa permitem descrever a dependência persistente entre as observações à medida que a distância temporal entre elas aumenta; ou seja, mesmo com o aumento da defasagem entre as observações (h), elas continuam correlacionadas.

Em séries temporais estacionárias da classe ARMA³, a estrutura de correlação é caracterizada por decaimento exponencial, tal que $|\rho_h| \approx |\phi|^h$, em que $h \geq 0$. Assim, essas séries apresentam memória curta. Por outro lado, as que são consideradas de memória longa possuem uma estrutura de correlação que decai de forma hiperbólica, tal que $|\rho_h| \approx |h|^{2d-1}$, em que $d < 0.5$.

A memória longa pode ser definida com base na função de densidade espectral $f(\omega)$ de uma série temporal, para $|\omega| \neq \pi/2$. Segundo Bennett & Rice (1963), a função de densidade espectral é análoga à função de autocorrelação se $\sum_{h=0}^{\infty} |\rho_h| < +\infty$. Enquanto $f(\omega)$ está definida no domínio das frequências, a FAC está definida no domínio do tempo. Assim, caso $\sum_{h=0}^{\infty} |\rho_h| = \infty$, temos $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} f(\omega) = +\infty$, e o processo é dito ser de memória longa.

Há outros modelos de séries temporais que permitem caracterizar um processo de memória longa além dos processo ARFIMA, como os processos autossimilares. Neste trabalho, o foco se concentra apenas nos processos ARFIMA.

² *Auto-Regressive Fractionally Integrated Moving Average.*

³ *Auto-Regressive Moving-Average.*

3.2 Processos d Fracionários Integrados

Um processo integrado fracionário de ordem d , $\{X_t\}$, denotado por $X_t \sim I(d)$, é representado como

$$(1 - B)^d X_t = \epsilon_t, \quad (3.1)$$

em que $t = 1, 2, 3, \dots$, B é o operador de atraso $BX_t = X_{t-1}$, d é o parâmetro de diferenciação ($-0.5 < d < 0.5$) que captura o efeito de longo prazo e ϵ_t é um choque aleatório.

O termo $(1 - B)^d$ representa uma série polinomial dos operadores B de ordem infinita, cujos coeficientes decrescem monotonicamente e lentamente para zero. De fato, pela expansão de Taylor, temos

$$(1 - B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-B)^k = 1 - dB + \frac{d(1-d)}{2!} B^2 - \frac{d(1-d)(2-d)}{3!} B^3 + \dots \quad (3.2)$$

E essa expansão ainda pode ser expressa pela função hipergeométrica ($F(a, b, c, j)$):

$$(1 - B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k \Gamma(k-d)}{\Gamma(-d) \Gamma(k+1)} = F(-d, 1, 1, B). \quad (3.3)$$

Observação 1 Com $d > 0$, a função hipergeométrica $F(a, b, c, j)$ é a representada por

$$F(a, b, c, j) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k \Gamma(a+k)}{\Gamma(c+k)\Gamma(k+1)}. \quad (3.4)$$

Quando d assume um valor inteiro, X_t será uma função de finitas observações passadas. No caso particular $d = 0$, $X_t = \epsilon_t$ e a série temporal se resume ao processo $I(0)$. E no caso $d = 1$, X_t é um processo não estacionário de raiz unitária e, desta maneira, o efeito dos choques aleatórios é permanente.

Contudo, permitindo que d assuma valores reais, a especificação da série se torna mais rica e flexível. De acordo com o valor do parâmetro d , pode-se definir diversas intensidades de dependência intertemporal.

O modelo ARFIMA(0, d , 0) é definido pela equação (3.1) e, em especial, ϵ_t é um choque aleatório com média zero e variância σ_ϵ^2 . Para valores do parâmetro $d > -0.5$, Hosking (1981) demonstrou que o processo é invertível e possui uma representação autorregressiva infinita denotada como

$$(1 - B)^d X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k X_{t-k} = \xi_t, \quad (3.5)$$

em que $\alpha_k = \frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-d)}$; quando $k \rightarrow \infty$, $\alpha_k \approx \frac{k^{-d-1}}{\Gamma(-d)}$.

No caso em que $d < 0.5$, Hosking (1981) mostrou que X_t possui uma representação média móvel infinita e estacionária expressa por

$$X_t = (1 - B)^{-d} \xi_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \xi_{t-k}, \quad (3.6)$$

com coeficiente $\psi_k = \frac{\Gamma(d+k)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1)}$; quando $k \rightarrow \infty$, $\psi_k \approx \frac{k^{d-1}}{\Gamma(d)}$.

3.2.1 Função Densidade Espectral

Seja um processo descrito no modelo (3.1), com ϵ_t um ruído branco. Se ϵ_t possui densidade espectral $f_\epsilon(\omega) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi}$, então como o modelo representa um filtro linear e, segundo Morettin & Tolo (2004), a seguinte relação é verdadeira

$$f_x(\omega) = |C(\omega)|^2 f_\epsilon(\omega), \quad (3.7)$$

com $C(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{-i\omega j}$.

Como o processo da equação (3.1) é um ruído branco fracionalmente integrado, temos $C(\omega) = |1 - e^{-i\omega}|^{-d}$. E vários autores expressam a equação da densidade espectral utilizando $|1 - e^{-i\omega}| = 2 \sin(\frac{\omega}{2})$, no intervalo $-\pi < \omega < \pi$.

Sob a condição do parâmetro $d \in (-0.5, 0.5)$, o processo é considerado estacionário com função densidade espectral do processo ruído branco fracionário dada por (Morettin & Tolo (2004)):

$$f_x(\omega) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi} \left[2 \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \right]^{-2d}, \quad -\pi < \omega \leq \pi. \quad (3.8)$$

Quando $\omega \rightarrow 0^+$, $\sin(\omega) \approx \omega$ e $f_x \approx \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi} |\omega|^{-2d}$, que é similar ao valor de $f(\omega) \approx \omega^{-2}$ para os processos integrados $I(1)$. Assim, o processo ruído branco fracionário é consistente com a forma típica de muitas séries econômicas.

Com a definição da função de densidade espectral, temos que um processo de dependência de longo alcance pode ser definido em termos do domínio da frequência como

$$f(\omega) \approx \infty, \quad \omega \rightarrow 0^+, \quad (3.9)$$

ou seja, a densidade espectral tende para o infinito para frequências próximas a zero.

3.2.2 Função de Autocorrelação e Autocovariância

As expressões da função de autocorrelação e autocovariância do modelo ARFIMA(0, d , 0), bem como a variância do processo e a função de autocorrelação parcial, no caso em que $d \in (-0.5, 0.5)$ são encontradas em Hosking (1981). A função de

autocovariância é

$$\gamma(k) = \frac{\sigma^2 \Gamma(1-2d) \Gamma(k+d)}{\Gamma(d) \Gamma(1-d) \Gamma(k+1-d)}, \quad k \geq 1, \quad (3.10)$$

enquanto a variância é denotada por

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2 \Gamma(1-2d) \Gamma(k+d)}{[\Gamma(1-d)]^2}, \quad k \geq 1. \quad (3.11)$$

A função de autocorrelação do processo segue a forma

$$\rho(k) = \frac{\Gamma(1-d) \Gamma(k+d)}{\Gamma(d) \Gamma(k-d+1)}, \quad k \geq 1. \quad (3.12)$$

Utilizando a aproximação de Stirling, para $k \rightarrow \infty$, temos $\frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)} \approx k^{a-b}$, o que resulta em, $\rho(k) \approx \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} k^{2d-1}$. Assim observa-se que os coeficientes da média móvel são $\psi_k \approx k^{d-1}$, os coeficientes autorregressivos são $\alpha_k \approx k^{-d-1}$, e os coeficientes da FAC são $\rho_k \approx k^{2d-1}$. Todos apresentam decaimento hiperbólico quando $k \rightarrow \infty$.

Abaixo, resume-se as principais propriedades do processo ARFIMA(0, d , 0).

Propriedade 1 (*Palma 2007*) Para $-0.5 < d < 0.5$, o processo X_t é estacionário e invertível e os coeficientes autorregressivos e de média móvel decaem hiperbolicamente.

Propriedade 2 (*Palma 2007*) Para $0 < d < 0.5$, os valores de ρ_k são positivos e convergem hiperbolicamente para zero de forma lenta. As somas $\sum |\rho_k|$ e $\sum |\psi_k|$ são infinitas, e $\sum |\alpha_k| < \infty$. A densidade espectral tende para infinito em

frequências ω próximas de zero; assim o processo é estacionário com memória longa.

Propriedade 3 (Palma 2007) Para $-0.5 < d < 0$, os valores de ρ_k são negativos e convergem hiperbolicamente para zero. E a soma dos coeficientes autorregressivos é infinita. A FAC é absolutamente convergente, isto é, $\sum |\rho_k| < \infty$. O processo é estacionário com memória intermediária.

A Figura 3.1 e a Tabela 3.1 mostram as funções de autocorrelação dos modelos ARFIMA(0, 0.4, 0) e modelo ARIMA(0.2, 0, 0.8). Nota-se claramente que no primeiro modelo a função decai lentamente, ao passo que no segundo modelo a função de autocorrelação decai rapidamente para zero.

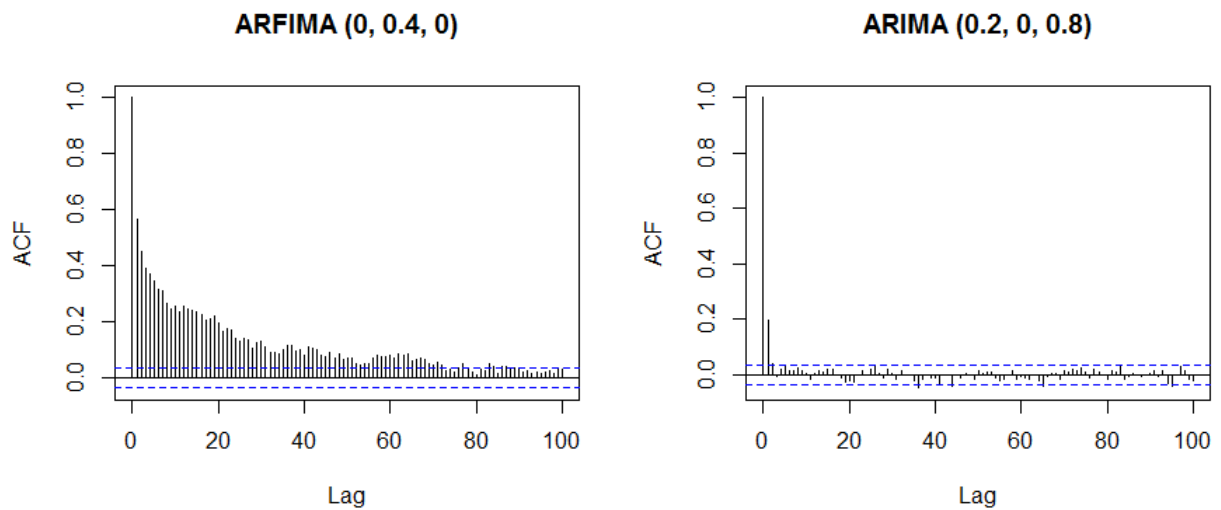


Figura 3.1: Comparativo da função de autocorrelação.

Tabela 3.1: Comparativo entre os *lags* dos modelos ARFIMA E ARIMA

<i>Lag</i> (k)	ARFIMA(0, 0.4, 0)	ARIMA(0.2, 0, 0.8)
1	1	1
2	0.567	0.198
5	0.372	0.021
10	0.244	0.016
15	0.244	0.007
25	0.143	-0.001
50	0.064	-0.018
75	0.029	0.025
100	0.003	-0.018

3.3 Modelo ARFIMA(p, d, q)

Uma extensão natural do modelo do ruído branco fracionalmente integrado apresentado em (3.1) é o modelo ARIMA d fracionário ou normalmente conhecido como ARFIMA(p, d, q). Essa generalização permite modelar tanto os componentes relacionados com memória de curto prazo quanto com a de longo prazo.

Desta forma, define-se um modelo ARFIMA(p, d, q) estacionário e invertível com $d \in (-0.5, .5)$ como

$$\phi(B)(1 - B)^d X_t = \theta(B)\epsilon_t \quad t = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.13)$$

em que d é o parâmetro de diferenciação fracionário, $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ é o polinômio autorregressivo de ordem p , $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ é o polinômio de médias móveis de ordem q e ϵ_t é um ruído branco.

Segundo Hosking (1981), pode-se sumarizar algumas propriedades importantes para o modelo ARFIMA(p, d, q) a partir do teorema a seguir.

Teorema 1 *Seja X_t um processo ARFIMA (p, d, q). Então*

1. X_t é estacionário se $d < 0.5$, e se todas as raízes de $\phi(B)$ estiverem fora do círculo unitário.
2. X_t é invertível se $d > -0.5$, e se todas as raízes de $\theta(B)$ estiverem fora do círculo unitário.
3. Se $-0.5 < d < 0.5$, $\gamma(k) = E(X_t X_{t-h}) \approx h^{2d-1}$, quando $h \rightarrow \infty$.

No modelo ARFIMA(p, d, q), a FAC decai hiperbolicamente à medida que o *lag* h aumenta. Desta forma, d descreve a estrutura de correlação dos *lags* mais distantes entre si, enquanto ϕ_j e θ_k são parâmetros que se referem à estrutura de correlação dos *lags* mais próximos.

De fato, o comportamento de longo prazo do processo ARFIMA(p, d, q) é esperado ser semelhante ao processo ARFIMA($0, d, 0$) com o mesmo valor do parâmetro d , uma vez que, para valores bem distantes, o efeito dos parâmetros autoregressivos e médias móveis serão diminutos. Segue na Figura 3.2 uma exemplificação desse comportamento.

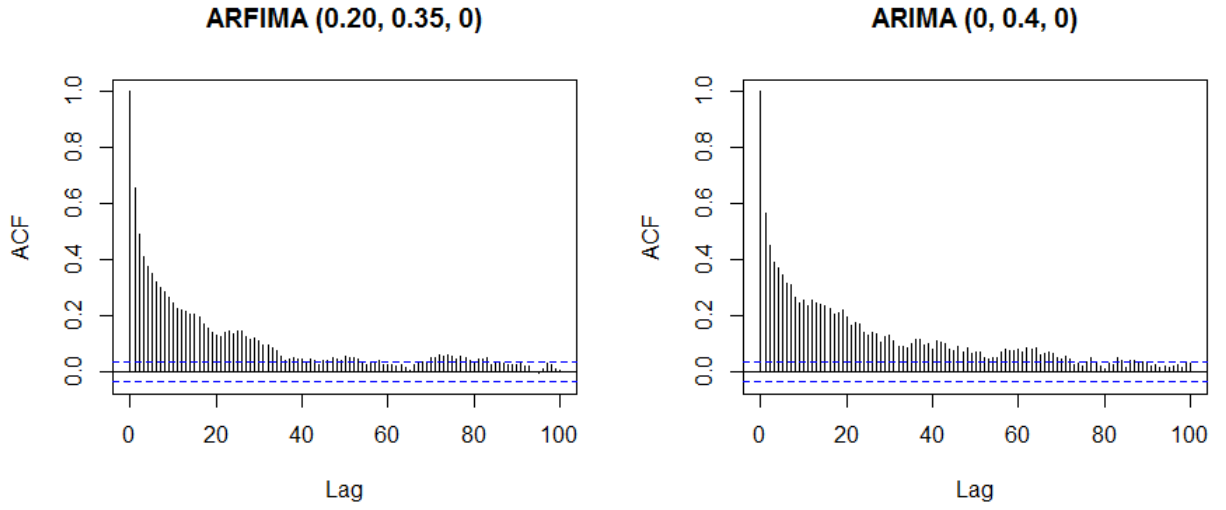


Figura 3.2: Comparativo da função autocorrelação.

3.3.1 Função Densidade Espectral

Generalizando a função densidade espectral do modelo ARFIMA(p, d, q), para processos estacionários ($d < 0.5$), temos que a equação pode ser escrita utilizando a equação (3.7) e, portanto, temos

$$\begin{aligned}
 f_x(\omega) &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi} |\psi(e^{-i\omega j})^{-d}|^2 \\
 &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi} |1 - e^{-i\omega}|^{-2d} \frac{|\Theta(e^{-i\omega j})|^2}{|\Phi(e^{-i\omega j})|^2} \\
 &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi} \left[2 \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^{-2d} \frac{|\Theta(e^{-i\omega j})|^2}{|\Phi(e^{-i\omega j})|^2}, \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

para o intervalo $-\pi < \omega < \pi$. À medida que ω se aproxima de zero, a expressão (3.14) pode ser escrita como

$$f(\omega) \approx \omega^{-2d}. \tag{3.15}$$

Portanto, a função de densidade espectral do processo é não limitada nas baixas frequências e, desta maneira, possui memória longa. Para valores $d < 0$, o processo se anula na frequência zero, e para $d > 0.5$ o processo possui variância infinita (não estacionariedade).

Na Figura 3.3, encontram-se exemplos da função densidade espectral dos modelos ARFIMA e ARIMA, e nota-se a disparidade entre as duas funções espectros.

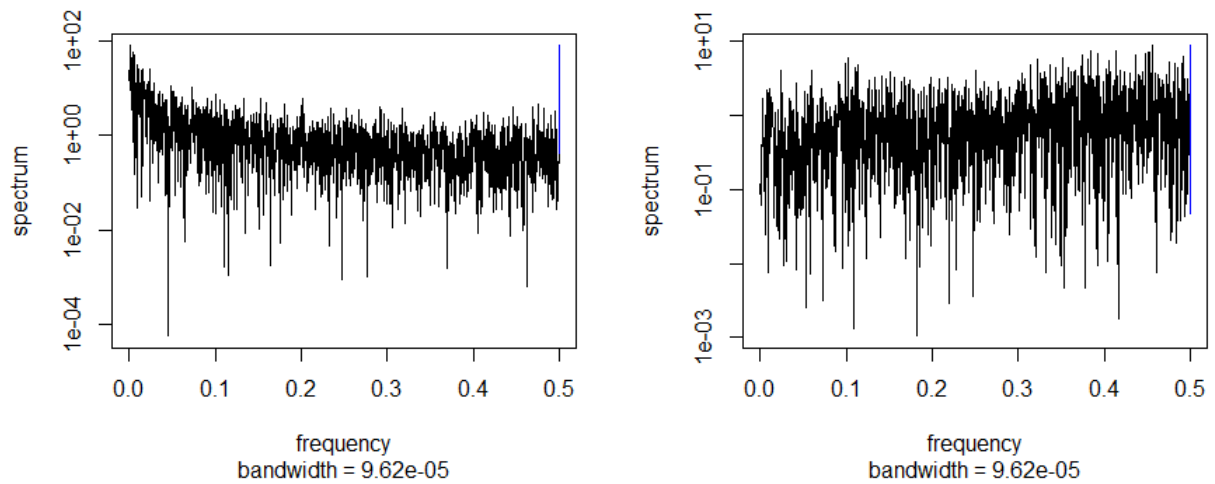


Figura 3.3: Comparativo da função de densidade espectral - ARFIMA(0, 0.4, 0) e ARIMA(0.1, 0, 0.3).

3.3.2 Função Autocorrelação e Autocovariância

De acordo com Hosking (1981), para $d < 0.5$, existe uma constante C de modo que a função de autocorrelação é decrescente a uma taxa hiperbólica e não são absolutamente somáveis. Assim, a função de autocorrelação possui a relação assintótica

$$\rho(k) \approx Ck^{2d-1}, \quad (3.16)$$

quando $k \rightarrow \infty$.

Já a função de autocovariância do processo é descrita por Sowell (1986, 1992)

como

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=1}^q \zeta_j \sum_{n=0}^q \sum_{m=0}^q \theta_n \theta_m C(d, d, p+n-m-k, \lambda_j), \quad (3.17)$$

em que λ_j é a j -ésima raiz do polinômio $\Phi(B)$, $\zeta_j = \lambda_j \prod_{i=1,p}(1-\rho_i\rho_j) \prod_{i=1,p}(\rho_i-\rho_j)^{-1}$, $C(w, v, j, \rho) = G(w, v, k)[\rho^{2p}F(v+k, 1, 1-w+k, \rho) + F(w-k, 1, 1-v-k, \rho) - 1]$, $G(w, v, k) = \frac{\Gamma(1-w-v)\Gamma(v+k)}{\Gamma(1-w+k)\Gamma(1-v)\Gamma(v)}$ e $F(a, b, c, j)$ é a função hipergeométrica na equação (3.4).

Nessa situação, a série temporal X_t exibe memória longa ou dependência de longo alcance quando $k \rightarrow \infty$, pois a função de autocovariância se comporta como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho(k)}{c_\rho} k^{2d-1} = 1, \quad (3.18)$$

em que c_ρ é uma constante e $d \in (0, 0.5)$ é o parâmetro de memória longa. Logo, as observações distantes no tempo estão correlacionadas, e o processo decai lentamente para zero a uma taxa hiperbólica.

3.4 Estimação do parâmetro de diferenciação d

A estimação do parâmetro de diferenciação d é dividida em três categorias: paramétrica (Fox & Taqqu, 1986), semiparamétrica (Oberlmann, 2002) e não paramétrica (Oberlmann et al., 2007). Nesta seção, serão exemplificados os casos paramétricos e semiparamétricos encontrados de forma mais geral na literatura.

No caso paramétrico, os estimadores referem-se aos coeficientes autorregressivos, os de médias móveis e o de diferenciação. Os mais conhecidos nessa classe

são os propostos por Fox & Taqqu (1986) e Sowell (1992), que utilizam a função de máxima verossimilhança. No entanto, o estimador proposto por Fox & Taqqu (1986) dispõe da função de máxima verossimilhança aproximada, enquanto o estimador de Sowell (1992) proporciona a função exata.

Já na classe semiparamétrica, o parâmetro d é estimado primeiramente em relação aos outros parâmetros. Isto posto, a metodologia proposta por esses estimadores considera uma abordagem sequencial para a estimação, em que primeiro se estima o parâmetro de diferenciação e, logo em seguida, estimam-se os demais parâmetros. Proposto por Geweke & Porter-Hudak (1983), o estimador *GPH* é um dos mais populares e utilizados na literatura dentro dessa categoria.

3.4.1 Métodos Paramétricos

O estimador de máxima verossimilhança proposto por Fox & Taqqu (1986) se baseia na aproximação da função verossimilhança sugerida por Whittle (1953). Sobre certas condições de regularidade, o estimador é consistente e possui distribuição assintótica normal, sendo, também, um estimador não viciado e de variância mínima.

O estimador engloba a função

$$Q(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I(\omega)}{f_x(\omega, \tau)} d\omega,$$

em que $f_x(\omega, \tau)$ é a função densidade espectral do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, τ é o vetor de parâmetros $\tau = (\sigma_x^2, d, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$ e I_n é a função periodograma.

Whittle (1962) propôs uma aproximação da função de verossimilhança no

domínio de frequência, de modo que o estimador de τ é obtido minimizando-se a função

$$L(\tau; x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\ln f_x(\omega, \tau) + \frac{I_n(\omega)}{f_x(\omega, \tau)} \right], \quad (3.19)$$

em que $f_x(\omega, \tau)$ é a função densidade espectral do processo e $I_n(\omega)$ é a função periodograma definida como

$$I(\omega_j) = (2\pi n)^{-1} \left| \sum_{t=1}^n X_t \exp(-i\omega_j t) \right|^2,$$

em que $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$.

Fox & Taqqu (1986), a fim de facilitar o cálculo, recomendam a substituição da integral na equação (3.19) por uma soma finita nas frequências de Fourier dada por

$$L(\tau; x) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \left[\ln f_x(\omega_k, \tau) + \frac{I_n(\omega_k)}{f_x(\omega_k, \tau)} \right], \quad (3.20)$$

em que $\omega_k = \frac{2\pi k}{n}$.

3.4.2 Métodos Semiparamétricos

O método de estimação do parâmetro de diferenciação d proposto por Geweke & Porter-Hudak (1983) baseia-se no método de regressão linear utilizando a função periodograma. Essa metodologia exhibe a relação entre as funções densidade espectral do processo ARFIMA(p, d, q) e o processo ARMA(p, q).

Definição 1 (Função Periodograma) *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estacionário e $\{X_t\}_{t=1}^n$ uma série temporal obtida do processo anterior. A função periodo-*

grama definida atráves da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ é dada por

$$I_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\hat{\gamma}_x(0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\gamma}_x(k) \cos(\omega k) \right], \quad \omega \in [-\pi, \pi], \quad (3.21)$$

em que $\hat{\gamma}_x(\cdot)$ é a funo de autocovariância amostral do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Embora a funo periodograma não seja viesada, ela é inconsistente para a funo densidade espectral $f_x(\cdot)$. Desta forma, o logaritmo da funo densidade espectral do processo X_t , descrita na equao (3.8), pode ser escrita na forma

$$\ln f_X(\omega) = \ln f_\epsilon(\omega) - d \ln \left[2 \sin \left(\frac{\omega}{2} \right) \right]^2.$$

Assim, adicionando e subtraindo $\ln f_\epsilon(0)$ e $\ln I(\omega)$, em que $I(\cdot)$ é a funo periodograma definida na equao (3.21), e utilizando algumas propriedades da funo logarítmica, temos que

$$\ln I(\omega) = \ln f_\epsilon(0) - d \ln \left[2 \sin \left(\frac{\omega}{2} \right) \right]^2 + \ln \left[\frac{f_\epsilon(\omega)}{f_\epsilon(0)} \right] + \ln \left[\frac{I(\omega)}{f_X(\omega)} \right]. \quad (3.22)$$

Em seguida, substituindo-se ω pelas frequências de Fourier $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$, com $j = 1, \dots, h(n) = n^\alpha$ na equao (3.22), obtemos:

$$\ln I(\omega_j) = \ln f_\epsilon(0) - d \ln \left[2 \sin \left(\frac{\omega_j}{2} \right) \right]^2 + \ln \left[\frac{f_\epsilon(\omega_j)}{f_\epsilon(0)} \right] + \ln \left[\frac{I(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right]. \quad (3.23)$$

Supondo o limite máximo de j igual a $h(n)$, escolhido de tal forma que, $\frac{h(n)}{n} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$ para $\omega_j \leq \omega_{h(n)}$, o termo $\frac{f_\epsilon(\omega_j)}{f_\epsilon(0)}$ é ínfimo $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_\epsilon(\omega_j)}{f_\epsilon(0)} \approx 0 \right)$ se comparado com o restante dos termos na equao (3.23). Diante disso, obtemos

uma equação aproximada:

$$\ln I(\omega_j) \cong \ln f_\epsilon(0) - d \ln \left[2 \sin \left(\frac{\omega}{2} \right) \right]^2 + \ln \left[\frac{I(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right]. \quad (3.24)$$

A expressão (3.24) pode ser vista como uma regressão linear simples:

$$y_j = a + bx_j + \epsilon_j, \quad \forall j = 1, 2, \dots, h(n),$$

em que $y_j = \ln I(\omega_j)$, $a = \ln f_\epsilon(0)$, $b = -d$, $x_j = \ln \left[2 \sin \left(\frac{\omega}{2} \right) \right]^2$ e $\epsilon_j = \ln \left[\frac{I(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right]$.

À vista disso, o estimador *GPH* proposto por Geweke & Porter-Hudak (1983) emprega o uso o método de mínimos quadrados para estimação do parâmetro d por

$$\hat{d}_{GPH} = - \frac{\sum_{j=1}^{h(n)} (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sum_{j=1}^{h(n)} (x_j - \bar{x})^2}, \quad (3.25)$$

em que $y_j = \ln I(v_j)$, $x_j = \ln \left[2 \sin \left(\frac{v}{2} \right) \right]^2$ e $\bar{x} = \frac{1}{h(n)} \sum_{j=1}^h(n) x_j$. A média e a variância do estimador *GPH* são dadas por

$$E(\hat{d}_{GPH}) = d$$

$$Var(\hat{d}_{GPH}) = \frac{\pi^2}{6 \sum_{j=1}^{h(n)} (x_j - \bar{x})^2}.$$

O Teorema (2) (Geweke & Porter-Hudak, 1983) trata da distribuição assintótica do estimador \hat{d}_{GPH} .

Teorema 2 *Seja $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ um processo ARFIMA(p, d, q) definido como na equação do modelo (3.13) com o parâmetro $d \in (-0.5, 0.5)$ e $I(\cdot)$ a função periodograma do processo definido na equação (3.21). Seja \hat{d}_{GPH} dado pela expressão*

da equação (3.25). Suponha que $h(n) = n^\beta$ para algum $\beta \in (0, 1)$ fixo. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{d}_{GPH} = d$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\ln(n)]^2}{h(n)} = 0$, então

$$\frac{\hat{d}_{GPH} - d}{\sqrt{\text{Var}(\hat{d}_{GPH})}} \longrightarrow N(0, 1), \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty.$$

3.5 Definição e Estimação do parâmetro de Hurst

3.5.1 Introdução

O expoente de Hurst (H) é um teste clássico para detectar memória longa em séries temporais, e foi introduzido pelo hidrologista Hurst (1951) a partir do estudo da série do Rio Nilo. Durante os anos 70, despertou o interesse na economia e Mandelbrot (1969 e 1971) argumentou a superioridade dessa metodologia em relação a autocorrelação, análise de variância e espectral.

Existem diversos métodos na literatura para a estimação do expoente de Hurst de uma série temporal. Destes, resalta-se dos trabalhos de Hurst (1951) a estatística R/S ; de Lo (1991), uma modificação da estatística R/S clássica; de Kwiatkowski et al. (1992), a estatística KPSS; o estimador de Whittle, entre vários outros. Desta forma, o capítulo descreverá alguns desses estimadores utilizados para detectar séries que possuem aspecto da FAC persistente.

3.5.2 Expoente de Hurst

O expoente de Hurst é interpretado como uma medida para o efeito de me-

mória longa em processos estocásticos, desta forma sendo útil para segmentação e identificação de séries temporais. Ele mede a escala de um processo autosimilar, de outra forma, significa como a variabilidade muda a partir que a série é agregada.

Desta forma, o expoente de Hurst é definido (Hurst (1951)) em termos da amplitude reescalada em função da janela τ de uma série temporal como

$$E \left[\frac{R(t, \tau)}{S(t, \tau)} \right] = c\tau^H, \quad \text{com } \tau \rightarrow \infty, \quad (3.26)$$

em que a esperança é calculada para τ fixo e t variável.

Como o expoente de Hurst é uma medida de autocorrelação, de persistência e memória longa, algumas propriedades podem ser citadas abaixo.

Teorema 3 *Seja H o coeficiente de Hurst, então*

1. *Valores de $0 < H < 0.5$ indicam uma série temporal com autocorrelação negativa.*
2. *Valores de $0.5 < H < 1$ indicam uma série temporal com autocorrelação positiva.*
3. *Valor de $H = 0.5$ indica um passeio aleatório "verdadeiro", em que é igualmente provável uma autocorrelação positiva quanto negativa.*

3.5.3 Estatística R/S

A estatística R/S é uma das técnicas mais antigas e utilizadas em trabalhos na estimação do parâmetro H e foi proposto por Mandelbrot & Wallis (1969),

com base nos trabalhos de Hurst (1951). O método é definido como a razão das somas parciais dos desvios da série em relação à média parcial, reescalada pelo seu desvio padrão.

Desta maneira, definindo a sequência de desvios acumulados ($D_{t,n}$) para os valores possíveis de j , define-se a amplitude ajustada como

$$R(t, n) = \max_{1 \leq j \leq n} \{D_{t, n}\} - \min_{1 \leq j \leq n} \{D_{t, n}\}$$

e o respectivo desvio padrão da série por

$$S(t, n) = \sqrt{\frac{\sum_{i=t+1}^{t+n} (z_i - \bar{z}_{t,n})^2}{n-1}},$$

em que z_i é a série de incrementos e $\bar{z}_{t,n}$ é a média parcial das n observações após o tempo t . Portanto, a estatística R/S é definida pela razão

$$R/S = \frac{R(t, n)}{S(t, n)} = \frac{\max_{1 \leq j \leq n} \{D_{t,n}\} - \min_{1 \leq j \leq n} \{D_{t,n}\}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=t+1}^{t+n} (z_i - \bar{z}_{t,n})^2}{n-1}}}.$$

Segundo Leland et al. (1994), para os processos autossimilares a estatística R/S é dada por

$$R/S(t, n) = \left(\frac{n}{2}\right)^H,$$

em que n representa o tamanho da série.

3.5.4 Estatística R/S Modificada

A modificação da estatística R/S foi proposta por Lo (1991), de modo que o

desvio padrão descrito no método clássico seja substituído pela raiz quadrada do estimador da variância consistente sob autocorrelação e heterocedasticidade de Newey & West (1987)

$$\hat{S}_q(t, \tau) = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^{\tau} (z_j - \bar{z}_\tau)^2 + 2 \sum_{j=1}^q \omega_j(q) \hat{\gamma}_j}$$

em que $\omega_j(q)$ são os pesos de Bartlett

$$\omega_j(q) = 1 - \frac{j}{q+1},$$

e $\hat{\gamma}_j$, as covariâncias amostrais, são dadas por

$$\hat{\gamma}_j = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau-j} (z_i - \bar{z}_\tau)(z_{i+j} - \bar{z}_\tau), \quad 0 \leq j < \tau.$$

Como $S = \hat{S}_0(t, n)$, temos que a estatística R/S clássica é um caso particular da estatística R/S modificada.

3.5.5 Estimador de Whittle

O estimador de Whittle (1953) supõe que a estrutura e os parâmetros do processo X_t sejam conhecidos, a não ser pela variância e o expoente de Hurst (ou parâmetro de diferenciação). O teste tem por base o periodograma e a transformada discreta de Fourier.

Defina a transformada discreta de Fourier e o periodograma de X_t , respecti-

vamente como

$$w_x(\omega_j) = (2\pi n)^{-1/2} \sum_{t=1}^n X_t e^{it\omega_j}, \quad \omega_j = \frac{2\pi j}{n}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$I_x(\omega_j) = |w_x(\omega_j)|^2.$$

O estimador local Whittle (semiparamétrico Gaussiano) foi desenvolvido por Künsch (1987) e Robinson (1995). Ele começa com a definição da função objetiva Gaussiana, definida em termos dos parâmetros d e G por

$$Q_m(G, d) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left[\log(G\omega_j^{-2d}) + \frac{\omega_j^{2d}}{G} I_x(\omega_j) \right], \quad (3.27)$$

em que m é a largura da faixa de frequência menor que n . O procedimento local Whittle estima os parâmetros G e d minimizando $Q_m(G, d)$, de modo que

$$(\hat{G}, \hat{d}) = \underset{G \in (0, \infty), d \in [\delta_1, \delta_2]}{\operatorname{argmin}} Q_m(G, d), \quad (3.28)$$

em que δ_1 e δ_2 são números tal que $-0.5 < \delta_1 < \delta_2 < \infty$. Assim, concentrando a equação (3.28) com respeito a G , temos

$$\hat{d}^{(a)} = \underset{d \in [\delta_1, \delta_2]}{\operatorname{argmin}} R^{(a)}(d),$$

em que $R^{(a)}(d) = \log \hat{G}^{(a)} - 2d \frac{b}{m} \sum_{j=1}^{m/b} \log \tilde{\omega}_j$ e $G^{(a)}(d) = \frac{b}{m} \sum_{j=1}^{m/b} \tilde{\omega}_j^{2d} I_x^{(a)}(\tilde{\omega}_j)$.

Observação 2 Robinson (1995) mostra que sob algumas condições, $\sqrt{m}(\hat{d} - d_0) \xrightarrow{D} N(0, 0.25)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Capítulo 4

Quebras Estruturais na Média e Variância

4.1 Introdução

Como já se discutiu nos capítulos anteriores, o lento decaimento da função de autocorrelação em uma série temporal pode ser resultado de quebras estruturais. De fato, esse é um assunto de interesse, sendo objeto de diversos estudos, por exemplo, em economia e finanças, conforme revisão bibliográfica da literatura apresentada no Capítulo 2.

A quebra estrutural é um tipo de não estacionariedade no processo gerador da série. Assim sendo, dentre a diversidade de maneiras de se introduzir quebras estruturais, neste capítulo no limitaremos às formas mais simples, que são as quebras na média e na variância do processo (e.g. Choi, Yu & Zivot, 2010, Bai & Perron, 2003).

4.2 Modelos de Quebras Estruturais

4.2.1 Modelo com Quebra Estrutural na Média

Seja um processo com quebra estrutural na média dado por

$$X_t = \mu_1 + \delta(t) \cdot \mu_2 + \epsilon_t, \quad \forall t = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1)$$

em que μ_i são as médias do processo, $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, τ_0 é a observação em que ocorreu a quebra estrutural, e $\delta(t)$ é definido como

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau_0, \\ 1, & t \geq \tau_0. \end{cases}$$

Para o modelo definido, aplicando a esperança na equação (4.1), temos o valor esperado para X_t como

$$E(X_t) = E(\mu_1 + \delta(t) \cdot \mu_2 + \epsilon_t),$$

e, assim,

$$E(X_t) = \begin{cases} \mu_1, & t < \tau_0, \\ \mu_1 + \mu_2, & t \geq \tau_0. \end{cases}$$

Já a variância é dada de forma geral, por

$$Var(X_t) = Var(\mu_1 + \delta(t) \cdot \mu_2 + \epsilon_t).$$

$$Var(X_t) = Var(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2.$$

Exemplo 3 *Seja um processo dado pela equação (4.1), em que os parâmetros da média são $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = -3$, com $\sigma_\epsilon^2 = 1$, $n = 1000$ e quebra estrutural localizada na observação $\tau_0 = 500$. As Figuras 4.1 e 4.2 ilustram, respectivamente, a forma da série temporal com quebra estrutural na média e a sua função de autocorrelação.*

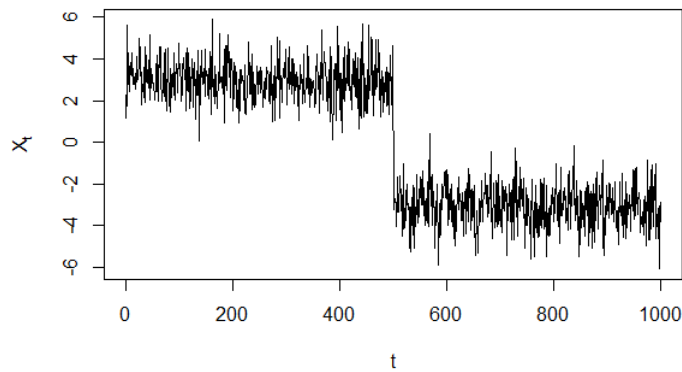


Figura 4.1: Série quebra estrutural na média.

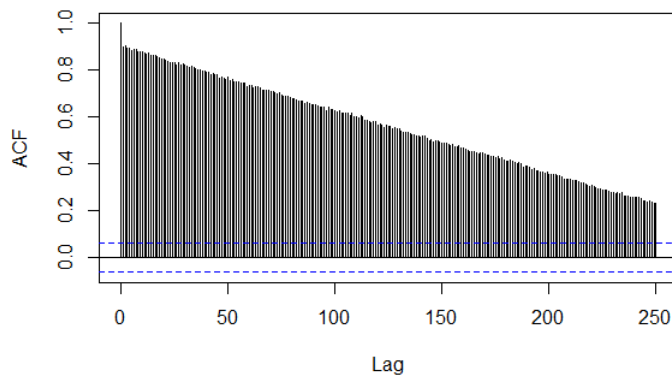


Figura 4.2: FAC da série quebra estrutural na média.

Exemplo 4 *Seja a série temporal do fluxo do Rio Nilo, de 1871 a 1970, contendo 100 observações analisadas por Hurst (1951). Estudos passados localizaram uma quebra na média no ano de 1898. Assim, ilustra-se nas Figuras 4.3 e 4.4, o aspecto da série temporal do fluxo do Nilo e a sua respectiva função de autocorrelação.*

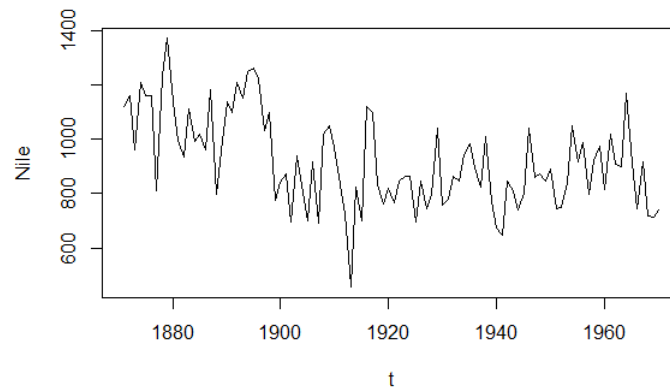


Figura 4.3: Série quebra estrutural na média 2.

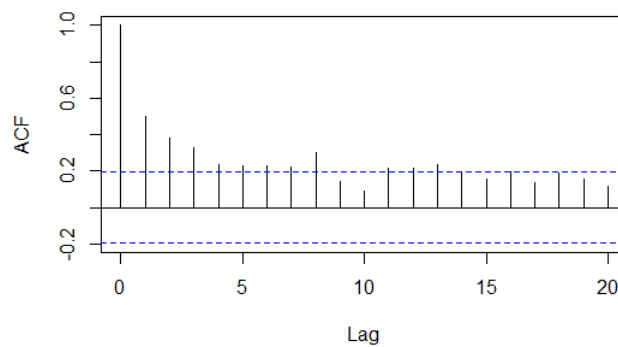


Figura 4.4: FAC da série quebra estrutural na média 2.

4.2.2 Modelo com Quebra Estrutural na Variância

Seja um processo com quebra estrutural na variância dado por

$$X_t = \mu + \epsilon_t^{(1)} + \delta(t) \cdot \epsilon_t^{(2)}, \quad \forall t = 1, 2, \dots, n, \quad (4.2)$$

em que μ é média do processo, $\epsilon_t^{(j)} \sim N(0, \sigma_j^2)$ são os ruídos gaussianos, τ_0 é a observação em que ocorreu a quebra estrutural, e $\delta(t)$ é definido como

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau_0, \\ 1, & t \geq \tau_0. \end{cases}$$

Para o modelo definido, aplicando a esperança na equação (4.2), temos o valor esperado para X_t como

$$E(X_t) = E(\mu + \epsilon_t^{(1)} + \delta(t)\epsilon_t^{(2)}),$$

e assim, $E(X_t) = \mu$.

Já a variância é dada de forma geral, por

$$Var(X_t) = Var(\mu + \epsilon_t^{(1)} + \delta(t) \cdot \epsilon_t^{(2)}).$$

Desta maneira,

$$Var(X_t) = \begin{cases} \sigma_1^2, & t < \tau_0, \\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2, & t \geq \tau_0. \end{cases}$$

Exemplo 5 *Seja um processo dado pela equação (4.2), em que o parâmetro da média é $\mu_1 = 3$, com variâncias $\sigma_1^2 = 5$ e $\sigma_2^2 = 15$, $n = 1000$ e quebra estrutural localizada na observação $\tau_0 = 500$. As Figuras 4.5 e 4.6 ilustram a forma da série temporal com quebra estrutural e a sua função de autocorrelação.*

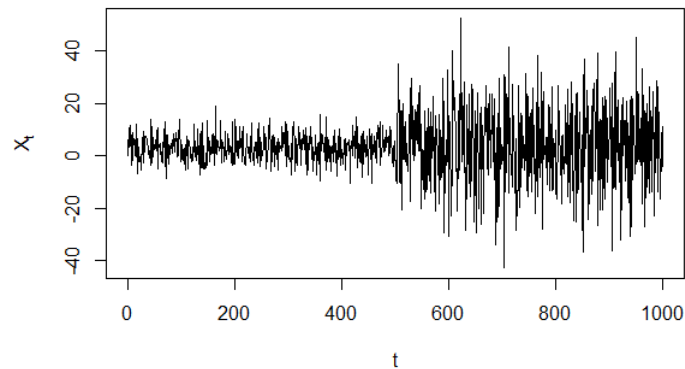


Figura 4.5: Série quebra estrutural na variância.

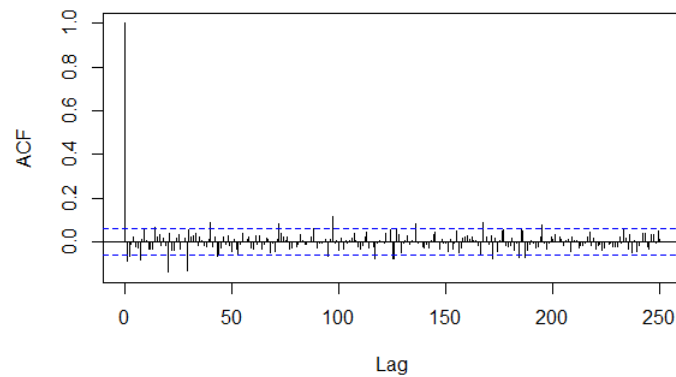


Figura 4.6: FAC da série quebra estrutural na variância.

Exemplo 6 Em Davis, Lee & Rodriguez-Yam (2006), os autores exemplificam o modelo lento decaimento AR(2) definido como

$$y_t = a_t y_{t-1} - 0.81 y_{t-2} + \epsilon_t, \quad 1 \leq t \leq 1024,$$

em que $a_t = 0.8[1 - 0.5\cos(\pi t/1024)]$, e ϵ_t é um ruído gaussiano. As Figuras 4.7 e 4.8 ilustram a forma da série temporal e a sua função de autocorrelação.

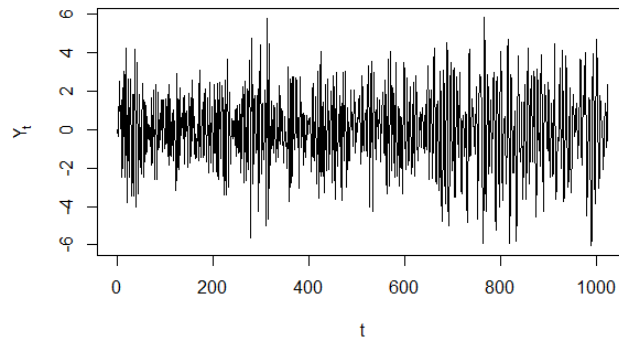


Figura 4.7: Série quebra estrutural na variância 2.

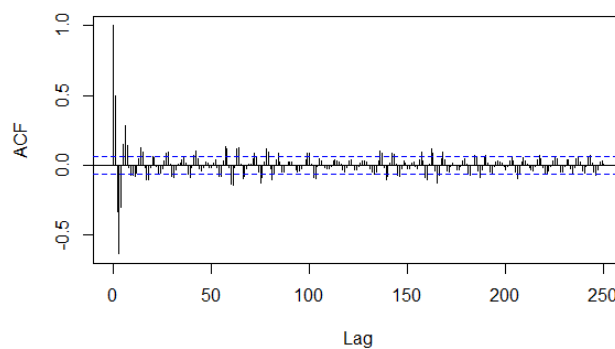


Figura 4.8: FAC da série quebra estrutural na variância 2.

4.2.3 Modelo com Quebra Estrutural na Média e Variância

Seja um processo com quebra estrutural tanto na média como na variância dado por

$$X_t = \mu_1 + \delta(t) \cdot \mu_2 + \epsilon_t^{(1)} + \gamma(t) \cdot \epsilon_t^{(2)}, \quad \forall t = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3)$$

em que μ_i são as médias do processo, $\epsilon_t^{(j)} \sim N(0, \sigma_j^2)$ são ruídos gaussianos, τ_0 é a observação em que ocorreu a quebra estrutural (mesma data para ambas as quebras, generalizando), e $\delta(t)$ e $\gamma(t)$ são definidos como

$$\delta(t) = \gamma(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau_0, \\ 1, & t \geq \tau_0. \end{cases}$$

Para o modelo definido, aplicando a esperança na equação (4.3) temos o valor esperado para X_t como

$$E(X_t) = E(\mu_1 + \delta(t)\mu_2 + \epsilon_t^{(1)} + \gamma(t)\epsilon_t^{(2)}),$$

e, assim,

$$E(X_t) = \begin{cases} \mu_1, & t < \tau_0, \\ \mu_1 + \mu_2, & t \geq \tau_0. \end{cases}$$

Já a variância, é dada de forma geral por

$$Var(X_t) = Var(\mu_1 + \delta(t) \cdot \mu_2 + \epsilon_t^{(1)} + \gamma(t) \cdot \epsilon_t^{(2)}).$$

Desta maneira,

$$\text{Var}(X_t) = \begin{cases} \sigma_1^2, & t < \tau_0, \\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2, & t \geq \tau_0. \end{cases}$$

Exemplo 7 *Seja um processo dado pela equação (4.2), em que os parâmetros da média são $\mu_1 = 2$ e $\mu_2 = 7$, com variâncias $\sigma_1^2 = 2$ e $\sigma_2^2 = 4$, $n = 1000$ e quebra estrutural localizada na observação $\tau_0 = 500$. As Figuras 4.9 e 4.10 ilustram a forma da série e a sua função de autocorrelação.*

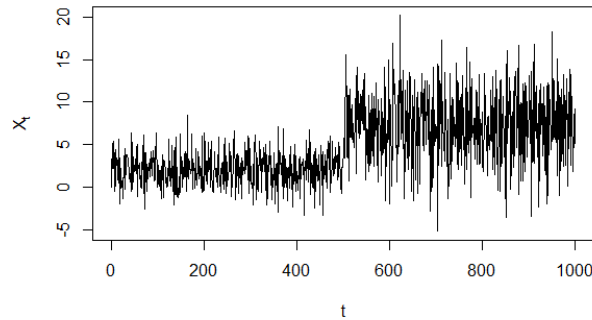


Figura 4.9: Série quebra estrutural na média e variância.

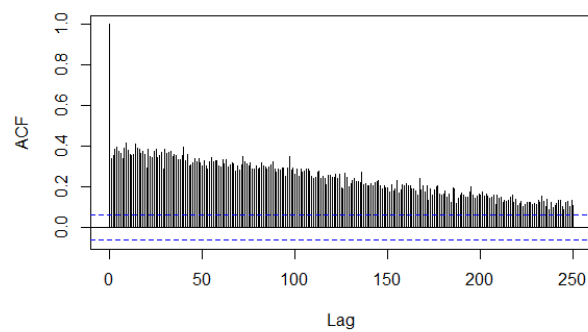


Figura 4.10: FAC da série quebra estrutural na média e variância.

4.2.4 Modelo com Múltiplas Quebras Estruturais

O modelo de múltiplas quebras estruturais ($m + 1$ regimes) é definido como

$$y_t = c_j + \epsilon_t, \quad t = \tau_{j-1} + 1, \tau_{j-1} + 2, \dots, \tau_j, \quad (4.4)$$

em que $j = 1, 2, \dots, m + 1$, y_t é a série observada e c_j é a média de y_t . As quebras estruturais ($\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$) são consideradas desconhecidas. O termo de erro (ϵ_t) pode ser correlacionado e heterocedástico.

Exemplo 8 *Seja um modelo AR seguímentado, descrito em Ombao et al. (2001), definido como*

$$y_t = \gamma_j + \phi_{j1}y_{t-1} + \dots + \phi_{j-p_j} + \sigma_j\epsilon_t, \quad \text{se } \tau_{j-1} \leq t < \tau_j,$$

em que $\tau_0 = 1 < \tau_1 < \dots < \tau_{m-1} < \tau_m = n + 1$, m é o número de segmentos, τ_j é o local da quebra estrutural, γ_j é o nível na j -ésima observação, p_j ordem dos coeficientes autorregressivos, $\phi_{j1}, \dots, \phi_{jp_j}$ são os coeficientes autorregressivos na j -ésima observação, σ_j escalar na j -ésima observação e ϵ_t é um ruído gaussiano.

Desta forma, considere a seguinte série temporal

$$y_t = \begin{cases} 0.9y_{t-1} + \epsilon, & \text{se } 1 \leq t < 513, \\ 1.69y_{t-1} - 0.81y_{t-2} + \epsilon, & \text{se } 513 \leq t < 769, \\ 1.32y_{t-1} - 0.81y_{t-2} + \epsilon, & \text{se } 769 \leq t < 1024, \end{cases}$$

em que ϵ_t é um ruído gaussiano. As Figuras 4.11 e 4.12 ilustram, a forma da série temporal com múltiplas quebras estruturais e a sua função de autocorrelação.

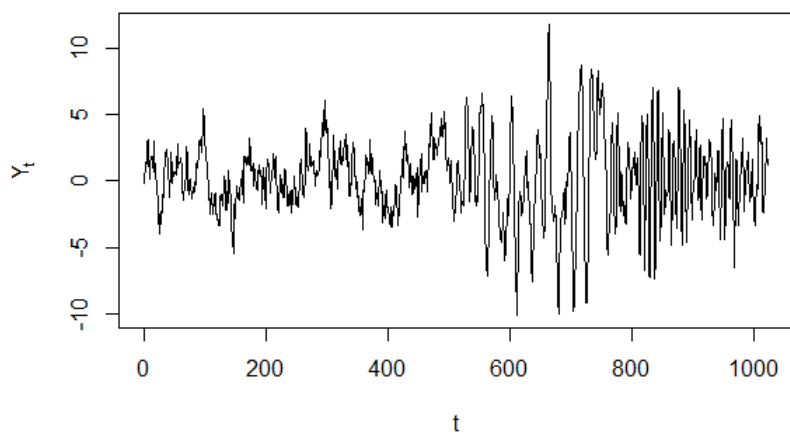


Figura 4.11: Série múltiplas quebras estruturais.

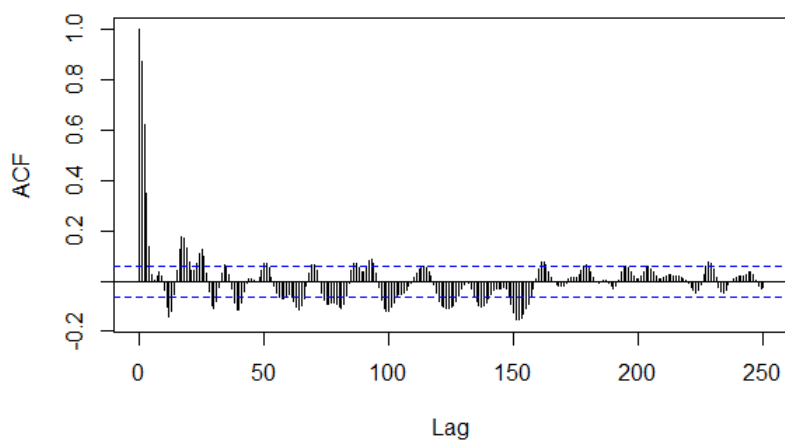


Figura 4.12: FAC da série múltiplas quebras estruturais.

Capítulo 5

Testes KPSS, Phillips-Perron e

Shimotsu

5.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar os testes de Kwiatkowski, Phillips, Schmidt & Shin (1992), comumente mencionado na literatura como teste KPSS, o teste de Phillips & Perron (1988), chamado de teste PP, e os testes de Shimotsu (2006) para discriminar entre um modelo de integração fracionada e um modelo não estacionário.

O KPSS testa a hipótese nula de estacionariedade de uma série temporal em torno de uma média ou tendência linear *versus* a hipótese alternativa de que a série é não estacionária, havendo uma raiz unitária. Trata-se de uma ferramenta estatística que se junta a outras com essa mesma finalidade, como os testes de Dickey-Fuller Aumentado (ADF) e o de Perron.

O teste PP difere do teste ADF principalmente na forma como trata a correlação serial e heterocedasticidade nos erros. Enquanto o teste ADF utiliza parâmetros autorregressivos para aproximar a estrutura ARMA dos erros no teste de regressão, o teste PP se aplica para formas mais gerais da estrutura de correlação serial.

O primeiro teste de Shimotsu é derivado do teste de Wald, em que se compara a estimativa do parâmetro d para todo o período de tempo com as estimativas dos d 's para os subperíodos relativos às quebras estruturais. Já o segundo consiste em diferenciar fracionalmente os dados (utilizando uma estimativa do parâmetro de memória longa d) e, em seguida, testar as hipóteses nula de $I(0)$ do KPSS e $I(1)$ do PP.

5.2 Teste KPSS

Como observado, o teste KPSS assume a hipótese nula de estacionariedade de uma série em torno da média ou uma tendência linear, ao passo que a hipótese alternativa assume que a série não é estacionária devido à presença de uma raiz unitária. Apesar disso, inova em comparação aos testes ADF e Perron em que a hipótese nula assume a presença de raiz unitária.

No modelo KPSS, a série é representada por três componentes: (a) tendência determinística; (b) passeio aleatório e (c) erro estacionário. Assim, o modelo segue a forma

$$\begin{aligned}
y_t &= \xi\alpha + r_t + \epsilon_t \\
r_t &= r_{t-1} + u_t \\
\epsilon_t &\sim I(0),
\end{aligned} \tag{5.1}$$

em que y_t , $t = 1, 2, \dots, n$ denota a série observada, α é a tendência determinística, r_t é o passeio aleatório, ϵ_t o erro da primeira equação, $I(0)$ podendo ser heterocedástico, e u_t denota o erro da segunda equação. Por hipótese, este é i.i.d., com valor esperado igual a zero e variância σ_u^2 .

A hipótese nula de estacionaridade ($I(0)$) é equivalente à suposição de que a variância σ_u^2 do processo de passeio aleatório r_t na equação (5.1) é igual a zero. Se a variância σ_u^2 é maior do que zero, então y_t é não estacionário, devido à presença de raiz unitária.

As inferências de propriedades assintóticas da estatística são baseadas na suposição, ver (Phillips & Perron (1988)), que ϵ_t possui certas propriedades de regularidade. Assim, a variância de longo prazo é definida como

$$\sigma^2 = \lim n^{-1} E[S_n^2],$$

em que S_n é a soma parcial dos erros computados por $\sum_{i=1}^t e_i$, para $t = 1, 2, \dots, n$.

Kwiatkowski et al (1992) define o estimador consistente da variância de longo prazo como

$$s^2(l) = n^{-1} \sum_{t=1}^n e_t^2 + 2n^{-1} \sum_{s=1}^l w(s,l) \sum_{t=s+1}^n e_t e_{t-s}, \tag{5.2}$$

em que $w(s, l)$ são pesos que dependem da escolha da janela espectral. Os autores

utilizam a janela de Bartlett, definida como $w(s, l) = 1 - \frac{s}{l+1}$, que assegura $s^2(l)$ não negativa. Portanto, a estatística do teste KPSS é o multiplicador de Lagrange (LM) ou a estatística escore para testar $\sigma_u^2 = 0$ versus $\sigma_u^2 > 0$, e é dada por

$$\hat{\eta} = \frac{T^{-2} \sum_{t=1}^n \hat{S}_t^2}{s^2(l)}. \quad (5.3)$$

Seja e_t , $t = 1, 2, \dots, n$ os erros estimados da regressão y_t em uma constante ($e_t = y_t - \bar{y}$).

Sob H_0 , $y_t \sim I(0)$, os autores Kwiatkowski, Phillips, Schmidt & Shin mostram que a distribuição assintótica da estatística do teste KPSS converge para um movimento browniano padrão. A estatística $\hat{\eta}_\mu$ para testar uma série estacionária em torno da média converge fracamente para

$$\hat{\eta}_\mu \longrightarrow \int_0^1 V_1(r) dr, \quad (5.4)$$

em que $V_1(r) = W(r) - rW(1)$ e $W(k)$ é um movimento browniano padrão para $r \in [0, 1]$. No caso em que $\xi \neq 0$, a estatística $\hat{\eta}_\xi$ converge fracamente para um movimento browniano de segunda ordem dado por

$$V_2(r) = W(r) + r(2 - 3r)W(1) + 6r(r^2 - 1) \int_0^1 W(s) ds, \quad (5.5)$$

convergindo fracamente para um limite

$$\hat{\eta}_\xi \longrightarrow \int_0^1 V_2(r)^2 dr. \quad (5.6)$$

O procedimento do teste segue a seguinte forma: testa-se a hipótese nula

acerca da estacionariedade em torno da média ou tendência contra a hipótese alternativa de não estacionariedade da série devido à presença de raiz unitária. Computa-se os valores das estatísticas de teste ($\hat{\eta}$), e caso um valor seja maior do que o valor crítico, a hipótese nula é rejeitada dado um nível de significância.

5.3 Teste PP

Phillips & Perron (1988) desenvolveram diversos testes que se popularizaram na análise de séries temporais financeiras para testar a presença de raiz unitária. A estatística de teste de Phillips & Perron (1988) (teste PP) pode ser vista como uma modificação robusta na correlação serial, portanto difere do teste ADF por tratar de forma diferente a correlação e a heterocedasticidade dos erros.

A regressão do modelo para o teste de raiz unitária de Phillips-Perron (PP) é dada por

$$y_t = a + \alpha y_{t-1} + \epsilon_t, \quad (5.7)$$

em que y_t , $t = 1, 2, \dots, n$ denota a série observada, α é a tendência determinística, a é uma constante e ϵ_t é um processo $I(0)$, que pode ser heterocedástico.

O teste PP se aplica para formas mais gerais da estrutura de correlação serial e heterocedasticidade dos erros ϵ no teste de regressão por modificar diretamente as estatísticas de teste $n\hat{\alpha}$ e $t_{\alpha=0}$. Essas estatísticas modificadas, denotadas por Z_α e Z_t , são dadas por

$$Z_\alpha = n(\hat{\alpha} - 1) - \frac{1}{2}(\hat{\lambda}^2 - \hat{\sigma}^2) \left(\frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 \right)^{-1}, \quad (5.8)$$

$$Z_t = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\lambda}} t_{\hat{\alpha}=1} - \frac{1}{2}(\hat{\lambda}^2 - \hat{\sigma}^2) \left(\frac{\hat{\lambda}^2}{n^2} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 \right)^{-1/2}, \quad (5.9)$$

em que $t_{\hat{\alpha}=1} = \hat{\sigma}(\hat{\alpha}-1) \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2$ e $\sigma^2 = n^{-1} \sum_{t=1}^n \hat{\epsilon}_t^2$ é a estimativa consistente da variância de curto prazo e $\hat{\lambda}^2$ remete-se a equação (5.2) referente à estimativa consistente da variância de longo prazo, ambas de $\hat{\epsilon}_t$.

Observação 3 *Variância de curta e longa duração.*

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{t=1}^n E[\epsilon_t^2].$$

$$\lambda^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{t=1}^n E[S_n^2].$$

5.4 Testes de Shimotsu

Como discutimos no Capítulo 3, o processo fracionário integrado $I(d)$ é dado por

$$(1 - B)^d X_t = \epsilon_t,$$

ou seja,

$$X_t = (1 - B)^{-d} \epsilon_t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)k!} \epsilon_{t-k},$$

em que B é o operador de atraso e ϵ_t é o choque aleatório. A função de autocorrelação desse modelo decai lentamente para zero (hiperbolicamente) quando $d \in (0, 0.5)$ e, portanto, possui choques persistentes.

Esse modelo é comumente utilizado para a modelagem de volatilidades em séries financeiras. Sob esse modelo, Shimotsu (2006) introduziu dois testes para a detecção de quebras estruturais.

5.4.1 Diagnóstico Baseado na Divisão por Amostras

Nesta seção serão abordados dois diagnósticos baseados na divisão de amostras. O primeiro é descritivo, enquanto o segundo é um teste estatístico.

Seja b um número inteiro, e divide-se a amostra em b blocos, de tal forma que cada bloco possua $\frac{n}{b}$ observações (assume-se $\frac{n}{b}$ inteiro). Defina $\hat{d}^{(a)}$, $a = 1, \dots, b$, como a estimativa LW (local Whittle) do parâmetro d em cada bloco a_i de observações, $\{X_t : t = (a-1)\frac{n}{b} + 1, \dots, \frac{an}{b}\}$.

Desta forma, para a subamostra a define-se

$$\hat{d}^{(a)} = \underset{d \in [\delta_1, \delta_2]}{\operatorname{argmin}} R^{(a)}(d),$$

em que a função objetiva é construída a partir dos a_i blocos de observações,

$$R^{(a)}(d) = \log \hat{G}^{(a)} - 2d \frac{b}{m} \sum_{j=1}^{m/b} \log \tilde{\omega}_j,$$

$$G^{(a)}(d) = \frac{b}{m} \sum_{j=1}^{m/b} \tilde{\omega}_j^{2d} I_x^{(a)}(\tilde{\omega}_j),$$

$$I_x^{(a)}(\tilde{\omega}_j) = (2\pi n)^{-1} \left| \sum_{t=(a-1)n/b+1}^{an/b} X_t \exp^{it\tilde{\omega}_j} \right|^2, \quad \tilde{\omega}_j = \frac{2\pi j}{n/b}, \quad j = 1, \dots, \frac{n}{b}.$$

Observação 4 *A escolha do m utilizado no periodograma desempenha um papel importante no estimador local Whittle e em outros estimadores semi-paramétricos, pois determina a largura da faixa de frequências usadas para estimar o parâmetro d .*

Observação 5 *As estimativas que utilizam as subamostras possuem o mesmo*

viés da parte de memória curta de X_t como a estimativa que usa a série total.

5.4.2 Investigação Visual com Base na Divisão por Amostras

Shimotsu (2006) introduz um método descritivo visual que permite analisar se determinado processo de memória longa espúrio pode reproduzir as características de um processo de memória longa, genuíno.

Considere a estimativa de d pela média de $\hat{d}^{(1)}, \dots, \hat{d}^{(b)}$, ou seja, $\bar{d} = b^{-1} \sum_{a=1}^b \hat{d}^{(a)}$.

Assim, se X_t é um processo $I(d)$, a média das estimativas de d das subamostras (\bar{d}) deverá ser aproximadamente o \hat{d} da série completa, além de $\hat{d}^{(a)}$ semelhantes. Como se pode observar, não é necessariamente o caso de processos de memória longa espúrios.

5.4.3 Teste Estatístico para a Constância do Parâmetro

Para testar um processo $I(d)$ verdadeiro versus um processo $I(d)$ espúrio, considere a hipótese nula $H_0: d_0 = d_{0,1} = \dots = d_{0,b}$, em que $d_{0,a}$ é o valor verdadeiro do parâmetro d da subamostra a , portanto testa-se a constância do parâmetro d em relação as amostras e a série completa.

Define-se o vetor $\hat{\mathbf{d}}_b$ de tamanho $b+1$ e uma matriz \mathbf{A} de dimensão $ab \times (b+1)$ como

$$\hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \hat{d} - d_0 \\ \hat{d}^{(1)} - d_0 \\ \vdots \\ \hat{d}^{(b)} - d_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 1 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

Sob H_0 (ver Robinson, 1995),

$$\sqrt{m}\hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{b}} = \mathbf{Z}_{\mathbf{n}} + \text{viés}(m), \quad \mathbf{Z}_{\mathbf{n}} \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{1}{4}\boldsymbol{\Omega}\right), \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & \iota'_{\mathbf{b}} \\ \iota_{\mathbf{b}} & \mathbf{bI}_{\mathbf{b}} \end{pmatrix},$$

em que $\mathbf{I}_{\mathbf{b}}$ é uma matriz identidade ($b \times b$) e $\iota_{\mathbf{b}}$ é um vetor de 1's ($b \times 1$) e $\boldsymbol{\Omega}$ é singular com *rank* b . A estatística Wald para testar a hipótese nula é definida como

$$W = 4m\mathbf{A}\hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{b}}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A}')^+(\mathbf{A}\hat{\mathbf{d}}_{\mathbf{b}})', \quad (5.10)$$

em que $(\mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A}')^+$ denota a inversa generalizada de $\mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A}'$. Dessa maneira, W possui distribuição limite qui-quadrado com $b - 1$ graus de liberdade.

Hurvich e Chen (2000) mencionam que a variância amostral do estimador local Whittle tende a ser maior do que $\frac{1}{4m}$, e que o teste de Wald baseado na variância assintótica tende a rejeitar em excesso a hipótese nula. Assim, substituíram o valor m do estimador da variância por um número c_m , que proporciona melhor aproximação. Assim, c_m é definido por

$$c_m = \sum_{j=1}^m \nu_j^2, \quad \nu_j = \log \omega_j - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \log \omega_j = \log j - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \log j.$$

Como $\frac{c_m}{m} \rightarrow 1$ quando $m \rightarrow \infty$, a modificação não altera a distribuição as-

sintótica do teste estatístico. Portanto, Hurvich & Chen (2000) introduziram a estatística de Wald ajustada

$$W_c = 4m \left(\frac{c_{m/b}}{m/b} \right) \mathbf{A} \hat{\mathbf{d}}_b (\mathbf{A} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}')^+ (\mathbf{A} \hat{\mathbf{d}}_b)'. \quad (5.11)$$

O estimador para cada subamostra possui vantagem de usar a mesma quantidade de frequência. Isso implica que o viés de todos os elementos de $\hat{\mathbf{d}}_b$ são iguais.

5.4.4 Teste Utilizando d Diferenciações

O segundo teste utiliza outra propriedade no domínio de tempo do processo $I(d)$. Caso um processo $I(d)$ seja diferenciado \hat{d} vezes, em que \hat{d} é o estimador consistente do parâmetro d , então o resultado será o processo $I(0)$. Tal afirmação parece trivial; contudo, alguns processos de memória longa espúrios não reproduzem essa característica.

A despeito de tudo isso, Shimotsu (2006) propôs um teste estatístico que utiliza o teste de raiz unitária PP e o teste KPSS. A ideia básica é primeiramente efetuar a retirada do efeito da média nos dados, e logo após aplicar os testes PP e KPSS para a sua d -diferenciação, em que \hat{d} é um estimador consistente de d . A retirada do efeito da média deve ser feita cuidadosamente, como se refere Shimotsu (2006), se queremos permitir processos não estacionários.

Assumindo que X_t segue um processo $I(d)$ truncado iniciando em $t = 0$, e assumindo algumas suposições (ver Shimotsu (2006)), temos

$$X_t - \mu_0 = (1 - B)^{-d_0} \epsilon_t \mathbf{1}\{t > 1\}, \quad (5.12)$$

em que μ é um número finito desconhecido não aleatório, B é o operador de atraso, ϵ_t é um choque aleatório e $\mathbb{1}\{t > 1\}$ é a função indicadora usada para que a essa especificação do modelo comporte (assintoticamente) os modelos X_t estacionário e não estacionário. A d diferenciação de $X_t - \mu_0$ é um processo truncado $I(d - \hat{d})$ para cada par (d, \hat{d}) . Aqui, μ é a média do processo X_t , $EX_t = \mu_0$, porém quando $d > 0.5$ é melhor interpretado como a condição inicial de X_t .

Antes de se tomar a d diferenciação, é preciso subtrair a estimativa de μ_0 de X_t . Quando d_0 for conhecido e menor do que 1, pode-se utilizar a média amostral $\bar{X} = n^{-1} \sum_{t=1}^n X_t$ como estimador de μ_0 . Caso $d_0 > 1$, a utilização de \bar{X} induz a um erro não desprezível, pois $\bar{X} - \mu_0 = O_p(n^{d_0-1/2})$, como demonstrado por Shimotsu (2006).

Quando $d_0 > 1$, ele utiliza X_1 como o estimador de μ_0 , apesar de X_1 não ser um estimador consistente de μ_0 . Ele demonstra que o erro de estimação de μ_0 torna-se desprezível (ver Shimotsu (2006)).

Desta forma, Shimotsu (2006) considera a combinação linear de \bar{X} e X_1 para estimar μ_0 como

$$\hat{\mu}(d) = w(d)\bar{X} + (1 - w(d))X_1, \quad (5.13)$$

em que $w(d)$ é uma função de ponderação (duas vezes continuamente diferenciável) de tal modo que $w(d) = 1$ para $d < 0.5$ e $w(d) = 0$ para $d > 0.75$. Para $d \in [0.5, 0.75]$, ele utiliza $\frac{1}{2}[1 + \cos(4\pi d)]$. Assim, a diferença entre $(1 - B)^{d_0}(X_t - \hat{\mu}(d_0))$ e ϵ_t torna-se insignificante para qualquer valor de d_0 .

A partir da estimação de μ_0 , define-se a d -diferenciação da série como

$$\hat{\epsilon}_t = (1 - B)^{\hat{d}}(X_t - \hat{\mu}(\hat{d})) = \sum_{k=0}^{t-1} \frac{\Gamma(-\hat{d} + k)}{\Gamma(-\hat{d})k!} (X_{t-k} - \hat{\mu}(\hat{d})). \quad (5.14)$$

Isto posto, aplicam-se os testes PP e KPSS para $\hat{\epsilon}_t$. O teste PP com um intercepto é aplicado na soma parcial do processo de $\hat{\epsilon}_t$, já o teste KPSS é aplicado de acordo com o especificado na seção (5.2).

5.4.5 Estudos de Monte Carlo

Para validar a implementação dos testes de Shimotsu (2006) feitos no *software* R, foram realizadas simulações para replicar as tabelas de Shimotsu (2006) e verificar o poder dos testes, enquanto que a Tabela 5.2 apresenta os valores críticos obtidos por Shimotsu (2006). Os códigos se encontram no Apêndice C.

O primeiro painel da Tabela 5.1 mostra os resultados da simulação quando o processo X_t segue um processo $I(d)$. O estimador local Whittle (LW) com $[\delta_1, \delta_2] = [-0.5, 1]$ é utilizado nos dois painéis. O primeiro painel apresenta os resultados quando $X_t = (1 - B)^{-0.4}\epsilon_t$, com $\epsilon_t \sim i.i.d. N(0, 1)$. De acordo com Shimotsu (2006), as médias de \hat{d} e \bar{d} são próximas umas das outras e a estatística modificada de Wald (W_c) tende a rejeitar em excesso. Os testes rejeitam pouco devido ao erro na estimativa de d , e melhoram a medida que m aumenta.

O segundo painel apresenta os resultados quando $X_t = (1 - B)^{-0.2}(1 - 0.6B)\epsilon_t$. O viés de \hat{d} é substancial, excedendo 0.2 quando m aumenta. Por outro lado, a diferença entre \hat{d} e \bar{d} é pequena, e não é muito afetada pela dinâmica de curto prazo. Como o teste não é completamente livre dos efeitos da dinâmica de curto prazo, a distorção de W_c é maior do que a vista no painel anterior para valores

altos de m . Pelo fato de o viés aumentar a medida que m aumenta, o teste rejeita corretamente a hipótese nula de $I(\hat{d})$. Isso sugere a possibilidade de utilizar o teste de d diferenciação para checar se a estimativa de d está contaminada com a dinâmica de curto prazo.

Tabela 5.1: Estimativas e resultados da replicação da tabela de Shimotsu (2006).

m	\hat{d}	\bar{d}			% Rej. W_c			% Rej. Z_t	% Rej. $\hat{\eta}_\mu$
		b = 2	b = 4	b = 8	b = 2	b = 4	b = 8		
Modelo 1: $X_t - (1 - B)^{-0.4}\epsilon_t$									
200	0.400	0.399	0.398	0.395	0.055	0.070	0.090	0.033	0.026
400	0.400	0.400	0.400	0.399	0.046	0.060	0.075	0.039	0.039
600	0.399	0.398	0.399	0.398	0.056	0.052	0.066	0.040	0.042
800	0.397	0.397	0.397	0.396	0.049	0.052	0.061	0.042	0.047
Modelo 2: $X_t - (1 - B)^{-0.2}(1 - 0.6B)\epsilon_t$									
200	0.226	0.227	0.229	0.231	0.062	0.076	0.105	0.008	0.004
400	0.289	0.293	0.300	0.311	0.055	0.061	0.075	0.174	0.001
600	0.358	0.364	0.373	0.387	0.057	0.070	0.081	0.503	0.000
800	0.425	0.430	0.440	0.455	0.081	0.082	0.108	0.815	0.000

Tabela 5.2: Tabela de valores críticos (Shimotsu(2006)).

d	Z_t			$\hat{\eta}_\mu$		
	10%	5%	1%	10%	5%	1%
0.0	-2.750	-3.025	-3.556	0.347	0.460	0.736
0.1	-2.710	-2.989	-3.532	0.344	0.460	0.737
0.2	-2.678	-2.960	-3.500	0.342	0.453	0.731
0.3	-2.640	-2.932	-3.469	0.337	0.446	0.715
0.4	-2.600	-2.893	-3.432	0.335	0.440	0.702
0.5	-2.558	-2.850	-3.398	0.334	0.435	0.699
0.6	-2.475	-2.767	-3.336	0.321	0.419	0.661
0.7	-2.550	-2.838	-3.430	0.340	0.451	0.721
0.8	-2.568	-2.855	-3.430	0.348	0.463	0.743
0.9	-2.563	-2.849	-3.428	0.347	0.462	0.736
1.0	-2.563	-2.849	-3.424	0.347	0.460	0.737
1.1	-2.564	-2.850	-3.425	0.347	0.460	0.735
1.2	-2.565	-2.851	-3.426	0.347	0.460	0.735
1.3	-2.564	-2.852	-3.427	0.346	0.460	0.736
1.4	-2.564	-2.852	-3.425	0.346	0.460	0.736

Capítulo 6

Aplicação em Séries de Taxas de Câmbio

6.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos uma aplicação dos testes de Shimotsu descrita no Capítulo 5 na série das variações das taxas diárias de câmbio da moeda norte-americana (dólar, US\$).

Primeiramente, será feita uma descrição dos dados e, em seguida, esboçaremos a implementação computacional dos testes de Shimotsu (2006), cujos códigos em R⁴ são apresentados nos Apêndices A e B. Finalmente, a análise dos dados é apresentada na Seção 6.4, com *script* localizado no Apêndice D.

⁴R Core Team (2016). *R: A language and environment for statistical computing*.

6.2 Descrição da Série Temporal

Os dados foram cordialmente fornecidos pela *Tick Data* (www.tickdata.com). Eles constituem a série temporal *intraday* (de alta frequência) das taxas de câmbio do dólar norte-americano. O *FOREX* é considerado o maior mercado mundial em termos de movimentação diária de dinheiro. Ele é operado continuamente, 24 horas por dia, entre 14h00 de domingo e 18h00 de sexta (horários de Brasília). Por consequência, permite-se maior volume e tempo para a realização das transações.

No *FOREX*, a operação é feita em pares, envolvendo simultaneamente a compra de uma moeda e a venda de outra, como exemplo, R\$ e US\$. Nesse mercado, o que se negocia não é o papel monetário, mas sim a relação de troca entre as moedas. Assim, ao se fazer uma operação nesse mercado, não se negocia determinada divisa, e sim sua taxa de câmbio em relação a outra.

A Tabela 6.1 mostra um trecho da série temporal e também ilustrada na Figura 6.1. Esta série *intraday* é composta de 1.745.081 observações, de 05/06/2008 a 16/06/2015.

Tabela 6.1: Trecho da série *intraday* R\$/US\$.

Data	Horário	Preço de Compra
05/06/2008	16:00:37.994	1.6605
05/06/2008	16:06:13.102	1.6605
05/06/2008	16:07:38.180	1.6605
⋮	⋮	⋮
16/06/2015	17:53:00.099	3.1073
16/06/2015	17:54:00.123	3.1073
16/06/2015	17:56:00.109	3.1073

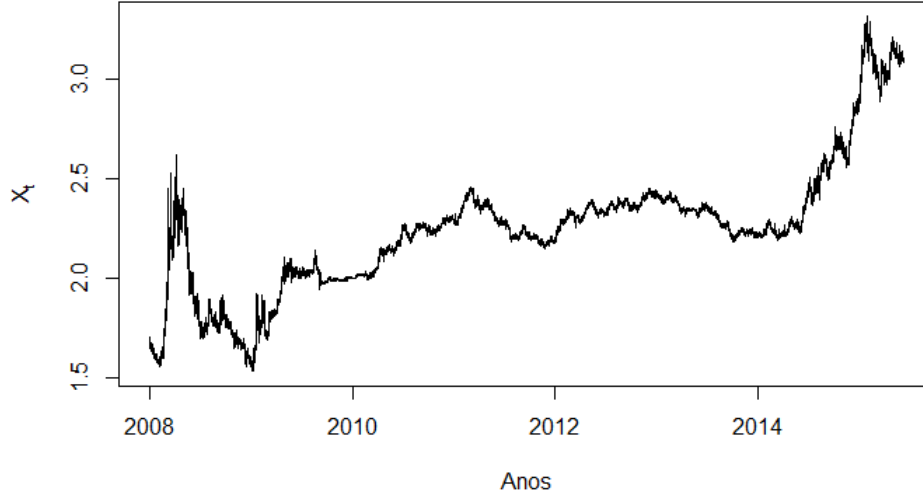


Figura 6.1: Evolução da série *intraday* da taxa diário de câmbio.

Seja $X_{k,t}$ o valor do k -ésimo preço de oferta registrado no dia t , em que $k = 1, \dots, Q_t$, e $t = 1, 2, \dots, n$. Aqui, Q_t representa a quantidade de registros no dia t , e n denota o tamanho da série diária. Para cada dia t , a série diária $\{X_{1,t}, \dots, X_{Q_t,t}\}$ representa uma trajetória *intraday*.

Define-se a variação diária dos preços como

$$v_t = \frac{1}{Q_t} \sum_{k=1}^{Q_t} (X_{k,t} - \bar{X}_t)^2, \quad (6.1)$$

em que $\bar{X}_t = \frac{1}{Q_t} \sum_{k=1}^{Q_t} X_{k,t}$.

A Figura 6.2 mostra a evolução temporal da série diária v_t e sua função de autocorrelação amostral (ACF).

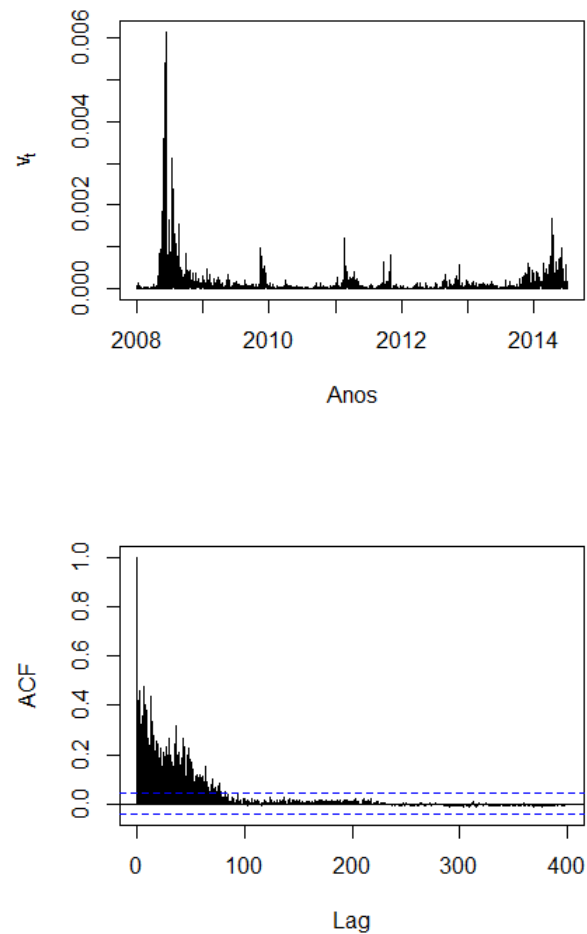


Figura 6.2: Painel Superior: evolução da série diária da variação dos preços de oferta (v_t). Painel Inferior: função de autocorrelação amostral da série v_t .

Para ilustrar a aplicação dos testes de Shimotsu, consideramos o logaritmo da variação dos preços,

$$\nu_t = \log v_t, \quad (6.2)$$

cuja evolução temporal está ilustrada na Figura 6.3

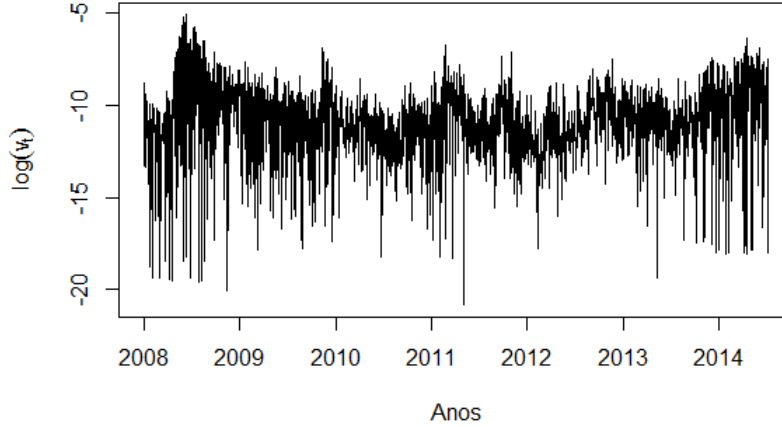


Figura 6.3: Evolução temporal de $\nu_t = \log v_t$.

Com o aspecto de quebra estrutural apresentada no painel superior da Figura 6.2 no final do ano de 2008, a série ν_t foi ajustada com um modelo ARFIMA(1, d , 1) com $\hat{d} = 0.48$, ou seja,

$$(1 - \hat{\Phi}B)(1 - B)^{\hat{d}}\nu_t = (1 - \hat{\Theta}B)\epsilon_t, \quad (6.3)$$

com $\hat{\Phi} = 0.29$, $\hat{\Theta} = 0.76$ e p -valores inferiores a 0.001. A questão é avaliar se parte do coeficiente \hat{d} é devida a quebras estruturais.

6.3 Implementação Computacional

A implementação dos testes de Shimotsu (2006) foi feita no *software* R em duas etapas: (a) implementação de funções e testes requeridos pelos testes de Shimotsu (2006) e (b) implementação dos testes de Shimotsu (2006) propriamente

dito. Os códigos se encontram nos Apêndices A e B, respectivamente.

Algoritmo do teste com base na divisão por amostras (1^o teste de Shimotsu):

1. Ler os dados (série temporal) referente a x ;
2. Calcular o parâmetro \hat{d} a partir do estimador local Whittle (LW) especificado na Seção 3.5.5 e código descrito no Apêndice A;
3. Escolher valores para os parâmetros da função $split(x, m, bset)$ descrita no Apêndice B, em que x é a série dos dados, m é um escalar referente à largura da banda utilizada no estimador local Whittle e na estatística de Wald ajustada, e $bset$ é o conjunto para divisão das amostras, por exemplo, (2, 4, 8);
4. Dividir os dados em amostras (referente ao parâmetro $bset$ da função);
5. Calcular o parâmetro \bar{d} para cada subamostra, ilustrado na Tabela 6.5;
6. A partir das estimativas de \bar{d} , calcular as estatísticas de Wald ajustadas (W_c) em cada subamostra para testar a hipótese nula de constância do parâmetro (Tabela 6.5).

Observação 6 *Note que a função $split$ possui três saídas: w , $avedhat$ e $dhats$, em que w é o vetor referente às estatísticas de Wald ajustadas (W_c) correspondentes à cada $bset$ (subamostra); $avedhat$: o primeiro elemento é a estimativa de d da série total e os seguintes elementos são a média da estimativa de d para cada subamostra; e $dhats$ são as estimativas de d para a série total e as subamostras.*

Algoritmo do teste utilizando a d difenrenciação (2º teste de Shimotsu).

1. Ler os dados (série temporal) referente a x ;
2. Implementar os testes KPSS, PP e *fracdiff* para serem aplicados na função *diff_pp_kpss*(x,d,h);
3. Considere o teste KPSS para computar a estatística de teste utilizando o *kernel* de Bartlett. A função *kpss*(x,m) do Apêndice A tem como saída a estatística $\hat{\eta}_\mu$, em que x são os dados e m é o escalar do comprimento da banda utilizada no teste;
4. Considere o teste PP para computar as estatísticas de teste da presença de raiz unitária. A função *pperron*(x,m) (Apêndice B) tem como saída as estatísticas Z_α e Z_t , em que x são os dados e m é o escalar do comprimento da banda utilizada no teste;
5. Considere a função *fracdiff*(x,d) o procedimento de diferenciação fracionária, em que x é a série a ser diferenciada, e d o parâmetro de diferenciação. A saída da função é a série filtrada $(1 - B)^d X_t$;
6. Aplicar a função *diff_pp_kpss*(x,d,h), em que se utiliza as funções acima para testar a hipótese de a d diferenciação resultar em um processo $I(d)$, em que x é a série dos dados, d é o parâmetro de diferenciação estimado pelo estimador local Whittle (LW), e h é o parâmetro de comprimento utilizado para os testes KPSS e PP ($h = m^d$).

Observação 7 *Os testes local Whittle, KPSS e PP foram implementados a título de aprendizagem e aprofundamento sobre o conteúdo. Esses testes já possuem implementação em vários pacotes do software R.*

6.4 Aplicação dos Testes

Nesta seção ilustraremos como os testes podem ser utilizados para avaliar se a série temporal observada é um processo puramente de memória longa ou um processo com aparência de memória longa.

A primeira parte da Tabela 6.5, refere-se aos resultados da estimativa de \hat{d} da série e \bar{d} das subamostras, enquanto que a segunda parte ilustra o resultado da estatística ajustada de Wald (W_c).

A estimação do parâmetro d foi realizada através do estimador local Whittle (LW), que é definido no domínio da frequência (uso do periodograma) por modelar a densidade espectral por completo (toda a estrutura de correlação). Ele é geralmente considerado adequado para processos com memória curta, mas também (como provado por Fox & Taqq (1986)) é adequado para processos com memória intermediária ou longa. A escolha de m desempenha um papel importante no estimador local Whittle e em outros estimadores semi-paramétricos, pois determina a largura da faixa de frequências usadas para estimar o parâmetro d .

Hurvich & Chen (2000) introduziram a estatística ajustada de Wald (W_c) denotada na equação (5.11). Essa estatística é utilizada no teste de hipótese de constância dos parâmetros d estimados no primeiro teste de Shimotsu. O estimador para cada subamostra possui vantagem de usar a mesma quantidade de frequência. Isso implica que os vieses de todos os elementos das estimativas de \bar{d} das subamostras são iguais.

A Tabela 6.6 ilustra o resultado das estatísticas de teste da aplicação do segundo teste de Shimotsu (2006) aos dados. Nela encontram-se as estatísticas do teste PP (Z_t) e a estatística do teste KPSS ($\hat{\eta}_\mu$). A primeira consiste do

teste de Phillips-Perron descrito na Seção 5.3, sendo uma generalização do teste aumentado de Dickley-Fuller para os casos em que os erros são correlacionados, e possivelmente heterocedásticos, em que se testa a hipótese de raiz unitária.

Quanto à segunda estatística, resultado do teste KPSS, explicada na Seção 5.2, ao contrário dos testes mencionados anteriormente, estabelece como hipótese nula a estacionariedade da série temporal (H_0 : a série é estacionária).

Para exemplificar as Tabelas 6.5 e 6.6 fizemos um recorte para um dado m de modo a ilustrar os resultados de ambos os testes de Shimotsu (2006). No primeiro recorte (Tabela 6.2), temos os resultados do primeiro teste, onde se encontram os valores de m , as estimativas do parâmetro d , para as subamostras e a série total, e os valores das estatísticas ajustadas de Wald (W_c) das respectivas subamostras. Já no segundo recorte (Tabela 6.3), encontram-se os resultados do segundo teste com as respectivas estatísticas dos testes PP e KPSS. Alerta-se que, para cada valor de m (largura da banda de frequência), modificam-se as estimativas e estatísticas.

Tabela 6.2: Recorte da Tabela 6.5 para $m = 200$.

m	\hat{d}	\bar{d}			W_c		
		b = 2	b = 4	b = 8	b = 2	b = 4	b = 8
200	0.345	0.377	0.157	0.297	24.179(*)	2.849	5.156

Tabela 6.3: Recorte da Tabela 6.6 para $m = 200$.

m	\hat{d}	Z_t	$\hat{\eta}_\mu$
200	0.345	-1.057	0.297

Pela Tabela 6.5, vemos que as estimativas de \hat{d} variam entre 0.10 e 0.35, o que sugere a existência de memória longa (seja esta verdadeira ou espúria) e uma grande possibilidade de variação local do parâmetro d .

Por meio de alguns pacotes do R (*fArma*, *pracma* e *arfima*), foi feita a estimação do parâmetro de Hurst (H) para corroborar com as análises feitas pelo estimador local Whittle. As estimativas encontradas na Tabela 6.4, parâmetro H entre 0.86 e 0.98, apresentam resultados que indicam, igualmente ao estimador LW, a presença de memória longa ($0.5 < H < 1$).

Tabela 6.4: Estimativas do parâmetro H

Pacotes	\hat{H}
fArma	0.89
pracma	0.86
arfima	0.98

Do outro lado, as estimativas de \bar{d} não estão próximas entre si, resultado de uma investigação visual com base na divisão por amostras como discutido na Seção 5.4.2. Para processos $I(d)$, as estimativas de \bar{d} devem ser próximas, ao contrário do que se vê. Como processos de memória longa espúrios não conseguem imitar as características de processos de memória longa verdadeiros, temos indicação descritiva da possibilidade de quebras estruturais estarem presentes na série temporal.

Pela Figura 6.4, entre os anos de 2010 e 2012, aproximadamente em torno da observação 1000, nota-se um aspecto de quebra estrutural que pode induzir a uma má especificação do modelo. Desta forma, a rejeição da hipótese para $b = 2$ na Tabela 6.5 pode ser explicada por isso.

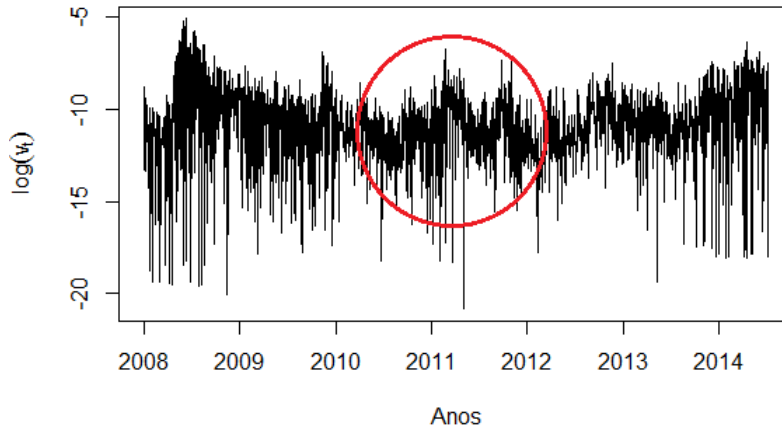


Figura 6.4: Aspecto da quebra estrutural da série ν_t .

Prosseguindo com a aplicação do segundo teste de Shimotsu (2006), avaliando a possibilidade de quebras estruturais estarem presentes na série, a Tabela 6.6 mostra as estatísticas dos testes PP e KPSS.

Em relação ao primeiro teste (PP), a estatística de teste (Z_t) não rejeita a hipótese nula para qualquer valor de m . Portanto, ele não rejeita a hipótese de não estacionariedade. Em concordância com o teste PP, o teste KPSS produz a estatística de teste ($\hat{\eta}_\mu$) que, para praticamente todos os valores de m , exceto para $m = 200$ e $m = 300$, rejeita a hipótese nula. Desta maneira, rejeita-se a hipótese de estacionariedade da série, indicando a presença de possíveis quebras estruturais que torna a série não estacionária.

Como mencionado na Observação 7, alguns pacotes como *tseries*, *fUnitRoots* e *urca* possuem os testes PP e KPSS implementados. Desta forma, através do pacote *tseries* e suas funções, estimou-se as estatísticas dos testes $Z_t = -1.059$ e $\hat{\eta}_\mu = 1.2967$, que confirma os resultados e análises obtidos pelo algoritmo próprio

implementado.

A partir dos resultados conjuntos das Tabelas 6.5 e 6.6, e o fato de Shimotsu (2006) ligar algumas características de possíveis modelos de memória longa a características similares de modelos espúrios, por exemplo, a diminuição das estimativas de d à medida que o valor de m aumenta, podemos afirmar que tais propriedades se apresentam na série observada dos logretornos dos preços do dólar americano na moeda brasileira.

Através não somente de uma análise descritiva da série temporal, ilustrada na Figura 6.4, mas também pela aplicação da metodologia descrita por Shimotsu (2006), temos fortes evidências de que o aspecto de memória longa apresentada pela série é induzida em parte (ou totalmente) por quebras estruturais.

6.5 Modelagem de Séries com Quebra Estrutural

A dicotomia entre memória longa e quebra estrutural deixa em aberto a escolha da metodologia a ser utilizada na modelagem dos dados. No caso em que a memória longa é inerente ao processo gerador da série, os modelos de memória longa como o ARFIMA(p, d, q) são amplamente utilizados. Do outro lado, não há consenso em como escolher o melhor modelo para os dados que possuem quebra estrutural, usualmente após uma flexibilização das suposições é feita a modelagem com o ARFIMA.

Contudo, Choi, Yu & Zivot (2010) apresentaram um nova abordagem para esses casos. Eles ajustaram a série da volatilidade realizada utilizando a série residual ($y_t - \hat{c}_j$, em que \hat{c}_j é a média estimada) e estimando o parâmetro d novamente. Esse novo método reduziu a estimativa de d e ficou evidente a redução

da persistência da FAC após a retirada do efeito das quebras.

Uma das razões para a série ainda apresentar persistência serial é descrita por eles como: (1) agregação da série *intraday* e (2) mistura de numerosas informações heterogêneas de curto prazo.

Tabela 6.5: Estimativas e resultados do 1^o teste de Shimotsu na série ν_t .

m	d	\hat{d}			W_c		
		b = 2	b = 4	b = 8	b = 2	b = 4	b = 8
200	0.345	0.377	0.157	0.297	24.179(*)	2.849	5.156
300	0.300	0.320	0.135	0.230	27.264(*)	3.377	5.024
400	0.112	0.152	-0.058	-0.057	8.356(*)	0.875	0.435
500	0.143	0.168	-0.016	-0.003	13.019(*)	0.086	0.001
600	0.162	0.179	0.033	0.047	17.853(*)	0.434	0.486
700	0.174	0.177	0.040	0.064	20.626(*)	0.770	1.055
800	0.102	0.107	-0.044	-0.055	8.686(*)	1.073	0.892

Tabela 6.6: Estimativas e resultados do 2^o teste de Shimotsu na série ν_t .

m	\hat{d}	Z_t	$\hat{\eta}_\mu$
200	0.345	-1.057	0.297
300	0.300	-0.917	0.351
400	0.112	-0.469	1.110(*)
500	0.143	-0.530	0.871(*)
600	0.162	-0.576	0.748(*)
700	0.174	-0.581	0.730(*)
800	0.102	-0.454	1.188(*)

(*) indica rejeição da hipótese nula ao nível de 5%.

Capítulo 7

Considerações e Perspectivas

7.1 Considerações Finais

Neste trabalho foram implementados os dois testes propostos por Shimotsu (2006) para distinguir processos $I(d)$ verdadeiros ou espúrios que englobam (assintoticamente) tanto processos $I(d)$ estacionários como não estacionários. Esses testes se fundamentam em algumas propriedades no domínio do tempo de processos $I(d)$ verdadeiros que os processos espúrios não conseguem reproduzir.

No decorrer do trabalho foi feita a explanação da metodologia utilizada, introduzindo modelos utilizados, testes empregados para a aplicação do tema, bem como uma extensa revisão bibliográfica acerca de memória longa e quebra estrutural.

Por fim, aplicamos os testes propostos na série construída dos log-retornos constituídos a partir de dados *intraday* de alta frequência da taxa de câmbio real, dólar. Em um primeiro momento, utilizou-se de uma investigação descritiva para

averiguar a possibilidade de quebras estruturais. Por conseguinte, com base em testes estatísticos, aplicou-se a metodologia descrita por Shimotsu (2006) a partir da implementação dos testes, que evidenciou a presença de quebra estrutural no contexto da série temporal.

Os resultados foram apresentados nas tabelas contidas no Capítulo 6 e mostram os resultados e estimativas de ambos os testes para a série observada. A dissertação deixa como futuras pesquisas a avaliação de uma modificação do algoritmo dos testes para séries que possuem algum tipo de tendência.

7.2 Perspectivas

Choi, Yu & Zivot (2010) discutem que o modelo ARFIMA é robusto para previsão mesmo que a memória seja gerada espúrialmente por quebras estruturais. Apesar disso, é importante que se estudem métodos estatísticos para a distinção desse fenômeno em análise de séries temporais.

Além da metodologia e aplicações apresentadas na dissertação, possíveis extensões dos testes de Shimotsu (2006) podem ser tratadas para futuras pesquisas. Entre elas, a inclusão de processos que possuem tendências ou padrões sazonais.

Chama a atenção a relativa simplicidade dos testes, apresentando bom poder estatístico para detectar padrões espúrios (Shimotsu, 2006). Assim, aperfeiçoamentos desse tipo de teste poderiam conduzir a bons resultados futuros.

Referências Bibliográficas

- [1] F. Altissimo e V. Corradi. *Strong Rules for Detecting the Number of Breaks in a Time Series*. Journal of Econometrics, 117, 2003.
- [2] D.W.K. Andrews. *Exactly Median-unbiased Estimation of First-order Autoregressive/Unit Root Models*. Econometrica, 61, 1993.
- [3] D.W.K. Andrews. *Tests for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point*. Econometrica, 61, 1993.
- [4] J. Bai. *Estimating Multiple Breaks One at a Time*. Econometric Theory, 1997.
- [5] J. Bai. *Estimation of a Change Point in Multiple Regression*. Review of Economics and Statistics, 1997.
- [6] J. Bai. *Least Squares Estimation of a Shift in Linear Process*. Journal of Time Series Analysis, 1994.
- [7] J. Bai e P. Perron. *Computation and Analysis of Multiple Structural Change Models*. Journal of Applied Econometrics, 18, 2003.

- [8] J. Bai e P. Perron. *Estimating and Testing Linear Models with Multiple Structural Changes*. *Econometrica*, 66, 1998.
- [9] R.T. Baillie. *Long-memory Processes and Fractional Integration in Econometrics*. *Journal of Econometrics*, Vol 73, 1996.
- [10] W.R. Bennett e S.O. Rice. *Spectral Density and Autocorrelation Functions Associated with Binary Frequency-Shift Keying*. *Bell System Technical Journal*, 42, 1963.
- [11] I. Berkes, L. Horvath, P. Kokoszka e Q.M. Shao. *On Discriminating Between Long-range Dependence and Changes in Mean*. *The Annals of Statistics*, 34, 2006.
- [12] R.L. Brown, J. Durbin e J.M. Evans. *Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships Over Time*. *Journal of the Royal Statistical Society, B*, 37, 1975.
- [13] D.O. Cajueiro e B.M. Tabak. *Evidence of Long Range Dependence in Asian Equity Markets: the Role of Liquidity and Market Restrictions*. *Physica A*, 342, 2004.
- [14] G.M. Caporale, J. Cunado e L.A. Gil-Alana. *Deterministic versus Stochastic Seasonal Fractional Integration and Structural Breaks*. *Statistics and Computing*, March, Vol.22(2), p.349(10), 2012.
- [15] G.M. Caporale e L.A Gil-Alana. *Modelling the US, UK and Japanese Unemployment Rates: Fractional Integration and Structural breaks*. *Computational Statistics and Data Analysis*, Vol.52(11), pp.4998-5013,2008.

- [16] L. Charfeddine. *True or Spurious Long-memory in Volatility: Further Evidence on the Energy Futures Markets*. Energy Policy, 71, 2014.
- [17] K. Choi, W-C. Yu e E. Zivot. *Long Memory versus Structural Breaks in Modeling and Forecasting Realized Volatility*. Econometrica, Vol. 28, No. 3, 2010.
- [18] G. C. Chow. *Tests of Equality Between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions*. Journal of International Money and Finance 29, p. 857–875, 1960.
- [19] S.Das, R. Gupta, P. Kanda, M. Reid, C. Tipoy e M. Zerihun. *Real interest Rate Persistence in South Africa: Evidence and Implications*. Economic Change and Restructuring, Vol.47(1), pp.41-62, 2012.
- [20] R.A. Davis, T.C.M. Lee e G.A. Rodriguez-Yam. *Structural Breaks Estimation for Non-Stationary Time Series Signals*. Journal of the American Statistical Association, Vol. 101, No. 473, 2006.
- [21] F.X. Diebold e G.D. Rudebusch. *Is Consumption too Smooth? Long memory and the Deaton Paradox*. Finance and Economics Discussion Series, 57, 1989.
- [22] F.X. Diebold e G.D. Rudebusch. *Long-memory and Persistence in Aggregate Output*. Journal of Monetary Economics, Vol 24, 1989.
- [23] J. Durbin e S.J. Koopman. *Time Series Analysis by State Space Methods*. Oxford Statistical Science, 2001.
- [24] R. Fox e M.S. Taqqu. *Large-Sample Properties of Parameter Estimates for*

- Strongly Dependent Stationary Gaussian Time Series*. Ann. Statist, Vol 14, Number 2, 1986.
- [25] L.A. Gardner Jr. *On Detecting Changes in the Mean Normal Variates*. Annals of Mathematical Statistics, 40, 1969.
- [26] R. Garcia e P. Perron. *An Analysis of the Real Interest Rate under Regime Shifts*. J. Stat. Plan. and Infer., 13, 1996.
- [27] P.G.F. Gérard-Marchant, D.E. Stooksbury e L. Seymour. *Methods for Starting the Detection of Undocumented Multiple Changepoints*. The Review of Economics and Statistics, MIT Press, 2008.
- [28] J.F. Geweke e S. Porter-Hudak. *The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models*. Journal of Time Series Analysis, 4, 1983.
- [29] L.A. Gil-Alana. *Fractional Integration and Structural Breaks at Unknown Periods of Time*. Journal of Time Series Analysis, Vol.29(1), pp.163-185, 2008.
- [30] L.A. Gil-Alana. *A Joint Test of Fractional Integration and Structural Breaks at a Known Period of Time*. Journal of Time Series Analysis, Vol.25(5), pp.691-700, 2004.
- [31] L.A. Gil-Alana e A. Moreno. *Fractional Integration and Structural Breaks in U.S. Macro Dynamics*. Empirical Economics, Vol.43(1), pp.427-446, 2012.
- [32] L.A. Gil-Alana, O.S. Yaya e A.A. Adepoju. *Fractional Integration and Structural Breaks in Bank Share Prices in Nigeria*. African Review of Money, Finance and Banking, 2015.

- [33] C.W.J. Granger. *Long Memory Relationships and the Aggregation of Dynamic Models*. Journal of Econometrics, 14, 1980.
- [34] C.W.J. Granger. *Some Properties of Time Series Data and their use in Econometric Model Specification*. Journal Econometrics, 16, 1981.
- [35] C.W.J Granger e N. Hyung. *Occasional Structural Breaks and Long-memory with an Application to the SP 500 Absolute Stock Returns*. Journal of Empirical Finance, 11, 2004.
- [36] C.W.J. Granger e R. Joyeux. *An Introduction to Long-memory Time Series Models and Fractional Differencing*. Journal of Time Series Analysis, Vol. I, 1980.
- [37] B.E. Hansen. *A Comparasion of Tests for Paramenter Instability: An Examination of Asymptotic Local Power*. University of Rochester, 1991a.
- [38] B.E. Hansen. *Tests for Parameter Instability in Regressions with $I(1)$ Processes*. Journal of Business and Economic Statistics, 10, 1992.
- [39] U. Hassler, P.M.M. Rodrigues e A. Rubia. *Persistence in the Banking Industry: Fractional Integration and Breaks in Memory*. Journal of Empirical Finance, 29, 2014.
- [40] D.M. Hawkings. *Testing a Sequence of Observations for a Shift in Location*. Journal of the American Stastistical Association, 72, 1977.
- [41] D.M. Hawkins e K.D. Zamba. *Statistical Process Control for Shifts in Mean or Variance using a Change Point Formulation*. Technometrics, 2005.

- [42] K.W. Hipel e A.I McLeod. *Preservation of the Rescaled Adjusted Range*. Water resources Res., 14, 1978.
- [43] J.R.M. Hosking. *Fractional Differencing*. Biometrika, Vol. 68, 1981.
- [44] J.R.M. Hosking. *Modelling Persistence in Hydrological Time Series Using Fractional Differencing*. Water Resources Res., 20, 1984.
- [45] H.E. Hurst. *Long-term Storage Capacity of Reservoirs*. Transactions of the American Society Civil Engineers, 116, 1951.
- [46] C.M. Hurvich e W.W. Chen. *An Efficient Taper for Potentially Overdifferenced Long Memory Time Series*. Journal of Time Series Analysis, 21, 2000.
- [47] C. Inclán e G.C. Tiao. *Use of Cumulative Sums of Squares for Retrospective Detection of Changes of Variance*. Journal of the American Statistical Association, 89, 1994.
- [48] T. Juhl e Z. Xiao. *Tests for Changing Mean with Monotonic Power*. Unpublished manuscript, Department of Economics, Boston College, 2005.
- [49] R.C. Jung e R. Maderitsch. *Structural Breaks in Volatility Spillovers Between International Financial Markets: Contagion or Mere Interdependence?*. Journal of Banking and Finance, 47, 2014.
- [50] M.L. King. *An Alternative Test for Regression Coefficient Stability*. Review of Economics and Statistics, 69, 1987.
- [51] S.J. Koopman, N. Shephard e J.A. Dornik. *State Space Models*. Springer New York, 2001.

- [52] H. Künsch. *Statistical Aspects of Self-Similar Processes*. In Proceedings of the First World Congress of the Bernoulli Society (Yu. Prokhorov and V. V. Sazanov, ed.1), VNU Science Press, Utrecht, 1987.
- [53] D. Kwiatkowski, P.C.B. Phillips, P. Schmidt e Y. Shin. *Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root: How Sure are we that Economic Time Series have a Unit Root?*. Journal of Econometrics, 54, 1992.
- [54] M. Lavielle e E. Moulines. *Least-squares Estimation of a Unknown Number of Shifts in a Time Series*. Journal of Time Series Analysis, 21, 2000.
- [55] M. Lavielle e G. Teyssière. *Detection of Multiple Change-Points in Multiple Time-series*. Lithuanian Mathematical Journal, Vol. 46, 2006.
- [56] W. Leland, M. Taqqu, W. Willinger e D. Wilson. *On the Self-Similar Nature of Ethernet Traffic (extended version)*. IEEE/ACM Transactions on Networking, N.2,1994.
- [57] J. Liu, S. Wu e J.V. Zidek. *On Segmented Multivariate Regression*. Statistica Sinica, 7, 1997.
- [58] A.W. Lo. *Long-term Memory in Stock Market Prices*. Econometrica, 59, 1991.
- [59] I.N. Lobato e N.E. Savin. *Real and Spurious Long-memory Properties of Stock-market Data*. Journal of Business and Economics Statistics, 16, 1998.
- [60] R.L. Lumsdaine e D.H. Papell. *Multiple Trend Breaks and the Unit Root Hypothesis*. Review of Economics and Statistics, 79(2), 1997.

- [61] B.B. Mandelbrot. *A Fast Fractional Gaussian Noise Generator*. Journal Water Resources Research, 7, 1971.
- [62] B.B. Mandelbrot e J.R. Wallis. *Robustness of the Rescaled Range R/S in the Measurement of Noncyclic Long run Statistical Dependence*. Journal Water Resources Research, 5, 1969.
- [63] L. Mayoral. *Testing for Fractional Integration Versus Short Memory with Structural Breaks*. Oxford Bulletin of Economics and Statistics, Vol.74(2), pp.278-305, 2012.
- [64] W. Mensi, S. Hammoudeh e S-M. Yoon. *Structural Breaks and Long-memory in Modeling and Forecasting Volatility of Foreign Exchange Markets of Oil Exporters: The Importance of Scheduled and Unscheduled News Announcements*. International Review of Economics and Finance, Elsevier, Vol. 30, 2014.
- [65] B.Q. Miao e L.C. Zhao. *On Detection of Change Points when the Number is Unknown*. Chinese J. Appl. Probab. Statist, 9(2), 1993.
- [66] A. Morettin e C.M.C. Tolo. *Análise de Séries Temporais*. Edgard Blücher, 2004.
- [67] M. Mudelsee. *Long-memory of Rivers from Spatial Aggregation*. Journal Water Resources Research, 2007.
- [68] J. Nyblom. *Testing for the Constancy of Parameters Over Time*. Journal of the American Statistical Association, 84, 1989.

- [69] J. Nyblom e T. Makalainen. *Comparisons of Tests for the Presence of Random Walk Coefficients in a Simple Linear Model*. Journal of the American Statistical Association, 78, 1983.
- [70] W.K. Newey e K.D. West. *A Simple, Positive Semi-definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix*. Econometrica, 55, 1987.
- [71] B.P. Oberlmann. *Estimação em Classes de Processos Estocásticos com Decaimento Hiperbólico da Função de Autocorrelação*. Ph.D. Thesis in the Mathematics Graduate Program. Federal University of Rio Grande do Sul, Porto Alegre. URL Address: www.mat.ufrgs.br/slopes, 2002.
- [72] B.P. Oberlmann, S.R.C. Lopes e A.O. Lopes. *Parameter Estimation in Manneville-Pomeau Process*. Unpublished manuscript. Source: arXiv:0707.1600, 2007.
- [73] A. Ohanissian, J.R. Russell e R.S. Tsay. *True or Spurious Long Memory? A New Test*. Journal of Business and Economics Statistics, 26, 2008.
- [74] H.C. Ombao, J.A. Raz, R. Von Sachs e B.A. Malow. *Automatic Statistical Analysis of Bivariate Nonstationary Time Series*. J. Am. Statist. Assoc., 96, 2001.
- [75] A.R. Pagan e K. Tanaka. *A Further Test for Assessing the Stability of Regression Coefficients*. Australian National University, 1981.
- [76] W. Palma. *Long-Memory Time Series: Theory and Methods*. Wiley Series in Probability and Statistics, 2007.

- [77] P. Perron. *A Test for Changes in a Polynomial Trend Function for a Dynamic Time Series*. Research Memorandum No. 363, Econometric Research Program, Princeton University, 1991.
- [78] P. Perron. *Dealing with Structural Breaks*. Boston University, 2005.
- [79] P. Perron. *Testing for a Unit Root in a Time Series with a Changing Mean*. Journal of Business and Economic Statistics, Vol. 8, No. 2, 1990.
- [80] P.C.B. Phillips e P. Perron. *Testing for a Unit Root in Time Series Regression*. Biometrika, Vol. 75, No. 2, 1988.
- [81] P. Perron e Z. Qu. *An Analytical Evaluation of the Log-periodogram Estimate in the presence of Level Shift and its Implications for Stock Returns Volatility*. Boston University, 2004.
- [82] P. Perron e Z. Qu. *Long-memory and Level Shifts in the Volatility of Stock Market Return Indices*. Journal of Business and Economic Statistics, 2010.
- [83] H. Pesaran e A. Timmermann. *Model Instability and Choice of Observation Window*. Economics Working Paper Series, Department of Economics, UC San Diego, 1999.
- [84] R.E. Quandt. *Tests of Hypotheses that a Linear System Obeys Two Separate Regimes*. Journal of the American Statistical Association, 55, 1960.
- [85] R.E. Quandt. *The Estimation of the Parameters of a Linear Regression System Obeying Two Separate Regimes*. Journal of the American Statistical Association, Vol. 53, 1958.

- [86] R Development Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2015.
- [87] M.A. Rivera-Castro, J.G.V. Mirand, D.O. Cajueiro e R.F.S Andrade. *Detecting Switching Points using Asymmetric Detrended Fluctuation Analysis*. *Physica A*, 391, 2012.
- [88] P.M. Robinson. *Gaussian Semiparametric Estimation of Long Range Dependence*. *Annals of Statistics*, 23, 1995.
- [89] P.M. Robinson. *Time Series with Strong Dependence*. In C.A. Sims (ed.), *Advances in Econometrics: Sixth World Congress*, vol. 1, Cambridge, Cambridge University Press, 1994.
- [90] K. Shimotsu. *Simple (But Effective) Tests of Long Memory versus Structural Breaks*. Working Papers 1101, Queen's University, Department of Economics, 2006.
- [91] F.B. Sowell. *Fractionally Integrated Vector Time Series*. PhD thesis, Duke University, 1986.
- [92] F.B. Sowel. *Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models*. *Journal Econometrics*, 53, 1992b.
- [93] F.B. Sowell. *Modelling Long run Behavior with the Fractional ARIMA Model*. *Journal Monet. Econ.*, 29, 1992a.
- [94] B.M Tabak e D.O. Cajueiro. *Are the Crude oil Markets Becoming Weakly Efficient Over Time? A Test for Time-varying Long-range Dependence in Prices and Volatility*. *Energy Economics*, 29, 2006.

- [95] T.J. Vogelsang. *Sources of Nonmonotonic Power when Testing for a Shift in Mean of a Dynamic Time Series*. Journal of Econometrics, 88, 1999.
- [96] J. Zhou e S.Y. Liu. *Inference for Mean Change-point in Infinite Variance AR(p) Process*. Stat. Probab. Lett., 79, 2009.
- [97] Y.C. Yao. *Estimating the Number of Change-points via Schwarz Criterion*. Statistics and Probability Letters, Vol. 6, 1988.
- [98] G. Yang e L.C. Bowling. *Detection of Changes in Hydrologic System Memory Associated with Urbanization in the Great Lakes Region*. Water Resources Research, Vol. 50, 2014.
- [99] F. Yusof, I.L. Kane e Z Yusop. *Structural Break or Long-memory: an Empirical Survey on Daily Rainfall data sets Across Malaysia*. Hydrology and Earth System Sciences, 2013.
- [100] W. Wang, P.H.A.J.M. Van Gelder, J.K. Vrijling e X. Chen. *Detecting Long-memory: Monte Carlo Simulations and Application to Daily Streamflow Processes*. Hydrol. Earth Syst. Sci., 11, 2007.
- [101] P. Whittle. *Gaussian Estimation in Stationary Time Series*. Bull. Inst. Internat. Statist, 39, 1962.
- [102] P. Whittle. *The Analysis of Multiple Stationary Time Series*. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol 15, 1953.

Apêndice A

Testes Complementares

```
1  ## Pacotes necessarios para as funcoes implementadas.
2  library(corpcor)
3  library(MASS)
4
5  ## Estimador Whittle.
6  whittle = function(d, x, m) {
7    n = length(x)
8    t = c(0:(n-1))
9
10   lambda = (2*pi*t)/n
11   wx = (2*pi*n)^(-1/2)*Conj(fft(Conj(x)))*exp(1i*lambda)
12   lambda = lambda[2:m+1]
13   wx = wx[2:m+1]
14   ix = wx*Conj(wx)
15
16   g = mean((lambda^(2*d))*ix)
17   r = log(g) - 2*d*mean(log(lambda))
18 }
19
20 ## Teste Phillips-Perron (PP).
21 pperron = function(x,m,opt) {
22   n = length(x)
23   y = x[2:n]
24   xlag = x[1:n-1]
25   x1 = c()
26
27   if(opt==0){x1 = xlag}
28   if(opt==1) {x1 = cbind(xlag, matrix(1, (n-1), 1))}
29   if(opt==2) {x1 = cbind(xlag, rep(1, n-1), 2:n-1)}
30
31
```

```

32   if (opt==0) {beta = ginv(matrix(x1,nrow=length(x1),ncol=1))%*%matrix(y,nrow=length(y),ncol=1)}
33   if (opt==1) {beta = ginv(matrix(x1,nrow=nrow(x1),ncol=ncol(x1)))%*%matrix(y,nrow=length(y),ncol=1)}
34   if (opt==2) {beta = ginv(matrix(x1,nrow=nrow(x1),ncol=ncol(x1)))%*%matrix(y,nrow=length(y),ncol=1)}
35
36   alpha = beta[1]
37
38   if (opt==0) {u = y - x1*beta}
39   if (opt==1) {u = y - x1%*%beta}
40   if (opt==2) {u = y - x1%*%beta}
41
42   s2 = as.numeric(t(u)%*%u/n)
43   prod = rep(0,m)
44
45   for(j in 1:m){
46     prod[j] = u[(j+1):(n-1)]%*%t(t(u[1:(n-1-j)]))
47   }
48
49   st1 = as.numeric(s2 + 2%*%(1-(1:m)/(m+1))%*%(prod/n))
50
51   if (opt==0){xx = as.numeric((t(xlag)%*%xlag)/(n^2))
52   za = as.numeric(n%*%(alpha-1)-(1/2)%*%(st1-s2)/xx)
53   zt = as.numeric(sqrt(t(xlag)%*%xlag)%*%(alpha-1)/sqrt(st1)-(1/2)%*%(st1-s2)/sqrt(st1%*%xx))}
54
55   if (opt==1){m = as.numeric(t((xlag-mean(xlag))%*%(xlag-mean(xlag)))/(n^2))
56   za = as.numeric(n%*%(alpha-1)-(1/2)%*%(st1-s2)/m)
57   zt = as.numeric(n*sqrt(m)%*%(alpha-1)/sqrt(st1)-(1/2)*(st1-s2)/sqrt(st1*m))}
58
59   if (opt==2){myy = as.numeric(t(xlag)%*%xlag/n/n)
60   my = sum(xlag)/n/sqrt(n)
61   mty = as.numeric((xlag%*%t(t(2:n-1)))/n/n/sqrt(n))
62   M = as.numeric((1-n^(-2))%*%any-12%*%anty%*%anty+12%*%(1+1/n)%*%anty%*%any-(4+6/n+2/n/n)%*%any%*%any)
63   za = as.numeric(n%*%(alpha-1)-(1/2)%*%(st1-s2)/M)
64   c3 = as.numeric(solve(t(x1)%*%x1))
65   c3 = c3[1]
66   zt = as.numeric((alpha-1)/sqrt(c3%*%st1)-(1/2)%*%(st1-s2)/sqrt(st1%*%M))}
67
68   saida = data.frame(za,zt)
69   return(saida)
70 }
71
72 ## Teste Kwiatkowski, Phillips, Schmidt & Shin (KPSS).
73 kpss = function(x,m,opt) {
74   n = length(x)
75
76   if (opt==0){e = x - sum(x)/n}
77
78   else{z = cbind(rep(1,n),(1:n))
79   z1 = t(z)%*%z
80   e = x-z%*%(ginv(matrix(z1,nrow=nrow(z1),ncol=ncol(z1)))%*%
81   t(matrix(z,nrow = nrow(z),ncol = ncol(z))))%*%matrix(x,nrow=length(x),ncol=1)
82

```



```

83     prod = rep(0,m)
84     for(j in 1:m){
85         prod[j] = t(e[(j+1):n])%*%e[1:(n-j)]
86     }
87
88     s2 = as.numeric((t(e)%*%e + 2%*%(1-(1:m)/(m+1))%*%prod)/n)
89     S = cumsum(e)
90     eta = as.numeric((t(S)%*%S)/(n^2)/s2)
91
92     return(eta)
93 }
94 }
95
96 ## Funcao para diferenciar a serie.
97 fracdiff = function(x,d) {
98
99     T = length(x)
100     np2 = nextn(2*T - 1,2)
101     k = 1:(T-1)
102     b = c(1,cumprod((k-d-1)/k))
103     dx = fft(fft(c(b,rep(0,np2-T)))*fft(c(x,rep(0,np2-T))),inverse=T)/np2
104
105     return(Re(dx[1:T]))
106 }

```

Apêndice B

Testes Shimotsu

```
1
2 ## Teste 1 - Shimotsu.
3 split = function(x,m,bset){
4   n = length(x)
5   bb = length(bset)
6   w = rep(0,bb)
7   avedhat = rep(0,(bb+1))
8   dhats = c()
9
10  dhat0 = optim(par = c(0.5),whittle, x=x, m=m, method = "BFGS")$par
11
12  avedhat[1] = dhat0
13  dhats[1] = cbind(dhats,dhat0)
14
15  for(l in (1:bb)){
16
17    b = bset[l]
18    dhat = rep(0,b)
19    dim(x) = c((n/b),b)
20
21    for(k in (1:b)){
22      m1 = m/b
23      dw = c()
24
25      dw[k] = optim(par = c(0.5),whittle, x= x[,k], m=m1,method = "BFGS")$par
26
27      dhat = c(rep(0,b-1),dw[k])
28      avedhat[(l+1)] = mean(dhat)
29    }
30
31  dhats = cbind(dhats, t(dhat))
```

```

32     t = t((1:m1))
33     myu = log(t) - mean(log(t))
34     cml = as.numeric(myu%%t(myu))
35     #fator de correcao: cm=m1 wald sem correcao
36
37     diffvec = kronecker(matrix(1,b,1),dhat0) - dhat
38     vmat = b*diag(b) - matrix(1,b,b)
39     w[1] = (4*m*(cml/m1))*t(diffvec)%pseudoinverse(vmat)%diffvec
40 }
41
42 saida = list(w,avedhat,dhats)
43 return(saida)
44 }
45
46 ## Teste 2 - Shimotsu.
47 diff_pp_kpss = function(x,d,h,opt){
48     if(opt==1){n = length(x)
49         z = cbind(rep(1,n),1:n)
50         z1 = t(z)%z
51         pmat = matrix(z,nrow = nrow(z),ncol=ncol(z))%(ginv(matrix(z1,nrow=nrow(z1),ncol=ncol(z1)))))%
52             t(matrix(z,nrow = nrow(z),ncol = ncol(z)))
53         x = x - pmat%x}
54
55     weight = as.numeric((d<=0.5)+(1/2)*(1+cos(4*pi*d)))*(d>0.5)*(d<0.75))
56
57     if(d < 0){h=m}
58     else{h = floor(m^d)}
59
60     myuhat = as.numeric(weight*mean(x) + (1-weight)%x[1])
61     x = x - myuhat
62     e = fracdiff(x,d)
63     ee = cumsum(e)
64
65     eta = kpss(e,h,opt)
66     perron = pperron(ee,h,opt)
67
68     saida = list(eta,perron)
69     return(saida)
70 }

```

Apêndice C

Tabela 5.1

```
1  ## Pacote Arfima.
2  library(arfima)
3
4  ## Simulacao de 5000 series I(0.4) com 5000 observacoes.
5  set.seed(64247643)
6  serie = replicate(5000,arfima.sim(5000,model=list(dfrac =0.4)))
7
8  ## Parametros para os testes de Shimotsu.
9  m = c(200,400,600,800)
10 bset = c(2,4,8)
11
12 ## Teste 1 Shimotsu.
13 teste_200 = apply(serie,2,function(z){split(z,m[1],bset)})
14 teste_400 = apply(serie,2,function(z){split(z,m[2],bset)})
15 teste_600 = apply(serie,2,function(z){split(z,m[3],bset)})
16 teste_800 = apply(serie,2,function(z){split(z,m[4],bset)})
17
18 ## Estimativas do parametro d para cada valor de m e b.
19 d200 = sapply(1:5000,function(z){unlist(data.frame(teste_200[[z]][3]))})
20 d200_final = c(mean(d200[1,]),mean(d200[3,]),mean(d200[7,]),mean(d200[15,]))
21 d400 = sapply(1:5000,function(z){unlist(data.frame(teste_400[[z]][3]))})
22 d400_final = c(mean(d400[1,]),mean(d400[3,]),mean(d400[7,]),mean(d400[15,]))
23 d600 = sapply(1:5000,function(z){unlist(data.frame(teste_600[[z]][3]))})
24 d600_final = c(mean(d600[1,]),mean(d600[3,]),mean(d600[7,]),mean(d600[15,]))
25 d800 = sapply(1:5000,function(z){unlist(data.frame(teste_800[[z]][3]))})
26 d800_final = c(mean(d800[1,]),mean(d800[3,]),mean(d800[7,]),mean(d800[15,]))
27
28 ## Estatistica de Wald para cada valor de m e b.
29 w200 = sapply(1:5000,function(z){unlist(data.frame(teste_200[[z]][1]))})
30 w400 = sapply(1:5000,function(z){unlist(data.frame(teste_400[[z]][1]))})
31 w600 = sapply(1:5000,function(z){unlist(data.frame(teste_600[[z]][1]))})
```

```

32 w800 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(data.frame(teste_800[[z]][1]))})
33
34 ## Teste 2 Shimotsu.
35 teste1_200 = apply(serie, 2, function(z){ x<<-1; x<<- x+1; unlist(data.frame(diff_pp_kpss(z, d = d200[1, x], h, 0)))})
36 teste1_400 = apply(serie, 2, function(z){ x<<-1; x<<- x+1; unlist(data.frame(diff_pp_kpss(z, d = d400[1, x], h, 0)))})
37 teste1_600 = apply(serie, 2, function(z){ x<<-1; x<<- x+1; unlist(data.frame(diff_pp_kpss(z, d = d600[1, x], h, 0)))})
38 teste1_800 = apply(serie, 2, function(z){ x<<-1; x<<- x+1; unlist(data.frame(diff_pp_kpss(z, d = d800[1, x], h, 0)))})
39
40 ## Estatisticas Eta e Zt.
41 zt200 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(teste1_200[[z]][[1]][1])})
42 zt400 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(teste1_400[[z]][[1]][1])})
43 zt600 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(teste1_600[[z]][[1]][1])})
44 zt800 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(teste1_800[[z]][[1]][1])})
45
46 eta200 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(teste1_200[[z]][[2]][2])})
47 eta400 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(teste1_400[[z]][[2]][2])})
48 eta600 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(teste1_600[[z]][[2]][2])})
49 eta800 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(teste1_800[[z]][[2]][2])})
50
51 ## Estatisticas Eta e Zt.
52 eta200 = teste1_200[1,]; zt200 = teste1_200[3,]
53 eta400 = teste1_400[1,]; zt400 = teste1_400[3,]
54 eta600 = teste1_600[1,]; zt600 = teste1_600[3,]
55 eta800 = teste1_800[1,]; zt800 = teste1_800[3,]

1 ## Pacote Arfima.
2 library(arfima)
3
4 ## Simulacao de 5000 series I(0.4) com 5000 observacoes.
5 set.seed(64247643)
6 serie_theta = replicate(5000, arfima.sim(5000, model=list(dfrac = 0.2, phi = 0.6)))
7
8 ## Parametros para os testes de Shimotsu.
9 m = c(200, 400, 600, 800)
10 bset = c(2, 4, 8)
11
12 ## Teste 1 Shimotsu.
13 teste1_200 = apply(serie_theta, 2, function(z){ split(z, m[1], bset)})
14 teste1_400 = apply(serie_theta, 2, function(z){ split(z, m[2], bset)})
15 teste1_600 = apply(serie_theta, 2, function(z){ split(z, m[3], bset)})
16 teste1_800 = apply(serie_theta, 2, function(z){ split(z, m[4], bset)})
17
18 ## Estimativas do parametro d para cada valor de m e b.
19 dd200 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(data.frame(teste1_200[[z]][3]))})
20 d200_final1 = c(mean(dd200[1,]), mean(dd200[3,]), mean(dd200[7,]), mean(dd200[15,]))
21 dd400 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(data.frame(teste1_400[[z]][3]))})
22 d400_final1 = c(mean(dd400[1,]), mean(dd400[3,]), mean(dd400[7,]), mean(dd400[15,]))
23 dd600 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(data.frame(teste1_600[[z]][3]))})
24 d600_final1 = c(mean(dd600[1,]), mean(dd600[3,]), mean(dd600[7,]), mean(dd600[15,]))
25 dd800 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(data.frame(teste1_800[[z]][3]))})
26 d800_final1 = c(mean(dd800[1,]), mean(dd800[3,]), mean(dd800[7,]), mean(dd800[15,]))

```

```

27
28 ## Estatística de Wald para cada valor de m e b.
29 ww200 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(data.frame(teste1_200[[z]][1]))})
30 ww400 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(data.frame(teste1_400[[z]][1]))})
31 ww600 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(data.frame(teste1_600[[z]][1]))})
32 ww800 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(data.frame(teste1_800[[z]][1]))})
33
34 ## Teste 2 Shimotsu.
35 m = 200
36 teste2_200=apply(serie_theta, 2, function(z){x<<-1;x<<-x+1;unlist(data.frame(diff_pp_kpss(z, d=dd200[1, x], h, 0)))})
37 m = 400
38 teste2_400=apply(serie_theta, 2, function(z){x<<-1;x<<-x+1;unlist(data.frame(diff_pp_kpss(z, d=dd400[1, x], h, 0)))})
39 m = 600
40 teste2_600=apply(serie_theta, 2, function(z){x<<-1;x<<-x+1;unlist(data.frame(diff_pp_kpss(z, d=dd600[1, x], h, 0)))})
41 m = 800
42 teste2_800=apply(serie_theta, 2, function(z){x<<-1;x<<-x+1;unlist(data.frame(diff_pp_kpss(z, d=dd800[1, x], h, 0)))})
43
44 ## Estatísticas Eta e Zt.
45 zt200_1 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(teste2_200[[z]][[1]][1])})
46 zt400_1 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(teste2_400[[z]][[1]][1])})
47 zt600_1 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(teste2_600[[z]][[1]][1])})
48 zt800_1 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(teste2_800[[z]][[1]][1])})
49
50 eta200_1 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(teste2_200[[z]][[2]][2])})
51 eta400_1 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(teste2_400[[z]][[2]][2])})
52 eta600_1 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(teste2_600[[z]][[2]][2])})
53 eta800_1 = sapply(1:5000, function(z){ unlist(teste2_800[[z]][[2]][2])})

```

Apêndice D

Aplicação

```
1
2 ## Pacotes para ajustar banco de dados.
3 library(doBy)
4 library(arfima)
5
6 ## Carrega os dados.
7 dados = read.csv2('dados_disser.csv',header=T,stringsAsFactors = F)
8
9 ## Converte as colunas em caracter e numerico.
10 dados[1:8] = lapply(dados[1:8], as.character)
11 dados[3:4] = lapply(dados[3:4], as.numeric)
12
13 ## Grafico da serie do preco da taxa de cambio.
14 serie_compl = ts(dados[[3],start = c(2008, 1), frequency = 235000)
15 plot(serie_compl,ylab =expression(" *X[t] *"),xlab='Anos' )
16
17 ## Constroi serie da variancia dos precos.
18 dados[[date] = strptime(dados[[1], "%m/%d/%Y")
19 ND= summaryBy(V3~date, data=dados, FUN=var, na.rm=TRUE)
20 ND2 = ND[order(as.Date(ND[[date], format="%m/%d/%Y" ) ),]
21 r.v = as.ts(ND2[[V3].var)
22 r.v = subset(r.v, r.v >0)
23
24 ## Cria a serie logaritma da variancia dos precos e anexa no data.frame.
25 lrv = log(r.v)
26 ND3 = data.frame(r.v,lrv)
27
28 ## Grafico da FAC das series.
29 acf(ND3[[r.v],200)
30 acf(ND3[[lrv],200)
31
```

```
32 ## Cria o objeto ts para plotar o grafico.
33 serie1 = ts(ND3$lrv)
34 serie2 = ts(ND3$lrv, start = c(2008, 2), frequency = 330)
35
36 ## Grafico da serie logaritimo da variancia dos precos e FAC.
37 par(mfrow=c(2,1))
38 plot(serie2, ylab =expression("*v[t]*"), xlab='Anos' )
39 acf(serie1, lag=400, main='')
40 dev.off()
41
42 ## Ajuste para aplicacao dos testes de Shimotsu.
43 ND3 = ND3[-c(2145:2149),]
44
45 ## Aplica o Teste 1 para a serie logaritima da variancia dos precos.
46 bset = c(2,4,8)
47 m = c(200,300,400,500,600,700,800)
48
49 resultado_lrv2 = c()
50 for(i in 1:length(m)){
51   resultado_lrv2[[i]] = split(ND3$lrv, m[i], bset)
52 }
53
54 ## Aplica o Teste 2 para a serie log. da variancia dos precos.
55 resultado1_lrv2 = c()
56 for(k in 1:length(m)){
57   for(i in 1:length(resultado_lrv2)){
58     m = c(100,150,200,250,300,350,400)
59     m = m[k]
60     resultado1_lrv2[[i]] = diff_pp_kpss(ND3$lrv, resultado_lrv2[[i]][[2]][1], h, 0)
61   }
62 }
```