UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Simetrias de Lie de equações a derivadas fracionárias e íntegro-diferenciais

CARLOS CÉSAR DA SILVA JÚNIOR

Brasília, 1 de agosto de 2016

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Simetrias de Lie de equações a derivadas fracionárias e íntegro-diferenciais

Por

CARLOS CÉSAR DA SILVA JÚNIOR

Orientador

Prof. Dr.Tarcísio Marciano da Rocha Filho

Dissertação submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília

como requisito para obtenção do título de Mestre em Física

Simetrias de Lie de equações a derivadas fracionárias e íntegro-diferenciais

Por

Carlos César da Silva Júnior

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada por:

Prof. Tarcísio Marciano Rocha Filho

(Orientador) IF - UnB

Prof. Ademir Eugênio de Santana

IF - UnB

Prof. Ronni Geraldo Gomes de Amorim

IF - UnB

“Impossible? We did a lot of impossible things on this journey.

I’m tired of hearing that things are impossible or useless.

Those words mean nothing to us.”

Kujo Jotaro

Agradecimentos

Começo agradecendo a Deus, pois sem ele nada seria possível.

Agradeço a meu orientador, por todo o suporte e entendimento ao longo desta jornada, indo além do esperado para seu trabalho.

Agradeço a minha mãe, por ser mãe e cumprir esse papel da melhor maneira possível. A minha tia Vilma que sempre esteve do meu lado e sempre me apoiou. Aos meus familiares, principalmente Érica, Silmária e Rodrigo, por todo suporte oferecido nesses dois anos.

Aos meus mais que amigos Hugo, Crístyan, Flávio, Ítalo, Rogério, Pablo, Renato, Marcelino, Júnior, Mônica, Maria Luísa, Joaquim e Pedro, por todos os momentos de descanso intelectual e discussões profissionais ou não. Aos amigos que conheci na graduação e no mestrado, Wendson, Maykon, Oziel, Ferreira, Solano e Paulo, por todas as horas dedicadas ao conhecimento em Física.

Em especial, gostaria de agradecer a minha esposa, Jéssica Lemos, que sempre esteve e sempre estará no meu coração. Esse trabalho não seria possível sem o seu suporte.

Resumo

Nesta dissertação, são discutidos alguns modelos para encontrar geradores de simetrias de Lie. Essas simetrias são importantes para mapear soluções (embora a princípio esse ponto não seja o foco desse trabalho). Os modelos classícos da simetria de Lie são apresentados, e com eles, modelos para encontrar simetrias de equações íntegro-diferenciais e fraciónarias são construidos. Geradores de uma mesma equação são encontrados usando dois modelos diferentes, com o objetivo de demonstrar a equivalência entre esses modelos.

Abstract

This dissertation will discuss about some methods to find Lie's symmetry generators. These symmetries are important to map solutions (although it will not be considered the focus of this work). Classic Lie's symmetry methods are presented, and alongside with them, other methods of Integro-differential and fractional equations are built to find symmetries. Generators from the same equation are found by using two different models, aiming to demonstrate equivalence between these methods.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho trata de um introdução as aplicações de análise de grupo de Lie, para equações com operadores não-locais, através de alguns modelos. Equações com operadores não-locais incluem equações integro-diferenciais (E.I.D), equações diferenciais estocásticas e outros exemplos menos conhecidos. Elas tem sido estudadas há bastante tempo na matemática, física e engenharia. Neste trabalho nós iremos focar nas equações íntegro-diferenciais e equações com derivadas fracionárias

As E.I.D são equações que apresentam termos diferenciais e integrais, as mais conhecidas são as equações cinéticas (E.C) que formam a base da teoria cinética de gases rarefeitos, transferência de radiação e outros. A equação cinética de Boltzmann na dinâmica dos gases rarefeitos[1] e a equação de Vlasov na física de plasmas [2] são exemplos desse tipo de equação. As equações fracionárias são um tipo particular de E.I.D, são equações com derivadas não inteiras , que descrevem principalmente fenômenos não lineares

Atualmente poucos resultados computacionais sobre simetrias para esses tipos de equações, podem ser encontrados na literatura, portanto, uma análise matemática completa e rigorosa, ainda não está definida. Este trabalho objetiva preencher um pouco desse vazio existente. Iremos mostrar que existem relações entre a teoria clássica de Lie (para equações diferenciais ordinárias e parciais) e as equações íntegro-diferenciais e fracionárias. Ainda não somos capazes de encontrar soluções completas para todas as equações, por isso iremos focar nossos esforços em encontrar subgrupos de simetrias e quando possível um conjunto de soluções.

Este trabalho se organiza da seguinte maneira: no capítulo 2 são revisados alguns aspectos básicos sobre grupos e álgebra de Lie. No capítulo 3 se demonstra a teoria Lie clássica e como se encontrar um subgrupo de simetrias. O capítulo 4, descreve os métodos de simetrias para equações íntegro-diferenciais e fracionárias e uma comparação entre os modelos

Capítulo 2

Grupos e Álgebras de Lie

Nessa dissertação, utilizamos as ferramentas matemáticas da teoria das simetrias de Lie e soluções de grupo. Antes de utilizar tais ferramentas para poder encontrar as simetrias de equações diferenciais para poder resolvê-las, precisamos dominar os conceitos matemáticos para o tratamento das simetrias. [3],[4] e [5].

A mais importante forma de estudar simetrias é utilizando a teoria de grupos, esta álgebra é adaptada para o tratamento de um conjunto de transformações. Por possuir tal característica ela é importante para físicos e matemáticos.

2.1 Grupos

Um grupo G é:

a) um conjunto de elementos g_1,g_2,g_3 ,...,$g_n \in$ G

Onde temos:

α) um operação de grupo chamada de multiplicação ($\circ$) que deve obedecer:

1. $g_i \in$ G, $g_j \in$ G $\rightarrow g_i \circ g_j \in$ G   Completeza
2. $g_i \circ (g_j \circ g_k) = (g_i \circ g_j) \circ g_k$ Associatividade
3. $g_1 \circ g_i = g_i = g_i \circ g_1$ Elemento Identidade
4. $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = g_1$ Inversão

Um grupo pode ser classificado em relação ao número de elementos(finito ou infinito) e a natureza contável ou incontável de seus elementos (discretos ou contínuos)

Exemplos

1. Um conjunto de rotações em um círculo por múltiplos de $\frac{2\pi}{n}$ radianos forma um grupo com n operações distintas. Grupos finitos como esse são ditos de ordem n

2. O conjunto dos números reais forma um grupo sob a adição. A identidade é o número zero e o elemento inverso de x é -x

3. O conjunto de matrizes reais n $\times$ n não singulares (matrizes cujos determinantes são diferentes de zero), sob a multiplicação de matrizes, forma um grupo conhecido como Gl(n,r) (General Linear). O conjunto de matrizes n $\times$ com determinante 1 também forma um grupo, chamado SL(n,r) (Special Linear). O conjunto de matrizes unitárias n $\times$ n forma o grupo U(n)

2.2 Espaços Topológicos

Um espaço topológico T é formado por um conjunto de pontos, denominados D, sobre o qual se aplica uma topologia Υ. Uma topologia é formada por subconjuntos D_1, D_2, D_3,... $\subset$ D que obedece alguns axiomas:

1. O conjunto vazio($\varnothing$) e o conjunto D pertencem a Υ.

$$\varnothing \in \Upsilon, \mathrm{D} \in \Upsilon$$

2. Intersecções finitas de elementos de Υ são elementos de Υ.

$$\bigcap_{i}^{finita} D_i \in \Upsilon$$

3. Uniões arbitrárias de elementos de Υ são elementos de Υ.

$$\bigcup_{i}^{qualquer} D_i \in \Upsilon$$

Os elementos D_i da topologia são chamados de conjuntos abertos.

Um espaço topológico que obedece 1, 2 e 3 não é muito restrito. Portanto, nesse trabalho iremos usar mais um axioma:

4. Se m $\in \Upsilon$, n $\in \Upsilon$, m $\neq$ n, então existem $D_m \in \Upsilon$, $D_n \in \Upsilon$ que obedecem as propriedades m $\in D_m$, n $\in D_n$, $D_m \cap D_n = \varnothing$ um espaço topológico que obedece ao axioma 4 é chamado de espaço Hausdorff. Um conjunto aberto D_m contendo m é chamado uma vizinhança de m.

Exemplo

O espaço Euclidiano R_n (n finito) é um espaço de Hausdorff no regime topológico de esfera ou de cubo. A esfera topológica é gerada pelo interior de esferas de raios e centros arbitrários. A topologia consiste de todos os tais conjuntos abertos, juntamente com as uniões aleatórias e intersecções finitas. O cubo topológico é gerado pelo interior de cubos com centros e tamanho das arestas arbitrários, juntamente com as uniões aleatórias e intersecções finitas. Ambas as topologias são equivalentes. É fácil ver que dois pontos quaisquer podem ser separados, obedecendo assim o quarto axioma.

Podemos definir ainda, mais três conceitos adicionais:

1. O espaço D é compacto se toda sequência infinita de pontos d_1, d_2, d_3, ... $\in$ D contém uma subsequência de pontos que converge para um ponto em D

2. Seja ψ um mapa do espaço D com topologia Υ no espaço Z com topologia ζ. O conjunto de todos os pontos d_1, d_2, d_3, ... $\in$ D que são levados ao mesmo ponto z $\in$ ζ é chamado imagem inversa de todos s conjuntos abertos em ζ é um conjunto aberto em D

3. Um conjunto S é fechado se contem todos os seus pontos de acumulação. Um ponto m é um ponto de acumulação se todos os conjuntos abertos contendo m contem pelo menos um ponto de S diferente de m. S junto de todos os seus pontos de acumulação são chamados de fecho de S.

2.3 Atlas

Um atlas de Classe C^k numa superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$ é um coleção ϖ de parametrizações: $U_0 \rightarrow$ U $\subset$ M, de classe A^k, tal que os conjuntos abertos U formam uma cobertura de M. [6]

Um atlas ϖ sobre um espaço topológico é diferenciável de classe A^k (k $\in \mathbb{N}^*$) se qualquer mudança de coordenadas num ponto (x,y) $\in \varpi$ são aplicações de classe A^k. Como $(x, y) = \frac{1}{(y,x)}$, (x,y) é um difeomorfismo de classe A^k. Escrevendo (x,y) como (x^1, x^2, ...,x^m) $\mapsto$ (y^1, y^2, ...,y^m) , então o jacobiano é não nulo em todo x. As mudanças de coordenada em um atlas são possíveis se e somente se $\varpi \cup$ z (onde z é a nova coordenada) é também um atlas de classe A^k em M.

Um atlas ϖ de dimensão m e classe A^k, sobre M, é máximo quando contém todos os sistemas locais de coordenadas que são possíveis para ϖ. Se o atlas não for máximo, o mesmo pode ser ampliado acrescentando todos os sistemas de coordenadas admissíveis.

2.4 Variedade diferenciáveis

Na sessão anterior definimos o que é um atlas, agora podemos definir variedade diferenciável, ou simplesmente VD. Uma VD de m-ésima dimensão e de classe A^k, pode ser descrita como um par ordenado (M,ϖ) onde M é um espaço topológico de Hausdorff e ϖ é um atlas máximo (essa condição não é essencial, entretanto alguns teoremas importantes exigem essa hipótese, exemplo disso o teorema de imersão de Whitney[6] de dimensão m.

As variedades diferenciáveis devem seguir as seguintes propriedades:

1. M é espaço topológico de Hausdorff com base enumerável.

2. ϖ é uma coleção de homeomorfismos x: U $\rightarrow \mathbb{R}^m$, de conjuntos abertos U $\subset$ M sobre abertos x(U) $\subset \mathbb{R}^m$.

3. Os domínios U dos homeomorfismos x $\in \varpi$ cobrem M.

4. Dados x: U $\rightarrow \mathbb{R}^m$ e y: V $\rightarrow \mathbb{R}^m$ com U $\cap$ V $\neq \varnothing$, então (x,y); x(U $\cap$ V) $\rightarrow$ y(U $\cap$ V) é um homeomorfismo de classe C^k.

5. Dado um homeomorfismo z: W $\rightarrow \mathbb{R}^m$ de um aberto W $\cap$ M sobre um aberto z(W) $\cap \mathbb{R}^m$, tal que (z,x) e (x,z) são de classe A^k para cada x $\in \varpi$, então z $\in \varpi$.

2.5 Grupos de Lie

Um grupo topológico ou grupo contínuo consiste de uma variedade diferenciável n-dimensional M e uma operação ψ que mapeia cada par de pontos(β, α) em outro ponto γ, podemos escrever:

$$\gamma^{\mu} = \psi^{\mu}(\beta^1, \beta^2, ...\beta^n; \alpha^1, \alpha^2, ...\alpha^n); \tag{2.1}$$

onde μ = 1,2,...n

A função ψ: $\beta \times \alpha \rightarrow \gamma = \beta\ \alpha$ deve ser contínua, e α deve ser inversível.

Os grupos de Lie possuem dois tipos de estrutura, uma algébrica e uma topológica. Portanto, devem obedecer a todos os axiomas de ambas as estruturas. Aplicando as propriedades em ψ:

1. $\gamma^{\mu} = \psi^{\mu}(\beta,\alpha)$ onde $\alpha,\beta,\gamma \in$ M

2. $\psi^{\mu}(\gamma,\psi(\beta,\alpha)) \equiv \psi^{\mu}(\psi(\gamma,\beta),\alpha)$

3. $\psi^{\mu}\ (\epsilon,\alpha) = \alpha^{\mu} = \psi^{m}u\ (\alpha,\epsilon)$

4. $\psi^{\mu}\ (\alpha,\alpha^{-1}) = \epsilon^{\mu} = \psi^{m}u\ (\alpha^{-1},\alpha)$

2.6 Geradores Infinitesimais

Seja um grupo de Lie que atua num espaço geométrico G, por meio de uma transformação de coordenadas. Agora escolhendo uma função F(p) onde qualquer p pertença ao espaço G. Dado o sistema de coordenadas para G, podemos escrever p como sendo:

$$p \to x^1(p),\ x^2(p),\ x^3(p),\ ...,\ x^N(p).$$

A função F pode ser escrita em função dos parâmetros no sistema de coordenada S,x^i(p):

$$F(p) = F^S[x^1(p),\ x^2(p),\ x^3(p),\ ...,\ x^N(p)].$$

Em um outro sistema de coordenadas ($S^{'}$) as coordenadas de p mudam. Para que o valor de F(p) se mantenha fixo a função F deve mudar de forma:

$$F(p) = F^{S^{'}}[x^{'1}(p),\ x^{'2}(p),\ x^{'3}(p),\ ...,\ x^{'N}(p)].$$

Os dois sistemas de coordenadas estão relacionados por um elemento do grupo de transformações:

$$x^{'i}(p) = f^i[\alpha, x(p)]$$

Podemos relacionar $F^{S^{'}}$ com F^S, escrevendo $x^{'i}(p)$ em função de $x^i(p)$ obtendo:

$$F^{S^{'}}[x^{'1}(p), x^{'2}(p), x^{'3}(p), ..., x^{'N}(p)] = F^S[f^1(\alpha^{-1}, x^{'}(p)), f^2(\alpha^{-1}, x^{'}(p)), ..., f^N(\alpha^{-1}, x^{'}(p))] \quad (2.2)$$

Esta solução ainda não está na forma particular que seja útil para usarmos, dessa forma iremos convenientemente usar transformações próximas a identidade. Para os grupos de Lie usaremos $\delta\alpha^\mu$, cuja inversa é $\delta\alpha^{-\mu}$ = -$\delta\alpha^\mu$. Assim:

$$\begin{aligned} x^i(p) &= f^i[-\delta\alpha, x^{'}(p)] \\ &= f^i[0, x^{'}(p)] + \frac{\partial f^i[\beta, x^{'}(p)}{\partial\beta^\mu}|_{\beta=0}(-\delta\alpha) + ... \\ &= x^{'i}(p) - \delta\alpha\frac{\partial f^i[\beta, x^{'}(p)}{\partial\beta^\mu}|_{\beta=0}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Substituindo a Eq. (2.3) na Eq. (2.2) encontramos:

$$F^{S^{'}}[x^{'}(p)] = F^S[x^{'i}(p) - \delta\alpha\frac{\partial f^i[\beta, x^{'}(p)}{\partial\beta^\mu}|_{\beta=0}\frac{\partial}{\partial x^{'i}}F^S[x^{'}(p)]. \quad (2.4)$$

Em primeira ordem, a variação em F é dada por

$$
\begin{aligned}
F^{S'}[x'(p)] - F^{S}[x'^{i}(p) &= -\delta\alpha \frac{\partial f^{i}[\beta, x'(p)}{\partial \beta^{\mu}}|_{\beta=0} \frac{\partial}{\partial x'^{i}} F^{S}[x'(p)] \\
&= \delta\alpha X_{\mu}(x') F^{S}[x']
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Onde X_μ é o gerador infinitesimal do grupo de Lie, através da aplicação repetida destes operadores podemos obter todos os elementos do grupo de Lie gerados por eles, devido a natureza de variedade diferenciável e conexa do Grupo de Lie, isso faz com que o teorema de Taylor seja válido e aproximações pertos da identidade possam ser feitas.

2.7 Álgebra de Lie

Se a propriedade comutativa vale para um determinado grupo, que possui elementos α e β, então a seguinte relação é valida:

$$
\alpha\beta\alpha^{-1} = \beta. \tag{2.6}
$$

Se o grupo não comuta, ou seja, $[\alpha, \beta] = \gamma$, temos portanto:

$$
\alpha\beta\alpha^{-1} = \gamma\beta, \tag{2.7}
$$

para α e β próximos a identidade, podemos expandir em torno dos geradores infinitesimais da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= I + \delta\alpha^{\mu} X_{\mu} + \frac{1}{2}\delta\alpha^{\mu} X_{\mu} \delta\alpha^{\nu} X_{\nu}, \\
\beta &= I + \delta\beta^{\mu} X_{\mu} + \frac{1}{2}\delta\beta^{\mu} X_{\mu} \delta\beta^{\nu} X_{\nu}.
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Substituindo as Eq. (2.8) em Eq. (2.7) e ignorando os termos iguais ou maiores que terceira ordem.

$$(\alpha\beta)(\beta\alpha)^{-1} = I + \delta\alpha\delta\beta[X_\mu, X_\nu]. \tag{2.9}$$

Como $(\alpha\beta)(\beta\alpha)^{-1}$ é um elemento do grupo, o comutador deve estar no espaço vetorial dos geradores do grupo e pode ser expandido como uma combinação linear da base. Logo

$$[X_\mu, X_\nu] = C^\lambda_{\mu\nu} X_\lambda, \tag{2.10}$$

onde $C^\lambda_{\mu\nu}$ são contantes a serem especificadas de acordo com o grupo.

Quando adicionamos à um espaço vetorial qualquer, a operação comutador, é possível construir uma álgebra, neste caso os geradores formam um espaço vetorial e como demonstrado ele possui a propriedade de comutação, dessa forma pode-se construir Álgebra de Lie.

A álgebra de Lie obedece também a identidade de Jacob e a propriedade anticomutativa

$$[X_\mu[X_\nu, X_\rho]] + [X_\nu[X_\rho, X_\mu]] + [X_\rho[X_\mu, X_\nu]] = 0. \tag{2.11}$$

Embora todo Grupo de Lie possua uma álgebra de Lie associada, a correspondência não é 1-1. Inúmeros Grupos de Lie diferentes possuem a mesma álgebra de Lie, duas álgebras com as mesmas constantes $C^\lambda_{\mu\nu}$ são necessariamente, a mesma álgebra

Capítulo 3

Métodos de Simetria

Nesse capítulo iremos descrever o método clássico de simetrias de Lie, que abrangem basicamente equações diferenciais ordinárias e parciais. [7] e [8].

3.1 Simetrias em Objetos

Antes de entendermos as simetrias de equações diferenciais, vamos tratar do conceito de simetria em objetos geométricos. De maneira geral, simetria de um objeto é uma transformação onde o objeto permanece aparentemente inalterado, como exemplo disso podemos citar a rotação de um triângulo equilátero sobre seu centro. Depois de uma rotação no sentido horário de 120 graus, o triângulo parece o mesmo, portanto, essa transformação é uma simetria.

Existem restrições sobre simetrias em objetos. Cada simetria possui uma inversa, que também é uma simetria. Aplicar uma transformação de simetria e em seguida seu inverso (ou vice-versa) mantém o objeto inalterado. Exemplo, vamos denominar Γ uma rotação de 120 graus em um triângulo equilátero, sua inversa Γ^{-} é uma rotação de 240 graus. Se x é a posição de um ponto qualquer no objeto e se $\Gamma :$ x $\mapsto$ é uma simetria qualquer, então temos que $\hat{x}$ é infinitamente diferenciável em relação a x. Assim Γ é um difeomorfismo (C^{∞}), isto é, um mapeamento invertível suave cuja inversa também é suave.

Uma transformação é uma simetria se satisfizer as seguinte condições:

$(S1)$ A transformação preserva estrutura.

$(S2)$ A transformação é um difeomorfismo.

$(S3)$ A transformação mapeia o objeto em si mesmo, ou seja, um objeto no plano (x, y) e sua imagem no plano $(\hat{x}, \hat{y})$ são indistinguíveis.

A partir desse ponto, nos restringimos à transformações que satisfazem $(S1)$ e $(S2)$. Tais transformações são simetrias se também satisfazem $(S3)$, chamada de condição de simetria. Muitos objetos possuem um conjunto infinito de simetrias. Por exemplo, um círculo unitário rígido

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{3.1}$$

tem uma simetria

$$\Gamma_\epsilon : (x, y) \mapsto (\hat{x}, \hat{y}) = (x\cos(\epsilon) - y\sin(\epsilon), x\sin(\epsilon) + y\cos(\epsilon)) \tag{3.2}$$

para cada $\epsilon \in [-\pi, \pi]$. Em termos das coordenadas polares temos,

$$\Gamma_\epsilon : (\cos\theta, \sin\theta) \mapsto (\cos(\theta + \epsilon), \sin(\theta + \epsilon)). \tag{3.3}$$

Por conseguinte, a transformação é uma rotação através de ϵ em torno do centro do círculo. Isso preserva a estrutura, é suave e inversível (o inverso de uma rotação por ϵ é uma rotação por $-\epsilon$). Podemos mostrar que a condição de simetria (S3) é satisfeita

$$\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = x^2 + y^2, \tag{3.4}$$

desde que

$$
\begin{aligned}
\hat{x}^2 + \hat{y}^2 &= 1 \\
(\cos(\theta+\epsilon))^2 + (\sin(\theta+\epsilon))^2 &= 1 \\
\sin^2\theta\left(\sin^2(\epsilon)+\cos^2(\epsilon)\right) + \cos^2\theta\left(\sin^2(\epsilon)+\cos^2(\epsilon)\right) &= 1 \\
\sin^2\theta + \cos^2\theta &= 1 \\
x^2 + y^2 &= 1 \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

O conjunto infinito de simetrias Γ_ϵ é um exemplo de um grupo de Lie de um parâmetro. Esta classe de simetrias é imensamente útil e é importante para a construção de soluções exatas de muitas E.D.Os. Suponha que um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ possua um conjunto infinito de simetrias

$$\Gamma_\epsilon : x^s \mapsto \hat{x}^S(x^1, ..., x^N; \epsilon) \qquad S = 1, ..., N, \qquad (3.6)$$

onde ϵ é um parâmetro real, e as seguintes condições são satisfeitas.

$(L1)$ Γ_0 é uma simetria trivial, de modo que, $\hat{x}^S = x^S$, quando $\epsilon = 0$
$(L2)$ Γ_ϵ é uma simetria para todo ϵ próximo ao zero
$(L3)$ $\Gamma_\epsilon\Gamma_\delta = \Gamma_{\epsilon+\delta}$ para todo ϵ , δ suficientemente próximo de zero
$(L4)$ Cada $\hat{x}$ pode ser representado por uma série de Taylor em ϵ (na vizinhança de $\epsilon = 0$), e portanto,

$$\hat{x}^s(x^1, ..., x^N; \epsilon) = x^s + \epsilon\xi^s(x^1, ..., x^N) + O(\epsilon^2) \qquad \text{S = 1,...,N,}$$

logo o conjunto de simetrias Γ_ϵ é um grupo de Lie local a um parâmetro. O termo grupo é usado porque as simetrias Γ_ϵ satisfazem os axiomas de um grupo, pelo menos para ϵ suficientemente perto de zero. Em particular, (L3) implica que $\Gamma_\epsilon^{-1} = \Gamma_{-\epsilon}$ As condições (L1) a (L4) são ligeiramente mais restritivas do que o necessário, mas eles nos permitem começar a resolver equações diferenciais sem que apareçam muitas complexidades. Simetrias que pertencem a um grupo de Lie a um parâmetro dependem de forma contínua do parâmetro. Como vimos, um objeto também pode ter simetrias discretas, tais simetrias não podem ser representadas por um parâmetro contínuo. Exemplo, o conjunto de simetrias do triângulo equilátero tem a estrutura do grupo diedro D_3, enquanto que as duas simetrias do triângulo isósceles, formam o grupo cíclico Z_2. Vamos nos concentrar em grupos de Lie parametrizadas de simetrias, que são mais fáceis de achar e aplicar. Na maior parte do tempo, vamos estudar as funções $\hat{x}^S$ diretamente, sem referência a quaisquer ideias da teoria do grupo. Por isso, é conveniente simplificar a notação

$$\Gamma_\epsilon : (x^1, ..., x^N) \mapsto (\hat{x}^1, ..., \hat{x}^N) = ...$$

$$para$$

$$(\hat{x}^1, ..., \hat{x}^N) = ...$$

As variáveis $x^1, x^2, ...$ equivalem a $x, y, ...$

3.2 Simetrias em E.D.Os

Considere a seguinte E.D.O:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \tag{3.7}$$

As soluções são o conjunto de linhas

$$y(x) = c \qquad c \in R \tag{3.8}$$

que pertencem ao plano (x, y). A E.D.O é representada geometricamente pelo conjunto contendo todas as soluções, e assim qualquer simetria do E.D.O deve necessariamente mapear a solução definida em si mesmo. De maneira mais formal, a condição de simetria (S3) requer que o conjunto de curvas soluções no plano (x, y) deve ser indistinguível da sua imagem no plano $(\hat{x}, \hat{y})$, e por conseguinte

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = 0 \qquad \text{quando} \qquad \frac{dy}{dx} = 0 \tag{3.9}$$

Uma transformação de um plano pode ser invertida se o seu Jacobiano é diferente de zero, por isso, impomos a condição adicional

$$\hat{x}_x \hat{y}_y - \hat{x}_y \hat{y}_x \neq 0 \tag{3.10}$$

Uma curva de solução particular vai ser mapeado para uma curva de solução ligeiramente diferente, e portanto,

$$\hat{y}(x, c) = \hat{c}(c) \qquad \forall c \in R. \tag{3.11}$$

A E.D.O 3.7 apresenta muitas simetrias. Há simetrias discretas, tais como reflexões nos eixos x e y. Simetrias de Lie incluem a forma:

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, e^{\epsilon} y) \qquad \epsilon \in \mathbb{R}. \tag{3.12}$$

Cada translação

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x + \epsilon_1, y + \epsilon_2) \qquad \epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R} \tag{3.13}$$

é uma simetria. O conjunto de todas as translações depende de dois parâmetros, ϵ_1 e ϵ_2. Ao definir ϵ_1 como zero, obtém-se o grupo de Lie de um parâmetro de translações na direção y. Do mesmo modo, o grupo de Lie de um parâmetro de translação na direção x é obtido através da fixação de ϵ_2 como zero. O conjunto de translações (3.13) é um grupo de Lie a dois parâmetros, que pode ser formado pela combinação de dois grupos de um parâmetro.

A E.D.O (3.7) é extremamente simples, e assim todas as suas simetrias podem ser encontradas. Diferenciando (3.8) em relação a x, obtemos

$$\hat{y}_x(x, c) = 0, \qquad \forall c \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

Temos então,

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (f(x, y), g(y)), \qquad f_x \neq 0, \quad g_y \neq 0, \tag{3.15}$$

onde f, g são consideradas funções suaves de seus argumentos. Nas curvas de solução, y é uma função de x, e, portanto, $\hat{x}(x, y)$ e $\hat{y}(x, y)$ podem ser consideradas como funções de x. Então utilizando a regra da cadeia, temos:

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{D_x \hat{y}}{D_x \hat{x}} = 0 \quad \text{quando} \quad \frac{dy}{dx} = 0 \tag{3.16}$$

onde D_x é denominado como derivada total com respeito a x:

$$D_x = \partial_x + y^{'}\partial_y + y^{''}\partial_{y'} + ... \tag{3.17}$$

Podemos escrever também,

$$\frac{\hat{y}_x + y^{'}\hat{y}_y}{\hat{x}_x + y^{'}\hat{x}_y} = 0 \quad \text{quando} \quad y^{'} = 0, \tag{3.18}$$

isto, é

$$\frac{\hat{y}_x}{\hat{x}_x} = 0. \tag{3.19}$$

Utilizando a condição de simetria na forma (3.19) pode-se obter informações sobre as simetrias sem conhecer a solução da equação diferencial.

3.3 Condições de Simetria em Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Vamos considerar a E.D.O de primeira ordem,

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x, y) \tag{3.20}$$

então,

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \omega(\hat{x}, \hat{y}) \quad \text{quando} \quad \frac{dy}{dx} = \omega(x, y) \tag{3.21}$$

Então podemos escrever,

$$\frac{D_x\hat{y}}{D_x\hat{x}} = \frac{\hat{y}_x + y^{'}\hat{y}_y}{\hat{x}_x + y^{'}\hat{x}_y} = \omega(\hat{x}, \hat{y}) \quad quando \quad \frac{dy}{dx} = 0 \tag{3.22}$$

Portanto a condição de simetria para a E.D.O anterior é,

$$\frac{\hat{y}_x + \omega(x, y)\hat{y}_y}{\hat{x}_x + \omega(x, y)\hat{x}_y} = \omega(\hat{x}, \hat{y}) \tag{3.23}$$

Pode ser possível determinar algumas ou todas as simetrias de um determinado E.D.O. Uma abordagem é utilizar um ansatz, ou seja, uma hipótese sobre a forma de uma função desconhecida para facilitar sua resolução.

Exemplo: Vamos considerar a E.D.O

$$\frac{dy}{dx} = y \tag{3.24}$$

A restrição anterior implica que toda simetria desta E.D.O satisfaz a equação diferencial parcial (EDP)

$$\frac{\hat{y}_x + y\hat{y}_y}{\hat{x}_x + y\hat{x}_y} = \hat{y} \tag{3.25}$$

Ao invés de tentar encontrar a solução geral da E.D.P, vamos procurar simetrias que satisfazem uma ansatz simples. Por exemplo, se houver mapeamento de y em si mesmo, então

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}(x, y), y) \tag{3.26}$$

Então a equação se reduz a,

$$\frac{y}{\hat{x}_x + y\hat{x}_y} = y \tag{3.27}$$

portanto

$$\hat{x}_x + y\hat{x}_y = 1, \qquad \hat{x}_x \neq 0 \tag{3.28}$$

Existem muitas simetrias desse tipo, as mais simples são as simetrias de Lie correspondentes a translações do tipo

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x + \epsilon, y), \qquad \epsilon \in \mathbb{R} \tag{3.29}$$

Notamos que as translações na direção de x para a E.D.O $y' = 0$ são simetrias triviais, mas elas não são simetrias triviais da E.D.O $y' = y$ da qual a solução geral é,

$$y = c_1 e^x, \qquad c_1 \in \mathbb{R} \tag{3.30}$$

A translação na direção de x mapeia a curva de solução correspondente a um determinado valor de c_1,

$$\hat{y} = y = c_1 e^x = c_1 e^{\hat{x}-\epsilon} = c_2 e^{\hat{x}}, \quad \text{onde} \quad c_2 = c_1 e^{-\epsilon} \tag{3.31}$$

portanto, as translações na direção de x para a E.D.O $y' = y$ não são triviais, porque em geral $c_1 \neq c_2$. Obviamente, que se $\epsilon = 0$ voltaremos a ter um simetria trivial para a mesma. Curiosamente, uma curva de solução é mapeado para si por cada translação, isto é, $y = 0$. As curvas que são mapeadas em si mesmas por uma simetria são ditas como sendo invariante sob a simetria.

As simetrias translacionais $(\hat{x}, \hat{y}) = (x+\epsilon, y), \epsilon \in \mathbb{R}$ não são capazes de mapear soluções com $c_1 > 0$ a soluções com $c_1 < 0$. No entanto, a E.D.O tem simetrias que trocam as soluções constantes dos semiplanos superiores e inferiores. A simetria

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, -y); \tag{3.32}$$

é uma simetria discreta. Até agora, vimos simetrias de E.D.Os muito simples, mas os métodos de simetria podem ser aplicáveis a quase qualquer E.D.O.

3.4 Simetrias de Lie para E.D.Os de Primeira Ordem

3.4.1 Ação de simetrias de Lie em um plano

Até agora, consideramos apenas algumas E.D.Os na forma,

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x, y) \tag{3.33}$$

Vamos desenvolver agora, técnicas que sejam aplicáveis a qualquer E.D.O do tipo 3.33.

Começaremos examinando a ação de simetria em um plano. Suponha que $y = f(x)$ é a solução da equação 3.33 e que uma simetria particular mapeia esta solução à curva $\hat{y} = \tilde{f}(\hat{x})$, que é solução da,

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \omega(\hat{x}, \hat{y}) \tag{3.34}$$

A função $\tilde{f}$ é obtida do seguinte modo: a simetria transforma a curva para o conjunto de pontos $(\hat{x}, \hat{y})$, esta é uma curva no plano $(\hat{x}, \hat{y})$, escrita na forma paramétrica . Escrevendo x como função de $\hat{x}$, podemos escrever $\tilde{f}$ como:

$$\tilde{f} = \hat{y}(x(\hat{x}), f(x(\hat{x}))) \tag{3.35}$$

Se a simetria pertence a um grupo de Lie a um parâmetro, então $\tilde{f}$ é uma função de $\hat{x}$ e do parâmetro ϵ.

Exemplo A solução da E.D.O,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \tag{3.36}$$

é

$$y = cx^2 \tag{3.37}$$

O conjunto de soluções nessa região é mapeado em si pelas simetrias discretas

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) \tag{3.38}$$

Especialmente, a curva de solução correspondente a $c = c_1$ é mapeada na curva

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{1}{c_1 x}, \frac{1}{c_1 x^2}\right) \tag{3.39}$$

Portanto, $x = \frac{1}{c_1 \hat{x}}$ assim a curva de solução $y = c_1 x^2$ é mapeada para

$$\hat{y} = c_1 \hat{x}^2. \tag{3.40}$$

Exemplo Agora considerando a equação diferencial ordinária

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2 y - y - x}{xy^2 + x^3 + y - x}. \tag{3.41}$$

Suas simetrias incluem as rotações

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x \cos \epsilon - y \sin \epsilon, x \sin \epsilon + y \cos \epsilon). \tag{3.42}$$

Em coordenadas polares são,

$$(\hat{r}, \hat{\theta}) = (r, \theta + \epsilon). \tag{3.43}$$

A órbita através de qualquer ponto $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ é um círculo $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, enquanto que $(0, 0)$ é mapeada em si mesmo e portanto é um ponto invariante. A equação mapeia cada ponto sobre uma órbita para um ponto na mesma órbita. Em outras palavras, toda orbita é invariante sob a ação do grupo de Lie. Considerando agora uma órbita através de um ponto não invariante (x, y) . O vetor tangente a órbita no ponto $(\hat{x}, \hat{y})$ é $(\xi(\hat{x}, \hat{y}), \eta(\hat{x}, \hat{y}))$, onde

$$\frac{d\hat{x}}{d\epsilon} = \xi(\hat{x}, \hat{y}), \qquad \frac{d\hat{y}}{d\epsilon} = \eta(\hat{x}, \hat{y}). \tag{3.44}$$

Em particular, o vetor tangente no (x, y) é

$$(\xi(x, y), \eta(x, y)) = \left(\left.\frac{d\hat{x}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}, \quad \left.\frac{d\hat{y}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \right). \tag{3.45}$$

Portanto podemos escrever para primeira ordem em ϵ a série de Taylor para a ação do grupo de Lie

$$\hat{x} = x + \epsilon\xi(x, y) + O(\epsilon^2), \tag{3.46}$$

$$\hat{y} = y + \epsilon\eta(x, y) + O(\epsilon^2). \tag{3.47}$$

Um ponto invariante é mapeado para si por cada simetria Lie. Portanto, para a expansões acima o ponto (x, y) só é invariante se o vetor tangente é zero, isso é, se,

$$\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0. \tag{3.48}$$

Essa condição é necessária e suficiente e pode ser provada derivando repetidamente a Eq. (3.44) em seguida fazendo $\epsilon = 0$. O conjunto de vetores tangentes para um grupo de Lie particular é um exemplo de um campo de vetores de Lie, porque os vetores tangentes variam suavemente com (x, y). Vamos introduzir o conceito de equação característica.

$$Q(x, y, y') = \eta(x, y) - y'\xi(x, y) \tag{3.49}$$

Seja C uma curva $y = y(x)$, a tangente a C em $(x, y(x))$ é na direção $(1, y^{'}(x))$ isto é paralelo a $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ se e somente se

$$Q(x, y, y^{'}) \qquad \text{em} \quad C \tag{3.50}$$

Este resultado nos permite caracterizar as soluções invariantes por exemplo da equação $y^{'} = \omega(x, y)$, do seguinte modo. Em todas as soluções desta equação a característica é equivalente a

$$\bar{Q} = Q(x, y, \omega(x, y)) = \eta(x, y) - \omega(x, y)\xi(x, y) \tag{3.51}$$

Nós chamamos $\bar{Q}(x, y)$ de característica reduzida. A curva de solução $y = f(x)$ é invariante se e somente se

$$\bar{Q}(x, y) = 0 \quad \text{quando} \quad y = f(x) \tag{3.52}$$

A simetria é trivial se e somente se $\bar{Q}(x, y)$ é identicamente zero, isso é,

$$\eta(x, y) \equiv \omega(x, y)\xi(x, y) \tag{3.53}$$

Se $\bar{Q}_y \neq 0$ então é possível determinar as curvas $y = f(x)$ que satisfazem a (3.52). Cada uma dessas curvas é uma solução da equação $y^{'} = \omega(x, y)$. Portanto a (3.52) pode ser usada para encontrar todas as soluções que são invariantes sob um dado grupo de Lie não trivial, sem que seja necessário realizar qualquer integração.

Exemplo 3 Considere a equação de Riccati

$$y^{'} = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \qquad (x \neq 0) \tag{3.54}$$

tem um grupo de Lie de escala de simetria

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^{\epsilon}x, e^{-2\epsilon}y) \tag{3.55}$$

O campo vetorial tangente é

$$(\xi(x,y), \eta(x,y)) = (x, -2y) \tag{3.56}$$

então a característica reduzida é

$$\bar{Q}(x,y) = \frac{1}{x^2} - x^2y^2 \tag{3.57}$$

Com a condição $\bar{Q}(x,y) = 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} - x^2y^2 &= 0 \\ y^2 &= \frac{1}{x^4} \end{aligned} \tag{3.58}$$

Portanto, as simetrias de Lie são não triviais, e existem duas soluções invariantes:

$$y = \pm x^{-2} \tag{3.59}$$

A maioria dos métodos de simetria usam os vetores tangentes, em vez das próprias simetrias. No entanto, simetrias podem ser encontradas a partir dos vetores tangentes, integrando as E.D.Os acopladas $\frac{d\hat{x}}{d\epsilon} = \xi(\hat{x}, \hat{y})$ e $\frac{d\hat{y}}{d\epsilon} = \eta(\hat{x}, \hat{y})$ sujeita às condições iniciais como $(\hat{x}(x,y;0), \hat{y}(x,y;0)) = (x,y)$. Então localmente, há uma correspondência de um-para-um entre cada grupo de Lie de um parâmetro e seu campo de vetor tangente.

3.5 Coordenadas Canônicas

Cada E.D.O do tipo $\frac{dy}{dx} = \omega(x, y)$ cuja simetrias incluem as translações do tipo $(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y + \epsilon)$, podem ser integradas diretamente. Mais geralmente, se a E.D.O tem simetrias de Lie que são equivalentes a translações, a E.D.O pode ser reescrita em termos de novas coordenadas. Todas as órbitas de $(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y+\epsilon)$ tem o mesmo vetor tangente em cada ponto;

$$(\xi(x, y), \eta(x, y)) = (0, 1). \tag{3.60}$$

As órbitas de $(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y + \epsilon)$ são linhas que levam o mesmo x em um $y + \epsilon$. Dado qualquer grupo de simetrias de Lie a um parâmetro, visamos introduzir as coordenadas

$$(r, s) = (r(x, y), s(x, y)), \tag{3.61}$$

tal que

$$(\hat{r}, \hat{s}) \equiv (r(\hat{x}, \hat{y}), s(\hat{x}, \hat{y})) = (r, s + \epsilon). \tag{3.62}$$

Se isso for possível, então o vetor tangente em um ponto (r, s) nas novas coordenadas é $(0, 1)$, isso é

$$\left.\frac{d\hat{r}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0, \quad \left.\frac{d\hat{s}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 1 \tag{3.63}$$

Aplicando a regra da cadeia temos

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\hat{r}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} &= 0 \\
\left(\left.\frac{d\hat{x}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right)+\left(\left.\frac{d\hat{y}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\right)\left(\frac{dr}{dy}\right) &= 0 \\
\xi(x,y)r_x+\eta(x,y)r_y &= 0 \qquad (3.64)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\hat{s}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} &= 1 \\
\left(\left.\frac{d\hat{x}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\right)\left(\frac{ds}{dx}\right)+\left(\left.\frac{d\hat{y}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\right)\left(\frac{ds}{dy}\right) &= 1 \\
\xi(x,y)s_x+\eta(x,y)s_y &= 1 \qquad (3.65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi(x,y)r_x+\eta(x,y)r_y=0 \\
\xi(x,y)s_x+\eta(x,y)s_y=1 \qquad (3.66)
\end{aligned}$$

Daí temos a relação;

$$r_x s_y - r_y s_x = 0 \qquad (3.67)$$

Aplicando uma condição de não degenerescência, garante-se que se duas curvas r e s constantes se encontram num ponto, elas se cruzam transversalmente. Qualquer par de funções $r(x,y)$, $s(x,y)$ que satisfazem as equações acima são chamadas de coordenadas canônicas.

Coordenadas canônicas não podem ser definidas em um ponto invariante, porque a equação determinante para s em 3.66 não tem solução se

$$\xi(x,y)=\eta(x,y)=0 \qquad (3.68)$$

É sempre possível normalizar o vetor tangente (pelo menos localmente) desde que sejam diferentes de zero. Coordenadas canônicas não são definidas exclusivamente pela Eq. (3.66). Na verdade, se (r, s) satisfaz a mesma, então

$$(\tilde{r}, \tilde{s}) = (F(r), s + G(r)) \tag{3.69}$$

para funções suaves arbitrárias F e G. A condição de não degenerescência imposta à restrição de $F^{'}(r) \neq 0$, mas ainda há muita liberdade. Temos a intenção de reescrever a E.D.O em termos de coordenadas canônicas. Isso envolve a diferenciação, por isso é aconselhável usar a liberdade acima para fazer r e s tão simples quanto possível. Sempre que possível, vamos tentar usar uma solução simples não degenerada da Eq. (3.66).

Coordenadas canônicas podem ser obtidas a partir de 3.66, utilizando o método das características. Esse método consiste em utilizar equações características

$$\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)} = ds \tag{3.70}$$

Onde a primeira integral de uma dada equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3.71}$$

é uma função $\phi(x, y)$ cujo valor é constante em qualquer solução $y = y(x)$ desta E.D.O. Portanto

$$\phi_x + f(x, y)\phi_y = 0, \qquad \phi_y \neq 0 \tag{3.72}$$

cuja solução geral é:

$$\phi(x, y) = c \tag{3.73}$$

Suponha que, $\xi(x,y) \neq 0$, vemos que a coordenada canônica invariante é uma primeira integral de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)} \tag{3.74}$$

Então $r = \phi(x,y)$ é encontrada resolvendo a equação anterior. Muito frequentemente, uma solução $s(x,y)$ pode ser encontrada pela 3.66. De outra forma podemos usar $r = r(x,y)$ para escrever y como função de r e x. Então a coordenada $s(r,x)$ é obtida por

$$s(r,x) = \left(\int \frac{dx}{\xi(x, y(r,x))} \right) \Bigg|_{r=r(x,y)} \tag{3.75}$$

aqui a integral é avaliada com r sendo tratado como uma constante. Similarmente, se $\xi = 0$ e $\eta \neq 0$ então

$$r = x, \qquad s = \left(\int \frac{dy}{\eta(r,y)} \right) \Bigg|_{r=x} \tag{3.76}$$

são coordenadas canônicas.

3.6 Resolvendo E.D.Os através das simetrias de Lie

Suponha que encontramos as simetrias de Lie não triviais de uma dada $\frac{dy}{dx} = \omega(x,y)$. Como são simetrias não-triviais obedecem a seguinte regra:

$$\eta(x,y) \not\equiv \omega(x,y)\xi(x,y). \tag{3.77}$$

Então a equação $\frac{dy}{dx} = \omega(x, y)$ pode ser reescrita em termos das coordenadas canônicas como;

$$\frac{ds}{dr} = \frac{s_x + \omega(x, y)s_y}{r_x + \omega(x, y)r_y}, \tag{3.78}$$

podemos também escrever $\frac{s_x+\omega(x,y)s_y}{r_x+\omega(x,y)r_y}$ como uma função de r e s.

Contudo, (r, s) são coordenadas canônicas, assim a E.D.O acima é invariante sob o grupo de translações na direção de s, portanto, podemos escrever a equação como;

$$\frac{ds}{dr} = \Omega(r). \tag{3.79}$$

Resolvendo a equação temos;

$$s - \int \Omega(r)dr = c, \tag{3.80}$$

onde c é uma constante arbitrária. Portanto, a solução geral da da equação $\frac{dy}{dx} = \omega(x, y)$ é

$$s(x, y) - \int^{r(x,y)} \Omega(r)dr = c. \tag{3.81}$$

Este método muito simples pode ser aplicado a qualquer equação diferencial ordinária do tipo $\frac{dy}{dx} = \omega(x, y)$ com um grupo de Lie não trivial conhecido a um parâmetro de simetrias. É preciso primeiro determinar as coordenadas canônicas resolvendo a E.D.O 3.74. Tipicamente, 3.74 é muito mais fácil de resolver do que $\frac{dy}{dx} = \omega(x, y)$. O exemplo a seguir demonstra a eficácia do método em lidar com E.D.Os cujas soluções não são óbvias.

Exemplo Vamos considerar a equação de Riccati da qual já encontramos as soluções

$$y^{'} = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \qquad (x \neq 0) \tag{3.82}$$

que são invariantes sob simetrias de Lie

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^{\epsilon}x, e^{-2\epsilon}y) \tag{3.83}$$

Agora vamos completar as soluções. Em coordenadas canônicas temos:

$$(r, s) = (x^2 y, \ln|x|) \tag{3.84}$$

Então a equação 3.82 se reduz a

$$\frac{ds}{dr} = \frac{1}{r^2 - 1}. \tag{3.85}$$

Resolvendo a equação para r e s e reescrevendo em termos de x e y temos que a solução geral para a equação de 3.82 é

$$y = \frac{c + x^2}{x^2\,(c - x^2)}. \tag{3.86}$$

Analisando esse conjunto de soluções, duas soluções em partículas são bastantes interessantes: quando c vai a infinito a solução se torna o inverso de x^2 e quando c vai a 0, ela se torna $-\frac{1}{x^2}$

3.7 Condição de simetria linearizada

Já sabemos que podemos encontrar simetrias de Lie de uma equação do tipo $\frac{dy}{dx} = \omega(x, y)$ utilizando a condição de simetria equivalente a

$$\frac{\hat{y}_x + \omega(x, y)\hat{y}_y}{\hat{x}_x + \omega(x, y)\hat{x}_y} = \omega(\hat{x}, \hat{y}) \tag{3.87}$$

Em geral, isto é uma equação diferencial parcial difícil de resolver. No entanto, as simetrias de Lie podem ser derivadas a partir de uma condição muito mais simples no campo vetorial tangente. Por definição, as simetrias de Lie da equação $\frac{dy}{dx} = \omega(x, y)$ são da forma

$$\begin{aligned}\hat{x} &= x + \epsilon\xi(x, y) + O(\epsilon^2)\\ \hat{y} &= y + \epsilon\eta(x, y) + O(\epsilon^2)\end{aligned} \tag{3.88}$$

vamos agora substituir a 3.88 na 3.87 temos

$$\frac{\omega(x, y) + \epsilon\left\{\eta_x + \omega(x, y)\eta_y\right\} + O(\epsilon^2)}{1 + \epsilon\left\{\xi_x + \omega(x, y)\xi_y\right\} + O(\epsilon^2)} = \omega(x + \epsilon\xi(x, y) + O(\epsilon^2), y + \epsilon\eta(x, y) + O(\epsilon^2)) \tag{3.89}$$

Expandindo como série de Taylor em $\epsilon = 0$, temos:

$$\omega + \epsilon\left\{\eta_x\left(\eta_y - \xi_x\right)\omega - \xi_y\omega^2\right\} + O(\epsilon^2) = \omega + \epsilon\left\{\xi\omega_x + \eta\omega_y\right\} + O(\epsilon^2) \tag{3.90}$$

desprezando os termos de ordem mais alta em ϵ temos

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x)\omega - \xi_y\omega^2 = \xi\omega_x + \eta\omega_y \tag{3.91}$$

essa equação é a condição de simetria linearizada. Assim podemos reduzir o problema uma vez que esta última equação é linear e mais fácil de resolver do que a 3.87.

A condição de simetria linearizada pode ser reescrita em termos da característica reduzida. Como

$$\bar{Q} = \eta - \omega\xi \tag{3.92}$$

então pode-se escrever

$$\bar{Q}_x + \omega\bar{Q}_y = \omega_y\bar{Q} \tag{3.93}$$

Cada solução da 3.93 corresponde a infinitos grupos de Lie, para $\bar{Q}$ satisfazendo a mesma temos

$$(\xi, \eta) = (\xi, \bar{Q} + \omega\xi) \tag{3.94}$$

é um campo vetorial tangente de um grupo a um parâmetro, para qualquer função ξ. Todas as simetrias de Lie triviais correspondem à solução de $\bar{Q} = 0$ da 3.93. Em princípio, as simetrias não triviais podem ser encontradas a partir da 3.93, utilizando o método das características. As equações características são

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\omega(x,y)} = \frac{\bar{Q}}{\omega_y(x,y)\bar{Q}} \tag{3.95}$$

Exemplo

Considere a E.D.O

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-y^2}{xy} + 1 \tag{3.96}$$

Muitas simetrias de Lie tem campos vetoriais tangentes da forma

$$\xi = \alpha(x), \qquad \eta = \beta(x)y + \gamma(x), \tag{3.97}$$

A equação terá as simetrias se a condição de simetria linearizada for satisfeita com

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + \epsilon\alpha(x) \\ \hat{y} &= y + \epsilon\left\{\beta(x)y + \gamma(x)\right\} \end{aligned} \tag{3.98}$$

Então temos

$$\begin{aligned} \frac{\hat{y}_x + \omega(x,y)\hat{y}_y}{\hat{x}_x + \omega(x,y)\hat{x}_y} &= \omega(\hat{x}, \hat{y}) \\ \beta^{'}y + \gamma^{'} + \left(\beta - \alpha^{'}\right)\left(\frac{1-y^2}{xy} + 1\right) &= \alpha\left(\frac{y^2-1}{x^2y} + 1\right) - (\beta y + \gamma)\left(\frac{1+y^2}{xy^2}\right) \end{aligned} \tag{3.99}$$

Comparando os termos de potência y e y^{-2} e termos independentes temos um sistema de equações do tipo;

$$\gamma = 0 \tag{3.100}$$

$$\frac{\beta - \alpha'}{x} = -\frac{\alpha}{x^2} - \frac{\beta}{x} \tag{3.101}$$

$$\beta = \alpha' \tag{3.102}$$

$$\alpha' + \frac{\alpha}{x} = 0 \tag{3.103}$$

Resolvendo a 3.103 temos

$$\alpha = c_1 x^{-1} \tag{3.104}$$

e portanto,

$$\beta = -c_1 x^{-2} \tag{3.105}$$

Logo, qualquer campo vetorial tangente da forma

$$(\xi, \eta) = (c_1 x^{-1}, -c_1 x^{-2} y) \tag{3.106}$$

satisfaz a condição de simetria linearizada.

3.8 Equações determinantes para pontos de simetrias de Lie

Toda simetria encontrada até agora é um difeomorfismo da forma

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}(x, y), \hat{y}(x, y)), \tag{3.107}$$

este tipo de difeomorfismo é chamado de ponto de transformação; todo ponto de transformação que é também uma simetria é chamado de ponto de simetria. Agora focamos nossa atenção para esses pontos. Para encontrá-los em uma E.D.O do tipo $y^{(n)} = \omega\left(x, y, y^{'}, ..., y^{(n-1)}\right)$, nós devemos primeiro calcular o $\eta^{(k)}$, $k = 1, ..., n$. As funções ξ e η tem dependência apenas de x e y e portanto:

$$\begin{aligned}
\eta^{(1)} &= \eta_x + (\eta_y - \xi_x)\, y^{'} - \xi_y y^{'2}; && (3.108)\\
\eta^{(2)} &= \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})\, y^{'} + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})\, y^{'2} - \xi_{yy} y^{'3} \\
&+ \left\{\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y^{'}\right\} y^{''}; && (3.109)\\
\eta^{(3)} &= \eta_{xxx} + (3\eta_{xxy} - \xi_{xxx})\, y^{'} + 3\,(\eta_{xyy} - \xi_{xxy})\, y^{'2} + (\eta_{yyy} - 3\xi_{xyy})\, y^{'3} - \xi_{yyy} y^{'4} \\
&+ 3\left\{\eta_{xy} - \xi_{xx} + (\eta_{yy} - 3\xi_{xy})\, y^{'} - 2\xi_{yy} y^{'2}\right\} y^{''} \\
&- 3\xi_y y^{''2} + \left\{\eta_y - 3\xi_x - 4\xi_y y^{'}\right\} y^{'''} && (3.110)
\end{aligned}$$

A cada $\eta^{(k)}$ calculado, o número de termos aumenta exponencialmente, então é recomendado para o estudo de E.D.Os de ordens mais altas,a implementação de uma álgebra computacional. Vejamos agora um exemplo de como utilizar essa técnica

Exemplo Considere a E.D.O de segunda ordem

$$y^{''} = 0. \tag{3.111}$$

Sabendo que a transformação infinitesimal (desprezando os termos de ordem maior ou igual a dois em ϵ) é do tipo

$$\hat{y} = y + \epsilon\eta, \tag{3.112}$$

então

$$\hat{y}^{''} = y^{''} + \epsilon\eta^{(2)}, \tag{3.113}$$

portanto

$$\begin{aligned} \hat{y}^{''} &= 0, \\ &\text{ou} \\ y^{''} + \epsilon\eta^{(2)} &= 0. \end{aligned} \tag{3.114}$$

A condição de simetria linear ou linearizada desta equação é:

$$\eta^{(2)} = 0 \qquad \text{quando} \qquad y^{''} = 0, \tag{3.115}$$

dessa forma temos

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})\, y^{'} + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})\, y^{'2} - \xi_{yy} y^{'3} + \left\{\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y^{'}\right\} y^{''} = 0 \tag{3.116}$$

Como ξ e η independem de $y^{'}$, a condição de simetria linearizada pode ser decomposta no seguinte sistema de equações determinantes:

$$\begin{aligned}
\eta_{xx} &= 0 \\
2\eta_{xy} - \xi_{xx} &= 0 \\
\eta_{yy} - 2\xi_{xy} &= 0 \\
\xi_{yy} &= 0
\end{aligned} \tag{3.117}$$

A solução geral da última equação do sistema 3.117 é

$$\xi(x,y) = A(x)y + B(x) \tag{3.118}$$

onde as funções A e B são arbitrárias. E a terceira equação do mesmo sistema nos dá

$$\eta(x,y) = A^{'}(x)y^2 + C(x)y + D(x) \tag{3.119}$$

onde C e D são também funções arbitrárias. Das equações que restaram temos

$$A^{'''}(x)y^2 + C^{''}(x)y + D^{''}(x) = 0, \qquad 3A^{''}(x)y + 2C^{'}(x) - B^{''}(x) = 0 \tag{3.120}$$

Igualando potências de y na 3.120, nós obtemos um sistema de equações das funções arbitŕarias A, B, C e D;

$$A^{''}(x) = 0, \qquad C^{''}(x) = 0, \qquad D^{''}(x) = 0, \qquad B^{''}(x) = 2C^{'}(x) \tag{3.121}$$

Resolvendo as equações, temos o seguinte resultado. Para o grupo de simetrias de Lie a um parâmetro da equação 3.111, as funções ξ e η são da forma

$$\begin{aligned}
\xi(x,y) &= c_1 + c_3x + c_5y + c_7x^2 + c_8xy, \\
\eta(x,y) &= c_2 + c_4y + c_6x + c_7xy + c_8y^2,
\end{aligned}$$

onde $c_1, ..., c_8$ são constantes. Portanto a forma mais geral do gerador infinitesimal é

$$X = \sum_{i=1}^{8} c_i X_i \tag{3.122}$$

onde

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x, \quad X_4 = y\partial_y, \quad X_5 = y\partial_x, \quad X_6 = x\partial_y, \\ X_7 &= x^2\partial_x + xy\partial_y, \quad X_8 = xy\partial_x + y^2\partial_y \end{aligned} \tag{3.123}$$

Exemplo Vamos considerar agora uma E.D.O mais complicada

$$y^{''} = \frac{y^{'2}}{y} - y^2, \tag{3.124}$$

A condição de simetria linearizada é

$$\begin{aligned} &\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})\, y^{'} + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})\, y^{'2} - \xi_{yy} y^{'3} + \left\{\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y^{'}\right\} \left(\frac{y^{'2}}{y} - y^2\right) \\ = \;& \eta \left(-\frac{y^{'2}}{y^2} - 2y\right) + \left\{\eta_x + (\eta_y - \xi_x)\, y^{'} - \xi_y y^{'2}\right\} \left(\frac{2y^{'}}{y}\right) \end{aligned} \tag{3.125}$$

Comparando as potências de $y^{'}$, nós obtemos as equações determinantes:

$$\begin{aligned} \xi_{yy} + \frac{1}{y}\xi_y &= 0, \\ 2\eta_{yy} - 2\xi_{xy} - \frac{1}{y}\eta_y + \frac{1}{y^2}\eta &= 0, \\ 2\eta_{xy} - \xi_{xx} + 3y^2\xi_y - \frac{2}{y}\eta_x &= 0, \\ \eta_{xx} - y^2(\eta_y - 2\xi_x) + 2y\eta &= 0 \end{aligned} \tag{3.126}$$

Da primeira equação da 3.126, encontramos

$$\xi = A(x)\ln|y| + B(x) \tag{3.127}$$

e da segunda equação da 3.126 temos

$$\eta = A^{'}(x)y\left(\ln|y|\right)^2 + C(x)y\ln|y| + D(x)y \tag{3.128}$$

Aqui as funções A,B,C e D são funções desconhecidas que são determinadas pelas equações remanescentes de 3.126. Substituindo a 3.127 e 3.128 na terceira equação da 3.126, nós obtemos

$$3A^{'}\ln|y| + 3A(x)y + 2C^{'}(x) - B^{''} = 0 \tag{3.129}$$

Portanto,

$$A(x) = 0, \qquad B^{''}(x) = 2C^{'}(x) \tag{3.130}$$

Nós agora substituímos a 3.127 e 3.128 na última equação determinante, levando em conta $A(x) = 0$, que nos leva

$$C(x)y^2\ln|y| + C^{''}(x)y\ln|y| + \Big(2B^{'}(x) - C(x) + D(x)\Big)\,y^2 + D^{''}(x)y = 0 \tag{3.131}$$

resultando no sistema

$$C(x) = 0, \qquad D(x) = 0, \qquad D^{''}(x) = 0 \tag{3.132}$$

levando em conta a 3.130, encontramos

$$B(x) = c_1 + c_2x, \qquad D(x) = -c_2, \tag{3.133}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Consequentemente, a solução geral da condição de simetria linearizado é

$$\xi = c_1 + c_2 x, \qquad \eta = -2c_2 y \tag{3.134}$$

O gerador infinitesimal é da forma

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2, \tag{3.135}$$

onde

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = x\partial_x - 2y\partial_y \tag{3.136}$$

Seja Ξ o co njunto de todos os geradores infinitesimais do grupo de pontos de simetria de Lie a um parâmetro de uma E.D.O $n \geq 2$. A condição de simetria linearizada é linear em ξ e η, e portanto,

$$X_1, X_2 \in \Xi \Rightarrow c_1 X_1 + c_2 X_2 \in \Xi, \qquad \forall c_1, c_2 \in \ \mathbb{R}. \tag{3.137}$$

Portanto, Ξ é um espaço vetorial. A dimensão , R, deste espaço vetorial é o número de constantes que aparecem na solução geral da condição de simetria linearizada. Como nos exemplos acima todo $X \in \Xi$ pode ser escrito na forma

$$\sum_{i=1}^{R} c_i X_i, \qquad c_i \in \mathbb{R}, \tag{3.138}$$

onde $\{X_1, ..., X_R\}$ é a base de Ξ. O conjunto de pontos de simetria gerados por $X \in \Xi$ formam um grupo de Lie (local) a R parâmetros.

3.9 Redução de Ordem de E.D.Os Usando Coordenadas Canônicas

Vamos supor agora que X é um gerador infinitesimal de um grupo de simetrias de Lie a um parâmetro da E.D.O

$$y^{(n)} = \omega\left(x, y, y^{'}, ..., y^{(n-1)}\right), \qquad n \neq 2. \tag{3.139}$$

Sejam (r, s) coordenadas canônicas do grupo gerado por X, de modo que

$$X = \partial_s \tag{3.140}$$

Então essa E.D.O pode ser escrita em termos de coordenadas canônicas na forma

$$s^{(n)} = \Omega\left(r, s, \dot{s}, ..., s^{(n)}\right), \qquad s^{(k)} = \frac{d^k s}{dr^k} \tag{3.141}$$

Contudo, a E.D.O é invariante sob o grupo de Lie de translações em s, assim a condição de simetria dá

$$\Omega_s = 0 \tag{3.142}$$

e portanto,

$$s^{(n)} = \Omega\left(r, \dot{s}, ..., s^{(n)}\right) \tag{3.143}$$

Escrevendo a E.D.O 3.139 em termos das coordenadas canônicas, nós reduzimos a mesma para uma E.D.O de ordem $n-1$ de $v = \dot{s}$:

$$v^{(n-1)} = \Omega\left(r, v, ..., v^{(n-2)}\right), \qquad v^{(k)} = \frac{d^{k+1} s}{dr^{k+1}} \tag{3.144}$$

Vamos supor que a equação reduzida tem uma solução geral

$$v = f\left(r; c_1, ..., c_{n-1}\right) \tag{3.145}$$

Então a solução geral da equação original 3.139 é

$$s(x,y) = \int^{r(x,y)} f\left(r; c_1, ..., c_{n-1}\right) dr + c_n \tag{3.146}$$

mais geralmente, se v é uma função qualquer de $\dot{s}$ e r tal que $v_s(r, \dot{s}) \neq$, então a 3.143 se reduz a E.D.O da forma

$$v^{(n-1)} = \tilde{\Omega}\left(r, v, ..., v^{(n-2)}\right), \qquad v^{(k)} = \frac{d^k v}{dr^k} \tag{3.147}$$

Uma vez que a solução da equação anterior é encontrada, a relação

$$\dot{s} = \dot{s}(r, v) \tag{3.148}$$

da a solução geral da 3.139:

$$s(x,y) = \int^{r(x,y)} \dot{s}\left(r, v\left(r; c_1, ..., c_{n-1}\right)\right) dr + c_n \tag{3.149}$$

Resumindo, se soubermos o grupo de simetrias de Lie a um parâmetro, somos capazes de resolver a equação do tipo 3.139 resolvendo uma E.D.O de ordem mais baixa em seguida integrando-a, caracterizando assim uma técnica sistemática para calcular pontos de simetrias de Lie.

Exemplo Considerando a E.D.O linear

$$y^{''} = \left(\frac{3}{x} - 2x\right) y^{'} + 4y \tag{3.150}$$

Um dos geradores avaliáveis dessa equação é

$$X = y\partial_y \tag{3.151}$$

As coordenadas canônicas mais simples são

$$r = x, \qquad s = \ln|y| \tag{3.152}$$

Assim também temos

$$\frac{ds}{dr} = \frac{y^{'}}{y}, \qquad \frac{d^2s}{dr^2} = \frac{y^{''}}{y} - \frac{y^{'2}}{y} \tag{3.153}$$

Consequentemente a E.D.O se reduz a equação de Riccati

$$\frac{dv}{dr} = \left(\frac{3}{r} - 2r\right)v + 4 - v^2, \qquad v = \frac{ds}{dr} = \frac{y^{'}}{y}. \tag{3.154}$$

Esta redução é uma técnica padrão, que produz a solução geral da equação original se uma solução da equação reduzida puder ser encontrada. A equação de Riccati tem uma solução simples:

$$v = -2r \tag{3.155}$$

Então as soluções remanescente são da forma

$$v = -2r + w^{-1}, \tag{3.156}$$

onde w satisfaz a E.D.O linear

$$\frac{dw}{dr} = 1 - \left(\frac{3}{r} + 2r\right)w \tag{3.157}$$

Portanto,

$$w = \frac{c_1}{r^3}e^{-r^2} + \frac{1}{2r} - \frac{1}{2r^3} \tag{3.158}$$

Tendo encontrado $\dot{s} = v(r; c_1)$, a solução da 3.155 da

$$\ln|y| = s = -r^2 + c_2 = -x^2 + c_2 \tag{3.159}$$

Similarmente 3.156 rende

$$\ln|y| = \ln|c_1 e^{-x^2} + \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right)| + c_2 \tag{3.160}$$

Combinando esses resultados e redefinindo as constantes arbitrárias, encontramos a solução geral da 3.150 que é

$$y = \tilde{c_1} e^{-x^2} + \tilde{c_2}\left(x^2 - 1\right) \tag{3.161}$$

No exemplo acima, foi conveniente tomar $v = \dot{s}$. Comumente esta não é a escolha conveniente para v.

3.10 Invariante Diferencial

Usando R geradores de simetria de Lie(ou simplesmente geradores de Lie) podemos reduzir a ordem uma de E.D.O de ordem n(R $\leq$ n) para uma ordem n - R, essa sessão descreve como podemos calcular essa redução.

Um gerador X gera simetrias em uma E.D.O:

$$y^{(n)} = \omega(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}), \tag{3.162}$$

em coordenadas canônicas, a E.D.O (3.162) pode ser reescrita como:

$$v^{(n-1)} = \Omega(r, v, ..., v^{(n-2)}), \tag{3.163}$$

onde v é uma função de r e $\frac{ds}{dr} = \dot{s}$, e $\frac{dv}{\dot{s}} \neq 0$. A E.D.O reduzida (3.163) é composta de funções que são invariantes sobre a ação de grupo gerada por X $= \partial_s$. Esse grupo de funções é conhecido como invariantes diferenciais. Um invariante de ordem k, é detonado por $X^k I = 0$. Em coordenadas canônicas $X^(k) = \partial_s$, e os invariantes são denotados por:

$$I = F(r, \dot{s}, ..., s^{(k)}) \tag{3.164}$$

para uma função F qualquer. Os invariantes são função de r, v e derivadas de v em respeito a r, dessa forma e e v são chamados de invariantes diferenciais fundamentais. Um invariante de ordem k deve satisfazer a seguinte condição:

$$\xi I_x + \eta I_y + \eta^{(1)} + ...\eta^k I_{y^{(k)}} = 0 \tag{3.165}$$

dessa forma I é a primeira integral de:

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dy^{'}}{\eta^{(1)}} = ... = \frac{dy^{(k)}}{\eta^{(k)}}. \tag{3.166}$$

r é a primeira integral de:

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} \tag{3.167}$$

e v é a primeira integral de:

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dy^{'}}{\eta^{(1)}} \tag{3.168}$$

Uma E.D.O que possui mais de um gerador de Lie pode ser escrito em termos dos invariantes para cada gerador, dessa forma a E.Do pode ser escrita em termos de funções que são invariantes sobre todos os geradores. Dado um espaço de Lie L formado por R geradores, os invariantes diferenciais desse grupo são soluções do sistema:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta_1^{(1)} & \cdots & \eta_1^{(R)} \\ \xi_2 & \eta_2 & \eta_2^{(1)} & \cdots & \eta_2^{(R)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_R & \eta_R & \eta_R^{(1)} & \cdots & \eta_R^{(R)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_{y'} \\ \vdots \\ I_y^{(R)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.169}$$

Este sistema tem duas soluções independentes entre si. Uma solução é independente de y^R e é denominada de r_R. A outra solução é v_R que depende não trivialmente de r_R. Como $\frac{dv_R}{dr_r}$ depende de $y^{(R+1)}$, a E.D.O (3.162) se reduz a:

$$\begin{aligned} v_R^{n-R} &= \eta(r_R, v_R, ..., v_R^{(n-R-1)}) \\ v_R^{(k)} &\equiv \frac{d^k v_R}{dr_R^k} \end{aligned} \tag{3.170}$$

para alguma função η.

Agora vamos dar um exemplo de como essa técnica pode ser usada:

Exemplo A E.D.O de quarta ordem abaixo:

$$y^{(iv)} = \frac{2}{y}(1 - y^{'})y^{'''} \tag{3.171}$$

Usando o pacote computacional para MAPLE, SADE[9], encontramos três geradores de simetria:

$$X_1 = \partial_x \tag{3.172}$$

$$X_2 = x\partial_x + y\partial_y \tag{3.173}$$

$$X_3 = x^2\partial_x + 2xy\partial_y \tag{3.174}$$

Escrevendo os invariantes diferenciais, usando a EQ. (3.169), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & 0 & -y^{''} & -2y^{'''} \\ x^2 & 2xy & 2y & 2(y^{'} - xy^{''}) & -4xy^{'''} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_{y'} \\ I_{y''} \\ I_{y'''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.175}$$

Para simplificar, admitimos x = 0, dessa forma a Eq. (3.175), se torna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & -y^{''} & -2y^{'''} \\ 0 & 0 & y & y^{'} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_{y'} \\ I_{y''} \\ I_{y'''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.176}$$

Usando a equação (3.176) podemos encontrar três equações:

$$I_x = 0 \tag{3.177}$$

$$yI_y - y^{''} I_{y''} - 2y^{'''} I_{y'''} = 0 \tag{3.178}$$

$$yI_{y'} + y^{'} I_{y''} = 0 \tag{3.179}$$

onde I é função de (x, y, $y^{'}$, $y^{''}$, $y^{'''}$).

Usando a equação (3.177), temos:

$$I = I(y, y^{'}, y^{''}, y^{'''}) \tag{3.180}$$

Substituindo a equação (3.180) na equação (3.179) e calculando, temos:

$$
\begin{aligned}
yI_{y'}(y,y',y'',y''') &= -y'I_{y''}(y,y',y'',y''') \\
I &= I(y,2yy''-y'^2,y''')
\end{aligned} \tag{3.181}
$$

Substituindo Eq. (3.181) em Eq. (3.178), temos:

$$yI_y(y,2yy''-y'^2,y''') - y''I_{y''}(y,2yy''-y'^2,y''') - 2y'''I_{y'''}(y,2yy''-y'^2,y''') = 0 \tag{3.182}$$

$$I = I(2yy^{y''-y'^2},y^2y''') \tag{3.183}$$

A partir da Eq. (3.183), podemos afirmar que o invariante diferencial fundamental é:

$$r_3 = 2yy^{y''-y'^2} \tag{3.184}$$

$$v_3 = y^2y''' \tag{3.185}$$

A partir dos invariantes diferenciais, podemos encontrar o invariante de ordem mais alta:

$$\frac{dv_3}{dr_3} = \frac{\frac{d(y^2y''')}{dx}}{\frac{d(2yy''-y'^2)}{dx}} \tag{3.186}$$

$$= \frac{2yy'y''' + y^2y''''}{2y'y'' + 2yy''' - 2y'y''} \tag{3.187}$$

$$= y' + \frac{yy''''}{2y'''} \tag{3.188}$$

Substituindo a E.D.O (3.171) na EQ (3.188)

$$\frac{dv_3}{dr_3} = 1 \tag{3.189}$$

Cuja solução é:

$$v_3 = r_3 + c_1 \tag{3.190}$$

substituindo (3.185) e (3.184) na EQ. (3.190), temos:

$$y^{'''} = \frac{2yy^{''} - y^2 + c_1}{y^2} \tag{3.191}$$

que é invariante sobre os três geradores de Lie (3.172), (3.173), (3.174)

Invariantes fundamentais podem ser usados para construir E.D.Os que tem determinados geradores de Lie. Se um invariante fundamental de um grupo de Lie G R-dimensional, é da forma (r_R, v_R), então toda E.D.O (3.162) de ordem n$\geq$ R que tem G como grupo de simetria pode ser escrita na forma:

$$v_R^{(n-R)} = F(r_R, v_R, ..., v_R^{(n-1-R)}), \tag{3.192}$$

onde F é uma função qualquer.

3.11 Álgebra dos Geradores

Até agora nós fomos capazes de reduzir a ordem de uma equação, mas ainda não encontramos completamente as soluções destas, em relação a seus geradores de Lie. Antes de avançarmos nesse campo, vamos primeiramente estudar melhor a estrutura algébrica formada a partir dos geradores de simetria de equação. Para garantir que n geradores são suficientes para resolver uma E.D.O de ordem n, algumas condições devem ser satisfeitas, essas condições serão apresentadas no decorrer dessa seção.

Um gerador é escrito na forma:

$$X_i = \xi_i \partial_x + \eta_i \partial_y \tag{3.193}$$

aplicando a operação de comutação para dois geradores de simetria X_1 e X_2, temos:

$$[X_1, X_2] = X_1(\xi_2)\partial_x + X_1(\eta_2)\partial_y - X_2(\xi_1)\partial_x - X_2(\eta_1)\partial_y \tag{3.194}$$

X_1 e X_2 devem obedecer uma condição de simetria para uma E.D.O do tipo $y^{(n)} = \omega$(x,y,$y^{'}$, ...,$y^{(n-1)}$ a seguinte condição deve ser válida:

$$X_i^{(n)}(y^{(n)} - \omega) = \eta_i^{(n)} - X_i^{(n)}\omega = 0 \tag{3.195}$$

Como $\eta_i^{(n)}$ é para n maior ou igual a dois, linear em $y^{(n)}$. Por sua vez, ω independe de $y^{(n)}$. Portanto, a Eq. (3.195) pode ser reescrita como:

$$\lambda_i y^{(n)} + F(x, y, ..., y^{(n-1)}) - X_i^{(n)}\omega = 0 \tag{3.196}$$

Como $y^{(n)} = \omega$(x,y,$y^{'}$, ..., $y^{(n-1)}$) temos:

$$\lambda_i\omega + F(x, y, ..., y^{(n-1)}) - X_i^{(n)}\omega = 0, \tag{3.197}$$

se ($y^{(n)}$ - ω) for um autovetor de X_i a Eq. (3.197) é satisfeita, o que implica que $X_i(y^{(n)}$ - $\omega) = \lambda_i(y^{(n)}$ - ω), a partir dessa condição concluímos que se dois geradores são geradores de simetria o comutador entre eles também é um gerador de simetria. Portanto, os geradores de simetria além de formar um espaço vetorial, também possuem uma estrutura de álgebra com o produto algébrico.

Uma álgebra pode ser construída a partir de varias subálgebras. Um elemento formado pela comutação de dois elementos que pertencem a uma álgebra, também pertencera aquela álgebra, se X_1, X_2 $\in$ M, então [X_1, X_2] $\in$ M. Toda subálgebra de Lie é uma álgebra por si só.

Uma subálgebra onde a comutação de um elemento desta com qualquer elemento da álgebra, der um elemento da mesma subálgebra é chamada de ideal:

$$X_1 \in M, X_2 \in L \to [X_1, X_2] \in M \tag{3.198}$$

toda álgebra possui no mínimo dois ideais, o conjunto vazio e a própria álgebra.

Uma álgebra L de dimensão R é solúvel se existe alguma sequência de subálgebras, 0 = $L_0 \subset L_1 \subset L_{R-1} \subset L_R$ = L, tal que a dimensão de L_k = k e que L_{k-1} seja um ideal de L_k para todo k entre 0 e R. Como resultado disso, temos que qualquer subálgebra de dimensão menor ou igual a 2 é solúvel, o que indica que a a sequência acima pode ser suficientemente construída até dimensão 2.

Exemplo

Considere uma álgebra gerada pelos sete geradores

$$X_1 = \partial_x$$
$$X_2 = \partial_y$$
$$X_3 = \mathrm{x}\partial_x$$
$$X_4 = \mathrm{x}\partial_y$$
$$X_5 = x^2\partial_x$$
$$X_6 = \mathrm{y}\partial_y$$
$$X_7 = x^2\partial_x + 2\mathrm{xy}\partial_y$$

O comutador entre esses geradores são

$$[X_1,\, X_3] = X_1$$
$$[X_1,\, X_4] = X_2$$
$$[X_1,\, X_5] = 2X_4$$
$$[X_1,\, X_7] = 2(X_3 + X_6)$$
$$[X_2,\, X_6] = X_2$$

$$[X_2,\, X_7] = 2X_4$$
$$[X_3,\, X_4] = X_4$$
$$[X_3,\, X_5] = 2X_5$$
$$[X_3,\, X_7] = X_7$$
$$[X_4,\, X_6] = X_4$$
$$[X_4,\, X_7] = X_5$$
$$[X_5,\, X_6] = X_5$$

os demais comutadores são nulos. É possível mostrar que esta subálgebra é solúvel através da sequência

$$\{0\} \subset \text{Span}(X_1) \subset \text{Span}(X_1,\, X_2) \subset \text{Span}(X_1,\, X_2,\, X_3) \subset \text{Span}(X_1,\, X_2,\, X_3,\, X_4) \subset \text{Span}(X_1,\, X_2,\, X_3,\, X_4,\, X_5) \subset \text{Span}(X_1,\, X_2,\, X_3,\, X_4,\, X_5,\, X_6) \subset \text{Span}(X_1,\, X_2,\, X_3,\, X_4,\, X_5,\, X_6,\, X_7)$$

que é constituída apenas por ideais de cada subálgebra. Vemos que Span(X_1, X_2) é uma subálgebra da álgebra maior já que a operação de comutação com qualquer um dos elementos desta base é proporcional a alguns destes geradores. Isto por sua vez é um ideal uma vez que os comutadores com X_4 são todos proporcionais a um dos $\{X_1, X_2, X_3\}$, ficando dentro da subálgebra. Esta construção é possível em qualquer passo da sequência. A escolha da base de uma álgebra de simetria deve ser feita, da forma que facilite a construções de ideais. A escolha mais simples que satisfaz essa condição é a escolha da base canônica.

A base canônica é aquela que dado um gerador X_i elemental da base de L, $X_k \in L_k$, $X_k \notin L_{k-1}$, $L_k = \text{Span}(X_1,\, X_2,\, ...,\, X_k)$.

Retornando ao problema de resolução de uma E.D.O, álgebras de simetrias solúveis podem ser usadas para reduzir a sua ordem uma vez, ou múltiplas vezes. Dado um conjunto de geradores X_i, (i no intervalo de 1 a R) que forma uma base canônica de uma E.D.O de ordem R, é possível definir coordenadas canônicas (r e v, ambas em R) para uma equação em relação a X_R, de modo que nessas coordenadas, $X_R = \partial_{s_R}$. Uma vez feito isso as coordenadas canônicas podem ser escritas em termos dos invariantes dos demais geradores X_1 até X_{R-1}. Toda E.D.O pode ser escrita em relação a seus invariantes, v_R = F(r_R). O uso de coordenadas canônicas garante que v_R é função da derivada de s_R em r_R e do próprio r_R.

O termo s_R pode ser escrita como sendo:

$$\begin{aligned} \dot{s_R} &= G(r_R) \qquad (3.199)\\ s_R &= \int^{r_R(r_{R-1},v_{R-1})} G(r_R)dr_R + C1 \end{aligned}$$

, que é um E.D de ordem R-1 invariante por X_i (i variando de 1 a R-1). Se a Eq. (3.199) puder ser resolvida para v_{R-1} em função de r_{R-1}, retornamos a equação original agora com a ordem reduzida em 1. Se esse método puder ser usado um número suficiente de vezes, a E.D.O pode ser resolvida completamente. As condições necessárias para a construção desse método é que uma vez que o gerador $X_R = \alpha(r_{R-1}, v_{R-1})\partial_{r_{R-1}} + \beta(r_{R-1}, v_{R-1})\partial_{v_{R-1}}$, as funções α e β não podem ser simultaneamente nulas e que as variáveis r_{R-1} e v_{R-1} são invariantes para os demais geradores.

Para ilustrar o método, considere a E.D.O:

$$y'' = \frac{y'^2}{y} - y^2 \qquad (3.200)$$

que possui dois geradores de simetria:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x \qquad (3.201)\\ X_2 &= x\partial_x - 2y\partial_y \qquad (3.202) \end{aligned}$$

Calculando o comutador de X_1 com X_2 vemos que eles formam uma base canônica, portanto, essa base é uma base solúvel.

O próximo passo é calcular os invariantes, para o grupo gerado por X_1, vemos que a única informação que eles nos fornece é que I não depende de x, portanto:

$$I = I(y, y^{'}.y^{''}) \tag{3.203}$$

por simplicidade escolhemos os invariantes na seguinte forma:

$$r_1 = y,\ v_1 = y^{'}$$

Para o grupo gerado por X_2, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & -2y & -3y^{'} & -4y^{''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \\ I_{y'} \\ I_{y''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.204}$$

Essa matriz de invariante nos fornece a seguinte equação:

$$-2yI_y - 3y^{'}I_{y'} - 4y^{''}I_{y''} = 0 \tag{3.205}$$

utilizando o software Maple, encontramos a seguinte solução para essa equação:

$$I = I\left(\frac{y^{'}}{y^{\frac{3}{2}}}, \frac{y^{''}}{y^{2}}\right) \tag{3.206}$$

portanto, os invariantes para o segundo grupo são:

$$r_2 = \frac{y^{'}}{y^{\frac{3}{2}}},\ v_2 = \frac{y^{''}}{y^{2}}$$

Substituindo o segundo grupo na Eq. (3.200), podemos reescrevê-la como:

$$v_2 = r_2^2 - 1 \tag{3.207}$$

A variável canônica s_2 é obtida a partir da restrição de X_2 a r_1 e v_1

$$X_2 r_1 = -2r_1,\ X_2 v_1 = -3v_1,$$
$$X_2 = \text{-}2r_1\partial_{r_1} \text{ - } 3v_1\partial_{v_1}$$

Sabe-se de s_2 que

$$X_2 s_2 = 1$$
$$\text{-}2r_1\partial_{r_1}s_2 \text{ - } 3v_1\partial_{v_1}s_2 = 1$$

cuja solução é $s_2 = \text{-}\frac{1}{2}ln(r_1)$. Desta forma

$$\begin{aligned}\frac{ds_2}{dr_2} &= \frac{ds_2/dx}{dr_2/dx} \\ &= \frac{r_2}{3r_2^2 - 2v_2}\end{aligned} \tag{3.208}$$

substituindo a Eq. (3.207) na equação anterior temos:

$$\frac{ds_2}{dr_2} = \frac{r_2}{r_2^2 + 2} \tag{3.209}$$

depois de uma integração direta:

$$s_2 = \frac{1}{2}ln(r_2^2 + 2) + k \tag{3.210}$$

Reescrevendo essa solução em termos de r_1 e v_1, obtemos a seguinte equação algébrica para v_1:

$$v_1 = \pm r_1(c_1^2 - 2r_1)^{\frac{1}{2}} \tag{3.211}$$

onde c_1 é uma contante arbitrária. Isso completa o primeiro ciclo de resolução, temos v_1 como função de r_1, resta resolver a equação para s_1, usando X_1:

$$\frac{ds_1}{dr_1} = \frac{1}{y'} = \frac{\pm 1}{r_1(c_1^2 - 2r_1)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.212}$$

através de uma integração direta, obtemos

$$s_1 = c_2 \mp \frac{1}{c_1} arccosh\left(c1\sqrt{\frac{2}{r_1}}\right) \tag{3.213}$$

Escrevendo essa equação em termos de x e de y, temos:

$$\begin{gathered} x = c_2 \mp \frac{1}{c_1} arccosh\left(c1\sqrt{\frac{2}{y}}\right) \\ y = 2c_1^2 sech^2(c_1(x - c_2)) \end{gathered} \tag{3.214}$$

3.12 Simetrias de Lie para Equações Diferenciais Parciais

Pontos de simetria para E.D.P são obtidos da mesma maneira que para E.D.O, para exemplificar vamos considerar um E.D.P com duas variáveis independentes, (x e t) e uma dependente (u). Um ponto de transformação é um difeomorfismo que mapeia a superfície u = u(x,t) da seguinte maneira:

$$\Gamma : (x, t, u) \mapsto (\hat{x}(x, t, u(x, t)), \hat{t}(x, t, u(x, t)), \hat{u}(x, t, u(x, t))) \tag{3.215}$$

Para calcular a prolongação de uma dada transformação, é necessário diferenciar os termos da Eq. (3.215), em relação aos parâmetros independentes, através de uma derivada total:

$$D_x = \partial_x + u_x\partial_u + u_{xx}\partial_{u_x} + u_{xt}\partial_{u_t} + ... \tag{3.216}$$

$$D_t = \partial_t + u_t\partial_u + u_{xt}\partial_{u_x} + u_{tt}\partial_{u_t} + ... \tag{3.217}$$

Os dois primeiros termos da Eq. (3.215) podem ser reescritos em termos de um

Jacobiano não-nulo:

$$J = \begin{vmatrix} D_x\hat{x} & D_x\hat{t} \\ D_t\hat{x} & D_t\hat{t} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3.218}$$

Se a Eq. (3.218) for satisfeita, o termo restante da Eq. (3.215) pode ser reescrito como $\hat{u} = \hat{u}(\hat{x}, \hat{t})$. Aplicando a regra da cadeia temos:

$$\begin{bmatrix} D_x\hat{u} \\ D_t\hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x\hat{x} & D_x\hat{t} \\ D_t\hat{x} & D_t\hat{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{\hat{x}} \\ \hat{u}_{\hat{t}} \end{bmatrix} \tag{3.219}$$

e portanto:

$$\hat{u}_{\hat{x}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} D_x\hat{u} & D_x\hat{t} \\ D_t\hat{u} & D_t\hat{t} \end{bmatrix}, \qquad \hat{u}_{\hat{t}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} D_x\hat{x} & D_x\hat{u} \\ D_t\hat{x} & D_t\hat{u} \end{bmatrix}. \tag{3.220}$$

as prolongações de ordem superior são obtidas recursivamente, aplicando novamente a regra acima.

Definindo um ponto de simetria de uma E.D.P de ordem n:

$$\Delta(x, t, u, u_x, u_t, ...) = 0 \tag{3.221}$$

um ponto de transformação é definido como:

$$\Delta(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u}, \hat{u}_{\hat{u}}, \hat{x}_{\hat{t}}, ...) = 0 \tag{3.222}$$

definida dessa maneira, pois a transformação deve ser de tal maneira a mapear a função nela mesma.

Exemplo

Usando a condição de simetria para mostrar que:

$$(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u}) = \left(\frac{x}{2t}, \frac{-1}{4t}, 2(ut - x)\right) \tag{3.223}$$

é um ponto de simetria da equação de Burgers

$$u_t + uu_x = u_{xx} \tag{3.224}$$

Escrevendo o Jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2t} & 0 \\ \frac{-x}{2t^2} & \frac{1}{4t^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{8t^3} \tag{3.225}$$

Escrevendo os termos u_t, uu_x e u_{xx}

$$\hat{u}_{\hat{x}} = 8t^3 \begin{vmatrix} 2(tu_x - 1) & 0 \\ 2(tu_t + u) & \frac{1}{4t^2} \end{vmatrix} = 4t(tu_x - 1) \tag{3.226}$$

$$\hat{u}_{\hat{t}} = 8t^3 \begin{vmatrix} \frac{1}{2t} & 2(tu_x - 1) \\ \frac{-x}{2t^2} & 2(tu_t + u) \end{vmatrix} = 8t(t^2 u_t + xtu_x + tu - x) \tag{3.227}$$

$$\hat{u}_{\hat{x}} = 8t^3 \begin{vmatrix} 4t^2 u_{xx} & 0 \\ 4(t^2 u_{xt} + 2tu_x - 1) & \frac{1}{4t^2} \end{vmatrix} = 8t^3 u_{xx} \tag{3.228}$$

Calculando $\hat{u}_{\hat{t}}$ + $\hat{u}\hat{u}_{\hat{x}}$, temos:

$$\hat{u}_{\hat{t}} + \hat{u}\hat{u}_{\hat{x}} = 8t(t^2u_t + xtu_x + tu - x) + 2(ut - x)(4t(tu_x - 1))$$
$$8t(t^2u_t + xtu_x + tu - x) + 8t(ut^2u_x - ut - xtu_x + x) = 0$$
$$8t^3u_t + 8xt^2u_x + 8t^2u - 8tx + 8t^3uu_x - 8ut^2 - 8xt^2u_x + 8tx = 0$$
$$= 8t^3(u_t + uu_x)$$
$$= \frac{1}{J}u_{xx}$$

Diferente do exemplo acima, normalmente não conhecemos à priori, os pontos de simetria de uma dada equação parcial. Entretanto é possível encontrá-los através dos grupos de Lie a um parâmetro. Escrevendo os pontos de simetria na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + \epsilon\xi(x,t,u) + O(\epsilon^2) \\ \hat{t} &= t + \epsilon\tau(x,t,u) + O(\epsilon^2) \\ \hat{u} &= u + \epsilon\eta(x,t,u) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \tag{3.229}$$

Assim como cada ponto de transformação no plano,cada parâmetro local de transformação de Lie é obtido através do gerador infinitesimal (X = $\xi\partial_x$ + $\tau\partial_t$ + $\eta\partial_u$).

A superfície u = u(x,t) é mapeada sobre si mesma pelo grupo de transformação gerado por X se X(u - u(x,t)) = 0, essa condição é expressada pela equação característica:

$$Q = \eta - \xi u_x - \tau u_t \tag{3.230}$$

quando Q = 0, a superfície é invariante.

É importante calcular também as prolongações da Eq. (3.229) que para a primeira derivada tem a forma:

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_{\hat{x}} &= u_x + \epsilon\eta^x(x, t, u, u_x, u_t) + O(\epsilon^2) \\
\hat{u}_{\hat{t}} &= u_t + \epsilon\eta^t(x, t, u, u_x, u_t) + O(\epsilon^2)
\end{aligned}
\tag{3.231}
$$

onde η^x e η^t são:

$$
\begin{aligned}
\eta^x(x, t, u, u_x, u_t) &= D_x\eta - u_x D_x\xi - u_t D_x\tau \\
\eta^t(x, t, u, u_x, u_t) &= D_t\eta - u_x D_t\xi - u_t D_t\tau
\end{aligned}
\tag{3.232}
$$

De forma generalizada para derivadas de ordem superior:

$$
\hat{u}_A = u_A + \epsilon\eta^A + O(\epsilon^2) \tag{3.233}
$$

onde:

$$
u_A \equiv \frac{\partial^{A_1+A_2}u}{\partial x^{A_1}\partial t^{A_2}}, \qquad u_{\hat{A}} \equiv \frac{\partial^{A_1+A_2}\hat{u}}{\partial \hat{x}^{A_1}\partial \hat{t}^{A_2}}
$$

portanto,

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_{A\hat{x}} &= u_{Ax} + \epsilon\eta^{Ax} + O(\epsilon^2) \\
\hat{u}_{A\hat{t}} &= u_{At} + \epsilon\eta^{At} + O(\epsilon^2)
\end{aligned}
\tag{3.234}
$$

$$
\tag{3.235}
$$

onde:

$$
\begin{aligned}
\eta^{Ax} &= D_x\eta^A - u_{Ax} D_x\xi - u_{At} D_x\tau \\
\eta^{At} &= D_t\eta^A - u_{Ax} D_t\xi - u_{At} D_t\tau
\end{aligned}
\tag{3.236}
$$

Exemplo

Vamos aplicar o método para encontrar geradores de simetria na equação de Burgers (3.224). Inicialmente vamos calcular a equação na sua forma prolongada:

$$\hat{u}_{\hat{t}} + \hat{u}_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{u}\hat{u}_{\hat{x}} \tag{3.237}$$

expandindo os termos prolongados temos:

$$u_t + \epsilon\eta^t + u_{xx} + \epsilon\eta^{xx} = (u + \epsilon\eta)(u_x + \epsilon\eta^x)$$
$$u_t + \epsilon\eta^t + u_{xx} + \epsilon\eta^{xx} = uu_x + u\epsilon\eta^x + u_x\epsilon\eta$$

subtraindo a equação original sobra:

$$\eta^t + \eta^{xx} + u\eta^x = u_x\eta \tag{3.238}$$

escrevendo os termos com índice t, xx e x, temos:

$$\begin{aligned}\eta_t - \xi_t u_x + (\eta_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2 = \eta_{xx} + (2\eta_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\eta_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 \\ -2\tau_{xu}u_x u_t - \xi_{uu}u_x^3 - \tau_{uu}u_x^2 u_t + (\eta_u - 2\xi_x)(u_t + uu_x) - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x(u_t + uu_x) \\ -\tau_u(u_t + uu_x) - 2\tau_u u_x u_{xt} - u[\eta_x + (\eta_u - \xi_x)u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t] - u_x\eta\end{aligned}$$

Nessa equação o termo de maior derivada em u são aqueles com uma derivada segunda de u em x e t, agrupando esses termos e igualando seu somatório a zero:

$$\tau_x + \tau_u u_x = 0$$

onde:

$$\tau_x = \tau_u = 0$$

substituindo esse resultado, obtemos:

$$\eta_t - \xi_t u_x + (\eta_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t = \eta_{xx} + (2\eta_{xu} - \xi_{xx})u_x + (\eta_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2$$
$$-\xi_{uu}u_x^3 + (\eta_u - 2\xi_x)(u_t + uu_x) - 3\xi_u u_x(u_t + uu_x) - u[\eta_x + (\eta_u - \xi_x)u_x - \xi_u u_x^2] - u_x\eta$$

O próximo passo é agrupar todos os termos que possuem derivada de u em relação a t:

$$(\eta_u - \tau_u)u_t - \xi_u u_x u_t = (\eta_u - 2\xi_x - 3\xi_u u_x)u_t$$

de onde tiramos duas equações:

$$\xi_u = 0 \quad (3.239)$$
$$\xi_x = \frac{1}{2}\tau_t \quad (3.240)$$

a partir dessas duas equações pode escrever a ξ como:

$$\xi = \frac{1}{2}\tau_t(t)x + A(t) \quad (3.241)$$

substituindo o valor de ξ,

temos:

$$\begin{aligned} \eta_t - \left[\frac{1}{2}\tau(t)_{tt}x + A(t)_t\right]u_x + &= \eta_{xx} + 2\eta_{xu}u_x + \eta_{uu}u_x^2 + [\eta_u - \tau(t)_t]uu_x \quad (3.242) \\ &- u\left[\eta_x + \left(\eta_u - \frac{1}{2}\tau(t)_t\right)u_x\right] - u_x\eta \end{aligned}$$

separando os termos em polinômios de u_x temos 3 equações

$$\eta_{uu} = 0 \tag{3.243}$$

$$\frac{1}{2}\tau(t)_{tt} + A(t)_t + 2\eta_{xu} + \frac{1}{2}\tau(t)_t u + \eta = 0 \tag{3.244}$$

$$u\eta_x + \eta_{xx} - \eta_t = 0 \tag{3.245}$$

a partir da primeira equação podemos deduzir que $\eta = B(x,t)u + x(x,t)$, substituindo esse valor na segunda equação temos:

$$\frac{1}{2}\tau(t)_{tt}x + A(t)_t + 2B(x,t)_x + \frac{1}{2}\tau(t)_t u + B(x,t)u + C(x,t) = 0$$

separando os termos em polinômios de u:

$$\begin{aligned} B(x,t) &= B(t) = -\frac{1}{2}\tau(t)_t \\ C(x,t) &= -\frac{1}{2}\tau(t)_{tt}x - A(t)_t \end{aligned}$$

Substituindo os valores de B e C na terceira equação encontra-se o valor de A, τ, η e ξ

$$\tau = C1t^2 + 2C2t + C3 \tag{3.246}$$

$$\xi = C1xt + C2x + C4t + C5 \tag{3.247}$$

$$\eta = -C1tu - C2u - C1x - C4 \tag{3.248}$$

Portanto, a Equação de Burges possui 5 geradores:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= xt\partial_x - t^2\partial_t - (tu + x)\partial_u \\
X_2 &= x\partial_x + 2t\partial_t - u\partial_u \\
X_3 &= \partial_t \\
X_4 &= t\partial_x - \partial_u \\
X_5 &= \partial_x
\end{aligned}
$$

Capítulo 4

Simetrias para Equações Íntegro-Diferenciais e Fracionárias

No capítulo anterior descrevemos métodos usados para encontrar um subgrupo de simetrias e algumas soluções para equações diferenciais. A aplicação direta desses métodos de análise de grupos para equações Íntegro-Diferenciais ou para equação fracionárias é impossível sem que sejam feitas algumas mudanças na equação, por exemplo uma substituição da derivada fracionária por uma E.D.O ou por uma equação com uma variável independente. O principal obstáculo é a presença de um operador integral (normalmente não-local).

Neste capítulo iremos fazer uma descrição de alguns dos principais métodos para calcular grupos de simetrias em equações fracionárias e em equações integro diferencias e depois mostrar a equivalência entre esses métodos.

4.1 Abordagem da Teoria de Lie para Equações Fracionárias

Nessa sessão iremos descrever um método para aplicar a teoria de simetrias de Lie para equações fracionárias.[10] O interesse no estudo dessas equações aumentou muito nós últimos anos, pelo fato destas possuírem diversas aplicações não só na matemática pura e aplicada como em Mecânica Estatística, Economia e em fenômenos não lineares, como por exemplo, processos de difusão anômala. Apesar de muitos estudos na área [11] e [12], de construções de diversos modelos, o estudo de equações fracionárias ainda é um problema em aberto.

A existência dessa abordagem se deve ao fato de que existe um ligação entre a teoria de Lie para equações fracionária e a teoria de Lie clássica para equações diferenciais parciais. Podemos observar isso pela noção geométrica de prolongação infinita, de fato as equações fracionárias podem ser interpretadas como um sistema de equações parciais envolvendo um número infinito de derivadas. Como resultado dessa abordagem temos a generalização de uma fórmula de prolongação para os geradores infinitesimais de simetria. Tais geradores separam as múltiplas variáveis dependentes e independentes em grupos, permitindo transformar soluções em soluções, ou seja, reduzindo uma equação fracionária em uma com um número menor de variáveis independentes, ou em uma equação diferencial ordinária com uma ordem menor. A partir dessas equações reduzidas podemos construir subgrupos de simetria para a equação original, e em alguns casos, soluções. Antes de abordamos o método propriamente dito é necessário fazer algumas definições fundamentais. A primeira delas é o operador fracionário Riemann-Liouville (ou RL) e o operador RL misto.

O operador fracionário RL é definido matematicamente como:

$$ {}_aD_t^p f(t) := \frac{1}{\Gamma(1+ <p> -p)} \frac{d^{<p>+1}}{dt^{<p>+1}} \int_a^t (t-\tau)^{<p>-p} f(\tau) d\tau \tag{4.1} $$

onde Γ é a função gama e $<p>$ é a função degrau, na função degrau p é um valor inteiro, se $p > 0$, então $<p>$ é o primeiro número natural menor que p, caso $p < 0$, $p =$ -1.

O operador RL misto é definido na forma integral:

$$ {}_{a_1,\ldots,a_N}\partial_{x_1,\ldots,x_N}^{p_1,\ldots,p_N} f(x_1,\ldots,x_N) := \left(\prod_{i=1}^{N} \frac{\partial^{<p>+1}}{\partial t^{<p>+1}} \int_{a_i}^{x_i} d\xi_i \frac{x_i - \xi_i^{<p_i>-p_i}}{\Gamma(1+ <p_i> -p_i)} \right) f(\xi_1,\ldots,\xi_N) \tag{4.2} $$

ou na forma de um somatório:

$$ {}_{a_1,\ldots,a_N}\partial^{p_1,\ldots,p_N}_{x_1,\ldots,x_N} f(x_1,\ldots,x_N) := \prod_{i=1}^{N}\left[\sum_{k_i=0}^{\infty}\binom{p_i}{k_i}\frac{(x_i-a_i)^{k_i-p_i}}{\Gamma(k_i-p_i+1)}\frac{\partial^{k_i}}{\partial x_i^{k_i}}\right] \tag{4.3} $$

onde:

$$ \binom{p}{k} := \frac{\prod_i^k (p-i+1)}{\Gamma(k+1)} $$

A partir de agora iremos focar em equações fracionárias com uma variável dependente u e N variáveis independentes na seguinte forma:

$$ \varepsilon(x, u,_a \partial_x^P u, \ldots) = 0 \tag{4.4} $$

Dado um grupo contínuo G de simetrias (grupo local de difeomorfismos, que mapeia soluções em soluções, para alguma função suave) definimos um elemento desse grupo v, como um elemento associado com o grupo de transformação.

$$ v = \sum_{i=1}^{N} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \phi(x,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{4.5} $$

onde

$$ \xi^i(x,u) = \left.\frac{d\Xi^i_{g(\varepsilon}(x,u)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \qquad \psi(x,u) = \left.\frac{d\Phi_{g(\varepsilon}(x,u)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \tag{4.6} $$

Para calcular Eq. (4.6), nós precisamos prolongar a função u em um espaço adequado, conhecido como "Jet Space", através de uma notação de múltiplos índices:

$$ \frac{\partial^{|\sigma|} f(x)}{\partial x^{\sigma}} = \left(\prod_{k=1}^{K}\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right) f(x), \qquad com \quad |\sigma| := K $$

Outra definição importante e necessária é a de "Infinite jet manifold", representado por $j^{\infty}(\pi)$, esse conjunto de variedades é formado por todos os elementos que satisfazem a seguinte equivalência:

$$\left.\frac{\partial^{|\sigma|} f(x)}{\partial x^{\sigma}}\right|_{x=\eta} = \left.\frac{\partial^{|\sigma|} \tilde{f}(x)}{\partial x^{\sigma}}\right|_{x=\eta} \tag{4.7}$$

onde $\tilde{f}$ é a função f prolongada

Dada uma equação diferencial fracionária na forma (4.4), o espaço representado pelo "Infinite jet manifold"é adequado para realizarmos a prolongação dos geradores. Usando a equação (4.3) podemos reescrever a equação (4.4) como uma equação diferencial envolvendo uma quantidade infinita de derivadas parciais. Dessa forma temos:

$$v = \sum_{i=1}^{N} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \phi(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{|\sigma|\geqslant 1} \phi^{\sigma}(x,u,...)\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial u^{\sigma}}, \quad u^{\sigma} := \frac{\partial^{|\sigma|} u}{\partial x^{\sigma}} \tag{4.8}$$

Introduzindo o operador derivada total

$$D_i := \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{|\sigma|\geqslant 0} \frac{\partial u^{\sigma}}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial u^{\sigma}} \tag{4.9}$$

podemos associar cada gerador com uma transformação de simetria infinitesimal

$$pr^{\infty} v = \sum_{i=1}^{N} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \phi(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{|\sigma|\geqslant 1} \phi^{\sigma}\frac{\partial}{\partial u^{\sigma}} \tag{4.10}$$

onde $\sigma = (i_1, ..., i_K)$, D^{σ} é o produto direto entre as derivadas totais e

$$\phi^{\sigma} := D^{\sigma}\left(\phi(x,u) - \sum_{i=1}^{N} \xi^i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{N} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} D^{\sigma} u \tag{4.11}$$

eq (4.10) representa a ação prolongada do gerador.

Iremos agora escrever uma forma explicita para a ação prolongada atuando no operador

RL, como função dos coeficientes de v

$$\phi^p := pr^{\infty}v[{}_a\partial_x^p u] \quad (4.12)$$

$$:= {}_aD_x^p\left(\phi - \sum_{i=1}^{N}\xi^i\partial_{x_i}u\right) + \sum_{i=1}^{N}\xi^i\partial x_{ia}\partial_x^p u \quad (4.13)$$

onde ${}_aD_x^p$ é a derivada fracionária total

$${}_aD_x^p = \prod_{i=1}^{N}\left[\sum_{k_i=0}^{\infty}\binom{p_i}{k_i}\frac{(x_i-a_i)^{k_i-p_i}}{\Gamma(k_i-p_i+1)}D_i^{k_i}\right] \quad (4.14)$$

Como exemplo iremos calcular a prolongação para N = 1, $a = 0$ e p positivo

$$\phi^p =_a \partial_x^p\phi - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{n+1}\frac{d^{n+1}\xi}{dx^{n+1}}{}_a\partial_x^{p-n}u \quad (4.15)$$

É conveniente explicitar a dependência em u do coeficiente $\phi \equiv \phi(x, u(x))$, para isso iremos recorrer a regra de Leibniz para derivadas fracionárias [13]

$${}_0D_t^p f(t,(g(t)) = \quad (4.16)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\sum_{r=0}^{k}\binom{p}{n}\binom{n}{m}\binom{k}{r}\frac{t^{n-p}(-g)^r}{k!\Gamma(n+1-p)}\frac{d^m g^{k-r}}{dt^m}\frac{\partial^{n-m+k}f(t,g)}{\partial t^{n-m}\partial g^k}$$

isolando os termos lineares em u e suas derivadas, temos:

$$D_x^p\phi(x,u(x)) =_0 \partial_x^p\phi - u_0\partial_x^p(\partial_u\phi) + \partial_u\phi_0\partial_x^p u + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{p}{k}\frac{\partial^{k+1}\phi}{\partial x^k\partial u}{}_0\partial_x^{p-k}u + \mu^p(x,u) \quad (4.17)$$

onde $\mu^p(x,u)$ é:

$$\mu^p(x,u) := \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{n}\sum_{k=2}^{m}\sum_{r=0}^{k-1}\binom{p}{n}\binom{n}{m}\binom{k}{r}\frac{x^{n-p}(-u)^r}{k!\Gamma(n+1-p)}\frac{d^m u^{k-r}}{dx^m}\frac{\partial^{n-m+k}\phi(x,u)}{\partial x^{n-m}\partial u^k} \quad (4.18)$$

temos portanto,

$$\phi^p = {}_0\partial_x^p \phi + {}_0\partial_x^p u \left(\partial_u \phi - p\frac{d\xi}{dx} \right) - u_0 \partial_x^p \partial_u \phi \tag{4.19}$$
$$+\mu^p(x,u) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\binom{p}{n} \partial_x^n \partial_u \phi - \binom{p}{n+1} \frac{d^{n+1}\xi}{dx^{n+1}} \right] {}_0\partial_x^{p-n} u$$

Podemos agora definir o teorema de Lie para equações fracionárias.

Seja $\varepsilon(x, u, {}_a\partial_x^p u, ...|_{\varepsilon=0})$ uma equação fracionária definida num subconjunto aberto. Se a prolongação infinita $pr^{\infty}v[\varepsilon] = 0$, então v gera uma simetria infinitesimal para ε. Esse método consiste portanto, em aplicar o teorema de Lie para a equação fracionária, expandindo a cada operador RL usando a equação 4.3 e depois aplicar a prolongação infinita para determinar os coeficientes dos geradores. Dessa maneira nós encontramos alguns subgrupos de simetrias.

4.2 Abordagem para Equações Íntegro-Diferenciais

Nesta sessão, iremos discutir diferentes abordagens para calcular simetrias em equações íntegro-diferenciais. [14] Calcular simetrias em E.I.D é computacionalmente muito difícil e existem poucas obras na literatura que tratam desse assunto. Os métodos podem ser basicamente de dois tipos: diretos e indiretos. O método indireto não é o foco desse trabalho, então ele será abordado de forma breve e resumida. Ele é caracterizado por substituir de alguma maneira, as equações íntegro-diferenciais por um sistema de equações diferenciais, e em seguida, analisar o sistema resultante de equações diferenciais usando o método de análise de grupo de Lie clássica, que foi apresentado no capítulo anterior.

Os métodos indiretos podem ser de dois tipos: métodos dos momentos e método das equações diferenciais com condições de contorno

No método dos momentos, a E.I.D para uma função f é reduzida a um sistema infinitos de equações diferenciais. Um subgrupo finito contendo uma quantidade k dessas equações é escolhido, então usando o método clássico de Lie as simetrias desse subgrupo são encontradas. Em seguida é feito o limite de k em direção a infinito, o grupo de geradores resultante é usado para reconstruir a álgebra com a função original f envolvida

No método das equações diferenciais com condições de contorno, na equação a ser estudada cada integral definida é substituída pela diferença numérica da primitiva calculada no limite superior e inferior. A equação íntegro-diferencial assume a forma de um diferencial funcional. Como mostrado em [15] e [16] esse método é equivalente à teoria clássica. Devemos observar que a eliminação da integral depende da escolha feita e pode ser feita de muitas maneiras.

O método direto de encontrar simetrias foram desenvolvidos em [17] e aplicado para encontrar simetrias na equação de cinética de Boltzmann, na equação de movimento da viscoelasticidade média e nas equações de Vlasov-Maxwell da teoria de Plasmas. Para estender a teoria clássica de Lie as E.I.D é necessário resolver alguns problemas. Primeiro deve-se definir um grupo G de transformação a um parâmetro para um grupo de equações não-locais e formular um critério de invariância que leva a um conjunto de equações determinantes. Vamos começar expressando uma E.I.D como sendo um funcional.

$$F[f(x)] = 0 \tag{4.20}$$

e G como um grupo a um parâmetro que transforma f em $\tilde{f}$

$$\tilde{f}(x) = f + a\iota + O(a^2), \quad x = \tilde{x} \tag{4.21}$$

então o grupo local de transformações (4.21) é chamado grupo de de simetria da Eq. (4.20) se para qualquer a a função F não varia

$$F[\tilde{f}] = 0 \tag{4.22}$$

Diferenciando (4.22) com respeito ao parâmetro a e assumindo que a $\rightarrow$ nos fornece um conjunto de equações determinantes. Essas equações determinantes normalmente também são equações íntegro-diferenciais.

O critério de invariância para F com respeito ao grupo pode ser expresso em uma forma infinitesimal usando um operador de grupo canônico Y,

$$Y\ F|_{F=0} = 0 \quad onde \quad Y \equiv \int dy \iota(y) \frac{\delta}{\delta f(y)}. \tag{4.23}$$

Aqui com a finalidade de generalizar a ação de um operador de grupo canônico não só para funções diferenciais mas também para funcionais, usamos a diferenciação variacional na definição de Y.

Para encontrar soluções de equações determinantes, podemos expandir as coordenadas de um grupo de geradores em uma série de potência e igualar coeficientes. Entretanto, existe uma maneira mais simples de fazer isso. Como tratamos as variáveis locais e não-locais como independentes, podemos separá-las. O procedimento para resolver equações determinantes locais é feito da maneira maneira. Dessa forma obtemos expressões para coordenadas de geradores de grupo que chamamos de simetria intermediária. De maneira similar, a solução das equações determinantes não-locais é feita usando a simetria intermediária e a diferenciação variacional. Esse procedimento pode ser resumido da seguinte forma: a) definir um conjunto de variáveis b) construir equações determinantes com base nos critérios de invariância c) separar as equações determinantes em locais e não-locais d) resolver as equações determinantes locais e e) resolver as equações não-locais usando o procedimento de diferenciação variacional. Como exemplo iremos aplicar esse método à equação de Benny [14]

A equação de Benny aparece no comprimento de onda hidrodinâmica longa de um fluido incompressível ideal de largura finita no campo gravitacional. Tal equação pode ser representada em várias forma, uma delas é a equação cinética de Benny:

$$f_t + v f_x - A^0_x f_v = 0, \quad A^0(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,x,v) dv \tag{4.24}$$

onde x é coordenada espacial, t a coordenada temporal, v é a velocidade e f é uma função distribuição.

Para a Eq. (4.24) o gerador tem a seguinte forma:

$$X = \xi_1 \partial_t + \xi_2 \partial_x + \xi_3 \partial_v + \eta_1 \partial_f + \eta_2 \partial_{A^0} \tag{4.25}$$

onde ξ e η dependem de x,t,v,f e A^0

em coordenadas canônicas esse operador é reescrito na seguinte forma:

$$Y = \iota_1 \partial_f + \iota_2 \partial_{A^0} \tag{4.26}$$

onde

$$\iota_1 = \eta_1 - \xi_1 f_t - \xi_2 f_x - \xi_3 f_v, \quad \iota_2 = \eta_2 - \xi_1 A^0_t - \xi_2 A^0_x,$$

e para calcular a ação em uma função ou em um funcional deve-se usar a Eq. 4.23. Aplicando o operador de grupo a Eq.(4.24) e acrescentando o fato de que f não depende de v

$$A^0_v = 0 \tag{4.27}$$

temos o seguinte sistema determinante:

$$D_t(\iota_1) + vD_x(\iota_1) - A^0_x D_v(\iota_1) - D_x(\iota_2) f_v, \quad D_v(\iota_2) = 0 \tag{4.28}$$

$$\iota_2 = \int \iota_1 dv, \tag{4.29}$$

que deve ser resolvido para Eq.(4.24) e (4.27). Na solução da equação determinante (4.28), as variáveis são tratadas como independentes. Essa suposição separa os sistemas determinantes em locais (4.28) e não locais (4.29).

Após algumas manipulações ξ e η são determinados, obtendo uma simetria intermediária.

$$\xi_1 = \xi_1(t), \quad \xi_2 = \frac{x}{2}(\xi_1)_t + \alpha x + \beta(t), \quad \xi_3 = \alpha v - \frac{v}{2}(\xi_1)_t + \frac{x}{2}(\xi_1)_{tt} + \beta_t, \tag{4.30}$$
$$\eta_1 = \eta_1(f), \quad \eta_2 = \gamma(t) + [2\alpha - (\xi_1)_t]A^0 - x\beta_{tt} - \frac{x^2}{4}(\xi_1)_{ttt},$$

onde $\xi_1(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ e $\eta_1(f)$ são funções arbitrárias de seus argumentos e α é uma constante.

Para o sistema não-local (4.29), vamos reescrevê-lo na seguinte forma, onde os limites do integrando foram omitidos

$$\eta_2 - \xi_1 A^0_t - \xi_2 A^0_x = \int (\eta_1 - \xi_1 f_t - \xi_2 f_x - \xi_3 f_v) dv \tag{4.31}$$

Substituindo os termos da equação (4.30) na equação anterior temos:

$$\gamma(t) + [2\alpha - (\xi_1)_t]A^0 - x\beta_{tt} - \frac{x^2}{4}(\xi_1)_{ttt} - \xi_1 A^0_t - \left[\frac{x}{2}(\xi_1)_t + \alpha x + \beta(t)\right] A^0_x = \tag{4.32}$$
$$= \int \left[\eta_1 + \xi_1 f_t - \left(\frac{x}{2}(\xi_1)_t + \alpha x + \beta\right) f_x - \left(\alpha v - \frac{v}{2}(\xi_1)_t + \frac{x}{2}(\xi_1)_{tt} + \beta_t\right) f_v\right] dv,$$

eliminando termos que são iguais dos dois lados da equação temos

$$\gamma(t) + [2\alpha - (\xi_1)_t]A^0 - x\beta_{tt} - \frac{x^2}{4}(\xi_1)_{ttt} = \int \left[\eta_1 - \left(\alpha v - \frac{v}{2}(\xi_1)_t + \frac{x}{2}(\xi_1)_{tt} + \beta_t\right) f_v\right] dv \tag{4.33}$$

fazendo algumas manipulações matemáticas, obtemos:

$$\gamma(t) + \left[\alpha - \frac{1}{2}(\xi_1)_t\right] A^0 - x\beta_{tt} - \frac{x^2}{4}(\xi_1)_{ttt} = \int \eta_1 dv, \tag{4.34}$$

substituindo a equação (4.24) na equação anterior

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\eta_1 - \left(\alpha - \frac{1}{2}(\xi_1)_t\right) f\right] dv = \gamma - x\beta_{tt} - \frac{x^2}{4}(\xi_1)_{ttt}, \tag{4.35}$$

Primeiro iremos aplicar a derivada variacional na Eq. (4.35)

$$\frac{\delta}{\delta f(v'} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\eta_1 - \left(\alpha - \frac{1}{2}(\xi_1)_t \right) f \right] dv = 0 \tag{4.36}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[(\eta_1)_f - \left(\alpha - \frac{1}{2}(\xi_1)_t \right) \right] dv \frac{\delta}{\delta f(v'} = 0, \tag{4.37}$$

eliminando a integral sobre v com o auxílio da função delta de Dirac

$$\frac{\delta f(v)}{\delta f(v'} = \delta(v - v^{'}), \tag{4.38}$$

obtemos uma E.D.O de primeira ordem para eta_1

$$(\eta_1)_f - \left(\alpha - \frac{1}{2}(\xi_1)_t \right) = 0 \tag{4.39}$$

cuja solução é:

$$\eta_1 - f \left(\alpha - \frac{1}{2}(\xi_1)_t] \right) = C_1 \tag{4.40}$$

Substituindo a expressão acima na Eq. (4.35), temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_1 dv = \gamma - x\beta_{tt} - \frac{x^2}{4}(\xi_1)_{ttt} \tag{4.41}$$

isolando essa equação em potências de x, obtemos o seguinte sistema determinante

$$\beta_{tt} = 0$$

$$(\xi_1)_{ttt} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_1 dv = \gamma$$

como queremos que a integral tenha um valor definido, vamos impor C_1 igual a zero, e após algumas manipulações matemáticas

$$\beta = C_2 t + C_3 \tag{4.42}$$

$$\xi_1 = C_4 t^2 + C_5 t + C_6 \tag{4.43}$$

Diferenciando a Eq. (4.40) com respeito a t

$$(\xi_1)_{tt} = 0,$$

e substituindo na expressão para ξ_1 temos C_4 igual a 0. Uma vez definidos os valores de η_1, ξ_1, γ e β, podemos calcular os valores para ξ_i e η_i

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= C_5 t + C_6, & (4.44)\\
\xi_2 &= \left(\frac{C_5}{2} + \alpha\right) x + C_2 t + C_3, & (4.45)\\
\xi_3 &= \left(\alpha - \frac{C_5}{2}\right) v + C_2, & (4.46)\\
\eta_1 &= \left(\alpha - \frac{C_5}{2}\right) f, & (4.47)\\
\eta_2 &= (2\alpha - C_5) A^0, & (4.48)
\end{aligned}$$

cujos geradores são:

$$\begin{aligned}
X_1 &= -x\partial_x + v\partial_v + f\partial_f + 2A^0\alpha\partial_{A^0}, & (4.49)\\
X_2 &= 2t\partial_t + x\partial_x - v\partial_v - f\partial_f - A^0\partial_{A^0}, & (4.50)\\
X_3 &= t\partial_x + \partial_v, & (4.51)\\
X_4 &= \partial_t, & (4.52)\\
X_5 &= \partial_x, & (4.53)
\end{aligned}$$

4.3 Equivalência Entre os Métodos

Nesta seção iremos aplicar o método para equação fracionárias e o método para equações íntegro-diferenciais à mesma equação, representadas de maneiras diferentes, e fazer uma comparação entre o subgrupos de geradores de simetrias obtidos, partiremos da ideia de que caso os subgrupos de geradores encontrados pelo método das equações fracionárias, consiga ser compatibilizado pela equação proveniente do método para equações íntegro-diferenciais, temos um forte indício de que existe equivalência entre os métodos. Uma das principais dificuldades em comparar esse métodos é encontrar uma equação íntegro-diferencial que possa ser escrita na forma de uma derivada fracionária.

Usaremos a seguinte equação:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha u^{\beta}(x,t)_0\partial_x^p u(x,t) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{R}^+ \tag{4.54}$$

O primeiro método usado será o de equações fracionárias. Procuramos um gerador na seguinte forma:

$$X = \tau(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \phi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{4.55}$$

Escrevendo a equação (4.54) na forma evoluída:

$$\hat{u}_{\hat{t}} = \alpha \hat{u}^{\beta}{}_0\partial_x^p(\hat{u}) \tag{4.56}$$

$$u_t + \epsilon\phi^t = \alpha(u^{\beta} + \beta u^{\beta-1}\epsilon\phi)_0\partial_x^p(u + \epsilon\phi) \tag{4.57}$$

$$u_t + \epsilon\phi^t = \alpha u^{\beta}{}_0\partial_x^p u + \alpha u^{\beta}\epsilon\phi_x^p + \alpha\beta u^{\beta-1}\epsilon\phi_0\partial_x^p u + \alpha\beta u^{\beta-1}\epsilon_0\partial_x^p\epsilon\phi \tag{4.58}$$

eliminando os termos iguais dos dois lados da equação e os termos de segunda ordem em ϵ temos:

$$\phi^t = \alpha u^{\beta}\epsilon\phi_x^p + \alpha\beta u^{\beta-1}\epsilon\phi_0\partial_x^p u \tag{4.59}$$

Reescrevendo a equação (4.19) acrescentando a dependência em t de u temos:

$$\begin{aligned} \phi_x^p &= {}_0\partial_x^p\phi + {}_0\partial_x^p u(\phi_u - p\xi_x) - u_0\partial_x^p\phi_u - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{p}{n}\frac{d^n\tau}{dx^n}\frac{\partial}{\partial t}{}_0\partial_x^{p-n}u \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{p}{n}\frac{\partial^{n+1}\phi}{\partial x^n\partial u} - \binom{p}{n+1}\frac{d^{n+1}\xi}{dx^{n+1}}\right]{}_0\partial_x^{p-n}u + \mu^p \end{aligned} \tag{4.60}$$

Substituindo ϕ^t e a Eq. (4.60) na Eq. (4.59)

$$\begin{gathered} \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2 = \\ \alpha u^\beta \left[{}_0\partial_x^p\phi + {}_0\partial_x^p u(\phi_u - p\xi_x) - u_0\partial_x^p\phi_u - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{p}{n}\frac{d^n\tau}{dx^n}\frac{\partial}{\partial t}{}_0\partial_x^{p-n}u \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{p}{n}\frac{\partial^{n+1}\phi}{\partial x^n\partial u} - \binom{p}{n+1}\frac{d^{n+1}\xi}{dx^{n+1}}\right]{}_0\partial_x^{p-n}u + \mu^p\right] - \alpha\beta u^{\beta-1}\phi_0\partial_x^p u = 0 \end{gathered} \tag{4.61}$$

Na equação anterior aparecem termos envolvendo a derivada temporal de u, fazendo a substituição pelo segundo termo da equação original:

$$\begin{gathered} \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t)\alpha u^\beta{}_0\partial_x^p u - \xi_u u_x \alpha u^\beta{}_0\partial_x^p u - \tau_u\alpha^2 u^{2\beta}(\partial_x^p u)^2 \\ -\alpha u^\beta \left[{}_0\partial_x^p\phi + {}_0\partial_x^p u(\phi_u - p\xi_x) - u_0\partial_x^p\phi_u - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{p}{n}\frac{d^n\tau}{dx^n}\frac{\partial}{\partial t}{}_0\partial_x^{p-n}u \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{p}{n}\frac{\partial^{n+1}\phi}{\partial x^n\partial u} - \binom{p}{n+1}\frac{d^{n+1}\xi}{dx^{n+1}}\right]{}_0\partial_x^{p-n}u + \mu^p\right] - \alpha\beta u^{\beta-1}\phi_0\partial_x^p u = 0 \end{gathered} \tag{4.62}$$

Da equação anterior podemos deduzir um conjunto de equações determinantes

$$\begin{aligned}
\phi_u - p\xi_x &= 0, &(4.63)\\
\phi_u - \tau_t - \frac{\beta}{u}\phi &= 0, &(4.64)\\
\xi_u u_x &= 0, &(4.65)\\
\phi_t &= 0, &(4.66)\\
\xi_t u_x &= 0, &(4.67)\\
\tau_u &= 0, &(4.68)\\
\tau_x &= 0, &(4.69)\\
\mu^p &= 0, &(4.70)
\end{aligned}$$

Após algumas manipulações obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
\phi &= c_1 u &(4.71)\\
\xi &= c_1 \frac{x}{p} &(4.72)\\
\tau &= c_1(\beta - 1)t + c_2 &(4.73)
\end{aligned}$$

Com os valores de ϕ, ξ e τ calculados, encontramos dois geradores de simetria

$$\begin{aligned}
X_1 &= \partial_t &(4.74)\\
X_2 &= u\partial_u + \frac{x}{p}\partial_x + (\beta - 1)t\partial_t &(4.75)
\end{aligned}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Como p depende da ordem da derivada, podemos fazer uma redimensionalização da variável x fazendo $\frac{x}{p} = x$.

Agora iremos aplicar o método para equações íntegro-diferenciais e obter uma expressão que possa ser compatibilizada pelos geradores encontrados pelo primeiro método.

Iremos reescrever a equação (4.54), da seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \alpha u(x,t)^{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x}A(x,t)\right) = 0 \tag{4.76}$$

onde A é a derivada fracionária RL.

O próximo passo é escrever o gerador na forma como queremos encontrá-lo

$$X = (\eta 1)(u,A,t,x)\partial_u + (\eta 2)(u,A,t,x)\partial_A + \tau(u,A,t,x)\partial_t + \xi(u,A,t,x)\partial_x \tag{4.77}$$

Escrevendo a equação na forma evoluída temos:

$$u_t + \epsilon(\eta 1)^t = \alpha(u^{\beta} + \beta u^{\beta-1}\epsilon\eta 1)(A_x + \epsilon(\eta 2)^x) \tag{4.78}$$

$$u_t + \epsilon(\eta 1)^t = \alpha u^{\beta}A_x + \alpha u^{\beta}A_x + \alpha u^{\beta}\epsilon(\eta 2)^x + \alpha\beta u^{\beta-1}\epsilon(\eta 1)A_x + \alpha\beta u^{\beta-1}\epsilon^2(\eta 1)(\eta 2)^x \tag{4.79}$$

$$\epsilon(\eta 1)^t = \alpha u^{\beta}(\eta 2)^x + \alpha\beta u^{\beta-1}(\eta 1)A_x \tag{4.80}$$

Os termos $(\eta 1)^t$ e $(\eta 2)^x$ são escritos de uma maneira semelhante ao como visto na abordagem pra equações fracionárias, mas agora ambos dependem de duas variáveis dependentes, vamos escrever $(\eta 1)^t$ para ilustrar a nova expansão:

$$(\eta 1)^t = D_1(\eta 1)(u(t,x), A(t,x), t, x)\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + D_2(\eta 1)(u(t,x), A(t,x), t, x)\frac{\partial}{\partial t}A(t,x)$$
$$+D_3(\eta 1)(u(t,x), A(t,x), t, x)$$
$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)\right)\Bigg(D_1(\xi)(u(t,x), A(t,x), t, x)\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + D_2(\xi)(u(t,x), A(t,x), t, x)\frac{\partial}{\partial t}A(t,x)$$
$$+D_3(\xi)(u(t,x), A(t,x), t, x)) - \left(\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)\right)$$
$$\Bigg(D_1(\tau)(u(t,x), A(t,x), t, x)\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + D_2(\tau)(u(t,x), A(t,x), t, x)\frac{\partial}{\partial t}A(t,x)$$
$$+D_3(\tau)(u(t,x), A(t,x), t, x)) - \left(\frac{\partial}{\partial x}A(t,x)\right)\Bigg(D_1(\xi)(u(t,x), A(t,x), t, x)\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)$$
$$+D_2(\xi)(u(t,x), A(t,x), t, x)\frac{\partial}{\partial t}A(t,x) + D_3(\xi)(u(t,x), A(t,x), t, x)\Bigg) - \left(\frac{\partial}{\partial t}A(t,x)\right)$$
$$\Bigg(D_1(\tau)(u(t,x), A(t,x), t, x)\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + D_2(\tau)(u(t,x), A(t,x), t, x)\frac{\partial}{\partial t}A(t,x)$$
$$+D_3(\tau)(u(t,x), A(t,x), t, x))$$

a expansão para $(\eta 2)^x$ é semelhante a essa.

Substituindo essas expansões na Eq. (4.80) e em seguida substituindo u_t por $\alpha\ u^\beta A_x$, coletam-se os coeficientes das diferentes derivadas de u e A, e obtem-se o seguinte sistema de equações:

$$\alpha u^\beta\left(\frac{\partial}{\partial x}\tau\right) + \frac{\partial}{\partial A}(\eta 1) = 0 \tag{4.81}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}(\eta 2)\right)u^\beta\alpha + \frac{\partial}{\partial t}\xi = 0 \tag{4.82}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}(\eta 2)\right)u^\beta\alpha - \left(\frac{\partial}{\partial t}(\eta 1)\right) = 0 \tag{4.83}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u\partial A}(\eta 2) + \frac{\partial^2}{\partial u\partial t}\tau = 0 \tag{4.84}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}(\tau)\right)u^\beta\alpha - \left(\frac{\partial}{\partial A}(\xi)\right) = 0 \tag{4.85}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}(\eta 1)\right)u - \left(\frac{\partial}{\partial A}(\eta 2)\right)u - \left(\frac{\partial}{\partial t}(\tau)\right)u + \left(\frac{\partial}{\partial x}(\xi)\right)u - (\eta 1)\beta = 0 \tag{4.86}$$

Vamos impor que τ seja função apenas de t e ξ seja função apenas de x, portanto, o sistema determinante é reescrito como:

$$\frac{\partial}{\partial A}(\eta 1) = 0 \tag{4.87}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial u}(\eta 2)\right) u^{\beta}\alpha = 0 \tag{4.88}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}(\eta 2)\right) u^{\beta}\alpha - \left(\frac{\partial}{\partial t}(\eta 1)\right) = 0 \tag{4.89}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial A}(\eta 2) = 0 \tag{4.90}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial u}(\eta 1)\right) u - \left(\frac{\partial}{\partial A}(\eta 2)\right) u - \left(\frac{\partial}{\partial t}(\tau)\right) u + \left(\frac{\partial}{\partial x}(\xi)\right) u - (\eta 1)\beta = 0 \tag{4.91}$$

Da equações acima temos que $(\eta 2)$ não é função de u e $(\eta 1)$ não é função de A

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}(\eta 2)\right) u^{\beta}\alpha - \left(\frac{\partial}{\partial t}(\eta 1)\right) = 0 \tag{4.92}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial u}(\eta 1)\right) u - \left(\frac{\partial}{\partial A}(\eta 2)\right) u - \left(\frac{\partial}{\partial t}(\tau)\right) u + \left(\frac{\partial}{\partial x}(\xi)\right) u - (\eta 1)\beta = 0 \tag{4.93}$$

Da equação (4.92), deduzimos que $(\eta 2)$ não tem dependência em x (e por simplicidade iremos impor que tambem não há depêndencia em t) e que $(\eta 1)$ não dependência em t, portanto,

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}(\eta 1)(u,x)\right) u - \left(\frac{d}{dA}(\eta 2)(A)\right) u - \left(\frac{d}{du}(\tau)(t)\right) u + \left(\frac{d}{dx}(\xi)(x)\right) u - (\eta 1)(u,x)\beta = 0 \tag{4.94}$$

Resolvendo essa equação para $(\eta 1)$ temos:

$$\eta 1 = \left(\frac{u(\tau_t - \xi_x + (\eta 2)_A)}{\beta - 1}\right) \tag{4.95}$$

Por último iremos compatibilizar esse termo, e utilizar os η e ξ encontrados através do método anterior, caso os termos sejam equivalentes, está mostrado que existe equivalência entre os métodos.

A condição de compatibilização é dada por:

$$\tilde{\eta_2} = \int_0^t \frac{\tilde{\eta_1} d\mu}{(t-\mu)^p} \tag{4.96}$$

onde

$$\tilde{\eta_2} = \eta_2 + A_x + A_t$$
$$\tilde{\eta_1} = \eta_2 + u_x + u_t$$

e as seguintes identidades são válidas:

$$\int_0^t \frac{u_t d\mu}{(t-\mu)^p} = A_t$$
$$\int_0^t \frac{u_x d\mu}{(t-\mu)^p} = A_x$$
$$\int_0^t \frac{u d\mu}{(t-\mu)^p} = A$$

Reescrevendo a Eq.(4.96)

$$\eta_2 + A_x + A_t = \int_0^t \frac{(\eta_1 + u_x + u_t) d\mu}{(t-\mu)^p} \tag{4.97}$$
$$\eta_2 = \int_0^t \frac{\eta_1 d\mu}{(t-\mu)^p} \tag{4.98}$$

Substituindo a Eq. (4.95) na equação anterior

$$\eta_2 = \int_0^t \frac{(\tau_t - \xi_x + (\eta 2)_A) d\mu}{(\beta - 1)(t-\mu)^p} \tag{4.99}$$

Agora iremos usar os η ,τ e ξ encontrados no método anterior Eqs. (4.71, 4.72 e 4.73) e $\eta_2 = c_1 A$

$$
\begin{aligned}
c_1 A &= \int_0^t \frac{u\left(c_1(\beta-1) - c_1 + c_1\right)}{\beta - 1} \frac{d\mu}{(t-\mu)^p} && (4.100)\\
c_1 A &= \int_0^t \frac{u\left(c_1(\beta-1)\right)}{\beta - 1} \frac{d\mu}{(t-\mu)^p} && (4.101)\\
c_1 A &= \int_0^t u c_1 \frac{d\mu}{(t-\mu)^p} && (4.102)
\end{aligned}
$$

a equação anterior, é a própria identidade para A. Temos portanto, que os elementos associados ao gerador encontrado pelo primeiro método, compatibilizam a equação encontrada através do segundo método. Com isso conseguimos ilustrar a equivalência entre os métodos de obtenção de simetria.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Ao longo dessa dissertação, foram abordados pontos importantes das simetrias de Lie, usando como ferramenta básica o estudo de álgebras de simetria. Em uma primeira parte, são demostrados os conceitos inicias e aspectos gerais das simetrias, depois é feito uma análise sobre como encontrar simetrias para equações diferenciais ordinárias e parciais.

Na segunda parte da dissertação, é construído um modelo para simetrias de equações íntegro-diferenciais e derivadas fracionárias. Foi apresentado um subgrupo de geradores para uma dada equação fracionária, e em seguida foi verificado se esse subgrupo podia ser compatibilizado através do modelo íntegro-diferencial. A equivalência entre esses modelos é uma contribuição inédita. A obtenção e utilização de simetrias foi fortemente facilitada pelo uso de recursos computacionais, especificadamente o pacote para MAPLE, SADE.

A maior dificuldade encontrada pelos pesquisadores, na área de simetrias para equações fraciónarias e I.D., continua sendo a falta de uma vasta bibliografia sobre o assunto, devido a alta complexidade dos modelos e sua aplicação em equações. Este trabalho portanto se propoem a preencher um pouco que seja desse espaço vazio, e funcionar como material de consulta, para futuras explorações ná aŕea. Sabemos que pouquíssimos trabalhos podem ser considerados completos, e com esse não seria diferente. Ao término dessa etapa, surgem ainda muitas indagações. Quanto aos subgrupos encontrados para uma determinada equação, a pergunta que permanece é se existe alguma maneira de determinar e encontrar todos os subgrupos de simetria. Já no estudo de soluções exatas, o método está longe de ser exaustivo. Todos esses são possíveis pontos para onde se pode estender a presente dissertação no futuro.

Referências Bibliográficas

[1] Boltzmann, L.: *Further studies on the thermal equilibrium among gas-molecules. Collected* Works 1, 275–370 (1872)

[2] Balesku, R.: *Statistical Mechanics of Charged Particle*. Wiley, London (1963)

[3] Rocha, P. M. M.: Tese de doutorado *Modelo de Gross-Neveu e Simetrias: Soluções Analíticas e Dinâmica de Campos Térmicos.* Brasília - UnB (2015)

[4] Gilmore, R.: *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications* New York (1974)

[5] San Martin, L. A. B.: *Grupos de Lie. 1. ed. Campinas*: Unicamp, (2013)

[6] Lima, E. L.: *Variedades Diferenciáveis.* Rio de Janeiro: Monografias de Matemáticas - IMPA, 1973.

[7] Hydon, P.E.: *Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide* :Cambridge University Press, Cambridge, 2000

[8] Bluman, G. W., and Kumei, S., 1989, Symmetries, and differential equations: Springer, New York.

[9] Rocha Filho, T. M. ; Figueiredo, A;*[SADE] a Maple package for the symmetry analysis of differential equations.* Computer Physics Communications, v. 182, p. 467-476, 2011.

[10] Leo, R. A., Sicuro, G., Tempesta, P. (2014). *A foundational approach to the Lie theory for fractional order partial differential equations.* arXiv preprint arXiv:1405.1017.

[11] R.K. Gazizov, A.A. Kasatkin, and S.Y. Lukashchuk. *Symmetry properties of fractional diffusion equations.* Physica Scripta, T136:014016, October 2009.

[12] R.K. Gazizov, A.A. Kasatkin, and S.Y. Lukashchuk. *Group-Invariant solutions of Fractional Differential Equations.* Nonlinear Science and Complexity, pages 51–59, 2011.

[13] T.J. Osler. Leibniz rule for fractional derivatives generalized and an application to infinite series. SIAM Journal on Applied Mathematics, 18(3):658–674, 1970.

[14] Ibragimov, N. H., Kovalev, V. F., Pustovalov, V. V. (2002). Symmetries of integro-differential equations: A survey of methods illustrated by the Benny equations. Nonlinear Dynamics, 28(2), 135-153.

[15] Chetverikov, V. N. and Kudryavtsev, A. G., 'A method for computing symmetries and conservation laws of integro-differential equations', Acta Applicandae Mathematicae 41, 1995, 45–56.

[16] Chetverikov, V. N. and Kudryavtsev, A. G., 'Modeling integro-differential equations and a method for computing their symmetries and conservation laws', American Mathematical Society Translations 167, 1995,1–22.

[17] Grigor'ev, Yu. N. and Meleshko, S. V., 'Investigation of invariant solutions of the nonlinear Boltzmann kinetic equation and its models', Institute of Theoretical and Applied Mechanics,Siberian Division of Academy of Sciences, Novosibirsk, Preprint No. 18-86, 1986.