

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

TESE DE DOUTORADO EM FÍSICA

**Modelo de Gross-Neveu e Simetrias: Soluções  
Analíticas e Dinâmica de Campos Térmicos**

PAULO MAGALHÃES MARCIANO DA ROCHA

ORIENTADOR:

ADEMIR EUGENIO DE SANTANA

Brasília, 27 de Novembro de 2015

Tese de Doutorado: Modelo de Gross-Neveu e  
Simetrias: Soluções Analíticas e Dinâmica de Campos  
Térmicos

Paulo M. M. da Rocha

7 de março de 2016

# Agradecimentos

Começo agradecendo a meu orientador, por todo o suporte e entendimento ao longo deste trajeto, indo além do esperado para seu trabalho.

Agradeço também ao meu pai, por todo o suporte ao longo deste trajeto, não só no sentido acadêmico, mas também no dia-a-dia. A minha mãe, por ser mãe e cumprir este papel da melhor maneira que se pode imaginar. Ao meu irmão João Pedro, pela companhia em várias madrugadas. A todos os meus familiares, em especial meus avós, por todo o suporte ao longo dos anos.

Não posso esquecer dos amigos Bruno, Daniel, Natália e Luciano, por estarem lá durante os dias de trabalho e pelas discussões, profissionais ou não, desenvolvidas no período. Aos outros amigos, Fernando, André e Victor por vários momentos de descanso intelectual.

Em especial, porém, gostaria de agradecer a Maíra, que começou esta jornada como namorada e agora é esposa, mas sempre esteve e sempre estará no meu coração. Este trabalho certamente não seria escrito sem o suporte.

# Resumo

Nesta tese são discutidos dois aspectos do modelo de Gross-Neveu através da óptica de Simetria: Soluções analíticas são encontradas através da análise sistemática de simetrias das equações geradas pelo modelo e transição de fase é estudada a partir da restauração da simetria quiral por meio de efeitos de compactificação.

# Abstract

Within this thesis, two aspects of the Gross-Neveu model are considered in the backdrop of symmetry analysis: Analytical solutions of the model are obtained through systematic symmetry analysis of the differential equations of the model and phase transition is studied from the point of view of the chiral symmetry restoration through compactification effects.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Grupos e Álgebras de Lie</b>	<b>9</b>
2.1	Grupos . . . . .	10
2.2	Espaços Topológicos . . . . .	11
2.3	Variedades Diferenciáveis . . . . .	13
2.4	Grupos de Lie . . . . .	14
2.5	Álgebras de Lie . . . . .	18
2.6	Grupo de Poincaré . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Dinâmica de Campos Térmicos</b>	<b>32</b>
3.1	Modelo de Gross Neveu . . . . .	32
3.2	A Dinâmica de Campos Térmicos . . . . .	36
3.2.1	Espaço de Hilbert Térmico . . . . .	40
3.2.2	Termo-Álgebras . . . . .	43
3.3	DCT e Transição de Fase no Modelo de Gross-Neveu . . . . .	49
3.3.1	Osciladores Térmicos . . . . .	50
3.3.2	Caso Bosônico . . . . .	50
3.3.3	Caso Fermiônico . . . . .	53
3.3.4	Transformação de Bogoliubov . . . . .	55

3.3.5	Operadores Termalizados . . . . .	58
3.3.6	Notação Matricial . . . . .	64
3.3.7	O Propagador Fermiônico . . . . .	66
3.3.8	Restauração de Simetria no Modelo de Gross-Neveu . . . . .	70
3.3.9	Restauração de Simetria: Temperatura Finita . . . . .	76
3.3.10	Restauração de Simetria: Compactificação . . . . .	80
3.3.11	Restauração de Simetria: Compactificação Espacial a Temperatura Finita . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Métodos de Simetria</b>	<b>85</b>
4.1	Encontrando Simetrias de Lie de EDOs . . . . .	86
4.2	Órbitas e Geradores Infinitesimais . . . . .	88
4.3	As Equações Determinantes . . . . .	90
4.4	Simetrias de EDPs . . . . .	95
4.5	Coordenadas Canônicas . . . . .	99
4.6	Invariantes Diferenciais . . . . .	103
4.7	A Álgebra dos Geradores Infinitesimais . . . . .	109
4.8	Simetrias Não-Clássicas . . . . .	119
<b>5</b>	<b>Soluções Invariantes da Equação de Gross-Neveu</b>	<b>122</b>
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>130</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Este trabalho trata da análise sistemática de aspectos de simetria do modelo de Gross-Neveu (GN), descrevendo a interação de contato de quatro férmions e introduzido como modelo efetivo da cromodinâmica quântica (QCD). A teoria atual sobre a interação forte do modelo padrão da física das partículas elementares, a QCD, foi proposta para descrever aspectos constitutivos da matéria hadrônica, os quarks e os glúons [1], [2], [3]. Deve prover, assim, explicação satisfatória para os seguintes aspectos experimentais: liberdade assintótica e confinamento. O primeiro, se manifesta em altíssimas temperaturas e energias (ou curtas distâncias). Através de espalhamento inelástico profundo, observa-se que os quarks se comportam aproximadamente livres nesse regime [2]. O segundo aspecto estabelece que, em baixas energias e temperaturas, quarks e gluons estão espacialmente confinados em regiões da ordem de 1 fm, em estados desprovidos de cor. Este aspecto é também confirmado pela falta de observação de quarks livres nos processos físicos conhecidos. Entretanto, é abrangente aceitação de que em algum estágio da evolução do Universo, quarks e glúons existiram num estado não confinado. Este estado é chamado de plasma de quarks e gluons. Com o resfriamento ocorre uma transição de fase, onde os quarks e glúons dão origem a matéria hadrônica [2].

Devido a uma estrutura matemática intrincada, a QCD descreve as observações acima,



mas apenas parcialmente, ou aproximadamente, pois resultados analíticos são extremamente difíceis, embora fundamentais para guiar corretamente os experimentos. Nos domínios de liberdade assintótica (altas temperaturas ou alta energia), é possível utilizar métodos perturbativos bem estabelecidos [2]-[7]. Na região de transição, métodos perturbativos são complicados, e um expediente muito utilizado é o cálculo na rede, implementando uma simulação do sistema confinado, e provendo por exemplo a temperatura crítica da transição confinamento/deconfinamento, da ordem de 200 MeV [7]. Devido as dificuldades da QCD com resultados analíticos na região de baixas energia, existe um forte apelo ao desenvolvimento de modelos efetivos, que possam reproduzir propriedades importantes da matéria hadrônica. O mais simples desses modelos descreve a interação de contato de quatro férmions, e é conhecido como modelo de Gross-Neveu (GN) [8]. Neste caso, os glúons, descritos por campos de calibres não abelianos, são suprimidos, em um procedimento similar ao que acontece com o tratamento de Fermi à interação fraca. O modelo GN não é perturbativamente renormalizável para dimensões maiores que  $D = 3$ ; e a expansão na ordem dominante de  $1/N$ , onde  $N$  é o número de férmios, é usualmente empregada [9].

Nas últimas décadas o modelo GN foi analisado com detalhe no contexto de temperatura finita. As motivações e a natureza desses estudos são múltiplas, e se prestam a prover informações como modelo efetivo não somente da QCD, mas também no estudo de sistemas fermiônicos na física da matéria condensada. Exemplos típicos são as aplicações em supercondutividade e em grafenos [10]-[24]. Seguindo métodos primeiro desenvolvidos para bósons, o modelo GN tem sido também considerado em topologias com dimensões espacialmente compactificadas a temperatura finita [25]-[28]. Entretanto, esta análise não foi estendida para os métodos de tempo real, como a Dinâmica de Campos Térmicos (DCT), que é um formalismo para a teoria de campos a temperatura finita, estabelecido a partir da representação de grupos de simetria. Um dos objetivos aqui propostos é tratar

o modelo GN no contexto da DCT.

As equações de Gross-Neveu ainda não tiveram um estudo satisfatório de suas soluções analíticas, particularmente em 2 e 3 dimensões espaciais. Nos últimos anos, devido ao interesse pelo modelo de Gross-Neveu, especialmente com os grafenos, a importância destas soluções é significativa. Alguns avanços foram feitos nesta linha [29, 30, 31], mas de modo preliminar. Devido a essas características e aplicabilidade, o modelo GN serve como um protótipo para a análise de transições de fase na teoria quântica de campos para férmions, e nessa perspectiva a procura por resultados analíticos passa a ser um outro aspecto importante [32], [33]. Um dos possíveis procedimentos é explorar as técnicas de grupos de Lie aplicadas a equações diferenciais parciais. Este tipo de solução já foi parcialmente analisado e classificado por Fushchich e Zhdanov [30], [31], no caso de 3+1 dimensões, e pelo próprio autor nos casos de 1 + 1 e 2 + 1 dimensões[29].

Este trabalho se organiza da seguinte maneira: no Capítulo 2 são revisados alguns aspectos básicos sobre grupos e álgebras de Lie. No Capítulo 3, se constroem alguns aspectos básicos da Dinâmica de Campos Térmicos, culminando com a aplicação destes conceitos ao modelo de Gross-Neveu. O Capítulo 4 é dedicado à revisão dos principais métodos de simetria a serem aplicados, enquanto no Capítulo 5 se apresentam resultados obtidos a partir destes. Ao longo desta tese são empregadas unidades naturais, onde  $c = \hbar = k_B = 1$ . A notação de soma de Einstein está implícita, a não ser que dito o contrário.

## Capítulo 2

# Grupos e Álgebras de Lie

Os métodos propostos nesta tese tem como base matemática a teoria das simetrias de Lie e soluções invariantes de grupo[34]. Faz-se, então, necessário o estudo do ferramental relacionado a esta teoria. Antes de entrar em detalhes sobre como simetrias de equações diferenciais podem ser encontradas e utilizadas para resolver equações diferenciais, deve-se primeiro dominar os conceitos matemáticos básicos para o tratamento das simetrias.

Não existe, talvez, ferramenta mais importante para o estudo de simetrias quanto a teoria de grupos. Esta estrutura algébrica é unicamente adaptada para o tratamento matemático de conjuntos de transformações, e justamente devido a esta característica se tornou tão crucial para a física. O que segue é uma breve revisão das estruturas algébricas mais relevantes para o presente trabalho, que tem como pedra fundamental os grupos de simetria.

Em sua parte inicial este capítulo introduz definições e conceitos de maneira abstrata. Feitas as introduções conceituais, o capítulo tem em sua parte final um exemplo bastante importante para esta tese, quando é construída a álgebra do grupo de Poincaré. Esta revisão é baseada nas referências [1], [3], [35].

## 2.1 Grupos

Um grupo é um conjunto  $\{g_1, g_2, g_3, \dots\} = G$  munido de uma operação chamada produto ou multiplicação do grupo (denotada por  $\circ$ ) tal que

1.  $g_i \in G, g_j \in G \Rightarrow g_i \circ g_j \in G$ . Diz-se que grupos são fechados sob o produto.
2.  $g_i \circ (g_j \circ g_k) = (g_i \circ g_j) \circ g_k$ . O produto é associativo.
3. Existe um elemento  $g_1$  tal que  $g_1 \circ g_i = g_i \circ g_1 = g_i$ . O elemento  $g_1$  é chamado de identidade.
4. Para cada elemento  $g_k$  existe um elemento inverso  $g_k^{-1}$  tal que  $g_k \circ g_k^{-1} = g_k^{-1} \circ g_k = g_1$ .

Um grupo pode ser finito ou infinito com relação ao número de elementos. Grupos infinitos podem ser ainda classificados em discretos ou contínuos, dependendo da natureza contável ou incontável de seus elementos.

### Exemplos

1. O conjunto das possíveis permutações dos pontos 1, 2, 3, 4 forma um grupo com  $4!$  elementos, chamado  $P_4$ . Um exemplo de dois elementos deste grupo (a e b) é ilustrado na figura 1, junto com a composição destes dois elementos.

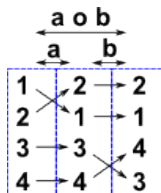


Figura 2.1: Exemplo de elementos do grupo  $P_4$  com a composição.

2. A coleção de rotações do círculo por múltiplos de  $\frac{2\pi}{n}$  radianos forma um grupo com  $n$  operações distintas. Grupos finitos como este são ditos de ordem  $n$ .
3. A coleção de rotações de um círculo por um ângulo  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) é um exemplo de um grupo contínuo. Existem tantas operações  $g(\theta)$  quanto pontos no intervalo  $[0, 2\pi]$ .
4. O conjunto dos números reais forma um grupo sob a adição. A identidade é o número zero e o elemento inverso de  $x$  é  $-x$ .
5. O conjunto de matrizes reais  $n \times n$  não singulares ( $\det(g) \neq 0$ ), sob a multiplicação de matrizes, forma um grupo conhecido como  $Gl(n, r)$  (General Linear). O conjunto de matrizes  $n \times n$  com determinante 1 também forma um grupo, chamado  $Sl(n, r)$  (Special Linear). O conjunto de matrizes unitárias  $n \times n$  forma o grupo  $U(n)$ .

Note que, em princípio, a operação  $\circ$  não é comutativa. Um grupo  $G$  que obedece  $g_i \circ g_j = g_j \circ g_i$ ,  $\forall g_i, g_j \in G$  é chamado abeliano, ou comutativo.

## 2.2 Espaços Topológicos

Um espaço topológico  $T$  é composto por um conjunto de pontos, denotado por  $S$ , sobre o qual se coloca uma topologia  $\mathcal{T}$ . Uma topologia é uma coleção de subconjuntos  $S_1, S_2, S_3, \dots \subset S$  que obedece aos seguintes axiomas:

1. O conjunto vazio( $\emptyset$ ) e o conjunto  $S$  pertencem a  $\mathcal{T}$ .

$$\emptyset \in \mathcal{T} \quad , \quad S \in \mathcal{T}$$

2. Intersecções finitas de elementos de  $\mathcal{T}$  são elementos de  $\mathcal{T}$ .

$$\bigcap_i^{\text{finita}} S_i \in \mathcal{T}$$

3. Uniões arbitrárias de elementos de  $\mathcal{T}$  são elementos de  $\mathcal{T}$ .

$$\bigcup_i^{\text{qualquer}} S_i \in \mathcal{T}$$

Os elementos  $S_i$  da topologia são chamados conjuntos abertos.

Um espaço topológico que obedece apenas aos axiomas 1-3 é geral demais para nosso propósito. Impõe-se ainda o seguinte axioma:

4. Se  $p \in T$ ,  $q \in T$ ,  $p \neq q$ , então existem  $S_p \in \mathcal{T}$ ,  $S_q \in \mathcal{T}$  que obedecem as propriedades  $p \in S_p$ ,  $q \in S_q$ ,  $S_p \cap S_q = \emptyset$ .

Um espaço topológico que obedece ao axioma 4 é chamado de espaço Hausdorff. Um conjunto aberto  $S_p$  contendo  $p$  é chamado uma vizinhança de  $p$ .

## Exemplo

O plano bidimensional  $R_2$  é o conjunto de pontos em que normalmente se escolhe uma topologia (chamada standard, ou padrão) formada pelo interior de círculos de centro arbitrário e raio arbitrário diferente de zero. A topologia consiste destes círculos e suas intersecções finitas e uniões arbitrárias. Este espaço com esta topologia também é um espaço Hausdorff. Dois pontos  $p$  e  $q$  são separados por uma distância  $d(p, q)$ . Círculos  $S_p$ ,  $S_q$  com raio  $\frac{d(p, q)}{3}$ , por exemplo, são conjuntos sem intersecção que contêm  $p$  e  $q$  respectivamente.

Definem-se três conceitos adicionais:

1. O espaço  $T$  é compacto se toda sequência infinita de pontos  $t_1, t_2, \dots \in T$  contém uma subsequência convergente para um ponto em  $T$ .
2. Um conjunto  $S$  é fechado se contém todos os seus pontos de acumulação. Um ponto  $p$  é um ponto de acumulação se todos os conjuntos abertos contendo  $p$  contém pelo menos um ponto de  $S$  diferente de  $p$ .  $S$  junto de todos os seus pontos de acumulação é chamado de fecho de  $S$ .
3. Seja  $\phi$  um mapa do espaço  $T$  com topologia  $\mathcal{T}$  no espaço  $U$  com topologia  $\mathcal{U}$ . O conjunto de todos os pontos  $t_1, t_2, \dots \in T$  que são levados ao mesmo ponto  $u \in U$  é chamado imagem inversa de  $u$ . O mapa  $\phi$  é dito contínuo se a imagem inversa de todos os conjuntos abertos em  $U$  é um conjunto aberto em  $T$ .

## 2.3 Variedades Diferenciáveis

Uma variedade diferenciável consiste num espaço Hausdorff  $(T, \mathcal{T})$  munido de uma coleção  $\Phi$  de mapas  $\phi_p \in \Phi$

$$\phi_p : T_p \rightarrow \mathbb{R}^N \quad p \in T$$

Que obedece as seguintes propriedades:

1.  $\phi_p$  é um mapa 1-1 de um conjunto aberto  $T_p$  ( $p \in T_p$ ) em um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^N$ .
2.  $\bigcup T_p = T$ , Ou seja, a união de todos os conjuntos abertos  $T_p$  forma o espaço  $T$ .
3. Se  $T_p \cap T_q$  não for vazio, então  $\phi_p(T_p \cap T_q)$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^N$ .  $\phi_q(T_p \cap T_q)$  também é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^N$  distinto de  $\phi_p(T_p \cap T_q)$ . O mapa  $\phi_p \circ \phi_q^{-1}$  deve ser contínuo e diferenciável.

4. Os mapas  $\phi_p \circ \phi_q^{-1}$  e  $\phi_q \circ \phi_p^{-1}$  são elementos de  $\Phi$ .

O primeiro axioma garante a possibilidade de construção de um sistema de referências em um ponto  $p$  da variedade. Se o ponto  $p$  for mapeado na origem de  $\mathbb{R}^N$ , um ponto  $q$  na vizinhança de  $p$  deve ser mapeado na vizinhança da origem também. O segundo axioma garante que este sistema possa ser estabelecido em qualquer ponto da variedade, enquanto o terceiro axioma diz respeito a mapeamentos do tipo  $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , descritos pelas técnicas usuais de cálculo.

A grande utilidade de Variedades Diferenciáveis se dá ao fato de que a vizinhança de cada ponto pode ser transportada para um espaço euclidiano. Por meio de  $\Phi$ , todos os conceitos e métodos usados no estudo de  $\mathbb{R}^N$  podem ser transferidos para a análise de espaços mais complexos e gerais.

## 2.4 Grupos de Lie

Um grupo de Lie é um grupo especificado pelas seguintes propriedades:

1. Uma variedade diferenciável  $\eta$ -dimensional denotada por  $\mathcal{M}$
2. Uma função  $\phi$  que leva dois pontos  $(\beta, \alpha)$  da variedade em um terceiro ponto  $\gamma$  também dentro da variedade.
3. Em termos de um sistema de coordenadas dentro da variedade podemos escrever

$$\gamma^\mu = \phi^\mu(\beta^1, \dots, \beta^\eta, \alpha^1, \dots, \alpha^\eta) \quad ; \quad \mu = 1, \dots, \eta$$



As funções

$$\phi : \beta \times \alpha \rightarrow \gamma = \beta\alpha$$

$$\psi : \alpha \rightarrow \alpha^{-1}$$

Devem ser contínuas  $C^\infty$ . Esta condição é na verdade forte demais, e no caso geral basta que seja  $C^k$  para  $k$  finito, porém é imposta a condição mais restritiva para que os métodos subsequentemente utilizados tenham validade garantida.

Grupos de Lie tem dois tipos de estrutura, uma estrutura algébrica e uma estrutura topológica. Algébricamente, eles são grupos e obedecem a todos os axiomas de grupo. Topologicamente são variedades diferenciais e devem obedecer a todos os axiomas relacionados a este tipo de estrutura. Os axiomas de grupo são então traduzidos como condições sobre  $\phi$ , isto é,

$\alpha$ . Fechamento

$$\gamma^\mu = \phi^\mu(\beta, \alpha) \quad ; \quad \gamma, \beta, \alpha \in \mathcal{M}$$

$\beta$ . Associatividade

$$\phi(\beta, \phi(\alpha, \gamma)) = \phi(\phi(\beta, \alpha), \gamma)$$

$\gamma$ . Identidade

$$\phi^\mu(\epsilon, \alpha) = \alpha^\mu = \phi^\mu(\alpha, \epsilon)$$

$\delta$ . Inversa

$$\phi^\mu(\alpha, \alpha^{-1}) = \epsilon^\mu = \phi^\mu(\alpha^{-1}, \alpha)$$

## Geradores Infinitesimais

Seja  $(\mathcal{T}, \phi)$  um grupo de Lie que age sobre um espaço  $G_N$  por meio de transformações de coordenadas  $f(\alpha, x)$ . Em outras palavras um grupo de Lie de transformações.

Agora seja  $F(p)$  qualquer função definida em todos os pontos  $p \in G_N$ . Uma vez definido um sistema de coordenadas  $S$  para  $G_N$ , podemos escrever  $p$  como uma  $N$ -upla de coordenadas,

$$p \rightarrow (x^1(p), x^2(p), \dots, x^N(p))$$

A Função  $F(p)$  pode ser escrita, então, em função dos parâmetros  $x^i(p)$  no sistema de coordenadas  $S$ , ou seja,

$$F(p) = F^S [x^1(p), \dots, x^N(p)] .$$

Em um outro sistema  $S'$  as coordenadas de  $p$  mudarão. É natural esperar que a forma da função  $F$  mude para manter o valor fixo  $F(p)$ , assim escrevemos

$$F(p) = F^{S'} [x'^1(p), \dots, x'^N(p)] . \tag{2.1}$$

Sabe-se que  $S$  e  $S'$  estão relacionados por um elemento do grupo de transformações da

seguinte forma

$$x'^i(p) = f^i[\alpha, x(p)] .$$

Para relacionar  $F^{S'}$  com  $F^S$ , basta então escrever  $x'^i(p)$  em função de  $x^i(p)$ . Temos

$$x^i(p) = f^i[\alpha^{-1}, x'(p)] . \quad (2.2)$$

Substituindo a Eq. (2.2) na Eq. (2.1), obtemos

$$F^{S'} [x'^1(p), \dots, x'^N(p)] = F^S [f^1(\alpha^{-1}, x'(p)), \dots, f^N(\alpha^{-1}, x'(p))] . \quad (2.3)$$

Esta expressão não está em uma forma muito útil. É mais conveniente para nosso propósito tratar de transformações próximas a identidade.

Para uma operação do grupo  $\mathbf{O} + \delta\alpha^\mu$  próxima da identidade  $\mathbf{O}$  a inversa é dada por  $(\delta\alpha^{-1})^\mu = -\delta\alpha^\mu$ , uma vez que  $(\mathbf{O} + \delta\alpha^\mu)(\mathbf{O} - \delta\alpha^\mu) = \mathbf{O} + O(\delta\alpha^2)$ . Escrevemos então

$$\begin{aligned} x^i(p) &= f^i[-\delta\alpha, x'(p)] \\ &= f^i[0, x'(p)] + \frac{\partial f^i[\beta, x'(p)]}{\partial \beta^\mu} \Big|_{\beta=0} (-\delta\alpha) + \dots \\ &= x'^i(p) - \delta\alpha \frac{\partial f^i[\beta, x'(p)]}{\partial \beta^\mu} \Big|_{\beta=0} . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Substituindo a Eq. (2.4) na Eq. (2.3) encontramos

$$\begin{aligned} F^{S'} [x'(p)] &= F^S \left[ x'^i(p) - \delta\alpha \frac{\partial f^i[\beta, x'(p)]}{\partial \beta^\mu} \Big|_{\beta=0} \right] \\ &= F^S [x'^i(p)] - \delta\alpha \frac{\partial f^i[\beta, x'(p)]}{\partial \beta^\mu} \Big|_{\beta=0} \frac{\partial}{\partial x'^i} F^S [x'(p)] . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Em primeira ordem, a variação em  $F$  é dada por

$$\begin{aligned} F^{S'}[x'(p)] - F^S[x^i(p)] &= -\delta\alpha \frac{\partial f^i[\beta, x'(p)]}{\partial \beta^\mu} \Big|_{\beta=0} \frac{\partial}{\partial x^i} F^S[x'(p)] \\ &= \delta\alpha X_\mu(x') F^S[x'] . \end{aligned} \quad (2.6)$$

O operador

$$X_\mu = - \frac{\partial f^i[\beta, x'(p)]}{\partial \beta^\mu} \Big|_{\beta=0} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

é chamado gerador infinitesimal do grupo de Lie. Através da aplicação repetida destes operadores podemos obter todos os elementos do grupo de Lie gerados por eles.

Note que os geradores de grupos de Lie só são capazes de gerar todos os elementos do grupo devido a natureza de variedade diferenciável e conexa dos grupos de Lie[35]. isto faz com que o teorema de Taylor seja válido e aproximações próximas a identidade possam ser feitas. Os geradores infinitesimais de um grupo formam uma base de um espaço vetorial, de modo que qualquer combinação linear destes também é um gerador infinitesimal, e um elemento finito do grupo de transformações pode ser escrito em termos de seu gerador como

$$T = \exp(\varepsilon^\mu X_\mu) . \quad (2.7)$$

## 2.5 Álgebras de Lie

Se um grupo é comutativo então vale a seguinte relação, com  $\alpha$  e  $\beta$  elementos do grupo,

$$\alpha\beta\alpha^{-1} = \beta .$$

Se o grupo não é comutativo, define-se o  $\gamma$  como uma medida do quanto o resultado difere de  $\beta$ , ou seja o quanto não comutativo é o grupo.

$$\alpha\beta\alpha^{-1} = \gamma\beta .$$

Note que  $\gamma$  é necessariamente um elemento do grupo

$$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = \gamma . \quad (2.8)$$

Se  $\alpha$  e  $\beta$  são próximos da identidade, podemos expandi-los em termos dos geradores infinitesimais como

$$\begin{aligned} \alpha &= I + \delta\alpha^\mu X_\mu + \frac{1}{2}\delta\alpha^\mu X_\mu \delta\alpha^\nu X_\nu , \\ \beta &= I + \delta\beta^\mu X_\mu + \frac{1}{2}\delta\beta^\mu X_\mu \delta\beta^\nu X_\nu . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Substituindo a Eq. (2.9) na Eq. (2.8) e mantendo apenas termos até segunda ordem nos geradores, obtemos

$$(\alpha\beta)(\beta\alpha)^{-1} = I + \delta\alpha\delta\beta [X_\mu, X_\nu] ,$$

onde  $[X_\mu, X_\nu] = X_\mu X_\nu - X_\nu X_\mu$  é o comutador entre  $X_\mu$  e  $X_\nu$ .

Como  $(\alpha\beta)(\beta\alpha)^{-1}$  é um elemento do grupo,  $[X_\mu, X_\nu]$  deve estar no espaço vetorial de geradores do grupo e pode ser expandido como uma combinação linear da base. Em outras palavras, podemos escrever

$$[X_\mu, X_\nu] = C_{\mu\nu}^\lambda X_\lambda, \quad (2.10)$$

onde  $C_{\mu\nu}^\lambda$  são constantes a serem especificadas de acordo com a natureza do grupo. Como

os geradores já formavam um espaço vetorial, ao munir o espaço de um produto entre os vetores (o comutador) constrói-se uma álgebra.

Uma álgebra cujo produto é anticomutativo

$$[X_\mu, X_\nu] = -[X_\nu, X_\mu] ,$$

e obedece a identidade de Jacobi

$$[X_\mu [X_\nu, X_\rho]] + [X_\nu [X_\rho, X_\mu]] + [X_\rho [X_\mu, X_\nu]] = 0 ,$$

é chamada de Álgebra de Lie. O comutador é um candidato natural a produto de uma álgebra de Lie, uma vez que estas propriedades são automaticamente satisfeitas.

Vemos, portanto, que os geradores infinitesimais de um grupo de Lie formam uma álgebra de Lie. Apesar de todo grupo de Lie ter uma álgebra associada a ele, a correspondência não é 1-1. De fato, vários grupos diferentes podem vir a ter a mesma álgebra de Lie. As constantes de estrutura  $C_{\mu\nu}^\lambda$  definem completamente a estrutura da álgebra de Lie, de modo que duas álgebras com as mesmas constantes de estrutura são, necessariamente, a mesma álgebra.

## 2.6 Grupo de Poincaré

Como um exemplo prático da aplicação das técnicas acima, construiremos a álgebra de Lie para o grupo de Poincaré. Dito ser o conjunto de isometrias do espaço de Minkowski, o grupo de Poincaré é um dos grupos de simetria mais importantes para a física. Nesta dissertação será feito amplo uso de propriedades deste grupo e da álgebra de Lie relacionada a ele, tornando necessário um tratamento especial deste grupo. Por ser um grupo

de transformações, para definir o grupo deve-se antes definir sobre o que o grupo age. Para tanto, define-se o espaço de Minkowski, o chamado espaço de definição do grupo.

O espaço-tempo de Minkowski é um espaço-tempo plano pseudo-euclidiano que tem em algum sistema de coordenadas a métrica

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\mu, \nu = 0 \dots d-1,$$

Com  $d$  a dimensão do espaço. As coordenadas nas quais a métrica toma esta forma são escritas como  $(x^\mu) = (x^0, \dots, d-1)$  e as componentes covariantes se relacionam as contravariantes pela regra  $x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu$ . Vale a notação de soma de Einstein em que índices repetidos são somados. No espaço de Minkowski a distância entre dois pontos é chamada de intervalo. Se tratando de um espaço métrico, o intervalo é escrito como

$$x^\mu y_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu.$$

Particularmente, o comprimento ao quadrado de um vetor pode ser escrito como

$$\begin{aligned} x^\mu x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \\ &= \mathbf{x}^2 - (x^0)^2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Note que, ao contrário do espaço euclidiano usual, o produto interno não é positivo definido. Neste espaço podem ser definidas transformações lineares que mantêm este

intervalo constante. Estas transformações, chamadas transformações de Lorentz, são de especial interesse, uma vez que, como será mostrado a seguir, compoem um subgrupo do grupo de Poincaré.

## Grupo de Lorentz

O grupo de Lorentz consiste nas transformações lineares e homogêneas que mantém invariante o intervalo dado pela Eq. (2.11). Uma transformação de Lorentz é escrita como

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} . \quad (2.12)$$

Ao combinar a Eq. (2.12) com a condição imposta que a distância como dada na Eq. (2.11) deve ser invariante, a matriz  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  satisfaz a condição

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} = g_{\rho\sigma} . \quad (2.13)$$

Para explicitar a natureza de grupo destas transformações, verificam-se as quatro condições necessárias para que um conjunto seja um grupo.

### 1. Fechamento

Sob a multiplicação usual de matrizes, o produto de duas transformações de Lorentz é

$$\Lambda^{\mu}_{\sigma} = \Lambda_1^{\mu}_{\nu} \Lambda_2^{\nu}_{\sigma} ,$$



com  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  satisfazendo a Eq. (2.13). De fato,

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu}\Lambda_1^\mu{}_\rho\Lambda_1^\nu{}_\sigma &= g_{\rho\sigma} , \\
g_{\mu\nu}\Lambda_1^\mu{}_\rho\Lambda_1^\nu{}_\sigma\Lambda_2^\rho{}_\delta\Lambda_2^\sigma{}_\gamma &= g_{\rho\sigma}\Lambda_2^\rho{}_\delta\Lambda_2^\sigma{}_\gamma , \\
&= g_{\delta\gamma} , \\
g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\delta\Lambda^\nu{}_\gamma &= g_{\delta\gamma} .
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Logo, fica claro que duas transformações de Lorentz sucessivas ainda são uma transformação de Lorentz.

## 2. Associatividade

A transformação tem caráter matricial; e como o produto matricial é associativo, esta condição é automaticamente satisfeita.

## 3. Identidade

A transformação  $\Lambda_I^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$  mantém a Eq. (2.11) invariante e tem como propriedade que  $\Lambda \cdot \delta = \delta \cdot \Lambda = \Lambda$ . Portanto, o papel de identidade é cumprido pela matriz  $\delta^\mu{}_\nu$ .

## 4. Inversa

A Eq. (2.13) pode ser reescrita

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\nu\rho}\Lambda^\nu{}_\sigma &= g_{\rho\sigma} , \\
\Lambda_\nu{}^\rho\Lambda^\nu{}_\sigma &= \delta^\rho{}_\sigma .
\end{aligned}$$

Desta forma, toda transformação tem inversa escrita como

$$(\Lambda^{-1})^\nu{}_\sigma = (\Lambda)^\nu{}_\sigma . \tag{2.15}$$

Este conjunto de propriedades garante que as transformações de Lorentz formam um grupo contínuo.

Voltando a atenção à álgebra de Lie relacionada ao grupo de Lorentz, é relevante escrever as transformações em sua forma infinitesimal

$$\begin{aligned}
\Lambda^\mu{}_\nu &= \delta^\mu{}_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu, \\
(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu &= \delta^\mu{}_\nu - \delta\omega^\mu{}_\nu, \\
\Lambda_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - \delta\omega_{\mu\nu} = \Lambda_{\nu\mu}.
\end{aligned}
\tag{2.16}$$

Logo

$$\delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu}.$$
(2.17)

Ou seja,  $\delta\omega_{\mu\nu}$  é uma matriz antissimétrica de entradas pequenas, de modo que as transformações acima sejam próximas a identidade. Seja  $d$  a dimensão do espaço-tempo sobre o qual as transformações de Lorentz são realizadas. Por ser antissimétrica,  $\delta\omega_{\mu\nu}$  tem apenas  $\frac{1}{2}d(d-1)$  componentes independentes. Logo, as transformações infinitesimais acima são geradas por  $\frac{1}{2}d(d-1)$  geradores infinitesimais independentes.

Nem todas as transformações de Lorentz podem ser obtidas ao se compor transformações infinitesimais. Tomando o determinante na Eq. (2.13), tem-se que  $\det(\Lambda^{-1}) = \det(\Lambda)$ . Isto significa que  $\det(\Lambda) = \pm 1$ . As transformações de Lorentz que obedecem  $\det(\Lambda) = 1$  são chamadas transformações próprias. Note que o produto de duas transformações próprias é uma transformação própria e que transformações da forma  $\Lambda = 1 + \delta\omega$  também são próprias. Portanto, composição de transformações infinitesimais só pode gerar um subgrupo do grupo de Lorentz em que todas as transformações são próprias, e assim conectadas a identidade.

Um outro possível subgrupo do grupo de Lorentz é o subgrupo das transformações ortócronas. A Eq. (2.12) implica em  $(\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^i{}_0)^2 = 1$ . Portanto  $\Lambda^0{}_0 \leq -1$  ou  $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ .

As transformações que obedecem  $\Lambda^0_0 \geq 1$  são transformações ortócronas. Novamente, o produto de duas delas sempre é uma transformação ortócrona e as transformações infinitesimais como descritas acima são ortócronas.

Apenas o subgrupo das transformações de Lorentz próprias e ortócronas pode ser obtido através da composição de transformações infinitesimais (diz-se que apenas este subgrupo é suavemente conexo a identidade). As transformações que não satisfazem este subgrupo podem ser obtidas fazendo uso de duas transformações discretas.

- A transformação de Paridade é escrita como

$$\mathcal{P}^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

E é ortócrona, porém imprópria. Esta transformação leva transformações próprias em impróprias. Vale notar que no caso de dimensões ímpares,  $\det(\mathcal{P}) = 1$ . Em dimensões ímpares, não existe maneira fácil de se distinguir transformações próprias de impróprias.

- A transformação de reversão temporal é dada por

$$\mathcal{T}^\mu_\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

e é imprópria e não-ortócrona. Leva transformações ortócronas em não ortócronas.

Para obter geradores infinitesimais para o grupo de Lorentz, é conveniente trabalhar em uma representação para os elementos do grupo em termos de operadores definidos em um espaço infinito-dimensional, como são os operadores diferenciais, por exemplo. Cada elemento  $\Lambda$  é então representado por um operador  $U(\Lambda)$  tal que seja preservada a regra de composição do grupo

$$U(\Lambda'\Lambda) = U(\Lambda')U(\Lambda) . \quad (2.18)$$

Então, para uma transformação infinitesimal escreve-se

$$U(1 + \delta\omega) = I + \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} , \quad (2.19)$$

com  $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$  descrevendo os geradores da álgebra do grupo de Lorentz. Para obter a tabela de comutações desta álgebra, usa-se a Eq. (2.18) para escrever

$$U(\Lambda)^{-1}U(\Lambda')U(\Lambda) = U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda) .$$

Trata-se, então,  $\Lambda'$  como uma transformação próxima a identidade como dada na Eq. (2.19). Expandindo e mantendo apenas termos lineares em  $\delta\omega'$ , tem-se

$$\begin{aligned} \delta\omega'_{\mu\nu}U(\Lambda)^{-1}M^{\mu\nu}U(\Lambda) &= \delta\omega'_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma M^{\rho\sigma} , \\ U(\Lambda)^{-1}M^{\mu\nu}U(\Lambda) &= \Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma M^{\rho\sigma} . \end{aligned}$$

Tratando, então,  $\Lambda$  como na Eq. (2.19), expandimos novamente até primeira ordem em  $\delta\omega$  e igualamos seus coeficientes. Temos

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{i}{2}\delta\omega_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}\right)M^{\mu\nu}\left(I + \frac{i}{2}\delta\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}\right) &= M^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\delta\omega_{\rho\sigma}(M^{\mu\nu}M^{\rho\sigma} - M^{\rho\sigma}M^{\mu\nu}) , \\ &= M^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\delta\omega_{\rho\sigma}[M^{\mu\nu} , M^{\rho\sigma}] . \end{aligned}$$

E o lado direito, de acordo com 2.17 e a antissimetria de  $M^{\mu\nu}$  fica

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2}\delta\omega_{\rho\sigma} [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= \delta\omega_{\sigma}^{\nu} M^{\mu\sigma} + \delta\omega_{\rho}^{\mu} M^{\rho\nu}, \\
&= \delta\omega_{\rho\sigma} (g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - g^{\sigma\mu} M^{\rho\nu}) \\
\frac{i}{2} [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= \frac{1}{2} [g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - g^{\sigma\mu} M^{\rho\nu} - g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} + g^{\rho\mu} M^{\sigma\nu}], \\
[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= i [g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} + g^{\sigma\mu} M^{\rho\nu} + g^{\nu\rho} M^{\sigma\mu} + g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma}].
\end{aligned}$$

Através destas comutações é gerada a álgebra de Lorentz.

## O Grupo de Poincaré

O grupo de Poincaré é também conhecido como o grupo de Lorentz Inomogêneo. As transformações de coordenadas que o compõe são da forma

$$x' = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}, \quad (2.20)$$

com  $\Lambda$  uma matriz de transformação de Lorentz e  $a^{\mu}$  um vetor constante. Verificam-se as quatro condições para que transformações deste tipo formem um grupo:

### 1. Fechamento

Da Eq. (2.20) pode -se concluir que

$$\begin{aligned}
x'' &= \Lambda_1^{\mu}_{\nu} x'^{\nu} + a_1^{\mu}, \\
&= \Lambda_1^{\mu}_{\nu} \Lambda_2^{\nu}_{\rho} x^{\rho} + \Lambda_1^{\mu}_{\nu} a_2^{\nu} + a_1^{\mu}, \\
&= \Lambda_1^{\mu}_{\nu} \Lambda_2^{\nu}_{\rho} x^{\rho} + a_2'^{\mu} + a_1^{\mu}.
\end{aligned}$$

Uma vez já estabelecido que o produto de duas transformações de Lorentz é uma

transformação de Lorentz, segue que as transformações de Poincaré são fechadas quanto à composição.

## 2. Associatividade

As operações envolvidas nas transformações de Poincaré são multiplicação e adição de matrizes. Dessa forma a associatividade é trivialmente satisfeita.

## 3. Identidade

O papel de identidade é exercido pela transformação que tem  $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$  e  $a^\mu = 0$ .

4. **Inversa** Denota-se a transformação dada na Eq. (2.20) como

$$\begin{aligned} G \cdot x^\mu &= x'^\mu, \\ &= \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Para encontrar a inversa, escreve-se que

$$\begin{aligned} G^{-1} \cdot G \cdot x^\mu &= x^\mu, \\ G^{-1} \cdot x^\mu &= \Lambda_\nu^\mu x^\nu - \Lambda_\nu^\mu a^\nu \end{aligned}$$

Como toda matriz de Lorentz tem inversa, toda transformação de Poincaré também tem inversa.

Para se obter a álgebra de Poincaré, novamente é necessário o tratamento da representação infinito-dimensional. Para uma transformação infinitesimal, temos

$$\begin{aligned} U(\Lambda + a) &= I + \frac{i}{2} \delta\omega_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} + \varepsilon_\alpha P^\alpha, \\ U(\Lambda + a)^{-1} &= I - \frac{i}{2} \delta\omega_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} - \varepsilon_\alpha P^\alpha. \end{aligned}$$

Com um procedimento análogo ao do grupo de Lorentz, obtém-se a tabela de comutação para a álgebra de Poincaré

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, \\ [P_\mu, M_{\nu\rho}] &= i(g_{\mu\nu}P_\rho - g_{\rho\nu}P_\mu), \\ [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= i[g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} + g^{\sigma\mu}M^{\rho\nu} + g^{\nu\rho}M^{\sigma\mu} + g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma}]. \end{aligned}$$

Desta forma, a álgebra de Poincaré é construída em sua forma abstrata. Vale notar que, assim como ocorreu no caso homogêneo, apenas transformações próprias e ortócronas podem ser obtidas por composição de transformações infinitesimais. A seguir construiremos representações explícitas dos geradores e estudaremos seus significados.

## Representação Explícita para os Geradores

Podemos reescrever os geradores do grupo de Lorentz de modo que sua relação com a mecânica relativística seja mais imediata. Define-se então

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M^{jk}, \\ K_i &= M^{i0}. \end{aligned}$$

As relações de comutação se tornam então

$$\begin{aligned}
 [J_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk}J_k, \\
 [J_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijk}K_k, \\
 [K_i, K_j] &= -i\varepsilon_{ijk}J_k, \\
 [J_i, P_j] &= i\varepsilon_{ijk}P_k, \\
 [J_i, P_0] &= 0, \\
 [K_i, P_j] &= i\delta_{ij}P_0, \\
 [K_i, P_0] &= iP_i, \\
 i, j, k &= 1 \dots d-1.
 \end{aligned}$$

Desse modo os geradores  $J_i$  descrevem rotações do tipo as do  $\mathbb{R}^{d-1}$  e os geradores  $K_i$  descrevem rotações que, no caso do espaço de Minkowski, misturam a coordenada do tipo tempo com as coordenadas do tipo espaço. Rotações deste tipo são chamadas boosts, ou impulsos.

Nesta dissertação, os casos de maior interesse são os casos com a dimensão do espaço-tempo  $d = 2, 3, 4$ . Nestas dimensões é possível escrever os geradores de Lorentz no espaço de Minkowski como uma matriz, de modo a tornar a escrita mais compacta. Em



cada uma das dimensões, escreve-se

$$\begin{aligned}
 J_{\mu\nu}^{(3+1)} &= \begin{pmatrix} 0 & K_1 & K_2 & K_3 \\ K_1 & 0 & J_3 & -J_2 \\ K_2 & -J_3 & 0 & J_1 \\ K_3 & J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 J_{\mu\nu}^{(2+1)} &= \begin{pmatrix} 0 & K_1 & K_2 \\ K_1 & 0 & J \\ K_2 & -J & 0 \end{pmatrix}, \\
 J_{\mu\nu}^{(1+1)} &= \begin{pmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Os geradores  $P_\mu$  são, obviamente, os geradores de translações. Agindo sobre um espaço de funções escalares estes geradores, na representação infinito dimensional são dados por  $P_\mu = i\partial_\mu$ . Neste caso podemos escrever os geradores da álgebra de Poincaré explicitamente como

$$\begin{aligned}
 J_{\mu\nu} &= g_{\mu\delta}x^\delta\partial_\nu - g_{\nu\delta}x^\delta\partial_\mu, \\
 P_\mu &= i\partial_\mu.
 \end{aligned}$$

Note que esta representação para os geradores age sobre funções escalares.

# Capítulo 3

## Dinâmica de Campos Térmicos

### 3.1 Modelo de Gross Neveu

A Cromodinâmica Quântica tem como objeto o estudo das interações fortes entre quarks e glúons, os principais constituintes da matéria hadrônica. Infelizmente, sua estrutura algébrica intrincada combinada com uma região de acoplamento forte tornam resultados analíticos neste contexto de muito difícil obtenção [37] [33]. As dificuldades da teoria acabam por exigir ataques alternativos a problemas, e é neste contexto em que se propõe o modelo de Gross-Neveu.

Originalmente proposto como um toy model em duas dimensões, o modelo GN foi introduzido em [8] como um campo de testes para o estudo de quebra espontânea de simetria em teorias assintoticamente livres. As simplificações do modelo vem na forma da supressão dos glúons característicos da QCD em favor de uma interação de contato de 4 férmions. Desta forma, o sistema é descrito pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^k i \not{\partial} \psi_k + \frac{g}{2} \left( \bar{\psi}^k \psi_k \right)^2 ,$$

onde  $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$  e o índice  $k$  é um índice de sabor que corre de 1 a  $N$  (é adotada a notação

de soma de Einstein). Este modelo apresenta uma das principais características da QCD, a liberdade assintótica. De fato, este modelo é o modelo mais simples que carrega esta propriedade, tendo sido proposto com isto em mente [8]. Além disto, sabe-se que o modelo é perturbativamente renormalizável em 1 + 1 dimensões de espaço tempo, onde a constante de acoplamento  $g$  se torna adimensional [36]. No regime em que  $N$  é grande,  $g$  se comporta proporcionalmente a  $1/N$  [8], desta forma é costumário definir o parâmetro  $\lambda = gN$  de forma que se possa expandir a teoria em potências de  $1/N$  [36].

O modelo GN apresenta, além da invariância de Poincaré, uma simetria interna do tipo  $U(N)$ . Além disso, apresenta também invariância pelas transformações discretas de paridade  $\mathcal{P}$  e inversão temporal  $\tau$  [36]

$$\begin{aligned}\psi(t, x) &\xrightarrow{\mathcal{P}} \gamma^0 \psi(t, -x) , \\ \psi(t, x) &\xrightarrow{\tau} \gamma^0 \psi(-t, x) ,\end{aligned}$$

e as transformações quiral  $\chi_D$  e paridade especial  $\mathcal{P}_\infty$

$$\begin{aligned}\psi(t, x) &\xrightarrow{\chi_D} \gamma_5 \psi(t, x) , \\ \psi(t, x) &\xrightarrow{\tau} \gamma_{10} \psi(t, -x) .\end{aligned}$$

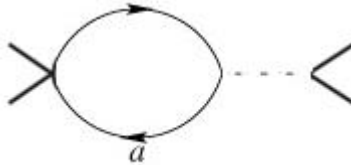
A introdução de um termo de massa mantém a teoria  $\mathcal{P}$  e  $\tau$  invariante, mas quebra a simetria  $\chi_D$  e  $\mathcal{P}_1$ . A quebra espontânea desta simetria é observada no modelo GN através da geração dinâmica de massa [8] [36] e esta quebra, junto com sua possível restauração a temperatura finita tem sido alvo de vários trabalhos [38], [39], [40], [36]. É um fato estabelecido que a restauração desta simetria está relacionada a uma transição de fase de segunda ordem [38], [36]; investigações usando técnicas de teoria de campos a temperatura finita trazem alguns resultados interessantes.

Um exemplo interessante destes resultados pode ser encontrado em [36]. A proposta

deste trabalho era analisar esta possível transição de fase no modelo GN em  $1 + 1$  através da introdução de temperatura por uma teoria de campos térmicos de tempo real. O estudo desta quebra de simetria e sua restauração já havia sido feito usando técnicas de tempo imaginário [41] [42] [43], mas sua equivalência ao caso de tempo real era incerta. Além disso, o trabalho trata o modelo sem o uso de campos auxiliares, como costuma ser feito neste estudo [15] [32] e, ao invés, trata o modelo na aproximação de fermion bubbles. O resultado conhecido para a temperatura crítica  $T_c = 0,567m(0)$  a potencial químico nulo, com  $m(0)$  a massa dinâmica a temperatura zero, foi reproduzido, mostrando a equivalência entre os formalismos e mais previsões foram feitas na forma de uma curva de criticalidade para  $T_c$  em função do potencial químico crítico  $\mu_c$ .

Grandes partes dos resultados analíticos obtidos no contexto do modelo GN foram feitos em 2 dimensões. Em parte, isto se deve ao fato que o modelo é renormalizável em 2 dimensões, e em parte porque dimensões maiores tem um grau de complexidade matemática muito maior. Apesar disto, resultados interessantes são conhecidos em temperatura finita para  $2+1$  dimensões.

Em [38] os autores obtém, através do formalismo de tempo imaginário, uma temperatura crítica para o modelo GN em 3D. A análise se dá via a função de quatro pontos térmica do modelo. Através de considerações que remetem à teoria BCS de supercondutividade, foi possível obter exatamente o valor do vértice renormalizado a temperatura finita. Isto se deve ao fato que, próximo da criticalidade, as contribuições para a função de quatro pontos vem dos diagramas de bolha do tipo



Os diagramas deste tipo podem ser somados exatamente como uma série geométrica e

tem como resultado

$$\Gamma_4 = \frac{g}{1 - g\Pi_R(3, T)}$$

onde  $g\Pi_R(3, T)$  é o valor do diagrama de uma bolha apenas. A divergência em  $\Gamma_4$  indica a existência de uma transição de fase. A substituição de um valor médio para a massa dos quarks na equação acima fornece uma temperatura crítica da ordem da temperatura estimada de deconfinamento de quarks, da ordem de 200 MeV, fortalecendo o status do modelo GN como teoria efetiva para a QCD. Estudos análogos a este também são feitos no contexto de confinamento espacial [40].

Devido a grande aplicabilidade do modelo GN, não só no contexto de teoria de campos, mas também em matéria condensada [15, 12], soluções exatas para as equações dinâmicas do modelo têm sido procuradas. Neste ponto de vista, um resultado importante é a demonstração da integrabilidade do modelo GN em 1+1 dimensões através de considerações baseadas em espalhamento inverso [44]. A busca por soluções tem sido, porém bastante envolvida. Resultados antigos por Dashen, Hasslacher e Neveu [45] e também Shei [46] já usavam técnicas de espalhamento inverso para obter soluções solitônicas para as equações de ponto de sela do modelo GN a temperatura zero. Antes ainda, foi descoberto o kink de Callan-Coleman-Gross-Zee [47]. Este resultado é especial por se tratar de um kink topologicamente estável, e trouxe novos ares a busca de soluções solitônicas neste contexto. Trabalhos por Feinberg [32], Thies [20] e outros autores tem expandido bastante o espectro de soluções solitônicas do modelo GN.

Um outro método utilizado na busca por soluções exatas consiste no uso de métodos de Lie e generalizações para a obtenção de soluções clássicas do modelo de Gross-Neveu. Trabalhos como os de Fuschich e Zhdanov [30, 31] classificaram várias das possíveis soluções baseadas em simetrias do modelo, especialmente a invariância por Poincaré. Entretanto, trabalhos nesta linha são bastante escassos devido ao volume de trabalho e à dificuldade

de se obter estes resultados.

Recentemente, porém, o desenvolvimento de plataformas computacionais como o SADE [48] tem viabilizado investigações mais a fundo. Como exemplos podem ser citados a dissertação de mestrado [29], bem como trabalho submetido para revisão [49], cujos resultados serão apresentados na seção 3. O uso destes métodos para a obtenção de soluções do modelo GN é um dos focos do trabalho de doutorado aqui proposto.

## 3.2 A Dinâmica de Campos Térmicos

Esta seção segue principalmente as referências [7] e [50].

O formalismo da mecânica estatística, baseado num método variacional com vínculos, provê uma estrutura elegante pronta para a aplicação em qualquer sistema para o qual possamos definir a matriz densidade e resolver a equação de Liouville-von Neumann. Infelizmente, a obrigatoriedade da construção de uma matriz densidade não é possível quando se trata de uma teoria quântica de campos interagente, como sistemas de muitos corpos ou objetos relativísticos em física de partículas, devido a natureza não linear da teoria, tornando o estabelecimento de um espaço vetorial descrito por soluções da teoria impossível. No entanto, teorias de campo não-lineares ainda são de fundamental importância na descrição de fenômenos físicos, portanto uma alternativa ao formalismo de matriz densidade torna-se necessária. Uma maneira de tentar obter uma outra descrição próxima ao que se conhece é procurar um paralelo com as teorias estabelecidas sem temperatura. Por exemplo, se tomarmos como a equação de movimento do sistema a equação de Liouville-von Neumann

$$i \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] ,$$

então estados puros e mistos podem, em princípio, ser tratados em pé de igualdade. Esta

observação sugere que a operação de média térmica de um operador,

$$\begin{aligned}\langle A \rangle_\beta &= \text{Tr}(A\rho) \\ &= \frac{\text{Tr}(Ae^{-\beta H})}{\text{Tr}(e^{-\beta H})},\end{aligned}$$

pode ser vista como uma maneira alternativa de se resolver problemas, tratando médias térmicas como médias temporais sujeitas a rotação de Wick  $t \rightarrow i\beta$ , onde  $\beta = 1/T$  é o inverso da temperatura. Uma outra possibilidade é que as médias de operadores  $\langle A \rangle_\beta$  sejam tomadas num espaço de Hilbert com estados dependentes da temperatura como

$$\langle A \rangle_\beta = \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle.$$

Usando estas idéias, vários métodos foram propostos. A primeira tentativa sistemática para se tratar uma teoria quântica a temperatura finita foi apresentada por Matsubara [51], hoje conhecida como formalismo do tempo imaginário, usando a rotação de Wick. Desde então o desenvolvimento de teorias de campo térmico tem seguido as teorias de  $T = 0$ . A primeira generalização do formalismo do tempo imaginário foi feita por Ezawa, Tomozawa e Umezawa [52], que estenderam o trabalho de Matsubara para uma teoria quântica de campos relativística, e descobriram, particularmente, condições de periodicidade e antiperiodicidade para as funções de Green de bósons e férmions, respectivamente. Alguns outros desenvolvimentos foram propostos [53] - [56] que avançaram o formalismo do tempo imaginário, assim como algumas contra partes de noções existentes em  $T = 0$  [57] - [60].

Apesar dos sucessos, e mesmo com generalizações, ainda haviam dificuldades a serem superadas para seguir a demanda teórica e experimental. Em particular, foram feitos vários estudos em QCD na rede para se entender os plasmas de quarks e gluons a temperatura finita, levando a identificação de alguns aspectos subjacentes. Como um exemplo,

as constantes de acoplamento para os mésons  $\pi$ ,  $\sigma$ ,  $\omega$  e  $\rho$  caem a zero em certas temperaturas críticas, dadas respectivamente por  $T_c^\pi = 360\text{MeV}$ ,  $T_c^\sigma = 95\text{MeV}$ ,  $T_c^\omega = 175\text{MeV}$  e  $T_c^\rho = 200\text{MeV}$  [61]-[62]. Estes resultados requerem cálculos gerais e consistentes para que se estabeleça a existência de uma transição de fase. Isso reforça a necessidade de uma teoria de campos a temperatura finita para o modelo padrão, que proveria resposta sobre a transição de hádrons para o plasma de quarks e glúons. Neste contexto, o uso de modelos efetivos tem sido crucial como um campo de testes para se obter evidências do comportamento de partículas interagentes. Este é o caso do modelo de Gross-Neveu [8], que trata da interação direta de 4 férmions. Ao longo desta linha, um trabalho seminal é o de Dolan e Jackiw [63], aonde são feitos os cálculos do potencial efetivo a temperatura finita, no intuito de estudar quebra espontânea de simetria.

Apesar do manifesto sucesso das teorias de tempo imaginário, estas ainda apresentam uma deficiência rapidamente identificada: a substituição da coordenada temporal pela temperatura impede que fenômenos dependentes do tempo, em especial os fenômenos fora do equilíbrio, possam ser descritos por este tipo de formalismo. Esta deficiência foi detectada bastante cedo no formalismo de equilíbrio de Matsubara, e tem sido força motivadora para a construção de formalismos de tempo real a temperatura finita [64] - [69]. Apesar dos esforços, uma teoria fora do equilíbrio ainda não foi completamente realizada neste contexto, mas algumas metodologias bastante promissoras já foram descritas na literatura.

Entre estes métodos, vale destacar a formulação de Keldysh-Schwinger, também chamada formulação de tempo fechado [70] - [73], [50]. Este formalismo consiste na utilização de um contorno fechado nas integrações temporais, que agora são feitas no plano de tempo complexo, de forma que este vá ao longo do tempo real e de volta. Por este procedimento ocorre um dobramento efetivo dos graus de liberdade, de forma que as funções de Green são representadas por matrizes  $2 \times 2$  [50]. Este formalismo pode ser visto como



uma variação do formalismo de Matsubara, que escolhe como contorno uma linha reta puramente imaginária no plano complexo. Note que a duplicação dos graus de liberdade é uma característica considerada intrínseca às teorias de tempo real, provendo a definição correta de uma série perturbativa, diferentemente da teoria de Matsubara [59].

Outro formalismo importante é motivado pelo fato de teorias quânticas serem fundadas fortemente em representações de álgebras lineares. Isto sugere que teorias com  $T \neq 0$  demandem uma estrutura de operadores de tempo real, também fundamentada em teoria de representações. Tal teoria, baseada em estados termalizados de vácuo  $|0(\beta)\rangle$ , foi apresentada originalmente por Takahashi e Umezawa [74] - [76] e chamada de Dinâmica de Campos Térmicos (DCT). Novamente, devido à exigência da condição de tempo real, é observada a duplicação no espaço de Hilbert original do sistema. A introdução da temperatura neste formalismo dá através de uma transformação nos estados em  $T = 0$  conhecida como transformação de Bogoliubov.

Estas técnicas foram desenvolvidas também para aplicações práticas, dentre as quais vale destacar a demonstração do teorema de Goldstone com um apelo físico e matemático bastante interessante, bem como a prescrição perturbativa de Feynman em completo paralelo com teorias de  $T = 0$  [75]. Desta forma, aplicações incluem supercondutores magnéticos [76], sistemas como ferromagnetos e paramagnetos [77], óptica quântica [78] - [82], fenômenos de transporte [83] e mais. Além disso, devido ao fato dos propagadores da teoria também serem matrizes 2x2, a associação com Matsubara e Schwinger-Keldysh também foi explorada [75] - [86].

Formalmente, a teoria térmica, através da DCT, pode ser estabelecida dentro de grupos de simetria [87, 88, 89], abrindo um espectro bastante extenso de possibilidades de estudo de efeitos térmicos. Citam-se como exemplos a formulação da teoria cinética a partir da análise de representações de grupos cinemáticos [88], e a consideração de elementos do q-grupo onde os efeitos de temperatura são relacionados a deformação na álgebra de

Weyl-Heisenberg [90, 91, 89].

Considerando aspectos topológicos do formalismo térmico, nota-se que a prescrição final resulta num esquema de compactificação no tempo para as teorias com  $T = 0$ . O formalismo de Matsubara, por exemplo, é equivalente a uma integral de caminho calculada em  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{D-1}$  onde  $\mathbb{S}^1$  é uma circunferência de comprimento  $\beta = 1/T$ . Esta compactificação pode, de maneira generalizada, ser estendida as dimensões espaciais. Estas idéias foram desenvolvidas em uma séries de situações diferentes [25, 26, 27] [92] - [97]. Ao longo deste trabalho algumas destas idéias serão expostas em maior detalhe, bem como utilizadas para obter resultados de transição de fase no modelo de Gross-Neveu.

O que segue é uma breve revisão das principais idéias da DCT, culminando na obtenção da termo-álgebra de Poincaré .

### 3.2.1 Espaço de Hilbert Térmico

Para um sistema em equilíbrio térmico, a média de ensembles para o operador  $A$  é dada por

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} (e^{-\beta H} A) .$$

Aonde  $Z(\beta)$  é a função partição do sistema à temperatura  $T=1/\beta$  e  $H$  o operador hamiltoniano. Este resultado é geral e é esperado que se mantenha no caso de operadores quânticos. Considera-se, então, o caso em que o operador  $H$  é tal que  $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ . Nesta expressão, o vetor  $|n\rangle$  representa o autoestado de  $H$  cujo autovalor é  $E_n$ . O operador  $H$  é hermitiano, portanto vale  $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$  e torna-se possível escrever

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n,m} \langle n|e^{-\beta E_n}|m\rangle \langle m|A|n\rangle , \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n|A|n\rangle . \end{aligned}$$

Com o intuito de se introduzir efeitos de temperatura no espaço de Hilbert dos estados do sistema, propõe-se que um sistema quântico à temperatura  $T$  pode ser descrito em termos de um estado  $|0(\beta)\rangle$  tal que

$$\langle A \rangle = \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle .$$

Para que a descrição esteja completa, basta encontrar o estado  $|0(\beta)\rangle$  em termos da base do espaço de Hilbert aqui discutido. Propõe-se

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n | 0(\beta) \rangle = \sum_n g_n(\beta) |n\rangle$$

Para tanto, temos

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle &= \sum_{n,m} g_n^*(\beta) g_m(\beta) \langle n | A | m \rangle , \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | A | n \rangle , \end{aligned}$$

Assim,

$$g_n^*(\beta) g_m(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta E_n} \delta_{nm} . \quad (3.1)$$

É impossível para duas funções complexas que o seu produto seja proporcional a delta de Kronecker, portanto o resultado anterior parece indicar que o estado  $|0(\beta)\rangle$  não pode ser expandido em termos de autovetores do operador hamiltoniano e, portanto, não faz parte do espaço de Hilbert do problema e não é um estado físico. De fato, a formulação atual do problema não permite a determinação de funções  $g_n(\beta)$ , mas a forma da equação (3.1) é bastante similar a de uma condição de ortogonalidade, sugerindo que  $g_n(\beta)$  sejam, na verdade, elementos de algum espaço vetorial. Com isto em mente, e diante das exper-

iências passadas com teorias quânticas a temperatura finita, introduz-se uma duplicação no espaço de Hilbert relacionado ao sistema, de modo que este agora é visto como um produto tensorial de duas cópias de si mesmo. A base deste estado é então descrita como  $|n, \tilde{m}\rangle = |n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle$ . Com isto temos  $g_n(\beta) = f_n(\beta)|\tilde{n}\rangle$  *rangle*, e tem-se

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \sum_n f_n(\beta)|n, \tilde{n}\rangle \\ \langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle &= \sum_{n,m} f_n^*(\beta)f_m(\beta)\langle n, \tilde{n}|A|m, \tilde{m}\rangle, \\ &= \sum_{n,m} f_n^*(\beta)f_n(\beta)\langle n|A|n\rangle. \end{aligned}$$

Onde assume-se que o operador  $A$  age somente sobre o espaço de estados sem  $\tilde{\cdot}$ . A notação til aqui serve apenas para reforçar que houve, de fato, a duplicação do espaço, de modo que  $|\tilde{m}\rangle$  é uma réplica de  $|m\rangle$ , com  $m$  e  $\tilde{m}$  sendo o mesmo número. Nesta nova formulação, a condição sobre as funções  $f_m(\beta)$  se torna

$$f_n^*(\beta)f_m(\beta) = \frac{1}{Z^{1/2}(\beta)}e^{-\beta E_n/2}$$

e, a menos de uma fase

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n \frac{1}{Z^{1/2}(\beta)}e^{-\frac{\beta E_n}{2}}|n, \tilde{n}\rangle.$$

Neste formalismo, o estado  $|0(\beta)\rangle$  passa a ser tratado como um estado puro, mesmo que obtido de um estado misto do ponto de vista da teoria em  $T = 0$ . Isto decorre do fato de  $|0(\beta)\rangle$  descrever o equilíbrio térmico do sistema, aonde diferentes estados coexistem.

### 3.2.2 Termo-Álgebras

A duplicação do espaço de Hilbert tem consequências importantes. Usa-se o ponto de vista de simetria para apontar algumas delas

#### Geradores de Simetria e Observáveis

O formalismo baseado em estados  $|0(\beta)\rangle$  parte do princípio que o conjunto  $\mathcal{V}$  de variáveis cinemáticas é um espaço vetorial de mapeamentos em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_T$ . O conjunto  $\mathcal{V}$  é composto por dois subconjuntos,  $\mathcal{V}_{\text{obs}}$  e  $\mathcal{V}_{\text{gen}}$ , dos observáveis físicos e geradores de simetria, respectivamente, de modo que  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{obs}} \oplus \mathcal{V}_{\text{gen}}$ .

Usualmente  $\mathcal{V}_{\text{obs}}$  e  $\mathcal{V}_{\text{gen}}$  são idênticos, ou seja, é associado a cada gerador de simetria um observável correspondente, e ambos são descritos pelo mesmo elemento algébrico. Como um exemplo, basta considerar o caso do gerador de rotações  $L_3$  e o gerador de translações espaciais  $P_1$ . É conhecido que os mesmos entes matemáticos que descrevem estes geradores, também descrevem componentes dos observáveis momento angular e momento linear, respectivamente. Se quisermos saber o efeito de uma rotação infinitesimal em  $P_1$ , basta fazermos

$$\exp(i\alpha L_3) P_1 \exp(-i\alpha L_3) = P_1 + i\alpha [L_3, P_1] .$$

O comutador na expressão acima é facilmente calculado não só para as componentes do exemplo, mas no caso geral, como

$$[L_i, P_j] = i\varepsilon_{ijk} P_k .$$

Esta expressão mostra como o observável  $P$  é modificado pela transformação  $L$ . Neste caso, consideramos  $L$  como um simples gerador de transformações de simetria. Esta transformação também ocasiona mudanças no observável momento angular, expressa pelo

comutador

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k .$$

Neste caso, o mesmo objeto  $L$  é usado com dois significados: gerador e observável.

É importante ressaltar que, apesar da correspondência um-a-um destes entes ser baseada em razões físicas, não existe nenhum tipo de imposição cinemática ou dinâmica que exija que um observável e simetria correspondente sejam descritos pelo mesmo ente matemático. De fato, existe a liberdade para uma situação mais geral.

Explora-se, em dinâmica de Campos térmicos, o caso em que existe correspondência um-a-um entre geradores e observáveis, mas estes podem ser descritos por entes matemáticos diferentes. Daqui por diante denotam-se observáveis físicos utilizando-se símbolos sem  $\hat{\phantom{A}}$ , como  $A$ , ao passo que o gerador correspondente ao observável será denotado pela mesma letra, mas com o uso do símbolo  $\hat{\phantom{A}}$ , como  $\hat{A}$ . O relaxamento da condição de igualdade entre observáveis e geradores traz consequências profundas para a estrutura dos grupos de simetria, sendo o principal ponto de diferença nos cálculos algébricos da DCT em relação às teorias usuais.

O espaço de Hilbert construído pelo produto direto do espaço  $\mathcal{H}$ , espaço de Hilbert à temperatura zero, com sua duplicata  $\tilde{\mathcal{H}}$  será identificado ao longo deste capítulo como  $\mathcal{H}_T$ . Além disso, a adição do subscrito  $T$ , em geral, indica um espaço construído de acordo com a prescrição descrita anteriormente e diz-se que este espaço foi termalizado. Usando um espaço desta forma como espaço base para representações de uma álgebra de Lie, queremos ver que tipo de consequências algébricas esta duplicação pode ter.

### Álgebra de Lie Duplicada

Seja  $\ell = \{a_i, i = 1, \dots, s\}$  o conjunto de geradores que varre uma álgebra de Lie sobre  $\mathbb{C}$ , o corpo complexo. Sobre  $\ell$  existe a operação  $(\cdot, \cdot)$ , chamada produto de Lie e dada

por

$$(a_i, a_j) = C_{ij}^k a_k ,$$

Onde, lembra-se, implícita-se uma soma em índices repetidos. Os números  $C_{ij}^k$  são as constantes de estrutura da álgebra. O produto de Lie satisfaz

$$(a_i, a_j) = -(a_j, a_i) ,$$

$$(a_i, (a_j, a_k)) + (a_j, (a_k, a_i)) + (a_k, (a_i, a_j)) = 0 .$$

Usualmente, em física, tem-se álgebras de operadores e o produto de Lie é representado pelo comutador.

Usa-se  $\mathcal{H}_T$  como espaço base para representações de  $\ell$ . Desta forma, escreve-se

$$[\widehat{A}_i, \widehat{A}_j] = iC_{ij}^k \widehat{A}_k , \quad (3.2)$$

onde  $\widehat{A}_i \in \mathcal{V}_{\text{gen}}$ , espaço de geradores de simetria. Enquanto a eq. (3.2) provê uma representação para  $\ell$ , ainda temos operadores do tipo  $A$ , observáveis que obedecem  $A_i \in \mathcal{V}_{\text{obs}}$ , para tratar. Desta forma, ainda é necessário estabelecer as seguintes regras de comutação

$$[\widehat{A}_i, A_j] = iD_{ij}^k A_k ,$$

$$[A_i, A_j] = iE_{ij}^k A_k .$$

Note que os comutadores mantêm a consideração física que simetrias mapeiam observáveis em observáveis. As regras de comutação citadas anteriormente são a definição de produto semidireto entre duas álgebras, de forma que a álgebra descrita pelas mesmas é um produto semidireto de  $\mathcal{V}_{\text{obs}}$  e  $\mathcal{V}_{\text{gen}}$ , com  $\mathcal{V}_{\text{obs}}$  suprimindo o papel de subálgebra invariante. As simetrias

transformam os observáveis como vetores, e partimos do pressuposto de correspondência um a um de observáveis com geradores, logo tomamos  $C_{ij}^k = D_{ij}^k = E_{ij}^k$ . Isto traz

$$\begin{aligned} [\widehat{A}_i, \widehat{A}_j] &= iC_{ij}^k \widehat{A}_k, \\ [\widehat{A}_i, A_j] &= iC_{ij}^k A_k, \\ [A_i, A_j] &= iC_{ij}^k A_k, \end{aligned} \tag{3.3}$$

Estas relações definem a álgebra de Lie sobre o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_T$ , de modo que esta representação será chamada Termo-Álgebra de Lie.

### Regras de Conjugação Til

Algumas propriedades das termo-álgebras podem ser deduzidas definindo a variável

$$\widetilde{A} = \widehat{A} - A. \tag{3.4}$$

As regras de comutação dadas pelas eqs. (3.3) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} [\widetilde{A}_i, \widetilde{A}_j] &= iC_{ij}^k \widehat{A}_k, \\ [\widetilde{A}_i, A_j] &= 0, \\ [A_i, A_j] &= iC_{ij}^k A_k, \end{aligned} \tag{3.5}$$

e com este resultado fica claro que a álgebra de Lie pode ser escrita como um produto direto de duas subálgebras, ocasionando a duplicação. Esta duplicação pode ser vista como um mapeamento em  $\mathcal{V}$ , denotado por  $J$ , tal que  $JAJ^{-1} = \widetilde{A}$  e  $J$  deve respeitar as



seguintes condições

$$\begin{aligned}
(A_i A_j)^\sim &= \tilde{A}_i \tilde{A}_j , \\
(c A_i + A_j)^\sim &= c^* \tilde{A}_i + \tilde{A}_j , \\
(A_i^\dagger)^\sim &= \tilde{A}_i^\dagger , \\
(\tilde{A}_i)^\sim &= A_i , \\
[A_i, \tilde{A}_j] &= 0 .
\end{aligned}$$

Estas são as regras de conjugação til, ferramenta importante no estudo de termo-álgebras.

### Termo Álgebra de Poincaré

Construimos, como um exemplo de aplicação das regras descritas anteriormente, a termo álgebra relacionada a álgebra de Poincaré. Os geradores da álgebra de Poincaré usual são

$$\begin{aligned}
M^{\mu\nu} &= i (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) , \\
P_\mu &= i \partial_\mu .
\end{aligned}$$

A álgebra de Lie, para estes geradores é, então

$$\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, M_{\sigma\rho}] &= -i (g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} M_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma} M_{\rho\mu}) , \\
[M_{\mu\nu}, P_\sigma] &= i (g_{\nu\sigma} P_\mu - g_{\sigma\mu} P_\nu) , \\
[P_\mu, P_\nu] &= 0 .
\end{aligned}$$

Os invariantes de Casimir desta álgebra são  $P_\mu P^\mu$  e  $w_\mu w^\mu$  aonde

$$w_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M^{\nu\sigma} P^\rho .$$

Desta forma, de acordo com o desenvolvido anteriormente, a termo-álgebra de Poincaré, aqui denotada por  $\mathfrak{P}_T$ , é

$$\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, M_{\sigma\rho}] &= -i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}M_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma}M_{\rho\mu}) , \\
[M_{\mu\nu}, P_{\sigma}] &= i(g_{\nu\sigma}P_{\mu} - g_{\sigma\mu}P_{\nu}) , \\
[P_{\mu}, P_{\nu}] &= 0 . \\
[\widehat{M}_{\mu\nu}, M_{\sigma\rho}] &= -i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}M_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma}M_{\rho\mu}) , \\
[\widehat{M}_{\mu\nu}, P_{\sigma}] &= i(g_{\nu\sigma}P_{\mu} - g_{\sigma\mu}P_{\nu}) , \\
[\widehat{P}_{\mu}, P_{\nu}] &= 0 . \\
[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{M}_{\sigma\rho}] &= -i(g_{\mu\rho}\widehat{M}_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}\widehat{M}_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}\widehat{M}_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma}\widehat{M}_{\rho\mu}) , \\
[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{P}_{\sigma}] &= i(g_{\nu\sigma}\widehat{P}_{\mu} - g_{\sigma\mu}\widehat{P}_{\nu}) , \\
[\widehat{P}_{\mu}, \widehat{P}_{\nu}] &= 0 .
\end{aligned}$$

Os invariantes de  $\mathfrak{P}_T$  são

$$\begin{aligned}
w^2 &= w_{\mu}w^{\mu} , \\
P^2 &= P_{\mu}P^{\mu} , \\
\widehat{w}^2 &= 2w_{\mu}w^{\mu} - \widehat{w}_{\mu}\widehat{w}^{\mu} , \\
\widehat{P}^2 &= 2P_{\mu}P^{\mu} - \widehat{P}_{\mu}\widehat{P}^{\mu} ,
\end{aligned}$$

onde

$$\widehat{w}^{\mu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\widehat{M}^{\nu\sigma}P^{\rho} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}M^{\nu\sigma}\widehat{P}^{\rho} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\widehat{M}^{\nu\sigma}\widehat{P}^{\rho} .$$

Com as regras de conjugação til, temos finalmente as seguintes relações de comutação (omitem-se os comutadores nulos):

$$[M_{\mu\nu}, M_{\sigma\rho}] = -i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}M_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma}M_{\rho\mu}) , \quad (3.6)$$

$$[M_{\mu\nu}, P_{\sigma}] = i(g_{\nu\sigma}P_{\mu} - g_{\sigma\mu}P_{\nu}) ,$$

$$\begin{aligned} [\widetilde{M}_{\mu\nu}, \widetilde{M}_{\sigma\rho}] &= i(g_{\mu\rho}\widetilde{M}_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}\widetilde{M}_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}\widetilde{M}_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma}\widetilde{M}_{\rho\mu}) , \\ [\widetilde{M}_{\mu\nu}, \widetilde{P}_{\sigma}] &= -i(g_{\nu\sigma}\widetilde{P}_{\mu} - g_{\sigma\mu}\widetilde{P}_{\nu}) . \end{aligned} \quad (3.7)$$

Fica clara a natureza de produto direto acima.

### 3.3 DCT e Transição de Fase no Modelo de Gross-Neveu

Com as ferramentas básicas da construção de termo-álgebras, para aplicar a metodologia da DCT em teorias de campo é necessária a construção de um formalismo de integral de trajetória. O procedimento de construção deste formalismo se dá em completo paralelo com as teorias em  $T = 0$ . Primeiro trata-se do caso de osciladores harmônicos a temperatura finita, bloco básico de construção de qualquer teoria quântica de campo. Com estes resultados, partimos para a segunda quantização das teorias. No que segue construímos o formalismo básico para bósons e férmions com o intuito de aplicar a teoria no estudo do modelo de Gross-Neveu.

### 3.3.1 Osciladores Térmicos

### 3.3.2 Caso Bosônico

Um oscilador bosônico é um sistema descrito pela hamiltoniana

$$H = \omega a^\dagger a,$$

considerando a energia de ponto zero nula. Os operadores  $a^\dagger$  e  $a$  devem satisfazer as condições algébricas

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= 1, \\ [a, a] &= [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Desta forma, os autovalores de  $H$  são rotulados por um índice discreto como

$$H|n\rangle = n\omega|n\rangle,$$

Estes estados apresentam uma série de propriedades com relação aos operadores escadas  $a$  e  $a^\dagger$ , entre elas a existência de um estado fundamental  $|0\rangle$  tal que

$$\begin{aligned} a|0\rangle &= 0, \\ (a^\dagger)^n |0\rangle &= \sqrt{n!} |n\rangle, \end{aligned} \tag{3.9}$$

e além,

$$a|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \tag{3.10}$$

Devido as propriedades de hermiticidade do operador hamiltoniano, todos estes estados devem ser ortonormais ( $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$ ). Os níveis de energia do oscilador são determinados a partir do operador número,  $N = a^\dagger a$ , como

$$N|n\rangle = n|n\rangle .$$

O estado  $|n\rangle$  descreve, então, um estado de  $n$  bósons. Para introduzir uma álgebra duplicada neste caso é necessária a introdução de operadores  $\tilde{a}^\dagger$  e  $\tilde{a}$ . Usando as regras de conjugação til em (3.8), obtemos

$$\begin{aligned} ([a, a^\dagger])^\sim &= \tilde{1} = 1 , \\ [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] &= 1 , \\ [\tilde{a}, \tilde{a}] &= [\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}^\dagger] = 0 , \end{aligned}$$

e das equações (3.9) e (3.10) obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{a}|\tilde{0}\rangle &= 0 , \\ (\tilde{a}^\dagger)^n |\tilde{0}\rangle &= \sqrt{n!} |\tilde{n}\rangle , \\ \tilde{a}|n\rangle &= \sqrt{n} |\tilde{n} - 1\rangle . \end{aligned}$$

O gerador das translações temporais é dado por

$$\hat{H} = H - \tilde{H} = \omega (a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a}) , \quad (3.11)$$

e o estado de vácuo térmico,

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{-n\beta\omega/2} |n, \tilde{n}\rangle , \\
|0(\beta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{-n\beta\omega/2} \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\tilde{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0, \tilde{0}\rangle .
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Uma consequência direta deste resultado é

$$\begin{aligned}
\langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{m,n} \langle m, \tilde{m} | e^{\frac{-\beta\omega(n+m)}{2}} |n, \tilde{n}\rangle , \\
&= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{m,n} e^{\frac{-\beta\omega(n+m)}{2}} \delta_{mn} \delta_{m\tilde{m}} , \\
&= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta\omega n} .
\end{aligned}$$

A condição de normalização, porém, demanda  $\langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle = 1$ . Desta forma, temos para  $Z(\beta)$  que

$$\begin{aligned}
Z(\beta) &= \sum_n e^{-\beta\omega n} , \\
&= \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}} .
\end{aligned}$$

Substituindo este resultado em (3.12), temos o estado de vácuo térmico

$$|0(\beta)\rangle = \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \sum_n e^{-n\beta\omega/2} \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\tilde{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |n, \tilde{n}\rangle , \tag{3.13}$$

e a partir deste pode-se obter o valor esperado do operador número

$$\langle N \rangle = \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}} ,$$

que é um resultado conhecido para a distribuição de bósons na mecânica estatística.

### 3.3.3 Caso Fermiônico

Um oscilador fermiônico é um sistema descrito pelo operador hamiltoniano

$$H = \omega a^\dagger a ,$$

aonde os operadores  $a^\dagger$  e  $a$  satisfazem a álgebra de anticomutação

$$\begin{aligned} \{a^\dagger, a\} &= 1 , \\ \{a, a\} &= \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0 . \end{aligned}$$

A operação  $\{A, B\} = AB + BA$  é o anticomutador. Define-se o operador número  $N = a^\dagger a$ , de forma que seus autovalores sejam dados como  $N|n\rangle = n|n\rangle$ . Com as relações de anticomutação para  $a^\dagger$  e  $a$ , junto de  $\langle n|n\rangle = 1$ , mostra-se que só existem dois autoestados de  $H$ ,  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , tal que:

$$\begin{aligned} a|0\rangle &= 0 , \\ a^\dagger|1\rangle &= 0 , \\ a|1\rangle &= |0\rangle , \\ a^\dagger|0\rangle &= |1\rangle . \end{aligned}$$

O espaço de Hilbert é varrido, portanto, por apenas dois vetores,  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ . Os autovalores da energia são dados por

$$H|n\rangle = \epsilon_n|n\rangle = n\omega|n\rangle .$$

Para a construção da DCT para este sistema, executa-se a duplicação dos graus de liberdade da maneira usual, através da introdução de operadores til. De acordo com as

regras de conjugação til, temos

$$\begin{aligned}\{\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}\} &= 1, \\ \{\tilde{a}, \tilde{a}\} &= \{\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}^\dagger\} = 0.\end{aligned}$$

Vale chamar a atenção neste momento para o fato de os operadores de criação e destruição não serem observáveis físicos e nem geradores de simetria, não estando, em princípio sujeitos as regras de comutação entre operadores til e não til. Combinações dos mesmos, porém, agem como observáveis e geradores, de forma que uma teoria consistente é atingida se houver anticomutação dos setores com e sem til da álgebra. O estado fundamental do sistema é denotado por  $|0, \tilde{0}\rangle$ , e o restante dos vetores da base são dados como

$$\begin{aligned}|0, \tilde{1}\rangle &= \tilde{a}^\dagger |0, \tilde{0}\rangle, \\ |1, \tilde{0}\rangle &= a^\dagger |0, \tilde{0}\rangle, \\ |1, \tilde{1}\rangle &= a^\dagger \tilde{a}^\dagger |0, \tilde{0}\rangle.\end{aligned}$$

O conjunto de 4 estados  $\{|0, \tilde{0}\rangle, |1, \tilde{0}\rangle, |0, \tilde{1}\rangle, |1, \tilde{1}\rangle\}$  varre todo o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_T$ . A construção do vácuo térmico se dá como estabelecido anteriormente,

$$\begin{aligned}|0(\beta)\rangle &= \frac{1}{Z^{1/2}(\beta)} \sum_n e^{-\frac{\beta E_n}{2}} |n, \tilde{n}\rangle, \\ &= \frac{1}{Z^{1/2}(\beta)} \left( |0, \tilde{0}\rangle + e^{-\frac{\beta E_1}{2}} |1, \tilde{1}\rangle \right), \\ &= \frac{1}{Z^{1/2}(\beta)} \left( 1 + e^{-\frac{\beta E_1}{2}} a^\dagger \tilde{a}^\dagger \right) |0, \tilde{0}\rangle.\end{aligned}$$

Com a imposição da condição de normalização,  $\langle 0(\beta) | 0(\beta) \rangle$ , obtém-se

$$Z(\beta) = 1 + e^{-\beta\omega},$$



e como consequência

$$\frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\beta\omega}}} \left( 1 + e^{-\frac{\beta E_1}{2}} a^\dagger \tilde{a}^\dagger \right) |0, \tilde{0}\rangle . \quad (3.14)$$

Além disso, a partir da definição de  $|0(\beta)\rangle$ , o valor médio do operador número é obtido como

$$\begin{aligned} n(\beta) &= \langle N \rangle_\beta = \langle 0(\beta) | N | 0(\beta) \rangle , \\ &= \frac{1}{1 + e^{-\beta\omega}} \langle 0, \tilde{0} | \left( 1 + e^{-\frac{\beta E_1}{2}} \tilde{a} a \right) a^\dagger a \left( 1 + e^{-\frac{\beta E_1}{2}} a^\dagger \tilde{a}^\dagger \right) | 0, \tilde{0} \rangle , \\ &= \frac{e^{-\beta\omega}}{1 + e^{-\beta\omega}} \langle 0, \tilde{0} | \tilde{a} a a^\dagger a a^\dagger \tilde{a}^\dagger | 0, \tilde{0} \rangle = \langle 1, \tilde{1} | N | 1, \tilde{1} \rangle , \\ &= \frac{1}{1 + e^{-\beta\omega}} , \end{aligned}$$

que é a distribuição de férmions a temperatura  $\beta^{-1}$ .

### 3.3.4 Transformação de Bogoliubov

#### Bósons

É importante notar que (3.13) pode ser escrita na forma

$$|0(\beta)\rangle = \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \exp \left( e^{-\beta\omega/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger \right) |0, \tilde{0}\rangle . \quad (3.15)$$

Este resultado é obtido facilmente se a exponencial em questão é escrita como uma série de Taylor. Usando a identidade de operadores [7]

$$e^{\alpha(A+B)} = e^{\tanh \alpha B} e^{\ln \cosh \alpha [A,B]} e^{\tanh \alpha A} , \quad (3.16)$$

podemos definir de maneira consistente

$$\begin{aligned}\cosh \theta(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}}} \equiv u(\beta) , \\ \sinh \theta(\beta) &= \frac{e^{-\beta\omega/2}}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}}} \equiv v(\beta) ,\end{aligned}$$

já que  $u^2(\beta) - v^2(\beta) = 1$ . Substituindo estas definições em (3.15), usando (3.16) e lembrando que  $\tanh \theta(\beta) = e^{-\beta\omega/2}$ , obtemos

$$\begin{aligned}|0(\beta)\rangle &= [\cosh \theta(\beta)]^{-1} e^{\tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} |0, \tilde{0}\rangle , \\ &= e^{-\ln \cosh \theta(\beta)} e^{\tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} |0, \tilde{0}\rangle .\end{aligned}\tag{3.17}$$

Usando agora a seguinte propriedade do estado  $|0, \tilde{0}\rangle$

$$e^{f(\beta) \tilde{a}^\dagger \tilde{a}} |0, \tilde{0}\rangle = |0, \tilde{0}\rangle ,$$

escrevemos

$$\begin{aligned}|0(\beta)\rangle &= e^{\tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln \cosh \theta(\beta) [a, a^\dagger] \cdot [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger]} e^{\tanh \theta(\beta) (-\tilde{a}a)} |0, \tilde{0}\rangle , \\ |0(\beta)\rangle &= e^{\tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln \cosh \theta(\beta) (\tilde{a}\tilde{a}^\dagger + a^\dagger a)} e^{\tanh \theta(\beta) (-\tilde{a}a)} |0, \tilde{0}\rangle .\end{aligned}$$

Usando (3.16) com

$$\begin{aligned}A &= -\tilde{a}a , \\ A &= -a^\dagger \tilde{a}^\dagger , \\ \alpha &= \theta(\beta) ,\end{aligned}$$

temos para  $|0(\beta)\rangle$

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \exp(-iG(\beta)) |0, \tilde{0}\rangle , \\ G(\beta) &= -i\theta(\beta) (\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger) , \end{aligned}$$

aonde o fator  $-i$  é introduzido por conveniência. O operador unitário que respeita a equação  $|0(\beta)\rangle = U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle$  é então

$$U(\beta) = e^{-iG(\beta)} .$$

A transformação denotada por  $U(\beta)$  é chamada de transformação de Bogoliubov, e é um método direto e simples de obter operadores termalizados a partir de operadores em  $T = 0$ . Vale ressaltar que  $U(\beta)$  é uma transformação unitária.

### Férmions

Seguindo um procedimento análogo ao caso bosônico, escreve-se a equação (3.14) pode ser escrita em termos de uma transformação unitária. Para tanto, definimos

$$\begin{aligned} u(\beta) = \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\beta\omega}}} , \\ v(\beta) = \sin \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + e^{\beta\omega}}} , \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} u^2(\beta) + v^2(\beta) &= \frac{1}{1 + e^{-\beta\omega}} + \frac{1}{1 + e^{\beta\omega}} = 1 , \\ &= \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 . \end{aligned}$$

de forma que se possa escrever o vácuo térmico como

$$|0(\beta)\rangle = (\cos\theta + \sin\theta a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle .$$

Usando a propriedade de férmion  $(\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^n |0, \tilde{0}\rangle = (-1)^n |0, \tilde{0}\rangle$ , usa-se a expansão dos senos e cossenos em séries de potência para obter

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \exp\{-\theta(\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)\} |0, \tilde{0}\rangle , \\ &= U(\beta) |0, \tilde{0}\rangle . \end{aligned}$$

Aonde

$$\begin{aligned} U(\beta) &= e^{-iG(\beta)} , \\ G(\beta) &= -i\theta(\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger) . \end{aligned}$$

A transformação denotada por  $U(\beta)$  é a transformação de Bogoliubov para férmions. É importante chamar a atenção para a ordem dos operadores na expressão acima. Como o setor til e o setor sem til da álgebra anticomutam, a ordem dos operadores acima é importante e deve ser mantida.

### 3.3.5 Operadores Termalizados

#### Bósons

Uma vez estabelecida uma relação entre vácuos das duas teorias, torna-se necessário construir os operadores de criação e destruição para a teoria térmica. Para tanto, faz-se

uso da unitariedade do operador  $U(\beta)$  para introduzir os seguintes operadores:

$$\begin{aligned} a(\beta) &= U(\beta) a U^\dagger(\beta) , \\ a^\dagger(\beta) &= U(\beta) a^\dagger U^\dagger(\beta) , \\ \tilde{a}(\beta) &= U(\beta) \tilde{a} U^\dagger(\beta) , \\ \tilde{a}^\dagger(\beta) &= U(\beta) \tilde{a}^\dagger U^\dagger(\beta) . \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} a(\beta)|0(\beta)\rangle &= U(\beta) a U^\dagger(\beta)U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle , \\ &= U(\beta) a|0, \tilde{0}\rangle = 0 , \end{aligned}$$

e da mesma forma pode-se escrever

$$\tilde{a}(\beta)|0(\beta)\rangle = 0 .$$

Isto quer dizer que o estado  $|0(\beta)\rangle$  se comporta como um vácuo para os operadores  $a(\beta)$  e  $\tilde{a}(\beta)$ , apesar de não o ser para os operadores não termalizados. Além disso, como  $U(\beta)$  é unitário, a álgebra dos operadores a temperatura se mantém após o processo de termalização, então temos

$$\begin{aligned} [a(\beta), a^\dagger(\beta)] &= 1 , \\ [\tilde{a}(\beta), \tilde{a}^\dagger(\beta)] &= 1 , \end{aligned}$$

com os demais comutadores nulos. Estas relações, juntamente com o comportamento de vácuo de  $|0(\beta)\rangle$  garantem que os operadores  $a(\beta)$ ,  $\tilde{a}(\beta)$ ,  $a^\dagger(\beta)$  e  $\tilde{a}^\dagger(\beta)$  são, de fato, os operadores de criação e destruição da teoria com  $T \neq 0$ . Desta forma, com o estabeleci-

mento do estado de vácuo e dos operadores de criação e destruição, estamos habilitados a construir todos os auto-estados do operador hamiltoniano para o oscilador harmônico térmico. Algumas relações interessantes a este processo podem ser construída usando a relação de operadores

$$e^{-iB} A e^{iB} = A + (-i) [B, A] + \frac{(-i)^2}{2!} [B, [B, A]] + \frac{(-i)^3}{3!} [B, [B, [B, A]]] + \dots$$

Escreve-se  $U(\beta) = e^{-iG(\beta)}$ , e temos

$$\begin{aligned} a(\beta) &= e^{-iG(\beta)} a e^{iG(\beta)} , \\ &= \left( 1 + \frac{1}{2!} \theta^2(\beta) + \frac{1}{4!} \theta^4(\beta) + \dots \right) a - \left( \theta(\beta) + \frac{1}{3!} \theta^3(\beta) + \frac{1}{5!} \theta^5(\beta) + \dots \right) \tilde{a}^\dagger , \\ &= \cosh(\theta(\beta)) a - \sinh(\theta(\beta)) \tilde{a}^\dagger , \\ &= u(\beta) a - v(\beta) \tilde{a}^\dagger . \end{aligned}$$

Repetindo este procedimento para os outros operadores, pode-se chegar em

$$\begin{aligned} a(\beta) &= u(\beta) a - v(\beta) \tilde{a}^\dagger , \\ \tilde{a}(\beta) &= u(\beta) \tilde{a} - v(\beta) a^\dagger , \\ a^\dagger(\beta) &= u(\beta) a^\dagger - v(\beta) \tilde{a} , \\ \tilde{a}^\dagger(\beta) &= u(\beta) \tilde{a}^\dagger - v(\beta) a . \end{aligned}$$

Estes resultados podem ser invertidos, dando

$$\begin{aligned} a &= u(\beta) a(\beta) - v(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) , \\ \tilde{a} &= u(\beta) \tilde{a}(\beta) - v(\beta) a^\dagger(\beta) , \\ a^\dagger &= u(\beta) a^\dagger(\beta) - v(\beta) \tilde{a}(\beta) , \\ \tilde{a}^\dagger &= u(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) - v(\beta) a(\beta) . \end{aligned}$$

O operador  $\hat{H} = H - \tilde{H}$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\hat{H}(\beta) &= H(\beta) - \tilde{H}(\beta) = \omega [a^\dagger(\beta)a(\beta) - \tilde{a}^\dagger(\beta)\tilde{a}(\beta)] , \\ &= \omega [(u^2(\beta) - v^2(\beta)) a^\dagger a + (v^2(\beta) - u^2(\beta)) \tilde{a}^\dagger \tilde{a}] ,\end{aligned}$$

mas como  $u^2(\beta) - v^2(\beta) = 1$ , temos

$$\hat{H}(\beta) = \hat{H} = \omega [a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a}] .$$

A construção do espaço de Fock termalizado deste ponto em diante é bastante direta. O espaço é varrido pelos vetores

$$\left\{ |0(\beta)\rangle, a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle, \tilde{a}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle, \dots, \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{m!}} (a^\dagger(\beta))^n (\tilde{a}^\dagger(\beta))^m, \dots \right\} ,$$

que provêem as relações para o vácuo e estados de uma partícula termalizados

$$\begin{aligned}\hat{H}|0(\beta)\rangle &= 0 , \\ \hat{H}a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle &= \omega a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle , \\ \hat{H}\tilde{a}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle &= -\omega \tilde{a}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle , \\ \hat{H}a^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle &= 0 ,\end{aligned}$$

e relações similares para estados excitados mais altos. A ação do operador de criação no vácuo é obtida de maneira bastante direta usando a condição

$$\begin{aligned}a(\beta)|0(\beta)\rangle &= 0 , \\ [u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger] |0(\beta)\rangle &= 0 ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(\beta)a|0(\beta)\rangle &= v(\beta)\tilde{a}^\dagger|0(\beta)\rangle , \\
v(\beta)\tilde{a}|0(\beta)\rangle &= \frac{v^2(\beta)}{u(\beta)}a^\dagger|0(\beta)\rangle .
\end{aligned}$$

Dai segue

$$\begin{aligned}
a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle &= [u(\beta)a^\dagger - v(\beta)\tilde{a}] |0(\beta)\rangle , \\
&= \left( \frac{u^2(\beta) - v^2(\beta)}{u(\beta)} \right) a^\dagger|0(\beta)\rangle , \\
&= \frac{1}{u(\beta)}a^\dagger|0(\beta)\rangle ,
\end{aligned}$$

que diz que o estado termalizado de uma partícula é construído adicionando uma partícula ao vácuo  $|0(\beta)\rangle$  com peso  $u(\beta)$  para garantir a normalização. Este resultado pode ser rapidamente generalizado como

$$(a^\dagger(\beta))^n |0(\beta)\rangle = \frac{1}{u^n(\beta)} (a^\dagger)^n |0(\beta)\rangle ,$$

que completa a construção do espaço de Fock.

## Férmions

Introduzimos operadores termalizados com

$$\begin{aligned}
a(\beta) &= U(\beta)aU^\dagger(\beta) , \\
a^\dagger(\beta) &= U(\beta)a^\dagger U^\dagger(\beta) , \\
\tilde{a}(\beta) &= U(\beta)\tilde{a}U^\dagger(\beta) , \\
\tilde{a}^\dagger(\beta) &= U(\beta)\tilde{a}^\dagger U^\dagger(\beta) ,
\end{aligned}$$



Para estes operadores vale

$$a(\beta)|0(\beta)\rangle ,$$

de modo que  $|0(\beta)\rangle$  é um estado de vácuo para os operadores termalizados, mas não para  $a$  e  $\tilde{a}$ . Como  $U(\beta)$  é unitária, as relações de anticomutação são preservadas, de modo que

$$\begin{aligned} \{a^\dagger(\beta), a(\beta)\} &= 1 , \\ \{\tilde{a}^\dagger(\beta), \tilde{a}(\beta)\} &= 1 , \end{aligned}$$

com as demais relações sendo zero. Expandindo a transformação  $U(\beta)$ , temos

$$\begin{aligned} a(\beta) &= u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger , \\ \tilde{a}(\beta) &= u(\beta)\tilde{a} + v(\beta)a^\dagger , \\ a^\dagger(\beta) &= u(\beta)a^\dagger - v(\beta)\tilde{a} , \\ \tilde{a}^\dagger(\beta) &= u(\beta)\tilde{a}^\dagger + v(\beta)a . \end{aligned} \tag{3.18}$$

Note que as equações (3.18) não obedecem as regras de conjugação til. Como  $a^\dagger$  e  $a$  não são nem geradores, nem observáveis, pode-se porém assumir que  $\tilde{\tilde{a}} = -a$  para férmions, sem perda de generalidade ou nenhuma contradição. A construção do espaço de Fock para o oscilador termalizado se dá a partir de  $|0(\beta)\rangle$ , de modo que o espaço é varrido pelos quatro vetores da base

$$\{|0(\beta)\rangle, a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle, \tilde{a}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle, a^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger|0(\beta)\rangle\} .$$

O operador  $\hat{H} = H - \tilde{H}$  é invariante por  $U(\beta)$ , ou seja

$$\hat{H}(\beta) = \omega [a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a}] = \hat{H} .$$

Seus quatro autovalores são obtidos da maneira usual

$$\begin{aligned}\widehat{H}|0(\beta)\rangle &= 0, \\ \widehat{H}a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle &= \omega a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle, \\ \widehat{H}\widetilde{a}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle &= \omega \widetilde{a}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle, \\ \widehat{H}\widetilde{a}^\dagger(\beta)a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle &= 0.\end{aligned}$$

Nota-se que

$$u(\beta)a|0(\beta)\rangle = v(\beta)\widetilde{a}^\dagger|0(\beta)\rangle,$$

e portanto

$$a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle = \frac{u^2(\beta) + v^2(\beta)a^\dagger}{u(\beta)}|0(\beta)\rangle = \frac{1}{u(\beta)}a^\dagger|0(\beta)\rangle.$$

### 3.3.6 Notação Matricial

#### Bósons

Afim de reduzir a notação daqui em diante e tirando inspiração das transformações de Bogoliubov, introduz-se a seguinte notação matricial para os operadores de criação e destruição:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a(\beta) \\ \widetilde{a}^\dagger(\beta) \end{pmatrix} &= B(\beta) \begin{pmatrix} a \\ \widetilde{a}^\dagger \end{pmatrix}, \\ B(\beta) &= \begin{pmatrix} u(\beta) & -v(\beta) \\ -v(\beta) & u(\beta) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dados dois operadores bosônicos  $A$  e  $\tilde{A}$ , uma possível notação em dupletto é

$$(A^a) = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ \tilde{A}^\dagger \end{pmatrix},$$

com a transposição til definida como

$$(\bar{A}^a) = \begin{pmatrix} A^\dagger & -\tilde{A} \end{pmatrix}.$$

Nesta notação, as regras de comutação entre os operadores de criação e destruição se tornam

$$\begin{aligned} [a^a, \bar{a}^b] &= \delta_{ab}, \\ [a^a(\beta), \bar{a}^b(\beta)] &= \delta_{ab}, \end{aligned}$$

e a transformação de Bogoliubov é escrita como

$$a^a(\beta) = B(\beta)_{ab} a^b. \quad (3.19)$$

## Férmions

Introduz-se uma notação matricial através de

$$\begin{pmatrix} a(\beta) \\ a^\dagger(\beta) \end{pmatrix} = B(\beta) \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix}.$$

Aonde

$$B(\beta) = \begin{pmatrix} u(\beta) & -v(\beta) \\ v(\beta) & u(\beta) \end{pmatrix}.$$

Nesta notação, operadores fermiônicos  $A$  e  $A^\dagger$  são escritos em notação duplicada

$$\begin{aligned} (A^a) &= \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} A \\ \tilde{A}^\dagger \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

com a transposição til definida como

$$(\bar{A}^a) = \begin{pmatrix} A^\dagger & \tilde{A} \end{pmatrix}.$$

Nesta notação as regras de comutação ficam

$$\{a^a(\beta), \bar{a}^b(\beta)\} = \delta^{ab}.$$

Que simplifica a escrita bastante.

### 3.3.7 O Propagador Fermiônico

Tendo estabelecido uma maneira de implementar temperatura num oscilador harmônico, o próximo passo é introduzir estes efeitos numa teoria de campos. Para tanto, duas etapas são necessárias: a construção de um propagador livre para férmions a temperatura finita e o estabelecimento de um formalismo de integral de trajetória para a DCT fermiônica. Prossegue-se em completo paralelo com teorias de  $T = 0$ , introduzindo a termalização através de uma transformação de Bogoliubov.

A densidade de Lagrangiana de Dirac com uma fonte externa é dada como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \bar{\psi}(x) \left[ i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right] \psi(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) \\ & - \frac{1}{2} \tilde{\bar{\psi}}(x) \left[ -i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right] \tilde{\psi}(x) + \tilde{\bar{\eta}}(x)\tilde{\psi}(x) + \tilde{\bar{\psi}}(x)\tilde{\eta}(x) . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Procedendo da maneira usual, definem-se os momentos canônicos

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^\dagger(x) , \\ \tilde{\pi}(x) &= \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\tilde{\psi}}} = -i\tilde{\psi}^\dagger(x) , \end{aligned}$$

e as relações de comutação canônicas são

$$\begin{aligned} \{ \psi(\mathbf{x}, t, \beta), \pi(\mathbf{y}, t, \beta) \} &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) , \\ \{ \tilde{\psi}(\mathbf{x}, t, \beta), \tilde{\pi}(\mathbf{y}, t, \beta) \} &= -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) . \end{aligned}$$

Os campos são expandidos em modos como

$$\begin{aligned} \psi(x; \beta) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ b_\alpha(k, \beta) u^{(\alpha)}(k) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + d_\alpha^\dagger(k, \beta) v^{(\alpha)}(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] , \\ \bar{\psi}(x; \beta) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ b_\alpha^\dagger(k, \beta) \bar{u}^{(\alpha)}(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + d_\alpha(k, \beta) \bar{v}^{(\alpha)}(k) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] , \\ \tilde{\psi}(x; \beta) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \tilde{b}_\alpha(k, \beta) u^{*(\alpha)}(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \tilde{d}_\alpha^\dagger(k, \beta) v^{*(\alpha)}(k) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] , \\ \tilde{\bar{\psi}}(x; \beta) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \tilde{b}_\alpha^\dagger(k, \beta) \bar{u}^{*(\alpha)}(k) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \tilde{d}_\alpha(k, \beta) \bar{v}^{*(\alpha)}(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] . \end{aligned}$$

Como cada campo tem vários modos, a relação entre a teoria termalizada e a teoria a  $T = 0$  se dá através de uma transformação de Bogoliubov para cada modo. A transformação

total é dada então como

$$U(\beta) = \prod_k U_b(k, \beta) U_d(k, \beta) ,$$

aonde  $U_b$  e  $U_d$  são as transformações para os modos  $b$  e  $d$ , respectivamente, dadas por

$$\begin{aligned} U_b(\beta) &= \exp \left\{ -\theta_{b, k} \left( \tilde{b}b - b^\dagger \tilde{b}^\dagger \right) \right\} , \\ U_d(\beta) &= \exp \left\{ -\theta_{d, k} \left( \tilde{d}d - d^\dagger \tilde{d}^\dagger \right) \right\} . \end{aligned}$$

Vale também lembrar que  $v_b(k, \beta) = \cos \theta_{b, k}$ ,  $v_d(k, \beta) = \cos \theta_{d, k}$  e que

$$\begin{aligned} v_b^2(k, \beta) &= \frac{1}{e^{\beta(\omega_k - \mu_b)} + 1} , \\ v_d^2(k, \beta) &= \frac{1}{e^{\beta(\omega_k - \mu_d)} + 1} , \end{aligned}$$

são as funções de distribuição de partícula e antipartícula. O vácuo térmico é dado através da transformação de Bogliubov como  $|0(\beta)\rangle = U(\beta) \left( \bigotimes_k |0, \tilde{0}\rangle_k \right)$ , aonde  $|0, \tilde{0}\rangle_k$  é o vácuo do modo  $k$ . O vácuo térmico é aniquilado por todos os operadores de destruição e  $\langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle = 1$ . Desta forma, usando as propriedades citadas e a definição do propagador térmico

$$S_0(x - y; \beta) = -i \langle 0(\beta) | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0(\beta) \rangle ,$$

é possível obter o propagador térmico

$$S_0(x - y; \beta) = S_0(z - y) + 2\pi i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (\not{k} + m) v^2(k, \beta) \delta(k^2 - m^2) ,$$

com  $S_0(x - y)$  o propagador com temperatura nula, dado por

$$S_0(x - y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\not{k} + m)} .$$

### Funcional Gerador para Férmons

O estabelecimento de um funcional gerador no presente caso é bastante direto. Define-se o funcional gerador

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}, \tilde{\eta}, \tilde{\bar{\eta}}] \simeq \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\tilde{\psi} \mathcal{D}\tilde{\bar{\psi}} \exp \left\{ i \int d^4x \hat{\mathcal{L}} \right\} .$$

Este funcional, em sua forma normalizada, se reduz a

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}, \tilde{\eta}, \tilde{\bar{\eta}}] = \exp \left\{ -i \int d^4x d^4y \left[ \bar{\eta}(x) S_0(x - y) \eta(x) + \tilde{\bar{\eta}}(x) \tilde{S}_0(x - y) \tilde{\eta}(x) \right] \right\} .$$

A mudança na introdução de temperatura se dá no propagador  $S_0$ . Faz-se a mudança  $S_0(x - y) \rightarrow S_0(x - y; \beta)$ , e todo o resto é completamente análogo. O funcional numa teoria interagente é dado por

$$\begin{aligned} Z[\eta, \bar{\eta}, \tilde{\eta}, \tilde{\bar{\eta}}; \beta] &= \mathcal{N} \exp \left\{ i \int d^4x \hat{\mathcal{L}}_{\text{int}} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta}; \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \right) \right\} Z_0[\eta, \bar{\eta}, \tilde{\eta}, \tilde{\bar{\eta}}] , \\ Z[0, 0, 0, 0; \beta] &= 1 . \end{aligned}$$

Isto permite o desenvolvimento de teorias interagentes, notavelmente o modelo GN, em situações de temperatura finita com dependência temporal. Vale notar que o formalismo é completamente análogo ao caso  $T = 0$ , permitindo o uso de técnicas diagramáticas usuais. Com o formalismo aqui descrito, temos como objetivo estudar efeitos de temperatura no modelo GN, especialmente fenômenos críticos.

### 3.3.8 Restauração de Simetria no Modelo de Gross-Neveu

#### Análise das Simetrias

Nesta seção o objetivo é analisar o modelo de Gross-Neveu em 1+1 dimensões. A lagrangiana deste modelo com  $N$  sabores é

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^N \bar{\psi}^k i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_k + g/2 \sum_{k=1}^N \left[ \bar{\psi}^k \psi_k \right]^2, \quad (3.21)$$

aonde  $\psi \equiv \psi_k(t, x)$  são os campos espinoriais. É fácil observar, usando análise dimensional em unidades naturais [98], que em duas dimensões a constante de acoplamento  $g$  relacionada a ineração de quatro férmions é adimensional:

$$\begin{aligned} [L] &= [m]^D, \\ [\bar{\psi}\psi] &= [m]^{D-1}, \\ [g] \cdot [\bar{\psi}\psi]^2 &= [m]^D, \\ [g] &= [m]^{2-D}. \end{aligned}$$

com  $[m]$  representando a dimensão de massa e  $D$  a dimensão do espaço-tempo. Em  $D = 2$  a dimensão de massa desaparece de  $[g]$ , e portanto a teoria é perturbativamente renormalizável [99],[98], [2]. A representação escolhida neste trabalho para as matrizes



$\gamma^\mu$ , que em duas dimensões são matrizes  $2 \times 2$  é

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^1 &= i \cdot \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^5 &= -\sigma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

conhecida como a representação de Weyl [98]. Nesta representação,  $\psi_k$  é um espinor complexo de duas componentes. Como já estabelecido anteriormente, temos como objetivo nesta seção estudar a quebra e eventual restauração de simetrias no modelo de Gross-Neveu. Tendo isto em mente, podemos nos limitar a discutir apenas as simetrias discretas do modelo, já que simetrias contínuas não podem ser quebradas dinamicamente em  $1+1$  [99]. A lagrangiana (3.21) é invariante pela transformação  $R$ ,

$$\psi(t, x) \xrightarrow{R} -\psi(t, x),$$

bem como pela transformação de paridade  $\mathcal{P}$  e reversão temporal  $\mathcal{T}$ ,

$$\begin{aligned}\psi(t, x) &\xrightarrow{\mathcal{P}} \gamma^0 \psi(t, -x), \\ \psi(t, x) &\xrightarrow{\mathcal{T}} \gamma^0 \psi(-t, x).\end{aligned}$$

Adicionalmente, o modelo ainda apresenta invariância sob a transformação quiral  $\chi_D$  e paridade especial  $\mathcal{P}_1$

$$\begin{aligned}\psi(t, x) &\xrightarrow{\mathcal{P}_1} \gamma^1 \psi(t, -x) , \\ \psi(t, x) &\xrightarrow{\chi_D} \gamma^5 \psi(t, x) .\end{aligned}$$

a quebra das simetrias  $\chi_D$  e  $\mathcal{P}_1$  pode ocorrer com a geração espontânea de um termo de massa do tipo  $m\bar{\psi}\psi$ , podendo também ocorrer uma eventual restauração a temperatura finita ou através de uma compactificação espacial.

### Quebra de Simetrias

Sem nenhum efeito de compactificação, é possível observar a geração dinâmica de massa no modelo de Gross-Neveu como consequência direta do processo de renormalização. O que segue é um procedimento para a obtenção de correções ao termo de massa do modelo GN. Para que se possa efetuar a operação de renormalização do modelo, emprega-se a prescrição já usual da regularização dimensional[98], [99], num esquema de subtração mínima. Neste processo, usa-se como dimensão do espaço

$$D = 2 - 2\epsilon ,$$

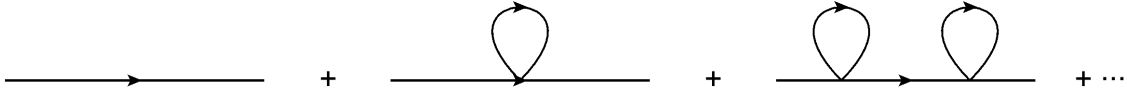
tomando, ao fim dos cálculos, o limite em que o parâmetro  $\epsilon$  vai a zero. A lagrangiana do modelo em dimensão  $D$  é escrita então como

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^N \bar{\psi}^k i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_k + \frac{g M^{2-D}}{2} \sum_{k=1}^N \left[ \bar{\psi}^k \psi_k \right]^2 .$$

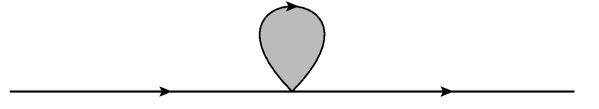
As correções dinâmicas a massa vêm das funções de dois pontos, e podem ser escritas como

$$m_0 = -gM^{2-D} \sum_{n=1}^N \langle \bar{\psi}^n \psi_n \rangle ,$$

supondo a existência de N sabores diferentes de férmions no modelo. O correlator  $\langle \bar{\psi}^n \psi_n \rangle$  é calculado em forma diagramática como



que podem ser substituídos por um único diagrama



aonde o loop cheio indica o uso do propagador já corrigido pelo uso do termo de massa corrigido. Desta forma, chegamos a seguinte equação integral para a massa  $m_0$

$$m_0 = -\frac{gM^{2-D} N 2^{D/2}}{i} \int \frac{d^D \ell}{(2\pi)^D} \frac{(\not{\ell} - m_0)}{\ell^2 - m_0^2 - i\epsilon} .$$

o termo proporcional a  $\not{\ell}$  na integral acima se anula, uma vez que este termo é ímpar e integrado sobre todo o espaço. Resta na equação acima

$$\begin{aligned} m_0 &= -m_0 \left\{ \frac{gM^{2-D} N 2^{D/2}}{i} \int \frac{d^D \ell}{(2\pi)^D} \frac{1}{\ell^2 - m_0^2 - i\epsilon} \right\} , \\ 1 &= -\frac{gM^{2-D} N 2^{D/2}}{i} \int \frac{d^D \ell}{(2\pi)^D} \frac{1}{\ell^2 - m_0^2 - i\epsilon} . \end{aligned} \quad (3.22)$$

Esta última integral pode ser resolvida fazendo uma rotação de Wick em  $\ell_0$ . Através da fórmula integral

$$\int \frac{d^D \bar{\ell}}{(2\pi)^D} \frac{1}{[\bar{\ell}^2 - m_0^2]^A} = \left( \frac{\Gamma(A - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(A) [m_0^2]^{A - \frac{D}{2}}} \right),$$

e da rotação de Wick  $\bar{\ell} = (i\ell_0, \vec{\ell})$ , podemos transformar a equação 3.22 em

$$\begin{aligned} 1 &= gM^{2-D} N 2^{D/2} \int \frac{d^D \bar{\ell}}{(2\pi)^D} \frac{1}{e\bar{\ell}^2 + m_0^2 - i\epsilon}. \\ 1 &= gM^{2-D} N 2^{D/2} \left( \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(1) [m_0^2]^{1 - \frac{D}{2}}} \right), \\ 1 &= gM^{2\epsilon} N 2^{1-\epsilon} \left( \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^{1-\epsilon} \Gamma(1) [m_0^2]^\epsilon} \right). \end{aligned}$$

É necessário neste momento tomar o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Para tanto, lembramos das seguintes expansões em séries ao redor de  $\epsilon = 0$ :

$$\begin{aligned} \Gamma(\epsilon) &= \frac{1}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon), \\ a^{(-\epsilon)} &= 1 - \ln(a)\epsilon + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Portanto, com alguma álgebra, temos

$$1 = \frac{2gN}{4\pi} \left( \frac{m_0^2}{2\pi M^2} \right)^{-\epsilon} \Gamma(\epsilon),$$

e próximo do limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{gN}{2\pi} \left[ 1 + \ln \left( \frac{m_0^2}{2\pi M^2} \right) \epsilon \right] \left[ \frac{1}{\epsilon} - \gamma \right], \\ 1 &= \frac{gN}{2\pi} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{m_0^2}{2\pi M^2} \right) - \gamma + O(\epsilon) \right]. \end{aligned}$$

A divergência em  $\epsilon = 0$  deve ser removida através de um contratermo na Lagrangiana. O valor deste contratermo não é de grande importância para o resultado que se busca, portanto apenas supõe-se que o contratermo foi adicionado, subtrai-se a divergência e prossegue-se normalmente. Desta forma, obtém-se para  $m_0$  o valor

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{gN}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{m_0^2}{2\pi M^2} \right) - \gamma \right] , \\ m_0^2 &= 2\pi M^2 e^{-\gamma + \frac{2\pi}{gN}} . \end{aligned}$$

Este resultado implica na existência de uma massa não-nula que depende do parâmetro de energia da teoria,  $M$ . A introdução deste termo de massa na Lagrangiana de Gross-Neveu implica na quebra das simetrias  $\chi_D$  e  $\mathcal{P}_1$ , uma vez que sob estas transformações o termo de massa se transforma como

$$\begin{aligned} m_0^2 \bar{\psi}(t, x) \psi(t, x) &\xrightarrow{\mathcal{P}_1} -m_0^2 \bar{\psi}(t, x) \psi(t, x) , \\ m_0^2 \bar{\psi}(t, x) \psi(t, x) &\xrightarrow{\chi_D} -m_0^2 \bar{\psi}(t, x) \psi(t, x) . \end{aligned}$$

Já se sabe que esta simetria pode ser restaurada a temperatura finita [36]. A quebra e restauração destas simetrias parece indicar a existência de uma transição de fase neste modelo que pode ocorrer através de efeitos de temperatura. Tendo este fato como motivação, torna-se interessante também verificar se tal transição pode ocorrer também através de efeitos de confinamento espacial. para tanto, comecemos tratando, em caráter de revisão, a restauração a temperatura finita.

### 3.3.9 Restauração de Simetria: Temperatura Finita

Usa-se nesta seção a prescrição apresentada anteriormente, aonde substitui-se o propagador da teoria pelo equivalente em temperatura finita,

$$S_T = S_0 - 2\pi\delta(\ell^2 - m_T^2) (\ell - m_T) v_F^2(\ell_0, \beta),$$

aonde

$$v_F^2(\ell_0, \beta) = \frac{1}{e^{-\beta|\ell_0|} + 1} = \frac{\Theta(\ell_0)}{e^{-\beta\ell_0} + 1} + \frac{\Theta(-\ell_0)}{e^{\beta\ell_0} + 1}.$$

Isso nos dá para a massa corrigida por temperatura  $m_T$  a equação

$$1 = \frac{gN}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{m_0^2}{2\pi M^2} \right) - \gamma - 2 \int d^2\ell \delta(\ell^2 - m_T^2) v_F^2(\ell_0, \beta) \right].$$

aonde o termo proporcional a  $\ell$  foi omitido por ser uma integral de uma função ímpar.

Temos

$$1 = \frac{gN}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{m_0^2}{2\pi M^2} \right) - \gamma - 2 \int d^2\ell \left[ \frac{\delta(\ell_0 - \sqrt{\ell_1^2 + m_T^2})}{2\sqrt{\ell_1^2 + m_T^2}} - \frac{\delta(\ell_0 + \sqrt{\ell_1^2 + m_T^2})}{2\sqrt{\ell_1^2 + m_T^2}} \right] v_F^2(\ell_0, \beta) \right],$$

de modo que para resolver esta equação integral basta resolver a integral

$$I = \int d\ell_1 \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 + m_T^2}} \left( \frac{1}{e^{-\beta\sqrt{\ell_1^2 + m_T^2}} + 1} \right),$$

Para resolver esta integral, fazemos uso da seguinte expansão

$$\frac{1}{e^\theta + 1} = \frac{1}{2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta}{\pi^2 (2n+1)^2 + \theta^2}.$$

Substituindo na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty d\ell_1 \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 + m_T^2}} \left( \frac{1}{2} - 2 \sum_{n=0}^\infty \frac{\beta \sqrt{\ell_1^2 + m_T^2}}{\pi^2 (2n+1)^2 + \beta^2 (\ell_1^2 + m_T^2)} \right), \\
&= I_1^\beta - 4 \sum_n^\infty I_{2n}^\beta,
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
I_1^\beta &= \int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\
I_{2n}^\beta &= \int_0^\infty dx \frac{1}{\pi^2 (2n+1)^2 + x^2 + y^2}, \\
x &= \beta \ell_1, \\
y &= \beta m_T.
\end{aligned}$$

Estas integrais são divergentes separadamente, mas a divergência pode ser controlada através do fator de regularização  $x^{-\epsilon}$ , tal como

$$\begin{aligned}
I_1^\beta(\epsilon) &= \int_0^\infty dx \frac{x^{-\epsilon}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\
I_{2n}^\beta(\epsilon) &= \int_0^\infty dx \frac{x^{-\epsilon}}{\pi^2 (2n+1)^2 + x^2 + y^2}.
\end{aligned}$$

Usando a fórmula integral derivada da definição da função Beta

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+bx^a)^{m+n}} dx = a^{-1} b^{-m/a} \text{B} \left( \frac{m}{a}, m+n - \frac{m}{a} \right), \quad (3.23)$$

podemos resolver  $I_1^\beta(\epsilon)$ ,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dx \frac{x^{-\epsilon}}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{1}{y} \int_0^\infty dx \frac{x^{-\epsilon}}{\sqrt{\frac{x^2}{y^2} + 1}}, \\
&= \frac{y^\epsilon}{2} \text{B} \left( \frac{1-\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2} \right), \\
&= \frac{y^\epsilon}{2} \frac{\Gamma \left( \frac{1-\epsilon}{2} \right) \Gamma \left( \frac{\epsilon}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{1}{2} \right)}, \\
&= \frac{1}{\epsilon} - \ln \left( \frac{y}{2} \right) + O(\epsilon).
\end{aligned}$$

Já para  $I_{2n}^\beta(\epsilon)$ , expande-se o integrando ao redor de  $m_T = 0$ . Com o intuito de determinar uma temperatura crítica na qual as simetrias quebradas pela geração de massa sejam restauradas, basta que se estude o comportamento da teoria em torno de  $m_T = 0$ . Desta forma, temos para  $I_{2n}^\beta(\epsilon)$ ,

$$I_{2n}^\beta(\epsilon) = \int_0^\infty dx \frac{x^{-\epsilon}}{\pi^2 (2n+1)^2 + x^2} - \int_0^\infty dx \frac{x^{-\epsilon}}{(\pi^2 (2n+1)^2 + x^2)^2} y^2 + O(y^4) \quad (3.24)$$

Todos os termos da integral acima podem ser resolvidos com 3.23, e os somatórios associados a cada um podem ser representados em termos de funções  $\zeta$ ,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^\infty u_n(k) &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty dx \frac{(-1)^k y^{2k} x^{-\epsilon}}{(\pi^2 (2n+1)^2 + x^2)^{k+1}}. \\
&= (-1)^k \frac{y^{2k}}{2\pi^{k-\epsilon}} \text{B} \left( \frac{1-\epsilon}{2}, k + \frac{1}{2} - \epsilon \right) \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^{k-\epsilon}}, \\
&= (-1)^k \frac{y^{2k}}{2\pi^{k-\epsilon}} \text{B} \left( \frac{1-\epsilon}{2}, k + \frac{1}{2} - \epsilon \right) \left( 1 - \frac{1}{2^{k-\epsilon}} \right) \zeta(k-\epsilon).
\end{aligned}$$

Todos estes termos são regulares no limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , exceto quando  $k = 0$ . Neste caso

$$\sum_{n=0}^\infty u_n(0) = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \gamma - \ln \left( \frac{\pi}{2} \right) \right] + O(\epsilon). \quad (3.25)$$



A integral  $I$  é, portanto,

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ I_1^\beta(\epsilon) - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_n(k) \right] , \\ &= -\ln\left(\frac{y}{\pi}\right) - \gamma + O(y^2) . \end{aligned}$$

Voltando a equação para  $m_T$

$$1 = \frac{gN}{2\pi} \left\{ \ln\left(\frac{2\pi M^2}{m_T^2}\right) + \gamma + 2 \ln\left(\frac{y}{\pi}\right) \right\} ,$$

e em mãos do resultado para  $T = 0$

$$\ln\left(\frac{2\pi M^2}{m_0^2}\right) = \frac{2\pi}{gN} + \gamma ,$$

substituindo na equação para  $m_T$ , no limite em que  $m_T \rightarrow 0$ , têm-se

$$\begin{aligned} 0 &= \ln\left(\frac{m_0^2}{m_T^2}\right) + 2 \ln\left(\frac{\beta}{\pi}\right) + \ln(m_T^2) + 2\gamma , \\ T_c &= \frac{m_0}{\pi} e^\gamma , \end{aligned}$$

que dá, aproximadamente,

$$T_c = 0,567 m_0 .$$

Este resultado é bastante razoável, uma vez que para um  $m_0$  equivalente ao raio de carga do próton ( $1,74\text{fm}^{-1} \approx 350\text{MeV}$ ), obtemos para  $T_c$

$$T_c \sim 198\text{MeV} ,$$

que é bastante próximo do valor da temperatura ao redor da qual se acredita que o deconfinamento de partículas ocorra ( $\sim 200\text{MeV}$ ). Este resultado levanta a pergunta se não existe um resultado análogo no caso de compactificação espacial. A resposta a esta pergunta é um resultado novo, descrito no que segue.

### 3.3.10 Restauração de Simetria: Compactificação

Para a compactificação espacial, usamos a seguinte prescrição

$$v_F(\ell_1, iL) = \Theta(\ell_1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-inL\ell_1} + \Theta(-\ell_1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{inL\ell_1}, \quad (3.26)$$

que leva a seguinte integral a ser resolvida

$$I = 2 \int_{m_L}^{\infty} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( (-1)^n \exp^{-inL\sqrt{\ell_0^2 - m_L^2}} \right) \right] \frac{1}{\sqrt{\ell_0^2 - m_L^2}} d\ell_0,$$

Usando uma expansão semelhante à usada anteriormente, tem-se

$$I = 2 \int_1^{\infty} \frac{x^{-\varepsilon}}{x^2 - 1} dx - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \int_y^{\infty} \frac{x^{-\varepsilon}}{\pi^2 (2n+1)^2 + x^2} + O(m_L^2),$$

que, para  $\varepsilon$  pequeno dá

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\varepsilon} - \ln\left(\frac{y}{2}\right) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\pi^{-\varepsilon}}{(2n+1)^{\varepsilon+1}} \right) + O(\varepsilon), \\ &= \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} - \ln\left(\frac{y}{2}\right) - \ln\left(\frac{2}{\pi}\right) - \gamma, \\ &= -\ln\left(\frac{y}{\pi}\right) - \gamma. \end{aligned}$$

Substituindo este resultado na equação de gap, obtém-se uma expressão para o comprimento de confinamento em termos da massa dinâmica como

$$1 = \frac{gN}{2\pi} \left[ \ln(2\pi M^2) - \ln(m_L^2) + 2 \ln\left(\frac{Lm_L}{\pi}\right) + \gamma \right] ,$$

que, usando o resultado sem nenhuma compactificação, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} 0 &= \ln\left(\frac{L^2 m_0^2}{\pi^2}\right) + 2\gamma , \\ L_c &= \frac{\pi}{m_0} e^{-\gamma} \approx \frac{1,76}{m_0} . \end{aligned}$$

Usando valores da ordem das escalas de energia aonde se espera observar o deconfinamento hadrônico ( $m_0 \sim 200 \text{ MeV}$ ), obtemos um valor crítico para o comprimento de confinamento dado por

$$L_c(m_0 = 200 \text{ MeV}) = 8,81 \cdot 10^{-3} \text{ MeV}^{-1} \approx 1,76 \text{ fm} ,$$

que é absolutamente concordante com o diâmetro de cargas do próton, medido experimentalmente como 1,74 fm. Estes resultados parecem implicar que existe mérito no modelo GN não só como um toy-model ou campo de testes, mas também como uma teoria efetiva para a interação forte. Diante destes resultados, tona-se pertinente a pergunta de como a temperatura crítica se comporta numa teoria envolvendo o confinamento espacial. Para responder esta pergunta é necessária a introdução de compactificação espacial e temporal.

### 3.3.11 Restauração de Simetria: Compactificação Espacial a Temperatura Finita

Neste caso, usamos a prescrição

$$v_F^2(\ell_0, \beta; \ell_1, L) = v_F^2(\ell_0, \beta) + v_F^2(\ell_1, L) + 2v_F^2(\ell_0, \beta)v_F^2(\ell_1, L) ,$$

aonde  $v_F^2(\ell_0, \beta)$  e  $v_F^2(\ell_1, L)$  são relacionados as correções devido à temperatura e compactificação espacial, respectivamente. A integral a ser resolvida para a obtenção de uma equação de gap neste caso é

$$I = \int d^2 \ell \left( \frac{\delta(\ell_0 - \sqrt{\ell_1 + m_{LT}^2})}{2\sqrt{\ell_1 + m_{LT}^2}} + \frac{\delta(\ell_0 + \sqrt{\ell_1 + m_{LT}^2})}{2\sqrt{\ell_1 + m_{LT}^2}} \right) v_F^2(\ell_0, \beta; \ell_1, L) ,$$

que, feita a integração em  $\ell_0$  nos dá dois termos repetidos (proporcionais a  $v_F^2(\ell_0, \beta)$  e  $v_F^2(\ell_1, L)$ ), já calculados, e um termo novo

$$I_{\beta L} = \int_0^\infty d\ell_1 \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 + m_{LT}^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{e^{\beta\sqrt{\ell_1 + m_{LT}^2}} + 1}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{e^{iL\ell_1} + 1}} \right) .$$

Usando a expansão

$$\frac{1}{e^\theta + 1} = \frac{1}{2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta}{\pi^2 (2n+1)^2 + \theta^2} ,$$

faz-se

$$\begin{aligned} I_{\beta L} &= \int_0^\infty d\ell_1 \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 + m_{LT}^2}} \left( \frac{1}{2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta\sqrt{\ell_1 + m_{LT}^2}}{\pi^2 (2n+1)^2 + (\beta\sqrt{\ell_1 + m_{LT}^2})^2} \right) \times \\ &\times \left( \frac{1}{2} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{iL\ell_1}{\pi^2 (2k+1)^2 + (iL\ell_1)^2} \right) . \end{aligned}$$

A partir desta expressão, é visível que o trabalho se reduz ao cálculo das quatro integrais

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 + m_{LT}^2}} d\ell_1, \\
I_2 &= \int_0^\infty \frac{\beta}{\pi^2 (2n+1)^2 + \beta^2 (\ell_1^2 + m_{LT}^2)} d\ell_1, \\
I_3 &= \int_{-\infty}^\infty \frac{iL\ell_1}{[\pi^2 (2n+1)^2 - L^2\ell_1^2] \sqrt{\ell_1^2 + m_{LT}^2}} d\ell_1, \\
I_4 &= \int_{-\infty}^\infty \frac{iL\beta\ell_1}{[\pi^2 (2n+1)^2 - L^2\ell_1^2] [\pi^2 (2n+1)^2 + \beta^2 (\ell_1^2 + m_{LT}^2)]} d\ell_1.
\end{aligned}$$

As duas primeiras integrais já foram calculadas anteriormente, restando apenas  $I_3$  e  $I_4$ , que são nulas. Desta forma, substituindo de volta na equação de gap, obtemos

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{gN}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{2\pi M^2}{m_{LT}^2} \right) + \ln \left( \frac{L\beta}{\pi^2} m_{LT}^2 \right) + \gamma \right], \\
0 &= \ln \left( \frac{\beta L}{\pi^2} m_0^2 \right) + 2\beta, \\
L &= \frac{e^{-2\gamma\pi^2}}{m_0^2} T,
\end{aligned}$$

que resulta numa curva de criticalidade para  $L$  em função da temperatura  $T$ .

Um fato importante fica óbvio desta equação, o limite  $T \rightarrow 0$  não recupera o caso de compactificação espacial sem temperatura, assim como o limite  $L \rightarrow \infty$  não recupera o caso de temperatura finita sem compactificação espacial. Isto ocorre porque o cálculo destas equações levou em conta a expansão de baixas energias dada por (3.24), que presume que  $\beta m_{LT}$  e  $Lm_{LT}$  sejam muito pequenos na vizinhança da criticalidade. Esta aproximação vai perdendo a validade conforme  $\beta$  e  $L$  crescem, de modo que os limites supracitados não estão dentro dos limites de validade dos cálculos.

Outro fenômeno observado é que o comprimento de confinamento crítico é crescente com a temperatura, o que parece bastante razoável levando em conta os resultados obtidos

anteriormente nos outros dois casos. A constante de proporcionalidade entre  $L$  e  $T$  tem um valor aproximado, para uma massa de 200MeV, dado por  $\frac{e^{-2\gamma}\pi^2}{m_0^2}\Big|_{m_0=200 \text{ MeV}} \approx 7,778 \times 10^{-5}\text{MeV}^{-2}$ .

# Capítulo 4

## Métodos de Simetria

Existe na literatura uma coleção vasta de soluções exatas de equações físicas. Curiosamente, a maior parte das soluções exatas encontradas costuma explorar alguma propriedade de simetria, seja da equação ou da solução em si. Este fato levanta a questão de que talvez exista algum método geral para tratar equações diferenciais do ponto de vista de simetria e usar este conhecimento para obter soluções da equação.

Há mais de um século, o matemático norueguês Sophus Lie propôs esta mesma pergunta. Foi então que as primeiras idéias neste sentido vieram à frente, baseando - se no que hoje chamamos de grupos e álgebras de Lie. O que segue neste capítulo é uma breve revisão de como obter e usar simetrias de equações diferenciais. Este capítulo se limita a tratar apenas de grupos de simetria de Lie, com uma generalização para outros tipos de simetria ao final.

Ao longo do capítulo, ficará claro que estes métodos, muito embora poderosos, são bastante onerosos do ponto de vista computacional. Desta forma, o uso de bons sistemas de computação algébrica se torna praticamente obrigatório para se tratar de casos reais. Muitos dos cálculos descritos nesta tese foram feitos com o auxílio do pacote SADE[48], desenvolvido para MAPLE.

## 4.1 Encontrando Simetrias de Lie de EDOs

Seja uma EDO de ordem  $n$  escrita

$$y^{(n)} = \omega(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) , \quad (4.1)$$

$$y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k} , \quad (4.2)$$

aonde  $\omega$  é uma função suave de todos os seus argumentos. Uma simetria de (4.1) é um difeomorfismo que mapeia o conjunto de soluções da EDO sobre si mesmo. Qualquer difeomorfismo

$$\Gamma : (x, y) \mapsto (\hat{x}, \hat{y})$$

Mapeia curvas suaves no plano em curvas suaves no plano.

A ação de  $\Gamma$  no plano induz uma ação sobre as derivadas  $y^{(k)}$

$$\Gamma : (x, y, y', \dots, y^{(n)}) \mapsto (\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \dots, \hat{y}^{(n)}) ,$$

com

$$\hat{y}^{(k)} = \frac{d^k \hat{y}}{d\hat{x}^k} .$$

Este mapa é chamado  $n$  - ésimo prolongamento de  $\Gamma$ . As funções  $y^{(k)}$  são calculadas recursivamente através do uso da regra da cadeia como

$$\begin{aligned} \hat{y}^{(k)} &= \frac{d\hat{y}^{(k-1)}}{d\hat{x}} , \\ &= \frac{D_x \hat{y}^{(k-1)}}{D_x \hat{x}} , \end{aligned}$$



onde  $D_x = \partial_x + y'\partial_y + y''\partial_{y'} + \dots$  é a derivada total em relação a  $x$ .

Seja  $\Gamma$  uma simetria de (4.1). A transformação  $\Gamma$  mapeia, então, soluções da equação em outras soluções. Em termos matemáticos,  $\Gamma$  é uma simetria se a condição de simetria é válida. Ou seja,

$$\hat{y}^{(n)} = \omega(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \dots, \hat{y}^{(n-1)}) \quad (4.3)$$

Sempre que (4.1) for válida. No caso geral de EDOs, (4.3) costuma ser não - linear.

O propósito de se encontrar simetrias de equações é, em última instância, resolver a equação diferencial. Reduzir EDOs a EDPs não lineares não costuma ser uma boa troca. Portanto, como está escrita, a condição de simetria não nos é de muito uso. Simplificações nesta condição, porém, são bastante possíveis no caso de Simetrias de Lie, que são encontradas linearizando esta transformação em torno da identidade. Esta linearização sempre é possível no caso de simetrias de Lie devido à natureza contínua e diferenciável destas, permitindo que se construa uma expansão em série de Taylor. Por simplicidade, trata-se aqui de transformações dependentes de apenas um parâmetro,  $\varepsilon$ , sendo a transformação identidade correspondente ao caso  $\varepsilon = 0$ . A extensão para mais parâmetros é direta.

Expande - se então a transformação ao redor da identidade como

$$\hat{x} = x + \varepsilon\xi + O(\varepsilon^2) , \quad (4.4)$$

$$\hat{y} = y + \varepsilon\eta + O(\varepsilon^2) , \quad (4.5)$$

$$\hat{y}^{(k)} = y^{(k)} + \varepsilon\eta^{(k)} + O(\varepsilon^2) . \quad (4.6)$$

O sobrescrito em  $\eta^{(k)}$  é apenas um índice e não indica diferenciação. Ao substituir (4.4

- 4.6) em (4.3) obtém - se a condição de simetria linearizada, escrita como

$$\eta^{(n)} = \xi\omega_x + \eta\omega_y + \eta^{(1)}\omega_{y'} + \cdots + \eta^{(n-1)}\omega_{y^{(n-1)}} , \quad (4.7)$$

sempre que (4.1) valer. Como o próprio nome indica, esta condição é linear. As funções  $\eta^{(k)}$  são calculadas a partir de

$$\hat{y}^{(k)} = \frac{y^{(k)} + \varepsilon D_x \eta^{(k-1)}}{1 + \varepsilon D_x \xi} .$$

Daí vem que

$$\begin{aligned} y^{(k)} + \varepsilon \eta^{(k)} &= \frac{y^{(k)} + \varepsilon D_x \eta^{(k-1)}}{1 + \varepsilon D_x \xi} , \\ \eta^{(k)} &= D_x \eta^{(k-1)} - y^{(k)} D_x \xi . \end{aligned} \quad (4.8)$$

Pode - se também definir a característica  $Q = \eta - y'\xi$  e reescrever as funções

$$\begin{aligned} \xi &= -Q_{y'} , \\ \eta &= Q - y'Q_{y'} , \\ \eta^{(k)} &= D_x^k Q - y^{(k+1)} Q_{y'} . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Este resultado é útil de um ponto de vista computacional e generaliza facilmente para outros tipos de transformação que não transformações de Lie, mas ainda pode ser simplificado mais como será visto a seguir.

## 4.2 Órbitas e Geradores Infinitesimais

É interessante entender um pouco melhor a ação de uma transformação de simetria no espaço de soluções de uma EDO. Para tanto, define - se inicialmente a órbita de uma

transformação.

**Definição:** A órbita de um grupo de Lie de simetrias a um parâmetro através de um ponto  $(x, y)$  é o conjunto de pontos dado por

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}(x, y; \varepsilon), \hat{y}(x, y; \varepsilon)) ,$$

ou seja, o conjunto de todos os pontos onde  $(x, y)$  pode ser levado por uma transformação do grupo. Note que  $\varepsilon = 0$  corresponde a transformação identidade, que mapeia o ponto em si mesmo. A órbita de um ponto invariante é o mesmo ponto. A órbita de um ponto não - invariante é uma curva. É importante notar que órbitas de uma simetria por dois pontos diferentes jamais podem se cruzar. Isto é porque, no ponto onde ocorre um cruzamento, um mesmo ponto seria levado pela mesma simetria em dois valores diferentes. Defina - se ainda:

**Definição:** O vetor tangente no ponto  $(\hat{x}, \hat{y})$  à órbita através de um ponto não invariante  $(x, y)$  é dado por  $(\xi(\hat{x}, \hat{y}), \eta(\hat{x}, \hat{y}))$  onde

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} &= \xi(\hat{x}, \hat{y}) , \\ \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} &= \eta(\hat{x}, \hat{y}) . \end{aligned}$$

Podemos escrever as expansões para a simetria dadas em (4.4) e (4.5) em termos de um operador diferencial  $G$  como

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + \varepsilon G \cdot x + (\varepsilon G)^2 \cdot x + \dots , \\ \hat{y} &= y + \varepsilon G \cdot y + (\varepsilon G)^2 \cdot y + \dots , \end{aligned}$$

aonde  $G$  é conhecido como o gerador infinitesimal da transformação. Qualquer transfor-

mação de simetria de Lie pode ser escrita em termos deste operador como

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \exp(\varepsilon G) \cdot x, \\ \hat{y} &= \exp(\varepsilon G) \cdot y.\end{aligned}$$

A partir de (4.4 - 4.6) pode - se escrever

$$G = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y.$$

O gerador  $G$  trata apenas de transformações em  $x$  e  $y$ . Ao tratar de equações diferenciais, é importante definir como as transformações agem nas derivadas relevantes. Para tratar deste problema, introduz - se o gerador infinitesimal prolongado

$$G^{(n)} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta^{(1)}\partial_{y'} + \dots + \eta^{(n)}\partial_{y^{(n)}}.$$

Então escreve - se a condição de simetria linearizada como uma equação envolvendo  $G^{(n)}$

$$G^{(n)}(y^{(n)} - \omega(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})) = 0,$$

quando (4.1) é válida. Esta forma é especialmente interessante pois escreve a condição de simetria de uma forma independente de coordenadas.

### 4.3 As Equações Determinantes

Para encontrar as simetrias de Lie de (4.1), é necessário primeiro obter os  $\eta^{(k)}$ . Se a condição de simetria puder ser resolvida, todas as simetrias de Lie de uma equação diferencial podem ser identificadas. Das equações (4.9), e como  $\xi$  e  $\eta$  só dependem de  $x$

e  $y$ , os  $\eta^{(k)}$  podem facilmente ser obtidos com algum cálculo. A seguir tem - se alguns deles:

$$\begin{aligned}\eta^{(1)} &= \eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y y'^2, \\ \eta^{(2)} &= \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) y' - \xi_{yy} y'^3 + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) y'^2 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y') y'', \\ \eta^{(3)} &= \eta_{xx} + (3\eta_{xxy} - \xi_{xxx}) y' + (\eta_{yyy} - 3\xi_{xyy}) y'^3 - \xi_{yyy} y'^4 \\ &\quad + 3\{\eta_{xy} - \xi_{xx} + (\eta_{yy} - 3\xi_{xy}) y' - 2\xi_{yy} y'^2\} y'' \\ &\quad - 3\xi_y y''^2 + \{\eta_y - 3\xi_x - 4\xi_y y'\} y'''.\end{aligned}$$

O número de termos em  $\eta^{(k)}$  cresce rapidamente com  $k$ , portanto álgebra computacional é praticamente obrigatória nos casos de ordens mais altas. Substitui - se então a expressão  $y^{(n)} = \omega(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  nas equações para  $\eta^{(k)}$  e, igualando a condição de simetria linearizada, a equação resultante pode ser separada (usualmente igualando coeficientes de potências de  $y'$ ) num sistema de EDPs. Este é o sistema de equações determinantes de (4.1) e tem como soluções as simetrias de Lie de (4.1).

## Exemplo

Uma EDO de segunda ordem é escrita como

$$y'' = \omega(x, y, y'). \quad (4.10)$$

As componentes  $\eta^{(k)}$  dos geradores prolongados desta equação são dados portanto

$$\begin{aligned}\eta^{(1)} &= \eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y y'^2 , \\ \eta^{(2)} &= \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) y' - \xi_{yy} y'^3 + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) y'^2 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y') y'' , \\ &= \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) y' - \xi_{yy} y'^3 + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) y'^2 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y') \omega(x, y, y') .\end{aligned}$$

A condição de simetria linearizada, por outro lado, diz

$$\eta^{(2)} = \xi \omega_x + \eta \omega_y + \eta^{(1)} \omega_{y'} .$$

Igualando as duas equações, temos

$$\begin{aligned}\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) y'^2 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y') \omega(x, y, y') \\ - \xi_{yy} y'^3 - \xi \omega_x - \eta \omega_y - \{\eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y y'^2\} \omega_{y'} = 0\end{aligned}\quad (4.11)$$

A separação de (4.11) em um sistema de EDPs só é possível se explicitado  $\omega$ . A título de exemplo, seja

$$\begin{aligned}\omega(x, y, y') &= -y , \\ \omega_x &= 0 , \\ \omega_y &= -1 , \\ \omega_{y'} &= 0\end{aligned}\quad (4.12)$$

A equação (4.11) se torna então

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) y'^2 - \xi_{yy} y'^3 - y(\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y') + \eta = 0 .$$

Igualando os coeficientes de potências iguais de  $y'$ , obtém - se

$$\eta_{xx} - y(\eta_y - 2\xi_x) + \eta = 0 , \quad (4.13)$$

$$2\eta_{xy} - \xi_{xx} - 3\xi_y y = 0 , \quad (4.14)$$

$$\eta_{yy} - 2\xi_{xy} = 0 , \quad (4.15)$$

$$\xi_{yy} = 0 , \quad (4.16)$$

que é o sistema determinante da equação em questão. De (4.16), tem - se

$$\xi_y = A_{\xi 1}(x) ,$$

$$\xi = A_{\xi 1}(x)y + A_{\xi 2}(x) .$$

De (4.15)

$$\partial_y(\eta_y - 2\xi_x) = 0 ,$$

$$\eta_y - 2\xi_x = C(x) ,$$

$$\eta_y = C(x) + 2A'_{\xi 2}(x) + 2A'_{\xi 1}(x)y ,$$

$$\eta_y = B(x) + 2A'_{\xi 1}(x)y ,$$

$$\eta = B(x)y + A'_{\xi 1}(x)y^2 + A_{\eta 1}(x) .$$

De (4.14)

$$2(B'(x) + 2A''_{\xi 1}(x)y) - (A''_{\xi 1}(x)y + A''_{\xi 2}(x)) - 3A_{\xi 1}(x)y = 0 ,$$

$$A''_{\xi 1}y + 2B'(x) - A''_{\xi 2}(x) - 3A_{\xi 1}(x)y = 0 .$$

E de (4.13)

$$B''(x)y + \frac{A_{\xi_1}'''(x)}{2}y^2 + A_{\eta_1}''(x) - y [B(x) + A_{\xi_2}'(x) - 2(A_{\xi_1}'(x)y + A_{\xi_2}'(x))] \\ + B(x)y + \frac{A_{\xi_1}'(x)}{2}y^2 + A_{\eta_1}(x) = 0 .$$

Comparando, então, potências de  $y$ , vem

$$A_{\xi_1}''(x) = 3A_{\xi_1}(x) , \\ A_{\xi_1}(x) = c_1 e^{\sqrt{3}x} + c_2 e^{-\sqrt{3}x} . \\ 2B'(x) = A_{\xi_2}''(x) . \\ A_{\eta_1}''(x) = -A_{\eta_1}(x) , \\ A_{\eta_1}(x) = c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x) . \\ B''(x) + 2B(x) = c_5 , \\ B(x) = \frac{c_5}{2} + c_6 \cos(\sqrt{2}x) + c_7 \sin(\sqrt{2}x) .$$

Que vem da comparação dos termos com potências de  $y$  0 ou 1 das duas equações. Agora o termo quadrático leva a

$$A_{\xi_1}'''(x) = -5A_{\xi_1}'(x) , \\ A_{\xi_1}(x) = 0 .$$

E resolvendo para  $A_{\xi_2}(x)$

$$A_{\xi_2}(x) = c_6 \sin(\sqrt{2}x) - c_7 \cos(\sqrt{2}x) + c_8 .$$



Finalmente, escreve - se

$$\begin{aligned}\xi &= c_6 \sin(\sqrt{2}x) - c_7 \cos(\sqrt{2}x) + c_8 , \\ \eta &= \frac{c_5}{2}y + c_6 \cos(\sqrt{2}x)y + c_7 \sin(\sqrt{2}x)y + c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x) .\end{aligned}$$

Portanto, temos os seis geradores de simetria de  $y'' = -y$

$$\begin{aligned}G_1 &= \cos(x)\partial_y , \\ G_2 &= \sin(x)\partial_y , \\ G_3 &= y\partial_y , \\ G_4 &= \sin(\sqrt{2}x)\partial_x + \cos(\sqrt{2}x)y\partial_y , \\ G_5 &= \sin(\sqrt{2}x)y\partial_y - \cos(\sqrt{2}x)\partial_x , \\ G_6 &= \partial_x .\end{aligned}$$

Note que para encontrar simetrias de Lie, mesmo de uma equação simples como esta, é necessário executar uma quantidade grande de cálculos. Fica claro com este exemplo que equações mais complicadas trazem complicações no volume de trabalho a ser executado, porém o método, mesmo que pesado, tem sua funcionalidade assegurada pela garantia que cálculos intermediários são sempre lineares.

## 4.4 Simetrias de EDPs

A técnica para a obtenção de grupos de simetrias de Lie de EDPs é essencialmente a mesma que o caso ordinário, exigindo apenas algumas generalizações. Seja

$$\begin{aligned}\Delta_\beta \equiv u_{\sigma\beta} - \omega_\beta(x, u^{(n)}) &= 0 , \\ \beta &= 1, \dots, M ,\end{aligned}\tag{4.17}$$

um conjunto de EDPs aonde  $u = (u_1, \dots, u^M)$  são as variáveis dependentes e  $x = (x^1, \dots, x^N)$  as variáveis independentes.  $u^{(n)}$  representa o conjunto de todas as derivadas de ordem  $n$  ou menor presentes na equação.  $u_{\sigma\beta}$  é a derivada de maior ordem em cada equação e não existe nenhum outro termo no sistema que contenha  $u_{\sigma\beta}$ . Esta não é a forma mais geral para um sistema de EDPs, mas é de generalidade suficiente para tratar uma grande classe de problemas físicos, enquanto simplifica enormemente os cálculos necessários para a obtenção de simetrias. Isto se deve ao fato da substituição  $u_{\sigma\beta} = \omega_{\beta}(x, u^{(n)})$  poder ser feita ao separar o sistema determinante.

A forma do gerador infinitesimal prolongado de uma equação do tipo (4.17) é

$$G = \xi^i(x, u)\partial_{x^i} + \eta_{\alpha}(x, u)\partial_{u^{\alpha}} + \eta_{\alpha}^J\partial_{u_{\alpha}^J},$$

onde  $u_{\alpha}^J = D_J u^{\alpha}$  é uma abreviação de todas as derivadas possíveis de  $u$ , com

$$D_J = D_{x^1}^{j_1} D_{x^2}^{j_2} \dots D_{x^M}^{j_M}.$$

e também

$$\eta_{\alpha}^J = D_J(\eta_{\alpha} - \xi^i u_{x^i}^{\alpha}) + \xi^i D_J u_{x^i}^{\alpha}.$$

A condição de simetria para EDPs é dada por

$$G\Delta_{\beta} = 0,$$

Sempre que (4.17) for válida. A obtenção do sistema de equações determinantes segue o mesmo processo que EDOs. Estes métodos ficam mais bem ilustrados em um exemplo prático.

## Exemplo

Considere a equação  $u_t = u_x^2$ . O gerador infinitesimal é então escrito como

$$G = \xi \partial_x + \tau \partial_t + \eta \partial_u .$$

A condição de simetria linearizada é

$$\eta^t = 2u_x \eta^x .$$

Das definições de  $\eta^x$  e  $\eta^t$  vem

$$\eta^x = \eta_x + (\eta_u - \xi_x) u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t ,$$

$$\eta^t = \eta_t - \xi_t u_x + (\eta_u - \tau_t) u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2 ,$$

Substituindo e eliminando  $u_t$  com o auxílio da equação original, obtem - se

$$\tau_u = 0 , \tag{4.18}$$

$$\xi_u + 2\tau_x = 0 , \tag{4.19}$$

$$\eta_u + \tau_t - 2\xi_x = 0 , \tag{4.20}$$

$$\xi_t + 2\eta_x = 0 , \tag{4.21}$$

$$\eta_t = 0 . \tag{4.22}$$

Resolvendo (4.18),

$$\tau = A(x, t) .$$

Da equação (4.19) vem

$$\xi = -2A_x u + B(x, t) , \quad (4.23)$$

e com (4.20) vem

$$\eta = -2A_{xx} u^2 + (2B_x - A_t) u + C(x, t) .$$

Substituindo em (4.21) e (4.22)

$$-4A_{xxx} u^2 + 4(B_{xx} - A_{xt}) u + C_x(x, t) + B_t = 0 ,$$

$$-2A_{xxt} u^2 + 2(B_{xt} - A_{tt}) u + C_t(x, t) = 0 .$$

Comparando potências de  $u$ , tem - se

$$C_t = 0 , \quad (4.24)$$

$$B_t + 2C_x = 0 , \quad (4.25)$$

$$2B_{xt} - A_{tt} = 0 , \quad (4.26)$$

$$B_{xx} - A_{xt} = 0 , \quad (4.27)$$

$$A_{xxt} = 0 , \quad (4.28)$$

$$A_{xxx} = 0 . \quad (4.29)$$

Resolvendo (4.24 - 4.26) obtém - se

$$C = \alpha x ,$$

$$B = -2\alpha'(x)t + \beta(x) ,$$

$$A = -2\alpha''(x)t^2 + \gamma(x)t + \delta(x) .$$

Substituir estes resultados em (4.27 - 4.29) permite escrever o resultado final

$$\begin{aligned}
 \xi &= -4c_1tx - 2c_2t + c_4 \left( \frac{1}{2}x^2 - 2tu \right) + c_6x + c_7 - 4c_8xu - 2c_9u , \\
 \tau &= -4c_1t^2 + c_4xt + c_5t + c_8x^2 + c_9x + c_{10} , \\
 \eta &= c_1x^2 + c_2x + c_3 + c_4xu - c_5u + 2c_6u - 4c_9u^2 ,
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

que tem 10 constantes arbitrárias, dando origem a 10 geradores distintos.

As simetrias de Lie para EDPs e EDOs, como observado, são obtidas essencialmente pelos mesmos métodos. Porém, obter simetrias de equações, por si só, não tem muito uso. Queremos explorar o conhecimento de simetrias de uma equação de modo a chegar o mais próximo possível de uma solução. O que segue é uma das várias maneiras de se usar um grupo de simetrias de Lie com este intuito.

## 4.5 Coordenadas Canônicas

Suponha que a seguinte EDO,

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x, y) ,$$

tem como simetria as translações em  $y$

$$(x, y) \mapsto (x, y + \varepsilon) .$$

A condição de simetria nos leva a

$$\omega_y = 0 .$$

E com isso, a equação de primeira ordem mais geral com simetria de translações em  $y$  é

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x) ,$$

que tem como solução

$$y = \int \omega(x) dx .$$

Note que invariância por translações resolveu a EDO de primeira ordem geral. Portanto pode ser interessante escrever uma equação diferencial em um sistema de coordenadas tal que alguma de suas simetrias possa ser escrita como uma translação.

As órbitas de simetrias de translação tem o mesmo vetor tangente em todos os pontos

$$(\xi, \eta) = (0, 1) . \tag{4.31}$$

Dado um grupo de Lie de simetrias a um parâmetro, pode-se escolher no espaço  $(x, u)$  uma base na qual os vetores tangentes a órbita do grupo podem ser escritos como vetores tangentes a órbitas de translação. Para tanto, introduzem-se as coordenadas

$$(r, s) = (r(x, y), s(x, y))$$

de modo que

$$(\hat{r}, \hat{s}) \longmapsto (r, s + \varepsilon) .$$

Da definição do vetor tangente a órbita vem

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{r}}{d\varepsilon} &= 0 , \\ \frac{d\hat{s}}{d\varepsilon} &= 1 .\end{aligned}$$

Aplicando a regra da cadeia,

$$\begin{aligned}\xi(x, y)r_x + \eta(x, y)r_y &= 0 , \\ \xi(x, y)s_x + \eta(x, y)s_y &= 1 .\end{aligned}$$

É necessário também que a transformação de coordenadas seja inversível em todos os pontos, evidenciado pela exigência que a matriz de transformação no espaço dos vetores não seja singular. Isto se traduz no presente caso como

$$r_x s_y - r_y s_x \neq 0 .$$

Se tal mudança de coordenadas for possível, as coordenadas  $r$  e  $s$  são chamadas coordenadas canônicas. O gerador de simetria nestas coordenadas é escrito como

$$G = \partial_s . \tag{4.32}$$

Geradores deste tipo podem ser usados para reduzir a ordem de uma EDO em 1 ou para eliminar uma variável independente de uma EDP.

## Redução de Ordem em EDOs

Considere a EDO

$$s^{(n)} = \omega(r, s, \dots, s^{(n-1)}) ,$$

escrita em coordenadas canônicas e portanto invariante por  $G = \partial_s$ . Isto nos leva, de acordo com a condição de simetria, a

$$\omega_s = 0 .$$

Isto quer dizer que a equação pode ser escrita como

$$\begin{aligned} s^{(n)} &= \omega(r, s', \dots, s^{n-1}) , \\ v^{(n-1)} &= \omega(r, v, \dots, v^{n-2}) , \\ v &= \frac{ds}{dr} . \end{aligned} \tag{4.33}$$

A mudança de variável para  $v$  efetivamente reduziu em 1 a ordem da EDO. Isto quer dizer que  $n$  simetrias podem resolver uma EDO de ordem  $n$  por completo, desde que se conheça uma simetria de cada equação intermediária. Esta condição, como será visto, pode ser relaxada em conjuntos de geradores que sigam certas condições.

## Redução de Variáveis em EDPs

Considere a EDP

$$F(x^1, \dots, x^M; u, u_{x_1}, \dots) = 0$$

invariante sob o gerador  $G = \partial_{x^1}$ . Esta invariância leva a condição

$$F_{x_1} = 0 ,$$

e portanto a variável  $x_1$  pode ser eliminada da equação, efetivamente eliminando um grau de liberdade do sistema. Com o conhecimento suficiente de geradores de simetria de uma



EDP, esta pode ser reduzida a uma EDO, que costuma ser bem mais simples de se resolver. É claro, em EDPs encontrar coordenadas canônicas é um problema bem maior que em EDOs, devido ao aumento de coordenadas a serem tratadas.

Note que as relações de comutação entre geradores são independentes do sistema de coordenadas usado. Isto quer dizer que se  $n$  geradores de simetria comutam, estes  $n$  geradores podem ser simultaneamente transformados em geradores de translação, reduzindo em  $n$  o número de graus de liberdade do sistema. Isto decorre de  $[\partial_{x^i}, \partial_{x^j}] = 0$  ser a relação de comutação típica de grupos de translação, permitindo que alguma base exista em que o tratamento anterior seja possível. Este fato será relevante nos capítulos subsequentes.

## 4.6 Invariantes Diferenciais

A redução de ordem em EDOs é possível se conhecermos um gerador de simetrias desta equação. Desta forma, uma equação de ordem  $n$  pode ser resolvida em  $n$  passos, desde que se conheça um gerador de simetrias de uma equação ordem a ordem. Infelizmente, não se tem garantias de que equações intermediárias obtidas a partir deste método terão simetrias, de modo que é inteiramente possível que se faça a redução de uma EDO para outra mais complicada. Esta ausência de certeza em passos intermediários torna este método menos interessante, uma vez que o processo de redução de EDOs em geral envolve bastante trabalho, que pode ser em vão. Evidentemente, uma maneira de garantir que, de posse de  $R$  geradores de uma EDO, a ordem pudesse ser reduzida por  $R$  unidades sem necessidade de buscar simetrias em equações intermediárias seria bastante atraente. Assim se evitaria muita frustração e desperdício computacional, trazendo mais robustez ao método. É com este objetivo em mente que se discute aqui o conceito de invariante diferencial.

Suponha que  $X$  seja um gerador de simetrias da EDO

$$y^{(n)} = \omega(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad n \geq 2,$$

que pode ser escrita em coordenadas canônicas,  $(r, s)$ , como

$$v^{(n-1)} = \Omega(r, v, \dots, v^{(n-2)}),$$

aonde  $v = v(r, s)$  é alguma função que obedece  $v_s \neq 0$ . Esta EDO reduzida é composta totalmente por funções invariantes sob a ação do gerador  $X = \partial_s$ . Chamam-se tais funções de invariantes diferenciais do grupo gerado por  $X$ . Em termos mais precisos, temos que qualquer função não constante  $I = I(x, y, y', \dots, y^{(k)})$  é um invariante diferencial de ordem  $k$  para  $X$  se

$$X^{(k)}I = 0. \tag{4.34}$$

Em coordenadas canônicas,  $X = \partial_s$ . Isso implica que qualquer invariante diferencial de ordem  $k$  tem a forma geral

$$\begin{aligned} I &= F(r, \dot{s}, \dots, s^{(k)}) \\ I &= F(r, v, \dots, v^{(k-1)}), \end{aligned}$$

para alguma função  $F$ . Esta propriedade garante que, a menos de dependência funcional, a coordenada canônica  $r(x, y)$  é o único invariante diferencial de ordem zero para  $X$ . Pode-se mostrar que todos os geradores de ordem 1 são funções de  $r$  e  $v$  e ordens mais altas envolvem funções destes e de derivadas de  $v$  em relação a  $r$ , de modo que  $r$  e  $v$  são usualmente chamados de *invariantes fundamentais* de  $X$ . De acordo com (4.34), todo invariante obedece

$$\xi I_x + \eta I_y + \dots + \eta^{(k)} I_{y^{(k)}} = 0. \tag{4.35}$$

Esta relação permite que se encontre um par de invariantes fundamentais sem a necessidade da determinação da coordenada canônica  $s$ . Pelo método das características em (4.35),  $I$  tem de ser uma primeira integral de

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \dots = \frac{dy^{(k)}}{\eta^{(k)}} ,$$

em particular,  $r$  é uma primeira integral de

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} ,$$

enquanto  $v$  é uma primeira integral de

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dy^{(1)}}{\eta^{(1)}} .$$

Usualmente  $r$  é utilizado para determinar  $v$ . Como exemplo deste método, considere o caso do grupo de rotações, gerado por

$$X = -y\partial_x + x\partial_y .$$

Os invariantes satisfazem

$$X r = 0 \text{ e } X^{(1)} v = 0 ,$$

portanto deve-se encontrar primeiras integrais de

$$\begin{aligned} \frac{dx}{-y} &= \frac{dy}{x} , \\ \frac{dx}{-y} &= \frac{dy}{x} = \frac{dy'}{1+y'^2} . \end{aligned}$$

Em nome da simplicidade, vamos nos ater à região aonde  $x$  é positivo. A primeira equação

tem como uma possível solução  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ . Já para a segunda equação temos, substituindo  $x$ ,

$$\frac{dy}{x} = \frac{dy}{(r^2 - y^2)^{1/2}},$$

que nos leva a primeira integral

$$I = F\left(r, \tan^{-1} y' - \sin^{-1} \frac{y}{r}\right) = F\left(r, \tan^{-1} y' - \tan^{-1} \frac{y}{x}\right),$$

aonde foi usada a relação entre seno e tangente de um ângulo em um triângulo retângulo de catetos  $x$  e  $y$ . Uma escolha conveniente para  $v$  é

$$v = \tan\left(\tan^{-1} y' - \tan^{-1} \frac{y}{x}\right) = \frac{xy' - y}{x + yy'},$$

aonde foi usada a identidade trigonométrica

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

Note que para obter  $v$  foi necessário inverter a relação  $r = r(x, y)$  para obter  $x = x(r, y)$ .

Uma EDO com mais de um gerador de simetria pode ser escrita em termos dos invariantes diferenciais de seus geradores, e portanto pode ser escrita em termos de funções invariantes por várias das suas simetrias. Para encontrar invariantes diferenciais para múltiplos geradores basta notar que um invariante diferencial  $I$  deve respeitar a condição (4.35) para todos os geradores em questão. Em outras palavras, sejam  $\{X_1, X_2, \dots, X_R\}$   $R$  geradores de simetria de uma equação. Invariantes diferenciais de ordem  $k$  destes ge-

radores são qualquer função  $I$  que obedece ao sistema na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta_1^{(1)} & \cdots & \eta_1^{(k)} \\ \xi_2 & \eta_2 & \eta_2^{(1)} & \cdots & \eta_2^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_R & \eta_R & \eta_R^{(1)} & \cdots & \eta_R^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \\ I_{y'} \\ \vdots \\ I_{y^{(k)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Neste caso, os invariantes fundamentais são os invariantes aonde  $k = R$ . Para este caso, o sistema acima é composto de  $R$  equações em  $R + 2$  variáveis, e deve ter duas soluções funcionalmente independentes. Uma delas independe da derivada mais alta e é identificada como  $r_R$ , a outra é identificada como  $v_R$ . Como  $\frac{d v_R}{d r_R}$  depende de  $y^{(R+1)}$  e assim por diante, uma EDO invariante pelos geradores  $\{X_1, X_2, \dots, X_R\}$  pode, pelo menos em princípio, ser escrita como

$$\frac{d^{n-R} v_R}{d r_R^{n-R}} = \Omega \left( r_R, v_R, \dots, v_R^{(n-R-1)} \right),$$

para algum  $\Omega$ , tendo sua ordem reduzida em  $R$  unidades. Um exemplo simples é o caso da EDO

$$y^{(4)} = \frac{2}{y} (1 - y') y''' .$$

Esta equação tem três geradores de simetria independentes,

$$X_1 = \partial_x ,$$

$$X_2 = x\partial_x + y\partial_y ,$$

$$X_3 = x^2\partial_x + 2xy\partial_y$$

Que são prolongados até a quarta ordem como

$$\begin{aligned} X_1^{(4)} &= \partial_x , \\ X_2^{(4)} &= x\partial_x + y\partial_y - y''\partial_{y''} - 2y''' \partial_{y'''} , \\ X_3^{(4)} &= x^2\partial_x + 2xy\partial_y + 2y\partial_{y'} + 2(y' - xy'')\partial_{y''} - 4xy''' \partial_{y'''} \end{aligned}$$

Os invariantes diferenciais são obtidos a partir do sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & 0 & -y'' & -2y''' \\ x^2 & 2xy & 2y & 2(y' - xy'') & -4xy''' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \\ I_{y'} \\ I_{y''} \\ I_{y'''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

que é equivalente, através do processo de eliminação gaussiana, a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & -y'' & -2y''' \\ 0 & 0 & y & y' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \\ I_{y'} \\ I_{y''} \\ I_{y'''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

A terceira equação,

$$yI_{y'} - y'I_{y''} = 0 ,$$

implica em  $I(x, y, y', y'', y''') = I(x, y, 2yy'' - y'^2, y''')$ . Substituindo na segunda, tem-se que  $I = I(x, 2yy'' - y'^2, y^2y''')$  que, usando a primeira equação, dá finalmente  $I =$

$I(2yy'' - y'^2, y^2y''')$ . Uma forma simples para os invariantes é, portanto

$$r_3 = 2yy'' - y'^2,$$

$$v_3 = y^2y'''.$$

Calculando a derivada de  $v_3$  como

$$\frac{d v_3}{d r_3} = \frac{yy^{(4)}}{2y'''} + y'$$

e substituindo a equação original no lugar de  $y^{(4)}$ , obtemos

$$\frac{d v_3}{d r_3} = 1.$$

Esta equação tem solução

$$v_3 = r_3 + C_1,$$

que é equivalente a equação de terceira ordem, invariante sob a ação do grupo a três parâmetros, dada por

$$y''' = \frac{2yy'' - y'^2 + C_1}{y^2}.$$

A redução de ordem, portanto foi de três unidades em um só passo.

## 4.7 A Álgebra dos Geradores Infinitesimais

A metodologia construída na seção anterior provê resposta para a questão da possibilidade de redução de uma equação por mais de uma ordem em um único passo, mas ainda não resolve completamente o problema da resolução completa de uma EDO a partir de geradores de simetria desta. Afim de finalmente elucidar esta questão, torna-se necessário estudar um pouco mais a fundo a estrutura algébrica formada a partir dos geradores de

simetria de uma equação infinitesimal. Nesta seção o interesse estará em definir e mostrar alguns pontos chave necessários para a construção de uma “escada” de reduções ordem a ordem numa equação, de modo que, satisfeitas certas condições, se possa garantir que  $n$  geradores de simetria sejam suficientes para resolver uma EDO de ordem  $n$ .

O comutador entre dois operadores,  $[X_1, X_2]$ , é definido como

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1 .$$

Sejam  $X_1$  e  $X_2$  geradores de simetria de uma EDO, de tal forma que possam ser escritos como

$$X_i = \xi_i \partial_x + \eta_i \partial_y , \quad i = 1, 2 .$$

O comutador destes geradores é um operador diferencial de primeira ordem, dado por

$$[X_1, X_2] = X_1(\xi_2) \partial_x + X_1(\eta_2) \partial_y - X_2(\xi_1) \partial_x + X_2(\eta_1) \partial_y ,$$

já que os termos de segunda ordem se cancelam devido à comutatividade das derivadas. Por serem geradores de simetria,  $X_1$  e  $X_2$  obedecem a uma condição de simetria, ou seja, supondo uma EDO dada por

$$y^{(n)} = \omega(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) , \tag{4.36}$$

vale a condição

$$X_i^{(n)} (y^{(n)} - \omega) = \eta_i^{(n)} - X_i^{(n)} \omega = 0 \quad \text{sempre que } y^{(n)} = \omega(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) .$$

Note que  $\eta_i^{(n)}$  é, para  $n \geq 2$ , no máximo linear em  $y^{(n)}$ . Por sua vez,  $\omega$  (e portanto  $X_i^{(n)} \omega$ )



é independente de  $y^{(n)}$ . Isto implica que a equação acima tem a forma

$$\lambda_i y^{(n)} + F(x, y, \dots, y^{(n-1)}) - X_i^{(n)} \omega = 0 ,$$

na qual podemos substituir (4.36) para obter

$$\lambda_i \omega + F(x, y, \dots, y^{(n-1)}) - X_i^{(n)} \omega = 0 .$$

Esta equação só é satisfeita se  $(y^{(n)} - \omega)$  for um autovetor de  $X_i$ , ou seja

$$X_i (y^{(n)} - \omega) = \lambda_i (y^{(n)} - \omega) .$$

Esta formulação alternativa da condição de simetria deixa bem claro que se  $X_1$  e  $X_2$  são geradores de simetria, então  $X = [X_1, X_2]$  também é um gerador de simetria. Para tal, considere  $\Delta = y^{(n)} - \omega$ . Tem-se que

$$\begin{aligned} X^{(n)} \Delta &= [X_1^{(n)}, X_2^{(n)}] \Delta \\ &= (X_1^{(n)} \lambda_2 - X_2^{(n)} \lambda_1) \Delta \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Isso mostra que os geradores de simetria de uma EDO formam não só um espaço vetorial, mas também tem estrutura de álgebra com o comutador como o produto algébrico. Uma álgebra cujo produto seja antissimétrico e respeite a identidade de Jacobi, como é o caso com o comutador, é conhecida como uma **álgebra de Lie**.

Como em espaços vetoriais, as álgebras podem ser construídas a partir de subálgebras. As constantes de estrutura de uma álgebra estão fortemente ligadas a este conceito. Uma subálgebra  $\mathcal{M}$  de uma álgebra  $\mathcal{L}$  é um espaço  $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$  que seja fechado sob comutação,

ou seja

$$X_1, X_2 \in \mathcal{M} \implies [X_1, X_2] \in \mathcal{M} .$$

Toda subálgebra de um álgebra de Lie também é uma álgebra por si só.

Uma subálgebra é dita um **ideal** se a operação de comutação de um elemento desta com qualquer outro elemento da álgebra der como resultado um elemento da subálgebra.

Em poucas palavras,

$$X_1 \in \mathcal{M} , X_2 \in \mathcal{L} \implies [X_1, X_2] \in \mathcal{M} .$$

Toda álgebra possui pelo menos dois ideais: Os conjuntos  $\{0\}$  e a própria  $\mathcal{L}$ . Qualquer ideal diferente destes dois é chamado de ideal próprio de  $\mathcal{L}$ .

Um ideal que sempre pode ser construído para qualquer álgebra é a chamada subálgebra derivada  $\mathcal{L}^{(1)}$ . Esta subálgebra é formada pelo conjunto de todos os comutadores entre elementos de  $\mathcal{L}$ . Se  $\mathcal{L}^{(1)} \neq \mathcal{L}$ , e nem todos os elementos comutarem entre si, temos um ideal próprio de  $\mathcal{L}$ .

Uma álgebra  $\mathcal{L}$  de dimensão  $R$  é dita solúvel se existe alguma sequência de subálgebras

$$\{0\} = \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \dots \subset \mathcal{L}_{R-1} \subset \mathcal{L}_R = \mathcal{L}$$

tal que  $\text{Dim}(\mathcal{L}_k) = k$  e que  $\mathcal{L}_{k-1}$  seja um ideal de  $\mathcal{L}_k$  para todos os valores de  $k$  entre  $0$  e  $R$ . Um resultado interessante sobre este assunto é o fato que qualquer subálgebra de dimensão  $2$  ou menor é solúvel [35], o que quer dizer que é suficiente construir esta sequência apenas até um ideal de dimensão  $2$ . Para ilustrar melhor este conceito, considere

o caso da álgebra gerada pelos cinco geradores

$$\begin{aligned}X_1 &= \partial_y , \\X_2 &= x\partial_y , \\X_3 &= x^2\partial_y , \\X_4 &= \partial_x , \\X_5 &= x\partial_x .\end{aligned}$$

Os comutadores entre estes geradores são

$$\begin{aligned}[X_2 , X_4] &= -X_1 , \\[X_2 , X_5] &= -X_2 , \\[X_3 , X_4] &= -2X_2 , \\[X_3 , X_5] &= -2X_3 , \\[X_4 , X_5] &= X_4 ,\end{aligned}$$

com as demais combinações sendo nulas. É possível mostrar que esta subálgebra é solúvel através da sequência

$$\begin{aligned}\{0\} &\subset \text{Span}(X_1) \subset \text{Span}(X_1, X_2) \subset \text{Span}(X_1, X_2, X_3) \subset \\ &\subset \text{Span}(X_1, X_2, X_3, X_4) \subset \text{Span}(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) ,\end{aligned}$$

que é construída apenas por ideais de cada subálgebra. É fácil ver, por exemplo, que  $\text{Span}(X_1, X_2, X_3, X_4)$  é uma subálgebra da álgebra maior já que a operação de comutação com qualquer um dos elementos desta base é proporcional a algum destes geradores. Isto, por sua vez é um ideal já que os comutadores envolvendo  $X_5$  são todos proporcionais a

um dos  $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ , ficando dentro da subálgebra. Esta construção é possível em qualquer passo na sequência acima.

Muitas vezes é interessante escolher a base de uma álgebra de simetria de maneira a facilitar a construção de ideais. Uma escolha conveniente de base pode ser vista no exemplo anterior. Nele a escolha é feita de tal forma que, se  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, R$ , for elemento da base de  $\mathcal{L}$ , então vale

$$\begin{aligned} X_k &\in \mathcal{L}_k, \quad X_k \notin \mathcal{L}_{k-1}, \\ \mathcal{L}_k &= \text{Span}(X_1, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Bases como esta são conhecidas como bases canônicas.

Álgebras de simetrias solúveis podem ser usadas para permitir a redução de uma EDO por múltiplas ordens de uma só vez. Retornando ao problema de resolução de uma EDO, suponha que o conjunto de geradores de simetria  $\{X_1, \dots, X_{R-1}, X_R\}$  forme uma base canônica de uma álgebra de simetrias de Lie de uma equação diferencial de ordem  $R$ . É possível definir coordenadas canônicas  $(r_R, v_R)$  para tal equação em relação a  $X_R$ , de modo que  $X_R = \partial_{s_R}$  nestas coordenadas. Por sua vez, as coordenadas canônicas podem ser escritas em função dos invariantes diferenciais de todos os outros geradores  $\{X_1, \dots, X_{R-1}\}$  como  $(r_R(r_{R-1}, v_{R-1}), s_R(r_{R-1}, v_{R-1}))$ . Qualquer EDO pode ser escrita em termos dos seus invariantes como

$$v_R = F(r_R), \tag{4.37}$$

aonde o uso de coordenadas canônicas garante que  $v_R$  é função apenas de  $\dot{s}_R$  e  $r_R$ . Em

princípio, (4.37) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\dot{s}_R &= G(r_R) , \\ s_R &= \int^{r_R(r_{R-1}, v_{R-1})} G(r_R) dr_R + \mathbb{C} ,\end{aligned}$$

que é uma equação diferencial de ordem  $R - 1$  invariante por  $\{X_1, \dots, X_{R-1}\}$ . Se esta equação puder ser resolvida para  $v_{R-1}$  em função de  $r_{R-1}$ , tem-se um retorno ao problema original, porém com a ordem reduzida em 1. Se for possível iterar este método suficientemente, então pode-se construir a solução da EDO completamente.

Afim de avaliar condições necessárias e suficientes para a viabilidade deste método, considere a restrição de  $X_R$  às variáveis  $r_{R-1}$  e  $v_{R-1}$

$$X_R = \alpha(r_{R-1}, v_{R-1}) \partial_{r_{R-1}} + \beta(r_{R-1}, v_{R-1}) \partial_{v_{R-1}} ,$$

aonde, se  $X_R$  é gerador de simetria, as funções  $\alpha$  e  $\beta$  não podem ser nulas simultaneamente.

Isto implica

$$\begin{aligned}X_R r_{R-1} &= \alpha(r_{R-1}, v_{R-1}) , \\ X_R v_{R-1} &= \beta(r_{R-1}, v_{R-1}) .\end{aligned}$$

as variáveis  $r_{R-1}$  e  $v_{R-1}$  são invariantes pelos outros geradores, de modo que

$$X_i r_{R-1} = 0 ; \quad X_i v_{R-1} = 0 , \quad i = 1, \dots , R - 1 .$$

O comutador  $[X_i, X_R]$ , portanto, deve respeitar a condição

$$\begin{aligned}[X_i, X_R] r_{R-1} &= X_i X_R r_{R-1} - X_R X_i r_{R-1} , \\ &= X_i \alpha(r_{R-1}, v_{R-1}) = 0 .\end{aligned}$$

Um desenvolvimento análogo nos leva a

$$[X_i, X_R] v_{R-1} = X_i \beta(r_{R-1}, v_{R-1}) = 0 .$$

Por outro lado, o comutador entre dois geradores está relacionado com as constantes de estrutura da álgebra como

$$[X_i, X_R] = \sum_{k=1}^R C_{iR}^k X_k ,$$

Este resultado leva a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^R C_{iR}^k X_k r_{R-1} &= \sum_{k=1}^{R-1} C_{iR}^k (X_k r_{R-1}) + C_{iR}^R X_R r_{R-1} = 0 , \\ C_{iR}^R X_R r_{R-1} &= 0 , \\ C_{iR}^R \alpha(r_{R-1}, v_{R-1}) &= 0 , \end{aligned}$$

e também

$$C_{iR}^R \beta(r_{R-1}, v_{R-1}) = 0 .$$

Como  $\alpha$  e  $\beta$  não podem ser nulas simultaneamente, temos que  $C_{iR}^R = 0$ . Como esta condição deve valer ordem a ordem no processo reductivo, temos que, para que  $X_R$  possa agir como gerador de simetrias, as constantes de estrutura respeitam

$$C_{ij}^k = 0 , \quad \forall i < j \leq k .$$

Esta condição é respeitada se e somente se a álgebra em questão é uma álgebra solúvel na base canônica.

Para ilustrar o funcionamento do método, considere a EDO

$$y'' + y^2 = 0 . \tag{4.38}$$

Esta equação possui uma álgebra bidimensional de simetrias gerada por

$$X_1 = \partial_x, X_2 = y\partial_y - \frac{1}{2}x\partial_x,$$

que, por ser bidimensional, necessariamente é solúvel. Fácil notar a partir do comutador entre os geradores,

$$[X_1, X_2] = -\frac{1}{2}X_1,$$

que a base dada acima é canônica. Para resolver esta EDO, constroem-se os invariantes diferenciais fundamentais em relação a  $X_1$ ,

$$r_1 = y; \quad v_1 = y',$$

com a variável canônica restante  $s_1 = x$ . Também é necessário construir os invariantes em relação a  $X_2$ , dados por

$$r_2 = \frac{y'}{y^{2/3}}; \quad v_2 = \frac{y''}{y^2},$$

com os quais a EDO em questão se reduz a  $v_2 = -1$ . Estes invariantes são facilmente obtidos usando o prolongamento dos dois geradores

$$\begin{aligned} X_1^{(2)} &= \partial_x, \\ X_2^{(2)} &= y\partial_y - \frac{1}{2}x\partial_x + \frac{3}{2}y'\partial_{y'} + 2y''\partial_{y''}. \end{aligned}$$

A variável canônica  $s_2$  é obtida a partir da restrição de  $X_2$  a  $r_1$  e  $v_1$

$$\begin{aligned} X_2 r_1 &= r_1, \quad X_2 v_1 = \frac{3}{2}v_1, \\ X_2 &= r_1\partial_{r_1} + \frac{3}{2}v_1\partial_{v_1}. \end{aligned}$$

Sabe-se de  $s_2$  que

$$X_2 s_2 = 1 \implies r_1 \partial_{r_1} s_2 + \frac{3}{2} v_1 \partial_{v_1} s_2 = 1 ,$$

que tem como possível solução  $s_2 = \ln(r_1)$ . Desta forma

$$\begin{aligned} \frac{d s_2}{d r_2} &= \frac{d s_2 / d x}{d r_2 / d x} , \\ &= \frac{r_2}{v_2 - \frac{3}{2} r_2^2} . \end{aligned}$$

Substituindo  $v_2 = -1$ , tem-se (após uma integração direta)

$$s_2 = -\frac{1}{3} \ln \left( 2 + 3 \frac{v_1^2}{r_1^3} \right) + \mathbb{C}_1 .$$

Usando  $s_2 = \ln(r_1)$ , obtém-se para  $r_1$  que

$$r_1 = \mathbb{C}_1 \left( 2 + 3 \frac{v_1^2}{r_1^3} \right)^{-1/3} ,$$

que dá, para  $v_1$ ,

$$v_1 = \sqrt{\mathbb{C}_1 - \frac{2}{3} r_1^3} .$$

Isto completa o primeiro ciclo na resolução. temos os valor de  $v_1$  como função de  $r_1$ . Resta resolver a equação diferencial de primeira ordem para a variável  $s_1$ , dada por

$$\dot{s}_1 = \frac{1}{v_1} = \frac{1}{\sqrt{\mathbb{C}_1 - \frac{2}{3} r_1^3}} ,$$

que tem a solução

$$s_1 = \int \frac{1}{\sqrt{\mathbb{C}_1 - \frac{2}{3} r_1^3}} d r_1 + \mathbb{C}_2 .$$

Esta última integral nem sempre tem uma forma fechada, tornando o problema de retorno às variáveis originais,  $x$  e  $y$ , complicado no caso geral. Pode-se, mesmo assim, obter uma



solução particular da equação quando  $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C}_2 = 0$ . Neste caso, tem-se

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{\sqrt{-6r_1}}{r_1}, \\ x &= \frac{\sqrt{-6y}}{y}, \\ y &= -\frac{6}{x^2}, \end{aligned}$$

que é solução da equação (4.38).

## 4.8 Simetrias Não-Clássicas

Uma simetria de Lie é uma transformação que mapeia todas as soluções de uma dada equação diferencial em outras soluções da mesma equação. Simetrias não clássicas transformam uma solução, ainda a determinar, em si própria, sem se preocupar com o que ocorre com o resto das soluções. Desta forma, simetrias não clássicas são uma espécie de simetria generalizada, mais gerais que as simetrias de Lie usuais. Métodos baseados em simetrias não-clássicas desta forma são bastante poderosos. Para efeitos de ilustração, considere o sistema de EDPs dado por

$$F_\mu(u_j, x_i, u_{jI}) = 0 .$$

Encontrar uma solução invariante por um gerador de simetrias para esta equação equivale a encontrar uma solução para o sistema dado por

$$\begin{aligned} F_\mu(u_j, x_i, u_{jI}) &= 0 , \\ Q &= 0 , \end{aligned} \tag{4.39}$$

aonde  $Q$  é a característica do sistema. O interesse neste momento é determinar soluções invariantes da equação. Um possível primeiro passo está em descobrir simetrias do sistema (4.39). Portanto, nosso problema é equivalente a exigir que ambas a equação original e a condição de superfície invariante sejam invariantes sob a ação da transformação:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{i=1}^m \theta_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\ell=1}^k \sum_{i_1, \dots, i_\ell} \eta_{j, i_1, \dots, i_\ell}^{(k)} \frac{\partial}{\partial u_{j, x_{i_1}, \dots, x_{i_\ell}}} &= G^{(k)}, \\ G^{(k)} F_\mu(u_j, x_i, u_{jI}) &= 0, \\ G^{(k)} \left[ \eta_j - \sum_{i=1}^m \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \theta_i \right] &= 0. \end{aligned}$$

Isso sobre uma única solução  $u_j$  a determinar. Para determinar, portanto, todas as simetrias deste sistema, resolvemos para os  $\theta$  e  $\eta$ .

Note que a segunda equação em (4.39) depende de  $\theta$  e  $\eta$ , e portanto também é o sistema determinante para um gerador de simetrias não-clássicas não linear em geral. Como consequência, o conjunto das simetrias não clássicas não forma um espaço vetorial. Com isto perdemos a estrutura algébrica existente no caso das simetrias de Lie. Outra propriedade interessante é que, como as condições acima são automaticamente satisfeitas para simetrias de Lie, estas são um subconjunto das simetrias não clássicas. Por último, se  $G$  é um gerador de simetrias não clássicas compatível com um sistema de equações, então  $\lambda(u, x)G$  também o é, aonde  $\lambda(u, x)$  é uma função arbitrária, suficientemente diferenciável de seus argumentos. Isto quer dizer que, sem perda de generalidade, pode-se tratar apenas os casos em que  $\theta_1 = 1$  ou  $\theta_1 = 0$ . O último caso ainda se desdobra em mais dois,  $\theta_2 = 1$  ou  $\theta_2 = 0$ , e assim por diante.

É claro que a resolução do sistema de equações determinantes em sua total generalidade é muitas vezes um problema complexo em demasia. Costuma-se, porém, aplicar algumas restrições sobre o mesmo, com o intuito de simplificar o trabalho. Duas são de especial importância.

1. Transformações Cinemáticas. Ao tratar de equações físicas, é natural procurar por transformações nas quais as variáveis do espaço-tempo, usualmente tomadas como as variáveis independentes, se transformam dependendo apenas de si mesmas. Isto é reproduzido como

$$\theta_a = \theta_a(x) .$$

Em casos de especial dificuldade, uma simplificação ainda mais profunda que pode ser feita é o uso de polinômios para  $\theta_a$ .

2. Equações Polinomiais em  $u$ . Uma outra medida possível de ser tomada é tentar reduzir o sistema de equações determinantes a equações polinomiais em  $u$ . Uma maneira de se obter isso é usando os seguinte ansatz

$$\eta_k = \sum_{\ell} A_k^{(\ell)}(x) u_{\ell} .$$

Aonde as funções  $A_k^{(\ell)}(x)$  ainda estão a determinar.

## Capítulo 5

# Soluções Invariantes da Equação de Gross-Neveu

Neste capítulo, tendo estabelecido os métodos a serem utilizados na resolução de equações diferenciais, nos voltamos ao problema da obtenção de soluções analíticas para as equações de Gross-Neveu em  $2 + 1$  dimensões, dadas por

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - \lambda(\bar{\Psi}\Psi)) \Psi = 0 , \quad (5.1)$$

com  $\mu = 0, 1, 2$ . Os resultados que seguem foram publicados em [49]. Em 3 dimensões a equação de Gross-Neveu apresenta graus de liberdade o bastante para que se tenham vários geradores de simetria sem a complexidade intrínseca às dimensões maiores, tornando esta escolha uma boa candidata para a análise de simetria. Por motivos de simplicidade computacional, separa-se o espinor  $\Psi(x)$  como

$$(\Psi(x)) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) + i\psi_2(x) \\ \psi_3(x) + i\psi_3(x) \end{pmatrix} ,$$

onde os  $\psi_i$  são funções reais de  $t, x, y$ . Procuramos geradores de simetrias não-clássicas para o sistema, mas, em sua total generalidade, estes são muito difíceis de se obter. analisa-se então a seguinte simplificação

$$\eta_k = \sum_l A_k^{(l)}(x)\psi_l, \quad \theta^\mu = c^\mu + \sum_\nu x^\nu b_\nu^\mu, \quad \mu = 1, 2, 3, \quad (5.2)$$

Onde as funções  $A_k^{(l)}(x)$  e constantes  $c^\mu$  e  $b_\nu^\mu$  são desconhecidas. As equações resultantes são polinomiais em  $\psi_i$ . Igualar os coeficientes de mesma ordem em cada  $\psi_i$  resulta em 98 equações, que são então resolvidas usando um sistema de computação algébrica. Os geradores não-clássicos mais gerais obtidos desta forma são:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1^{(nc)} &= [a_1(t, x)\psi_1 + a_2(t, x)\psi_2] \frac{\partial}{\partial \psi_1} \\ &+ [a_3(t, x)\psi_1 - a_1(t, x)\psi_2] \frac{\partial}{\partial \psi_2} \\ &+ [a_2(t, x)\psi_4 + (a_1(t, x)\psi_3 - d_2)\psi_3] \frac{\partial}{\partial \psi_3} \\ &+ [a_3(t, x)\psi_3 - (a_1(t, x)\psi_3 + d_2)\psi_4] \frac{\partial}{\partial \psi_4} \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} + (d_1 + d_2y + d_3t + d_4x) \frac{\partial}{\partial y}, \\ \mathbf{G}_2^{(nc)} &= \left[ a_0^{(1)}(t, x, y) + \sum_{k=1}^4 a_k^{(1)}(t, x, y)\psi_k \right] \frac{\partial}{\partial \psi_1} \\ &+ \left[ a_0^{(2)}(t, x, y) + \sum_{k=1}^4 a_k^{(2)}(t, x, y)\psi_k \right] \frac{\partial}{\partial \psi_2} \\ &+ [b_0(x) + b_1(x)\psi_3 + b_2(x)\psi_4] \frac{\partial}{\partial \psi_3} \\ &+ [c_0(t, x, y) + c_1(t, x, y)\psi_3 + c_2(t, x, y)\psi_4] \frac{\partial}{\partial \psi_4} \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}, \end{aligned}$$

Estes geradores são bastante gerais e, portanto, soluções invariantes pelos mesmos são de difícil obtenção. Mesmo assim, usando algumas simplificações, podemos obter algumas

novas soluções para o sistema:

### Caso I

A condição de invariância para o gerador  $\mathbf{G}_1^{(nc)}$  é dada pelo conjunto de equações:

$$\begin{aligned}
g_2\psi_1 - g_3\psi_2 - \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y} (d_1 + d_2y + d_3t + d_4x) &= 0, \\
g_3\psi_1 + g_1\psi_2 - \frac{\partial\psi_2}{\partial t} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2}{\partial y} (d_1 + d_2y + d_3t + d_4x) &= 0, \\
g_1\psi_4 + g_3\psi_3 - d_2\psi_3 - \frac{\partial\psi_3}{\partial t} + \frac{\partial\psi_3}{\partial x} - \frac{\partial\psi_3}{\partial y} (d_1 + d_2y + d_3t + d_4x) &= 0, \\
g_2\psi_3 - g_3\psi_4 - d_2\psi_4 - \frac{\partial\psi_4}{\partial t} + \frac{\partial\psi_4}{\partial x} - \frac{\partial\psi_4}{\partial y} (d_1 + d_2y + d_3t + d_4x) &= 0.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Este sistema se desacopla em quatro equações independentes escolhendo  $g_1 = g_2 = g_3 = 0$ .

Ao resolver estas equações temos

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= F_1(\xi_1, \xi_2), & \psi_2 &= F_2(\xi_1, \xi_2), \\
\psi_3 &= F_3(\xi_1, \xi_2)e^{d_2x}, & \psi_4 &= F_4(\xi_1, \xi_2)e^{d_2x},
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Onde as variáveis de similaridade são dadas por

$$\xi_1 = e^{d_2x} [d_2^2y + d_2(d_1 + d_3t + d_4x) + d_3 - d_4] / d_2^2, \quad \xi_2 = x + t. \tag{5.5}$$

Desta forma, as eqs. (5.4) e (5.5) agem como um ansatz para as soluções da equação, (5.1).

Para simplificar a apresentação dos resultados, considere o caso  $d_1 = 1$ . Substituindo (5.4)

e (5.5) em (5.1), obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} + [\xi_1 + (d_3 + d_4)e^x] \frac{\partial F_3}{\partial \xi_1} + 2 \frac{\partial F_3}{\partial \xi_2} - 2\lambda F_1^2 F_4 + 2\lambda F_1 F_2 F_3 + F_3 &= 0, \\
\frac{\partial F_2}{\partial \xi_1} + [\xi_1 + (d_3 + d_4)e^x] \frac{\partial F_4}{\partial \xi_1} + 2 \frac{\partial F_4}{\partial \xi_2} + 2\lambda F_2^2 F_3 - 2\lambda F_1 F_2 F_4 + F_4 &= 0, \\
e^{-x} (\xi_1 e^{-x} + d_4 - d_3) \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} - \frac{\partial F_3}{\partial \xi_1} + 2\lambda F_2 F_3^2 - 2\lambda F_1 F_3 F_4 &= 0, \\
e^{-x} (\xi_1 e^{-x} + d_4 - d_3) \frac{\partial F_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial F_4}{\partial \xi_1} - 2\lambda F_1 F_4^2 + 2\lambda F_2 F_3 F_4 &= 0.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

É importante notar que, já que a variável  $x$  ainda está presente nestas equações reduzidas, e já que a equação (5.6) deve ser válida para todos os valores de  $x$ , devemos igualar a zero todos os coeficientes de  $\exp(x)$ ,  $\exp(-x)$  e  $\exp(-2x)$ , resultando em 10 equações as funções ainda desconhecidas  $F_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Mesmo tendo ainda um sistema de EDPs em duas variáveis (de similaridade) independentes, este pode ser simplificado e resolvido para alguns casos não triviais. O que segue é um breve esboço dos principais passos. O sistema (5.6) é resolvido como

$$\begin{aligned}
F_1(\xi_1, \xi_2) &= G(\xi_2), \\
F_2(\xi_1, \xi_2) &= H(\xi_2), \\
F_3(\xi_1, \xi_2) &= \left[ 2\lambda \xi_1 (G'H - GH') + G'e^{-A} \int \frac{2\lambda \xi_1 e^{AG}}{(G')^2} \{G'H'' - G''H' \right. \\
&\quad \left. + \lambda (GH' - G'H)^2 \} d\xi_2 - a G'e^{-A} \right]^{-1}, \\
F_4(\xi_1, \xi_2) &= H'G'F_3(\xi_1, \xi_2),
\end{aligned} \tag{5.7}$$

onde

$$A(\xi_2) \equiv \int \left( \lambda \frac{H'G^2}{G'} - \lambda GH - \frac{1}{2} \right) d\xi_2, \tag{5.8}$$

com  $G(\xi_2)$  uma função arbitrária,  $a$  uma constante arbitrária e  $H(\xi_2)$  uma solução da EDO:

$$H''G' - H'G'' + \lambda(GH' - HG') = 0. \quad (5.9)$$

Todas as integrais nas equações (5.7) e (5.8) são indefinidas. Portanto, a determinação de uma solução (particular) da equação (5.1) é efetivamente reduzida a solução da EDO em (5.9) para uma escolha da função arbitrária  $G(\xi_2)$ . Apresentamos dois exemplos abaixo, mas muitos outros podem ser gerados pelo mesmo procedimento descrito.

$$\mathbf{G}(\xi_2) = \xi_2$$

das equações (5.6–5.9) com a escolha  $G(\xi_2) = \xi_2$  obtém-se a solução:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= x + t, \\ \psi_2 &= \frac{2\sqrt{\lambda}}{c_1^{3/2}}(x + t)A + \frac{2}{c_1} + c_2(x + t), \\ \psi_3 &= e^x [\lambda(x - t)^2 - c_1] \\ &\quad \times \{c_1^2 e^{(x+t)/2} + 4\lambda e^x [c_4(x + t) + y + 1 - 2c_4]\}^{-1}, \\ \psi_4 &= \left\{ 2\lambda c_1(x + t) + 2A \left[ c_1^{2/3} \sqrt{\lambda} + (c_1^2 c_2 \lambda - \lambda^{3/2} \sqrt{c_1})(x + t)^2 - c_1^3 c_2 \right] \right\} \\ &\quad \times \{c_1^2 e^{(x+t)/2} + 4\lambda e^x [c_4(x + t) + y + 1 - 2c_4]\}^{-1}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

com

$$A = \tanh^{-1} \left( \sqrt{\frac{\lambda}{c_1}}(x + t) \right), \quad (5.11)$$

e os  $c_i$  são constantes arbitrárias.



$$\mathbf{G}(\xi_2) = \exp(-\xi_2)$$

Neste caso, temos:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= e^{-x-t}, \\
\psi_2 &= -\frac{1}{\lambda c_1} + \frac{e^{-x-t}}{\lambda c_1^2} \ln(c_1 e^{x+t} - 1) - \lambda c_2 e^{-x-t}, \\
\psi_3 &= -(c_1 e^{x+t} - 1)^2 \\
&\quad \times \{2(e^{2x+t} - c_1 e^{3x+2t}) [y + 1 + c_4(x-t) - 2c_4] \\
&\quad \quad + c_1 e^{3(x+t)/2} c_1^2 e^{5(x+t)/2}\}^{-1}, \\
\psi_4 &= e^x (c_1 e^{x+t} - 1) \\
&\quad \times [(c_1 e^{x+t} - 1) \ln(c_1 e^{x+t} - 1) - c_1 e^{x+t} (1 + \lambda c_1^2 c_2) + \lambda c_1^2 c_2] \\
&\quad \times \{2(e^{2x+t} - c_1 e^{3x+2t}) [y + 1 + c_4(x-t) - 2c_4] \\
&\quad \quad + c_1 e^{3(x+t)/2} c_1^2 e^{5(x+t)/2}\}^{-1} c_1^{-2} \lambda^{-1}, \tag{5.12}
\end{aligned}$$

e novamente,  $c_i$  são constantes arbitrárias.

## Caso II

O gerador  $\mathbf{G}_2^{(nc)}$  como dado é muito geral para permitir uma classificação exaustiva de soluções. Portanto, nos restringimos a algumas escolhas específicas para as funções arbitrárias, de modo que o sistema reduzido de EDPs seja obtido em uma forma fechada em alguns casos. Mesmo que não seja um sistema de EDOs, este sistema de EDPs pode ser resolvido numa forma fechada. Os passos necessários para a obtenção de uma solução invariante são essencialmente os mesmos do caso anterior, portanto mostramos apenas o resultado final.

$$\mathbf{G}_2^{(nc)} = (x + x\psi_1 + x\psi_2 + x\psi_3)\partial/\partial\psi_1 + \partial/\partial t - \partial/\partial x$$

Notamos que o ansatz usado no caso anterior não se aplica mais. Uma solução para a condição de invariância é, mesmo assim, obtida, fornecendo a seguinte solução para (5.1)

$$\begin{aligned}\psi_1 &= -1 - \psi_2 - \psi_3, \\ \psi_2 &= 2 \left[ c_2 B_0 (B_2 - B_1) + \lambda \left\{ \lambda (c_2^2 (x+t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c_2 (c_1 + c_3 + y + (x+t)/2) - c_3/2) (c_2 (x+t) + c_3) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c_2^2 (x+t) + c_2 ((x+t)/4 + y/2 + c_1/2 + c_3) - c_3/4 \right\} \right] \\ &\quad \times [B_0 \{B_2 - B_1 + \lambda(y + x + y + 2c_2(x+t)) + c_1 + 2c_3\}]^{-1}, \\ \psi_3 &= -[\lambda(c_2 + 1/2)(c_2(x+t) + c_3) + 1/4] \\ &\quad \times [B_2 - B_1 + c_2((x+t)(1 + 2c_2) + y + c_1 + 2c_3)]^{-1} c_2^{-1}, \\ \psi_4 &= \lambda \frac{c_2(x+t) + c_3}{B_1 - B_2 - \lambda[(1 - 2c_2)(x+t) + y - 2c_3 + c_1]},\end{aligned}\tag{5.13}$$

onde  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  são constantes arbitrárias e  $B_k(x, t)$ ,  $k = 0, 1, 2$ , são dados por

$$\begin{aligned}B_0(x, t) &= \frac{1}{2} - \lambda(c_2(x+t) + c_3), \\ B_1(x, t) &= \ln \left( \frac{1}{c_2(x+t) + c_3} - 2\lambda \right), \\ B_2(x, t) &= \ln \left( \frac{1}{c_2(x+t) + c_3} \right).\end{aligned}\tag{5.14}$$

$$\mathbf{G}_2^{(nc)} = x\psi_4\partial/\partial\psi_1 + \partial/\partial t - \partial/\partial x$$

A solução correspondente é

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{2e^{-(x+t)y} + e^{(x+t)y}}{2(x+t)} - ye^{(x+t)y}, \\ \psi_2 &= \frac{1}{2\lambda}e^{-(x+t)y}, \quad \psi_3 = e^{(x+t)y}(x+t), \quad \psi_4 = 0.\end{aligned}\tag{5.15}$$

$$\mathbf{G}_2^{(nc)} = xy \psi_4 \partial / \partial \psi_1 + \partial / \partial t - \partial / \partial x$$

Aqui obtemos

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{e^{2Gy}}{2G^2} (2GH' - G'H - 2yGG'H') + F, \\ \psi_2 &= \frac{G}{2\lambda e^{Gy}H}, \quad \psi_3 = e^{Gy}H, \quad \psi_4 = 0, \end{aligned} \tag{5.16}$$

com  $G = G(x + t)$ ,  $H = H(x + t)$  e  $F = F(x + t)$  funções completamente arbitrárias de  $x + t$ .

# Capítulo 6

## Conclusões e Perspectivas

Ao longo desta tese, foram abordados pontos importantes do modelo de Gross-Neveu usando como ferramenta básica o estudo de álgebras de simetrias. Em uma primeira parte, o modelo GN é observado do ponto de vista da DCT, com o intuito de utilizar aspectos de simetria do modelo para analisar quebra e restauração de simetria. São analisados os efeitos que a compactificação pode ter sobre o modelo e é estudada uma possível restauração da simetria quiral que é quebrada na ausência de compactificação pela geração dinâmica de massa. Ao final desta parte apresenta-se uma curva de criticalidade que liga comprimento de confinamento com temperatura próximo do ponto em que a simetria quiral é restaurada. Esta curva tem validade apenas no regime em que os produtos  $\beta m_{LT}$  e  $T m_{LT}$  são pequenos.

Na segunda parte da tese, o modelo é analisado do ponto de vista de equações diferenciais, com um interesse especial na obtenção de soluções analíticas através da análise de simetrias, especificamente usando um tipo de simetria generalizada chamada de simetria não-clássica. A obtenção e utilização destas simetrias foi fortemente facilitada pelo uso de recursos computacionais, especificamente o pacote para MAPLE, SADE. Foram apresentados geradores não-clássicos e famílias de soluções novas para as equações GN obtidas a partir destes geradores.

É claro, pouquíssimos trabalhos científicos podem ser considerados completos, sempre deixando margem para futuras explorações. Este trabalho não é diferente, e alguns pontos ainda demandam indagações maiores. Quanto a quebra e restauração de simetria no modelo GN, a pergunta que permanece é como esta funciona fora dos limites da aproximação utilizada no cálculo. Seria bastante interessante que se obtivesse uma expressão mais geral para este resultado, bem como expressões para dimensões mais altas. Já no estudo de soluções exatas, o método aplicado está longe de ser exaustivo, havendo ainda bastante espaço para obtenção de mais soluções, especialmente nos casos de dimensões mais altas, não contemplados neste trabalho. Todos estes são possíveis pontos para onde se pode estender a presente tese futuramente.

# Referências Bibliográficas

- [1] S. Weinberg, *The quantum theory of fields*, Vol. I (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [2] C. Itzykson, J. Zuber *Quantum Field Theory* (McGraw - Hill, New York, 1980).
- [3] M. Srednicki *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
- [4] O.K. Kalashnikov, Fort. der Phys. ? Prog. Phys. **32**, 525 (1984)
- [5] D.J. Gross, R.D. Pisarki, L.G. Yaffe, Rev. Mod. Phys. 53, 43 (1981).
- [6] J.I. Kapusta, *Finite-Temperature Field Theory* (Cambridge University Press, N. York, 1989)
- [7] F.C. Khanna, A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, A.E. Santana, *Thermal quantum field theory: algebraic aspects and applications* (World Scientific, Singapore, 2009).
- [8] D.J. Gross, A. Neveu, Phys. Rev. D **10**, 3235 (1974).
- [9] C. de Calan, P. A. Faria da Veiga, J. Magnen, and R. Sénéor, Phys. Rev. Lett. **66**, 3233 (1991).
- [10] A. Barducci, R. Casalbuoni, M. Modugno, G. Pettini, R. Gatto, Phys. Rev. D **51**, 3042 (1995)

- [11] H.R. Christiansen, A.C. Petkou, M.B. Silva-Neto, N.D. Vlachos, Phys. Rev. D **62**, 025018 (1995).
- [12] V. Schön, M. Thies, 2D model field theories at finite temperature and density, hep-th/0008175.
- [13] S.J. Hands, J.B. Kogut, C.G. Strouthos, Phys. Lett. B **515**, 407 (2001).
- [14] S.J. Hands, J.B. Kogut, C.G. Strouthos, Phys. Rev. D **65**, 114507 (2002).
- [15] M. Thies, J. Phys. A **39**, 12707 (2006).
- [16] O. Schnetz, M. Thies, Ann. Phys. (N.Y.) **80** 081405, (2009).
- [17] V. Juričić, I.F. Herbut, G.W. Semenoff, Phys. Rev. B **80**, 081405(R) (2009).
- [18] B.R. Zhou, Phys. Rev. D **57**, 3171 (1998).
- [19] B.R. Zhou, Commun. Theor. Phys. **32**, 425 (1999).
- [20] A. Brzoska, M. Thies, Phys. Rev. D **65**, 125001 (2002).
- [21] J.-L. Kneur, M.B. Pinto, R.O. Ramos, E. Staudt, Phys. Rev. D **76**, 045020 (2007).
- [22] C. Boehmer, U. Fritsch, S. Kraus, M. Thies, Phys. Rev. D **78**, 065043 (2008).
- [23] F. Höfling, C. Nowak, C. Wetterich, Phys. Rev. B **66**, 205111 (2002).
- [24] H. Kohyama, Phys. Rev. D **77**, 045016 (2008).
- [25] A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, A.E. Santana, J.C. Silva, Phys. Lett. B **583**, 373 (2004).
- [26] A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 2263 (2002).
- [27] A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, A.E. Santana, Nucl. Phys. B **631**, 83 (2002).

- [28] F.C. Khanna, A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, H. queiroz, T.M. Rocha-Filho, A.E. Santana, J.C. Silva, Phys. Lett. B **624**, 316 (2005).
- [29] P.M.M. da Rocha, A.E. Santana, *Simetrias e Soluções Clássicas do Modelo de Gross-Neveu* (Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília, 2011).
- [30] W.I. Fushchich, R.Z. Zhdanov, Phys. Rep. **172**, 123 (1989).
- [31] W.I. Fushchich, R.Z. Zhdanov, J. Phys. A **20**, 4173 (1987).
- [32] J. Feinberg, Int. J. Mod. Phys. **17**, 898 (2002).
- [33] M. Thies, Phys. Rev. D **69**, 067703 (2004).
- [34] N. Ibragimov, *Transformation Groups and Lie Algebras*, (Higher Education Press, Beijing, 2013).
- [35] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications*, (John Wiley & Sons, New York, 1974).
- [36] B.R. Zhou, hep-th/0204176.
- [37] Peskin, Schroeder *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley Publishing Company, 1995).
- [38] F.C. Khanna, A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, A. E. Santana, Europhys. Lett. **92**, 11001 (2010).
- [39] F.C. Khanna, A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, A. E. Santana, Phys. Rev. D **85**, 085015 (2012).
- [40] F.C. Khanna, A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, A. E. Santana, Europhys. Lett. **97**, 11002 (2012).
- [41] L. Jacobs, Phys. Rev. D **10** 3956 (1974).



- [42] B. J. Harrington and A. Yildiz, *Phys. Rev. D* **11** 779 (1975).
- [43] R. F. Dashen, S-K, Ma and R. Rajaraman, *Phys. Rev. D* **11** 1499 (1975).
- [44] V. E. Zakharov, A. V. Mikhailov, *Commun. Math. Phys.* **74**, 21 (1980).
- [45] R.F. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu, *Phys. Rev. D* **12**, 2443 (1975).
- [46] S. Shei, *Phys. Rev. D* **14**, 535 (1976).
- [47] C.G. Callan, S. Coleman, D.J. Gross and A. Zee, não publicado; Este trabalho é descrito por D.J. Gross em *Methods in Field Theory*, R. Balian, J. Zinn-Justin (Eds.), Les-Houches session XXVIII 1975 (North Holland, Amsterdam, 1976).
- [48] T.M. Rocha Filho, Annibal Figueiredo, *Computer Physics Communications*, **182**, 467-476 (2011).
- [49] P.M.M. Rocha, F.C. Khanna, T.M. Rocha Filho, A. E. Santana *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, v. 26, p. 201-210, 2015.
- [50] N.P. Landsman, Ch. G van Weert, *Phys. Rep.* **145**, 141-249 (1987)
- [51] T. Matsubara, *Prog. Theor. Phys.* **14**, 351 (1955).
- [52] H. Ezawa, Y. Tomozawa and H. Umezawa, *N. Cimento Ser. X* **5**, 810 (1957).
- [53] S. Perez, A. Das, J. Frenkel, F.T. Brandt and O. Espinosa, *Phys. Rev. D* **72**, 085006 (2005).
- [54] C.D. Fosco, A.P.C. Malbouisson, C.C. Ttira and I. Roditi, *Phys. Rev. D* **77**, 105030 (2008).
- [55] B.M. Pimentel, J.T. Lunardi, L.A. Manzoni and J.S. Valverde, *Int. J. Mod. Phys. A* **17**, 205 (2002).

- [56] B.M. Pimentel, R. Casana, V. Fainberg and J.S. Valverde, Phys. Lett. A **316**, 33 (2003).
- [57] A.L. Fetter and J. D. Walecka, Quantum Theory of Many-Particles Systems (McGraw-Hill, N. York, 1971).
- [58] J.I. Kapusta, Finite-Temperature Field Theory (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [59] M. Le Bellac, Thermal Field Theory (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
- [60] A. Das, Finite Temperature Field Theory (W. Scientific, Singapore, 1977).
- [61] A.M Rakhimov, U.T. Yakhshiev and F.C. Khanna, Phys. Rev. C **61**, 024907 (2000).
- [62] U.T. Yakhshiev, A.W. Thomas and F.C. Khanna, Phys. Rev. C **68**, 048201 (2003).
- [63] L. Dolan and R. Jackiw, Phys. Rev. D **9**, 3320 (1974).
- [64] D.N. Zubarev and M.V. Tokarshuk, Theor. Math. Phys. **88**, 876 (1991).
- [65] R. Floreanini and R. Jackiw, Phys. Rev. D **37**, 2206 (1988).
- [66] O. Eboli, R. Jackiw and S.-Y. Pi, Phys. Rev. D **37**, 3557 (1988).
- [67] S.P. Kim and F.C. Khanna, TFD of Time Dependent Boson and Fermion Systems, quant-ph/0308053.
- [68] S.P. Kim, A.E. Santana and F.C. Khanna, Phys. Lett. A **272**, 46 (2000).
- [69] S. Sengupta, S.P. Kim and F.C. Khanna, Phys. Rev. D **68**, 105014 (2003).
- [70] J. Schwinger, J. Math. Phys. **2**, 407 (1961).
- [71] P.M. Bakshi and K.T. Mahanthappa, J. Math. Phys. **4**, 1 and 12 (1963).

- [72] K.T. Mahanthappa, Phys. Rev. 126, 329 (1962).
- [73] L.V. Keldysh, Zh. Eksp. Toer. Fiz. **47**, 1515 (1964) [Sov. Phys. JETP 20, 1018 (1965)].
- [74] Y. Takahashi and H. Umezawa, Coll. Phenomena **2**, 55 (1975) (Reprinted in Int. J. Mod. Phys. 10, 1755 (1996)).
- [75] H. Umezawa, Advanced Field Theory: Micro, Macro and Thermal Physics (AIP, N. York, 1993).
- [76] H. Umezawa, H. Matsumoto and M. Tachiki, Thermofield Dynamics and Condensed States (North-Holland, Amsterdam, 1982).
- [77] J.P. Whitehead, H. Matsumoto and H. Umezawa, Phys. Lett. **103**, 408 (1984).
- [78] S.M. Barnett and P.L. Knight, J. Opt. Soc. Am. B **2**, 467 (1985).
- [79] A. Mann and M. Revzen, Phys. Lett. A **134**, 273 (1989).
- [80] A. Mann, M. Revzen, H. Umezawa and Y. Yamanaka, Phys. Lett. A **140**, 475 (1989).
- [81] S. Chaturvedi, R. Sandhya, V. Srinivasan and R. Simon, Phys. Rev. A **41**, 3969 (1990).
- [82] S. Chaturvedi, V. Srinivasan and G.S. Agarwal, J. Phys. A: Math. Gen. **32**, 1909 (1999).
- [83] L.M. Silva, A.E. Santana and J.D.M. Vianna, Braz. J. Phys. **27**, 619 (1996).
- [84] M.C.B. Abdala, A.L. Gadelha and I.V. Vancea, Phys. Rev. D **64**, 086005 (2001).
- [85] M.C.B. Abdala, A.L. Gadelha and I.V. Vancea, Int. J. Mod. Phys. A **18**, 2109 (2003).
- [86] H. Chu and H. Umezawa, Int. J. Mod. Phys. A **9**, 2363 (1994).

- [87] A.E. Santana and F.C. Khanna, Phys. Lett. A **203**, 68 (1995).
- [88] A.E. Santana, A. Matos Neto, J.D.M. Vianna and F.C. Khanna, Physica A **280**, 405 (2000).
- [89] M. de Montigny, F.C. Khanna and A.E. Santana, Can. Appl. Math. Quart. **8**, 43 (2000).
- [90] T. Kopf, A.E. Santana and F.C. Khanna, J. Math. Phys. **38**, 4971 (1997).
- [91] E. Celeghini, S. de Martino, S. de Siena, A. Iorio, N. Rasetti and G. Vitiello, Phys. Lett. A **244**, 455 (1998).
- [92] J.C. da Silva, F.C. Khanna, A. Matos Neto and A.E. Santana, Phys. Rev. A **66**, 052101 (2002).
- [93] H. Queiroz, J.C. da Silva, F.C. Khanna, J.M.C. Malbouisson, M. Revzen and A.E. Santana, Ann. Phys. **317** 220 (2005) (erratum and addendum, Ann. Phys. **321**, 1274 (2006)).
- [94] A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, A.E. Santana and F.C. Khanna, Mod. Phys. Lett. A **20**, 965 (2005).
- [95] L.M. Abreu, C. de Calan, A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson and A.E. Santana, J. Math. Phys. **46**, 012304 (2005).
- [96] F.C. Khanna, A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, H. Queiroz, T.M. Rocha-Filho, A.E. Santana and J.C. da Silva, Phys. Lett. B **624**, 316 (2005).
- [97] A.P.C. Malbouisson, F.C. Khanna, J.M.C. Malbouisson and A.E. Santana, Braz. J. Phys. **36**, 1165 (2006).
- [98] M. Srednicki *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007)

- [99] M. E. Peskin, D. V. Schroeder *An introduction to quantum field theory* (Addison-Wesley Pub. Co, San Francisco, 1995)
- [100] G.J. Reid, A.D. Wittkopf, A. Boulton, Eur. J. Appl. Math. **7** (1996) 604.
- [101] G.J. Reid, A.D. Wittkopf, Determination of maximal symmetry groups of classes of differential equations, in: Proc. ISSAC 2000, ACM Press, 2000, 272-280.
- [102] P. S. Olver *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (Springer, New York, 1993).
- [103] W.H. Steeb *Continuous Symmetries, Lie Algebras, Differential Equations and Computer Algebra* (World Scientific Publishing Company, Singapore, 2007).
- [104] G.W. Bluman, S.C. Anco *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations* (Springer, New York, 2010).
- [105] Y.S. Kim, M.E. Noz, Phase Space Picture and Quantum Mechanics?Group Theoretical Approach, W. Scientific, London, 2001.
- [106] R.G.G. Amorim, F.C. Khanna, Ademir E. Santana, J.D.M. Vianna Physica A, **388** (2009) 3771