



Universidade de Brasília
Instituto de Física

GUSTAVO GARCIA DE MELO
Universidade de Brasília - Instituto de Física

SIMETRIA CONFORME E COVARIÂNCIA GALILEANA

BRASÍLIA
2015

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

Instituto de Física

GUSTAVO GARCIA DE MELO

SIMETRIA CONFORME E COVARIÂNCIA GALILEANA

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Ademir Eugênio de Santana

Coorientador: Sérgio Costa Ulhoa

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO GUSTAVO GARCIA DE MELO, E ORIENTADA PELO PROF. DR. ADEMIR EUGÊNIO DE SANTANA.

BRASÍLIA
2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M528s Melo, Gustavo Garcia de
Simetria Conforme e Covariância Galileana /
Gustavo Garcia de Melo; orientador Ademir Eugênio de
Santana; co-orientador Sérgio Costa Ulhoa. --
Brasília, 2015.
55 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Física) --
Universidade de Brasília, 2015.

1. Grupo Conforme. 2. Covariância Galileana. 3.
Teoria de Campos. 4. Física Matemática. I. Santana,
Ademir Eugênio de, orient. II. Ulhoa, Sérgio Costa,
co-orient. III. Título.

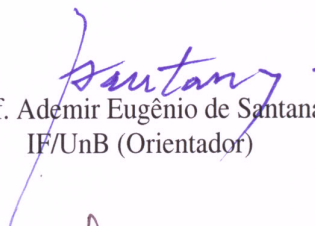
“Simetria Conforme e Covariância Galileana.”

Por

Gustavo Garcia de Melo

Dissertação submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

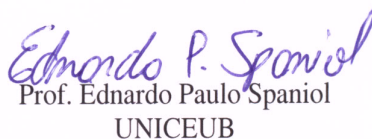
Aprovada por:



Prof. Ademir Eugênio de Santana
IF/UnB (Orientador)



Prof. Ronni Geraldo Gomes de Amorim
UnB/Gama



Prof. Ednardo Paulo Spaniol
UNICEUB

Prof. Dr. Fernando de Oliveira Albuquerque
Coordenador de Pós-Graduação
Instituto de Física

Resumo

O objetivo desta dissertação é explorar uma versão preliminar de uma formulação covariante para teorias de campos não-relativísticas com simetria conforme. Primeiro, revisamos tal simetria e como se obtém o grupo conforme do espaço de Minkowski. Segundo, revisamos o grupo de Galilei, que é o grupo de simetria da física não-relativística, a covariância e a variedade Galileana. Por fim, baseando-se em resultados da literatura para férmions unitários, apresentamos o grupo conforme da variedade galileana, seus geradores infinitesimais e transformações finitas associadas, tendo os campos escalar e eletromagnético como exemplo.

Palavras-chave: Física Matemática, Teoria de Campos, Covariância Galileana, Grupo Conforme.

Abstract

This dissertation explores preliminary results of a covariant formulation for non-relativistic field theories with conformal symmetry. First, we review such symmetry and how to obtain the conformal group of the Minkowski space. Second, we review the Galilei group, which is the symmetry group of non-relativistic physics, the galilean covariance and the galilean manifold. Finally, based in available results regarding fermions at unitarity, we present the conformal group of the galilean manifold, its infinitesimal generators and associated finite transformations, presenting the scalar and electromagnetic fields as examples.

Keywords: Mathematical Physics, Field Theory, Galilean Covariance, Conformal Group.

Sumário

Agradecimentos	viii
1 Introdução	1
2 Simetria Conforme	4
2.1 Transformações Conformes	4
2.2 Formalismo básico	6
2.2.1 Variedades diferenciáveis, tensores e métrica	6
2.2.2 Grupos e Álgebras de Lie	10
2.3 Grupo e Álgebra Conforme	12
2.4 O grupo conforme como um grupo de rotações em duas dimensões adicionais.	18
3 Covariância Galileana	23
3.1 Variedade Galileana	23
3.2 Transformações de Galilei	26
3.3 Exemplos	29
3.3.1 Representação escalar e a Equação de Schrödinger	29
3.3.2 Representação de spin $\frac{1}{2}$ e as equações de Pauli-Schrödinger	29
3.3.3 Os limites elétrico e magnético das equações de Maxwell	30
4 Teoria de Campos Conforme não-relativística	33
4.1 O grupo conforme não-relativístico	33
4.2 Aplicações	38
4.2.1 Representação escalar	38
4.2.2 As equações de Maxwell	39
5 Conclusão	42
Bibliografia	44

Agradecimentos

À minha família, Ereni, Murilo, e Tarcisio. Aos amigos que fiz no Instituto de Física, especialmente Alisson, Arthur, Gabriel, Jefferson, Lorena, e Rodrigo. Às minhas ψ s. Aos meus amigos e familiares de outras épocas ou lugares. Obrigado pelo apoio de vocês ao longo de todos os anos, vocês são as pessoas que volta e meia mostram acreditar mais em mim do que eu mesmo;

Aos meus professores, desde o ensino médio até hoje, que me ajudaram a responder algumas das curiosidades sobre a natureza e matemática. Especialmente na UnB aos meus orientadores Ademir Santana e Sérgio Ulhoa, além de Antônio Pedroza, Lineu Neto, e Viktor Dodonov;

À CAPES, pelo apoio financeiro via bolsa de mestrado.

Notação

x^i representam as coordenadas espaciais;

x^μ representam as coordenadas em espaço-tempos de Minkowski, com métrica diagonal;

x^A representam as coordenadas da Variedade Galileana;

x^\pm representam coordenadas no cone de luz.

Capítulo 1

Introdução

Um sistema de férmions unitários é um conjunto de partículas de spin $1/2$ que interagem através de um potencial de curto alcance, ajustado de tal maneira que entre pares interagentes se forme apenas um estado ligado de energia zero. Quando o potencial se reduz ao de contato, o sistema se torna invariante por escala, que é uma das simetrias conformes. Esse sistema foi reproduzido experimentalmente com elétrons de baixa energia [1], através de técnicas de ressonâncias de Feshbach, que confinam átomos frios. Como resultado, um sistema de muitos férmions em baixa velocidade submetido a auto interação requer uma teoria de campos conforme não-relativística. Como primeira tentativa de construir uma teoria desse tipo, Son [2,3] estudou, preliminarmente, a invariância de De Sitter da equação de Schrödinger, com um análogo gravitacional ao sistema de férmions.

A invariância de escala é uma simetria fundamental na natureza, e não se manifesta de modo trivial, já que uma teoria física descreve fenômenos em um intervalo específico de distância espacial, proporcional ao inverso da massa da partícula mediadora. Por exemplo, a força fraca se restringe ao tamanho da eletrosfera atômica e a força forte ao espaço onde quarks e glúons ficam confinados para formar hádrons. A invariância se mantém apenas para interações de contato, quando o comprimento característico é zero, ou quando o comprimento característico é infinito, como são o eletromagnetismo e a gravitação, já que fótons não possuem massa, assim como os grávitons, de acordo com o modelo padrão [4]. No caso de baixa energia, além de férmions unitários em física atômica, há outros casos de sistemas físicos que também são descritos por teorias de campos conformes não-relativísticas. Um exemplo é o caso, em matéria condensada, das transições de fase de segunda ordem em pontos quânticos críticos [5]; outro é, em física nuclear, no limite em que o comprimento de espalhamento de núcleons vai para o infinito [6].

Para cada simetria de um sistema físico, como a simetria conforme, está associada uma grandeza conservada: teorema demonstrado por Emmy Noether em 1915 [7]. Exemplos bem conhecidos incluem simetrias do espaço e tempo. Assim, quando um sistema físico é invariante por translações espaciais (homogeneidade espacial) haverá conservação do momento; se for invariante por rotações (isotropia espacial) haverá conservação do momento angular; se for invariante por translações temporais (homogeneidade no tempo) a quantidade conservada é a energia. No caso das chamadas simetrias internas, o sistema físico ao ser invariante por transformações de calibre (gauge) locais, haverá conservação de carga.

A teoria eletromagnética, por exemplo, é conhecida por ser invariante por translações e rotações do espaço-tempo; e invariante de calibre pelo grupo $U(1)$, ou seja uma teoria de calibre abeliana, simetria à qual está associada a conservação da carga elétrica [4]. Em 1909 Bateman e Cunningham [8,9] demonstraram, entretanto, que as equações de Maxwell são invariantes por um conjunto de transformações das coordenadas do espaço-tempo mais abrangentes que a simetria de Poincaré; conjunto conhecido como o grupo das transformações conformes. Estas transformações são mais abrangentes no seguinte sentido. O grupo de Poincaré é constituído por 10 parâmetros associado às simetrias do espaço-tempo 4-dimensional: 4 translações, 3 rotações espaciais e 3 boosts; por sua vez o grupo conforme é definido por 15 parâmetros, que, além das 10 transformações de Poincaré, incluem uma dilatação global e outras 4 transformações chamadas de transformações conformes especiais [10,11]. Essas 15 transformações, geometricamente, preservam o ângulo formado entre geodésicas do espaço-tempo, incluindo situações além da geometria plana [10,11].

O outro elemento das simetrias do campo eletromagnético, o grupo de calibre, inicia-se com Weyl [12], que propôs, em 1918, uma generalização da Relatividade Geral em que transformações locais de escala seriam possíveis, na esperança de abordar com um mesmo princípio geométrico a gravitação e o eletromagnetismo. Apesar das dificuldades encontradas, sua ideia, conhecida como invariância de calibre abeliana, deu origem às teorias de calibres não abelianas, a base do modelo padrão da física de partículas.

Na medida que novas partículas elementares foram sendo propostas e descobertas, como o pósitron, a invariância das equações passaram a ser estudadas em detalhes. Assim, Dirac [13] mostrou, em 1936, a invariância conforme da equação de onda para a partícula relativística sem massa de spin-1/2. Em 1939, Wigner, utilizando o conceito de invariantes de simetrias, encontrou todas as representações unitárias irredutíveis do grupo de Poincaré, estabelecendo a primeira classificação geral das partículas subatômicas [14]. Fisicamente, no caso de Wigner, os invariantes são a massa, associada ao quadrado da norma do momento linear, e o spin, associado ao quadrado da norma do vetor de Pauli-Lubanski [4]. Este procedimento seria estendido com êxito na construção do modelo de quarks e glúons com o grupo de calibre $SU(3)$, cujas classificações de representações permitiram prever a existência de bárions até então desconhecidos e que foram observados experimentalmente [15,16].

Mais recentemente, em 1998, Maldacena [17], apresentou o que é conhecido como correspondência Anti-de Sitter/Teoria de Campos Conforme (em inglês, sigla AdS/CFT). Descoberta no contexto de teoria de cordas, onde é comum tratar teorias de campos em hipersuperfícies imersas em espaços de dimensões arbitrárias, tal correspondência conjectura sobre conexões entre a teoria quântica de campos e a gravitação, e em sua forma original relacionava uma Teoria de Campos Conforme num espaço-tempo 4-dimensional à geometria do espaço anti-de Sitter em 5 dimensões. À medida em que foi estudada, a correspondência foi estendida para considerar diferentes situações, como o acoplamento forte num plasma de quarks e glúons em cromodinâmica [18], a termodinâmica de buracos negros [19] e em matéria condensada, onde os sistemas são experimentalmente acessíveis, que é o caso dos férmions unitários [2,3].

Apesar destas aplicações citadas e de trabalhos recentes como o de Son [2], o caso não-relativístico das teorias conformes, em particular para equações descrevendo sistemas de spin 1 e spin 0, permanecem em muitos aspectos inexplorados, apesar da importância para a física da matéria condensada. Um procedimento para levar adiante, por exemplo, os resultados preliminares

de Son [2], é explorar a noção de covariância Galileana, como introduzida por Takahashi [20] e desenvolvidos ao longo das últimas duas décadas em várias direções, como a formulação covariante dos limites não-relativísticos das equações de Maxwell, os chamados limite elétrico e limite magnético [21,22], a formulação covariante da Equação de Schrödinger para partículas de spin 0 [23,24,25] e a equação de Pauli-Schrödinger, descrevendo partículas de spin 1/2 [23,24,25], ou ainda a formulação covariante do limite pós-Newtoniano da Relatividade Geral, a chamada gravitação Galileana [26,27]. Entretanto, as transformações conformes não foram ainda exploradas neste contexto; o que seria de interesse, como enfatizado acima, para a análise do análogo gravitacional do gás de férmions unitários. Nosso principal propósito aqui é desenvolver a formulação conforme associada a teorias descritas pela covariância Galileana. Especificamente, demonstramos que a equação de Schrödinger para partículas de spin 0 e os limites elétrico e magnético das equações de Maxwell são teorias conformalmente invariantes.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 2, as transformações conformes são descritas, iniciando por uma breve descrição histórica da sua origem na análise complexa, e a resolução de problemas de potencial. Prosseguimos então a caracterizar as transformações conformes como um grupo de simetria em termos de espaços métricos e quais são as consequências físicas associadas. São explorados os geradores de transformações infinitesimais e se estabelece a álgebra de Lie do grupo conforme, isomorfo à álgebra de Lie de um grupo especial ortogonal (SO). Dedicamos o capítulo 3 a estabelecer a variedade, o grupo, e a covariância galileana, que são a base da física não-relativística. São apresentadas como aplicações o caso da representação escalar, da representação de spin-1/2, e os limites não-relativísticos elétrico e magnético das equações de Maxwell. No capítulo 4, construímos a noção de covariância conforme a partir do espaço-tempo Galileano, que é um espaço de De Sitter (4,1). Neste caso fica evidente a importância de utilizarmos a noção de covariância Galileana. Como aplicação, inicialmente demonstramos que equação de Schrödinger para partículas livres massivas e de spin 0 são conformalmente invariantes. Na sequência, mostramos que os limites elétrico e magnético das equações de Maxwell são conformalmente invariantes. Para deduzir esses resultados, mostramos que a simetria conforme não-relativística se realiza como um grupo $SO(5,2)$. A dissertação se encerra no capítulo 5 com as conclusões finais e perspectivas futuras.

Capítulo 2

Simetria Conforme

Tendo sua origem matemática na Análise Complexa, a Física emprega simetrias conformes, entre outros, em problemas de potencial, como no potencial eletrostático criado por uma dada distribuição de cargas e no escoamento de fluidos em torno de obstáculos. Também é aplicada, e é o caso desta dissertação, como uma categoria da Teoria de Campos.

Deve-se notar que a maioria das teorias de campos não são invariantes por transformações de escala, nem por transformações conformes em geral. As que são recebem o nome de uma Teoria de Campos Conforme e são estudadas em detalhes principalmente em transições de fase, onde a teoria se torna invariante por escala no ponto de transição, e em teoria de cordas, onde a teoria de campo bidimensional feita sobre a superfície-mundo varrida por uma corda evoluindo no tempo é uma teoria de campo conforme.

Na seção 2.1 deste capítulo iremos caracterizar as transformações conformes do plano complexo e fazer uma aplicação típica em problemas de potencial para o escoamento de fluidos. Na seção 2.2 iremos introduzir de forma sucinta o instrumental básico da dissertação, fazendo a conceituação de Grupos e Álgebras de Lie e demais conceitos associados. A seção 2.3 tratará de como as transformações conformes se comportam do ponto de vista da métrica, e identificaremos os novos geradores infinitesimais que se unem aos já conhecidos momento linear e angular do grupo de Poincaré, que é um subgrupo do grupo conforme. O formalismo básico que se segue será baseado em Hamermesh [28] e Hassani [29]. A parte dedicada à simetria conforme será baseada em Blumenhagen e Plauschinn [10], Di Francesco, Mathieu e Sénéchal [11], e Wheeler [30].

2.1 Transformações Conformes

Sejam duas curvas contínuas, c_1 e c_2 , que se intersectam em um número finito de pontos e pertencem a um plano xy . Estabelecendo uma transformação de coordenadas através do par de equações $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ pode-se levar de forma única pontos do plano xy ao plano uv e vice-versa, logo há inversa e trata-se de uma bijeção. Com essa propriedade as curvas c_1 e c_2 são levadas a outras curvas c'_1 e c'_2 no plano uv e os pontos de interseção são mantidos.

O descritivo *conforme* deste tipo de transformação se deve ao fato que o ângulo formado nos pontos de interseção entre as curvas c_1 e c_2 e o ângulo formado nas curvas transformadas c'_1 e c'_2

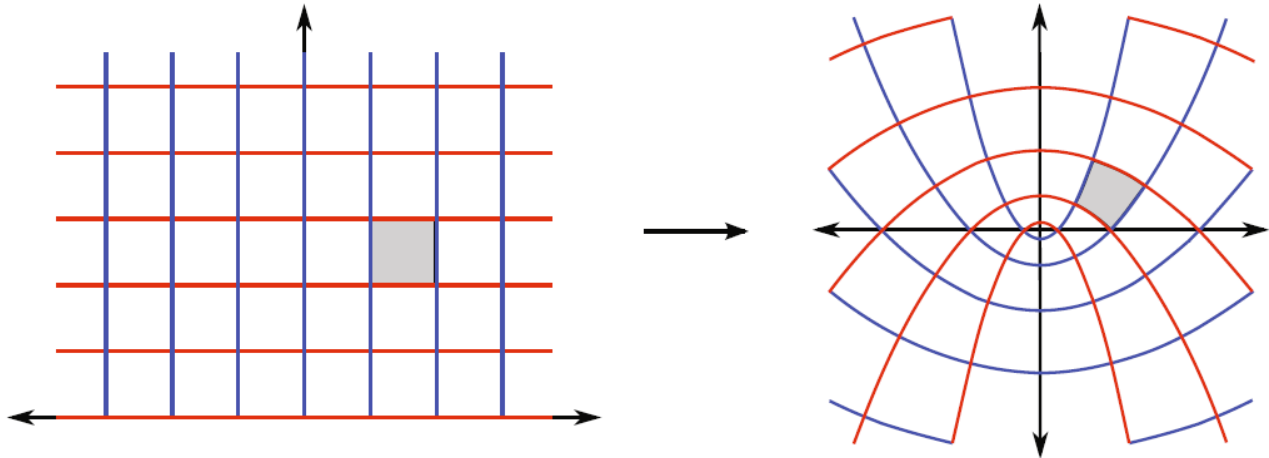


Figura 2.1: Transformação conforme entre dois sistemas de coordenadas ortogonais. Imagem retirada de [10].

é o mesmo, ou seja, se preservam. Isto está ilustrado pela figura 1, na passagem de coordenadas cartesianas (x, y) para coordenadas parabólicas $(u = 2xy, v = x^2 - y^2)$. Vamos mostrar agora quais são as condições necessárias para isso.

Seja $w(z)$ uma função complexa analítica, com $z = x + iy$, e que tem u e v como suas partes real e imaginária. O jacobiano da transformação de coordenadas é dado por

$$J = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix},$$

da analiticidade de $w(z)$ valem as equações de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$, logo

$$J = (u_x^2 + u_y^2),$$

e, como $w'(z) = u_x - iu_y$, tem-se claramente que

$$J = |w'(z)|^2.$$

Dos critérios de analiticidade de funções complexas a derivada não se anula, logo o jacobiano é sempre positivo, o que concorda com o anteriormente posto de que a transformação é uma bijeção.

Seja z_0 algum ponto em que c_1 e c_2 se interceptam no plano xy , w_0 o ponto correspondente no plano uv , z um ponto arbitrário sobre c_1 com w sendo seu correspondente em c'_1 . Por meio das relações:

$$\begin{aligned} z - z_0 &= r e^{i\alpha}, \\ w - w_0 &= r' e^{i\alpha'}, \\ \left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=z_0} &= \left\| \frac{dw}{dz} \right\|_{z=z_0} e^{-i\phi_0}, \\ \frac{w - w_0}{z - z_0} &= \frac{r'}{r} e^{i(\alpha' - \alpha)}, \end{aligned}$$

podemos inferir que no limite em que z tende a z_0 , α tende a ζ_1 , que é o ângulo entre a tangente da curva c_1 em z_0 e o eixo x . Similarmente α' tende a ω_1 , mas agora se referindo ao ponto w_0 na curva c'_1 . Logo a diferença entre o ângulo das tangentes é $\phi_0 = \zeta_1 - \omega_1$. Tomando z como pertencente à curva c_2 e procedendo de forma análoga concluímos que $\phi_0 = \zeta_2 - \omega_2$. Assim

$$\zeta_1 - \zeta_2 = \omega_1 - \omega_2$$

e está demonstrado que o ângulo entre as curvas permanece o mesmo.

A título de exemplo físico seja u o campo de velocidades do escoamento bidimensional de um fluido incompressível ($\nabla \cdot u = 0$) e irrotacional ($\nabla \times u = 0$). Da primeira condição existe uma função de fluxo $\nu(x, y)$ tal que

$$\begin{aligned} u &= (\partial_y \nu, -\partial_x \nu, 0) \\ &= \nabla \times (\nu \hat{z}). \end{aligned}$$

Da segunda, há um potencial de velocidade $\mu(x, y)$ tal que

$$u = \nabla \mu.$$

Ambas abordagens se reduzem a resolver o problema de Laplace para μ e ν . Pode-se construir então um potencial de velocidade complexo, Ω , tal que $\Omega(z) = \mu + i\nu$, que é uma função analítica que resolve o problema de Laplace e respeita as condições de contorno originais.

Seja o problema do escoamento contra uma parede plana, matematicamente equivalente ao fluxo estar restrito ao semiplano superior. Sua solução é $u_1 = u_0 \hat{x}$, com u_1 nulo abaixo da reta real, sendo fácil verificar que o potencial complexo correspondente é $\Omega_1(z) = u_0 z$.

O problema do escoamento contra paredes que formam 90° entre si, matematicamente equivalente ao fluxo estar restrito ao primeiro quadrante do plano xy , é possível de ser resolvido ao transformar esta condição de contorno na do problema anterior através da transformação conforme $w = z^2$, já que os argumentos serão dobrados e o primeiro quadrante será levado ao semiplano superior. Como o problema de Laplace permanece o mesmo em uma transformação conforme das coordenadas o potencial complexo que resolve este problema será $\Omega_2(z) = u_0 z^2$. O potencial de velocidade e a função de fluxo são $\mu = u_0(x^2 - y^2)$ e $\nu = 2u_0 xy$, e o campo de velocidades é $u = 2u_0(x, -y, 0)$.

Vamos agora apresentar os rudimentos de variedades diferenciáveis, tensor métrico e a teoria de grupos e álgebras de Lie necessários para o estudo de simetrias conformes mais gerais.

2.2 Formalismo básico

2.2.1 Variedades diferenciáveis, tensores e métrica

Uma variedade diferenciável \mathcal{M} é uma coleção de pontos conexos tal que a vizinhança de cada um deles é localmente similar a um espaço euclidiano n -dimensional, onde n será a dimensão da variedade. Por exemplo, qualquer superfície suave no \mathbb{R}^3 será uma variedade bidimensional pois pode ser aproximada por seu plano tangente. Ser localmente similar a um espaço euclidiano significa que, para uma vizinhança V_m de um ponto $m \in \mathcal{M}$, existe uma bijeção diferenciável

$\phi_m : V_m \rightarrow \mathbb{R}^n$, chamada mapa, tal que se m for alterado de forma contínua em V_m sua imagem em $\phi(V_m)$ também irá se alterar de forma contínua.

Como $\phi(m) \in \mathbb{R}^n$ pode ser definido um conjunto de funções $x^\mu(m) : V_m \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\phi(m) = (x^0(m), x^1(m), \dots, x^{n-1}(m)).$$

Estas são as coordenadas de m em \mathcal{M} . Variedades diferenciáveis então se tornam de primeiro interesse pois quando a passagem de uma carta da variedade (ϕ, V_m) para outra distinta (ϕ', V'_m) for diferenciável, então os resultados da análise no \mathbb{R}^n podem ser importados. Quando ϕ for k vezes diferenciável, a variedade é do tipo C^k . Se ϕ for uma função real analítica, então a variedade diferenciável é dita suave e de classe C^∞ .

Um tensor $T_{m_1 m_2 \dots m_q}^{a_1 a_2 \dots a_p}$ com p componentes contravariantes, q componentes covariantes, e ordem $p + q$ é um objeto matemático definido em variedades diferenciáveis tal que numa transformação de coordenadas $x'^\mu = f(x^\alpha)$ se transforma como

$$T_{m_1 m_2 \dots m_q}^{a_1 a_2 \dots a_p} = \sum_{b_i} \sum_{n_i} \left(\frac{\partial x'^{a_1}}{\partial x^{b_1}} \frac{\partial x'^{a_2}}{\partial x^{b_2}} \dots \frac{\partial x'^{a_p}}{\partial x^{b_p}} \right) \left(\frac{\partial x^{n_1}}{\partial x'^{m_1}} \frac{\partial x^{n_2}}{\partial x'^{m_2}} \dots \frac{\partial x^{n_q}}{\partial x'^{m_q}} \right) T_{n_1 n_2 \dots n_q}^{b_1 b_2 \dots b_p}.$$

Daqui em diante será usada a convenção da soma de Einstein, onde se soma sobre índices repetidos,

$$a_\mu b^\mu = a_0 b^0 + a_1 b^1 + \dots + a_{d-1} b^{d-1}.$$

Por exemplo, para dois pontos infinitesimalmente próximos na variedade, $x^\mu + dx^\mu$ e x^μ , o diferencial se transforma como um tensor contravariante de ordem 1 pois na transformação de coordenadas para x'^μ

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu.$$

Uma função escalar dependente do ponto da variedade seria um tensor de ordem 0, pois seu valor não muda ao mudarem as coordenadas do ponto, que permanece fixo, enquanto vetores são tensores de ordem 1, podendo ser contra ou covariantes. Tensores de segunda ordem podem ser representados por matrizes quadradas [29]. Campos tensoriais dependentes do ponto da variedade são amplamente empregados em Física, como o tensor de Faraday no Eletromagnetismo ou o tensor de momento-energia, que é o termo de fonte do campo gravitacional na Relatividade Geral [12], o que faz deles e as variedades diferenciais em que estão inseridos objetos-chave para o estudo de física contemporânea.

Algumas propriedades algébricas básicas de tensores são:

- Tensores do mesmo tipo podem ser combinados linearmente para criar um novo tensor. Por exemplo, $A^\mu_{\alpha\beta} = bB^\mu_{\alpha\beta} + cC^\mu_{\alpha\beta}$, onde b e c são escalares constantes;
- Tensores de tipos diferentes podem ser multiplicados para criar um novo tensor que possua o mesmo número de componentes contra e covariantes independentes. Por exemplo, $A^\mu_{\alpha\beta\gamma} = B^\mu_\alpha C_{\beta\gamma}$;

- Tensores podem ser contraídos uns dos outros e de si mesmos e terem sua ordem reduzida. Por exemplo, $A^\mu = B^{\mu\alpha}C_{\alpha\beta\gamma}D^\beta E^\gamma$. Quando um tensor de ordem 2 se contrai de si mesmo obtemos um escalar que é o traço da matriz que o representa, $T^\mu{}_\mu = tr(T^\mu{}_\nu)$.

Em uma variedade diferencial com geometria não-especificada a derivada parcial de um tensor não se transforma como um tensor [29], sendo necessário introduzir o conceito de derivada covariante. A título de exemplo vamos considerar um campo vetorial V^i no \mathbb{R}^2 descrito em coordenadas polares (r, θ) ,

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= V^i \mathbf{e}_i \\ &= V^r \hat{r} + V^\theta \hat{\theta},\end{aligned}$$

onde os vetores da base são $\hat{r} = (\cos \theta, \sin \theta)$ e $\hat{\theta} = r(-\sin \theta, \cos \theta)$.

$$\begin{aligned}\partial_r \hat{r} &= 0, & \partial_\theta \hat{r} &= \frac{\hat{\theta}}{r}, \\ \partial_r \hat{\theta} &= \frac{\hat{\theta}}{r}, & \partial_\theta \hat{\theta} &= -r\hat{r}.\end{aligned}$$

As derivadas parciais do vetor são

$$\begin{aligned}\partial_r \mathbf{V} &= (\partial_r V^r) \hat{r} + \left(\partial_r V^\theta + \frac{V^\theta}{r} \right) \hat{\theta}, \\ \partial_\theta \mathbf{V} &= (\partial_\theta V^r - rV^\theta) \hat{r} + \left(\partial_\theta V^\theta + \frac{V^r}{r} \right) \hat{\theta}.\end{aligned}$$

Definimos então a derivada covariante D_μ para vetores contravariantes como

$$D_\mu V^\alpha = \partial_\mu V^\alpha + \Gamma^\alpha_{\delta\mu} V^\delta,$$

onde $\Gamma^\alpha_{\delta\mu}$ é conhecida como conexão afim ou símbolo de Christoffel. Das derivadas dos vetores da base vê-se que $\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}$, $\Gamma^r_{\theta\theta} = -r$, e todos os outros termos são nulos. Assim,

$$\begin{aligned}D_r V^r &= \partial_r V^r, & D_r V^\theta &= \partial_r V^\theta + \frac{V^\theta}{r}, \\ D_\theta V^r &= \partial_\theta V^r - rV^\theta, & D_\theta V^\theta &= \partial_\theta V^\theta + \frac{V^r}{r}.\end{aligned}$$

Para o caso de coordenadas cartesianas na ausência de campo gravitacional, como é esta dissertação, a derivada covariante coincide com a derivada parcial usual. Para o estudo das derivadas covariantes de vetores covariantes, tensores de ordens maiores, mistos ou não, bem como demais propriedades algébricas e analíticas de tensores, recomenda-se a leitura de [29].

O interesse especial desta dissertação é sobre o tensor métrico, um tensor simétrico covariante de ordem 2. Um tensor com essas características permite definir a conexão afim [29], o intervalo entre pontos da variedade e também a norma de vetores contravariantes. Dois pontos infinitesimalmente próximos $x^\mu + dx^\mu$ e x^μ tem sua distância definida por

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \tag{2.2.1}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico. A norma de um vetor contravariante X^μ é definida de modo similar,

$$X^2 = g_{\mu\nu}(x)X^\mu X^\nu.$$

A Eq. (2.2.1) é a definição de elemento de linha. Por exemplo, no espaço euclidiano tridimensional descrito por coordenadas cilíndricas (r, θ, z) o intervalo entre pontos infinitesimalmente próximos é dado por

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

logo a forma do tensor métrico é

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

No caso da relatividade restrita o elemento de linha é a definição da noção de intervalo entre eventos no espaço-tempo [4], a grandeza que se preserva numa transformação de Lorentz,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Fazendo $c = 1$, a métrica deste espaço-tempo, conhecida como métrica do espaço de Minkowski $\mathcal{M}^{3,1}$, é escrita como

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta métrica indica que o intervalo entre eventos (t_A, \mathbf{x}_A) e (t_B, \mathbf{x}_B) pode ser:

- Nulo, quando $c^2(t_A - t_B)^2 = (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B)^2$, os eventos residem no mesmo cone de luz pois a informação poderia ser propagada de um evento a outro via fótons;
- Positivo, quando $c^2(t_A - t_B)^2 < (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B)^2$, um intervalo do tipo espaço, e os eventos estão causalmente separados;
- Negativo, quando $c^2(t_A - t_B)^2 > (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B)^2$, um intervalo do tipo tempo, e os eventos admitem relação causal.

A última propriedade interessante da métrica a ser aqui abordada é que, quando o determinante de uma métrica $g_{\mu\nu}$ é não-nulo, ela possui uma inversa $g^{\mu\nu}$ contravariante que satisfaz

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu,$$

onde δ^μ_ν é a delta de Kronecker. Isto permite [29] efetuar o abaixamento e levantamento de índices de um tensor. Por exemplo, para tensores $T_{\mu\nu}$ e V^μ ,

$$\begin{aligned} T^\mu_\nu &= g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu}, \\ V_\mu &= g_{\mu\alpha} V^\alpha. \end{aligned}$$

2.2.2 Grupos e Álgebras de Lie

Um conjunto G munido de uma operação (\cdot) é dito um grupo (G, \cdot) se seus elementos $g_i \in G$ satisfazem as seguintes definições:

Definição 2.2.1. Fechamento: $\forall g_1, g_2 \in G, g_1 \cdot g_2 = g_3 \in G$;

Definição 2.2.2. Associatividade: $\forall g_1, g_2, g_3 \in G, g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$;

Definição 2.2.3. Elemento Identidade: $\exists i \in G$ tal que $\forall g \in G$ vale $i \cdot g = g \cdot i = g$;

Definição 2.2.4. Elemento Inverso: $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G$ tal que $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = i$.

Quando a operação é comutativa, o grupo é dito Abeliano. O número de elementos em G determina sua ordem, podendo ser finita ou infinita, e a natureza dos elementos determina se o grupo é discreto ou contínuo. Por exemplo, o conjunto de números complexos $\{1, i, -1, -i\}$ forma um grupo abeliano discreto e de ordem finita em relação a multiplicação. Os números inteiros \mathbb{Z} formam um grupo abeliano discreto de ordem infinita em relação a operação de adição. O grupo das matrizes reais n -dimensionais de determinante não nulo, $Gl(n)$, forma um grupo não-abeliano contínuo de ordem infinita em relação a operação de multiplicação matricial.

O caso de interesse desta dissertação são os grupos a n -parâmetros finitos contínuos. Seja um elemento a deste grupo denotado por seus parâmetros, $a = (a^0, \dots, a^{n-1}) = (a^\mu)$. Este grupo será dito um Grupo de Lie quando

$$\begin{aligned} c &= f(a; b), \\ c^\mu &= f^\mu(a^0, \dots, a^{n-1}; b^0, \dots, b^{n-1}); \end{aligned}$$

onde f , a operação do grupo, é uma função analítica, podendo assim ser expandida em uma série de Taylor convergente em termos dos parâmetros a^μ e b^μ . Podemos reescrever os axiomas de grupo em termos de f como:

- A associativa: para duas transformações sucessivas $x' = f(x; a)$ e $x'' = f(x'; b)$, existe um elemento $c = f(a; b)$ tal que $x'' = f(x; c)$.
- A existência de elemento identidade: existe um "0" pertencente ao grupo tal que $x = f(x; 0) = f(0; x)$;
- A existência de elemento inverso: para $x' = f(x; a)$ existe um elemento a^{-1} tal que $x = f(x', a^{-1})$.

A operação do grupo é uma função analítica, de classe C^∞ , logo todo grupo de Lie e seus elementos constituem uma variedade diferenciável suave. Portanto grupos de Lie possuem estrutura algébrica, constituindo um grupo e satisfazendo seus axiomas, e possuem a estrutura topológica de uma variedade diferenciável.

Fazendo $x'^\mu = x^\mu + dx^\mu$ e usando $x'^\mu = f^\mu(x^0, \dots, x^{n-1}; \delta a^0, \dots, \delta a^{n-1})$, pode-se escrever dx^μ como

$$dx^\mu = F_\nu^\mu(x) \delta a^\nu,$$

onde

$$F_\nu^\mu(x) = \left(\frac{\partial f^\mu(x; a)}{\partial a^\nu} \right)_{a=0};$$

e $a = 0$ se refere ao elemento identidade. A transformação infinitesimal de uma função $J(x^\mu)$ é dada por

$$\begin{aligned} J(x'^\mu) &= J(x^\mu) + dJ(x^\mu) \\ &= J + \frac{\partial J}{\partial x^\mu} dx^\mu \\ &= J + (\partial_\mu J) F_\nu^\mu \delta a^\nu \\ &= J + i(-i F_\nu^\mu \delta a^\nu \partial_\mu) J \\ &= (1 + i \delta a^\nu X_\nu) J(x^\mu), \end{aligned}$$

onde os geradores infinitesimais do grupo são dados por

$$X_\nu = -i F_\nu^\mu \partial_\mu.$$

O operador que gera a transformação finita associada ao parâmetro a^ν é obtido pela exponenciação de seu gerador infinitesimal [11,12],

$$\chi = e^{ia^\nu X_\nu},$$

pois este aplicado a J coincide com sua expansão em série de Taylor. A inserção da unidade imaginária é feita por conveniência, uma vez que em uma representação matricial o operador será explicitamente hermitiano.

Munindo um grupo de Lie, G , com um novo operador bilinear chamado parentêsis de Lie, $[\cdot, \cdot]$, pode-se criar a Álgebra de Lie dos geradores infinitesimais, \mathfrak{g} . Esta álgebra é um campo vetorial sobre G [28,29] que satisfaz as seguintes definições:

Definição 2.2.5. Bilinearidade: $[uX_\alpha + vX_\beta, X_\gamma] = u[X_\alpha, X_\gamma] + v[X_\beta, X_\gamma]$ e $[X_\gamma, uX_\alpha + vX_\beta] = u[X_\gamma, X_\alpha] + v[X_\gamma, X_\beta]$;

Definição 2.2.6. Propriedade Alternante: $[X_\alpha, X_\alpha] = 0$;

Definição 2.2.7. Identidade de Jacobi: $[X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]] + [X_\gamma, [X_\alpha, X_\beta]] + [X_\beta, [X_\gamma, X_\alpha]] = 0$.

É tentador associar esta operação ao comutador de Heisenberg, $[A, B] = AB - BA$, mas isto não é um requisito. Por exemplo, o produto vetorial no \mathbb{R}^3 satisfaz uma álgebra de Lie. Álgebras de Lie podem existir independentemente de um grupo, assim como dois grupos distintos podem possuir a mesma álgebra. A propriedade de bilinearidade e a propriedade alternante implicam que o parêntesis de Lie é um operador anticomutativo. No caso de realmente se tratar do comutador de Heisenberg, obtém-se que

$$[X_\alpha, X_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma,$$

onde $C_{\alpha\beta}^\gamma = -C_{\beta\alpha}^\gamma$ são escalares chamados constantes de estrutura da álgebra, que a define de modo único [28,29]. Quando se tratar de um grupo comutativo, as constantes de estrutura serão nulas. Finalmente, se um conjunto de operadores $\{C_i\}$ comutar com todos os geradores do grupo,

$[C_i, X_\gamma] = 0$, então estes operadores serão múltiplos do operador identidade. Tratam-se dos invariantes do grupo, os operadores de Casimir. Isto é fácil de verificar pois a transformação geral é dada por $\exp(ia^\gamma X_\gamma)$, que quando expandida em série de potências retorna

$$\begin{aligned} [C_i, \exp(ia^\gamma X_\gamma)] &= [C_i, 1 + ia^\gamma X_\gamma - \frac{1}{2}(a^\gamma)^2(X_\gamma)^2 + \dots] \\ &= 0, \end{aligned}$$

já que cada potência comuta com os C_i .

A proxima seção se dedica a generalizar as transformações conformes para variedades além do plano complexo, com especial atenção ao caso do espaço de Minkowski.

2.3 Grupo e Álgebra Conforme

Seja $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico de um espaço-tempo. Uma transformação conforme das coordenadas é uma transformação inversível $x' = T(x)$ que deixa a métrica invariante a menos de um fator de escala [10,11],

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x') &= \Lambda(x)g_{\mu\nu}(x) \\ &= \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}(x). \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Com esta definição pode-se verificar que a transformação conforme preserva ângulos, já que o ângulo formado pela interseção de duas curvas com coordenadas a^μ e b^μ e suas respectivas curvas transformadas, a'^μ e b'^μ , é dado por

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{g'_{\mu\nu}(x')da'^\mu db'^\nu}{(g'_{\mu\nu}(x')da'^\mu da'^\nu)^{1/2}(g'_{\mu\nu}(x')db'^\mu db'^\nu)^{1/2}} \\ &= \frac{\Lambda(x)g_{\mu\nu}(x)da^\mu db^\nu}{(\Lambda(x)g_{\mu\nu}(x)da^\mu da^\nu)^{1/2}(\Lambda(x)g_{\mu\nu}(x)db^\mu db^\nu)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Quando $\Lambda(x)$ for infinitesimal, a métrica se transforma como

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x') &= \Lambda(x)g_{\mu\nu}(x) \\ &= g_{\mu\nu}(x) + \lambda(x)g_{\mu\nu}(x). \end{aligned}$$

Quando a métrica se transforma de forma mais geral, $g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, pode-se mostrar [11] que a ação do sistema, S , varia como

$$\delta S = \frac{1}{2} \int \sqrt{g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} d^d x,$$

onde g é o determinante da métrica, assumida positiva, e $T^{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento. Para a teoria ser invariante por essa transformação é necessário que $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$ [11], onde D_μ denota a

derivada covariante nas novas coordenadas. Como na transformação conforme $\delta g_{\mu\nu} = \lambda(x)g_{\mu\nu}$, a variação da ação é

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{2} \int \sqrt{g} T_{\mu}^{\mu} \lambda(x) d^d x \\ &= 0.\end{aligned}$$

Uma vez que $\lambda(x)$ e o domínio de integração são arbitrários e a ação precisa ser um extremo temos que teorias que são conformalmente invariantes devem ter tensor de energia-momento com traço nulo, $T_{\mu}^{\mu} = 0$.

As transformações conformes são de interesse físico pois para pontos pertencentes ao cone de luz, caracterizados na seção anterior por

$$\begin{aligned}ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \\ &= 0,\end{aligned}$$

qualquer que seja a métrica $g_{\mu\nu}$ sua multiplicação por alguma função dependente do ponto do espaço-tempo será uma nova métrica que preserva a estrutura do cone de luz. Isto exclui o grupo formado pelas transformações conformes como um grupo de simetria para uma teoria de partículas massivas, já que estas não podem ser aceleradas até a velocidade da luz.

Da definição dada pela Eq. (2.3.1) vemos que:

- A composição sucessiva de transformações conformes é fechada, pois resulta numa transformação que também é conforme;
- Há um elemento identidade, $\Lambda(x) = 1$;
- As transformações são associativas;
- Elas possuem um elemento inverso, $\Lambda(x)^{-1}$.

Assim, o conjunto das transformações conformes forma um grupo. O grupo das transformações de Poincaré, que tem como métrica original a de Minkowski, é um subgrupo natural que corresponde à $\Lambda = 1$. Usaremos $\eta_{\mu\nu}$ para indicar essa métrica em d -dimensões com assinatura $(-, +, +, +, \dots)$.

Procedemos com transformações infinitesimais $x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}$ para determinar os geradores do grupo e sua álgebra de Lie. Partindo da Eq. (2.3.1), a métrica se transforma em primeira ordem de ϵ como

$$\begin{aligned}\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta} &= (\delta_{\mu}^{\alpha} + \partial_{\mu} \epsilon^{\alpha})(\delta_{\nu}^{\beta} + \partial_{\nu} \epsilon^{\beta}) \eta_{\alpha\beta} \\ &= \eta_{\mu\nu} + (\partial_{\mu} \epsilon_{\nu} + \partial_{\nu} \epsilon_{\mu}),\end{aligned}\tag{2.3.2}$$

Na passagem de uma linha para outra na equação acima está implícita a contração com índices da métrica para abaixamento de índices e que o produto das derivadas parciais de ϵ foi desprezado por se tornar um termo de segunda ordem. Como trata-se de uma transformação conforme o termo entre parêntesis acima deve ser da forma $f(x)\eta_{\mu\nu}$. Para determinar o escalar $f(x)$ multiplica-se à esquerda a Eq. (2.3.2) com $\eta^{\mu\nu}$ e contraímos,

$$\eta^{\mu\nu} (\partial_{\mu} \epsilon_{\nu} + \partial_{\nu} \epsilon_{\mu}) = f(x) \eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu}.$$

Contando duas vezes os termos diagonais do lado esquerdo e lembrando que a contração da métrica com si mesma dá a dimensão do espaço-tempo, vemos que a forma do termo entre parêntesis deve ser

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d} \partial_\alpha \epsilon^\alpha \eta_{\mu\nu}, \quad (2.3.3)$$

que faz o fator de escala se tornar

$$\Lambda(x) = 1 + \frac{2}{d} \partial_\alpha \epsilon^\alpha.$$

O escalar $\partial_\alpha \epsilon^\alpha$ passará a ser escrito abreviadamente como $\partial \cdot \epsilon$.

Tomando ∂^ν em Eq. (2.3.3) para obter uma equação diferencial contendo apenas ϵ , e atentando que em coordenadas ortogonais as derivadas parciais comutam, temos

$$\begin{aligned} \partial^\nu (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) &= \frac{2}{d} \partial^\nu (\partial \cdot \epsilon) \eta_{\mu\nu}, \\ \partial_\mu (\partial \cdot \epsilon) + \square \epsilon_\mu &= \frac{2}{d} \partial_\mu (\partial \cdot \epsilon), \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

onde \square é o símbolo para o operador de d'Alembert, $\partial_\mu \partial^\mu$.

Quando $d = 2$ a equação acima se reduz a $\square \epsilon_\mu = 0$, e como pode ser visto em [10,11] isso implica a existência de infinitos tipos diferentes de transformações conformes, o que está associado ao exposto na seção anterior já que existem infinitas funções complexas analíticas pelas quais duas coordenadas podem se transformar. Os geradores infinitesimais para $d = 2$ definem uma álgebra infinito-dimensional conhecida como álgebra de de Witt, cuja extensão central é a álgebra de Virasoro [10].

Aplicando mais uma derivada parcial na Eq. (2.3.4),

$$\partial_\nu \partial_\mu (\partial \cdot \epsilon) + \square \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d} \partial_\nu \partial_\mu (\partial \cdot \epsilon).$$

Após permutar os índices μ com ν e adicionando-a a ela mesma,

$$2\partial_\mu \partial_\nu (\partial \cdot \epsilon) + \square (\partial_\nu \epsilon_\mu + \partial_\mu \epsilon_\nu) = \frac{4}{d} \partial_\mu \partial_\nu (\partial \cdot \epsilon).$$

Substituindo a Eq. (2.3.3) dentro do operador de d'Alembert, isolando a equação e multiplicando por $\eta^{\mu\nu} d/2$,

$$d\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu (\partial \cdot \epsilon) + \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} \square (\partial \cdot \epsilon) - 2\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu (\partial \cdot \epsilon) = 0.$$

Como $\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \square$ e a contração da métrica com si mesma é d , temos após nova divisão por 2,

$$(d-1)\square(\partial \cdot \epsilon) = 0. \quad (2.3.5)$$

Esta última equação diferencial implica que a transformação infinitesimal ϵ^μ é no máximo quadrática em x^μ , uma vez que $\partial \cdot \epsilon$ deve ser no máximo linear. A forma explícita de ϵ^μ é então dada por

$$\epsilon^\mu = a^\mu + b^{\mu\nu} x_\nu + c^{\mu\alpha\beta} x_\alpha x_\beta, \quad (2.3.6)$$

onde, por simetria, $c^{\mu\alpha\beta}$ deve ser simétrico nos últimos dois índices.

O termo constante a^μ não sofre restrições referentes à Eq. (2.3.3), e corresponde a uma translação infinitesimal gerada pelo operador de momento linear, $P_\mu = -i\partial_\mu$, já bem conhecido da álgebra do grupo de Poincaré.

Fazendo o mesmo para $b^{\mu\nu}$, através da Eq. (2.3.3),

$$\partial_\mu(b_{\nu\alpha}x^\alpha) + \partial_\nu(b_{\mu\alpha}x^\alpha) = \frac{2}{d}\eta_{\mu\nu}(\partial^\alpha b_{\alpha\beta}x^\beta).$$

Como $\partial_\mu x^\alpha = \delta_\mu^\alpha$ e $\partial^\alpha x^\beta = \eta^{\beta\alpha}$,

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{2}{d}\eta^{\beta\alpha}b_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}.$$

Deste modo b pode ser separada em um termo simétrico e outro antisimétrico,

$$b_{\mu\nu} = s\eta_{\mu\nu} + m_{\mu\nu},$$

com $s = b_\mu^\mu$.

O termo antisimétrico $m_{\mu\nu}$ gera rotações infinitesimais,

$$x'^\mu = (\delta_\nu^\mu + m_\nu^\mu)x^\nu,$$

tendo o operador de momento angular como gerador infinitesimal,

$$M_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu),$$

que, novamente, já integrava a álgebra do grupo de Poincaré.

O termo simétrico é responsável por uma transformação infinitesimal de escala,

$$x'^\mu = (1 + s)x^\mu.$$

Como isto é algo distinto do usual de Poincaré, vamos investigar seu gerador infinitesimal, que será chamado D . Dos conhecimentos desenvolvidos preliminarmente sobre grupos de Lie e observando a equação acima temos

$$\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial s}\right)_{s=0} = x^\mu,$$

portanto a forma do gerador infinitesimal D é

$$D = -ix^\mu\partial_\mu, \tag{2.3.7}$$

com transformação finita dada por $e^s x^\mu$

Vamos buscar agora mais condições de contorno para obter mais restrições sobre a forma de $c^{\mu\alpha\beta}$. Tomando ∂_ρ na Eq. (2.3.3) tem-se, após permuta de índices,

$$\partial_\rho\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\rho\partial_\nu\epsilon_\mu = \frac{2}{d}\partial_\rho(\partial \cdot \epsilon)\eta_{\mu\nu}, \tag{2.3.8a}$$

$$\partial_\nu\partial_\rho\epsilon_\mu + \partial_\mu\partial_\rho\epsilon_\nu = \frac{2}{d}\partial_\nu(\partial \cdot \epsilon)\eta_{\rho\mu}, \tag{2.3.8b}$$

$$\partial_\mu\partial_\nu\epsilon_\rho + \partial_\nu\partial_\mu\epsilon_\rho = \frac{2}{d}\partial_\mu(\partial \cdot \epsilon)\eta_{\nu\rho}. \tag{2.3.8c}$$

Adicionando a Eq. (2.3.8b) com a Eq. (2.3.8c) e subtraindo delas a Eq. (2.3.8a),

$$2\partial_\mu\partial_\nu\epsilon_\rho = \frac{2}{d}(-\eta_{\mu\nu}\partial_\rho + \eta_{\rho\mu}\partial_\nu + \eta_{\nu\rho}\partial_\mu)(\partial \cdot \epsilon). \quad (2.3.9)$$

que utilizada na Eq. (2.3.6) retorna a forma geral de $\partial_\rho(\partial \cdot \epsilon)$,

$$\begin{aligned} \partial_\rho(\partial \cdot \epsilon) &= \partial_\rho(b_\mu^\mu + 2c_{\mu\nu}^\mu x^\nu) \\ &= 2c_{\mu\rho}^\mu. \end{aligned}$$

Quando a equação acima é usada na Eq. (2.3.9),

$$\begin{aligned} 2\partial_\mu\partial_\nu(c_{\rho\alpha\beta}x^\alpha x^\beta) &= \frac{2}{d}(-\eta_{\mu\nu} \cdot 2c_{\gamma\rho}^\gamma + \eta_{\rho\mu} \cdot 2c_{\gamma\nu}^\gamma + \eta_{\nu\rho} \cdot 2c_{\gamma\mu}^\gamma) \\ c_{\rho\mu\nu} &= \eta_{\rho\nu}r_\mu + \eta_{\rho\mu}r_\nu - \eta_{\mu\nu}r_\rho, \end{aligned}$$

feita a identificação $r_\mu = \frac{1}{d}c_{\gamma\mu}^\gamma$. A transformação conforme devida ao termo quadrático na Eq. (2.3.6) é, então,

$$x'^\mu = x^\mu + 2x^\nu r_\nu x^\mu - x^2 r^\mu, \quad (2.3.10)$$

e recebe o nome de Transformação Conforme Especial, daqui em diante abreviada como TCE.

A transformação finita associada é

$$x'^\mu = \frac{x^\mu - r^\mu x^2}{1 - 2r \cdot x + r^2 x^2}, \quad (2.3.11)$$

e pode-se verificar que a Eq. (2.3.10) é a transformação infinitesimal correta fazendo

$$x'^\mu = x^\mu + \frac{\partial x'^\mu}{\partial r^\nu} dr^\nu. \quad (2.3.12)$$

Uma forma mais intuitiva e direta de verificar que esta é uma transformação conforme é observar que ela se trata de uma inversão de x^μ com relação a esfera unitária, seguida de uma translação por r^μ , e outra inversão do vetor resultante,

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu}{x^2} \rightarrow \frac{x^\mu}{x^2} - r^\mu \rightarrow \frac{\frac{x^\mu}{x^2} - r^\mu}{\left(\frac{x^\mu}{x^2} - r^\mu\right)^2},$$

o quadrado da norma após a inversão e translação é

$$\left(\frac{x^\mu}{x^2} - r^\mu\right)^2 = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2}r \cdot x + r^2,$$

que permite verificar a Eq. (2.3.11) ao tomar $1/x^2$ como fator comum na fração. A Figura 2 é um diagrama para este processo.

Para obter o gerador infinitesimal das TCEs basta se referir à Eq. (2.3.10), pois já está na forma infinitesimal adequada, encontrando

$$K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu).$$

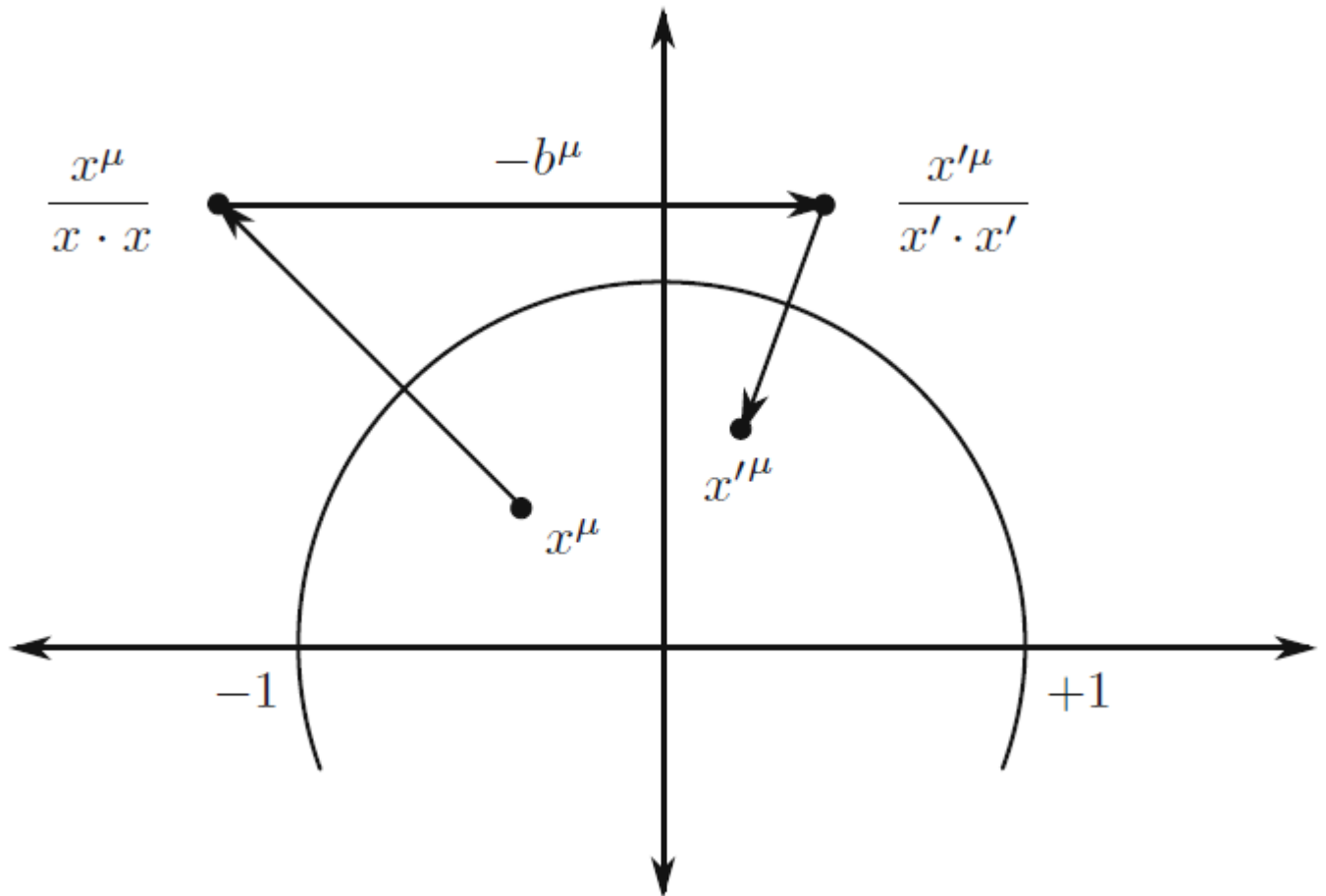


Figura 2.2: Representação diagramática para uma TCE. Imagem retirada de [10].

Quando a transformação conforme não é uma transformação de Lorentz gera-se efeito de aceleração nas coordenadas, que, entre outros, se traduz pelo Princípio da Equivalência no surgimento de um campo gravitacional na passagem de um referencial a outro, tendo como uma das conseqüências ser necessário redefinir a massa de repouso, adicionando a energia potencial associada a tal campo à energia usual mc^2 . Outra característica das transformações conformes é que apenas comparações locais de comprimentos e intervalos de tempo, via raios de luz, são significativas, já que a métrica passa a depender do ponto.

Obtidos todos os geradores, resta agora verificar suas relações de comutação. As seguintes relações algébricas são úteis para determinar as relações de comutação entre os novos D e K_μ com os já conhecidos P_μ e $M_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} [x^\alpha, \partial_\beta] &= -\delta_\beta^\alpha, \\ [x_\alpha, \partial_\beta] &= -\eta_{\alpha\beta}, \\ [AB, CD] &= A[B, C]D + AC[B, D] + [A, C]DB + C[A, D]B. \end{aligned}$$

Utilizando as relações acima em conjunto com as relações de comutação já conhecidas do grupo de Poincaré temos as seguintes regras de comutação que definem a álgebra de Lie do grupo conforme [10,11]:

$$[P_\mu, M_{\alpha\beta}] = i(\eta_{\mu\alpha}P_\beta - \eta_{\mu\beta}P_\alpha), \quad (2.3.13a)$$

$$[M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}] = i(\eta_{\beta\mu}M_{\alpha\nu} + \eta_{\alpha\nu}M_{\beta\mu} - \eta_{\alpha\mu}M_{\beta\nu} - \eta_{\beta\nu}M_{\alpha\mu}), \quad (2.3.13b)$$

$$[D, P_\mu] = iP_\mu, \quad (2.3.13c)$$

$$[K_\mu, P_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu}D - M_{\mu\nu}), \quad (2.3.13d)$$

$$[K_\mu, M_{\alpha\beta}] = i(\eta_{\mu\alpha}K_\beta - \eta_{\mu\beta}K_\alpha), \quad (2.3.13e)$$

$$[K_\mu, D] = iK_\mu. \quad (2.3.13f)$$

Todas as outras relações de comutação são nulas.

Diferentemente do grupo de Poincaré o operador $P^2 = P^\mu P_\mu$ não é um operador de Casimir já que

$$\begin{aligned} [D, P^\mu P_\mu] &= 2iP^\mu P_\mu, \\ [K_\alpha, P^\mu P_\mu] &= 4i(P_\alpha D - M_{\alpha\mu}P^\mu). \end{aligned}$$

Numa transformação conforme $P^\mu P_\mu = m^2$ se transforma como

$$g'_{\mu\nu}P'^\mu P'^\nu = \Lambda(x)g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{\Lambda(x)}P^\mu \right) \left(\frac{1}{\Lambda(x)}P^\nu \right) = \frac{m^2}{\Lambda(x)},$$

sendo invariante apenas para $m = 0$. Tal característica reforça que o grupo conforme é um grupo de simetria para teorias não-massivas.

2.4 O grupo conforme como um grupo de rotações em duas dimensões adicionais.

O grupo conforme de um espaço-tempo d -dimensional como o da seção passada é isomorfo ao Grupo Especial Ortogonal $SO(d, 2)$ com métrica $\eta_{AB} = \text{diag}(-1, 1, 1, \dots, -1, 1)$, [10,11]. Para isto

definimos operadores J_{AB} , com $A, B \in \{0, 1, \dots, d-1, d, d+1\}$, sujeitos a seguinte identificação:

$$J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}, \quad J_{d,d+1} = D, \quad J_{d,\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu), \quad J_{d+1,\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu). \quad (2.4.1)$$

Das definições acima e das relações de comutação exibidas das equações de Eq. (2.3.13a) até Eq. (2.3.13f), pode-se verificar [10,11] que a relação de comutação satisfeita pelos diferentes J_{AB} é

$$[J_{AB}, J_{CD}] = i(\eta_{AD}J_{BC} + \eta_{BC}J_{AD} - \eta_{AC}J_{BD} - \eta_{BD}J_{AC}),$$

que é a relação de comutação característica dos grupos $SO(p, q)$.

Assim, vemos que o grupo conforme do espaço de Minkowski usual da relatividade restrita, $\mathcal{M}^{3,1}$, é isomorfo ao grupo $SO(4, 2)$. De forma mais geral, o grupo conforme de $\mathcal{M}^{p,q}$ é isomorfo ao $SO(p+1, q+1)$.

O número de parâmetros livres dos grupos SO n -dimensionais é $\frac{1}{2}n(n-1)$, que no caso do $SO(4, 2)$ são 15: 4 operadores de momento linear, 6 de momento angular, 1 de dilatação, e os 4 das TCEs. Esse isomorfismo é mais claro ao escrever o espaço-tempo $\mathcal{M}^{3,1}$ como a superfície de um cone em duas dimensões adicionais, como pode ser visto em [30]. Isto é feito pela imersão de x^μ em um vetor 6-dimensional X^A , A indo de 0 à 5, que tem como componentes

$$X^\mu = \lambda x^\mu, \quad X^4 = \lambda, \quad X^5 = \frac{1}{2}\lambda x^2,$$

onde λ é um número real positivo. Assim, os pontos deste espaço-tempo 6-dimensional que pertenciam ao espaço-tempo original são os que obedecem a relação

$$g_{AB}X^AX^B = X^\mu X_\mu - 2X^4X^5 = 0$$

sendo a métrica do espaço

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4.2)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica original de $\mathcal{M}^{3,1}$. A métrica g_{AB} pode ser diagonalizada para η_{AB} , a métrica do espaço de Minkowski $\mathcal{M}^{4,2}$. Assim o grupo formado pelas rotações neste espaço, $X'^A = C_B^AX^B$, tem como geradores infinitesimais justamente os geradores identificados na Eq. (2.4.1).

Os momentos angulares J_{AB} são representados como matrizes antisimétricas, logo eles podem ser expandidos nesse espaço em termos da seguinte base de matrizes:

$$[M_{\mu\nu}]_{AB} = i \begin{pmatrix} \epsilon_{\mu\nu} & 0_{4 \times 2} \\ 0_{2 \times 4} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix},$$

$$[P_\mu]_{AB} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_{\mu 0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{\mu 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{\mu 2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{\mu 3} & 0 \\ \delta_{\mu 0} & -\delta_{\mu 1} & -\delta_{\mu 2} & -\delta_{\mu 3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[K_\mu]_{AB} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_{\mu 0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{\mu 1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{\mu 2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{\mu 3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{\mu 0} & -\delta_{\mu 1} & -\delta_{\mu 2} & -\delta_{\mu 3} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[D]_{AB} = -i \begin{pmatrix} 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 1} & 0_{4 \times 1} \\ 0_{1 \times 4} & 0 & -1 \\ 0_{1 \times 4} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O termo entre colchetes indica qual operador do grupo conforme está sendo representado pela matriz antisimétrica 6×6 de linha A e coluna B . Os termos $\epsilon_{\mu\nu}$ do momento angular são matrizes antisimétricas 4×4 que geram via exponenciação transformação de Lorentz $\Lambda_{\mu\nu} = \exp\left(\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)$ usual em $\mathcal{M}^{3,1}$.

Quando as matrizes acima são usadas na exponenciação para obter a rotação finita recuperamos as transformações conformes descritas ao longo do capítulo. Por exemplo, P_0 deve gerar uma translação a^0 em x^0 . Como a rotação 6-dimensional é da forma $X'^A = C_B^A X^B$ adequamos a representação matricial de P_0 com a métrica g contravariante

$$\begin{aligned} [P_0]_B^A &= g^{AM}[P_0]_{MB} \\ &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

que permite calcular a seguinte matriz de rotação

$$\begin{aligned}
\exp(ia^0 P_0) &= \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a^0 a^0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & a^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a^0 & 0 & 0 & 0 & -a^0 a^0/2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

O termo cúbico em $a^0 P_0$ e os termos subsequentes são nulos. A rotação de X'^A no espaço 6-dimensional é, então,

$$\begin{aligned}
X'^A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & a^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a^0 & 0 & 0 & 0 & -a^0 a^0/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \\ X^5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X^0 + a^0 X^4 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \\ X^5 - X^0 a^0 + \frac{1}{2} X^4 (-a^0 a^0) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Da definição $x^\mu = X^\mu/\lambda = X^\mu/X^4$, vemos que a rotação de X^A equivale em $\mathcal{M}^{3,1}$ a

$$\begin{aligned}
x'^0 &= \frac{X'^0}{X'^4} \\
&= x^0 + a^0.
\end{aligned}$$

Como outro exemplo, a dilatação é dada por

$$[D]_B^A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que permite obter a rotação no espaço 6-dimensional,

$$\begin{aligned}
 X'^A &= \exp(i\lambda D) X^A \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & e^\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\mu \\ X^4 \\ X^5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} X^\mu \\ e^{-\lambda} X^4 \\ e^\lambda X^5 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Sua projeção em $\mathcal{M}^{3,1}$ é

$$\begin{aligned}
 x'^\mu &= \frac{X'^\mu}{X'^4} \\
 &= \frac{X^\mu}{e^{-\lambda} X^4} \\
 &= e^\lambda x^\mu.
 \end{aligned}$$

que é a transformação finita para o operador de dilatação D . As demais transformações podem ser recuperadas de forma similar [30].

Encerrada essa exposição básica da simetria conforme, vamos agora explorar a segunda parte necessária para desenvolver o objetivo desta dissertação: a covariância Galileana, formulação covariante da Teoria de Campos Não-relativística.

Capítulo 3

Covariância Galileana

A simetria galileana é típica do regime de baixas velocidades ($v/c \ll 1$), como na mecânica clássica, em dinâmica de fluidos e teoria de muitos corpos [20], e na mecânica quântica no regime da equação de Schrödinger, que descreve a matéria condensada [5], principalmente em transições de fase em pontos quânticos críticos, superfluidez e física atômica-molecular [6].

Mesmo no regime ultrarelativístico ($v/c \approx 1$) esta simetria pode ser encontrada, como na teoria da interação forte [31], e quando se quer descrever partículas em um referencial estabelecido no cone de luz [32]. Torna-se então interessante buscar uma estrutura covariante, como feito no capítulo anterior, para estudar as simetrias e invariantes desta teoria, tarefa que torna-se extensa ao trabalhar com componentes individuais.

Este capítulo se baseia em Abreu, Santana e demais colaboradores [22,23,24,25], sendo possível encontrar em [24] uma revisão histórica da relatividade galileana. A seção 3.1 começa estabelecendo a variedade e a métrica necessárias para formular covariantemente a física galileana e os diferentes tipos de espaços que são contidos na variedade. Na seção 3.2, partindo dos vetores que são invariantes de Galilei, construímos o grupo de Galilei e na seção 3.3 são tratados como exemplo a Equação de Schrödinger obtida pela representação escalar, a equação de Pauli-Schrödinger pela representação de spin-1/2, e os limites não-relativísticos do eletromagnetismo, como feito por Le Belac e Lévy-Leblond [21], que recuperam os fenômenos da eletrostática e da magnetostática.

3.1 Variedade Galileana

Considere a distância entre dois pontos \mathbf{x} e \mathbf{y} no \mathbb{R}^3 . Sabe-se que ela é invariante sob rotação e translação do sistema de coordenadas e é dada por

$$r^2 = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Na física newtoniana esta distância é invariante pela transformação pura de Galilei,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}t,$$

daqui em diante chamada de *boost*. Na relatividade restrita uma transformação de Lorentz preserva o intervalo entre eventos no espaço-tempo, mas o comprimento acima seria contraído e os intervalos de tempo dilatados.

A transformação pura galileana faz as coordenadas espaciais passarem ter o tempo como parâmetro, então se torna interessante promover os vetores do espaço euclidiano para um espaço de dimensão maior tal que o tempo entre como coordenada e r^2 permaneça invariante. Isto pode ser implementado observando a seguinte expressão,

$$-\frac{1}{2}r^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - t \frac{\mathbf{x}^2}{2t} - t \frac{\mathbf{y}^2}{2t}. \quad (3.1.1)$$

Esta expressão pode ser interpretada como o produto interno de vetores num espaço pentadimensional \mathbb{G} , que será chamado Variedade Galileana, com produto interno dado por

$$g_{AB}x^Ay^B = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - x^4y^5 - x^5y^4. \quad (3.1.2)$$

Claramente a métrica do produto interno acima não é a métrica de Minkowski. Ela é, explicitamente,

$$(g_{AB})_{5 \times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.3)$$

que possui forma similar a da métrica apresentada na Eq. (2.4.2) do capítulo anterior. Para que este tipo de produto interno gere a Eq. invariante (3.1.1), base de onde começou esta argumentação, fazemos a seguinte imersão:

$$\begin{aligned} x^i &= x^i, \\ x^4 &= bt, \\ x^5 &= \frac{\mathbf{x}^2}{2x^4}, \end{aligned}$$

onde $1 \leq i \leq 3$, para coincidir com as componentes de \mathbf{x} em \mathbb{R}^3 , e o tempo t é multiplicado em x^4 por b , uma velocidade, para correta dimensionalidade. Daqui em diante ela será assumida implícita e unitária (1 m/s, por exemplo). Com esta escolha é fácil ver que x terá norma zero,

$$\begin{aligned} x^2 &= \mathbf{x}^2 - 2x^4x^5 \\ &= \mathbf{x}^2 - 2t \frac{\mathbf{x}^2}{2t} \\ &= 0, \end{aligned}$$

logo os vetores que serão invariantes galileanos no espaço \mathbb{G} são os de norma nula.

O tensor da métrica está sujeito a condição $(g_{AB})^{-1} = g^{AB}$. Como a matriz acima é a sua própria inversa, tem-se que o abaixamento e levantamento de índices $x_A = g_{AB}x^B$ se dá como:

$$\begin{aligned} x_i &= x^i, \\ x_4 &= -x^5, \\ x_5 &= -x^4, \end{aligned}$$

onde $1 \leq i \leq 3$. Assim como em Minkowski, a norma de algum x geral pertencente a \mathbb{G} pode ser tanto positiva, nula, ou negativa, já que

$$x_A x^A = \mathbf{x}^2 - 2x^4 x^5. \quad (3.1.4)$$

A geometria da Variedade Galileana pode abarcar:

- O espaço de Minkowski com assinatura $(-, +, +, +)$, quando $x^2 = \mathbf{x}^2 - (x^4)^2$, sob imersão $x = (\mathbf{x}, \frac{x^4}{\sqrt{2}}, \frac{x^4}{\sqrt{2}})$,
- O euclideo, quando $x^2 = \mathbf{x}^2$, sob imersão $x = (\mathbf{x}, x^4, 0)$.

Um espaço correlato a este particularmente interessante é um em que vetores se transformam linearmente como

$$\begin{aligned} x'^A &= U^A_B x^B \\ &= \left(\mathbf{x}, \frac{x^4 + x^5}{\sqrt{2}}, \frac{x^4 - x^5}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

A representação matricial desta transformação linear é

$$U^A_B = \begin{pmatrix} I_3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

onde I_3 é a matriz identidade 3×3 . Vale que $U = U^{-1}$ e o produto interno da Variedade Galileana se transforma como

$$\begin{aligned} g_{AB} x^A y^B &= U^A_M g_{AB} U^B_N x'^M y'^N \\ &= s_{MN} x'^M y'^N \\ &= \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}' - x'^4 y'^4 + x'^5 y'^5, \end{aligned}$$

onde U diagonaliza a métrica de g para s ,

$$s_{MN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tal métrica é a de um espaço chamado de *de Sitter* em 4+1 dimensões, isomorfa ao $\mathcal{M}^{4,1}$.

Definida a estrutura métrica, vamos agora estudar as transformações que formam o grupo de Galilei.

3.2 Transformações de Galilei

O grupo de Galilei, G , é definido pelas seguintes transformações:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{a}, \\ t' &= t + b,\end{aligned}$$

onde R é a matriz de rotação, \mathbf{v} é a velocidade do boost, \mathbf{a} é uma translação espacial pura, e b é uma translação temporal pura. Denotando uma transformação de Galilei das coordenadas pela quadrupla $g = (b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R)$, é direto verificar as propriedades de grupo [23,24],

- O elemento identidade é dado por $(0, 0, 0, 1)$;
- A inversa de uma transformação é $g^{-1} = (-b, -R^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{b}\mathbf{v}), -R^{-1}\mathbf{v}, R^{-1})$;
- As transformações são fechadas, já que duas transformações consecutivas g_1 e g_2 formam uma transformação de Galilei dada por $g_2g_1 = (b_2 + b_1, \mathbf{a}_2 + R_2\mathbf{a}_1 + b_1\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + R_2\mathbf{v}_1, R_2R_1)$, o que permite verificar a associativa.

Os operadores que geram as transformações em \mathbf{x} e t são:

- $\mathbf{P} = -i\nabla$, o operador que gera as translações espaciais;
- $\mathbf{J} = -i\mathbf{x} \times \nabla$, o operador que gera as rotações;
- $\mathbf{B} = it\nabla$, o operador que gera os boosts;
- $H = i\partial_t$, o operador que gera a translação temporal.

As relações de comutação não nulas são dadas por:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k; \quad (3.2.1a)$$

$$[J_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B_k; \quad (3.2.1b)$$

$$[J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}P_k; \quad (3.2.1c)$$

$$[B_i, H] = -iB_i. \quad (3.2.1d)$$

Sendo \mathbf{P}^2 e $(\mathbf{B} \times \mathbf{P})^2$ os operadores de Casimir [23,24]. Como provado por Inönü e Wigner [33] através desta representação unitária não é possível obter a dinâmica da mecânica newtoniana. Para isto é necessário efetuar uma extensão central do grupo de Galilei.

Seja A um grupo de Lie e $\tilde{A} = \mathbb{R} \times A$ sua extensão central. A extensão altera as relações de comutação dos geradores infinitesimais a_i de A , com $i \in \mathbb{N}$, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}[a_i, a_j] &= c_{ij}^k a_k + \beta_{ij} a_0, \\ [a_i, a_0] &= 0.\end{aligned}$$

Os c_{ij}^k são as constantes de estrutura originais, a_0 é o vetor da base que estende o grupo, e β_{ij} é o elemento central da álgebra estendida. Para o grupo de Galilei escolhe-se estender a relação de comutação nula entre os operadores de boost e momento,

$$[B_i, P_j] = im\delta_{ij}I. \quad (3.2.2)$$

Deste modo passam a ser três os operadores de Casimir [23,24]:

$$\begin{aligned} M &= mI; \\ U &= H - \frac{\mathbf{P}^2}{2m}; \\ S^2 &= (\mathbf{J} - \mathbf{B} \times \mathbf{P})^2. \end{aligned}$$

U se associa à energia potencial, S com o momento angular intrínscico do sistema. Mais à frente se mostrará que m é, de fato, a massa.

Vamos agora analisar as transformações do ponto de vista das componentes. Em termos delas, as transformações de Galilei se dão como

$$\begin{aligned} x'^i &= R_j^i x^j + v^i x^4 + a^i, \\ x'^4 &= x^4 + b, \\ x'^5 &= x^5 + v_i R_j^i x^j + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 x^4. \end{aligned}$$

A forma de x'^5 pode ser verificada utilizando $g_{MN} x'^M x'^N = 0$. Logo a matriz da transformação de Galilei G_N^M tal que $x'^M = G_N^M x^N + a^M$ é dada por

$$G_N^M = \begin{pmatrix} R_1^1 & R_2^1 & R_3^1 & v^1 & 0 \\ R_1^2 & R_2^2 & R_3^2 & v^2 & 0 \\ R_1^3 & R_2^3 & R_3^3 & v^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_i R_1^i & v_i R_2^i & v_i R_3^i & \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2.3)$$

Como matrizes de rotação são ortogonais, $R^T R = I$, a inversa $G_M^N = (G_N^M)^{-1}$ é

$$G_M^N = \begin{pmatrix} R_1^1 & R_2^1 & R_3^1 & 0 & -v^1 \\ R_1^2 & R_2^2 & R_3^2 & 0 & -v^2 \\ R_1^3 & R_2^3 & R_3^3 & 0 & -v^3 \\ -v_i R_1^i & -v_i R_2^i & -v_i R_3^i & 1 & \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da quinta linha desta matriz é fácil ver que numa transformação de Galilei ∂_5 é um invariante,

$$\begin{aligned} \partial'_5 &= G_5^M \partial_M \\ &= \partial_5 \\ &= -im, \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

onde $-im$ é um rótulo para este invariante do grupo. Além disso, como $G_M^N G_N^M = 1$, o operador de d'Alembert não se altera,

$$\begin{aligned} \partial'_M \partial'^M &= G_A^M G_M^A \partial_A \partial^A \\ &= \partial_A \partial^A \\ &= -k^2, \end{aligned}$$

onde $-k^2$ é outro invariante.

É fácil perceber que o momento linear clássico $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ muda em orientação devido a rotação e depois em orientação e módulo devido ao boost. Porém, pode-se construir um vetor p^M invariante em \mathbb{G} tal que

$$\begin{aligned} p^M &= (\mathbf{p}, p^4) \\ &= m, p^5 \\ &= E), \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

assim,

$$\begin{aligned} g_{MN}p^M p^N &= \mathbf{p}^2 - 2mE \\ &= 0, \end{aligned}$$

que é a relação de dispersão clássica na ausência de energia potencial, onde E é identificado como a energia cinética, $\mathbf{p}^2/2m$. É importante notar que a Eq. (3.2.5) traz consigo uma imersão implícita, já que a quarta e a quinta componente poderiam ser escolhidas de forma diferente. Esta imersão é especialmente conveniente, além da relação de dispersão já citada, por concordar com o fato de ∂_5 ser um invariante, já que derivadas parciais nas coordenadas são associadas em mecânica quântica ao operador de momento,

$$\begin{aligned} P_A &= (\mathbf{p}, -E, -m) \\ &= -i\partial_A \\ &= (-i\nabla, -i\partial_t, -i\partial_5); \end{aligned}$$

logo, a massa é o invariante $i\partial_5$, podendo ser encarada como geradora das translações na quinta dimensão.

Como se sabe do grupo de Poincaré e do grupo conforme, quando a transformação é da forma $x'^A = G_B^A x^A + a^A$ os geradores infinitesimais associados são o momento linear, P_A , e o momento angular, M_{AB} , que se identifica com os geradores obtidos anteriormente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C_i &= M_{4i}, & K_i &= M_{5i} = -B_i + x_i P_5, \\ D &= M_{54}, & J_i &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} M_{jk}. \end{aligned}$$

As relações de comutação definidas nas Eqs. de (3.2.1a) até (3.2.1d), além da relação do grupo estendido na Eq. (3.2.2), passam a ser escritas como em [23]:

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk} J_k, & [J_i, C_j] &= i\epsilon_{ijk} C_k, \\ [J_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk} K_k, & [J_i, P_j] &= i\epsilon_{ijk} P_k, \\ [D, K_i] &= iK_i, & [D, P_5] &= iP_5, \\ [P_4, D] &= iP_4, & [P_4, K_i] &= iP_i, \\ [K_i, C_j] &= i\delta_{ij} D + i\epsilon_{ijk} J_k, & [C_i, D] &= iC_i, \\ [P_i, C_j] &= i\delta_{ij} P_4, & [P_5, C_i] &= iP_i, \\ [P_i, K_j] &= i\delta_{ij} P_5. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Vale notar que a última relação de comutação listada é mais uma forma de ver que o invariante $M = mI$, citado anteriormente na extensão central, é mesmo a massa, pois fizemos $P_5 = -P^4 = -m$.

Vamos agora usar a identificação de mecânica quântica $P_A = -i\partial_A$ para obter a equação de Schrödinger na representação escalar e a equação de Pauli-Schrödinger na representação de spin $\frac{1}{2}$, e usaremos a transformação de vetores galileanos para obter os limites elétrico e magnético do eletromagnetismo.

3.3 Exemplos

3.3.1 Representação escalar e a Equação de Schrödinger

Seja $\phi(x^A)$ uma função escalar em \mathbb{G} . De $P_M P^M = 0$, então

$$\begin{aligned} \partial_M \partial^M \phi &= (\nabla^2 - 2\partial_t \partial_5) \phi, \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Como ∂_5 é um invariante, $\partial_5 \phi(x^A) = -im\phi(x^A)$, temos

$$\phi(x^A) = e^{-imx^5} \psi(\mathbf{x}, t),$$

que utilizada em conjunto com a Eq. (3.3.1) resulta em

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - 2\partial_t \partial_5) \phi &= 0, \\ e^{-imx^5} (\nabla^2 \psi - 2\partial_t (-im)\psi) &= 0. \end{aligned}$$

Como a exponencial não se anula obtemos

$$i\partial_t \psi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t),$$

onde ψ é a função de onda para a partícula livre. Logo, a representação escalar retorna a equação de Schrödinger para a partícula livre com $\hbar = 1$.

3.3.2 Representação de spin $\frac{1}{2}$ e as equações de Pauli-Schrödinger

A equação de Dirac é a equação de onda para partículas massivas de spin-1/2, possuindo apenas derivadas de primeira ordem, dada por

$$(i\gamma^M \partial_M - k)\psi = 0, \tag{3.3.2}$$

onde os objetos matemáticos γ^M são tais que ao multiplicar a equação acima pelo operador diferencial conjugado retornamos à equação de Klein-Gordon.

$$\begin{aligned} (i\gamma^N \partial_N + k)(i\gamma^M \partial_M - k)\psi &= (-\gamma^N \gamma^M \partial_N \partial_M - k^2)\psi - ik(\gamma^N \partial_N - \gamma^M \partial_M)\psi \\ (-\gamma^N \gamma^M \partial_N \partial_M - k^2)\psi &= 0. \end{aligned}$$

Para que a equação acima coincida com a equação de Klein-Gordon os γ^M devem obedecer uma álgebra de Clifford,

$$\gamma^M \gamma^N = \frac{1}{2} \{\gamma^M, \gamma^N\} = g^{MN},$$

e sua representação matricial é a mesma de [23],

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}, \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{2}I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}I_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde as σ_i são as matrizes de Pauli e I_2 é a matriz identidade 2×2 .

Logo, com ψ sendo o spinor $\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$, sua substituição com as γ^μ na Eq. (3.3.2) e com $k = 0$ retorna o par de equações

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \nabla \phi + I_2 \sqrt{2} \partial_5 \chi &= 0, \\ -I_2 \sqrt{2} \partial_4 \phi - \sigma \cdot \nabla \chi &= 0, \end{aligned}$$

que são as equações de Pauli-Schrödinger. Fazendo $\partial_4 = \partial_t$ e usando o invariante $i\partial_5 = m$ pode-se verificar [24] que ϕ e χ satisfazem individualmente a equação de Schrödinger, sendo equações de onda descrevendo uma partícula massiva não-relativística de spin 1/2.

3.3.3 Os limites elétrico e magnético das equações de Maxwell

Vamos considerar aqui o caso restrito de transformações galileanas puras, sem translações e quando a matriz de rotação é a identidade. Neste caso um vetor galileano X^A se transforma como $X'^A = G^A_B X^B$, tendo componentes

$$\begin{aligned} X'^i &= X^i + v^i X^4, \\ X'^4 &= X^4, \\ X'^5 &= X^5 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{X} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 X^4. \end{aligned}$$

Tomando a 4-corrente usual $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ definida no espaço de Minkowski, vê-se que as imersões na variedade galileana $j^A = (\mathbf{j}, \rho, 0)$ e $j^A = (\mathbf{j}, 0, \rho)$ se transformam de duas formas, respectivamente:

$$\rho' = \rho, \tag{3.3.3a}$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} + \rho \mathbf{v}; \tag{3.3.3b}$$

e

$$\rho' = \rho + \mathbf{j} \cdot \mathbf{v}, \tag{3.3.4a}$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j}. \tag{3.3.4b}$$

O primeiro par de equações está associado ao chamado limite elétrico e o segundo par ao limite magnético, dois limites não-relativísticos distintos para o eletromagnetismo, assim definidos por Le Bellac e Lévy-Leblond [21]. A nomeação é assim escolhida pois, para um vetor que se transforma por Lorentz, a primeira imersão corresponde ao limite não-relativístico $v/c \ll 1$ e $|\mathbf{j}| \ll c|\rho|$, isto é,

ser um vetor do tipo tempo. Tais condições implicam carga líquida se deslocando suficientemente devagar, logo o campo elétrico é o dominante, típico da eletrostática, $E \gg cB$. Naturalmente a segunda imersão é o limite não-relativístico para vetores do tipo espaço, associados a condições em que há corrente mas não há acúmulo de carga, típico da magnetostática, quando $E \ll cB$.

Em termos do tensor de Faraday, F_{AB} , as equações de Maxwell são

$$\partial^A F_{AB} = j_B, \quad (3.3.5a)$$

$$\partial_M F_{AB} + \partial_A F_{BM} + \partial_B F_{MA} = 0. \quad (3.3.5b)$$

Para obter equações diferenciais em termos dos campos elétrico e magnético usamos a forma explícita do tensor de Faraday,

$$F_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & c_1 & d_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & c_2 & d_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & c_3 & d_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & 0 & R \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -R & 0 \end{pmatrix},$$

que aplicada às equações Eq. (3.3.5a) e (3.3.5b) resulta em

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{c} &= j_4 - \partial_4 R, \\ \nabla \times \mathbf{c} + \partial_4 \mathbf{B} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{d} &= j_5 + \partial_5 R, \\ \nabla \times \mathbf{d} + \partial_5 \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} - \partial_4 \mathbf{d} - \partial_5 \mathbf{c} &= \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Os campos são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \nabla A_4 - \partial_4 \mathbf{A}, & \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{d} &= \nabla A_5 - \partial_5 \mathbf{A}, \end{aligned}$$

onde \mathbf{A} é o potencial vetor.

De acordo com as Eqs. (3.3.3a) e (3.3.3b), para obtermos o limite elétrico escolhemos as seguintes imersões

$$x^A = (\mathbf{x}, t, 0), \quad j_A = (\mathbf{j}, 0, \rho), \quad A^A = (\mathbf{A}, 0, -\phi).$$

Assim $\partial_4 = \partial_t$ e podemos considerar $i\partial_5 = 0$ um invariante. Se fizermos $\mathbf{c} = -\partial_t \mathbf{A} = 0$, $\mathbf{d} = \mathbf{E}$ é o campo elétrico e as equações de Maxwell resultantes dessas escolhas são

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} &= \mathbf{j}, \\ \mathbf{E} &= -\nabla \phi, & \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

A escolha de calibre $\partial_A A^A = 0$ se reduz a $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\partial_t \phi$, o calibre de Lorenz. O movimento de cargas elétricas é capaz de criar um campo magnético, mas um campo magnético que varia no tempo não criaria um campo elétrico.

Para obter o limite magnético seguimos as equações Eq. (3.3.4a) e (3.3.4b), logo permutamos apenas as coordenadas 4 e 5 de j_A e A_A , mantendo a escolha para x^A . Desta vez $\mathbf{c} = \mathbf{E}$ é o campo elétrico, $R = 0$ e $\mathbf{d} = 0$ por suas próprias definições, e as equações de Maxwell obtidas são

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\
 \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \mathbf{j}, \\
 \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}, & \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}.
 \end{aligned}
 \tag{3.3.7}$$

A escolha de calibre $\partial_A A^A = 0$ se reduz a $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, o calibre de Coulomb. A variação temporal do campo magnético cria um campo elétrico mas não o contrário, valendo a lei de Ampère para a magnetostática.

Capítulo 4

Teoria de Campos Conforme não-relativística

Neste capítulo rededuzimos parte dos resultados de Son [2]. Iremos nos ater às transformações conformes das coordenadas da física não-relativística e a álgebra de seus respectivos geradores. Estudamos como casos particulares a simetria conforme não-relativística da equação de Klein-Gordon e como novidade o caso de spin 1, das equações de Maxwell. Não nos dedicaremos às questões que cercam a busca do análogo gravitacional ao gás de férmions unitários.

Na seção 4.1 mostramos que a equação de Schrödinger para a partícula livre possui simetria conforme. Formamos o grupo conforme não-relativístico a partir dos geradores infinitesimais relativísticos que comutam com a massa e identificamos que o grupo está contido no $SO(5, 2)$. Usamos então os geradores infinitesimais para obter as transformações conformes finitas da física não-relativística. Na seção 4.2 retomamos dois dos exemplos do capítulo anterior, a representação escalar e os limites elétrico e magnético das equações de Maxwell, para investigar quais restrições são necessárias à geometria do espaço 7-dimensional para que as teorias de campo da física não-relativística tenham simetria conforme.

Ao longo deste capítulo os operadores escritos com til denotam operadores relativísticos.

4.1 O grupo conforme não-relativístico

Um gás de férmions unitários interage através de um potencial de contato. Logo, a Hamiltoniana do sistema pode ser considerada a Hamiltoniana de partículas livres contanto que a função de onda do sistema ψ esteja restrita à seguinte condição quando duas partículas com momento de spin opostos colidirem [2]:

$$\psi(\mathbf{x}_1^\uparrow, \mathbf{x}_2^\uparrow, \dots; \mathbf{x}_1^\downarrow, \mathbf{x}_2^\downarrow, \dots) \rightarrow \frac{C}{|\mathbf{x}_i^\uparrow - \mathbf{x}_j^\downarrow|} + O(|\mathbf{x}_i^\uparrow - \mathbf{x}_j^\downarrow|),$$

onde \mathbf{x}_i^\uparrow denota a posição da i -ésima partícula com momento de spin $+1/2$ e \mathbf{x}_j^\downarrow denota a posição da j -ésima partícula com momento de spin $-1/2$.

Para que o sistema de átomos frios tenha invariância conforme o primeiro passo é mostrar que a equação de Schrödinger livre possui tal simetria. Para isso, tomemos a equação de Klein-Gordon sem massa em 4+1 dimensões, que é uma equação conformalmente simétrica obtida do invariante $\tilde{P}_\mu \tilde{P}^\mu = 0$,

$$\begin{aligned}\square\phi &= -\partial_t^2\psi + \sum_{i=1}^4 \partial_i^2\psi \\ &= 0.\end{aligned}$$

Trocando $x^0 = t$ e x^4 por coordenadas no cone de luz, $x^\pm = \frac{x^0 \pm x^4}{\sqrt{2}}$, a equação de Klein-Gordon passa a ser escrita como

$$\left(-2\frac{\partial}{\partial x^-}\frac{\partial}{\partial x^+} + \sum_{i=1}^3 \partial_i^2\right)\psi = 0.$$

De modo análogo ao capítulo anterior, se escolhermos $\tilde{P}_- = -i\frac{\partial}{\partial x^-} = -m$, a coordenada x^+ do cone de luz assume papel de tempo e chega-se à equação de Schrödinger para a partícula livre,

$$\left(2im\frac{\partial}{\partial x^+} + \partial_i^2\right)\psi = 0, \quad (4.1.1)$$

assim o grupo das simetrias desta equação está contido no grupo conforme original.

Com μ e ν indo de 0 à 4, são 21 os geradores infinitesimais do grupo conforme relativístico: 5 de \tilde{P}^μ , 5 de \tilde{K}^μ , 1 de \tilde{D} e 10 de $\tilde{M}^{\mu\nu}$. Usando a identificação da Eq. (2.4.1) feita no Capítulo 2,

$$\tilde{J}^{\mu\nu} = \tilde{M}^{\mu\nu}, \quad \tilde{J}^{56} = \tilde{D}, \quad \tilde{J}^{5,\mu} = \frac{1}{2}(\tilde{P}^\mu - \tilde{K}^\mu), \quad \tilde{J}^{6,\mu} = \frac{1}{2}(\tilde{P}^\mu + \tilde{K}^\mu),$$

os $\tilde{J}^{\mu\nu}$ tem como relação de comutação a do grupo especial ortogonal

$$[\tilde{J}^{AB}, \tilde{J}^{CD}] = i(\eta^{AD}\tilde{J}^{BC} + \eta^{BC}\tilde{J}^{AD} - \eta^{AC}\tilde{J}^{BD} - \eta^{BD}\tilde{J}^{AC}),$$

com métrica $\eta_{MN} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1, 1, -1, 1)$, se tratando então do grupo $SO(5, 2)$ de $\frac{7(7-1)}{2} = 21$ parâmetros livres, um grupo 7-dimensional.

O grupo conforme não-relativístico é formado pelo conjunto dos operadores que comutam com a massa, $\tilde{P}^+ = M = mI$. As relações de comutação não-nulas do grupo conforme usual eram:

$$\begin{aligned}[\tilde{M}^{\mu\nu}, \tilde{M}^{\alpha\beta}] &= i(\eta^{\mu\alpha}\tilde{M}^{\nu\beta} + \eta^{\nu\beta}\tilde{M}^{\mu\alpha} - \eta^{\mu\beta}\tilde{M}^{\nu\alpha} - \eta^{\nu\alpha}\tilde{M}^{\mu\beta}), \\ [\tilde{M}^{\mu\nu}, \tilde{P}^\alpha] &= i(\eta^{\mu\alpha}\tilde{P}^\nu - \eta^{\nu\alpha}\tilde{P}^\mu), \\ [\tilde{D}, \tilde{P}^\mu] &= -i\tilde{P}^\mu, \\ [\tilde{D}, \tilde{K}^\mu] &= i\tilde{K}^\mu, \\ [\tilde{P}^\mu, \tilde{K}^\nu] &= -2i(\eta^{\mu\nu}\tilde{D} + \tilde{M}^{\mu\nu}).\end{aligned}$$

Os operadores $H = \tilde{P}^-$ e $P^i = \tilde{P}^i$ integram o grupo conforme não-relativístico trivialmente. Os outros elementos são:

$$\begin{aligned}
M^{ij} &= \tilde{M}^{ij}, \\
K^i &= \tilde{M}^{i+} \\
&= \frac{\tilde{M}^{i0} + \tilde{M}^{i4}}{\sqrt{2}}, \\
D &= \tilde{D} + \tilde{M}^{+-} \\
&= \tilde{D} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\tilde{M}^{00} - \tilde{M}^{04}}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{M}^{40} - \tilde{M}^{44}}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \tilde{D} - \tilde{M}^{04}, \\
C &= \frac{\tilde{K}^+}{2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\tilde{K}^0 + \tilde{K}^4}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

A dilatação \tilde{D} é corrigida por \tilde{M}^{+-} pois isto é necessário para garantir a invariância da Eq. (4.1.1), já que a mera escala $x^\mu \rightarrow e^\lambda x^\mu$ seria linear em e^λ na derivada parcial em x^+ e quadrática nas derivadas parciais espaciais.

As componentes de 1 até 3 de x^μ se transformam por D como $e^{i\lambda D} x^i = e^\lambda x^i$. Usando o fato que \tilde{D} e $\tilde{M}^{\mu\nu}$ comutam, podemos usar a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff para separar a exponencial da soma como produto de exponenciais para obter as transformações de x^0 e x^4 ,

$$\begin{aligned}
e^{i\lambda D} x^0 &= e^{-i\lambda \tilde{M}^{04}} e^{i\lambda \tilde{D}} x^0 \\
&= e^\lambda e^{-i\lambda \tilde{M}^{04}} x^0 \\
&= e^\lambda (x^0 \cosh \lambda + x^4 \sinh \lambda),
\end{aligned}$$

$$e^{i\lambda D} x^4 = e^\lambda (x^0 \sinh \lambda + x^4 \cosh \lambda).$$

Como $\cosh \lambda \pm \sinh \lambda = e^{\pm\lambda}$, vemos que x^+ e x^- se transformam como

$$\begin{aligned}
e^{i\lambda D} x^+ &= \frac{e^\lambda (x^0 \cosh \lambda + x^4 \sinh \lambda) + e^\lambda (x^0 \sinh \lambda + x^4 \cosh \lambda)}{\sqrt{2}} \\
&= e^\lambda \frac{x^0 e^\lambda + x^4 e^\lambda}{\sqrt{2}} \\
&= e^{2\lambda} x^+,
\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

$$\begin{aligned}
e^{i\lambda D} x^- &= \frac{e^\lambda (x^0 \cosh \lambda + x^4 \sinh \lambda) - e^\lambda (x^0 \sinh \lambda + x^4 \cosh \lambda)}{\sqrt{2}} \\
&= e^\lambda e^{-\lambda} x^- \\
&= x^-.
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Como desejado x^+ dilata-se quadraticamente para termos a invariância da Eq. (4.1.1).

Os boosts não-relativísticos das coordenadas espaciais são obtidos através da exponenciação do operador

$$K^i = \frac{i}{\sqrt{2}} (x^i \partial^0 - x^0 \partial^i + x^i \partial^4 - x^4 \partial^i)$$

onde os termos não-nulos e o termo onde a expansão da série é truncada são dados por

$$\begin{aligned} e^{iv_i K^i} x^i &= \left[1 - \frac{v_i}{\sqrt{2}} (-x^0 \partial^i - x^4 \partial^i) + \frac{1}{2!} \left(\frac{v_i}{\sqrt{2}} \right)^2 (x^i \partial^0 + x^i \partial^4) (-x^0 \partial^i - x^4 \partial^i) \right] x^i \\ &= x^i - \frac{v_i}{\sqrt{2}} (-x^0 - x^4) + \frac{1}{2!} \left(\frac{v_i}{\sqrt{2}} \right)^2 (-x^i \partial^0 x^0 - x^i \partial^4 x^4). \end{aligned}$$

Como $\partial^0 x^0 = -1$,

$$e^{iv_i K^i} x^i = x^i + v_i x^+. \quad (4.1.4)$$

O efeito em x^0 e x^4 é obtido de modo idêntico,

$$\begin{aligned} e^{iv_i K^i} x^0 &= \left[1 - \frac{v_i}{\sqrt{2}} (x^i \partial^0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{v_i}{\sqrt{2}} \right)^2 (-x^0 \partial^i - x^4 \partial^i) (x^i \partial^0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3!} \left(\frac{v_i}{\sqrt{2}} \right)^3 (x^i \partial^0 + x^i \partial^4) (-x^0 \partial^i - x^4 \partial^i) (x^i \partial^0) \right] x^0 \\ &= x^0 + \frac{v_i x^i}{\sqrt{2}} + \frac{v_i^2}{4} (x^0 + x^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{iv_i K^i} x^4 &= \left[1 - \frac{v_i}{\sqrt{2}} (x^i \partial^4) + \frac{1}{2!} \left(\frac{v_i}{\sqrt{2}} \right)^2 (-x^0 \partial^i - x^4 \partial^i) (x^i \partial^4) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3!} \left(\frac{v_i}{\sqrt{2}} \right)^3 (x^i \partial^0 + x^i \partial^4) (-x^0 \partial^i - x^4 \partial^i) (x^i \partial^4) \right] x^4 \\ &= x^4 - \frac{v_i x^i}{\sqrt{2}} - \frac{v_i^2}{4} (x^0 + x^4), \end{aligned}$$

Logo x^+ e x^- se transformam como

$$e^{iv_i K^i} x^+ = x^+, \quad (4.1.5)$$

$$\begin{aligned} e^{iv_i K^i} x^- &= \frac{x^0 - x^4 + \sqrt{2} v_i x^i + \frac{1}{2} v_i^2 (x^0 + x^4)}{\sqrt{2}} \\ &= x^- + v_i x^i + \frac{v_i^2}{2} x^+. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

A transformação de x^- concorda com a imersão $x^A = (\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}^2}{2t})$ do capítulo anterior, pois num boost $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{v}t$ a última coordenada se transforma como

$$\frac{\mathbf{x}^2}{2t} \rightarrow \frac{\mathbf{x}^2}{2t} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}^2}{2}t.$$

Para obter a transformação conforme galileana é conveniente reescrever o operador C em termos das coordenadas x^\pm ,

$$\begin{aligned} C &= \frac{-i}{2\sqrt{2}} \left(2(x^0 + x^4)x^\nu \partial_\nu - x^2(\partial^0 + \partial^4) \right) \\ &= \frac{-i}{2} \left(2x^+(x^i \partial_i + x^+ \partial_+ + x^- \partial_-) + (\mathbf{x}^2 - 2x^+x^-) \partial_- \right) \\ &= \frac{-i}{2} \mathcal{C}, \end{aligned}$$

onde $\partial_\pm = \frac{\partial}{\partial x^\pm} = \sqrt{2}(\partial_0 \pm \partial_4)$. Pode-se provar por indução que quando \mathcal{C} é aplicado n -vezes em x^i e x^\pm chega-se às relações

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^n x^i &= 2^n n! (x^+)^n x^i, \\ \mathcal{C}^n x^+ &= 2^n n! (x^+)^n x^+, \\ \mathcal{C}^n x^- &= 2^{n-1} n! (x^+)^{n-1} \mathbf{x}^2, \end{aligned}$$

que permitem calcular as transformações finitas

$$\begin{aligned} e^{i\lambda C} x^i &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^n \frac{\mathcal{C}^n}{n!} \right) x^i \\ &= \left(1 + \lambda x^+ + (\lambda x^+)^2 + \dots \right) x^i \\ &= \frac{x^i}{1 - \lambda x^+}, \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

$$\begin{aligned} e^{i\lambda C} x^+ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^n \frac{\mathcal{C}^n}{n!} \right) x^+ \\ &= \frac{x^+}{1 - \lambda x^+}, \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

$$\begin{aligned} e^{i\lambda C} x^- &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^n \frac{\mathcal{C}^n}{n!} \right) x^- \\ &= x^- + \frac{\lambda \mathbf{x}^2}{2} \frac{1}{1 - \lambda x^+}. \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Novamente a transformação de x^- concorda com a imersão $x^A = (\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}^2}{2t})$, pois esta é apenas uma forma extensa de escrever que quando $\mathbf{x} \rightarrow \frac{\mathbf{x}}{1-\lambda t}$ e $t \rightarrow \frac{t}{1-\lambda t}$

$$\frac{\mathbf{x}^2}{2t} \rightarrow \frac{\mathbf{x}^2}{2t(1-\lambda t)} = \frac{\mathbf{x}^2}{2t} + \frac{\lambda \mathbf{x}^2}{2} \frac{1}{1-\lambda t}.$$

As equações de Eq. (4.1.2) até a Eq. (4.1.9), acrescidas das translações geradas por P^i em x^i , H em x^+ , e M em x^- , são as versões finitas das isometrias obtidas por Son [2] em sua equação (20). Com todos os operadores e suas respectivas transformações determinadas, a álgebra de Lie do grupo conforme não-relativístico é dada [2] por:

$$\begin{aligned}
[M^{ij}, M^{kl}] &= i(\delta^{ik} M^{jl} + \delta^{jl} M^{ik} - \delta^{il} M^{jk} - \delta^{jk} M^{il}), & [M^{ij}, P^k] &= i(\delta^{ik} P^j - \delta^{jk} P^i), \\
[M^{ij}, K^k] &= i(\delta^{ik} K^j - \delta^{jk} K^i), & [D, P^i] &= -iP^i, \\
[D, H] &= -2iH, & [D, K^i] &= iK^i, \\
[D, C] &= 2iC, & [H, C] &= iD, \\
[P^i, K^j] &= -i\delta^{ij}M. & &
\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Quando comparada às relações de comutação obtidas na Eq. (3.2.6), a última relação de comutação aqui obtida é a mesma relação de comutação que gera o grupo de Galilei extendido. As diferenças por um fator de 2 em algumas relações de comutação se devem ao fato do operador de dilatação D definido neste capítulo ser diferente do definido no capítulo 3 como $D = M_{45}$.

Como discutido no começo da seção, o grupo conforme não-relativístico está contido no $SO(5, 2)$, um grupo de rotações pseudo-ortogonais. Vamos utilizar esse fato para estudar a invariância conforme não-relativística da equação de Klein-Gordon, obtida através da representação escalar, e das equações de Maxwell.

4.2 Aplicações

4.2.1 Representação escalar

De modo análogo ao desenvolvido na última seção do capítulo 2, passamos para um espaço com duas dimensões adicionais onde as transformações conformes podem ser representadas como rotações, com métrica dada por

$$\eta_{MN} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A ação do invariante $P_\mu P^\mu$ em uma função escalar $\psi(x^\mu)$ é dada por

$$\begin{aligned}
P_\mu P^\mu \psi(x^\mu) &= k^2 \psi(x^\mu), \\
(\partial_\mu \partial^\mu + k^2) \psi &= 0.
\end{aligned}$$

Para assegurar a invariância conforme em 7-dimensões fazemos a transformação de $\psi(x^\mu)$ para $\tilde{\psi}(x^A)$ tal que

$$\begin{aligned}
P^M P_M \tilde{\psi}(x^\mu, x^5, x^6) &= (P_\mu P^\mu - 2P^5 P^6) \tilde{\psi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo queremos que

$$2P^5 P^6 \tilde{\psi} = k^2 \tilde{\psi}.$$

A forma mais simples de fazer isto é que ψ se transforme por fatores de fase em x^5 e x^6 ,

$$\tilde{\psi}(x^\mu, x^5, x^6) = \exp\left(\frac{ikx^5}{\sqrt{2}}\right) \exp\left(\frac{-ikx^6}{\sqrt{2}}\right) \psi(x^\mu).$$

Comparado ao obtido no capítulo anterior ψ permanece sendo função de onda associada à equação de Klein-Gordon original, retornando à Schrödinger por $x^\pm = \frac{x^0 \pm x^4}{\sqrt{2}}$.

4.2.2 As equações de Maxwell

Bateman e Cunningham [9,10] obtiveram em 1910 que o campo eletromagnético possui simetria conforme em 3+1 dimensões do espaço-tempo na ausência de fontes, e esta simetria só vale sob essas condições [34]. Vamos retomar o exemplo desenvolvido no capítulo anterior e restringi-lo tal que essas condições sejam satisfeitas. Por concordância de notação os índices agora irão de 1 à 7. Com a métrica e Tensor de Faraday $F_{AB} = \partial_A A_B - \partial_B A_A$ dados por

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & 0 & R & S & T \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -R & 0 & U & V \\ -e_1 & -e_2 & -e_3 & -S & -U & 0 & W \\ -f_1 & -f_2 & -f_3 & -T & -V & -W & 0 \end{pmatrix},$$

as equações de Maxwell Eq. (3.3.5a) e (3.3.5b) implicam que os campos e seus divergentes são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{c} &= \nabla A_4 - \partial_4 \mathbf{A}, & \nabla \cdot \mathbf{c} &= j_4 - \partial_4 R - \partial_6 T - \partial_7 S, \\ \mathbf{d} &= \nabla A_5 - \partial_5 \mathbf{A}, & \nabla \cdot \mathbf{d} &= j_5 + \partial_5 R - \partial_6 V - \partial_7 U, \\ \mathbf{e} &= \nabla A_6 - \partial_6 \mathbf{A}, & \nabla \cdot \mathbf{e} &= j_6 + \partial_4 U + \partial_5 S - \partial_6 W, \\ \mathbf{f} &= \nabla A_7 - \partial_7 \mathbf{A}, & \nabla \cdot \mathbf{f} &= j_7 + \partial_4 V + \partial_5 T + \partial_7 W, \end{aligned}$$

e que os rotacionais são

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{c} + \partial_4 \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} - \partial_4 \mathbf{d} - \partial_5 \mathbf{c} - \partial_6 \mathbf{f} - \partial_7 \mathbf{e} &= \mathbf{j}, \\ \nabla \times \mathbf{d} + \partial_5 \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{e} + \partial_6 \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{f} + \partial_7 \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Com $x^A = (\mathbf{x}, t, 0, x^6, x^7)$ e $i\partial_5 = 0$, na ausência de termos de fonte j^A recuperarmos o limite elétrico das equações de Maxwell pela imersão

$$A_A = \left(\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), 0, -\phi(\mathbf{x}, t, x^6, x^7), A_6(t, x^6, x^7), A_7(t, x^6, x^7) \right),$$

tal que os resultados obtidos nas equações Eq. (3.3.6) podem ser importados para este espaço 7-dimensional como

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = \mathbf{e} = \mathbf{f} &= 0, & \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{d} = \mathbf{E} &= -\nabla\phi, & \nabla \cdot \mathbf{E} &= -\partial_6 V - \partial_7 U = 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} &= 0. \end{aligned}$$

Como $U = F_{56} = -\partial_6 A_5$ e $V = F_{57} = -\partial_7 A_5$, o divergente do campo elétrico pode ser reescrito em termos do potencial escalar ϕ como

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \phi &= -2\partial_6 \partial_7 \phi, \\ (-\nabla^2 + 2\partial_6 \partial_7) \phi &= 0. \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

A ação de $P^A P_A$ numa função escalar ψ é dada por

$$P^A P_A \psi = \left(-\nabla^2 + 2\partial_4 \partial_5 + 2\partial_6 \partial_7 \right) \psi.$$

Como $i\partial_5 = 0$, a Eq. (4.2.1) decorre diretamente da invariância conforme expressa por $P^A P_A = 0$. Caso tivéssemos considerado no início uma densidade de carga não-nula $j_5 = \rho$ tal condição não seria satisfeita.

Como restrição final, para que o gauge

$$\begin{aligned} \partial_A A^A &= \nabla \cdot \mathbf{A} - \partial_4 A_5 - \partial_6 A_7 - \partial_7 A_6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

se reduza ao gauge de Lorenz, $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\partial_t \phi$, deve-se fazer

$$\partial_6 A_7 + \partial_7 A_6 = 0, \tag{4.2.2}$$

que é satisfeita diretamente caso $A_7 = A_6$ e restringamos a teoria ao hiperplano $x^7 = -x^6$.

Para recuperarmos o limite magnético das equações de Maxwell na ausência de termos de fonte definimos a imersão

$$A_A = \left(\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), -\phi(\mathbf{x}, t, x^6, x^7), 0, A_6(t, x^6, x^7), A_7(t, x^6, x^7) \right),$$

que permite importar os resultados obtidos nas equações Eq. (3.3.7) para este espaço 7-dimensional como

$$\begin{aligned} \mathbf{d} = \mathbf{e} = \mathbf{f} &= 0, & \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{c} = \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}, & \nabla \cdot \mathbf{E} &= -\partial_6 T - \partial_7 S = 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Para calcular o divergente do campo elétrico acima é útil antecipar o cálculo para resgatar o gauge de Coulomb. Como

$$\begin{aligned}\partial_A A^A &= \nabla \cdot \mathbf{A} - \partial_6 A_7 - \partial_7 A_6 \\ &= 0\end{aligned}$$

e queremos $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ nas 5-dimensões originais, deve-se novamente fazer a escolha da equação Eq. (4.2.2) satisfeita por $A_7 = A_6$, $x^7 = -x^6$. O gauge de Coulomb implica que $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \phi$. Usando isso, a condição da equação Eq. (4.2.2) acima, e que $S = F_{46}$ e $T = F_{47}$, o divergente de \mathbf{E} é

$$\begin{aligned}-\nabla^2 \phi &= -\partial_6(\partial_4 A_7 - \partial_7 A_4) - \partial_7(\partial_4 A_6 - \partial_6 A_4) \\ &= -\partial_4(\partial_6 A_7 + \partial_7 A_6) + 2\partial_6 \partial_7 A_4 \\ &= -2\partial_6 \partial_7 \phi,\end{aligned}$$

que é novamente a Eq. (4.2.1), portanto o limite magnético também concorda com o invariante conforme $P^A P_A = 0$.

Sintetizando o resultado final, o limite elétrico com simetria conforme das equações de Maxwell é dado por

$$\begin{aligned}x^A &= (\mathbf{x}, t, 0, x^6, -x^6), & A_A &= (\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), 0, -\phi(\mathbf{x}, t, x^6), A_6(t, x^6), A_6(t, x^6)), \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, & \mathbf{E} &= -\nabla \phi, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= -\partial_t \phi,\end{aligned}$$

e o limite magnético com simetria conforme da equações de Maxwell é dado por

$$\begin{aligned}x^A &= (\mathbf{x}, t, 0, x^6, -x^6), & A_A &= (\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), -\phi(\mathbf{x}, t, x^6), 0, A_6(t, x^6), A_6(t, x^6)), \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, & \mathbf{E} &= -\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= 0.\end{aligned}$$

Isto torna explícita a simetria conforme não-relativística do eletromagnetismo. Son e Nishida consideraram em [2,3] o análogo gravitacional de férmions de spin 1/2 que interagem apenas por potencial de contato. O exemplo acima não pode ser usado para estender seus resultados para um gás de férmions que interagem eletromagneticamente, formando um gás de Coulomb, pois a simetria conforme do eletromagnetismo é quebrada na presença de fontes [34].

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho estudamos as simetrias conformes associadas ao grupo de Galilei. Especificamente, mostramos que a equação de Schrödinger descrevendo partículas massivas escalares e os limites não relativísticos das equações de Maxwell, o limite elétrico e o limite magnético da representação de spin 1, são invariantes conformes. Iniciamos nosso estudo no capítulo 2 apresentando a definição de simetria conforme. Estudamos então o grupo conforme de $\mathcal{M}^{d-1,1}$, enfatizando a construção dos geradores infinitesimais e as respectivas transformações das coordenadas do espaço-tempo. Passamos então à álgebra de Lie do grupo e seus invariantes. Apresentamos a identificação que conecta o grupo conforme de $\mathcal{M}^{p,q}$ com o grupo de rotações $SO(p+1, q+1)$ em duas dimensões adicionais.

No capítulo 3 fazemos um resumo da noção de covariância associada com o grupo de Galilei, construído a partir da invariância da distância entre pontos do espaço e do tempo. Identificamos que a métrica de tal variedade pode ser diagonalizada para a do espaço de Minkowski $\mathcal{M}^{4,1}$. Apresentamos a matriz de transformação G_B^A análoga a matriz de transformação de Lorentz Λ tal que $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$. Em seguida exibimos a extensão central do grupo de Galilei, identificamos as novas componentes do momento linear com a massa e a energia cinética, e tratamos como exemplos a representação escalar, que retorna a equação de Schrödinger, a representação de spin-1/2, que retorna as equações de Pauli-Schrödinger, e os limites elétrico e magnético das equações de Maxwell, associados à eletrostática e à magnetostática, respectivamente. Esta revisão nos conduz aos resultados originais desse trabalho, e desenvolvidos na sequência, no capítulo 4, onde deduzimos o grupo conforme não-relativístico partindo das simetrias da equação de Schrödinger livre, que é, como mostramos, conformalmente simétrica. Construímos os geradores infinitesimais e transformações finitas dessa invariância e listamos a álgebra de Lie do grupo. Sua representação como um grupo de rotações em 7-dimensões conduziu-nos ao estudo da representação de spin zero e spin 1, de modo natural. Estes resultados generalizam aqueles encontrados por Son [2,3] para a equação de Schrödinger, por termos utilizado a covariância Galileana. É este procedimento que permitiu demonstrar a invariância conforme dos limites não relativísticos do campo de Maxwell. Ainda está em aberto, contudo, encontrar uma representação matricial para seus operadores tal qual a apresentada na seção 2.4 para o $SO(4, 2)$.

Essa representação apresenta uma dificuldade para tratar o caso de spin-1/2, associada a impossibilidade de definir diretamente um conjunto de 7 matrizes γ^A de Dirac independentes e um

análogo do pseudoescalar $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ de $\mathcal{M}^{3,1}$, necessário para tratar teorias quirais. Este problema é inerente a estrutura da álgebra de Clifford para dimensões ímpares, apesar de já haver formas de contornar tal problema em 5-dimensões, a partir de imersões em espaços dimensões altas [35]. Este aspecto será abordado no desenvolvimento futuro deste trabalho. Uma outra possível aplicação para o método adotado nos exemplos da seção 4.2 é explorar a simetria conforme da teoria de fluidos clássicos, para os quais já existem teorias de campos não-relativísticas consagradas [20,25].

Bibliografia

- [1] K. M. O'Hara *et. al.*; *Observation of a strongly interacting degenerate Fermi gas of atoms*, Science, **298**, 2179 (2002).
- [2] D. T. Son; *Toward an AdS/cold atoms correspondence: A geometric realization of the Schrödinger symmetry*, Phys. Rev. D, **78**, 046003 (2008).
- [3] Y. Nishida, D. T. Son; Phys. Rev. D, **76**, 086004 (2007).
- [4] L. H. Ryder; *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1996).
- [5] S. Sachdev; *Quantum Phase Transitions*, Cambridge University Press, Cambridge (1999).
- [6] T. Mehen, I. W. Stewart, M. B. Wise; *Conformal invariance for non-relativistic field theory*, Phys. Lett. B, **474**, 145 (2000).
- [7] E. Noether; *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 235 (1918).
- [8] H. Bateman; *The transformation of the electrodynamical equations*, Proc. London Math. Soc., **8**, 223 (1909).
- [9] E. Cunningham; *The principle of Relativity in Electrodynamics and an extension thereof*, Proc. London Math. Soc., **8**, 77 (1909).
- [10] R. Blumenhagen, E. Plauschinn; *Introduction to Conformal Field Theory: With Applications to String Theory*, Lecture notes in Physics 779, Springer, Berlin (2009).
- [11] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal; *Conformal Field Theory*, Graduate texts in contemporary physics, Springer-Verlag, New York (1997).
- [12] H. Weyl; *Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie*, Ann. Phys., **364**, 101(1919).
- [13] P. A. M. Dirac; *Wave equations in Conformal Space*, Ann. Math., **37**, 429 (1936).
- [14] E. P. Wigner; *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*, Ann. Math., **40**, 149 (1939).
- [15] M. Gell-Mann; *Symmetries of Baryons and Mesons*, Phys. Rev., **125**, 1067 (1962).

- [16] V. E. Barnes *et al.*; *Observation of a Hyperon with Strangeness Minus Three*, Phys. Rev. Lett., **12**, 204 (1964).
- [17] J. M. Maldacena; *The large N limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, Adv. Theor. Math. Phys, **2**, 231 (1998).
- [18] P. K. Kovtun, D. T. Son, A. O. Starinets; *Viscosity in Strongly Interacting Quantum Field Theories from Black Hole Physics*, Phys. Rev. Lett., **94**, 111601 (2005).
- [19] D. Yamada; *Thermodynamics of black holes in the Schrödinger space*, Class. Quantum Grav., **26**, 075006 (2009)
- [20] Y. Takahashi; *Towards the many-body theory with the Galilei invariance as a guide*, partes I e II, Fortschr. Phys., **36**, 63, 83 (1988).
- [21] M. Le Bellac, J.-M. Lévy-Leblond; *Galilean Electromagnetism*, Il nuovo cimento, **14 B**, 217 (1973).
- [22] M. de Montigny, F. C. Khanna, A. E. Santana, E. S. Santos, J. D. M. Vianna; *Poincaré Gauge Theory and Galilean Covariance*, Ann. Phys. (N.Y.), **277**, 144 (1999).
- [23] L. M. Abreu; *Covariância Galileana na variedade de Cangemi-Jackiw*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, Brasil (2002).
- [24] L. M. Abreu, A. E. Santana, E. S. Santos, A. R. Filho; *Notas sobre o grupo de Galilei: aspectos geométricos e recentes desenvolvimentos*, Sitientibus, Série Ciências Físicas, **5**, 1 (2009).
- [25] M. de Montigny, F. C. Khanna, A. E. Santana; *Galilean covariance and applications in Physics*, Recent Research Developments in Physics, **1**, 45 (2000).
- [26] S. C. Ulhoa, F. C. Khanna, A. E. Santana; *Galilean Covariance and the Gravitational Field*, Int. J. Mod. Phys.A, **24**, 5287 (2009).
- [27] S. C. Ulhoa, F. C. Khanna, A. E. Santana; *Teleparallel formalism of galilean gravity*, Gravitation and Cosmology, **17**, 242 (2011).
- [28] M. Hamermesh; *Group Theory and its application to physical problems*, Dover, New York (1989).
- [29] S. Hassani; *Mathematical Physics: a modern introduction to Its foundation*, Springer-Verlag, New York (1999).
- [30] J. T. Wheeler; *Conformal generators and Maurer-Cartan equations*, nota de aula em <http://www.physics.usu.edu/Wheeler/GaugeTheory/09Mar27zNotes.pdf>, disponível em 21/03/2015.
- [31] L. Susskind; *Model of self-induced Strong Interactions*, Phys. Rev., **165**, 1535 (1968).

- [32] N. E. Ligterink, B. L. G. Bakker; *Renormalization of light-front Hamiltonian field theory*, Phys. Rev. D, **52**, 5917 (1995).
- [33] E. Inönü, E. P. Wigner; *Representations of the Galilei group*, Il nuovo cimento, **9**, 705 (1952).
- [34] R. Jackiw, S.-Y. Pi; *Tutorial on scale and conformal symmetries in diverse dimensions*, J. Phys. A: Math. Theor., **44**, 223001 (2011).
- [35] M. Kobayashi, M. de Montigny, F. C. Khanna; *An 8-dimensional realization of the Clifford algebra in the 5-dimensional Galilean space-time*, J. Phys. A: Math. Theor., **41**, 125402 (2008).