

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DO GAMA / FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA**

**ESTUDO NUMÉRICO-ANALÍTICO DOS EFEITOS DE CARGAS
AXIAIS SOBRE O COMPORTAMENTO VIBRATÓRIO DE PÁS
EÓLICAS**

FERNANDA ALMEIDA LEITE DE OLIVEIRA

ORIENTADOR: Dr. Marcus Vinícius Girão de Moraes

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS
DA ENGENHARIA**

**PUBLICAÇÃO: 025A/2015
BRASÍLIA/DF: OUTUBRO – 2015**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DO GAMA / FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA**

FERNANDA ALMEIDA LEITE DE OLIVEIRA

**ESTUDO NUMÉRICO-ANALÍTICO DOS EFEITOS DE CARGAS
AXIAIS SOBRE O COMPORTAMENTO VIBRATÓRIO DE PÁS
EÓLICAS**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA DA FACULDADE DO GAMA E FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA.

ORIENTADOR: Dr. Marcus Vinícius Girão de Moraes

**BRASÍLIA/DF
2015**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE GAMA/FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA.**

**ESTUDO NUMÉRICO-ANALÍTICO DOS EFEITOS DE CARGAS
AXIAIS SOBRE O COMPORTAMENTO VIBRATÓRIO DE PÁS
EÓLICAS**

FERNANDA ALMEIDA LEITE DE OLIVEIRA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA
ENGENHARIA DA FACULDADE DO GAMA E FACULDADE DE
TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU
DE MESTRE EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA.**

APROVADA POR:

**Prof. Dr. Marcus Vinicius Girão de Moraes
(Orientador)**

**Prof^a. Dr^a. Suzana Moreira Ávila
(Examinador Interno)**

**Prof^a. Dr^a. Maura Angélica Milfont Shzu
(Examinador Externo)**

FICHA CATALOGRÁFICA

Fernanda Almeida Leite de Oliveira

Estudo Numérico-Analítico dos Efeitos de Cargas Axiais sobre o Comportamento Vibratório de Pás Eólicas.

Brasília, Distrito Federal 2015.

N.p. 210 x 297 mm (FGA/FT/UnB, Mestre, Integridade de Materiais da Engenharia, 2015).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade UnB Gama. Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia.

1. Turbinas Eólicas

2. Vibrações

3. Galerkin

4. MEF

I. FGA/FT/UnB

II. Mestre

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

OLIVEIRA, F. A. L. de (2015). Estudo Numérico-Analítico dos Efeitos de Cargas Axiais sobre o Comportamento Vibratório de Pás Eólicas. Dissertação de Mestrado em Integridade de Materiais, Publicação 025A/2015, Faculdade UnB Gama/FT/Universidade de Brasília, DF, nº.125.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Fernanda Almeida Leite de Oliveira

TÍTULO: Estudo Numérico-Analítico dos Efeitos de Cargas Axiais sobre o Comportamento Vibratório de Pás Eólicas.

GRAU: Mestre

ANO: 2015

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Fernanda Almeida Leite de Oliveira

CEP: 71907-000 Brasília, DF - Brasil.

fernandaleite.unb@gmail.com

Dedico este trabalho aos meus pais, Carlos e Márcia e ao meu marido Bruno, com muito amor.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por direcionar meus caminhos e me dar forças todos os dias para alcançar meus objetivos.

Aos meus pais, Carlos e Márcia, que se sacrificaram e não mediram esforços para que eu pudesse realizar os meus sonhos. Por me apoiarem e incentivarem incondicionalmente durante toda minha vida.

Ao meu marido, Bruno, pela paciência quando eu estava sem tempo de lhe dar atenção, por me incentivar e me encorajar nos momentos de desânimo e por todo amor demonstrado diariamente com os menores gestos.

Ao meu orientador, Marcus Vinícius Girão de Moraes, e a professora Maura Angélica Milfont Shzu, que além de me orientarem, disponibilizaram tempo e dedicação para conclusão deste trabalho. Agradeço pelos ensinamentos compartilhados e pela confiança dada a mim.

A minha avó paterna, Maria de Lourdes, e a minha tia Joléa, por me ajudar sempre que precisei, pelo carinho, apoio e incentivo.

Aos meus avós maternos, Manoel e Odete, que mesmo distantes, lembraram-se de mim em suas orações.

A professora Suzana Moreira Ávila, pelos ensinamentos e incentivo.

E ao Danilo Cardim Araújo por disponibilizar os códigos utilizados para modelagem da pá.

“Se um homem, por mais sábio que seja, se tem na conta de bastante sábio para poder desprezar os outros, assemelha-se a um cego que leva uma lâmpada: ilumina os outros mas continua cego.”

Buda

RESUMO

As turbinas eólicas tiveram um crescimento acentuado em suas dimensões ao longo dos anos. O diâmetro do rotor aumentou quase 10 vezes o seu tamanho da década de 80 ao ano de 2010. As pás eólicas de grande porte são mais flexíveis e estão sujeitas a maiores velocidades do vento devido ao aumento da altura das torres. As causas de acidentes envolvendo as pás estão relacionadas com erros de projeto, defeitos de fabricação, danos causados no transporte ou elevação, falhas na montagem, por esforços últimos ou por esforços de utilização. A fadiga está relacionada com os esforços de utilização que possuem natureza oscilatória, e é o principal problema no projeto de pás eólicas.

As fontes de carga de um aerogerador são o carregamento aerodinâmico, inercial e gravitacional. O peso próprio das pás alterna e gera esforços de tração e compressão ao longo de seu comprimento. Eles são tidos como uma perturbação do sistema. Já as forças centrífugas possuem efeito estabilizador para altas velocidades de rotação. Elas tendem a suprimir o efeito oscilatório do peso próprio. Entretanto, as turbinas eólicas de médio e longo porte operam com faixas de velocidade de rotação baixas (10 a 40 RPM), e as forças centrífugas não possuem tanta influência na dinâmica da estrutura.

Este trabalho apresenta soluções analítico-aproximadas de modelos de pás de aerogeradores. Os resultados obtidos através do método de Galerkin são utilizados para validar os procedimentos numéricos obtidos com o pacote computacional de elementos finitos ANSYS® e comparados com trabalhos da literatura. Os efeitos do peso próprio e da força centrífuga são analisados no comportamento dinâmico das pás.

Em virtude do crescimento das pás e das baixas velocidades de operação dos aerogeradores, a influência do peso próprio é mais significativa. Ele gera oscilações nos valores das frequências naturais enquanto a força centrífuga gera um comportamento crescente. Nas velocidades críticas do diagrama de Campbell ocorre o fenômeno de ressonância das pás. O comportamento crescente do deslocamento é observado nos gráficos de resposta no tempo para estas frequências.

ABSTRACT

The wind turbines have had a high increase in their dimensions over the years. The rotor diameter has increased almost 10 times its size from 80 decade to 2010. The large wind blades are turn to be more flexible and are subjected to higher wind speeds due to the increased height of the towers. The causes of accidents involving the blades are related to: design flaws, manufacturing defects, damage in transportation or lifting, fitting faults, for last efforts or usage efforts. Fatigue is related to the usage efforts that have oscillatory nature, and is the main problem in the design of wind blades.

The load sources of a wind turbine are the inertial and gravitational load aerodynamic. The own weight of the blades switches and generates traction and compression efforts along its length. They are seen as a system disturbance. Whereas the centrifugal forces have a stabilizing effect for high rotational speeds. They tend to supress the oscillatory own weight effect. However, wind turbines of medium and long sized work at low speed ranges (10 to 40 RPM), and the centrifugal forces do not have much influence on the dynamics of the structure.

This paper presents approximated analytical solutions models of wind turbines blades. The results of the Galerkin method is used to validate the numerical procedures obtained in ANSYS[®] and compared with the literature works. The effects of the own weight and centrifugal force are analyzed on the dynamic behavior of the blades.

By virtue of the blades increase and low operating speeds of wind turbines, the influence of the own weight is more significant. It generates oscillations in the natural frequencies values while the centrifugal force generates a growing behavior. At critical speeds of the Campbell diagram occur the resonance phenomenon of the blades. The growing shifting behavior is observed in response graphs in the time for these frequencies.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Torre eólica caída no Complexo do Chato (Foto: Ribeiro, 2014).	21
Figura 1.2 – Fluxograma da metodologia.	23
Figura 2.1 – Princípio da conversão da energia cinética do vento em energia elétrica (Pinto, 2013).	25
Figura 2.2 – (a) Turbina com eixo horizontal <i>upwind</i> , (b) Turbina com eixo horizontal <i>downwind</i> e (c) Turbina com eixo vertical (Pinto, 2013).	26
Figura 2.3 - Componentes de uma HAWT (Hau, 2006 - modificada).	26
Figura 2.4 – Crescimento na dimensão das turbinas eólicas comparadas com algumas estruturas (Pinto, 2013).	27
Figura 2.5 – Momento de guinada para diferentes números de pás (Hau, 2006 - modificada).	29
Figura 2.6 – Pá de madeira da turbina experimental Nibe-B (Hau, 2006).	30
Figura 2.7 – (a) Pá de aço da turbina experimental American MOD-2 e (b) Design da pá da turbina experimental German Growian (Hau, 2006).	31
Figura 2.8 – Elementos característicos de uma pá (Pinto, 2013).	32
Figura 2.9 – Forças aerodinâmicas atuantes em pás de turbinas eólicas (Baseado em: Ishida & Yamamoto, 2012).	33
Figura 2.10 - Força gravitacional atuante em pás de turbinas eólicas (Baseado em: Ishida & Yamamoto, 2012).	34
Figura 2.11 - Força centrífuga atuante em pás de turbinas eólicas (Baseado em: Ishida & Yamamoto, 2012).	35
Figura 2.12 – Passagem das pás com o conseqüente efeito de sombreamento (Baseado em: Pinto, 2013).	36
Figura 2.13 – Modelo do efeito de sombra da torre.	37
Figura 2.14 – Evolução da razão de velocidade em função do ângulo de posição da pá θ .	37
Figura 2.15 - Número de falhas registradas em pás de turbinas eólicas (Dados: CAITHNESS Windfarm Information Forum (CWIF), 2011).	38
Figura 2.16 - Modelo de viga com massa na extremidade (Wright, Smith, Thresher, & Wang, 1982 - modificada).	40
Figura 2.17 – Diagrama de corpo livre da nacelle e da viga (Kang, Park, Park, & Atluri, 2014 - modificada).	41
Figura 2.18 – Geometria da viga (Hoa, 1979)	42

Figura 2.19 – Resumo esquemático de trabalhos que abordam a dinâmica de pás rotativas.	44
Figura 2.20 - Pás modeladas no software QBlade (Marten, Wendler, Pechlivanoglou, Nayeri, & Paschereit, 2013).	44
Figura 2.21 - Exemplo de uma pá eólica com diferentes materiais aplicados ao longo de seu comprimento no Co-Blade (Sale, 2012).	45
Figura 3.1 – Viga em flexão sob efeito da carga axial (Rao, 2008).	47
Figura 3.2 - (a) Turbina eólica. (b) Viga engastada-livre com carga axial distribuída triangular de compressão. (c) Viga engastada-livre com carga axial nula (flexão).	50
Figura 3.3 – Posicionamento da viga	52
Figura 3.4 - Viga engastada-livre rotativa.	53
Figura 4.1 – Diagrama de Campbell (Ishida & Yamamoto, 2012 - modificada).	57
Figura 4.2 – Trajetória e curva integral no espaço de fase (Savi, 2006).	59
Figura 4.3 – Órbita e retrato de fase (Savi, 2006).	60
Figura 4.4 – Seção de Poincaré.	61
Figura 4.5 – Elemento BEAM188 (ANSYS, 2013).	63
Figura 4.6 – Seção 4 da pá eólica.	66
Figura 4.7 – Elemento MESH200 (ANSYS, 2013).	67
Figura 4.8 - Modelo da pá obtida no ANSYS® (Araújo, Morais, Avila, & Shzu, 2014).	68
Figura 4.9 – Modos de vibração da pá (Araújo, Morais, Avila, & Shzu, 2014).	68
Figura 5.1 – Variação da primeira frequência natural em função da posição da pá com $L = 1m$.	71
Figura 5.2 Variação da primeira frequência natural em função da posição da pá com $L = 10m$.	72
Figura 5.3 – Geometria da pá de uma turbina (Ferreira, Costa, Morais, Neto, & Miranda, 2013).	73
Figura 5.4 - Variação da primeira frequência natural em função da posição da pá.	74
Figura 5.5 – Diagrama de Campbell do modelo de pá simplificada com $L = 1m$.	77
Figura 5.6 - Diagrama de Campbell do modelo de pá simplificada com $L = 10m$.	77
Figura 5.7 - Diagrama de Campbell do modelo de pá real.	79
Figura 6.1 – Variação da frequência com a posição da pá para $\Omega = 0$, $\Omega = 50$ RPM e $\Omega = 100$ RPM da viga com $L = 1m$.	82
Figura 6.2 – Variação das frequências naturais em função da rotação da viga com $L = 1m$.	82

Figura 6.3 – Variação das três primeiras frequências naturais do modelo de viga com $L = 1\text{m}$.	83
Figura 6.4– Variação da frequência com a posição da pá para $\Omega = 0$, $\Omega = 50\text{ RPM}$ e $\Omega = 100\text{ RPM}$ da viga com $L = 10\text{m}$.	83
Figura 6.5 – Variação das frequências naturais em função da rotação da viga com $L = 10\text{m}$.	84
Figura 6.6 – Variação das três primeiras frequências naturais do modelo de viga com $L = 10\text{m}$.	84
Figura 6.7 – Etapas de solução e análise do oscilador paramétrico.	85
Figura 6.8 – Resposta no tempo e diagrama de fase para o modelo de pá simplificada com $L = 1\text{ m}$ para $\Omega = 29.3$, $\Omega = 29.6$ e $\Omega = 30\text{ RPM}$.	86
Figura 6.9– Resposta no tempo e diagrama de fase para o modelo de pá simplificada com $L = 1\text{ m}$ para $\Omega = 47.2$, $\Omega = 48.5$ e $\Omega = 48.8\text{ RPM}$.	87
Figura 6.10 – Gráfico de amplitude para o modelo de pá simplificada com $L = 1\text{ m}$.	88
Figura 6.11 – Detalhe da Figura 6.10.	88
Figura 6.12 – Gráfico de amplitude para o modelo de pá simplificada com $L = 1\text{ m}$.	89
Figura 6.13 – Gráfico de instabilidade e diagrama de Campbell para o modelo de pá simplificada com $L = 1\text{ m}$.	90
Figura 6.14– Resposta no tempo e diagrama de fase para o modelo de pá simplificada com $L = 10\text{ m}$ para $\Omega = 7.1$, $\Omega = 7.2$ e $\Omega = 7.3\text{ RPM}$.	91
Figura 6.15– Resposta no tempo e diagrama de fase para o modelo de pá simplificada com $L = 10\text{ m}$ para $\Omega = 11.7$, $\Omega = 11.85$ e $\Omega = 12\text{ RPM}$.	92
Figura 6.16 - Gráfico de amplitude para o modelo de pá simplificada com $L = 10\text{ m}$.	93
Figura 6.17 – Detalhe da Figura 6.16.	93
Figura 6.18 - Gráfico de amplitude para o modelo de pá simplificada com $L = 10\text{ m}$.	94
Figura 6.19 - Gráfico de instabilidade e diagrama de Campbell para o modelo de pá simplificada com $L = 10\text{ m}$.	95
Figura 6.20 – Solução pelo método de perturbação para $\Omega = 29.3$, $\Omega = 29.6$ e $\Omega = 30\text{ RPM}$.	96
Figura 6.21 - Solução pelo método de perturbação para $\Omega = 48.2$, $\Omega = 48.5$ e $\Omega = 48.8\text{ RPM}$.	97

LISTA DE TABELAS E QUADROS

Tabela 3.1 - Equação de frequência e valores de β_{nl} para uma viga engastada-livre (Rao, 2008).	48
Tabela 4.1 – Resultados obtidos por Araújo <i>et al.</i> (2014) e Ferreira <i>et al.</i> (2013) para as frequências naturais da pá (Araújo, Moraes, Avila, & Shzu, 2014).	67
Tabela 5.1 – Frequências naturais em Hz do modelo simplificado de pá com $L = 1\text{m}$.	71
Tabela 5.2 – Frequências naturais em Hz do modelo simplificado de pá com $L = 10\text{m}$.	72
Tabela 5.3 – Frequências naturais em Hz do modelo real da pá.	73
Tabela 5.4 – Frequências naturais [Hz] do modelo simplificado de pá com $L = 1\text{m}$.	76
Tabela 5.5 – Frequências naturais [Hz] do modelo simplificado de pá com $L = 10\text{m}$.	76
Tabela 5.6 – Frequências naturais [Hz] do modelo da pá real.	78
Tabela A.1 - Valores de λ_i em função de α para $\alpha \geq 0$. Fonte Blevins (1984)	106
Tabela A.2 - Valores de λ_i em função de α para $\alpha \leq 0$. Fonte Blevins (1984)	106
Tabela A.3– Valores α para as vigas de 1 e 10 metros.	107
Tabela A.4- Valores de λ_i em função de α .	107
Quadro 1 – Exemplo de código com os comandos PSTRES, ACEL e OMEGA.	64
Quadro 2 – Exemplo de código com laços para variar velocidade de rotação e ângulo de posição da pá.	65

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

Aneel	Agência Nacional de Energia Elétrica
BIG	Banco de Informações de Geração
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
DNV	<i>Det Norske Veritas</i>
DOE	<i>Departamento f Energy</i>
GdL	Grau de Liberdade
GE	<i>General Eletric</i>
HAWT	<i>Horizontal Axis Wind Turbine</i>
MCTI	Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação
MEF	Método dos Elementos Finitos
MRP	Método dos Resíduos Ponderados
NREL	<i>National Renewable Energy Laboratory</i>
NWTC	<i>National Wind Technology Center</i>
VAWT	<i>Vertical Axis Wind Turbine</i>
WAsP	<i>Wind Atlas Analysis and Application Program</i>

A	Área da seção transversal
A	Matriz de Estado
A_x	Componente axial da aceleração
A_y	Componente transversal da aceleração
b	Base
B	Matriz de forçamentos externos
B_j, E_j	Operadores
c_1, c_2	Domínio das condições de contorno
C	Matriz de amortecimento
D	Diâmetro do rotor
e	ecêntrico
E	Módulo de Elasticidade Transversal
f	Função de força conhecida
F_c	Força centrífuga
g	Aceleração da gravidade
g_j, h_j	Condições de contorno da variável dependente
$g(u, \dot{u})$	Função não linear
h	Altura
$I, I(x)$	Momento de inércia da area
K_c	Matriz de rigidez centrífuga
K_g	Matriz de rigidez geométrica
K_m	Matriz de rigidez material
L	Comprimento da viga
L	Operador diferencial parcial ordinário
m	Massa
M	Matriz de massa
M	Momento Fletor
p, ϵ	Coeficientes da equação de Mathieu
$P(x)$	Carga axial

P	Potência disponível do vento
q_k, q_j	Constantes generalizadas
r	Raio do hub
t	Tempo
u	Variável dependente
$u_0(t)$	Resposta do sistema não perturbado
v	Velocidade do vento
$v(z, t)$	Deslocamento da torre
V	Força de cisalhamento
\mathbf{X}, \mathbf{Q}	Variáveis de estado
$w(x, t)$	Deslocamento fora do plano de rotação da pá
w_N	Solução aproximada do deslocamento fora do plano de rotação da pá
w_k	Funções de ponderação
\mathbb{R}	Função Resíduo
\mathbb{R}^n	Conjunto dos reais de dimensão n
β	Ângulo de passo
β_j	Autovalores da equação transcendental de viga engastada livre
δ_{ij}	Função delta de Kronecker
Δ	Variação da frequência
ε	Pertubação
ϕ	Variável dependente
$\bar{\phi}$	Solução aproximada da variável dependente
θ	Ângulo de posição da pá
Ω	Velocidade de rotação
ψ_k, ψ_j	Funções teste
ρ	Massa específica
ξ	Coeficiente de amortecimento

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	19
1.1. JUSTIFICATIVA	20
1.2. OBJETIVOS	21
1.3. METODOLOGIA	22
1.4. ESTRUTURA DO TRABALHO	24
2. SOBRE A DINÂMICA ESTRUTURAL DE PÁS EÓLICAS	25
2.1. SOBRE PÁS EÓLICAS ROTATIVAS	28
2.1.1. Rotores com 1, 2, 3 e 4 Pás	28
2.1.2. Massa, Geometria e Materiais	30
2.1.3. Elementos de um Perfil Aerodinâmico	32
2.2. AÇÕES SOBRE AS PÁS	32
2.2.1. Carregamento Aerodinâmico	33
2.2.2. Carregamento Gravitacional	34
2.2.3. Carregamento Inercial	35
2.2.4. Efeitos Secundários	36
2.3. PATOLOGIAS ASSOCIADAS À DINÂMICA DE PÁS EÓLICAS	38
2.4. ABORDAGENS SOBRE A DINÂMICA DE PÁS EÓLICAS	40
3. MODELAGEM POR VIGA EULER-BERNOULLI DE PÁS EÓLICAS	46
3.1. TEORIA DE VIGA SOB FORÇA AXIAL:	46
3.2. MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS	48
3.2.1. Viga sob Carregamento Gravitacional	50
3.2.2. Viga Rotativa	53
3.2.3. Viga Rotativa sob Carregamento Gravitacional	54
4. FERRAMENTAS DE ANÁLISE DE SOLUÇÃO PARA PÁS ROTATIVAS	56
4.1. INTRODUÇÃO A MÁQUINAS ROTATIVAS	56
4.2. EQUAÇÕES DE ESTADO	57

4.3. FERRAMENTAS DA DINÂMICA NÃO LINEAR E CAOS	58
4.4. TÉCNICA DE PERTUBAÇÃO POR EXPANSÃO DIRETA	61
4.5. MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS NO ANSYS	62
4.5.1. Modelagem das Forças Atuantes em Pás Eólicas	64
4.5.2. Modelagem da Pá	66
5. ESTUDOS PRELIMINARES DA DINÂMICA DA PÁ	69
5.1. MODELO DA PÁ SOB CARREGAMENTO GRAVITACIONAL	69
5.1.1. Pá Simplificada	69
5.1.2. Pá Real	73
5.2. MODELO DA PÁ ROTATIVA SOB CARREGAMENTO CENTRÍFUGO	75
5.2.1. Pá Simplificada	75
5.2.2. Pá Real	78
6. ESTUDOS DA PÁ ROTATIVA SOB EFEITO DA FORÇA CENTRÍFUGA E DO PESO PRÓPRIO	80
6.1. EQUAÇÃO DE ESTADO DA PÁ	80
6.2. ESTUDOS PRELIMINARES	81
6.3. ESTUDOS DO OSCILADOR PARAMÉTRICO	85
6.4. SOLUÇÃO POR PERTUBAÇÃO	95
7. CONCLUSÃO	99
7.1. PERSPECTIVAS	101
REFERÊNCIAS	102
ANEXO A – MODELO DE BLEVINS	106
ANEXO B – TRANSFORMADA DE HILBERT	108
APÊNDICE A – CÓDIGOS DO ANSYS	110
A.1. CÓDIGO DO ANSYS REFERENTE À FORÇA CENTRÍFUGA	110
A.2. CÓDIGO DO ANSYS REFERENTE AO PESO PRÓPRIO	111
A.3. CÓDIGO DO ANSYS REFERENTE AO PESO PRÓPRIO + FORÇA CENTRÍFUGA	112

APÊNDICE B – CÓDIGOS DO MATHEMATICA	113
B.1. CÓDIGO MATHEMATICA PARA FORÇA CENTRÍFUGA	113
B.2. CÓDIGO MATHEMATICA PARA PESO PRÓPRIO	114
APÊNDICE C – CÓDIGOS DO MATLAB	115
C.1. CÓDIGO MATLAB PARA SOLUÇÃO DO MÉTODO DE GALERKIN PARA FORÇA CENTRÍFUGA	115
C.2. CÓDIGO MATLAB PARA SOLUÇÃO DO MÉTODO DE GALERKIN PARA PESO PRÓPRIO	116
C.3. CÓDIGO MATLAB PARA ANÁLISE PRELIMINAR DA EQUAÇÃO DE MATHIEU	118
C.4. CÓDIGO MATLAB PARA ANÁLISE DA EQUAÇÃO DE MATHIEU	120
C.5. CÓDIGO MATLAB PARA MÉTODO DE PERTUBAÇÃO	123
C.6. CÓDIGO DAS FUNÇÕES DO MATLAB	124

1. INTRODUÇÃO

A energia do vento foi extraída ao longo de centenas de anos através dos moinhos. O avanço em estudos aerodinâmicos e de materiais proporcionou o retorno da utilização da energia eólica a partir da metade do século 20.

A primeira turbina eólica comercial ligada à rede elétrica pública foi instalada em 1976, na Dinamarca. No Brasil, os primeiros estudos sobre o potencial eólico foram feitos na região nordeste, principalmente no Ceará e em Pernambuco. Segundo o Banco de Informações de Geração (BIG), há atualmente 273 centrais geradoras eólicas em funcionamento no país, 160 em construção e 300 previstas (Aneel (BR), 2015).

A potência disponível do vento é proporcional ao cubo de sua velocidade e a área varrida pelo rotor da turbina. Para turbinas de eixo horizontal (*HAWT horizontal axis wind turbine*) a potência é proporcional ao quadrado do diâmetro do rotor. Então, os aerogeradores tiveram um crescimento acentuado em suas dimensões. Da década de 80 ao ano de 2010, o diâmetro do rotor aumentou quase 10 vezes o seu tamanho e para poder captar maiores velocidades do vento as torres tornaram-se mais altas. Por exemplo, a turbina ECO 86 ALSTOM, utilizada na central Rei dos Ventos 1, possui 80 metros de altura de rotor e 86 metros de diâmetro do rotor com potência unitária de 1.67 MW. Ela opera em baixas rotações: de 10 a 17.21 RPM.

As pás de grande porte são mais flexíveis e quanto maior a altura de fixação, maiores as velocidades do vento a que estão sujeitas. As turbinas eólicas são tidas como “perfeitas máquinas de fadiga” (Hau, 2006). A assimetria do fluxo de vento é decorrente do aumento da velocidade com a altura. As pás estão sujeitas a velocidades do vento mais elevadas no setor de rotação superior do que no setor mais próximo ao solo. De forma semelhante, uma assimetria é causada pelos ventos laterais decorrentes de mudanças rápidas na direção do vento (Hau, 2006). A turbulência do vento é sempre presente no escoamento. A alternância das forças contribui consideravelmente para fadiga das pás. As velocidades extremas também contribuem para ruína, porém são raras. No entanto elas podem aumentar a carga até ao ponto de fratura do material. O peso próprio das pás alterna e gera esforços de tração e compressão ao longo do comprimento da pá. Em conjunto com a

turbulência do vento, a influência das forças gravitacionais torna-se o fator dominante para resistência a fadiga das pás dos rotores.

Os problemas relacionados à fadiga dos componentes dos aerogeradores, principalmente das pás, assustam os investidores, pois o retorno dos investimentos na geração eólica é a médio e longo prazo (10 a 20 anos) e as concessões variam entre 20 a 30 anos. Com o aumento das dimensões das turbinas, o transporte e a manutenção das pás tornaram-se mais dispendiosos. Então, elas são projetadas para operarem de 20 a 30 anos. Isto requer uma visão completa das condições operacionais e possíveis avarias da turbina, então, a rigidez de seus componentes deve ser cuidadosamente combinada a fim de evitar problemas de vibração excessiva.

1.1. JUSTIFICATIVA

O maior número de acidentes em turbinas eólicas registrados dos anos 90 ao ano de 2011 envolviam as pás, num total de 203 (Pinto, 2013). Eles podem ocorrer por falhas na fabricação ou no projeto estrutural, por solicitações extremas como fortes rajadas de vento, por falhas na montagem ou danos causados durante o transporte das pás. As vibrações excessivas causadas pelas forças cíclicas podem levar o material à fadiga. Se a pá já estiver com dano por falhas na fabricação ou danos causados no seu transporte/montagem, a sua resistência diminui e acentua os problemas de fadiga.

Em dezembro de 2014, oito turbinas eólicas, da Enercon, foram derrubadas por fortes rajadas de vento, que atingiu velocidade de 250 km/h no Complexo Eólico Cerro Chato da Eletrosul (Figura 1.1) (Portal Energia, 2014).

Outros acidentes relatados ocorreram na Inglaterra, na Alemanha e na Dinamarca. Na Inglaterra, a pá de uma turbina de um campo de desenvolvimento na escola de Sascale se despreendeu e pousou a uma distância cerca de 180 metros (WindAction, 2013). Há relatos de que o vento não era tão forte durante o ocorrido. Uma pá da Vestas V90 3MW de 44 metros de comprimento rompeu em uma fazenda eólica na Dinamarca (NAW Staff, 2014). A RWE Innogy fechou seu parque eólico na Alemanha depois que uma pá da Senvion 6.2M126 de 61.5 metros

pesando 22 toneladas quebrou (ReNews, 2015). As causas específicas destes acidentes não são noticiadas. Vários outros relatos podem ser encontrados no site da WindAction.



Figura 1.1 – Torre eólica caída no Complexo do Chato (Foto: Ribeiro, 2014).

Problemas de projeto, fabricação, manutenção são atuais em diversos aerogeradores atualmente. Isto é evidenciado pelos acidentes envolvendo diferentes modelos e fabricantes de turbinas eólicas.

O interesse na dinâmica de pás turbinas eólicas foi sistematizado no projeto Eólica (CNPq & MCTI – Processo 406895/2013-9), da Universidade de Brasília, onde se previa o estudo numérico-analítico do comportamento de pás.

1.2. OBJETIVOS

Os modelos analíticos e analítico-aproximados de pás rotativas encontrados na literatura proporcionam entendimento dos fenômenos associados à dinâmica do sistema, mas não representam a geometria real devido à complexidade do perfil das

pás. Já os modelos numéricos desenvolvidos em pacotes computacionais são capazes de representar a geometria real das pás. No entanto, a principal dificuldade é modelar de forma correta o sistema a ser estudado e garantir a qualidade dos resultados numéricos.

O presente trabalho visa o estudo comparativo da dinâmica de pás rotativas considerando a ação do peso próprio e da força centrífuga a partir de modelos analítico-aproximados simplificados a fim de validar os procedimentos numéricos para aplicação em modelos reais de pás eólicas. Pretende-se também estudar o problema do oscilador paramétrico descrito pela equação de Mathieu aplicado à dinâmica das pás em modelos de vigas rotativas. Estes estudos apresentam os seguintes objetivos específicos:

Objetivos Específicos

Construir modelos analíticos simplificados; validar metodologias numéricas; estudar a influência das forças atuantes em pás na dinâmica do sistema utilizando os modelos validados; estudar a estabilidade das pás e a influência de parâmetros constitutivos, como o amortecimento.

1.3. METODOLOGIA

A pá de um aerogerador possui geometria complexa, cujas seções variam ao longo de seu comprimento. Tal característica onera a análise numérica computacional e dificulta o estudo analítico de seu comportamento. No entanto, evidencia-se a importância dos modelos analíticos e analítico-aproximados na validação de procedimentos numéricos, a fim de garantir a qualidade e representatividade do comportamento dinâmicos das pás.

As pás de turbinas são frequentemente reduzidas a modelos de viga engastada-livre na literatura. Este modelo foi utilizado para obtenção de resultados pelo método de Galerkin, que é um método geral de obtenção de soluções para equações diferenciais (Etapas 1a e 3a - Figura 1.2). A solução aproximada é expandida em um conjunto de funções testes com coeficientes arbitrários. A forma aproximada da solução substituída na equação de governo gera um resíduo. As

funções de ponderação do método de Galerkin são as funções de forma do elemento. Neste caso, utilizou-se a função de forma de uma viga engastada-livre.

O software comercial de elementos finitos ANSYS® foi utilizado para obtenção das soluções numéricas (Etapas 1b e 3b - Figura 1.2). Compararam-se os resultados analítico-aproximados por Galerkin com os resultados do ANSYS® e com a literatura validando a metodologia numérica empregada (Etapas 1c e 3c - Figura 1.2).

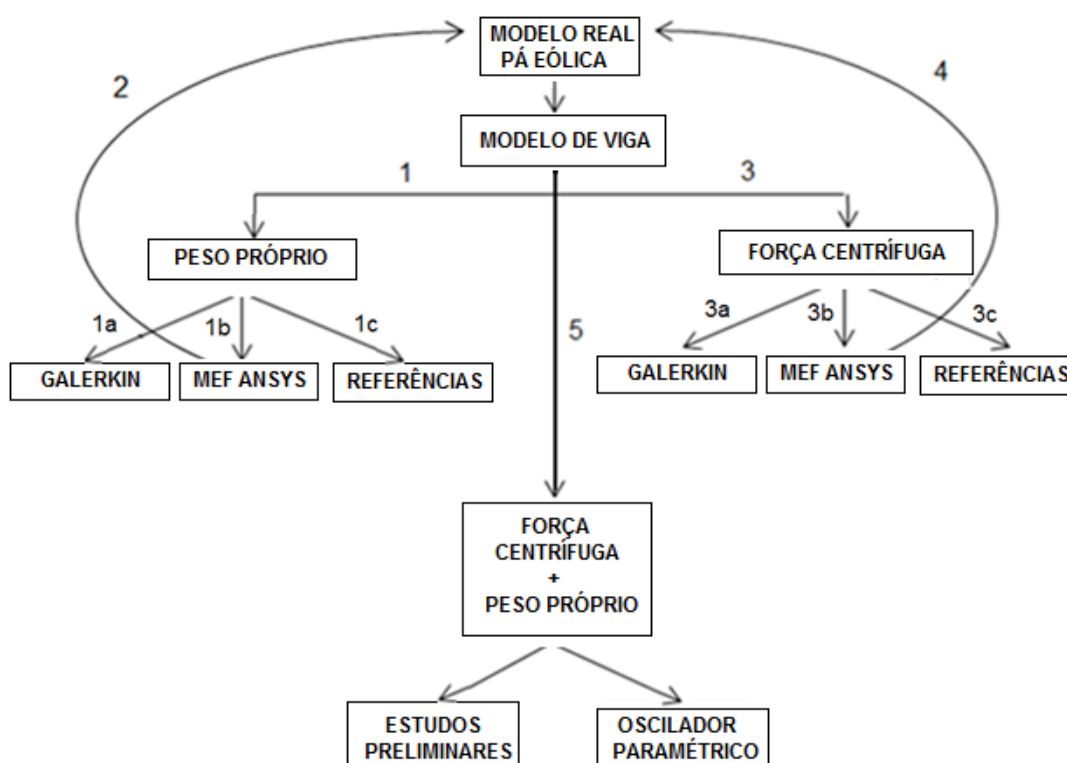


Figura 1.2 – Fluxograma da metodologia.

Em sequência aplicou-se o procedimento numérico a um modelo de pá eólica real, do Projeto Tucunaré, modelada com elementos de viga por Araújo *et al.* (2014) (Etapas 2 e 4 - Figura 1.2). Um estudo preliminar avaliou de forma separada os efeitos do peso próprio da estrutura e da força centrífuga.

O estudo da ação conjunta do peso próprio com a força centrífuga resultou em um problema do tipo oscilador paramétrico descrito pela equação de Hill-Mathieu. Dividiu-se a análise do problema em duas etapas: um estudo preliminar e no problema do oscilador paramétrico (Etapas 5 - Figura 1.2). O estudo preliminar limitou-se a determinação da evolução das frequências naturais e na determinação de velocidades críticas para várias velocidades de rotação. O estudo do oscilador paramétrico consistiu na modelagem do comportamento dinâmico das pás a partir

de ferramentas da dinâmica não linear e métodos de perturbação. Determinaram-se as faixas de estabilidade e instabilidade a partir da análise das curvas de amortecimento das respostas no tempo do problema.

1.4. ESTRUTURA DO TRABALHO

Este capítulo destina-se a introdução ao trabalho, apresentação dos objetivos, da metodologia empregada para solução do problema e a apresentação da estrutura desta dissertação.

O capítulo 2 introduz conceitos relativos a turbinas eólicas, a geometria e ação de forças sobre as pás, as principais patologias e um breve estado da arte sobre a solução de problemas de pás e vigas rotativas.

O capítulo 3 apresenta a modelagem por vigas de Euler Bernoulli de pás eólicas sob forças axiais e o método dos resíduos ponderados. Aplica-se o método de Galerkin para vigas sob a ação do peso próprio, sob a ação da força centrífuga, separada e conjuntamente.

O capítulo 4 destina-se a apresentação de ferramentas de solução de pás rotativas. Introduce conceitos de máquinas rotativas, equações de estado, ferramentas da dinâmica não linear (espaço de fase e técnicas de perturbação) e a modelagem pelo método dos elementos finitos no ANSYS®.

O capítulo 5 apresenta os resultados da ação separada do peso próprio e da força centrífuga. Ilustra a variação das frequências naturais e o diagrama de Campbell para dois estudos de caso.

O capítulo 6 mostra os resultados do problema oscilador paramétrico. Realiza-se primeiro um estudo preliminar obtendo-se a evolução das frequências variando a posição da pá para cada velocidade de rotação. Nos estudos do problema do oscilador paramétrico analisa-se o sistema a partir de ferramentas da dinâmica não linear e métodos de perturbação. Estuda-se a estabilidade do sistema com os gráficos de resposta no tempo e fase do sistema, bem como os de amplitudes comparados com as velocidades críticas dos diagramas de Campbell.

O capítulo 7 consiste nas conclusões do trabalho e perspectivas para trabalhos futuros.

2. SOBRE A DINÂMICA ESTRUTURAL DE PÁS EÓLICAS

Turbinas eólicas são máquinas de fluxo que convertem energia mecânica em energia elétrica através de um gerador elétrico acoplado (Pinto, 2013). A turbina remove parte da energia cinética disponível para conversão em energia mecânica. O gerador recebe essa energia e a converte em energia elétrica que é transmitida para a rede elétrica (Figura 2.1).

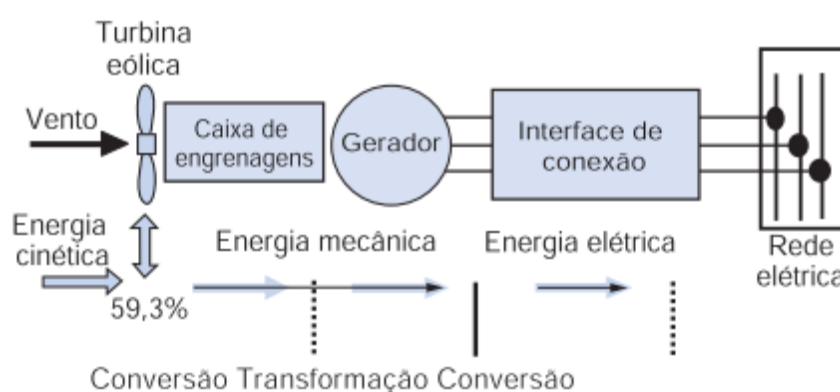


Figura 2.1 – Princípio da conversão da energia cinética do vento em energia elétrica (Pinto, 2013).

As turbinas são classificadas como as de eixo horizontal (*horizontal axis wind turbine* - HAWT) (Figura 2.2 (a) e (b)) e as de eixo vertical (*vertical axis wind turbine* - VAWT) (Figura 2.2 (c)). A potência do vento é dada pela Eq. (2.1):

$$P = \left(\frac{1}{2}\right) \rho A v^3 \quad (2.1)$$

sendo P a potência disponível em Watts, ρ a massa específica do ar, A a área da seção transversal do cilindro que é ultrapassada pelo vento e v a velocidade do vento.

Nas máquinas de eixo vertical as pás ficam mais próximas ao solo. Como a potência disponível do vento aumenta com o cubo da velocidade deste (Eq. (2.1)), há um considerável incentivo para que as pás situem-se em locais mais elevados (Pinto, 2013)

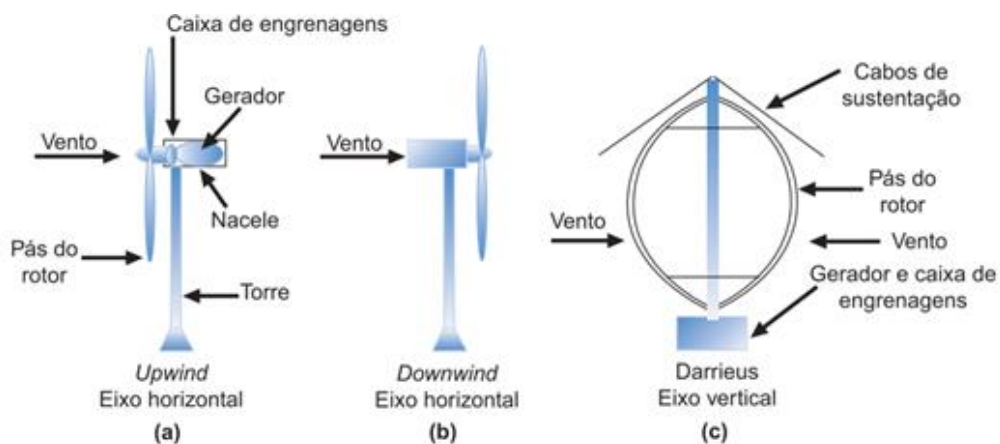


Figura 2.2 – (a) Turbina com eixo horizontal *upwind*, (b) Turbina com eixo horizontal *downwind* e (c) Turbina com eixo vertical (Pinto, 2013).

Os aerogeradores de eixo horizontal são compostos basicamente pela torre (que é a estrutura de sustentação), pela nacelle (onde estão contidos o gerador e a caixa de acoplamento), pelo cubo (estrutura na qual as pás são fixadas) e as pás (Figura 2.3).

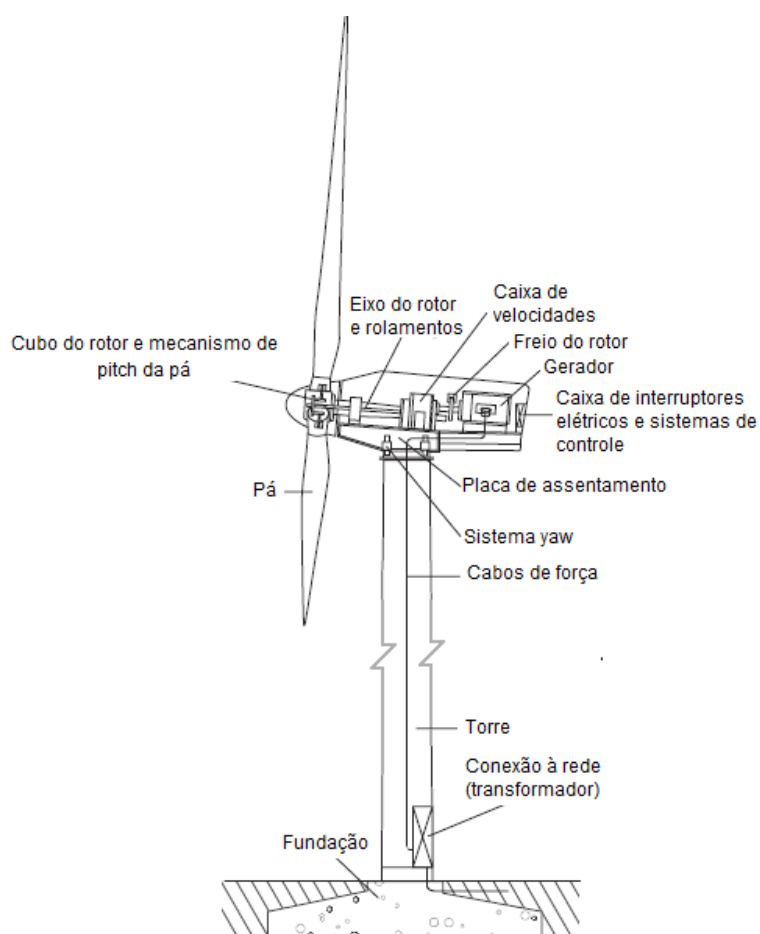


Figura 2.3 - Componentes de uma HAWT (Hau, 2006 - modificada).

A potência do vento, conforme se pode observar na Eq. (2.1), é proporcional também a área varrida pelo rotor da turbina. Para as turbinas HAWT convencionais, esta área é $A = (\pi/4)D^2$, então a potência do vento é proporcional ao quadrado do diâmetro do rotor.

Os aerogeradores tiveram um crescimento acentuado em suas dimensões. O diâmetro do rotor aumentou quase 10 vezes seu tamanho da década de 80 ao ano de 2010 e conseqüentemente a sua altura também aumentou (Figura 2.4).

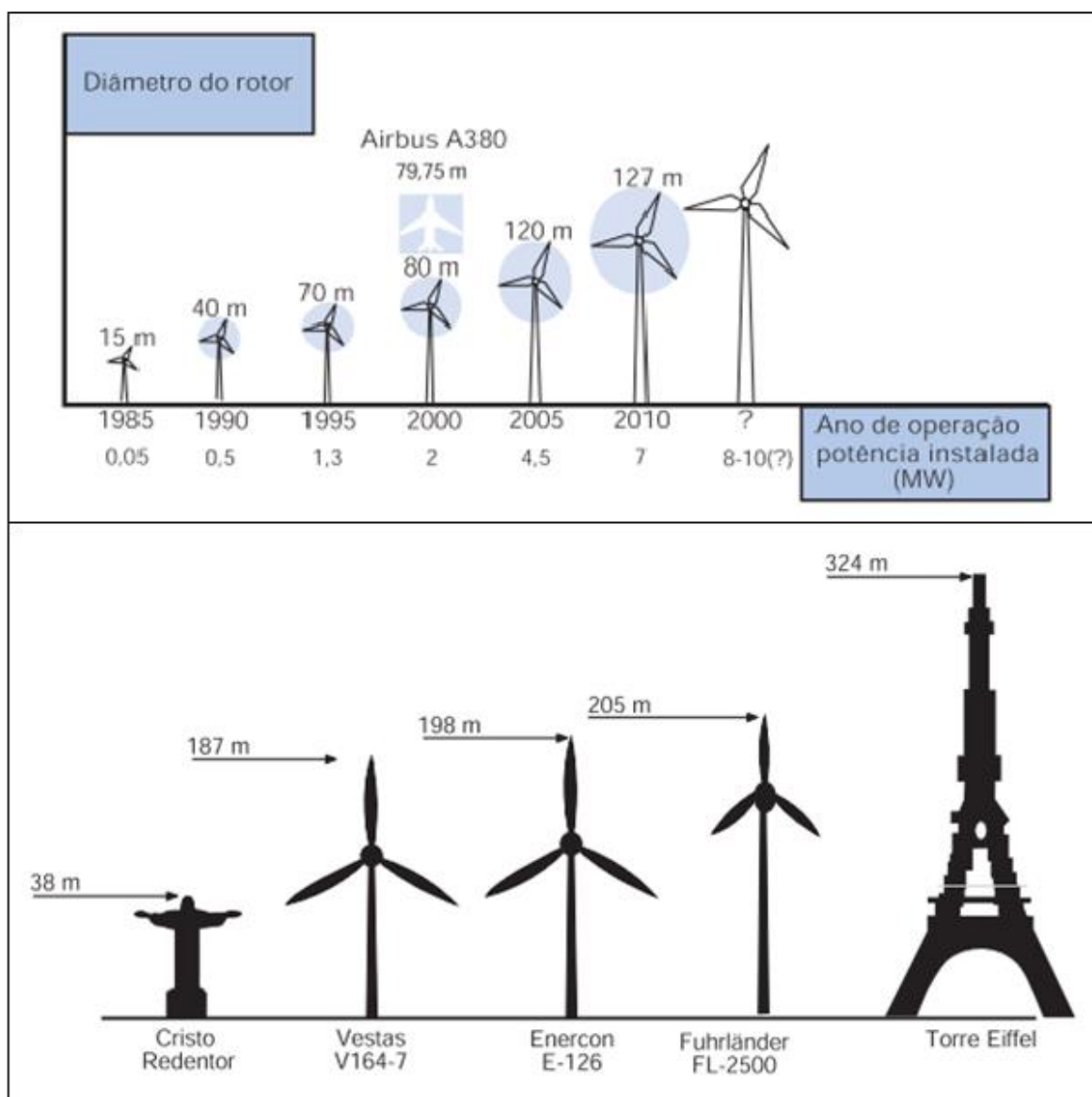


Figura 2.4 – Crescimento na dimensão das turbinas eólicas comparadas com algumas estruturas (Pinto, 2013).

Grandes estruturas são inevitavelmente flexíveis e como as cargas de vento são altamente variáveis, cria-se uma interação aeroelástica complexa que induz vibrações e ressonâncias. O projeto estrutural de uma turbina deve levar em consideração três aspectos: assegurar que seus componentes essenciais sejam capazes de suportar cargas extremas, garantir a vida útil elevada e levar em consideração frequências naturais e deformações críticas nos cálculos de rigidez (Hau, 2006).

As turbinas eólicas exigem baixa manutenção e alta durabilidade, pois suas dimensões elevadas dificultam o transporte e o acesso a seus componentes. Em contrapartida, os aerogeradores são tidos como perfeitas “máquinas de fadiga”. Alguns de seus componentes, como as pás do rotor, são projetadas com vida útil de 20-30 anos. Uma correta previsão da vida útil requer uma visão completa das condições operacionais e possíveis avarias da turbina. Para isto, a rigidez de seus componentes deve ser cuidadosamente combinada a fim de evitar problemas de vibração excessiva.

2.1. SOBRE PÁS EÓLICAS ROTATIVAS

2.1.1. Rotores com 1, 2, 3 e 4 Pás

Uma escolha importante no projeto de turbinas eólicas é o número de pás dos rotores. O momento polar de inércia é importante para a resposta dinâmica a cargas externas, pois elas produzem forças de inércia devido às massas estruturais aceleradas. Em um rotor com duas pás, o momento de inércia varia durante uma rotação em relação a um eixo fixo, isto é, ele comporta-se como uma haste rotativa. Ou seja, o seu momento de inércia possui um perfil pulsante durante uma revolução. Os rotores com três ou mais pás tendem a se comportar como um disco resultando em um momento polar de inércia constante com relação ao movimento de guinada do rotor. Este comportamento do momento de guinada aerodinâmico (*yaw*) do rotor pode ser observado na Figura 2.5 (Hau, 2006).

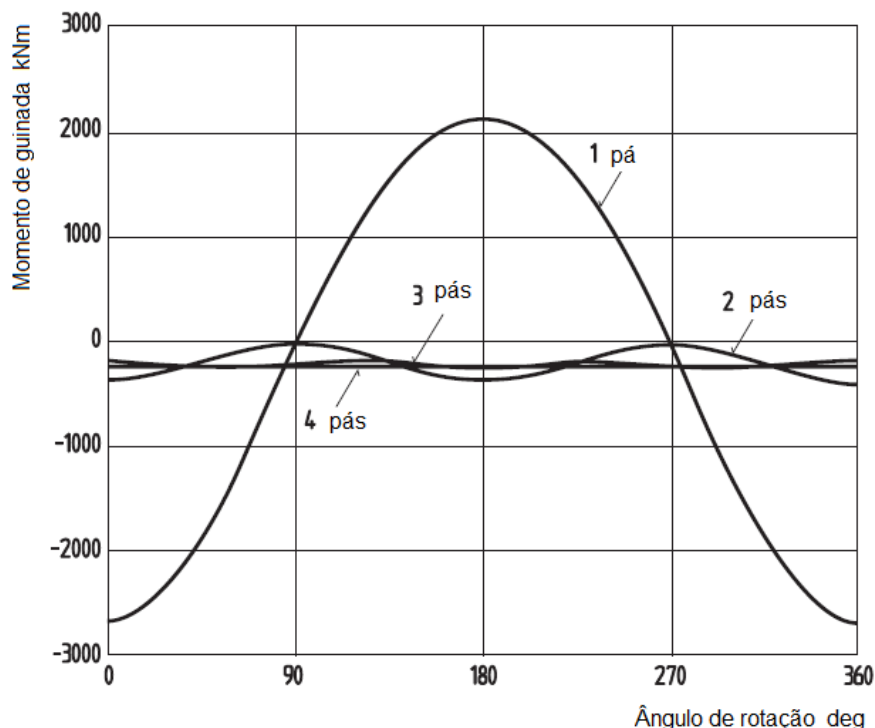


Figura 2.5 – Momento de guinada para diferentes números de pás (Hau, 2006 - modificada).

Quanto menos pás existirem, mais a dinâmica do rotor torna-se desfavorável. Os rotores com uma pá necessitam de uma massa para funcionar como contra peso, e devido sua assimetria geométrica e aerodinâmica, causa extremos, alternando forças do rotor e momentos mesmo com um fluxo de vento simétrico (Hau, 2006; Pinto, 2013).

A luz do coeficiente de potência, que aumenta com o número de pás, tem-se uma preferência por turbinas com duas ou três pás. As turbinas de três pás mostram uma operação mais suave e tendem a ser mais silenciosas. Porém o custo e o peso adicionado por uma terceira pá é considerável, e durante a construção ou reposição também se encontram dificuldades na operação.

Portanto, a aplicabilidade das turbinas com uma pá torna-se desfavorável devido à dinâmica do rotor e as turbinas de duas pás apresentam um perfil pulsante do momento de inércia durante sua operação. Estas também provocam níveis de ruídos maiores, o que é inaceitável na maioria dos parques eólicos. Estes fatores justificam a opção por uma turbina com três pás na prática.

2.1.2. Massa, Geometria e Materiais

No projeto de turbinas eólicas não há um único aspecto capaz de nortear o desenvolvimento das pás. A experiência, custo, riscos de desenvolvimento, equipamento para produção, são exemplos de aspectos que podem ser priorizados de formas diferentes na base do projeto. Segundo Hau (2006), o peso, a rigidez, o design e os métodos de controle são critérios objetivos no projeto da pá. Eles estão relacionados à geometria da pá e ao material utilizado na sua fabricação.

A madeira tem sua tradição na construção de moinhos de vento, utilizada até aproximadamente 1915, porém sua utilização na tecnologia de energia eólica moderna foi considerada um retrocesso. No entanto, houve várias tentativas de fabricar as pás de madeira. Na Dinamarca, a turbina experimental Nibe-B (Figura 2.6) foi equipada com pás de madeira em 1980. Seu desenvolvimento não foi aprofundado devido à pouca durabilidade da madeira.

O duralumínio, material oriundo da indústria aeronáutica, foi utilizado em algumas turbinas de teste. Este material não pode ser soldado e o método de produção é considerado muito caro para as pás de rotores de turbinas eólicas (Hau, 2006). Uma alternativa a utilização do duralumínio foi o emprego de um alumínio soldável AlMg5. Em 2008 a Enercon apresentou uma pá de alumínio no seu novo modelo da turbina E-20. Apesar da baixa densidade se comparado ao aço, a sua resistência à fadiga é muito menor.

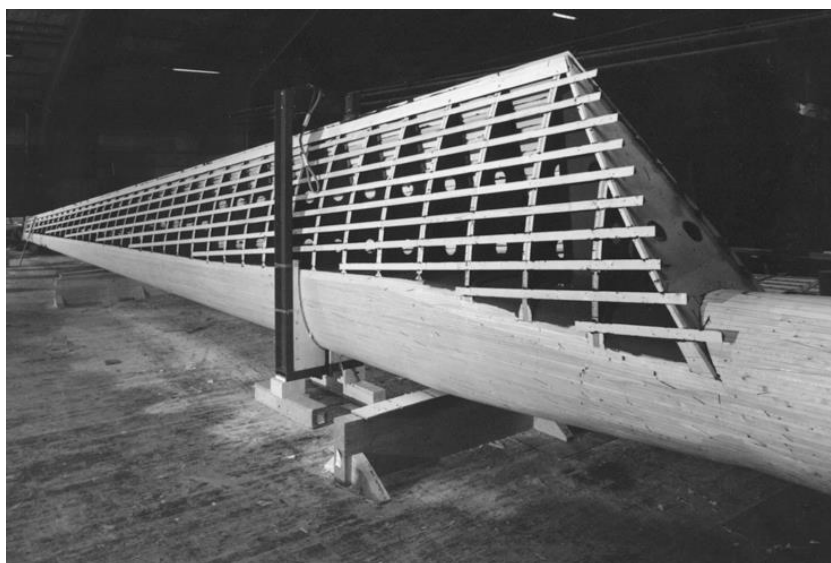


Figura 2.6 – Pá de madeira da turbina experimental Nibe-B (Hau, 2006).

No início dos anos 80, o aço foi um material bastante empregado em grandes turbinas de teste (Figura 2.7 (a)) (Hau, 2006). O preço de produção relativamente baixo, a utilização de técnicas de soldagem convencionais e as propriedades do material bem conhecidas, influenciaram na utilização deste material. Porém, as pás de grande porte confeccionadas de aço possuem peso elevado, inviabilizando o emprego deste material.

De forma alternativa, passou-se a utilizar apenas as longarinas de suporte de carga feitas de aço e as placas de fibra de vidro (Figura 2.7 (b)). Entretanto, a densidade do aço por si só claramente justifica o não emprego deste material nas pás de aerogeradores, sendo utilizada mais como uma solução temporária para as primeiras grandes turbinas.

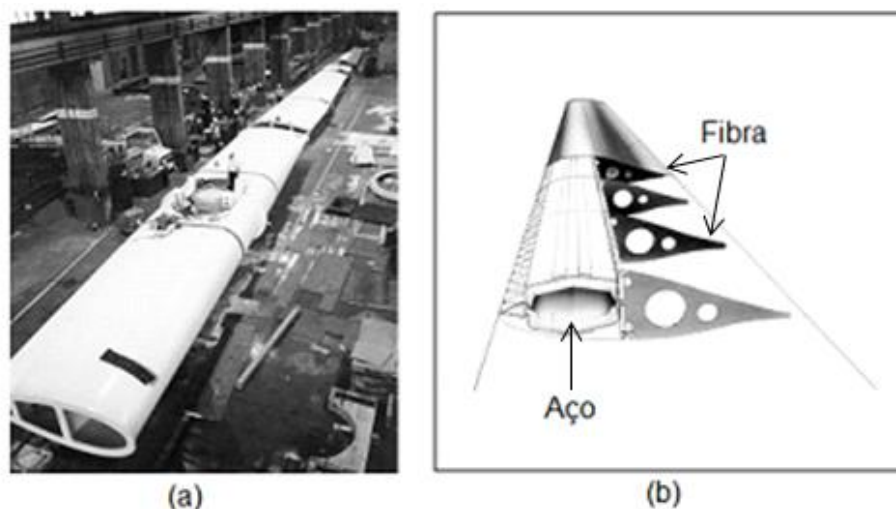


Figura 2.7 – (a) Pá de aço da turbina experimental American MOD-2 e (b) Design da pá da turbina experimental German Growian (Hau, 2006).

No final dos anos 60, os materiais compósitos de alta qualidade reforçados por fibra foram desenvolvidos na aviação, na engenharia aeroespacial e na construção de veículos. Na produção de uma pá deseja-se um material que seja ao mesmo tempo leve e resistente. O emprego destes materiais na tecnologia eólica foi um passo óbvio na construção de pás dos rotores.

A fibra mais utilizada é a de vidro devido suas propriedades de resistência. Seu módulo de elasticidade específico não é tão alto, resultando em componentes com rigidez inferior. A fibra de carbono possui excelentes propriedades de resistência e rigidez, mas a sua utilização ainda é de alto custo para turbinas eólicas

comerciais. Sua utilização fica limitada a regiões específicas. A resina epóxi tem ganhado popularidade por apresentar melhores propriedades de resistência frente ao menor custo da resina de poliéster (Hau, 2006).

2.1.3. Elementos de um Perfil Aerodinâmico

Os elementos característicos de uma pá são o ângulo de passo β , inclinação do eixo de referência em relação ao plano de rotação, o extrado (parte de cima da pá) e o intrado (parte de baixo da pá) (Figura 2.8):

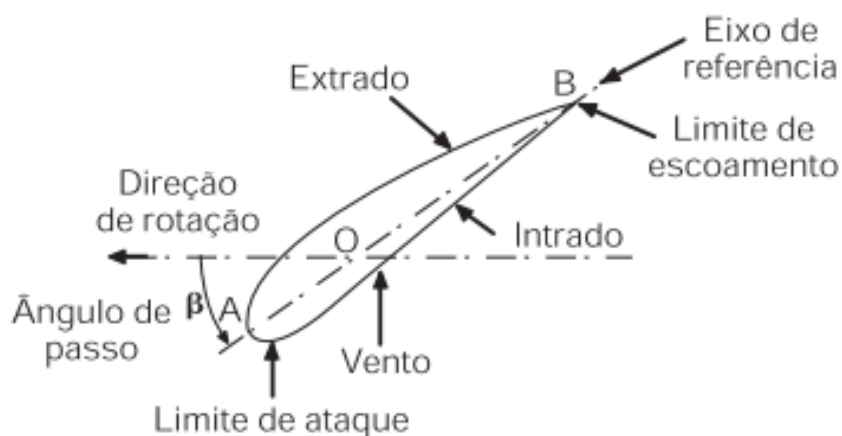


Figura 2.8 – Elementos característicos de uma pá (Pinto, 2013).

A trajetória do ar no extrado da pá é maior se comparado à trajetória no intrado. Isto resulta em uma pressão menor na parte superior do que na parte inferior da pá. Surge uma força vertical denominada sustentação que faz com a pá da turbina gire.

2.2. AÇÕES SOBRE AS PÁS

As três fontes mais importantes de carga de uma turbina eólica são o carregamento aerodinâmico, inercial e gravitacional (Hansen, 2008). O fluxo do vento é assimétrico e as pás estão sujeitas a velocidades do vento mais elevadas no setor de rotação superior do que no setor mais próximo ao solo. O carregamento

gravitacional provoca a ação do peso próprio da estrutura. Ele gera esforços alternados de tração e compressão ao longo do comprimento da pá. A força inercial centrífuga possui efeito estabilizador. Por serem proporcionais ao quadrado da velocidade de rotação, estas tendem a suprimir o efeito oscilatório do peso próprio para rotações mais elevadas.

2.2.1. Carregamento Aerodinâmico

As cargas aerodinâmicas, ilustradas na Figura 2.9, são decorrentes do fluxo de ar (1) e sua interação com os elementos estacionários e móveis da turbina eólica. Tendo a pá velocidade u no plano perpendicular ao eixo a reação aerodinâmica pode ser decomposta em uma força de sustentação (2), que é a projeção das forças aerodinâmicas na direção normal ao plano de rotação, e na força de arrasto (3), que atua na direção tangencial ao plano de rotação das pás.

A força (3) é responsável pela rotação gerando o torque útil de saída da turbina, e a força (2) provoca esforços de flexão nas pás e deverão ser suportadas pela torre.

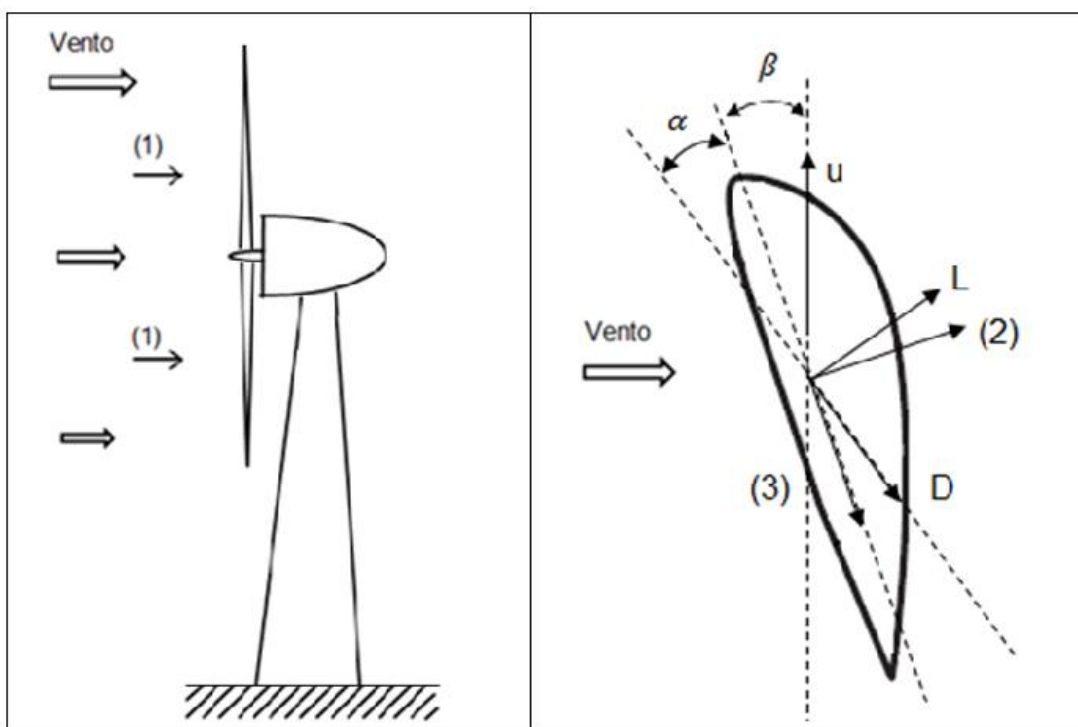


Figura 2.9 – Forças aerodinâmicas atuantes em pás de turbinas eólicas
(Baseado em: Ishida & Yamamoto, 2012).

2.2.2. Carregamento Gravitacional

O campo gravitacional associado ao movimento da pá causa uma força axial periódica sobre as pás dos aerogeradores. Esta força axial assemelha-se a uma função harmônica (senoidal ou cossenoidal). A força gravitacional mg , dependendo da posição da pá, pode ser decomposta em uma força axial (4) e uma força tangencial (5) (Figura 2.10). Quando a pá está na posição superior, ela está sujeita a um esforço de compressão axial máximo. Em peças esbeltas pode ocorrer flexão transversal devido a esses esforços. Este fenômeno é conhecido como flambagem. Esta força reduz a rigidez da pá semelhante ao pêndulo invertido. Quando a pá está na posição inferior, a sua rigidez aumenta (Ishida & Yamamoto, 2012). Como a rigidez varia periodicamente, o sistema é classificado como um sistema oscilador paramétrico.

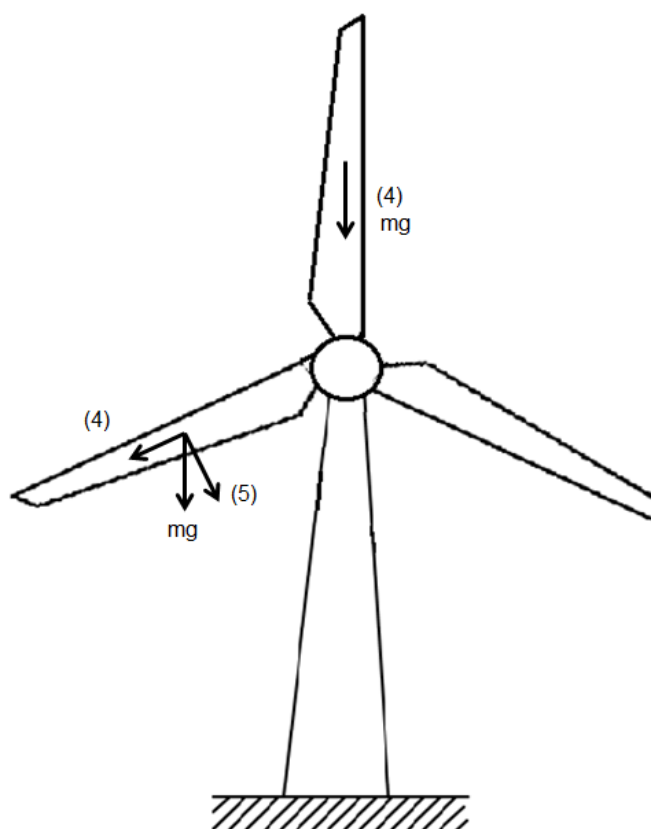


Figura 2.10 - Força gravitacional atuante em pás de turbinas eólicas
(Baseado em: Ishida & Yamamoto, 2012).

2.2.3. Carregamento Inercial

A aceleração/desaceleração do rotor eólico gera forças de inércia sobre as pás. Outra carga de inércia é a ação centrífuga sobre as pás eólicas. A força (6) (Figura 2.11) é uma força desbalanceada, visto que, uma vez que o centro de gravidade do total de pás se desvia do centro de rotação, uma excitação devido à força centrífuga existe (Ishida & Yamamoto, 2012).

A força centrífuga atua sobre um incremento da pá a uma distância e do eixo de rotação. Esta é uma força de tração e sua magnitude é proporcional à massa e ao quadrado da velocidade de rotação.

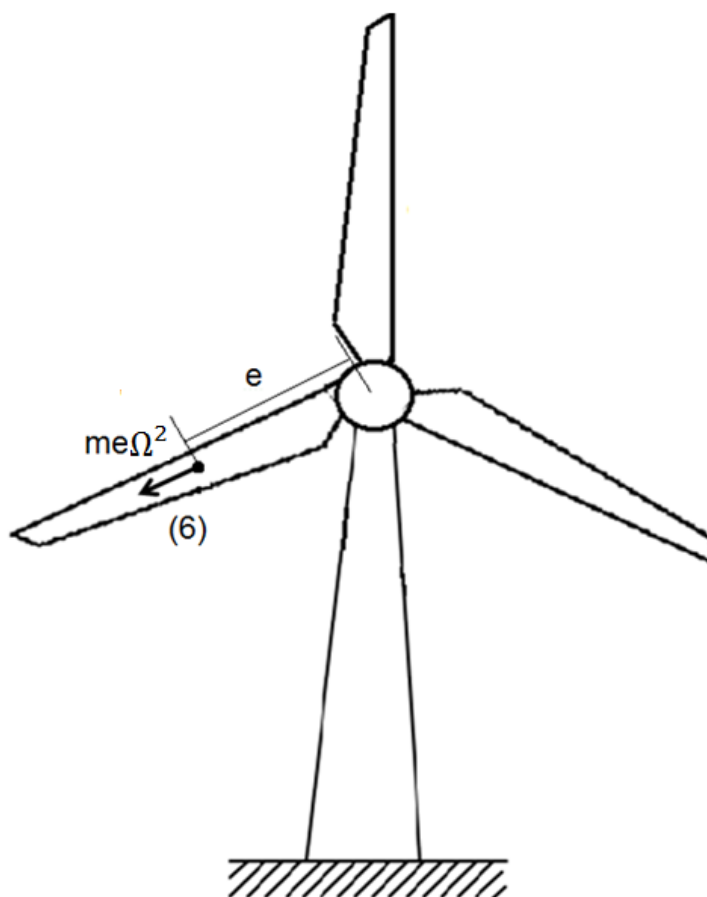


Figura 2.11 - Força centrífuga atuante em pás de turbinas eólicas
(Baseado em: Ishida & Yamamoto, 2012).

2.2.4. Efeitos Secundários

As excitações externas ocorrem com múltiplos da velocidade do rotor e podem ter sua origem em muitas áreas, como por exemplo, a interferência da torre eólica e desequilíbrio de massa das pás do rotor (Hau, 2006).

A interferência da torre pode ocorrer de duas formas, dependendo da direção da incidência do fluxo do vento. No caso de uma turbina montada contra o vento (*upwind*), ou seja, o fluxo incide na parte da frente, quando a pá da turbina passa em frente à torre ocorre uma redução no torque aerodinâmico devido à mudança do fluxo de ar gerado pela torre (Figura 2.12) (Pinto, 2013). Este fenômeno é conhecido como sombreamento da pá (*tower dam*). Os efeitos práticos desse fenômeno são leves desde que a distância mínima entre a pá e a torre seja aproximadamente uma vez o diâmetro da torre (Hau, 2006). Se a velocidade do rotor permanecer dentro da faixa de frequência natural de flexão da torre, este efeito é um risco à excitação do modo de vibração da torre.

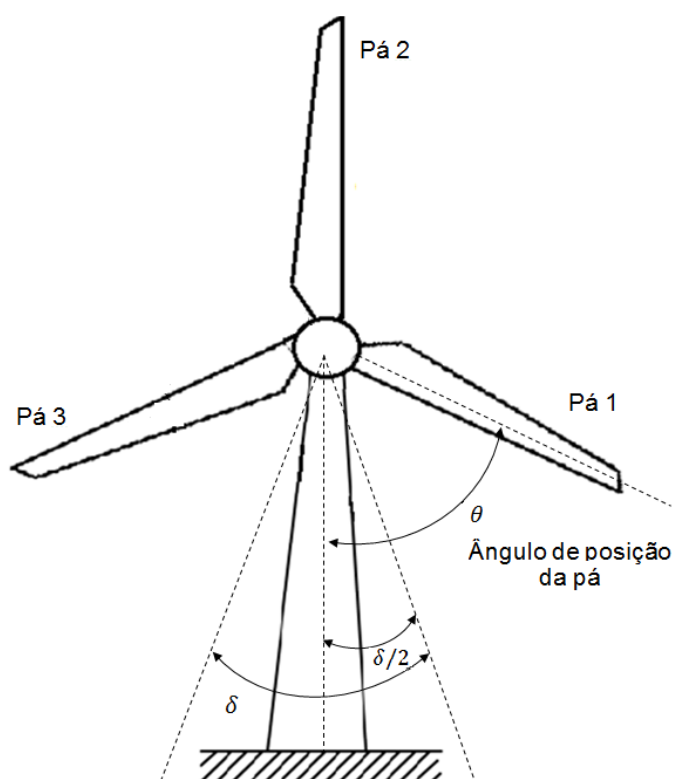


Figura 2.12 – Passagem das pás com o consequente efeito de sombreamento (Baseado em: Pinto, 2013).

Um problema completamente diferente surge quanto se trata de uma turbina montada a favor do vento (downwind). Considerando que a torre tenha seção transversal circular, a esteira formada atrás do cilindro circular é formada por vórtices alternados em ambos os lados com frequência definida, denominados vórtices de Karman. Este efeito é denominado sombra da torre (*tower shadow*) (Figura 2.13). A Figura 2.14 ilustra a influência do efeito de sombra da torre na razão de velocidade v_w/v_0 , sendo v_0 a velocidade do vento antes de passar pela torre e v_w a velocidade do vento na região de sombra da torre.

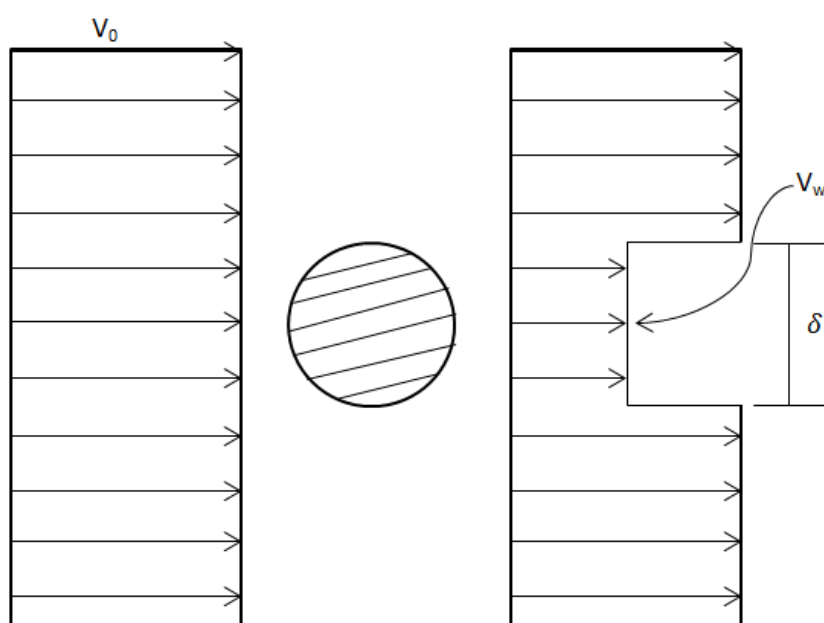


Figura 2.13 – Modelo do efeito de sombra da torre.

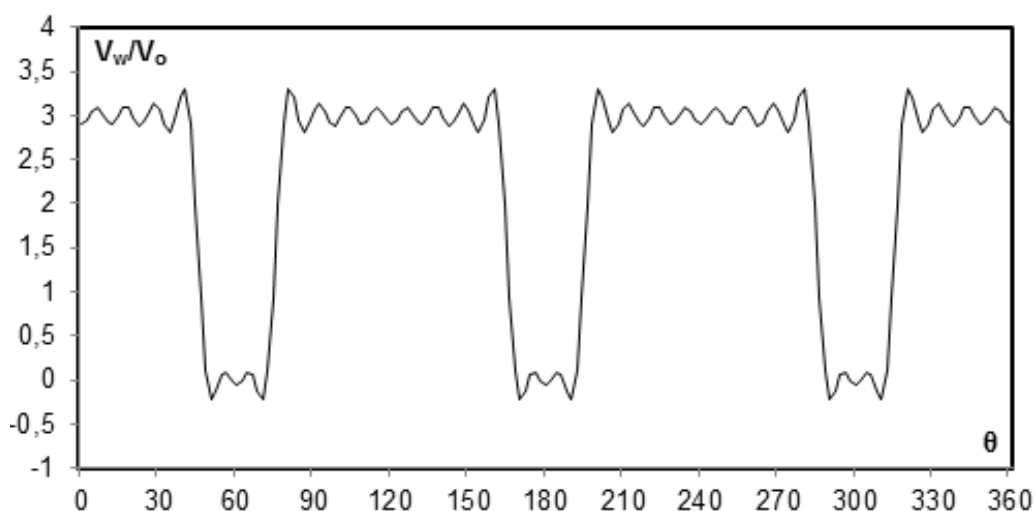


Figura 2.14 – Evolução da razão de velocidade em função do ângulo de posição da pá θ .

2.3. PATOLOGIAS ASSOCIADAS À DINÂMICA DE PÁS EÓLICAS

A maioria dos incidentes encontrados com aerogeradores deve-se a falhas da pá, e resultaram em arremessos parciais ou totais. Até o ano de 2010 um total de 201 incidentes foi registrado (Figura 2.15). Há registros de pedaços de pás encontradas a 1300 m do local do acidente.

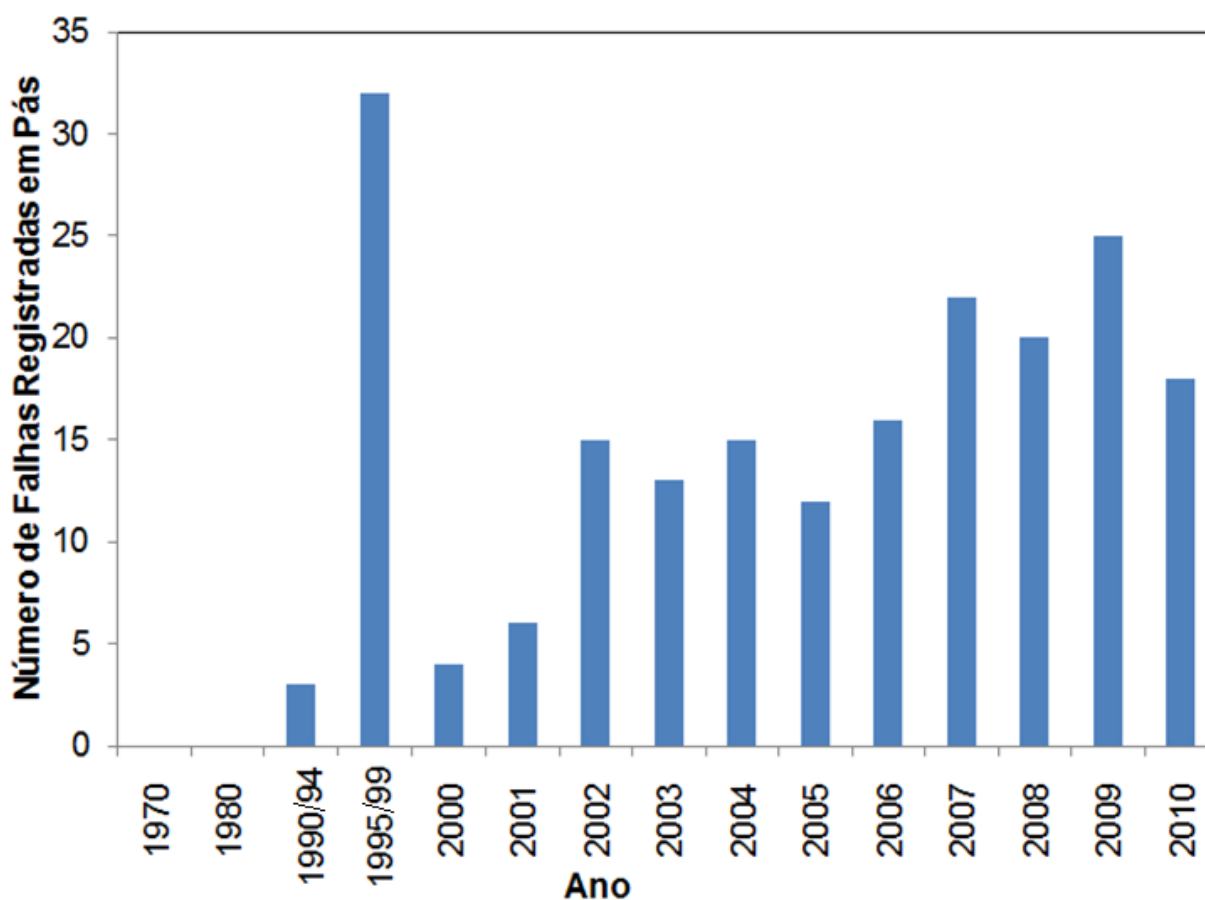


Figura 2.15 - Número de falhas registradas em pás de turbinas eólicas (Dados: CAITHNESS Windfarm Information Forum (CWIF), 2011).

As manifestações patológicas em pás de turbinas eólicas são oriundas do projeto, da fabricação, do transporte, do processo de elevação e montagem, da ação de cargas últimas e de esforços de utilização. A DNV GL (*Det Norske Veritas*) promove a certificação de aerogeradores através de avaliações iniciais, testes e medições de acordo com normas internacionais reconhecidas. Seu objetivo é fornecer provas de desempenho e segurança de forma a evitar falhas por diversas razões.

Um exemplo de problema na fabricação de pás eólicas é a ondulação das fibras. Barros (2010) mostra, experimentalmente, que corpos de prova com ondulações mais severas tendem a romper na região de ondulação da fibra. A ruptura por defeito de fabricação ocorreu com uma pá de um dos aerogeradores do *Echo Wind Park* da *DTE Energy's*. Após uma avaliação foram constatadas 14 pás em condições precárias. A GE (*General Electric*), que é a maior fabricante de peças de turbinas eólicas, relatou que a causa foi uma anomalia de fabricação (Tribune, 2014).

As dimensões das pás de médio e grande porte dificultam seu transporte, elevação e montagem. Durante estes processos, choques da pá com outras estruturas podem ocorrer e gerar danos. Na montagem pode haver folgas, uso de parafusos errados, e esses erros ocasionarem solicitações adicionais ao sistema.

Intempéries e relâmpagos podem solicitar a pá e ela vir a romper. O caso das oito turbinas que foram derrubadas por fortes rajadas de vento no Complexo Eólico do Chato é um exemplo de esforços últimos (Portal Energia, 2014). O estudo do impacto de animais nas pás é encontrado na literatura. Ele não gera danos significativos nas pás, mas geralmente ocasionam na morte das aves.

Como consequência das altas cargas dinâmicas experimentadas durante a operação do aerogerador, o grande perigo reside na fadiga do material das pás (Hau, 2006). A turbulência do vento e a ação alternada do peso próprio são os carregamentos dominantes para o projeto de vida útil. Os fenômenos de ressonância geram vibrações excessivas e também contribuem para fadiga do material.

Após três anos de operação, a turbina Smith-Putnam, perdeu uma pá que foi arremessada devido a danos de fadiga em sua raiz (Pinto, 2013). A pá de oito toneladas foi lançada a uma distância de cerca de 230 m. Para combater este perigo, o nível de tensão admissível do material é baixo de forma a garantir a vida útil em relação à fadiga, considerando as teorias de forças operacionais. Outra forma de prevenção é manter o controle de qualidade durante a fabricação das pás mais rigorosas.

2.4. ABORDAGENS SOBRE A DINÂMICA DE PÁS EÓLICAS

A modelagem de pás eólicas assemelha-se ao comportamento dinâmico de pás de helicópteros descritas por vigas engastadas submetidas a forças centrífugas (Figura 2.16). Esta descrição lagrangeana de pás rotativas está presente em diversos trabalhos na literatura (Hoa, 1979; Hodges & Rutkowski, 1981; Wright, Smith, Thresher, & Wang, 1982).

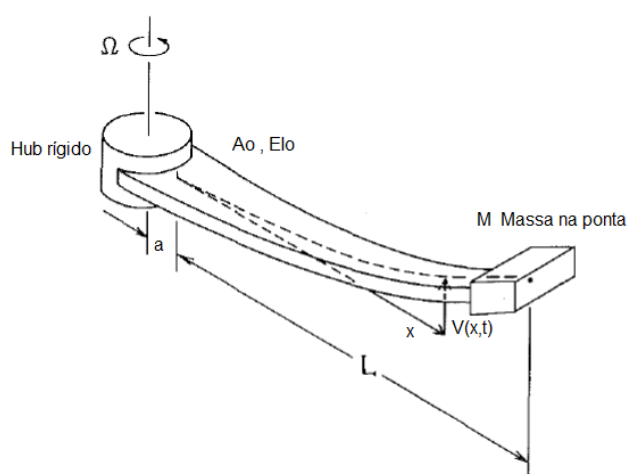


Figura 2.16 - Modelo de viga com massa na extremidade (Wright, Smith, Thresher, & Wang, 1982 - modificada).

Estes modelos são desenvolvidos com intuito de se obter soluções analíticas e analítico-aproximadas úteis para rotores de pás constantes. Estas avaliações simplificadas visam validar a metodologia de solução em plataformas computacionais complexas, como códigos de análise estrutural em programas de elementos finitos. Neste trabalho optou-se por soluções analítico-aproximadas baseada em métodos de modos assumidos (por exemplo, métodos de Ritz, Rayleigh-Ritz e Resíduos Ponderados) devido a sua versatilidade.

Nestes métodos, a solução aproximada é expandida por um conjunto de funções conhecidas com parâmetros arbitrários. Os parâmetros são determinados por métodos variacionais ou por resíduos ponderados. Os métodos variacionais utilizam um funcional relacionado com a equação diferencial e as condições de contorno. O método de resíduos ponderados trabalha diretamente com a equação diferencial e as condições de contorno (Finlayson, 1972).

Wright *et al.* (1982) e Auciello (2013) utilizaram o método de Rayleigh-Ritz. A partir de parâmetros adimensionalizados, obtiveram um conjunto de razões de frequências para diferentes rotações. Estes autores avaliam a influência do tamanho do hub, diferentes valores de massa na extremidade e consideram vigas com seções transversais variáveis em suas análises.

Kang *et al.* (2014) analisa a interação entre a torre e as pás analiticamente pelo método de Galerkin e experimentalmente. A interação é modelada pela condição de contorno da torre determinada pelas forças de cisalhamento devido à rotação da pá e da nacele. O movimento da pá é submetido ao movimento da base causada pela vibração da torre (Figura 2.17).

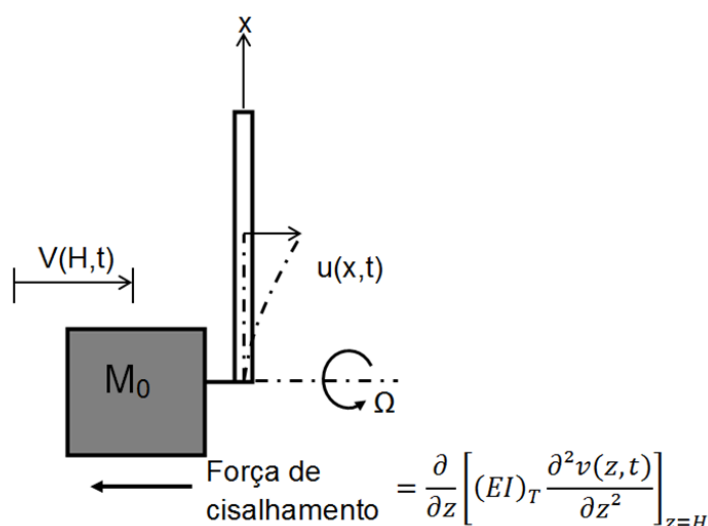


Figura 2.17 – Diagrama de corpo livre da nacele e da viga
(Kang, Park, Park, & Atluri, 2014 - modificada).

Hoa (1979) utiliza o MEF para solucionar o problema de vigas rotativas. Ele avalia os efeitos do raio do hub r , de uma massa concentrada na ponta da viga e do ângulo de ajuste θ (Figura 2.18).

Conforme o raio do hub aumenta a força centrífuga também aumenta. Isto ocorre porque a base da viga fica mais afastada do centro de rotação. Logo, as frequências naturais também aumentam.

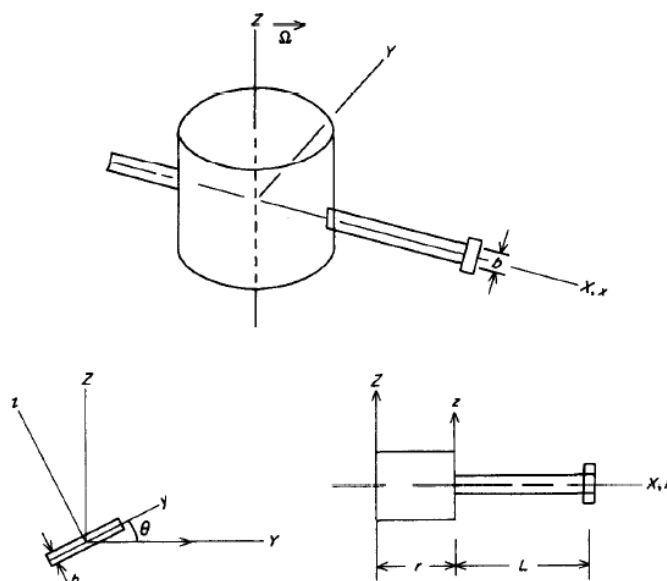


Figura 2.18 – Geometria da viga (Hoa, 1979)

O efeito da massa na extremidade da viga sobre a matriz de rigidez do sistema depende da velocidade de rotação. Já o seu efeito sobre a inércia do sistema não depende da velocidade de rotação. Segundo Hoa (1979) para velocidades de rotação mais baixas, o efeito da massa na ponta da viga na matriz de massa é mais dominante e as frequências diminuem. À medida que a velocidade aumenta, o efeito sobre a matriz de rigidez torna-se predominante e as frequências naturais do sistema aumentam.

Hodges & Rutkowski (1981) apresentam uma tentativa de melhorar a convergência dos resultados numéricos. Utilizou-se o MEF de ordem variável, que consiste no aumento da ordem da função de forma do elemento. Foi verificado que, salvo o tempo de processamento, é melhor utilizar menos elementos de ordem superior do que maior número de elementos de ordem inferior para obter uma mesma precisão.

As soluções analíticas e analíticas aproximadas são utilizadas para validar metodologias numéricas e experimentais de vigas rotativas. Depois de garantir a qualidade de resultados de modelos simplificados, os procedimentos numéricos e experimentais são aplicados em modelos mais complexos. Ishida, Inoue e Nakamura (2009) descrevem o comportamento de uma pá rotativa por um sistema equivalente 1GdL evidenciando a ação das forças centrífugas e do peso próprio na dinâmica de rotores eólicos. Neste trabalho analítico, numérico e experimental

evidencia-se um comportamento de um oscilador paramétrico, ou seja, um problema do tipo Hill-Mathieu.

Modelos mais complexos considerando a geometria real das pás, o conjunto de pás e o sistema acoplado da torre com as pás também são encontrados na literatura no âmbito numérico e experimental (Araújo, Morais, Avila, & Shzu, 2014; Ferreira, Costa, Morais, Neto, & Miranda, 2013; Malcolm, 2002; Kang, Park, Park, & Atluri, 2014).

Os softwares de análises estrutural e dinâmica que utilizam o método dos elementos finitos são capazes de modelar a complexidade geométrica das pás. Porém o custo computacional de se utilizar elementos sólidos é alto. Ferreira *et al.* (2013) modela uma pá de turbina de formato sólido HTUC no ANSYS® utilizando elementos sólidos tetraédricos. Araújo *et al.* (2014) propõe uma modelagem no ANSYS® utilizando um elemento capaz de armazenar as informações geométricas das seções e transmiti-las ao elemento estrutural de viga utilizado. Os resultados diferem em menos de 5%, mas o modelo de Araújo *et al.* (2014) demanda menor custo computacional.

Malcolm (2002) modela uma turbina eólica com três pás sobre o efeito das cargas centrífugas. Ele fornece um método para obter o diagrama de Campbell para a turbina de três pás inteiramente baseado no modelo ADAMS™. Utilizou-se a transformada de Coleman para remover os termos periódicos do modelo a fim de obter um modelo linearizado aeroelástico geral. Os trabalhos citados que abordam a dinâmica de pás rotativas apresentam-se de forma reduzida e esquemática na Figura 2.19.

Os softwares abertos QBlade e Co-Blade foram desenvolvidos para tratar especificamente de problemas relacionados a pás eólicas. O QBlade, desenvolvido pelo Hermann Föttinger Institute de TU Berlin, permite ao usuário projetar rapidamente aerofólios personalizados e integrá-los em um projeto de rotor de turbina eólica (Figura 2.20). Ele mostra as relações fundamentais de conceitos de design e desempenho.

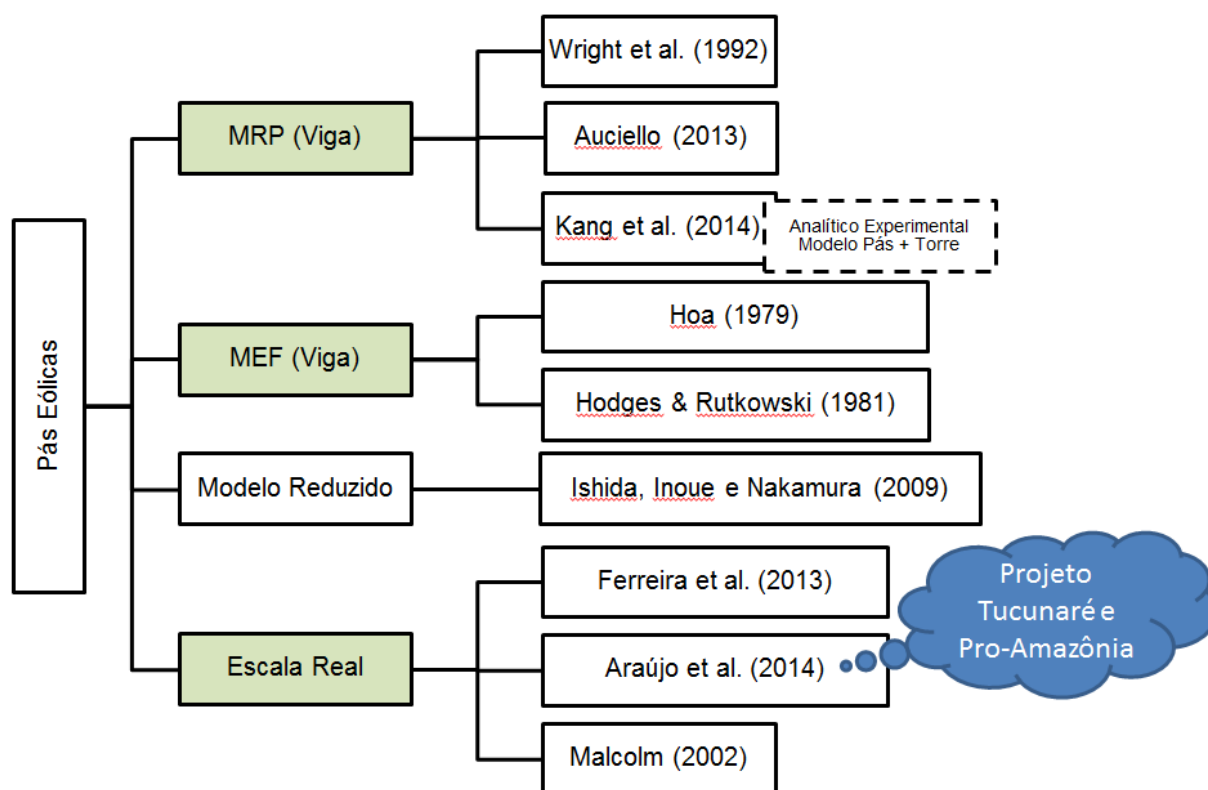


Figura 2.19 – Resumo esquemático de trabalhos que abordam a dinâmica de pás rotativas.



Figura 2.20 - Pás modeladas no software QBlade
(Marten, Wendler, Pechlivanoglou, Nayeri, & Paschereit, 2013).

O Co-Blade, da Mathworks, tem como objetivo acelerar a fase de projeto preliminar, fornecendo a capacidade de analisar rapidamente layouts de compósitos alternativos e estudar seus efeitos nas propriedades da pá (Figura 2.21). Ele

proporciona a modelagem realística de pás compósitas, cálculos de propriedades estruturais, análises estruturais, otimização do layout do compósito e pós-processamento.

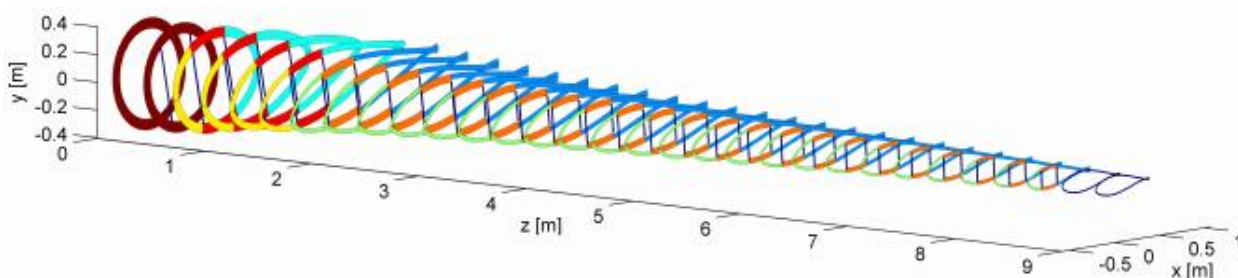


Figura 2.21 - Exemplo de uma pá eólica com diferentes materiais aplicados ao longo de seu comprimento no Co-Blade (Sale, 2012).

Os principais centros de pesquisa de energia renovável atualmente são o *National Renewable Energy Laboratory* (NREL) e Risø DTU *National Laboratory for Sustainable Energy*.

O Centro Nacional de Tecnologia Eólica (NWTC – *National Wind Technology Center*), do NREL, é um parceiro de empresas, laboratórios do Departamento de Energia dos Estados Unidos (DOE – *Department of Energy*), agências governamentais e universidades ao redor do mundo no desenvolvimento de tecnologias de energias renováveis. Entre suas áreas de pesquisa estão o estudo de componentes de sistemas eólicos de teste, o emprego de ferramentas de simulação de alto desempenho para produção de modelos realistas de turbinas eólicas em ambientes complexos e o desenvolvimento de tecnologias inovadoras para acelerar a inserção no mercado.

O Risø é conhecido atualmente por seu desenvolvimento em energia eólica e células de combustível de óxido sólido. O laboratório dinamarquês desenvolveu o *Wind Atlas Analysis and Application Program* (WASP), que é uma ferramenta utilizada para simular o fluxo de vento sobre o terreno e estimar a produção de energia a longo prazo das turbinas eólicas e parques eólicos. Este programa está em desenvolvimento a mais de 25 anos e é processado em computadores com o *Microsoft Windows*.

3. MODELAGEM POR VIGA EULER-BERNOULLI DE PÁS EÓLICAS

A modelagem de pás eólicas por um modelo de viga engastada rotativa está presente em diversos trabalhos na literatura. A partir destes modelos é possível obter soluções analíticas e analítico-aproximadas, que não são viáveis em geometrias mais complexas. As metodologias numéricas de vigas rotativas são validadas por estas soluções e então aplicadas a modelos mais complexos.

Este capítulo destina-se a formulação de vigas engastadas sob força axial devido seu peso próprio e a força centrífuga utilizando o método de Galerkin. A metodologia numérica é apresentada para um modelo de pá simplificada e para o modelo da pá real.

3.1. TEORIA DE VIGA SOB FORÇA AXIAL:

Considerando um elemento de viga sob uma carga axial $P(x, t)$, mostrado na Figura 3.1, têm-se para o movimento vertical e para o movimento rotacional (momento) em relação a 0 as seguintes equações de equilíbrio:

$$-(V + dV) + f dx + V + (P + dP)\text{sen}(\theta + d\theta) - P\text{sen}(\theta) = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

$$(M + dM) - (V + dV)dx + f dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad (3.2)$$

onde ρ é a densidade da massa e $A(x)$ é a área da seção transversal da viga.

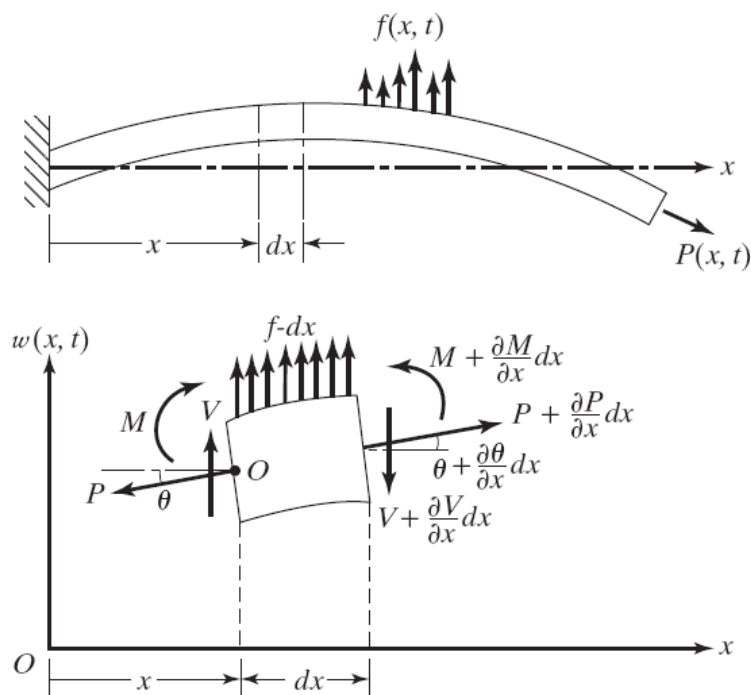


Figura 3.1 – Viga em flexão sob efeito da carga axial (Rao, 2008).

Sabe-se que para pequenas deflexões:

$$\text{sen}(\theta + d\theta) \cong \theta + d\theta = \theta + \frac{\partial\theta}{\partial x} dx = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \quad (3.3)$$

A equação da linha elástica, que relaciona o momento fletor M com o deslocamento, é dada por:

$$M = EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \quad (3.4)$$

Combinando as Equações (3.1), (3.2) e (3.3) em uma única equação diferencial de movimento, temos:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left[P(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] = f(x, t) \quad (3.5)$$

sendo E o módulo de elasticidade transversal e $I(x)$ o momento de inércia da área da seção transversal da viga em relação ao eixo y . Cargas axiais $P(x)$ de tração provocam um aumento na rigidez da estrutura e um aumento das frequências naturais. Para o caso de compressão observa-se diminuição da rigidez e dos valores de frequências.

Para uma viga uniforme, reescreve-se a Eq. (3.5) da seguinte forma:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left[P(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] = f(t, x) \quad (3.6)$$

E para vibrações livres, ou seja, $f(x, t) = 0$, têm-se:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left[P(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] = 0 \quad (3.7)$$

No caso de força axial nula, têm-se a seguinte equação de movimento:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(t, x) \quad (3.8)$$

A forma modal de uma viga uniforme engastada-livre em vibração livre é:

$$w_n(x) = C_n [\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x - \alpha_n (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x)] \quad (3.9)$$

onde $\alpha_n = \frac{\sin \beta_n l + \sinh(\beta_n l)}{\cos(\beta_n l) + \cosh(\beta_n l)}$.

A Tabela 3.1 resume a equação de frequência e os valores de $\beta_n l$:

Tabela 3.1 - Equação de frequência e valores de $\beta_n l$ para uma viga engastada-livre (Rao, 2008).

Equação de frequência	Valor de $\beta_n l$
$\cos(\beta_n l) \cosh(\beta_n l) = -1$	$\beta_1 l = 1,875104$
	$\beta_2 l = 4,694091$
	$\beta_3 l = 7,854757$
	$\beta_4 l = 10,995541$

3.2. MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS

O método dos resíduos ponderados (MRP) engloba vários métodos: o método da colocação, de Galerkin, integral, entre outros. O MRP é mais simples que os métodos variacionais, pois exige menos manipulação matemática. Basta substituir a solução aproximada na equação diferencial governante para obter o resíduo do método. Já construção do funcional de energia dos métodos variacionais é dispendiosa. É necessário fazer uma aproximação do hamiltoniano, pois é

impossível analisar todas as configurações do sistema de partículas. Segundo Finlayson (1972), o MRP é aplicável a uma gama maior de problemas.

O MRP é um método geral de obtenção de soluções aproximadas para equações diferenciais. A solução aproximada $\bar{\phi}$ é expandida por uma série de funções testes ψ_k multiplicada por constantes arbitrárias q_k , conforme a expressão abaixo:

$$\phi \approx \bar{\phi} = \sum_{k=1}^n q_k \psi_k \quad (3.10)$$

Quando a forma aproximada da variável dependente, ϕ , é substituída na equação diferencial governante, têm-se um erro denominado resíduo \mathbb{R} . E devido à solução ser aproximada, o resíduo \mathbb{R} é não nulo (Madenci & Guven, 2006).

As funções de ponderação podem ser escolhidas de diversas maneiras e cada escolha corresponde a um critério diferente do MRP. Caso as funções de ponderação escolhidas sejam a mesma que as funções de forma do elemento, o MRP é denominado como método de Galerkin.

Dada uma equação diferencial de um problema físico no domínio D:

$$\mathbf{L}(\phi) - f = 0 \quad (3.11)$$

onde ϕ é a variável dependente, f uma função de força conhecida, \mathbf{L} o operador diferencial parcial ordinário, cuja ordem é especificada por p , podendo ser linear ou não linear, e assumidas as seguintes condições de contorno:

$$B_j(\phi) = g_j \quad \text{em } C_1 \quad (3.12)$$

$$E_j(\phi) = h_j \quad \text{em } C_2 \quad (3.13)$$

onde B_j e E_j são operadores conhecidos, com $j = 1, 2, 3, \dots, p$, que prescrevem as condições de contorno sobre a variável dependente e suas derivadas, respectivamente. O MRP requer que:

$$\int_D [\mathbf{L}(\bar{\phi}) - f] w_k dD = 0 \quad , \quad \text{com } k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.14)$$

onde w_k são funções de ponderação que aproximam a variável dependente como:

$$\phi \approx \bar{\phi} = \sum_{k=1}^n \alpha_k W_k \quad (3.15)$$

desde que satisfaçam as condições de contorno em C_1 . Os coeficientes desconhecidos α_k são determinados através da resolução do sistema de equações algébricas resultante.

3.2.1. Viga sob Carregamento Gravitacional

O modelo de viga engastada-livre com uma carga axial distribuída triangularmente representa a pá simplificada sob a ação de seu peso próprio (Figura 3.2).

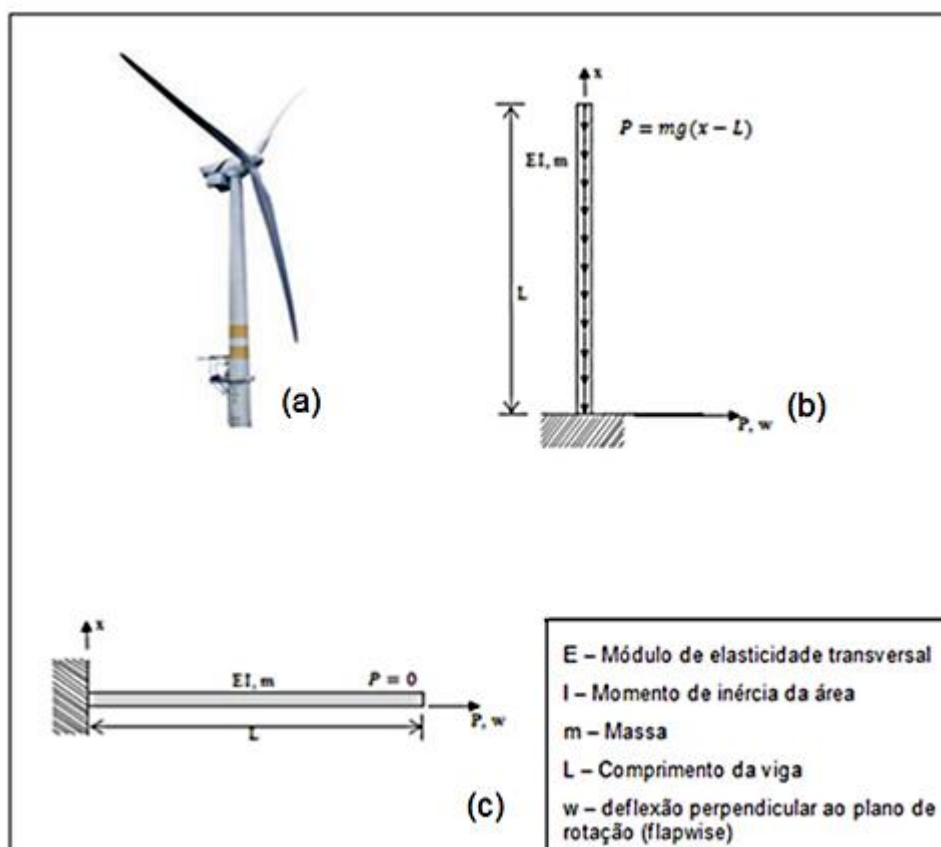


Figura 3.2 - (a) Turbina eólica. (b) Viga engastada-livre com carga axial distribuída triangular de compressão. (c) Viga engastada-livre com carga axial nula (flexão).

O peso próprio é uma função linear dado pela Eq. (3.16) para o modelo da pá.

$$P(x) = \rho Ag(L - x) \quad (3.16)$$

sendo m a massa por unidade de comprimento da pá, g a aceleração da gravidade, L o comprimento da pá.

É vantajoso reduzir um sistema mecânico contínuo em um sistema discreto, Avila *et al.* (no prelo). De acordo com o método de Galerkin, (Paidoussis, 2004), a solução aproximada da Eq. (3.6) pode ser expressa por:

$$w(x, t) \approx w_N(x, t) = \sum_{j=1}^N \psi_j(x) q_j(t) \quad (3.17)$$

sendo $\psi_j(x)$ funções testes que pertençam ao domínio $\mathbb{D} = [0, L]$ e satisfaçam as condições de contorno, e $q_j(t)$ são constantes generalizadas do sistema discretizado.

Utilizando a forma modal de uma viga engastada-livre simples como funções teste:

$$\psi_j(x) = \cosh \beta_j x - \cos \beta_j x - \sigma_j (\sinh \beta_j x - \sin \beta_j x) \quad (3.18)$$

sendo $\sigma_j = (\sinh \beta_j L - \sin \beta_j L) / (\cosh \beta_j L + \cos \beta_j L)$ e $\beta_j L$ as raízes da equação transcendental $\cos \beta_j L \cdot \cosh \beta_j L = -1$. Os autovalores β_j obtidos correspondem às frequências naturais e as autofunções ψ_j correspondem às formas modais.

Para uma viga engastada-livre tem-se que $\beta_1 L = 1.875104$, $\beta_2 L = 4.694091$, $\beta_3 L = 7.854757$ e $\beta_4 L = 10.995541$. Ao substituir a solução aproximada, dada pela Eq. (3.17), na Eq. (3.6) o resultado não será zero, mas sim em uma função resíduo $\mathbb{R}[w_N]$:

$$\mathbb{R}[w_N(x, t)] = \sum_{j=1}^N \rho A \psi_j \ddot{q}_j + EI \psi_j^{iv} q_j - \frac{\partial}{\partial x} [P(x) \psi_j'] q_j \quad (3.19)$$

O método de Galerkin requer que, no domínio $\mathbb{D} = [0, L]$, a integral da função resíduo ponderada por $\psi_i(x)$ seja zero:

$$\int_0^L \mathbb{R}[w_N] \psi_i(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.20)$$

Como as autofunções são ortogonais têm-se, pelas propriedades de ortogonalidade, que:

$$\int_0^L \psi_i(x)\psi_j(x)dx = L\delta_{ij} \quad (3.21)$$

sendo δ_{ij} a função delta de Kronecker (0 quando $i \neq j$ e 1 quando $i = j$).

Substituindo a Eq. (3.19) na Eq. (3.20), têm-se:

$$\sum_{j=1}^N \rho AL\delta_{ij}\ddot{q}_j + EI\lambda_j^4 L\delta_{ij}q_j - \int_0^L P(x)\psi_j'\psi_i'dx q_j = 0 \quad (3.22)$$

Portanto, o sistema contínuo reduziu-se a um número discreto de equações diferenciais ordinárias, e pode ser escrito na seguinte forma matricial:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_m - \mathbf{K}_g)\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

sendo \mathbf{M} a matriz de massa, \mathbf{K}_m e \mathbf{K}_g as matrizes de rigidez material e geométrica, respectivamente.

Para considerar a pá nas várias posições que esta pode se encontrar, realizou-se uma análise do ponto de vista estático, variando a magnitude da componente axial do peso em função do ângulo θ formado pela viga e o eixo y , conforme ilustrado na Figura 3.3.

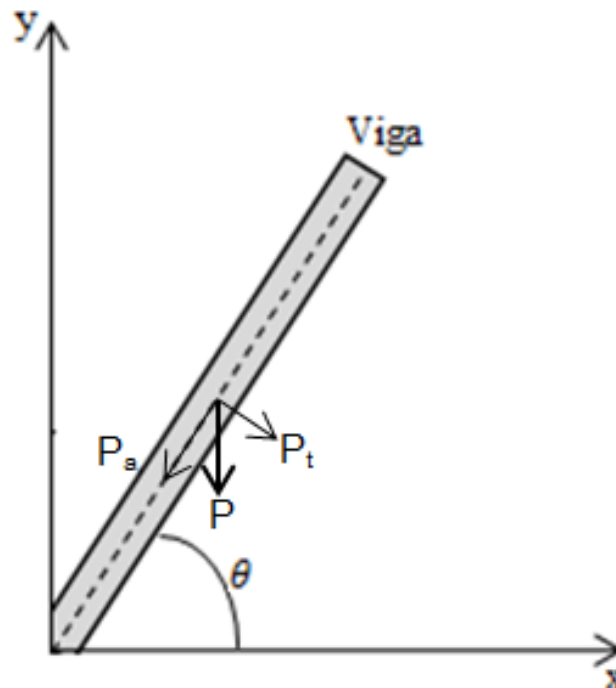


Figura 3.3 – Posicionamento da viga

Portanto, a expressão $P(x)$ para descrever o peso próprio da pá ao longo do comprimento x em função do ângulo θ é descrita por:

$$P(x) = \rho Ag(L - x)\text{sen}(\theta) \quad (3.24)$$

3.2.2. Viga Rotativa

De forma similar a metodologia utilizada no estudo da influência do peso próprio nas frequências naturais de pás de aerogeradores, optou-se por simplificar o sistema em um modelo de viga engastada-livre rotativa sob a ação da força centrífuga (Figura 3.4).

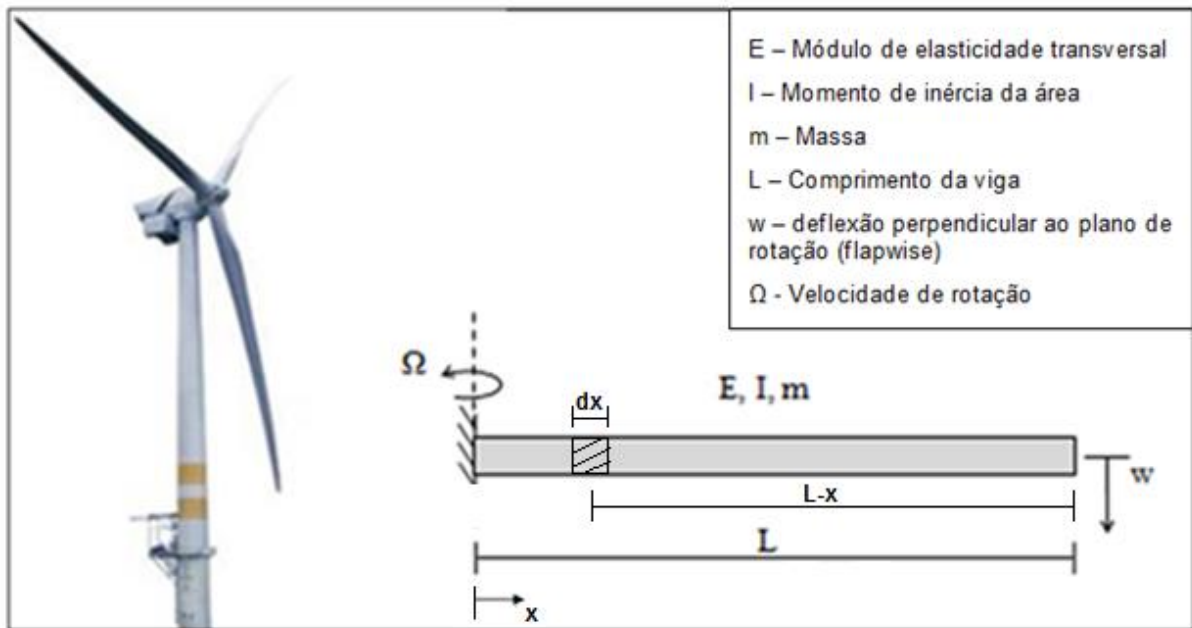


Figura 3.4 - Viga engastada-livre rotativa.

A força centrífuga é uma função dada pela Eq. (3.25):

$$F_c(x) = \frac{\rho A \Omega^2}{2} (L^2 - x^2) \quad (3.25)$$

sendo A a área da seção transversal e Ω a velocidade de rotação da viga.

Portanto, a equação diferencial de movimento para o modelo é:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[F_c(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] = f(x, t) \quad (3.26)$$

sendo $w(x, t)$ a deflexão lateral.

Em vibração livre, com a viga de seção uniforme e isotrópica, a Eq. (3.26) reduz-se a:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[F_c(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] = 0 \quad (3.27)$$

De acordo com o método de Galerkin, (Paidoussis, 2004), a solução aproximada da Eq. (3.27) pode ser expressa pela Eq. (3.17). Utiliza-se a forma modal de uma viga engastada-livre simples como funções teste.

Ao substituir a solução aproximada na Eq. (3.27), o resultado não será zero, mas sim em uma função resíduo $\mathbb{R}[w_N]$:

$$\mathbb{R}[w_N(x, t)] = \sum_{j=1}^N \left\{ \rho A \psi_j \ddot{q}_j + EI \psi_j^{iv} q_j + \frac{\partial}{\partial x} [F_c(x) \psi_j'] q_j \right\} \quad (3.28)$$

Fazendo a integral da função resíduo ponderada por $\psi_i(x)$ no domínio $\mathbb{D} = [0, L]$ igual a zero e utilizando as propriedades de ortogonalidade, têm-se:

$$\sum_{j=1}^N \left\{ \rho A L \delta_{ij} \ddot{q}_j + EI \lambda_j^4 L \delta_{ij} q_j + \frac{\rho A \Omega^2}{2} \int_0^L (L^2 - x^2) \psi_j' \psi_i' dx q_j \right\} = 0 \quad (3.29)$$

Portanto, o sistema contínuo reduziu-se a um número discreto de equações diferenciais ordinárias, e pode ser escrito na seguinte forma matricial:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_m + \Omega^2 \mathbf{K}_c) \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.30)$$

sendo \mathbf{M} a matriz de massa, \mathbf{K}_m e \mathbf{K}_c as matrizes de rigidez material e centrífuga, respectivamente.

3.2.3. Viga Rotativa sob Carregamento Gravitacional

A ação das forças centrífugas e do peso próprio na dinâmica de rotores eólicos evidencia um comportamento dinâmico do tipo oscilador paramétrico, ou seja, um problema do tipo Hill-Mathieu.

Portanto, a equação diferencial de movimento para este modelo é:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[F_c(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[P(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] = f(x, t) \quad (3.31)$$

Em vibração livre, com a viga de seção uniforme e isotrópica, a Eq. (3.31) reduz-se a:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[F_c(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[P(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] = 0 \quad (3.32)$$

Ao substituir a solução aproximada na Eq. (3.32), o resultado não será zero, mas sim em uma função resíduo $\mathbb{R}[w_N]$:

$$\mathbb{R}[w_N(x, t)] = \sum_{j=1}^N \rho A \psi_j \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^N \left\{ \left[EI \psi_j^{iv} + \frac{\partial}{\partial x} [F_c(x) \psi_j'] - \frac{\partial}{\partial x} [P(x) \psi_j'] \right] q_j \right\} \quad (3.33)$$

Fazendo a integral da função resíduo ponderada por $\psi_i(x)$ no domínio $\mathbb{D} = [0, L]$ igual a zero e utilizando as propriedades de ortogonalidade, têm-se:

$$\sum_{j=1}^N \left\{ \rho A L \delta_{ij} \ddot{q}_j + \left[EI \lambda_j^4 L \delta_{ij} + \frac{\rho A \Omega^2}{2} \int_0^L (L^2 - x^2) \psi_j' \psi_i' dx - \rho A g \text{sen}(\Omega t) \int_0^L (L - x) \psi_j' \psi_i' dx \right] q_j \right\} = 0 \quad (3.34)$$

Portanto, o sistema contínuo reduziu-se a um número discreto de equações diferenciais ordinárias, e pode ser escrito na seguinte forma matricial:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_m + \Omega^2 \mathbf{K}_c - \mathbf{K}_g \text{sen}(\Omega t)) \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.35)$$

sendo \mathbf{M} a matriz de massa, \mathbf{K}_m , \mathbf{K}_c e \mathbf{K}_g as matrizes de rigidez material, centrífuga e geométrica, respectivamente.

A Equação (3.35) pode ser escrita na forma da equação de Mathieu:

$$\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{p}^2 - \epsilon \text{sen}(\Omega t)) \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.36)$$

onde $\mathbf{p}^2 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K}_m + \Omega^2 \mathbf{K}_c)$ e $\epsilon = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_g$.

4. FERRAMENTAS DE ANÁLISE DE SOLUÇÃO PARA PÁS ROTATIVAS

O diagrama de Campbell é uma ferramenta empregada no estudo de máquinas rotativas. Uma forma de reescrever as equações de movimento das pás é na forma de espaço de estados. Desta forma é possível solucionar um problema do tipo oscilador paramétrico e aplicar ferramentas da dinâmica não linear para compreensão do sistema. Além disto, apresentam-se as ferramentas utilizadas da plataforma de análise multifísica ANSYS® para modelagem MEF de pás rotativas. Este capítulo apresenta conceitos referentes a máquinas rotativas, ferramentas da dinâmica não linear e modelagem via MEF no ANSYS® de pás rotativas.

4.1. INTRODUÇÃO A MÁQUINAS ROTATIVAS

O desbalanceamento é a principal fonte de forçamento neste tipo de problema e trata-se de uma excitação harmônica de frequência Ω . Quando a velocidade de rotação coincide com a frequência natural de um dos modos de vibração do rotor ocorre um pico de amplitude de vibração da estrutura, denominada ressonância. Isto caracteriza a velocidade crítica de um elemento rotativo.

A ferramenta mais importante quando velocidades críticas devem ser determinadas é o diagrama de Campbell (Figura 4.1). As frequências naturais de máquinas rotativas não são constantes, pois o carregamento inercial altera a rigidez da estrutura em função da velocidade de rotação. Na Figura 4.1 tem-se no eixo das abcissas a velocidade de rotação e no eixo das ordenadas os valores de frequência natural dos componentes de uma turbina. As curvas $1P, 2P, \dots, nP$, sendo n um número natural, referem-se a excitação do rotor e seus harmônicos. Nos pontos onde as linhas de excitação cruzam qualquer uma das linhas de frequência natural há velocidade crítica.

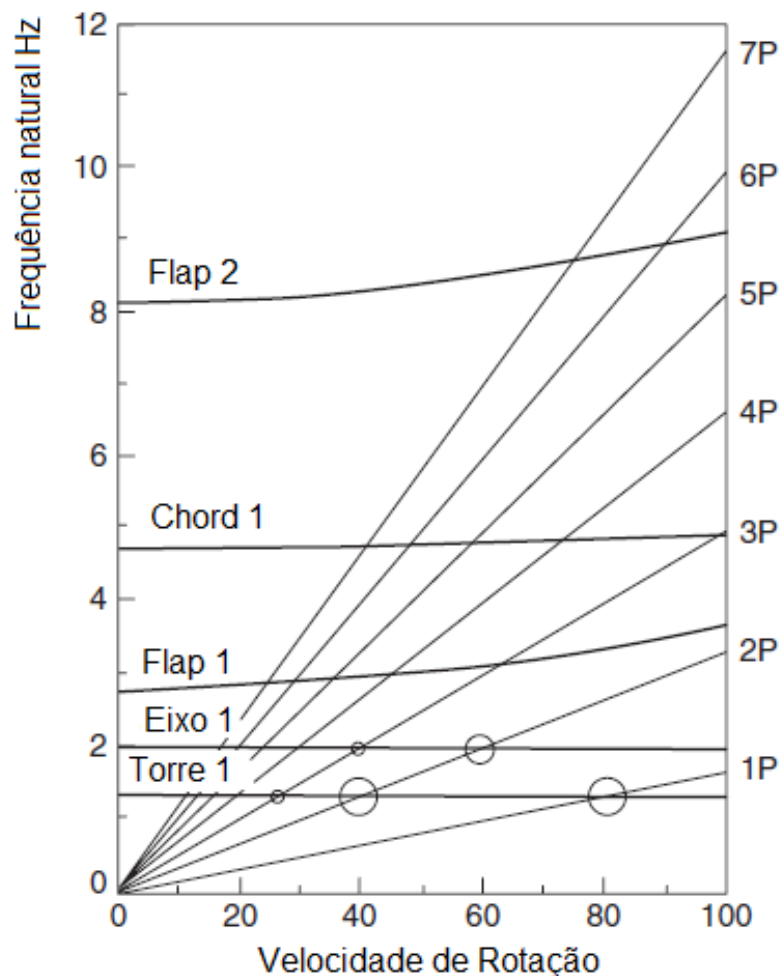


Figura 4.1 – Diagrama de Campbell (Ishida & Yamamoto, 2012 - modificada).

As amplitudes geradas por velocidades críticas não são ordenadas da maior para menor. Às vezes níveis de vibração excessivos são observadas em velocidades críticas intermediárias em detrimento das velocidades menores. Por isto a importância do estudo de outras ferramentas, como gráficos de amplitude, na modelagem da dinâmica de pás eólicas.

4.2. EQUAÇÕES DE ESTADO

Um sistema dinâmico pode ser entendido como a evolução de um campo vetorial x , que é continuamente transformado por uma função f (Savi, 2006):

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (4.1)$$

Uma forma de modelar estes sistemas é através da representação em espaço de estados. Grande parte dos sistemas mecânicos é representada de forma contínua por equações diferenciais e o conjunto de variáveis de estado são normalmente posição e velocidade de cada grau de liberdade do sistema. Portanto, se o sistema possui n graus de liberdade, haverá $2n$ variáveis de estado. Uma equação diferencial de ordem k é descrita na forma de espaço de estados por k equações diferenciais de primeira ordem. Portanto, um sistema dinâmico por ser representado por um sistema de equações diferenciais do tipo:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B} \quad (4.2)$$

onde \mathbf{X} e $\dot{\mathbf{X}}$ representam o vetor de variáveis de estado e sua primeira derivada, respectivamente. A matriz \mathbf{A} armazena as características internas do problema enquanto a matriz \mathbf{B} representa os forçamentos externos impostos ao sistema.

4.3. FERRAMENTAS DA DINÂMICA NÃO LINEAR E CAOS

A complexidade dos diversos comportamentos dos fenômenos naturais incentivou o estudo de modelos lineares e bem comportados, que foi acentuado com o sucesso da mecânica linear conjuntamente com as dificuldades inerentes às técnicas não lineares. Entretanto, o comportamento caótico possui uma sensibilidade às condições iniciais, o que implica que a evolução do sistema pode ser alterada por pequenas perturbações (Savi, 2006). Neste cenário, a utilização de modelos não lineares é mais efetiva.

Os sistemas caóticos apresentam um comportamento imprevisível decorrente das não linearidades do modelo (Vivanco, 2009). As não linearidades podem ser geométricas, referentes a restrições ou grandes deslocamentos, ou físicas, associadas ao comportamento do material.

Os modelos dinâmicos podem ser descritos por equações diferenciais, que são contínuos no tempo e espaço, e por mapas, que é um sistema discreto e a evolução no tempo de seu estado é dado como uma função do estado anterior.

Espaço de fase

O espaço de fase de um sistema dinâmico é formado pelas variáveis dependentes do sistema. Por exemplo, uma partícula que se movimenta em um meio unidimensional, possui um espaço de fase no \mathbb{R}^2 , representado por sua posição e velocidade (Savi, 2006). Em alguns casos a topologia do espaço pode estar restrita a superfícies com forma geométrica particular, como o cilindro e o toro.

A avaliação da evolução no espaço de estado ao longo do tempo deve ser feita de forma quantitativa. Portanto, uma alternativa para conhecer a evolução é através de métodos numéricos, que transformam o problema real contínuo no tempo em um problema discreto. Normalmente, as equações de movimento representadas por um sistema de equações diferenciais é transformada em um sistema algébrico passível de solução.

No estudo do espaço de fase quatro conceitos devem ser abordados: trajetória, curva integral, órbita e fluxo ou retrato de fase. A trajetória consiste no percurso da solução no espaço de fase e a curva integral é a evolução dessa trajetória no tempo (Figura 4.2).

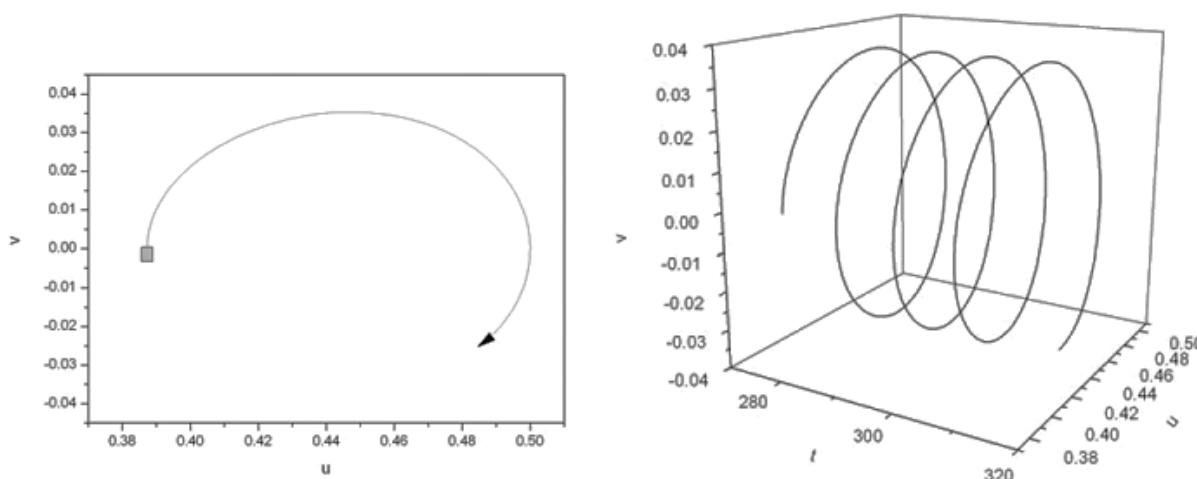


Figura 4.2 – Trajetória e curva integral no espaço de fase (Savi, 2006).

O fluxo ou retrato de fase são todas as órbitas representando todas as soluções possíveis. A órbita é o lugar geométrico no espaço de fase por onde a solução passa no decorrer do tempo, dada uma condição inicial (Figura 4.3).

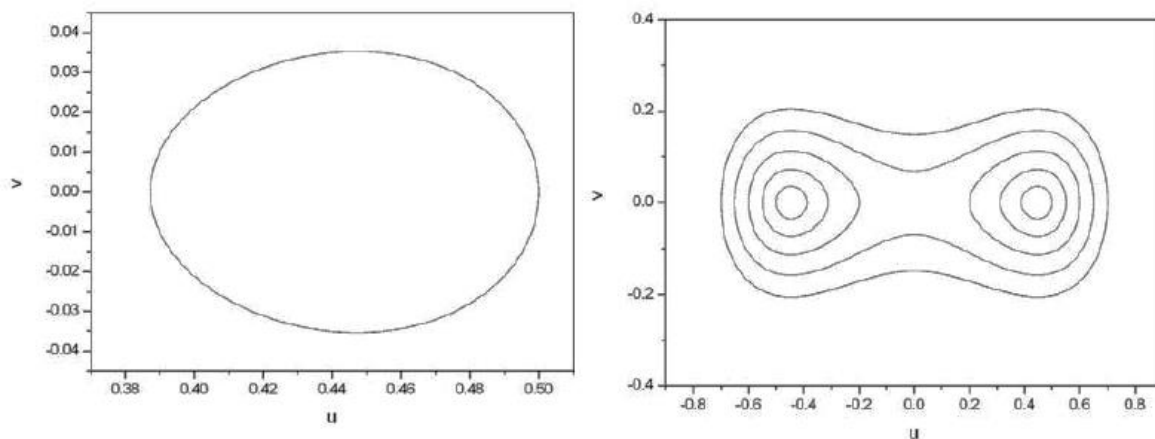


Figura 4.3 – Órbita e retrato de fase (Savi, 2006).

Mapas e Seção de Poincaré

Os mapas são a representação de forma discreta do sistema dinâmico e, em geral, são mais simples de interpretar do que o sistema de equações diferenciais que lhe originaram. Poincaré foi o primeiro a demonstrar que o problema dos três corpos não admitia solução conhecida e que o comportamento do sistema tornava-se extremamente complexo em determinadas situações. Seu trabalho é considerado por muitos como o início da dinâmica não linear moderna e uma das suas grandes contribuições foi enfatizar a necessidade de métodos qualitativos no estudo de sistemas dinâmicos.

A seção de Poincaré, Figura 4.4, é um dos métodos qualitativos propostos por ele e consiste na superfície transversa ao campo vetorial do fluxo no espaço de fase. Uma órbita periódica corresponde a um ponto fixo no mapa de Poincaré, porém, uma órbita quase periódica é representada por pontos randomicamente distribuídos, de forma similar a uma órbita caótica (Da Silva, 2011).

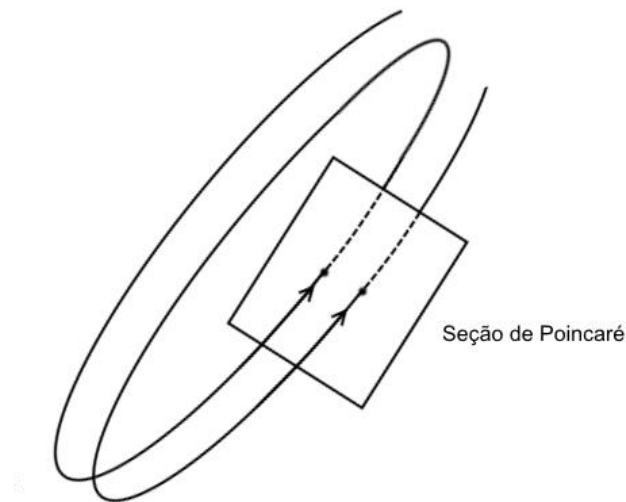


Figura 4.4 – Seção de Poincaré.

4.4. TÉCNICA DE PERTUBAÇÃO POR EXPANSÃO DIRETA

Considera-se um sistema dinâmico linear com a seguinte equação de movimento:

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0 \quad (4.3)$$

e uma perturbação representada por um parâmetro pequeno ε e por uma função não linear $g(u, \dot{u})$:

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon g(u, \dot{u}) \quad (4.4)$$

Assume-se que a solução do sistema dinâmico pode ser obtida a partir de uma perturbação da resposta do sistema linear $u_0(t)$, dada pela seguinte série de potência:

$$u(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \dots \quad (4.5)$$

Portanto, pode-se escrever a Eq. (4.5) da seguinte forma:

$$u(t) = u_0(t) + \eta(u, \varepsilon) \quad (4.6)$$

Expandindo a função $g(u, \dot{u})$ em série de Taylor em torno da solução do sistema linear têm-se:

$$\begin{aligned}
g(u, \dot{u}) &= g(u_0 + \eta, \dot{u}_0 + \dot{\eta}) \\
&= g + \frac{\partial g}{\partial u} \eta + \frac{\partial g}{\partial \dot{u}} \dot{\eta} + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \frac{\eta^2}{2!} + \frac{\partial^2 g}{\partial \dot{u}^2} \frac{\dot{\eta}^2}{2!} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial \dot{u}} \eta \dot{\eta} + \dots
\end{aligned} \quad (4.7)$$

sendo $g \equiv g(u_0, \dot{u}_0)$.

Reescreve-se a Eq. (4.7) sabendo que η representa a perturbação:

$$\begin{aligned}
g(u, \dot{u}) &= g + \varepsilon \left[\frac{\partial g}{\partial u} u_1 + \frac{\partial g}{\partial \dot{u}} \dot{u}_1 \right] \\
&+ \varepsilon^2 \left[\frac{\partial g}{\partial u} u_2 + \frac{\partial g}{\partial \dot{u}} \dot{u}_2 + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \frac{u_1^2}{2!} + \frac{\partial^2 g}{\partial \dot{u}^2} \frac{\dot{u}_1^2}{2!} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial \dot{u}} u_1 \dot{u}_1 \right]
\end{aligned} \quad (4.8)$$

Portanto, utilizando a Eq. (4.4) no lado esquerdo da equação de movimento, têm-se:

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \ddot{u}_0 + \omega_0^2 u_0 + \varepsilon(\ddot{u}_1 + \omega_0^2 u_1) + \varepsilon^2(\ddot{u}_2 + \omega_0^2 u_2) \quad (4.9)$$

Igualam-se os dois lados da equação a fim de obter uma equação que deve ser satisfeita independente do valor de ε . Então, deve-se satisfazer o seguinte sistema de equações de forma recursiva:

$$\text{Ordem } 1: \quad \ddot{u}_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad (4.10a)$$

$$\text{Ordem } \varepsilon: \quad (\ddot{u}_1 + \omega_0^2 u_1) = g \quad (4.10b)$$

$$\text{Ordem } \varepsilon^2: \quad (\ddot{u}_2 + \omega_0^2 u_2) = \frac{\partial g}{\partial u} u_1 + \frac{\partial g}{\partial \dot{u}} \dot{u}_1 \quad (4.10c)$$

As condições iniciais do problema são normalmente satisfeitas na aproximação zero, fazendo com que as demais aproximações se anulem.

4.5. MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS NO ANSYS

O software ANSYS[®] é um pacote computacional de simulação através do método dos elementos finitos para problemas de engenharia. Pioneiro na aplicação computacional do MEF em análises estáticas e dinâmicas, apresenta uma série de elementos em sua biblioteca, cada um com suas particularidades. O elemento de

viga BEAM188 possui seis graus de liberdade por nó (translações e rotações nos eixos x , y e z). A geometria, a localização dos nós e o sistema de coordenadas são mostrados na Figura 4.5. O elemento é definido pelos nós I e J no sistema de coordenadas global e o nó K define a sua orientação.

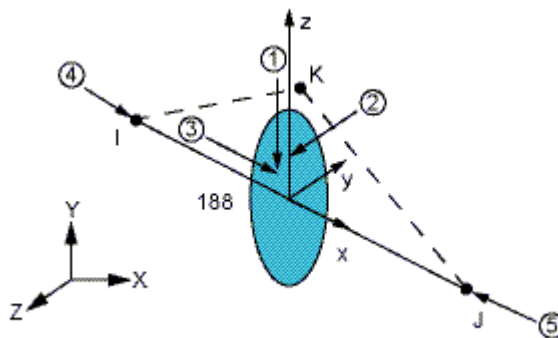


Figura 4.5 – Elemento BEAM188 (ANSYS, 2013).

Os elementos de viga são elementos estruturais unidimensionais no espaço. Portanto, os detalhes das seções transversais são fornecidos separadamente pelos comandos SECTYPE e SECDATA. Uma seção é associada com os elementos de viga especificando o número da seção ID.

Com o comando SECTYPE defini-se o tipo de seção transversal, por exemplo, retangular, quadrática, circular, tubular, entre outras. No caso de vigas retangulares com seção constante define-se apenas um tipo de seção, RECT. Os dados que descrevem as dimensões das seções são definidas pelo comando SECDATA, e no caso da seção retangular, são definidos os valores de base e altura.

O ANSYS® oferece os seguintes métodos de solução para problemas de autovalores e autovetores: sub-espço, Lanczos, powerdynamics, reduzido, assimétrico e amortecido. Para atingir uma taxa de convergência mais rápida em problemas simétricos de grande dimensão, indicado para análises com um grande número de equações de restrição, utiliza-se o método de block lanczos.

Para inclusão dos efeitos da força gravitacional e da força centrífuga é necessário realizar primeiramente uma análise estática para obtenção do estado de tensões da estrutura. O peso próprio é modelado com a inclusão da aceleração gravitacional com o comando ACEL. A inserção da rotação em torno de um eixo é feita pelo comando OMEGA. Ao incluir a rotação, a força centrífuga é calculada automaticamente pelo programa. O estado de tensão é gravado com o comando

PSTRESS ON. Em sequência realiza-se a análise modal para obtenção das frequências naturais e modos de vibração da estrutura. O Quadro 1 exemplifica o uso dos comandos nas análises com o peso próprio e com a força centrífuga.

Quadro 1 – Exemplo de código com os comandos PSTRES, ACEL e OMEGA.

Análise com peso próprio	Análise com força centrífuga
<i>Análise Estática para o cálculo da matriz geométrica</i>	
<pre> /SOLU ANTYPE,static D,all,uy pstres,on ACEL,-9.81, solve finish </pre>	<pre> /SOLU ANTYPE,static pstres,on OMEGA,,10 outpr,,1 /out,scratch solve finish </pre>
<i>Análise Modal</i>	
<pre> /SOLU ANTYPE,modal modopt,lanb,10 mxpand,10 pstres,1 solve finish </pre>	<pre> /SOLU ANTYPE,modal modopt,lanb,10 pstres,on solve finish </pre>

4.5.1. Modelagem das Forças Atuantes em Pás Eólicas

Modelagem estática

Para simular a pá em várias posições decompõe-se a aceleração da gravidade em uma componente axial e uma componente transversal, variando o ângulo θ de 0° a 360° , de modo que:

$$\begin{aligned}
 A_x &= g\sin(\theta) \\
 A_y &= g\cos(\theta)
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

sendo g a aceleração da gravidade.

Modelagem com força centrífuga

Cria-se um laço para variar o ângulo θ e as frequências naturais são armazenadas em um arquivo em cada iteração. Faz-se de forma similar para o caso da inclusão da rotação. Cria-se um laço para variar a velocidade de rotação em uma faixa de 0 a 100 RPM e as frequências são armazenadas em cada iteração. O

Quadro 2 mostra os laços utilizados para solução do problema e o armazenamento resultados em cada iteração em uma tabela.

Quadro 2 – Exemplo de código com laços para variar velocidade de rotação e ângulo de posição da pá.

Análise com peso próprio

```

ival=0
fval=360
inc=1
j=1
*DIM,FREQ,table,5,((fval-ival)/inc+1),,Modo, Freqüencia
*DO,i,ival,fval,inc
*afun,deg
Ax=9.81*sin(i)
Ay=9.81*cos(i)

```

ANÁLISE ESTÁTICA E MODAL (Quadro 1)

```

/OUT,
*GET,FREQ(1,j),MODE,1,FREQ
*GET,FREQ(2,j),MODE,2,FREQ
*GET,FREQ(3,j),MODE,3,FREQ
*GET,FREQ(4,j),MODE,4,FREQ
*GET,FREQ(5,j),MODE,5,FREQ
j=j+1
finish
*enddo

```

Análise com força centrífuga

```

ival=0
fval=10.6
inc=0.1
j=1
*DIM,FREQ,table,5,((fval-ival)/inc+1),,Modo, Freqüencia
*DO,i,ival,fval,inc
/SOLU
D,all,uy
ANTYPE,STATIC
PSTRES,ON
OMEGA,,,i

```

ANÁLISE ESTÁTICA E MODAL (Quadro 1)

```

/OUT,
*GET,FREQ(1,j),MODE,1,FREQ
*GET,FREQ(2,j),MODE,2,FREQ
*GET,FREQ(3,j),MODE,3,FREQ
*GET,FREQ(4,j),MODE,4,FREQ
*GET,FREQ(5,j),MODE,5,FREQ
j=j+1
finish
*enddo

```

4.5.2. Modelagem da Pá

Ferreira *et al.* (2013) modelam uma pá de turbina de formato sólido HTUC no ANSYS® utilizando elementos sólidos tetraédricos. Araújo *et al.* (2014) propõe uma modelagem no ANSYS® utilizando o elemento de viga BEAM188. Os resultados diferem em menos de 5% e o modelo de Araújo *et al.* (2014) demanda menor custo computacional.

O processo de modelagem iniciou-se com a importação de nove seções transversais contidas em um arquivo CAD, disponibilizados pelo projeto Pró-Amazônia na Universidade de Brasília (Figura 4.6) (Araújo, Morais, Avila, & Shzu, 2014). As seções foram salvas como arquivos IGS e exportadas para o ANSYS® como elemento MESH200.

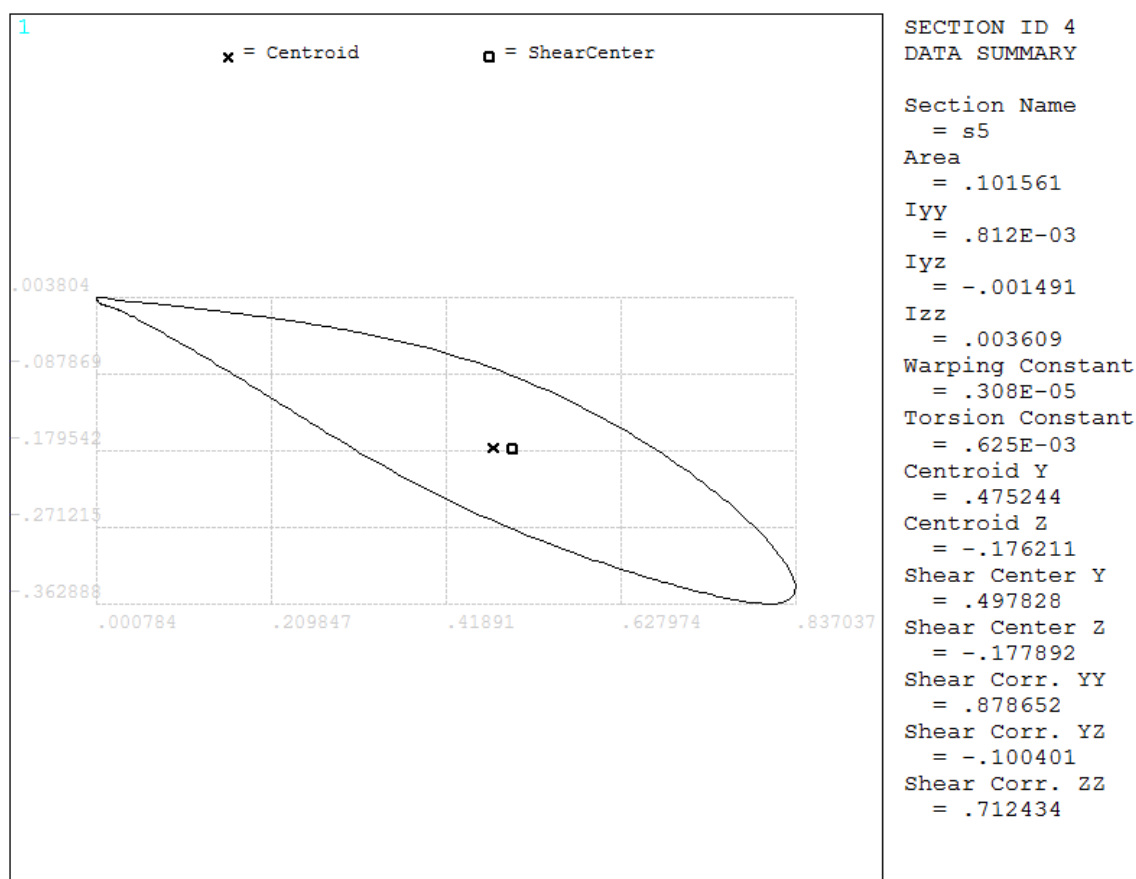


Figura 4.6 – Seção 4 da pá eólica.

O MESH200 (Figura 4.7) é um elemento de malha apenas, não interferindo em nada à solução. Ele é utilizado para operações de malha com etapas múltiplas,

com linha de malha no espaço 2-D ou 3-D com ou sem nós intermediários, e para o armazenamento temporário de elementos quando a análise física ainda não tenha sido especificada. Pode-se utilizá-lo em conjunto com quaisquer outros tipos de elemento do ANSYS®, podendo ser excluído ou não quando se tornar dispensável, pois sua presença não afeta os resultados.

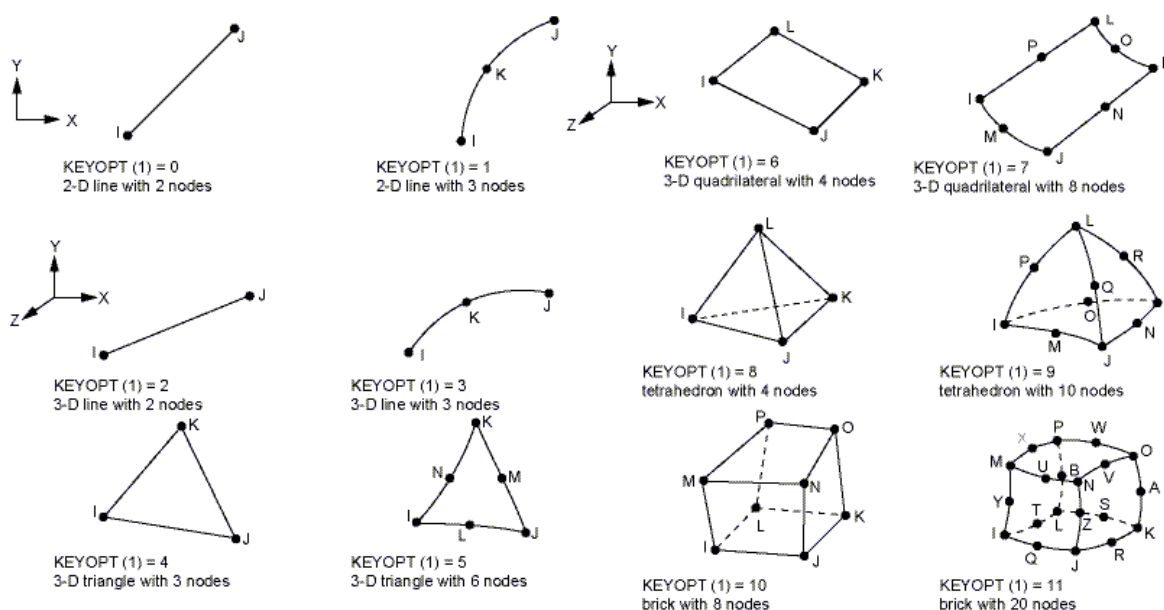


Figura 4.7 – Elemento MESH200 (ANSYS, 2013).

Na modelagem da pá, Araújo *et al.* (2014) utilizaram o elemento MESH200 na forma quadrilátera com 8 nós. A continuidade da carcaça da pá, que possui um afunilamento gradual com aspecto cônico, foi feita utilizando o comando SECTYPE.

A Tabela 4.1 mostra os resultados obtidos por Araújo *et al.* (2014) comparados ao de Ferreira *et al.* (2013):

Tabela 4.1 – Resultados obtidos por Araújo *et al.* (2014) e Ferreira *et al.* (2013) para as frequências naturais da pá (Araújo, Moraes, Avila, & Shzu, 2014).

Modo	Viga 3D (Araújo <i>et al.</i> 2014)				Solido 3D (Ferreira <i>et al.</i> 2013)
	70 elem.	140 elem.	282 elem.	562 elem.	
1	12.420	12.430	12.432	12.432	11.859
2	36.756	36.778	36.784	36.785	35.592
3	50.498	50.529	50.537	50.539	48.357

A Figura 4.8 ilustra o modelo da pá e a Figura 4.9 os três primeiros modos de vibração obtidos por Araújo *et al.* (2014):

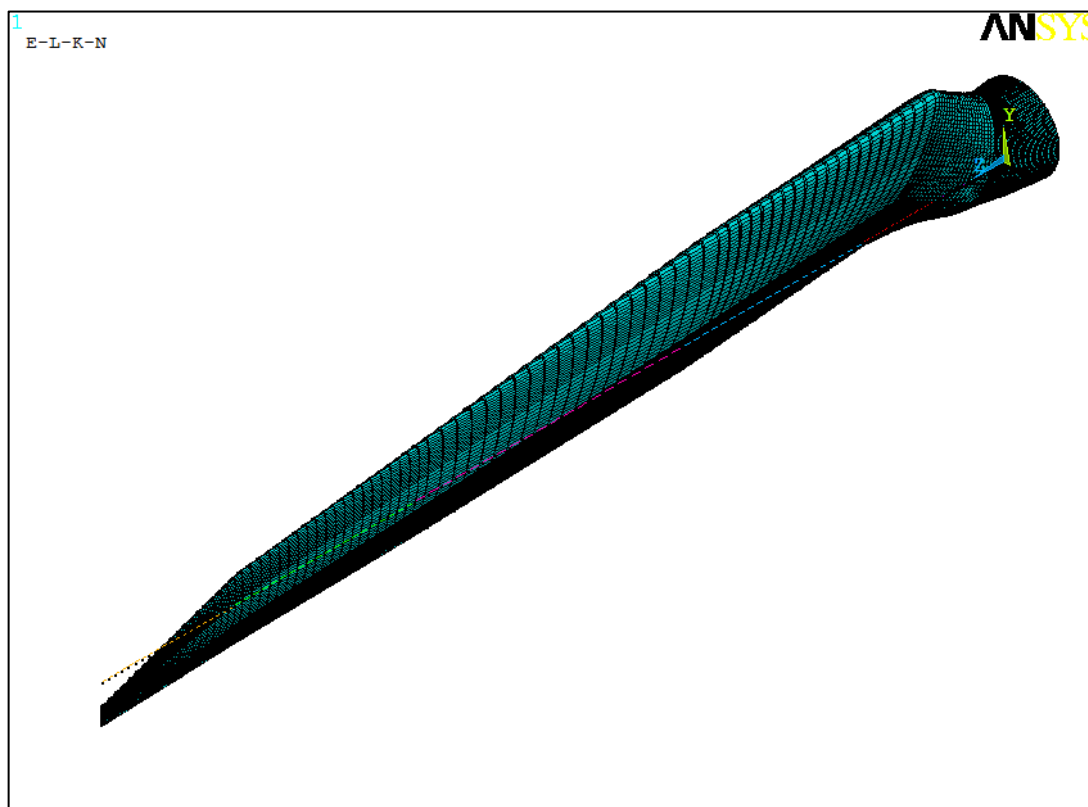


Figura 4.8 - Modelo da pá obtida no ANSYS® (Araújo, Morais, Avila, & Shzu, 2014).

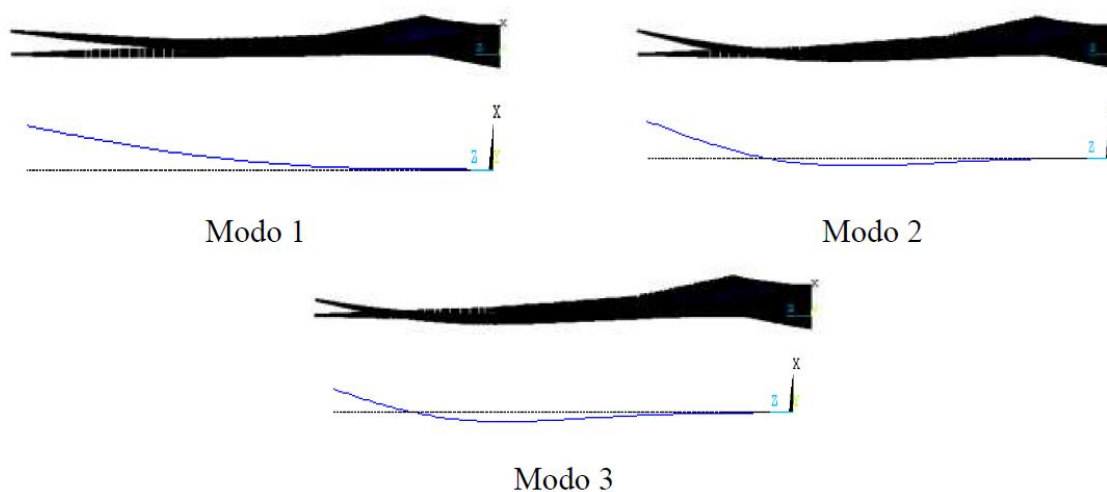


Figura 4.9 – Modos de vibração da pá (Araújo, Morais, Avila, & Shzu, 2014).

5. ESTUDOS PRELIMINARES DA DINÂMICA DA PÁ

O peso próprio da estrutura e a força centrífuga alteram a rigidez do sistema. Os efeitos destas forças, separadamente, sobre as frequências naturais são estudados neste capítulo. Soluções pelo método de Galerkin e utilizando o ANSYS[®] são obtidas em modelos de pás simplificadas como vigas engastadas. A metodologia numérica é aplicada a um modelo de pá real.

5.1. MODELO DA PÁ SOB CARREGAMENTO GRAVITACIONAL

Apresentam-se os resultados de uma pá simplificada descrita por uma viga de seção constante. A partir de uma solução analítica aproximada baseada no método de Galerkin, o modelo de elementos finitos é verificado. Após esta fase de verificação do procedimento de modelagem numérica pelo programa comercial ANSYS[®], apresentam-se os resultados de uma pá eólica real, assegurando-se assim a qualidade dos resultados obtidos. As análises são realizadas do ponto de vista estático variando-se a posição da pá, conseqüentemente a componente axial do peso próprio da estrutura.

5.1.1. Pá Simplificada

Consideraram-se duas vigas de seção retangular com módulo de elasticidade, $E = 210 \text{ GPa}$, densidade $\gamma = 7800 \text{ kg/m}^3$, e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. Variaram-se apenas suas dimensões da seção transversal e seu comprimento, sendo estas, base $b = 1 \text{ mm}$, altura $h = 1 \text{ mm}$, e comprimento $L = 1 \text{ m}$, para primeira viga, e $b = 100 \text{ mm}$, $h = 25 \text{ mm}$ e $L = 10 \text{ m}$, para o segundo modelo de viga. O segundo modelo é mais esbelto a fim de evidenciar os problemas de estruturas mais flexíveis.

Utilizou-se uma aproximação com cinco modos ($N = 5$) no método de Galerkin para obtenção das frequências naturais analítico-aproximadas por apresentarem soluções convergidas. Portanto, o sistema contínuo reduzido a um sistema discreto de equações diferenciais pode ser escrito na forma matricial:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_m - \mathbf{K}_g)\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (5.1)$$

Com as seguintes matrizes de massa e rigidez:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (a_{ij})_{n \times n} = (\rho AL\delta_{ij})_{n \times n} \\ \mathbf{K}_m &= (b_{ij})_{n \times n} = (EI\lambda_i^4 L\delta_{ij})_{n \times n} \end{aligned} \quad (5.2)$$

sendo δ_{ij} a função delta de Kronecker.

As integrais do método Galerkin da matriz de rigidez são resolvidas no Wolfram Mathematica (APÊNDICE B):

$$\mathbf{K}_g = \rho ALg \operatorname{sen}(\theta) \begin{bmatrix} 1.57088 & -0.42232 & -1.07208 & -0.833138 & -0.762326 \\ -0.42232 & 8.64714 & 1.89008 & -3.64338 & -3.0681 \\ -1.07208 & 1.89008 & 24.9521 & 8.33828 & -7.14108 \\ -0.873138 & -3.64338 & 8.33828 & 51.4591 & 19.0172 \\ -0.762326 & -3.0681 & -7.14108 & 19.0172 & 86.5423 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

A modelagem por elementos finitos foi feita utilizando o elemento BEAM188. Realizou-se primeiramente uma análise estática para obtenção do estado de tensão da estrutura considerando seu peso próprio. O peso próprio é adicionado com a inserção da aceleração gravitacional $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, e o estado de tensão é considerado na análise modal com o comando PSTRES. A estrutura foi discretizada em 400 elementos finitos, pois esta quantidade resultou em uma solução convergida.

A Tabela 5.1 e a Tabela 5.2 mostram os resultados de frequências naturais para os modelos de pá simplificada com $L = 1 \text{ m}$ e $L = 10 \text{ m}$, respectivamente, considerando a ação do campo gravitacional. E a Figura 5.1 e a Figura 5.2 ilustram a evolução da primeira frequência natural conforme a posição da pá muda em uma rotação, sendo ω as frequências naturais em função do ângulo de posição da pá e ω_n a frequência natural da pá sem ação do peso próprio.

Compararam-se os resultados analítico-aproximados e numéricos ao modelo proposto por Blevins (1984) que se encontra no ANEXO A.

Tabela 5.1 – Frequências naturais em Hz do modelo simplificado de pá com $L = 1\text{m}$.

	Modo	Método de Galerkin					Ansys	Blevins
		1 modo	2 modos	3 modos	4 modos	5 modos		
P = 0 Flexão	1	0.8382	0.8382	0.8382	0.8382	0.8382	0.8382	0.8380
	2	---	5.2528	5.2528	5.2528	5.2528	5.2529	5.2518
	3	---	---	14.7081	14.7081	14.7081	14.7085	14.7052
	4	---	---	---	28.8221	28.8221	28.8237	---
	5	---	---	---	---	47.4493	47.6496	---
P = mg(x - L) Flexo-compressão	1	0.5588	0.5584	0.5581	0.5580	0.5580	0.5580	0.5526
	2	---	5.0442	5.0441	5.0440	5.0440	5.0440	5.0388
	3	---	---	14.4959	14.4956	14.4956	14.4959	14.5630
	4	---	---	---	28.6049	28.6047	28.6008	---
	5	---	---	---	---	47.4189	47.4200	---
P = -mgx Flexo-tração	1	1.0454	1.0452	1.0451	1.0451	1.0450	1.0451	0.9123
	2	---	5.4536	5.4535	5.4534	5.4534	5.4534	5.4010
	3	---	---	14.9175	14.9172	14.9172	14.9175	14.8954
	4	---	---	---	29.0378	29.0376	29.0445	---
	5	---	---	---	---	47.8703	47.8779	---

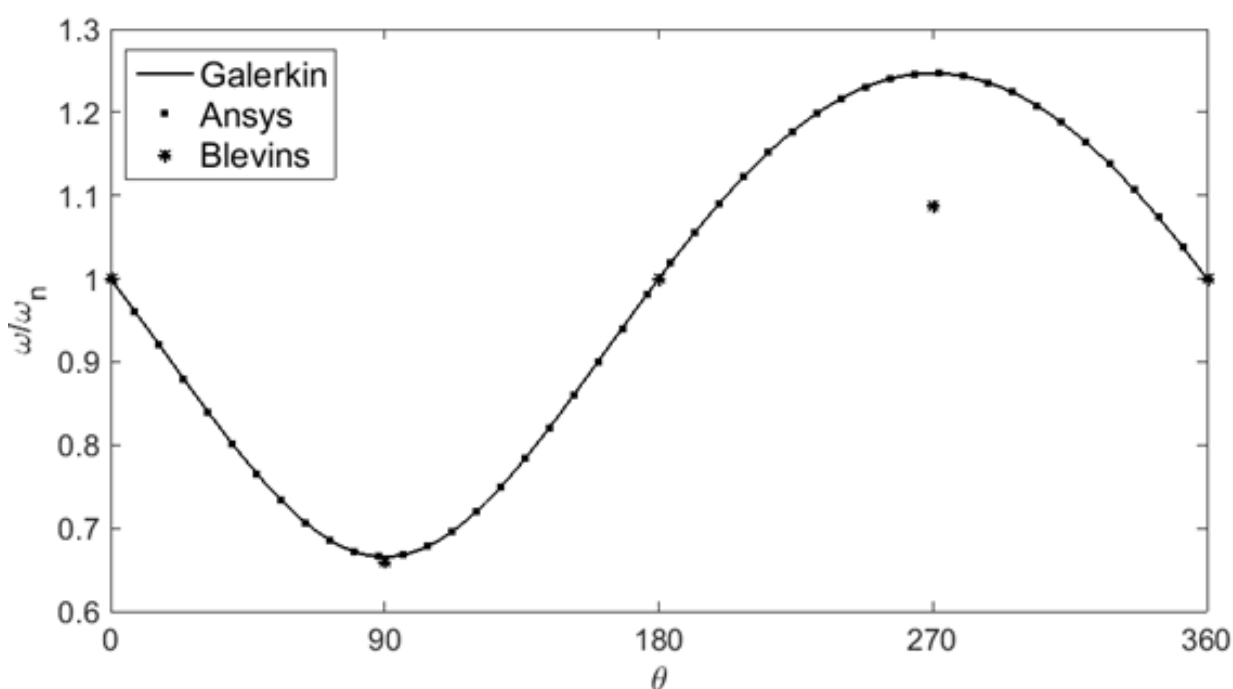
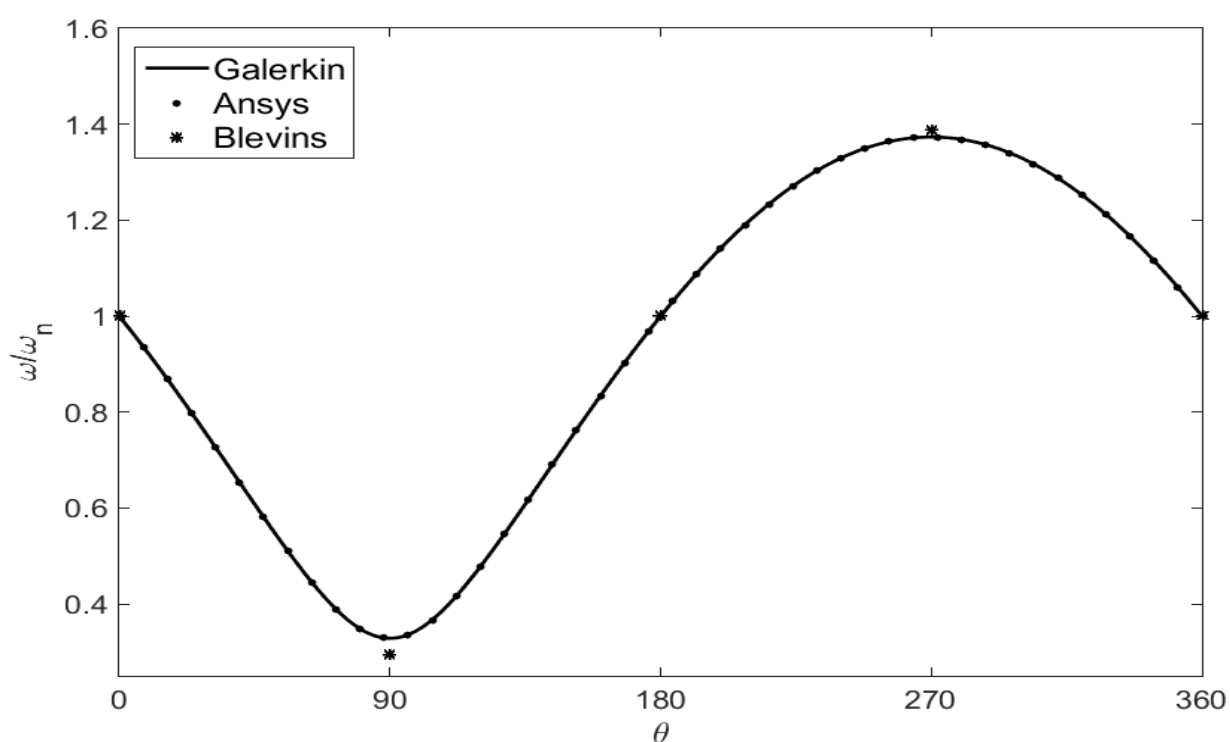
Figura 5.1 – Variação da primeira frequência natural em função da posição da pá com $L = 1\text{m}$.

Tabela 5.2 – Frequências naturais em Hz do modelo simplificado de pá com $L = 10\text{m}$.

Modo	Método de Galerkin					Ansys	Blevins	
	1 modo	2 modos	3 modos	4 modos	5 modos			
P = 0 Flexão	1	0.2095	0.2095	0.2095	0.2095	0.2095	0.2095	
	2	---	1.3132	1.3132	1.3132	1.3132	1.3132	
	3	---	---	3.6770	3.6770	3.6770	3.6769	
	4	---	---	---	7.2055	7.2055	7.2050	---
	5	---	---	---	---	11.9112	11.9100	---
P = mg(x - L) Flexo-compressão	1	0.0698	0.0693	0.0689	0.0688	0.0688	0.0688	
	2	---	1.2287	1.2286	1.2286	1.2285	1.2285	
	3	---	---	3.5918	3.5916	3.5916	3.5914	
	4	---	---	---	7.1185	7.1183	7.1156	---
	5	---	---	---	---	11.8207	11.8180	---
P = -mgx Flexo-tração	1	0.2880	0.2878	0.2878	0.2878	0.2878	0.2878	
	2	---	1.3916	1.3926	1.3925	1.3925	1.3925	
	3	---	---	3.7604	3.7603	3.7602	3.7601	
	4	---	---	---	7.2917	7.2915	7.2931	---
	5	---	---	---	---	12.0013	12.0011	---

Figura 5.2 Variação da primeira frequência natural em função da posição da pá com $L = 10\text{m}$.

5.1.2. Pá Real

A pá de formato sólido HTUC de aço inox 304 (Figura 5.3) modelada por Ferreira *et al.* (2013) e Araújo *et al.* (2014) possui 4.49 m de comprimento. Tem módulo de elasticidade $E = 139e9 \text{ N/m}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ e densidade $\rho = 8025 \text{ kg/m}^3$.

Utilizou-se também o elemento de viga BEAM188, e as seções transversais foram importadas para o ANSYS® com o elemento MESH200. A carcaça da pá foi feita utilizando o comando SECTYPE e o modelo foi discretizado em 562 elementos. O mesmo procedimento utilizado no modelo da pá simplificada foi aplicado na pá real.

A Tabela 5.3 apresenta os valores das frequências naturais considerando a ação da força gravitacional e a Figura 5.4 ilustra a evolução da primeira frequência natural conforme a posição da pá muda em uma rotação, sendo ω as frequências naturais em função do ângulo de posição da pá e ω_n a frequência natural da pá sem ação do peso próprio.

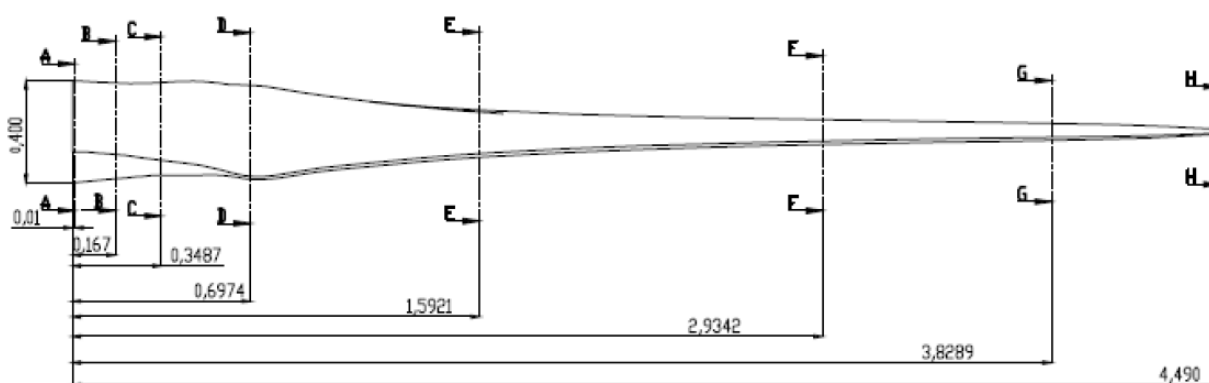


Figura 5.3 – Geometria da pá de uma turbina
(Ferreira, Costa, Morais, Neto, & Miranda, 2013).

Tabela 5.3 – Frequências naturais em Hz do modelo real da pá.

Modo	Posição		
	Flexo-compressão	Flexo-Tração	Araújo et al. (2014)
1	12.428	12.437	12.432
2	36.784	36.793	36.785
3	50.519	50.545	50.539
4	83.029	83.038	83.034
5	136.111	136.118	136.114

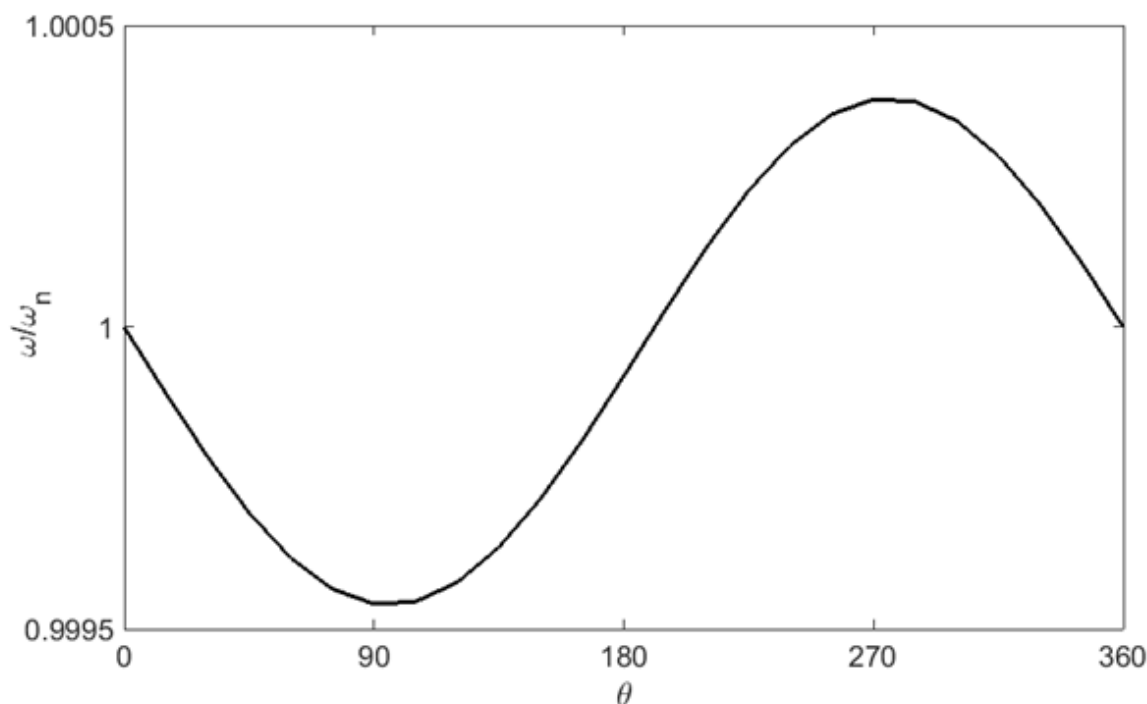


Figura 5.4 - Variação da primeira frequência natural em função da posição da pá.

Dependendo da posição do modelo de pá simplificado e da pá real, são resultantes ora esforços de tração ora esforços de compressão, e sua magnitude depende da componente axial do peso próprio. Os esforços de tração resultam no aumento de rigidez do sistema, enquanto os de compressão a diminuem. No caso em que a componente axial é nula e a componente transversal é máxima, os resultados obtidos são os mesmos sem considerar o peso próprio da estrutura.

Na Figura 5.1, Figura 5.2 e Figura 5.4 observa-se um comportamento senoidal nos valores de frequência natural em função do ângulo de posição da pá. Os resultados numéricos são validados pelos analítico-aproximados nos modelos de viga. No caso da viga de 1 metro de comprimento, há um ponto referente à $\theta = 270^\circ$ do modelo de Blevins que não apresenta resultado satisfatório. Isto ocorre devido erros numéricos decorrentes da interpolação realizada de valores tabelados para obtenção de parâmetros do modelo.

A viga de 10 metros de comprimento possui um comportamento acentuado na região em que a pá está sob compressão (Figura 5.2). A primeira frequência natural é próxima de zero. Isto começa a indicar problemas de flambagem da viga.

5.2. MODELO DA PÁ ROTATIVA SOB CARREGAMENTO CENTRÍFUGO

No modelo de viga rotativa considerou-se a influência de forças centrífugas decorrentes da rotação. Esta força possui mesmo sentido independente da posição em que a pá se encontra, porém sua magnitude é proporcional ao quadrado da velocidade de rotação. Os resultados são comparados com resultados da literatura (Wright, Smith, Thresher, & Wang, 1982).

5.2.1. Pá Simplificada

Utilizou-se uma aproximação com cinco modos ($N = 5$) no método de Galerkin para obtenção das frequências naturais analítico-aproximadas. Portanto, o sistema contínuo reduzido a um sistema discreto de equações diferenciais pode ser escrito na forma matricial:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_m + \Omega^2\mathbf{K}_c)\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (5.4)$$

Com as seguintes matrizes de massa e rigidez:

$$\mathbf{M} = (a_{ij})_{n \times n} = (\rho AL\delta_{ij})_{n \times n} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{K}_m = (b_{ij})_{n \times n} = (EI\lambda_i^4 L\delta_{ij})_{n \times n}$$

$$\mathbf{K}_c = \frac{\rho AL\Omega^2}{2} \begin{bmatrix} 2.38667 & -1.37171 & -1.58476 & -1.09283 & -0.908151 \\ -1.37171 & 12.9564 & 0.338817 & -5.8237 & -3.77833 \\ -1.58476 & 0.338817 & 35.7190 & 6.54854 & -12.3088 \\ -1.09283 & -5.8237 & 6.54854 & 69.6108 & 17.1306 \\ -0.908151 & -3.77833 & -12.3088 & 17.1306 & 119.102 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

A modelagem por elementos finitos foi feita utilizando o elemento BEAM188. Realizou-se primeiramente uma análise estática para obtenção do estado de tensão da estrutura considerando a força centrífuga que surge com a rotação. A inserção da rotação em torno de um eixo é feita com o comando OMEGA, e o estado de tensão é considerado na análise modal com o comando PSTRES. As frequências são calculadas para cada velocidade de rotação. A estrutura foi discretizada em 400 elementos finitos, pois esta quantidade resultou em uma solução convergente.

A Tabela 5.4 e a Tabela 5.5 apresentam os resultados das cinco primeiras frequências naturais do modelo de pá simplificada com $L = 1\text{m}$ e $L = 10\text{m}$ para

$\Omega = 0$ rad/s, $\Omega = 3$ rad/s e $\Omega = 7.5$ rad/s, obtidas pelo método de Galerkin e ANSYS®, e comparados com os resultados de Wright *et al.* (1982).

Tabela 5.4 – Frequências naturais [Hz] do modelo simplificado de pá com L = 1m.

	Rotação [rad/s]	Galerkin					Ansys	Wright <i>et al.</i> (1982)
		1 modo	2 modos	3 modos	4 modos	5 modos		
1ª freq.	0	0.8382	0.8382	0.8382	0.8382	0.8382	0.8382	0.8382
	3	0.9872	0.9868	0.9867	0.9867	0.9867	0.9867	0.9863
	7.5	1.5501	1.5411	1.5394	1.5392	1.5391	1.5390	1.5375
2ª freq.	0	---	5.2528	5.2528	5.2528	5.2528	5.2529	5.2528
	3	---	5.3917	5.3917	5.3916	5.3916	5.3916	5.3912
	7.5	---	6.0705	6.0704	6.0688	6.0685	6.0683	6.0661
3ª freq.	0	---	---	14.7081	14.7081	14.7081	14.7085	14.7081
	3	---	---	14.8459	14.8459	14.8458	14.8462	14.8454
	7.5	---	---	15.5493	15.5482	15.5470	15.5471	15.5444
4ª freq.	0	---	---	---	28.8221	28.8221	28.8237	28.8221
	3	---	---	---	28.9594	28.9594	28.9659	28.9639
	7.5	---	---	---	29.6708	29.6691	29.6997	29.6955
5ª freq.	0	---	---	---	---	47.6449	47.6496	47.6450
	3	---	---	---	---	47.7872	47.7948	47.7897
	7.5	---	---	---	---	48.5287	48.5491	48.5419

Tabela 5.5 – Frequências naturais [Hz] do modelo simplificado de pá com L = 10m.

	Rotação [rad/s]	Galerkin					Ansys	Wright <i>et al.</i> (1982)
		1 modo	2 modos	3 modos	4 modos	5 modos		
1ª freq.	0	0.2095	0.2095	0.2095	0.2095	0.2095	0.2095	0.2095
	3	0.5621	0.5545	0.5529	0.5525	0.5524	0.5523	0.5517
	7.5	1.3207	1.2813	1.2686	1.2640	1.2621	1.2602	---
2ª freq.	0	---	1.3132	1.3132	1.3132	1.3132	1.3132	1.3132
	3	---	1.7916	1.7916	1.7894	1.7891	1.7888	1.7877
	7.5	---	3.3253	3.3246	3.2963	3.2938	3.2883	---
3ª freq.	0	---	---	3.6770	3.6770	3.6770	3.6769	3.6770
	3	---	---	4.1945	4.1930	4.1912	4.1905	4.1893
	7.5	---	---	6.2453	6.2180	6.1776	6.1699	---
4ª freq.	0	---	---	---	7.2055	7.2055	7.2050	7.2055
	3	---	---	---	7.7379	7.7354	7.7517	7.7507
	7.5	---	---	---	10.1020	10.0492	10.0899	---
5ª freq.	0	---	---	---	---	11.9112	11.9100	11.9113
	3	---	---	---	---	12.4703	12.4765	12.4761
	7.5	---	---	---	---	15.1101	15.0598	---

Os diagramas de Campbell (Figura 5.5 e Figura 5.6) ilustram o comportamento crescente das frequências conforme a velocidade de rotação aumenta. Os pontos onde as curvas de excitação $n\Omega$ cruzam as curvas das frequências naturais ocorrem velocidades críticas.

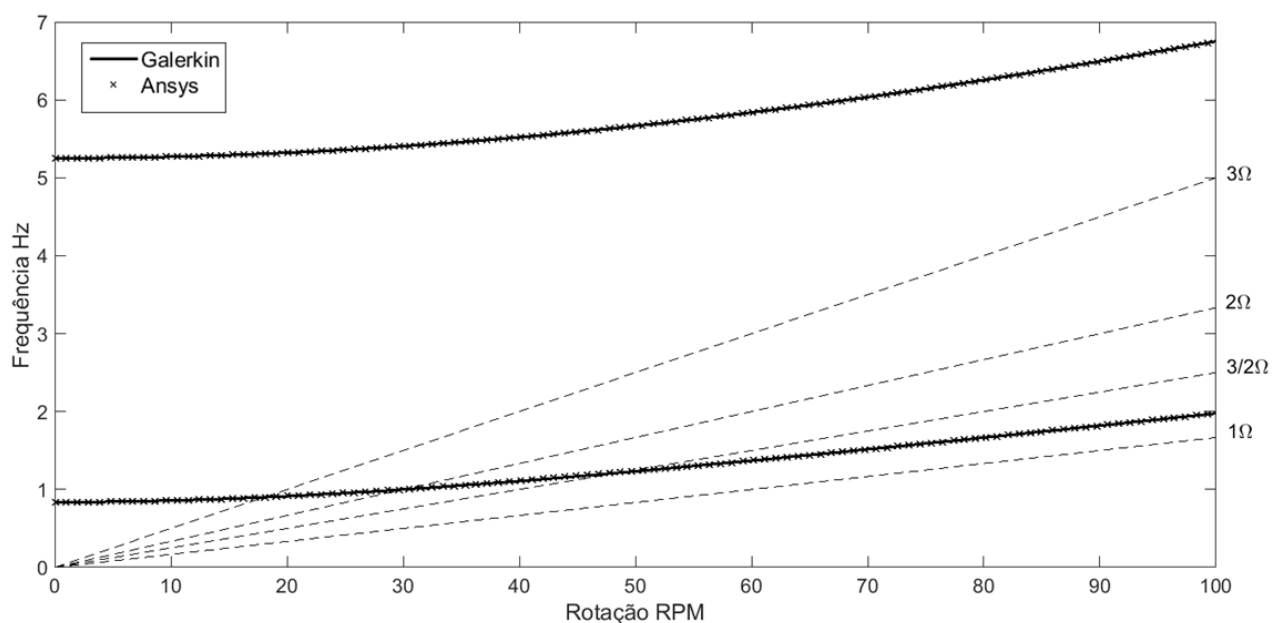


Figura 5.5 – Diagrama de Campbell do modelo de pá simplificada com $L = 1\text{m}$.

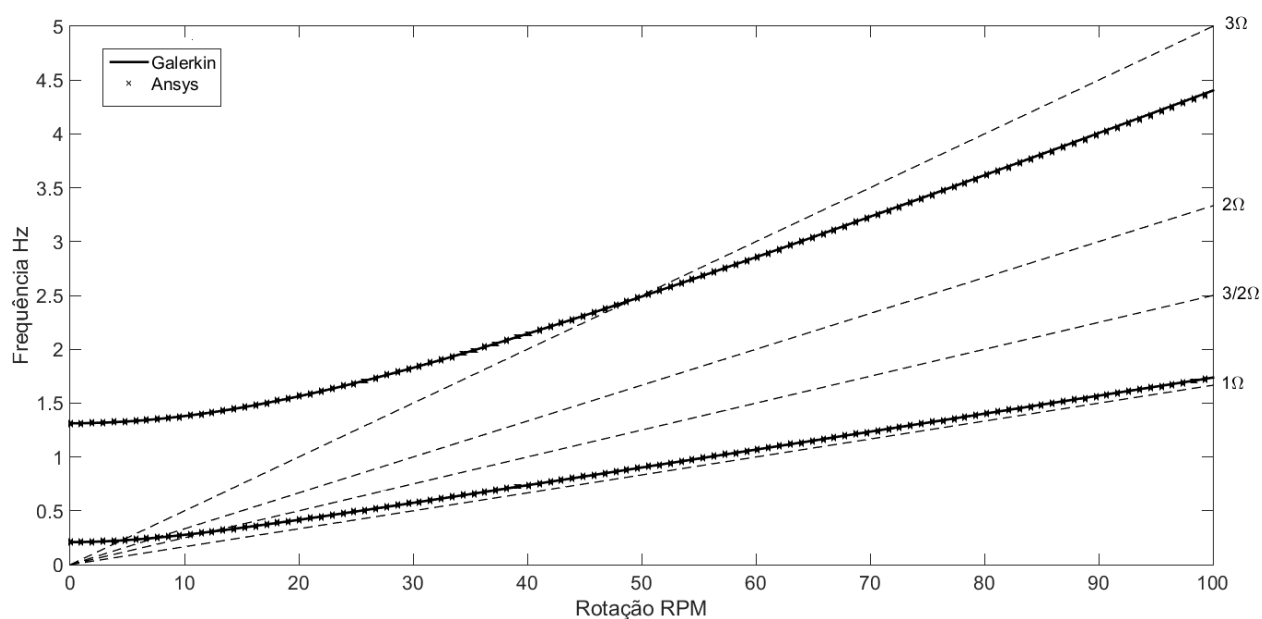


Figura 5.6 - Diagrama de Campbell do modelo de pá simplificada com $L = 10\text{m}$.

A equação da frequência fundamental adimensional de uma viga rígida fixada a uma mola torcional (Ishida, Inoue, & Nakamura, 2009) é dada pela expressão $p = \sqrt{1 + \Omega^2}$. Observa-se que não há velocidade crítica para a curva $1 \times \Omega$. Ou seja, a evolução da primeira frequência natural nunca cruza a curva $1 \times \Omega$. Já as linhas $2 \times \Omega, 3\Omega, \dots, n\Omega, 3\Omega/2, 5\Omega/2, \dots, (2n - 1)\Omega/2$, sendo n um número natural, podem cruzar a curva da primeira frequência natural caracterizando velocidades críticas (Ishida, Inoue, & Nakamura, 2009).

5.2.2. Pá Real

O mesmo procedimento utilizado na simulação numérica da pá simplificada foi aplicado ao modelo real da pá. A Tabela 5.6 apresenta os resultados das frequências naturais obtidas para $\Omega = 0$ rad/s, $\Omega = 3$ rad/s e $\Omega = 7.5$ rad/s.

Tabela 5.6 – Frequências naturais [Hz] do modelo da pá real.

	Rotação [rad/s] (RPM)	Ansys [Hz]	Araújo <i>et al.</i> (2014) [Hz]
1 ^a freq.	0 - (0)	12.432	12.432
	3 - (28.7)	12.464	---
	7.5 - (71.6)	12.525	---
2 ^a freq.	0 - (0)	36.785	36.785
	3 - (28.7)	36.853	---
	7.5 - (71.6)	36.906	---
3 ^a freq.	0 - (0)	50.539	50.539
	3 - (28.7)	50.622	---
	7.5 - (71.6)	50.637	---

A variação da frequência com a velocidade de rotação do rotor possui comportamento crescente, porém essa variação é pequena (Figura 5.7). Não se observa velocidade crítica no gráfico de Campbell na faixa de rotação analisada para a pá. Há um superdimensionamento da primeira frequência natural, podendo esta ser menos rígida quanto a este critério de projeto. Não obstante esta aplicação não apresentar uma variação significativa, evidencia-se a ação das forças centrífugas para rotores eólicos de grande envergadura.

Para uma turbina de três pás, a curva $3 \times \Omega$ é justificada pelo denominado efeito sombra, que ocorre devido a interferência da torre quando uma das pás passa por

ela (Hau, 2006). Este fenômeno ocorre a cada 120° , acontecendo três vezes a cada ciclo completo de rotação da pá, ou seja, com período igual a um terço do período de rotação do rotor.

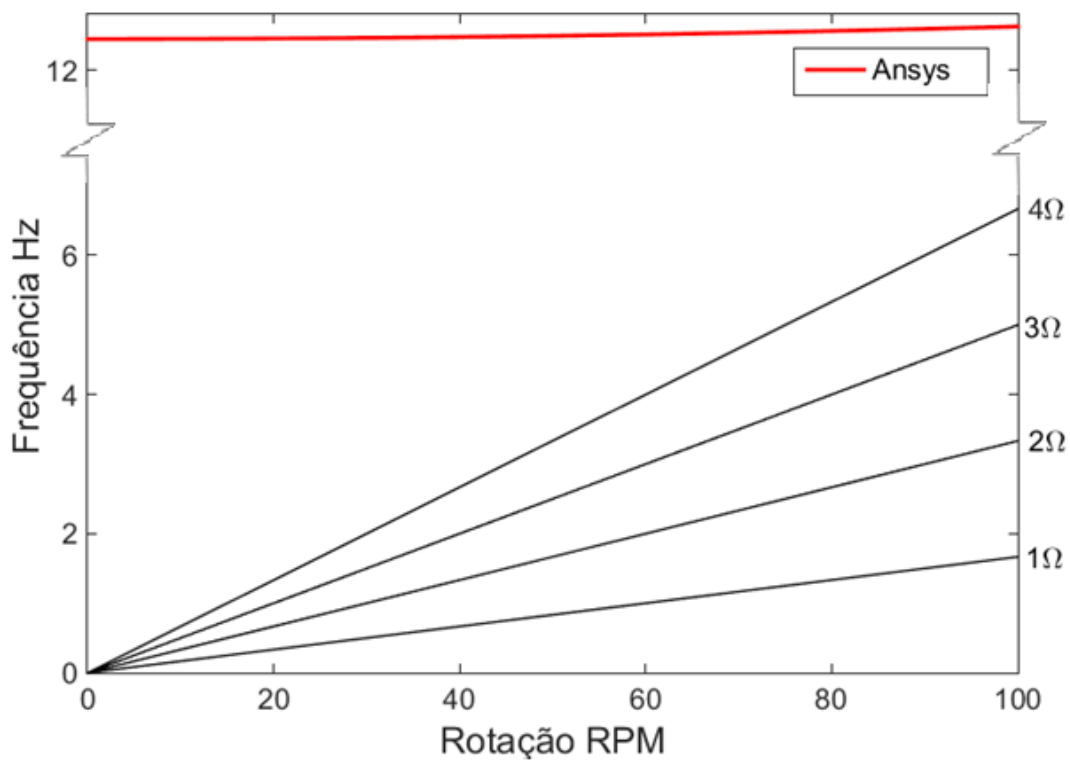


Figura 5.7 - Diagrama de Campbell do modelo de pá real.

6. ESTUDOS DA PÁ ROTATIVA SOB EFEITO DA FORÇA CENTRÍFUGA E DO PESO PRÓPRIO

A ação conjunta do peso próprio e da força centrífuga caracteriza um problema do tipo oscilador paramétrico descrito pela equação de Hill-Mathieu. A equação de movimento deste sistema pode ser escrita na forma de equação de estado. Estudos preliminares abrangem o comportamento das frequências naturais ao variar a posição da pá para cada velocidade de rotação. O problema da equação de Hill-Mathieu é solucionado para determinar instabilidades no sistema.

6.1. EQUAÇÃO DE ESTADO DA PÁ

Ao considerar a força centrífuga decorrente da rotação e a ação do campo gravitacional, têm-se uma matriz de rigidez geométrica, função da posição angular da pá em determinado instante, e uma matriz de rigidez centrífuga função da velocidade de rotação do rotor.

A equação de movimento deste sistema dinâmico (Eq. (3.36)), descrita na forma da equação de Mathieu, pode ser expressa por uma equação geral de primeira ordem com n-dimensões:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{Q} \quad (6.1)$$

sendo

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\mathbf{p}^2 - \epsilon \text{sen}(\Omega t)) & 0 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

onde $\mathbf{p}^2 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K}_m + \Omega^2 \mathbf{K}_c)$ e $\epsilon = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_g$.

Para um sistema amortecido, a equação de movimento torna-se:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \left(\mathbf{K}_m + \Omega^2 \mathbf{K}_c - \mathbf{K}_g \text{sen}(\Omega t) \right) \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (6.4)$$

e a matriz de transição de estado passa a ser:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\mathbf{p}^2 - \epsilon \sin(\Omega t)) & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

6.2. ESTUDOS PRELIMINARES

Considerando a velocidade de rotação constante, têm-se uma matriz de rigidez centrífuga constante adicionando rigidez ao sistema. Ao variar a posição da pá, têm-se um comportamento senoidal da matriz de rigidez geométrica. Ao analisar o problema preliminarmente, ao invés de se ter um valor para cada frequência natural do sistema, elas oscilam dentro de um intervalo. Ou seja, para uma velocidade de rotação constante com frequência de excitação dentro deste intervalo, infere-se que em algum instante o sistema entrará em ressonância devido à pá em determinado momento posicionar-se de forma que sua frequência natural seja igual à frequência de excitação. Porém, este modelo não trata da equação de Mathieu com suas peculiaridades, tratando-se apenas de um estudo preliminar para compreensão da dinâmica do problema.

Conforme a velocidade de rotação aumenta, o intervalo torna-se menor. Isto ocorre porque a força centrífuga é proporcional à velocidade de rotação enquanto a força axial decorrente do peso próprio é ponderada por uma função senoidal que varia no intervalo $]-1;1[$ e independe da velocidade de rotação. A Figura 6.1 ilustra o comportamento da primeira frequência natural do modelo simplificado da pá com $L = 1$ m para diferentes rotações, podendo-se observar a dominância da força centrífuga conforme a velocidade de rotação aumenta.

A variação da frequência Δ torna-se menor para velocidades de rotação mais altas. A Figura 6.2 mostra a diminuição da faixa de variação das frequências para velocidades de rotação elevadas. Esta faixa é delimitada pelas frequências da pá sob cargas axiais máximas de compressão e tração decorrentes de seu peso próprio. A Figura 6.3 ilustra o intervalo das três primeiras frequências naturais da pá simplificada para velocidades de rotação até 100 RPM com as curvas de excitação.

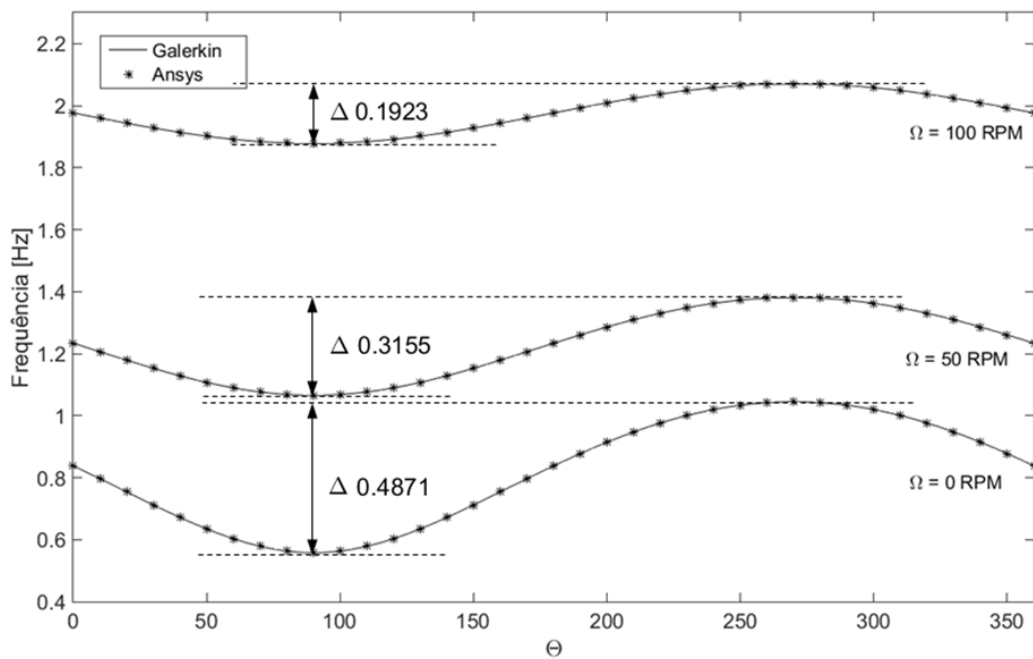


Figura 6.1 – Variação da frequência com a posição da pá para $\Omega = 0$, $\Omega = 50\text{ RPM}$ e $\Omega = 100\text{ RPM}$ da viga com $L = 1\text{m}$.

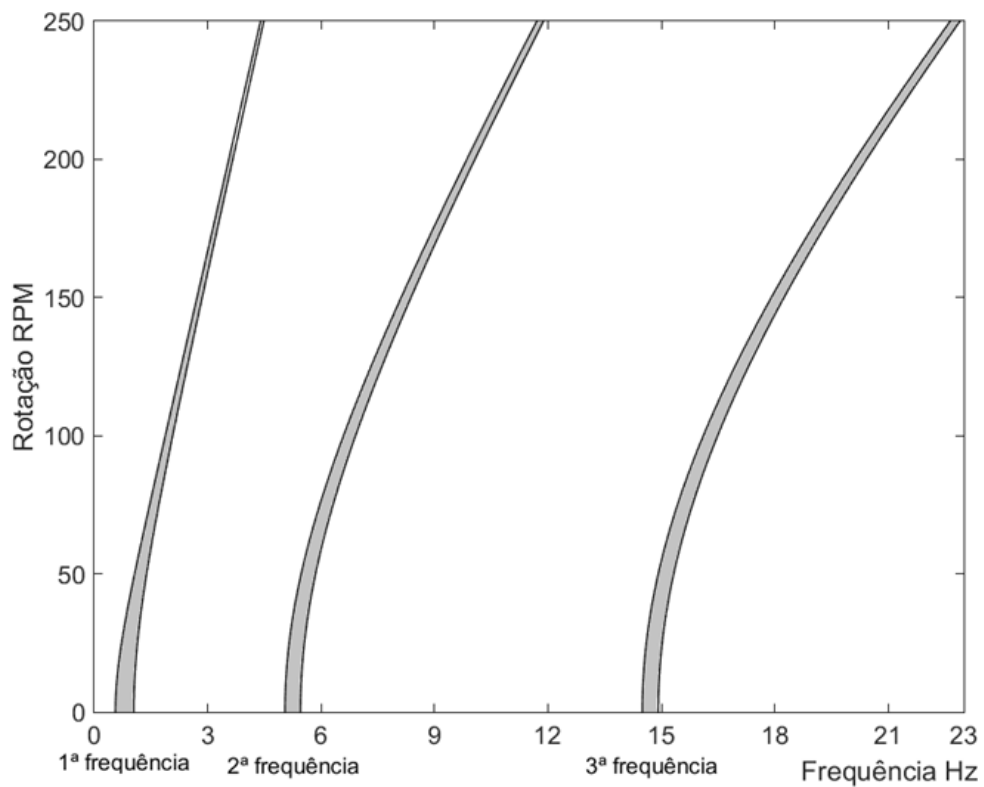


Figura 6.2 – Variação das frequências naturais em função da rotação da viga com $L = 1\text{m}$.

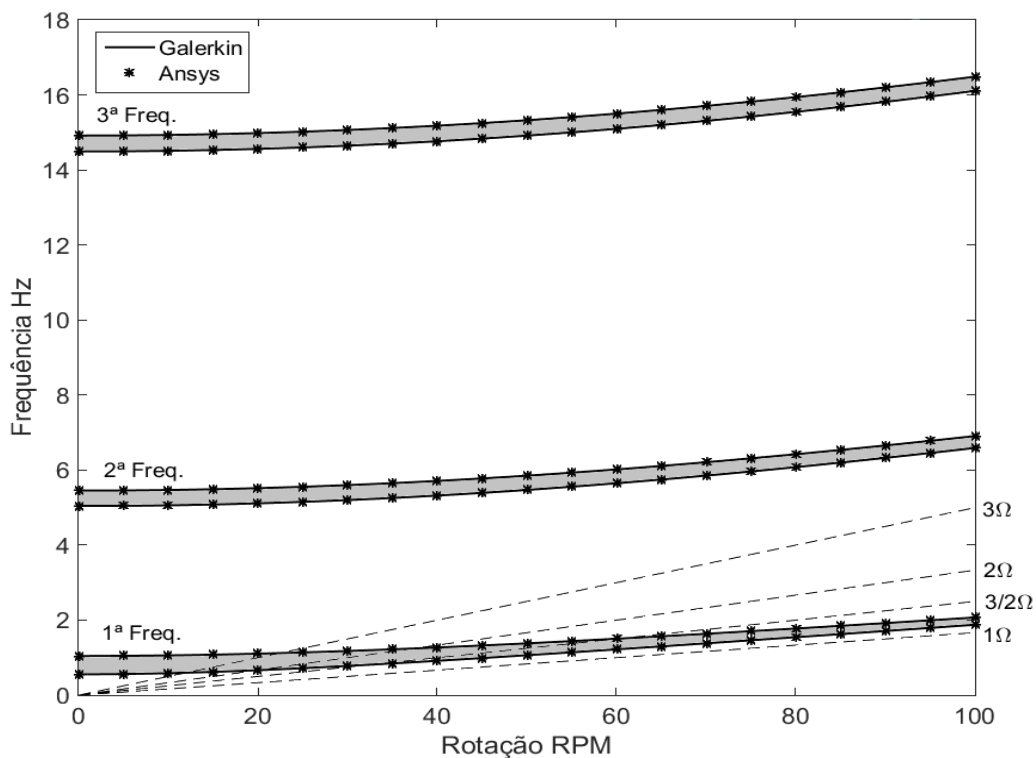


Figura 6.3 – Variação das três primeiras frequências naturais do modelo de viga com $L = 1\text{m}$.

Os mesmos resultados são gerados para viga de 10 metros de comprimento na Figura 6.4, Figura 6.5 e Figura 6.6.

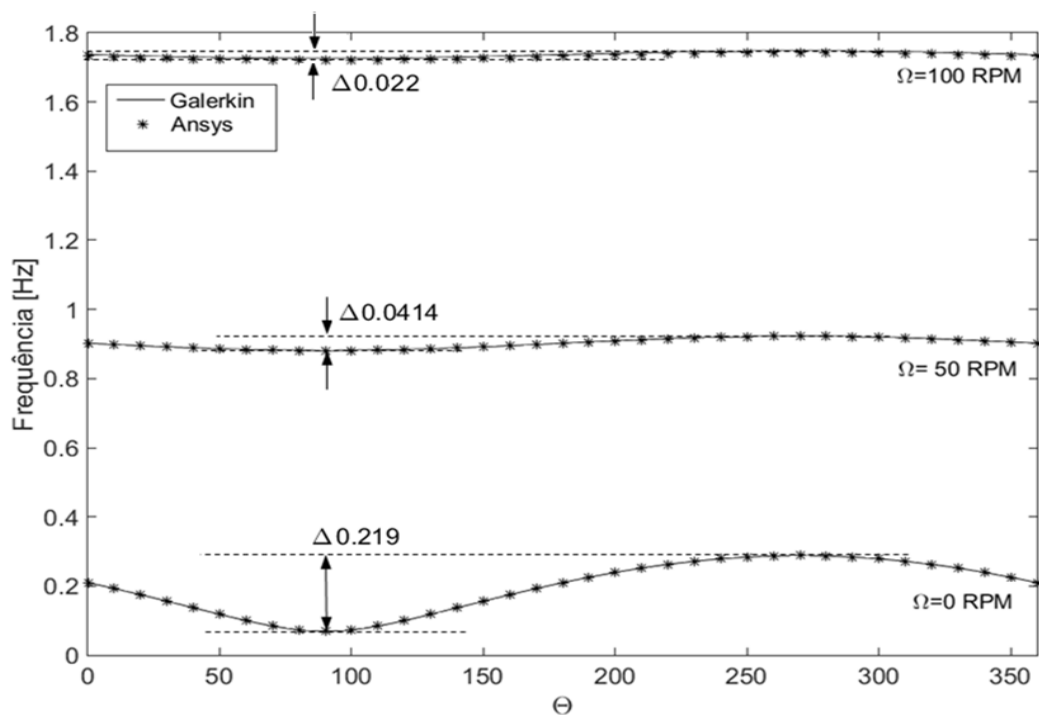


Figura 6.4– Variação da frequência com a posição da pá para $\Omega = 0$, $\Omega = 50\text{ RPM}$ e $\Omega = 100\text{ RPM}$ da viga com $L = 10\text{m}$.

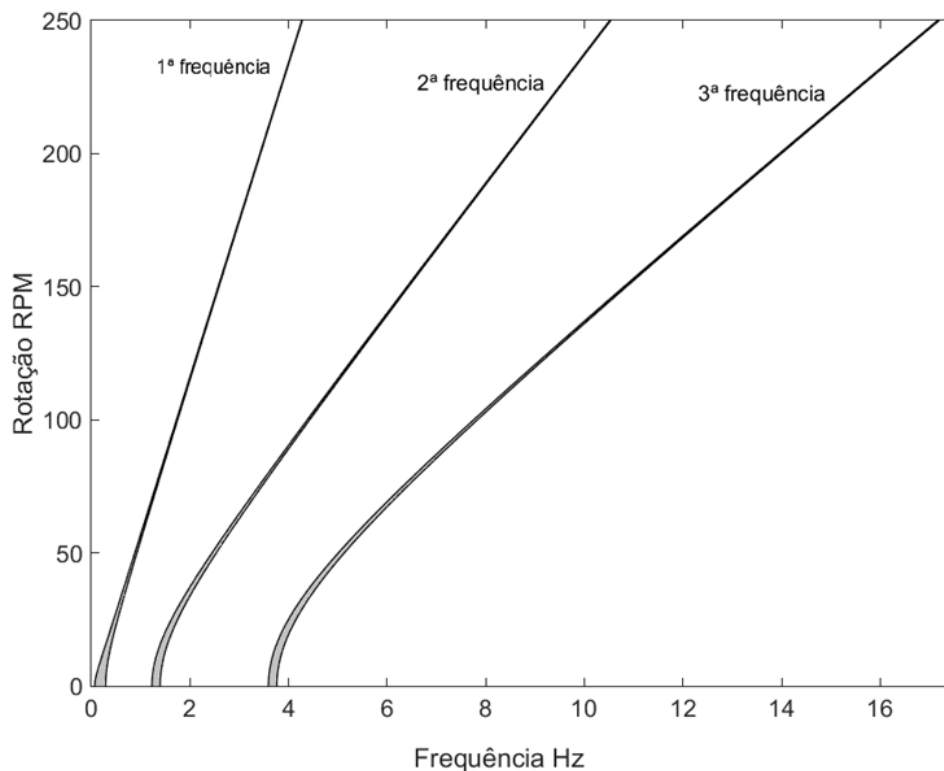


Figura 6.5 – Variação das frequências naturais em função da rotação da viga com $L = 10\text{m}$.

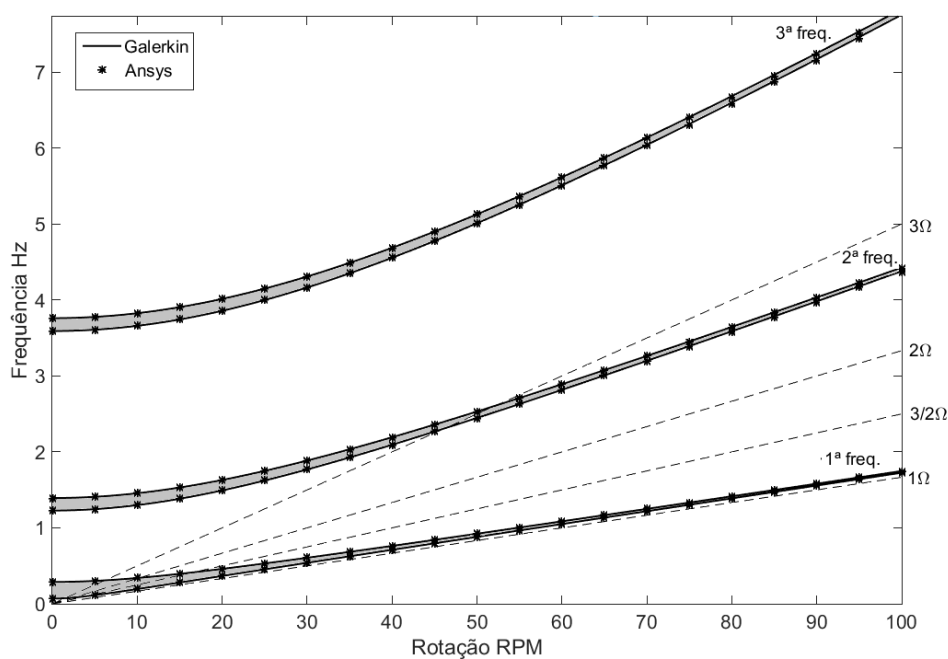


Figura 6.6 – Variação das três primeiras frequências naturais do modelo de viga com $L = 10\text{m}$.

Para a viga de 10 metros, o estreitamento da faixa de frequências é mais acentuado se comparado a viga de 1 metro. Em ambos os casos, o afunilamento ocorre mais rápido na primeira frequência natural e ocorre progressivamente para as demais frequências.

Estes estudos preliminares ilustraram o efeito estabilizador da força centrífuga suprimindo os efeitos do peso próprio para rotações mais elevadas e as faixas de ressonância que passam a existir no lugar de pontos específicos.

6.3. ESTUDOS DO OSCILADOR PARAMÉTRICO

Para solucionar o problema descrito pela equação de Mathieu utilizou-se a ferramenta ode45 de solução de equações diferenciais ordinárias do Matlab[®]. Esta ferramenta proporciona a visualização da resposta do sistema no tempo. Espera-se que o sistema amortecido apresente um decaimento na amplitude do deslocamento, porém, em regiões de ressonância, observa-se um comportamento crescente.

A transformada de Hilbert (ANEXO - B) determina a envoltória do sinal. A estabilidade do sinal é avaliada com base no expoente da função interpolada da transformada de Hilbert. A partir desta função é possível determinar o amortecimento da estrutura. Caso este expoente seja negativo têm-se um comportamento decrescente do sinal e o sistema é amortecido. No caso do expoente ser positivo o sinal possui um comportamento crescente.

Foram obtidas soluções para os modelos simplificados de pá com $L = 1$ m e $L = 10$ m, utilizando cinco modos. Desprezou-se a parte transiente do sinal descartando os primeiros 50 períodos de oscilação. A Figura 6.7 mostra as etapas de solução e análise deste problema.

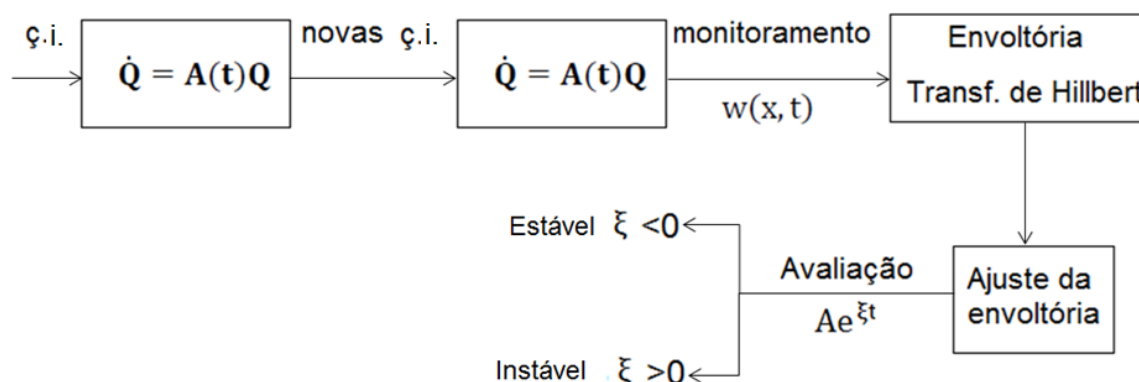


Figura 6.7 – Etapas de solução e análise do oscilador paramétrico.

A Figura 6.8 e a Figura 6.9 ilustram as respostas no tempo e os diagramas de fase para velocidade de rotação igual à frequência de ressonância da viga com $L = 1$ m.

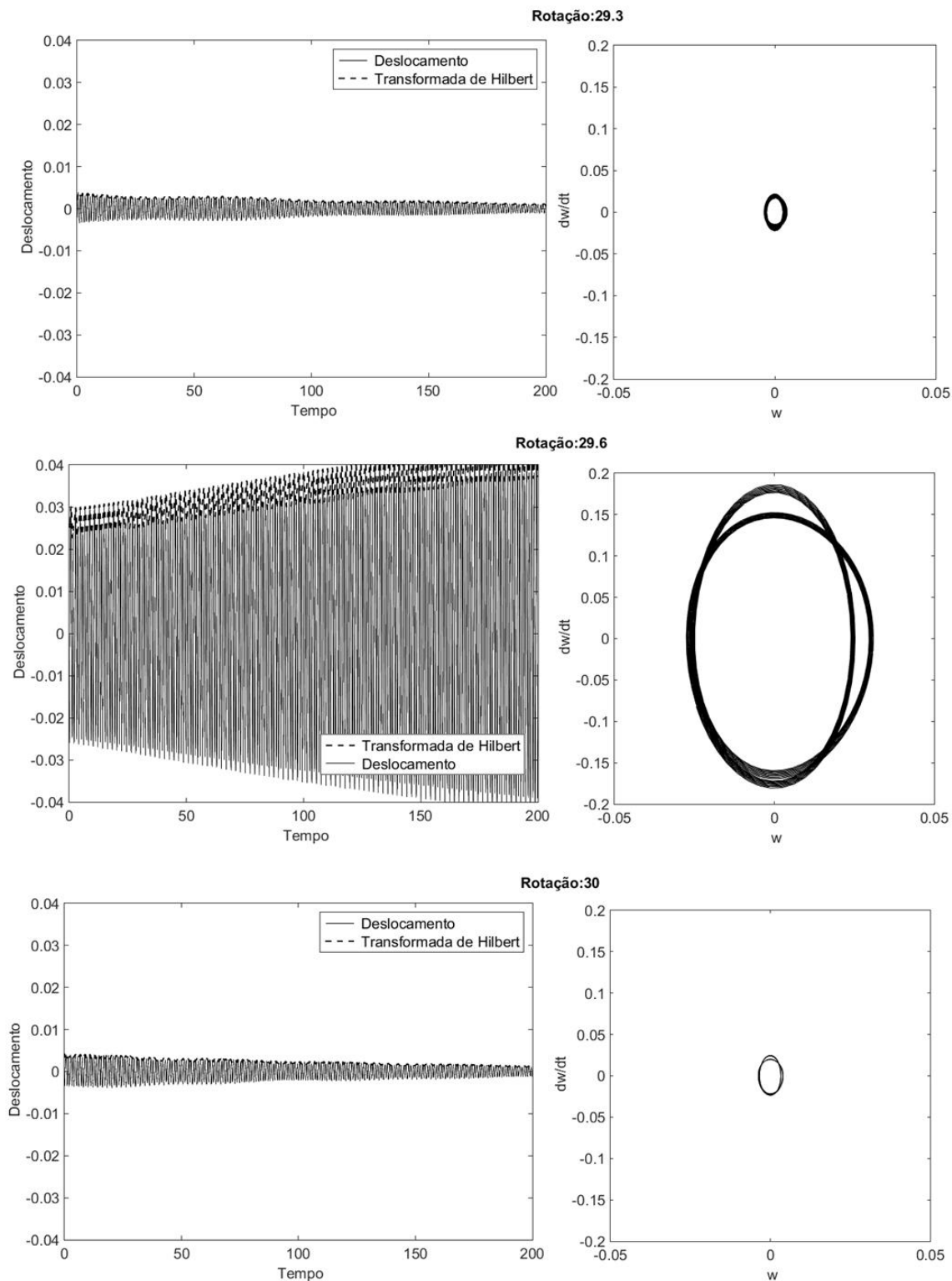


Figura 6.8 – Resposta no tempo e diagrama de fase para o modelo de pá simplificada com $L = 1$ m para $\Omega = 29.3$, $\Omega = 29.6$ e $\Omega = 30$ RPM.

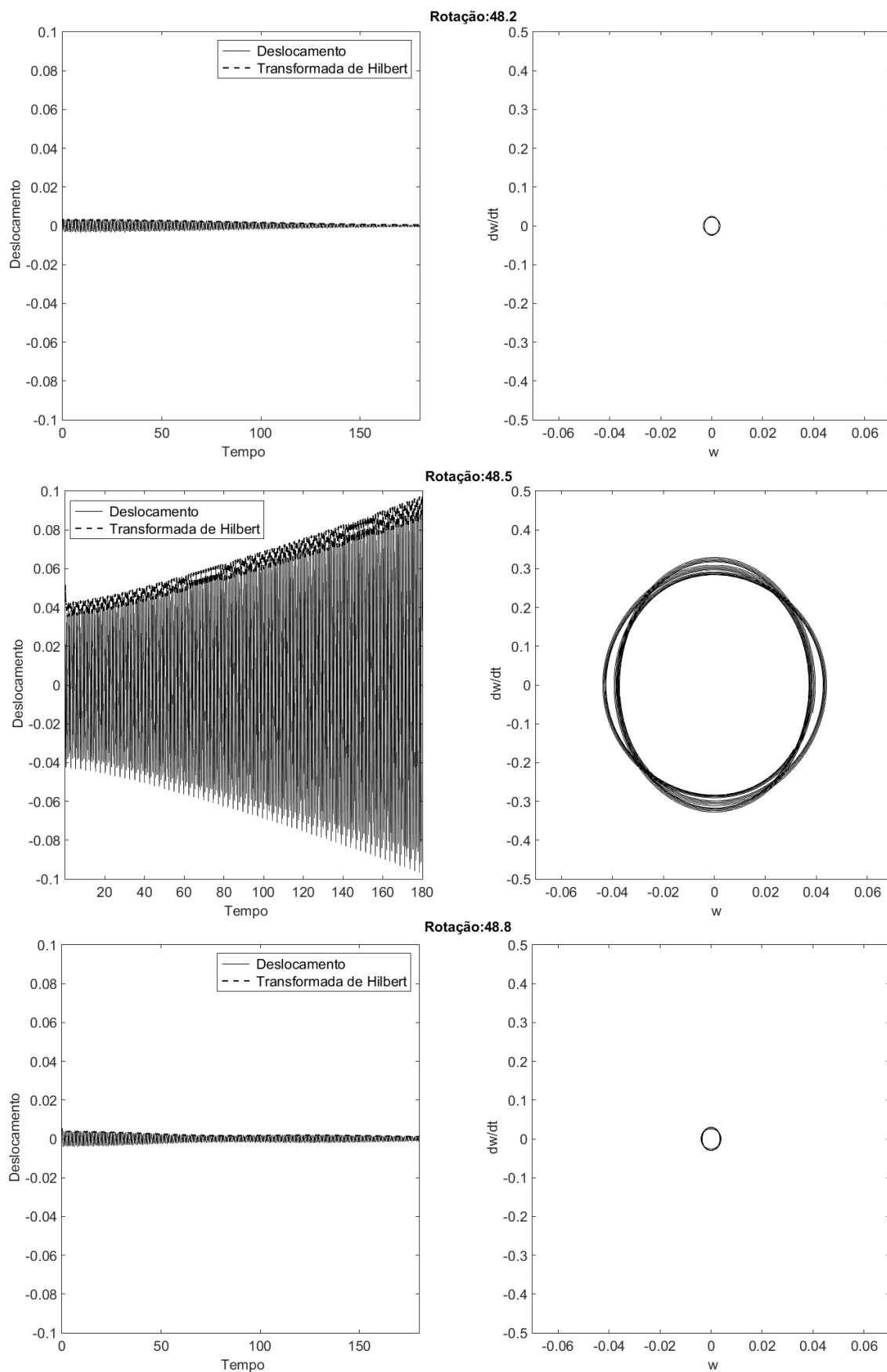


Figura 6.9– Resposta no tempo e diagrama de fase para o modelo de pá simplificada com $L = 1$ m para $\Omega = 47.2$, $\Omega = 48.5$ e $\Omega = 48.8$ RPM.

Observa-se o comportamento crescente do deslocamento para $\Omega = 29.6$ RPM e $\Omega = 48.5$ RPM. Estas velocidades coincidem com as velocidades críticas obtidas através do diagrama de Campbell. Para as demais velocidades de rotação, o deslocamento tem o comportamento esperado para um sistema amortecido.

A Figura 6.10 mostra o gráfico de amplitude do deslocamento do sistema para diferentes valores de amortecimento. Para todos os casos os picos de ressonância coincidem com as rotações onde as linhas de excitação $3/2\Omega$ e 2Ω cruzam a curva da primeira frequência natural da pá (Figura 6.11).

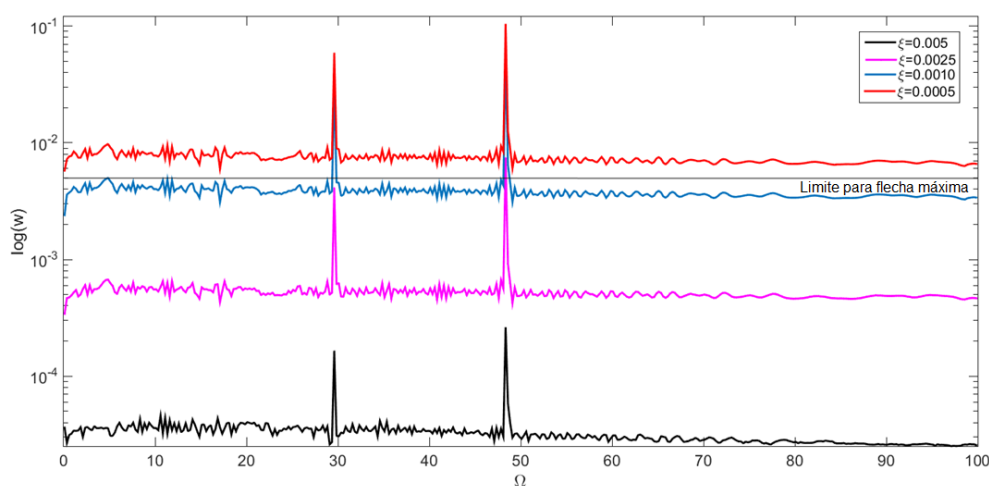


Figura 6.10 – Gráfico de amplitude para o modelo de pá simplificada com $L = 1$ m.

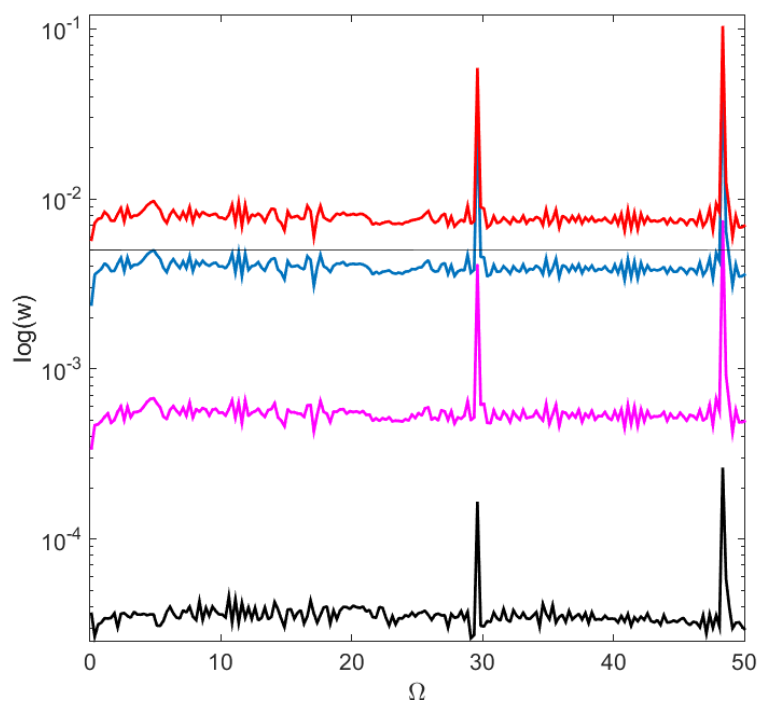


Figura 6.11 – Detalhe da Figura 6.10.

A Figura 6.12 compara os gráficos de amplitude considerando apenas a força centrífuga e a força centrífuga mais o peso próprio.

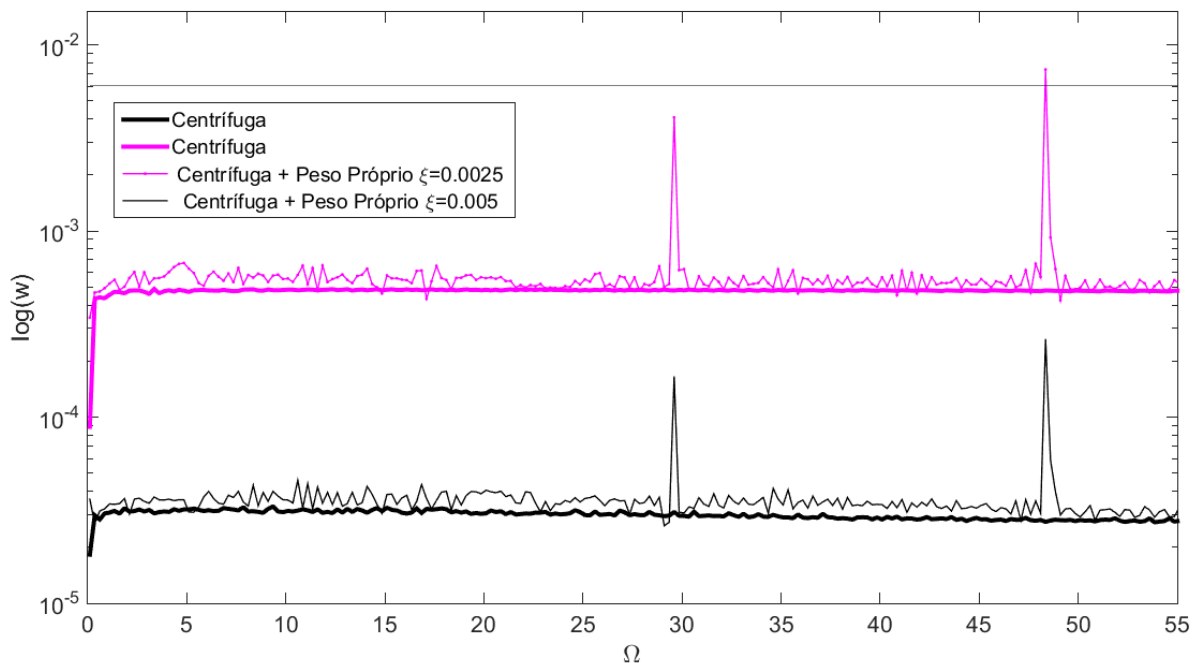


Figura 6.12 – Gráfico de amplitude para o modelo de pá simplificada com $L = 1$ m.

A amplitude do deslocamento de pás deve ser controlada porque se ocorrerem grandes deslocamentos pode haver o contato da pá com a torre bem como esforços superiores aos de projeto. A partir dos gráficos de amplitude pode-se observar que este controle pode ser feito pelo amortecimento da estrutura. Na falta de uma norma sobre deflexão máxima em pás de turbinas eólicas, utilizou-se uma métrica da medida de deflexão máxima em estruturas industriais metálicas não habitadas. Nessa norma (NBR8800/1986 – Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios) a flecha máxima não pode ultrapassar o limite definido pelo comprimento da viga dividido por 200. Nos dois casos com maior amortecimento, a deflexão não ultrapassa este limite, evidenciando o emprego do amortecimento como técnica de controle de amplitude.

No caso que é considerada apenas a força centrífuga não há picos de ressonância, pois o sistema não é excitado. O peso próprio atua como uma perturbação ao sistema.

Na Figura 6.13 os pontos de estabilidade são referentes às respostas no tempo que decrescem no decorrer do tempo. As respostas no tempo que a

amplitude aumenta são consideradas instáveis. Os pontos de instabilidade coincidem com as velocidades críticas do diagrama de Campbell para as curvas de excitação $3/2\Omega$ e 2Ω .

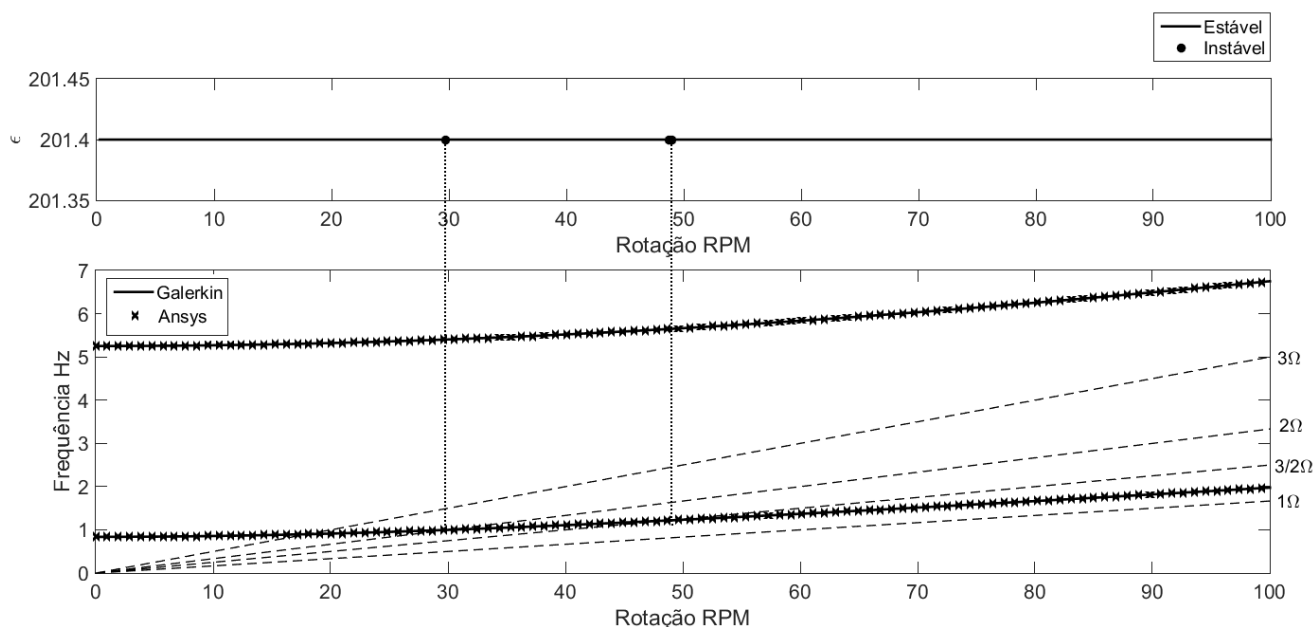


Figura 6.13 – Gráfico de instabilidade e diagrama de Campbell para o modelo de pá simplificada com $L = 1$ m.

Comparado os resultados com os estudos preliminares não se observa a mesma faixa de ressonância. O método considerando uma velocidade de rotação constante é muito conservativo.

A Figura 6.14 e a Figura 6.15 ilustram as respostas no tempo e os diagramas de fase para velocidade de rotação igual à frequência de ressonância da viga com $L = 10$ m . O comportamento crescente do sinal é observado em cinco velocidades de rotação, entre elas $\Omega = 7.2$ e $\Omega = 11.85$. As demais velocidades apresentam comportamento decrescente. A amplitude para as velocidades críticas também são maiores conforme se observa nos diagramas de fase.

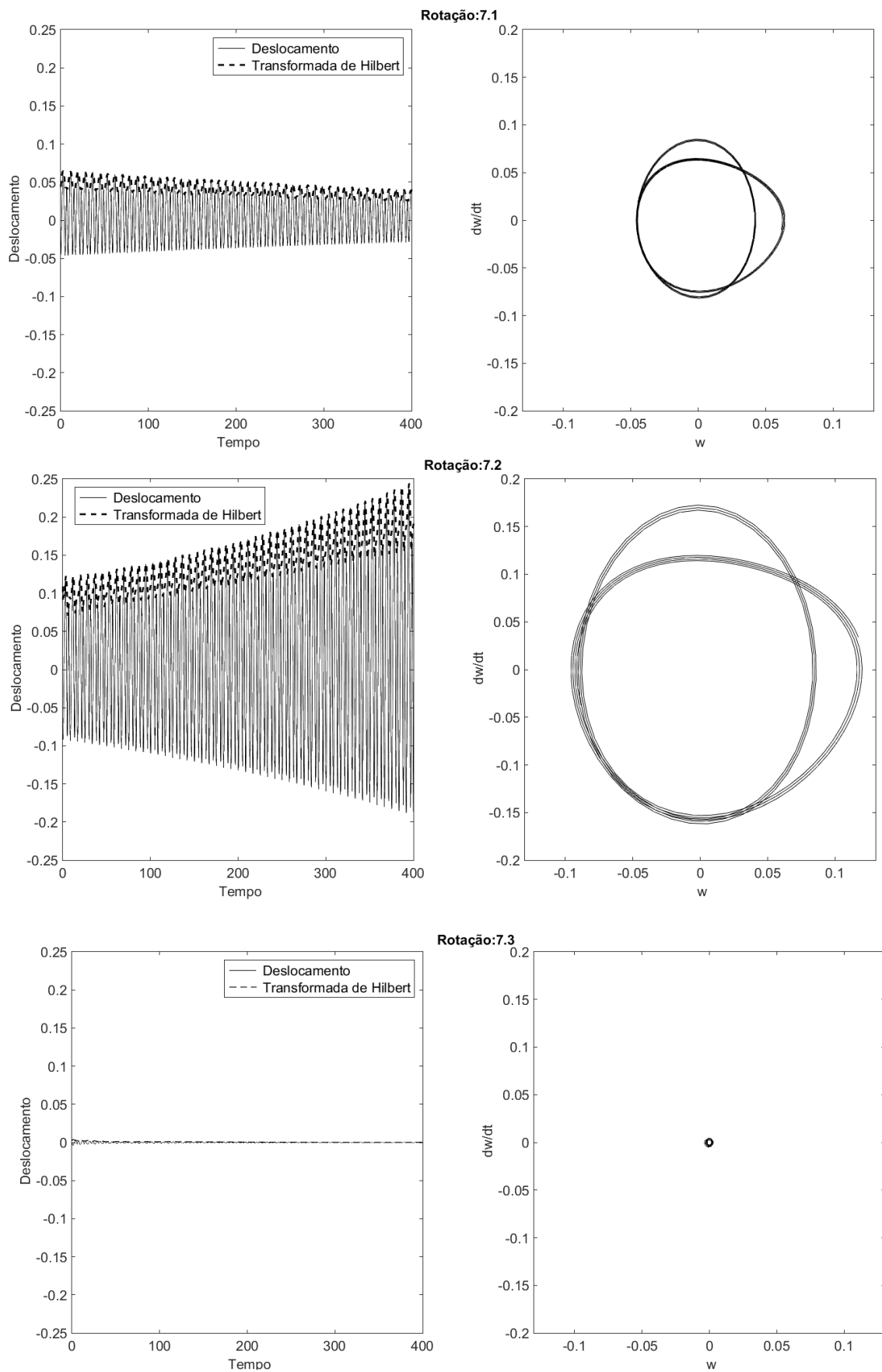


Figura 6.14– Resposta no tempo e diagrama de fase para o modelo de pá simplificada com $L = 10$ m para $\Omega = 7.1$, $\Omega = 7.2$ e $\Omega = 7.3$ RPM.

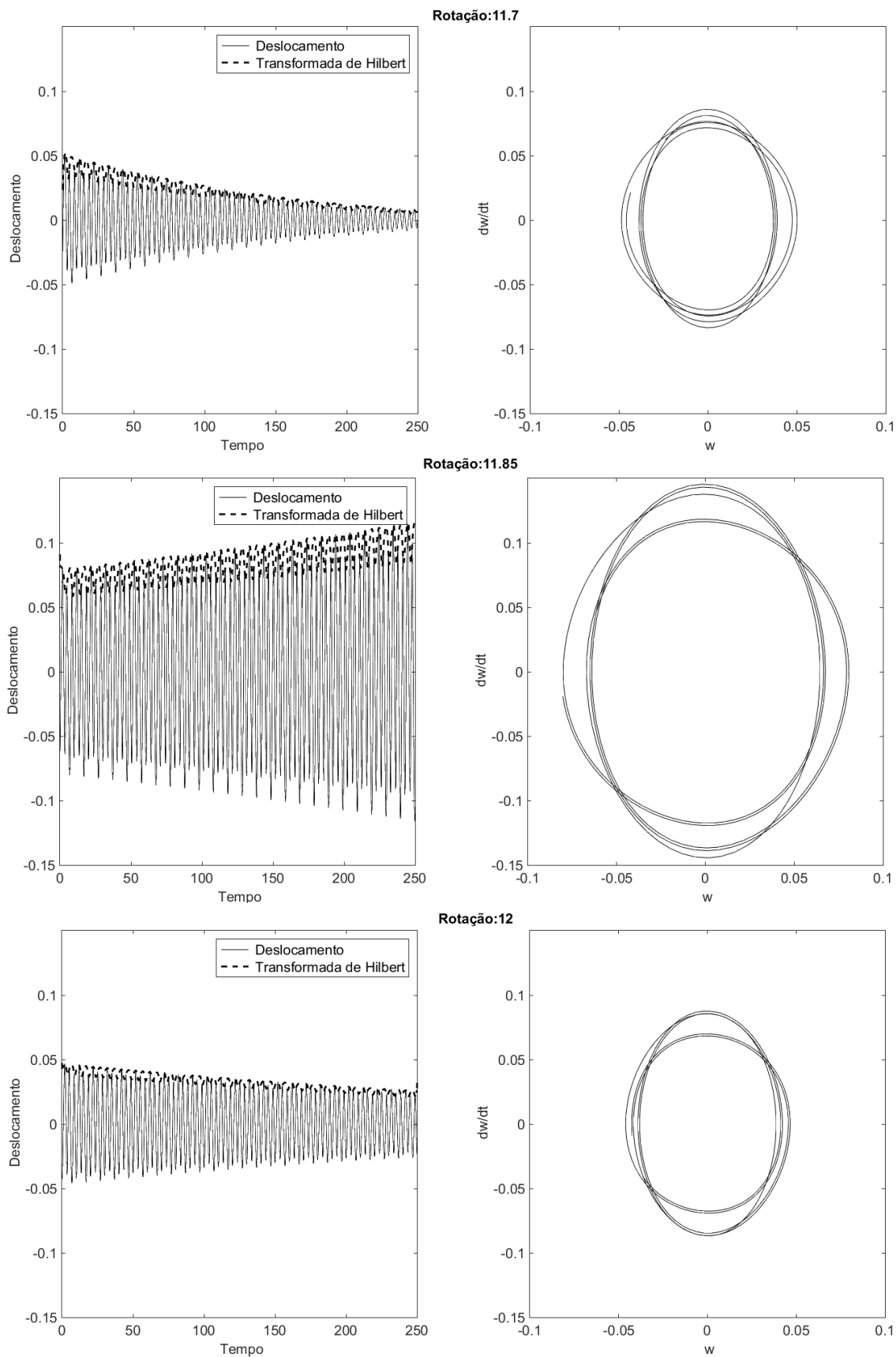


Figura 6.15– Resposta no tempo e diagrama de fase para o modelo de pá simplificada com $L = 10$ m para $\Omega = 11.7$, $\Omega = 11.85$ e $\Omega = 12$ RPM.

A Figura 6.16 e Figura 6.17 mostram os gráficos de amplitude do deslocamento para este sistema. Para a viga com maior comprimento as frequências de ressonância são menores e mais picos são identificados.

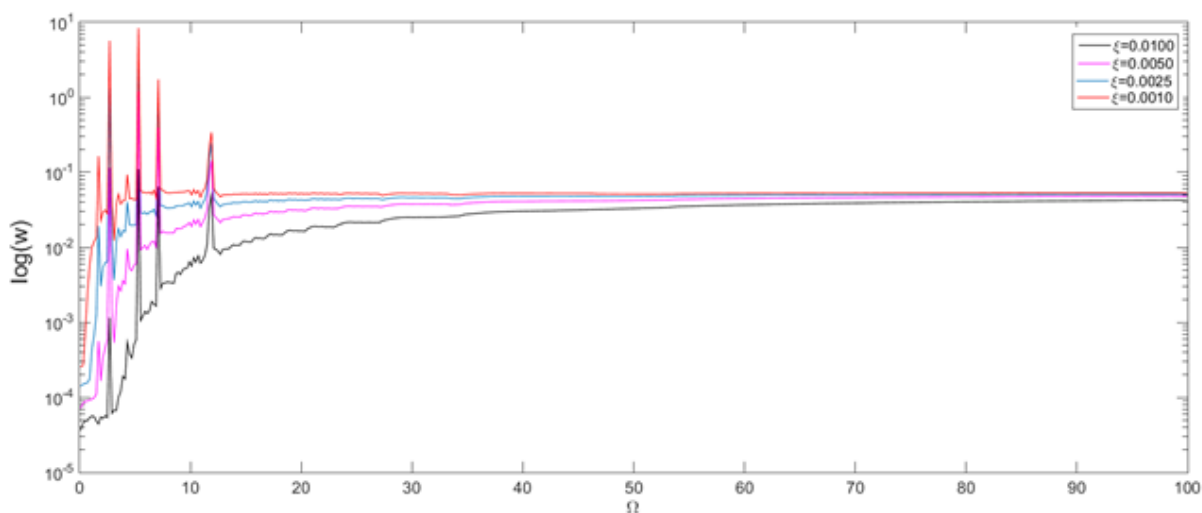


Figura 6.16 - Gráfico de amplitude para o modelo de pá simplificada com $L = 10$ m.

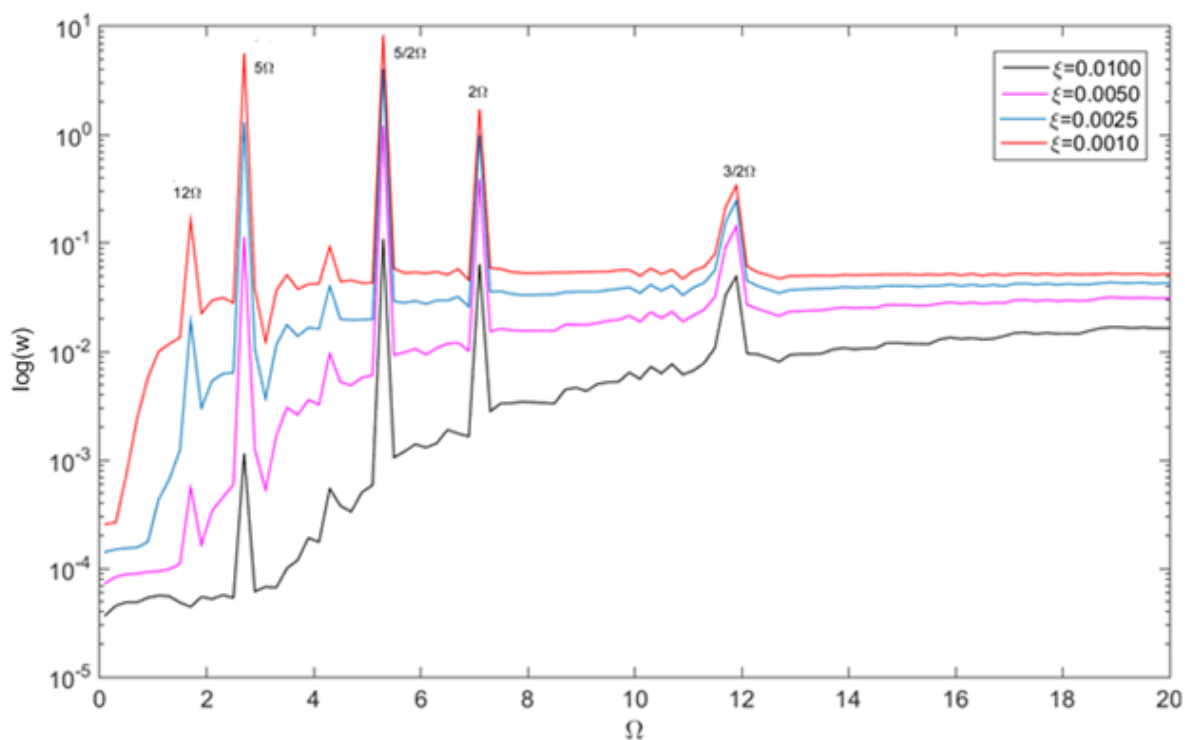


Figura 6.17 – Detalhe da Figura 6.16.

A Figura 6.18 compara as amplitudes para o sistema sujeito apenas a força centrífuga e a força centrífuga em conjunto com o peso próprio da estrutura. Para o amortecimento $\xi = 0.01$ alguns picos são suavizados.

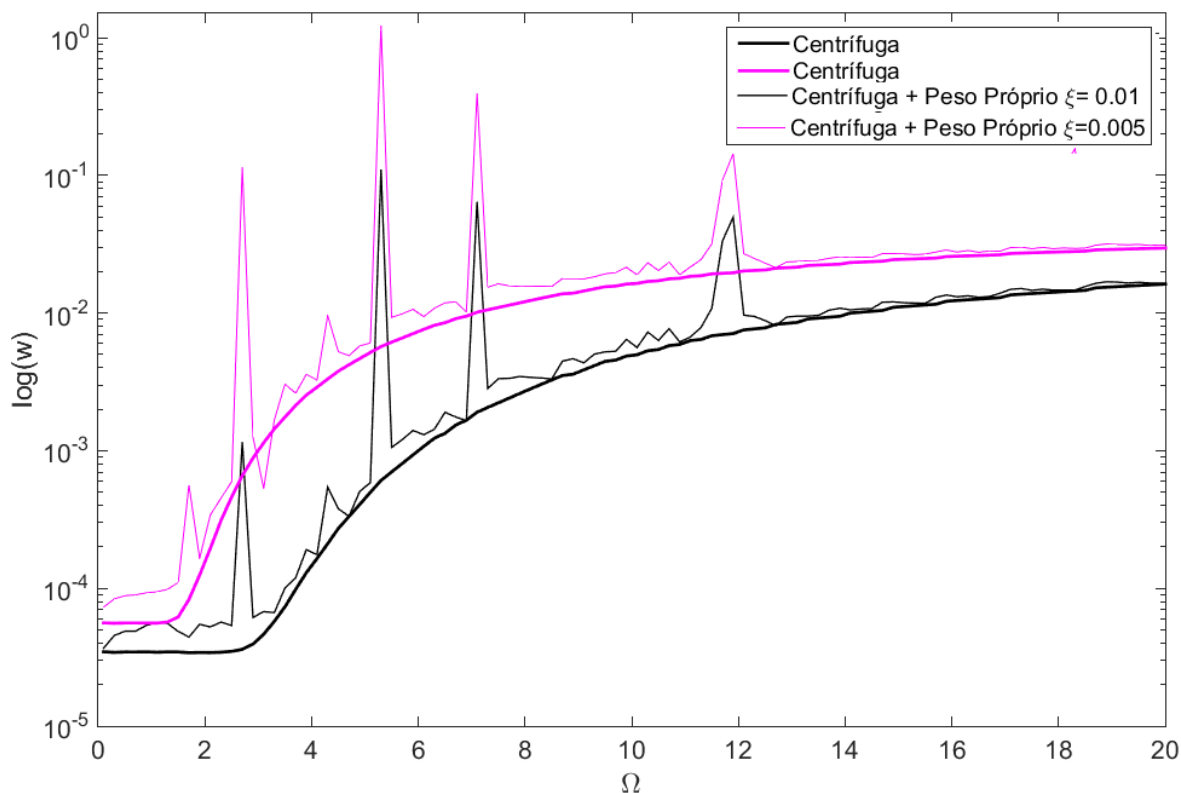


Figura 6.18 - Gráfico de amplitude para o modelo de pá simplificada com $L = 10$ m.

Para o modelo de viga com 10 metros de comprimento cinco regiões de instabilidade são encontradas (Figura 6.19). Estas regiões correspondem ao cruzamento das curvas de excitação $3/2\Omega$, 2Ω , $5/2\Omega$, 5Ω e 12Ω com a curva da primeira frequência natural. O surgimento de harmônicos de ordem mais elevadas é atribuído ao condicionamento das dimensões da viga de 10 metros e pela primeira frequência próxima a zero.

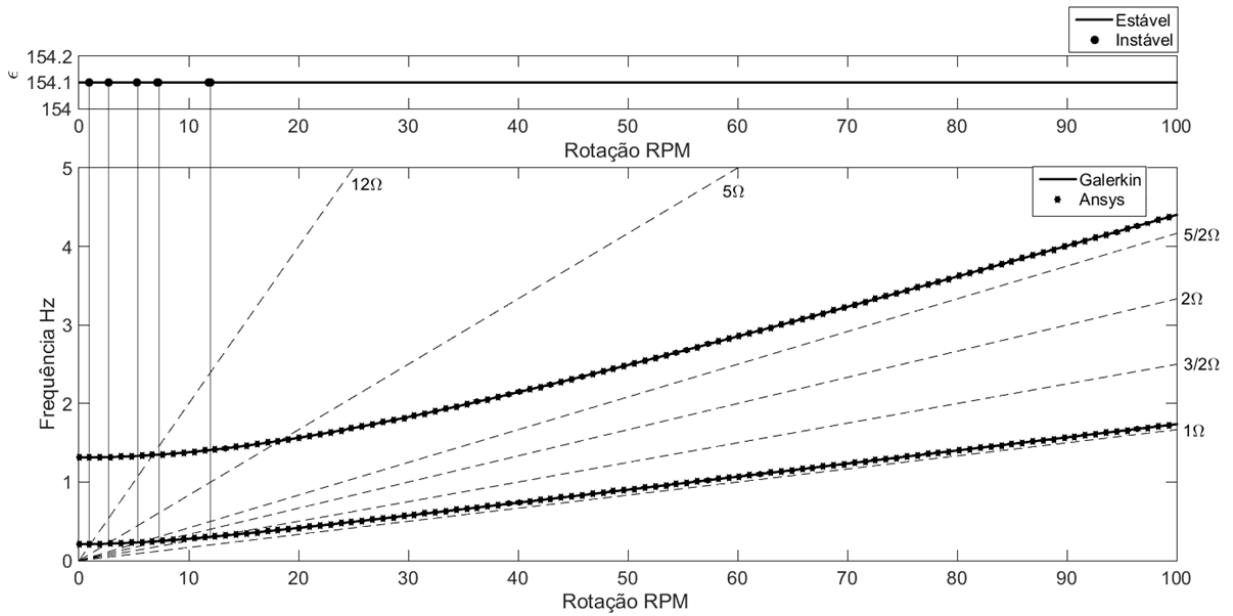


Figura 6.19 - Gráfico de instabilidade e diagrama de Campbell para o modelo de pá simplificada com $L = 10$ m.

6.4. SOLUÇÃO POR PERTUBAÇÃO

Utilizou-se o método de perturbação por expansão direta para obtenção da resposta do sistema. Assume-se que a solução do sistema pode ser obtida a partir da perturbação da resposta do sistema não perturbado:

$$u(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \dots \quad (6.6)$$

A matriz de estado do sistema não perturbado é:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\mathbf{p}^2) & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

A solução deste sistema é utilizada para obter a resposta de ordem ε :

$$\begin{aligned} \text{Ordem 1:} & \quad \ddot{u}_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \\ \text{Ordem } \varepsilon: & \quad (\ddot{u}_1 + \omega_0^2 u_1) = g \\ \text{Ordem } \varepsilon^2: & \quad (\ddot{u}_2 + \omega_0^2 u_2) = \frac{\partial g}{\partial u} u_1 + \frac{\partial g}{\partial \dot{u}} \dot{u}_1 \end{aligned} \quad (6.8)$$

onde $g = \varepsilon \sin(\Omega t)$. E a ordem ε^2 é solucionada utilizando a resposta da ordem anterior.

Os gráficos da Figura 6.20 e Figura 6.21 mostram o sinal obtido pelo uso do ODE45 e pela técnica de perturbação e a perturbação total.

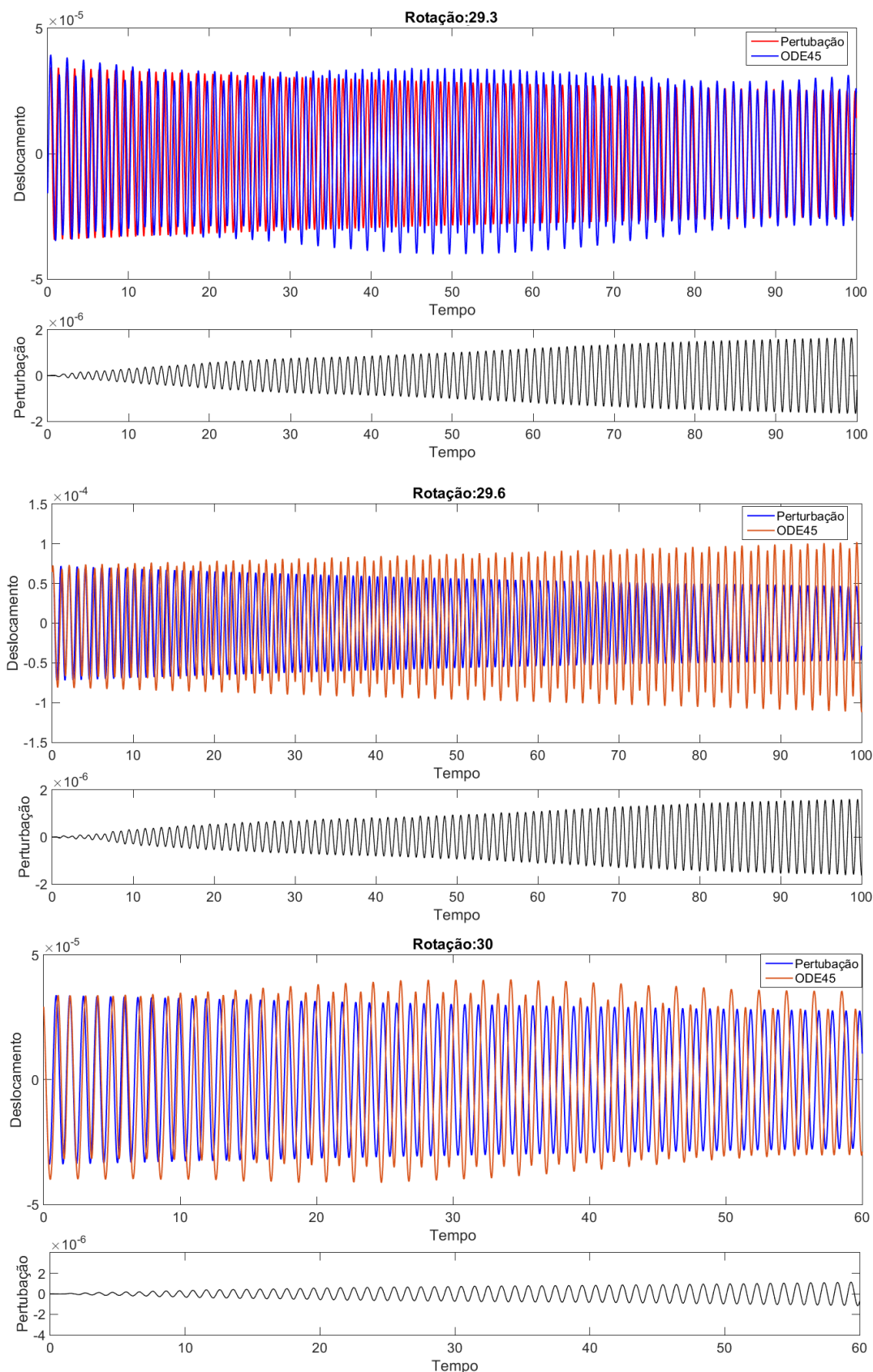


Figura 6.20 – Solução pelo método de perturbação para $\Omega = 29.3$, $\Omega = 29.6$ e $\Omega = 30$ RPM.

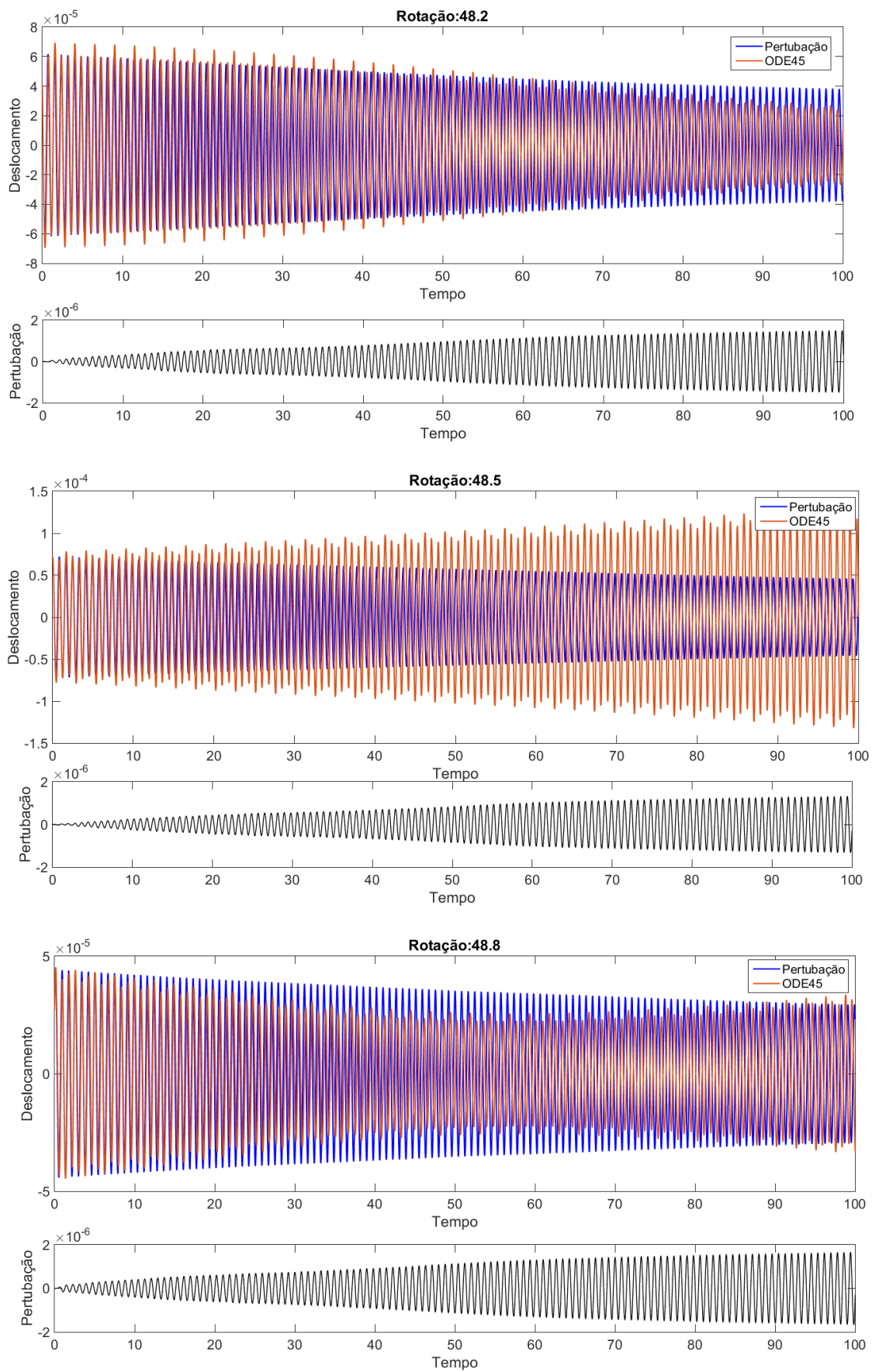


Figura 6.21 - Solução pelo método de perturbação para $\Omega = 48.2$, $\Omega = 48.5$ e $\Omega = 48.8$ RPM.

Para as frequências de ressonância da viga, a amplitude do deslocamento não cresce no método de perturbação por expansão direta. Nos casos analisados a perturbação cresce, mas instantes depois a sua amplitude torna-se constante. As soluções utilizando o ODE45 apresentam uma envoltória oscilatória e este fenômeno não é percebido pelo método de perturbação.

Este método foi escolhido por sua metodologia ser aplicável em um programa comercial de elementos finitos. A solução do sistema não perturbado pode ser obtida e empregada no modelo de ordem seguinte, e assim sucessivamente. No entanto, o método não foi capaz de caracterizar o comportamento dinâmico do oscilador paramétrico.

7. CONCLUSÃO

Para gerar maior potência as turbinas eólicas tiveram um crescimento acentuado em suas dimensões: o diâmetro do rotor aumentou quase 10 vezes o seu tamanho da década de 80 ao ano de 2010. Isto tornou as pás mais flexíveis e o aumento da torre a deixou sujeita a maiores velocidades do vento. As pás estão sujeitas a carregamentos aerodinâmicos, ao seu peso próprio e a força centrífuga. O peso próprio gera esforços de tração e compressão ao longo do comprimento da pá e é um fator dominante nos problemas de fadiga das pás dos rotores.

As forças centrífugas tem efeito estabilizador, pois sua magnitude é proporcional ao quadrado da velocidade de rotação. Para velocidades de rotação mais altas elas tendem a suprimir o efeito oscilatório do peso próprio, um dos principais problemas para fadiga. Porém, os grandes rotores operam em faixas de velocidade de rotação baixas, e as forças centrífugas não são muito significativas.

As forças que alternam ciclicamente são fontes de excitação de vibrações e frequências de ressonâncias podem ser atingidas. Ao entrar em ressonância ocorrem vibrações excessivas. Longos períodos em ressonância podem gerar fadiga do material, então estes devem ser evitados.

A utilização de ferramentas analítico-aproximadas em modelos simplificados de pás visa à validação de procedimentos numéricos, para que estes possam ser empregados em modelos mais complexos. O método de Galerkin foi utilizado para validar estes modelos frente aos resultados obtidos no software comercial de elementos finitos ANSYS®.

As primeiras análises preliminares limitaram-se ao estudo da influência do peso próprio nas frequências naturais. As modelagens foram realizadas do ponto de vista quase estático, variando a posição da pá. Os esforços de tração resultam no aumento da rigidez do sistema, enquanto os de compressão diminuem. Quando a componente axial é nula e a componente transversal é máxima, os resultados obtidos são os mesmos sem considerar o peso próprio da estrutura. A viga de 10 metros de comprimento possui um comportamento acentuado na região que está sob compressão.

Por conseguinte, o efeito da força centrífuga foi considerado. A variação da frequência com a velocidade de rotação do rotor possui comportamento crescente. A evolução da primeira frequência natural nunca cruza a curva de excitação $1 \times \Omega$. Isto é evidenciado pela equação da frequência fundamental adimensional de uma viga rígida fixada a uma mola torcional (Ishida, Inoue, & Nakamura, 2009). Somente as curvas $2 \times \Omega, 3\Omega, \dots, n\Omega, 3\Omega/2, 5\Omega/2, \dots, (2n - 1)\Omega/2$ sendo n um número natural, cruzam a curva da primeira frequência natural caracterizando velocidades críticas.

A ação conjunta do peso próprio e da força centrífuga caracteriza um problema do tipo oscilador paramétrico descrito pela equação de Hill-Mathieu. Estudos preliminares ilustraram o efeito estabilizador da força centrífuga suprimindo os efeitos do peso próprio para rotações mais elevadas e as faixas de ressonância que passam a existir no lugar de pontos específicos. Estes estudos não consideram a peculiaridade do problema do oscilador paramétrico.

A solução da equação de Mathieu, utilizando a ferramenta ODE45 do Matlab[®], proporciona a visualização da resposta do sistema no tempo. A estabilidade do sinal é avaliada pelo coeficiente da função interpolada da transformada de Hilbert. Ele indica velocidades de rotação onde o sistema é amortecido e onde o sinal tem comportamento crescente. Os pontos de instabilidade observados coincidem com velocidades críticas do diagrama de Campbell. Os gráficos de amplitude ilustram o controle do amortecimento sobre a amplitude do sinal.

O método de perturbação por expansão direta não foi capaz de reproduzir o comportamento dinâmico do sistema. Nas frequências de ressonância o sinal é amortecido quando deveria apresentar um comportamento crescente. A utilização de outro método de perturbação faz-se necessária a solução de problemas deste tipo.

As turbinas eólicas de média e alta potência apresentam problemas de vibração em sua estrutura. O estudo de modelos que consideram as condições de operação é necessário para obter resultados mais próximos à realidade do comportamento dinâmico das pás.

7.1. PERSPECTIVAS

Este trabalho apresenta o estudo da dinâmica de uma pá eólica sob os efeitos de forças axiais. O estudo da equação de Hill-Mathieu contemplou o modelo simplificado da pá. Faz-se necessário o desenvolvimento de técnicas para o estudo da equação de Hill-Mathieu com aplicação direta em grandes pás eólicas e outros sistemas oscilatórios paramétricos, bem como o estudo de outros métodos de perturbação mais adaptados a este problema.

Os estudos destinados a pás compósitas encontrados na literatura limitam-se ao emprego de técnicas de otimização de fibras e camadas. A dinâmica de pás compósitas é considerada apenas a luz de análises modais simples. A formulação considerando a anisotropia dos compósitos podem ser implementados ao estudo dos efeitos das cargas axiais em pás eólicas.

Os modelos com rotores com três pás e a interação entre a torre e o rotor são encontrados na literatura. Kang *et al.* (2014) investiga as características do sistema torre+pás aplicando o método de Galerkin considerando o efeito da força centrífuga F_c nas pás. A interação entre a torre e o rotor é dada por uma força de cisalhamento. A equação de governo da pá sobre a torre é:

$$\rho A \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial t^2} \Big|_{z=H} \right] + EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} - \frac{\partial^2}{\partial x} \left[F_c(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = 0 \quad (7.1)$$

sendo $u(x, t)$ o deslocamento da pá e $v(z, t)$ o da torre. Reproduzir estes resultados é importante, mas um avanço seria a implementação de modelos de controle de vibrações utilizando absorvedores dinâmicos através de amortecedores por massa sincronizada.

REFERÊNCIAS

- Aneel (BR). (22 de junho de 2015). *BIG - Banco de Informações de Geração*. Acesso em 24 de junho de 2015, disponível em Site da Aneel: <http://www.aneel.gov.br/aplicacoes/capacidadebrasil/capacidadebrasil.cfm>
- ANSYS. (2013). *Release Notes 15.0*.
- Antunes, J. (1998). *Méthodes Déterministes*. Paris: Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingenieur.
- Araújo, D., Morais, M. V., Avila, S. M., & Shzu, M. A. (23-26 de Novembro de 2014). Análise Modal de uma Pá de Turbina Eólica Modelada como Elemento de Viga utilizando a Plataforma Ansys. *Proceedings of the XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*. Fortaleza, Ceará, Brasil: ABMEC.
- Auciello, N. M. (10 de June de 2013). Flapwise Bending Vibration of Rotating Euler-Bernoulli Beam with Non-Uniform Tapers. *1st International Virtual Scientific Conference*, (pp. 378-383).
- Avila, S. M., Shzu, M. A., Pereira, W. M., Santos, L. S., Morais, M. V., & Prado, Z. J. (no prelo). Numerical Modeling of the Dynamics Behavior of a Wind Turbine Tower. *Journal of Advances in Vibration Engineering*.
- Barros, A. S. (2010). Estudo do Desalinhamento das Fibras nas Propriedades Mecânicas de Compósitos Estruturais de Pás Eólicas. *Tese de Doutorado*. São José dos Campos, São Paulo, Brasil.
- Bendat, J., & Piersol, A. (1986). *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*. New York: John Wiley and Sons.
- Blevins, R. D. (1984). *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape* (2ª ed.). New York: VNR.
- CAITHNESS Windfarm Information Forum (CWIF). (2011). *Summary of Wind Turbine Accident data to 31st March 2011*. Acesso em 10 de 10 de 2015, disponível em <http://www.caithnesswindfarms.co.uk/fullaccidents.pdf>
- Da Silva, A. P. (22 de fevereiro de 2011). Dinâmica Caótica e Sincronização de Fase em Mapas Acoplados. *Dissertação de Mestrado*. Rio Claro, São Paulo, Brasil.

- Ferreira, G. B., Costa, D. I., Morais, M. V., Neto, F. L., & Miranda, M. (2013). *Projeto Estrutural e Fabricação do País*, In: *Brasil Júnior, Antônio César Pinho (Coord.)*. Eletronorte.
- Finlayson, B. A. (1972). *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. (R. Bellman, Ed.) New York: Academic Press.
- Foto: Ribeiro, F. (21 de 12 de 2014). *G1 Rio Grande do Sul*. Acesso em 15 de 08 de 2015, disponível em Site do G1 da Globo: <http://g1.globo.com/rs/rio-grande-do-sul/noticia/2014/12/ventania-derruba-torre-de-energia-eolica-em-santana-do-livramento-rs.html>
- Hansen, M. O. (2008). *Aerodynamics of Wind Turbines* (2ª ed.). London: EARTHSCAN.
- Hau, E. (2006). *Wind Turbines. Fundamentals, Technologies, Application, Economics* (2ª ed.). Berlim: Springer.
- Hoa, S. V. (Julho de 1979). Vibration of a Rotating Beam with Tip Mass. *Journal of Sound and Vibration*, 369-381.
- Hodges, D. H., & Rutkowski, M. J. (Novembro de 1981). Free-Vibration Analysis of Rotating Beams by a Variable-Order Finite-Element Method. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 19, 1459-1466.
- Ishida, Y., & Yamamoto, T. (2012). *Linear and Nonlinear Rotordynamics: A Modern Treatment with Applications*. Berlin: Wiley-VCH.
- Ishida, Y., Inoue, T., & Nakamura, K. (13 de July de 2009). Vibration of a Wind Turbine Blade (Theoretical Analysis and Experiment Using a Single Rigid Blade Model). *Journal of Environment and Engineering*, 443-454.
- Kang, N., Park, S. C., Park, J., & Atluri, S. N. (14 de May de 2014). Dynamics of Flexible Tower-Blade and Rigid Nacelle System: Dynamic Instability due to their Interactions in Wind Turbine. *Journal of Vibration and Control*, 1-11.
- Madenci, E., & Guven, I. (2006). *The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS*. United States of America: Springer.
- Malcolm, D. J. (November de 2002). Modal Response of 3-Bladed Wind Turbines. *Journal of Solar Energy Engineering*, 372-377.
- Marten, D., Wendler, J., Pechlivanoglou, G., Nayeri, C. N., & Paschereit, C. O. (february de 2013). Q-Blade: An Open Source Tool for Design and Simulation of Horizontal and Vertical Axis Wind Turbines. *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering*, 264-269.

- NAW Staff. (29 de 01 de 2014). *Vestas Investigates Blade Failure at Danish Wind Farm*. Acesso em 15 de 09 de 2015, disponível em Site da North American WindPower:
http://www.nawindpower.com/e107_plugins/content/content.php?content.12552
- NBR 8800/86. (1986). Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios. ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas.
- Oppenheim, A., & Schafer, R. (1992). *Discrete-Time Statistical Signal Processing*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall International Editions.
- Paidoussis, M. (2004). *Fluid Structure Interactions. Slender Structures and Axial Flow* (Vol. 1). Londres: Elsevier Academic Press.
- Pinto, M. (2013). *Fundamentos de Energia Eólica*. Rio de Janeiro : LTC.
- Portal Energia. (23 de 12 de 2014). *Forte Tempestade derruba 8 Aerogeradores em Parque Eólico no RS - Brasil*. Acesso em 15 de 09 de 2015, disponível em Site Portal Energia : <http://www.portal-energia.com/forte-tempestade-derruba-8-aerogeradores-em-parque-eolico-no-rs-brasil/>
- Rao, S. S. (2008). Vibrações Mecânicas. In: S. S. Rao, T. P. Valsi, & R. P. Truys (Eds.), *Vibrações Mecânicas* (pp. 282-288). São Paulo: Pearson Prentice Hall.
- ReNews. (24 de 06 de 2015). *Blade breaks at Nordsee Ost*. Acesso em 15 de 09 de 2015, disponível em Site da ReNews: <http://renews.biz/90791/senvion-blade-breaks-at-nordsee-ost/>
- Sale, D. C. (16 de september de 2012). User's Guide to Co-Blade: Software for Structural Analysis of Composite Blades. *Northwest National Marine Renewable Energy Center - Department of Mechanical Engineering*. Seattle, Washington, United States of America.
- Savi, M. A. (2006). *Dinâmica Não-linear e Caos*. Rio de Janeiro: e-papers.
- Tribune, C. A. (29 de 05 de 2014). *DTE to Repair 14 Turbines; Work set to Begin in June; 19 other Blades get OK*. Acesso em 15 de 09 de 2015, disponível em Site Michigans Thumb:
http://www.michigansthumb.com/news/local/article_0fc418da-e726-11e3-baee-001a4bcf887a.html
- Vivanco, J. E. (Janeiro de 2009). Análise da Dinâmica não-linear no Balanço Paramétrico de uma Embarcação Pesqueira. *Dissertação de Mestrado*. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

WindAction. (12 de 12 de 2013). *Wind Turbine blade shears off*. Acesso em 15 de 09 de 2015, disponível em Site da WindAction: <http://www.windaction.org/posts/39275-wind-turbine-blade-shears-off#.Vh21dfIViko>

Wright, A. D., Smith, C. E., Thresher, R. W., & Wang, J. L. (Março de 1982). Vibration Modes of Centrifugally Stiffened Beams. *Journal of Applied Mechanics*, 49, 197-202.

ANEXO A – MODELO DE BLEVINS

As frequências naturais flexionais de uma viga simples segundo Blevins (1984) podem ser obtidas a partir da Equação (A.1):

$$f_i = \frac{\lambda_i}{2\pi L^2} \left(\frac{EI}{m} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.1})$$

sendo f_i a frequência natural referente ao modo i em hertz, E o módulo de elasticidade transversal, I o momento de inércia da área da seção transversal, m a massa por unidade de comprimento e L o comprimento total da viga.

O termo λ_i refere-se a diferentes configurações de condições de contorno e cargas. Considerando uma viga engastada-livre e no caso da carga axial ser nula em uma de suas extremidades, as constantes λ_i são função das condições de contorno e do parâmetro de tração axial α , obtido a partir da Equação (A.2):

$$\alpha = \frac{wL^3}{EI} \quad (\text{A.2})$$

sendo w a força por unidade de comprimento. Em casos de forças compressivas w deve ser considerado negativo, e no caso de forças de tração deve ser considerado positivo.

Os valores de λ_i são tabelados por (Blevins, 1984) para determinados α :

Tabela A.1 - Valores de λ_i em função de α para $\alpha \geq 0$. Fonte Blevins (1984)

α	0	200	400	600	800	1000
λ_1	1.8751	4.2155	4.9762	5.4905	5.8898	6.2205
λ_2	4.6941	6.8154	7.8375	8.5586	9.1288	9.6062
λ_3	7.8548	9.6222	10.6904	11.4853	12.1295	12.6768

Tabela A.2 - Valores de λ_i em função de α para $\alpha \leq 0$. Fonte Blevins (1984)

α	0	-2	-4	-6	-7.5
λ_1	1.8751	1.7424	1.5694	1.3059	0.8550
λ_2	4.6941	4.6517	4.6081	4.5631	4.5285
λ_3	7.8548	7.8289	7.8027	7.7762	7.7562

Os valores de α para as vigas exemplificadas são:

Tabela A.3– Valores α para as vigas de 1 e 10 metros.

	Viga 1 m	Viga 10 m
α_{comp}	-4.46	-7.00
$\alpha_{\text{traç}}$	4.46	7.00

Os termos λ_i para os valores de α encontrados foram obtidos a partir de uma interpolação realizada no MATLAB®.

Tabela A.4- Valores de λ_i em função de α .

	Viga 1 m		Viga 10 m	
	α_{comp}	$\alpha_{\text{traç}}$	α_{comp}	$\alpha_{\text{traç}}$
λ_1	1.5226	1.9564	1.0172	2.2092
λ_2	4.5979	4.7603	4.5402	4.9383
λ_3	7.8167	7.9054	7.7629	8.0195

ANEXO B – TRANSFORMADA DE HILBERT¹

A transformada de Hilbert neste trabalho é utilizada para determinar a envoltória da resposta no tempo do sistema oscilador paramétrico. Uma interpolação da envoltória é feita e seu coeficiente analisado para determinação de instabilidades no sistema. Encontra-se apresentações aprofundadas sobre a transformada de Hilbert nos trabalhos de Bendat & Piersol (1986) e Oppenheim & Schaffer (1992).

A transformada de Hilbert de um sinal temporal $x(t)$ é também uma função temporal $\tilde{x}(t)$, tal que,

$$z(t) = x(t) + j \tilde{x}(t) \quad (\text{B.1})$$

é um sinal analítico. Isto significa que a transformada de Fourier de $z(t)$ é identicamente nula para todas as frequências negativas. Além desta propriedade formal, a transformada de Hilbert possui outras propriedades interessantes, que possibilitam diversas aplicações úteis.

Nota-se que a definição (B.1) sugere um método para obter a formulação de Hilbert. Ao aplicar uma transformada de Fourier na expressão (B.1), tem-se:

$$Z(f) = X(f) + j \tilde{X}(f) \quad (\text{B.2})$$

Para a definição $Z(f < 0) = 0$ ser verdadeira, é preciso que:

$$\tilde{X}(f) = -j \operatorname{sign}(f) X(f) \quad (\text{B.3})$$

onde,

$$\operatorname{sign}(f) = \begin{cases} 1, & f > 0 \\ -1, & f < 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Ao substituir a expressão (B.3) na definição (B.2) em frequência, temos:

$$Z(f) = X(f) + j [-j \operatorname{sign}(f) X(f)] = X(f)[1 + \operatorname{sign}(f)] \quad (\text{B.5})$$

logo,

$$Z(f) = \begin{cases} X(f)[1 + \operatorname{sign}(f)] & , f > 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

¹ Este texto é uma tradução livre é parte do curso IPSI “*Identification des Systemes em Mecanique – Volume I : Principes Généraux - Méthodes*” realizado do 13 ao 15 de maio de 1998 em Paris-França (Antunes, 1998).

Isto corresponde então a definição de uma função analítica. Conseqüentemente, a Eq. (B.3) é a definição da transformada de Hilbert, no domínio de frequência. Para obter a definição temporal correspondente, calcula-se a transformada de Fourier inversa da expressão (B.3),

$$\tilde{x}(t) = \mathcal{H}[x(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (\text{B.7})$$

A transformada de Hilbert representa então a convolução entre $x(t)$ e a função $1/\pi t$. De fato, temos:

$$\mathcal{H}\left[\frac{1}{\pi t}\right] = -j \operatorname{sign}(f) \quad (\text{B.8})$$

Ao analisarmos um sinal $x(t)$ do tipo cosseno amortecido (sinal vibratório típico), a transformada $\mathcal{H}[x(t)]$ funciona como um filtro em quadratura, conforme Eq. (B.3). A partir da função analítica complexa $z(t)$, pode-se definir *amplitude instantânea*, *frequência instantânea* e *fase instantânea* do sinal $z(t)$:

$$z(t) = x(t) + j \tilde{x}(t) \quad \Rightarrow \quad z(t) = A(t)e^{j\phi(t)} \quad (\text{B.9})$$

A **amplitude instantânea** $A(t)$ representa o envelope do sinal $z(t)$:

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + \tilde{x}^2(t)} \quad (\text{B.10})$$

E a **frequência instantânea** $f(t)$ e a **fase instantânea** $\phi(t)$ são calculadas por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\phi(t)], \quad \text{sendo } \phi(t) = \tan^{-1} \left(\frac{\tilde{x}(t)}{x(t)} \right) \quad (\text{B.11})$$

APÊNDICE A – CÓDIGOS DO ANSYS

A.1. CÓDIGO DO ANSYS REFERENTE À FORÇA CENTRÍFUGA

```

!Vigal
Finish
/clear

/PREP7
ET,1,BEAM188
MP,EX,1,2.1e11
MP,PRXY,1,0.3
MP,DENS,1,7800
k,1,0
k,2,1,0
l,1,2
SECTYPE,1, BEAM, RECT, BASE
SECOFFSET, CENT
SECDATA,0.001,0.001,4,4
secplot,1
LESIZE,ALL, , ,400
MSHKEY,0
SMRTSIZE,3,
LMESH,ALL
dk,1,all
finish

ival=0
fval=10.6
inc=0.1
j=1
*DIM,FREQ,table,5,((fval-ival)/inc+1),,Modo, Frequncia
*DO,i,ival,fval,inc

/SOLU
D,all,uy

ANTYPE,STATIC
PSTRES,ON
OMEGA,,,i
OUTPR,,1
/OUT,SCRATCH
SOLVE
FINISH
/SOLU
ANTYPE,MODAL
MODOPT,LANB,5
PSTRES,ON
SOLVE
FINISH
/OUT,
*GET,FREQ(1,j),MODE,1,FREQ
*GET,FREQ(2,j),MODE,2,FREQ
*GET,FREQ(3,j),MODE,3,FREQ
*GET,FREQ(4,j),MODE,4,FREQ
*GET,FREQ(5,j),MODE,5,FREQ
j=j+1
finish
*enddo
*status,freq

```

A.2. CÓDIGO DO ANSYS REFERENTE AO PESO PRÓPRIO

```

/PREP7
ET,1,BEAM188
MP,EX,1,2.1e11
MP,PRXY,1,0.3
MP,DENS,1,7800
k,1,0
k,2,1,0
l,1,2
SECTYPE,1, BEAM, RECT, BASE
SECOFFSET, CENT
SECDATA,0.001,0.001,4,4
secplot,1
LESIZE,ALL, , ,400
MSHKEY,0
SMRTSIZE,3,
LMESH,ALL
dk,1,all
D,all,uy
finish
ival=0
fval=360
inc=1
j=1
*DIM,FREQ,table,5,((fval-ival)/inc+1),,Modo, Frequncia
*DO,i,ival,fval,inc
*afun,deg
Ax=9.81*sin(i)
Ay=9.81*cos(i)
/solu
ANTYPE,static
pstres, on
DK,1,ALL,0,
ACEL,Ax,Ay
solve
finish
/solu
antype, modal
ACEL,Ax,Ay
modopt,lanb,5
mexpand,5
pstres,1
solve
finish
/OUT,
*GET,FREQ(1,j),MODE,1,FREQ
*GET,FREQ(2,j),MODE,2,FREQ
*GET,FREQ(3,j),MODE,3,FREQ
*GET,FREQ(4,j),MODE,4,FREQ
*GET,FREQ(5,j),MODE,5,FREQ
j=j+1
finish
*enddo
*status,freq

```

A.3. CÓDIGO DO ANSYS REFERENTE AO PESO PRÓPRIO + FORÇA CENTRÍFUGA

```

/PREP7
ET,1,BEAM188
MP,EX,1,2.1e11
MP,PRXY,1,0.3
MP,DENS,1,7800
k,1,0,0
k,2,1,0
l,1,2
SECTYPE,1, BEAM, RECT, BASE
SECOFFSET, CENT
SECDATA,0.001,0.001,4,4
secplot,1
LESIZE,ALL, , ,400
MSHKEY,0
SMRTSIZE,3,
LMESH,ALL
D,all,uy
finish
pi=3.141592
iival=0
ffval=100*2*pi/60
iinc=5*2*pi/60
ival=0
fval=360
inc=10
j=1
*DIM,FREQ,table,2,((fval-ival)/inc+1)*((ffval-iival)/iinc+1),,Modo,
Frequencia
*DO,i,iival,ffval,iinc
*DO,k,ival,fval,inc
*afun,deg
Ax=9.81*sin(k)
Ay=9.81*cos(k)
/solu
ANTYPE,static
pstres, on
DK,1,ALL,0,
ACEL,Ax,Ay
OMEGA,,,i
OUTPR,,1
/OUT,SCRATCH
solve
finish
/solu
antype, modal
ACEL,Ax,Ay
modopt,lanpcg,3
mxpand,3
lumpm,0
pstres,1
solve
finish
/OUT,
*GET,FREQ(1,j),MODE,1,FREQ
*GET,FREQ(2,j),MODE,2,FREQ
j=j+1
finish
*enddo
*enddo

```


APÊNDICE B – CÓDIGOS DO MATHEMATICA

B.1. CÓDIGO MATHEMATICA PARA FORÇA CENTRÍFUGA

```

ClearAll["Global`*"]
L=1;
lambda1=1.875104;
lambda2=4.694091;
lambda3=7.854757;
lambda4=10.995541;
lambda5=14.13716839;

beta1 =lambda1/L;
beta2 =lambda2/L;
beta3 =lambda3/L;
beta4 =lambda4/L;
beta5 =lambda5/L;
si1= (Sinh[beta1*L]-Sin[beta1*L]) / (Cos[beta1*L]+Cosh[beta1*L]);
si2 = (Sinh[beta2*L]-Sin[beta2*L]) / (Cos[beta2*L]+Cosh[beta2*L]);
si3 = (Sinh[beta3*L]-Sin[beta3*L]) / (Cos[beta3*L]+Cosh[beta3*L]);
si4 = (Sinh[beta4*L]-Sin[beta4*L]) / (Cos[beta4*L]+Cosh[beta4*L]);
si5 = (Sinh[beta5*L]-Sin[beta5*L]) / (Cos[beta5*L]+Cosh[beta5*L]);

wi1[x_]=Cosh[beta1*x]-Cos[beta1*x]-si1*(Sinh[beta1*x]-Sin[beta1*x])
dwi1[x_]= D[wi1[x],x]
wi2[x_]=Cosh[beta2*x]-Cos[beta2*x]-si2*(Sinh[beta2*x]-Sin[beta2*x])
dwi2[x_]= D[wi2[x],x]
wi3[x_]=Cosh[beta3*x]-Cos[beta3*x]-si3*(Sinh[beta3*x]-Sin[beta3*x])
dwi3[x_]= D[wi3[x],x]
wi4[x_]=Cosh[beta4*x]-Cos[beta4*x]-si4*(Sinh[beta4*x]-Sin[beta4*x])
dwi4[x_]= D[wi4[x],x]
wi5[x_]=Cosh[beta5*x]-Cos[beta5*x]-si5*(Sinh[beta5*x]-Sin[beta5*x])
dwi5[x_]= D[wi5[x],x]

fx[x_] :=L^2-x^2;
coef11= Integrate[fx[x]*dwi1[x]*dwi1[x],{x,0,L}]
coef12= Integrate[fx[x]*dwi1[x]*dwi2[x],{x,0,L}]
coef13= Integrate[fx[x]*dwi1[x]*dwi3[x],{x,0,L}]
coef14= Integrate[fx[x]*dwi1[x]*dwi4[x],{x,0,L}]
coef15= Integrate[fx[x]*dwi1[x]*dwi5[x],{x,0,L}]
coef22= Integrate[fx[x]*dwi2[x]*dwi2[x],{x,0,L}]
coef23= Integrate[fx[x]*dwi2[x]*dwi3[x],{x,0,L}]
coef24= Integrate[fx[x]*dwi2[x]*dwi4[x],{x,0,L}]
coef25= Integrate[fx[x]*dwi2[x]*dwi5[x],{x,0,L}]
coef33= Integrate[fx[x]*dwi3[x]*dwi3[x],{x,0,L}]
coef34= Integrate[fx[x]*dwi3[x]*dwi4[x],{x,0,L}]
coef35= Integrate[fx[x]*dwi3[x]*dwi5[x],{x,0,L}]
coef44= Integrate[fx[x]*dwi4[x]*dwi4[x],{x,0,L}]
coef45= Integrate[fx[x]*dwi4[x]*dwi5[x],{x,0,L}]
coef55= Integrate[fx[x]*dwi5[x]*dwi5[x],{x,0,L}]

```

B.2. CÓDIGO MATHEMATICA PARA PESO PRÓPRIO

```

ClearAll["Global`*"]
L=1;
lambda1=1.875104;
lambda2=4.694091;
lambda3=7.854757;
lambda4=10.995541;
lambda5=14.13716839;

beta1 =lambda1/L;
beta2 =lambda2/L;
beta3 =lambda3/L;
beta4 =lambda4/L;
beta5 =lambda5/L;
si1= (Sinh[beta1*L]-Sin[beta1*L]) / (Cos[beta1*L]+Cosh[beta1*L]);
si2 = (Sinh[beta2*L]-Sin[beta2*L]) / (Cos[beta2*L]+Cosh[beta2*L]);
si3 = (Sinh[beta3*L]-Sin[beta3*L]) / (Cos[beta3*L]+Cosh[beta3*L]);
si4 = (Sinh[beta4*L]-Sin[beta4*L]) / (Cos[beta4*L]+Cosh[beta4*L]);
si5 = (Sinh[beta5*L]-Sin[beta5*L]) / (Cos[beta5*L]+Cosh[beta5*L]);

wi1[x_]=Cosh[beta1*x]-Cos[beta1*x]-si1*(Sinh[beta1*x]-Sin[beta1*x])
dwi1[x_]= D[wi1[x],x]
wi2[x_]=Cosh[beta2*x]-Cos[beta2*x]-si2*(Sinh[beta2*x]-Sin[beta2*x])
dwi2[x_]= D[wi2[x],x]
wi3[x_]=Cosh[beta3*x]-Cos[beta3*x]-si3*(Sinh[beta3*x]-Sin[beta3*x])
dwi3[x_]= D[wi3[x],x]
wi4[x_]=Cosh[beta4*x]-Cos[beta4*x]-si4*(Sinh[beta4*x]-Sin[beta4*x])
dwi4[x_]= D[wi4[x],x]
wi5[x_]=Cosh[beta5*x]-Cos[beta5*x]-si5*(Sinh[beta5*x]-Sin[beta5*x])
dwi5[x_]= D[wi5[x],x]

fx[x_] := L - x;
coef11= Integrate[fx[x]*dwi1[x]*dwi1[x],{x,0,L}]
coef12= Integrate[fx[x]*dwi1[x]*dwi2[x],{x,0,L}]
coef13= Integrate[fx[x]*dwi1[x]*dwi3[x],{x,0,L}]
coef14= Integrate[fx[x]*dwi1[x]*dwi4[x],{x,0,L}]
coef15= Integrate[fx[x]*dwi1[x]*dwi5[x],{x,0,L}]
coef22= Integrate[fx[x]*dwi2[x]*dwi2[x],{x,0,L}]
coef23= Integrate[fx[x]*dwi2[x]*dwi3[x],{x,0,L}]
coef24= Integrate[fx[x]*dwi2[x]*dwi4[x],{x,0,L}]
coef25= Integrate[fx[x]*dwi2[x]*dwi5[x],{x,0,L}]
coef33= Integrate[fx[x]*dwi3[x]*dwi3[x],{x,0,L}]
coef34= Integrate[fx[x]*dwi3[x]*dwi4[x],{x,0,L}]
coef35= Integrate[fx[x]*dwi3[x]*dwi5[x],{x,0,L}]
coef44= Integrate[fx[x]*dwi4[x]*dwi4[x],{x,0,L}]
coef45= Integrate[fx[x]*dwi4[x]*dwi5[x],{x,0,L}]
coef55= Integrate[fx[x]*dwi5[x]*dwi5[x],{x,0,L}]

```

APÊNDICE C – CÓDIGOS DO MATLAB

C.1. CÓDIGO MATLAB PARA SOLUÇÃO DO MÉTODO DE GALERKIN PARA FORÇA CENTRÍFUGA

```

% Viga 1 - Ansys e Galerkin
arquivo=fopen('Vigalcentripeta.txt');
A=fscanf(arquivo,'%f',[4,inf]);
A=A(4,:);
A=A';
for i=1:length(A)/5
    f(i,1)=A(1+(i-1)*5);
    f(i,2)=A(2+(i-1)*5);
    f(i,3)=A(3+(i-1)*5);
    f(i,4)=A(4+(i-1)*5);
    f(i,5)=A(5+(i-1)*5);
end
Nmodos=5;
E = 210*10^9;
RHO = 7800;
g=9.81;
b=0.001;
h=0.001;
A = b*h;
I = b*h^3/12;
L=1;
k=1;
lambda(1) = 1.875104;
lambda(2) = 4.694091;
lambda(3) = 7.854757;
lambda(4) = 10.995541;
lambda(5) = 14.13716839;
K1=zeros(Nmodos);
for i=1:Nmodos
    K1(i,i)=E*I*L*(lambda(i)/L)^4;
end
M=zeros(Nmodos);
for i=1:Nmodos
    M(i,i)=RHO*A*L;
end
K2=[2.38667      -1.37171  -1.58476  -1.09283  -0.908151  ;...
    -1.37171     12.9564   0.338817  -5.8237   -3.77833  ;...
    -1.58476     0.338817  35.719   6.54854  -12.3088  ;...
    -1.09283     -5.8237   6.54854  69.6108  17.1306  ;...
    -0.908151   -3.77833  -12.3088  17.1306  119.102  ];
for ww=0:0.1:10.6
    K = K1(1:Nmodos,1:Nmodos) + (RHO*A*L*(ww^2)/2)*K2(1:Nmodos,1:Nmodos);
    [V,D]=eig(K,M)
    for i=1:size(D,1)
        omg(i) = sqrt(D(i,i));
    end
    fn(k,1:Nmodos) = omg/(2*pi);
    k=k+1;
end
ww=0:0.1:10.6;
plot(ww*60/(2*pi),fn(:,1),'r',ww*60/(2*pi),fn(:,2),'r',ww*60/(2*pi),...
    f(:,1),'*b',ww*60/(2*pi),f(:,2),'*b',ww*60/(2*pi),ww/(2*pi),'k', ...
    ww*60/(2*pi),2*ww/(2*pi),'k',ww*60/(2*pi),3/2*ww/(2*pi),'k', ...
    ww*60/(2*pi),3*ww/(2*pi),'k')

```

C.2. CÓDIGO MATLAB PARA SOLUÇÃO DO MÉTODO DE GALERKIN PARA PESO PRÓPRIO

```

% Viga 1 sem e com peso próprio - Galerkin
E = 210*10^9;
RHO = 7800;
g=9.81;
b=0.001;
h=0.001;
A = b*h;
I = b*h^3/12;
L=1;
k=1;
lambda(1) = 1.875104;
lambda(2) = 4.694091;
lambda(3) = 7.854757;
lambda(4) = 10.995541;
lambda(5) = 14.13716839;

K1=zeros(5);
for i=1:5
    K1(i,i)=E*I*L*(lambda(i)/L)^4;
end

MM=zeros(5);
for i=1:5
    MM(i,i)=RHO*A*L;
end

KP=[1.57088    -0.42232    -1.07208    -0.873138    -0.762326    ;...
    -0.42232    8.64714     1.89006     -3.64338     -3.06281    ;...
    -1.07208    1.89006     24.9521     8.33828     -7.14109    ;...
    -0.873138   -3.64338     8.33828     50.2091     19.0196     ;...
    -0.762326   -3.06281     -7.14109    19.0196     86.5423     ];

for l=1:1:5
    K = K1(1:l,1:l);
    KC = K1(1:l,1:l) - (RHO*A*g)*KP(1:l,1:l);
    KT = K1(1:l,1:l) + (RHO*A*g)*KP(1:l,1:l);
    [V,D]=eig(K,MM(1:l,1:l));
    [Vc,Dc]=eig(KC,MM(1:l,1:l));
    [Vt,Dt]=eig(KT,MM(1:l,1:l));

    for i=1:size(D,1)
        omg(i) = sqrt(D(i,i));
    end
    fn(k,1:l) = omg/(2*pi);

    for i=1:size(Dc,1)
        omgc(i) = sqrt(Dc(i,i));
    end
    fnc(k,1:l) = omgc/(2*pi);
    for i=1:size(Dt,1)
        omgt(i) = sqrt(Dt(i,i));
    end
    fnt(k,1:l) = omgt/(2*pi);
    k=k+1;
end
end

```

```

fn1=fn(1,1) '
fn2=fn(2,1:2) '
fn3=fn(3,1:3) '
fn4=fn(4,1:4) '
fn5=fn(5,1:5) '
fnc1=fnc(1,1) '
fnc2=fnc(2,1:2) '
fnc3=fnc(3,1:3) '
fnc4=fnc(4,1:4) '
fnc5=fnc(5,1:5) '
fnt1=fnt(1,1) '
fnt2=fnt(2,1:2) '
fnt3=fnt(3,1:3) '
fnt4=fnt(4,1:4) '
fnt5=fnt(5,1:5) '
%Variando com Theta
k=1;
for th=0:0.01:4*pi
    gx=g*sin(th);
    KTH = K1(1:5,1:5) - (RHO*A*gx) *KP(1:5,1:5);
    [V,D]=eig(KTH,MM(1:5,1:5));
    for i=1:size(D,1)
        omgth(i) = sqrt(D(i,i));
    end
    fnth(k,1:5) = omgth/(2*pi);
    k=k+1;
end
%ANSYS
arquivo=fopen('Vigal_compesoproprio360.txt');
A=fscanf(arquivo,'%f',[4,inf]);
A=A(4,:);
A=A';
for i=1:length(A)/5
    f(i,1)=A(1+(i-1)*5);
    f(i,2)=A(2+(i-1)*5);
    f(i,3)=A(3+(i-1)*5);
    f(i,4)=A(4+(i-1)*5);
    f(i,5)=A(5+(i-1)*5);
end
for i=1:1:46
    ff(i,1)=f(i*8-7,1);
end

tth=0:0.01:2*pi;
tthh=0:2*pi/45:2*pi;

plot(tth*360/(2*pi),fnth(1:length(tth),1)/fnth(1,1),tthh*360/(2*pi),...
ff(:,1)/ff(1,1),'*')
xlabel('\fontname{Arial}\fontsize{18}\theta')
ylabel('\fontname{Arial}\fontsize{18}\omega/\omega_n')

```

C.3. CÓDIGO MATLAB PARA ANÁLISE PRELIMINAR DA EQUAÇÃO DE MATHIEU

```

%Leitura dos resultados do Ansys
arquivo=fopen('ANSYS_RESULTADO_VIGAL.txt');
A=fscanf(arquivo,'%f',[4,inf]);
A=A(4,:);
A=A';
nf=3; %Número de modos calculados no ANSYS
f(:,1)= A(1:nf:length(A));
f(:,2)= A(2:nf:length(A));
f(:,3)= A(3:nf:length(A));
p=1;
q=37;
for k=1:1:length(f)/37 %theta = 0:10:360 total de 37 pontos para cada rotação
    f1(:,k)=f(p:q,1);
    f2(:,k)=f(p:q,2);
    f3(:,k)=f(p:q,3);
    p=p+37;
    q=q+37;
    maxAns1(1,k)=max(f1(:,k));
    maxAns2(1,k)=max(f2(:,k));
    maxAns3(1,k)=max(f3(:,k));
    minAns1(1,k)=min(f1(:,k));
    minAns2(1,k)=min(f2(:,k));
    minAns3(1,k)=min(f3(:,k));
end

Nmodos=5;
E = 210*10^9;
RHO = 7800;
g=9.81;
b=0.001;
h=0.001;
A = b*h;
I = b*h^3/12;
L=1;
k=1;
lambda(1) = 1.875104;
lambda(2) = 4.694091;
lambda(3) = 7.854757;
lambda(4) = 10.995541;
lambda(5) = 14.13716839;

K1=zeros(Nmodos);
for i=1:Nmodos
    K1(i,i)=E*I*L*(lambda(i)/L)^4;
end

M=zeros(Nmodos);
for i=1:Nmodos
    M(i,i)=RHO*A*L;
end

Kc=[2.38667      -1.37171  -1.58476  -1.09283  -0.908151  ;...
    -1.37171     12.9564   0.338817  -5.8237   -3.77833  ;...
    -1.58476     0.338817  35.719   6.54854   -12.3088  ;...
    -1.09283     -5.8237   6.54854  69.6108  17.1306  ;...
    -0.908151    -3.77833  -12.3088  17.1306  119.102  ];

```

```

Kp=[1.57088      -0.42232   -1.07208   -0.873138   -0.762326 ;...
    -0.42232      8.64714    1.89006    -3.64338    -3.06281  ;...
    -1.07208      1.89006    24.9521    8.33828    -7.14108  ;...
    -0.873138    -3.64338    8.33828    50.2091    19.0172   ;...
    -0.762326   -3.06281   -7.14108   19.0172    86.5423   ];

for w=0*(2*pi)/60:1*(2*pi)/60:100*(2*pi)/60
    for th=0:2*pi/100:2*pi
        P=RHO*A*g*sin(th);
        KP=P*Kp;
        K = K1(1:Nmodos,1:Nmodos)+...
            (RHO*A*L*(w^2)/2)*Kc(1:Nmodos,1:Nmodos)-KP(1:Nmodos,1:Nmodos);
        [V,D]=eig(K,M(1:Nmodos,1:Nmodos));
        for i=1:size(D,1)
            omg(i) = sqrt(D(i,i));
        end
        fg(k,1:Nmodos) = omg/(2*pi);
        k=k+1;
    end
end

p=1;
q=101;
for k=1:1:length(fg)/101
    fg1(:,k)=fg(p:q,1);
    fg2(:,k)=fg(p:q,2);
    fg3(:,k)=fg(p:q,3);
    p=p+101;
    q=q+101;
    maxGal1(1,k)=max(fg1(:,k));
    maxGal2(1,k)=max(fg2(:,k));
    maxGal3(1,k)=max(fg3(:,k));
    minGal1(1,k)=min(fg1(:,k));
    minGal2(1,k)=min(fg2(:,k));
    minGal3(1,k)=min(fg3(:,k));
end

theta=0:10:360;
th=0:2*pi/100:2*pi;
figure(),plot(th*360/(2*pi),fg1(:,1),'-k',th*360/(2*pi),fg1(:,51), ...
    '-k',th*360/(2*pi),fg1(:,101),'-k',theta,f1(:,1),'*k',theta,f1(:,11), ...
    '*k',theta,f1(:,21),'*k')
xlabel('\Theta')
ylabel('Frequência [Hz]')

w=0:5:100;
ww=0:1:100;
figure(),plot(ww,maxGal1,'-k',ww,minGal1,'-k',ww,maxGal2,'-k', ...
    ww,minGal2,'-k',ww,maxGal3,'-k',ww,minGal3,'k',w,maxAns1,'*k',...
    w,minAns1,'*k',w,maxAns2,'*k',w,minAns2,'*k',w,maxAns3,'*k',w, ...
    minAns3,'*k')
figure(),plot(ww,ww/60,'--k',ww,2*ww/60,'--k',ww,3/2*ww/60, ...
    '--k',ww,3*ww/60,'--k')

```

C.4. CÓDIGO MATLAB PARA ANÁLISE DA EQUAÇÃO DE MATHIEU

```

%Gráfico de Campbell e Estabilidade de uma viga

clear all
close all
clc

%Dados da viga
E = 210*10^9; %modulo de elasticidade
RHO = 7800; %densidade
g=9.81; %aceleração da gravidade
b=0.001; %base
h=0.001; %altura
A = b*h; %área da seção
I = b*h^3/12; %momento de inércia da seção
L=1; %comprimento
xi=0.001; %amortecimento
Nmodos = 5 ;
lambda(1) = 1.875104;
lambda(2) = 4.694091;
lambda(3) = 7.854757;
lambda(4) = 10.995541;
lambda(5) = 14.13716839;
M=zeros(Nmodos);
for i=1:Nmodos
    M(i,i)=RHO*A*L;
end
K1= zeros(Nmodos);
for i=1:Nmodos
    K1(i,i)=E*I*L*(lambda(i)/L)^4;
end

kp=[ 1.57088 -0.42232 -1.07208 -0.873138 -0.762326 ;...
    -0.42232 8.64714 1.89006 -3.64338 -3.06281 ;...
    -1.07208 1.89006 24.9521 8.33828 -7.14108 ;...
    -0.873138 -3.64338 8.33828 50.2091 19.0172 ;...
    -0.762326 -3.06281 -7.14108 19.0172 86.5423 ];

kc=[2.38667 -1.37171 -1.58476 -1.09283 -0.908151 ;...
    -1.37171 12.9564 0.338817 -5.8237 -3.77833 ;...
    -1.58476 0.338817 35.719 6.54854 -12.3088 ;...
    -1.09283 -5.8237 6.54854 69.6108 17.1306 ;...
    -0.908151 -3.77833 -12.3088 17.1306 119.102 ];
K2=RHO*A*g*kp(1:Nmodos,1:Nmodos);
K3=RHO*A*L/2*kc(1:Nmodos,1:Nmodos);
C=zeros(Nmodos);
for i=1:Nmodos
    C(i,i)=2*xi*sqrt(K1(i,i)/M(i,i));
end
phiL = zeros(Nmodos,1);
for i = 1:Nmodos
    phiL(i) = ClampedFree( lambda(i), L, L );
end

%Cálculo de estabilidade
w0=47.8*(2*pi)/60; %Velocidade de rotação inicial
wf=48.8*(2*pi)/60; %Velocidade de rotação final
passo=0.1*(2*pi)/60;

```



```

i=1;
nper=250; %Número de períodos
np=150;
ndper=100; %Número de divisões do período
perfase=15;
npamp=15;
Yamp=[];
Y2amp=[];

for omega=w0:passo:wf
    omega*60/(2*pi)
    Ts=2*pi/omega;
    tspan=0:Ts/ndper:nper;
    tspan1=0:Ts/ndper:Ts*np;

    %Condições iniciais
    yini(1,1)=0.005;
    yini(1,2:2*Nmodos)=0;

    %Cálculo da EDO
    [tt,yy]=ode45(@(t,y) MV1(t,y,Nmodos,M,K1,K2,K3,C,omega), tspan, yini);

    %Novas condições iniciais
    nyini=[yy(length(yy),:)]; %Novas condições iniciais

    [ttp,yyt]=ode45(@(t,y) MV1(t,y,Nmodos,M,K1,K2,K3,C,omega), tspan1, nyini);
    yd=yyt(:,1:Nmodos);
    yv=yyt(:,(Nmodos+1):2*Nmodos);
    w = zeros(size(yd,1),1) ;
    for ii = 1:Nmodos
        w = w + phiL(ii)*yd(:,ii) ;
    end
    wv = zeros(size(yv,1),1) ;
    for ii = 1:Nmodos
        wv = wv + phiL(ii)*yv(:,ii) ;
    end
    Y2amp = [Y2amp [max(wv(1:ttp(length(ttp)))/(Ts*npamp)*ndper,1)]];
    Yamp = [Yamp [max(w(1:ttp(length(ttp)))/(Ts*npamp)*ndper,1)]];

    %Transformada de Hilbert
    yyhil=hilbert(w) ;
    hill=abs(yyhil);
    figure
    subplot(1,2,1);
    plot(ttp,w,'-k',ttp,hill,'--k');
    subplot(1,2,2);
    plot(w(1:ttp(length(ttp)))/(Ts* perfase)*ndper,1,...
wv(1:ttp(length(ttp)))/(Ts*perfase)*ndper,1),'-k'); %Diagrama de Fase
    [xData, yData] = prepareCurveData( ttp, hill );
    ft = fittype( 'exp1' );
    opts = fitoptions( 'Method', 'NonlinearLeastSquares' );
    opts.Display = 'Off';
    opts.StartPoint = [0.390363477530038 -0.00545412867165853];
    [fitresult, gof] = fit( xData, yData, ft, opts );
    coeficiente(i,1:2)=coeffvalues(fitresult)
    i=i+1;
end
%Estabilidade
k=1;
j=1;
for i=1:length(coeficiente)

```

```

    if coeficiente(i,2) < 0
        est(1,k)=i;
        k=k+1;
    else
        inst(1,j)=i;
        j=j+1;
    end
end
q1=ones(1,length(est));
q2=ones(1,length(inst));
est1=(est)*passo/2;
inst1=(inst)*passo/2;

%Grafico de Campbell Ansys/Galerkin
arquivo=fopen('Viga1_centrifuga.txt'); %Resultados Ansys
B=fscanf(arquivo,'%f',[4,inf]);
B=B(4,:);
B=B';
for i=1:length(B)/5
    f(i,1)=B(1+(i-1)*5);
    f(i,2)=B(2+(i-1)*5);
    f(i,3)=B(3+(i-1)*5);
    f(i,4)=B(4+(i-1)*5);
    f(i,5)=B(5+(i-1)*5);
end
N=5;
MM=zeros(N);
for i= 1:N
    MM(i,i)=RHO*A*L;
end
KK1= zeros(N);
for i=1:N
    KK1(i,i)=E*I*L*(lambda(i)/L)^4;
end
k=1;
for w=0:0.1:10.6
    KK = KK1(1:N,1:N) + (RHO*A*(w^2)/2)*kc(1:N,1:N);
    [V,D]=eig(KK,MM);
    for i=1:size(D,1)
        omg(i) = sqrt(D(i,i));
    end
    fn(k,1:N) = omg/(2*pi);
    k=k+1;
end
ww=0:0.1:10.6;
figure
subplot(2,1,1);
plot((est1)*60/pi,q1,'*', (inst1)*60/pi,q2,'+')
subplot(2,1,2);
plot(ww*60/(2*pi),fn(:,1),'r',ww*60/(2*pi),fn(:,2),ww*60/(2*pi),f(:,1),...
'*b',ww*60/(2*pi),f(:,2),'*b',ww*60/(2*pi),ww/(2*pi),'k',ww*60/(2*pi),...
2*ww/(2*pi),'k',ww*60/(2*pi),3/2*ww/(2*pi),'k',ww*60/(2*pi),3*ww/(2*pi),'k')

%Gráfico de Amplitude
figure(), plot(w0*60/(2*pi):passo*60/(2*pi):wf*60/(2*pi),Yamp, '.')
figure(), plot(w0*60/(2*pi):passo*60/(2*pi):wf*60/(2*pi),Y2amp, '.')

```

C.5. CÓDIGO MATLAB PARA MÉTODO DE PERTUBAÇÃO

```

%Dados iniciais
E = 210*10^9;
RHO = 7800;
g=9.81;
b=0.1;
h=0.025;
A = b*h;
I = b*h^3/12;
L=10;
xi=0.025;
Nmodos = 5;
lambda(1) = 1.875104;
lambda(2) = 4.694091;
lambda(3) = 7.854757;
lambda(4) = 10.995541;
lambda(5) = 14.13716839;
M=zeros(Nmodos);
for i=1:Nmodos
    M(i,i)=RHO*A*L;
end
K1= zeros(Nmodos);
for i=1:Nmodos
    K1(i,i)=E*I*L*(lambda(i)/L)^4;
end
kp=[ 1.57088    -0.42232  -1.07208    -0.873138   -0.762326   ;...
    -0.42232    8.64714    1.89006    -3.64338   -3.06281   ;...
    -1.07208    1.89006    24.9521    8.33828    -7.14108   ;...
    -0.873138   -3.64338    8.33828    50.2091    19.0172    ;...
    -0.762326   -3.06281    -7.14108    19.0172    86.5423    ];
kc=[2.38667    -1.37171   -1.58476   -1.09283   -0.908151 ;...
    -1.37171    12.9564    0.338817   -5.8237    -3.77833  ;...
    -1.58476    0.338817   35.719     6.54854   -12.3088  ;...
    -1.09283    -5.8237    6.54854    69.6108   17.1306   ;...
    -0.908151   -3.77833   -12.3088   17.1306   119.102   ];
K2=RHO*A*g*kp(1:Nmodos,1:Nmodos);
K3=RHO*A*L/2*kc(1:Nmodos,1:Nmodos);
C=zeros(Nmodos);
for i=1:Nmodos
    C(i,i)=2*xi*sqrt(K1(i,i)/M(i,i));
end
phiL = zeros(Nmodos,1);
for i = 1:Nmodos
    phiL(i) = ClampedFree( lambda(i), L, L );
end
w0=7.1*2*pi/60;
wf=7.1*2*pi/60;
passo=0.1*2*pi/60;
i=1;
nper=50;
ndper=100;
np=50;

for omega=w0:passo:wf
    omega*60/(2*pi)
    Ts=2*pi/omega;
    tspan=0:Ts:nper*Ts;
    tspan1=0:Ts/ndper:np*Ts;

```

```

yini(1,1)=0.5;
yini(1,2:2*Nmodos)=0;
%Cálculo da EDO
[tt,yy]= ode45(@ (t,y) MV1(t,y,Nmodos,M,K1,K2,K3,C,omega), tspan, yini);

nyini(1,:)=yy(length(yy),:); %Novas condições iniciais

[ttn,yyt]= ode45(@ (t,y) MV1(t,y,Nmodos,M,K1,K2,K3,C,omega), tspan1, nyini);

%Solução MV1
[tt1,yy1]= ode45(@ (t,y) Pert1(t,y,Nmodos,M,K1,K3,C,omega), tspan1, nyini);

%Solução linear
yini2(1,1)=0.00;
yini2(1,2:2*Nmodos)=0;

[tt2,yy2]= ode45(@ (t,y) Pert2(t,y,yy1(:,1),tt1,Nmodos,M,K1,K2,K3,C,...
omega), tspan1,yini2);
yini3(1,1)=0.00;
yini3(1,2:2*Nmodos)=0;

[tt3,yy3]=ode45(@ (t,y) Pert3(t,y,yy2(:,1),tt2,Nmodos,M,K1,K2,K3,C,...
omega), tspan1,yini3);

yp = yy2(:,1)*K2+yy3(:,1)*K2^2;
yd=yy1(:,1)+yp;
ypv = yy2(:,2)*K2+yy3(:,2)*K2^2;
yv=yy1(:,2)+ypv;

figure()
subplot(2,1,1)      ,plot(tt1,yd,ttn,yyt(:,1));
xlabel('Tempo')
ylabel('Deslocamento')
title(['Rotação:', num2str(omega*60/(2*pi))])
subplot(2,1,2), plot(tt1,yp)
xlabel('Tempo')
ylabel('Perturbação')
end

```

C.6. CÓDIGO DAS FUNÇÕES DO MATLAB

```

function PHIr = ClampedFree( lambda, L, x )
%ClampedFree forma modal de viga engastada-livre
sig = (sinh(lambda*L)+sin(lambda*L))/(cosh(lambda*L)+cos(lambda*L));
PHIr = sin(lambda*x)-sinh(lambda*x) ...
-sig*(cos(lambda*x)-cosh(lambda*x));
end

```

```

function ydot = MV1(t,y,Nmodos,M,K1,K2,K3,C,omega)
%MCK
A=[zeros(Nmodos)          eye(Nmodos);...
(-1)*M\((K1+K3*omega^2)-K2*sin(omega*t))  (-1)*C];
ydot = A*y;
end

```

```

function ydot = Pert1(t,y,Nmodos,M,K1,K3,C,omega)
%MCK
A=[zeros(Nmodos)           eye(Nmodos);...
  (-1)*M\((K1+K3*omega^2) (-1)*C];
ydot = A*y;
end

```

```

function ydot = Pert2(t,y,yy1,tt1,Nmodos,M,K1,K2,K3,C,omega)
%MCK
f = interp1(tt1,yy1,t,'spline');
A=[zeros(Nmodos)           eye(Nmodos);...
  (-1)*M\((K1+K3*omega^2) (-1)*C];
B = [0 f*K2*sin(omega*t)]';
ydot = A*y+B;
end

```

```

function ydot = Pert3(t,y,yy2,tt2,Nmodos,M,K1,K2,K3,C,omega)
%MCK
f = interp1(tt2,yy2,t,'spline');]
A=[zeros(Nmodos)           eye(Nmodos);...
  (-1)*M\((K1+K3*omega^2) (-1)*C];
B = [0 f*K2*sin(omega*t)]';
ydot = A*y+B;
end

```