Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

# Sobre o Ensino de Geometria para Deficientes Visuais

por

Douglas Carlos Nunes da Silva

Brasília - 2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586s

Silva, Douglas Carlos Nunes da
Sobre o Ensino de Geometria para Deficientes Visuais / Douglas Carlos Nunes da Silva; orientador Adail de Castro Cavalheiro. -- Brasília, 2015.
95 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2015.

1. Ensino de Geometria para deficientes visuais.. I. Cavalheiro, Adail de Castro, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

# Sobre o Ensino de Geometria para Deficientes Visuais

por

**Douglas Carlos Nunes da Silva***

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de*

**MESTRE**

Brasília, 07 de julho de 2015.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Adail de Castro Cavalheiro - MAT/UnB (Orientador)

---

Prof. Dr. Edson Albes da Costa Júnior - FGA/UnB

---

Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araújo (MAT/UNB)

*O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação.

# Agradecimentos

Agradeço aos meus familiares, especialmente minha mãe que sempre me apoiou em toda a minha vida, durante toda a minha caminhada acadêmica e neste curso de mestrado. Ao Bruno, por sua paciência e ajuda em vários momentos. Aos meus amigos pela sua compreensão e suporte.

Ao Doutor Adail de Castro Cavalheiro, meu orientador, agradeço pelas idéias, ajudas e dedicação. Sem ele este trabalho não existiria.

Aos professores do mestrado, agradeço por cada uma de nossas aulas. Obrigado por compartilhar comigo seus conhecimentos. Vocês são verdadeiros educadores. Obrigado especialmente ao prof. Lineu, que ministrou a maioria das nossas matérias.

Obrigado a todos os meus colegas de mestrado que me acompanharam nesses dois anos. Sem as incontáveis horas de estudo com Ana Paula e Maryna, eu não teria conseguido. Também agradeço a elas por ouvirem minhas reclamações e por me darem idéias salvadoras em alguns momentos.

Agradeço ainda aos professores Lucinha, Heldo e Alcione, das escolas da rede pública em que pude fazer as aplicações das atividades. Sem as suas dicas e orientações este trabalho não seria metade do que é. Obrigado a todos os alunos que se propuseram a participar das atividades. Aprendi muito com todos vocês que não são somente alunos, mas exemplos de superação e persistência: verdadeiros exemplos de vida.

Agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro.

# Resumo

Este trabalho contém uma breve descrição sobre como a educação especial funciona em algumas escolas públicas do Distrito Federal, no caso de deficiência visual. Apresetam-se dificuldades no aprendizado de Geometria e sugerem-se sequências e transposições didáticas, com materiais adaptados, como ferramentas úteis. As atividades foram aplicadas em escolas públicas de Brasília, e descrevem-se detalhes, resultados e opiniões dos partcipantes.

**Palavras-chaves:** Geometria Plana. Geometria Espacial. Deficientes Visuais. Material Concreto para o Ensino de Geometria.

# Abstract

This work contains a brief description of how the special education works in some public schools in Distrito Federal, in the case of visual impairment. It is shown here the difficulties in learning Geometry and didatic sequences and transpositions, with adapted material, are suggested as useful tools. The activities were applied in public schools of Brasilia and here are described details, results and the opinions of the participants.

**Keywords:** Plane Geometry. Space Geometry. Visual Impaired. Concrete Material for teaching Geometry.

# Sumário

# Introdução

A educação é uma ferramenta de transformação social e promove a igualdade entre as pessoas. À medida que aprende, cada indivíduo ganha novas perspectivas e ferramentas para entender o mundo em que vive e seu funcionamento, bem como se torna capaz de entender seu meio social, suas origens e os mecanismos que regem a sociedade a sua volta. Além disso, o indivíduo ganha também a capacidade de criticar conceitos existentes e aperfeiçoá-los, podendo até mesmo criar novos.

Como consequência, cada indivíduo se torna capaz de interagir de maneira mais adequada e eficiente na sociedade em que está inserido, recebendo em troca reconhecimento e mais aceitação, o que o leva a um novo mundo de possibilidades, inclusive de assenção social e financeira.

Assim, fica claro que a educação pode (e deve) ser utilizada para inserção e integração de pessoas com necessidades especiais em nossa sociedade, visto que um de seus papéis é promover a igualdade entre os indivíduos. Contudo, sabemos que para promover essa tão desejada igualdade, é necessário tratar diferente os diferentes, na medida de sua diferença, para que se alcance uma equalização das capacidades e habilidades em comparação a outros integrantes da sociedade tidos como "normais".

No contexto da educação, da sala de aula, para que se promova a igualdade de oportunidades, de acesso e de tratamento, não faz sentido tratar os educandos que tem necessidades especiais como os outros que não possuem. Logo, é necessária a criação de leis e práticas pedagógicas que ofereçam a esse primeiro grupo o direito de receber uma educação de qualidade, que observe suas especificidades e capacidades, para promover sua equiparação com os outros educandos e explorar ao máximo suas potencialidades.

Sob essa perspectiva e observando o caso dos alunos deficientes visuais, necessitam-se transformações nos métodos didáticos para que esse grupo tenha a oportunidade de desenvolver-se. Elas devem observar suas limitações e procurar maneiras de transpor barreiras, que são encontradas em vários momentos do desenvolvimento escolar e em várias disciplinas.

No caso específico do ensino de Matemática, muitas dificuldades surgem. Tanto no aprendizado de Álgebra como no de Geometria, os alunos deficientes visuais enfrentam obstáculos que muitas vezes as pessoas que podem ver perfeitamente nem mesmo imaginam. Por exemplo, imagine-se tentando resolver uma equação complicada utilizando apenas cálculo mental, ou ainda, tentando calcular o perímetro de uma figura poligonal de vários lados da mesma maneira, sem poder vê-la e sem um material concreto ou material tátil; certamente seria muito fácil se perder nos cálculos. E esses são alguns dos "mais simples" desafios que esses alunos especiais têm que enfrentar.

Por outro lado, os próprios professores de Matemática, em sua grande maioria, se sentem despreparados para lidar com esses alunos, principalmente em uma sala de aula com outros 30 ou 40 estudantes, pois muitas vezes a redução de turma (diminuição da quantidade de alunos em salas que possuem um ou mais alunos portadores de necessidades especiais e que é prevista nos Subsídeos para Organização e Funcionamento de Serviços de Educação Especial) não é feita. Em geral, nos cursos de licenciatura, os professores não são preparados para lidar com esses alunos e muitas vezes o apoio que recebem nas escolas é insuficiente ou simplesmente não se interessam em saber mais sobre a área. Esses problemas marginalizam os alunos deficientes visuais, forçando-os a ter a maior parte de seus momentos significativos de aprendizagem fora da sala de aula em que estão inseridos, o que geralmente acaba acontecendo na sala de recursos, quando disponível nas escolas, ou com algum tipo de professor particular.

Mais especificamente, a Geometria gera certos bloqueios relatados por alunos deficientes visuais - DVs, professores regulares e de salas de recursos. Por se tratar de uma área que envolve formas, sólidos e suas propriedades em relação ao espaço, os conceitos concretos, práticos e abstratos, extremamente simples e totalmente inteligíveis para os videntes, podem ser verdadeiros desafios para alunos DVs, por não possuírem certas noções intuitivas que vêm da visão, principalmente para os alunos que nunca enxergaram.

Esse problema é um dos principais motivadores deste trabalho, no qual são sugeridas algumas adaptações de materiais concretos e sequências didáticas para serem trabalhadas com alunos DVs e também com alunos videntes, visando sempre facilitar a aprendizagem de ambos os grupos e possivelmente a interação entre eles.

Primeiramente, teremos uma breve e simplificada noção do funcionamento da Educação Especial de deficientes visuais no Brasil. Em cada capítulo deste texto, é(são) apresentado(s) algum(ns) tema(s) da Geometria Plana e/ou Espacial, seguido(s) de uma breve justificativa da escolha para ser(em) trabalhado(s) com alunos DVs. Propomos, pelas competências e habilidades da matriz curricular do ENEM (Exame Nacional do Ensino

Médio), cadernos de atividades que são montados para serem utilizados e aperfeiçoads por outros profissionais. Esses cadernos são apresentados como uma sequência didática, onde são citados os materiais utilizados e sugestões simples de uso. Em seguida, são apresentados os relatos de aplicações desses cadernos para alunos DVs e portadores de baixa visão em salas de recurso de Brasília. Ao final de cada capítulo, há algumas opiniões e sugestões dos próprios alunos sobre os materiais e as atividades, além de breves considerações finais sobre as experiências obtidas.

Vale lembrar que, atualmente, o autor é professor de Matemática regular, sem especializações para trabalhar com alunos DVs. Logo, este trabalho retrata principalmente o esforço de um aluno e professor de matemática comum em tentar adaptar conteúdos para APNEE (alunos portadores de necessidades educacionais especiais), suas experiências, suas falhas e sucessos, além das orientações recebidas durante a jornada.

# Capítulo 1

# Preliminares

## 1.1 A Educação Especial em documentos internacionais

A garantia de educação de qualidade para os seres humanos, em todo o planeta, é (ou deveria ser) uma preocupação de todos os países e famílias no mundo. Em declarações e convenções mundias, através da discussão desse assunto, criaram-se deveres dos Estados e das famílias para a concretização da igualdade e da realização de uma educação especial de qualidade para as crianças e jovens numa escala global.

É claro que, apesar de muitas vezes seus artigos ou tópicos serem apresentados como deveres, esses documentos constituem, na realidade, objetivos a serem cumpridos, e fornecem, em linhas gerais, parâmetros para Educação Especial, que por sua vez se utiliza deles como fundamento para construção de seus pilares, sob uma perspectiva filosófica.

Abaixo são citados os principais documentos e suas principais contribuições ideológicas para fundamentação da educação especial.

1. ***Declaração Universal dos Direitos do Homem***, que garante a educação para todos, considerando que o ser humano, por si só, é um ser precioso, independente de raça, de origens ou condições sociais, religião, sexo, condições físicas ou emocionais, cultura ou nível mental que possua. Sob o olhar dessa Declaração, todas as pessoas têm reais chances (ainda que pequenas) de alcançar o máximo de seu potencial, e essas chances devem ser valorizadas e exploradas. Assim, qualquer um poderá reivindicar as condições necessárias para seu desenvolvimento e deverá ser tratado

como igual perante toda a sociedade, que, por sua vez, também deverá oferecer oportunidades para que essas pessoas alcancem esses objetivos.

2. ***Convenção sobre os Direitos da Criança***, que explicita a responsabilidade das famílias e do Estado para com a realização da educação de qualidade para as crianças portadoras de deficiências físicas. Nesse documento, é garantido à criança portadora de necessidades especiais o direito de receber educação e tratamento especial dos profissionais da educação, do Estado e da família, bem como lazer e oportunidades para seu desenvolvimento em todas as dimensões.

3. ***Declaração de Salamanca***, que garante às crianças o direito fundamental à educação, mas seu ponto mais importante na Educação Especial é a garantia da inclusão de educandos portadores de necessidades especiais em escolas regulares, obtendo suporte de uma pedagogia centrada na criança. Essa declaração ainda destaca que:

   > "Escolas regulares que possuam tal orientação inclusiva constituem os meios mais eficazes de combater atitudes discriminatórias, criando-se comunidades acolhedoras, construindo uma sociedade inclusiva e alcançando educação para todos; além disso, tais escolas provêem uma educação efetiva à maioria das crianças e aprimoram a eficiência e, em última instância, o custo da eficácia de todo o sistema educacional."

## 1.2 A Educação Especial no Brasil e os Princípios Básicos da Educação Especial

A educação é um direito de todos os brasileiros, garantido na Constituição da República Federativa do Brasil de 1988, especialmente no artigo 5º, caput, e 208º. Nossa Constituição responsabiliza o Estado e a família pela educação de qualidade de crianças e jovens, bem como sua permanência na escola. Esse direito promove, através de si mesmo, a construção da igualdade entre as pessoas, portadoras de necessidades educativas especiais ou não, em um ciclo construtivo de aceitação e percepção do outro como ser humano dotado dos mesmos direitos que si próprio.

No contexto brasileiro, a Educação Especial e as ações pedagógicas dessa área se fundamentam na *Política Nacional de Educação Especial*, da qual se destacam os *Princípios Básicos da Educação Especial*, que orientam a prática pedagógica como uma ação democrática e libertadora, não doutrinária, visando o desenvolvimento das pessoas portadoras de necessidades especiais e sua formação para uma vida produtiva em sociedade, tornando-o capaz de equilibrar suas decisões entre seus interesses próprios e os interesses e regras da sociedade em que está inserido.

A Educação Especial deverá ser aplicada a partir do momento em que é constatado atraso no desenvolvimento do educando. Além de seguir os princípios básicos de igualdade aplicados à Educação Regular, a Educação Especial se fundamenta nos seguintes princípios:

1. *Princípio da Normalização*, que busca a "normalização" do indivíduo no contexto social. Divide-se basicamente em dois aspectos: **(1) meios**, que significa oferecer a esses indivíduos oportunidades e condições, tanto educacionais como profissionais para alcançar os **(2) resultados**, que significa a integração e a aceitação do modo de vida dessas pessoas;

2. *Princípio da Integração*, que visa inserir o indivíduo portador de deficiência no meio social, o que só é possível com aceitação recíproca, do contrário, se trataria apenas de uma inserção física. Este princípio busca a igualdade dos direitos e deveres, a participação ativa do indivíduo na sociedade e o respeito mútuo;

3. *Princípio da Individualização*, que

   > "pressupõe a adequação do atendimento educacional a cada portador de necessidades educativas especiais, respeitando seu ritmo e características pessoais." (PNEE, 1994);

4. *Princípio Sociológico da Interdependência*, que enuncia que deve haver cooperação entre a educação e outros órgãos governamentais, como saúde, ação social e outros, visando o pleno desenvolvimento do educando;

5. *Princípio Epistemológico da Construção do Real*, que

> "refere-se à conciliação entre o que é necessário fazer para atender às aspirações e interesses dos portadores de necessidades especiais e à aplicação dos meios disponíveis" (PNEE, 1994);

6. *Princípio da Efetividade dos Modelos de Atendimento Educacional*, que visa a qualidade das ações educativas, utilizando-se de três elementos, que são: infra-estrutura, hierarquia do poder e consenso político em torno das funções sociais e educativas;

7. *Princípio do Ajuste Econômico com a Dimensão Humana*, que

> "refere-se ao valor que se deve atribuir à dignidade dos portadores de necessidades especiais como seres integrais. Nesse sentido, as relações custo/benefício na Educação Especial não devem prevalecer sobre a dimensão do homem portador de necessidades especiais que faz jus a todos os direitos como cidadão" (PNEE, 1994);

8. *Princípio da Legitimidade*, que

> "visa a participação das pessoas portadoras de deficiências, de condutas típicas e de altas habilidades, ou de seus representantes legais, na elaboração e formulação de políticas, planos e programas" (PNEE, 1994).

Esses fundamentos e princípios embasam todo o *Planejamento Nacional da Educação Especial*, ou PNEE.

Com essas bases, a Educação Especial no sistema educacional brasileiro adota com mais frequência a inserção dos educandos portadores de necessidades especiais nas classes comuns do Ensino Regular, com ou sem professores especializados, onde os alunos obtêm apoio pedagógico nas salas de recurso.

Entretanto, essa prática inclusiva muitas vezes gera problemas no sistema, pois na maior parte dessas ocorrências, os professores não se vêem capacitados para lidar com alunos com necessidades especiais. Assim, é gerado o efeito contrário do desejado: o aluno portador de necessidades especiais acaba por se tornar uma mera "estátua" na sala de aula, pois não ocorre a devida interação com os colegas, causada primeiramente pelo professor que, ao se ver confrontado pela realidade do aluno e pela sua falta de preparação, não se sente capaz de ensiná-lo adequadamente e simplesmente ignora sua existência, contrariando o *Princípio da Integração*. Essa postura acaba criando um ciclo negativo nas salas de aula, onde muitos professores pensam: "Já que não sou capaz de ensiná-lo, vou deixá-lo quieto ali, e no final do bimestre dou a nota que seja suficiente para que ele seja aprovado".

Os educadores, por sua vez, ao utilizar essas ideias, se justificam no fato de que o aluno está ali para ter uma interação social e não necessariamente com o conteúdo. Obviamente, uma suposta interação social não é o único objetivo. Muitas vezes, ela nem mesmo ocorre, quer seja pela deficiência do aluno, pela exclusão causada pelos colegas, pelas ações pedagógicas ou pela falta delas. Além disso, apenas a interação social não promove a igualdade oferecida e buscada pela educação em sua forma mais plena, ou seja, interação com o outro e aprendizagem de conteúdos.

Esses fatos revelam uma falha muito presente da Educação Especial do Distrito Federal, visto que muitos alunos inseridos na modalidade inclusiva não têm atendimento adequado em salas de recurso. Esse espaço diferenciado são salas de aula especiais para aprendizagem de *alunos portadores de necessidades educacionais especiais* (APNEE), que contam com professores capacitados para atender de maneira mais adequada esses educandos.

O principal objetivo desta pesquisa é fornecer uma fonte de ajuda ou de inspiração para professores que se vêem incapacitados para trabalhar com um pequeno grupo de APNEE, os deficientes visuais, bem como possivelmente auxiliar nas práticas das salas de recurso de escolas públicas ou privadas.

## 1.3 Os Portadores de Deficiência Visual

### 1.3.1 Caracterização

Afim de nortear o atendimento aos educandos portadores de deficiência visual, é de suma importância a caracterização e especificação de sua deficiência, visando a possibilidade de traçar estratégias e ações pedagógicas que melhor se encaixem nas potencialidades e dificuldades de cada aluno, como diz o princípio da individualidade.

Na área da deficiência visual, existem dois grandes grupos, que a seguir são caracterizados nos Subsídios para Organização e Funcionamento de Serviços de Educação Especial

- Área de Deficiência Visual (1995), sob os enfoques médico-oftalmológico e pedagógico.

- ***Cegueira***: Redução da acuidade visual central desde cegueira total (nenhuma percepção de luz) até acuidade visual menor que 20/400P (ou seja, 0,05) em um ou ambos os olhos, ou redução do campo visual ao limite inferior a 10°.
- ***Visão subnormal (visão reduzida)***: Acuidade visual central maior que 20/400 até 20/70 (ou seja 0,3) (WHO) (OMS) International Classification of Impairments, Disabilities and Handicaps. Geneva 1980.

A identificação de alunos portadores dessas deficiências é mais fácil nos portadores de cegueira, pois esses, desde muito cedo demonstram as características. Já os alunos com visão subnormal, também chamados de alunos com *baixa visão*, têm um diagnóstico, em geral, mais demorado. Isso acontece pois muitos sintomas, até certa idade, passaram desapercebidos pelo fato de a criança ser capaz de realizar diversas tarefas que necessitam da visão, embora, com mais dificuldade em relação aos que não possuem essas características.

As crianças que possuem visão subnormal podem apresentar sintomas como difuculdade de leitura, olhos lacrimejantes, náuseas, irritação ocular, desatenção, entre outros. O reconhecimento dessas deficiências muitas vezes se dá já na escola, quando as atividades exigem mais da visão.

Quando a criança é diagnosticada, através de exames oftalmológicos, com alguma deficiência visual, a família deve ser orientada com relação à necessidade de fornecer Educação Especial e apoio médico necessário para potencializar seu desenvolvimento em detrimento das suas limitações. Vale observar que, havendo a suspeita de deficiência visual, mesmo que sem diagnóstico, o educando poderá ser atendido em sala de recurso ou em centro de Educação Especial até que seja possível fazê-lo.

### 1.3.2 O Ensino Médio e os deficientes visuais

Segundo os Subsídios para Organização e Funcionamento de Serviços de Educação Especial: Área de Deficiência Visual, de 1995, poderão se matricular e cursar o Ensino Médio os alunos que concluíram o Ensino Fundamental em estabelecimentos de ensino regulares ou supletivo. No caso dos alunos PNEE, deverão cursá-lo com apoio de professor especializado, que se dará em sala de recurso ou através de professor itinerante.

Em Brasília, os alunos deficientes visuais que cursam o Ensino Médio são inseridos em Escolas integradoras, que são escolas que atendem tanto alunos deficientes visuais como alunos videntes (que não são deficientes visuais), mas estas escolas devem contar com atendimento especializado para os alunos DVs - as salas de recurso -, ou encaminhar o aluno para atendimento em uma sala de recurso especializada próxima.

Para seu ideal funcionamento, a comunidade, os discentes e o corpo docente devem observar algumas formas de tratamento especial para com os DVs, de modo a tornar sua permanência nos estabelecimentos de ensino mais adequada. Além disso, a estrutura física das escolas deve atender às necessidades dos DVs. Recomenda-se que a quantidade de alunos DVs não ultrapasse dez por cento da quantidade total de alunos matriculados e que as turmas que possuem alunos com essas necessidades sejam reduzidas.

Como citado anteriormente, a participação em escolas integradoras possibilita ao aluno DV a interação com outros educandos e as chances de aprendizado social, cultural, moral e ético que se originam dessas interações. Em uma conversa com uma das alunas que participou das atividades propostas neste trabalho, ela contou que já havia estudado em escolas especiais para alunos com deficiências e em escolas integradoras, como a que ela está agora. Disse que as escolas integradoras apresentam algumas dificuldades que não são tão comuns em escolas especiais, como acessibilidade, falta de preparo de alguns profissionais e falta de compreensão de alguns colegas. Por outro lado, afirma que as escolas integradoras propiciam um ambiente muito mais real para o desenvolvimento dos APNEEs e que ela também percebia, ao longo do período em que ela estava nesse ambiente, o desenvolvimento dos colegas (que não possuem deficiências) e dos professores no tratamento com ela e com os outros colegas DVs e portadores de outras necessidades, evidenciando um desenvolvimento das "duas partes" no ambiente escolar, se é que faz sentido essa divisão. Outro argumento utilizado por ela para defender esse modelo iclusivo foi que ela percebeu um desenvolvimento muito maior de conteúdos em uma escola integradora do que em uma escola especial. Este relato é muito interessante pois mostra exatamente as vantagens, desvantagens e objetivos nesse modelo de educação especial.

Indo além do desenvolvimento social, vemos então que a aprendizagem de conteúdos é fundamental para os alunos que cursam o Ensino Médio. Sendo assim, os APNEEs também tem direito a aprender esses conteúdos, ainda que necessitem de adaptações ou práticas pedagógicas diferenciadas. Porém, como já foi mencionado anteriormente, muitos professores regulares se vêem incapacitados para fazer essas adaptações e procurar métodos que propiciem e facilitem a aprendizagem dos alunos DVs. Muitas vezes, até mesmo os que têm formação especializada para atender esses alunos se deparam com conteúdos ou atividades nas quais sentem grande dificuldade de fazer transposições didáticas e adaptações.

A seguir serão discutidos alguns temas da Geometria e as principais dificuldades encontradas no seu ensino e aprendizagem. Também são propostas algumas atividades que podem ser aplicadas em sala de aula, com alunos DVs e videntes, ou em salas de recurso e explicitadas as habilidades e competências, segundo a matriz curricular do ENEM, que são desenvolvidas por elas.

# Capítulo 2

# O problema dos ângulos

Para os alunos deficientes visuais, a questão da medição e identificação de ângulos é muito complicada devido à falta de um instrumento acessível que possibilite o entendimento desses conceito e que possa tornar viável a idéia de medir um ângulo.

Observando a importância desses conceitos para o bom entendimento da Geometria Plana, foi adaptado um transferidor de quadro para que pudesse ser usado por alunos DVs, aproveitando as marcas das medidas de ângulo já existentes nele, apenas retirando a parte de madeira que permite que o professor segure o transferidor contra o quadro. Esse instrumento pode ser comprado em papelarias ou lojas de artigos artísticos. Utilizando cola colorida, um elástico, um alfinete e um canudo (que também pode ser substituído por um espeto de madeira sem ponta), foi possível criar um instrumento de grande utilidade para esses alunos, oferecendo-lhes a oportunidade de poder medir ângulos de maneira autônoma, uma vez que se entenda como funciona o transferidor.

Algumas das aplicações desse material adaptado são mostradas no caderno de atividades a seguir, que o utiliza juntamente a polígonos recortados de papel panamá, entre outros materiais, para explorar o conceito de ângulos, ângulos internos de polígonos e a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer.

Observando as matrizes de referência do ENEM 2013, este caderno contribui para o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
  - H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

  - H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
  - H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

- Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
  - H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
  - H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
  - H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

- Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.
  - H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

## 2.1 Material

- Transferidor adaptado para deficientes visuais;

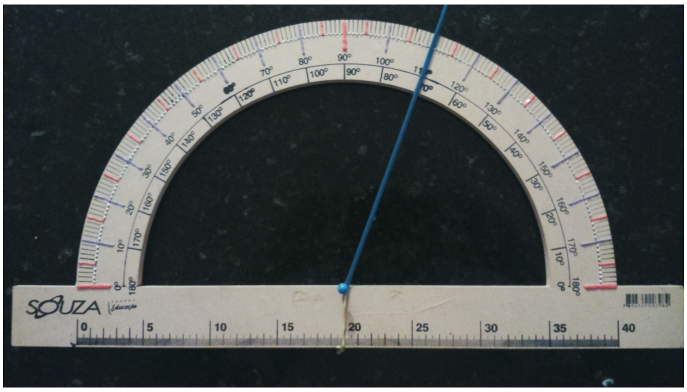

Figura 2.1: Transferidor adaptado com marcações em relevo

- Triângulos de tamanho médio confeccionado em papel panamá (3 triângulos diferentes, sendo 1 retângulo);
- Triângulos em tamanho grande confeccionados em papel cartão (vários triângulos, em vários formatos);
- Multiplano;
- Polígono convexo de 4 lados confeccionado em papel panamá (este polígono deve ser de tamanho médio e não necessariamente regular);
- Polígono convexo de 5 lados confeccionado em papel panamá (este polígono deve ser de tamanho médio e não necessariamente regular).

Observações:

- Multiplano é uma superfície com furos nos quais podem ser encaixados pinos. Esse material tem várias aplicações no ensino de Geometria para deficientes visuais. Rubens Ferronato, em sua dissertação de mestrado intitulada “A construção de instrumento de inclusão no ensino de matemática” (2002), fala da criação dessa ferramenta e dá vários exemplos de sua utilização prática no ensino de Matemática para deficientes visuais. Ver também Figuras 3.4 e 3.7.
- soroban é um ábaco japonês e consiste em um instrumento utilizado para cálculo.

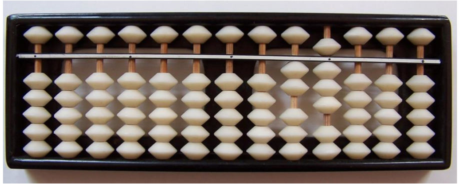

Figura 2.2: Soroban.

## 2.2 Objetivos

Ensinar ao aluno deficiente visual a utilização do transferidor e como medir ângulos utilizando essa ferramenta. Através disso, diferenciar os triângulos retângulos e constatar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°. Fazer com que, utilizando esse conhecimento, o aluno seja capaz de resolver o problema do cálculo da soma dos ângulos internos de um polígono qualquer.

## 2.3 Introdução

### 2.3.1 Fundamentação Teórica

**Definição 2.3.1** *Uma região* R *do plano é convexa quando, para todos os pontos* $A, B \in$ R*, tivermos* $AB \subset$ R*. Caso contrário, diremos que* R *é uma região não-convexa.*

**Definição 2.3.2** *Dadas, no plano, duas semirretas* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$*, um* ***ângulo*** *de* ***vértice*** O *e lados* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$ *é uma das regiões do plano limitadas pelas semirretas* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$*.*

#### Axiomas de Medição de Ângulos

1. Todo ângulo tem uma medida maior ou igual a zero. A medida de um ângulo é zero se e somente se ele é constituído por duas semirretas coincidentes.

2. É possível colocar, em correspondência biunívoca, os numeros reais entre zero e 180 e as semirretas da mesma origem que dividem um dado semiplano, de modo que a diferença entre estes números seja a medida do ângulo formado pelas semirretas correspondentes.

3. Se uma semirreta $\overrightarrow{OC}$ divide um ângulo $\widehat{AOB}$, então

$$\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB}.$$

Aqui, utilizaremos a medida *graus* para ângulos, onde $1°$ (um grau) corresponde ao ângulo formado pelos raios que limitam uma das regiões formadas pelas 360 subdivisões em setores circulares congruentes de um círculo. Observe que a medida em graus possui subdivisões, correspondendo biunívocamente ao intervalo real $[0, 360]$.

### Ângulos em triângulos

**Definição 2.3.3** *Dizemos que o* ***ângulo interno*** *de um triângulo é a região convexa limitada por dois de seus lados e o vértice formado por eles.*

**Definição 2.3.4** *Dizemos que um triângulo é* ***retângulo*** *se ele possuir um ângulo cuja medida é de* $90°$.

**Teorema 2.3.5** *A soma dos três ângulos internos de um triângulo qualquer é* $180°$.

**Demonstração:** Sejam A, B e C os vértices do triângulo. Trace por A uma reta $r$ paralela ao segmento BC e trace a reta $s$ que contém o segmento BC. Sejam $D \in r$ e $E \in r$ tais que D está à esquerda de A e E está à direita de A. Sendo assim, temos que

$$\widehat{ABC} \equiv \widehat{BAD}$$

$$\widehat{ACB} \equiv \widehat{CAE}$$

pois, nos dois casos, os ângulos são alternos internos. Segue daí que

$$\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = 180°.$$

□

**Teorema 2.3.6** *A soma* $S_n$ *dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer de* $\boldsymbol{n}$ *lados é*

$$S_n = (n-2).180°$$

**Demonstração:** Do fato de o polígono ser convexo e possuir $n$ lados, segue que ele possui $n$ vértices. Trace as diagonais desse polígono a partir de um certo vértice. Isto divide o polígono em exatos $(n-2)$ triângulos cujos vértices estão sobre vértices do polígono (o que pode ser mostrado por indução). Sendo assim, a soma dos ângulos internos de todos estes triângulos é igual à soma dos ângulos internos do polígono. Do teorema anterior, segue que:

$$S_n = (n-2).180^\circ.$$

□

## 2.4 Desenvolvimento

Entregue o transferidor adaptado para que o aluno reconheça o material.

Mostre a ele as subdivisões do transferidor explicando sua representação e seu valor em graus.

### 2.4.1 Atividade 1

1. Peça ao aluno que indique, com o canudo marcador, os ângulos de $45^\circ, 60^\circ, 130^\circ, 78^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 150^\circ$ e $180^\circ$.

2. Entregue um dos triângulos ao aluno. Peça para que ele estime o valor da medida dos ângulos apenas com o tato, se possível. Em seguida, peça para que ele meça o ângulo utilizando o transferidor e verifique se sua medida estava próxima da realidade. Anote, junto ao aluno, as medidas que forem sendo feitas.

3. Repita o processo com o outro triângulo. Em seguida, repita o processo com o triângulo retângulo.

Explique ao aluno que triângulos que possuem um ângulo cuja medida seja de $90^\circ$ são chamados de **triângulos retângulos**.

### 2.4.2 Atividade 2

1. Você é capaz de falar onde podemos encontrar este ângulo (de $90^\circ$) no seu cotidiano?

   (Se o aluno tiver dificuldade para responder esta questão, peça que ele encaixe o ângulo de $90^\circ$ em algum objeto que tenha esse ângulo, como a quina da mesa, a ponta de um livro, uma folha de papel, a quina da parede...)

2. Um triângulo pode ter dois ângulos de 90°? Por quê?

3. Utilizando a imaginação, responda: Se "duplicarmos" um triângulo retângulo sobre seu lado maior, que é o oposto ao ângulo de 90°, que figura obteremos?

   (Verifique a resposta utilizando o multiplano)

4. É possível que um triângulo retângulo seja isósceles e ao mesmo tempo retângulo?

   (Verifique a resposta utilizando o multiplano. Se necessário, meça o ângulo de 90° do triângulo construído com o transferidor.)

5. Se"duplicarmos" um triângulo isósceles e retângulo sobre sua hipotenusa (lado maior, oposto ao ângulo de 90°), qual figura geométrica obteremos?

### 2.4.3 Atividade 3

1. Qual é o ângulo formado quando tomamos dois segmentos em uma reta, orientados em direções contrárias?

   (Utilizar o multiplano para verificar a resposta ou ajudar a construí-la)

2. O ângulo formado entre dois segmentos de reta, que possuem apenas um ponto em comum e que pertencem a uma mesma reta é sempre 180°?

3. Retome as medidas dos ângulos dos triângulos que foram anotadas anteriormente. Para cada triângulo, calcule a soma das medidas de seus ângulos.

   (Aqui, poderá ser utilizado soroban, ábaco, ou calculadora, caso o aluno sinta necessidade)

4. Conjecture, ou seja, formule uma teoria sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo.

5. A conjectura acima vale para qualquer triângulo? Por quê?

Faremos agora um experimento para verificar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

**Experimeto 1** Utilizando os triângulos recortados de papel, peça que o aluno sorteie um deles.

Depois disso, peça para que ele "rasgue" os ângulos, tomando o cuidado de não danificar os vértices e mantendo um certo "espaço" deles para facilitar o experimento.

1. Tome dois vértices do triângulo.

2. Ao encaixar os dois vértices lado a lado, formamos um novo ângulo. Qual a medida desse novo ângulo em termos dos ângulos utilizados para formá-lo?

   (Resposta esperada: A medida deste novo ângulo é a soma das medidas dos dois que foram utilizados para formá-lo.)

3. Encaixando os três vértices, obtemos a soma dos ângulos internos do triângulo. Por quê?

4. De quanto é a soma dos ângulos internos deste triângulo? Se necessário, utilize o transferidor.

5. Isso é válido para qualquer triângulo? Como mostrar que isso é verdade?

Caso o aluno se interesse, faça com ele a demonstração dessa propriedade utilizando o multiplano. O conceito de ângulos suplementares, e ângulos alternos internos (provenientes de duas retas paralelas cortadas por uma transversal) pode ser construído utilizando o transferidor adaptado junto ao multiplano.

### 2.4.4 Atividade 4

A soma dos ângulos internos de qualquer figura poligonal é $180°$?

1. Dê ao aluno um polígono de 4 lados. Peça para que ele meça cada um de seus ângulos e some as medidas. Qual foi o resultado?

2. Dê ao aluno um polígono de 5 lados. Peça que ele faça o mesmo do item anterior. Qual foi o resultado?

**Problema:** Dado um polígono de $n$ lados, encontre uma expressão matemática que forneça a soma de seus ângulos internos. (*Dica:* Divida o polígono em triângulos. Tente generalizar a partir daí.)

## 2.5 Relatos das aplicações do caderno de atividades de ângulos

### 2.5.1 *Colégio C*

Os relatos abaixo retratam as atividades desenvolvidas com três alunos do Colégio C, Aluna 1, Aluno 2 e Aluna 3.

Para a data da aplicação dessas atividades (14 de outubro de 2014), estavam programados cinco alunos. Porém, dois deles não compareceram.

Quando cheguei na sala de recursos, fui muito bem recebido pela professora de Ensino Especial de Matemática e por seus colegas. Como essa era a minha primeira experiência em ensinar um aluno deficiente visual, durante alguns momentos, tive problemas com algumas palavras e frases que geralmente utilizamos com alunos que podem ver, como por exemplo, “você consegue ver pra mim?” ou “esse ponto que está no meio”. Deixar de utilizar essas frases é um pouco difícil porque sua utilização, como uma pessoa que pode ver, é muito frequente no dia-a-dia.

Uma das alunas já estava aguardando (porque chegou antes do horário), então decidi começar logo a atividade com ela. Durante a atividade, a professora me informou que os outros dois alunos que estavam presentes nesse dia já estavam esperando.

#### *Aluna 1*

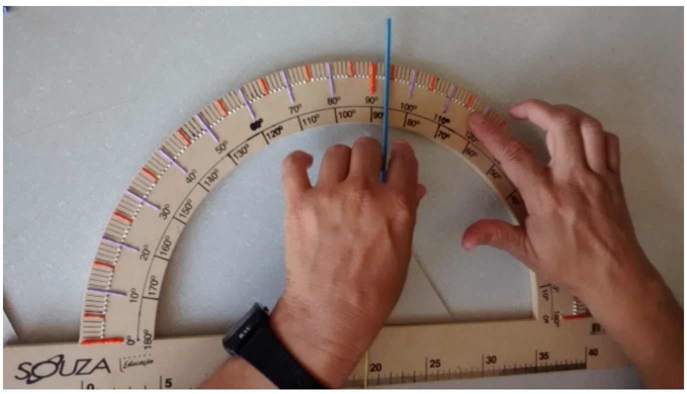


Figura 2.3: Aluna 1 utilizando o transferidor adaptado

A aluna reconheceu o material e a escala de marcação com dificuldade, principalmente por, em um primeiro momento, se perder muito na contagem dos graus, mas em seguida, ao pedir que ela indicasse algumas medidas de ângulos, ela conseguiu realizar a tarefa sem dificuldades.

Ao entregar-lhe os triângulos recortados de papel panamá, ela reconheceu a forma geométrica sem dificuldades. Mostrei como ela poderia medir um dos ângulos do triângulo utilizando o transferidor. Em um primeiro momento, ela teve certa dificuldade para aprender a alinhar o canudo com o lado do triângulo, o que já não foi observado na contagem para saber a medida do ângulo, porém, tive que intervir algumas vezes para auxiliá-la. Depois de se acostumar a medir os ângulos, a aluna realizou com certa precisão (erros de no máximo 3°) as medidas de todos os outros ângulos dos dois triângulos que entreguei a ela.

Após terminar de medir os triângulos, pedi que somasse as medidas dos três ângulos de cada um deles. Ela pediu para que eu buscasse um soroban para que pudesse fazer as contas mais facilmente. Devido a erros nas medidas dos ângulos, ela obteve medidas próximas de 180°, com erros de no máximo 4 graus.

Quando pedi à aluna que me indicasse no transferidor onde ficaria o ângulo de 180°, ela se perdeu na contagem mas em seguida mostrou corretamente o ângulo. Mostrei que esse ângulo corresponde a meia volta de um círculo e, observando os "lados" do ângulo, eles formam um segmento de reta.

Entreguei-lhe um triângulo recortado em papel cartão e pedi para que rasgasse os ângulos, ou as "pontas" do triângulo. Ela conseguiu rasgar os ângulos sem problemas. Quando eu pedi que juntasse os ângulos, ela teve dificuldade de encaixá-los, pois o papel era muito fino, e dificultou a percepção através do tato. Tive que ajudá-la a encaixar os ângulos fazendo coincidir os vértices, mas assim que encaixamos os três ângulos, ela conseguiu observar corretamente que o novo ângulo formado representava a soma dos três anteriores e que os lados desse novo ângulo formavam um segmento de reta, e portanto, sua medida é de 180°.

Entreguei-lhe a figura de 4 lados, para que medisse os ângulos e verificasse se a soma também seria 180°. Ela mediu todos os ângulos sem dificuldades, e fez a soma, que deu próxima de 360°.

Nesse momento, a professora responsável da sala de recursos veio avisar que já estavamos trabalhando há mais de 45 minutos, e que a outra dupla de alunos estava aguardando para realizar a atividade também, sendo que uma das alunas já queria ir embora (mesmo sabendo que, nesse momento, ainda não estávamos atrasados).

Concluí a atividade com a Aluna 1. Ela foi capaz de perceber que a soma dos ângulos internos não seria 180° para figuras que não fossem triângulos, e que, no caso específico dos polígonos de quatro lados, a soma seria 360°, por pura experimentação. Tentei fazer com que, com as informações obtidas, a aluna elaborasse um pensamento indutivo e respondesse quanto seria a soma dos ângulos internos de um polígono de 5 lados, mas ela não conseguiu responder corretamente. Dei a ela o valor da soma, que seria 540° e encerrei a atividade.

Em geral, essa aluna conseguiu desenvolver bem os aspectos de medição de ângulos e interpretação da soma dos ângulos internos de um triângulo, mas não foi capaz de generalizar para um polígono de $n$ lados, principalmente pela falta do tempo.

A aluna sugeriu que as marcações de 1° no transferidor fossem mais distantes pois confundem um pouco o tato, ou que elas se diferenciassem mais uma da outra, e que com apenas essa modificação o material estaria perfeito.

### ***Alunos 2 e 3***

Mostrei aos dois alunos o material e as marcações feitas no transferidor. Comentei sobre o que seria um ângulo e mostrei o conceito como sendo a inclinação entre dois segmentos de reta, utilizando um dos lados como a base do transferidor e o canudo indicador como o outro, mostrando também que, quanto maior o número associado ao ângulo, maior seria essa inclinação e esses dois lados seriam mais "abertos".

O Aluno 2, reconheceu prontamete o transferidor como "uma régua redonda que ele tinha", e comentou que reconheceu esse material porque enxergava até os 12 anos de idade. A Aluna 3 não comentou nada sobre o assunto.

Pedi para que eles indicassem algumas medidas de ângulos no transferidor, como na atividade. O Aluno 2 indicou as medidas muito rapidamente e com muita precisão, já utilizando propriedades da adição e subtração, interpretando-as geometricamente, e ajudando a colega com dicas como "Aluna 3, pra achar 78, começa do 90, volta 10 e depois volta 2" e também como "você tem que lembrar que o 0 vai estar sempre no seu braço direito e o 180 sempre no seu braço esquerdo'.

Entreguei-lhes os triângulos recortados em papel panamá. Imediatamente eles reconheceram as figuras como triângulos e, mais ainda, reconheceram os triângulos com um ângulo de 90° comentando que "esse é a metade de um retângulo". Entreguei a eles outro triângulo retângulo congruente ao que eles tinham em mãos e pedi que mostrassem como esses dois triângulos formavam um retângulo. O Aluno 2 prontamente encaixou os dois triângulos em suas hipotenusas, formando um retângulo. Já a Aluna 3 teve dificuldades para encaixá-los e tive que ajudá-la.

Mostrei como medir os ângulos do triângulo com o transferidor. O Aluno 2 mediu muito rapidamente os três ângulos de cada um dos três triângulos, sem se confundir, e praticamente sozinho em todos eles, apenas me perguntando se a medida que ele havia feito estava correta. Além disso, todas as medidas realizadas pelo Aluno 2 obtiveram grande precisão com, em geral, erro menor que 2°.

A Aluna 3 teve muita dificuldade em medir os ângulos sem deslizar o transferidor ou sem tirar o triângulo do lugar correto da medição. Ela também apresentou dificuldade em alinhar o canudo com o lado do triângulo. Utilizei um outro triângulo para que ela pudesse alinhar o canudo mais facilmente, colocando este segundo verticalmente em relação a mesa em que trabalhavamos, como uma parede, com pé no lado do ângulo do triângulo que estava sendo medido. Após isso, ela conseguiu medir mais facilmente os ângulos, mas ainda sim, obteve certa dificuldade, sendo que em alguns momentos ela deslocava o canudo que marcava a medida sem querer, ou não contava corretamente as marcações, fazendo com que suas medidas tivessem erros maiores que as medidas do Aluno 2. A Aluna 3 apresentou, em média, erros de 5° a 6°.

Quando os alunos terminaram as medições, pedi para que somassem as medidas dos três ângulos em cada triângulo. Ambos se recusaram a utilizar o soroban e preferiram fazer as contas de adição mentalmente. As somas do Aluno 2 apresentaram erro de, no máximo, 4°, enquanto que as somas da Aluna 3 apresentaram erro de, em média, 7°. Perguntei a eles se, observando os resultados encontrados, poderiam me dizer para qual número esses resultados apontam. O Aluno 2 prontamente disse 180° e a Aluna 3 concordou.

Pedi para que eles me mostrassem o ângulo de 180°. Eles mostraram rapidamente e foram capazes de interpretar geometricamete esse ângulo como meia volta, ou ângulo na reta, por conta própria.

Questionei se a soma dos ângulos em qualquer triângulo seria 180°. O Aluno 2 discordou, já a Aluna 3 concordou. Entreguei a eles os triângulos em papel cartão e pedi que eles rasgassem os ângulos. A Aluna 3 ficou bastante receosa em rasgar o papel, com medo de danificá-lo, enquanto o Aluno 2 primeiramente dobrou as pontas para depois rasgálas, formando cortes retos.

Nessa parte da atividade, novamente os alunos sentiram dificuldade de encaixar os ângulos para indicar a soma. O Aluno 2, encaixou as pontas remontando o triângulo rasgado, ajudei-o a encaixar os ângulos sobre seus lados fazendo coincidir seus vértices. Assim que os ângulos foram encaixados, ele imediatamente percebeu que o ângulo formado era 180°. A Aluna 3 teve dificuldade em encaixar os ângulos da maneira correta. Ajudei-a e ela também percebeu que o ângulo formado foi o de 180°.

Quando os questionei se essa propriedade era exclusiva dos triângulos (polígonos de três lados), eles disseram que achavam que aconteceria o mesmo com figuras com mais lados. Entreguei a eles um polígono de 4 lados para que medissem e somassem os ângulos. Eles fizeram as medições mais rapidamente que os triângulos (acho que por já adquirirem certa prática) e a Aluna 3 realizou as medições com erros menores. Ao somar as medidas, eles perceberam que a soma estaria próxima de 360° e automaticamente já assumiram que esse valor seria a soma dos ângulos de uma figura de 4 lados.

Perguntei se eles saberiam me dizer quanto seria a soma em uma figura de 5 lados. Eles arriscaram um valor próximo de 420°. Tentei resolver com eles esse problema através de um pensamento indutivo: pedi para que eles dissessem quantos graus, no caso do triângulo e do polígono de 4 lados, havia aumentado na soma quando tinhamos aumentado um lado no polígono; eles disseram 180. Perguntei se eles sabiam explicar o porquê de ter aumentado 180 e, imediatamente, o Aluno 2 respondeu: *"é porque a figura de 4 lados da pra dividir em dois triângulos. Como cada um é 180, os dois juntos dá 360"*. Eu disse que ele estava correto.

A Aluna 3 não havia entendido o argumento do Aluno 2. Utilizei o multiplano e construi uma figura de 4 lados e dividi essa figura em dois triângulos. Assim que ela tateou a figura, a Aluna 3 entendeu o argumento.

Perguntei em quantos triângulos eu poderia dividir, utilizando o mesmo raciocínio anterior, uma figura com cinco lados. O Aluno 2 respondeu em 3. A Aluna 3 não respondeu.

Eu disse que o Aluno 2 estava correto. Perguntei se eles saberiam me dizer agora quanto seria a soma dos ângulos internos de uma figura com 5 lados. Os dois responderam, após uns 3 segundos de cálculos mentais, que seria 540°.

Perguntei se eles seriam capazes de me falar, sem utilizar desenhos, quanto seria a soma dos ângulos de uma figura com 10 lados. Eles não foram capazes de responder. Perguntei também se eles haviam observado algum padrão que relacionasse a quantidade de lados de cada figura com as somas dos ângulos internos e eles também não foram capazes de responder.

No último momento da atividade, expliquei oralmente a relação entre a soma dos ângulos e a quantidade de lados, mostrando que, utilizando os exemplos dos casos que fizemos, seria a quantidade de lados menos 2 vezes 180. Eles concordaram com o método. Nesse ponto terminamos as atividades.

### ***Observações Gerais relativas às aplicações no Colégio C***

O tempo utilizado para completar a atividade foi pouco mais de uma hora, sendo que eu havia previsto que seria, em média, 40 minutos. Sendo assim, como ocorreu com a primeira aluna, tive que desenvolvê-la em um ritmo mais rápido do que o esperado, deixando de fazer algumas perguntas previstas.

Outra observação pertinente é que o desenvolvimento da atividade foi melhor com apenas um aluno. Quando estava com a dupla, em alguns momentos foi difícil ajudá-los simultaneamente.

Quanto ao material, constatei que o transferidor poderia ter a parte do “buraco” central nivelada com o restante do material. Isso poderia ajudar a medir figuras recortadas, mas, por outro lado, haveria a perda da possibilidade de medir os ângulos de figuras desenhadas em relevo em papel, por exemplo. Além disso, uma boa opção para resolver o problema de encaixar os ângulos recortados em papel cartão seria substituir esse material por E.V.A. (espuma vinílica acetinada), também conhecida como “emborrachado”, de preferência com uma espessura grossa, pois facilitaria o trabalho dos alunos DVs. Também constatei que durante a atividade, na medição dos ângulos em figuras (principalmente os triângulos), os alunos se confundem com relação aos ângulos que já foram medidos e os que não foram medidos. Uma sugestão para resolver este problema seria marcar, anteriormente, cada um dos ângulos dos triângulos com marcas distintas, para que o aluno possa diferenciar cada um dos três ângulos utilizando o tato.

Na medição dos ângulos, percebi que a utilização da lateralidade (esquerdo e direito) como auxílio para localizar os ângulos 0 e 180 no transferidor, apresentada pelo Aluno 2, também serve como uma ferramenta de localização para os alunos DVs e pode ajudar durante a aplicação da atividade, bem como a tilização de apoio vertical para fixar o canudo. Uma solução alternativa para o segundo problema seria trocar o canudo por uma vareta de churrasquinho sem ponta.

#### *Comentários dos alunos do Colégio C sobre o material e a atividade*

Aluna 1 sugeriu que as marcações de 1° no transferidor fossem mais distantes pois confundem um pouco o tato, ou que elas se diferenciassem mais uma da outra, e que com apenas essa modificação o material estaria perfeito. Quando perguntei aos Alunos 2 e 3 se eles tinham alguma sugestão para o material e eles disseram que não, que "ficou legal". Perguntei o que eles acharam sobre a atividade e eles disseram que "foi legal, mas em algumas horas ficou meio repetitivo, na parte de medir".

### 2.5.2 *Colégio S*

Os relatos abaixo mostram os resultados das atividades desenvolvidas com quatro alunos do Colégio S. Esses quatro alunos foram atendidos em duas duplas, primeiramente, as Alunas 5 e 6, e em seguida, a Aluna 7 e o Aluno 4. Desses quatro alunos, apenas o Aluno 4 possui baixa visão, os demais são cegos.

Na data da aplicação da atividade (14 de outubro de 2014), estava programada uma atividade cultural na escola, o que impossibilitou o desenvolvimento. Sendo assim, nesse colégio, o cronograma de aplicações atrasou uma semana, e este relato é das atividades desenvolvidas em 21 de outubro de 2014, no turno da tarde.

Quando cheguei na escola fui muito bem recebido pelos professores da sala de recurso. Assim que as duas primeiras alunas chegaram, começamos as atividades.

**Aluna 5 e Aluna 6**

Entreguei o transferidor adaptado às duas alunas. Mostrei-lhes as marcações, expliquei como é feita a contagem dos graus e como utilizamos o canudo marcador para marcar um ângulo dado.

Pedi para que as alunas indicassem alguns valores múltiplos de 10 no transferidor, o que foi realizado sem problemas. Em seguida, pedi para que localizassem outros ângulos de medidas não múltiplas de 10 e de 5, como 78°. As duas alunas conseguiram localizar os ângulos sem dificuldade.

Utilizando o canudo marcador, expliquei que o ângulo seria, geometricamente, a região entre o canudo marcador e a base do transferidor, ou seja, a inclinação entre essas duas retas. Em seguida, entreguei-lhes triângulos retângulos, um para cada, e mostrei como medimos os ângulos utilizando o transferidor, medindo com elas um dos ângulos do triângulo. Pedi para que medissem os outros dois ângulos.

As duas alunas mediram rapidamente os outros dois ângulos, com medidas com erros inferiores a 5°, sendo que, as duas alunas mediram com precisão exata o ângulo de 90°. Perguntei se reconheciam esse ângulo de outros lugares e a Aluna 5 disse que era o ângulo da "ponta do quadrado". Também perguntei se poderíamos formar alguma figura especial se tivéssemos mais um triângulo idêntico ao que elas possuiam. Elas disseram, sem exitar, que poderiamos formar um retângulo.

Prossegui então para a idéia da soma dos ângulos internos do triângulo. Perguntei se já haviam ouvido falar antes da soma dos ângulos internos de um triângulo e elas disseram que sim. Perguntei se sabiam qual valor seria e elas achavam que seria 180°, mas não tinham certeza. Prosseguimos em verificá-lo.

Entreguei a cada uma delas mais um triângulo e pedi que me falassem, para que eu anotasse, os valores dos seus três ângulos, assim como foi feito com o primeiro triângulo. Elas mediram rapidamente os ângulos, e me falaram os valores. Dessa vez, os erros foram, em média 5°, geralmente para mais.

Então passamos a somar os resultados obtidos para verificar se o valor encontrado era, de fato, 180°. Ao ditar os valores para que calculassem as somas, percebi que as alunas estavam tendo certa dificuldade em efetuar mentalmente as adições, então, utilizamos uma calculadora falante que estava disponível na sala de recursos. Os resultados ficaram próximos de 180°, havendo erros de, no máximo, 10°. Perguntei se os valores obtidos mostravam qual seria a soma dos ângulos internos de um triângulo, e as alunas disseram que seria 180°. Expliquei que nas somas dos valores encontrados não observamos exatamente 180° por erros de medição e erros gerados pelo próprio material.

Prosseguimos para o experimento. Pedi para que cada uma delas escolhesse, ao acaso, um dos triângulos de papel cartão em um saco. Em seguida, pedi para que rasgassem seus vértices e juntassem os ângulos (pelos vértices). Nesse momento, elas tiveram muita dificuldade em rasgar o papel e ainda mais dificuldade em encaixar os vértices da maneira correta. Tive que auxiliar, praticamente fazendo essa parte por elas.

Quando encaixei os vértices, através do tato, elas perceberam que os três ângulos juntos formavam uma reta. Retomando o transferidor, mostrei que a inclinação entre dois segmentos de reta linearmente dependentes era 180°, e portanto, a soma dos três angulos do triângulo recortado media 180°.

Perguntei se essa propriedade seria válida para outras figuras, como figuras com quatro lados, por exemplo. A Aluna 6 disse que achava que sim, já a Aluna 5 disse que não. Perguntei a Aluna 5 se, caso realmente a afirmação fosse falsa, se ela saberia quanto seria a soma e ela me respondeu que não sabia.

Entreguei a cada uma um polígono não regular convexo de 4 lados, recortado de papel panamá. Pedi para que medissem os quatro ângulos, para que, ao final, fizessemos a soma e tentássemos descobrir qual seria esse valor. As duas mediram rapidamente os quadriláteros, com erros entre 4° e 5°. Em seguida, fizemos a soma dos valores utilizando a calculadora falante e obtivemos 347° e 365°. Perguntei se com esses valores elas poderiam supor qual seria a soma dos ângulos internos do quadrilátero e elas disseram 360°, mas não sabiam explicar a razão para ser esse valor.

Utilizando o multiplano, desenhei um quadrilátero, entreguei a elas e pedi para que reconhecessem a figura e contassem a quantidade de lados, o que elas fizeram sem problemas. Pedi que dividissem a figura em triângulos, na menor quantidade possível. Elas dividiram corretamente em dois triângulos e, logo em seguida, a Aluna 6 disse: "Ahhh! Cada triângulo é 180, então os dois juntos dá 360". A Aluna 5 concordou com o pensamento.

Perguntei se, utilizando essa idéia, elas saberiam dizer quanto seria a soma dos ângulos de uma figura com 5 lados, mas elas não foram capazes de responder. Desenhei no multiplano um polígono convexo de 5 lados, entreguei a elas e pedi para que o dividissem

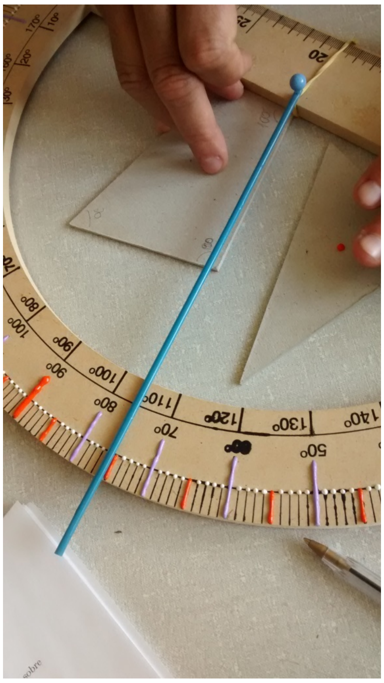


Figura 2.4: Aluna 6 medindo os ângulos de um quadrilátero

em triângulos, o que elas fizeram corretamente e em seguida responderam, depois de utilizar a calculadora falante, que a soma seria 540°.

Nesse ponto, decidi partir para a generalização do resultado. Repeti, relacionando a quantidade de lados com os valores das somas dos ângulos obtidos, os resultados que tinhamos observado. Perguntei a elas quanto seria a soma dos ângulos internos de um polígono de 6 lados, e as duas responderam que seria 4 vezes 180°. Perguntei pra 10 lados, e elas responderam corretamente. Perguntei, como ficaria o resultado para $x$ lados, e elas responderam

$$S_x = (x - 2).180^\circ.$$

Expliquei que essa última fórmula relaciona uma quantidade qualquer de lados de um polígono com a soma de seus ângulos internos. Encerramos a atividade.

### Aluno 4 (baixa visão) e Aluna 7

Comecei mostrando aos alunos o transferidor adaptado e as marcações. Expliquei como contar os graus utilizando essa ferramenta, mostrando as marcações correspondentes a 10°, a 5° e às unidades. O Aluno 4 apresentou certa dificuldade em identificar as unidades e encontrar os valores porque, mesmo utilizando o tato, ele sempre tentava ver as marcações aproximando bastante os olhos do tranferidor, o que nem sempre fornecia o resultado correto.

Pedi para que os alunos marcassem com o canudo marcador alguns ângulos múltiplos de 10, em seguida, alguns múltiplos de 5, e por último, ângulos que não eram múltiplos de 10 nem de 5. A Aluna 7, inicialmente, apresentou certa dificuldade em encontrar os valores solicitados por estar contando a marca do ângulo de 0° como 10°, mas em seguida conseguiu marcar corretamente. O Aluno 4, quando passou a utilizar mais o tato também conseguiu marcar os ângulos corretamente.

Utilizando o canudo marcador e a base do transferidor, expliquei-lhes que o ângulo, geometricamente, seria a região entre essas duas retas, ou seja, a inclinação entre elas.

Entreguei um triângulo retângulo a cada um dos alunos. Expliquei que, nos triângulos, os ângulos são as regiões formadas pelos lados, ou seja, "as pontas" dos triângulos. Mostrei como medir os ângulos com o transferidor, com a motivação de comparação de valores para saber qual teria maior inclinação. Medi, junto com os alunos, o primeiro ângulo e pedi para que medissem os outros dois sozinhos. Ambos conseguiram fazer as medições, mas com erros consideravelmente altos (cerca de 10°). Anotei os valores obtidos.

Quando os alunos mediram o ângulo de 90°, mediram com precisão exata. Perguntei se reconheciam esse ângulo de outras situações, e assim como as alunas da aplicação anterior, também foram capazes de reconhecê-lo como "ponta" de um quadrado ou de um retângulo. Os dois alunos também concluíram pelos mesmos meios que, juntando o triângulo que possuiam com outro triângulo congruente, seria possível montar um retângulo.

Prosseguindo a atividade, perguntei se já tinham ouvido falar de soma dos ângulos internos de um triângulo e eles disseram que não. Entreguei a eles outro triângulo, um para cada, e pedi que novamente medissem os três ângulos de cada um, o que foram capazes de fazer, mas novamente, cometendo erros de 5° a 10° em média, principalmente o Aluno 4, que estava tendo muita dificuldade em manter um dos lados do triângulo fixo na base do transferidor. Anotei os resultados.

Pedi para que somassem os resultados obtidos à medida que eu ditasse, com auxílio da calculadora falante. Os alunos somaram os resultados, cada um para os dois triângulos que mediram, e observando os resultados nos 4 triângulos, concluíram que eram sempre próximos de 180°.

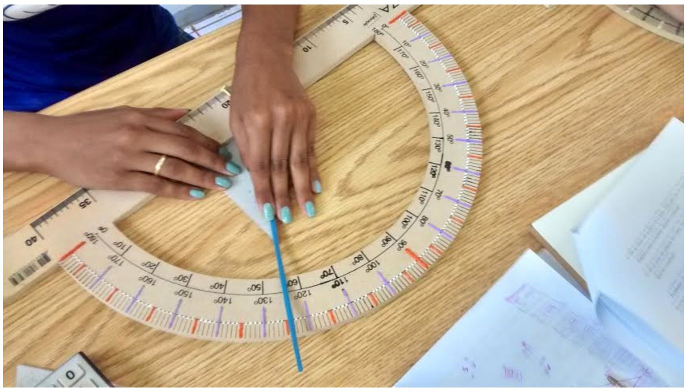

Figura 2.5: Aluna 7 utilizando o transferidor adaptado para medir os ângulos de um triângulo

Perguntei se isso aconteceria em todos os triângulos e eles não souberam responder. Expliquei que faríamos um experimento para verificar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre o mesmo valor, 180°.

Entreguei-lhes um saco para que cada um retirasse aleatoriamente um triângulo feito de papel cartão. O Aluno 4 retirou um triângulo obtusângulo bem “esticado”, enquanto a Aluna 7 retirou um triângulo mais “regular”. Pedi para que trocassem de triângulos e depois destrocassem, para perceber que o resultado de fato valeria em qualquer triângulo. Pedi para que rasgassem as pontas dos triângulos. A Aluna 7 teve certa dificuldade em rasgar as pontas, o Aluno 4 não teve dificuldade, embora ele tenha rasgado em pedaços muito pequenos.

Quando tentaram juntar as pontas unindo os vértices, como esperado, tiveram muita dificuldade. A Aluna 7 não conseguiu fazê-lo, então, encaixei para ela e mostrei que juntos, formavam uma reta. O Aluno 4, utilizando a visão, encaixou parcialmente as pontas. Nesse momento, o professor da sala de recursos que observava a atividade pegou um livro de capa azul, e colocou as pontas do triângulo, que eram amarelas, sobre o livro. Desse modo o Aluno 4 conseguiu ver que juntas elas formavam uma reta. O professor explicou que os alunos com baixa visão respondem melhor a questões visuais com um contraste forte entre as cores.

Mostrei, no transferidor, que dois segmentos de reta alinhados formam entre si um ângulo de 180°. Concluímos então que, em qualquer triângulo, a soma dos ângulos internos é 180°.

Perguntei-lhes se essa propriedade também seria válida em figuras com mais de 3 lados.

O Aluno 4 respondeu:“Acho que vale sim”. A Aluna 7 não soube responder. Partimos então para a verificação. Somando os valores encontrados com auxílio da calculadora falante, obtivemos 347° e 365°. Perguntei se esses valores sugeriam algum número e a Aluna 7 respondeu 360°. Perguntei se haveria alguma razão para esse número específico e nenhum deles soube responder.

Utilizando o multiplano, desenhei um polígono convexo de 4 lados e pedi para que reconhecessem a figura. Ambos foram capazes de perceber que ela possuia 4 lados. Em seguida, pedi que dividissem a figura em triângulos, na menor quantidade possível deles. Ambos foram capazes de fazê-lo mas não esboçaram reação imediata. Perguntei: “Se em cada triângulo a soma dos ângulos internos é 180°, que informação podemos tirar do fato de uma figura de 4 lados poder ser dividida em dois triângulos?”. Ambos responderam que “a soma” seria 360° porque teríamos duas vezes 180.

Perguntei se eles seriam capazes de dizer quanto seria a soma dos ângulos internos de uma figura com 5 lados. E eles não souberam responder. Desenhei no multiplano um polígono convexo de 5 lados. Pedi para que contassem a quantidade de lados e dividissem na menor quantidade possível de triângulos, o que ambos conseguiram fazer rapidamente e corretamente. Logo após, responderam, com auxílio da calculadora falante, que a soma seria 540° porque seria possível dividir em três triângulos.

Ao questionar se seriam capazes de dizer quanto seria a soma dos ângulos internos de uma figura de 6 lados, a Aluna 7 respondeu que seria 4 vezes 180 e o Aluno 4 concordou com ela. Então perguntei se havia alguma relação entre o número de lados e a soma dos ângulos internos. A Aluna 7 respondeu que bastava fazer a quantidade de lados, menos dois, vezes 180.

Perguntei para o Aluno 4 como ficaria essa fórmula se a figura tivesse $x$ lados. Ele respondeu corretamente, dizendo que a soma seria $(x-2).180°$. Portanto, conseguimos generalizar a fórmula

$$S_x = (x-2).180°.$$

Então encerramos a atividade.

#### ***Observações gerais relativas ao colégio S***

Os alunos se mostraram muito mais rápidos na resolução de problemas e manejo do material, o que talvez possa ser explicado por estarem mais habituados a materias adaptados ou participação em outros projetos, o que me foi relatado por eles e pelos professores. Ou ainda, outra razão para explicar esse fato seja que essa escola oferece ensino regular, o que pode indicar que os alunos sejam mais interessados e mais capacitados por estarem na série correta.

Todos os alunos desse colégio conseguiram fazer a generalização solicitada no problema final, mostrando domínio de utilização de variável na generalização e de algumas relações aritméticas durante a medição dos ângulos (como, por exemplo, começar de 90° para achar um ângulo no 2° quadrante, ou voltar unidades para encontrar uma medida que não seja múltipla de 10), além de alguns alunos já terem visto previamente esse problema no caso dos triângulos.

Outra questão interessante em relação ao aluno 4 foi que, por ele ter baixa visão, as cores utilizadas no material podem não ter ajudado muito na percepção. Sendo assim, desta aplicação, tirei como aprendizado que, mesmo trabalhando com alunos cegos, o ideal é que o material tenha cores vibrantes e contrastantes para que também possa ser utilizado com facilidade por alunos com baixa visão.

As aplicações demoraram, em média 45 minutos e fluíram adequadamente e os professores da sala de recurso gostaram do material e mostraram interesse em saber como havia sido produzido e suas características.

### *Comentários dos alunos do Colégio S sobre o material e a atividade*

As Alunas 5 e 6 disseram ter gostado muito do transferidor, e que o material ficou excelente, que não seria necessário fazer mudanças. Afirmaram que só se perderam na parte de rasgar o papel e juntar os ângulos, o que já era previsto da aplicação no outro colégio. Disseram que para essa parte, seria melhor utilizar um papel "mais alto" ou alguma coisa de madeira. Em particular, essas duas alunas se mostraram muito receptivas à atividade e entusiasmadas em resolver o problema, além de mostrarem uma inteligência matemática surpreendente, o que foi confirmado pela professora da sala de recurso.

Perguntei para os alunos 4 e 7 se, além do momento de cortar o papel e encaixar, havia alguma outra sugestão para melhorar a atividade ou o material utilizado e a Aluna 7 disse que estava tudo ótimo, já o Aluno 4 disse que não conseguia sentir muito bem os pontos das unidades do transferidor e a Aluna 7 respondeu: "É porque você estava tentando contar com a visão, se você utilizar o tato dá pra sentir sim". Em particular, observei que a Aluna 7 não estava muito entusiasmada com a atividade, o que acabou contagiando o Aluno 4 após alguns minutos de trabalho. Percebi um certo desânimo durante o desenvolvimento da atividade com essa dupla, apesar de terem conseguido resolver os problemas propostos.

## 2.6 Conclusões relativas à aplicação do caderno de atividades de ângulos

Os objetivos propostos nesta atividade foram alcançados quase que totalmente. A utilização do transferidor adaptado foi bem sucedida mas pode ser melhorada com algumas outras adaptações citadas anteriormente, como a substituição do canudo marcador por um palito de churrasco, por exemplo. Contudo, o instrumento mostrou-se muito útil para os alunos DVs na aprendizagem do conceito de ângulos, assim como na experimentação e utilização do material na resolução de problemas. Isso se deve ao fato do instrumento tornar esses conceitos mais acessíveis aos alunos DVs que não tem muitas oportunidades de experimentá-los devido às suas limitações.

As aplicações da atividade mostraram resultados relativamente surpreendentes em relação à capacidade de abstração dos alunos DVs, principalmente ao reconhecerem um ângulo reto sem realizar nenhuma medição e conseguirem reconhecê-lo como "ponta de um quadrado", bem como perceber que ao juntarmos dois triângulos retângulos congruentes, obtemos um retângulo. Além disso, a capacidade de abstração e cálculo mental mostrada por alguns alunos é facinante. Durante a atividade, a maioria dos alunos preferiu fazer cálculos mentais e foi capaz de abstrair, das informações obtidas pela experimentação, uma fórmula correta para se calcular a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer, obtendo uma expressão algébrica como resposta. Outro momento muito interessante foi o da divisão de polígonos convexos em triângulos, utilizando o multiplano. Alguns alunos conseguiram imaginar, mesmo que sem o auxílio do multiplano, em quantos triângulos poderíamos dividir esses polígonos e, mais ainda, generalizar esse resultado.

Em geral, a deficiência visual não atrapalhou a capacidade dos alunos de compreender esses conceitos e nem a utilização do material adaptado, exceto pelo momento em que foi solicitado que juntassem as pontas do triângulo rasgado, como foi mostrado nos relatos. Esse problema também pode ser solucionado com sugestões mostradas anteriormente.

Nessas primeiras aplicações e de conversas informais antes e após as atividades, ficou claro que os alunos DVs mostram grande interesse em aprender e são muito empenhados em relação aos estudos. Além disso, também mostram grande satisfação em testar novos materiais e têm a consciência que esse tipo de trabalho, ainda que parcialmente, os ajuda a transpor suas limitações e a ter condições melhores para aprender, assim como sua utilidade futura para outros alunos.

# Capítulo 3

# A semelhança de Figuras planas

Para um aluno deficiente visual, é muito complicado entender o conceito de figuras semelhantes de uma forma prática. A falta da visão limita a formulação de métodos que criamos naturalmente, quase que instintivamente, para verificar se duas figuras são de fato semelhantes ou congruentes. Na prática, fazemos isto observando sua forma, comparando os ângulos, sobrepondo-as ou através da medição dos lados de um polígono, por exemplo, o que não é fácil para um aluno DV.

Saber aplicar esse conhecimento é de extrema importância no ensino médio pois é utilizado também em outras áreas da geometria, cobrado em vestibulares, concursos e amplamente utilizado em áreas como engenharia, arquitetura e outras.

Através da adaptação simples de alguns materiais, podemos facilitar a aprendizagem desses conceitos. No caderno de atividades a seguir, são apresentadas algumas sugestões de adaptação de material e um roteiro de algumas atividades que podem ser feitas tanto com alunos deficientes visuais como com alunos videntes.

Observando a matriz de referência do ENEM 2013, estas atividades contribuem para o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
  - H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.
  - H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

  - H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

- Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

  - H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
  - H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
  - H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

## 3.1 Material

- Multiplano;
- Molde de triângulo com marcações para medida dos lados.

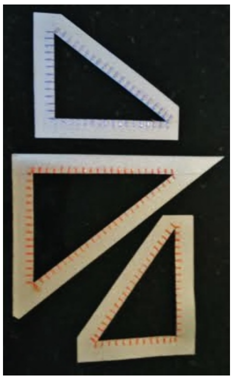

Figura 3.1: Moldes de triângulos com marcações em relevo para medida dos lados

- Pares de triângulos semelhantes ao triângulo do molde, recortados em papel panamá, de tamanho médio/grande, um com razão 2, outro com razão 3, outro com razão não inteira;
- Representações em relevo para resolução dos problemas propostos.

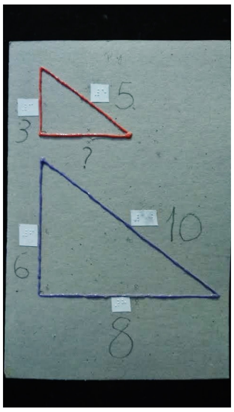


Figura 3.2: Representação em relevo 1

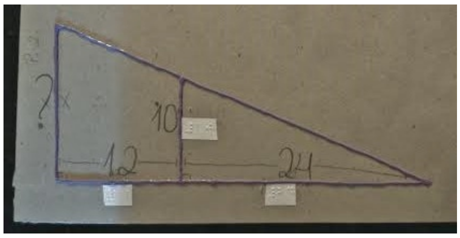


Figura 3.3: Representação em relevo 2

Observações:

- Os moldes de triângulos citados na lista de materiais foram construídos utilizando *papel Panamá*, que pode ser encontrado em papelarias e lojas de artigos artísticos.

Nesse papel foi desenhado um triângulo e um outro de lados paralelos ao primeiro, distando cerca de 2 cm do menor. Ao recortar esses triângulos utilizando estilete, obtemos o molde.

- As marcações em relevo nos moldes dos triângulos foram feitas com cola colorida, distando 1 cm entre cada uma.
- As representações em relevo para resolução de problemas também foram desenhadas com cola colorida.

## 3.2 Objetivo

Ajudar o aluno deficiente visual a se apropriar do conceito de figuras semelhantes, particularmente, triângulos semelhantes. Identificar a razão como maneira de comparação das medidas dos lados correspondentes e aplicar esse conhecimento em problemas utilizando resolução de proporções simples.

## 3.3 Introdução

### 3.3.1 Fundamentação Teórica

**Definição 3.3.1** *Dizemos que dois polígonos são* ***semelhantes*** *se há uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que as medidas dos ângulos correspondentes sejam iguais e as medidas dos lados correspondentes sejam proporcionais.*

Da proporcionalidade dos lados dos polígonos semelhantes, segue que existe uma razão de semelhança $k \in \mathbb{R}$ tal que, sendo $A_i, i \in \mathbb{N}, i > 2$ os vértices de um polígono e $B_i, i \in \mathbb{N}, i > 2$ os vértices do polígono semelhante ao primeiro, tal que $i$ define uma ordenação, antihorária, por exemplo, dos vértices dos dois polígonos e $A_i$ corresponde biunívocamente a $B_i$, temos que

$$\frac{\overline{A_iA_{i-1}}}{\overline{B_iB_{i-1}}} = k.$$

**Definição 3.3.2** *Dizemos que dois triângulos são* ***semelhantes*** *se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que as medidas dos ângulos correspondentes sejam iguais e dos lados correspondentes sejam proporcionais.*

Assim, se os triângulos $\Delta ABC$ e $\Delta EFG$ são semelhantes e se A corresponde a E, B corresponde a F e C corresponde a G, então vale:

$$\hat{A} = \hat{E}, \hat{B} = \hat{F}, \hat{C} = \hat{G}$$
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}.$$

**Proposição 3.3.3** *(**Casos de Semelhança**)*

1. ***Caso AA (ângulo, ângulo)**: Se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos de outro, os triângulos são semelhantes.*

2. ***Caso LLL (lado, lado, lado)**: Se todos os lados de um triângulo forem proporcionais aos lados de outro, os dois triângulos são semelhantes.*

3. ***Caso LAL (lado, ângulo, lado)**: Se dois triângulos possuírem um ângulo congruente formado entre dois lados de medidas proporcionais, os dois triângulos são semelhantes.*

## 3.4 Desenvolvimento

### 3.4.1 Atividade 1

Desenhe, no multiplano, duas figuras não triângulares quaisquer na mesma posição, mas em espaços diferentes, cujos lados tenham medidas inteiras e a razão de proporção seja 3. Mostre-as ao aluno.

1. O que você percebe quanto à forma das duas figuras?

2. Identifique os lados correspondentes. (Em caso de dúvida, explique ao aluno que

   lados correspondentes são os lados que “têm o mesmo papel” em cada uma das figuras)

3. Conte, considerando cada medida do multiplano (ou geoplano) como uma unidade, quanto mede cada um dos lados da figura menor, anotando os resultados. Em seguida, meça os lados da figura maior e anote os resultados.

4. Compare as medidas dos lados que você destacou como correspondentes. O que você percebeu?

### 3.4.2 Atividade 2

Utilizando o molde e os triângulos semelhantes recortados em papel panamá, peça que o aluno reconheça os triângulos, um par de cada vez, fazendo as seguintes perguntas em cada etapa:

1. Você consegue perceber algo comum aos triângulos? O que eles têm de diferente?

2. É possível encaixar algum os ângulos de algum dos triângulos no molde? O que isso significa?

   Os ângulos de mesma medida são chamados ângulos congruentes (pois têm a mesma medida) correspondentes (pois, a menos de movimentos rígidos, estão na mesma posição em cada triângulo). Dois triângulos que possuem 3 pares de ângulos correspondentes são chamados de triângulos *semelhantes* pois possuem a mesma forma, mas não necessariamente as mesmas medidas.

3. É possível que dois triângulos que não são semelhantes tenham todos os três ângulos correspondentes congruentes? Por quê?

   Peça para que o aluno meça os lados de cada um dos triângulos utilizando o molde, inclusive os lados do próprio molde que também é um triângulo.

4. O que acontece quando dividimos as medidas dos lados correspondentes? Justifique sua afirmação.

   (Esperado: Obtemos sempre o mesmo resultado. Isso acontece porque um triângulo é “múltiplo” do outro.)

*Ao tomarmos dois triângulos semelhantes, quando fazemos a razão, ou seja, a divisão das medidas dos lados correspondentes, obtemos sempre o mesmo valor. Esse valor é chamado de coeficiente de proporcionalidade e representa o número pelo qual devemos "multiplicar a medida do lado de um triângulo" para achar a medida do lado correspondente no outro triângulo.*

Peça para que faça todas as divisões entre os lados correspondentes de cada triângulo. Depois, peça que ele enuncie uma propriedade envolvendo os lados dos triângulos semelhantes. Generalize.

**Propriedade:** Como um dos triângulos é "menor", chame seus lados de $a$, $b$ e $c$. Chame os lados correspondentes do triângulo maior de, respectivamente, $A, B$ e $C$. Chamaremos a razão de proporcionalidade de $k$.

Fazendo as divisões, temos que

$$\frac{a}{A} = k, \frac{b}{B} = k, \frac{c}{C} = k.$$

Daí,

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}.$$

Em outras palavras, as razões entre lados correspondentes de triângulos semelhantes são iguais.

### 3.4.3 Resolução de problemas envolvendo semelhança

Utilizando o molde e dois triângulos retângulos (um com lados medindo 3, 4 e 5, o outro com lados medindo 6, 8 e 10).

Mostre ao aluno as duas figuras, informe a medida dos lados, exceto o lado que mede 4. Pergunte:

- Os dois triângulos são semelhantes? Por quê? (Sim, caso LAL)
- Quanto mede o lado faltando? (o aluno falará a resposta, provavelmente)

**Problema 1**

Utilizando uma representação em relevo com cola colorida em papel panamá, de triângulo retângulo de lados 36, 15, onde o ângulo reto é adjacente a esses dois lados, e o lado de medida 36 é seccionado por uma reta paralela ao lado de medida 15, passando pelo ponto de distância 12 do vértice comum aos lados de medida 36 e 15. Mostre ao aluno as medidas disponíveis, que serão 12 e 24, somando o lado de 36 unidades e o lado de medida 10, no triângulo menor. Peça para que o aluno calcule o valor do lado correspondente ao lado que mede 10 no triângulo maior.

## 3.5 Relato das aplicaçãoes do Caderno de atividades de semelhança de figuras planas

### 3.5.1 *Colégio C*

#### Aluna 1 e Aluno 8

Os relatos abaixo são de atividades aplicadas em 04 de outubro de 2014 com os Alunos 1 e 8.

Antes de começar o trabalho, a professora da sala de recursos me informou que o Aluno 8 ainda não estava muito familiarizado com a escrita Braille, mas que a Aluna 1 estava e poderia ajudá-lo.

Comecei informando aos alunos que faríamos uma atividade sobre semelhança e perguntei se já tinham ouvido falar sobre esse assunto na matemática disseram que sim, mas que não estavam lembrados.

Desenhei dois retângulos no multiplano e mostrei primeiramente à Aluna 1, que ao tatear as figuras ficou em dúvida sobre ser um retângulo ou um quadrado, mas ela conseguiu perceber que um dos lados era maior que o outro. Quando ela disse: "é um quadrado, mas um lado é maior que o outro", imediatamente, o Aluno 8 disse: "Isso é um retângulo".

Pedi para que eles contassem quantos espaços havia nos lados do retângulo e eles conseguiram contar, e disseram que no menor, os lados mediam 3 e 5, enquanto no maior, os lados mediam 6 e 10, respectivamente. Imediatamente o Aluno 8 disse que o maior era duas vezes o menor. Expliquei que duas figuras com o mesmo formato mas lados de tamanhos diferentes são chamadas de figuras semelhantes.

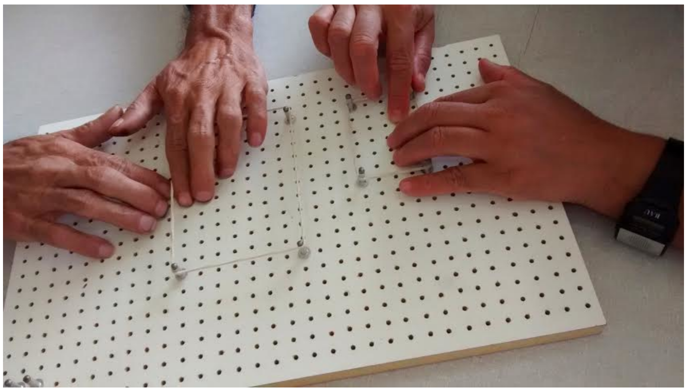

Figura 3.4: Aluna 1 e Aluno 8 utilizando o multiplano.

Entreguei os moldes de triângulos para que reconhecessem o material e expliquei que as marcações nas laterais tinham medidas de 1 cm. Eles reconheceram a figura interna como um triângulo. Em seguida, entreguei-lhes um triângulo semelhante ao molde, porém com medidas menores. Pedi para que verificassem se os três ângulos dos triângulos eram congruentes aos do molde (usei a linguagem "iguais") encaixando os ângulos do triângulo menor nos do molde. Os alunos conseguiram fazer isto tanto com o triângulo menor, quanto com o triâgulo médio.

Perguntei se isso significava alguma coisa em relação à forma dos triângulos recortados e do molde. O Aluno 8 respondeu que significava que eles eram semelhantes, porque tinham a mesma forma.

Em seguida, pedi para que medissem os lados dos triângulos recortados utilizando o molde como régua e eles também conseguiram fazer isto sem muita dificuldade, apenas se perdendo na contagem algumas vezes por esquecer de considerar a primeira marcação como zero.

Após realizar todas as medições do molde, do triângulo médio e do pequeno, pedi para que efetuassem as divisões entre os lados correspondentes. Eles conseguiram identificar que os lados de menor medida de cada triângulo são correspondentes, assim como os lados de maior medida e os outros lados "médios". Quando ditei as medidas dos lados, imediatamente o Aluno 8 percebeu que os triângulos que se relacionavam com razão de semelhança dois tinham as medidas "exatamente o dobro em relação ao outro".

Quando partimos para fazer as divisões dos lados dos triângulos que se relacionavam com razão de semelhança 1,333..., nenhum deles percebeu de imediato que as medidas se relacionavam e ambos tiveram dificuldade em realizar a divisão, pois aparentemente

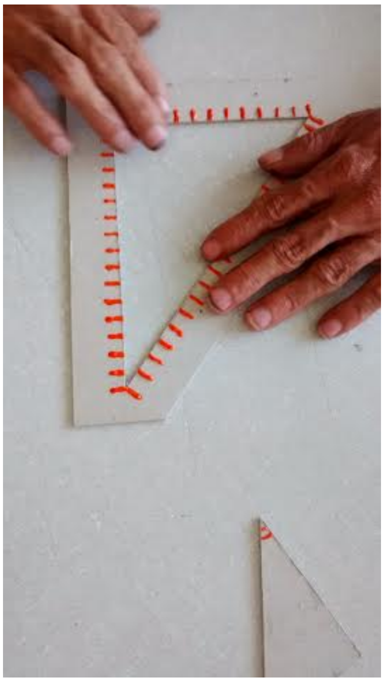

Figura 3.5: Aluno 8 utilizando o molde de triângulo.

não dominavam o conceito de divisão com quociente não inteiro. Sendo assim, realizei as divisões para eles na calculadora e informei os resultados. Eles perceberam que o quociente era sempre o mesmo. Perguntei se esse número teria algum significado e o Aluno 8 disse que era quanto um é maior que o outro.

Expliquei que esse número que surgia da divisão dos lados correspondentes é chamado de razão de semelhança.

Em seguida, passei para a resolução dos problemas utilizando as representações em relevo. Como o Aluno 8 não dominava o Braille, pedi para a Aluna 1 ler os números. Ela não conseguiu ler muito bem os números escritos em Braille com cola colorida devido ao espaçamento incorreto que surge da produção manual. Auxiliei na leitura informando as medidas.

O impressionante foi que o Aluno 8, apenas de ouvir as leituras feitas com a Aluna 1, conseguiu resolver imediatamente o problema dizendo a medida do lado que estava faltando corretamente, e explicando que ele percebeu que no triângulo maior, os lados eram o dobro do menor, sendo assim, o único que faltava no menor era o lado que media 4, que é metade do lado que mede 8 no maior. A Aluna 1 concordou com a resposta e com a justificativa.

Prosseguimos para resolver o outro problema. Como no segundo problema a razão de semelhança entre os triângulos não era um número inteiro, os alunos não conseguiram resolver o problema diretamente, embora a Aluna 1 tenha dito a resposta correta (15) mas não sabia explicar porque seria esse valor. Guiei os alunos na resolução do problema através das divisões dos lados correspondentes e verficando que a razão de semelhança é 1,5. Expliquei que sendo assim, os lados do triângulo maior são 1,5 vezes maior que os lados do triângulo menor. Imediatamente o Aluno 8 sugeriu que deveria ser feito uma regra de três para encontrar o outro valor e disse que seria realmente 15, porque 1,5 vezes 10 é 15. Concluímos então a atividade.

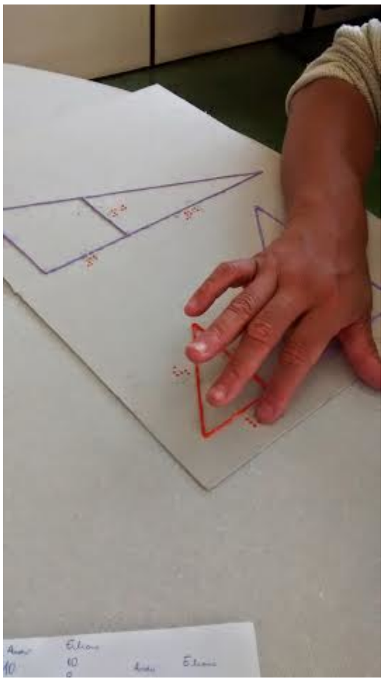

Figura 3.6: Aluna 1 utilizando a representação em relevo.

***Observações gerais relativas às aplicações no colégio C***

Considerei esta atividade bem sucedida porque observei que os alunos acharam relativamente fácil e foram capazes de compreender corretamente o conceito de semelhança de figuras e de semelhança de triângulos, sendo que, ao final, foram capazes de resolver rapidamente, e quase que sozinhos, problemas simples utilizando esses conceitos.

O tempo necessário para completar a atividade foi o estimado: cerca de 50 minutos. A atividade foi feita em sua totalidade e desta vez, a realização em duplas foi muito boa porque os alunos se ajudaram na realização da atividade e na resolução dos problemas propostos.

Quanto ao material, ocorreu o problema da leitura do Braille escrito com cola colorida de relevo. Essa experiência me mostrou que os alunos não são capazes de realizar a leitura correta quando a escrita em Braille está aumentada, diminuída ou irregular. Conversei com a professora da sala de recursos sobre esse problema e ela sugeriu que digitássemos os números na máquina de escrever em Braille e que eu colasse-os, substituindo a escrita com a cola em relevo. Digitamos os números e consegui solucionar esse problema do material.

A medição dos lados do triângulo através de marcações em relevo pareceu ser algo novo para os alunos, e que ambos gostaram. Creio que a impressão de medir contando foi nova para eles e pareceu agradá-los.

#### Comentários dos alunos sobre o material e a atividade

Perguntei aos alunos se haviam gostado do material e se achavam que ele foi útil para compreenção do conceito de semelhança e ambos disseram que o material estava muito bom. A Aluna 1 apenas ressaltou que o Braille não estava muito legível, que teria que ser refeito.

### 3.5.2 *Colégio S*

#### Aluno 4

Os relatos seguintes foram de aplicações desta atividade com o Aluno 4 em 11 de novembro de 2014. O Aluno 4 possui baixa visão, então esse aluno é capaz de enxergar com dificuldade. Devido às cores vibrantes do material, o aluno foi capaz de distinguir as marcações com cola colorida e, ao lado dos números escritos em Braille, escrevi à lápis o número correspondente em um tamanho razoavelmente grande para que ele pudesse enxergá-los.

Começamos a atividade. Disse ao Aluno 4 que esta atividade era sobre semelhança de figuras e perguntei se ele já havia estudado isto anteriormente. Ele disse que não. Começamos utilizando o geoplano. Preferi utilizar o geoplano ao multiplano pois seu fundo laranja destacava melhor a cor das borrachinhas utilizadas para desenhar as figuras.

Tomei essa decisão baseado nas observações feitas pelo professor da sala de recurso na aplicação da atividade anterior.

Desenhei um trapézio pequeno e outro trapézio semelhante ao primeiro, porém maior. Pedi para que o aluno reconhecesse as figuras e ele disse que elas tinham quatro lados. Perguntei se elas tinham mais alguma coisa em comum e ele começou a contar os espaços entre os pregos. Quando ele contou os espaços em dois lados do trapézio menor e em dois lados correspondentes do trapezio maior, ele afirmou que as figuras tem o mesmo formato, porém uma era maior que a outra. Eu disse que ele estava certo e perguntei como ele chegou a essa conclusão e ele disse: “contando os lados, da pra ver que um é o dobro do outro”.

Figura 3.7: Aluno 4 utilizando o multiplano.

Eu disse que duas figuras poligonais, com mesmo formato, ou seja, os mesmos ângulos, são figuras semelhantes. Além disso, em figuras semelhantes, todos os lados de uma das figuras são multiplicados pelo mesmo valor para se obter os lados da outra.

Fomos para os triângulos. Entreguei ao Aluno 4 os moldes com as marcações. Informei que cada marcação correspondia a 1 cm e pedi para que ele contasse quanto media cada um dos lados do triângulo no molde. Ele contou com facilidade, mais rápido que os alunos cegos, creio que ele utilizou a visão e o tato simultâneamente. Ele disse que os lados mediam 20, 12 e 16.

Entreguei-lhe um triângulo menor, cujos lados mediam 10, 6 e 8. Pedi para que ele verificasse se os ângulos desse triângulo eram os mesmo ângulos do molde. Primeiramente ele ficou em dúvida sobre como fazer isso e eu relembrei os ângulos são as “inclinações” entre as retas nas “pontas”, portanto, se as pontas se encaixarem com as pontos do molde, serão os mesmos ângulos. Imediatamente ele encaixou as três pontas e afirmou que tinham sim os mesmos ângulos, e que também tinham o mesmo formato.

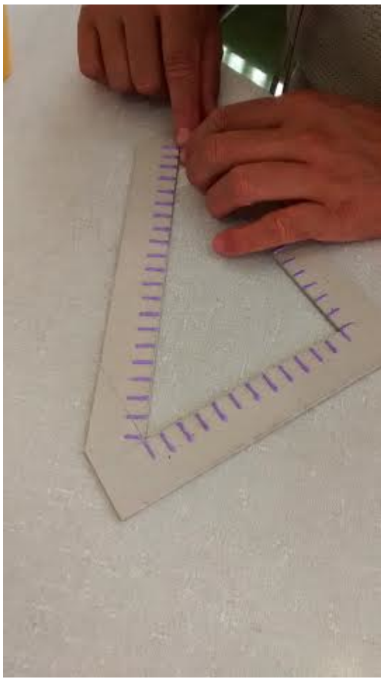

Figura 3.8: Aluno 4 utilizando o molde de triângulo.

Perguntei quantas vezes o molde é maior que o triângulo pequeno e ele não soube responder. Pedi para que medisse os lados do triângulo pequeno utilizando as marcações do molde e me desse a resposta. Ele mediu todos os lados corretamente e me disse que o triângulo grande era duas vezes o pequeno. Eu disse que ele estava certo e expliquei que o número 2 era a razão de semelhança, ou seja, multiplicando cada medida de lado do triângulo menor, obtemos as medidas de lado do triângulo maior. Equivalentemente, dividindo as medidas dos lados do triângulo maior pelos correspondentes do triângulo menor, sempre obtemos o resultado 2. Ele sinalizou que entendeu o que eu disse, inclusive o conceito de lados correspondentes sem que eu precisasse falar disto pois ele enxergava os triângulos, o que não ocorreu com os alunos cegos.

Em seguida, entreguei-lhe outro triângulo semelhante ao molde, mas dessa vez os lados mediam 15, 12 e 9. Pedi para que ele me dissesse a razão de semelhança entre o triângulo maior e o menor. Ele mediu corretamente os lados do triângulo menor utilizando o molde, como havia feito anteriormente mas não soube me dizer a razão, embora tenha tentado, porém o fato da razão não ser um número inteiro o parou, pois ele disse: “acho que não tem número que vezes 15 vai dar 20!”. Nesse momento, disse a ele que deveríamos usar a mesma ideia, ou seja, fazer a divisão entre os lados do maior e do menor e ver se econtraríamos o mesmo número. Então montamos as divisões em uma folha de papel e pedi para que ele realizasse a divisão de 20 por 15. O Aluno 4 não soube realizar a divisão com segurança e acompanhei o processo guiando o cálculo, que foi feito em uma folha de papel. Encontramos o valor 1,3333... . Prosseguimos para as outras divisões, que fizemos na calculadora para economizar tempo e vimos que todas elas deram o mesmo resultado. Então ele disse: “Então a razão é esse número quebrado 1,33?”. Respondi que sim.

Prosseguimos para os problemas desenhados em relevo no papel panamá. Entreguei a primeira situação, dos dois triângulos separados. Ele conseguiu enxergar os triângulos devido às cores vibrantes e também conseguiu enxergar os números que correspondiam às medidas dos lados. Disse a ele que, no triângulo menor, faltava a medida de um dos lados e que os dois triângulos eram semelhantes. Perguntei se seria capaz de me dizer a medida do lado faltando. Após alguns segundos ele disse que media 4. Eu disse que estava correto e perguntei se poderia justificar sua resposta. Ele disse:“o lado que mede 5 no menor, passou a ser 10 no maior, ou seja, multiplicou por 2. A mesma coisa aconteceu com o lado que media 3... Multiplicou por 2. Daí o lado oito no maior, no menor tem que ser 4, por que se do menor pro maior multiplica por 2, do maior pro menor tem que dividir por 2”. Eu disse que a justificativa dele estava ótima.

Passamos ao segundo problema. Mostrei-lhe as medidas que eram conhecidas, marcando com uma interrogação o lado que eu queria que fosse calculado. Expliquei que o segmento de reta que media 10 e o lado que deveria ser descoberto eram paralelos, ou seja, faziam o mesmo ângulo com a “base”. Perguntei se os triângulos tinham o mesmo formato e porquê. Ele disse que sim, mas não sabia explicar, que tinha visto isso apenas pela figura. Disse-lhe que os dois triângulos tinham um ângulo em comum, e que o fato das retas serem paralelas garantia outro ângulo congruente (utilizei a palavara “igual”). Além disso, o terceiro ângulo era congruente pelas mesmas razões do anterior. Ele fez uma cara meio confusa mas disse que havia compreendido.

Perguntei se ele conseguiria calcular quanto deveria ser o outro lado. Ele pensou durante uns 15 segundos e disse que deveria medir 15. Perguntei como ele chegou a essa resposta. Ele disse que "do triângulo menor pro maior, havia aumentado metade do tamanho, então o lado que faltava tinha que ser 10 mais metade de 10, logo, teria que ser 15". Eu disse que estava correto e mostrei a ele como o problema poderia ter sido resolvido utilizando as razões. No final, ele disse que o jeito dele era mais fácil e deu uma risada. Ri junto e expliquei que ele não estava errado, mas utilizar as razões era uma maneira mais geral de resolver os problemas. Terminamos a atividade.

***Observações gerais relativas à aplicação no Colégio S***

Infelizmente, esta atividade só foi feita por um aluno do Colégio S por falta de disponibilidade dos outros alunos. Como o Aluno 4 tem baixa visão, a realização da atividade foi mais rápida, cerca de 35 minutos.

Não tivemos problema com o material e creio que os objetivos propostos foram alcançados. O aluno mostrou ter compreendido bem e aplicado corretamente os conceitos de proporcionalidade e de semelhança de figuras, ainda que de maneira não muito formal.

***Comentários do aluno do Colégio S sobre o material e a atividade***

Perguntei ao aluno se ele havia gostado do material e ele disse que estava ótimo. Ele perguntou, com uma expressão meio que de surpresa, se eu mesmo havia feito. Eu disse que sim. Ele completou dizendo que gostou muito. Agradeci a ele pelo elogio e disse que na outra semana eu traria outro material, e que seria muito bom se ele pudesse participar novamente. Ele disse que compareceria.

O Aluno 4 não deu nenhuma sugestão para melhorar o material e aparentemente gostou bastante da atividade. Também é importante observar que na data da aplicação para o Aluno 4, o material já havia sido alterado, trocando os números escritos em Braille com cola colorida por números escritos em Braille datilografados e colados sobre o papel panamá. Contudo, o Aluno 4 leu os números grandes que escrevi à mão, logo esta alteração não foi significativa para ele.

## 3.6 Conclusões relativas à aplicação do caderno de Semelhança de Figuras Planas

Os objetivos propostos com esta atividade foram alcançados. Os alunos foram capazes de compreender corretamente o conceito de semelhança, de identificar figuras semelhantes e aplicar o conceito de proporcionalidade para resolver problemas simples. Em geral, os materiais utilizados se mostraram muito úteis para compreensão desses conteúdos e o único problema encontrado neles foi o da escrita em Braille, que teve de ser refeita utilizando a máquina apropriada. Podemos afirmar que o material facilitou a aprendizagem pois tornou viável aos alunos utilizar a contagem como ferramenta para medir o comprimento de lados das figuras e comparar estas medidas afim de verificar se duas figuras são ou não semelhantes.

O que me surpreendeu em relação aos alunos DVs, nesta atividade, foi sua capacidade de abstrair o formato e caractéristicas de uma figura plana pelo tato. Em outras palavras, achei surpreendente como, tateando as retas desenhadas em cola colorida ou as borrachas utilizadas para marcar as figuras no multiplano/geoplano, os alunos foram capazes de reconhecer as formas e até mesmo supor quais figuras seriam semelhantes, além de enunciarem algumas características simples. Isso mostra sua capacidade de imaginar uma figura através de informações táteis, mesmo não possuindo a visão.

Além disso, também me surpreendi com sua familiarização com o conceito de proporcionalidade, que não necessariamente é desenvolvido geometricamente, mas que eles conseguiram aplicar à essa situação com facilidade e naturalidade. Na maior parte do tempo e na maioria das situações, os alunos foram capazes de resolver esses problemas utilizando apenas cálculo mental, o que também é fascinante.

# Capítulo 4

# As relações Métricas no Triângulo Retângulo

As relações métricas em triângulos retângulos são conceitos muito populares na matemática e de grande utilidade em várias áreas das ciências da natureza e engenharia, das quais se destaca o Teorema de Pitágoras. Contudo, o ensino dessas relações, até mesmo para alunos que enxergam normalmente, é extremamente massante e geralmente é dado por fórmulas que em grande parte das escolas não são demonstradas ou explicadas, fazendo com que o aluno se veja obrigado a aceitá-las como verdadeiras, cabendo a ele o único esforço mental de saber como e onde aplicá-las.

No caso dos alunos deficientes visuais, a situação é ainda pior porque são privados até da experimentação visual desses resultados, e essas equações acabam se tornando verdadeiras receitas, onde muitas vezes o professor comunica ao aluno quais são as medidas dos catetos ou da hipotenusa de um triângulo retângulo, e cabe ao aluno apenas a tarefa de realizar as operações matemáticas algebricamente, sem entender de fato a importância e a beleza desses conteúdos.

Com base nisso, através de adaptações simples de materiais concretos, é apresentado aqui um roteiro de atividade que pode ser aplicado tanto para alunos videntes como deficientes visuais que explora essas relações, com foco principal no Teorema de Pitágoras. Observando a matriz de referência do ENEM, o caderno de atividades a seguir contribui para o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

  - H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
  - H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
  - H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

- Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
  - H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.
  - H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
  - H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

- Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
  - H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
  - H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
  - H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

## 4.1 Material

- Representação de triângulo retângulo com quadrados traçados sobre seus lados;
- Pastilhas de vidro com pontas arredondadas suficientes para preencher o quadrado maior do molde anterior;

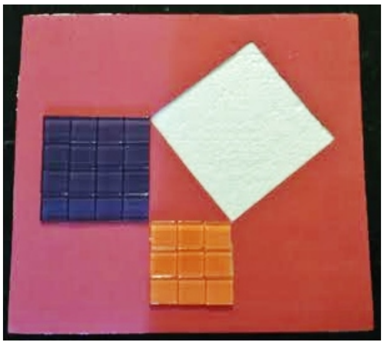

Figura 4.1: Tabuleiro com a representação de triângulo retângulo com quadrados traçados sobre seus lados e pastilhas de vidro cobrindo dois de seus quadrados, um com 9 pastilhas e outro com 16 pastilhas em seu interior.

- Moldes de triângulos retângulos com seus interiores, recortados na altura relativa à hipotenusa;

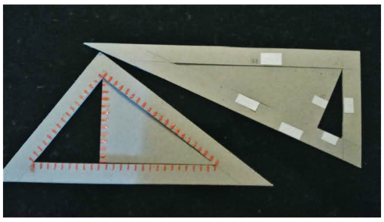

Figura 4.2: Moldes de triângulos retângulos com altura traçada em relação à hipotenusa, um com marcações para medida em relevo e outro com medidas dos lados escrita em Braille.

- Calculadora falante ou soroban;
- Lápis e papel.

Observações:

- As pastilhas de vidro utilizada nessa atividade podem ser encontradas em lojas de materias para construção e acabamento.

- O tabuleiro com a representação do triâgulo retângulo com quadrados traçados sobre seus lados foi confeccionado em uma placa de isopor coberta com E.V.A. Esta placa é um quadrado de cerca de 30 cm de lado. O desenho foi feito sobre o E.V.A., recortado e colado sobre o isopor, criando um relevo que facilita o encaixe das pastilhas de vidro.

- Os moldes de triângulos retângulos foram cofeccionados como especificado nos materiais da atividade do capítulo anterior, sendo que as medidas em Braille foram feitas em uma máquina de escrever própria, afim de manter as características dessa escrita.

- A calculadora falante pode ser encontrada em lojas de eletrônicos ou pela Internet.

## 4.2 Objetivos

Ensinar o aluno deficiente visual a identificar os elementos de um triângulo retângulo quando traçada sua altura relativa à hipotenusa, como catetos, hipotenusa, altura e projeções. Induzir o aluno à utilização das relações métricas no triângulo retângulo, demonstrar essas relações (incluindo o Teorema de Pitágoras) e aplicá-las em problemas.

## 4.3 Introdução

### 4.3.1 Fundamentação Teórica

**Definição 4.3.1** *Dizemos que um triângulo é retângulo se um de seus ângulos possui medida de* $90°$.

Seja um triângulo retângulo $\Delta ABC$, retângulo em $\hat{A}$. A altura correspondente à hipotenusa BC é o segmento de reta AH, $H \in BC$ tal que $med(\widehat{AHC}) = med(\widehat{AHB}) = 90°$.

**Teorema 4.3.2** *(Relações Métricas do Triângulo Retângulo): Seja $\Delta ABC$ um triângulo retângulo de hipotenusa $AB$, tal que $AB = a$, $BC = b$ e $AC = c$. Seja, ainda, $H \in AB$ o pé da altura do triângulo $\Delta ABC$ relativa à hipotenusa $AB$, tal que $CH = h$, $AH = m$ e $BH = n$. Então:*

1. $h^2 = mn$
2. $c^2 = a.m$ e $b^2 = a.n$
3. $b.c = a.h$
4. (Teorema de Pitágoras): $a^2 = b^2 + c^2$

**Demonstração:** (1) Pelo caso de semelhança AA, temos que $\Delta AHC$ e $\Delta BHC$ são semelhantes. Segue daí que

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Leftrightarrow h^2 = m.n$$

(2) Pelo caso de semelhança AA, temos que $\Delta ACH \cong \Delta ABC$ e $\Delta BCH \cong \Delta ABC$. Segue daí que

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Leftrightarrow c^2 = a.m$$

e

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Leftrightarrow b^2 = a.n.$$

(3) Pelo caso de semelhança AA, temos que $\Delta BCH \cong \Delta ABC$. Segue daí que

$$\frac{b}{a} = \frac{h}{c} \Leftrightarrow b.c = a.h.$$

(4) Somando as duas equações em (2), temos

$$b^2 + c^2 = a.n + a.m = a.(m + n)$$

mas $(m + n) = a$, daí

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

$\square$

## 4.4 Desenvolvimento

### 4.4.1 Atividade 1

Tome a representação do triângulo retângulo.

Mostre-a ao aluno e peça para que ele imagine bem a figura. Informe que nessa figura há somente triângulos e quadrados.

1. Quantos triângulos você consegue contar na figura? E quantos quadrados?

2. Como podemos classificar o triângulo da figura?

   Entregue ao aluno as pastilhas de vidro e peça para que ele preencha os dois quadrados menores (indique quais são, se necessário) com elas.

3. Conte quantas pastilhas de vidro há em cada um dos quadrados menores. Supondo que cada pastilha seja um quadrado de lado medindo uma unidade, quanto mede o lado de cada um dos quadrados menores?

4. Sabendo-se que a área de um quadrado é o valor de seu lado ao quadrado, ou seja, o produto de dois de seus lados, calcule a área de cada um dos quadrados menores? O que esse valor tem a ver com a quantidade de pastilhas?

5. Você acha que é possível colocar todas as patilhas utilizadas para preencher os dois quadrados menores no quadrado maior? Faça isso. O que observou?

6. Utilizando as pastilhas como referência, quanto mede o lado do quadrado maior? Qual sua área?

7. Podemos observar que o triângulo em questão tem 3 lados diferentes. Na Geometria, quando temos um triângulo retângulo, ou seja, um triângulo que possui um ângulo de $90°$, chamamos o lado maior de hipotenusa e os outros dois lados de catetos. Identifique a hipotenusa e os catetos desse triângulo

8. O que podemos afirmar sobre a área do quadrado maior?

9. Através do que observamos, diga uma equação que relacione os quadrados das medidas dos três lados do triângulo retângulo.

(Esperado: $5^2 = 3^2 + 4^2$)

Essa relação é um exemplo do *Teorema de Pitágoras*, uma das relações mais famosas e importantes da Matemática. O Teorema de Pitágoras enuncia que, em triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Ou ainda,

**Teorema 4.4.1** ***Teorema de Pitágoras***: *Dado um triângulo $\Delta ABC$, de lados com medidas $AB = b$, $AC = C$ e $BC = a$, ele será retângulo em $A$ se, e só se,*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

### 4.4.2 Atividade 2

Entregue ao aluno os moldes de triângulo retângulo com as marcações.

1. Nos dois triângulos é válido o Teorema de Pitágoras? Verifique. Se sim, podemos afirmar que esses triângulos são retângulos?

   Entregue ao aluno os triângulos que completam a parte interna do molde. Peça que ele verifique se os triângulos são todos semelhantes entre si.

   *Dica:* Identifique os lados correspondentes encaixando os ângulos.

   No molde cujos lados medem 25, 20 e 15, encaixe os triângulos que o completam e mostre ao aluno o que são as projeções, a altura relativa à hipotenusa e os catetos.

2. Peça que o aluno calcule o quadrado da medida da altura e em seguida calcule o produto das projeções. O que ele observou? E no outro molde, acontece o mesmo?

   Enuncie a seguinte relação:

   **Relação 1**: Em um triângulo retângulo qualquer, o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções.

3. Agora, no molde de lados 25, 20 e 15, peça para que o aluno selecione um dos catetos e calcule o quadrado de sua medida. Em seguida, peça para que ele calcule o produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção correspondente ao

cateto selecionado. O que ele observou? O mesmo acontece com o outro cateto? E no outro molde?

Enuncie a seguinte relação:

**Relação 2**: Em um triângulo retângulo qualquer, a medida de um dos catetos ao quadrado é igual ao produto da hipotenusa e da projeção correspondente.

4. Novamente, peça para que no molde de lados 25, 20 e 15, o aluno multiplique as medidas dos dois catetos. Em seguida, peça para que ele multiplique a medida da hipotenusa pela medida da altura. O que ele observou? O mesmo ocorre no outro molde?

   Enuncie a seguinte relação

   **Relação 3:** Em um triângulo retângulo qualquer, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa e da altura relativa a ela.

## 4.5 Relatos das aplicações do caderno de atividades de Relações Métricas no Triângulo Retângulo nas escolas

### 4.5.1 Colégio C

Em 18 de novembro de 2014, apliquei esta atividade para os Alunos 9 e 8, formando uma dupla, e com a Aluna 1, individualmente. O Aluno 9 tem baixa visão.

#### Alunos 8 e 9

Comecei falando aos alunos que essa atividade seria sobre relações métricas no triângulo retângulo e entreguei o tabuleiro com a representação, mas sem as pastilhas de vidro. Pedi para que o Aluno 8 identificasse as figuras que estavam recortadas e ele identificou como "3 quadrados ou 3 retângulos e um triângulo no meio", o que foi confirmado pelo Aluno 9. Entreguei a eles as pastilhas de vidro e disse que essas pastilhas eram quadrados de lado medindo uma unidade, ou seja, comprimento 1. Pedi para que medissem, com ajuda das pastilhas de vidro, os lados do triângulo e os lados do possível quadrado. Eles mediram e identificaram que o triângulo possuia medidas 3, 4, e 5, assim como as medidas dos lados dos quadriláteros, que foram reconhecidos como quadrados pois possuiam lados de mesma medida.

Em seguida, pedi que verificassem quantas pastilhas seria possível encaixar no quadrado de lado 3 e eles o fizeram, retornando o resultado 9. Expliquei que essa é a área desse quadrado, pois 9 é o produto de 3 e 3, ou seja, $3^2$. Pedi para que fizessem o mesmo com o quadrado de lado 4 e eles disseram que cabiam 16 pastilhas. Completei dizendo que a área daquele quadrado seria $4^2$, ou seja, 16.

Perguntei se eles achavam que todas as pastilhas nos dois quadrados seriam suficientes para preencher todo o espaço do quadrado de lado 5 e ambos disseram que achavam que não. Pedi para que retirassem todas as pastilhas do outros dois quadrados e tentassem colocar todas as mesmas pastilhas no quadrado maior. Eles o fizeram, com o Aluno 9 ajudando o Aluno 8 no encaixe das pastilhas. Ao perceber que todas as pastilhas preenchiam exatamente o espaço do quadrado maior, eles ficaram surpresos e o Aluno 8 disse: “Nossa, deu certinho!”.

Perguntei quantas pastilhas havia no quadrado maior e o Aluno 9 respondeu 25. O Aluno 8 confirmou após realizar a contagem. Expliquei que 25 é a medida de seu lado ao quadrado, ou seja, $5^2$. Sendo assim, mostrei que a área do quadrado maior é a soma das áreas dos outros dois quadrados desenhados sobre os lados do triângulo, ou seja, $5^2 = 3^2 + 4^2$. Em outras palavras, no triângulo retângulo desenhado, a medida do lado maior, ao quadrado, é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados. Expliquei que essa relação é chamada de Teorema de Pitágoras e diz que, em um triângulo retângulo (ou seja, que possui um ângulo de 90°), o quadrado do lado maior (chamado hipotenusa) é igual à soma dos quadrados dos catetos (os outros dois lados).

Prosseguimos para verificação de que essa relação é válida em outros triângulos retângulos. Entreguei a eles o molde de triângulo retângulo com medidas 25, 20 e 15. Esse triângulo é semelhante ao triângulo do tabuleiro e eles logo perceberam isto após contar as medidas dos lados utilizando as marcações, e o Aluno 8 disse:“então esse é 5 vezes o outro”. Pedi para que verificassem se o lado maior ao quadrado era igual a soma dos quadrados dos outros dois lados. Ambos tiveram dificuldades em calcular as potências (como $25^2$), e por isso, tive que acompanhar os cálculos que foram feitos em sua maioria pelo Aluno 9, utilizando lápis e papel. Ao terminar todos os cálculos, eles concluíram que realmente os resultados eram iguais e portanto o Teorema de Pitágoras valia naquele triângulo.

Expliquei-lhes que um triângulo que satisfaz o Teorema de Pitágoras é um triângulo retângulo e que o ângulo reto é o oposto ao lado maior, mostrando esses elementos no triângulo 25, 20 e 15. Depois disso, entreguei-lhes o triângulo de lados 5, 12 e 13 e perguntei se ele era retângulo. Eles não souberam responder e relembrei-os do que havia dito anteriormente. Prosseguimos em verificar se o Teorema de Pitágoras valia naquele triângulo. Efetuamos, da mesma maneira que antes, as potências e verificamos que $13^2 = 12^2+5^2$. Perguntei a eles se com essa informação, poderíamos afirmar que aquele triângulo era retângulo e eles disseram que “sim, pelo Teorema de Pitágoras”.

Voltamos ao molde do triângulo 25, 20 e 15. Entreguei-lhes dois triângulos e pedi para que verificassem se eles eram semelhantes ao triângulo do molde. Eles compararam os ângulos, como haviamos visto na atividade anterior, e viram que cada um dos ângulos se encaixava em algum ângulo do triângulo no molde, e portanto, todos aqueles triângulos eram semelhantes. Perguntei se seria possível encaixar os dois triângulos dentro do molde, e após algum esforço e com ajuda do Aluno 9, o Aluno 8 encaixou corretamente os dois triângulos. Em um deles, a altura estava dividida em marcas de 1 cm. Expliquei que a altura de um triângulo retângulo é o segmento que vai de um vértice (ou ponta, como expliquei para eles) até a base, formando um ângulo de 90°. Eles foram capazes de constatar que o ângulo era reto pois viram anteriormente que os dois triângulos eram semelhantes ao maior, que era retângulo.

Pedi para que eles contassem quanto era o valor da altura e, no lado maior, observando que ela o dividia em duas partes, quanto media cada uma delas. Eles disseram que a altura media 12 e que cada uma das partes media 16 e 9. Expliquei que, nos triângulos retângulos, existem outras relações como o Teorema de Pitágoras, e uma delas diz que o quadrado da altura é o produto das duas projeções, ou seja, o produto das medidas determinadas pela altura na hipotenusa, mostrando os elementos para os alunos no triângulo enquanto falava. Prosseguimos para verificação dessa relação, ou seja, perguntei a eles se a altura ao quadrado ($12^2$) era igual ao produto das projeções ($16 \times 9$). Fizemos as contas como anteriormente e constatamos que os valores eram, de fato, os mesmos. Encerramos a atividade pois os alunos teriam aula após aquele horário.

**Observações sobre os Alunos 8 e 9**

O Aluno 9, por ter baixa visão, acompanhou a maior parte da atividade com os olhos, o que foi favorecido pelo tamanho das pastilhas de vidro e das cores vibrantes utilizadas, enquanto o Aluno 8, que é totalmente cego, utilizou o tato. Sendo assim, o Aluno 9 ajudava o Aluno 8 a encaixar melhor o que seria necessário e a fazer as contas utilizando o papel e o lápis, o que poderia ser substituído por um soroban ou por uma calculadora falante caso ambos os alunos fossem cegos.

Os dois alunos acompanharam com facilidade a atividade, que abrangeu apenas duas relações métricas pela falta de tempo disponível dos alunos.

Ao término da atividade, perguntei o que acharam do material e ambos disseram que gostaram muito, principalmente da parte do Teorema de Pitágoras, mas que os moldes também estavam muito bons.

***Aluna 1***

Começamos a atividade e apresentei à aluna o tabuleiro sobre o Teorema de Pitágoras. Pedi para que ela identificasse as figuras ali presentes e ela identificou os três quadrados mas não mencionou o triângulo. Mostrei a ela o triângulo e disse que aquele era um triângulo retângulo, indicando o ângulo de 90°. Entreguei-lhe algumas pastilhas de vidro e pedi para que medisse cada um dos lados do triângulo e me dissesse quanto mediam esses lados e os lados do quadrado, onde cada uma das pastilhas seria um quadrado de lado 1. Ela realizou as medições e disse que o triângulo tinha medidas 3, 4 e 5, e que os lados dos quadrados tinham a mesma medida.

Figura 4.3: Aluna 1 utilizando o tabuleiro para verificar o Teorema de Pitágoras.

Entreguei mais algumas pastilhas e pedi para que ela verificasse quantas pastilhas seria possível colocar no quadrado cujo lado media 3. Ela encaixou as pastilhas corretamente (e sem muita dificuldade, pois foi se apoiando nos lados do quadrado para encaixá-las com facilidade) e disse que ali cabiam 9 pastilhas. Perguntei a ela qual relação existia entre a quantidade de pastilhas, que eram 9, e o tamanho do lado do quadrado, que era 3. Ela respondeu que o 9 era $3 \times 3$. Expliquei que a quantidade de pastilhas que ali cabiam correspondiam à área do quadrado, ou seja, a quantidade de quadradinhos de lado 1. Essa quantidade seria 9 pois seria exatamente o produto dos lados do quadrado, ou seja, $3^2$. Em seguida, perguntei quanto seria a área do quadrado de lado 4 e ela respondeu "16, pois seria $4 \times 4$". Pedi para que verificasse se ali cabiam 16 pastilhas. Ela encaixou as pastilhas e contou todas, confirmando o resultado esperado.

Perguntei-lhe se achava que, juntando as pastilhas que estavam nos dois quadrados menores, poderíamos ocupar todo o espaço do quadrado maior. Ela respondeu que achava que sobrariam pastilhas. Pedi a ela para que retirasse todas as pastilhas dos outros dois quadrados e as colocasse no quadrado maior. Ela fez isto e percebeu que todas elas couberam ali, sem sobrar espaço. Quando ela percebeu isso, ela disse: "Nossa! Coube tudo!". Perguntei quantas pastilhas haviam no quadrado maior e ela contou todas e disse 25. Expliquei que 25 é o quadrado de 5, e que, com isso, observamos que, no triângulo retângulo desenhado, o lado maior ao quadrado era igual a soma dos quadrados dos outros dois, ou seja, $5^2 = 4^2 + 3^2$. Disse que esse é o Teorema de Pitágoras. Perguntei se achava que essa relação acontecia em outros triângulos retângulos, com medidas diferentes e ela disse que achava que não.

Prosseguimos para o molde do triângulo de medidas 25, 20 e 15. Pedi que contasse as medidas dos lados através das marcações, como havíamos feito na atividade anterior e ela contou corretamente os lados. Perguntei se essas medidas obedeciam o Teorema de Pitágoras e prosseguimos para a verificação. Com a utilização do soroban, ela foi capaz de calcular corretamente os quadrados das medidas e verificou que valia o Teorema.

Entreguei-lhe outro triângulo, com medidas 12,13 e 5 marcadas em Braille. Perguntei como poderíamos fazer para verificar se esse triângulo era retângulo, ou seja, possui um ângulo de 90°, sem utilizar o transferidor e ela não soube responder. Então expliquei a ela que apenas são retângulos os triângulos em que vale o Teorema de Pitágoras e prosseguimos para verificação. Novamente ela utilizou o soroban e fez as contas corretamente, concluindo que valia o teorema, mas ela não soube dizer qual dos três ângulos seria o reto, então eu disse a ela que era o ângulo oposto ao lado maior, e ela apontou para o correto.

Voltamos ao triângulo de medidas 25, 20 e 15 para verficiar a relação $h^2 = m.n$. Nesta verificação, tudo ocorreu de maneira similar aos alunos da aplicação anterior. Verificamos que a fórmula funcionava e tivemos que encerrar a atividade pois a filha da aluna havia chegado para levá-la e não podia esperar mais.

#### *Observações gerais relativas às aplicações no Colégio C*

O tempo esperado para a aplicação da atividade foi cerca de 50 minutos, como esperado. Infelizmente, os 3 alunos não conseguiram completar as relações métricas pela falta de tempo, por razões diversas.

A realização da atividade em duplas ou individualmente mostrou resultados similares e o material foi bem recebido pelos alunos, e não foram constatados problemas na sua construção.

Os alunos 8 e 9 se mostraram bem interessados no tabuleiro do Teorema de Pitágoras, perguntando no que utilizamos esse fato. Expliquei que desde o Egito antigo, os triângulos são utilizados na construção civil, e que, particularmente o triângulo 3, 4 e 5 era utilizado para verificar se duas paredes de uma casa estavam, de fato, formando um ângulo reto. Expliquei que os egípcios dividiam uma corda em 12 partes iguais e formavam um triângulo com essas medidas. Ao alinhar a parede com os lados que medem 3 e 4, eles verificavam que a parede estava "no esquadro" porque sabiam que aquele seria um ângulo reto. Eles gostaram muito da curiosidade histórica.

***Comentários dos alunos do Colégio C sobre o material e a atividade***

Os alunos 8 e 9 disseram que gostaram muito, principalmente da parte do Teorema de Pitágoras, mas que os moldes também estavam muito bons. O Aluno 8, inclusive, falou que o trabalho que estava sendo desenvolvido é muito bom para ajudar os deficientes visuais no estudo de geometria porque assim eles conseguiam "ver" o que estava sendo falado e não só simplesmente ouvir uma fórmula e ter que reproduzir o que era dito. Fiquei muito feliz e mais motivado de ouvir isso de um aluno espontâneamente.

A Aluna 1 afirmou que gostou bastante, que estava muito bom e melhorando pelas semanas. Disse que gostou muito do tabuleiro sobre o Teorema de Pitágoras e que já tinha ouvido falar disso mas nunca teve a oportunidade de entender do que realmente se tratava. Também fique satisfeito com essas observações.

***Colégio S***

**Alunos 4, 6 e 10**

Os relatos a seguir são de aplicações da atividade com os alunos 4, 6 e 10 no dia 09 de abril de 2015.

Mostrei aos alunos o tabuleiro com as pastilhas de vidro e pedi para que identificassem as figuras geométricas, rapidamente o Aluno 10 identificou os três quadrados, assim como identificou o triângulo, além de reconhecê-lo sozinho como triângulo retângulo. Perguntei o que um triângulo precisaria para ser retângulo e o Aluno 10 respondeu:"ter um ângulo como esse, de 90°", apontando para o ângulo reto.

Entreguei algumas pastilhas para cada um deles e pedi para que medissem os lados dos quadrados, definindo cada lado da pastilha como medida 1. A Aluna 6 mediu o quadrado de lado 4 com a ajuda do Aluno 4, já o Aluno 10 mediu o quadrado de lado 3. O quadrado de lado 5 não foi medido. Perguntei a eles se eles se lembravam como se calcula a área de um quadrado e eles responderam que seria "lado vezes lado, ou lado ao quadrado". Pedi então para que calculassem a área desses quadrados e eles responderam, respectivamente, 16, 9 e 25. Perguntei se eles sabiam quantas pastilhas seriam suficientes para preencher completamente esses quadrados e eles responderam, com incerteza, os mesmos valores da área.

Pedi para que os Alunos 6 e 10 completassem seus quadrados com pastilhas e eles o fizeram sem dificuldades, verificando que as quantidades de pastilhas eram realmente 9 e 16. Em seguida, pedi que retirassem todas as pastilhas e perguntei se, juntando as duas quantidades, seria suficiente para preencher o quadrado maior. O Aluno 10, conhecendo o teorema, já havia antecipado a medida do lado do quadrado maior e disse que seria suficiente. Os outros dois alunos concordaram, porém com certa desconfiança. Pedi para que eles encaixassem todas as pastilhas no quadrado maior. Eles encaixaram e perceberam que realmente cabiam. Perguntei se poderíamos tirar dali alguma relação e o Aluno 10 enunciou o Teorema de Pitágoras. Expliquei para os outros dois o que seria hipotenusa e catetos e eles compreenderam o teorema.

Entreguei-lhes dois triângulos semelhantes ao triângulo 3, 4, 5. A Aluno 4 e a Aluna 6 receberam um triângulo de lados 15, 20 e 25. Pedi para que medissem os dois catetos pelas marcações, calculassem o valor da hipotenusa e verificassem a validade do teorema. Eles o fizeram, inclusive calcularam tudo mentalmente e confirmaram a validade. O Aluno 10 recebeu o triângulo de medidas 12, 16 e 20 e fez o mesmo, com muita facilidade. Expliquei que esses triângulos eram semelhantes ao triângulo 3, 4 e 5 e que podíamos verificar isto pelo caso LLL. Havíamos então constatado que o teorema valia em triângulos semelhantes.

Em seguida, mostrei um triângulo com as medidas 12, 5 e 13. Pedi que medissem os catetos e fizessem o mesmo, verficando se o teorema valia nesse triângulo também. Os três juntos concordaram que a hipotenusa media 13, embora o Aluno 4 tenha tido um pouco de dificuldade de calcular mentalmente o valor da hipotenusa. Perguntei o que esse triângulo teria de diferente em relação aos outros que haviamos trabalhado. Disseram que não era semelhante e que não havia um número que ao multiplicar por 3, 4 e 5, simultâneamente, resultaria em 5, 12 e 13.

Prosseguimos então para segunda relação métrica, que diz que a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, ao quadrado, é igual ao produto das projeções. Peguei um dos moldes e encaixei dentro dele um dos triângulos retirados que continha a medida da altura. Mostrei o que seria altura relativa à hipotenusa, e que ao traçá-la, ela determina duas projeções, mostrando-as também no molde. Pedi para que medissem, através das marcas, a altura e as medidas das projeções. Pedi para que calculassem o quadrado da medida da altura e a Aluna 6 efetuou o cálculo mentalmente, dizendo que seria 144. Pedi para que o Aluno 4 calculasse o produto das projeções e ele respondeu que $9 \times 16$ seria 144.

Tomamos o outro molde e fizemos extamente o mesmo e observamos a validade dessa relação métrica. Encerramos aqui a atividade.

### ***Observações gerais relativas às aplicações no Colégio S***

A aplicação da atividade foi mais rápida que no Colégio C, levando cerca de 30 minutos. Creio que devido ao fato dos alunos do colégio S terem um raciocínio matemático mais rápido e realizarem cálculos mentais com mais facilidade.

Na data da aplicação dessa atividade, os alunos já não estavam mais matriculados nesse colégio pois já haviam se formado. O Aluno 10 já havia se formado há algum tempo e já cursava nível superior. Achei muito interessante o fato deles terem se empenhado em voltar à escola para realizar as atividades.

Não foram encontrados erros no material e os objetivos propostos foram alcançados, embora apenas duas relações métricas tenham sido estudadas. Creio que mostrar as quatro relações seja muita informação para apenas um encontro.

Os alunos do Colégio S mostraram muito interesse em realizar as atividades propostas e um raciocínio matemático muito rápido e bem desenvolvido para cálculos mentais, generalizações e lógica, o que facilitou e agilizou a aplicação da atividade.

***Comentários dos alunos do Colégio S sobre o material e as atividades***

De modo geral, os alunos gostaram do material, principalmente do tabuleiro com as pastilhas de vidro. Eles diseram que foi bem didático e que puderam realmente experimentar o teorema, que ficou esteticamente "bonito" para o tato também. Eles também comentaram sobre os moldes e disseram que a idéia de contar pelas marcas é boa, que eles se perderam algumas vezes mas que talvez tenha sido por falta de costume.

Para Aluno 4, que possui baixa visão, perguntei se as cores utilizadas eram fáceis de serem diferenciadas e ele disse que se houvesse mais contraste, por exemplo, substituir o laranja por outra cor não tão próxima do vermelho, seria melhor.

## 4.6 Conclusões relativas à aplicação do caderno de atividades de Relações Métricas

Os objetivos propostos foram alcançados parcialmente, já que duas das relações métricas não foram mostradas. Isso aconteceu por falta de tempo e por ser muito conteúdo para apenas um encontro, além de tornar a atividade mais massante.

Em geral, não houve problema com os materiais utilizados e eles contribuiram significativamente para o aprendizado dos conteúdos trabalhados. O tabuleiro com a representação do triângulo retângulo com quadrados desenhados sobre seus lados e as pastilhas de vidro chamaram muito a atenção dos alunos e teve papel fundamental nessa atividade. Esse material viabilizou uma interpretação geométrica, através do tato e da visão (apenas no caso dos alunos de baixa visão), do significado do Teorema de Pitágoras, que foi inédito para a maioria deles. Muitos alunos ficaram surpresos com o resultado, o que mostrou que eles compreenderam corretamente o funcionamento da atividade e relacionaram o que estavam experimentando com o resultado matemático.

Algo surpreendente observado nas aplicações desta atividade foi a capacidade de calcular mentalmente multiplicações seguidas de adições, o que foi observado principalmente nos alunos do Colégio S. Muitos alunos que vêem não conseguem realizar mentalmente cálculos como esses, provavelmente por falta de treino, que vem da falta da necessidade e de estarem habituados com a facilidade de realizar estes cálculos por algoritmos que utilizam a escrita. Apesar de suas limitações, todos os participantes conseguiram realizar a atividade com bastante facilidade, bem como generalizar os resultados.

# Capítulo 5

# Os poliedros e a relação de Euler

Os poliedros são objetos matemáticos muito presentes no cotidiano. Em muitas estruturas podemos reconhecer poliedros. Num primeiro momento, conceituá-los e entender algumas propriedades simples pode ser muito fácil para alunos que podem ver, o que já é de conhecimento de professores do Ensino Médio, pois a maioria deles reconhece que esse é um conteúdo que os alunos, geralmente, tem boa capacidade de compreender e aplicar. Além disso, essas aplicações são amplamente utilizadas na engenharia e arquitetura, e também a Geometria Espacial abre as portas para grandes áreas de estudo da Matemática em nível superior, como Cálculo no Espaço e a Geometria Diferencial.

Para alunos deficientes visuais, alguns desses conceitos, por mais fáceis que sejam explicitados, podem não ser inteiramente entendidos em sua profundidade e beleza, pois esses alunos não contam com o sentido da visão para reconhecê-los no mundo em que os rodeia. Contudo, devido à importância desse conteúdo, não se pode privar esses alunos de experimentar e aprender esse conhecimento.

A utilização de material concreto tátil é uma grande aliada no ensino-aprendizagem desses conceitos e das propriedades dos poliedros. Em geral, construir esses materiais já é uma prática adotada pelos professores de Ensino Médio, pois eles estimulam a aprendizagem de alunos videntes. No caso dos alunos deficientes visuais, esse material é de extrema importância para que o aluno possa, de fato, entender o que está sendo discutido.

Dentre as propriedades dos poliedros, a relação de Euler é uma das mais belas e também será apresentada no caderno de atividades que se segue. Este caderno tem como propósito contribuir para desenvolvimento das seguintes habilidades, segundo a matriz de referêcia do ENEM:

- Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.
  - H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
  - H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
- Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
  - H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

## 5.1 Material

- Sólidos geométricos em madeira (inclusive esferas, cilindros e cones);

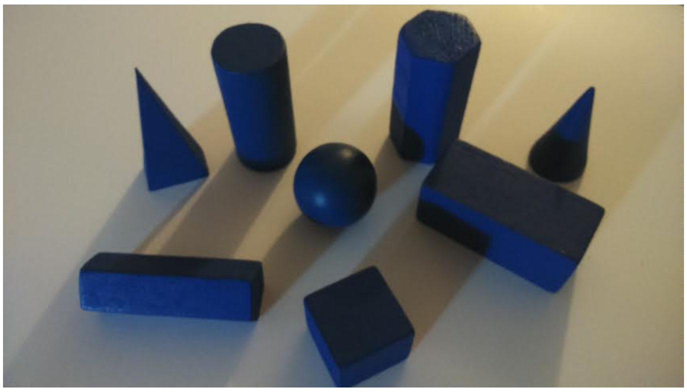

Figura 5.1: Sólidos geométricos de madeira.

- Poliedros regulares de papel cartão (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro).

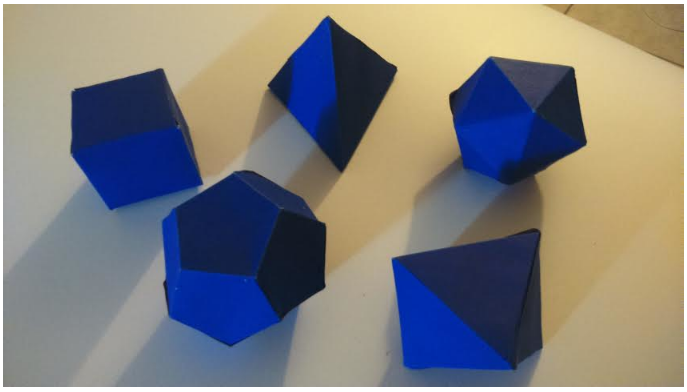

Figura 5.2: Sólidos geométricos de papel cartão.

Observações:

- Os sólidos geométricos em madeira que foram utilizados podem ser encontrados para venda em papelarias ou lojas de artigos educacionais.

- O papel cartão utilizado para confeccionar os poliedros também pode ser encontrado em papelarias e lojas de artigos artísticos, sendo que o papel mais "duro" é melhor para ser utilizado. Esses poliedros também podem ser confeccionados em papel panamá, porém sua confecção se torna mais complicada pois este material não é dobrável, logo, é necessário recortar as faces e colá-las.

## 5.2 Objetivos

Ensinar ao aluno deficiente visual, através de sólidos geométricos e do contato com eles, o conceito de poliedro e seus elementos como face, aresta e vértice. Mostrar ao aluno que os poliedros convexos obedecem a relação de Euler e deduzi-la experimentalmente, além de mostrar que poliedros com furos não o fazem.

## 5.3 Introdução

### 5.3.1 Fundamentação Teórica

**Definição 5.3.1** *Um poliedro é um sólido geométrico com as seguintes características:*

1. *Possui apenas faces planas poligonais;*
2. *Possui arestas, que são a intersecção entre duas faces. Cada aresta é comum a apenas duas faces;*
3. *Possui vértices, que são a intersecção entre três ou mais arestas.*

Existem poliedros de diferentes tipos e com diversas características. Note que, é condição necessária para que um poliedro exista que seu número de faces seja maior ou igual a 4.

Outra característica importante diz respeito à convexidade dos poliedros.

**Definição 5.3.2** *Dizemos que um poliedro é convexo se, tomando $A$ e $B$ contidos no interior do poliedro, $AB$ estará contido em seu interior.*

Para os poliedros convexos, existe uma importante relação criada por Leonard Euler.

**Teorema 5.3.3** *Seja um poliedro convexo e $V$, $F$ e $A$ as quantidades de vértices, faces e arestas respectivamente. Então*

$$V + F - A = 2.$$

Verifica-se também que a relação de Euler é válida não apenas para poliedros que sejam convexos, mas para poliedros que sejam homeomorfos à esferas, o que inclui os poliedros convexos e alguns não convexos. Com maior generalidade, os poliedros que obedecem essa relação tem característica de Euler igual a 2. Os poliedros que possuem característica de Euler diferente de 2 não seguem essa relação. Um exemplo desse tipo de poliedro são os poliedros com um furo, ou buraco, que são homeomorfos a um toro.

## 5.4 Desenvolvimento

### 5.4.1 Atividade 1

Entregue ao aluno sólidos que não sejam poliedros poliedros regulares e não regulares. Explique que esses objetos tridimensionais são chamados sólidos geométricos.

Indique dois poliedros e pergunte:

1. O que esses dois sólidos geométricos têm em comum?

   Indique um poliedro e um sólido que não seja poliedro. Pergunte:

2. Quais as diferenças entre esses dois sólidos?

   Leia a definição de poliedros para o aluno. Explique, utilizando um poliedro como exemplo, que:

   - *Faces* são as superfícies planas que compõe os poliedros;
   - *Arestas* são as retas formadas pela junção de duas faces;
   - *Vértices* são as junções de três ou mais arestas.

   Entregue um poliedro ao aluno e peça para que ele responda:

3. Indique suas faces, arestas e vértices.

4. A partir dessas definições, você consegue explicar a razão de esferas, cilindros e cones não serem poliedros?

### 5.4.2 Atividade 2

Entregue ao aluno um poliedro.

1. Conte a quantidade de faces, vértices e arestas em um dos poliedros. O que acontece quando somamos a quantidade de vértices com a de arestas e comparamos.

2. Repita o item anterior com os outros poliedros. O que você percebeu?

Vimos que, para os poliedros convexos, vale $V + F = A + 2$. Essa relação é chamada *Relação de Euler*, pois foi descoberta pelo matemático Leonard Euler, um dos maiores matemáticos da história.

## 5.5 Relatos das aplicações do caderno de atividades sobre Relação de Euler

### 5.5.1 *Colégio C*

**Aluna 1**

Essa aplicação foi feita em 24 de março de 2015. Informei à aluna que a atividade trataria de poliedros. Entreguei-lhe alguns poliedros e alguns sólidos que não são poliedros. Ela identificou os prismas como "redondinhos" e o cilindro como "liso". Creio que isso se deve à percepeção das arestas e a falta de percepão delas pelo tato. Entreguei a ela um cubo e ela o identificou como dado. Ensinei o nome correto de cada um dos poliedros.

Mostrei as diferenças entre os poliedros e os sólidos que não eram poliedros, formando a definição desejada, através da comparação entre eles. Vimos que os poliedros possuem faces planas, arestas e vértices, ao contrário dos corpos redondos, que não possuem nenhuma dessas características.

Entreguei um prisma de base quadrangular e pedi que contasse as faces, o que ela conseguiu realizar com sucesso. Em seguida entreguei um octaedro e pedi que ela fizesse o mesmo e ela o fez. Novamente, retomamos o prisma de base quadrangular e pedi que dessa vez ela contasse quantas arestas ele possuia e ela o fez, errando na primeira tentativa, mas acertando em seguida. Perguntei se seria possível contar as arestas de um cilindro e ela disse que não, pois o cilindro não possui “quinas” (que era como ela insistia em chamar as arestas).

Mostrei o poliedro com buraco e um cubo. Perguntei o que ela percebia de diferenças imediatas entre o cubo e o paralelepípedo furado e ela respondeu que seria o furo. Disse a ela que o poliedro furado é um exemplo de um poliedro não convexo, pois, imaginando os segmentos de reta com começo e fim dentro do poliedro, no paralelepípedo furado, temos segmentos que não estão inteiramente contidos nele, o que não acontece com o cubo, por exemplo. Defini então que os poliedros em que todos os segmentos de reta, com extremidades em seu interior, estão contidos nele, são chamados de convexos e os que isso não ocorre são chamados de não convexos.

Prosseguimos então para a experimentação da Relação de Euler. Entreguei o cubo e pedi que contasse a quantidade de faces, arestas e vértices. Ela conseguiu realizar a tarefa corretamente. Pedi que somasse a quantidade de faces com a de vértices e em seguida somasse dois à quantidade de arestas. Ela respondeu que daria o mesmo número: 14. Em seguida, entreguei um octaedro regular e pedi que fizesse o mesmo. Ela contou com certa dificuldade mas conseguiu realizar a tarefa após eu ajudá-la na contagem. Quando anunciou os resultados, pedi que, novamente, ela somasse a quantidade de faces com a de vértices e também somasse a quantidade de arestas com dois e ela disse que o resultado era o mesmo do anterior: 14 nas duas somas.

Entreguei um tetraedro regular e pedi que fizesse o mesmo. Ela contou com facilidade as arestas, as faces e os vértices. Somamos as faces e os vértices e obtivemos 8, assim como a quantidade de arestas mais dois. Então ela disse que não daria sempre 14, mas que “sempre daria igual o número”. Falei que poderiamos fazer mais um caso para confirmar essa idéia. Então entreguei um prisma de base pentagonal e ela contou os vértices, faces e arestas. Fizemos as adições e constatamos o resultado.

### Aluno 9

Essa aplicação foi feita em 24 de março de 2015. O Aluno 9 possui baixa visão e foi capaz de utilizá-la na maior parte da atividade. Além disso, o aluno estava com pouco tempo disponível pois teria uma aula após a atividade, teríamos então apenas meia hora para realizá-la. Sendo assim, tentei tornar a atividade o mais dinâmica e resumida possível durante a aplicação.

Entreguei-lhe alguns sólidos geométricos e pedi que ele dissesse o nome deles. Ele teve muita dificuldade em lembrar os nomes corretos, embora mostrasse familiaridade com os formatos. Disse-lhe os nomes corretos das figuras à medida que ia mostrando-as.

Figura 5.3: Aluno 9 manuzeando os sólidos geométricos.

Perguntei qual era a principal diferença que ele observava entre os poliedros e os corpos redondos. Ele disser que era o formato pois os corpos redondos seriam "tipo uma esfera", enquanto os poliedros são "retos". Expliquei que os poliedros têm faces planas, tem arestas e vértices, mostrando a ele cada um dos elementos à medida que falava sobre eles. Comparei os poliedros com os corpos redondos e perguntei se algum deles teria arestas ou vértices, bem como se algum deles possuía todas as faces planas e o aluno respondeu corretamente que não.

Assim como a Aluna 1, verificamos a relação de Euler em poliedros convexos simples pela contagem das arestas, vértices e faces, realizando, em seguida, as adições comparações necessárias.

Expliquei a ele a origem dessa relação e que ela é chamada de Relação de Euler.

***Observações gerais relativas às aplicações no Colégio C***

As aplicações foram mais rápidas do que o esperado, levando cerca de 30 minutos.

Ambos os alunos tinham limitação de tempo, o que acabou se encaixando bem ao tempo da atividade.

O material utilizado agradou os alunos e foi suficiente para atingir os objetivos, embora eu tenha percebido que se os sólidos geométricos fossem maiores, os alunos poderiam contar as faces, vértices e arestas com mais facilidade.

***Comentários dos alunos do Colégio C sobre o material e as atividades***

Os alunos do Colégio C mostraram bastante interesse na atividade e foram muito receptivos. Conseguiram realizá-la sem dificuldade. Não tiveram sugestões para melhorar o material, mas disseram que estava "muito bom".

### 5.5.2 *Colégio S*

**Alunos 10 e 11**

Essa aplicação foi feita em 26 de março de 2015. Os alunos 10 e 11 não são mais alunos do ensino médio. Atualmente eles fazem cursos superiores, ambos em áreas que não são de ciências exatas. Eles são ex-alunos do Colégio S e vieram a pedido do professor da sala de recurso para testar o material.

Começamos a atividade quando lhes entreguei os sólidos geométricos, que eles imediatamente tocaram e se interessaram pelo material, reconhecendo várias das figuras, como esfera, cone, cilindro, cubo e paralelepípedo. Separei os sólidos geométricos em dois grupos, um de poliedros e outro de corpos redondos. Pedi para que eles dissessem qual a principal diferença que poderiam perceber nos dois grupos. Imediatamente o Aluno 11 disse que os poliedros possuiam lados, já os outros são redondos. O Aluno 10 concordou. Então expliquei que os arredondados não são considerado poliedros.

Defini com os alunos o conceito de poliedros, e definimos o que são faces, vértices e arestas. Em seguida, entreguei ao Aluno 10 um paralelepípedo e ao Aluno 11 um prisma de base pentagonal e pedi para que contassem a quantidade de vértices, faces e arestas. O Aluno 10 contou corretamente as quantidades e falou as respostas. O Aluno 11 contou, no primeiro momento, apenas as faces laterais do prisma, esquecendo da base, assim como ele também só contou os vértices em uma das bases. Mostrei que ele havia se esquecido de contar o restante das faces e dos vértices e ele concordou, e automaticamente realizou a contagem correta e informou os resultados.

Prosseguimos a atividade e falei que eu havia pedido para que contassem os vértices, faces e arestas para que verificassemos a Relação de Euler. Eles ficaram curiosos sobre o nome Euler e expliquei que ele foi um matemático muito importante que fez várias descobertas significativas em vários ramos da matemática. Ensinei que essa relação dizia que a quantidade de faces mais vértices é sempre igual à quantidade de arestas mais dois. Relembramos os valores encontrados nas contagens realizadas nos polígonos e pedi para que verificassem se isso acontecia nos polígonos que haviamos utilizado. Eles fizeram as contas corretamente e verificaram que a relação valia.

Entreguei outros poliedros, uma piramide de base quadrangular para o Aluno 10 e um tetraedro para o Aluno 11. Eles desconfiaram, no primeiro momento, de que a relação não funcionaria nestas pirâmides. Pedi para que realizassem a contagem da quantidade de faces, arestas e vértices. Eles contaram com muita facilidade e em seguida verificamos a validade da relação de Euler.

Por fim, entreguei um dodecaedro regular para o Aluno 10 e um icosaedro para o Aluno 11. Eles ficaram meio impressionados com as figuras e disseram que seria difícil contar quantos vértices ou arestas. Então, disse a eles que o poliedro do Aluno 10 tiha 12 faces e o do Aluno 11 tinha 20 faces. Pedi para que eles tentassem contar apenas os vértices. Eles tiveram certa dificuldade para realizar a contagem e precisei auxiliá-los para que fizessem a contagem correta, mas por fim, conseguiram. Perguntei se seria fácil contar a quantidade de arestas e eles disseram que seria muito difícil. Daí sugeri que utilizássemos a Relação de Euler para descobrir essa informação. Relembrei a Relação de Euler. O Aluno 10 imediatamente respondeu que a quantidade de arestas no seu sólido era 30 pois 30 mais dois seria 32, que é a quantidade de faces (12) somada à quantidade de vértices (20).

O Aluno 11 teve um pouco de dificuldade em utilizar a fórmula. Inicialmente ele não identificou a igualdade e não estava conseguindo responder corretamente a quantidade de vértices. Antes que eu o ajudasse, o Aluno 10 explicou ao colega que se ele tinha 20 faces e 12 vértices, a soma daria 32. Então ele precisaria pensar qual número, mais dois, daria 32. Depois disto, o Aluno 11 disse que o sólido teria, de fato, 30 arestas.

Com isso encerramos a atividade.

**Alunos 4 e 6**

Os relatos a seguir são da aplicação do caderno 4 na data de 9 de abril de 2015.

Mostrei aos alunos os poliedros de madeira, separados em dois grupos, entregando o grupo dos poliedros para a Aluna 6 e os não poliedros para o Aluno 4. Eles imediatamente, tateando, reconheceram alguns deles como cubo, esfera e cone. Pedi que trocassem os grupos e perguntei o que um gupo possuia de diferença em relação ao outro. Em um primeiro momento eles não souberam reconhecer diferenças. Então, perguntei a eles o que o cone, a esfera e o cilindro tinham em comum e eles disseram que os três eram "arredondados". Perguntei se os do outro grupo tinham a mesma característica e a Aluna 6 disse que não, que eles tinham "quinas e lados". Eu disse que essa era a principal diferença.

Prossegui para definir o que seria um poliedro. Disse que um poliedro é formado por faces poligonais, que são os "lados". As faces poligonais são figuras planas que devem possuir lados que sejam segmentos de reta e não podem possuir buracos. Definimos as arestas como as "quinas" e os vértices como as "pontas", sempre mostrando a eles esses elementos em alguns poliedros.

Entreguei um cubo para o Aluno 4 e um paralelepípedo para a Aluna 6. Pedi que contassem a quantidade de faces, vértices e arestas. No primeiro momento, eles tiveram certa dificuldade para contar todas as arestas, pois contaram apenas em uma das bases da figura. Mostrei que havia outras arestas e eles contaram corretamente, assim como a quantidade de faces e vértices. Pedi para que cada um deles somasse a quantidade de faces com a de vértices e eles somaram, dizendo o mesmo resultado. Em seguida pedi para que somassem a quantidade de arestas com dois e eles disseram o mesmo número, 14. Eles ficaram meio intrigados e eu disse a eles que testaríamos isto em outro poliedro, um pouco diferente, para verificarmos se isto seria realmente uma relação matemática ou só coincidência.

Assim como na aplicação anterior, utilizamos outros poliedros convexos simples e verificamos a relação neles. Expliquei porque essa relação se chamava assim e que ela é muita utilizada em várias áres, mesmo que muitas vezes ela passe desapercebida.

Em seguida, entreguei para o Aluno 4 um icosaedro regular e para a Aluna 6 um dodecaedro regular. Pedi que eles tentassem calcular a quantidade de faces, vértices e arestas. Ambos conseguiram contar a quantidade de faces, apenas a Aluna 6 conseguiu contar a quantidade de vértices e ambos não conseguiram contar a quantidade de arestas pois estavam se perdendo na contagem. Disse a eles então que a Aluna 6 conseguiu contar corretamente a quantidade de faces e vértices. Perguntei como poderíamos saber a quantidade de arestas. Disse ao Aluno 4 a quantidade de vértices do icosaedro, e em seguida pedi para que calculasse a quantidade de arestas. Inicialmente eles não conseguiram dizer o resultado. Eu relembrei a relação que havíamos acabado de aprender e disse que a soma das faces com os vértices, que a Aluna 6 havia calculado para o dodecaedro, teria que ser igual à quantidade de arestas mais dois, ou seja, qual número mais dois, seria igual àquela soma? Então ela respondeu 30. E imediatamente o Aluno 4 conseguiu responder à pergunta também. O Aluno 4 disse: "ah, entendi. A gente pode usar a relação pra calcular os valores". Encerramos a atividade.

### ***Observações gerais relativas às aplicações no Colégio S***

No Colégio S, como de costume, a atividade se desenvolveu mais rapidamente, levando cerca de 25 minutos em cada aplicação: um tempo menor do que o esperado.

Os alunos conseguiram realizar a atividade com facilidade e os objetivos foram parcialmente cumpridos.

### ***Comentários dos alunos do Colégio S sobre o material e as atividades***

Perguntei aos alunos 10 e 11 se eles haviam gostado do material, que por sinal era muito simples. Eles disseram que gostaram sim, que já estavam familiarizados com esses poliedros e que acharam a atividade interessante. Perguntei se eles teriam sugestões para melhorar o material e disseram que talvez fosse mais fácil contar os vértices, faces e arestas nos últimos dois poliedros se eles fossem um pouco maiores, pois naquele tamanho eles se perderam durante a contagem.

Perguntei aos alunos 4 e 6 o que haviam achado do material. O Aluno 4, que possui baixa visão, disse que a cor do material, que é todo azul, o confundia um pouco e sugeriu fazer os poliedros com cores distintas nas faces. Eles disseram que para os poliedros mais simples estavam com um tamanho bom, mas os mais complicados, como o dodecaedro e o icosaedro deveriam ser maiores pois era muito fácil de se perder na hora de contar.

O Aluno 4 sugeriu diferenciar um vértice, uma aresta e uma face em cada “região” do poliedro para que houvesse um referencial pra começar a contar e terminar no mesmo lugar, pois assim eles não se perderiam. Eles gostaram muito dos sólidos de madeira e disseram que são melhores em comparação aos de papel.

## 5.6 Conclusões relativas à aplicação do caderno de atividades de Poliedros

Os objetivos propostos nessa atividade foram alcançados parcialmente. Isso porque durante as aplicações, em sua maioria, não foi possível abordar as idéias de poliedros convexos e não convexos e nem de mostrar, utilizando um poliedro furado, que existem poliedros que não obedecem à relação de Euler. Isso não foi feito pois o material planejado, que seria o próprio poliedro furado, se mostrou ineficaz durante a primeira aplicação porque para mostrar que ele não obedece à relação de Euler seria necessário dividir os polígonos não convexos de suas faces em triângulos, o que acabou por se tornar inviável no trabalho com alunos DVs.

Em geral, o material proposto foi útil para abordar o tema e mostrar os resultados esperados, e foi aprovado pelos alunos.

O surpreendente desta experiência foi a capacidade que os alunos DVs tiveram de contar as faces, vértices e arestas de poliedros relativamente complexos sem se perderem na contagem, além de reconhecer essas formas, suas características básicas e diferenciá-las apenas com o tato. Além disso, eles foram capazes de realizar todos os cálculos propostos mentalmente.

# Capítulo 6

# Considerações Finais

O ensino da Geometria, para alunos deficientes visuais, sempre me pareceu algo distante e complicado, fora do meu alcance. Poder ensinar matemática através do tato nunca foi o foco principal nas minhas aulas, que sempre foram para alunos que vêem. A oportunidade de viver essa experiência abriu novos horizontes para o meu desenvolvimento como professor e como pessoa.

A adaptação, inicialmente, é complicada. Nos primeiros encontros com os alunos foi difícil largar o hábito de utilizar expressões comuns quando nos comunicamos com pessoas que podem ver, como "está vendo isso" ou "o meio disso". Mas a partir do momento que se entende as necessidades e se percebe a facilidade de lidar com os alunos DVs, o trabalho se desenvolve quase que naturalmente e de maneira muito agradável, pois estes alunos, surpreedentemente, mostram muito interesse em aprender coisas novas, em utilizar materiais novos, em participar de projetos e pesquisas como a que realizei, sempre com muita disposição e bom humor, até mesmo ajudando a desenvolver melhor meu próprio trabalho em momentos de dúvida. Utilizo o termo "surpreendentemente" pois sempre achei que esses alunos seriam mais propícios a desenvolver bloqueios relacionados à Geometria ou à Matemática por ter um preconceito de que, para eles, essa área seria algo difícil de compreender.

Durante o trabalho, percebi que a falta da visão é apenas um detalhe que pode ser superado com o estímulo certo. Ter a chance de desenvolver materiais adaptados me ensinou muitas coisas sobre Geometria, sobre os DVs e sobre como se deve ensinar alguns conteúdos. E no fim, percebi que os materiais desenvolvidos podem ser usados por alunos cegos, com baixa visão e também por alunos videntes, como uma nova maneira de experimentar a Matemática. Portanto, essas experiências foram triplamente ricas.

Quanto ao desenvolvimento dos alunos, tive surpresas muito agradáveis. Essas surpresas vieram do interesse que mostraram, de como os materias utilizados funcionaram bem em vários momentos, como as atividades foram úteis para eles e principalmente do potencial e das capacidades dos alunos. Alguns fatos foram impressionantes para mim, como a capacidade de generalização que foi mostrada pela maioria deles, assim como a capacidade de realizar cálculos, resolver expressões numéricas e equações, tudo mentalmente, com muita naturalidade. A capacidade de abstração e de imaginação destes alunos também é fantástica, o que foi visto quando eles abstraíram formas geométricas e propriedades de representações em relevo ou de construções no multiplano/geoplano, e até mesmo dos sólidos geométricos. Tudo isso me mostrou que, ao contrário dos meus preconceitos, os alunos DVs se interessam sim pela matemática, e não apenas isso, muitos deles são bem preparados e tem muito potencial para área.

Por fim, o lado humano dessas experiências me mostrou exemplos de superação, como alunos que são aprovados em universidades, em concursos públicos e seguem suas vidas normalmente, sempre avançando e enfrentando as dificuldades que surgem, sem reclamar, sempre de bom humor, mesmo quando parece, para as outras pessoas, que eles teriam muitos motivos para fazer justamente o contrário. Sou muito grato e me sinto muito feliz por ter vivido esses momentos.

# Referências Bibliográficas


[1] Antonio C. M. Neto, Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2 - Geometria Euclidiana Plana, SBM, 1ª Edição, 2012.

[2] João L. M. Barbosa, Geometria Euclidiana Plana, SBM, 10ª Edição, 2006.

[3] Ministério da Educação e Desporto, Subsídios para Organização e Funcionamento de Serviços de Educação Especial - Área de Deficiência visual, (1995).

[4] ONU, Declaração Universal dos Direitos Humanos, 1948.

[5] ONU, Declaração de Salamanca, Salamanca, 1994.

[6] MEC, Planejamento Nacional da Educação Especial (PNEE), 1994.

[7] Rubens Ferronato, A construção de instrumento de inclusão no ensino de matemática, Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção.

[8] UNICEF, Convenção sobre os Direitos da Criança, Portugal, 1990.