Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Argumentos Combinatórios para Identidades Envolvendo Números Binomiais, de Fibonacci e de Lucas

Fernando Cunha Córes

Brasília - DF

2014

Fernando Cunha Córes

Argumentos Combinatórios para Identidades Envolvendo Números Binomiais, de Fibonacci e de Lucas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática na Educação Básica
Orientador: : Prof. Dr. Diego Marques Ferreira

Brasília-DF

2014

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade de Brasília. Acervo 1016145.

Córes, Fernando Cunha.
C797a Argumentos combinatórios para identidades envolvendo números binomiais, de Fibonacci e de Lucas / Fernando Cunha Córes. -- 2014.
80 f. : il. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade de Brasília, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2014.
Inclui bibliografia.
Orientação: Diego Marques Ferreira.

1. Números de Fibonacci. 2. Números de Lucas. 3. Coeficientes binomiais. I. Ferreira, Diego Marques. II. Título.

CDU 519.1

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Argumentos Combinatórios para Identidades Envolvendo Números Binominais, de Fibonacci e de Lucas.

por

Fernando Cunha Cores*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 07 de julho de 2014.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Diego Marques Ferreira – MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues – UFG/GO

Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araújo – MAT/UnB

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação.

FERNANDO CUNHA CÓRES graduado em Matemática pela Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ). Pós-graduado em Instrumentação para o Ensino da Matemática pela Universidade Federal Fluminense (UFF). Professor do Colégio Militar de Brasília.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela vida e família que tenho, pelos amigos que fiz e principalmente pelos pais amorosos que tive e que me ensinaram muito sobre a vida.

Em especial, agradeço aos meus pais, Almyr e Nelzira, onde quer que estejam espero nunca decepcioná-los. Eu os amo. A minha amada esposa Ionélia e as minhas amadas filhas Juliane e Fernanda por compreenderem os momentos de ausência e apoiar nos momentos de desânimo.

Aos meus companheiros de mestrado Murilo Roballo, Daniel Mendes, George Wesley, Luiz Fernando Costa e em especial Antonio Simões Gaspar pela ajuda inestimável na conclusão deste trabalho.

Ao meu orientador e grande matemático Diego Marques Ferreira pelo apoio e compreensão nos momentos difíceis e pela confiança depositada neste trabalho. Aos professores Kellcio Oliveira Araújo, da UnB, e Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues, da UFG, por aceitarem fazer parte da Banca Examinadora.

Aos professores do PROFMAT /UnB e ao Coordenador Rui Seimetz pela dedicação demonstrada ao longo dos dois anos de convivência.

Aos idealizadores do PROFMAT e à CAPES pela iniciativa de levar aos professores do Brasil capacitação para o exercício da profissão.

"Os números governam o mundo."

Platão

"Deus existe, visto que a matemática é consistente, e o Diabo existe, visto que não podemos prová-lo."

André Weil

"A Matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza."

Bertrand Russel

"Não há ramo da matemática, por abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real."

Lobachevsky

"De que me irei ocupar no céu, durante toda a eternidade, se não me derem uma infinidade de problemas de Matemática para resolver?"

Augustin Louis Cauchy

"As pessoas que amamos são como flores, passam em nossa vida, mas eternamente seu perfume estará conosco."

Desconhecido

Resumo

Considere os números de Fibonacci (F_n), os números de Lucas (L_n) e os números binomiais ($C(n,\ k)$), os fenômenos que por eles são enumerados e as principais identidades envolvendo esses números. Seguindo o trabalho de Arthur Benjamin e Jennifer Quinn [1], vamos demonstrar tais identidades mostrando que podemos contar o mesmo fenômeno de duas formas diferentes. Inicialmente vamos estudar os números binomiais, mais comuns no Ensino Médio e que estão no contexto da Combinatória, considerada pela maioria dos alunos e professores como o assunto mais difícil de entender e ensinar naquele segmento de ensino. Em seguida faremos uma abordagem combinatória de algumas identidades envolvendo números de Fibonacci e de Lucas através de um estudo das coberturas de um tabuleiro $1 \times n$, das palavras binárias e das composições de um inteiro positivo n. Sobre as composições, basearemos nosso trabalho no estudo feito por Hoggatt [7] para fazer as demonstrações de algumas das identidades propostas. Apresentaremos novas identidades de Fibonacci e Lucas. Finalmente faremos uma proposta de sequência didática para ser aplicada na educação básica como motivadora para o estudo da Combinatória e dos números de Fibonacci.

Palavras-chave: *números binomiais, números de Fibonacci, números de Lucas, provas por argumento combinatório, identidades binomiais, identidades de Fibonacci e identidades de Lucas.*

Abstract

Consider Fibonacci numbers (Fn), Lucas numbers (Ln) and binomial numbers (C(n, k)) and the several identities involving these numbers. Following the work of Arthur Benjamin and Jennifer Quinn [1], we will demonstrate some identities by showing that it is possible to count the same situation in two different ways. Firstly, we will study binomial numbers (which are more common in high school) which belongs to the context of Combinatorics, considered by most students and teachers as the most difficult subject to understand and teach. Then we will work on combinatorial approaches of some identities involving Fibonacci and Lucas numbers by studying coverings of a $1 \times n$ board, binary words, and compositions of a positive integer. About compositions, our work will be based on the study by Hoggatt [7] to demonstrate some of the proposed identities. Also, shall present new identities for Fibonacci and Lucas numbers. Finally, we shall make a proposal for a teaching sequence to be applied in basic education as a motivator for the study of Combinatorics and Fibonacci numbers.

Keywords: *binomial numbers, Fibonacci numbers, Lucas numbers, combinatorial argument proofs, binomial identities, Fibonacci identities and Lucas identities.*

Lista de Figuras

1.1 Mastro de bandeira 27

2.1 Coberturas de um tabuleiro 1×4. 47

3.1 Sequência $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$ sobre uma Circunferência 65

Sumário

Introdução **12**

1 Coeficientes Binomiais **14**

1.1 Definições iniciais 14

1.2 Identidades envolvendo coeficientes binomiais 19

1.3 Coeficientes binomiais e Teoria dos Números 28

2 Números de Fibonacci **42**

2.1 Interpretações Combinatórias para os números de Fibonacci 43

2.2 Identidades envolvendo os Números de Fibonacci 48

3 Números de Lucas **64**

3.1 Interpretações Combinatórias para os números de Lucas 65

3.2 Identidades envolvendo os Números de Lucas 66

4 Sequência Didática **71**

4.1 Atividades 71

4.1.1 Atividade 1: Trabalhando com bijeções. 71

4.1.2 Cobrindo tabuleiros $1 \times n$. 72

4.1.3 Atividade 3: Utilizando argumentos combinatórios 72

4.2 Respostas das atividades 73

4.2.1 Atividade 1: Trabalhando com bijeções. 73

4.2.2 Cobrindo tabuleiros $1 \times n$. 74

4.2.3 Atividade 3: Utilizando argumentos combinatórios. 76

Considerações Finais **77**

Referências Bibliográficas **79**

Introdução

Contar é, certamente, junto com a linguagem, uma das primeiras ferramentas abstratas de que o homem se apropria. De acordo com Elon Lages Lima [10], os números são um dos dois objetos de que se ocupa a Matemática, o outro é o espaço. Números, segundo o mesmo autor, são entes abstratos desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar e medir. Portanto contar parece-nos algo natural e um bem comum da sociedade.

Porém os assuntos ligados à combinatória estão entre os que mais trazem dificuldades para os alunos. Não é de se espantar que, em recente artigo da revista Cálculo, professores incluam-na entre os tópicos que não gostam de ensinar. O Binômio de Newton é acusado, pelos mesmos professores, de ser extremamente desconexo com a realidade e de não ter significado para o aluno. Como uma ferramenta que leva o nome de um dos maiores gênios da humanidade pode receber tal culpa? Em [1], Arthur Benjamim diz como a apresentação combinatória do binômio de Newton, por seu professor, fez toda a diferença para ele.

Eugene Paul Wigner [3], ganhador do Prêmio Nobel de Física em 1963 e ganhador da Eötvos Competition, disse certa vez:

> Minha própria história começa no ensino médio na Hungria onde meu professor de matemática, [László] Rátz, incentivou – me a ler livros e despertou em mim um sentimento pela beleza do seu objeto.

Da mesma forma, J.G. Kemeny [3], quando perguntado sobre a razão pela qual houve tantos grandes matemáticos na Hungria, respondeu que o bom ensino é uma das razões. Ele recordou:

> Eu já havia passado por sete anos e meio de ensino na Hungria. Eu tinha um professor de matemática que teria sido bem qualificado para ensinar em uma boa faculdade. Ele fez um enorme esforço para reforçar o meu interesse pela matemática... estar interessado e sabendo alguma coisa é muito diferente.

Este professor era melhor do que qualquer professor que tive no ensino médio nos Estados Unidos, realmente significativamente melhor.

Parece-nos então que o sucesso do estudo de determinado assunto está diretamente relacionado ao empenho e preparo do professor de matemática. Longe de indicar um caminho, esperamos trazer com este trabalho apenas reflexões. Não queremos propor técnicas ou métodos, queremos apenas mostrar que é possível ir além das páginas dos livros que nos servem. Para tanto dividiremos nosso trabalho em quatro grandes seções.

Na primeira parte, abordaremos os números binomiais e algumas identidades, que serão provadas por meio de argumentos combinatórios. Utilizando também argumentos combinatórios e os números binomiais, trataremos a seguir de alguns problemas de Teoria dos Números. Na segunda parte, falaremos sobre os números de Fibonacci e sua relação com as coberturas de um tabuleiro $1 \times n$, as composições de um inteiro positivo n e as sequências binárias de comprimento n. De posse da relação dos números de Fibonacci com esses conjuntos provaremos algumas identidades. Ao longo dessa seção apresentaremos identidades envolvendo os números de Fibonacci, entre elas, fórmulas para F_{kn}, F_{kn+p}, L_{kn} e L_{kn+p}. No penúltimo capítulo, repetiremos o procedimento porém agora utilizando as sequências de Lucas.

No último capítulo apresentaremos uma pequena sequência didática acerca do assunto tratado. Essa sequência configura apenas uma atividade rápida e que pode introduzir, na sala de aula, a argumentação combinatória utilizando números binomiais, números de Fibonacci e números de Lucas.

Finalmente, informamos que as identidades são numeradas sequencialmente, as figuras são numeradas por capítulo e as equações são numeradas de acordo com as seções.

Capítulo 1

Coeficientes Binomiais

O termo coeficiente binomial foi introduzido pelo matemático alemão Michel Stifel (1486-1567). A notação atual para o coeficiente binomial, utilizando parênteses, foi introduzida pelo matemático e físico alemão Barão Andreas von Ettinghausen (1796-1878) [2].

Neste capítulo estudaremos algumas identidades envolvendo os coeficientes binomiais. Definiremos uma notação para o coeficiente binomial e a seguir mostraremos que esse coincide com o número de combinações de n objetos escolhidos k a k. Definiremos, também, o que é uma prova por argumento combinatório e uma prova algébrica. Demonstraremos algumas identidades usando um argumento combinatório e um argumento algébrico, finalizando com o problema do *mastro da bandeira*.

Além disso, mostraremos alguns resultados de Teoria dos Números que envolvem os coeficientes binomiais.

1.1 Definições iniciais

***Definição* 1.1.** *O número $C(n,\ r)$, chamado coeficiente binomial, representa a quantidade de subconjuntos com r elementos de um conjunto com n objetos distintos.*

Da definição acima, podemos concluir que $C(n, 0) = 1$, $C(n, 1) = n$ e $C(n, n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $C(0, r) = C(n, r) = 0$, para todo $n, 1 \leq n < r$.

Para o que segue usaremos as notações abaixo na demonstração dos teoremas e identidades:

(i) $C(n,r) = \begin{pmatrix} n \\ \\ r \end{pmatrix}$.

(ii) $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ para $n \geq 2$ e $0! = 1! = 1$.

(iii) ***Prova por Argumento Combinatório (PAC)*** quando mostrarmos que os dois lados da igualdade contam a mesma coisa.

(iv) ***Prova Algébrica (PA)*** quando utilizarmos operações algébricas ou métodos tais como Indução Finita.

(v) $r-$ *subconjunto* é um subconjunto finito com r elementos.

Teorema 1.1. (Binomial) *O número $C(n,\ r)$ é o coeficiente de x^r na expansão de $(1+x)^n$.*

Demonstração. Observe que

$$(1+x)^n = \underbrace{(1+x) \cdot (1+x) \cdot \ldots \cdot (1+x)}_{n\ fatores}. \tag{1.1.1}$$

Para se formar um termo do produto (1.1.1), devemos escolher uma parcela em cada um dos n fatores $1+x$ e efetuar o produto das mesmas. Por exemplo, podemos escolher r letras x em r binômios e $n-r$ parcelas iguais a 1 nos $n-r$ binômios restantes, então teremos um termo da forma:

$$\overbrace{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{r\ fatores} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-r\ fatores}}^{n\ fatores} = x^r \text{ com } r = 0,\ 1, 2, \ldots,\ n. \tag{1.1.2}$$

O número de termos na forma (1.1.2) é igual ao número de modos de selecionarmos r letras x em r dos n binômios $1+x$, ou seja, igual ao número de $r-$ *subconjuntos* de um conjunto com n objetos, isto é, $C\,(n,\ r)$. Logo, ao reduzirmos todos os termos da forma x^r, encontramos $C\,(n,\ r)\,x^r$ para $r = 0,\ 1, 2,\ \ldots,\ n$. Portanto temos que:

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,\ r)x^r. \quad \square$$

***Definição* 1.2.** *Seja* $n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$*, onde* $n, \alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_k$ *são inteiros não negativos. Definiremos o coeficiente multinominal como* $\begin{pmatrix} n \\ \alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_k!}$.

***Teorema* 1.2. *(Multinomial)*.** *Para os inteiros positivos* n *e* k *temos que*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)^n = \sum_{\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_p} \begin{pmatrix} n \\ \alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_p \end{pmatrix} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p}$$

com $(\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_p) \in S$*, onde* S *é o conjunto de todas as soluções inteiras não negativas da equação* $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = n$.

Demonstração. Observe que

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)^n = \underbrace{(x_1 + x_2 + \ldots + x_p) \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_p) \cdot \ldots \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_p)}_{n \ fatores}$$

Para se formar um termo do produto, devemos escolher uma parcela em cada um dos n fatores $x_1 + x_2 + \ldots + x_p$ e efetuar o produto das mesmas. Por exemplo, podemos escolher α_1 letras x_1 em α_1 dos n polinômios, α_2 letras x_2 em $n - \alpha_1$ dos n polinômios, α_3 letras x_3 em $n - \alpha_1 - \alpha_2$ e assim sucessivamente até a escolha de α_p letras x_p nos α_p polinômios restantes, então teremos um termo da forma:

$$\overbrace{\underbrace{x_1 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_1}_{\alpha_1 \ fatores} \cdot \underbrace{x_2 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_2}_{\alpha_2 \ fatores} \cdot \ldots \cdot \underbrace{x_p \cdot x_p \cdot \ldots \cdot x_p}_{\alpha_p \ fatores}}^{n \ fatores} = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_p^{\alpha_p} \qquad (1.1.3)$$

com $\alpha_i \in \{0, \ 1, 2, \ \ldots, \ n\}$. Para o cálculo do número de termos da forma (1.1.3), acompanhe o esquema a seguir.

(1) Número de maneiras de escolher α_1 letras x_1 em α_1 dos n polinômios:

$$\begin{pmatrix} n \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

(2) Número de maneiras de escolher α_2 letras x_2 em $n - \alpha_1$ dos n polinômios:

$$\binom{n-\alpha_1}{\alpha_2}$$

(3) Número de maneiras de escolher α_3 letras x_3 em $n - \alpha_1 - \alpha_2$ dos polinômios:

$$\binom{n-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_3}$$

$$\vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots$$

$(p-1)$ Número de maneiras de escolher α_{p-1} letras x_{p-1} em $n - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_p$ dos n polinômios:

$$\binom{n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_p}{\alpha_{p-1}}$$

(p) Número de maneiras de escolher α_p letras x_p em α_p dos n polinômios:

$$\binom{\alpha_p}{\alpha_p}$$

Logo, pelo princípio Fundamental da Contagem, temos que o número de termos é

$$\binom{n}{\alpha_1}\binom{n-\alpha_1}{\alpha_2}\binom{n-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_3}\cdots\binom{n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_p}{\alpha_{p-1}}\binom{\alpha_p}{\alpha_p} =$$

$$= \frac{n!}{\alpha_1!(n-\alpha_1)!} \cdot \frac{(n-\alpha_1)!}{\alpha_2!(n-\alpha_1-\alpha_2)!} \cdot \frac{(n-\alpha_1-\alpha_2)!}{\alpha_3!(n-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)!} \cdot \ldots \cdot \frac{\alpha_p!}{\alpha_p!0!}$$

$$= \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_p!} = \begin{pmatrix} n \\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_p \end{pmatrix}$$

Portanto temos que:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n = \sum_{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_p} \begin{pmatrix} n \\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_p \end{pmatrix} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p}.$$

$\square$

***Definição* 1.3.** *Sejam X e Y dois conjuntos finitos e seja $f : X \to Y$ uma função tal que*

(1) Se $f(a) = f(b)$, então $a = b$; e

(2) Para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Então dizemos que f é uma bijeção de X em Y. Ou, de forma equivalente, f é uma bijeção se, para todo $y \in Y$, existe um único $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Em outras palavras, uma bijeção coloca em correspondência *um* a *um* os elementos dos conjuntos X e Y. Essa definição será importante para a demonstração das identidades que trataremos posteriormente.

Abordaremos a seguir a demonstração de diversas identidades utilizando argumentos combinatórios. Em algumas delas faremos também uma demonstração algébrica. Essencialmente o que faremos é estabelecer uma bijeção entre dois conjuntos e mostrar que podemos contar os elementos de cada conjunto de duas maneiras diferentes. Em [1], [2], [14], [16] e [17] encontraremos diversas identidades e outras provas por argumento combinatório e algébrico.

1.2 Identidades envolvendo coeficientes binomiais

Identidade 1. *Para* $0 \leq r \leq n$*, temos que*

$$C(n,\ r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Demonstração. ***(PAC)*** Para demonstrar essa identidade, vamos reescrevê-la da seguinte maneira: $n! = C(n,\ r) \cdot r! \cdot (n-r)!$. Agora basta observar que o lado esquerdo de nossa igualdade conta o número de maneiras de formar uma fila com n pessoas. De fato, há n possibilidades para a primeira posição, $n-1$ possibilidades para a segunda posição e assim sucessivamente até que nos reste uma possibilidade para a última posição. Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, há $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ maneiras de formar a fila. Por outro lado, podemos formar a fila selecionando r pessoas para as primeiras r posições, o que pode ser feito de $C(n,\ r)$. Feita a escolha das r primeiras pessoas, há $r!$ maneiras de posicioná-las e $(n-r)!$ maneiras de posicionar as pessoas restantes, ou seja, há $C(n,\ r) \cdot r! \cdot (n-r)!$ possíveis filas. Logo segue o resultado.

□

Identidade 2. *Para inteiros* n *e* r *tais que* $0 \leq r \leq n$*, vale que*

$$C(n,\ r) = C(n,\ n-r).$$

Demonstração. ***(PAC)*** Para formar um $r-$*subconjunto* basta escolhermos os $n-r$ elementos que não farão parte do subconjunto, ou seja, temos $C(n,\ n-r)$ escolhas. Por outro lado, $C(n,\ r)$ conta o número de $r-$ *subconjuntos* de um conjunto com n elementos. Portanto existe uma bijeção entre o conjunto dos $r-$ *subconjuntos* e o conjunto dos $(n-r)-$*subconjuntos* e o lado esquerdo e o lado direito contam a mesma coisa.

$$\textbf{\textit{(PA)}}\ C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C(n-r,r).$$

□

Identidade 3. ***(Identidade de Pascal)*** *Para inteiros* n *e* r*, tais que* $0 \leq r \leq n$*, vale que*

$$C(n,\ r) = C(n-1,\ r) + C(n-1,\ r-1).$$

Demonstração. ***(PAC)*** De acordo com a definição, $C(n,\ r)$ conta o número de subconjuntos com r elementos de um conjunto com n objetos distintos. Por outro lado, podemos contar os subconjuntos olhando para um objeto particular x. Podemos classificar os $r - subconjuntos$ de uma das duas seguintes maneiras:

(i) Subconjuntos que têm x como elemento; e

(ii) Subconjuntos que não têm x como elemento.

Existem $C(n-1,\ r-1)$ do tipo (i) e $C(n-1,\ r)$ do tipo (ii). Logo o total de subconjuntos é $C(n,\ r) = C(n-1,\ r) + C(n-1,\ r-1)$. Portanto o lado direito e o lado esquerdo contam a mesma coisa.

(PA) Basta observar que

$$
\begin{aligned}
C(n-1,r) + C(n-1,r-1) &= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!r!} + \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!(r-1)!} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r}\right) = \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!(r-1)!} \cdot \frac{n}{r(n-r)} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!r!} = C(n,r).
\end{aligned}
$$

□

Identidade 4. *Para inteiros n e r tais que $0 \leq r \leq n$, temos que*

$$
r \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix}.
$$

Demonstração. ***(PAC)*** O lado esquerdo conta o número de maneiras de se formar uma comissão de r membros, escolhendo-se entre esses membros um para ser o representante da comissão. O lado direito conta a mesma coisa, pois podemos escolher uma entre as n pessoas para ser o representante e, em seguida, $r-1$ pessoas das $n-1$ restantes para completar a comissão. Portanto o lado direito e o lado esquerdo contam a mesma coisa.

(PA) Basta observar que

$$r \cdot \binom{n}{r} = r \cdot \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} = n \cdot \binom{n-1}{r-1}.$$

□

Identidade 5. ***(Identidade de Cardano)*** *Para inteiros n e r tais que $0 \leq r \leq n$, vale que*

$$\binom{n}{r} = \frac{n-r+1}{r} \binom{n}{r-1}.$$

Demonstração. ***(PAC)*** Vamos reescrever a identidade da seguinte forma

$$r \binom{n}{r} = (n-r+1) \binom{n}{r-1}.$$

Como na identidade anterior, o lado esquerdo conta o número de maneiras de se formar uma comissão de r membros, escolhendo-se entre esses membros um para ser o presidente da comissão. O lado direito conta a mesma coisa, pois podemos escolher entre as n pessoas $r-1$ para compor a comissão e em seguida uma pessoa entre as $n-r+1$ restantes para presidir a comissão. Portanto o lado direito e o lado esquerdo contam a mesma coisa.

(PA) Basta observar que

$$\begin{aligned} r \cdot \binom{n}{r} &= r \cdot \frac{n!}{(n-r)!r!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!(r-1)!} \end{aligned}$$

$$= \frac{n-r+1}{n-r+1} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}$$
$$= (n-r+1) \cdot \binom{n}{r-1}.$$

□

Identidade 6. *Para inteiros m, n e r tais que $0 \leq r \leq m \leq n$, temos que*

$$\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}.$$

Demonstração. ***(PAC)*** Observe que $\binom{n}{m}\binom{m}{r}$ conta o número de maneiras de se escolher uma comissão de m membros dentre n pessoas e, para cada uma dessas comissões, escolhemos r, entre as m pessoas da comissão, para formar um comitê executivo. Por outro lado, podemos escolher r pessoas entre as n pessoas para formar o comitê executivo e $m-r$ pessoas entre as $n-r$ pessoas restantes para completar a comissão de m membros. Isso pode ser feito de $\binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$ maneiras. Logo o lado esquerdo e o lado direito contam a mesma coisa.

(PA) Basta observar que

$$\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{r!(m-r)!} = \frac{n!}{r!(n-m)!(m-r)!}$$
$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{(n-r)!}{(n-m)!(m-r)!} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}.$$

□

Identidade 7. *Para inteiros n e r tais que $0 \leq r \leq n$, temos que*

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n.$$

Demonstração. (PAC) Considere uma bancada com n lâmpadas enfileiradas, que são ligadas através de n interruptores. O total de configurações das n lâmpadas é igual a 2^n, pois cada lâmpada têm duas posições, ligada ou desligada. Por outro lado, podemos ter 0 lâmpadas acesas, uma lâmpada acesa, e assim sucessivamente, ou seja, existe uma bijeção entre cada configuração e o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos. Logo o total de configurações é igual ao total de subconjuntos de um conjunto com n elementos, ou seja, $\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}$. Portanto o lado esquerdo e o lado direito contam a mesma coisa, i.e.,

$$2^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}.$$

(PA) Da definição 2, se $x = 1$ temos que

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,\ r) \cdot 1^r = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}.$$

$\square$

Identidade 8. *Para inteiros n e r tais que $0 \leq r \leq n$, temos que*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Demonstração. ***(PAC)*** O lado direito da igualdade conta a quantidade de $(r+1)-$ *subconjuntos* do conjunto $A = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n+1\}$. O lado esquerdo conta os subconjuntos de acordo com seu maior elemento. Ou seja, existem $\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}$ subconjuntos de A que têm $r+1$ elementos cujo maior elemento é $r+1$; existem $\begin{pmatrix} r+1 \\ r \end{pmatrix}$ subconjuntos de A que têm $r+1$ elementos cujo maior elemento é $r+2$. De maneira geral, existem $\begin{pmatrix} r+i \\ r \end{pmatrix}$ subconjuntos de A que têm $r+1$ elementos cujo maior elemento é $r+i+1$.

(PA) Por indução sobre n:

(i) Para $n = 0$ temos

$$\begin{pmatrix} 1 \\ r+1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, \text{ se } r = 0 \\ 0, \text{ se } r > 0 \end{cases}$$

(ii) Suponha que para $n \geq 1$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ r+1 \end{pmatrix},$$

então temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix} &= \sum_{i=0}^{n-1} \begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n \\ r+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \text{ (Hipótese de indução)} \\ &= \begin{pmatrix} n+1 \\ r+1 \end{pmatrix} \text{ (Teorema 1).} \quad \square \end{aligned}$$

Identidade 9. ***(Convolução de Vandermond)*** *Para todos os inteiros não negativos m, n e r, temos que*

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\binom{m}{k-r}=\binom{n+m}{k}.$$

Demonstração. ***(PAC)*** O lado direito conta o número de $k-$*subconjuntos* de um conjunto com $n+m$ objetos. O lado esquerdo conta os mesmos subconjuntos de acordo com o número de elementos escolhidos entre os n primeiros. De fato, primeiro escolhemos r elementos dos n primeiros, o que pode ser feito de $\binom{n}{r}$ maneiras e depois escolhemos $k-r$ dos m elementos seguintes, o que pode ser feito de $\binom{m}{k-r}$ maneiras, logo o número de maneiras de formar $k-$*subconjuntos* é igual a $\binom{n}{r}\binom{m}{k-r}$. Agora basta variar r de 0 a k. Portanto o lado esquerdo e o lado direito contam a mesma quantidade.

(PA) A soma do lado esquerdo da identidade acima é igual ao coeficiente de x^k no desenvolvimento de $(1+x)^n(1+x)^m$ e o número do lado direito da identidade é igual ao coeficiente de x^k no desenvolvimento de $(1+x)^{n+m}$, mas

$$(1+x)^n(1+x)^m=(1+x)^{n+m}$$

e segue a identidade.

□

Identidade 10. *Para todos os inteiros não negativos n, vale que*

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

Demonstração. ***(PAC)*** O lado direito conta o número de $n-$*subconjuntos* de um conjunto com $2n$ objetos. O lado esquerdo conta os mesmos subconjuntos de acordo com o número de elementos escolhidos dos n primeiros. De fato, primeiro escolhemos 0 elementos dos n primeiros e n elementos dos n seguintes, isto pode ser feito de

$$\binom{n}{0}\cdot\binom{n}{n}=\binom{n}{0}^2.$$

De maneira geral, escolhemos i objetos entre os n primeiros e $n-i$ entre os n objetos seguintes, variando i de 0 a n. Portanto lado esquerdo e lado direito contam a mesma quantidade.

(PA) Basta fazer $m=n=k$ na identidade 9.

$\square$

Identidade 11. *Para todos os inteiros não negativos n e k, com $1\leq k\leq n$, vale que*

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}.$$

Demonstração. ***(PAC)*** Observe que $k\binom{n}{k}$ conta o número de comissões de k membros nas quais um será escolhido presidente da dita comissão. Fazendo k variar de 1 a n, temos o total de comissões com um presidente que se podem formar em um grupo de n pessoas, ou seja, há $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$ total de comissões. Por outro lado, podemos contar tais comissões escolhendo o presidente entre as n pessoas e, em seguida, um subconjunto das $n-1$ pessoas restantes para formar a comissão com o presidente escolhido, i.e., há $n\cdot 2^{n-1}$ comissões. Portanto, como os dois números contam a mesma coisa, temos que $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$, ou seja, $2^{n-1}|\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$.

(PA) Como $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n$, derivando os dois lados da igualdade, na variável x (para $x=1$) obtemos o resultado.

$\square$

Identidade 12. ***O problema do mastro da bandeira***

Em [1], Arthur T. Benjamin propõe aos leitores a apresentação de uma argumentação combinatória para a identidade

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k}{q}\binom{n-1-k}{r} = \binom{n}{q+r+1}.$$

Reproduziremos a seguir uma solução que utiliza a configuração de um mastro de bandeira que deve ser colocado em um bloco e fixado por q arames azuis e r arames vermelhos.

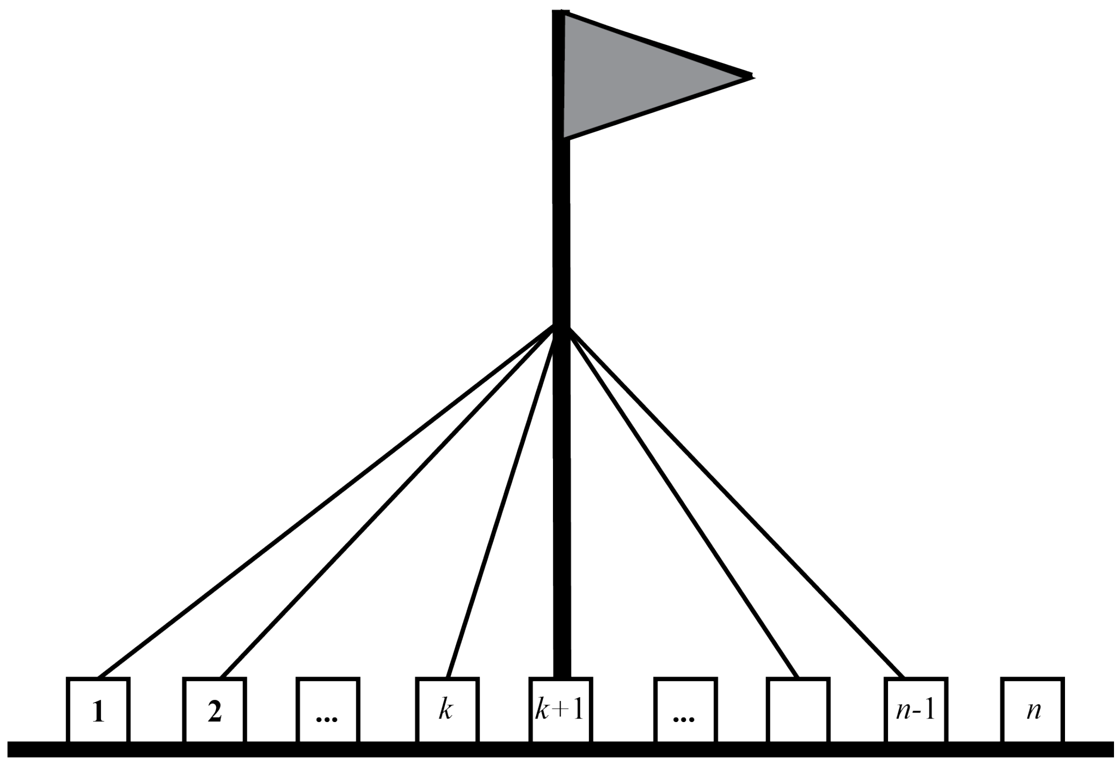


Figura 1.1: Mastro de bandeira

Considere n blocos idênticos, cada um dos quais pode suportar um mastro ou servir de ancoragem para um arame de sustentação. Vamos determinar o total de configurações nas quais a bandeira é fixada em um bloco e amarrada por q arames azuis à direita, fixados em q blocos distintos, e r arames vermelhos à esquerda, fixados em r blocos distintos. Para isso, basta escolhermos $q+r+1$ blocos entre os n blocos, utilizando os q blocos iniciais para os arames azuis, o $(q+1)-$ésimo bloco para o mastro e os blocos restantes para os r arames vermelhos. O total de tais configurações é igual a $\begin{pmatrix} n \\ q+r+1 \end{pmatrix}$. Por outro lado, suponha que o mastro esteja no $(k+1)-$ésimo bloco, $0 \leq k \leq n-1$. Existem $\begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix}$ maneiras de escolher os blocos para fixarmos os q arames azuis à direita do mastro e $\begin{pmatrix} n-1-k \\ r \end{pmatrix}$ maneiras de escolher os blocos para fixarmos os r arames vermelhos à esquerda do mastro. O total de tais configurações é igual a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1-k \\ r \end{pmatrix}.$$

Logo temos que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1-k \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ q+r+1 \end{pmatrix}.$$

1.3 Coeficientes binomiais e Teoria dos Números

Vamos apresentar alguns resultados envolvendo os coeficientes binomiais e a Teoria dos Números.

***Teorema* 1.3.** *Para quaisquer inteiros não negativos n e r, $r \leq n$, o coeficiente binomial $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ é inteiro.*

Demonstração. ***(PA)*** Vamos definir $f(n,\ r) = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ e provar por indução sobre $n + r$ que $f(n,\ r)$ é sempre inteiro positivo:

(i) (Base de indução) Se $n + r = 0$, então $r = n = 0$ e $f(0,\ 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ é inteiro.

(ii) (Hipótese de indução) Suponha que, para $n + r \leq k$, o número $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ é inteiro.

Como para $r \leq n$, pela identidade 3, temos que: $f(n,\ r) = f(n-1,\ r) + f(n-1,\ r-1)$. Segue que

(a) Se $r = n$, então $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$.

(b) Se $r < n$ e $r + n = k + 1$, então $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix}$ é inteiro, pois pela hipótese de indução $\begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix}$ são inteiros. Portanto $f(n,\ r)$ é inteiro para quaisquer inteiros não negativos n e r com $r \leq n$.

(PAC) Segue diretamente da identidade 1.

$\square$

Corolário 1. *O produto de r inteiros consecutivos é divisível por $r!$.*

Demonstração. Suponha que $m+1,\ m+2,\ \ldots,\ m+r$ são inteiros positivos.

Então temos que

$$\begin{aligned} \frac{(m+r)\cdot\ldots\cdot(m+2)(m+1)}{r!} &= \frac{(m+r)\cdot\ldots\cdot(m+2)\cdot(m+1)\cdot m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{r!\cdot m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} \\ &= \frac{(m+r)!}{r!\cdot m!} = \begin{pmatrix} m+r \\ r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como $\begin{pmatrix} m+r \\ r \end{pmatrix}$ é inteiro, segue que $r!$ divide o produto $(m+1)\cdot(m+2)\cdot\ldots\cdot(m+r)$.

$\square$

Teorema 1.4. *Se p é primo, então p divide $\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ para todo r tal que $0 < r < p$.*

Demonstração. Pela identidade 4, temos que: $r\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} p-1 \\ r-1 \end{pmatrix}$

Como $mdc(p,\ r) = 1$, temos que p divide $\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$.

$\square$

Corolário 2. *Para todo primo p e quaisquer $a,\ b \in \mathbb{Z}$, temos que*

$$a^p + b^p \equiv (a+b)^p (mod\ p).$$

Demonstração. De acordo com a proposição 1, temos $(a+b)^p = a^p + \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} a^{p-1}b + \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} a^{p-2}b^2 + \ldots + \begin{pmatrix} p \\ p-1 \end{pmatrix} ab^{p-1} + b^p$.

Para $r \in \{1,\ \ldots,\ p-1\}$, temos que $\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} \equiv 0\,(mod\ p)$, logo $a^p + b^p \equiv (a+b)^p (mod\,p)$.

$\square$

Teorema 1.5. ***(Pequeno Teorema de Fermat)****. Se p é primo, então para todo inteiro a, p divide $a^p - a$.*

Demonstração. Primeiro vamos assumir que $a \geq 0$ e provar a afirmação por indução sobre a.

(i) (Base de indução) A afirmação é verdadeira para $a = 0$ e $a = 1$.

(ii) (Hipótese de indução) Suponha que, $a > 1$ e que a afirmação é verdadeira para $a-1$, ou seja, $(a-1)^p \equiv a-1(mod\ p)$, então, de acordo com o corolário anterior, temos

$$a^p = (a-1+1)^p \equiv (a-1)^p + 1^p \equiv a-1+1 = a\,(mod\ p)\,.$$

A afirmação é válida para todo $a \geq 0$.

Agora resta provar que $a^p \equiv a(mod\ p)$ para $a < 0$. Sabemos que existem $q \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ p-1\}$ tais que $a = pq + r$. Logo pelo que acabamos de provar temos

$$a^p = (qp+r)^p \equiv (qp)^p + r^p \equiv r^p \equiv r \equiv a\,(mod\ p)\,.$$

□

Corolário 3. *Se $mdc(a,\ p) = 1$, então p divide $a^{p-1} - 1$.*

Demonstração. De fato, pois $\dfrac{a^p - a}{p} = \dfrac{a(a^{p-1}-1)}{p}$ e segue que $p|a^{p-1} - 1$.

□

Teorema 1.6. *Seja p um número primo e sejam $n,\ m,\ q,\ r$ inteiros não negativos com $0 \leq q < p$ e $0 \leq r < p$, então $\begin{pmatrix} pn+r \\ pm+r \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} (mod\ p)$*

Demonstração. Observe que temos

$$(a+b)^{pn+q} = ((a+b)^p)^n (a+b)^q \equiv (a^p + b^p)^n (a+b)^q (mod\ p)$$

Mas,

$$(a^p+b^p)^n(a+b)^q = \left(a^{pn} + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} a^{pm} b^{p(n-m)} + \ldots + b^{pn}\right) \cdot \left(a^q + \ldots + \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} a^r b^{q-r} + \ldots + b^q\right)$$

Temos que o termo $a^{pm+r}b^{p(n-m)+(q-r)}$ aparece uma única vez acompanhado do coeficiente $\binom{n}{m}\binom{q}{r}$ e temos que

$$\binom{pn+r}{pm+r} \equiv \binom{n}{m}\binom{q}{r}\,(mod\ p)\,.$$

$\square$

***Proposição* 1.1.** *O número* $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$, *chamado número de Catalan de ordem* n, *é inteiro para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Basta observar que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} &= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{2n-n+1}{n}\cdot\binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n}\cdot\binom{2n}{n-1} \qquad (identidade\quad 5)\\
&\Rightarrow \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n}\cdot\binom{2n}{n-1}\\
&\Rightarrow \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n-1}
\end{aligned}$$

Como n e $n+1$ são coprimos e $\binom{2n}{n-1}$ é inteiro segue que $n+1|\binom{2n}{n}$.

$\square$

Em [14], encontramos o seguinte problema:

De quantas maneiras um baralho de 52 cartas pode ser distribuído entre 4 jogadores de modo que cada um receba exatamente 13 cartas, sendo 4 de um dado naipe e 3 de cada um dos naipes restantes?

A resposta a esse problema é
$$\frac{(13!)^4}{(3!)^{12}(4!)^3}.$$

Olhando apenas para essa fração podemos nos perguntar se esse quociente é inteiro. De fato, trata-se de um inteiro e poderíamos dar essa resposta através de um argumento combinatório. Como ele conta o número de distribuições de 52 cartas entre 4 jogadores, fica claro que
$$\frac{(13!)^4}{(3!)^{12}(4!)^3}$$
é inteiro e igual a 4996576439751536640000000.

A seguir vamos apresentar alguns resultados que envolvem quocientes inteiros de fatoriais. Em [4] encontramos mais problemas dessa natureza.

***Proposição* 1.2.** *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, 2^n *divide* $(n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (2n)$.

Demonstração. Para demonstrar tal afirmação, vamos utilizar um argumento combinatório. De fato, observe que

$$\frac{(2n) \cdot \ldots \cdot (n+2) \cdot (n+1)}{2^n} = \frac{(2n) \cdot \ldots \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n!}{2^n \cdot n!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Basta demonstrar que $\frac{(2n)!}{2^n n!} \in \mathbb{N}$. Para tal considere $2n$ jogadores que devem ser divididos em n duplas para a disputa de um torneio. A primeira dupla pode ser escolhida de $\binom{2n}{2}$ maneiras. Para cada uma dessas, a segunda dupla pode ser escolhida de $\binom{2n-2}{2}$, a terceira de $\binom{2n-4}{2}$ e assim sucessivamente até que a última dupla pode ser escolhida de $\binom{2}{2}$. Portanto o total de maneiras de dividir os jogadores em n duplas é igual a

$$\frac{\binom{2n}{2}\cdot\binom{2n-2}{2}\cdot\ldots\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}}{n!}=\frac{(2n)!}{2^n n!}\in\mathbb{N}.$$

□

***Proposição* 1.3.** *O número* $\dfrac{(mn)!}{(m!)^n n!}$ *é inteiro para todos* $m,\ n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Considere o conjunto $I_{mn}=\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ mn\}$. Vamos particioná-lo em n subconjuntos A_1, A_2, , A_n, tais que $|\mathrm{A}_i|=m$ e $\mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_j=\varnothing$, para todo i e j.

Para a escolha dos m primeiros números, temos $\binom{mn}{m}$ possibilidades; para a escolha dos m seguintes, temos $\binom{m(n-1)}{m}$; para os m seguintes $\binom{m(n-2)}{m}$, e assim sucessivamente até que tenhamos escolhido m últimos números o que pode ser feito de $\binom{m}{m}$. Note que temos $n!$ maneiras de escolhermos essa partição, pois isso depende da ordem como os conjuntos são escolhidos. Portanto o total de maneiras de particionar o conjunto I_{mn} é igual a

$$\frac{1}{n!}\binom{mn}{m}\binom{m(n-1)}{m}\binom{m(n-2)}{m}\cdots\binom{m}{m}=$$

$$=\frac{1}{n!}\cdot\frac{(mn)!}{m![(n-1)m]!}\cdot\frac{[m(n-1)]!}{m![(n-2)m]!}\cdot\frac{[m(n-2)]!}{m![(n-3)m]!}\cdot\ldots\cdot\frac{m!}{m!0!}=\frac{(mn)!}{(m!)^n n!}.$$

Portanto

$$\frac{(mn)!}{(m!)^n n!}$$

é inteiro.

□

***Proposição* 1.4.** *O número* $\dfrac{[(mn)!]^2}{(m!)^{n+1}(n!)^{m+1}}$ *é inteiro para todos* $m,\ n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Observe inicialmente que

$$\frac{[(mn)!]^2}{(m!)^{n+1}(n!)^{m+1}} = \frac{(mn)!}{(m!)^n n!} \cdot \frac{(mn)!}{(n!)^m m!}.$$

Daí temos que, de acordo com a proposição anterior, $\dfrac{(mn)!}{(m!)^n n!}$ é o total de maneiras de particionarmos o conjunto $I_{mn} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ mn\}$ em n subconjuntos dois a dois disjuntos, todos com m elementos cada. E $\dfrac{(mn)!}{(n!)^m m!}$ é o total de maneiras de particionarmos o conjunto $I_{mn} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ mn\}$ em subconjuntos disjuntos, todos com n elementos cada.

Portanto

$$\frac{[(mn)!]^2}{(m!)^{n+1}(n!)^{m+1}}$$

é inteiro.

$\square$

***Proposição* 1.5.** *O número* $\dfrac{(2m)!(3n)!}{(m!)^2(n!)^3}$ *é inteiro para todos* $m,\ n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Observe que $\dfrac{(2m)!(3n)!}{(m!)^2(n!)^3} = \dfrac{(2m)!}{(m!)^2} \cdot \dfrac{(3n)!}{(n!)^3} = \begin{pmatrix} 2m \\ m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3n \\ n,\ n,\ n \end{pmatrix}$.

Temos que $\begin{pmatrix} 2m \\ m \end{pmatrix}$ conta o número de subconjuntos de um conjunto com $2m$ objetos e $\begin{pmatrix} 3n \\ n,\ n,\ n \end{pmatrix}$ conta o número de maneiras de colocarmos em fila $3n$ objetos, sendo n idênticos do tipo I, n idênticos do tipo II e n idênticos do tipo III. De fato, primeiro escolhemos os n lugares para os n objetos do tipo I, o que pode ser feito de $\begin{pmatrix} 3n \\ n \end{pmatrix}$ maneiras. Para cada uma dessas podemos escolher os n lugares para os objetos do tipo

II de $\binom{2n}{n}$ maneiras e finalmente podemos escolher os n lugares para os objetos do tipo III de $\binom{n}{n}$. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem podemos formar:

$$\binom{3n}{n}\binom{2n}{n}\binom{n}{n} = \frac{(3n)!}{n!(2n)!}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!}\cdot\frac{n!}{n!0!} = \frac{(3n)!}{n!n!n!} = \binom{3n}{n,\ n,\ n}$$

Portanto $\binom{2m}{m} \in \mathbb{N}$ e $\binom{3n}{n,\ n,\ n} \in \mathbb{N}$ e como consequência $\dfrac{(2m)!(3n)!}{(m!)^2(n!)^3} \in \mathbb{N}$.

□

***Proposição* 1.6.** *O coeficiente* $\binom{2n}{n}$ *é um inteiro par.*

Demonstração. Pela identidade 4 temos que:

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n}{n}\binom{2n-1}{n-1} = 2\binom{2n-1}{n-1}.$$

□

Teorema* 1.7. *(Paridade do número binomial) *Sejam n e r inteiros não negativos. Temos que*

$$\binom{n}{r} = \begin{cases} 0 \ \ (mod\ 2)\,, \text{ se n é par e r é ímpar.} \\ \dbinom{\lfloor n/2 \rfloor}{\lfloor r/2 \rfloor} \ \ (mod\ 2)\,, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Vamos analisar os quatro casos possíveis:

Caso 1: n é par e r é ímpar. Da identidade 4 temos que:

$$r\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r-1}.$$

O lado direito é par, pois n é par, então o lado esquerdo deve ser par. Como r é ímpar, segue que $\binom{n}{r}$ é par.

Caso 2: n é par e r é par. Temos que:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{r} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot r} \\
&= \frac{(n-1) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (r-1)} \cdot \frac{n \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot r} \\
&\Rightarrow \frac{(n-1) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (r-1)} \cdot \frac{2^{r/2} \cdot \frac{n}{2} \cdot (\frac{n}{2}-1) \cdot \ldots \cdot (\frac{n}{2}-\frac{r}{2}+1)}{2^{r/2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \frac{r}{2}}. \\
&\Rightarrow \frac{(n-1) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (r-1)} \cdot \frac{2^{r/2} \cdot \frac{n}{2} \cdot (\frac{n}{2}-1) \cdot \ldots \cdot (\frac{n}{2}-\frac{r}{2}+1)}{2^{r/2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \frac{r}{2}} \\
&= \frac{(n-1) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (r-1)} \cdot \binom{n/2}{r/2}.
\end{aligned}$$

Portanto podemos escrever:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (r-1) \cdot \binom{n}{r} = (n-1) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \cdot \binom{n/2}{r/2}.$$

Como n e r são pares, segue que

$$\binom{n}{r} \equiv \binom{n/2}{r/2} \equiv \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{\lfloor r/2 \rfloor} \ (mod\ 2).$$

Caso 3: n é ímpar e r é ímpar. Da identidade 4, temos que

$$r\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r-1}.$$

Sendo n e r ímpares temos que

$$\binom{n}{r} \equiv \binom{n-1}{r-1} \ (mod\ 2).$$

Como $n-1$ e $r-1$ são pares do caso 2 temos que

$$\binom{n-1}{r-1} \equiv \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{\lfloor r/2 \rfloor} \ (mod\ 2).$$

Logo,

$$\binom{n}{r} \equiv \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{\lfloor r/2 \rfloor} \ (mod\ 2).$$

Caso 4: n é ímpar e r é par. Observe que:

$$(n-r)\binom{n}{r} = (n-r)\binom{n}{n-r} \text{ e } n\binom{n-1}{n-r-1} = n\binom{n-1}{r}$$

.

Da identidade 4, temos

$$(n-r)\binom{n}{n-r} = n\binom{n-1}{n-r-1}$$

e portanto

$$(n-r)\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r}.$$

Como $n-k$ e n são ambos ímpares, temos que

$$\binom{n}{r} \equiv \binom{n-1}{r} (mod\ 2).$$

Do caso 2 temos que

$$\binom{n}{r} \equiv \binom{\lfloor n-1/2 \rfloor}{\lfloor r/2 \rfloor} (mod\ 2),$$

ou seja,

$$\binom{n}{r} \equiv \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{\lfloor r/2 \rfloor} (mod\ 2).$$

□

O Teorema 4 nos permite determinar recursivamente a paridade de qualquer coeficiente binomial. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo. Vamos determinar a paridade de $\binom{302}{180}$ e $\binom{223}{31}$. Observe o algoritmo abaixo.

1) $\binom{302}{180} \equiv \binom{151}{90} \equiv \binom{75}{45} \equiv \binom{37}{22} \equiv \binom{18}{11} \equiv 0 (mod\ 2);$

2) $\binom{223}{31} \equiv \binom{111}{15} \equiv \binom{55}{7} \equiv \binom{27}{3} \equiv \binom{13}{1} \equiv 1 (mod\ 2).$

Para o que segue, utilizaremos os seguintes fatos:

(i) Se um número inteiro é par, então, em sua expansão binária o bit mais à direita é zero e, se é ímpar, o bit mais a direita é igual a 1.

(ii) A expansão binária de $\lfloor n/2 \rfloor$ é obtida a partir da expansão binária de n, apagando-se o *bit* mais à direita.

***Teorema* 1.8.** *O número de coeficientes ímpares na n-ésima linha do triângulo de Pascal é igual a* 2^ω, *onde* ω *é o número de dígitos* 1 *na representação binária de* n.

Demonstração. Primeiro observe que no exemplo anterior, aplicamos recursivamente a operação de encontrar a parte inteira da metade do numerador e do denominador do coeficiente binomial. Mas isso corresponde a apagar o *bit* mais à direita da expansão binária de cada um daqueles termos. Portanto podemos substituir a operação anterior pela simples observação dos *bits* das expansões binárias de n e k colocados em correspondência biunívoca da direita para esquerda. Se observarmos um *bit* 0, na expansão de n, em correspondência com um *bit* 1 de k, então o coeficiente binomial é par. Por outro lado, observe que, se na expansão binária de n aparece o *bit* 1, então o *bit* correspondente na expansão binária de k pode ser 0 ou 1. Assim, se há ω *bits* 1 na expansão de n, temos 2^ω possibilidades de valores para k tal que $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ é ímpar.

$\square$

Exemplo. Já vimos que $\begin{pmatrix} 302 \\ 180 \end{pmatrix}$ é par. Vamos observar as expansões binárias de 302 e 180.

$$(302)_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_2$$

$$\updownarrow \; \updownarrow \; \updownarrow \; \updownarrow \; \updownarrow \; \updownarrow \; \updownarrow \; \updownarrow \; \updownarrow$$

$$(180)_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_2$$

O quinto *bit* contado da direita para esquerda é 0 para $n = 302$ e 1 para $k = 180$.

Portanto $\begin{pmatrix} 302 \\ 180 \end{pmatrix}$ é par.

Corolário 4. *Se* $n = 2^k - 1$*, então todos os coeficientes da* $n-$*ésima linha do triângulo de Pascal são ímpares.*

Demonstração. Não existem *bits* 0 na expansão de $2^k - 1$.

$\square$

Capítulo 2

Números de Fibonacci

Os números de Fibonacci estão associados ao famoso "Problema dos Coelhos", publicado pela primeira vez no Ocidente no livro Liber Abaci de Leonardo de Pisa. Filho de um próspero comerciante italiano, Leonardo de Pisa morou por muitos anos na cidade de Bejaia, Argélia, onde seu pai havia sido nomeado coletor de impostos [5]. Leonardo estudou o sistema de numeração hindu-arábico e tem o mérito de tê-lo introduzido na Europa também através do Liber Abaci.

Publicado em 1202, sua obra-prima, além de tratar do sistema de numeração hindu-arábico, traz problemas sobre sistemas lineares determinados e indeterminados de mais de duas incógnitas e sobre números perfeitos. Entre esses temas, encontra-se discretamente o problema que o tornaria imortal.

No famoso "Problema dos Coelhos", Leonardo diz que uma pessoa tem um par de coelhos recém-nascidos, um de cada sexo. Estamos interessados em determinar o número de pares de coelhos que podem ser gerados a partir do par inicial, incluindo esse, ao final de n meses, tais que:

(1) Cada par de recém-nascidos, macho e fêmea, demora um mês para se tornar adulto;

(2) Dois meses após seu nascimento, e mensalmente, um par de coelhos adultos gera, no início de cada mês, um novo par de coelhos, macho e fêmea.

(3) Não há mortes de coelhos.

A análise e solução desse problema nos leva à sequência de números $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,$

$21, 34, 55, \ldots$, que hoje conhecemos com sequência de Fibonacci. O nome Fibonacci é uma contração das palavras Filius Bonacci, em português Filho de Bonacci [5]. Esse nome foi dado pelo matemático francês Edouard Anatole Lucas.

Definição 2.1. *Para $n \geq 1$, se denotarmos por F_n o $n-$ésimo número de Fibonacci, então temos que:*

(1) $F_1 = 1$ *e* $F_2 = 1$*;*

(2) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 3$.

2.1 Interpretações Combinatórias para os números de Fibonacci

Nessa Seção estudaremos algumas interpretações combinatórias para os números de Fibonacci. Para o que segue usaremos as seguintes definições:

(i) Dado um inteiro positivo n, chamaremos de composição desse inteiro a toda sequência formada apenas por números iguais a 1 e 2 cuja soma dos termos é igual a n .

(ii) S_n é o conjunto das composições de n.

(iii) $|S_n|$ é a cardinalidade de S_n e $|S_0| = 0$.

(iv) Uma palavra de comprimento n é uma sequência ordenada de n símbolos. Uma palavra (ou sequência) binária é uma sequência de $0's$ e $1's$ (chamados *bits*). Para nossas pretensões, vamos classificar as sequências binárias de comprimento n nos seguintes tipos:

(a) **Tipo 1**: sequências (ou palavras) binárias que não têm dois *bits* 1 consecutivos.

(b) **Tipo 2**: sequências binárias que começam por 0 e não têm dois *bits* 1 consecutivos.

(c) **Tipo 3**: sequências binárias que começam por 0 e terminam por 0 e não têm dois *bits* 1 consecutivos.

(d) **Tipo 4**: sequências binárias que começam por 1 e não têm dois *bits* 1 consecutivos.

(e) **Tipo 5**: sequências binárias que começam por 1 e terminam por 1 e não têm dois *bits* 1 consecutivos.

(f) **Tipo 6**: sequências binárias que não têm dois *bits* 1 consecutivos e não têm o *bit* 1 simultaneamente nas posições 1 e n. Chamaremos essas palavras de palavras binárias circulares.

(v) O conjunto das sequências binárias do tipo i será designado por P_i.

(vi) Justapor duas sequências significa colocá-las lado a lado (uma após a outra).

***Proposição* 2.1.** *A quantidade de composições de n é igual F_{n+1}.*

Demonstração. Considere a partição de S_n em dois subconjuntos $S_n^{(1)}$e $S_n^{(2)}$, onde $S_n^{(i)}$ é o conjunto das composições que terminam em i, $i \in \{1,\ 2\}$, logo $|S_n| = \left|S_n^{(1)}\right| + \left|S_n^{(2)}\right|$. Basta observar agora que, se retirarmos o último 1 de cada sequência de $S_n^{(1)}$, obteremos as composições formadas com $1's$ e $2's$, cuja soma é igual a $n-1$. Similarmente, se adicionarmos um 1 ao final de cada sequência, cuja soma é $n-1$, obteremos as composições que terminam em 1 e cuja soma é n . Então $\left|S_n^{(1)}\right| = |S_{n-1}|$. Analogamente, retirando o último 2 das composições de $S_n^{(2)}$ obtemos as composições formadas com $1's$ e $2's$, cuja soma é $n-2$, teremos que $\left|S_n^{(2)}\right| = |S_{n-2}|$. Portanto $|S_n| = \left|S_n^{(1)}\right| + \left|S_n^{(2)}\right| = |S_{n-1}| + |S_{n-2}|$, que satisfaz à recorrência de Fibonacci e como $|S_1| = 1$ e $|S_2| = 2$ temos que $|S_n| = F_{n+1}$.

□

***Proposição* 2.2.** *A quantidade de maneiras de se escrever o inteiro positivo como soma de inteiros ímpares positivos é F_{n+1}.*

Demonstração. Seja T_{n+1} o conjunto das sequências de inteiros positivos ímpares cuja soma dos termos é $n+1$. Vamos mostrar que $|T_{n+1}| = |S_n|$. De fato, dada uma composição em S_n, vamos acrescentar um 1 ao início da composição. A nova composição tem soma $n+1$ e cada subsequência de $2's$ consecutivos aparece na nova composição precedida de um 1. Basta trocar cada subsequência consecutiva de $2's$ e o 1 precedente por sua soma. A soma será um número inteiro ímpar e os únicos termos que não foram mudados são os $1's$ que são precedidos por outro 1. A composição resultante será uma sequência de inteiros positivos ímpares cuja soma é igual a $n+1$. Similarmente, se trocarmos cada inteiro positivo ímpar $2k+1 \geq 3$ em um elemento de T_{n+1} pela sequência $1 \underbrace{22\ldots2}_{k\ termos\ 2's}$, teremos uma sequência formada por $1's$ e $2's$, cuja soma é igual a $n+1$. Portanto $|T_{n+1}| = |S_n| = F_{n+1}$.

$\square$

***Proposição* 2.3.** *A quantidade de subconjuntos de* $I_n = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$ *nos quais não há números consecutivos é igual é* F_{n+2}.

Demonstração. Vamos definir a_n como o número de subconjuntos de I_n que não possuem números consecutivos. Para contar tais subconjuntos, vamos dividi-los em dois casos:

Caso 1 : n não pertence ao subconjunto. Nesse caso o total de subconjuntos é igual ao total de subconjuntos de I_{n-1} que não possuem números consecutivos, mas esse total é a_{n-1}.

Caso 2 : n pertence ao subconjunto. Nesse caso $n-1$ não pertence ao subconjunto e o total de subconjuntos é igual ao total de subconjuntos de $I_{n-2} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-2\}$ que não possuem números consecutivos, mas esse total é a_{n-2}. Portanto $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geq 3$ e, como $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$, temos que $a_n = F_{n+2}$.

$\square$

***Proposição* 2.4.** *A quantidade de palavras binárias do tipo* 1 *de comprimento* n *é igual a* F_{n+2}.

Demonstração. Vamos definir p_n como o número de palavras binárias de comprimento n que não possuem dois bits $1's$ consecutivos. Para contar tais palavras, vamos dividi-las em dois casos:

Caso 1 : A palavra termina em 0. Nesse caso o total de palavras de n *bits* que terminam em 0 é igual ao total de palavras de $n-1$ *bits* que não possuem dois *bits* $1's$ consecutivos, ou seja, p_{n-1}.

Caso 2 : A palavra termina em 1. Nesse caso o $(n-1) - ésimo$ bit deve ser igual a 0 e o total de palavras de n bits que terminam em 1 é igual ao total de palavras de $n-2$ *bits* que não possuem dois *bits* $1's$ consecutivos, ou seja, p_{n-2}.

Portanto $p_n = p_{n-1} + p_{n-2},\ n \geq 2$ e, como $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$ temos que $p_n = F_{n+2}$.

Observe que é possível estabelecer uma bijeção entre o total de subconjuntos de $I_n = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$ e o total de palavras binárias de comprimento n que não possuem dois *bits* 1 consecutivos. De fato, para formarmos os subconjuntos de I_n que não têm dois números consecutivos, marcamos cada elemento selecionado com o *bit* 1 e os não selecionados com o *bit* 0. Com isso temos uma correspondência biunívoca entre os subconjuntos de I_n (incluindo o vazio) e as palavras binárias de comprimento n do tipo 1.

□

***Proposição* 2.5.** *A quantidade de palavras binárias de comprimento n do tipo 2 é igual a F_{n+1}.*

Demonstração. De fato, seja b_n o total de palavras do tipo 2. Como as palavras do tipo 2 começam com o *bit* 0, então não há restrições para o segundo *bit* e portanto o total de palavras do tipo 2 é igual ao total de palavras do tipo 1 de comprimento $n-1$, ou seja, $b_n = p_{n-1} = F_{(n-1)+2} = F_{n+1}$. Observe que $b_1 = 1$ e $b_2 = 2$.

□

***Proposição* 2.6.** *A quantidade de palavras binárias de comprimento n do tipo* 3 *é igual a F_n.*

Demonstração. De fato, as palavras do tipo 3 têm o primeiro e o último *bit* fixos e iguais a 0, então o total de palavras do tipo 3 é igual ao total de palavras do tipo 1 de comprimento $n-2$, ou seja, $p_n = F_{(n-2)+2} = F_n$. Portanto temos F_n palavras do tipo 3 de comprimento n.

□

***Proposição* 2.7.** *A quantidade de palavras binárias do tipo* 4 *de comprimento n é igual a F_{n-1}.*

Demonstração. De fato, as palavras do tipo 4 têm o primeiro *bit* fixo e igual a 1, então o segundo *bit* deve ser zero e o total de palavras do tipo 4 é igual ao total de palavras do tipo 2 de comprimento $n-1$. Portanto temos F_{n-1} palavras do tipo 4 de comprimento n.

□

***Proposição* 2.8.** *A quantidade de palavras binárias do tipo* 5 *de comprimento n é igual a F_{n-2}.*

Demonstração. De fato, as palavras do tipo 5 têm o primeiro e o último *bit* fixos e iguais a 1, então os *bits* nas posições 2 e $n-1$ devem ser iguais a 0. Logo o total de palavras do tipo 5 é igual ao total de palavras do tipo 3 de comprimento $n-2$. Portanto temos F_{n-2} palavras do tipo 5.

□

Proposição 2.9. *O número de maneiras de cobrirmos um tabuleiro* $1 \times n$ *com quadrados* 1×1 *e dominós* 1×2 *é igual a* F_{n+1}.

Demonstração. Vamos definir f_n como o número de maneiras de cobrir um tabuleiro $1 \times n$ com quadrados 1×1 e dominós 1×2. Para um tabuleiro 1×1, temos uma cobertura apenas, ou seja, $f_1 = 1 = F_2$. Para um tabuleiro 1×2, temos duas coberturas possíveis, dois quadrados 1×1 ou um dominó 1×2, isto é, $f_2 = 2 = F_3$. Para contar as coberturas dos tabuleiros $1 \times n$, $n \geq 2$, vamos particionar tais coberturas em dois subconjuntos de acordo com a primeira peça. Se a primeira peça é um quadrado 1×1, para as $n-1$ posições restantes existem f_{n-1} configurações. Se a primeira peça é um dominó 1×2, então para as $n-2$ posições restantes existem f_{n-2} configurações. Logo $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 2$. Portanto f_n satisfaz a recorrência de Fibonacci e $f_n = F_{n+1}$.

□

Na Figura 2.1 são mostradas as coberturas de um tabuleiro 1×4.

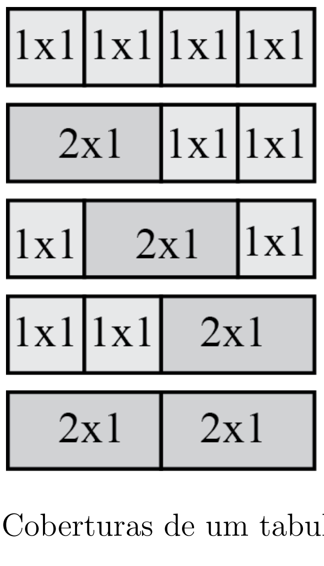


Figura 2.1: Coberturas de um tabuleiro 1×4.

2.2 Identidades envolvendo os Números de Fibonacci

A seguir demonstraremos identidades envolvendo números de Fibonacci utilizando as interpretações combinatórias apresentadas na seção anterior.

Identidade 13.

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Demonstração. (PAC) O lado direito conta o número de composições do inteiro positivo $n+1$ excetuando-se uma possibilidade, ou seja, $F_{n+2}-1$. A composição que será excluída é aquela em que todas as parcelas são iguais a 1, com isso teremos, em nossa soma, pelo menos uma parcela igual a 2. Por outro lado, podemos escrever $n+1$ como a soma de parcelas iguais a 1 e 2, fixando uma parcela 2. Para isso vamos dividir cada composição em três partes: a parcela fixa 2, i parcelas iguais a 1 e os elementos dos conjuntos S_{n-i-1}, i variando de 0 a $n-1$. Veja o esquema a seguir.

$$\begin{array}{ll}
i = 0: & (S_{n-1})\,\underline{2} \\
i = 1: & (S_{n-2})\,\underline{2}1 \\
i = 2: & (S_{n-3})\,\underline{2}11 \\
\quad\vdots & \qquad\vdots \\
i = n-2: & (S_1)\,\underline{2}\underbrace{11111\ldots1}_{n-2\ parcelas} \\
i = n-1: & \underline{2}\underbrace{11111\ldots1}_{n-1\ parcelas}
\end{array}$$

Observe que, em todas as configurações acima, a soma é sempre igual a $n+1$. Como o número de casos em cada configuração acima é $|S_k| = F_{k+1}$, para $k \in \{0,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1\}$, temos que o total de casos é $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = \sum_{k=1}^{n} F_k$. Portanto o lado direito e o lado esquerdo contam a mesma coisa.

(PA) Vamos provar nossa identidade por indução.

(i) Basta observar que $F_1 = F_3 - 1$. Logo nossa identidade é verdadeira para $n = 1$.

(ii) Suponha que, para $k \geq 1$, nossa identidade seja verdadeira, ou seja, $\sum_{i=1}^{k} F_i = F_{k+2} - 1$, então temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} F_i &= \left(\sum_{i=1}^{k} F_i\right) + F_{k+1} \qquad \text{(Hipótese de indução)} \\
&= (F_{k+2} - 1) + F_{k+1} \\
&= (F_{k+2} + F_{k+1}) - 1 \\
&= F_{k+3} - 1.
\end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio da Indução, a identidade é verdadeira para todo inteiro positivo.

□

Identidade 14.

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_{2k-1} = F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n+1} = F_{2n+2}.$$

Demonstração. (PAC) O lado direito conta o número de composições do inteiro positivo $2n+1$, ou seja, F_{2n+2}. Por outro lado, observe que as composições de $2n+1$ têm pelo menos uma parcela igual a 1. Vamos contar tais composições de acordo com a posição de uma parcela fixa igual a 1. Cada composição será composta de três partes: os elementos do conjunto S_{2n-2i}, $i \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, a parcela fixa 1 e i parcelas iguais a 2. Observe que, em cada configuração, a soma é igual a $2n+1$. De fato, $2n+1 = (2n-2i) + 1 + 2i$. Veja o esquema a seguir.

$$\begin{array}{l}
(S_{2n})\,\underline{1} \\
(S_{2n-2})\,\underline{1}2 \\
(S_{2n-4})\,\underline{1}22 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{array}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$(S_2)\, \underline{1}\ \underbrace{222\ldots22}_{n-1\ parcelas}$$

$$\underline{1}\,\underbrace{222\ldots22}_{n\ parcelas}$$

Como o número de casos em cada configuração acima é F_{2k-1}, para $k \in \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n+1\}$, temos que o total de casos é

$$F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} F_{2k-1}.$$

Portanto o lado direito e o lado esquerdo contam a mesma coisa.

(PA) Usando a recorrência da sequência de Fibonacci temos:

$$F_1 = F_2$$

$$F_3 = F_4 - F_2$$

$$F_5 = F_6 - F_4$$

$$\vdots$$

$$F_{2n-3} = F_{2n-2} - F_{2n-4}$$

$$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$$

$$F_{2n+1} = F_{2n+2} - F_{2n}.$$

Somando as equações acima temos $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$.

$\square$

Identidade 15.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

Demonstração. ***(PAC)*** O lado direito conta o número de maneiras de se escrever $2n$

como soma de parcelas iguais a 1 e 2 excetuando-se uma possibilidade. A possibilidade que será excluída é aquela em que todas as parcelas são iguais a 2. Por outro lado, podemos escrever $2n$ como soma de parcelas iguais a 1 e 2 fixando-se uma parcela igual a 1. Observe que nesse caso em cada sequência teremos os elementos do conjunto $S_{2n-2i-1}$, com $i \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-2\}$, a parcela 1 fixa e i parcelas iguais a 2. Veja o esquema a seguir.

$$(S_{2n-1})\,\underline{1}$$

$$(S_{2n-3})\,\underline{1}2$$

$$(S_{2n-5})\,\underline{1}22$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$(S_3)\,\underline{1}\,\underbrace{222\ldots22}_{n-2\ parcelas}$$

$$(S_1)\,\underline{1}\,\underbrace{222\ldots22}_{n-1\ parcelas}$$

Observe que temos todas as configurações de $1's$ e $2's$ tais que sua soma é sempre igual a $2n$. Como o número de casos em cada configuração acima é F_{2k}, para $k \in \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$, temos que o total de casos é $F_2 + \ldots + F_{2n} = \sum_{k=1}^{n} F_{2k}$. Portanto o lado direito e o lado esquerdo contam a mesma coisa.

(PA) Basta observar que

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = \sum_{i=1}^{2n} F_i - \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = (F_{2n+2} - 1) - F_{2n} = (F_{2n+2} - F_{2n}) - 1 = F_{2n+1} - 1$$

□

Identidade 16. *Para $m \geq 2$ e $n \geq 1$, temos que*

$$F_{m+n} = F_{m-1} \times F_n + F_m \times F_{n+1}.$$

Demonstração. (PAC) O lado esquerdo conta o número de sequências binárias de comprimento $m+n$ do tipo 3, ou seja, F_{m+n}. Por outro lado, podemos contar essas sequências dividindo-as em dois conjuntos, A e B, onde A é o conjunto das sequências binárias do tipo 3 de comprimento $m+n$ que possuem o bit 1 fixo na $m-ésima$ posição e B é o conjunto das sequências binárias do tipo 3 de comprimento $m+n$ e que possuem o bit 0 fixo na $m-ésima$, observe o esquema abaixo. Temos que $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = P_3$ e $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$, ou seja, A e B formam uma partição de P_3 e, com isso, $|P_3| = |\mathrm{A}| + |\mathrm{B}|$. Observe agora que todas as sequências de A têm o bit 1 fixo na posição m e o total de tais sequências é igual $F_{m-1} \times F_n$, pois os bits que ocupam as posições de 1 a $m-1$ são iguais a 0 e os bits que ocupam as posições de $m+1$ a $m+n$ também são iguais a 0. As sequências de B têm o bit 0 fixo na posição m e o total de tais sequências é igual a $F_m \times F_{n+1}$, pois o bit que ocupa a posição $m+1$ é igual a 0 ou 1 e o bit que ocupa a posição $m+n$ é igual a 0. Logo são formadas sequências do tipo 2. Portanto $|P_3| = F_{m-1} \times F_n + F_m \times F_{n+1}$ e o lado direito e o lado esquerdo contam a mesma coisa.

$$\textbf{Conjunto A}: \overbrace{\underbrace{00\ldots0}_{m-1\ bits}}^{tipo\ 3} 1 \overbrace{\underbrace{0\ldots0}_{n\ bits}}^{tipo\ 3}$$

$$\textbf{Conjunto B}: \overbrace{\underbrace{00\ldots0}_{m\ bits}}^{tipo\ 3}\overbrace{\underbrace{00\ldots0}_{n\ bits}}^{tipo\ 2} \text{ e } \overbrace{\underbrace{00\ldots0}_{m\ bits}}^{tipo\ 3}\overbrace{\underbrace{10\ldots0}_{n\ bits}}^{tipo\ 2}$$

(PA) Vamos provar, para cada valor fixo de m, por indução sobre n , que $F_{m+n} = F_{m-1} \times F_n + F_m \times F_{n+1}$, para $m \geq 2$ e $n \geq 1$.

(i) (Base de indução) A identidade é verdadeira $n = 1$,

$$F_{m+1} = F_{m-1} \times F_1 + F_m \times F_2 = F_{m-1} + F_m.$$

(ii) (Hipótese de indução) Suponha que a identidade é verdadeira para $n = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$, então temos

$$F_{m+(k-1)} = F_{m-1} \times F_{k-1} + F_m \times F_k \text{ e } F_{m+k} = F_{m-1} \times F_k + F_m \times F_{k+1}.$$

Somando ordenadamente essas duas igualdades, obtemos:

$$\begin{aligned} F_{m+k-1} + F_{m+k} &= (F_{m-1} \times F_{k-1} + F_m \times F_k) + (F_{m-1} \times F_k + F_m \times F_{k+1}) \\ &= (F_{k-1} + F_k) \times F_{m-1} + (F_k + F_{k+1}) \times F_m \\ &= F_{m-1} \times F_{k+1} + F_m \times F_{k+2} \end{aligned}$$

Ou seja:

$$F_{m+k+1} = F_{m-1} \times F_{k+1} + F_m \times F_{k+2}.$$

Portanto $F_{m+n} = F_{m-1} \times F_n + F_m \times F_{n+1}$ é inteiro para quaisquer inteiros $m \geq 2$ e $n \geq 1$.

□

Identidade 17. *Para $n \geq 1$, temos que*

$$F_n \times F_{n+1} = F_{2n+1} - F_{n-1} \times F_{n+1} - F_n^2.$$

Demonstração. ***(PAC)*** O lado esquerdo conta o número de justaposições das sequências binárias do tipo 3 de comprimento n e $n+1$, respectivamente, ou seja, $F_n \times F_{n+1}$. Por outro lado, temos que cada justaposição tem comprimento $2n+1$, começa por 0, termina por 0, não tem dois *bits* 1 consecutivos e não possui o bit 1 nas posições n e $n+1$. Para contar tais justaposições, vamos retirar das sequências binárias do tipo 3 de comprimento $2n+1$ as sequências que possuem o *bit* 1 na posição n ou na posição $n+1$. As sequências que possuem o *bit* 1 na posição n são em número de $F_{n-1} \times F_{n+1}$ e aquelas que possuem o *bit* 1 na posição $n+1$ são em número de $F_n \times F_n$. Veja o esquema abaixo.

Sequências do tipo 3 com o *bit* 1 na posição n:

$$\underbrace{\overbrace{0\ldots0}^{\text{tipo 3}}1}_{n\ bits}\underbrace{\overbrace{0\ldots0}^{\text{tipo 3}}}_{n+1\ bits}.$$

Sequências do tipo 3 com o *bit* 1 na posição $n+1$:

$$\underbrace{\overbrace{0\ldots0}^{\text{tipo 3}}}_{n\ bits}\underbrace{1\overbrace{0\ldots0}^{\text{tipo 3}}}_{n+1\ bits}.$$

Logo o total de justaposições de sequências do tipo 3 de comprimento n e $n+1$, respectivamente, é igual a $F_{2n+1} - F_{n-1} \times F_{n+1} - F_n^2$. Portanto lado direito e lado esquerdo contam a mesma coisa.

(PA) Basta fazer $m = n + 1$ na identidade 4. De fato, se $m = n + 1$, temos que

$$F_{n+1+n} = F_{n+1} \times F_n + F_{n+1-1} \times F_{n-1} = F_{n+1} \times F_n + F_n \times F_{n-1}$$

e

$$F_{2n+1} = F_n \times F_{n+1} + F_n \times F_{n-1}.$$

□

Identidade 18. *Para $n \geq 1$, temos que*

$$F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{n-2} \times F_n + F_{n-1} \times F_{n+1}.$$

Demonstração. *(PAC)* Para demonstrar essa identidade, vamos reescrevê-la da seguinte forma $F_n^2 - F_{n-2} \times F_n = F_{n-1} \times F_{n+1} - F_{n-1}^2$. Seja J_1 o conjunto das justaposições das sequências do tipo 3 de comprimento n, temos que $|J_1| = F_n^2$. E seja J_2 as justaposições de duas sequências do tipo 3 de comprimentos $n-1$ e $n+1$, respectivamente, então temos que $|J_2| = F_{n-1} \times F_{n+1}$. Observe que J_1 e J_2 são conjuntos de sequências de comprimento $2n$ do tipo 3. Vamos determinar $|J_1 \cap J_2|$. Para tanto devemos excluir, do conjunto J_1, as sequências do tipo 3 que não pertencem a J_2 e, do conjunto J_2, as sequências do tipo 3 que não pertencem a J_1. Para isso observe que as sequências de J_2 não possuem o *bit* 1 na posição $n-1$, além disso as sequências de J_1 têm fixo na posição n o *bit* zero. Logo o total de sequências de J_1 que não pertencem a J_2 é igual a $F_{n-2} \times F_n$. Por outro lado, as sequências de J_1 não possuem na posição $n+1$ o bit 1, logo devemos excluir de J_2 as sequências que têm o *bit* 1 na posição $n+1$, ou seja, devemos eliminar de J_2, $F_{n-1} \times F_{n-1}$ sequências. Portanto $F_n^2 - F_{n-2} \times F_n = F_{n-1} \times F_{n+1} - F_{n-1}^2$ ou $F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{n-2} \times F_n + F_{n-1} \times F_{n+1}$.

□

Identidade 19. *Para $n \geq 1$, temos que*

$$F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1}.$$

Demonstração. Basta observar que, de acordo com a identidade 16, a identidade anterior pode ser reescrita como

$$F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{n-1} \times F_{n+1} + F_{n-2} \times F_n = F_{2n-1}.$$

$\square$

Para a identidade seguinte, conhecida como Identidade de Cassini, vamos observar as seguintes considerações. Uma palavra binária de comprimento n tem no máximo n *bits* iguais a 1 e uma palavra binária de comprimento n do tipo 1 tem no máximo $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ *bits* iguais a 1. Observe que uma palavra binária de comprimento n do tipo 3 têm no máximo $\frac{n-2}{2}$ *bits* 1, se n é par, e $\frac{n-1}{2}$, se n é ímpar.

Identidade 20. ***(Identidade de Cassini)***. *Para $n \geq 2$, temos que*

$$F_{n-1}^2 - F_n \times F_{n-2} = (-1)^n.$$

Demonstração. *(**PAC**)* Pela identidade anterior, temos que

$$F_n^2 - F_{n-2} \times F_n = F_{n-1} \times F_{n+1} - F_{n-1}^2.$$

Observe que $F_n \times F_{n-2}$ é o total de sequências excluídas de J_1 e F_{n-1}^2 é o total de sequências excluídas de J_2. Vamos dividir nossa prova em dois casos, conforme a paridade de n:

Caso 1 : n par. Nesse caso as $F_n \times F_{n-2}$ sequências, que são justaposições de sequências do tipo 3 de comprimento n e sequências do tipo 3 de comprimento $n-2$ têm $\frac{n-2}{2} + \frac{n-4}{2} + 1 = n-2$ bits 1. As F_{n-1}^2 sequências, que são justaposições de sequências do tipo 3 de comprimento $n-1$, têm $\frac{n-1-1}{2} + \frac{n-1-1}{2} + 1 = n-1$ *bits* 1. Portanto há uma, e exatamente uma, sequência a mais retirada de J_2 em relação às que são retiradas de J_1. Ou seja, $F_n \times F_{n-2} - F_{n-1}^2 = -1$.

Caso 2 : n ímpar. Nesse caso as $F_n \times F_{n-2}$ sequências, que são justaposições de sequências do tipo 3 de comprimento n e sequências do tipo 3 de comprimento $n-2$, têm no máximo $\frac{n-1}{2} + \frac{n-2-1}{2} + 1 = n-1$ bits 1. As F_{n-1}^2 sequências, que são justaposições de sequências do tipo 3 de comprimento n, têm no máximo $\frac{n-1-2}{2} + \frac{n-1-2}{2} + 1 = n-2$ bits 1. Portanto há uma, e exatamente uma, sequência a mais retirada de J_1 em relação às que são retiradas de J_2. Ou seja,

$$F_n \times F_{n-2} - F_{n-1}^2 = 1.$$

Reunindo as duas condições acima, temos

$$F_{n-1}^2 - F_n \times F_{n-2} = (-1)^n.$$

□

Identidade 21. *Para $n \geq 1$, temos que*

$$F_n^2 = F_{2n} - 2F_n \times F_{n-1}.$$

Demonstração. ***(PAC)*** O lado esquerdo conta o número de justaposições de duas sequências binárias do tipo 3 de comprimento n, que é igual a F_n^2. Observe que, se justapormos tais sequências obteremos sequências do tipo 3 de comprimento $2n$, que possuem o $n - \textit{ésimo}$ e o $(n+1) - \textit{ésimo}$ *bits* iguais a 0. Por outro lado, podemos contar as justaposições das sequências de comprimento n excluindo das sequências de comprimento $2n$ as sequências que têm o *bit* 1 na posição n ou na posição $n+1$. O número de sequências que têm o *bit* 1 na posição n é igual a $F_{n-1} \times F_n$, pois obrigatoriamente o *bit* 0 deve ocupar a posição $n-1$. Analogamente, o número de sequências que têm o *bit* 1 na $(n+1) - \textit{ésima}$ posição é igual $F_n \times F_{n-1}$, pois obrigatoriamente o *bit* 0 deve ocupar a posição $n+2$. Portanto temos $F_{2n} - 2F_n \times F_{n-1}$ sequências de comprimento $2n$ que não possuem o *bit* 0 nas posições n e $n+1$ simultaneamente. Logo o lado esquerdo e o lado direito contam a mesma coisa.

□

Identidade 22. *Para $n \geq 1$, temos que*

$$F_n^3 = F_{3n} - F_{n-1} \times F_{2n} - F_n \times F_{2n-1} - 2F_n^2 \times F_{n-1}.$$

Demonstração. ***(PAC)*** O lado esquerdo conta o número de justaposições de três sequências binárias do tipo 3 de comprimento n, que é igual a F_n^3. Primeiro observe que, aos justapormos tais sequências obteremos sequências do tipo 3 de comprimento

$3n$, que possuem o *bit* 0 fixo nas posições n, $n+1$, $2n$ e $2n+1$. Por outro lado, podemos contar as justaposições de três sequências de comprimento n excluindo das sequências de comprimento $3n$ as sequências que têm o *bit* 1 em pelo menos uma das posições n, $n+1$, $2n$ ou $2n+1$. Vamos dividir essa contagem em quatro casos:

Caso 1 : sequências com os *bits* 1 e 0 fixos nas posições n e $n+1$. Nesse caso o total de sequências é igual a $F_{n-1} \times F_{2n}$. Observe o esquema abaixo.

$$\underbrace{\overbrace{0\ldots00}^{n-1\ bits}1}_{n\ bits}\overbrace{\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{n\ bits}\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{n\ bits}}^{2n\ bits}$$

Caso 2 : sequências com os *bits* 0 e 1 fixos nas posições n e $n+1$. Nesse caso o total de sequências é igual a $F_n \times F_{2n-1}$. Observe o esquema abaixo.

$$\underbrace{\overbrace{0\ldots00}^{n-1\ bits}0}_{n\ bits}\overbrace{\underbrace{10\ldots0}_{n\ bits}\underbrace{00\ldots0}_{n\ bits}}^{2n\ bits}$$

Caso 3 : sequências com os *bits* 0 e 1 fixos nas posições $2n$ e $2n+1$. Nesse caso o total de sequências é igual a $F_n \times F_n \times F_{n-1}$. Observe o esquema abaixo.

$$\underbrace{\overbrace{0\ldots00}^{n-1\ bits}0}_{n\ bits}\overbrace{\underbrace{00\ldots0}_{n\ bits}\underbrace{10\ldots0}_{n\ bits}}^{2n\ bits}$$

Caso 4 : sequências com os *bits* 1 e 0 fixos nas posições $2n$ e $2n+1$. Nesse caso o total de sequências é igual a $F_n \times F_{n-1} \times F_n$. Observe o esquema abaixo.

$$\underbrace{\overbrace{0\ldots00}^{n-1\ bits}0}_{n\ bits}\overbrace{\underbrace{00\ldots1}_{n\ bits}\underbrace{00\ldots0}_{n\ bits}}^{2n\ bits}$$

Portanto temos $F_{3n}-F_{n-1}\times F_{2n}-F_n\times F_{2n-1}-2F_n^2\times F_{n-1}$ sequências de comprimento $3n$ que possuem o *bit* 0 fixo nas posições n, $n+1$, $2n$ e $2n+1$. Logo o lado esquerdo e o lado direito contam a mesma coisa.

□

Identidade 23. *Para $n \geq 1$, temos que*

$$F_{3n} = 2F_n^3 + 3F_{n-1}F_nF_{n+1}.$$

Demonstração. Utilizando a identidade anterior e lembrando que $F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_{2n-1}$ (identidade 19) e $F_{2n} = F_n^2 + 2F_n \times F_{n-1}$ (identidade 20), temos que

$$\begin{aligned}
F_n^3 &= F_{3n} - F_{n-1} \times \left(F_n^2 + 2F_n \times F_{n-1}\right) - F_n \times \left(F_{n-1}^2 + F_n^2\right) - 2F_n^2 \times F_{n-1} \\
F_n^3 &= F_{3n} - F_{n-1} \times F_n^2 - 2F_n \times F_{n-1}^2 - F_n \times F_{n-1}^2 - F_n^3 - 2F_n^2 \times F_{n-1} \\
2F_n^3 &= F_{3n} - 3F_n \times F_{n-1}^2 - 3F_n^2 \times F_{n-1} \\
F_{3n} &= 2F_n^3 + 3F_n \times F_{n-1} \times F_{n+1}
\end{aligned}$$

□

Identidade 24. *Para $k,\ n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, temos que*

$$F_{kn} = \sum_{i=1}^{k} F_n^{i-1}\left(F_{n-1} \cdot F_{(k-i)n} + F_n \cdot F_{(k-i)n-1}\right).$$

Demonstração. ***(PAC)*** Para demonstrar nossa identidade vamos reescrevê-la da seguinte forma

$$F_n^k = F_{kn} - \sum_{i=1}^{k-1} F_n^{i-1}\left(F_{n-1} \cdot F_{(k-i)n} + F_n \cdot F_{(k-i)n-1}\right).$$

O lado esquerdo conta o número de justaposições de k sequências binárias de comprimento n do tipo 3, que é igual a F_n^k. Podemos contar tais justaposições excluindo das sequências do tipo 3 de comprimento kn as sequências que têm a dupla de *bits* 0 e 1 ou 1 e 0 nas posições in e $in + 1$, para $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ k-1\}$, respectivamente. Para efetuar tal contagem, vamos proceder como nos dois casos anteriores. O total de sequências que têm nas posições in e $in + 1$, respectivamente, os *bits* 0 e 1 é igual a $F_n^i \cdot F_{(k-i)n-1}$. De fato, pois teremos i sequências de comprimento n e uma sequência de comprimento $(k-i)n-1$, já que o *bit* que ocupa a posição $in+1$ é igual a 1. Por outro lado, o total de sequências que têm nas posições in e $in+1$, respectivamente, os *bits* 1 e 0 é igual a $F_n^{i-1} \cdot F_{n-1} \cdot F_{(k-i)n}$. Nesse caso teremos $i-1$ sequências de comprimento n, a $i-ésima$ sequência de comprimento $n-1$ e uma sequência de comprimento $(k-i)n$. Portanto o total de justaposições de k sequências do tipo 3 de comprimento n é igual a

$$F_{kn} - \sum_{i=1}^{k-1} F_n^{i-1} \left(F_{n-1} \cdot F_{(k-i)n} + F_n \cdot F_{(k-i)n-1}\right).$$

Portanto lado esquerdo e lado direito contam a mesma coisa.

□

Identidade 25. *Para inteiros e positivos temos que*

$$F_{kn+p} = F_n^k F_p + \sum_{i=1}^{k} F_n^{i-1} \left(F_n F_{(k-i)n+p-1} + F_{n-1} F_{(k-i)n+p}\right)$$

Demonstração. *(**PAC**)* De fato, basta observar que a exemplo do que fizemos anteriormente temos que

$$F_n^k F_p = F_{kn+p} - \sum_{i=1}^{k} F_n^{i-1} \left(F_n F_{(k-i)n+p-1} + F_{n-1} F_{(k-i)n+p}\right)$$

O lado esquerdo conta o número de justaposições de k sequências de comprimento n e uma sequência de comprimento p, todas do tipo 3, ou seja, temos $F_n^k F_p$ sequências do tipo 3. Por outro lado podemos contar as sequências anteriores excluindo das sequências de comprimento $kn+p$ aquelas que não são contadas ao justapormos as $n+1$ sequências do tipo 3. Observe agora que as sequências que deverão ser excluídas são aquelas que têm nas posições in e $in+1$, respectivamente, os *bits* 0 e 1 ou 1 e 0. O total de sequências que têm nas posições in e $in+1$, $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ k\}$, respectivamente, os *bits* 0 e 1 é igual a $F_n^i \cdot F_{(k-i)n+p-1}$. De fato, pois teremos i sequências de comprimento n e uma sequência de comprimento $(k-i)n+p-1$, já que o *bit* que ocupa a posição $in+1$ é igual a 1. Por outro lado, o total de sequências que têm nas posições in e $in+1$, respectivamente, os *bits* 1 e 0 é igual a $F_n^{i-1} \cdot F_{n-1} \cdot F_{(k-i)n+p}$. Nesse caso teremos $i-1$ sequências de comprimento n, a $i-ésima$ sequência de comprimento $n-1$ e uma sequência de comprimento $(k-i)n+p$. Portanto o total de justaposições de k sequências do tipo 3 de comprimento n é igual a

$$F_{kn+p} - \sum_{i=1}^{k} F_n^{i-1}\left(F_{n-1}\cdot F_{(k-i)n+p} + F_n \cdot F_{(k-i)n+p-1}\right).$$

Portanto lado esquerdo e lado direito contam a mesma coisa. E finalmente

$$F_{kn+p} = F_n^k F_p + \sum_{i=1}^{k} F_n^{i-1}\left(F_n F_{(k-i)n+p-1} + F_{n-1}F_{(k-i)n+p}\right).$$

□

Identidade 26. *Para $n \geq 1$, temos que*

$$\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0}\binom{n-i}{j}\binom{n-j}{i} = F_{2n+2}.$$

Demonstração. ***(PAC)*** O lado direito conta o número de composições de $2n+1$, ou seja, F_{2n+1}. Por outro lado, devemos observar que as composições de um inteiro positivo ímpar têm uma quantidade ímpar de parcelas iguais a 1. Temos, então, uma parcela unitária que tem a mesma quantidade de parcelas $1's$ dos lados direito e esquerdo. Vamos denominá-la como parcela mediana. Vamos distribuir as parcelas 2 entre as parcelas unitárias à direita e à esquerda da parcela mediana. Se tivermos i parcelas à direita da parcela mediana e j, à esquerda, teremos $(2n+1)-2(i+j)$ parcelas unitárias e, portanto, $n-i-j$ parcelas unitárias de cada lado da parcela mediana. Como à esquerda da mediana temos $(n-i-j)+j = n-i$ parcelas, das quais j são iguais a 2, então temos

$$\binom{n-i}{j}$$

maneiras de posicioná-las. Analogamente, temos

$$\binom{n-j}{i}$$

maneiras de posicionar as i parcelas à direita da mediana. Logo há

$$\binom{n-i}{j}\binom{n-j}{i}$$

maneiras de formar a composição de $2n+1$. Fazendo i e j variarem temos todas as composições possíveis, ou seja,

$$\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0}\binom{n-i}{j}\binom{n-j}{i}.$$

A seguir apresentaremos um resultado que relaciona os números de Fibonacci com o triângulo de Pascal. Observe abaixo os números destacados.

n									
0	1								
1	1	1							
2	1	2	$\underline{\underline{1}}$						
3	1	$\underline{\underline{3}}$	3	1					
4	$\underline{\underline{1}}$	4	6	$\underline{\underline{4}}$	$\underline{\underline{1}}$				
5	1	5	$\underline{\underline{10}}$	$\underline{\underline{10}}$	5	1			
6	1	$\underline{\underline{6}}$	$\underline{\underline{15}}$	20	15	6	1		
7	$\underline{\underline{1}}$	$\underline{\underline{7}}$	21	35	35	21	7	1	
8	$\underline{\underline{1}}$	8	28	56	70	56	28	8	1

Observe que a soma das diagonais destacadas são $1+3+1=5=F_5$, $4+10+6+1=21=F_8$, $1+10+15+7+1=34=F_9$. Aqui não há coincidência. Chamaremos essas diagonais de diagonais de Fibonacci e provaremos que, de maneira geral, temos:

a) Se n é ímpar,

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{(n-1)/2}{(n-1)/2}.$$

b) Se n é par,

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{n/2}{(n-1)/2}.$$

□

Identidade 27. *Para $n \geq 0$, temos que*

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots = F_{n+1}.$$

Demonstração. ***(PAC)*** O lado direito conta o número de composições cuja soma é igual a n. Por outro lado, podemos escrever todas as composições escolhendo o número de parcelas iguais a 2 e sua posição na soma. De fato, em cada composição podemos usar de 0 a $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ parcelas iguais a 2. Se escolhermos i parcelas 2, então teremos $n - 2i$ parcelas iguais a 1 e nossa soma terá $n - i$ parcelas. Devemos escolher quais dessas parcelas serão ocupadas pelas i parcelas 2, mas isso pode ser feito de $\binom{n-i}{i}$ maneiras para $i \in \left\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$. Logo o número de composições de n é igual a

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots.$$

Portanto o lado esquerdo e o lado direito contam a mesma coisa.

(PA) Vamos provar nossa identidade por indução.

(i) (Base de indução) Para $n = 0$, temos que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = F_1$.

(ii) (Hipótese de indução) Suponha o resultado para $n \leq k$, então temos que para $n = k+1$, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ (Recorrência de Fibonacci) Como, pela hipótese de indução

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k-1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k-2 \\ 2 \end{pmatrix} + \dots \\ F_k &= \begin{pmatrix} k-1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k-2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k-3 \\ 2 \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} F_{k+2} &= \underbrace{\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k-1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k-2 \\ 2 \end{pmatrix} + \dots}_{F_{k+1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} k-1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k-2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k-3 \\ 2 \end{pmatrix} + \dots}_{F_k} \\ F_{k+2} &= \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix} + \dots \qquad \text{(Identidade 3).} \end{aligned}$$

Como

$$\begin{pmatrix} k+1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix},$$

segue que

$$F_{k+1} = \begin{pmatrix} k+1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix} + \dots.$$

Logo, pelo Princípio da Indução, a identidade é verdadeira para todo inteiro positivo n.

$\square$

Capítulo 3

Números de Lucas

François Edouard Anatole Lucas nasceu em Amiens, França, em 1842. Após completar seus estudos na École Normale em Amiens, ele trabalhou como assistente no observatório de Paris [9]. Ele serviu como oficial de artilharia na guerra franco-prussiana e, em seguida, tornou-se professor de matemática no Liceu Saint-Louis e Liceu Harlemagne, os dois em Paris. Era um professor talentoso e divertido. Lucas morreu devido a um acidente em um banquete; sofreu um corte no rosto por um estilhaço de vidro que voou de uma placa que caiu acidentalmente. Ele morreu de infecção em poucos dias, em 3 de outubro de 1891. Lucas adorava computação e desenvolveu planos para um computador, mas que nunca se materializou. Além de suas contribuições para a Teoria dos Números, ele é conhecido por seu clássico de quatro volumes sobre matemática recreativa. O mais conhecido entre os problemas que ele desenvolveu é a Torre de Hanói [9].

Usando a recorrência de Fibonacci com condições iniciais diferentes, definimos a sequência de Lucas. Seja L_n o $n-\acute{e}simo$ termo da sequência de Lucas, com $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ e $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, para $n \geq 2$. Com isso, obtemos os termos da sequência de Lucas: $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots$

3.1 Interpretações Combinatórias para os números de Lucas

Para o que segue, suponha que a sequência $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$ esteja disposta sobre uma circunferência como indica a Figura 3.1. Observe que nessa disposição os números 1 e n são consecutivos.

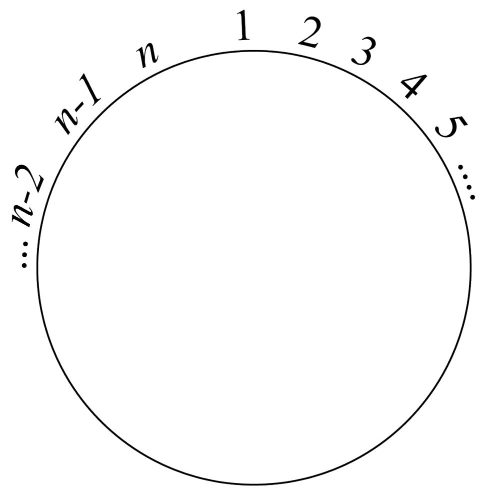


Figura 3.1: Sequência $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$ sobre uma Circunferência

***Proposição* 3.1.** *O número de subconjuntos de* $I_n = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$ *que não contêm dois inteiros consecutivos, considerando* 1 *e* n *consecutivos, é igual a* L_n.

Demonstração. Vamos definir b_n como o número de subconjuntos de I_n que não possuem números consecutivos. Para contar tais subconjuntos, vamos dividi-los em dois casos:

Caso 1 : n não pertence ao subconjunto. Nesse caso o total de subconjuntos de I_n é igual ao total de subconjuntos de $I_{n-1} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1\}$ que não possuem números consecutivos, mas esse número é $b_{n-1} = F_{n+1}$.

Caso 2 : n pertence ao subconjunto. Nesse caso o total de subconjuntos é igual ao total de subconjuntos de $\{2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n-2\}$ que não possuem números consecutivos, mas esse número é $b_{n-3} = F_{n-1}$.

Logo $b_n = b_{n-1} + b_{n-3} = F_{n+1} + F_{n-1}$, com condições iniciais iguais a $b_1 = 1$ e $b_2 = 3$. Como $b_{n-1} = F_n + F_{n-2}$ e $b_{n-2} = F_{n-1} + F_{n-3}$, observe que:

$$\begin{aligned} b_{n-1} + b_{n-2} &= (F_n + F_{n-2}) + (F_{n-1} + F_{n-3}) \\ &= (F_n + F_{n-1}) + (F_{n-2} + F_{n-3}) \\ &= F_{n+1} + F_{n-1} = b_n. \end{aligned}$$

Portanto $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$, para $n \geq 3$, $b_1 = 1$ e $b_2 = 3$, ou seja, $b_n = L_n$.

***Proposição* 3.2.** *O número de palavras binárias circulares nas quais não existem dois bits 1 consecutivos é igual a L_n.*

Demonstração. Seja c_n o total de palavras binárias circulares de comprimento n. Para contar o número de palavras binárias circulares vamos, como em exemplos anteriores, dividir o total de palavras binárias em dois conjuntos. O primeiro conjunto é das palavras binárias circulares que terminam em 0. Nesse caso o total de palavras é igual a F_{n+1}. Por outro lado, se a palavra binária circular termina em 1, então o primeiro *bit* e o $(n-1)-$*ésimo* não podem ser iguais a 1, dessa forma o total de tais palavras é igual a F_{n-1}. Como $c_1 = 1$, $c_2 = 3$ e $c_n = F_{n+1} + F_{n-1}$, então $c_n = L_n$, para $n \geq 1$.

□

3.2 Identidades envolvendo os Números de Lucas

A seguir, utilizando argumentos combinatórios, demonstraremos algumas identidades envolvendo os números de Lucas.

Identidade 28.

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1},$$

para $n \geq 1$.

Demonstração. Decorre diretamente de qualquer uma das duas proposições anteriores.

□

Identidade 29.

$$L_n = F_{n+2} - F_{n-2},$$

para $n \geq 2$.

Demonstração. ***(PAC)*** O lado esquerdo conta o número de palavras binárias circulares de comprimento n , ou seja, L_n. Por outro lado, podemos contar tais palavras excluindo das palavras binárias de comprimento n do tipo 1 as palavras binárias de comprimento n do tipo 5, mas isso é igual a $F_{n+2} - F_{n-2}$. De fato, para contarmos todas as sequências binárias que não possuem dois *bits* 1 consecutivos e não possuem o *bit* 1 na primeira e na $n - \acute{e}sima$ posição simultaneamente, devemos excluir das sequências do tipo 1 as sequências do tipo 5, que possuem o *bit* 1 fixo nas posições 1 e n, ou seja, $F_{n+2} - F_{n-2}$. Portanto lado esquerdo e lado direito contam a mesma coisa, i.e., $L_{n+1} = F_{n+2} - F_{n-2}$.

(PA) Vamos provar nossa identidade por indução.

(i) (Base de indução) A identidade é verdadeira para $n = 2$ e $n = 3$. De fato

$$L_2 = F_4 - F_0 = 3 - 0 = 3 \text{ e } L_3 = F_5 - F_1 = 5 - 1 = 4$$

(ii) (Hipótese de indução) Suponha que a identidade é verdadeira para todo $k \leq n$ e mostraremos que ela é válida para $k = n + 1$. Observe que:

$$\begin{aligned} L_{n+1} = L_n + L_{n-1} &= (F_{n+2} - F_{n-2}) + (F_{n+1} - F_{n-3}) \\ &= (F_{n+2} + F_{n+1}) - (F_{n-2} + F_{n-3}) \\ &= F_{n+3} - F_{n-1} \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio da Indução, a identidade é verdadeira para todo inteiro positivo.

□

Identidade 30. *Para* $n \geq 0$, *temos que*

$$F_{2n} = F_n L_n.$$

Demonstração. ***(PAC)*** O lado esquerdo conta o total de sequências do tipo 3 de comprimento $2n$, isto é, F_{2n}. Por outro lado, podemos contar tais sequências justapondo uma sequência binária de comprimento n do tipo 3 e uma sequência binária de comprimento n do tipo 6. Pelo princípio fundamental da contagem, isso é igual a F_nL_n. Porém, observe que ao justapormos as sequências do tipo 3 e do tipo 6, obtemos sequências binárias que terminam pelo *bit* 1 e estas sequências não são do tipo 3. Então devemos excluir de nossa contagem $F_n \times F_{n-1}$. Observe ainda que as sequências que têm o *bit* 1 na $n-$*ésima* posição não figuram entre as F_nL_n justaposições anteriores. As sequências que possuem o *bit* 1 na $n-$*ésima* são em número de $F_{n-1} \times F_n$. Observe o esquema abaixo.

$$\text{Sequências a serem excluídas: } \underbrace{0\ldots0}_{n\ bits}\underbrace{0\ldots01}_{n\ bits}$$

$$\text{Sequências a serem incluídas: } \underbrace{0\ldots01}_{n\ bits}\underbrace{0\ldots0}_{n\ bits}$$

Logo o total de palavras do tipo 3 de comprimento $2n$ é igual a $F_n \times L_n - F_n \times F_{n-1} + F_{n-1} \times F_n = F_n \times L_n$. Portanto lado esquerdo e lado direito contam a mesma coisa.

□

Identidade 31. *Para $n \geq 3$, temos que*

$$L_{2n} = L_n^2 - 2F_{n-1}^2 + 2F_n \times F_{n-2}.$$

Demonstração. ***(PAC)*** O lado esquerdo conta o número de palavras binárias circulares de comprimento $2n$, ou seja, L_{2n}. Por outro lado, podemos contar tais palavras justapondo as palavras binárias do tipo 6 de comprimento n. De fato, basta observar que dessa justaposição devemos excluir aquelas que possuem simultaneamente o *bit* 1 nas posições n e $n+1$ ou nas posições 1 e $2n$ e adicionar as palavras que possuem simultaneamente o *bit* 1 nas posições 1 e n e nas posições $n+1$ e $2n$. Vamos contar esses dois casos:

Caso 1 : (justaposições que serão excluídas). São aquelas que possuem simultaneamente o *bit* 1 nas posições n e $n+1$ e nas posições 1 e $2n$. O total de tais justaposições é $2F_{n-1} \times F_{n-1}$.

$$\underbrace{0\ \ldots\ 01}_{n\ bits}\underbrace{10\ \ldots\ 0}_{n\ bits}$$

$$\underbrace{10\ \ldots\ 0}_{n\ bits}\underbrace{0\ \ldots\ 1}_{n\ bits}$$

Caso 2 : (justaposições que serão incluídas). São aquelas que possuem simultaneamente o *bit* 1 nas posições 1 e n e nas posições $n+1$ e $2n$. O total de tais justaposições é $2F_{n-2} \times F_n$.

$$\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{n\ bits}\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{n\ bits}$$

$$\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{n\ bits}\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{n\ bits}$$

Logo o total de palavras binárias circulares de comprimento $2n$ é igual a $L_n^2 - 2F_{n-1}^2 + 2F_n \times F_{n-2}$. Portanto lado esquerdo e lado direito contam a mesma coisa.

Observe que $L_{2n} = L_n^2 + 2\left(F_{n-2} \times F_n - F_{n-1}^2\right) = L_n^2 + 2(-1)^{n+1}$, aqui se usou a identidade de Cassini, que nos fornece:

(a) $L_{2n} = L_n^2 - 2$, se é par; e

(b) $L_{2n} = L_n^2 + 2$, se é ímpar.

$\square$

Identidade 32.

$$L_n = \sum_{0 \le i \le n/2} \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i}.$$

Demonstração. (PAC) O lado esquerdo conta o total de subconjuntos de $I_n = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$ nos quais não há números consecutivos, considerando-se 1 e n como consecutivos. Podemos contar tais conjuntos separando-os em dois casos:

(i) Conjuntos nos quais figura o número 1. Como 2 e n são consecutivos, devemos escolher $i-1$ elementos, sem que haja dois números consecutivos, do conjunto $\{3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1\}$, o que pode ser feito de

$$\binom{n-i-1}{i-1}.$$

(ii) Conjuntos nos quais não figura o número 1. Devemos escolher i elementos de $\{2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$, sem que haja números consecutivos, o que pode ser feito de

$$\begin{pmatrix} n-i \\ i \end{pmatrix}.$$

Como o total de casos pode ser dividido nos casos (i) e (ii), então o total de subconjuntos de $I_n = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$ que não possuem números consecutivos, considerando-se 1 e n como consecutivos, é igual a:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} n-i-1 \\ i-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-i \\ i \end{pmatrix} &= \frac{(n-i-1)!}{(i-1)!(n-2i)!} + \frac{(n-i)!}{i!(n-2i)!} \\
&= \frac{(n-i-1)!i + (n-i)!}{i!(n-2i)!} \\
&= (n-i-1)!\frac{i+n-i}{i!(n-2i)!} \\
&= n \cdot \frac{(n-i-1)!}{i!(n-2i)!} \\
&= \frac{n}{n-i} \cdot \frac{(n-i)!}{i!(n-2i)!} \\
&= \frac{n}{n-i} \cdot \begin{pmatrix} n-i \\ i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Agora basta fazer i variar de 0 a $n/2$, ou seja,

$$\sum_{0 \leq i \leq n/2} \frac{n}{n-i} \begin{pmatrix} n-i \\ i \end{pmatrix}.$$

Portanto lado esquerdo e lado direito contam a mesma coisa.

$\square$

Capítulo 4

Sequência Didática

Neste capítulo vamos propor algumas atividades que podem ser desenvolvidas por professores em sala de aula com o objetivo de desenvolver o raciocínio combinatório de seus alunos. Antes de qualquer coisa, é preciso que o professor apresente, em linguagem clara e precisa, os conceitos iniciais de Combinatória. A exposição contextualizada e metódica dos princípios da adição e da multiplicação permite ao aluno construir uma base sólida, evita problemas futuros e permite o bom desenvolvimento do conteúdo. Não se deve privilegiar a memorização das fórmulas em detrimento da criatividade. Associar os principais símbolos e fórmulas a casos concretos permitem que o aluno desenvolva o bom hábito de contar com bijeções, o que nos parece mais natural.

A seguir apresentamos uma série de exercícios, acerca do tema tratado neste trabalho, que podem ser propostos pelo professor em sala de aula. Essas atividades podem ser executadas em grupo ou individualmente.

4.1 Atividades

4.1.1 Atividade 1: Trabalhando com bijeções.

1) Estabelecer uma bijeção entre os subconjuntos de $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$ e as sequências binárias de comprimento n.

2) Determine a quantidade de sequências binárias de comprimento n.

3) Determine a quantidade de subconjuntos de $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$.

4) Determine, utilizando uma bijeção, os subconjuntos de $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$ que não possuem dois números consecutivos.

5) Em uma circunferência, são marcados 10 pontos. Sem calcular, determine se podem ser formados mais triângulos ou heptágonos com esses dez pontos.

4.1.2 Cobrindo tabuleiros $1 \times n$.

Nessa atividade o uso de material concreto é muito interessante e permite a visualização da contagem das coberturas de um tabuleiro. Materiais concretos:

(a) Tabuleiros de comprimento $1 \times 3,\ 1 \times 4,\ 1 \times 5$.

(b) Peças de dominó de comprimento 1×1 e 1×2.

Divida a turma em grupos e proponha as seguintes atividades:

1) Determinar o total de coberturas possíveis em cada tabuleiro. Cada grupo deve apresentar à turma os seus resultados.

2) Estabelecer uma bijeção entre as coberturas e as composições de parcelas iguais a 1 e 2 dos números 3, 4 e 5.

3) Estabelecer uma relação entre o número de coberturas de um tabuleiro e os números de Fibonacci.

4.1.3 Atividade 3: Utilizando argumentos combinatórios

1) Utilizando argumentos combinatórios, prove as seguintes identidades:

(a) $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$.

(b) $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k} + \dbinom{n-1}{k-1}$.

(c) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

(d) $\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1}\binom{n}{1} + \binom{n}{n}\binom{n}{0} = \binom{2n}{n}$.

4.2 Respostas das atividades

4.2.1 Atividade 1: Trabalhando com bijeções.

1) Para formarmos um subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, vamos atribuir a cada elemento os *bits* 1 ou 0, respectivamente, conforme cada elemento tenha sido escolhido ou não para compor o subconjunto. Assim temos:

$$\begin{array}{ccc}
000\ldots0 & ----------\rightarrow & \varnothing \\
100\ldots0 & ----------\rightarrow & \{1\} \\
010\ldots0 & ----------\rightarrow & \{2\} \\
001\ldots0 & ----------\rightarrow & \{3\} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
111\ldots1 & ----------\rightarrow & \{1, 2, 3, \ldots, n\}
\end{array}$$

2) O total de sequências binárias que podemos formar é igual a 2^n, pois cada posição na sequência pode ser ocupada pelo *bit* 1 ou pelo *bit* 0.

3) Como estabelecemos uma bijeção entre os subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ e as sequências binárias de comprimento n, temos que o total de subconjuntos é igual a 2^n.

4) Agora vamos estabelecer uma bijeção entre o total de subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ e o total de sequências binárias de comprimento n que não possuem dois

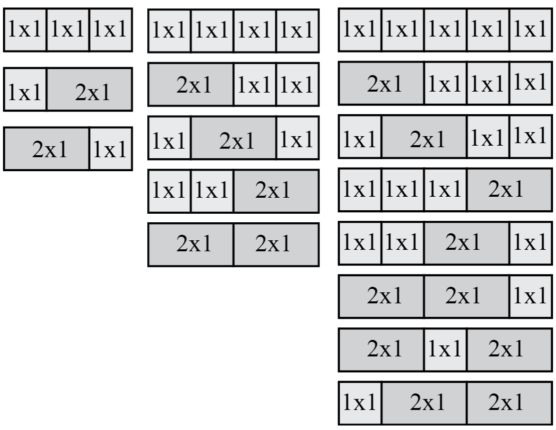
bits 1 consecutivos.

$$
\begin{array}{ccc}
0000\ldots0 & ----------\rightarrow & \varnothing \\
1000\ldots0 & ----------\rightarrow & \{1\} \\
0100\ldots0 & ----------\rightarrow & \{2\} \\
0010\ldots0 & ----------\rightarrow & \{3\} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
1010\ldots0 & ----------\rightarrow & \{1,\ 3\} \\
1001\ldots0 & ----------\rightarrow & \{1,\ 4\} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
1010\ldots & ----------\rightarrow & \{1,\ 3,\ 5,\ \ldots\}
\end{array}
$$

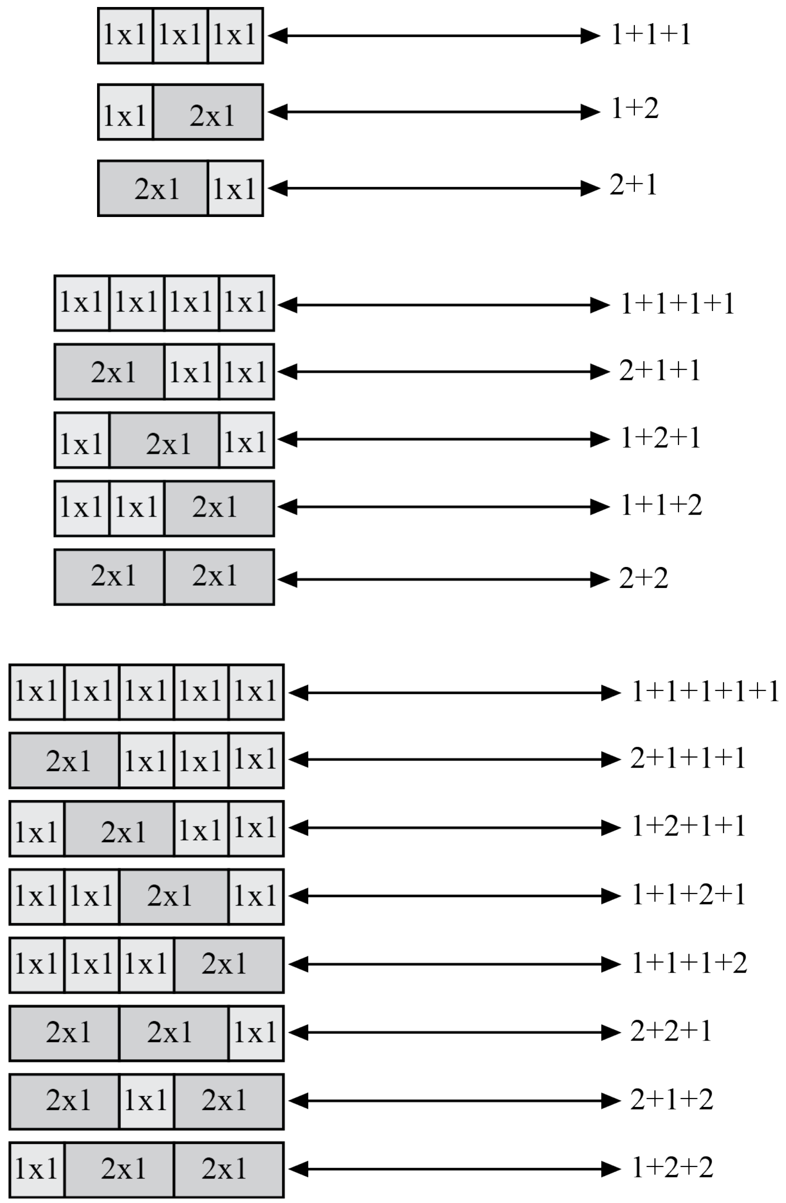
5) O número de triângulos formados é igual ao número de heptágonos formados, pois, para cada escolha de três pontos distintos, os sete não escolhidos formam um heptágono. Portanto existe uma bijeção entre os conjuntos dos triângulos e o conjunto dos heptágonos.

4.2.2 Cobrindo tabuleiros $1 \times n$.

1)



2)



3) Seja o número de maneiras de cobrir um tabuleiro $1 \times n$ com quadrados 1×1 e dominós 1×2. Vimos, no exercício anterior, que $f_1 = 1 = F_2$ e $f_2 = 2 = F_3$. Vamos dividir nosso problema em dois casos:

Caso 1: a primeira peça é um quadrado 1×1. Para as $n-1$ posições restantes existem f_{n-1} configurações.

Caso 2: A primeira peça é um dominó 1×2. Para as $n-2$ posições restantes, existem f_{n-2} configurações. Logo $f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ n \geq 2$ e temos que $f_n = F_{n+1}$.

4.2.3 Atividade 3: Utilizando argumentos combinatórios.

a) O lado esquerdo conta o número de $k-subconjuntos$ de um conjunto com objetos. E o lado direito conta o número de $(n-k)-subconjuntos$ de um conjunto com n. Agora observe que podemos estabelecer uma correspondência um a um entre os $k-subconjuntos$ e os $(n-k)-subconjuntos$. Portanto lado direito e lado esquerdo contam a mesma coisa.

b) Temos que o lado esquerdo conta o número de subconjuntos com k elementos de um conjunto com n objetos distintos, isto é, $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$. Podemos contar os subconjuntos de acordo com a presença de um elemento x. Existem $\begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix}$ subconjuntos nos quais x não é elemento de qualquer subconjunto e $\begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$ em x é elemento de cada um dos subconjuntos. Logo o total de subconjuntos com k objetos é igual a $\begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$. Portanto lado esquerdo e lado direito contam a mesma coisa.

c) O lado esquerdo conta o número de maneiras de se formar uma comissão de k membros, escolhendo entre esses membros um para ser o presidente da comissão. O lado direito conta a mesma coisa, pois podemos escolher, entre as n pessoas, uma para ser o representante e em seguida $k-1$ pessoas das $n-1$ restantes para completar a comissão. Portanto o lado direito e o lado esquerdo contam a mesma coisa.

d) O lado direito conta o número de comissões com n membros escolhidos entre $2n$ pessoas. O lado esquerdo conta as mesmas comissões de acordo com o número de membros escolhidos entre as n primeiras pessoas. De fato, primeiro escolhemos 0 pessoas das n primeiras e n pessoas das n seguintes, o que pode ser feito de $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$. Depois escolhemos 1 pessoa das n primeiras e $n-1$ pessoas das n

seguintes, que pode ser feito de $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix}$. E assim sucessivamente, até que tenhamos escolhido n pessoas das n primeiras e 0 pessoas das n seguintes, o que pode ser feito de $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}$. Logo o total de comissões é

$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto lado esquerdo e lado direito contam a mesma coisa.

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos uma abordagem pouco comum aos livros tradicionais do Ensino Médio que tratam de Combinatória. Está claro que cada professor, dentro de sua realidade, procura as melhores formas de apresentar assunto tão espinhoso aos seus alunos. Mas também é claro que o uso excessivo de fórmulas e a mecanização do raciocínio são as práticas mais comuns em nossas escolas. Tais práticas trazem prejuízo incalculável aos nossos discentes, que formam opinião errônea sobre um dos temas mais importantes da Matemática.

Buscar o entendimento e a clareza do raciocínio por parte dos alunos é o desafio que os docentes têm em sua labuta diária. Aperfeiçoar os métodos ou até mesmo mudá-los para atingir os objetivos pode ser um dos caminhos. Trazer novas abordagens para a sala de aula com a finalidade de buscar o entendimento e desmistificar determinados assuntos deve estar em nossa pauta.

Devemos mudar a má fama da Combinatória e torná-la assunto agradável e de interesse dos alunos. Dentro dessa perspectiva, apresentar a resolução de identidades através de argumentos combinatórios parece-nos uma boa prática para sala de aula. Por outro lado, aproveitando o viés dos métodos de contagem, a inclusão dos números de Fibonacci e de Lucas nesse contexto é um incremento para despertar o interesse dos discentes. Temas que parecem distantes, mas que guardam relação engenhosa.

Portanto, esperamos que esse trabalho possa contribuir para a melhoria das práticas docentes sempre com a consciência de que este é apenas uma gota no oceano. Mas o que é um oceano senão um número infinitamente grande de gotas?

Referências Bibliográficas

[1] BENJAMIN, Arthur T. QUINN, Jennifer J. **Proofs That Really Count: The Art of Combinatorial Proof**. Dolciani Mathematical Expositions, Vol. 27. Mathematical Association of America, 2003.

[2] BONA, Miklos. **A Walk Through Combinatorics: An Introduction to Enumeration and Graph Theory**. World Scientific, 2011.

[3] BRASIL/MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

[4] DICKSON, Leonard E. **History of the Theory of Numbers. Vol. 1**. Carnegie Institution of Washington, 1919.

[5] GRIMALDI, Ralph P. **Fibonacci and Catalan Numbers: an introduction**. Willey-Interscience, 2012.

[6] HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar: combinatória, probabilidade** Vol. 5, 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2004.

[7] HOGGATT, V.E. Jr. Lind, D.A. **Compositions and Fibonacci Numbers**. The Fibonacci Quaterly 7, nº 3 (1969): 253-266.

[8] HOGGATT, V.E. Jr. **Fibonacci and Lucas Numbers**. Boston: Houghton Mifflin, 1969.

[9] KOSHY, Thomas. **Fibonacci and Lucas numbers with applications**. Willey-Interscience, 2001.

[10] LIMA, E. L. **A Matemática do Ensino Médio. Vol. 2**. Rio de Janeiro: SBM, 1999.

[11] MORGADO, A. C. O. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[12] NELSEN, R.B. **Proof Without Words: Exercises in Visual Thinking, Classroom Resource Materials**. MAA, Washington, D.C., 1993.

[13] NELSEN, R.B. **Proof Without Words II: More Exercises in Visual Thinking, Classroom Resource Materials**. MAA, Washington, D.C., 2000.

[14] SANTOS, José Plínio O. e ESTRADA, Eduardo Luís. **Problemas Resolvidos de Análise Combinatória**. Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2007.

[15] STANLEY, R. **Enumerative Combinatorics Vol. 1**. Cambridge University Press, 1997.

[16] STANLEY, R. **Enumerative Combinatorics Vol. 2**. Cambridge University Press, 1999.

[17] VADJA, S. **Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section: Theory and Applications**. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[18] YAGLOM, A. M. **Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions (Volume 1)**. Dover, 1987.

[19] YAGLOM, A. M. **Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions (Volume 2)**. Dover, 1987.