

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

**Geometrias não euclidianas**

por

Jorge de Góes Presmic

2014

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Geometrias não euclidianas

por

**Jorge de Góes Presmic\***

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

**MESTRE EM MATEMÁTICA**

Brasília, 03 de junho de 2014.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Adail de Castro Cavaleiro(Orientador) - Mat/UnB

---

Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi - CMCC/UFABC

---

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado - Mat/UnB

---

\*O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração deste trabalho.

---

# AGRADECIMENTOS

---

# RESUMO

Este trabalho busca motivar o estudo das geometrias não euclidianas por meio de notas históricas e aplicações. Para isso foram escolhidos dois modelos aplicáveis ao cotidiano dos estudantes: a geometria do taxista, que modela o tráfego em uma cidade, e a geometria da superfície esférica, que modela os deslocamentos sobre a superfície do nosso planeta. Os temas são abordados de forma que o leitor possa reconhecer as principais diferenças entre esses modelos e o modelo euclidiano, que domina o ensino de geometria nas escolas, e compreender a importância das aplicações desses modelos.

---

# ABSTRACT

This work seeks to motivate the study of non euclidean geometrys through historical notes and applications. We present two models applicable to the daily lives of the students were chosen: the taxist geometry, which models traffic in a city, and the spherical geometry, which models the displacements on the surface of our planet. The subjects are covered so that the reader can recognize the main differences between these models and the euclidean model, the most popular among studets, and understand the importance of the applications of these models.

---

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Surgimento das geometrias não euclidianas</b>	<b>1</b>
1.1	História da geometria . . . . .	1
1.2	A geometria Euclidiana . . . . .	2
1.3	O quinto postulado . . . . .	4
1.4	Tentativas de demonstrar o quinto postulado . . . . .	5
1.5	A concepção de uma nova geometria . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Geometria do Taxista</b>	<b>14</b>
2.1	Métrica da geometria do taxista . . . . .	14
2.2	Caminhos Variados . . . . .	17
2.3	Circunferência do taxista . . . . .	18
2.4	Noções de Mediatriz . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Geometria da Esfera</b>	<b>23</b>
3.1	Definição da esfera . . . . .	23
3.2	Seções da esfera . . . . .	24
3.3	Geometria Analítica da Esfera . . . . .	25
3.4	Distância numa superfície esférica . . . . .	29

3.5	Circunferência e mediatriz na geometria da superfície esférica . . . . .	33
3.6	Excesso de um triângulo esférico . . . . .	35
3.7	A matemática do GPS . . . . .	37
<b>Referências Bibliográficas</b>		<b>42</b>

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## SURGIMENTO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

---

### 1.1 História da geometria

---

Não se sabe ao certo em que momento histórico iniciou-se o estudo da geometria (do grego, medir a terra), mas sabe-se que sua origem está ligada a algumas práticas do cotidiano relacionadas ao plantio, construções e movimento dos astros, sendo usada para cálculo de áreas, superfícies e volumes. Seu estudo já aparece claramente nas civilizações egípcia e babilônica, por volta do século XX a.C., resolvendo problemas de agrimensura. Todos os anos o rio Nilo extravasava as margens e inundava o seu delta. Essas cheias depositavam nos campos de cultivo lamas aluviais ricas em nutrientes, tornando o delta do Nilo a mais fértil terra lavrável do mundo antigo. Em contrapartida, o rio destruía as marcas físicas de delimitação entre as possessões de terra. Dessa forma, os agricultores e administradores de templos, palácios e demais unidades produtivas fundadas na agricultura não tinham referência clara do limite das suas possessões para poderem cultivá-las e pagarem os impostos devidos, o que muitas vezes gerava grandes conflitos. Os antigos faraós resolveram passar a nomear funcionários, os agrimensores, cuja tarefa era avaliar os prejuízos das cheias e restabelecer as fronteiras entre as diversas posses, com isso o estudo da geometria começou a ser levado a sério.

Por volta de 500 a.C., as primeiras academias foram fundadas na Grécia e a busca

por conhecimentos sobre geometria aumentava. A partir de Tales de Mileto (600 a.C., aproximadamente), surgem as primeiras tentativas de deduzir os fatos geométricos, mas seu principal refinamento foi devido a Euclides, em seu livro *Os Elementos*, por volta de 300 a.C.

Pouco se sabe sobre a vida de Euclides, assim como a de muitos outros grandes matemáticos da antiguidade, não se sabe onde nasceu, nem sua formação. Os historiadores da matemática suspeitam que tenha estudado na Academia de Platão, em Atenas, por causa da semelhança entre a visão platônica do conhecimento e a visão de Euclides, em particular do desinteresse pelas aplicações práticas. Nos registros históricos Euclides foi o primeiro a apresentar a matemática como ciência dedutiva, em que cada afirmação deveria ser deduzida de outras mais simples de maneira lógica e sucessiva. Sua obra mais importante, *Os Elementos*, até pouco tempo atrás ainda era usada como texto introdutório ao estudo de matemática elementar e até hoje é tratado como uma referência para a exposição da geometria. O livro é uma compilação de teoremas conhecidos e demonstrados por Euclides de forma sistemática, com uma ordenação lógica.

---

## 1.2 A geometria Euclidiana

---

O grande passo de Euclides foi apresentar a matemática, em particular a geometria, de uma maneira sistemática e dedutiva. Em suas abordagens toda afirmação deveria ser deduzida logicamente a partir de outras afirmações mais simples, e assim sucessivamente. Nesse contexto surgiu a necessidade de algumas afirmações mais simples do que todas as outras, que não fossem demonstradas, para dar início a essa cadeia. Essas afirmações foram apresentadas por ele em dois grupos: as noções comuns e os postulados. A distinção entre esses grupos não é muito clara, mas noções comuns seriam consideradas hipóteses aceitáveis a todas as ciências e postulados seriam hipóteses próprias da Geometria. Seguem abaixo as noções comuns e postulados propostos por Euclides em *Os Elementos*:

### Noções Comuns

1. Coisas iguais a uma mesma coisa são também iguais.
2. Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.
5. O todo é maior do que qualquer uma das partes

## Postulados

- I. Pode-se traçar uma (única) reta ligando dois pontos.
- II. Pode-se prolongar (de uma única maneira) uma reta finita continuamente em uma linha reta.
- III. Pode-se traçar um círculo com centro qualquer e raio qualquer.
- IV. Todos os ângulos retos são iguais.
- V. Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos de um mesmo lado cuja soma é menor que dois retos, então estas duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram naquele lado cuja soma dos ângulos internos é menor que dois retos.

Com essas afirmações, Euclides criou o primeiro e mais duradouro modelo para o espaço físico, a Geometria Euclidiana, estudado e ensinado até hoje em todas as escolas e cursos de matemática. No total, *Os Elementos* de Euclides acumulava 465 proposições, todas deduzidas uma a uma, em um encadeamento lógico iniciado pelos postulados. Durante muitos anos esse modelo pareceu ser um encadeamento lógico perfeito, até que estudos mais rigorosos sobre sistemas axiomáticos apontaram alguns problemas. Foi determinado que um sistema axiomático tenha as três propriedades a seguir:

- 1) **Completude:** tudo que será usado na teoria está apropriadamente contido nos axiomas, de maneira que não haja hipóteses implícitas.
- 2) **Consistência:** é impossível deduzir dois teoremas contraditórios dos axiomas.
- 3) **Independência:** nenhum axioma é consequência de alguma combinação dos demais.

Com base nessa análise, ficava claro que o trabalho de Euclides precisava de uma revisão, uma vez que suas demonstrações eram cheias de apelos à intuição, com hipóteses implícitas. David Hilbert (1862 – 1943) fez uma reconstrução rigorosa de *Os Elementos* em sua obra *Fundamentos da Geometria*, esclarecendo os problemas lógicos com uma nova proposta de noções primitivas e axiomas. Hilbert tomou como conceitos primitivos o ponto, a reta e o plano e os considera interligados a duas relações não definidas: "estar entre" e "congruência". Também elaborou o primeiro conjunto completo de axiomas da geometria euclidiana, subdividido-os como axiomas de incidência, ordem, congruência, paralelismo e continuidade. Em 1904, Hilbert provou que a geometria euclidiana proposta por ele era tão consistente quanto a aritmética.

---

## 1.3 O quinto postulado

---

Os quatro primeiros postulados de Euclides satisfazem plenamente às condições de simplicidade necessárias para serem a base de um sistema axiomático, porém o quinto postulado parece não ter essa característica. O próprio Euclides deve ter percebido isso pois retardou ao máximo o uso deste postulado (ele só é utilizado a partir da proposição 29 de *Os Elementos*, para provar que quando uma reta corta duas paralelas formam-se ângulos congruentes). Outro fator que diferencia o quinto postulado dos outros é sua extensão. A dificuldade de explicá-lo já é uma evidência de que não deveria ter uma aceitação tão evidente. De fato, o quinto postulado era tão pouco evidente que, durante vários séculos, inúmeras tentativas foram feitas para demonstrá-lo, como se fosse na verdade um teorema. O grande problema é que todos que chegavam perto o suficiente da demonstração acabaram por admitir fatos que eram equivalentes ao quinto postulado ou não podiam ser demonstrados usando unicamente os outros quatro postulados.

Afirmar que um postulado  $A$  é equivalente ao quinto postulado significa dizer que o desenvolvimento dos quatro primeiros postulados mais o postulado  $A$  coincide com Geometria Euclidiana. Além disso, tomando o postulado  $A$  é possível provar o quinto postulado, e vice-versa. O matemático escocês John Playfair, em 1795, publicou um trabalho no qual propõe uma forma equivalente ao quinto postulado que acabou por se tornar seu substituto mais conhecido:

**Axioma de Playfair:** Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.

Convém observar que, na forma proposta por Playfair, a existência de uma reta paralela a  $r$  passando pelo ponto  $P$  pode ser provada a partir dos quatro primeiros postulados [10], porém a unicidade dessa paralela é o que faz com que a afirmação seja um postulado. A seguir outros equivalentes ao quinto postulado de Euclides:

**Postulado:** existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.

**Postulado:** existe um par de retas eqüidistantes.

**Postulado:** a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.

**Postulado:** se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então, o último também é reto.

Esses postulados equivalentes deixam ainda mais claro que o quinto postulado não é óbvio e sem ele não teríamos o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, toda teoria dos triângulos semelhantes e, conseqüentemente, a trigonometria deixaria de

existir. Em contrapartida ao negar o quinto postulado, e conseqüentemente todos os postulados equivalentes a ele, podemos obter outras geometrias tão coerentes quanto a euclidiana porém um tanto diferentes da que estamos acostumados.

---

## 1.4 Tentativas de demonstrar o quinto postulado

---

”... ele (o quinto postulado da Geometria Euclidiana) deveria ser retirado completamente da redação dos postulados, pois é um teorema difícil, o qual Ptolomeu propôs-se a demonstrar...”

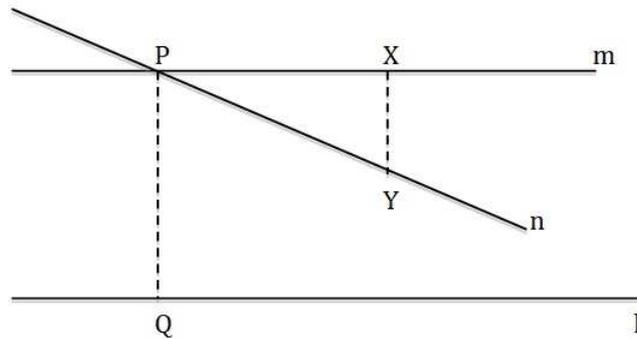
(Proclus, nos comentários sobre o livro I de *Os Elementos*)

Proclus (410 - 485 d.C) foi um filósofo grego que estudou na academia de Platão e escreveu o trabalho *Comentários sobre Os Elementos* de Euclides, uma das principais fontes de informação sobre a geometria grega. Nesse trabalho ele critica o quinto postulado de Euclides, comenta algumas tentativas anteriores de provar o postulado e propõe sua própria demonstração da unicidade das paralelas, que seria equivalente ao quinto postulado.

### Demonstração de Proclus:

Dadas duas retas paralelas  $l$  e  $m$ , e uma outra reta  $n$  que intercepta  $m$  no ponto  $P$ , deseja-se provar que  $n$  também intercepta  $l$ .

Seja  $Q$  o pé da perpendicular à reta  $l$  passando por  $P$ .



Se  $n$  coincide com a reta determinada por  $P$  e  $Q$ , então ela intercepta  $l$  em  $Q$ . Caso contrário tome os pontos  $Y \in m$  e  $X \in n$ , tais que a semirreta  $PY$  esteja entre  $PX$  e  $PQ$ .

Tome  $X$  como pé da perpendicular a  $m$  passando por  $Y$ . Agora quando afastamos  $Y$  arbitrariamente do ponto  $P$  (mantendo sempre a direção tomada inicialmente para a

semirreta  $PY$ ), o segmento  $XY$  cresce indefinidamente, e desse modo torna-se maior do que o segmento  $PQ$ . Portanto,  $Y$  passa para o outro lado da reta  $l$ , de forma que  $n$  deve interceptar a reta  $l$ . ■

Os argumentos de Proclus são bem sofisticados pois envolvem movimento e continuidade, conceitos que não eram completamente dominados na época. Cada etapa da demonstração está correta, mas não é possível chegar a conclusão. Com efeito, basta observar que a sequência  $(a_n)$  definida pela lei  $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ , na qual os termos crescem indefinidamente, é convergente pois  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ , mas nunca ocorre  $a_n = 1$ . Portanto sua conclusão final não é necessariamente correta.

O persa Nasir EddinAll Tusin(1201 - 1274) foi um astrônomo, matemático persa e editor de uma versão de *Os Elementos* para o árabe. Nasir supôs, sem demonstração, o seguinte axioma para deduzir o quinto postulado:

**Axioma:** Sejam  $m$  e  $n$  duas retas,  $A$  um ponto de  $m$  e  $B$  um ponto de  $n$ , tais que  $AB$  é perpendicular a  $n$  e forma um ângulo agudo com  $m$ . Então as perpendiculares baixadas de  $m$  à reta  $n$ , do lado do ângulo agudo, são menores do que  $AB$  e as que ficam do outro lado são maiores do que  $AB$ .

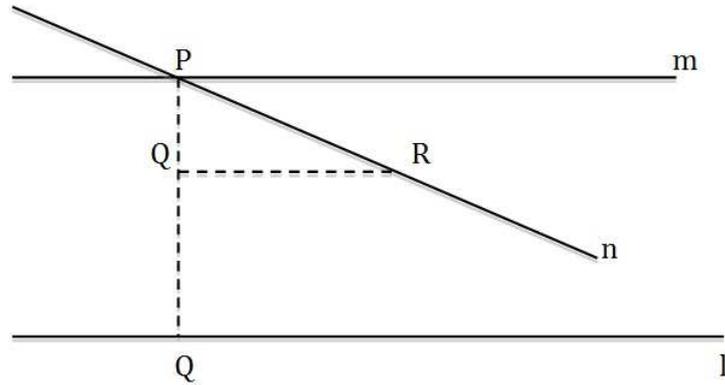
JohnWallis (1616-1703) propõe substituir o postulado das paralelas por outro que considerava mais razoável:

**Postulado de Wallis:** Dado qualquer triângulo  $\Delta ABC$  e qualquer segmento  $DE$ , existe um triângulo  $\Delta DEF$  que é semelhante ao triângulo  $\Delta ABC$ . Sejam  $m$  e  $n$  duas retas,  $A$  um ponto de  $m$  e  $B$  um ponto de  $n$ , tais que  $AB$  é perpendicular a  $n$  e forma um ângulo agudo com  $m$ . Então as perpendiculares baixadas de  $m$  à reta  $n$ , do lado do ângulo agudo, são menores do que  $AB$  e as que ficam do outro lado são maiores do que  $AB$ . (Lembre-se que dois triângulos são semelhantes se existe um correspondência 1 – 1 entre seus vértices de modo que os ângulos correspondentes, chamados de homólogos, sejam congruentes.)

Wallis propôs uma demonstração para o postulado das paralelas utilizando seu postulado.

**Demonstração de Wallis:** Dada uma reta  $l$  e um ponto  $P$  fora de  $l$ , construa a reta  $m$  paralela à  $l$  passando por  $P$  por meio da perpendicular comum  $PQ$ , com  $Q \in l$ .

Seja  $n$  uma reta qualquer que passa por  $P$  e é distinta de  $l$ . Considere a semirreta de  $n$ , com origem em  $P$ , que está entre uma das semirretas de  $m$ , com origem também em  $P$ , e a semirreta  $PQ$ . Agora tome um ponto  $R \in n$  e seja  $S$  o pé da perpendicular à reta  $PQ$ , passando por  $R$ . Considere o triângulo  $\Delta PSR$ . Pelo postulado de Wallis existe um



ponto  $T$  tal que os triângulos  $\Delta PSR$  e  $\Delta PQT$  são semelhantes. Podemos supor que  $T$  e  $R$  estão do mesmo lado de  $PQ$ , caso contrário bastaria fazer um reflexão do triângulo  $\Delta PQT$  em torno de  $PQ$ .

Agora os ângulos  $TPQ$  e  $RPS$  são congruentes, pela definição de triângulos semelhantes. Como a semirreta  $PQ$  é lado dos dois ângulos, segue que as semirretas  $PT$  e  $PR$  coincidem, logo  $T$  é um ponto de  $n$ . Analogamente os ângulos  $PQT$  e  $PSR$  são congruentes e, sendo assim,  $PQT$  é reto, portanto  $T$  está em  $l$ .

Portanto,  $l$  e  $n$  se interceptam em  $T$  e existe, no máximo, uma paralela à  $l$  passando por  $P$ . ■

Os argumentos utilizados por Wallis são todos corretos, porém não existe razão para considerar seu postulado mais plausível que o postulado das paralelas, eles são logicamente equivalentes.

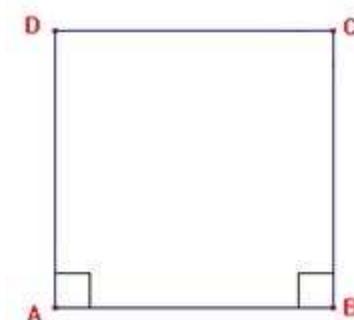
Girolamo Saccheri (1667-1733) era um padre Jesuíta e sua ideia para demonstrar o postulado das paralelas foi de utilizar um argumento de redução ao absurdo, sua tentativa foi publicada em seu livro *Euclides ab omni naevo vindicatus*. Esse método consiste em assumir como hipótese que a proposição a ser demonstrada é falsa. Se durante a demonstração ocorrer alguma contradição, isso implica que a proposição é verdadeira.

Em sua demonstração ele introduz o que chamamos hoje de quadrilátero de Saccheri: um quadrilátero  $ABCD$  cujos ângulos  $A$  e  $B$  são retos e os lados  $AD$  e  $BC$  são congruentes, nesse caso dizemos que o quadrilátero de Saccheri tem base  $AB$ .

A partir desse quadrilátero seu trabalho consistia em três passos:

- Provar que os ângulos  $C$  e  $D$  são congruentes;
- Provar que o quinto postulado equivale com a hipótese dos ângulos  $C$  e  $D$  serem retos;

- Provar que o fato dos ângulos  $C$  e  $D$  serem agudos ou obtusos entra em contradição com uma das 28 primeiras proposições de *Os Elementos* de Euclides.



A seguir temos o argumento utilizado por Saccheri para provar o primeiro passo de seu trabalho.

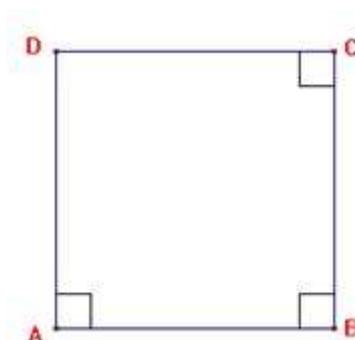
**Proposição 1.1.** *Se  $ABCD$  é um quadrilátero de Saccheri com base  $AB$ , então os ângulos  $C$  e  $D$  são congruentes.*

**Demonstração:** Considere os triângulos  $\triangle DAB$  e  $\triangle CBA$ . Por definição, temos que  $AD$  é congruente a  $BC$ . Assim  $\triangle DAB$  é congruente a  $\triangle CBA$ , pelo critério  $LAL$  (o critério  $LAL$  já tinha sido demonstrado sem necessidade do quinto postulado). Logo os lados  $AC$  e  $BD$  são congruentes. Considere agora os triângulos  $\triangle DCB$  e  $\triangle CDA$ , eles são claramente congruentes pelo critério  $LLL$ . Portanto os ângulos  $C$  e  $D$  são congruentes. ■

Após demonstrar essa proposição, Saccheri considerou os três casos possíveis: Os ângulos  $C$  e  $D$  poderiam ser ambos retos, obtusos ou agudos. Provar que apenas o primeiro caso era verdadeiro seria equivalente a provar o postulado das paralelas, dessa forma ele tentou mostrar que os outros dois casos conduziam a uma contradição (redução ao absurdo). A hipótese dos ângulos obtusos foi facilmente descartada, pois se fosse verdadeira o quadrilátero teria a soma dos ângulos maior do que  $360^\circ$ , o que é uma contradição (já havia sido provado que a soma dos ângulos de um triângulo deve ser menor ou igual a  $180^\circ$  sem utilizar o quinto postulado, para os leitores interessados esse resultado é chamado de Teorema de Saccheri-Legendre e sua demonstração pode ser encontrada em [10]). Entretanto, ao procurar uma contradição para a hipótese do ângulo agudo, provou uma série de resultados coerentes com todos os postulados da Geometria Euclidiana, exceto o quinto. Esses resultados seriam todos coerentes com uma Geometria não Euclidiana, que só viria a ser aceita muitos anos depois. Apesar de não aceitar a existência de tal geometria, seus resultados foram um pontapé inicial para a quebra desse paradigma.

Johann Heinrich Lambert (1728-1777) fez uma abordagem semelhante à de Saccheri na tentativa de provar o quinto postulado (ou postulado das paralelas), seu trabalho foi

escrito em 1766 e publicado após sua morte, por G.Bernoulli e C.F Hindenburg. Ele estudou quadriláteros que tinham pelo menos 3 ângulos retos, conhecidos hoje como quadriláteros de Lambert, considerando a hipótese do quarto ângulo ser reto (equivalente ao quinto postulado), agudo ou obtuso.



Assim como Saccheri, Lambert eliminou a hipótese do ângulo obtuso assumindo que a reta é ilimitada. Todavia, também não chegou em contradição ao tentar demonstrar a hipótese do ângulo agudo, deduzindo proposições inusitadas. Entre elas destaca-se a seguinte:

*"A área de um triângulo é proporcional a diferença entre a soma de seus ângulos internos e dois ângulos retos."*

Essa diferença, conhecida hoje como deficiência ou excesso do triângulo, tem um papel muito importante na Geometria Hiperbólica, onde a soma dos ângulos de um triângulo é menor do que dois retos, e na Geometria Esférica, onde a soma dos ângulos de um triângulo é maior do que dois retos. Veremos mais adiante, no Capítulo 3, a demonstração dessa afirmação para um caso particular da Geometria Esférica. Essa deficiência ou excesso é igual a zero na Geometria Euclidiana, na qual a soma dos ângulos internos de um triângulo é exatamente  $180^\circ$ . Lambert também observou que a hipótese do ângulo obtuso vale para triângulos esféricos e que a hipótese do ângulo agudo ocorre na superfície de uma esfera de raio imaginário. Suas observações seriam posteriormente comprovadas pelos matemáticos Riemann e Lobachewsky.

Adrien Legendre (1752 - 1833) foi um grande matemático francês, tendo feito inúmeras pesquisas em matemática pura e aplicada. Também foi um autêntico professor que se dedicava à educação matemática. Entre seus trabalhos escreveu um livro, chamado Elementos de Geometria, que foi largamente utilizado por estudantes de matemática básica nas escolas, já que o estilo de suas demonstrações era mais simples e acessível. Seu livro também foi muito utilizado no Brasil, alcançando mais de 25 edições.

O trabalho de Legendre em busca de demonstrar o quinto postulado baseou-se em três hipóteses (analogamente aos trabalhos de Saccheri e Lambert):

- I. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$  (equivalente ao quinto postulado);
- II. A soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que  $180^\circ$
- III. A soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que  $180^\circ$ .

Assim como seus predecessores, Legendre eliminou facilmente a possibilidade da soma dos ângulos internos de um triângulo ser maior do que  $180^\circ$ , pois encontrou contradição. Porém, as várias demonstrações fornecidas por Legendre de que a soma dos ângulos internos de um triângulo não pode ser menor do que  $180^\circ$  estavam incorretas.

---

## 1.5 A concepção de uma nova geometria

---

Os três matemáticos (Saccheri, Lambert e Legendre) tentaram provar o quinto postulado por meio da eliminação das outras hipóteses que competiam com ele. Nenhum deles conseguiu eliminá-las por completo e acabaram chegando a resultados interessantes nesse processo. Porém eles não deram muito crédito a essas descobertas por não aceitarem a possibilidade de existirem outras geometrias, não euclidianas. Os matemáticos citados a seguir foram os primeiros a aceitar essa quebra de paradigmas e ter coragem de publicar seus resultados de tão difícil aceitação.

Janos Bolay (1802-1860) se dedicou ao estudo da teoria das paralelas desde jovem, apesar dos apelos de seu pai, o matemático húngaro Wolfgang Bolay, para que não seguisse por esse caminho. Wolfgang estudava o problema juntamente com o renomado matemático Friedrich Gauss, portanto conhecia as grandes dificuldades envolvidas e chegou a escrever a seguinte carta para Janos:

*"Pelo amor de Deus, eu lhe peço, desista! Tema tanto isso quanto as paixões sensuais porque isso pode tomar todo o seu tempo e privá-lo de saúde, paz de espírito e felicidade na vida!"*

Em 1820 Janos resolveu negar o quinto postulado ao invés de continuar tentando demonstrá-lo e resultados interessantes começaram a aparecer. Nesse ponto ele começou a conceber a possibilidade da existência de uma geometria geral, na qual a geometria euclidiana seria um caso particular. Negando o quinto postulado, havia duas possibilidades:

- I. Não existe qualquer reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora desta reta.
- II. Existe mais de uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto.

Porém, é consequência dos quatro primeiros postulados a existência de retas paralelas, eliminando, assim, a hipótese I.

Janus resolveu citar publicamente seus trabalhos sobre a existência de geometrias não euclidianas. Ele publicou suas descobertas, em 26 páginas, no apêndice de um livro de autoria do seu pai, Wolfgang Bolay. Wolfgang mandou uma cópia para Gauss esperando que ele fizesse uma boa propaganda do trabalho de seu filho, porém obteve a seguinte resposta:

*”Se eu começar com a proposição que não ousou louvar seu trabalho, você ficará surpreso por um momento, mas não posso fazer de outra forma; louvá-lo seria louvar a mim mesmo; pois o conteúdo inteiro deste trabalho, o caminho seguido pelo seu filho, os resultados aos quais foi levado, coincidem quase que exatamente com minhas próprias meditações que ocuparam minha mente por trinta e cinco anos. Sendo assim, eu estou surpreso ao extremo...Estou muito surpreso do esforço e muito feliz de ser o filho do meu velho amigo a poupar-me de forma tão impressionante.”*

Janos fica decepcionado com a resposta de Gauss por imaginar que este estava tentando se apropriar dos seus resultados e ficar com o mérito pela descoberta. Com isso, entra em depressão e não publica mais suas pesquisas.

Friedrich Gauss (1777 – 1855) foi o maior matemático de sua época e contribuiu muito para o desenvolvimento da nova geometria. Na verdade, ele foi o primeiro a designar a nova geometria como não euclidiana. Há evidências de que tenha trabalhado com as geometrias não euclidianas desde os 15 anos e que tenha se antecipado a Janus Bolay em algumas descobertas, porém apenas alguns dos seus resultados foram conhecidos durante sua vida. Gauss tinha receio de publicar seus resultados, apesar de sua grande reputação, pois naquele tempo a Inquisição exercia grande pressão sobre aqueles que dominavam algum tipo de conhecimento. As teorias de Kant, cuja filosofia havia sido adotada pela igreja católica colocavam que o rigor das demonstrações matemáticas deveria ser dispensado e a intuição adotada. Kant chamava o espaço euclidiano de uma ”necessidade inevitável de pensamento”. Gauss por outro lado acreditava na necessidade das demonstrações matemáticas e temia o que ele mesmo chamava de ”uivo dos estúpidos” caso publicasse suas descobertas, propondo geometrias não euclidianas. Dessa forma, sabe-se da descoberta da nova geometria por Gauss graças às suas anotações e correspondências que trocava com alguns matemáticos da época. Muitos de seus resultados foram divulgados dessa forma.

Segue um trecho da carta escrita por Gauss a F.A. Taurinus, em Göttingem, em 8 de novembro de 1824:

*"... A hipótese que a soma dos ângulos é menor que  $180^\circ$  leva a uma geometria curiosa, muito diferente da nossa (a euclidiana), mas totalmente consistente, a qual desenvolvi a um ponto que me satisfaz plenamente, no sentido de que posso resolver qualquer problema nela, com exceção da determinação de uma constante que não pode ser fixada a priori. ...*

*... Os teoremas dessa geometria parecem paradoxais e absurdos para um não iniciado; mas reflexão cuidadosa sobre o assunto revela que eles não contém nada de impossível.*

*...*

*... Todos os meus esforços para descobrir uma contradição, uma inconsistência, nesta geometria não euclidiana não tiveram sucesso, e a única coisa nela que se opõe a nossa concepção é que, se for verdade, deve existir no espaço uma unidade universal de medida linear (desconhecida por nós). ..."*

Gauss estudou casos de superfícies de curvatura constante onde os triângulos possuíam soma dos ângulos internos diferentes de dois retos. Ele propôs o resultado de que o excesso de um triângulo traçado sobre uma superfície esférica (Geometria Esférica), na qual a curvatura é uma constante positiva, é diretamente proporcional à área desse triângulo. No caso particular dessa superfície esférica ter raio unitário, o excesso do triângulo é igual à sua área, como veremos no Capítulo 3. Esses estudos de Gauss coincidiam com o trabalho de Lambert e indicava a existência de uma geometria onde não era válido o postulado das paralelas.

O russo Lobachewsky (1792 - 1856) formou-se na Universidade de Kasanem 1813 e logo tornou-se professor, sendo que aos 21 anos de idade tornou-se membro do corpo docente dessa universidade. Aos 35 anos foi nomeado reitor e é considerado o maior matemático russo de seu tempo. Foi o primeiro a publicar um texto sobre geometria não euclidiana, em 1829, dois anos antes de Janus Bolay, a qual nomeou de geometria imaginária. Seu trabalho foi publicado em russo e atraiu pouca atenção além das severas críticas dos matemáticos russos. Em 1846 foi demitido da Universidade de Kazan apesar de 20 anos de serviço impecável enquanto professor e administrador.

Na verdade, Lobachewsky, Gauss e Janus Boylai desenvolveram a geometria não Euclidiana ao mesmo tempo, mas Lobachewsky foi o primeiro a comunicar suas descobertas e não temeu o impacto que seu trabalho poderia causar na teoria Kantiana. Somente após a morte de Gauss e a publicação de suas cartas, a comunidade matemática começou a considerar seriamente as ideias não euclidianas. Grandes matemáticos continuaram o estudo da Geometria não Euclidina, como Beltrami, Poincaré, Klein e Riemann, estendendo, classificando e aplicando o assunto em outras áreas da matemática.

Riemann foi considerado o aluno mais brilhante de Gauss, nas palavras do próprio Gauss, ele fundou a Geometria Riemanniana que generalizava as ideias de todos os matemáticos anteriores sobre as geometrias não euclidianas. Seus resultados valem para qualquer espaço de curvatura constante, sendo que quando essa curvatura é negativa denominamos o espaço de hiperbólico, quando é positiva denominamos de espaço elíptico (o espaço esférico que citamos anteriormente é um caso particular desse espaço) e quando a curvatura é igual a zero temos o espaço euclidiano.

A aceitação dessas novas ideias foi lenta, como Gauss havia previsto. Em 1868, Beltrami provou definitivamente que não era possível provar o quinto postulado, mostrando que a geometria hiperbólica é tão consistente quanto a geometria euclidiana.

---

---

# CAPÍTULO 2

---

## GEOMETRIA DO TAXISTA

---

### 2.1 Métrica da geometria do taxista

---

Dizemos que uma função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma métrica quando:

1.  $d(A, B) \geq 0, \forall A, B \in M$ .
2. É simétrica,  $d(A, B) = d(B, A), \forall A, B \in M$ .
3.  $d(A, B) = 0$  se, e somente se,  $A = B, \forall A, B \in M$ .
4. Satisfaz a desigualdade triangular,  $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B), \forall A, B, C \in M$ .

Denomina-se de Espaço Métrico qualquer conjunto  $M$  munido de uma métrica  $d$ .

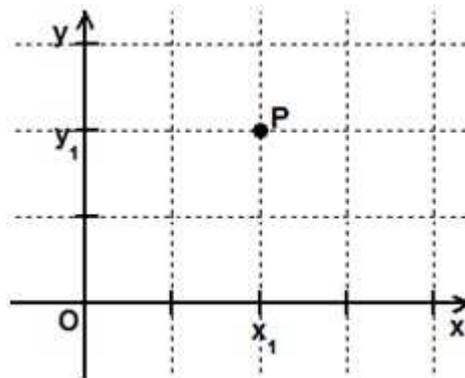
A ideia de distância entre dois pontos é formalizada pelo conceito de métrica. Nesse contexto  $d(A, B)$  denota a distância entre os pontos  $A$  e  $B$ . Geometricamente, a distância entre esses pontos é dada pela curva de menor comprimento que une esses dois pontos.

A métrica euclidiana dominou a visão de mundo natural e a noção de distância "por linha reta" garantiu o estável desenvolvimento da geometria euclidiana. As geometrias ditas não euclidianas podem utilizar-se de outras métricas, muitas vezes até mais adequadas, como a interessante geometria do taxista.

A geometria do taxista foi desenvolvida pelo russo Hermann Minkowski (1864 - 1909) com intuito de simular deslocamentos em uma "cidade ideal", representada por uma malha

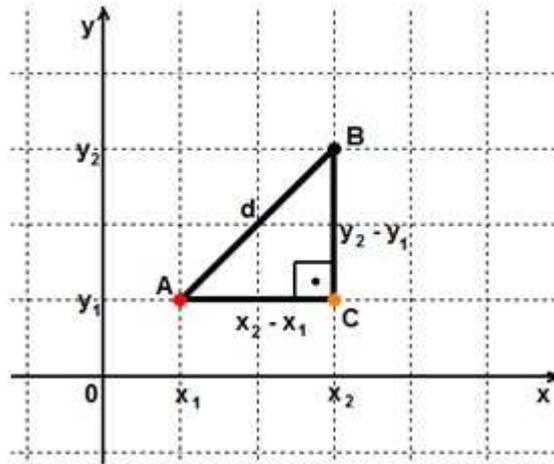
quadriculada, na qual as linhas horizontais, verticais e suas interseções representam suas ruas. Nesse modelo, definimos como reta qualquer conjunto infinito de deslocamentos horizontais e verticais, e retas paralelas são aquelas que não possuem interseção. Dessa forma, é fácil verificar que existe uma infinidade de retas paralelas a uma mesma reta passando por um mesmo ponto, isso já a torna uma geometria não euclidiana (não vale o quinto postulado de Euclides). Esse modelo é muito útil para simulações urbanas, pois é capaz de modelar as trajetórias "por linhas quebradas". Nos deslocamentos urbanos nem sempre podemos fazer uma trajetória reta, direta, para se deslocar de um ponto a outro, é mais natural imaginarmos a trajetória como uma combinação de segmentos horizontais e verticais, simulando as curvas do trajeto. Pensando assim, o modelo da geometria do taxista, apesar de ser aplicado a uma cidade ideal, é mais plausível para simular o deslocamento das pessoas e de veículos entre quadras, ao longo de avenidas, do que o modelo euclidiano.

A malha quadriculada que representa a cidade ideal desse modelo pode ser pensada como um plano cartesiano, dessa forma podemos localizar pontos e trajetórias através de coordenadas.



O ponto  $P$  na malha quadriculada acima, por exemplo, é identificado como  $(x_1, y_1)$ . Cabe observar que na Geometria do Taxista devem-se considerar apenas os pontos de coordenadas inteiras e, neste caso, as distâncias são medidas em número de segmentos, horizontais ou verticais, necessários para se deslocar de um ponto a outro.

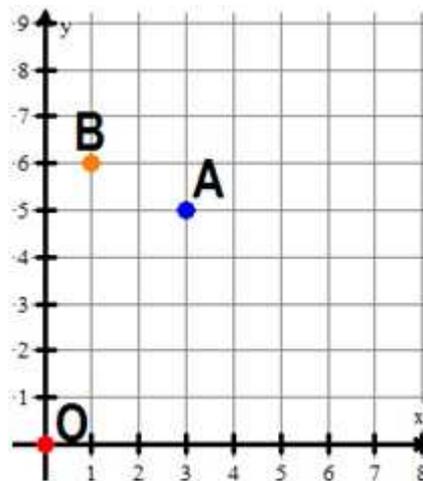
Suponha que, de acordo com a figura abaixo, um taxista, saindo do ponto  $A$ , queira buscar um cliente no ponto  $B$ . A distância euclidiana entre esses dois pontos, determinada pelo Teorema de Pitágoras, é dada por  $d_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ , onde  $d_e$  denota a distância euclidiana, mas o taxista não pode percorrer esse caminho direto. Uma possibilidade para ele é ir até o ponto  $C$  e dali para  $B$ , nesse caso a distância percorrida é calculada pela soma das distâncias  $AC$  e  $CB$  e tem-se  $d_t = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ , onde  $d_t$  denota a distância na geometria do taxista. Extendendo essa definição para coordenadas reais teremos  $d_t : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  atendendo as propriedades necessárias para ser uma



métrica [8].

**Exemplo:** Considere uma cidade representada por uma malha quadriculada, com cada quadrícula de lado medindo  $1km$ . Seja o ponto  $B(1,6)$  a localização do serviço de Bruno, e seja  $A = (3,5)$  o local onde Ana, a esposa do Bruno, trabalha. Sabendo que Bruno e Ana saem do trabalho no mesmo horário, para qual dos dois é mais viável buscar sua filha na escola, situada no ponto  $O(0,0)$  ?

**Solução:** Observe a malha quadriculada abaixo representando a situação.



Pela geometria euclidiana temos que, ao sair do trabalho, Ana está mais perto da escola do que Bruno,

$$d_e(O, B) = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37} \cong 6,08km.$$

$$d_e(O, A) = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \cong 5,83km.$$

Porém, pela geometria do taxista, que é mais adequada para a situação temos

$$d_t(O, B) = 1 + 6 = 7km$$

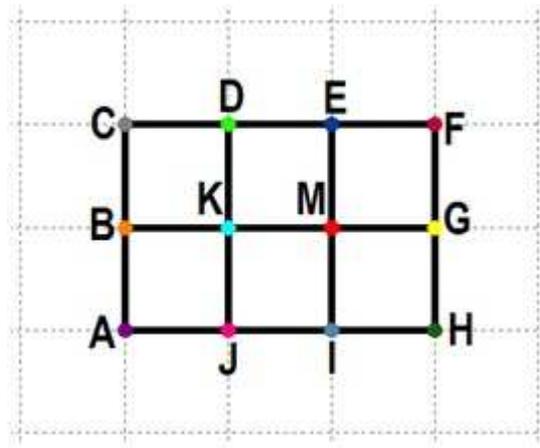
$$d_t(O, A) = 3 + 5 = 8km$$

ou seja, Bruno está mais perto da escola do que Ana.

## 2.2 Caminhos Variados

Na geometria euclidiana, a distância entre dois pontos é dada pelo tamanho do **único** segmento que liga tais pontos. Já na geometria do taxista podem existir vários caminhos distintos que vão de um ponto a outro e representam a mesma distância, de acordo com a métrica apresentada na sessão anterior.

Na figura seguinte, os quadrados representam as quadras de uma cidade, e entre elas passam as ruas e avenidas. Supondo que um táxi vai deslocar-se do ponto  $A$  ao ponto  $F$ , quantos caminhos mínimos e de mesmo tamanho são possíveis?



Considera-se que existem vários caminhos distintos ligando o ponto  $A$  ao ponto  $F$ . Considera-se também que o deslocamento entre dois pontos de cada quadra seja equivalente a movimentos na vertical ( $v$ ) ou movimentos na horizontal ( $h$ ). Assim tem-se:

- Caminho 1:  $AB + BC + CD + DE + EF$ , equivalente a "vvhhh";
- Caminho 2:  $AJ + JI + IH + HG + GF$ , equivalente a "hvhv";
- Caminho 3:  $AB + BK + KM + MG + GF$ , equivalente a "vhhhv";
- Caminho 4:  $AJ + JK + KM + ME + EF$ , equivalente a "hvhvh";

- Caminho 5:  $AJ + JI + IM + ME + EF$ , equivalente a "hhvvh";
- Caminho 6:  $AB + BK + KD + DE + EF$ , equivalente a "vhvhh";
- Caminho 7:  $AJ + JI + IM + MG + GF$ , equivalente a "hhvhv";
- Caminho 8:  $AB + BK + KM + ME + EF$ , equivalente a "vhhvh";
- Caminho 9:  $AJ + JK + KM + MG + GF$ , equivalente a "hvhhv";
- Caminho 10:  $AJ + JI + IM + MG + GF$ , equivalente a "hvvvh".

Portanto, para percorrer do ponto  $A$  ao ponto  $F$ , existem 10 caminhos mínimos distintos e de mesmo tamanho.

Nem sempre é viável descrever as possibilidades para descobrir o número de caminhos mínimos possíveis. Observando-se os caminhos acima, nota-se que todos possuem a mesma quantidade de movimentos na horizontal (três) e na vertical (dois), o que difere é apenas a ordem com que esses movimentos são feitos. O número de ordens desses movimentos é igual ao número de permutações da sequência de letras "hhhv", dessa forma o problema torna-se combinatório. Descobrir quantos caminhos distintos existem equivale a descobrir de quantas formas podemos escolher os três lugares que serão ocupados pelas letras "h" dentre os cinco lugares disponíveis, isso pode ser feito de  $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$  formas.

Agora explorando um caso geral, com  $n$  movimentos horizontais e  $m$  movimentos verticais, temos que escolher  $n$  lugares dentre os  $n + m$  lugares disponíveis, isso pode ser feito de  $\frac{(n + m)!}{n! \cdot m!}$  formas. Isso nos fornece um método geral, ou fórmula, para calcular o número de caminhos mínimos distintos entre dois pontos na geometria do taxista.

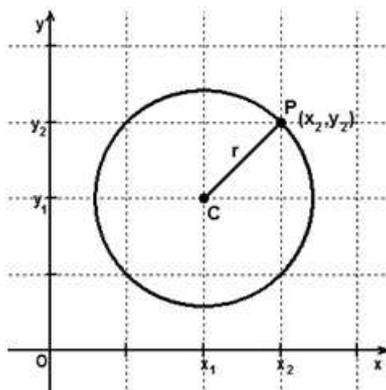
---

## 2.3 Circunferência do taxista

---

Devido à maneira peculiar da geometria do taxista medir distâncias, diferente daquela consagrada na geometria euclidiana, muitos problemas de lugares geométricos podem ser explorados, inclusive oferecendo ao exemplos práticos para aplicações de equações modulares. Figuras geométricas, que nos são familiares, às vezes se transmutam.

O círculo de centro  $C(x_1, y_1)$  e raio  $r$  é o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  equidistantes do centro. Assim, sendo  $C(x_1, y_1)$  o centro e  $P(x_2, y_2)$  um ponto qualquer da circunferência, a distância de  $C$  a  $P$  é o raio da mesma. A figura abaixo apresenta a consagrada circunferência na geometria euclidiana.



Nesse caso o raio é facilmente calculado pela distância euclidiana cuja equação é chamada de equação da circunferência de centro  $C(x_1, y_1)$  e raio  $r$ :

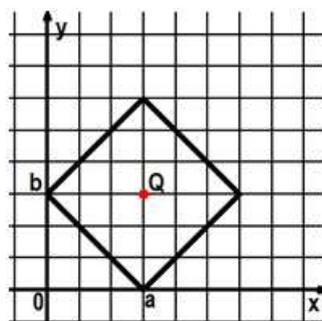
$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Na geometria do taxista, a definição permanecerá a mesma utilizada pela geometria euclidiana, porém a distância é a do taxista, o que resultará numa figura diferente.

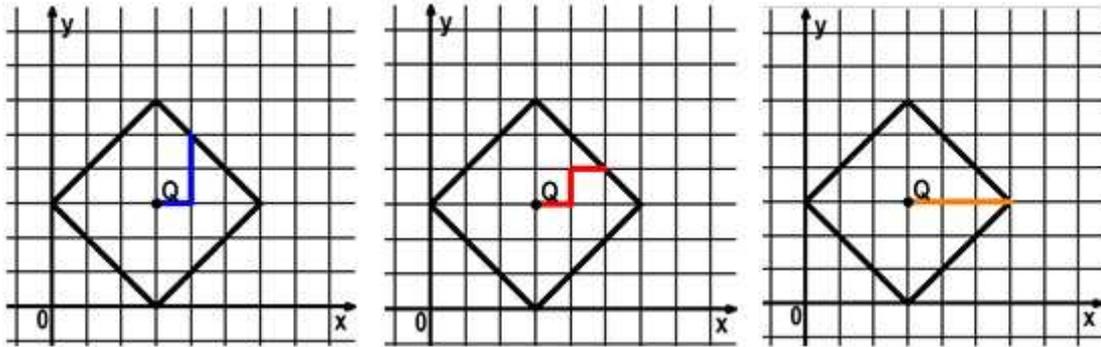
Observe as possibilidades para a equação  $r = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ :

$ x_2 - x_1 $	$x_2 - x_1, se x_2 \geq x_1$	$-x_2 + x_1, se x_2 < x_1$
$ y_2 - y_1 $		
$y_2 - y_1, se y_2 \geq y_1$	$x_2 + y_2 - (x_1 + y_1) = r$ (1)	$-x_2 + y_2 - (y_1 - x_1) = r$ (3)
$-y_2 + y_1, se y_2 < y_1$	$x_2 - y_2 - (x_1 - y_1) = r$ (2)	$-x_2 - y_2 + (x_1 + y_1) = r$ (4)

As equações (1), (2), (3) e (4) geram 4 segmentos de reta. Unidos formam uma circunferência de centro  $C(x_1, y_1)$  e raio  $r$  na geometria do taxista, que tem a forma de um quadrado centrado em  $C$  e com as diagonais dirigidas segundo as duas direções da quadrícula utilizada. Tomando o ponto  $Q(3, 3)$  como centro da circunferência e o raio igual a 3 unidades teremos a circunferência representada na figura a seguir:



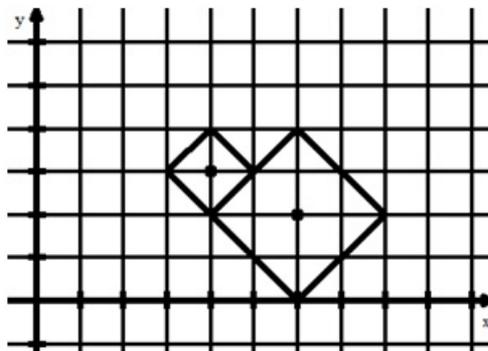
Lembrando-se que o raio é a distância do centro a um ponto da circunferência, vê-se que existem vários "formatos" de raios na mesma circunferência. Veja alguns exemplos:



A razão entre o perímetro (comprimento) e o diâmetro (dobro do raio) da circunferência, na geometria do taxista, é constante e igual a 4. De fato, o perímetro da circunferência é a soma das 4 lados do quadrado, valendo  $2r$  cada um pela distância do taxista. Portanto

$$\frac{\text{Perímetro}}{\text{Diâmetro}} = \frac{4 \cdot 2r}{2r} = 4.$$

É interessante observar que, diferentemente da geometria euclidiana, na geometria do taxista duas circunferências distintas podem se interceptar em inúmeros pontos, como na figura abaixo:

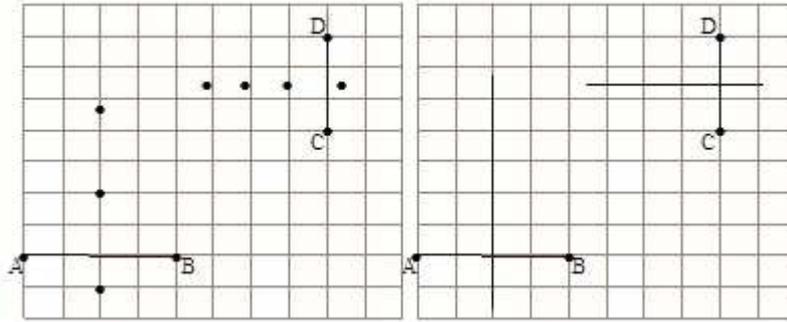


---

## 2.4 Noções de Mediatriz

---

Assim como na circunferência vamos manter a definição geométrica de mediatriz como sendo o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos extremos do segmento.



Na figura acima, a marcação de alguns pontos óbvios equidistantes dos extremos dos segmentos AB e CD, pela geometria do taxista, leva-nos à conjectura de que quando o segmento tem uma qualquer das direções da quadrícula, a mediatriz, tal como na geometria euclidiana, se confunde com a perpendicular ao segmento passando pelo seu ponto médio. Para mostrar que nossa conjectura é verdadeira tomemos dois pontos  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_1)$ , com  $x_1 < x_2$  e  $y_1 = y_2$ , dessa forma o segmento AB será paralelo à direção horizontal das quadrículas, o raciocínio a seguir é análogo para o caso em que AB é vertical ( $x_1 = x_2$ ). Pela definição de mediatriz, utilizando a métrica do valor absoluto, temos:

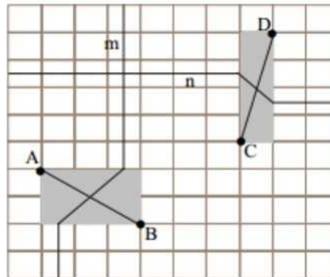
$$P(x, y) \text{ é um ponto da mediatriz} \Leftrightarrow |x-x_1|+|y-y_1| = |x-x_2|+|y-y_1| \Leftrightarrow |x-x_1| = |x-x_2|$$

Agora temos 3 possibilidades:  $x < x_1$ ,  $x > x_2$  ou  $x_1 \leq x \leq x_2$ . As duas primeiras possibilidades serão descartadas pois não resolvem a equação, a possibilidade restante finaliza a sequência de implicações:

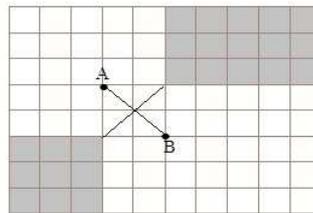
$$|x - x_1| = |x - x_2| \Rightarrow x - x_1 = x_2 - x \Rightarrow x = \frac{(x_1 + x_2)}{2},$$

como queríamos demonstrar.

Na figura a seguir, as regiões retangulares associadas a cada segmento são um indicador do tipo de figura que a mediatriz vai ser. Para estas posições dos segmentos  $AB$  e  $CD$ , a mediatriz torna-se uma linha poligonal ( $m$  para o segmento  $AB$  e  $n$  para o segmento  $CD$ ) que contém um segmento formando  $45^\circ$  com uma das direções da quadrícula e unindo dois pontos dos lados do retângulo associado e ainda duas semirretas tendo como direção umas das direções da quadrícula.



Quando o segmento faz ângulos iguais com as duas direções da quadrícula, a mediatriz é formada por um segmento de inclinação oposta e duas regiões retangulares ilimitadas, como mostra a figura abaixo.



---

---

## CAPÍTULO 3

---

# GEOMETRIA DA ESFERA

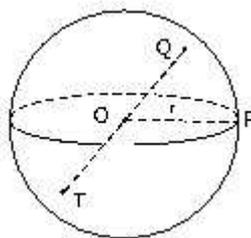
---

### 3.1 Definição da esfera

---

Seja  $O$  um ponto do espaço e  $r$  um número real positivo. A superfície esférica de centro  $O$  e raio  $r$  é o conjunto de todos os pontos  $P$  do espaço cuja distância a  $O$  é igual a  $r$ . Os pontos do espaço cuja distância a  $O$  é menor que  $r$  são interiores à superfície esférica e aqueles cuja distância a  $O$  é maior que  $r$  são exteriores a ela.

A reunião da superfície esférica de centro  $O$  e raio  $r$  com seus pontos interiores é chamada a esfera de centro  $O$  e raio  $r$ . O segmento que une o centro a um ponto qualquer da superfície esférica é denominado raio da superfície esférica enquanto que o segmento que une dois pontos distintos da superfície esférica é chamado uma corda da superfície esférica. Em particular, uma corda que contém o centro é chamada de diâmetro da superfície esférica e seu comprimento, evidentemente, equivale ao de dois raios.



Na figura acima os segmentos  $OQ$ ,  $OT$  e  $OP$  são raios da esfera,  $PQ$  e  $PT$  são cordas,  $QT$  é um diâmetro. A notação  $r$  se refere ao comprimento dos raios da esfera e, dessa forma,  $2r$  é o comprimento do diâmetro. A notação  $\overline{AB}$  representa a medida do segmento compreendido entre os pontos  $A$  e  $B$ . Dessa forma, na figura acima,  $\overline{OQ} = \overline{OT} = \overline{OP} = r$ .

---

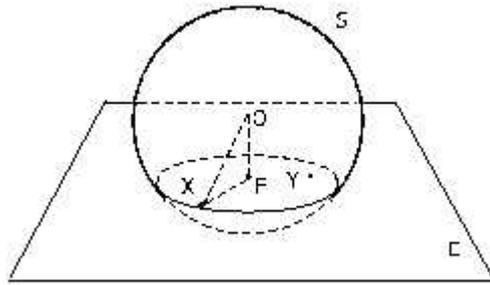
## 3.2 Seções da esfera

---

Dizemos que um plano  $E$  é tangente a uma superfície esférica  $S$  se  $E \cap S$  contém exatamente um ponto. Esse ponto é chamado ponto de tangência.

Quando  $E \cap S$  contém mais do que um ponto dizemos que o plano é secante à superfície esférica, e essa intersecção será chamada de secção na esfera. Perceba que  $E \cap S$  conter mais do que um ponto é equivalente a dizer que o plano  $E$  contém um ponto do interior da superfície esférica. Vamos investigar agora a forma dessas secções.

**Teorema 3.1.** *Se um plano contém um ponto do interior de uma superfície esférica, então a intersecção do plano com a superfície esférica é uma circunferência. O centro dessa circunferência é o pé da perpendicular ao plano traçada a partir do centro da superfície esférica.*



**Demonstração:** Seja  $E$  um plano que não passa pelo centro  $O$  da superfície esférica  $S$  e que contém um ponto  $Y$  do seu interior. Seja  $F$  o pé da perpendicular a  $E$  traçada a partir de  $O$ , vamos mostrar que a intersecção  $E \cap S$  é uma circunferência de centro  $F$ .

Sabemos que  $\overline{OY} < r$  pois  $Y$  está no interior de  $S$ . No triângulo retângulo  $\Delta OFY$  temos que  $OY$  é hipotenusa, enquanto que  $OF$  é cateto. Logo  $\overline{OF} < \overline{OY} < r$ , ou seja,  $F$  também está no interior de  $S$ .

Agora seja  $X$  um ponto qualquer na intersecção  $E \cap S$ . Então  $\Delta OFX$  tem um ângulo reto em  $F$  e, pelo teorema de Pitágoras,  $\overline{OF}^2 + \overline{FX}^2 = \overline{OX}^2 = r^2$  e, portanto

$\overline{FX} = \sqrt{(r^2 - \overline{OF}^2)}$ , sendo  $r^2 > \overline{OF}^2$  evidentemente. Logo  $X$  está na circunferência de centro  $F$  e raio  $\sqrt{(r^2 - \overline{OF}^2)}$ .

Provamos assim que qualquer ponto da intersecção  $E \cap S$  está contido na circunferência de centro  $F$  e raio  $\sqrt{(r^2 - \overline{OF}^2)}$ . Isso ainda não significa que a intersecção é a circunferência. Para completar a demonstração, precisamos mostrar que todo ponto da circunferência pertence à intersecção.

Seja  $X$  um ponto qualquer da circunferência, em  $E$ , com centro  $F$  e raio  $\sqrt{(r^2 - \overline{OF}^2)}$ . Novamente pelo teorema de Pitágoras,

$$\overline{OX}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{FX}^2 = \overline{OF}^2 + r^2 - \overline{OF}^2 = r^2$$

Portanto  $OX = r$  e  $X$  pertence à superfície esférica  $S$ , como queríamos demonstrar. ■

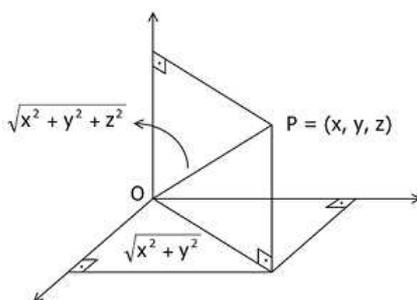
A intersecção da superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é chamada uma circunferência máxima da superfície esférica. Há uma forte razão para esse nome: as circunferências máximas são as circunferências de maior raio contidas na superfície esférica. As demais seções são chamadas de circunferências menores. Veremos adiante que o Equador é uma circunferência máxima, mas os outros paralelos no globo terrestre não.

### 3.3 Geometria Analítica da Esfera

Nesta seção trabalharemos num sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com origem  $O$  para descrever equações paramétricas para a esfera. Dado um ponto  $P = (x, y, z)$  do espaço, uma dupla aplicação do Teorema de Pitágoras mostra que a distância de  $P$  a  $O$  é expressa por  $d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Generalizando o resultado, sejam dois pontos  $P(x, y, z)$  e  $C(u, v, w)$ , temos que a distância entre eles é dada por  $d(P, C) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2}$ . Dessa forma, sendo  $r$  um número real positivo, temos que a superfície esférica  $S$  de centro  $C(u, v, w)$  e raio  $r$  é o conjunto dos pontos  $P(x, y, z)$  definidos pela equação:

$$(1) \quad (x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2 = r^2$$



A equação (1) é denominada equação reduzida de  $S$ . A equação  $(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$ , por exemplo, determina todos os pontos que formam a superfície esférica de centro  $C(3, -1, 0)$  e raio  $r = 3$ , em  $\mathbb{R}^3$ . Desenvolvendo os quadrados em (1) temos

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2xu - 2yv - 2zw + u^2 + v^2 + w^2 - r^2 = 0$$

que é uma equação da forma

$$(3) \quad x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0,$$

sendo  $a, b, c, d$  números reais.

A equação (2) é chamada de equação geral de  $S$  e a equação (3) classifica essa equação na família das formas quadráticas da geometria analítica. Nem toda equação da forma (3) é equação de uma esfera, é sempre necessário fazer uma verificação e para isso devemos tentar transformá-la na forma (1), se essa transformação for possível a verificação está completa.

**Exemplo:** Considere a forma quadrática  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 8 = 0$ . Completando quadrados temos

- $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$
- $y^2 - 2y = (y - 1)^2 - 1$
- $z^2 - 6z = (z - 3)^2 - 9$

Substituindo na forma quadrática dada temos

$$(x + 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 + (z - 3)^2 - 9 + 8 = 0$$

daí

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 6.$$

Portanto a equação dada é de uma superfície esférica de centro  $C(-2, 1, 3)$  e raio  $r = \sqrt{6}$ , de acordo com a equação reduzida equivalente.

Agora vamos tentar repetir o mesmo procedimento para a forma quadrática  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 10 = 0$ . Completando quadrados temos

- $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$
- $y^2 - 4y = (y - 2)^2 - 4$

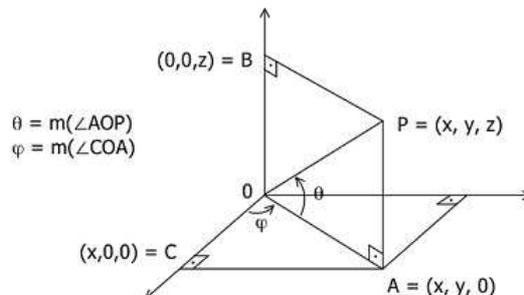
Substituindo na forma quadrática dada temos

$$(x - 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 + z^2 + 10 = 0$$

Como a soma de quadrados de números reais nunca pode ser negativa, concluímos que nenhum ponto  $P(x, y, z)$  pode satisfazer essa equação. Portanto, a forma quadrática dada não representa uma equação de superfície esférica.

No caso da forma quadrática  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 6 = 0$ . Completando quadrados temos  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 0$ , ou seja, o único ponto que satisfaz a equação é  $(2, 1, -1)$ . Portanto essa forma quadrática é um único ponto, logo não é nem um esfera e nem vazio.

Vejamos agora uma outra forma de descrever uma esfera na geometria analítica, por meio de equações paramétricas. Dado um ponto  $P = (x, y, z)$  do espaço, sejam  $\theta$  e  $\varphi$  os ângulos assinalados na figura abaixo:



Os ângulos  $\theta$  e  $\varphi$  acima indicados serão chamados de latitude e longitude, respectivamente, do ponto  $P$ , fazendo uma analogia com as coordenadas do globo terrestre. Conhecendo-se a latitude  $\theta$ , a longitude  $\varphi$  e o módulo do vetor  $\vec{OP}$ , que vamos denominar por  $r$ , ( $|\vec{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$ ) podemos determinar suas coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Observando o triângulo  $\triangle OPA$ , sendo  $A$  a projeção do ponto  $P$  no plano  $xOy$ , temos que  $\text{sen } \theta = \frac{z}{r}$ , portanto  $z = r \cdot \text{sen } \theta$ .

Esta expressão atribui a  $\theta$  um único valor entre  $0$  e  $\frac{\pi}{2}$  quando  $z > 0$  e um único valor entre  $\frac{-\pi}{2}$  e  $0$  quando  $z < 0$ , portanto temos  $\theta \in [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ .

Por outro lado, como  $\cos \theta = \frac{|\vec{OA}|}{r} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}$ , temos  $\sqrt{x^2 + y^2} = r \cos \theta$  e também  $\cos \varphi = \frac{x}{|\vec{OA}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . Portanto segue que

$$x = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos \varphi = r \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi.$$

Por fim temos  $\text{sen } \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , portanto

$$y = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \text{sen } \varphi = r \cdot \cos \theta \cdot \text{sen } \varphi.$$

Estas expressões definem um único  $\varphi$  entre  $0$  e  $\frac{\pi}{2}$  quando  $y > 0$  e  $x > 0$ , um único  $\varphi$  entre  $\frac{\pi}{2}$  e  $\pi$  quando  $y > 0$  e  $x < 0$ , um único  $\varphi$  entre  $-\pi$  e  $\frac{-\pi}{2}$  quando  $y < 0$  e  $x < 0$  e um único  $\varphi$  entre  $\frac{-\pi}{2}$  e  $0$  quando  $y < 0$  e  $x > 0$ . Portanto temos que  $\varphi \in [-\pi, \pi]$ .

Agora temos equações paramétricas para a esfera centrada na origem  $O$  do espaço  $\mathbb{R}^3$ , em relação aos parâmetros  $\theta$  e  $\varphi$  definidos anteriormente, e podemos descrever qualquer ponto  $P$  pertencente à esfera pelo vetor

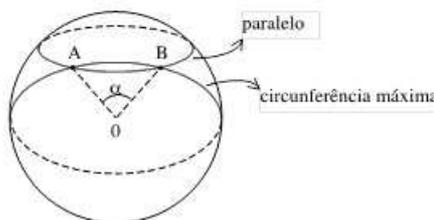
$$\vec{OP} = (r \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi ; r \cdot \cos \theta \cdot \text{sen } \varphi ; r \cdot \text{sen } \theta), \theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \text{ e } \varphi \in [-\pi; \pi]$$

---

### 3.4 Distância numa superfície esférica

---

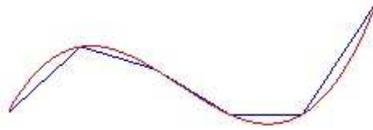
A distância  $d(A, B)$  entre dois pontos  $A$  e  $B$  é, essencialmente, o menor dos comprimentos das trajetórias ligando  $A$  a  $B$ . Já vimos nos capítulos anteriores que na geometria euclidiana a distância entre dois pontos é um segmento de reta com extremos nesses pontos, enquanto que na geometria do taxista a distância é dada por uma soma de segmentos unitários horizontais e verticais de formando o menor caminho possível entre esses dois pontos. Sobre uma superfície esférica, no entanto, não existe um segmento de linha reta, uma vez que ela é curvada em todas as direções. Como medir a distância entre dois pontos  $A$  e  $B$  neste caso? Nessa seção vamos provar que dados dois pontos  $A$  e  $B$  numa superfície esférica, a distância  $d(A, B)$  é o comprimento do arco menor  $AB$  da circunferência máxima que passa por  $A$  e  $B$ . Esse resultado mostra que nossa intuição nos engana diversas vezes ao tratar de distâncias numa superfície esférica, quando dois pontos estão em um mesmo paralelo temos a tendência de achar que o menor trajeto entre eles é pelo arco menor desse paralelo (que não é uma circunferência máxima) quando na verdade é o arco menor da circunferência maior passando por esses dois pontos.



Na figura acima temos os pontos  $A$  e  $B$  em um mesmo paralelo e a representação da circunferência máxima passando por  $A$  e  $B$ . É razoável imaginar que quanto maior for o raio da circunferência que compreende o arco  $AB$  menos curvo será esse arco, logo se assemelhará mais com uma reta e minimizará a distância, porém iremos fazer uma demonstração matemática para esse fato. Para fazer essa demonstração precisaremos de alguns resultados da geometria diferencial que vamos discutir de forma breve a seguir (uma discussão mais formal e completa pode ser encontrada no livro [4]).

Diremos que  $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ , é a parametrização de uma curva quando todo ponto  $P$  dessa curva puder ser identificado pelo vetor  $\vec{OP} = (x(t), y(t), z(t)) = r(t)$ , sendo  $O$  a origem do espaço  $\mathbb{R}^3$ . Definimos essa curva como diferenciável se as funções paramétricas  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$ ,  $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ , são diferenciáveis, ou seja, possuem derivadas de todas as ordens para todo valor de  $t$  em seu domínio. Nesse caso denotamos por  $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ , o vetor tangente à curva no ponto  $P(x(t), y(t), z(t))$ , sendo  $x'(t)$ ,  $y'(t)$ ,  $z'(t)$  as derivadas das respectivas funções paramétricas.

Dada a parametrização  $r(t), t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ , de uma curva diferenciável é possível calcular uma aproximação do seu comprimento dividindo-a em segmentos de reta, como mostra a figura abaixo.



É óbvio que quanto mais segmentos de reta fizermos, mais o comprimento da poligonal formada por eles vai se aproximar do comprimento da curva. Quando tomamos o limite do comprimento dessa poligonal, fazendo o número de segmentos tender a infinito, encontramos exatamente o comprimento da curva. Matematicamente descrevemos essas somas de infinitas partes envolvendo variações infinitesimais de parâmetros por meio de uma integral, dessa forma temos que o comprimento de um curva parametrizada diferenciável será dado por

$$C = \int_a^b |r'(t)| dt$$

onde  $|r'(t)|$  é o módulo do vetor tangente à curva no ponto  $P(x(t), y(t), z(t))$ ,

$$|r'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

Agora, em posse desses resultados, vamos demonstrar a proposição que motivou a seção:

**Proposição 3.2.** *Dados dois pontos  $A$  e  $B$  numa superfície esférica, a distância  $d(A, B)$  é o comprimento do arco menor  $AB$  da circunferência máxima que passa por  $A$  e  $B$ .*

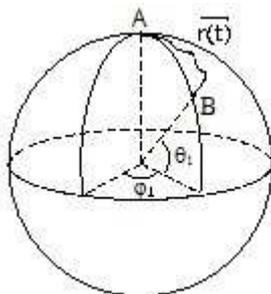
**Demonstração:** Podemos supor, sem perda de generalidade, que a superfície esférica que estamos trabalhando tem raio unitário,  $r = 1$ , e que seu centro é a origem do sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, no espaço  $\mathbb{R}^3$ . O caso geral segue multiplicando a distância na esfera unitária pelo raio  $r$ .

Pela simetria da superfície esférica podemos assumir que o ponto  $A$  é o Pólo Norte. Dessa forma, pela parametrização da superfície esférica com parâmetros  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  e  $\varphi \in [-\pi; \pi]$ , temos que

$$A(x; y; z) = (\cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2}; \cos \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2}; \sin \frac{\pi}{2}) = (0; 0; 1).$$

Agora dado um outro ponto  $B$  qualquer, com latitude  $\theta_1$  e longitude  $\varphi_1$ , temos

$$B(x; y; z) = (\cos \theta_1 \cdot \cos \varphi_1; \cos \theta_1 \cdot \text{sen} \varphi_1; \text{sen} \theta_1).$$



A circunferência máxima que passa por  $A$  e  $B$  contém o meridiano por  $B$  de modo que o arco menor  $AB$  tem por comprimento  $\frac{\pi}{2} - \theta_1$ , pois  $r = 1$ .

Agora vamos considerar uma trajetória arbitrária ligando  $A$  e  $B$  e mostrar que seu comprimento é maior ou igual a  $\frac{\pi}{2} - \theta_1$ . Se nos imaginarmos viajando de  $A$  até  $B$ , em cada instante, estaremos em um ponto da superfície esférica com uma latitude  $\theta(t)$  e uma longitude  $\varphi(t)$ , dessa forma a trajetória pode ser descrita por uma curva parametrizada,

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\cos \theta(t) \cdot \cos \varphi(t); \cos \theta(t) \cdot \text{sen} \varphi(t); \text{sen} \theta(t)), t \in [0, t_1]$$

sendo  $A = r(0)$  e  $B = r(t_1)$ .

Dessa forma fica claro que  $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta(t_1) = \theta_1$ ,  $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$  e  $\varphi(t_1) = \varphi_1$ . Essa curva parametrizada é diferenciável pois  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  possuem derivadas de todas as ordens para qualquer valor de  $t$  (as funções  $\text{sen}(t)$  e  $\text{cos}(t)$  são diferenciáveis). Aplicando as propriedades das derivadas de produtos e de senos e cossenos, determinamos que os vetores tangentes a essa curva são dados por

$$r'(t) = (x'(t); y'(t); z'(t))$$

sendo

$$x'(t) = -\text{sen} \theta(t) \cdot \cos \varphi(t) \cdot \theta'(t) - \cos \theta(t) \cdot \text{sen} \varphi(t) \cdot \varphi'(t)$$

$$y'(t) = -\text{sen} \theta(t) \cdot \text{sen} \varphi(t) \cdot \theta'(t) + \cos \theta(t) \cdot \cos \varphi(t) \cdot \varphi'(t)$$

$$z'(t) = \cos \theta(t) \cdot \theta'(t)$$

Portanto, utilizando propriedades algébricas dos senos e cossenos para simplificar as equações que surgem das expansões dos quadrados, temos

$$|r'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \sqrt{(\theta'(t))^2 + \cos^2 \theta(t) \cdot \varphi'(t)^2}.$$

Daí, como  $\cos^2 \theta(t) \cdot \varphi'(t)^2 \geq 0$ , temos

$$|r'(t)| = \sqrt{(\theta'(t))^2 + \cos^2 \theta(t) \cdot \varphi'(t)^2} \geq \sqrt{(\theta'(t))^2} = |\theta'(t)|$$

Agora fazendo o cálculo do comprimento da curva  $r(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , temos

$$C = \int_0^{t_1} |r'(t)| dt \geq - \int_0^{t_1} \theta'(t) dt = -[\theta(t_1) - \theta(0)] = \frac{\pi}{2} - \theta_1.$$

Já havíamos provado anteriormente que  $\frac{\pi}{2} - \theta_1$  é o comprimento do arco menor  $AB$  da circunferência máxima que passa por  $A$  e  $B$ , portanto acabamos de provar que o comprimento de qualquer curva  $r(t)$  conectando os pontos  $A$  e  $B$  pela superfície da esfera é maior ou igual do que o comprimento do arco menor  $AB$  da circunferência máxima que passa por  $A$  e  $B$ . Logo  $d(A, B)$  é esse comprimento. ■

Agora vamos ver um exemplo prático do cálculo da distância entre dois pontos numa superfície esférica.

**Exemplo 2:** Considere a Terra como uma superfície esférica de raio  $r = 6400\text{km}$  e centrada no ponto  $O(0, 0, 0)$ , no espaço  $\mathbb{R}^3$ . As cidades de Nova York e Nápoles estão praticamente sobre o mesmo paralelo, de aproximadamente  $\theta_1 = \frac{2\pi}{9}$ , e suas longitudes são aproximadamente  $\theta_1 = -\frac{5\pi}{12}$  e  $\varphi_2 = \frac{\pi}{12}$ , respectivamente.

Se  $A$  e  $B$  representam as cidades de Nova York e Nápoles, respectivamente, vejamos como calcular neste caso o comprimento do arco menor  $AB$  da circunferência máxima que passa por  $A$  e  $B$ , ou seja, como calcular a distância  $d(A, B)$ .

Das equações paramétricas da esfera temos os vetores

$$\begin{aligned} \vec{OA} &= 6400 \left( \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \left(-\frac{5\pi}{12}\right); \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \sin \left(-\frac{5\pi}{12}\right); \sin \frac{2\pi}{9} \right) \\ \vec{OB} &= 6400 \left( \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{12}; \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \sin \frac{\pi}{12}; \sin \frac{2\pi}{9} \right) \end{aligned}$$

Tomando aproximações da tabela trigonométrica para os senos e cossenos, temos,

$$\vec{OA} \cong 6400(0, 198; -0, 74; 0, 643)$$

$$\vec{OB} \cong 6400(0, 74; 0, 198; 0, 643)$$

O ângulo  $\alpha$  entre os vetores  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$  pode ser obtido utilizando o produto escalar entre eles, definido na álgebra linear por  $\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \cdot \cos \alpha$ .

Agora vamos lembrar que, por outro lado, dados dois vetores  $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$  e  $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$  temos  $\langle v, u \rangle = (v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2 + v_3 \cdot u_3)$ .

$$\text{Portanto } \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = 6400^2 \cdot (0, 147 - 0, 147 + 0, 413) = 6400^2 \cdot 0, 413.$$

Agora, como  $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = r = 6400$ , temos

$$6400^2 \cdot 0, 413 = 6400^2 \cdot \cos \alpha$$

Portanto  $\alpha = \frac{11\pi}{30}$ . Agora tomamos  $\alpha = \frac{11\pi}{30}$  como a medida do arco menor  $AB$  da circunferência máxima que passa por  $A$  e  $B$  e calculamos o comprimento desse arco, que será a distância entre  $A$  e  $B$  pela superfície da Terra,

$$\text{comp}(AB) = \frac{11\pi \cdot 6400}{30} \cong 7368, 53 \text{ km}.$$

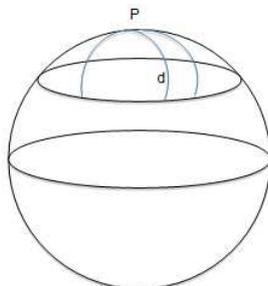
Na geometria da superfície esférica o caminho mínimo entre dois pontos é único, a menos no caso dos dois pontos serem diametralmente opostos, nesse caso existem infinitos desses caminhos, que são semicircunferências máximas da esfera. Por outro lado, as semicircunferências máximas da superfície esférica são um limitante para a distância entre dois pontos quaisquer da mesma, dessa forma temos que a distância  $d$  entre dois pontos nunca é maior do que  $\pi \cdot r$ , onde  $r$  é o raio dessa superfície.

### 3.5 Circunferência e mediatriz na geometria da superfície esférica

No capítulo 2, seções 2.3 e 2.4, discutimos as diferenças geométricas entre as circunferências e mediatrizes nas geometrias do taxista e euclidiana. Nessa seção vamos discutir esses lugares geométricos na geometria da superfície esférica, mantendo as suas definições. As demonstrações formais serão omitidas, pois requerem conhecimentos mais avançados sobre geometria diferencial, que fogem da proposta desse texto.

Dado um ponto  $P$  na superfície esférica de raio  $r$  e uma distância fixa  $d \leq \pi \cdot r$ , temos que o lugar geométrico dos pontos que distam  $d$  do ponto  $P$ , por essa superfície, é uma

circunferência menor (ver seção 3.2) da mesma, a menos do caso em que  $d = \frac{\pi \cdot r}{2}$ , pois nesse caso o lugar geométrico procurado será uma circunferência máxima. Por definição essa circunferência menor é uma circunferência de centro  $P$  e raio  $d$ , nessa superfície esférica.



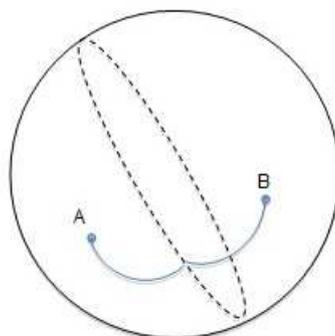
Tomando um ponto  $Q$  qualquer dessa circunferência, temos que  $d$  é o comprimento do menor arco  $PQ$ , determinado pelo centro da esfera. Determinando a medida desse arco, dada pela razão  $\frac{d}{r}$ , é possível identificar o posicionamento exato dessa circunferência na superfície esférica.

Notemos que a razão

$$M = \frac{\text{Comprimento da circunferência}}{\text{Diâmetro da circunferência}}$$

não será constante. De fato, tomando  $d = \frac{\pi \cdot r}{2}$ , a circunferência de centro  $P$  e raio  $d$  terá comprimento  $2\pi r$ , onde  $r$  é o raio da superfície esférica. Logo  $M = 2$ . Por outro lado, tomando  $d = \pi r$  a circunferência de centro  $P$  e raio  $d$  será o ponto antípoda ao ponto  $P$ . Assim  $M = 0$ .

Dados dois pontos  $A$  e  $B$  na superfície esférica de raio  $r$ , temos que o lugar geométrico dos pontos que são equidistantes de  $A$  e  $B$ , por essa superfície, é uma circunferência máxima.



Por definição essa circunferência máxima é a mediatriz do segmento  $AB$ , pela superfície esférica

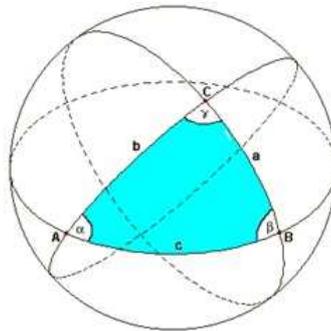
---

### 3.6 Excesso de um triângulo esférico

---

Na seção anterior vimos que as trajetórias que determinam a distância entre dois pontos na superfície esférica são arcos de circunferências máximas, portanto podemos fazer uma analogia da geometria da superfície esférica com a geometria euclidiana, na qual os arcos de circunferências máximas estão para os segmentos de reta assim como as circunferências maiores estão para as retas. Dessa forma é fácil ver que a geometria da superfície esférica é não euclidiana pois ela nega o conceito euclidiano de paralelismo, uma vez que quaisquer duas circunferências máximas possuem interseção.

Chamaremos de triângulo esférico o triângulo formado, na superfície esférica, por três arcos de circunferências máximas. A figura abaixo mostra um triângulo esférico  $ABC$ .

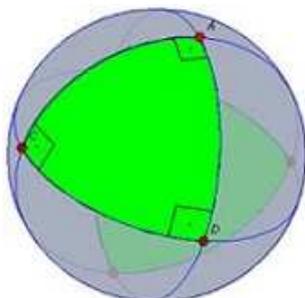


O vértice  $A$  é a interseção de duas circunferências máximas e o ângulo  $\alpha$  entre essas duas circunferências é definido como o ângulo entre os vetores tangentes a essas circunferências no ponto  $A$ . Os ângulos  $\beta$  e  $\gamma$  são definidos de forma análoga, nos pontos  $B$  e  $C$ .

O resultado que provaremos nessa seção diz respeito à soma dos ângulos internos de um triângulo esférico, que usualmente passa de  $180^\circ$  ou  $\pi$  radianos. A diferença entre a soma e o valor de  $\pi$  radianos é chamado de excesso esférico ou defeito do triângulo esférico. Esse excesso não é uma constante, porém é sempre proporcional à área do triângulo esférico, no caso da esfera unitária ele é exatamente igual a essa área.

**Exemplo 3:** Na figura abaixo temos um triângulo esférico com 3 ângulos retos, ou seja seu excesso esférico é de um ângulo reto ou  $\frac{\pi}{2}$  radianos.

A área desse triângulo ocupa exatamente um oitavo da área da esfera. Supondo a esfera unitária temos que sua área é de  $4\pi$  unidades de área. Portanto a área do triângulo é de  $\frac{\pi}{2}$  unidades de área, que é exatamente o excesso esférico desse triângulo.

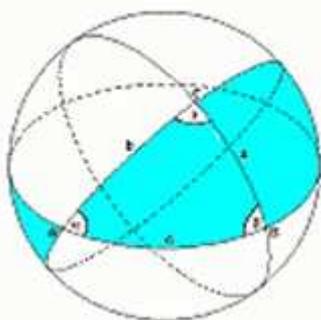


O teorema que garante essa propriedade do excesso esférico em qualquer superfície esférica é chamado de Teorema de Gauss Bonnet e sua demonstração pode ser encontrada em [4], que está nas referências deste trabalho. O Teorema de Gauss Bonnet é mais abrangente, garantindo propriedades semelhantes para triângulos em qualquer superfície regular.

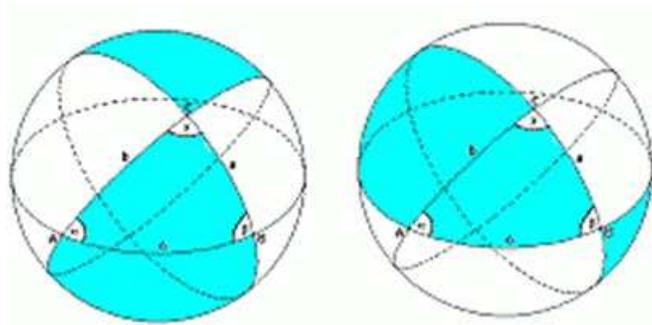
Para finalizar essa seção vamos dar uma demonstração geométrica, menos formal, para o caso específico de um triângulo esférico em uma superfície esférica unitária.

**Proposição 3.3.** *Sejam  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  os três ângulos internos de um triângulo esférico e  $\epsilon$  o excesso desse triângulo, então  $\epsilon$  é igual à área do triângulo.*

**Demonstração:** Temos que cada um dos ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  é formado por duas circunferências máximas. Cada par de circunferências máximas forma uma cinta na esfera. A figura a seguir mostra uma dessas cintas, gerada pelas circunferências que formam o ângulo  $\alpha$  entre si.



A área dessa cinta pode ser calculada por meio de uma regra de três simples na qual a sua área está para a área da superfície esférica assim como seu ângulo  $\alpha$  está para  $\pi$ . Resolvendo essa regra de três temos que a área dessa cinta vale  $4\alpha$ . Analogamente as áreas das outras cintas, que estão representadas nas figuras abaixo, são  $4\beta$  e  $4\gamma$ .



Agora, lançando mão das representações, é fácil ver que ao somar as áreas das 3 cintas teremos a área da superfície esférica completa e mais quatro vezes a área do triângulo esférico. Portanto, se  $A$  é a área do triângulo esférico, tem-se

$$4\alpha + 4\beta + 4\gamma = 4\pi + 4A,$$

daí  $(\alpha + \beta + \gamma) - \pi = A$ .

Portanto  $\epsilon = A$ . ■

Como dissemos no primeiro capítulo, Gauss foi o primeiro a perceber essa relação entre a soma dos ângulos de um triângulo em uma superfície de curvatura constante e sua área. A superfície esférica é uma superfície de curvatura constante positiva e resolvemos abordá-la pela sua aplicabilidade direta na realidade dos estudantes, sendo o planeta Terra aproximadamente uma superfície esférica, mas os resultados de Gauss e seus sucessores são mais abrangentes e podem ser generalizados, com as devidas modificações, para qualquer superfície de curvatura constante, mesmo negativa. Os livros de geometria diferencial citados nas referências tratam do assunto de forma mais geral.

## 3.7 A matemática do GPS

A sigla GPS nada mais é do que a abreviatura para Global Positioning System. Trata-se de uma "constelação" de vinte e quatro satélites, orbitando em torno da Terra a uma altura aproximada de 20.200 km acima do nível do mar, permitindo a receptores determinar a sua posição em qualquer lugar sobre a Terra com uma notável precisão. Os vinte e quatro satélites trafegam em torno da Terra em seis órbitas estáveis e pré-determinadas com quatro satélites em cada órbita. Os satélites percorrem uma órbita completa a cada 12 horas e cada satélite tem  $28^\circ$  de visualização sobre a Terra. Essa disposição logística é feita de forma a assegurar que todo ponto da superfície terrestre, em qualquer instante, esteja visualizado por pelo menos quatro satélites (vamos provar mais adiante a necessidade

dessa condição para o funcionamento do GPS).

O projeto do GPS foi iniciado em 1973 pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos com o propósito de que aeronaves e navios militares pudessem determinar sua posição com mais precisão, além de ajudar no lançamento de mísseis e na localização de tropas terrestres em movimento. Atualmente o GPS é utilizado por qualquer civil (muitas vezes com menos precisão do que os militares) e seus serviços podem ser utilizados até por meios de aplicativos de celular. Entre as principais aplicações do GPS no dia a dia destacamos:

- Roteirista de viagens: determinam além da sua posição dentro de uma cidade, quais as atrações e pontos turísticos mais próximos, hotéis, postos de emergências, etc.
- Monitoramento de abalos sísmicos: tais abalos são precedidos por alterações no campo gravitacional que distorcem as ondas de rádio permitindo, através do GPS, tentar prever a ocorrência de um terremoto com algumas horas de antecedência.
- Meteorologia: o GPS gera informações para a previsão da meteorologia, estudo do clima e outros campos de pesquisa relacionados.
- Localização para resgate: o serviço usa o GPS para guiar helicópteros de socorro até o lugar do acidente.
- Aplicações industriais: áreas infectadas por pestes são identificadas por fotografias aéreas e, com uso do GPS, um trator pode ser guiado para aplicações de pesticidas.
- Uso militar: coordenadas de ataque, orientação e controle para mísseis balísticos, marcação para artilharia, bombardeio de aeronaves, defesa aérea, rastreamento de submarinos, localização de minas e radares inimigos, atos terroristas, etc.

Com todas essas aplicações práticas o conhecimento matemático envolvido no funcionamento do GPS acaba sendo esquecido. Vamos explicar a seguir como ele funciona matematicamente e provar mais um teorema importante da geometria das superfícies esféricas, fundamental para seu funcionamento.

Cada um dos satélites do GPS transmite por rádio um padrão fixado que é recebido por um receptor na Terra funcionando como um cronômetro extremamente acurado. O receptor mede a diferença entre o tempo que o padrão é recebido e o tempo que foi emitido. Esta diferença, não mais do que um décimo de segundo, permite que o receptor calcule a sua distância ao satélite emissor multiplicando-se a velocidade do sinal ( aproximadamente  $2,99792458 \cdot 10^8$  m/s - a velocidade da luz ) pelo tempo que o sinal de rádio levou do satélite

ao receptor. Essa distância é tomada como sendo o raio de uma superfície esférica com centro no satélite, de forma que o receptor seja um ponto nessa superfície.

Cada satélite é programado para emitir o que se chama efeméride, que informa a sua posição exata, naquele instante, em relação a um sistema ortogonal de coordenadas como o descrito na seção anterior. Tal posição determina as coordenadas do centro da superfície esférica citada no paragrafo anterior. Com a efeméride do satélite e a distância em relação ao receptor obtém-se a equação geral dessa superfície esférica.

Coletando-se sinais emitidos por quatro satélites, o receptor determina a sua posição exata no sistema ortogonal pré definido, calculando-a como intersecção das quatro superfícies esféricas obtidas (se a intersecção não for vazia, será única). A localização é dada utilizando-se as coordenadas geográficas (latitude, longitude) e o raio, em relação à origem do sistema ortogonal.

Finalizamos a seção com o teorema que a garante o funcionamento do método descrito.

**Teorema 3.4.** *Se quatro superfícies esféricas se intersectam e seus centros são não coplanares então essa intersecção consiste de um único ponto.*

**Demonstração:** Sejam  $S_1, S_2, S_3$  e  $S_4$  superfícies esféricas de centros  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$ , respectivamente. Mostraremos que se  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$  e  $C_1, C_2, C_3, C_4$  são não coplanares então  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$  é um conjunto unitário.

Sendo  $x^2 + y^2 + z^2 + a_jx + b_jy + c_jz + d_j = 0$  a equação geral de  $S_j$ , onde  $j = 1, 2, 3, 4$ , ao subtrairmos essas equações duas a duas obtemos equações lineares em  $x, y$  e  $z$  uma vez que os termos  $x^2, y^2$  e  $z^2$  são eliminados.

Cada uma dessas equações lineares determina um plano que contém a correspondente intersecção. Por exemplo, subtraindo as equações de  $S_1$  e  $S_2$  obtem-se uma equação do plano que contém  $S_1 \cap S_2$ .

Considerando-se os planos que contém  $S_1 \cap S_2$ ,  $S_1 \cap S_3$  e  $S_1 \cap S_4$  temos que se  $P(x, y, z)$  está em  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$  então  $(x, y, z)$  é a solução do sistema linear

$$(*) \quad \begin{cases} (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + (d_1 - d_2) = 0 \\ (a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y + (c_1 - c_3)z + (d_1 - d_3) = 0 \\ (a_1 - a_4)x + (b_1 - b_4)y + (c_1 - c_4)z + (d_1 - d_4) = 0 \end{cases}$$

A prova do teorema estará terminada se mostrarmos que o sistema acima tem uma única solução pois a existência de dois pontos distintos em  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$  acarretariam duas soluções distintas do sistema linear.

Da álgebra linear, sabemos que provar que possui uma única solução é o mesmo que provar que a matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{bmatrix}$$

possui determinante não nulo.

Seja  $C_j = (u_j, v_j, w_j)$  o centro de  $S_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , completando quadrados temos  $a_j = -2u_j, b_j = -2v_j, c_j = -2w_j$ . Daí

$$8 \cdot \begin{bmatrix} u_2 - u_1 & v_2 - v_1 & w_2 - w_1 \\ u_3 - u_1 & v_3 - v_1 & w_3 - w_1 \\ u_4 - u_1 & v_4 - v_1 & w_4 - w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{bmatrix}$$

Como, por hipótese,  $C_1, C_2, C_3, C_4$  são não coplanares segue que o determinante da matriz a esquerda é não nulo e, portanto, (\*) é um sistema linear com determinante não nulo tendo assim uma única solução.

O fato do sistema linear (\*) ter uma única solução não acarreta necessariamente que a intersecção das quatro superfícies esféricas consiste de um único ponto. Porém como, por hipótese,  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$ , então o teorema é válido. ■

---

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Abreu L., Barroso, F., Miranda, D., Geometria Taxi: Uma Geometria Não Euclidiana Descomplicada. In. ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE OURO PRETO, 3., 2005. Ouro Preto. Anais... Ouro Preto: UFOP, 2005
- [2] Alves, S., A geometria do Globo Terrestre, <http://www.bienasbm.ufba.br/M29.pdf>
- [3] Braz, F.M., História da Geometria Hiperbólica, Dissertação de Especialização, Universidade Federal de Minas Gerais, 2009.
- [4] do Carmo, M. P., Geometria Diferencial de curvas e superfícies, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2005.
- [5] do Carmo, M.P., Geometrias não-Euclidianas, Revista Matemática Universitária, N. 6, 1987
- [6] Leal, A.P.S., A circunferência na geometria do taxista, Trabalho de conclusão de curso, Universidade Estadual de Goiás, 2011
- [7] Lima E.L., Álgebra Linear. Coleção Matemática Universitária. IMPA, 2008.
- [8] Lima, E.L., Espaços Métricos. Rio de Janeiro, IMPA 2003.
- [9] Miranda, D. F. - Geometria Táxi, uma métrica para os espaços geográficos e urbanos uma análise exploratória. Dissertação de Mestrado em Tratamento da Informação Espacial, Belo Horizonte, PUC-MG, 1999
- [10] Santos, A.R.S, Viglioni, H.H.B., Geometria Euclidiana Plana, Cursos do IMPA, 2011.

[11] Tesson, P., Taxicab Geometry. Disponível em <http://cgm.cs.mcgill.ca/~godfried/teaching/projects.pr.98/tesson/taxi/644project.html>; Acesso em: out. 2009.

Sites na internet

[www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/taxista.pdf?](http://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/taxista.pdf)

<http://www.ime.unicamp.br/~marcio/ss2011/ma770/cpxqtn/cq3.htm>