Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

A Abrangência das Permutações na Análise Combinatória

Daniel Ferreira Mendes

Brasília

2014

Daniel Ferreira Mendes

Abrangência das Permutações na Análise Combinatória

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rui Seimetz

Brasília

2014

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade de Brasília. Acervo 1016487.

Mendes, Daniel Ferreira.
M538a Abrangência das permutações na Análise Combinatória / Daniel Ferreira Mendes. -- 2014.
67 f. : il. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade de Brasília, Departamento de Matemática, Mestrado Profissionalizante em Matemática, 2014.
Inclui bibliografia.
Orientação: Rui Seimetz.

1. Análise combinatória. I. Seimetz, Rui. II. Título.

CDU 519.1

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

A Abrangência das Permutações na Análise Combinatória.

por

DANIEL FERREIRA MENDES*

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 06 de junho de 2014.

Comissão Examinadora:

Rui Seimetz

Prof. Dr. Rui Seimetz – MAT/UnB (Orientador)

Carlos A R Cunha

Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha – UFSJ/MG

Ary Vasconcelos Medino

Prof. Dr. Ary Vasconcelos Medino – MAT/UnB

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Daniel Ferreira Mendes graduou-se em Matemática pela Universidade de Brasília e atualmente é professor do Ensino Básico no Colégio Militar de Brasília.

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, em especial a meu pai, José Mário Mendes, e também a todos aqueles que de alguma maneira contribuíram para que eu pudesse obter tal nobre conquista.

Agradecimentos

A Deus por me sustentar nos momentos de dificuldades e por conduzir meus passos em minha vida profissional. Ele é quem me guia e quem me conduz.

Aos meus familiares, que ao longo de minha vida escolar e universitária, sempre me apoiaram nos momentos de fracasso e se alegraram nos momentos de alegria.

Ao meu filho Arthur Henrique e a minha esposa Lauriana pelo estímulo e pela compreensão de algumas ausências e de alguns estresses.

Aos companheiros de curso, em especial aos colegas de Colégio Militar de Brasília (Simões, Adriana, Murilo e Corés), pelos momentos de convívio e pelo apoio que facilitou o processo.

Ao professor, doutor e coordenador, Rui Seimetz, que aceitou prontamente ser meu orientador e que sempre esteve à disposição para ajudar a mim e a todos os discentes a atingirem seus objetivos com excelência.

Aos idealizadores, realizadores e professores do Profmat, que apoiaram esse projeto de incentivo, de capacitação e de valorização do professor de ensino médio, a fim de que ocorra uma melhoria na educação básica brasileira.

Por fim, à Capes, pelo suporte financeiro.

Resumo

Não somente as dificuldades encontradas com o ensino ou aprendizagem da Análise Combinatória foram determinantes para escolha do tema, mas também o fato desse assunto ser repleto de problemas capazes de desenvolver e aprimorar o raciocínio lógico dos alunos. Assim, objetivou-se, neste trabalho, desenvolver um material teórico compacto que apresentasse uma nova proposta didática, a fim de proporcionar uma maior segurança no lidar com os problemas de contagem. Com esse intuito, no capítulo 1, foi apresentada a fundamentação teórica necessária, com questões selecionadas e específicas de cada assunto, mostrando sempre que possível, as relações existentes entre os diversos conceitos e fórmulas. No capítulo 2, mostrou-se que as fórmulas de combinação e arranjo podem ser vistas como um resultado de algumas permutações simples e foi apresentada uma técnica envolvendo permutações, oferecendo, assim, um caminho alternativo e confirmativo na resolução de problemas. No capítulo 3, as permutações foram aplicadas na solução de Equações Lineares com Coeficientes Unitários e aos demais problemas correlatos. No capítulo 4, foi apresentada a Técnica do Princípio da Reflexão, a qual juntamente com as permutações com repetição, pode ser aplicada a determinados tipos de questões. No capítulo 5, apresentamos um trabalho sobre as Permutações Caóticas a fim de propiciar aos interessados um maior aprofundamento na Análise Combinatória. Por fim, no capítulo 6, foi proposta uma atividade pedagógica que o professor poderá utilizar para motivar seus alunos a resolver problemas de contagem por duas maneiras distintas, aplicando princípios ou fórmulas e por técnicas envolvendo permutações. Desta forma, espera-se que este trabalho, além de mostrar a importância e a abrangência das permutações na análise combinatória, promova um significativo crescimento na compreensão dos conceitos e na resolução de problemas de contagem.

Palavras-chave: combinatória, análise, contagem, permutações

Abstract

Not only the difficulties encountered with the teaching or learning of Combinatorial Analysis were decisive in choosing the theme, but also the fact that subject is fraught with problems able to develop and enhance logical reasoning students. Thus, the aim of this work, develop a compact theoretical material to submit a new proposal for teaching them provide greater safety in dealing with counting problems. With this purpose, in Chapter 1, was presented the necessary theoretical reasoning, with selected and specific questions of each subject, showing where possible the existing relations between the various concepts and formulas. In chapter 2, it was shown that the formulas for combination and arrangement can be seen as a result of some simple permutations and a technique involving permutations was presented, thus providing a path alternative and confirmative in solving problems. In chapter 3, the permutations were applied to the solution of Unitarians Coefficients Linear Equations and others related problems. In chapter 4, was presented the Reflection Principle Technique, which together with the permutations with repetition can be applied to certain types of questions. In Chapter 5, we present a study on the Chaotic Permutations to provide those interested a greater depth in the Combinatorial Analysis. Finally, in Chapter 6, we proposed a pedagogical activity that teachers can use to motivate your students to solve problems count by two different ways, applying principles or formulas and applying techniques involving permutations. Thus, it is expected that this work, in addition to showing the importance and scope of permutations in combinatorial analysis, promotes a significant growth in understanding concepts and solving problems counting.

Keywords: combinatorial, analysis , counting , permutations

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A importância da Análise Combinatória

A Análise Combinatória é o ramo da matemática que nos permite enumerar todas as possibilidades de que um evento aconteça, mesmo envolvendo grande quantidade de dados, sem a necessidade de contá-las uma a uma.

A História da Matemática em [10] mostra-nos que o desenvolvimento desta disciplina está diretamente relacionado à necessidade do homem em "contar". A primeira técnica matemática aprendida pelas crianças em seu contato inicial com a disciplina é a contagem, inicialmente, contando elementos de um conjunto e, em seguida, aprendendo as operações aritméticas com o mesmo intuito. A Análise Combinatória é uma extensão dessa necessidade, ela estabelece conceitos e técnicas que nos permitem a contagem em situações onde o conjunto de elementos apresenta uma grande quantidade de possibilidades.

Hoje em dia, a Análise Combinatória atua em diversos outros ramos e fornece fundamentação para a contagem de possibilidades de eventos do cotidiano. Ela é definida como um tópico da Matemática que permite resolver problemas em que é necessário "escolher", "arrumar", e, principalmente "contar"os objetos de um conjunto. É uma importante ferramenta que o cidadão, hoje inserido no mundo das informações e de novas tecnologias, dispõe para resolver problemas reais.

No Brasil, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio baseiam-se nos PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio), que são um documento que tem por objetivo nortear os educadores, apresentando propostas no que se refere às competências que devem ser desenvolvidas pelos alunos nos três últimos anos do ensino básico. De acordo com este documento em [1], espera-se que os alunos desenvolvam as seguintes habilidades:

- Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos.

- Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem.

- Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem.

Se conseguirmos desenvolver tais habilidades, teremos alunos não somente bem preparados para provas e avaliações, mas também com o raciocínio lógico e dedutivo mais aguçados, capazes de discernir e interpretar dados com mais clareza, proporcionando-lhes, desta forma, maiores chances de êxito no mercado de trabalho e uma vida melhor em vários aspectos.

A escolha do tema

Observando o ensino da matemática aos alunos do ensino médio em escolas públicas e privadas, percebe-se a dificuldade apresentada, tanto por parte dos alunos como por parte dos professores, em lidar com situações que envolvem conhecimentos combinatórios. Como exemplo, pode-se citar o relato de professores, que não passaram nos exames de acesso ao PROFMAT, argumentando que o fracasso se deu em função de problemas com a Análise Combinatória. Pode-se citar, também, o primeiro exame de qualificação da turma do PROFMAT de 2012, em que uma questão de contagem foi anulada em função do insignificante índice de acerto.

Segundo Dante [3]:

> A busca da solução de um problema que os desafia é mais dinâmica e motivadora do que a que segue o clássico esquema de explicar e repetir. O real prazer de estudar matemática está na satisfação que surge quando o aluno por si só resolve um problema. Quanto mais difícil, maior a satisfação em resolvê-lo. Um bom problema sucinta a curiosidade e desencadeia no aluno um comportamento de pesquisa, diminuindo sua passividade e conformismo.

Logo, em razão do exposto e em função da importância do tema para a vida de professores e alunos, e buscando inspiração nas obras de diversos autores, em especial na obra do Professor Augusto Cezar de Oliveira Morgado, nos propusemos a enfrentar o desafio de dissertar a respeito da Análise Combinatória, com o intuito de, humildemente, passar nossa experiência e, desta forma, contribuirmos para um aprofundamento e melhor entendimento do assunto.

Os objetivos

Dentre os objetivos deste trabalho, destacamos os seguintes:

- Desenvolver material teórico compacto para consulta e estudo por parte de professores e alunos, que desejam se aperfeiçoar no estudo da Análise Combinatória, com ênfase nas Permutações.
- Oferecer ao professor de Matemática uma proposta didática alternativa e complementar, a fim de proporcionar uma maior segurança no lidar com a Análise Combinatória.
- Oferecer ao professor de Matemática uma atividade pedagógica a fim de tornar as aulas mais construtivas, interessantes e produtivas.
- Munir o estudante de ferramentas e habilidades para atuar de forma ativa e eficiente na resolução de problemas de contagem.
- Mostrar que a maioria das questões relativas ao tema são referentes às permutações ou que podem ser resolvidas por técnicas envolvendo permutações.
- Não tem este trabalho o objetivo de trabalhar a Análise Combinatória sem o uso de fórmulas, pois em certos casos elas são fundamentais e convenientes.

Capítulo 1

Fundamentação Teórica e Aplicações

Neste capítulo, serão apresentados os conceitos fundamentais da Análise Combinatória de forma gradual e sequencial e serão resolvidas uma série de questões envolvendo os conceitos respectivos.

1.1 Princípios Fundamentais de Contagem

O cálculo combinatório baseia-se em dois princípios fundamentais, que são: o princípio aditivo e o princípio multiplicativo. Antes de se definir tais princípios, considere, por exemplo, uma lanchonete em que são vendidos três tipos de sanduíches e dois tipos de refrigerantes. Suponha que se queira saber de quantas maneiras uma pessoa pode escolher apenas um desses itens ou quantas são as opções para quem vai comer um sanduíche e beber um refrigerante.

Esses problemas ilustram, respectivamente, os dois **princípios fundamentais de contagem** : o **aditivo** e o **multiplicativo**.

Para responder a essas perguntas considere $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ o "conjunto de sanduíches" e $R = \{r_1, r_2\}$ o "conjunto de refrigerantes". Note que escolher apenas um desses itens significa escolher um elemento de S ou um elemento de R, o que pode ser feito de $3 + 2 = 5$ maneiras diferentes. A figura 1.1, denominado árvore de possibilidades, fornece um total de $3 \times 2 = 6$ possibilidades para que a pessoa escolha um sanduíche e um refrigerante.

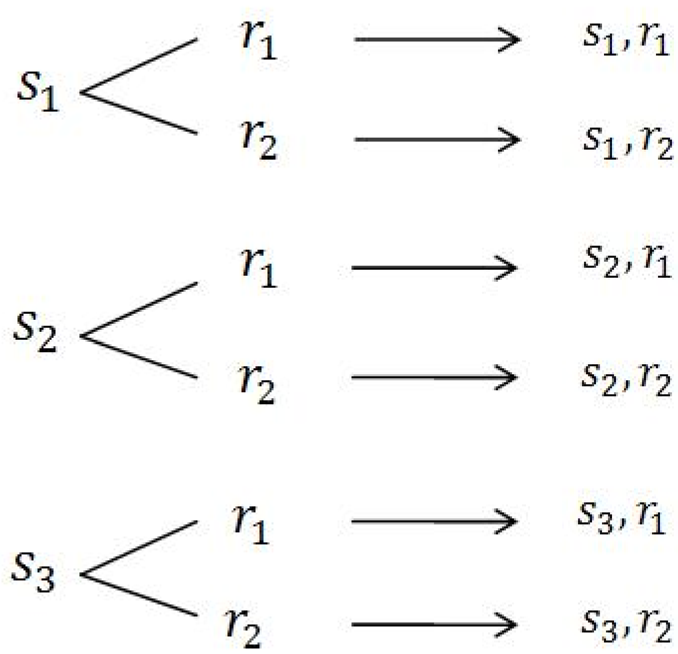

Figura 1.1: Árvore de possibilidades

Esses problemas ilustram, respectivamente, os dois princípios fundamentais de contagem: o aditivo e o multiplicativo. Generalizando, se A é um conjunto com m elementos e B é um conjunto com p elementos então temos:

- **Princípio Aditivo**: Para a escolha de um elemento de A ou um elemento de B existem $\mathbf{m+p}$ possibilidades. Neste caso, os conjuntos A e B devem ser disjuntos.

- **Princípio Multiplicativo**: Para a escolha de um elemento de A e um elemento de B existem $m \cdot p$ possibilidades.

Segundo o professor "Morgado", em [2], o **Princípio da Multiplicação ou Princípio Fundamental da Enumeração**, pode também ser enunciado da seguinte forma:

> Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras , então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é $x \cdot y$.

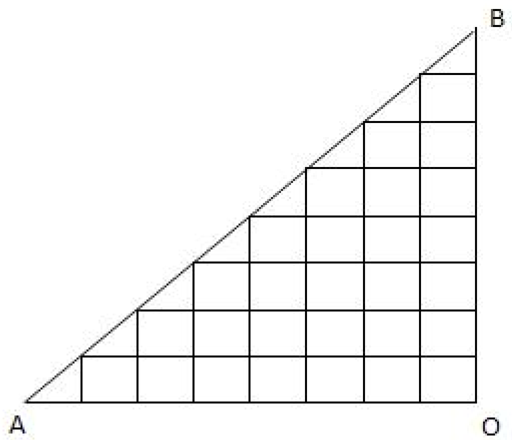

Figura 1.2: Quadriculado

Exemplificando na figura 1.2, pode-se aplicar o princípio multiplicativo para se determinar quantos caminhos diferentes há do ponto O para o segmento AB caminhando sempre para cima ou para a esquerda.

Observe que existem duas maneiras de tomar a primeira decisão, que é ir para cima ou para a esquerda. Tomando a primeira decisão, continua existindo duas maneiras de tomar a segunda decisão e assim sucessivamente. Como é necessário tomar oito decisões, então o total de caminhos distintos será de $2^8 = 256$.

Esses princípios podem ser aplicados a vários outros problemas do cotidiano, inclusive a outras áreas da matemática. Na **aritmética**, por exemplo, pode-se calcular o número de divisores em inteiros positivos de um número natural qualquer.

Como exemplo, vamos determinar quantos são os divisores inteiros e positivos do número 126.000. Inicialmente, fatorando o número N = 126.000, obtém-se $N = 2^4.3^2.5^3.7$. E se representar os divisores de N como números da forma $D = 2^x.3^y.5^z.7^w$, pode-se perceber que:

- x pode assumir os valores $0, 1, 2, 3, 4$ resultando em 5 possibilidades ;
- y pode assumir os valores $0, 1, 2$ resultando em 3 possibilidades ;
- z pode assumir os valores $0, 1, 2, 3$ resultando em 4 possibilidades;
- w pode assumir os valores $0, 1$ resultando em 2 possibilidades.

Então, pelo **princípio multiplicativo**, existem $5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 120$ divisores inteiros e positivos de N.

Pode-se, também, aplicar esse princípio para se determinar quantos subconjuntos distintos possui um conjunto A com "n" elementos. Analisando o que acontece com os elementos, em relação aos subconjuntos, pode-se dizer que cada um deles aparece ou não. Então para cada elemento de A, há duas possibilidades quanto a sua presença no subconjunto, aparecer ou não aparecer, e pelo fato do conjunto A ter "n" elementos, então A possui $2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2 = 2^n$ subconjuntos.

Os princípios fundamentais também podem ser aplicados a outras inúmeras situações. Alguns exemplos estão descritos abaixo.

Exemplo. Sabe-se que um tabuleiro de xadrez possui dezesseis casas dispostas em quatro linhas e em quatro colunas. De quantas maneiras diferentes é possível colocar quatro peças distintas neste tabuleiro de modo que, em cada linha e em cada coluna, seja colocada apenas uma peça?

Observe que há, nesse caso, quatro maneiras de tomar a primeira decisão, que é escolher uma casa da primeira linha do tabuleiro. Tomando a primeira decisão, há três maneiras de tomar a segunda decisão, que é escolher outra casa da segunda linha do tabuleiro e assim sucessivamente. Logo, existem $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras de se escolher as casas. Como as peças são diferentes, há quatro opções para a primeira casa, três para a segunda, duas para a terceira e apenas uma opção para a quarta casa. Logo, são $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras de se distribuir as peças nas 4 casas escolhidas. E, portanto, o total de disposições possíveis é de $24 \cdot 24 = 576$.

Observação: O professor "Morgado" deixa a recomendação de que se alguma decisão é mais complicada, ou restrita, que as demais, ela deve ser tomada em primeiro lugar.

Exemplo. Quantos números naturais de quatro algarismos distintos, que sejam menores que cinco mil e divisíveis por cinco, podem ser formados usando os algarismos do sistema decimal de numeração?

Deve-se verificar que a situação mais restrita é em relação ao último algarismo que só pode ser zero ou cinco.

Considerando que o número zero seja o último algarismo, há nove opções para o primeiro algarismo, oito opções para o segundo e sete opções para o terceiro, totalizando $9.8.7.1 = 504$ números. Agora, se considerarmos o número cinco como o último algarismo, teremos oito opções para o primeiro algarismo (pois um número não pode começar com o zero), oito opções para o segundo e sete opções para o terceiro, totalizando $8.8.7.1 = 448$ números. E, consequentemente, o total de números possíveis será igual a $504 + 448 = 952$.

Exemplo. De quantas maneiras podemos distribuir n objetos diferentes em duas caixas diferentes, de modo que nenhuma caixa fique vazia?

Nesse caso, cada objeto tem duas possibilidades de distribuição, ou vai para uma caixa ou para vai para a outra. Como são n objetos, então $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$ é o número de maneiras desses objetos serem distribuídos de maneira aleatória, incluindo a possibilidade de uma das caixas ficar vazia. E como são duas caixas, deve-se excluir os dois casos em que uma delas fica vazia. Portanto, há $2^n - 2$ maneiras de se distribuir n objetos diferentes em duas caixas diferentes, sem que nenhuma fique vazia.

Nessa mesma questão, caso se considere as caixas iguais e não diferentes, deve-se dividir a solução $2^n - 2$ por dois, pois percebe-se que para cada duas maneiras de se distribuir n objetos diferentes em duas caixas diferentes, há uma maneira de se distribuir os n objetos em duas caixas iguais. Portanto, basta tomar a metade dos casos obtidos na questão anterior e será encontrado o número de maneiras distintas de se distribuir n objetos diferentes em duas caixas iguais, sem que nenhuma fique vazia, que é de

$$\frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$$

Em relação ao **Princípio da Adição**, é importante ressaltar que ele é usado quando os conjuntos são disjuntos e caso os conjuntos não os sejam, deve-se aplicar o **Princípio da Inclusão-Exclusão**, que na sua versão mais simples afirma que, se houver dois conjuntos A e B, em que $n(X)$ é o número de elementos de um conjunto X, então :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Veja a situação em que $A \cup B$ é representado por três regiões distintas, cujos números de elementos são iguais, respectivamente, a x, y e z.

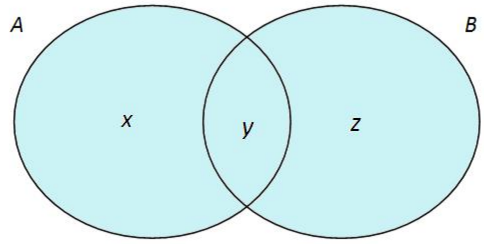

Figura 1.3: Diagrama de Venn

Tem-se, nessa situação que:

$$n(A \cup B) = (x + y) + (y + z) - (y) = x + y + z$$

Portanto, deve-se subtrair o número de elementos da interseção, pois quando se conta o número de elementos de $A \cup B$, conta-se todos os elementos de A e todos os de B e ao se fazer isso, conta-se duas vezes o número de elementos de $A \cap B$.

Para três conjuntos A, B e C, o **Princípio da Inclusão-Exclusão** afirma que:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cup B \cup C)$$

Veja a situação em que $A \cup B$ é representado por sete regiões distintas, cujos números de elementos são iguais, respectivamente, a k, l, m, x, y, w e z.

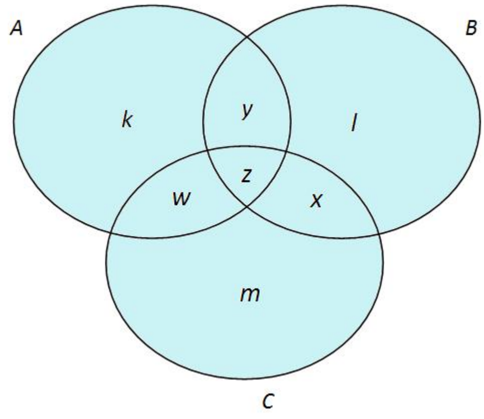

Figura 1.4: Diagrama de Venn

Tem-se, nessa situação que:

$$n(A \cup B \cup C) = (k + y + z + w) + (l + y + x + z) + (m + x + w + z)$$
$$-(y + z) - (w + z) - (x + z) + (z) = k + l + m + x + y + w + z.$$

Em geral, o número de elementos da união é obtido somando o número de elementos de cada conjunto, subtraindo os números de elementos das interseções dois a dois, somando os das interseções três a três, subtraindo os das interseções quatro a quatro, e assim sucessivamente.

Esse **Princípio da Inclusão-Exclusão** é bastante aplicado na obtenção da quantidade de múltiplos em inteiros positivos de um número inteiro positivo qualquer. Exemplificando:

Exemplo. Quantos são os inteiros múltiplos de dois ou três compreendidos entre um a cem mil?

Sabe-se que, de um a cem mil, existem 50.000 números múltiplos de dois, 33.333 múltiplos de três e 16.666 múltiplos de seis. Logo, há $50.000 + 33.333 - 16.666 = 66.667$ inteiros múltiplos de dois ou três compreendidos entre um a cem mil.

Mas, pode-se também aplicar o referido Princípio a outras questões não numéricas, como na obtenção de anagramas.

Exemplo. Quantos são os anagramas da palavra $DANIEL$ que têm D em 1º lugar, ou A em 2º lugar, ou N em 3º lugar ou I em 4º lugar?

Considere inicialmente:
X = conjunto dos anagramas de $DANIEL$ que têm D em 1º lugar;
Y = conjunto dos anagramas de $DANIEL$ que têm A em 2º lugar;
Z = conjunto dos anagramas de $DANIEL$ que têm N em 3º lugar;
W = conjunto dos anagramas de $DANIEL$ que têm I em 4º lugar;

Daí, tem-se:

- $n(X) = n(Y) = n(Z) = n(W) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

- $n(X \cap Y) = n(X \cap Z) = n(X \cap W) = n(Y \cap Z) = n(Y \cap W) = n(Z \cap W) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

- $n(X \cap Y \cap Z) = n(X \cap Y \cap W) = n(X \cap Z \cap W) = n(Y \cap Z \cap W) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

- $n(X \cap Y \cap Z \cap W) = 2 \cdot 1 = 2$

Assim, pelo **Princípio da Inclusão-Exclusão**, $n(X \cup Y \cup Z \cup W) = (4 \times 120) - (6 \times 24) + (4 \times 6) - (2) = 358$. Esse é o total de anagramas desejados.

1.2 Permutações Simples

Permutação simples de n elementos são sequências que podem se formar com n desses elementos, tais que essas sequências diferem uma da outra apenas pela ordem de seus elementos.

O número de modos de ordenar n objetos distintos é:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 = n!$$

Definimos $P_0 = 0! = 1$.

Observe que a fórmula de permutação simples, nada mais é do que uma simples aplicação do **princípio multiplicativo**, pois para se formar uma sequência e diante de n objetos, há n possibilidades para se escolher o primeiro elemento, $n-1$ possibilidades para se escolher o segundo, $n-2$ possibilidades para se escolher o terceiro, e assim sucessivamente, até termos apenas uma possibilidade para se escolher o último elemento.

As permutações são extremamente importantes e aparecem com muita frequência em questões de análise combinatória, vejamos:

Exemplo. Se as permutações das letras da palavra PROVA forem listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de cinco letras em um dicionário, qual seria a septuagésima terceira palavra dessa lista?

Observe que o total de anagramas da palavra PROVA é $P_5 = 5! = 120$. Dividindo cento e vinte por cinco, conclui-se que do total de anagramas, vinte e quatro começam com a letra A, vinte e quatro começam com a letra O, vinte e quatro começam com a letra P, totalizando setenta e dois anagramas em ordem alfabética. Logo, a septuagésima terceira palavra dessa lista é $RAOPV$.

Exemplo. De quantas maneiras três pessoas podem se sentar em uma fileira com seis cadeiras vazias de modo que, entre duas pessoas próximas ou seguidas, sempre tenha uma cadeira vazia?

Representando as três pessoas por A, B e C e as sequência de cadeiras por quadrados, numerados de 1 a 6 da esquerda para direita, tem-se dois exemplos de fileiras possíveis:

1	2	3	4	5	6
A		C		B	
	B		A		C

Figura 1.5: Tabela

Observe que antes de se distribuir as pessoas, deve-se escolher a sequência de cadeiras e para isso, há apenas duas possibilidades: escolher as de número par ou as ímpares. Escolhida as cadeiras, basta distribuir as três pessoas e calcular o número de permutações possíveis, que é de $3! = 6$. Logo, a resposta é de $2.6 = 12$ situações possíveis.

Exemplo. Num tribunal, dez réus devem ser julgados isoladamente num mesmo dia: três paulistas, dois mineiros, três gaúchos e dois baianos. Determine o número de formas de não se julgar consecutivamente três paulistas.

O total de formas de se julgar os dez réus é igual ao total de sequências possíveis que é de $10!$; o total de sequências em que os três paulistas estão juntos numa determinada ordem é de $7!$ (neste caso, consideramos os três paulistas como uma única pessoa) e o total de sequências em que os três paulistas estão juntos em qualquer ordem é de $7!3!$ (neste caso, consideramos os três paulistas como uma única pessoa e depois permutamos os três). Logo, **por exclusão**, temos que o número de formas de não se julgar consecutivamente três paulistas é de $10! \cdot 7! \cdot 3!$. Essa questão ilustra que muitas vezes é mais prático resolver o problema pelo **evento complementar**.

Podemos também aplicar as permutações simples para se chegar à fórmula de permutação circular, como será visto no tópico seguinte.

1.3 Permutações Circulares

De quantos modos podemos colocar n objetos distintos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo, se considerarmos equivalentes as disposições que possam coincidir por rotação?

A resposta desse problema será representada por $(PC)_n$, o número de permutações circulares de n objetos distintos. É fácil ver que $(PC)_n$ é diferente de P_n. Por exemplo, no caso de $n = 3$ tem-se $P_3 = 3! = 6$ formas distintas de colocar três objetos distintos em três lugares. Agora, no caso de permutação circular, tem-se:

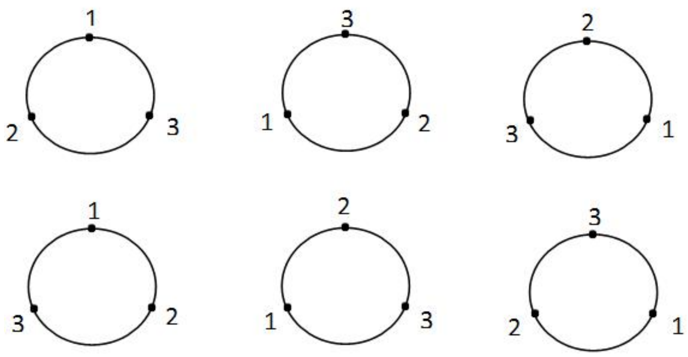

Figura 1.6: Diagrama

No entanto, as três primeiras disposições são coincidentes entre si por rotação e o mesmo ocorre com as três últimas, de modo que $(PC)_3 = 2$.

Observe que nas **permutações simples** importam os lugares que os objetos ocupam ao passo que nas permutações circulares o que importa é apenas a posição relativa dos objetos entre si. Nas três primeiras figuras, olhando os círculos em sentido anti-horário, o número um precede o número dois, que precede o número três, que precede o número um; portanto, a posição relativa entre os objetos é a mesma. E o mesmo ocorre nas três últimas figuras. Generalizando o raciocínio, tem-se que:

$$(PC)_n = (n-1)!$$

Pode-se verificar que tal fórmula é verdade por dois modos diferentes:

- Se não considerar equivalentes as disposições que possam coincidir por rotação, há $n!$ disposições. Considerando a equivalência, cada permutação circular é gerada por n disposições. Logo,

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

- Como o que importa é a disposição relativa entre os objetos, há um modo de colocar o primeiro objeto no círculo; há um modo de colocar o segundo (imediatamente após o primeiro); há dois modos de colocar o terceiro (imediatamente após o primeiro ou imediatamente após o segundo); há três modos de colocar o quarto (imediatamente após o primeiro ou imediatamente após o segundo ou imediatamente após o terceiro) e, $\cdots$, há $n-1$ modos de colocar o n-ésimo e último objeto. Logo,

$$(PC)_n = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) = (n-1)!$$

Exemplo. De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com sete crianças, de modo que duas delas não fiquem juntas?

Nesse caso, podem ser formadas $(PC)_5 = 4! = 24$ rodas de ciranda com as outras cinco crianças que não têm restrição. Denotando as crianças que não podem ficar juntas por A e B, há cinco modos de colocar a criança A na roda e depois quatro modos de colocar a criança B de modo que ela não fique junta de A. Assim, o total de maneiras possíveis é igual a $24 \times 5 \times 4 = 480$ rodas.

Exemplo. De quantos modos se pode formar uma roda de ciranda com cinco mulheres e seis homens, de modo que as mulheres fiquem juntas?

Considerando as cinco mulheres juntas como uma só, haverá sete pessoas diferentes e serão encontradas $(PC)_7 = 6! = 720$ rodas distintas. Como o total de maneiras de se permutar as mulheres entre si é de $P_5 = 5! = 120$, então o total de maneiras de se formar essas rodas de acordo com o comando da questão é de $720 \times 120 = 86.400$.

Outra solução: existem $(PC)_6 = 5! = 120$ modos distintos de se formar a roda com os homens. Formada uma roda, haverá seis modos de colocarmos todas as mulheres juntas entre os homens, pois são seis espaços entre eles. Finalmente, bastará permutar as cinco mulheres entre si, o que resultará em $5! = 120$ disposições diferentes entre elas. E, assim, o total de formas será de $120 \times 6 \times 120 = 86.400$.

Note que, mesmo em questões de **permutações circulares**, podemos usar **permutações simples e os princípios fundamentais** e isso ocorrerá também nos tópicos seguintes em que serão estudados os arranjos, as combinações e as permutações com repetições.

1.4 Arranjos Simples

Dado um conjunto A, com n elementos, chamamos de arranjo simples dos n elementos, tomados p a p, cada um dos agrupamentos ordenados que podem ser formados, contendo, sem repetição, p elementos de A. O número de arranjos simples pode ser obtido pela fórmula:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

em que $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$ e $n \geq p$.

Veja que essa fórmula é apenas uma aplicação do **Princípio Multiplicativo**, visto que para se formar uma sequência ordenada de p elementos, há n maneiras de se escolher o primeiro elemento, $n-1$ maneiras de se escolher o segundo, $n-2$ maneiras de se escolher o terceiro até se ter $(n-(p-1))$ maneiras de se escolher o p-enésimo elemento. E pelo princípio multiplicativo, as p posições poderão ser preenchidas sucessivamente de $n(n-1)(n-2)\cdots(n-(p-1))$ maneiras distintas. Assim:

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-(p-1)) = \frac{n(n-1)\cdots(n-(p-1))(n-p)!}{(n-p)!} = A_{n,p}$$

Exemplificando, se em uma prova final de natação, da qual participarão n atletas, com $n \geq 3$, serão distribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze para os primeiro, segundo e terceiro colocados, respectivamente, então o número possível de maneiras de se distribuírem essas medalhas é de:

$$A_{n,3} = n(n-1)(n-2).$$

Mas, é evidente que, pelo **princípio multiplicativo**, tem-se $n(n-1)(n-2)$ maneiras de se distribuir essas medalhas, pois temos n maneiras de se escolher o primeiro nadador, $n-1$ maneiras de se escolher o segundo e $n-2$ maneiras de se escolher o terceiro, aos quais serão atribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze, respectivamente.

Apesar da fórmula decorrer diretamente do **Princípio Multiplicativo** e ser desnecessária em muitos casos, há problemas em que ela é bastante conveniente.

Exemplo. Em um campeonato de futebol, todos os times jogam entre si. Sabendo-se que cada time joga exatamente duas vezes com qualquer outro e que houve oitocentos e setenta partidas no total, então determine a quantidade de times que participam desse torneio.

Se AB e BA representamos dois jogos entre dois times quaisquer e se a quantidade de times for igual a n, então:

$$A_{n,2} = \frac{n!}{(n-2)!} = 870,$$

o que resulta em $n = 30$. Logo, há trinta times participando desse torneio.

Considere, agora, uma reta r e, sobre ela, um segmento de reta AB. Ao se admitir um sentido para AB, por exemplo, de A para B, caracteriza-se um segmento orientado AB. No segmento orientado AB o ponto A é denominado origem e o ponto B, extremidade. Ou seja, o segmento se inicia no ponto A e termina no ponto B. Por outro lado, no segmento orientado BA, o segmento se inicia no ponto B e termina no ponto A.

Exemplo. Para obtermos a quantidade de segmentos orientados formados por quaisquer dois pontos dentre os n pontos distintos marcados sobre um círculo, devemos calcular de quantos modos se pode escolher dois desses pontos, considerando a ordem entre eles o que resultará em um problema de arranjo simples. Assim, o total de segmentos orientados será igual a:

$$A_{n,2} = \frac{n!}{(n-2)!}$$

Visto o que é arranjo simples, será visto no tópico seguinte o que é arranjo com repetição.

1.5 Arranjos com Repetição

Dado um conjunto A, com n elementos, chamamos de arranjo com repetição dos n elementos, tomados p a p, cada um dos agrupamentos ordenados que podem ser formados, contendo, com ou sem repetição, p elementos de A. O número de arranjos com repetição é dado pela fórmula:

$$A_{n,p} = n^p$$

uma vez que o primeiro elemento pode ser tomado de n maneiras, o segundo também de n maneiras, e assim sucessivamente.

Note que a fórmula do arranjo com repetição também é uma simples aplicação do **Princípio Multiplicativo** e sua fórmula não tem muita relevância, pois as questões envolvendo arranjos com repetição se resolvem aplicando diretamente o referido princípio. Não obstante, consideramos importante o conceito de arranjo com repetição e veremos pelo menos uma aplicação.

Exemplo. Uma prova é constituída de dez questões de múltipla escolha em que cada questão possui cinco alternativas cada. Quantos alunos devem fazer a prova para garantir que pelo menos dois deles marcaram todas as questões da mesma forma? Considere que apenas uma única alternativa é escolhida em cada questão.

Como há cinco formas de marcar a primeira questão, cinco formas de marcar a segunda, cinco formas de marcar a terceira e assim sucessivamente, então haverá:

$$A_{5,10} = 5^{10}$$

gabaritos distintos e pelo "**Princípio de Dirichlet**" será preciso $5^{10}+1$ alunos para se garantir que haverá pelo menos dois gabaritos iguais.

O **Princípio das gavetas** de Dirichlet afirma que: Se $n+1$ objetos forem colocados em no máximo n gavetas, então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos. Isso é verdade, pois se cada uma das gavetas contiver, no máximo, um objeto, o número total de objetos será, no máximo, igual a n, o que é um absurdo.

A análise combinatória não se ocupa apenas com a contagem de elementos de conjuntos. Muitas vezes, o que se deseja é determinar a existência ou não de conjuntos satisfazendo a certas propriedades. E, uma ferramenta simples para se resolver alguns desses problemas é o **Princípio** acima, conhecido também como "**Princípio das casas de pombos**".

Serão estudas nos tópicos a seguir as combinações, seus conceitos e suas fórmulas, as quais também decorrerão do **Princípio Multiplicativo**.

1.6 Combinações Simples

Dado um conjunto A, com n elementos, chamamos de **combinação simples** dos n elementos, tomados p a p, cada um dos subconjuntos que podem ser formados, contendo, cada um, p elementos de A. O número de combinações simples pode ser obtido pela fórmula:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

em que $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ e $n \geq p$.

Note que a fórmula da combinação é a fórmula do arranjo dividida pela permutação dos p elementos e que a fórmula do arranjo é a fórmula da combinação multiplicada pela permutação dos p elementos.

Então, se em uma questão envolvendo arranjo, em que a ordem dos elementos deve ser considerada, for usada equivocadamente a combinação, basta permutamos os elementos para corrigir o erro. Por sua vez, se em uma questão envolvendo combinação, em que a ordem dos elementos não deve ser considerada, for usado equivocadamente o arranjo, basta dividirmos o resultado pela permutação dos elementos para se reparar o erro. Ou seja:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} \qquad ou \qquad p!C_{n,p} = A_{n,p}$$

O conceito de combinação e sua fórmula são extremamente importantes na análise combinatória, pois são frequentemente aplicados a vários problemas.

Pode-se calcular, por exemplo, quantas diagonais possui um polígono de n lados usando combinação, pois um polígono de n lados possui também n vértices e para cada dois vértices escolhidos, independentemente da ordem entre eles, haverá uma diagonal ou um lado do polígono. Logo, o total de diagonais (D) do polígono será igual a:

$$D = C_{n,2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

Pode-se também, **por combinação**, verificar de quantas maneiras é possível escolher três números distintos de um conjunto $A = \{1, 2, 3, \cdots, 50\}$ de modo que sua soma seja um múltiplo de três. E com esse objetivo, considere os conjuntos:

$$\begin{aligned} X &= \{x \in A \; / \; x = 3k, k = 1, 2, \cdots\} = \{3, 6, 9, \cdots, 48\} \\ Y &= \{y \in A \; / \; y = 3k + 1, k = 1, 2, \cdots\} = \{1, 4, 7, 10, \cdots, 49\} \\ Z &= \{z \in A \; / \; z = 3k + 2, k = 1, 2, \cdots\} = \{2, 5, 8, 11, \cdots, 50\} \end{aligned}$$

Temos, neste caso, que o número de elementos de X é dezesseis, o de Y é dezessete e o de Z também é dezessete. Se somarmos quaisquer três elementos de X teremos como soma um múltiplo de três e isso pode ser feito de $C_{16,3} = 560$ maneiras. Se somarmos quaisquer três elementos de Y teremos como soma um múltiplo de três e isso pode ser feito de $C_{17,3} = 680$ maneiras e o mesmo ocorre se somarmos três elementos de Z.

Agora, se somarmos um elemento de X com um elemento de Y com um elemento de Z, obteremos como soma também um múltiplo de três e isso pode ser feito de $16 \times 17 \times 17 = 4.624$ maneiras distintas. Logo, o total de maneiras possíveis de se escolher três números distintos do conjunto A de modo que sua soma seja um múltiplo de três é igual a $560 + 680 + 680 + 4624 = 6.544$.

Com as combinações, pode-se, também, determinar de quantos modos é possível formar subconjuntos de p elementos de um conjunto $A = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ nos quais não haja números consecutivos.

Para resolver essa questão, iremos primeiramente restringir os dados e tomar $n = 5$ e $p = 2$. Ou seja, primeiro vamos calcular de quantos modos, dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, é possível formar subconjuntos de dois elementos nos quais não haja elementos consecutivos. Nesse caso, os subconjuntos possíveis são:

$$\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}.$$

Marcando com o sinal positivo $(+)$ os elementos que farão parte do subconjunto e com sinal negativo $(-)$ os elementos que não farão parte do subconjunto, temos:

- $\{1, 3\}$ pode ser representado por $+ - + - -$
- $\{2, 5\}$ pode ser representado por $- + - - +$
- $\{1, 2\}$ pode ser representado por $+ + - - -$

Observe que para formar um subconjunto com dois elementos não consecutivos devemos colocar três sinais $(-)$ e dois sinais $(+)$, sem que haja dois sinais $(+)$ consecutivos. Isto é obtido dispondo em fila os três sinais $(-)$ e deixando espaços entre eles, onde eventualmente serão colocados os dois sinais $(+)$. Como são três sinais $(-)$, então há quatro espaços entre eles, dos quais dois serão escolhidos. Como temos $C_{4,2} = 6$ formas de se escolher esses espaços, então existem seis subconjuntos formandos por dois elementos não consecutivos de A.

Generalizando e de maneira análoga, para se formar subconjuntos contendo p números não consecutivos do conjunto A, devemos tomar p sinais $(+)$ e $n - p$ sinais $(-)$.Dispondo em fila os $n - p$ sinais $(-)$, haverá $n - p + 1$ espaços em que se poderá colocar os p sinais $(+)$. Deverá então ser feita uma escolha de p espaços dentre os $n - p + 1$ espaços disponíveis. Como temos $C_{n-p+1,p}$ formas de se escolher esses espaços, então existem $C_{n-p+1,p}$ subconjuntos formados por p elementos não consecutivos de A. Este exemplo é conhecido como o " **Primeiro Lema de Kaplansky**".

Os Lemas de Kaplansky foram construídos em 1943 pelo matemático canadense-americano Irving Kaplansky para resolução do chamado "**Problema de Lucas**". Ao leitor interessado em conhecer melhor o assunto, sugerimos o livro [2].

1.7 Combinações Completas

Dado um conjunto A, com n elementos, chamamos de **combinação completa** ou **combinação com repetição** dos n elementos, tomados p a p, cada um dos grupos que podem ser formados, contendo, com ou sem repetição, p elementos de A. O número de combinações completas pode ser obtido pela fórmula:

$$CR_{n,p} = C_{n+p-1,p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Essa fórmula será demonstrada no capítulo seguinte, visto que o número de combinações completas é igual ao número de soluções inteiras não negativas de uma equação linear de coeficientes unitários da forma:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n = p$$

Como essas **equações lineares de coeficientes unitários** serão resolvidas por permutação, percebe-se que haverá dois caminhos para se resolver questões envolvendo combinações completas. Exemplificando, resolveremos algumas questões a seguir utilizando a fórmula de $CR_{n,p}$.

Exemplo. De quantas maneiras distintas uma empresa pode adquirir três automóveis, que deverão ser escolhidos entre quatro marcas diferentes?

O número de maneiras de se fazer essa compra é igual ao número de combinações completas de quatro marcas distintas tomadas três a três, não necessariamente distintas. Logo, temos $CR_{4,3} = C_{6,3} = 20$. Esse é o número de maneiras distintas de se fazer essa compra de acordo com o comando da questão.

Exemplo. De quantos modos diferentes podemos distribuir dez bombons idênticos em quatro caixas diferentes?

A fim de se tornar mais didático, podemos mudar o enunciado da questão para o seguinte: De quantos modos diferentes podemos comprar dez bombons escolhidos dentre quatro tipos diferentes? A resposta de ambas será a mesma e igual a

$CR_{4,10} = C_{13,10} = 286$ modos diferentes.

Exemplo. Dispondo de quatro cores diferentes, de quantas maneiras distintas podemos pintar cinco objetos idênticos de modo que cada objeto deve ser pintado de uma única cor?

É preciso decidir apenas quantas vezes cada cor pode ser utilizada, e isto é igual a $CR_{4,5} = C_{8,5} = 56$. Logo, há cinquenta e seis maneiras distintas de se pintar cinco objetos idênticos de modo que cada objeto tenha uma única cor.

É lamentável que esse assunto praticamente não seja mais abordado nas escolas de ensino médio, pois as questões de combinações completas são extremamente interessantes e capazes de proporcionar um ótimo desenvolvimento cognitivo dos alunos.

E para finalizar este capítulo de fundamentação teórica, será abordado, no tópico seguinte, um assunto de grande relevância neste trabalho, que são as permutações com repetição.

1.8 Permutações com Repetição

No tópico 1.2 foi apresentada a definição de **permutações simples** de n elementos, que é o número de maneiras distintas de se colocar em fila n elementos distintos. Como consequência imediata do **princípio multiplicativo**, concluiu-se que esse número é igual a:

$$n!$$

Considere agora o caso em que, dos n elementos existentes, n_1 elementos são iguais a um tipo 1, n_2 elementos são iguais a um tipo 2, $\cdots, n_r$ elementos são iguais a um tipo r, tais que:

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$$

Neste caso, se desejarmos colocar os n elementos em fila, teremos C_{n,n_1} maneiras de se escolher os n_1 lugares para se colocar os elementos tipo 1, teremos C_{n-n_1,n_2} maneiras de se escolher os n_2 lugares para se colocar os elementos tipo 2 e assim sucessivamente até termos $C_{n-n_1-\cdots-n_{r-1},n_r}$ maneiras de se escolher os n_r lugares para se colocar os elementos tipo r. E assim será obtida a **fórmula geral** das permutações $P_n^{n_1,n_2,\cdots,n_r}$ de n elementos com repetição $n_1, n_2, \cdots, n_r$:

$$C_{n,n_1}C_{n-n_1,n_2}\dots C_{n-n_1-\dots-n_{r-1},n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdot\ldots\cdot n_r!} = P_n^{n_1,n_2,\dots,n_r}$$

Ilustrando a obtenção da fórmula geral com um exemplo particular, será contado o número de maneiras de se colocar em fila sete letras, sendo três letras a, duas letras b e duas letras c. Vejamos a seguir algumas possibilidades:

$$aaabbcc, aabbacc, acbbaac, cbbaaac, cabacaa, \cdots$$

Temos, portanto, sete lugares e devemos escolher três lugares para neles serem colocadas as letras $a's$, dois lugares para serem colocados os dois $b's$ e dois lugares para serem colocados os dois $c's$.

Podemos escolher os três lugares para os $a's$ de $C_{7,3}$ maneiras diferentes. Feito isto, temos $C_{4,2}$ maneiras diferentes para se escolher os lugares dos dois $b's$ e $C_{2,2} = 1$ maneira de se colocar os dois $c's$. E, pelo princípio multiplicativo, o produto desses números nos dá o total de possibilidades, que é de:

$$C_{7,3}C_{4,2}C_{2,2} = \frac{7!4!}{3!4!2!2!} = \frac{7!}{3!2!2!} = P_7^{3,2,2} = 210$$

É importante destacar que, apesar da fórmula de permutação com repetição ter sido deduzida a partir de combinações, ela pode ser vista também como meras aplicações de permutações simples, pois basta permutarmos todos os elementos como se não houvesse repetições e depois dividir o resultado pelas permutações das repetições e, assim, chegaremos a ela:

$$P_n^{n_1,n_2,\cdots,n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

Exemplo. Se um time de futebol jogou treze partidas em um campeonato, tendo perdido cinco delas, empatado duas e vencido seis, de quantos modos isso pode ter ocorrido ?

Associando as letras D à derrota, E à empate e V à vitória, a sequência

$$DEDVVVVEVVDDD$$

nos mostra uma situação possível. E para se encontrar todas as situações possíveis basta se permutar essas treze letras, o que resultará em $P_{13}^{5,2,6} = \dfrac{13!}{5!2!6!} = 36.036$ maneiras distintas.

Exemplo. Quantos números de sete dígitos, maiores que 6000000, podem ser formados usando apenas os algarismos $1, 3, 6, 6, 6, 8, 8$?

Como há $P_6^{2,2,1,1} = \dfrac{6!}{2!2!1!1!} = 180$ números começados pelo algarismo 6 e $P_6^{3,1,1,1} = \dfrac{6!}{3!1!1!1!} = 120$ números começados pelo algarismo 8, então há $180 + 120 = 300$ conforme o enunciado.

Exemplo. De quantas maneiras as letras da palavra INDIVISIBILIDADE podem ser permutadas de modo que duas letras I's nunca fiquem juntas?

Retirando as letras I's , ficamos com a sequência de letras $NDVSBLDADE$. Como são dez letras, com repetição de três letras D, temos, nesse caso, $\frac{10!}{3!} = 604.800$ anagramas distintos.

Como não pode haver letras I's juntas, devemos colocá-las entre as letras preexistentes $(-N-D-V-S-B-L-D-A-D-E-)$ ou numa das duas extremidades. Assim, como são onze os 'espaços' a serem ocupados, temos $C_{11,6} = 462$ maneiras de se colocarem as letras I's nos mesmos.

Logo, aplicando o **princípio multiplicativo**, temos $604.800 \times 462 = 279.417.600$ possibilidades conforme o enunciado.

Exemplo. De quantas maneiras as letras da palavra $CADAVERICO$ podem ser permutadas de modo que não se altere a ordem entre as vogais que aparecem?

Como a palavra $CADAVERICO$ tem dez letras, podemos imaginar dez posições a serem preenchidas pelas cinco consoantes e desta forma, teremos $C_{10,5} = 252$ possibilidades de escolha desses espaços.

Escolhidos os espaços e distribuindo as consoantes, temos $\dfrac{5!}{2!} = 60$ formas de se permutar tais letras, pois duas das cinco consoantes são iguais.

Como, uma vez preenchidas as consoantes, as posições das vogais ficam determinadas, então haverá um total de $252 \times 60 = 15 \cdot 120$ anagramas distintos nos quais a ordem entre as vogais $AAEIO$ não muda.

Finalizado este capítulo, em que foram apresentados os fundamentos teóricos e suas aplicações, de forma didática e sequencial, passamos ao capítulo seguinte em que alguns fundamentos serão abordados com uma visão diferente, assumindo **as permutações** um papel de destaque e de grande importância.

Capítulo 2

Permutações: "Um caminho alternativo e confirmativo."

O objetivo neste capítulo é mostrar que problemas de **arranjos** e **combinações** podem ser resolvidos por **técnicas envolvendo permutações**, oferecendo assim um caminho alternativo e confirmativo para esses tipos de problemas.

Sabe-se, por exemplo, que permutações simples de n elementos são sequências que podem se formar com n desses elementos, tais que essas sequências diferem uma das outra apenas pela ordem de seus elementos e que o número de maneiras de ordenar n objetos distintos é:

$$P_n = n!.$$

Foi visto que dado um conjunto A com n elementos, chamamos de **arranjo simples** dos n elementos, tomados p a p, cada um dos agrupamentos ordenados que podem ser formados, contendo, sem repetição, p elementos de A e que número de arranjos simples é dado por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Foi visto também que se esses agrupamentos de p elementos distintos não forem ordenados, ou seja, se forem apenas subconjuntos de p elementos, a questão passa a ser de combinação simples e que o número de **combinações simples** é dado por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Com base nos ensinamentos do Professor Augusto Cezar de Oliveira Morgado, será mostrado, a partir de agora, que as **fórmulas de arranjo e combinação** são meras aplicações de **permutação simples** juntamente com o **princípio multiplicativo**.

Ilustrando, considere o conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ formado por sete letras distintas. Caso se queira saber quantos anagramas distintos de quatro letras podem ser formados com as letras do conjunto A, estaremos diante de uma questão de **arranjo** e aplicando a fórmula teremos a solução $A_{7,4} = \frac{7!}{3!} = 840$ anagramas.

Observe que, de forma alternativa, podemos determinar esses 840 anagramas dispondo primeiramente todos os elementos do conjunto A em fila e separando um anagrama desejado por uma barra. Por exemplo, $abcd/efg$ representa o anagrama $abcd$. Depois, basta permutar todos os elementos da fila para se obter o número total de anagramas distintos de quatro letras e em seguida dividir esse resultado pela permutação das três letras restantes (efg), pois caso contrário, estaríamos contando o anagrama $abcd$ inúmeras vezes, ou seja, teríamos no resultado várias filas distintas com o mesmo anagrama $abcd$. Veja que com esse procedimento, chegamos ao mesmo resultado obtido pela fórmula que é de $\frac{7!}{3!} = 840$ anagramas distintos.

Agora, caso se queira saber quantos subconjuntos ou grupos distintos de quatro letras podem ser formados com as letras do conjunto A, estaremos diante de uma questão de **combinação**, pois não haverá relação de ordem entre os elementos, e aplicando a fórmula teremos a solução $C_{7,4} = \frac{7!}{4!3!} = 35$ subconjuntos.

Observe que, de forma análoga à anterior, pode-se determinar esses trinta e cinco subconjuntos dispondo primeiramente todos os elementos do conjunto A em fila e separando um subconjunto desejado por uma barra. Por exemplo, $abcd/efg$ representa o subconjunto $\{a, b, c, d\}$. Depois, devemos permutar todos os elementos da fila e em seguida dividir esse resultado pela permutação das letras do subconjunto $\{a, b, c, d\}$, pois caso contrário estaríamos contando esse subconjunto várias vezes , como se fossem anagramas distintos. Para finalizar, basta dividir esse resultado pela permutação das três letras restantes (efg), pois caso contrário, estaríamos contando o subconjunto

$\{a, b, c, d\}$ várias vezes, ou seja, teríamos no resultado várias filas distintas com o mesmo subconjunto $\{a, b, c, d\}$. Veja que com esse procedimento, chega-se ao mesmo resultado obtido pela fórmula que é de $\frac{7!}{4!3!} = 35$ subconjuntos distintos.

Generalizando e de forma análoga, pode-se observar que as fórmulas do arranjo e da combinação, deduzidas no capítulo 1 como decorrências imediatas do **princípio multiplicativo**, são simples aplicações da técnica acima a qual será denominada de **"técnica das permutações"**, que consiste em dispor n elementos em fila, dividi-los por barras em grupos e aplicar as permutações de acordo com o que se deseja.

Diante de uma questão de **arranjo** da forma $A_{n,p}$, por exemplo, essa '**técnica**' consiste primeiramente em dispor n elementos em fila, separá-los em dois grupos, o primeiro com os p elementos desejados e o segundo com os $n - p$ elementos restantes. Permutando todos os n elementos e dividindo o resultado pela permutação dos $n - p$ elementos, obtém-se o total de agrupamentos ordenados de p elementos distintos que será de:

$$\frac{n!}{(n-p)!}$$

Agora, se a ordem entre os p elementos não importar, deve-se dividir o resultado também pela permutação de p a fim de se obter o total de conjuntos distintos de p elementos sem que haja repetição. E nesse caso, estaremos diante de um problema de **combinação** da forma:

$$\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Desta forma, conclui-se que as fórmulas de combinação e de arranjo são meras aplicações de permutações simples juntamente com o princípio multiplicativo.

Esse procedimento denominado de **"técnica das permutações"** será aplicado de forma exemplificativa a dez problemas propostos no capítulo 6 e a fim de se continuar mostrando a *importância e a grande abrangência das permutações* na Análise Combinatória, elas serão aplicadas, nos capítulos seguintes, em situações ainda não exploradas neste trabalho.

Capítulo 3

Equações Lineares com Coeficientes Unitários

Um dos objetivos neste capítulo é o de contar o número de soluções inteiras e finitas de uma equação da forma:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n = m,$$

em que cada X_i e "m" assumem valores inteiros não negativos e $i \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$.

Considere, como exemplo , a equação :

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 9 \tag{3.1}$$

Soluções em inteiros positivos para esta equação são quádruplas ordenadas (X_1, X_2, X_3, X_4) cuja soma seja igual a 9. As quádruplas:

$$(2, 3, 1, 3)$$
$$(4, 3, 1, 1)$$
$$(1, 5, 1, 2)$$

são algumas soluções possíveis.

A fim de se contar todos as soluções em inteiros positivos da equação (3.1) , podemos aplicar a seguinte técnica: Enfileirar os nove $1's$, deixando um espaço a cada dois $1's$ consecutivos, totalizando oito espaços. Cada maneira de escolhermos três espaços dentre os oito existentes, nos dará uma solução distinta. lustrando:

$$\begin{gathered}11+111+1+111=9 \text{ representa a solução } (2,3,1,3)\\ 1111+111+1+1=9 \text{ representa a solução } (4,3,1,1)\\ 1+11111+1+11=9 \text{ representa a solução } (1,5,1,2)\end{gathered}$$

Feitas estas observações, podemos concluir que o número total de soluções em inteiros positivos da equação (3.1) é igual ao número de maneiras de escolhermos três dentre os oito espaços em branco, para neles colocarmos os três sinais positivos "+". Como esse número é igual a $C_{8,3}=56$, então este é o número total de soluções procuradas.

Generalizando o raciocínio, temos que o número de soluções em inteiros positivos da equação:

$$X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n=m, \quad com \quad m>0$$

é dado por $C_{m-1,n-1}$.

Se considerarmos soluções em inteiros não negativos , isto é, se a variável X_i puder assumir o valor zero, teremos um número maior de soluções. Tomemos novamente a equação:

$$X_1+X_2+X_3+X_4=9$$

O número de soluções em inteiros não negativos dessa equação (3.1) corresponde ao número de soluções em inteiros positivos da equação:

$$(Y_1-1)+(Y_2-1)+(Y_3-1)+(Y_4-1)=9 \quad ou \quad Y_1+Y_2+Y_3+Y_4=13,$$

o que resulta em $C_{12,3}=220$.

Note que existe uma correspondência biunívoca entre as soluções em inteiros não negativos da equação:

$$X_1+X_2+X_3+X_4=9,$$

com as soluções em inteiros positivos da equação:

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 13.$$

Observe algumas das soluções listadas abaixo dessas equações:

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 9$	$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 13$
$(0, 1, 2, 6)$	$(1, 2, 3, 7)$
$(7, 0, 0, 2)$	$(8, 1, 1, 3)$
$(2, 0, 4, 3)$	$(3, 1, 5, 4)$

Aplicando as permutações, podemos, de forma mais simples, contar o número de soluções em inteiros não negativos da equação (3.1) usando o conceito de **permutação com repetição**. Basta enfileirarmos os nove $1's$ e os três sinais positivos "+". O número total de fileiras distintas nos dará o número total de soluções. Ilustrando as possíveis soluções, temos:

$11 + +1111 + 111 = 9$	representa a solução	$(2, 0, 4, 3)$
$+1 + 11 + 111111 = 9$	representa a solução	$(0, 1, 2, 6)$
$1111111 + + + 11 = 9$	representa a solução	$(7, 0, 0, 2)$

Neste caso, para se obter o número total de soluções, basta permutarmos todos os doze elementos da fileira, que são os nove $1's$ e três sinais positivos "+", o que implicará numa **permutação com repetição** igual a:

$$P_{12}^{3,9} = 220.$$

Assim, encontramos 220 soluções distintas em inteiros não negativos para a equação (3.1).

Portanto, de forma mais direta, concluímos que o número de soluções, em inteiros não negativos, da equação:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n = m, \quad com \quad m > 0$$

é dado por $P_{m+n-1}^{m,n-1}$.

Tais equações lineares com soluções em inteiros não negativos são extremamente importantes na análise combinatória, pois podem ser aplicadas na resolução de vários outros tipos de problemas, inclusive em problemas que envolvam **Combinações com Repetição (CR)**.

Considere, por exemplo, o problema: De quantos modos é possível comprar nove sorvetes em uma loja que os oferece em quatro sabores distintos?

Foi visto, no tópico 2.7 deste trabalho, que combinação com repetição, $CR_{n,p}$, é o número de maneiras de se escolher "p" objetos distintos ou não entre "n" objetos distintos e que:

$$CR_{n.p} = C_{n+p-1,p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

E como o problema acima se trata de **combinação completa**, aplicando a fórmula, temos que o número de soluções distintas é igual a:

$$CR_{4,9} = C_{12,9} = 220$$

Observe que essa questão pode ser resolvida de outra maneira. Para efetuar a compra dos nove sorvetes, podemos associar as variáveis X_1, X_2, X_3 e X_4 aos quatro tipos distintos de sabores e o valor de cada X_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, representará a quantidade de sorvetes comprada de seu tipo. Assim, o número de modos de se comprar nove sorvetes em uma loja que os oferece em quatro sabores distintos será igual ao número de soluções em inteiros não negativos da equação:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 9$$

que equivale a $P_{12}^{3,9} = 220$.

Podemos, portanto, interpretar $CR_{n,p}$ de dois modos distintos:

- $CR_{n,p}$ é o número de maneiras de se escolher "p" objetos distintos ou não entre "n" objetos distintos;

- $CR_{n,p}$ é o número de soluções em inteiros não negativos da equação $X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n = p$.

Com o intuito de se aplicar as **equações lineares com coeficientes unitários** cujas soluções requerem a aplicação das **permutações**, resolveremos os problemas a seguir:

Exemplo. Uma fábrica produz oito tipos de bombons que são vendidos em caixas de trinta bombons, de um mesmo tipo ou sortidos. Quantas caixas diferentes podem ser formadas?

Representando os oito tipos de bombons pelas variáveis X_i , com $i = 1, 2, 3, \cdots, 8$ em que o valor de cada X_i representará o número de bombons do tipo 'i', teremos que o número de soluções da questão será igual ao número de soluções em inteiros não negativos da equação:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_8 = 30.$$

Como o número de soluções em inteiros não negativos da equação acima é igual a:

$$P_{37}^{30,7} = \frac{37!}{30!7!},$$

então, esse valor corresponde ao número de caixas diferentes que podem ser formadas.

Exemplo. Quantas são as soluções em inteiros não negativos da inequação $X + Y + Z \leqslant 5$?

Observe que a figura 3.1 a seguir mostra algumas soluções e as respectivas sobras, representadas pela letra W.

Percebe-se que existe uma correspondência biunívoca entre as soluções em inteiros não negativos da inequação:

$$X + Y + Z \leqslant 5$$

X	Y	Z	W
3	1	1	0
2	0	1	2
0	1	0	4

Figura 3.1: Quadro

e as soluções em inteiros não negativos da equação seguinte:

$$X + Y + Z + W = 5. \tag{3.2}$$

Logo, o número de soluções distintas da inequação proposta é igual a:

$$P_8^{5,3} = 56.$$

Em outros casos, deveremos transformar equações em equações para que se possa resolver o problema. Imagine, por exemplo, que se queira encontrar o número de soluções em inteiros positivos da equação $X_1 + X_2 + X_3 = 20$, em que $X_2 > 5$.

Neste caso, o número de soluções da equação pedida é igual ao número de soluções em inteiros não negativos da equação:

$$\begin{aligned} (Y_1 + 1) + (Y_2 + 6) + (Y_3 + 1) &= 20 \qquad ou \\ Y_1 + Y_2 + Y_3 &= 12, \end{aligned}$$

a qual tem o número de soluções distintas igual a:

$$P_{14}^{2,12} = 15$$

Portanto, **as equações lineares com coeficientes unitários** juntamente com as **permutações** são ferramentas importantes para a solução de vários problemas combinatórios. Veremos no capítulo a seguir que as permutações também são indispensáveis na solução de problemas que necessitam da **Técnica do Princípio da Reflexão**.

Capítulo 4

O Princípio da Reflexão

Será, primeiramente, apresentada a **Técnica do Princípio da Reflexão** por meio de um raciocínio indutivo, ou seja, começaremos de situações mais simples até chegarmos ao referido princípio. Depois, o utilizaremos juntamente com as permutações na resolução de alguns problemas.

Considere inicialmente que, uma partícula, estando no ponto de coordenadas (x, y), só pode se movimentar para o ponto $(x+1, y+1)$ ou para o ponto $(x+1, y-1)$ do plano cartesiano. Desta forma, podemos calcular o total de trajetos distintos possíveis de uma partícula que esteja inicialmente no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e que deseja chegar ao ponto $(8, 6)$, por exemplo.

Ilustrando um desses trajetos possíveis, temos:

Figura 4.1: Gráfico

Oberve que como os movimentos permitidos para a partícula são de *subida* "S" ou de *descida* "D" de forma que:

$$\begin{aligned} S:(x,y) &\rightarrow (x+1,y+1) \\ D:(x,y) &\rightarrow (x+1,y-1) \end{aligned}$$

então, na figura 4.1, o trajeto descrito foi de $SSDSSSSS$.

Assim, para que a partícula percorra de $(0,0)$ a $(8,6)$ devemos ter:

$$S+D=8$$

pois em cada movimento de subida ou de descida, a abscissa da partícula avança uma unidade e portanto ela deve percorrer um total de 8 unidades em relação ao eixo das abscissas.

Em relação ao eixo das ordenadas, cada movimento de subida ou de descida, a ordenada aumenta ou diminui uma unidade, respectivamente. Logo, temos:

$$S-D=6$$

Resolvendo esse sistema, encontramos $S=7$ e $D=1$, e aplicando permutação com repetição, o número de trajetos distintos possíveis será igual a:

$$P_8^{7,1}=\frac{8!}{7!.1!}=8$$

Uma interessante *paráfrase* desse problema é a seguinte: se numa eleição há oito eleitores e dois candidatos e um determinado candidato "S" ganha por seis votos de diferença, de quantos modos distintos pode se desenvolver a apuração?

Veja que a solução desse problema é análoga à solução do exemplo anterior, basta, no gráfico da figura 4.1, identificar o eixo das abscissas com o total de votos apurados e o eixo das ordenadas com a vantagem do candidato "S" em número de votos. Assim, o ponto $(3,1)$ do trajeto, por exemplo, indicará que quando o 3° voto acabar de ser apurado, o candidato "S" tem uma vantagem de um voto em relação ao outro candidato.

De maneira semelhante, calcularemos quantos são os trajetos possíveis de uma partícula que esteja inicialmente no ponto de coordenadas $(0,0)$ e que deseja chegar ao ponto $(10,4)$ e quantos desses trajetos tocam a reta $y = -1$.

Neste caso, usando o mesmo raciocínio, temos:

$$\begin{aligned} S + D &= 10 \\ S - D &= 4 \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema, encontramos $S = 7$ e $D = 3$, e desta forma, o número de trajetos distintos possíveis é igual a:

$$P_{10}^{7,3} = \frac{10!}{7!.3!} = 120$$

Desses cento e vinte trajetos, alguns deles tocam a reta $y = -1$, como por exemplo o em negrito abaixo:

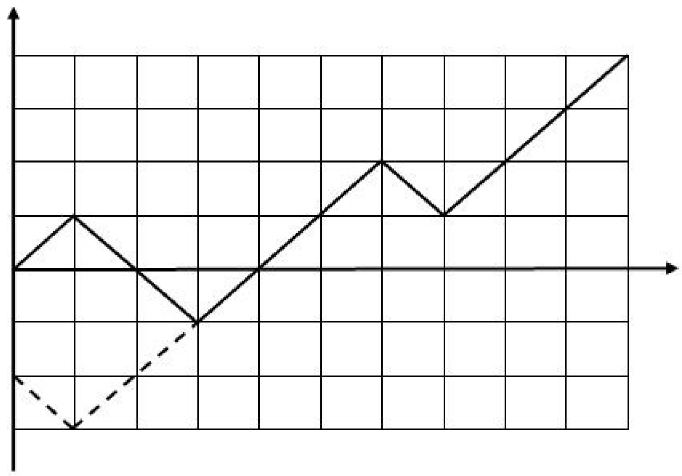

Figura 4.2: Gráfico

Observe que todo trajeto de $(0,0)$ a $(10,4)$ que toca a reta $y = -1$ pode ser transformado, por uma reflexão em torno da reta $y = -1$, do trecho do trajeto entre $(0,0)$ e o primeiro toque na reta $y = -1$, em um trajeto do ponto $(0,-2)$ até o ponto $(10,4)$. E, calculando o número de caminhos distintos entre esses dois últimos pontos, temos:

$$\begin{aligned} S + D &= 10 \\ S - D &= 6 \end{aligned}$$

o que implica em $S = 8$ e $D = 2$. Logo, o número de caminhos distintos de $(0,0)$ a $(10,4)$ que toca a reta $y = -1$ é igual a:

$$P_{10}^{8,2} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = 45$$

Parafraseando: em uma eleição com dois candidatos, dez eleitores, vencida por um determinado candidato "S" por quatro votos de diferença, em quarenta e cinco das cento e vinte possíveis formas de se desenvolver a apuração, o candidato perdedor em algum momento esteve em vantagem.

A *técnica* usada para resolver esse tipo de questão é, segundo "MORGADO" em [2], conhecida pelo nome de **Princípio da Reflexão**, o qual pode ser aplicado em outros tipos de problemas como veremos em seguida.

Exemplo. Se numa eleição com dois candidatos A e B, há vinte eleitores e o candidato A recebe quinze votos favoráveis enquanto o candidato B recebe cinco votos, quantas são as formas possíveis de desenvolver a apuração de modo que o candidato A permaneça sempre em vantagem (nem sequer empata) desde o primeiro voto apurado?

Para resolver esse problema, deve-se inicialmente esboçar um plano cartesiano pondo, no eixo das ordenadas, a vantagem do candidato A e no eixo das abscissas a quantidade de votos apurados. Os gráficos são caminhos de $(0,0)$ a $(20,10)$. Os caminhos que queremos são aqueles que começam com uma subida para o ponto $(1,1)$ e a partir daí formam um caminho de $(1,1)$ a $(20,10)$ que não podem tocar a reta $y = 0$. O total de caminhos de $(1,1)$ a $(20,10)$ é igual a $P_{19}^{14,5} = 11628$, pois nesse caso, temos:

$$\begin{aligned} S + D &= 19 \\ S - D &= 9, \end{aligned}$$

ou seja, $S = 15$ e $D = 4$.

E, usando o mesmo raciocínio e o Princípio da Reflexão, temos que o total de caminhos de $(1,1)$ a $(20,10)$ que tocam a reta $y = 0$ é igual a 3876.

Logo, o total de formas possíveis de desenvolver a apuração de modo que o candidato A permaneça sempre em vantagem é igual a $11628 - 3876 = 7752$.

Exemplo. Numa fila de cinema, por exemplo, se "m" pessoas tem notas de $R\$5,00$, "n" pessoas tem notas de $R\$10,00$ e sabendo–se que $n < m$ e que a entrada custa $R\$5,00$, quantas são as "filas" que terão problemas de troco se a bilheteria começar a trabalhar sem troco?

Inicialmente, deve ser esboçado um gráfico cartesiano pondo, no eixo das ordenadas, a quantidade de notas de $R\$5,00$ em poder da bilheteria e, no eixo das abscissas, a quantidade de pessoas atendidas. Os gráficos das "filas" são caminhos de $(0,0)$ a $(m+n, m-n)$. Os que representam filas com problemas de troco são os que tocam a reta $y = -1$. Estes, refletindo-se na reta $y = -1$ o trecho de $(0,0)$ até o primeiro toque na reta, correspondem aos caminhos de $(0,-2)$ a $(m+n, m-n)$. Tais caminhos são formados por subidas e descidas de modo que:

$$\begin{aligned} S + D &= m + n \\ S - D &= m - n + 2, \end{aligned}$$

o que resulta em $S = m + 1$ e $D = n - 1$.

A escolha do caminho fixa, na "fila", os lugares que serão ocupados pelos portadores de notas de $R\$5,00$ e de notas de $R\$10,00$. Fixados tais lugares, há $m!n!$ modos de designar-lhes as pessoas. Logo, o total de "filas" que terão problemas de troco se a bilheteria começar a trabalhar sem troco é igual a:

$$m!n!P_{S+D}^{S,D} = m!n!\frac{(S+D)!}{S!D!} = \frac{n}{(m+1)}(m+n)!$$

Vamos, nesse mesmo problema, determinar quantas são as "filas" que terão problemas de troco se a bilheteria começar a trabalhar com duas notas de $R\$5,00$.

Neste caso, os gráficos das "filas" são caminhos de $(0,2)$ a $(m+n, m-n+2)$. Os que representam "filas" com problemas de troco são os que tocam a reta $y = -1$.

Estes, refletindo-se na reta $y = -1$ o trecho de $(0,0)$ até o primeiro toque na reta, correspondem aos caminhos de $(0,-4)$ a $(m+n, m-n+2)$. Tais caminhos são formados por subidas e descidas de modo que:

$$\begin{aligned} S + D &= m + n \\ S - D &= m - n + 6. \end{aligned}$$

Assim, encontramos $S = m + 3$ e $D = n - 3$. E o total de "filas" distintas será igual a:

$$\begin{aligned} m!n!P_{S+D}^{S,D} &= m!n!\frac{(S+D)!}{S!D!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)}(m+n)! \end{aligned}$$

No próximo capítulo, será apresentado um estudo sobre as **permutações caóticas**, a fim de se mostrar, dentre outras coisas, outro campo de aplicação das permutações.

Capítulo 5

Permutações Caóticas

Iremos tratar neste capítulo de Permutações Caóticas, explicitando a dedução da fórmula do cálculo do número de desarranjos para n itens.

5.1 O problema das cartas mal endereçadas

A brincadeira de "amigo oculto", muito comum em nossa sociedade, traz consigo uma intrigante questão que no séc XVIII motivou o célebre matemático *Leonhard Euler* a empenhar-se em um engenhoso e surpreendente trabalho com o intuito de solucioná-la.

Esta questão conhecida como *"O problema das cartas mal endereçadas"* consiste em descobrir de quantas formas distintas pode-se colocar n cartas em n envelopes, endereçados a n destinatários diferentes, de modo que nenhuma das cartas seja colocada no envelope correto.

Voltando ao *"amigo oculto"*, o problema equivale a investigar de quantas formas diferentes n pessoas podem sortear aleatoriamente n "papeizinhos"de modo que nenhuma delas sorteie o próprio nome.

Nessas situações, estamos diante de um conhecido problema de Análise Combinatória, denominado de Permutações Caóticas.

5.2 Número de Permutações Caóticas

Definição. *Uma permutação de $a_1, a_2, ..., a_n$ é chamada de **caótica** quando nenhum dos $a_i's$ se encontra na posição original, isto é, na i-ésima posição.*

Uma permutação com tal característica também é chamada de um *"desarranjo"* de $a_1, a_2, ..., a_n$.

Seja D_n o número de permutações caóticas, isto é, a quantidade de permutações dos n elementos $a_1, a_2, ..., a_n$ nos quais nenhum deles ocupa sua posição original.

Quando $n = 1$, temos somente um elemento. Logo não existe forma de "desarranjá-lo"e, portanto, $D_1 = 0$. Quando $n = 2$, podemos "desarranjar"os elementos a_1 e a_2 apenas de uma forma: a_2a_1. Assim, $D_2 = 1$. Quando $n = 3$, podemos permutar os elementos a_1, a_2, a_3 de 6 maneiras: $a_1a_2a_3, a_1a_3a_2, a_2a_1a_3, a_2a_3a_1, a_3a_1a_2, a_3a_2a_1$, onde $a_2a_3a_1$ e $a_3a_1a_2$ são os únicos "desarranjos". Portanto, $D_3 = 2$. Continuando a análise de casos particulares, verifica-se que $D_4 = 9$ e $D_5 = 44$, mas, a partir daí, as alternativas tornam-se muito numerosas de tal modo que é preciso deduzir matematicamente qual a lei de formação de D_n.

Antes de deduzirmos essa lei de formação de D_n, apresentaremos alguns exemplos nos quais o princípio da inclusão e exclusão, visto no Capítulo 1 deste trabalho, será extremamente útil.

Exemplo. *Determine o número de permutações simples dos elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nas quais a_1 está em primeiro lugar ou a_2 está em segundo lugar.*

Definimos A_1 como sendo o conjunto das permutações em que a_1 está em primeiro lugar e A_2 o conjunto das permutações em que a_2 está em segundo lugar.

É claro que $n(A_1) = n(A_2) = (n-1)!$ e que $n(A_1 \cap A_2) = (n-2)!$. Logo o número que procuramos nada mais é do que $n(A_1 \cup A_2)$ que é igual a:

$$
\begin{aligned}
n(A_1 \cap A_2) &= n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2) = (n-1)! + (n-1)! - (n-2)! \\
&= 2(n-1)! - (n-2)! = 2(n-1)(n-2)! - (n-2)! \\
&= (n-2)!(2n-2-1) = (2n-3)(n-2)!.
\end{aligned}
$$

Exemplo. *Dentre as permutações simples dos n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ determine o número daquelas em que a_1 não está em primeiro lugar, a_2 não está em segundo lugar e nem a_3 está em terceiro lugar.*

Definimos A_i, para $i = 1, 2, 3$, como o conjunto das permutações em que a_i, para $i = 1, 2, 3$, está no i-ésimo lugar. Devemos encontrar o número de elementos no complementar da união de A_1, A_2 e A_3. Como

$$
\begin{gathered}
n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = (n-1)!, \\
n(A_1 \cap A_2) = n(A_1 \cap A_3) = n(A_2 \cap A_3) = (n-2)!
\end{gathered}
$$

e

$$
n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = (n-3)!
$$

temos considerando que o número total de permutações é $n!$, que a resposta à nossa pergunta é:

$$
\begin{aligned}
n! - n(A_1) - n(A_2) - n(A_3) + n(A_1 \cap A_2) + n(A_1 \cap A_3) + n(A_2 \cap A_3) \\
-n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = n! - 3(n-1)! + 3(n-2)! - (n-3)!.
\end{aligned}
$$

Se definirmos por A_i o conjunto das permutações de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tendo a_i no i-ésimo lugar, para calcularmos o número de permutações caóticas, denotados por D_n (a letra D vem da palavra desarranjo, palavra sinônima de permutação caótica), devemos calcular o número de elementos que não pertencem a nenhum dos A_i's, isto é, o número de elementos no complementar da união dos A_i's. Logo

$$D_n = n! - \sum_{i=1}^{n} n(A_i) + \sum_{1 \leqslant i < j} n(A_i \cap A_j) - \sum_{1 \leqslant i < j < k} n(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots$$

$$+(-1)^n n(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

Como existem n termos na primeira soma, C_n^2 termos na segunda, C_n^3 na terceira, $\dots$, $C_n^n = 1$ na última, e

$$\begin{aligned} n(A_i) &= (n-1)!; \\ n(A_i \cap A_j) &= (n-2)!; \\ n(A_i \cap A_j \cap A_k) &= (n-3)!; \\ &\vdots \\ n(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) &= 1; \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} D_n &= n! - n(n-1)! + C_n^2(n-2)! - C_n^3(n-3)! + \dots + (-1)^n 1 \\ &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \end{aligned}$$

Colocando-se $n!$ em evidência obtemos:

$$\boxed{D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)}$$

$\forall n \geqslant 1$.

Utilizando-se esta fórmula podemos ver que o número de permutações caóticas de 3 letras a, b e c, é

$$D_3 = 3! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) = 2$$

De fato, dentre as 6 permutações $abc, acb, bac, bca, cab, cba$, somente bca e cab são permutações caóticas.

Exemplo. *Quantas permutações dos inteiros* $0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 8, 9$ *têm exatamente* 4 *dos números em suas posições originais?*

Como não são fixados os 4 números que permanecem nas posições originais, devemos escolher estes 4 números, o que pode ser feito de C_{10}^4 maneiras distintas, e, em seguida, permutar os 6 restantes caoticamente. Logo a resposta é

$$C_{10}^4 D_6 = C_{10}^4 6! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right) = C_{10}^4 265 = 55.650$$

Não obstante haver outra dedução para a lei de formação D_n, optamos por apresentar neste capítulo a encontrada no livro [8], por considerarmos que tal dedução é a que possui uma maior harmonia com os conceitos apresentados neste trabalho.

Capítulo 6

Atividade Pedagógica

A fim de se mostrar a importância e a abrangência das permutações na análise combinatória, será apresentada, neste capítulo, uma atividade pedagógica a qual o professor poderá utilizar para motivar seus alunos a resolver problemas de contagem por duas maneiras distintas, aplicando **princípios ou fórmulas** e por **técnicas envolvendo permutações**.

Será proposta uma atividade de sala de aula com o intuito de tornar a aula mais dinâmica e interessante e a aprendizagem mais eficiente e será apresentada uma lista com *dez questões* diferenciadas, que estarão *resolvidas e comentadas.*

O professor caso não queira se utilizar das questões apresentadas, poderá selecionar suas próprias questões de acordo com sua realidade. De toda forma, essas dez questões servirão de fonte de consulta aos curiosos em descobrir os diversos caminhos que a análise combinatória nos oferece.

Após o professor apresentar todos os fundamentos de análise combinatória, exemplificando o máximo possível e destacando sempre os diversos modos de se resolver os problemas, propõe-se a ele uma atividade composta dos seguintes passos:

Primeiro: Distribua um pedaço de papel a cada aluno para que cada um escreva seu próprio nome e depois os recolha. Os pedaços de papel devem ser iguais, pois estes nomes depois serão sorteados.

Segundo: Distribua a cada aluno uma lista com as dez questões sugeridas neste capítulo e diga que as questões devem ser resolvidas de duas maneiras distintas, por princípios ou fórmulas e por técnicas de permutações e que cada solução correta valerá meio ponto.

Terceiro: Alerte-os de que as soluções não serão recolhidas e que todos os alunos participarão de todos os sorteios, mas que o bônus não poderá exceder a um ponto, ou seja, cada aluno terminará a aula com no máximo um ponto.

Quarto: Deixe-os resolvendo individualmente as questões durante um tempo de aula. Haverá em média cinco minutos para cada questão, caso a aula seja de cinquenta minutos.

Quinto: No segundo tempo de aula ocorrerá a solução dos problemas e os debates. Deverá ser sorteado, por meio dos papéis, um aluno para dizer como é que ele resolveu o primeiro problema.

Sexto: Caso o aluno tenha resolvido corretamente, ele ganhará meio ponto por solução distinta. Se o aluno não soube resolver a questão, deverá ser sorteado outro aluno até que apareça um que tenha acertado. Se a solução for parcial, o professor deverá completar e apresentar a outra solução.

Sétimo: Resolvida a primeira questão, o mesmo procedimento deverá ser aplicado à segunda questão, depois à terceira, e assim sucessivamente, até terminar a aula. Se por ventura, a aula acabar e ficar algum exercício sem solução, o professor deverá terminar a resolução da lista na próxima aula.

Desta forma, esperamos que essa atividade pedagógica possa contribuir para um melhor entendimento da análise combinatória e que o aprendizado se concretize de forma abrangente e por meio de uma aula descontraída.

Destacamos que tal atividade traz consigo uma proposta com algumas ações, mas que o professor tem a liberdade de adaptá-la à estrutura educacional em que estiver inserido.

Apresentamos a seguir uma lista com as dez questões sugeridas:

1) Seis astronautas devem ser divididos em dois grupos de três homens cada: um para ir à lua e outro para ficar na base espacial. Qual o número total de situações possíveis?

Resolvendo a questão por **combinação**, basta calcular o total de grupos que se pode formar com três pessoas escolhidas dentre as seis, o que resulta em $C_{6,3} = \dfrac{6!}{2!3!} = 20$ grupos distintos. Observe que quando se escolhe um grupo de três pessoas para ir à lua, o grupo restante é o que ficará na base. Logo, há vinte situações possíveis.

Resolvendo pela "**técnica das permutações**", primeiramente representaremos os astronautas pelas letras A, B, C, D, E, F e em seguida os colocaremos em fila separados por uma barra, formando dois grupos da seguinte forma:

$$ABC/DEF$$

Considerando que o grupo antes da barra vai para a lua e que o grupo depois fica na base, a ilustração acima representa uma situação possível. E para se encontrar todas as situações possíveis devemos permutar as seis letras e dividir o resultado pelas permutações das letras de cada grupo, pois a ordem entre elas não importa. Com esse procedimento, obtemos $\frac{6!}{3!3!} = 20$ situações possíveis.

Modificando esse problema de forma que não haja distinção entre os dois grupos, ou seja, caso se queira dividir as seis pessoas em dois grupos quaisquer de três pessoas cada, deve-se dividir o resultado acima por 2! , pois os casos ABC/DEF e DEF/ABC são equivalentes. Neste caso, muitos poderiam se equivocar ao usar apenas a fórmula de combinação. Sugerimos ao professor que comente essa situação com os alunos.

2) De quantas formas diferentes podemos distribuir sete pessoas em três quartos, de maneira que três pessoas fiquem em um quarto denominado "A", duas fiquem em um quarto denominado "B" e duas em um quarto denominado "C"?

Podemos escolher três pessoas para o quarto A de $C_{7,3}$ maneiras diferentes. Feito isto, há $C_{4,2}$ modos diferentes para se escolher duas pessoas para o quarto B e $C_{2,2} = 1$ maneira de se colocar as últimas duas pessoas no quarto C. E, pelo princípio multiplicativo, o produto desses números nos dará o total de possibilidades, que é de:

$$C_{7,3}C_{4,2}C_{2,2} = \frac{7!}{3!4!}\frac{4!}{2!2!} = \frac{7!}{3!2!2!} = P_7^{3,2,2} = 210.$$

Resolvendo pela "**técnica das permutações**", basta colocar as sete pessoas em fila e separá-las por três barras, de forma que antes da primeira barra fiquem as três pessoas do quarto A, entre as duas barras fiquem as duas pessoas do quarto B e depois da segunda barra fiquem as duas pessoas do quarto C. Ilustrando uma situação possível, tem-se:

$$ABC/DE/FG$$

Assim, para obtermos todas as disposições possíveis, devemos permutar os sete elementos da fila e dividir o resultado pelas permutações dos elementos de cada quarto, o que resultará em $\frac{7!}{3!2!2!} = 210$ casos.

Caso, nesta questão, fosse acrescentado um treliche no quarto A, um beliche no B e um beliche no C, haveria uma nova situação, e para se encontrar o número de disposições possíveis bastaria permutar os elementos da fileira $ABC/DE/FG$, pois ela já indica a posição das pessoas no quarto e nas camas. Logo, a solução seria igual a apenas 7!. Neste caso, poder-se-ia usar apenas o princípio multiplicativo e se chegaria a mesma solução de $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7!$. Sugerimos ao professor que analise este caso com os alunos.

3) Um campeonato de futebol é disputado por oito clubes em rodadas de quatro jogos cada. De quantos modos é possível selecionar os jogos da primeira rodada?

Colocando os oito times, representados por A, B, C, D, E, F, G, H em fila, automaticamente se formam os quatro jogos possíveis, como por exemplo:

$$AB/CD/EF/GH$$

Observe que se alternarmos esses jogos de posição, teremos os mesmos quatro jogos na primeira rodada, logo deve-se dividir o resultado por 4!, e como AB e BA representam o mesmo jogo, deve-se também dividir o resultado por 2^4. Assim, para se obter o total de jogos possíveis deve-se **permutar** todos os oito elementos da fila e dividir por 4! (permutação entre os jogos) e por 2^4 (permutação entre cada dois times de um jogo), o que resultará em $8!/(4!2^4) = 105$ situações possíveis.

Resolvendo essa questão por **combinação**, tem-se que os adversários em cada jogo podem ser escolhidos, sucessivamente, de $C_{8,2} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2}$ modos. No entanto, com esse procedimento, cada possível rodada é contada 4! vezes, logo a resposta deverá ser igual a $\dfrac{C_{8,2} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2}}{4!} = 105$ situações possíveis.

4) Um ônibus parte com seis passageiros e para em dez pontos diferentes. Sabendo que dois ou mais passageiros não desembarcam no mesmo ponto, qual o número possível de formas de desembarque desses passageiros?

Essa questão é bem interessante, pois ela pode ser resolvida de três formas distintas: usando o **princípio fundamental da contagem**, usando **combinação** e **permutação simples** ou por **permutação com repetição**.

A resolução pelo princípio multiplicativo é bem simples, basta associar os passageiros ao domínio de uma função e as paradas ao contra domínio e verificar o número de funções injetoras existentes. Desta forma, o primeiro passageiro terá dez opções de desembarque, o segundo terá nove, o terceiro terá oito e, assim por diante, até o sexto ter cinco opções de desembarque. Logo, o total de formas possíveis de desembarque ou de funções injetoras será de $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$.

Pode-se também perceber que o total de maneiras de se escolher seis pontos dentre dez é igual a $C_{10,6} = \dfrac{10!}{6!4!}$. Escolhidos os pontos, basta distribuir os seis passageiros, permutá-los e a resposta será de $\dfrac{10!}{6!4!} \cdot 6! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$.

5) Cada peça de "um jogo de dominó" é constituída de dois números. As peças são simétricas, ou seja, o par de números não é ordenado. Quantas peças diferentes podem ser formadas usando os números do sistema decimal de numeração?

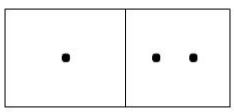

Figura 6.1: Dominó

Esta é uma questão típica de **combinação completa**, pois dois números devem ser escolhidos, com ou sem repetição, de um total de dez números do nosso sistema decimal de numeração $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Assim, o total de peças desse dominó será igual a $CR_{10,2} = C_{11,2} = 55$ peças.

Pela "**técnica das permutações**", para se encontrar o número de peças em que os números são distintos, basta enfileirar os dez números e separar os dois primeiros por uma barra, por exemplo:

$$01/23456789.$$

Nesse exemplo, houve a formação da peça 01. Se permutar todos os elementos da fileira e dividir o resultado pela permutação dos dois primeiros (visto que as peças xy e yx são as mesmas) e pela permutação dos oito seguintes (para que a mesma peça não seja contada várias vezes), será encontrado o número de peças com números distintos, que será de $\dfrac{10!}{2!8!} = 45$. Mas como se sabe que são dez peças com números iguais, então, há um total de cinquenta e cinco peças distintas.

6) De quantas maneiras distintas uma empresa pode adquirir dois automóveis, que deverão ser escolhidos dentre cinco marcas diferentes?

O número de maneiras de se fazer essa compra é igual ao número de **combinações completas** de cinco marcas distintas tomadas três a três que é de $CR_{5,2} = C_{6,2} = 15$.

Pela '**técnica das permutações**', basta enfileirar cinco letras A, B, C, D, E e separar as duas primeiras por uma barra, por exemplo:

$$AB/CDE$$

representa a aquisição de dois carros das marcas "A" e "B". Se permutar todos os elementos da fileira e dividir o resultado pela permutação dos dois primeiros e pela permutação dos três seguintes, será encontrado o número de aquisições de dois carros de marcas distintas, que será de $\dfrac{5!}{2!3!} = 10$. Mas como existem cinco aquisições possíveis de dois carros de marcas iguais, então, há um total de $5 + 10 = 15$ aquisições distintas.

7) O quadriculado da figura 6.2 é formado por seis colunas e três linhas de quadradinhos. De quantas maneiras diferentes podemos pintar seis desses quadradinhos de modo que fiquem exatamente dois quadradinhos pintados em cada linha e apenas um em cada coluna?

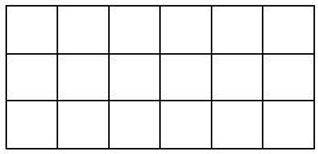

Figura 6.2: Quadriculado

Resolvendo por **combinação**, há $C_{6,2} = 15$ maneiras de se pintar a primeira fileira. Pintada a primeira fileira, há $C_{4,2} = 6$ maneiras de se pintar a segunda. Pintada a segunda fileira, há uma maneira de se pintar a terceira. E pelo princípio **multiplicativo**, são $15 \times 6 = 90$ maneiras diferentes de se pintar o quadriculado de acordo com o comando da questão.

Numerando os quadradinhos de cada fileira por $1, 2, 3, 4, 5$ e 6, a sequência $56/1234$ representa que foram pintados os dois últimos quadradinhos da primeira fileira e a sequência $12/34$ representa que foram pintados os dois primeiros quadradinhos da segunda fileira. Assim, pela '**técnica das permutações**', temos $\frac{6!}{2!4!} = 15$ maneiras de se pintar a primeira fileira e $\frac{4!}{2!2!} = 6$ maneiras de se pintar a segunda. Como a última fileira só tem uma opção, então temos $15 \times 6 = 90$ maneiras, mesmo resultado obtido pela forma anterior.

8) A figura 6.3 a seguir representa parte de um mapa de uma cidade, em que estão assinalados os pontos A e B, e um possível trajeto de uma pessoa que queira se deslocar do ponto A ao ponto B. Qual o número de trajetos distintos que uma pessoa poderá percorrer do ponto A ao B, sabendo-se que ela poderá se deslocar somente no sentido Norte (N) ou Leste (L)?

Esse tipo de questão é tradicional e já foi bastante explorada nos processos seletivos brasileiros e merece aqui o nosso destaque.

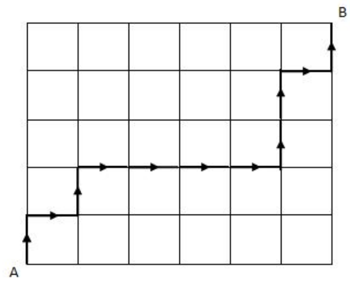

Figura 6.3: Quadriculado

Observe que a sequência:

$$NLNLLLLNNLN,$$

representa o trajeto em destaque na figura 6.3 acima e que qualquer trajeto escolhido formará uma sequência de onze letras, com seis letras L e com cinco letras N. Logo, o número de trajetos distintos corresponde ao número de sequências distintas.

Pode-se, por **combinação**, encontrar a quantidade dessas sequências distintas, basta calcular o total de maneiras de se escolher, das onze posições em que ficarão as letras, quais ficarão com as letras L. Isso implicará em $C_{11,6} = \frac{11!}{6!5!} = 462$ trajetos distintos. Se, das onze posições em que ficarão as letras, escolhermos quais ficarão com as letras N, o resultado será o mesmo e igual a $C_{11,5} = \frac{11!}{5!6!} = 462$, pois escolhendo as posições para se colocar um determinado tipo de letra, só restará uma única opção, que é colocar as letras restantes nas posições que sobrarem.

Pode-se também determinar o total dessas sequências calculando o total de anagramas da palavra $NLNLLLLNNLN$, o que resultará numa **permutação com repetição** igual a $P_{11}^{5,6} = \dfrac{11!}{5!6!} = 462$. Assim, de forma alternativa e confirmando o resultado, verifica-se por permutação que existem quatrocentos e sessenta e dois trajetos possíveis distintos de acordo com o enunciado da questão.

9) De quantas formas podemos distribuir cinco anéis idênticos nos cinco dedos das mãos de uma pessoa, de modo que seja possível colocar todos os anéis em qualquer um dos dedos?

Representando cada anel pela letra A, podemos distribuir os anéis das seguintes formas:

- $A + A + A + A + A$, que representa um anel em cada dedo;

- $AA + +AAA + +$, que representa dois anéis no primeiro dedo e três anéis no terceiro dedo;

- $AAA + AA + A + +$, que representa três anéis no primeiro dedo, dois anéis no segundo dedo e um anel no primeiro dedo.

Observe que cada sequência formada por essas cinco letras "A" juntamente com os quatro sinais positivos "+", nos fornece uma situação possível. E para obtermos o total de sequências possíveis por **combinação**, basta escolhermos dentre as nove posições, quatro para que nelas sejam colocados os quatro sinais positivos "+". Assim obteremos $C_{9,4} = \dfrac{9!}{5!4!} = 126$ disposições diferentes.

Pode-se também determinar o total dessas sequências permutando todos seus elementos, o que resultará numa **permutação com repetição** igual a $P_9^{5,4} = \dfrac{9!}{5!4!} = 126$.

Logo, há 126 formas distintas de se distribuir os cinco anéis nos cinco dedos.

10) De quantas formas podemos distribuir cinco anéis distintos nos cinco dedos da mão de uma pessoa, de modo que seja possível colocar todos os anéis em qualquer um dos dedos? Considere as diversas disposições dos anéis em um dedo qualquer.

Associando os cinco anéis distintos às letras A, B, C, D e E, podemos distribuir os anéis das seguintes maneiras:

- $A + B + C + D + E$, que representa o anel A no primeiro dedo, o B no segundo, o C no terceiro, o D no quarto e o E no quinto;

- $BA + E + CD + +$, que representa os anéis B e A, nesta ordem, no primeiro dedo, o anel E no segundo, os anéis C e D, nesta ordem, no terceiro e os quarto e quinto dedos sem anéis;

- $+ + + + EDCBA$, que representa todos os cinco anéis no quinto dedo.

Note que cada sequência formada por essas cinco letras juntamente com os quatro sinais positivos "+", nos fornece uma disposição possível. Logo, escolhendo dentre essas nove posições, seis posições para se distribuir e se permutar as letras A, B, C, D

e E, então teremos o total de sequências possíveis. E isso pode ser feito de dois modos distintos: aplicando **combinação e permutação simples**(o que equivalente ao arranjo) ou por **permutação com repetição**.

Pode-se, por combinação, escolher as seis posições de $C_{9,5} = \frac{9!}{5!4!} = 126$ formas diferentes e permutando as seis letras nessas posições encontraremos $P_5 = 5! = 120$ disposições diferentes entre elas. Logo, há $126 \times 120 = 15120$ sequências distintas. Esse procedimento equivale ao cálculo do **arranjo** $A_{9,5} = \frac{9!}{4!} = 15120$, pois o que se deseja é escolher, dentre nove posições, cinco em que a ordem dos elementos importa.

De forma alternativa, pode-se calcular o número total dessas sequências distintas **permutando** todos os nove elementos da fileira. Como existem quatro elementos repetidos, que são os quatro sinais positivos "+", então, por **permutação com repetição**, encontramos $P_9^4 = \frac{9!}{4!} = 15120$ formas distintas de se distribuir os cinco anéis nos cinco dedos.

Essas duas últimas questões foram mencionadas na parte inicial deste trabalho e fizeram parte do primeiro Exame Nacional de Qualificação do PROFMAT do ano de 2013.

Perceba, com esses exemplos, que qualquer problema envolvendo os conceitos de arranjo ou de combinação pode ser resolvido também por permutação. Logo, nesses casos, as **permutações** podem servir sempre como um **método alternativo e confirmativo**, ou seja, como um outro caminho que deve ser sempre considerado como possível.

Considerações Finais

Verificou-se neste trabalho que a Análise Combinatória é uma disciplina que está diretamente relacionada à necessidade do homem em "contar" e que, no Brasil, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio norteiam os educadores, apresentando propostas no que se refere às competências que devem ser desenvolvidas nos alunos, dentre elas, a de desenvolver habilidades na resolução de situação-problema que envolva o raciocínio combinatório e os métodos de contagem.

Foi visto que a Análise Combinatória, apesar de ser considerada por alguns uma disciplina complexa, é um assunto repleto de problemas do cotidiano capazes de aguçar, desenvolver e aprimorar o raciocínio de nossos alunos. Foi visto também que as permutações possuem um papel de grande relevância e importância na solução desses problemas, pois normalmente ou o problema é de permutação ou pode ser resolvido por técnicas envolvendo permutações.

Educadores das mais diversas áreas do conhecimento constatam diariamente que os conteúdos do currículo escolar muitas vezes não despertam a curiosidade e o interesse do aluno. Nossos alunos, em geral, estão sendo formados com pouca competência matemática e com argumentações lógicas pouco desenvolvidas. Acreditamos que a inserção de processos e métodos que estimulem a reflexão, o envolvimento, a pesquisa, a análise e a discussão, possa contribuir para que eles tenham condições mais favoráveis de obterem um melhor aproveitamento escolar.

Neste sentido, foram apresentados ao longo do trabalho, métodos, ferramentas, questões e sugestões de atividade para que o aprendizado desse conteúdo seja sólido e significativo. Enfim, espera-se que este trabalho sirva de fonte de consulta por parte de professores e alunos, e que se tenha contribuído de alguma forma para minimizar as dificuldades encontradas no trato dessa matéria desafiadora, que é a Análise Combinatória.

Referências

[1] BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Secretaria de Educação Média e Tecnológica*, Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Brasília: MEC, 2006.

[2] MORGADO, AUGUSTO; CARVALHO, JOÃO; CARVALHO, PAULO; FERNANDEZ, PEDRO. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

[3] DANTE, LUIZ ROBERTO. *Didática da resolução de problemas de matemática*. São Paulo: Ática, 2000.

[4] IEZZI, GELSON ; DOLCE, OSVALDO ; DEGENSZAJN, DAVID ; PÉRIGO, ROBERTO ; ALMEIDA, NILZE. *Matemática, ciências e aplicações*, São Paulo: Atual, 2006.

[5] PAIVA, MANOEL. *Matemática: volume 2*, São Paulo: Moderna, 2009.

[6] BIANCHINI, EDWALDO ; PACCOLA, HERVAL, *Matemática: volume 2*, São Paulo: Moderna, 1995.

[7] SANTOS, JOSÉ; MELLO, MARGARIDA; MURAÍ. IDANI, *Introdução à análise combinatória.*, São Paulo: Editora da UNICAMP, 1998.

[8] SANTOS, JOSÉ PLÍNIO ; ESTRADA, EDUARDO LUIS. *Problemas resolvidos de combinatória*, Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

[9] LIMA, ELON; CARVALHO, PAULO; WAGNER, EDUARDO; MORGADO, AUGUSTO. *A Matemática do Ensino Médio: Volume 4*, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

[10] EVES, HOWARD. *Introdução a Historia da Matemática 2.ed*, Campinas, Editora: Unicamp 1997.